A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK

KÖZLEMÉNYEI

XVI. KÖTET

AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST
1966

TARTALOMJEGYZÉK

A KÜLFÖLDI SZAKIRODALOMBÓL

INDEX

FROM THE FOREIGN LITERATURE

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK

KÖZLEMÉNYEI

XVI. KÖTET 1. SZÁM

AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST
1966

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK
KÖZLEMÉNYEI

XVI. kötet 1. szám

Szerkesztőség: Budapest, V., Nádor utca 7.

Kiadóhivatal: Budapest, V., Alkotmány utca 21.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei változó terjedelmű füzetekben jelenik meg és az Akadémia III. Osztályának felolvasóülésein bemutatott matematikai dolgozatokat, valamint egyéb dolgozatokat, referátumokat, továbbá az Osztály munkájára vonatkozó közleményeket, könyvismertetéseket stb. közöl. Évenként egy kötet jelenik meg (négy szám alkot egy kötetet).

Kéziratok a következő címre küldendők:

A Magyar Tudományos Akadémia
III. Osztályának Közleményei
Budapest, V., Nádor u. 7.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi levelezés.

Minden szerzőt 100 különlenyomat illet meg megjelent munkájáért.

Közlésre el nem fogadott kéziratokat a szerkesztőség lehetőleg visszajuttat a szerzőhöz, de felelősséget a beküldött kéziratok megőrzéséért vagy továbbításáért nem vállal.

A Közlemények előfizetési ára kötetenként belföldi címre 40 forint, külföldi címre 60 forint. Belföldi megrendelések az Akadémiai Kiadó, Budapest, V., Alkotmány u. 21 (Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 05-915-111-46), külföldi megrendelések a „Kultúra" Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalat, Budapest, I., Fő utca 32 (Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 43-790 057-181) útján eszközölhetők.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztálya a következő idegen nyelvű folyóiratokat adja ki:

1. Acta Mathematica Hungaricae,
2. Acta Physica Hungaricae.

TÖMEGKISZOLGÁLÁSI PROBLÉMÁKRÓL, II.

Írta: TOMKÓ JÓZSEF

Bevezetés

Az előző [1] dolgozatban egy egycsatornás kiszolgáló rendszerrel kapcsolatos kérdéseket vizsgáltunk. Feltételeztük, hogy a kiszolgálást végző készülék csak általában bizonyos véletlen hosszúságú időszakok folyamán munkaképes. A készülék meghibásodása után felújításra kerül, melynek befejeztével teljesen visszanyeri munkavégzőképességét. Aszerint, hogy a készülék meghibásodása, vagy foglaltsága mellett a rendszerbe érkezett igények milyen esetben vesznek el, két típust különböztettünk meg. Mindkettőnél kikötöttük, hogy a készülék meghibásodási pillanatában a rendszerben tartózkodó igények, majd még azok is, amelyek a javítási idő alatt érkeztek be, elvesznek, kiszolgálási követelményük kielégítése nélkül távoznak a rendszerből. Az alkalmazások körében viszont előfordulnak olyan szkémák is, amelyeknél a beérkezett igények csak a kiszolgálásuk teljes kielégítése után hagyják el a rendszert. Példaként megemlíthetjük az egyszemélyes információ szolgálatot, amelynél mind személyesen, mind telefonon keresztül nyerhetünk felvilágosítást. A telefonhívásoknak elsőbbséget adva (ezek beérkezési pillanatait tekintjük a készülék meghibásodásainak) és még néhány egyszerű, a valóságban tényleg meglevő feltételezés mellett az említett rendszer egy reális modelljét kapjuk.

a) Mielőtt a vizsgálandó rendszerünket pontosabban körülírnánk, felsoroljuk azokat a feltevéseket és jelöléseket, amelyeket [1] bevezetésében a készülék meghibásodásával kapcsolatban használtunk. Szükségünk lesz a készülék üzembiztonsági tartalékának fogalmára (ü. b. tart.), amelyen értjük azt az általában véletlen értékű, a készülék specifikus sajátosságának megfelelő anyagi tényezőt, amelynek kellő mértékű hiánya a készülék meghibásodását idézi elő. Feltételezzük, hogy a készülék ü. b. tart.-a mind a szabad, mind a munkaperiódusok folyamán az idővel arányosan $C=1$, ill. $C>1$ arányossági tényezővel csökken. A készülék javítása közvetlenül a meghibásodási pillanat után kezdődik s véletlen időtartamú. A készülék t pillanatbeli ü. b. tartalékát $\omega(t)$-vel fogjuk jelölni. Ha a t pillanatban a készülék javítás alatt van, akkor definíciószerűleg $\omega(t)$-t zérusnak vesszük. Az i-edik javítás kezdőpillanatát $\bar{r}_i$-sal, befejeződési pillanatát r_i-vel jelöljük. $i=0$ esetén ezek értelmezettek és $\bar{r}_0=0$, $r_0>0$, ha a $t=0$ pillanatban a készülék javítás alatt van. Legyenek most $\delta_i = r_i-\bar{r}_i$ $(i\geqq 0)$ (javítási idők), $\eta_i = \omega(r_i+0)$ $(i\geqq 0)$ ha r_0 értelmezett, míg más esetben $\eta_0=\omega(0)$ (η_i interpretálható úgy, mint az i-edik javítás során a készülékbe oltott ü. b. tartalék). Feltételezni fogjuk, hogy mind a δ_i-k, mind az η_i-k összességükben egymástól független valószínűségi változók s $i\geqq 1$ mellett $P\{\delta_i\leqq x\} = G(x)$ és $P\{\eta_i\leqq x\} = H(x)$.

b) Mármost ezen dolgozatban a következő egycsatornás kiszolgáló rendszert fogjuk vizsgálni. A készülék meghibásodásai s az ebből kifolyó javításai az előbb leírtak szerint mennek végbe. A rendszerbe az igények λ-paraméterű Poisson-folyamat szerint érkeznek. Az i-edik személy kiszolgálási idejét ξ_i-vel jelöljük, s feltételezzük, hogy ezek egymásközt, továbbá az érkezések, a javítások és a készülék ü. b. tartalékának folyamataitól is független $P\{\xi_i \leqq x\} = F(x)$ eloszlásfüggvényű valószínűségi változók. Eltérően az [1] dolgozatban tárgyaltaktól, most az igények a kiszolgálásuk teljes befejezéséig minden körülmények mellett a rendszerben maradnak. A kiszolgálási sorrenddel kapcsolatosan csupán annyit teszünk fel, hogy egy javítás befejeződése után azon kiszolgálás folytatására kerül sor, amely éppen a javítást kiváltó meghibásodás következtében szakadt félbe. Erre a megállapodásra csak akkor lesz szükségünk, amikor egy ilyen igénynek az ismételt kiszolgálási folyamatban való részvétele a megszakadt kiszolgálásnak mintegy folytatásaként megy végbe. A 3. §-ban egy útkeresztezési problémával kapcsolatosan olyan esettel lesz dolgunk, amikor az ismételt kiszolgálásban való részvétel a tényleges kiszolgálási időnek elölről való kezdése. Ez esetben a vizsgálandó karakterisztikánk szempontjából közömbös, hogy milyen a kiszolgálás sorrendje.

c) A dolgozat 1. §-ában a készülék meghibásodására vonatkozólag meglehetősen erősen mesterkélt feltételezéseket engedünk meg. Pontosabban azzal a kikötéssel fogunk élni, hogy a készülék a foglaltsági periódusok alatt nem romolhat el. A gyakorlatban ilyen követelményeknek megfelelő reális modellel nem igen találkozunk. Az ilyen rendszerek vizsgálatát lényegében az indokolja, hogy az általánosabb modell könnyen visszavezethető erre az egyszerűbbre.

A feltételeknek egy további megszorítására lesz még szükségünk, éspedig arra, hogy a készülék ü. b. tartalékát exponenciális eloszlásúnak kell tekintenünk. Ezáltal lényegében az [1] dolgozat bevezetésében említett illuzórikus kikötések feltételezésére szorítkozunk. Sajnos, más esetben csupán még bizonyos ergodicitási tulajdonságok igazolása is igen nehézkes.

A 2. §-ban az a) és b) pontok feltételeinek megfelelő egycsatornás rendszert vizsgálunk. Az egyszerűbb c) pontbeli esetre való visszavezetéssel meghatározzuk a rendszerben tartózkodó személyek számának a stacionárius rezsimre vonatkozó generátorfüggvényét. A 3. §-ban alkalmazásképpen egy útkeresztezési problémát tárgyalunk.

1. §. Teljes üzembiztonság a foglaltsági periódusok alatt

1. A STACIONÁRIUS REZSIM LÉTEZÉSÉNEK FELTÉTELE. Tekintsük az *a)*, *b)* és *c)* pontokban szereplő feltételeknek eleget tevő kiszolgáló rendszert. Az *a)* és *c)* követelmények együttes teljesülése azt eredményezi, hogy a kiszolgáló készülék csak szabad periódus alatt hibásodhat meg, s ha egy kiszolgálás elkezdődött, akkor az zavartalanul folyik le bármilyen legyen is az időtartama. Éppen emiatt a kiszolgálás sorrendje tetszőleges lehet. A $H(x)$ függvényt, amely most annak a valószínűsége, hogy ha a t pillanatban befejeződött egy foglaltsági periódus és a $t+x$ időpillanatig újabb igények nem érkeztek, akkor az utóbbi pillanatig a készülék meghibásodik, most $1-e^{-\alpha x}$-nek vesszük. Feltesszük még, hogy a javítási és kiszolgálási időtartamok véges β, ill. μ várható értékekkel rendelkeznek.

Jelölje $R_k(t)$, $(k \geqq 0)$ annak a valószínűségét, hogy a t pillanatban pontosan k igény tartózkodik a rendszerben. E pontban megvizsgáljuk, hogy milyen további feltételek mellett léteznek az

(1) $$R_k = \lim_{t\to\infty} R_k(t)$$

határvalószínűségek.

E célból tekintsük a

$$\gamma(t) = \{e(t), \mu(t), \xi(t)\}$$

sajátos módon felépített sztochasztikus folyamatot. Az első komponens két értéket vehet fel; $e(t)=0$ ha a t pillanatban a készülék javítás alatt van, s minden más esetben $e(t)=1$. $\mu(t)$ a rendszerben tartózkodó igények t pillanatbeli számát jelenti. A harmadik komponens értelme az $e(t)$ értékétől függően esetenként más és más. $e(t)=0$ mellett $\xi(t)$ a folyamatban levő javítás t időpillanatig eltelt részét jelenti. $e(t)=1$ esetben 0, ha a készülék szabad, míg ha a készülék foglalt, akkor a soron levő kiszolgálásnak a t időpillanatig vett részét adja meg.

Könnyen észrevehető, hogy az így értelmezett $\gamma(t)$ folyamat rekurrens sztochasztikus folyamat, melynek regenerációs pontjaiként tekinthetők azok a kiszolgálás és javítás-befejeződési pillanatok, amelyeknél a kiszolgáló készülék szabaddá válik. Legyen α_{i+1}, α_i két ilyen szomszédos pont. Továbbá, ε_α jelentse a készülék egy üzembiztonsági tartalékát, mely most számértékben megegyezik a készülék szabad periódusra vonatkozó élettartamával. Két igény egymásutáni érkezése közti időközt jelöljük ε_λ-val, majd $\zeta^{(n)}$ jelentse a készüléknek egy olyan foglaltsági periódusát, amelynek kezdeti pillanatában pontosan n igény tartózkodott a rendszerben. Feltételezéseink következtében ε_α, ε_λ exponenciális eloszlásúak α, ill. λ paraméterekkel, $\zeta^{(n)}$ pedig interpretálható n darab $\zeta^{(1)}$ típusú független valószínűségi változó összege gyanánt.

Értelmezzük most az elemi eseménytér következő részhalmazait (eseményeit):

$$A \equiv \{\varepsilon_\alpha > \varepsilon_\lambda\}$$

$$B_0 \equiv \{e_\alpha + \delta < \varepsilon_\lambda\}$$

....

$B_k \equiv \{\varepsilon_\alpha < \varepsilon_\lambda,\ \varepsilon_\alpha + \delta > \varepsilon_\lambda$ és a δ javítási idő alatt pontosan k igény érkezett a rendszerbe$\}$.

Mármost az $\alpha_{i+1} - \alpha_i$ a következőképpen adható meg:

$$\alpha_{i+1} - \alpha_i = \begin{cases} \varepsilon_\lambda + \zeta^{(1)} & \text{az } A \text{ halmazon,} \\ \varepsilon_\alpha + \delta & \text{a } B \text{ halmazon,} \\ \varepsilon_\alpha + \delta + \zeta^{(n)} & \text{a } B_n \text{ halmazon } (n \geqq 1). \end{cases}$$

Minthogy az $A, B_0, B_1, \ldots$ események teljes eseményrendszert alkotnak és

$$P(A) = \frac{\lambda}{\alpha+\lambda}$$

$$P(B_k) = \frac{\alpha}{\alpha+\lambda} \int_0^\infty e^{-\lambda u} \frac{(\lambda u)^k}{k!}\, dG(u) = \varrho_k, \qquad (k \geqq 0)$$

ezért

$$M\{\alpha_{i+1}-\alpha_i\} = \frac{\lambda}{\alpha+\lambda}(1/\lambda+M\zeta^{(1)})+\varrho_0(1/\alpha+\beta)+\sum_1^\infty \varrho_n(1/\alpha+\beta+nM\zeta^{(1)}).$$

Itt most $\sum_1^\infty n\varrho_n<\infty$, ezért $M\{\alpha_{i+1}-\alpha_i\}<\infty$ teljesüléséhez csupán $M\zeta^{(1)}<\infty$ szükséges. Ismeretes, hogy az utóbbi követelmény akkor és csak akkor teljesül, ha

$$\lambda\int_0^\infty x\,dF(x) = \lambda\mu<1. \tag{2}$$

Tekintsük ezekután az alábbi valószínűségeket:

$$Q_k(y;t)=P\{e(t)=0,\ \mu(t)=k,\ \xi(t)\leqq y\},\qquad (k\geqq 0)$$

$$P_0(t)=P\{e(t)=1,\mu(t)=0\}$$

$$P_k(x;t)=P\{e(t)=1,\ \mu(t)=k,\ \xi(t)\leqq x\}\qquad (k\geqq 1).$$

Ugyanazokkal a meggondolásokkal, amelyeket az [1] dolgozat 1. §-ának 4. pontjában alkalmaztunk, verifikálható, hogy az $M\zeta^{(1)}<\infty$ feltétel mellett a $\gamma(t)$ folyamat ergodikus. Ennek értelmében a $\gamma(0)$ tetszőleges eloszlása mellett, azaz a $Q_k(y;0)$ $P_0(0)$ és a $P_k(x;0)$ függvények bármely, a pozitivitás és a monotonitás követelményének, továbbá a $P_0(0)+Q_0(\infty;0)+\sum_1^\infty[Q_k(\infty;0)+P_k(\infty;0)] = 1$ normálási feltételnek eleget tevő választása mellett léteznek a

$$Q_k(y) = \lim_{t\to\infty} Q_k(y;t),$$

$$P_0 = \lim_{t\to\infty} P_0(t),$$

$$P_k(x) = \lim_{t\to\infty} P_k(x;t)$$

határvalószínűségek. Eredményünket a következőképpen foglalhatjuk össze:

1. Tétel. *A* (2) *feltétel mellett a $\gamma(t)$ folyamat ergodikus, azaz léteznek a* (3) *alatti, s ebből kifolyólag az* (1) *határvalószínűségek.*

2. Az R_k valószínűségek meghatározása. A következőkben feltételezzük, hogy a $\gamma(t)$ folyamat ergodikus eloszlása bizonyos „simasági" tulajdonságokkal rendelkezik. Ezen azt értjük, hogy léteznek a

$$\begin{cases} q_k(x) = \dfrac{\partial Q_k(x)}{\partial x}, & (k\geqq 0) \\ p_k(x) = \dfrac{\partial P_k(x)}{\partial x} & (k\geqq 1) \end{cases} \tag{4}$$

deriváltak. Az [1] dolgozat 1. §-ában szereplő meggondolásoknak a jelen esetünkre való megismétlésével könnyen meggyőződhetünk arról, hogy az előbbi feltétel nem jelenti az általánosság további megszorítását.

Szokásos módon, ahogyan ezt az [1] 1. §-ában tettük, megkeresve azon átmenetek valószínűségeit, amelyek a $\gamma(t)$ folyamatban kis Δ időtartam alatt végbemehetnek, a (3) alatti P_0 és a (4) sűrűségfüggvényekre az alábbi összefüggéseket nyerjük:

$$P_0 = P_0[1-(\lambda+\alpha)\Delta]+\int_0^\infty q_0(y)\Delta\frac{dG(y)}{1-G(y)}+\int_0^\infty p_1(x)\Delta\frac{dF(x)}{1-F(x)}+o(\Delta),$$

$$q_0(y+\Delta) = q_0(y)(1-\lambda\Delta)\frac{1-G(y+\Delta)}{1-G(y)}+o(\Delta)$$

$(k\geqq 1)$-re:

$$q_k(y+\Delta) = q_k(y)(1-\lambda\Delta)\frac{1-G(y+\Delta)}{1-G(y)}+\lambda\Delta q_{k-1}(y)\frac{1-G(y+\Delta)}{1-G(y)}+o(\Delta)$$

$$p_1(x+\Delta) = p_1(x)(1-\lambda\Delta)\frac{1-F(x+\Delta)}{1-F(x)}+o(\Delta).$$

$k\geqq 2$-re:

$$p_k(x+\Delta) = p_k(x)(1-\lambda\Delta)\frac{1-F(x+\Delta)}{1-F(x)}+\lambda\Delta p_{k-1}(x)\frac{1-F(x+\Delta)}{1-F(x)}+o(\Delta).$$

$$q_0(0)\Delta = P_0\alpha\Delta+o(\Delta); \qquad q_k(0)\equiv 0 \qquad (k\geqq 1)$$

$$p_1(0)\Delta = \lambda\Delta P_0+\int_0^\infty p_2(x)\Delta\frac{dF(x)}{1-F(x)}+\int_0^\infty q_1(x)\Delta\frac{dG(x)}{1-G(x)}+o(\Delta).$$

$k\geqq 2$-re

$$p_k(0)\Delta = \int_0^\infty q_k(y)\frac{dG(y)}{1-G(y)}+\int_0^\infty p_{k+1}(x)\Delta\frac{dF(x)}{1-F(x)}+o(\Delta).$$

Innen a $\Delta\to 0$ határátmenet elvégzése után a

$$q_k^*(y) = \frac{q_k(y)}{1-G(y)} \quad (k\geqq 0), \qquad p_k^*(x) = \frac{p_k(x)}{1-F(x)} \quad (k\geqq 1)$$

normált mennyiségekre a következő differenciál-egyenletrendszert nyerjük:

$$(5) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial q_0^*}{\partial y} = \lambda q_0^* = 0 \\ \dfrac{\partial q_k^*}{\partial y}+\lambda(q_k^*-q_{k-1}^*) = 0 \qquad (k\geqq 1) \end{cases}$$

$$(6) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial p_1^*}{\partial x} = \lambda p_1^* = 0 \\ \dfrac{\partial p_k^*}{\partial x}+\lambda(p_k^*-p_{k-1}^*) = 0 \qquad (k\geqq 2). \end{cases}$$

A peremfeltételeket az alábbi egyenletek írják le:

$$
(7)\qquad
\begin{cases}
P_0 = \dfrac{1}{\alpha+\lambda}\left\{\displaystyle\int_0^\infty q_0^*(y)\,dG(y) + \int_0^\infty p_1^*(x)\,dF(x)\right\}\\[2ex]
q_0^*(0) = \alpha P_0, \qquad q_k^*(0) \equiv 0 \qquad (k \geqq 1)\\[2ex]
p_1^*(0) = \lambda P_0 + \displaystyle\int_0^\infty p_2^*(x)\,dF(x) + \int_0^\infty q_1^*(y)\,dG(y).\\[2ex]
k \geqq 2\text{-re:}\\[2ex]
p_k^*(0) = \displaystyle\int_0^\infty q_k^*(y)\,dG(y) + \int_0^\infty p_{k+1}^*(x)\,dF(x).
\end{cases}
$$

Vezessük most be a

$$
Q(y,z) = \sum_{k=0}^\infty q_k^*(y) z^k, \qquad P(x,z) = \sum_{k=1}^\infty p_k^*(x) z^k
$$

generátorfüggvényeket. (5) és (6) alapján

$$
\frac{\partial Q}{\partial y} + \lambda(1-z)Q = 0, \qquad \frac{\partial P}{\partial x} + \lambda(1-z)P = 0,
$$

következésképpen

$$
(8)\qquad Q(y,z) = Q(0,z)e^{-\lambda(1-z)y}, \qquad P(x,z) = P(0,z)e^{-\lambda(1-z)x}.
$$

A $Q(0,z)$ és $P(0,z)$ mennyiségeket a (7) peremfeltételekből határozhatjuk meg. Az alábbi eredményre jutunk:

$$
\begin{aligned}
Q(0,z) &= \alpha P_0,\\
P(0,z) &= \sum_1^\infty p_k^*(0) z^k = \lambda P_0 z +\\
&+ \sum_1^\infty z^k \int_0^\infty q_k^*(y)\,dG(y) + \sum_1^\infty z^k \int_0^\infty p_{k+1}^*(x)\,dF(x) =\\
&= \lambda P_0 z + \int_0^\infty [Q(y,z) - q_0^*(y)]\,dG(y) +\\
&+ \frac{1}{z}\int_0^\infty [P(x,z) - p_1^*(x)z]\,dF(x) =\\
&= \lambda P_0 z + \int_0^\infty Q(y,z)\,dG(y) + \frac{1}{z}\int_0^\infty P(x,z)\,dF(x) -\\
&- \int_0^\infty q_0^*(y)\,dG(y) - \int_0^\infty p_1^*(x)\,dF(x).
\end{aligned}
$$

Innen (7) és (8) szerint

$$P(0, z) = P_0[\lambda(1-z)-\alpha]+\alpha P_0 \int_0^\infty e^{-\lambda(1-z)y}\, dG(y)+P_0(0, z)\frac{1}{z}\int_0^\infty e^{-\lambda(1-z)x}\, dF(x)'$$

azaz

$$P(0, z) = \frac{P_0\{\lambda(z-1)-\alpha[1-\chi(\lambda(1-z))]\}}{1-\frac{1}{z}\,\Phi[\lambda(1-z)]},$$

ahol

$$\chi(s) = \int_0^\infty e^{-su}\, dG(u), \qquad \Phi(s) = \int_0^\infty e^{-su}\, dF(u).$$

Mármost könnyű bebizonyítani az alábbi tételt:

2. TÉTEL. *Legyen* $\varrho=\lambda\mu=\lambda\int_0^\infty x dF(x)<1$, *továbbá legyen a stacionárius üzemeltetés mellett;*

P_k — *annak a valószínűsége, hogy a készülék üzemképes és a rendszerben k igény tartózkodik*

Q_k — *annak a valószínűsége, hogy a készülék javítás alatt van és a rendszerben k igény halmozódott fel* ($k\geqq 0$); *végül legyen*

$$R_k = P_k+Q_k.$$

Ekkor

$$P_0 = \frac{1-\varrho}{1+\alpha\beta} \tag{9}$$

$$\sum_{k=0}^\infty P_k z^k = P_0\frac{\lambda(1-z)^2\Phi[\lambda(1-z)]+z\alpha\{1-\chi[\lambda(1-z)]\}\{1-\Phi[\lambda(1-z)]\}}{\lambda(1-z)\{\Phi[\lambda(1-z)]-z\}} \tag{10}$$

$$\sum_{k=0}^\infty Q_k z^k = \alpha P_0\frac{1-\chi[\lambda(1-z)]}{\lambda(1-z)}. \tag{11}$$

Következésképpen a stacionárius rezsim mellett a rendszerben tartózkodó igények számának generátorfüggvénye

$$\sum_{k=1}^\infty R_k z^k = P_0\frac{\{\lambda(1-z)+\alpha(1-\chi[\lambda(1-z)])\}\Phi[\lambda(1-z)]}{\lambda\{\Phi[\lambda(1-z)]-z\}}. \tag{12}$$

Bizonyítás: (8) első felének felhasználásával (11) közvetlenül adódik a

$$\sum_{k=0}^\infty Q_k z^k = \int_0^\infty Q(y, z)\,[1-G(y)]\,dy$$

előállításból. Ugyancsak, figyelembe véve (8) második felét,

$$\sum_{k=1}^{\infty} P_k z^k = \int_0^{\infty} P(x, z)[1-F(x)]\,dx = P(0, z)\int_0^{\infty} e^{-\lambda(1-z)x}[1-F(x)]\,dx =$$

$$= P(0, z)\frac{1-\Phi[\lambda(1-z)]}{\lambda(1-z)},$$

s (9)-re való tekintettel egyszerű átalakítások után kapjuk (10)-et. (9) a $\sum_{0}^{\infty} R_k = 1$ normálási feltételből adódik.

(12) felhasználható a rendszerben tartózkodó igények száma átlagértékének a meghatározásánál. Feltételezve, hogy a

$$\beta_2 = \int_0^{\infty} x^2\,dG(x) \quad \text{és a} \quad \mu_2 = \int_0^{\infty} x^2\,dF(x)$$

második momentumok végesek, véve (12) mindkét oldalának z szerinti deriváltját, majd a $z \to 1$ határátmenet elvégzése után kapjuk, hogy az említett várható érték,

$$M\mu(t) = \varrho + \frac{\alpha\lambda\beta_2}{2(1+\alpha\beta)} + \frac{\lambda^2\mu_2}{2(1-\varrho)}. \tag{13}$$

3. VÁRAKOZÁSI IDŐ. Ha a kiszolgálás — előbb érkezett előbb rendel — elv szerint történik, akkor a t pillanatban érkező személy $W(t)$ várakozási idejével kapcsolatosan az alábbi tétel áll fenn (lásd I. N. KOVALENKO [6] 60. old.):

3. TÉTEL. *Bármilyen legyen is a $\gamma(t)$ folyamat kezdő állapota, a*

$$\lim_{t\to\infty} P\{W(t) \leqq x\} = V(x)$$

határfüggvény mindig létezik. $\varrho \geqq 1$ mellett $V(x) \equiv 0$, míg $\varrho < 1$ esetén $V(x)$ valódi eloszlásfüggvény, melynek Laplace—Stieltjes-transzformáltja

$$\bar{V}(s) = \frac{\alpha(1-\varrho)}{(s+\alpha)(1+\alpha\beta)} + \Phi_1(s),$$

ahol

$$\Phi_1(s) = \frac{(1-\varrho)\{\lambda[1-\Phi(s)] + \alpha[1-\chi(s)]\}}{\{s-\lambda[1-\Phi(s)]\}(1+\alpha\beta)}.$$

2. §. Az általános, az ü. b. tartalék folytonos csökkenésének esete

1. A következőkben szükségünk lesz az alábbi lemmára:

LEMMA. *Legyenek ξ, η_i, $\delta_i^{(1)}$ $(i \geqq 1)$ kölcsönösen független nemnegatív valószínűségi változók*

$$P\{\xi \leqq x\} = F(x), \quad P\{\eta_i \leqq x\} = H(x)$$

és

$$P\{\delta_i^{(1)} \leqq x\} = G_1(x)$$

eloszlásfüggvényekkel. Értelmezzük a N és ζ változókat az alábbi módon:

(14) $$N = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad \xi < \eta_1 \\ n, & \text{ha} \quad \sum_1^n \eta_i \leqq \xi < \sum_1^{n+1} \eta_i \end{cases}$$

és

$$\zeta = \begin{cases} \xi, & \text{ha} \quad N=0 \\ (\eta_1+\delta_1^{(1)})+\ldots+(\eta_n+\delta_n^{(1)})+\left(\xi-\sum_1^n \eta_i\right) = \xi+\sum_1^n \delta_j^{(1)}, & \text{ha} \quad N=n. \end{cases}$$

Ekkor

(15) $$U(z) = P\{\zeta \leqq z\} = \int_0^z \sum_0^\infty P_n(x)\, G_1^{*(n)}(z-x)\, dF(x)$$

és $\operatorname{Re} p > \alpha > 0$ *mellett*

(16) $$\int_0^\infty e^{-pz}\, dU(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \Phi(p-s) \frac{1-\Psi(s)}{s[1-\Psi(s)\chi_1(s)]}\, ds,$$

ahol $P_n(x) = H^{*(n)} - H^{*(n+1)}(x)$, Φ, Ψ *és* χ_1 *pedig megfelelően az* F, H *és* G_1 *eloszlások Laplace—Stieltjes-transzformáltjai.*

Bizonyítás. (15) következik a

(17) $$P\{N = n/\xi = x\} = \int_0^x [1-H(x-y)]\, dH_{(y)}^{*(n)} = P_n(x)$$

és a

(18) $$P\{\zeta \leqq z/\xi = x\} = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad z < x \\ \sum_0^\infty P_n(x) P\left\{\sum_1^n \delta_j^{(1)} \leqq z-x\right\} = \\ = \sum_0^\infty P_n(x) G_1^{*(n)}(z-x), & \text{ha} \quad x \leqq z \end{cases}$$

relációkból. Valóban, integrálva (18)-at $dF(x)$ szerint, kapjuk (15)-öt. (16) igazolásához tekintsük a

$$D_n(x) = \int_0^x P_n(u)\, dF(u) \quad \text{és} \quad \bar{D}_n(s) = \int_0^\infty e^{-su}\, dD_n(u)$$

mennyiségeket. Ekkor

$$\bar{D}_n(s) = \int_0^\infty e^{-su} P_n(u)\, dF(u),$$

majd a Laplace—Stieltjes-transzformáltakra vonatkozó ismert formula alapján nyerjük, hogy $\operatorname{Re} p > \alpha > 0$ mellett

$$\bar{D}_n(p) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \frac{\Psi^n(s)-\Psi_{(s)}^{n+1}}{s} \Phi(p-s)\, ds.$$

Minthogy pedig

$$\int_0^\infty e^{-pz}\,dU(z) = \sum_{n=0}^\infty \chi_1^n(p)\,\bar{D}_n(p),$$

ezért

$$\int_0^\infty e^{-pz}\,dU(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \Phi(p-s)\frac{1-\psi(s)}{s}\left(\sum_{n=0}^\infty \psi_{(s)}^n \chi_1^n(p)\right) ds =$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \Phi(p-s)\frac{1-\psi(s)}{s[1-\psi(s)\chi_1(p)]}\,ds.$$

Ezzel lemmánkat igazoltuk.

2. AZ ÁLTALÁNOS ESET VISSZAVEZETÉSE AZ ELŐBBI EGYSZERŰBBRE. Tekintsük most a bevezetésben szereplő *a)* és *b)* pontbeli feltételek által körülírt egycsatornás kiszolgáló rendszert. Most a kiszolgáló készülék ü. b. tartaléka a munkaperiódusok folyamán is csökken, s előfordulhat egy kiszolgálás alatt is a készülék meghibásodása. E pontban azt az esetet fogjuk tárgyalni, amikor egy ilyen meghibásodás következtében megszakadt kiszolgálás a javítási munka befejeződése után elsőbbséggel rendelkezve folytatódik. Továbbra is a rendszerben tartózkodó igények számának eloszlásával foglalkozunk. Az előző § eredményeinek felhasználásával könnyen meghatározható ez az eloszlás, csupán a kiszolgálási időt kell megfelelőképpen interpretálnunk. Éspedig, egy igény kiszolgálási idején azt az időtartamot kell értenünk, amelyet az igény a kiszolgálásának kezdetétől, annak teljes befejezéséig a rendszerben tölt. Tehát most a kiszolgálási időbe beszámítjuk azoknak a javításoknak az időtartamait is, amelyekre a szóban forgó igény kiszolgálása folyamán létrejött meghibásodások következtében volt szükség. Jelöljük most ezt az újabb értelemben vett kiszolgálási időt ζ-val. Világos, hogy

$$\zeta = \begin{cases} \xi, & \text{ha } N=0; \\ (\eta_1+\delta_1^{(1)})+\dots+(\eta_n+\delta_n^{(1)})+\left(\xi-\sum_1^n \eta_j\right) = \xi+\sum_1^n \delta_j^{(1)}, & \text{ha } N=n, \end{cases}$$

ahol η_i-k a készülék foglaltsági periódusra vonatkozó élettartamai, $\delta_i^{(1)}$-k a munka közben történt meghibásodások utáni javítási idők (megengedhető, hogy ezek és a szabad periódus alatt bekövetkező meghibásodások utáni javítási idők különböző eloszlással rendelkezzenek), N pedig az η_i-kkel és a közönséges értelemben vett ξ kiszolgálási idővel (13) alapján értelmezett nemnegatív egész értékű valószínűségi változó. Feltételezéseink, és az előző pontbeli lemma alapján

$$U(z) = P\{\zeta \leqq z\} = \int_0^z \sum_{n=0}^\infty G_1^{*(n)}(z-x)\frac{(c\alpha x)^n}{n!}e^{-c\alpha x}\,dF(x)$$

és

$$\varphi(s) = \int_0^\infty e^{-sz}\,dU(z) = \Phi\{s+c\alpha[1-\chi_1(s)]\}, \tag{19}$$

ahol χ_1 a $\delta^{(1)}$ javítási idők közös G_1 eloszlásának Laplace—Stieltjes-transzformáltja. (19)-ből könnyen meghatározhatjuk az $M\zeta$ várható értéket. Véve a (19)-nek az $s=0$ helyhez tartozó deriváltját, kapjuk, hogy

$$M\zeta = -\varphi'(0) = -\Phi'(0)[1-c\alpha\chi_1'(0)]. \tag{20}$$

Mármost, ha az előző § mennyiségeit szükség szerint az új értelemben vett kiszolgálási időnek megfelelően módosítjuk, akkor a 2. tétel alapján a következő eredményre jutunk:

4. TÉTEL.
$$\varrho^* = -\lambda\Phi'(0)[1-c\alpha\chi_1'(0)] = \varrho(1+c\alpha\beta^{(1)}) < 1$$

mellett létezik a rendszerben tartózkodó igények számának stacionárius eloszlása, melynek generátorfüggvényét a

$$\sum_{k=0}^{\infty} R_k^* z^k = \frac{1-\varrho^*}{1+\alpha\beta} \frac{\{\lambda(1-z)+\alpha(1-\chi[\lambda(1-z)])\}\Phi[\lambda(1-z)+c\alpha(1-\chi_1[\lambda(1-z)])]}{\lambda\{\Phi[\lambda(1-z)+c\alpha(1-\chi_1[\lambda(1-z)])]-z\}}$$

formula szolgáltatja.

A $\varrho^*<1$ és a $\beta_2 = \int_0^\infty x^2 dG(x)$, $\mu_2 = \int_0^\infty x^2 dF(x)$, $\beta_2^{(1)} = \int_0^\infty x^2 dG_1(x)$ második momentumok létezése esetén meghatározható az R_k^* eloszlás várható értéke. Kapjuk, hogy

$$\sum_1^{\infty} nR_n^* = \varrho^* + \frac{\alpha\lambda\chi''(0)}{2(1+\alpha\beta)} + \lambda^2 \frac{c\alpha\mu\beta_2^{(1)} + (1+c\alpha\beta_1^{(1)})^2\mu_2}{2(1-\varrho^*)}.$$

A tárgyalt általános esetre vonatkozó várakozási idő eloszlása a 3. tétel alapján adható meg. Szükséges ugyan bizonyos mennyiségek módosítása, de az előzőkből világos, hogy milyeneknek is kell ezeknek lenniök.

3. §. Egy útkereszteződési probléma

Tekintsük két útvonal kereszteződését. Tételezzük fel, hogy az egyik útvonalon haladó járművek az útkereszteződésnél elsőbbséggel rendelkeznek a másik úton közlekedő járművek előtt. Ennélfogva a mellékútvonalon a kereszteződéshez érkező járművek sok esetben várakozni kénytelenek, s kialakul egy főútvonalon áthaladni óhajtó gépkocsik sora. Ha a főútvonalon kétirányú közlekedés van, és lehetséges a mellékútvonalról a főútvonal mindkét irányú forgalmába való bekapcsolódás, akkor a várakozó járműveket két sorba kell rendelnünk. Az egyikhez a jobb-, a másikhoz pedig a balirányú bekanyarodásra várakozó járművek tartoznak. A főútvonalon csupán áthaladni szándékozó járműveket a balirányú forgalomra várakozókhoz sorolhatjuk. Mindvégig feltételezni fogjuk, hogy a mellékútvonalon csak egyirányú közlekedés van. Ellenkező esetben a probléma túlságosan bonyolódik. Célunk utalni arra, hogyan határozható meg az útkereszteződésnél kialakuló sor generátorfüggvénye. A további feltételezéseink a következők lesznek:

a) A főútvonalon haladó járművek karavánokat alkotnak. Az egyes karavánokban résztvevő gépkocsik számai ν_i-k függetlenek s azonos $P\{\nu_i=k\}=p_k$ $(k\geqq 1)$ eloszlásúak. A járművek közti kötelező távolság b, következésképpen az i-edik karaván minden pillanatban $\nu_i b$ hosszú szakaszát foglalja le az útvonalnak. Az egyes karavánok közti hézagok η_i-k, független s azonos α paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változók. A járművek azonos sebességgel haladnak. Az általánosság megszorítása nélkül ezt a sebességet egységnyinek választhatjuk. Ekkor az i-edik karaván az útkereszteződés előtt $\nu_i b$ idő alatt halad el.

b) A mellékútvonalon az útkereszteződéshez érkező járművek áramlatát λ paraméterű homogén Poisson-folyamattal közelítjük. Egy jármű a főútvonal jobbirányú közlekedésébe a_1 idő alatt kapcsolódhat be, míg a balirányú befordulásához, avagy a főútvonal átszeléséhez a_2 idő szükséges.

Jelölje most megfelelően r_k és q_k annak a valószínűségét, hogy a jobb-, ill. a balirányú bekanyarodásra várakozó járművek száma k. Feladatunk az $r(z)=\sum_1^\infty r_k z^k$ és a $q(z)=\sum_1^\infty q_k z^k$ generátorfüggvények meghatározása.

1. EGYIRÁNYÚ KÖZLEKEDÉS A FŐÚTVONALON. Ebben a pontban feltételezzük, hogy a főútvonalon csak egyirányú közlekedés van. A mellékútvonalról a kereszteződésen való áthaladás ideje többé-kevésbé megegyezik a főútvonal forgalmába való bekapcsolódás idejével. Ezért a továbbiakban mindig az utóbbiról fogunk beszélni. Feladatunk az $r(z)$ generátorfüggvény megkeresése, az előző §-ok eredményeinek felhasználásával oldható meg. Észrevehető ugyanis, hogy az útkereszteződés felfogható az általunk tárgyalt meghibásodható készülékű egycsatornás kiszolgáló rendszerként. A készülék meghibásodásaiként az útkereszteződésnek a főútvonalon haladó karavánok által történő elzárásait tekintjük. A javítási idők a karavánoknak a kereszteződésen való áthaladási idejei lesznek. A rendszerbe érkező igényeket a mellékútvonalról az útkereszteződéshez befutó járművek alkotják, s ezek kiszolgálási idői a főútvonalra való áttéréshez szükséges a_1 konstans időtartamok. Különbség az előző §-hoz képest csupán az, hogy most egy megszakadt kiszolgálás a megfelelő javítási idő lejárta után nem folytatódik, hanem elölről kezdődik. Ugyanis, egy karavánnak az útkereszteződésen való áthaladása után csak az esetben fordulhat a főútvonalra egy jármű, ha a következő karaván a_1-nél nagyobb idő múlva jelenik meg az útkereszteződésnél. Ha ez az idő viszont a_1-nél kisebb, akkor a soronkövetkező várakozó jármű meg se kísérli a bekanyarodást. Meg kell változtatnunk tehát a 2. §-beli módosított kiszolgálási idő értelmét. Most a

$$\zeta^*=\begin{cases} a_1, & \text{ha } N=0\\ \sum_1^n(\eta_i+\delta_i)+a_1, & \text{ha } N=n\end{cases}$$

mennyiséget kell a kiszolgálási időnek venni, ahol N olyan, hogy

$$\{N=n\}=\{\eta_i<a_1;\ i=1,2,\dots n,\ \eta_{n+1}\geqq a_1\}.$$

Szükségünk lesz a ζ^* Laplace—Stieltjes-transzformáltjára, amelyet a következőképpen határozhatunk meg:

$$Me^{-s\zeta^*} = \sum_{n=0}^{\infty} M\{e^{-s\zeta^*}/N = n\} P\{N = n\} =$$

$$(21) \qquad = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-sa_1}\chi^h(s)\left(\int_0^{a_1} e^{-su}\frac{\alpha e^{-su}}{1-e^{-\alpha a_1}}du\right)^n (1-e^{-\alpha a_1})^n e^{-\alpha a_1} =$$

$$= e^{-\alpha(s+a_1)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha}{s+\alpha}\chi^h(s)[1-e^{-a_1(s+\alpha)}]^n = \frac{e^{-a_1(s+\alpha)}}{1-\frac{\alpha}{s+\alpha}\chi(s)[1-e^{-a_1(s+\alpha)}]}.$$

Innen a szokásos úton nyerjük az

$$M\zeta^* = \frac{(1-e^{-a_1\alpha})\left(-a_1e^{-a_1\alpha}-\chi'(0)e^{-a_1\alpha}+\frac{1}{\alpha}\right)}{e^{-2a_1\alpha}}$$

várható értéket. Minthogy esetünkben $\delta_i = v_i b$, ezért $-\chi'(0) = bMv_i$ s a stacionárius rezsim bekövetkezik, ha

$$\lambda M\zeta^* = \lambda(e^{\alpha a_1}-1)\left(bMv_i - a_1 + \frac{e^{\alpha a_1}}{\alpha}\right) < 1.$$

Mármost, ha a (12)-es formulában a Φ transzformáltat (21)-gyel helyettesítjük, megkapjuk az útkereszteződésnél várakozó járművek stacionárius esetre vonatkozó generátorfüggvényét. A sorbanálló gépkocsik átlagértékének meghatározása (13) alapján történhet. Itt most ϱ-t $\lambda M\zeta^*$-gal, β, β_2-t $\beta^* = b\sum_1^{\infty} kp_k$ ill. $\beta_2^* = b^2\sum_1^{\infty} k^2p_k$-val, míg μ_2-t $M\zeta^{*2}$-tel kell helyettesíteni, ahol az utóbbi $M\zeta^{*2}$ (21) kétszeri differenciálása után, vagy annak levezetésénél alkalmazott eljárással nyerhető. Végül megjegyezzük még, hogy egy jármű várakozási idejével kapcsolatos karakterisztikák a megfelelő helyettesítések elvégzése után a 3. tétel alapján határozhatók meg.

2. Kétirányú forgalom a főútvonalon. Amint már erről említést tettünk, a főútvonal kétirányú közlekedése esetén a mellékútvonalon várakozó járművek közt két sort kell megkülönböztetnünk. A jobbirányú bekanyarodásra várakozók számával kapcsolatos karakterisztikák megadása az előző pontban tárgyaltak alapján lehetséges. Hasonlóan járhatunk el akkor is, ha a balirányú forgalomba bekapcsolódni szándékozó járművekről van szó. A különbség csupán az, hogy a balrakanyarodás általában ritkábban és rövidebb időtartamok alatt lehetséges. Világos, hogy az utóbbi időtartamok, tehát azok, amelyek folyamán esetleg lehetséges balrakanyarodás, 2α paraméterű exponenciális eloszlásúak. Kicsit nehezebb meghatározni azoknak az időszakaszoknak az eloszlástörvényét, amelyek folyamán az útkereszteződésnél balrakanyarodás nem lehetséges. Lényegében a következő problémával találjuk magunkat szemben.

Legyenek $\eta_i, \eta_i^*; \delta_i, \delta_i^*$ $(i \geqq 1)$ kölcsönösen független nemnegatív valószínűségi változók sorozatai

$$P\{\eta_i \leqq x\} = P\{\eta_i^* \leqq x\} = 1 - e^{-\alpha x}$$

és

$$P\{\delta_i \leqq x\} = P\{\delta_i^* \leqq x\} = G(x)$$

eloszlásfüggvényekkel. Tekintsük ezekután az $\{\eta_i + \delta_i\}$ és az $\{\eta_i^* + \delta_i^*\}$ változókkal értelmezett I, ill. I^* felújítási folyamatokat. $U(t)$ és $U^*(t)$ legyenek megfelelően az I, ill. az I^* folyamatokban a t ideig történt felújítások várható értékei. Értelmezzük továbbá a következő változókat:

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} 1, & \text{ha az } I \text{ folyamatban a } t \text{ időpont az } \eta_i \text{ változók valamelyikével van lefedve;} \\ 0, & \text{máskor.} \end{cases}$$

Hasonlóan értelmezzük az I^* folyamatnak megfelelő $\varepsilon^*(t)$ mennyiséget, majd legyen

$$\tilde{\varepsilon}(t) = \varepsilon(t) \cdot \varepsilon^*(t).$$

Az így értelmezett $\tilde{\varepsilon}(t)$ időszakaszonként hol 1, hol 0 értéket vesz fel $(\tilde{\varepsilon}(0) = 1)$, s jelöljük ezeket az időtartamokat megfelelően $\tilde{\eta}_i$, ill. $\tilde{\delta}_i$-sal. Világos, minthogy az η_i, η_i^* $(i \geqq 1)$ változók exponenciális eloszlásúak, ezért $\tilde{\eta}_i$ eloszlása is exponenciális (pontosabban $P\{\tilde{\eta}_i \leqq x\} = 1 - e^{-2\alpha x}$). Problématikus viszont a $\tilde{\delta}_i$ eloszlástörvényének a megkeresése. Ez a következőképpen lehetséges:[1] Az $\{\tilde{\eta}_i + \tilde{\delta}_i\}$ változók sorozatával értelmezzük az $\tilde{I}$ felújítási folyamatot, $\tilde{U}(t)$-vel jelöljük az e folyamatban a t ideig történt felújítások számának várható értékét. Vezessük még be a következő valószínűségeket:

$$p(t) = P\{\varepsilon(t) = 1\}, \quad p^*(t) = P\{\varepsilon^*(t) = 1\}$$

$$\tilde{p}(t) = P\{\tilde{\varepsilon}(t) = 1\}.$$

Ismeretes, hogy ezek a valószínűségek a megfelelő $U(t)$, $U^*(t)$ ill. $\tilde{U}(t)$ függvényekkel az alábbi módon függnek össze:

Először is

$$p(t) = p^*(t) \quad \text{és} \quad U(t) = U^*(t),$$

továbbá

$$p(t) = \int_0^t e^{-\alpha(t-x)}\, dU(x) \tag{22}$$

és

$$\tilde{p}(t) = \int_0^t e^{-2\alpha(t-x)}\, d\tilde{U}(x). \tag{23}$$

Minthogy pedig az I és I^* felújítási folyamatok függetlenek, ezért

$$\tilde{p}(t) = p(t) p^*(t) = p^2(t). \tag{24}$$

[1] Az itt vázolt eljárásra A. D. SZALAVJOV hívta fel a szerző figyelmét.

Áttérve most a Laplace-, ill. a Laplace—Stieltjes-transzformáltakra, a (24) összefüggés az $Me^{-s\tilde{\delta}_i}$ meghatározásánál a következőképpen használható fel: Legyenek

$$\chi(s) = Me^{-s\delta_i}, \qquad \Lambda(s) = \int_0^\infty e^{-st}\,dU(t),$$

$$\pi(s) = \int_0^\infty p(t)e^{-st}\,dt, \qquad \tilde{\chi}(s) = Me^{-s\tilde{\delta}_i},$$

$$\tilde{\Lambda}(s) = \int_0^\infty e^{-st}\,d\tilde{U}(t), \qquad \tilde{\pi}(s) = \int_0^\infty e^{-st}\,\tilde{p}(t)\,dt.$$

Ekkor

$$\Lambda(s) = \frac{\alpha\chi(s)}{s+\alpha[1-\chi(s)]},$$

$$\tilde{\Lambda}(s) = \frac{2\alpha\tilde{\chi}(s)}{s+2\alpha[1-\tilde{\chi}(s)]}.$$

Innen (22) és (23)-ra való tekintettel

$$\pi(s) = \frac{\alpha}{s+\alpha}\chi(s)\frac{1}{s+\alpha[1-\chi(s)]},$$

$$\tilde{\pi}(s) = \frac{2\alpha}{s+2\alpha}\tilde{\chi}(s)\frac{1}{s+2\alpha[1-\tilde{\chi}(s)]}. \tag{25}$$

Viszont (24)-ből kifolyólag tetszőleges $\operatorname{Re} s > c > 0$ mellett

$$\tilde{\pi}(s) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \pi(s-\sigma)\pi(\sigma)\,d\sigma,$$

s gyakorlatilag ennek és (25)-nek alapján $\tilde{\chi}(s)$ meghatározható.

Visszatérve most az eredeti problémánkhoz, ha η_i-k a jobbirányú, η_i^*-ok a balirányú közlekedésben haladó karavánok közti hézagokat, δ_i-k, ill. a δ_i^*-ok pedig a megfelelő karavánok által lefoglalt útszakaszokat jelentik, akkor $\tilde{\eta}_i$-ok a balirányú bekanyarodásra alkalmas időszakaszokat, $\tilde{\delta}_i$-ok pedig azokat az időperiódusok hosszait jelentik, amelyek folyamán a balirányú forgalomba való bekapcsolódás lehetetlen. Ezekután világos, hogy a fentebb vázolt módon megkeresve a $\tilde{\delta}_i$ Laplace—Stieltjes-transzformáltját, a q_k $(k=1, 2, 3, \ldots)$ eloszlással kapcsolatos karakterisztikák a megfelelő behelyettesítések után könnyen adódnak.

Rövid példaként tekintsük a $p_1 = 1$ esetet. Ekkor

$$\chi(s) = e^{-bs},$$

$$\tilde{\chi}(s) = \frac{(s+2\alpha)^2\tilde{\pi}(s)}{2\alpha[1+(2\alpha+s)\tilde{\pi}(s)]}, \tag{26}$$

ahol

$$\tilde{\pi}(s)=\frac{\alpha e^{-bs}}{(1+\alpha\beta)(s+\alpha)[s+\alpha(1-e^{-bs})]}-\frac{\alpha e^{-bs}}{e^{bs}(s+2\alpha)[s+2\alpha-\alpha e^{-b(s+\alpha)}]}.$$

(26)-nak megfelelő számú deriválása után, a balirányú bekanyarodásra várakozó járművek átlagértékére vonatkozó formulában szereplő összes mennyiségek minden nehézség nélkül kiszámíthatók.

IRODALOM

[1] TOMKÓ J.: Tömegkiszolgálási problémákról, I. *MTA III. Oszt. Közleményei* **15** (1965), 289—312.

[2] Севастьянов В. А.: Эргодическая теорема для марковских процессов и ее приложение к телефонным системам с отказами. *Теор. вер. и ее примен.* **2** (1957), 106—116.

[3] SCHMITH W. L.: Regenerative stochastic processes. *Proc. Roy. Soc.* ser. A **232** (1955), 6—31.

[4] TAKÁCS L.: *Introduction to the Theory of Queues.* New York, Oxford University Press 1962.

[5] THIRUNENGADAM K.: Queing with breakdowns. *Oper. Research* **11** (1963), 62—71.

[6] Гнеденко Б. В., Коваленко И. Н.: *Лекции по теории массового обслуживания,* Киев, 1963.

[7] Марьянович Т. П.: Однолинейная система массового обслуживания с ненадежным прибором. *Укр. матем. ж.* **14** (1962), 417—422.

(Beérkezett: 1965. VI. 20.)

AZ EGYSÉGGÖMBÖT KITÖLTŐ KÖRRENDSZEREK KERÜLET- ÉS SUGÁRÖSSZEGÉNEK VIZSGÁLATA

Írta: LÁSZLÓ ZOLTÁN

A diszkrét geometria egyik alapvető kutatási területe a síkot kitöltő, vagy lefedő alakzatok extremális tulajdonságainak vizsgálata. Ezen belül viszonylag nagy területet ölelnek fel az euklideszi síkot kitöltő, illetve lefedő körrendszerekkel kapcsolatos vizsgálatok. Említsünk meg ezek közül egy, a továbbiak szempontjából fontos problémát. Legyen adva az euklideszi síkban egy véges zárt T tartomány. Mit tudunk mondani a tartományt kitöltő körök sugárösszegéről, és a maximális sugárösszeget adó körelhelyezésekről? FEJES TÓTH L. bebizonyította [1], hogy ha egy S területű konvex hatszögben elhelyezünk n egymásba nem nyúló $r_1, \ldots, r_n$ sugarú kört, akkor

$$r_1 + \cdots + r_n \leqq \sqrt{\frac{nS}{\sqrt{12}}}.$$

A fenti egyenlőtlenség általában nem pontos, azonban kimutatható, hogy nagyszámú kör esetén, tetszőleges T tartományra is aszimptotikusan pontos. Ehhez csak THUE tételének [2] azon következményét kell ismerni: hogy ha d_n jelenti egy T területű végesben fekvő zárt tartomány n pontja közt fellépő minimális távolság maximumát, akkor

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt{n}\, d_n = \sqrt{\frac{2T}{\sqrt{3}}}.$$

Durván kifejezve ez azt jelenti, hogy nagy pontszám esetén a pontokat egy szabályos háromszögrács rácspontjaiba kell elhelyezni, hogy a minimális távolság maximális legyen.

A fenti két tételből még az is következik, hogy nagyszámú kör esetén egy véges T zárt tartományt kitöltő maximális sugárösszegű körrendszer „jól helyettesíthető" a T tartományt legsűrűbben kitöltő, ugyanazon számú kongruens körből álló körrendszerrel.

Ez a probléma az euklideszi síkban több irányban általánosítható [3], mi azonban az alapprobléma gömbi megfelelőjével fogunk foglalkozni, azzal a bővítéssel, hogy a sugárösszeg mellett a kerületösszeget is vizsgálni fogjuk. Természetesen ez utóbbi probléma az euklideszi síkban is felvethető, azonban a sugár és a kerület közötti egyenes arányosság miatt nem igényel önálló tárgyalást.

FEJES TÓTH L. még régebben bebizonyította a következő két tételt [4]:

Legyen adva az egységgömbön $n \geqq 3$ egymásba nem nyúló kongruens kör egy rendszere. Legyen egy kör kerülete k és a sugara r, akkor:

$$\text{(I)} \qquad k \leqq 2\pi \sqrt{1 - \frac{1}{4\sin^2 \dfrac{\pi n}{6(n-2)}}},$$

illetve

$$\text{(II)} \qquad r \leqq \arccos \frac{1}{2\sin \dfrac{\pi n}{6(n-2)}},$$

mely kifejezésekben egyenlőség csak $n=3, 4, 6, 12$ esetekben áll fenn.

Ugyancsak FEJES TÓTH L. vetette fel a következő problémát: milyen becslés érvényes a kerület-, és a sugárösszegre, ha a körök nem feltétlenül kongruensek? Pontosabban, kimondta a következő sejtést: az egységgömböt kitöltő tetszőleges sugarú körök kerület és sugárátlaga nem haladhatja meg az (I), illetve a (II) korlátot. Ez az első pillanatra meglepő sejtés lényegében azt mondja ki, hogy 3, 4, 6, 12 kör esetén kongruens körök a „legjobbak"; egyéb esetekben pedig a körök sugarainak megváltoztatásával nem javítható „túlságosan" a kerület- és a sugárösszeg.

A továbbiakban bebizonyítjuk a kerületösszegre vonatkozó sejtést, majd néhány megszorítás mellett foglalkozunk a sugárösszeg becslésével is. Bár vizsgálatainkat az egységsugarú gömbön végezzük, természetesen a kapott eredmények könnyen átvihetők tetszőleges sugarú gömbre is.

I. Az egységgömböt kitöltő körök kerületösszegének vizsgálata

1. TÉTEL: *Legyen adva az egységgömbön $n \geqq 3$ egymásba nem nyúló $k_1, \dots, k_n$ kerületű kör, akkor*

$$\text{(1)} \qquad k_1 + \dots + k_n \leqq 2n\pi \sqrt{1 - \frac{1}{4\sin^2 \dfrac{\pi n}{6(n-2)}}},$$

mely kifejezésben egyenlőség csak az $n=3, 4, 6, 12$ esetekben áll fenn.

Helyezzünk el ugyanis az egységsugarú gömbön n egymásba nem nyúló $r_1, \dots, r_n$ sugarú kört. Alkossuk meg a körök *Dirichlet*-féle cellarendszerét. Legyen az r_i sugarú kör cellájának területe T_i és oldalszáma p_i. Akkor az r_i sugarú kör köré írható p_i oldalú szabályos sokszög területe nyilván nem nagyobb T_i-nél, azaz:

$$T_i \geqq 2\pi - 2p_i \arcsin \left(\cos r_i \sin \frac{\pi}{p_i}\right).$$

Felhasználva a $k_i = 2\pi \sin r_i$ összefüggést, megfelelő átalakítással az alábbi egyenlőtlenséget kapjuk:

$$\text{(2)} \qquad T_i \geqq 2\pi \left[1 - \frac{p_i}{\pi} \arcsin \left(\sqrt{1 - \left(\frac{k_i}{2\pi}\right)^2} \sin \frac{\pi}{p_i}\right)\right].$$

Bevezetve a $\frac{k_i}{2\pi} = x$, $\frac{\pi}{p_i} = y$ jelölést bebizonyítjuk, hogy a

$$T(x, y) = 1 - \frac{1}{y} \arcsin\left(\sqrt{1-x^2} \sin y\right)$$

függvény a

$$0 < y \leqq \frac{\pi}{2}$$

$$0 \leqq x \leqq 1$$

tartományban konvex.

Számítsuk ki ehhez a szükséges parciális deriváltakat:

$$T_{xx} = \frac{1}{y} \sin y \frac{\cos^2 y + x^4 \sin^2 y}{\left[\sqrt{(1-x^2)(\cos^2 y + x^2 \sin^2 y)}\right]^3}$$

$$T_{xy} = \frac{x(1-x^2)(\sin y \cos^2 y - y \cos y + x^2 \sin^3 y)}{\left[\sqrt{(1-x^2)(\cos^2 y + x^2 \sin^2 y)}\right]^3}$$

$$T_{yy} = \frac{x^2(1-x^2) y^3 \sin y}{\left[\sqrt{(1-x^2)(\cos^2 y + x^2 \sin^2 y)}\right]^3}.$$

A konvexitás feltétele $T_{xx} > 0$ miatt

$$T_{xx} T_{yy} - T_{xy}^2 \geqq 0,$$

azaz

$$\frac{x^2(1-x^2)^2 y^2 \sin^2 y(\cos^2 y + x^4 \sin^2 y)}{(1-x^2)^3 (\cos^2 y + x^2 \sin^2 y)^3} -$$

$$- \frac{x^2(1-x^2)^2 (\sin y \cos^2 y - y \cos y + x^2 \sin^3 y)^2}{(1-x^2)^3 (\cos^2 y + x^2 \sin^2 y)^3} \geqq 0.$$

A nemnegatív tényezőket kiemelve és elhagyva igazolandó, hogy

$$f(x, y) = y^2 \sin^2 y(\cos^2 y + x^4 \sin^2 y) - (\sin y \cos^2 y - y \cos y + x^2 \sin^3 y)^2 \geqq 0.$$

Ezt két lépésben láthatjuk be:

A) $f(x, y)$ függvény x-ben növekvő.

Ennek feltétele:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 y^2 \sin^4 y - 4x (\sin y \cos^2 y - y \cos y + x^2 \sin^3 y) \sin^3 y \geqq 0.$$

A nemnegatív tényezőket kiemelve elég belátni az

$$x^2 y^2 \sin y - \sin y \cos^2 y + y \cos y - x^2 \sin^3 y \geqq 0,$$

illetve az

$$x^2 y^2 \sin y \left[1 - \left(\frac{\sin y}{y}\right)^2\right] + y \cos y \left(1 - \frac{\sin y}{y} \cos y\right) \geqq 0$$

egyenlőtlenséget, mely az egyes tagok nemnegatív volta miatt nyilván teljesedik.

B) $f(x, y)$ függvény $x=0$ helyen nemnegatív, azaz:

$$f(0, y) = y^2 \sin^2 y \cos^2 y - \cos^2 y(\sin y \cos y - y)^2 \geqq 0.$$

Függvényünket megfelelően átalakítva, az

$$(y \sin y - \sin y \cos y + y)(y \sin y + \sin y \cos y - y) \geqq 0,$$

illetve az

$$\left[y \sin y + y\left(1 - \frac{\sin y}{y} \cos y\right)\right](y \sin y + \sin y \cos y - y) \geqq 0$$

szorzat előjele vizsgálandó.

Mivel az első tényező nyilván nemnegatív, elegendő igazolni a

$$g(y) = y \sin y + \sin y \cos y - y \geqq 0$$

egyenlőtlenséget.

A $g(y)$ függvény folytonossága, valamint

$$g(0) = g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$g'(0) = 0 \quad \text{és} \quad g'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$$

miatt egyenlőtlenségünk igazolásához elegendő belátnunk, hogy $g'(y)$ a $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ intervallum belsejében csak egy helyen zérus. Vizsgáljuk meg ezért $g'(y)$ zérushelyeit:

$$\sin y + y \cos y - 2 \sin^2 y = 0,$$

vagy ami ezzel ekvivalens, keressük meg az

$$y = (2 \sin y - 1) \operatorname{tg} y.$$

egyenlet megoldásait.

A jobb oldalon álló $h(y) = (2 \sin y - 1) \operatorname{tg} y$ függvény a $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ intervallumban konvex, ugyanis a számláló zárójelezését figyelembe véve könnyen belátható, hogy

$$h''(y) = \frac{\cos^4 y + (2 - \cos^2 y - \sin y)}{\cos^3 y} > 0.$$

Viszont egy konvex függvénynek egy egyenessel legfeljebb két metszéspontja lehet, amelyikből esetünkben az egyik az $y=0$. Ez pedig azt jelenti, hogy a $g'(y)$ függvénynek valóban csak egy zérushelye lehet az $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ intervallum belsejében. Az A) és B)-ben foglaltak együttvéve az $f(x, y) \geqq 0$ egyenlőtlenség igazolását jelentik.

Ezzel bebizonyítottuk a $T(x, y)$ függvény konvexitását a megadott intervallumban.

Térjünk vissza most a (2) egyenlőtlenség vizsgálatára. Összegezve azt $i=1, 2, \ldots, n$ esetén kapjuk:

$$\sum_{i=1}^{n} T_i = 4\pi \geqq 2\pi \sum_{i=1}^{n} \left[1 - \frac{p_i}{\pi} \arcsin \left(\sqrt{1-\left(\frac{k_i}{2\pi}\right)^2} \sin \frac{\pi}{p_i}\right)\right].$$

A jobb oldalt nyilván nem növeljük, ha alkalmazzuk rá a $T(x, y)$ függvény konvexitása miatt a *Jensen*-féle egyenlőtlenséget, azaz:

$$4\pi \geqq 2\pi n \left[1 - \frac{\bar{p}}{\pi} \arcsin \left(\sqrt{1-\left(\frac{\bar{k}}{2\pi}\right)^2} \sin \frac{\pi}{\bar{p}}\right)\right],$$

ahol

$$\bar{p} = \frac{p_1 + \ldots + p_n}{n} \quad \text{és} \quad \bar{k} = \frac{k_1 + \ldots + k_n}{n}.$$

Mivel a fenti kifejezés $\bar{p}$-ban csökkenő, így az ismert

$$\bar{p} \leqq 6 - \frac{12}{n}$$

Euler-féle egyenlőtlenséget alkalmazva

$$4\pi \geqq 2\pi n \left[1 - \frac{6(n-2)}{\pi n} \arcsin \left(\sqrt{1-\left(\frac{\bar{k}}{2\pi}\right)^2} \sin \frac{\pi n}{6(n-2)}\right)\right]$$

egyenlőtlenséget kapjuk. Ez pedig, amint arról elemi átalakításokkal könnyen meggyőződhetünk, ekvivalens a bizonyítandó (1) egyenlőtlenséggel. Pontosabban a $T(x, y)$ függvény konvexitási tartománya miatt egyelőre csak $r_i \leqq \frac{\pi}{2}$ kikötés mellett. Könnyen belátható azonban, hogy $\frac{\pi}{2}$-nél nagyobb sugarú kör esetén is érvényes a becslésünk, hiszen ilyen körrendszer esetén a kerületösszeg nyilván nő, ha a kérdéses kör sugarát $\frac{\pi}{2}$-re összehúzzuk.

Az (1) kifejezés nyitván csak akkor pontos korlát, ha a ΣT_i összeg becslésénél valamennyi lépésben egyenlőség áll fenn. Ez pedig csak akkor lehetséges, ha valamennyi cella egybevágó szabályos sokszög és valamennyi kör ezeket belülről érinti. Az *Euler*-féle egyenlőtlenséget is figyelembe véve ez csak $n=3, 4, 6, 12$ értékek esetén lehetséges. Mégpedig az első esetben három $\frac{\pi}{3}$ sugarú kört kell elhelyeznünk, a továbbiakban pedig az egységgömbbe írt szabályos tetraéder, oktaéder és ikozaéder csúcspontjaiba elhelyezett megfelelő sugarú körök esetén kapunk egyenlőséget.

Célszerű még megvizsgálni nagyszámú kör esetén a kerületösszeg aszimptotikus viselkedését. Az (1) egyenlőtlenség megfelelő átalakítása után egyszerű számítással kapjuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty} 2\sqrt{n}\sqrt{1-\frac{1}{4\sin^2\frac{\pi n}{6(n-2)}}}=\sqrt{\frac{8\pi}{\sqrt{3}}}.$$

Ez a már idézett THUE tétel értelmében azt jelenti, hogy nagyszámú kör esetén a gömbön is nagyjából egyenlő sugarú és szabályos háromszögrács-jellegű körrendszerek adják a maximális kerületösszeget. Ez az önmagában is érdekes tény egyúttal megvilágítja FEJES TÓTH L. (I) és az általunk bebizonyított (1) egyenlőtlenség közötti hasonlóság mélyebb okát is.

Érdekes lenne megvizsgálni ezek után, hogy bizonyos meghatározott számú kör esetén, mely elrendezés adja a maximális kerületösszeget. Az eddigiek alapján a triviális $n=1, 2$ esetek mellett $n=3, 4, 6, 12$ és aszimptotikusan $n=\infty$ esetekben tudunk erre válaszolni. Nyitott probléma a maximális konfiguráció megkeresése $n=5, 7, \ldots$ számú kör esetén. Ez a vizsgálat azonban már egyenlő sugarú körök elhelyezése mellett is igen bonyolult és így túlnő e dolgozat keretein.

II. Egységgömböt kitöltő körök sugárösszegének vizsgálata

Bár a sugárösszeg vizsgálata egyszerűbb problémának látszik, gyakorlati szempontból is jobban hasznosíthatók a vele kapcsolatos eredmények, mégis meg kell elégednünk az előzőeknél valamivel kevesebbet mondó eredménnyel. Ennek fő oka az, hogy a módszerünkben lényeges szerepet játszó kétváltozós konvex függvény konvexitási tartománya a sugárösszeg esetében valamivel szűkebb.

2. TÉTEL: *Legyen adva az egységgömbön $n \geqq 3$ egymásba nem nyúló $r_1, \ldots, r_n$ sugarú kör.* Max $r_i \leqq 63{,}69°\ldots$ *esetén*

$$r_1+\ldots+r_n \leqq n \arccos\frac{1}{2\sin\frac{\pi n}{6(n-2)}}, \tag{1}$$

mely kifejezésben egyenlőség csak $n=3, 4, 6, 12$ *esetekben áll fenn.*

Helyezzünk el ugyanis a gömbön n egymásba nem nyúló $r_i\ (i=1, 2, \ldots, n)$ sugarú kört és alkossuk meg ezen körök *Dirichlet*-féle cellarendszerét. Legyen T_i az r_i sugarú kör cellájának területe és p_i ezen cella oldalszáma. T_i nyilvánvalóan nem kisebb, mint az r_i sugarú kör köré írható szabályos p_i oldalú sokszög területe, azaz:

$$T_i \geqq 2\pi-2p_i \arcsin\left(\cos r_i \sin\frac{\pi}{p_i}\right). \tag{2}$$

Kimutatjuk, hogy a

$$T(p, r) = 2\pi-2p \arcsin\left(\cos r \sin\frac{\pi}{p}\right)$$

kétváltozós függvény a $p \geqq 3$, $r \leqq 63{,}69°\ldots$ tartományban konvex. A szükséges parciális deriváltakat kiszámítva kapjuk:

$$T_{pp} = \frac{\dfrac{2\pi^2}{p^3}\sin\dfrac{\pi}{p}\sin^2 r\cos r}{\left(1-\sin^2\dfrac{\pi}{p}\cos^2 r\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$T_{rr} = \frac{2p\sin\dfrac{\pi}{p}\cos^2\dfrac{\pi}{p}\cos r}{\left(1-\sin^2\dfrac{\pi}{p}\cos^2 r\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$T_{pr} = \frac{2\sin r\left(\sin\dfrac{\pi}{p}-\dfrac{\pi}{p}\cos\dfrac{\pi}{p}-\sin^3\dfrac{\pi}{p}\cos^2 r\right)}{\left(1-\sin^2\dfrac{\pi}{p}\cos^2 r\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Mivel $T_{rr} > 0$, elegendő a konvexitáshoz a következő egyenlőtlenség teljesülése:

$$T_{pp}T_{rr} - T_{pr}^2 \geqq 0.$$

Azaz $\dfrac{\pi}{p} = u$, $0 < u \leqq \dfrac{\pi}{3}$ jelölést bevezetve igazolandó a

$$\frac{4u^2\sin^2 u\cos^2 u\sin^2 r\cos^2 r}{(1-\sin^2 u\cos^2 r)^3} - \frac{4\sin^2 r(\sin u - u\cos u - \sin^3 u\cos^2 r)^2}{(1-\sin^2 u\cos^2 r)^3} \geqq 0$$

egyenlőtlenség. A nemnegatív tényezőket kiemelve és elhagyva,

$$u^2\sin^2 u\cos^2 u\cos^2 r - (\sin u - u\cos u - \sin^3 u\cos^2 r)^2 \geqq 0.$$

Azonos átalakítások elvégzésével kapjuk:

$$(u\sin u\cos u\cos r + \sin u - u\cos u - \sin^3 u\cos^2 u)\cdot$$
$$\cdot(u\sin u\cos u\cos r - \sin u + u\cos u + \sin^3 u\cos^2 u) \geqq 0$$

$$[-u\cos u(1-\sin u\cos r) + \sin u(1-\sin u\cos r)(1+\sin u\cos r)]\cdot$$
$$\cdot[u\cos u(1+\sin u\cos r) - \sin u(1-\sin u\cos r)(1+\sin u\cos r)] \geqq 0.$$

A pozitív tényezők kiemelése és elhagyása után marad:

$$(-u\cos u + \sin u + \sin^2 u\cos r)(u\cos u - \sin u + \sin^2 u\cos r) \geqq 0.$$

Az első tényező pozitív, ugyanis

$$-u\cos u + \sin u + \sin^2 u\cos r > -u\cos u + \sin u = \cos u(\operatorname{tg} u - u) > 0.$$

Marad még a második tényező vizsgálata:

$$u \cos u - \sin u + \sin u^2 \cos r \geqq 0,$$

vagy $\cos r$-re megoldva:

$$\cos r \geqq \frac{\sin u - u \cos u}{\sin^2 u}. \tag{3}$$

Először is lássuk be, hogy az

$$f(u) = \frac{\sin u - u \cos u}{\sin^2 u}$$

függvény a $0 < u \leqq \frac{\pi}{3}$ intervallumban növekvő.

Ennek feltétele:

$$f'(u) = \frac{u \sin^2 u - 3 \sin u \cos u + 2u \cos^2 u}{\sin^3 u} \geqq 0.$$

Ez pedig következik abból, hogy a

$$g(u) = u \sin^2 u - 3 \sin u \cos u + 2u \cos^2 u$$

függvényre

$$g(0) = 0$$

és

$$g'(u) = 3 \sin^2 u - 2u \sin u \cos u = 3 \sin u \cos u \left(\operatorname{tg} u - \frac{2}{3} u\right) \geqq 0.$$

Ezek szerint a (3) egyenlőtlenség, a jobb oldalon álló függvény növekvő volta miatt feltétlenül teljesedik, ha

$$\cos r \geqq \frac{\sin \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{3}}{\sin^2 \frac{\pi}{3}} = 0{,}4432\ldots,$$

vagyis $r \leqq 63{,}69°\ldots$, amit bizonyítani akartunk.

Visszatérve a (2) egyenlőtlenségre összegezzük azt $i = 1, 2, \ldots, n$ esetén:

$$\sum_{i=1}^{n} T_i = 4\pi \geqq \sum_{i=1}^{n} \left[2\pi - 2p_i \arcsin \left(\cos r_i \sin \frac{\pi}{p_i}\right)\right].$$

Az egyenlőtlenség jobb oldalát nem növeljük, ha alkalmazzuk rá a $T(p, r)$ függvény konvexitási tartományában a *Jensen*-féle egyenlőtlenséget, azaz

$$4\pi \geqq n \left[2\pi - 2\bar{p} \arcsin \left(\cos \bar{r} \sin \frac{\pi}{\bar{p}}\right)\right],$$

ahol

$$\bar{p} = \frac{p_1 + \ldots + p_n}{n} \quad \text{és} \quad \bar{r} = \frac{r_1 + \ldots + r_n}{n}.$$

Mivel a fenti kifejezés $\bar{p}$-ban csökkenő, így az ismert

$$\bar{p} \leqq 6 - \frac{12}{n}.$$

Az *Euler*-féle egyenlőtlenséget alkalmazva kapjuk, hogy

$$4\pi \geqq 2n\pi - 12(n-2) \arcsin\left(\cos\frac{\pi}{r} \sin\frac{\pi n}{6(n-2)}\right),$$

mely kifejezést megfelelően rendezve a bizonyítandó (1) egyenlőséget nyerjük egyenlőre $p_i \geqq 3$ kikötéssel.

A $T(p, r)$ függvény konvexitási tartományán belül a fenti kifejezésben egyenlőség nyilván csak abban az esetben áll fenn, ha valamennyi cella egybevágó szabályos sokszög, és valamennyi kör ezeket belülről érinti. Ez csak $n=4$, 6, 12 értékek esetén lehetséges, amikor is az egyenlő sugarú körök középpontjai egy tetraéder, oktaéder, illetve egy ikozaéder csúcspontjaiban helyezkednek el.

Bár $p=2$ esetén a $T(p, r)$ függvény nem konvex, mégis könnyen beláthatjuk, hogy az (1) egyenlőtlenség érvényben marad. Ehhez csak azt kell észrevennünk, hogy ha van kétoldalú cella, akkor valamennyi az. Két kör cellarendszere nyilván kétoldalú. Ha most egy harmadik kör középpontja rajta van az előző két kör középpontja által meghatározott főkörön, akkor e három kör cellarendszere is kétoldalú cellákból áll. Ellenkező esetben az új hatványvonalak valamennyi cellát határuk belső pontján fogják metszeni és így azok háromoldalúak lesznek. Ebből a gondolatmenetből már következik akárhány körre az állításunk.

Ha viszont van kétoldalú cella, azaz valamennyi kör középpontja egy főkörre esik, akkor a maximális sugárösszeg nyilván π. Ez $n=3$ esetén éppen megegyezik az (1) által adott korláttal:

$$3 \arccos \frac{1}{2\sin\frac{3\pi}{6}} = 3 \arccos \frac{1}{2} = \pi,$$

$n>3$ esetén viszont a sugárösszeg a korlát alatt marad. Ezzel tételünk valamennyi állítását bebizonyítottuk.

A kerületösszeg aszimptotikus tulajdonságának vizsgálatához hasonlóan itt is belátható, hogy nagyszámú kör esetén nagyjából egyenlősugarú szabályos háromszögrács-jellegű körrendszer adja a maximális sugárösszeget. Ez ismét THUE tételéből és a következő könnyen kiszámolható határértékből következik:

$$\lim_{n\to\infty} 2\sqrt{n} \arccos \frac{1}{2\sin\frac{\pi n}{6(n-2)}} = \sqrt{\frac{8\pi}{\sqrt{3}}}.$$

Ez egyúttal azt is jelenti, hogy nagyszámú kör esetén nem lehet a körök sugara túl nagy. Ezek után érthető az a törekvés, hogy az (1) egyenlőtlenség érvényességét, legalábbis bizonyos számú körtől kezdve $r_i > 63{,}69°\ldots$ sugarú körökre is kimutassuk. Az egységsugarú gömbön $r_i > 63{,}69°\ldots$ sugarú kört legfeljebb kettőt lehet elhelyezni. Foglalkozzunk először azzal az esettel, ha körrendszerünkben egy „nagy” kör van.

1) Legyen $r_1 > 63,69°...$, valamint $r_2, ..., r_n \leqq 63,69°...$ sugarú kör. *Bebizonyítjuk, hogy* $n \geqq 9$ *esetén:*

$$r_1 + ... + r_n \leqq n \arccos \frac{1}{2 \sin \frac{\pi n}{6(n-2)}}. \tag{4}$$

Készítsük el most is a körök *Dirichlet*-féle cellarendszerét, majd az $r_2, ..., r_n$ körök celláira vonatkozó egyenlőtlenségeket összegezzük a már ismertetett módon, akkor kapjuk, hogy

$$4\pi - T_1 \geqq 2(n-1)\left[\pi - \bar{p} \arccos\left(\cos \bar{r} \sin \frac{\pi}{\bar{p}}\right)\right],$$

ahol

$$\bar{p} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=2}^{n} p_i, \quad \text{illetve} \quad \bar{r} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=2}^{n} r_i.$$

Az *Euler*-féle összefüggésből számoljuk ki $\bar{p}$-t,

$$p_1 + (n-1)\bar{p} \leqq 6n - 12,$$

azaz

$$\bar{p} \leqq \frac{6n-12-p_1}{n-1}.$$

Ezt felhasználva és az így kapott egyenlőtlenséget rendezve,

$$\sum_{i=2}^{n} r_i \leqq (n-1) \arccos \frac{\sin \dfrac{\pi(n-3) + \frac{T_1}{2}}{6n-12-p_1}}{\sin \dfrac{\pi(n-1)}{6n-12-p_1}}.$$

Vagyis bizonyítandó, hogy

$$r_1 + (n-1) \arccos \frac{\sin \dfrac{\pi(n-3) + \frac{T_1}{2}}{6n-12-p_1}}{\sin \dfrac{\pi(n-1)}{6n-12-p_1}} \leqq n \arccos \frac{1}{2 \sin \frac{\pi n}{6(n-2)}}. \tag{5}$$

A bal oldalt nyilván növeljük, ha az r_1 kör celláját körnek vesszük, és p_1 helyébe 3-mat írunk, azaz vizsgáljuk a továbbiakban $r_1 = r$ jelölést alkalmazva a

$$r + (n-1) \arccos \frac{\sin \dfrac{\pi(n-2-\cos r)}{6n-15}}{\sin \dfrac{\pi(n-1)}{6n-15}} \leqq n \arccos \frac{1}{2 \sin \frac{\pi n}{6(n-2)}} \tag{6}$$

egyenlőtlenséget.

A) Kimutatjuk, hogy $r \geqq 60$ és $n \geqq 9$ esetén a (6) egyenlőtlenség bal oldala r-nek monoton csökkenő függvénye.

Ehhez azt kell kimutatni, bevezetve az

$$\alpha = \frac{\pi(n-2-\cos r)}{6n-15},$$

$$\beta = \frac{\pi(n-1)}{6n-15}$$

jelöléseket, hogy

$$\frac{\cos\alpha}{\sqrt{\sin^2\beta - \sin^2\alpha}}\,\frac{\pi(n-1)}{6n-15}\sin r \geqq 1.$$

Felhasználva a

$$\sin^2\beta - \sin^2\alpha = \frac{\pi(1+\cos r)}{6n-15}\sin 2\xi$$

$$\alpha < \xi < \beta$$

összefüggést, egyenlőtlenségünk a következőképpen módosul:

$$\frac{\pi\cos\alpha}{\sqrt{\pi(1+\cos r)\sin 2\xi}}\,\frac{n-1}{\sqrt{6n-15}}\sin r \geqq 1.$$

Egyszerű számolással belátható, hogy

$$\frac{\pi}{6} < \alpha < \beta$$

és

$$\lim_{n\to\infty}\alpha = \lim_{n\to\infty}\beta = \frac{\pi}{6}$$

monoton csökkenőleg, valamint

$$\frac{n-1}{\sqrt{6n-15}} \geqq 1$$

és monoton növekvő $n \geqq 4$ esetén.

Ezek figyelembevételével és az egyes tényezőket megfelelően becsülve következik állításunk.

B) Kimutatjuk, hogy $n \geqq 9$ és $r = \frac{\pi}{3}$ esetén az (5) egyenlőtlenség teljesedik, azaz

$$\frac{\pi}{3} + (n-1)\arccos\frac{1}{2\sin\dfrac{\pi(n-1)}{6n-15}} \leqq n\arccos\frac{1}{2\sin\dfrac{\pi(n-1)}{6(n-2)}}. \tag{7}$$

Az egyenlőtlenséget megfelelően átrendezve

$$n\left(\arc\cos\frac{1}{2\sin\dfrac{\pi n}{6(n-2)}}-\arc\cos\frac{1}{2\sin\dfrac{\pi(n-1)}{6n-15}}\right)\geqq\frac{\pi}{3}-\arc\cos\frac{1}{2\sin\dfrac{\pi(n-1)}{6n-15}},$$

majd a bal oldalra a *Lagrange*-féle középértéktételt kétszer alkalmazva kapjuk:

$$\frac{1}{\sqrt{1-\xi_1^2}}\,\frac{\cos\xi_2}{\sin\dfrac{\pi n}{6(n-2)}\sin\dfrac{\pi(n-1)}{6n-15}}\,\frac{\pi(n-4)n}{24(n-2)(n-2{,}5)}\geqq$$

$$\geqq\frac{\pi}{3}-\arc\cos\frac{1}{2\sin\dfrac{\pi(n-1)}{6n-1}},$$

ahol

$$\frac{1}{2\sin\dfrac{\pi n}{6(n-2)}}<\xi_1<\frac{1}{2\sin\dfrac{\pi(n-1)}{6n-15}},$$

illetve

$$\frac{\pi(n-1)}{6n-15}<\xi_2<\frac{\pi n}{6(n-2)}.$$

Egyenlőtlenségünk teljesedése elég nagy n esetén nyilvánvaló, mert a bal oldal első tényezőjének határértéke végtelen, míg a másik két tényező határértéke zérusnál nagyobb véges szám, a jobb oldal viszont korlátos. Becsüljük meg ezen n küszöbszám értékét azáltal, hogy egyenlőtlenségünket megfelelő irányú átalakításokkal egyszerűbb alakra hozzuk. Felhasználva a ξ_1 és ξ_2-re kapott korlátokat, valamint azt, hogy $n\geqq 10$ esetén

$$\frac{(n-4)n}{(n-2)(n-2,5)}\geqq 1,$$

azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{1}{4\sin^2\dfrac{\pi n}{6(n-2)}}}}\,\frac{\cos\dfrac{\pi n}{6(n-2)}}{\sin^2\dfrac{\pi n}{6(n-2)}}\,\frac{\pi}{24}\geqq\frac{\pi}{3},$$

illetve rendezés után,

$$\frac{1}{\sqrt{4\sin^2\dfrac{\pi n}{6(n-2)}-1}}\operatorname{ctg}\frac{\pi n}{6(n-2)}\geqq 4.$$

Bevezetve a

$$v=\frac{\pi n}{6(n-2)}$$

jelölést és rendezve az egyenlőtlenséget:

$$\frac{\operatorname{ctg} v}{\sqrt{4\sin^2 v-1}} \geqq 4,$$

azaz a következő egyenlőtlenséget kapjuk:

$$64\sin^4 v-15\sin^2 v-1 \leqq 0.$$

Ezt megoldva

$$v \leqq 32{,}49^\circ\ldots$$

azaz

$$n \geqq 27$$

adódik.

Ezután a még megmaradó véges számú

$$9 \leqq n < 27$$

értékekre numerikusan meggyőződhetünk a (7) egyenlőtlenség teljesedéséről. Az A) és B) rész együtt a (6) egyenlőtlenség igazolását, az pedig a (4)-ben foglaltak bizonyítását jelenti.

Végül vizsgáljuk meg két „nagy kör" esetén a helyzetet.

2. Legyen $r_1, r_2 \geqq 63{,}69^\circ\ldots$ valamint $r_3, \ldots, r_n \leqq 63{,}69^\circ\ldots$ sugarú kör. *Bebizonyítjuk, hogy $n \geqq 8$ esetén*

$$\sum_{i=1}^{n} r_i \leqq n \arccos \frac{1}{2\sin\frac{\pi n}{6(n-2)}}. \tag{8}$$

Elkészítve a körök *Dirichlet*-féle cellarendszerét, majd az $r_3, \ldots, r_n$ körök celláira vonatkozó egyenlőtlenségeket összegezve, és az előzőekhez hasonló átalakításokat elvégezve bizonyítandó, hogy

$$r_1+r_2+(n-2)\arccos\frac{\sin\dfrac{\pi(n-4)+\dfrac{T_1}{2}+\dfrac{T_2}{2}}{6n-12-p_1-p_2}}{\sin\dfrac{\pi(n-2)}{6n-12-p_1-p_2}} \leqq n\arccos\frac{1}{2\sin\dfrac{\pi n}{6(n-2)}},$$

Az egyenlőtlenség bal oldalát nyilván növeljük, ha T_1 és T_2 cellát körnek tekintjük, illetve $p_1=p_2=3$ helyettesítést alkalmazzuk, azaz elegendő az alábbi állítást igazolni:

$$r_1+r_2+(n-2)\arccos\frac{\sin\dfrac{\pi(n-2-\cos r_1-\cos r_2)}{6(n-3)}}{\sin\dfrac{\pi(n-2)}{6(n-3)}} \leqq \tag{9}$$

$$\leqq n\arccos\frac{1}{2\sin\dfrac{\pi n}{6(n-2)}}.$$

A) Kimutatjuk, hogy az egyenlőtlenség bal oldala $r_1 \geqq 60°$ és $n \geqq 8$ esetén r_1-nek monoton csökkenő függvénye. (Természetesen akkor r_2-nek is.) A deriválást elvégezve és a *Lagrange*-féle középértéktételt alkalmazva igazolandó, hogy

$$\frac{\cos\alpha \sin r_1}{\sqrt{\pi(\cos r_1 + \cos r_2)\sin 2\xi}} \frac{(n-2)\pi}{\sqrt{6(n-3)}} \geqq 1,$$

ahol

$$\alpha = \frac{\pi(n-2-\cos r_1 - \cos r_2)}{6(n+3)}$$

és

$$\alpha \leqq \xi \leqq \frac{\pi(n-2)}{6(n-3)}.$$

Felhasználva, hogy $n \geqq 6$ esetén

$$30° < \alpha \leqq 40°$$

valamint, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \alpha = 30° \quad \text{monoton csökkenően,}$$

illetve

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n-2}{\sqrt{n-3}} = \infty \quad \text{monoton növekvően,}$$

az egyes tényezőket megfelelően becsülve egyszerű számítással adódik állításunk.

B) Igazoljuk, hogy $r_1 = r_2 = 60°$, valamint $n \geqq 8$ esetén teljesedik a (9) egyenlőtlenség, azaz

$$\frac{2\pi}{3} + (n-2)\arccos\frac{1}{2\sin\frac{\pi(n-2)}{6(n-3)}} \leqq n \arccos\frac{1}{2\sin\frac{\pi n}{6(n-2)}}.$$

Ezt az egyenlőtlenséget megfelelően átrendezve igazolandó, hogy

$$n\left[\arccos\frac{1}{2\sin\frac{\pi n}{6(n-2)}} - \arccos\frac{1}{\sin\frac{\pi(n-2)}{6(n-3)}}\right] \geqq \frac{2\pi}{3} - \arccos\frac{1}{2\sin\frac{\pi(n-2)}{6(n-3)}}.$$

A *Lagrange*-féle középértéktétel kétszeres alkalmazásával alakítsuk át a bal oldalt:

$$\frac{\cos\xi_2}{\sqrt{1-\xi_1^2}} \frac{\pi}{6\sin\alpha\sin\beta} \frac{n(n-1)}{(n-2)(n-3)} \geqq \frac{2\pi}{3} - 2\arccos\frac{1}{2\sin\frac{\pi(n-2)}{6(n-3)}},$$

ahol

$$\frac{1}{2\sin\frac{\pi(n-2)}{6(n-3)}} < \xi_1 < \frac{1}{2\sin\frac{\pi n}{6(n-3)}}$$

$$\beta = \frac{\pi n}{6(n-2)} < \xi_2 < \frac{\pi(n-2)}{6(n-3)} = \alpha.$$

Egyenlőtlenségünk két oldalán megfelelő irányú átalakításokat elvégezve elegendő belátni, hogy

$$\frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\frac{1}{4\sin^2\alpha}}}\cdot\frac{1}{6\sin^2\alpha}\geqq\frac{2}{3}.$$

Ezt megoldva $\alpha\leqq 36{,}91°\ldots$, illetve $n\geqq 8$ adódik.

Az A) és B) rész együtt a (8) állításunk teljesedését jelenti.

Figyelembe véve a (4) és (8)-ban bizonyítottakat, eredeti tételünk valamivel élesebb módosítását is kimondhatjuk:

3. TÉTEL: *Helyezzünk el az egységsugarú gömbön $n\geqq 9$ egymásba nem nyúló $r_1, \ldots, r_n$ sugarú kört, akkor*

$$r_1+\ldots+r_n\leqq n\arccos\frac{1}{2\sin\frac{\pi n}{6(n-2)}}.$$

Bár majdnem biztos, hogy $n<9$ esetekben sem javíthat a sugárösszegen egy vagy két „nagy" kör, azért óvatosnak kell lennünk. A triviális $n=1, 2$ esetektől eltekitve $n=3$ esetben láttuk, hogy a maximális sugárösszeget három olyan érintkező kör adja, melynek középpontja egy főkörre esik, méghozzá a sugaruktól függetlenül. Így $n=3$ esetén valamelyik kör sugarának növelése nem ront szükségszerűen a sugárösszegen. Legbiztosabb módszer e kérdés eldöntésére természetesen az lenne, ha $n=4, 5, 6, 7, 8$ esetekben megtalálnánk a maximális sugárösszeget adó körelhelyezést. Ez $n=4$ és $n=6$ esetén várhatólag az előző fejezetben már szerepelt szabályos tetraéder, illetve oktaéder elrendezés lesz, $n=5$ esetén pedig bizonyos szimmetrikus elrendezések szélsőértékeit vizsgálva valószínűleg három $\frac{\pi}{3}$ és két $\frac{\pi}{6}$ sugarú körből álló körrendszer az optimális. Ezt a sejtést az is indokolja, hogy az így kapott 240°-os sugárösszeg igen jól közelíti az (1) egyenlőtlenségből származó 246,3°...-os korlátot. Végül szeretném még megjegyezni, hogy érdemes lenne a dolgozatban tárgyalt problémát gömbsüveg esetére is megvizsgálni. Ez az önmagában is érdekes probléma megoldása azért is hasznos lenne, mert főleg kisszámú kör esetén a még hiányzó esetek elintézését jelentené.

Végezetül szeretnék köszönetet mondani FEJES TÓTH LÁSZLÓ professzor úrnak, akinek a témán kívül sok értékes tanácsot is köszönhetek, valamint RAPCSÁK ANDRÁS professzor úrnak, aki dolgozatom átnézésével és hasznos megjegyzéseivel nagyban segítette munkámat.

IRODALOM

[1] L. FEJES TÓTH, Some packing and covering theorems, *Acta Univ. Szeged, Acta Sci. Math.* **12** A (1950), 65—67.
[2] A. THUE, Om nogle geometrisk taltheoretiske Theoremer, *Forhdl. Skand. Naturfors.* **14** (1892) 352—353.
[3] ERDŐS PÁL és FEJES TÓTH LÁSZLÓ, Pontok elhelyezése egy tartományban, *MTA III. Oszt. Közl.* **2** (1956).
[4] L. FEJES TÓTH, *Langerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum,* Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1953.

(Beérkezett: 1965. V. 30.)

UNTERSUCHUNG DER UMFANG- UND RADIUSSUMME BEZÜGLICH DER DIE EINHEITSKUGEL AUSFÜLLENDEN KREISE

Z. LÁSZLÓ

Zusammenfassung

Der Verfasser beweisst — als Verallgemeinerungen zwei Sätze von FEJES TÓTH — die folgenden Sätze:

SATZ **1.** Es seien auf der Einheitskugel $n \geqq 3$ nicht übereinandergreifende Kreise mit Umfangen: $k_i, \dots, k_n$ gegeben, dann

$$k_1 + \dots + k_n \leqq 2n\pi \sqrt{1 - \frac{1}{4\sin^2 \frac{\pi n}{6(n-2)}}},$$

wo Gleichheit nur im Falle von $n=3, 4, 6, 12$ gilt.

SATZ **2.** Es seien auf der Einheitskugel $n \geqq 3$ nicht übereinandergreifende Kreise mit Radien $r_1, \dots, r_n$ gegeben. Wenn max $r_i \leqq 63{,}69°$

$$r_1 + \dots + r_n \leqq n \arccos \frac{1}{2\sin \frac{\pi n}{6(n-2)}},$$

wo Gleichheit nur im Falle von $n=3, 4, 6, 12$ gilt.

SATZ **3.** Es seien auf der Einheitskugel $n \geqq 9$ nicht übereinandergreifende Kreise, dann

$$r_1 + \dots + r_n \leqq n \arccos \frac{1}{2\sin \frac{\pi n}{6(n-2)}}.$$

A KONSTRUKTÍV FÜGGVÉNYTAN EGY ÚJABB IRÁNYÁRÓL*

Írta: SZÜSZ PÉTER és TURÁN PÁL

A „lineáris"-nak nevezhető konstruktív függvénytan talán legáltalánosabb értelmes fogalmazása a következő. Legyen R egy metrikus tér,

(1) $$\Phi: \varphi_0(x),\ \varphi_1(x),\ldots$$

az R-en értelmezett pl. valós értékű függvények fix sorrendű sorozata, A az R-en értelmezett $f(x)$ függvények egy osztálya. Legyenek „n-edfokú Φ-polinomok" a

(2) $$\Pi_n(x) \overset{\text{def}}{=} \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu \varphi_\nu(x)$$

alakú függvények, ahol a c_ν-k valós állandók. Ekkor az (R, A, Φ)-konstruktív függvénytan az R-en értelmezett A-osztályba tartozó függvénynek funkcionális tulajdonságait kapcsolja össze Φ-polinomokkal való approximálhatósági tulajdonságokkal. Ha az A-osztály az R-en folytonos függvények osztálya, akkor a *Weierstrass—Stone* tétel igen általános Φ-rendszerekre adja meg a kívánt kapcsolatot. Ezen túl azonban főleg azon eseteket vizsgálták, amikor R egy véges I intervallum vagy a K egységkörvonal vagy az egységkörlap; mikoris a Φ-rendszer x-hatványaiból, ill. a trigonometrikus rendszerből áll. Ezen elméletek főeredményei S. BERNSTEIN nevéhez fűződnek. Egy karakterisztikus tétele, mely egy $0<\alpha<1$-gyel a K-n Lip α-feltételt kielégítő $f(\vartheta)$ függvények $\mathrm{Lip}_\alpha(K)$-osztályára vonatkozik, a következő.

Ha a fenti osztály függvényeit $0 \leqq \vartheta' < \vartheta'' < 2\pi$-re

(3) $$|f(\vartheta')-f(\vartheta'')| \leqq |\vartheta'-\vartheta''|^\alpha\text{-val}$$

normáljuk, akkor ezen funkcionális viselkedés — kissé pongyola fogalmazással — ekvivalens az

(4) $$\inf_{\tau_n} n^\alpha \max_{\vartheta} |f(\vartheta)-\tau_n(\vartheta)| \leqq c = c(\alpha)$$

approximálhatósági tulajdonsággal. Itt $\tau_n(\vartheta)$ az n-edrendű trigonometrikus polinomokat futja be.

A (3)$\to$(4)-típusú implikáció jelentősége a numerikus analízisre nyilvánvaló; jelentősége pl. a következő általános jellegű megjegyzéssel is illusztrálható. Ha az ismeretlen $f(\vartheta)$ függvény pl. egy „vad" differenciálegyenlettel van értelmezve, akkor

* Az 1965. március 25-i felolvasóülésen tartott előadás.

a benne szereplő együtthatófüggvényeket jól approximáló m-edfokú polinomokkal helyettesítve az

$$A_m(f) = B_m(f) \tag{5}$$

alakba írható, ahol $B_m(f)$-ben az ismeretlen függvény deriváltjai csak kis abszolútértékű faktorokkal vannak szorozva és $A_m(f)$-ben csak m-edfokú polinomegyütthatók lépnek fel. Ekkor (5)-öt $n=1, 2, \ldots$-re az $A_{m_n}(f_n) = B_{m_n}(f_{n-1})$ ($f_0(x)$ „sima", az m_n-ek *alkalmas* egészek) iteráció-sorozattal helyettesítve a konvergencia-bizonyítás bizonyos esetekben keresztülvihető (ami (5)-re exisztenciabizonyítást jelent). A (4)→(3) implikáció jelentőségét a következőképpen illusztrálhatjuk. Ha egy függvényegyenlet egy megoldását pl. egy iterációs processzus után egy polinomsor alakjában kapjuk meg, melynek n-edik maradékösszege a sor alakból felülről becsülhető, akkor ebből a megoldó függvény simasági tulajdonságaira, pl. analiticitására következtethetünk. Mivel pl. differenciálegyenleteket *Banach*-terekben is kezdenek vizsgálni, általánosabb terek konstruktív függvénytana is mind aktuálisabbá válik.

Hogy még e legjobban kianalizált konstruktív függvénytanokban is milyen alapfeladatok tisztázatlanok még, mutatja pl. a sorrend-probléma. Ez röviden azt kérdezi, hogy egy adott A-függvényosztályra nézve az

$$1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots \tag{6}$$

sorozat sorrendje „a természetes"-e? Egy fokkal világosabban, ha a (6) sorrend helyett az

$$1 \equiv x^{k_0}, x^{k_1}, x^{k_2}, \ldots \tag{7}$$

sorrendet vesszük, tehát „n-edfokú polinom" alatt *pillanatnyilag* nem a

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^\nu$$

kifejezést, hanem a

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^{k_\nu}$$

formulát értve, igaz-e *a*) egy fix n-re, *b*) minden $n \geqq 1$-re

$$\sup_{f\in A} \min_{a_\nu} \max_{[-1,+1]} \left| f - \sum_{0}^{n} a_\nu x^\nu \right| < \sup_{f\in A} \min_{a_\nu} \max_{[-1,+1]} \left| f - \sum_{0}^{n} a_\nu x^{k_\nu} \right|. \tag{8}$$

Ha A pl. a $[-1, +1]$-ben *páros* folytonos függvények osztálya, akkor (6) helyett az

$$(1, x^2, x^4, x^6, \ldots)$$

sorozatot véve és ebben az $x^{2\nu-1}$ tagokat „ritkán" elhelyezve (8) nem áll. Valószínű azonban, hogy az A-függvényosztály megfelelő értelmezése mellett a (6) sorrend „a természetes". Ezek, amennyire tudjuk, újszerű kérdések a klasszikus konstruktív függvénytanban is.

Bár a végtelen intervallumra vonatkozólag a polinomapproximáció elmélete lényegileg a *Weierstrass*-tétel súlyfüggvényes kiterjesztésénél tart csak, a 0-hoz tartó súlyfüggvény nyilván elengedhetetlen. Kézenfekvő gondolat volt a véges és végtelen köz esetei közötti különbséget azzal elmosni, hogy polinomapproximáció helyett racionális törtfüggvényekkel való approximációt tekintünk. Valóban régóta ismert tény, hogy akár véges, akár végtelen közön adott folytonos $f(x)$ (végtelen köz esetén $\lim_{x\to\infty} f(x)=a$ megszorítással) törtfüggvénnyel egyenletesen approximálható. A racionális függvényre vonatkozó konstruktív függvénytan a polinomokéhoz képest további figyelemre méltó különbségeket mutat. Ha $p_n(x)$, $q_m(x)$ valóban n-ed, ill. m-edfokú polinomokat jelentenek, értelmezzük az $r(x)$ racionális törtfüggvény fokát, midőn $(p_n(x), q_m(x))=1$ és

(9) $$r(x)=\frac{p_n(x)}{q_m(x)},$$

természetszerűleg a

(10) $$\operatorname{gr} r = \max(m, n)$$

által. Mármost, míg a Φ-polinomok általános esetében fennáll a

$$\operatorname{gr}(\Pi_1+\Pi_2)\leqq \max(\operatorname{gr}\Pi_1, \operatorname{gr}\Pi_2)$$

egyenlőtlenség, addig ez racionális törtfüggvény esetén nem igaz, mint pl. azt az

$$\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{x^2+2}$$

törtfüggvény mutatja. Továbbá a racionális törtfüggvények ugyan lényegileg előállíthatók volnának az

$$\frac{x^k}{a_0+a_1x+\ldots+a_lx^l} \qquad (k, l \geqq 0 \text{ egész})$$

alakú bázissorozat lineár-kombinációiként, ahol az a_ν együtthatók akárcsak racionális számok volnának, de ezek minden bizonnyal semmilyen olyan ésszerű sorrendbe nem foglalhatók, amelytől remélni lehetne, hogy egy értelmes függvényosztály függvényeinek approximálhatósága az első n darab által jobb lesz a közönséges sorrendű polinom-approximálhatóságnál. Ezek és továbbiak miatt a racionális törtfüggvények szolgáltatják a legegyszerűbb példáját a nemlineárisnak nevezett konstruktív függvénytannak. Így tehát a törtfüggvények konstruktív függvénytanának mind gyakorlati, mind elméleti érdekessége is van; előbbit aláhúzza az a tény is, hogy a törtfüggvények értékkiszámítási problémái a polinomokéival azonosak. Ez lesz a címben említett új irány.

Mennyiben tekinthető ezen konstruktív függvénytan újnak? Hiszen már Csebisev foglalkozott azzal a kérdéssel, hogy egy előírt, $[-1, +1]$-ben folytonos $f(x)$ és előírt nemnegatív egész m és n mellett mely

$$r_n^*(x)=\frac{p_n(x)}{q_m(x)}$$

törtfüggvényre lesz

$$\max_{[-1,+1]}\left|f(x)-\frac{p_n(x)}{q_m(x)}\right|$$

minimális. Megmutatta, hogy létezik lényegileg egyetlen $r_n^*(x)$, mely minimizál és ezt oszcilláció-tulajdonsággal karakterizálni tudta. De ezen alapon $r_n^*(x)$ explicit meghatározása még fix speciális függvényekre és m, n-értékekre is ritkán sikerül és függvény*osztályok*ra még a polinomok konstruktív függvénytanában sem igen használatos. De vajon vizsgálták-e más módszerekkel a törtfüggvényekkel való approximálhatóság kérdését egyes nevezetes függvényosztályokra? A felelet erre az, hogy ilyen vizsgálatok történtek, de negatív eredménnyel. Hogy egy karakterisztikus példát említsünk, tekintsük az $E=[-1,+1]$ szakaszon, egy rögzített $0<\alpha<1$-gyel azon $f(x)$ függvények halmazát, melyekre $-1\leqq x'<x''\leqq+1$-re az

$$|f(x'')-f(x')|\leqq(x''-x')^{\alpha} \tag{11}$$

egyenlőtlenség áll fenn; e függvényosztály, a „$\mathrm{Lip}_{\alpha}(E)$-osztály 1-konstanssal" próbaköve szokott lenni ilyen vizsgálatoknak. S. BERNSTEIN előbb említett tételéből könnyen következik, hogy ha $f(x)$ a $\mathrm{Lip}_{\alpha}(E)$ osztályba esik, akkor $-1\leqq x\leqq 1$-ben alkalmas $\pi_n^*(x)$ n-edfokú racionális polinommal

$$|f(x)-\pi_n^*(x)|\leqq\frac{c_1(\alpha)}{n^{\alpha}}; \tag{12}$$

a fordított tételről és az egésznek DZJADIKtól származó kiegészítéséről most nincs érkezésünk szólni. BERNSTEIN azt is megmutatta, hogy (12) nem javítható az n-edfokú polinomok körében; példájának kis módosításával igazolható, mint azt D. NEWMAN megjegyezte, hogy (12) lényegileg nem javítható még akkor sem, ha legjeljebb n-edfokú racionális törtfüggvénnyel approximálunk. Pontosabban az igazolható, hogy ha $T_m(x)$ az m-edik *Csebisev*-polinom, akkor az

$$f_0(x)=c_2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m!^{\alpha}}T_{m!}\left(\frac{1}{2}x\right) \tag{13}$$

alkalmas pozitív numerikus c_2-vel osztályunkhoz tartozik és minden legfeljebb n-edfokú $r_n(x)$ racionális törtfüggvényre $n>n_0$-ra

$$\max_{x\in E}|f_0(x)-r_n(x)|>\frac{1}{n^{\alpha}\log^3 n}. \tag{14}$$

Hogy $f_0(x)$ osztályunkhoz tartozik, vagyis

$$|f_0(x+h)-f_0(x)|$$

felső becsléséhez, elég azt

$$\Big|\sum_{m\leqq k}+\sum_{m>k}\Big|$$

alakba írni, ahol k a

$$k!\leqq\frac{1}{h}<(k+1)!$$

egyenlőtlenséggel van egyértelműen értelmezve, és utóbbit

$$\left|T_m\left(\frac{1}{2}y\right)\right|\leqq 1,\qquad y\in E$$

által, előbbit

$$\left|T_m\left(\frac{1}{2}y_1\right)-T_m\left(\frac{1}{2}y_2\right)\right| \leqq c_3\, m\,|y_1-y_2|,$$

$$-1 \leqq y_1 < y_2 \leqq +1$$

által becsülni. (14) igazolására, ha az l-index

$$(l-2)! \leqq n < (l-1)!$$

által van definiálva, írjuk $(f_0(x)-r_n(x))$-et

$$\left(\sum_{m=1}^{l-1}\frac{1}{m!^\alpha}T_{m!}\left(\frac{1}{2}x\right)-r_n(x)\right)+\frac{T_{l!}\left(\frac{1}{2}x\right)}{l!^\alpha}+\sum_{m=l+1}^{\infty} m!^{-\alpha}T_{m!}\left(\frac{1}{2}x\right)$$

alakba. Az utolsó összeg E-ben abszolúte

$$\leqq \frac{2}{(l+1)!^\alpha}.$$

A zárójeles összeg racionális törtfüggvény, melynek foka

$$\leqq n+(l-1)! < 2(l-1)!$$

tehát legfeljebb ennyi jelváltása van E-ben. Viszont, mivel

$$T_m\left(\frac{1}{2}x\right)=\pm 1, \quad x=2\cos\vartheta, \quad \cos m\vartheta=\pm 1,$$

$$\vartheta=\frac{v\pi}{m}, \quad x_v=2\cos\frac{v\pi}{m}, \quad \frac{m}{3}\leqq v\leqq\frac{2m}{3},$$

tehát a középső tag az $\frac{1}{3}l!$ számú x_v helyen váltakozva ± 1; mivel pedig

$$2(l-1)! < \frac{1}{3}\,l!$$

ha n elég nagy, van olyan egész μ, hogy $\frac{1}{3}l! \leqq \mu \leqq \frac{2}{3}l!$ legyen és

$$\operatorname{sign}\frac{T_{l!}(x_\mu)}{l!^\alpha}=\operatorname{sign}\left(\sum_{m=1}^{l-1}\frac{1}{m!^\alpha}T_{m!}\left(\frac{x}{2}\right)-r_n(x)\right)_{x=x_\mu},$$

azaz

$$|f_0(x_\mu)-r_n(x_\mu)| \geqq \frac{1}{l!^\alpha}-\frac{2}{(l+1)!^\alpha} > \frac{1}{2}\frac{1}{l!^\alpha} > \frac{1}{2l^2}\cdot\frac{1}{(l-2)!^\alpha} > \frac{1}{2l^2}\cdot n^{-\alpha} > \frac{1}{n^\alpha\log^3 n}$$

valóban (sőt növekvő n-nel ezek egyre sűrűbben vannak).

Ennek és további negatív eredményeknek tükrében — egyesekről később szólunk — úgy látszott, az a vélemény alakul ki, hogy az n-edfokú törtfüggvény nagyban és egészben „értelmes” függvényosztály esetén csak olyan egyenletes approximációra képes, mint a $(2n+1)$-edfokú polinom, tehát ugyanolyan nagyságrendeket ad, esetleg jobb állandókkal vagy legfeljebb logaritmus-hatvány szorzóval. Ezt a véleményt hangoztatta múlt szeptemberben MERGELJAN Londonban egy magánbeszélgetésben, lényegében ezt a véleményt írta le D. NEWMAN múlt márciusban megjelent értekezésében, melyben pedig a dolog kulcsa a kezében volt. E dolgozatban az $|x|$ függvénynek E-ben való racionális approximációjával foglalkozik. Az $|x|$ függvény szerepe a polinomok konstruktív függvénytanában jól ismert; *polinom*-approximálhatóságából általános függvényosztályokra vonatkozó tételek származtathatók. Régóta ismert, hogy alkalmas $\pi_n^*(x)$-szel E-ben

$$||x|-\pi_n^*(x)| \leqq \frac{c_n}{n}. \tag{15}$$

BERNSTEIN megmutatta, hogy ez lényegileg nem javítható, mert alkalmas c_5-tel minden $\pi_n(x)$-re

$$\max_{x\in E} ||x|-\pi_n(x)| > \frac{c_5}{n}.$$

Mármost *Newman* azt a meglepő tényt találta, hogy alkalmas $r_n^*(x)$-szel E-ben

$$||x|-r_n^*(x)| \leqq e^{-\sqrt{n}} \tag{16}$$

és ez bizonyos mértékben „közel legjobb", amennyiben minden n-re

$$\max_{x\in E} ||x|-r_n(x)| \geqq \frac{1}{2}e^{-9\sqrt{n}}. \tag{17}$$

Kézenfekvő kérdés, miért maradt meg mégis a speciális E-függvénynél és tekintette meglepő tételét e speciális függvényhez szabott elszigetelt jelenségnek (ez kitűnik dolgozatából) és nem próbált a polinom-approximációnál használt átmeneti elvvel általános tételekhez jutni. Nyilván azért, mert ha az ismert módon lehetne, akkor a $\mathrm{Lip}_\alpha\,(E)$-osztályra alkalmazva olyan erős approximációs tételt nyert volna, ami az előbb közölt ellenpélda miatt nem is igaz.

Fennmarad viszont a kérdés, nem lehet-e mégis olyan klasszikus függvény-*osztály*okat találni, melyek n-edfokú törtfüggvénnyel *lényegesen jobb nagyságrendben* approximálhatók, mint n-edfokú polinommal? Ilyenek megtalálása az eddig ismert eredmények negatív volta miatt ad létjogosultságot annak, hogy új irányról beszélhessünk, mely talán pozitív irányzatnak nevezhető. Az első függvényosztály, melyre *pozitív* választ tudtunk adni, volt az E-ben konvex függvények K osztálya. Erre kimutattuk, hogy ha $\varepsilon>0$ tetszőleges kicsi és $f\in K$, akkor van oly $c=c(f,\varepsilon)$ állandó, hogy $[-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]$-ban alkalmas $r_n^*(x)$ törtfüggvénnyel

$$|f(x)-r_n^*(x)| < \frac{c(f,\varepsilon)\log^4 n}{n^2}. \tag{18}$$

Tájékozódásul megjegyezzük egyrészt, hogy $|x|\in K$ és így a K-osztály függvényei n-edfokú polinommal $\frac{1}{n}$-nél jobb nagyságrendben nem approximálhatóak. Másrészt az

$$f_1(x) = cx^2 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!^2} T_{m!}\left(\frac{x}{2}\right)$$

példája elég nagy pozitív c-vel mutatja az előbbivel analóg módon, hogy $f_1 \in K$ és tetszőleges $r_n(x)$ n-edfokú törtfüggvényre

$$\max_{x \in E} |f_1(x) - r_n(x)| > \frac{c_6}{n^2 \log^2 n},$$

ami azt mutatja, hogy a (18) alatti tétel nem sokat javítható. Ezen forma ellen az a kifogás vethető fel, hogy nem világos $c(f, \varepsilon)$ függésének módja f-től és ε-tól. A bizonyítás azonban valójában megmutatja, hogy $c(f, \varepsilon)$ helyettesíthető volna egy *explicit* $c_7(D)$-vel $[-1, +1]$-ben, hacsak $-1 \leqq x_1 < x_2 \leqq 1$-re

$$\left| \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \right| \leqq D$$

(tehát a konvexitás követelménye *mellett*).

Általánosabban megmutattuk, hogyha egy egész $l \geqq 0$-re $f(x)$ első l deriváltja E-ben mindenütt létezik és $f^{(l)}(x)$ konvex itt, akkor tetszőleges kis $\varepsilon > 0$-ra $[-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]$-ban alkalmas, legfeljebb n-edfokú $r_n^*(x)$-szel és $c_8(f, \varepsilon)$-nal

$$(19) \qquad |f(x) - r_n^*(x)| < c_8(f, \varepsilon) \frac{\log^4 n}{n^{l+2}}.$$

Előbbi tétel nyilván $l = 0$-val áll elő. Ismét, (19) hamissá válik, ha az $(l+2)$ kitevőt $(l+2+\delta)$-val helyettesítjük; a logaritmikus faktor viszont valószínűleg elhagyható. Tájékozódásul megjegyezzük, hogy e függvényosztályra az n-edfokú *polinommal* való approximálhatóság rendje csak $O\left(\frac{1}{n^{l+1}}\right)$.

Bár ezek a tételek máris megmutatják, hogy jelentős függvény*osztályok*ra az n-edfokú racionális törtfüggvényekkel való approximáció „*egy* nagyságrenddel" jobb lehet, mint a polinom-approximáció, mégsem adnak felvilágosítást a „*Newman*-jelenség"-ről, tehát arról, hogy az $|x|$-függvény legjobb n-edfokú racionális tört-approximációja miért *annyi*val jobb, mint az n-edfokú polinom-approximáció. Pontosabban szólva két kérdésről van szó.

a) Ténylegesen izolált tény-e ez, vagy létezik olyan $|x|$-et tartalmazó érdemleges függvény*osztály*, amelynél a racionális törtfüggvényekkel való approximáció „sok nagyságrenddel" jobb a polinom-approximációnál?

b) Ha ilyen *osztály* van, mi az oka annak, hogy a racionális approximáció annyival jobb, mint a polinom-approximáció? Mi az oka annak, hogy *egyáltalán* tud jobb lenni?

Az a) kérdésre a választ egy teljesen klasszikus függvényosztály, az E-ben folytonos és szakaszonként analitikus függvények B osztálya adja meg. Pontosabban, legyen

$$(20) \qquad -1 = a_0 < a_1 < \ldots < a_{k-1} < a_k = +1,$$

és legyen $\nu = 1, \ldots, k$-ra az $a_{\nu-1} \leqq x \leqq a_\nu$ közben

$$(21) \qquad f(x) = \varphi_\nu(x),$$

ahol $\varphi_\nu(x)$ analitikus az $[a_{\nu-1}, a_\nu]$ zárt szakaszon; persze $\nu = 1, 2, \ldots, (k-1)$-re álljon fenn a

$$(22) \qquad \lim_{x \to a_\nu - 0} \varphi_\nu(x) = \lim_{x = a_\nu + 0} \varphi_{\nu+1}(x)$$

reláció. Az $f(x) = |x|$ függvény nyilván ezen B-hez tartozik, és mint már megjegyeztük, nem approximálható n-edfokú polinommal még $o\left(\frac{1}{n}\right)$-nyire sem. Ezzel szemben a következő tételt mondjuk ki.

Ha $f \in B$, akkor megfelelő $r_n^*(x)$ n-edfokú racionális törtfüggvényre E-ben az

$$(23) \qquad |f(x) - r_n^*(x)| < e^{-c_9(f)\sqrt{n}}$$

approximáció érhető el.

A B-függvényosztály tehát n-edfokú racionális törtfüggvénnyel „sok nagyságrenddel jobban" approximálható, mint n-edfokú polinomokkal. (17) mutatja, hogy (23) tovább már nem javítható. A $c_9(f)$ állandó az egész osztályra univerzálisan megadható; ez csak

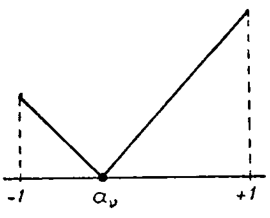
$$\min_{\nu = 0, 1, \ldots, k-1} (a_{\nu+1} - a_\nu)$$

-től és az $\varphi_\nu(z)$ függvények regularitás-ellipsziseinek minimális kistengelyétől függ.

Nézzük a tétel bizonyításának vázlatát. Ha n adott, legyen $N = N(n)$ és $m = m(n)$, amelyeket később fogunk optimálisan megválasztani. Először is *Newman* konstrukciójának kis módosításával alkalmas N-edfokú $\varrho_{N,\nu}(x)$ N-edfokú törtfüggvénnyel E-ben $\nu = 1, 2, \ldots, (k-1)$-re

$$(24) \qquad \big||x - a_\nu| - \varrho_{N,\nu}(x)\big| < e^{-\frac{1}{5}\sqrt{N}}.$$

Ebből nem nehéz átmenni azon $G_\nu(x)$ függvények racionális approximációjára, melyek



1. ábra

$$(25) \qquad G_\nu(x) = \begin{cases} (x - a_{\nu-1})(a_\nu - x) & \text{ha} \quad a_{\nu-1} \leqq x \leqq a_\nu \\ 0 & \text{másutt} \end{cases}$$

által vannak értelmezve $\nu = 1, 2, \ldots, k$-ra. Alkalmas $h_{N,\nu}(x)$ N-edfokú törtfüggvénnyel előbbiekből E-ben az

$$|G_\nu(x) - h_{N,\nu}(x)| < 4e^{-\frac{1}{5}\sqrt{N}}$$

egyenlőtlenség adódik, sőt, bevezetve az $[a_{\nu-1}, a_\nu]$ közre normált $T_l(x, a_{\nu-1}, a_\nu)$ *Csebisev*-polinomokat, nyerjük, hogy

$$(26) \qquad |G_\nu(x) T_l(x, a_{\nu-1}, a_\nu) - h_{N,\nu}(x) T_l(a, a_{\nu-1}, a_\nu)| \leqq c_{10} e^{-\frac{1}{5}\sqrt{N} + c_{11} l}.$$

Figyeljük meg, hogy (26)-ban a törtfüggvény nevezője független l-től!

Lényeges szerepet játszik a B-beli $f(x)$-nek egy egyszerűen igazolható előállítása E-ben. Ez pedig az előbbi $G_\nu(x)$-ekkel

$$(27) \qquad f(x) = b + dx + \sum_{\nu=1}^{k-1} e_\nu |x - a_\nu| + \sum_{\nu=1}^{k} \psi_\nu(x) G_\nu(x),$$

ahol b, d és e_ν $f(x)$-szel meg vannak határozva és a $\psi_\nu(x)$ függvények a $\varphi_\nu(x)$-ekkel egyszerűen összefüggő függvények, melyek analitikusak $[a_{\nu-1}, a_\nu]$-ben.

Ezekután a bizonyítás a következőképp fejezhető be. Mivel $\psi_\nu(x)$ analitikus $[a_{\nu-1}, a_\nu]$-ben, alkalmas m-edfokú polinommal és $0<\vartheta_\nu<1$-gyel itt egyenletesen approximálható ϑ_ν^m pontossággal; ezen approximáló polinomot mindjárt az $[a_{\nu-1}, a_\nu]$-re vonatkozó *Csebisev*-polinomok szerint célszerű előállítani. Ebben $T_l(x, a_{\nu-1}, a_\nu)$-nek $\alpha_{\nu l}$ együtthatója, kis észrevétel után, abszolút értékben majorálható ϑ_ν^l-lel. Ekkor a (27) előállítására (24) és (26) alkalmazható; így adódik, hogy E-ben

$$\left| f(x) - \pi_1(x) - \sum_{\nu=1}^{k-1} e_\nu r_{N,\nu}^*(x) - \sum_{\nu=1}^{l} \sum_{l=0}^{m} \alpha_{\nu l} \frac{\pi_{N+l,\nu,l}(x)}{\pi_{N,\nu}^*(x)} \right| <$$

$$< c_{12}\left(\vartheta^m + e^{-\frac{1}{5}\sqrt{N}+c_{11}m}\right) \overset{\text{def}}{=} U,$$

ahol

$$0<\vartheta=\max(\vartheta_1, \ldots, \vartheta_k)<1.$$

Ebből összevonva π_1-et az első összeggel, valamint a kettős összegben tekintve a nevező l-től való függetlenségét,

$$\left| f(x) - \frac{\pi_{(k-1)N+1}}{\pi_{(k-1)N}} - \sum_{\nu=1}^{k} \frac{\pi_{m+N,\nu}(x)}{\pi_{N,\nu}(x)} \right| < U,$$

illetőleg

$$\left| f - \frac{\pi_{(k-1)N+1}}{\pi_{(k-1)N}} - \frac{\pi_{kN+m}}{\pi_{kN}} \right| < U,$$

vagyis

$$\left| f - \frac{\pi_{(2k-1)N+m}}{\pi_{(2k-1)N}} \right| < U,$$

és végül

(28) $$|f(x) - r_{(2k-1)N+m}^*(x)| < c_{12}\left(\vartheta^m + e^{-\frac{1}{5}\sqrt{N}+c_{11}m}\right)$$

következik.

Most már megválaszthatjuk m-et és N-et. Először is szükséges a fokszám követelmény miatt a

(29) $$(2k-1)N + m \leqq n$$

egyenlőtlenség, azután (28) második tagja miatt

(30) $$c_{11}m < \frac{1}{10}\sqrt{N}.$$

Ekkor pedig az

$$N = \left[\frac{n}{4k}\right], \quad m = \left[\frac{1}{10(c_{11}+1)}\sqrt{\frac{n}{4k}}\right]$$

választással (29) és (30) teljesül, és ekkor automatikusan (28) jobb oldalának első tagjában

$$\vartheta^m < e^{-c_{13}(f)\sqrt{n}},$$

amivel a vázlatos bizonyítást be is fejeztük. Tételeink pontos bizonyítását egy, a Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutatóintézetének folyóiratában közlendő cikksorozat tartalmazza majd.

Az a) kérdésre tehát válaszoltunk. A b) kérdésre válaszolandó, tekintsük azokat a törtfüggvényeket, amelyeket *Newman* az $|x|$ közelítésére talált. Ha

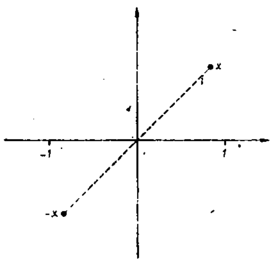
$$q_n(x) = \prod_{\nu=0}^{n-1} \left(x + e^{-\frac{\nu}{\sqrt{n}}}\right),$$

akkor ezen törtfüggvény

$$x\frac{q_n(x)-q_n(-x)}{q_n(x)+q_n(-x)}.$$

Nézzük e törtfüggvény pólusait. Ezekre

$$H(x) \overset{\text{def}}{=} \prod_{\nu=0}^{n-1} \frac{e^{-\frac{\nu}{\sqrt{n}}}+x}{e^{-\frac{\nu}{\sqrt{n}}}-x} = -1. \tag{31}$$



2. ábra

Egyszerű geometriai meggondolás mutatja, hogy ha x nincs a képzetes tengelyen, akkor $|H(x)| \neq 1$, tehát a keresett pólusok

$$\prod_{\nu=0}^{n-1} \frac{e^{-\frac{\nu}{\sqrt{n}}}+iy}{e^{-\frac{\nu}{\sqrt{n}}}-iy} = -1$$

valós gyökei (melyek 0-ra szimmetrikusak). Ezek közül a pozitívak nyilván azonosak a

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} \operatorname{arc\,tg}\left(ye^{\frac{\nu}{\sqrt{n}}}\right) = \frac{(2j-1)\pi}{2} \qquad \left(\operatorname{arc\,tg}\ 0 \text{ és } \frac{\pi}{2} \text{ között}\right) \tag{32}$$

egyenlet pozitív gyökeivel. Mivel a bal oldal y-nal monoton nő, $y = \frac{\pi}{4n} e^{-\sqrt{n}}$ -re

$$< y\sum_{\nu=0}^{n-1} e^{\frac{\nu}{\sqrt{n}}} = y\frac{e^{\sqrt{n}}-1}{e^{\frac{1}{\sqrt{n}}}-1} < yne^{\sqrt{n}} < \frac{\pi}{2},$$

és ugyanakkor $y=\sqrt{n}\, e^{-\frac{n-1}{\sqrt{n}}}$-re

$$> \operatorname{arc\,tg} \sqrt{n} + \operatorname{arc\,tg} \left(\sqrt{n}\, e^{-\frac{1}{\sqrt{n}}} \right) > \frac{\pi}{2},$$

minden $n > 10$-re, tehát $j=1$-re van egy $x_0 = iy_0$ pólus, ahol

$$\frac{\pi}{4n} e^{-\sqrt{n}} \leqq y_0 \leqq 2\sqrt{n}\, e^{-\sqrt{n}}.$$

Tehát annak ellenére, hogy a szóban forgó törtfüggvény $|x|$-et E-ben igen jól approximálja, e szakaszhoz nagyon közeli pólusai vannak. Milyen konzekvenciával jár ez? A fennálló viszonyokat leegyszerűsítve már a

(33) $$g(x) = \frac{\varepsilon^2}{x^2+\varepsilon^2} \qquad (\varepsilon > 0, \text{ tetszőlegesen kicsi})$$

másodfokú törtfüggvény is jól illusztrálja. Nyilván

$$\max_{x \in E} |g(x)| = 1,$$

és

$$\max_{x \in E} |g'(x)| = \frac{1}{4\varepsilon},$$

ami $\frac{1}{\varepsilon}$-nal együtt tetszőleges nagy lehet. Ezzel szemben n-edfokú polinom abszolút maximumát megkötve, *Markov* tétele szerint már a derivált abszolút maximuma meg van kötve. Tehát úgy látszik, annak a jelenségnek az oka, hogy egyáltalán egy függvényosztályra a törtfüggvényes approximáció jobb tud lenni, mint a polinom-approximáció, az, hogy a törtfüggvényeket *Markov*-típusú tétel nem-létezése hajlékonyabakká teszi, mint a polinomokat. De akkor hogyan van az, hogy a $\mathrm{Lip}_\alpha(E)$-osztálynál a törtfüggvények sem adnak lényegesen jobb approximációt? Előbbiekből sejthető — a (33) példánál szemmel láthatólag ez az eset —, hogy a törtfüggvények hajlékonyságának megvannak a határai, éspedig abban az értelemben, hogy a derivált „nagy” csupán „kis” halmazon lehet. Ha ez így volna, akkor elképzelhető a jelenség magyarázatául az, hogy azon pontok halmaza a (13) függvénynél, melyeknél a törtfüggvényeknek „nagyon hajlékonynak” kellene lennie, *túl* nagy. Ezt az elképzelést némileg alátámasztja E. P. DOLZENKO szovjet matematikusnak az a szép tétele, amelyet 1961-ben publikált a *Doklady*ban és amely szerint, ha $r_n(x)$ adott n-edfokú törtfüggvény és adott pozitív M mellett H a valós tengely azon x-einek halmaza, amelyekre

$$|r_n(x)| \leqq M,$$

akkor tetszőleges kis pozitív δ mellett egy legfeljebb δ összhosszúságú H_1 intervallum halmaz kivételével $(H-H_1)$-en

$$|r_n'(x)| \leqq 4\frac{n}{\delta} M.$$

Előbbiek természetszerűleg vezetnek a szóban forgó pozitív irányzat további problémáihoz és illusztrálják, milyen módon lehet pl. további olyan függvényosztályokhoz jutni, melyekre a racionális törtfüggvények jobb közelítési nagyságrendet adnak a polinomoknál. Az első általános problémát talán egy példával világítjuk meg. Legyen $0<\alpha<\beta\leqq 1$ és E_1 egy alkalmas részhalmaza E-nek. Milyen lehet E_1, ha a $\mathrm{Lip}_\alpha(E)$-osztály függvényeinek azon alosztálya, mely $(E-E_1)$-en β-kitevős *Lipschitz*-feltételt teljesít, n-edfokú racionális törtfüggvénnyel még E-ben egyenletesen $O(n^{-\beta})$-nyira approximálható? Vázlatos bizonyításunk van arra, hogy ha f folytonos és véges sok Lip_β-hoz tartozó ívre esik szét, akkor egyenletesen $O(n^{-\beta})$-nyira approximálható E-ben, (pontosabban $(a_{\nu-1}, a_\nu)$-ben $f(x)=\varphi_\nu(x)$-el, ahol az $a_{\nu-1}+\varepsilon\leqq x\leqq a_\nu-\varepsilon$ közben $|\varphi_\nu(x')-\varphi_\nu(x'')|\leqq c(\varepsilon)|x'-x''|^\beta$, de $[-1, +1]$-ben egyenletesen $|f(x')-f(x'')|\leqq c|x'-x''|)^\alpha$. Általánosabban, ha egy B-függvényosztály függvényei n-edfokú *polinomokkal* egyenletesen $\varepsilon(n)$-rendben approximálhatók, hogyan jellemezhetők azon E_1-részhalmazok, melyeken való „elromlás” mellett a bővebb A-osztály függvényei n-edfokú *tört*függvénnyel E-n egyenletesen $\varepsilon(n)$-nyire approximálhatók maradnak? *(I. problémakör.)*

Ugyanezen kérdéskör egy másik speciális formája a következő. FREUD GÉZA egy régebbi tétele speciális esetben azt mondja, hogy ha $f(x)$ E-ben konvex, akkor alkalmas n-edfokú $\pi_n^*(x)$ polinommal az

$$\int_{-1}^{1} |f(x)-\pi_n^*(x)|\,dx < \frac{c_{14}(f)}{n^2}$$

egyenlőtlenség áll fenn. Egybevetve ezt (18) alatti tételünkkel, az a lehetőség vetődik fel, hogy az előbbi E_1-halmazok kutatása helyett a „helyes” kérdésfeltevés talán az, hogy

$$\sup_A \min_{r_n} \max_{x\in E} |f(x)-r_n(x)|$$

értékét

$$\sup_A \min_{\pi_n} \int_{-1}^{+1} |f-\pi_n(x)|\,dx$$

értékével kell egybevetni. Ezen vizsgálataink, éppúgy, mint az előző formára vonatkozók, a kezdet kezdetén állanak. *(II. problémakör.)*

A törtfüggvények konstruktív függvénytanának korábbi, mondhatni balszerencsés alakulása egy további kérdéscsoporttal is összefügg. Az előbb mondottak szerint az első balszerencse a „direkt” problémáknál merült fel, amikoris a felmerült függvényosztályoknál a racionális approximáció nem vezetett jobb nagyságrendű egyenletes közelítésre, mint a polinomos, pedig alkalmazás szempontjából ez volna talán a legfontosabb. A második balszerencse abból következett, hogy az inverz problémákkal az előbbivel egyidejűleg kezdtek el foglalkozni. Itt ugyanis, mint azt KIS OTTÓ közlése szerint GONCSAR szovjet matemetikus megmutatta, a helyzet az *eredeti* problémafelvetés szempontjából teljesen reménytelen, amennyiben tetszőlegesen gyorsan 0-hoz tartó ε_n- és tetszőlegesen lassan 0-hoz tartó η_n-sorozatok előírása mellett található olyan E-ben folytonos $f(x)$ és a racionális törtfüggvényeknek olyan sorozata, hogy E-ben

$$|f(x)-r_n(x)|\leqq\varepsilon_n$$

és $f(x)$-nek $\frac{1}{n}$-hosszú közre vonatkozó folytonossági modulusa $\geqq \eta_n$. E tétel már nem olyan meglepő, ha meggondoljuk, hogy $f(x)=\frac{1}{x}$, mint *függvény*, nem is folytonos, pedig önmagával mint n-edfokú törtfüggvénnyel, 0-hibával approximálható; várható, hogy az $x=0$-nál levő pólust egyre kevesebbel eltolva a valós tengelytől a kapott függvényekből összeállítható kívánt tulajdonságú *folytonos* is. Ez tényleg így is van. E hiányosságot GONČSAR olyan eredményei, melyek egyike szerint abból, hogy alkalmas $r_n^*(x)$ sorozattal $[-1, +1]$-ben egy fix $\varepsilon>0$-val

$$|f(x)-r_n^*(x)| \leqq \frac{1}{n^{1+\varepsilon}},$$

következik, hogy $f(x)$ majdnem mindenütt deriválható, nem teljesen pótolják. Közelebb áll DOLZENKO azon 1962-es tétele, mely szerint, ha $\Sigma\varepsilon_\nu<\infty$, $\varepsilon_\nu>0$ és E-n $|f-r_n^*|<\varepsilon_n$, akkor f abszolút folytonos. A *Newmann*-féle törtfüggvények pólusainak előbb mondott tanulmányozása azt sejteti, hogy az ez irányú szisztematikus pozitív eredmények olyanok lesznek, hogy a racionális approximáció rendje, kombinálva a közelítő törtfüggvények pólusainak E-től való minimális távolságával vagy eloszlásával, enged meg majd következtetést a függvény struktúrájára *kivételes halmaz nélkül (III. problémakör)*. Ez irányú vizsgálataink is a kezdet kezdetén vannak.

(Beérkezett: 1965. VI. 5.)

EGY KONVOLÚCIÓS TÍPUSÚ INTEGRÁLEGYENLET NUMERIKUS MEGOLDÁSA ÉS ENNEK FELHASZNÁLÁSA GAUSS-FÜGGVÉNY SZUPERPOZÍCIÓK FELBONTÁSÁRA

Írta: MEDGYESSY PÁL

Szentmártony Tibor,
az MTA Alkalmazott
Matematikai Intézete
egykori munkatársa
emlékének.

1.

A gyakorlatban sokszor találkozunk a következő problémával:
Tudjuk, hogy egy $g(x)$ függvény [1]

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{(x-y)^2}{4\lambda}}}{\sqrt{4\pi\lambda}} h(y)\, dy \qquad (-\infty < x < \infty,\ 0 < \lambda < \Lambda) \tag{1.1}$$

alakú, ahol $h(x) \geqq 0$ és a λ paraméter értéke az adott $(0, \Lambda)$ intervallum egy pontja; $g(x)$ maga *nem* tartalmazza λ-t paraméterként. $g(x)$ bizonyos értékeiről mérési adataink vannak; ezek lehetnek $g(x)$ grafikonjának valamilyen $-L \leqq x \leqq L$ szakaszáról leolvasott ordinátaértékek is. Hogyan határozhatjuk meg — közelítőleg — ezekből az adatokból $h(x)$ $(-L \leqq x \leqq L)$ értékét?

Tulajdonképp egy konvolúciós típusú, *Fredholm*-féle I. fajú integrálegyenlet numerikus megoldásáról van itt szó.

A megoldás előállításához természetesen feltevéseket kell tennünk az (1.1)-ben szerplő $h(x)$ függvényre. Előbb azonban megjegyezzük, hogy csillagászati, spektroszkópiai stb. vonatkozásain kívül (lásd pl. [1], 101—108. o.) problémánk a következő alakban is jelentkezik:

Definiálja az $f(x)$ függvényt

$$f(x) = \sum_{k=1}^{N} p_k \frac{e^{-\frac{(x-\alpha_k)^2}{4\beta_k}}}{\sqrt{4\pi\beta_k}}, \tag{1.2}$$

ahol $p_k > 0$, $0 < \beta_1 \leqq \beta_2 \leqq \ldots \leqq \beta_N$, és α_k $(k = 1, 2, \ldots, N)$ tetszőleges valós szám; ekkor azt mondjuk: $f(x)$ az $\frac{e^{-\frac{(x-\alpha_k)^2}{4\beta_k}}}{\sqrt{4\pi\beta_k}}$ $(k = 1, 2, \ldots, N)$ normális sűrűségfüggvények ($f(x)$ *komponensei*) p_k *súlyokkal* vett *szuperpoziciója.* Meghatározandók $f(x)$ $(-L \leqq x \leqq L)$ grafikonja alapján az $N, p_k, \alpha_k, \beta_k$ $(k = 1, 2, \ldots, N)$ paraméterek (vagy ezek egy részének) közelítő értékei; az erre vezető eljárást az $f(x)$ szuperpozíció (numerikus) *felbontásának* nevezzük.

[1] Itt és a továbbiakban *Riemann*-integrálok szerepelnek.

Normális és más sűrűségfüggvények szuperpozicióinak felbontásáról szólt a szerző [2] munkája és több dolgozata. Mindezekből azonban csak (1.2) felbontásának egyik módszerével foglalkozunk itt. Ennek az a lényege, hogy $f(x)$ $(-L \leqq x \leqq L)$ grafikonja segítségével több, egyre nagyobb, pozitív λ értékhez közelítőleg előállítjuk az

$$(1.3) \qquad f^*(x;\lambda) = \sum_{k=1}^{N} p_k \frac{e^{-\frac{(x-\alpha_k)^2}{4(\beta_k-\lambda)}}}{\sqrt{4\pi(\beta_k-\lambda)}} \qquad (-L \leqq x \leqq L)$$

szuperpozició grafikonját. Ez midaddig lehetséges, amíg a felhasznált λ-érték β_1-nél kisebb. Minden alkalmazott λ-hoz olyan $f^*(x;\lambda)$ szuperpozició tartozik, melyben az egyes komponensek szintén normális sűrűségfüggvények, csak grafikonjuk *keskenyebb*, mint $f(x)$ megfelelő komponensének grafikonja.[2] Így $f^*(x;\lambda)$ grafikonjában — közelítő előállításakor is — az egyes komponensek grafikonjai *különváltabban* mutatkoznak meg, mint $f(x)$ grafikonjában, A különváltság annál jobb, minél közelebb van a felhasznált λ-érték β_1-hez. Sokszor annyira jó, hogy a komponensek grafikonjai szinte egymást nem is zavarva jelennek meg. Ekkor a komponensek száma, N, és paramétereinek közelítő értékei könnyen megállapíthatók. Kisebb fokú különváltság esetében, persze, nem kaphatunk ennyi adatot.

Az egész módszer alapja tehát az (1.3) alatti $f^*(x;\lambda)$ — a felbontás *bázisa* — grafikonjának közelítő előállítása bizonyos szakaszon. Világos, hogy ha $\Lambda=\beta_1$, az (1.1) integrálegyenletet $h(y)\equiv f^*(y;\lambda)$ és $g(x)\equiv f(x)$ kielégítik. Ha tehát $f(x)$ $(-L \leqq x \leqq L)$ grafikonja adva van, a felbontás bázisa grafikonjának közelítő előállítása kiindulási problémánkkal ekvivalens — és annak megoldása egyszersmind *új módszert fog szolgáltatni az* (1.2) *szuperpozíció felbontására.*

Visszatérve (1.1) vizsgálatára, már most megjegyezzük, hogy abban fel fogjuk használni F. JOHN [4] dolgozatának egyes eredményeit. Erre helyenként külön is utalunk.

A következő tétel az (1.1)-ben szereplő $h(x)$ függvényre kirótt bizonyos feltételek mellett megadja $h(x)$-nek $g(x)$ alapján történő egzakt előállítását, vagyis alapproblémánk megoldását.

1.1. TÉTEL. *Legyen* $h(x)$ $(-\infty<x<\infty)$ *vagy* A) *polinom, vagy* B) *mindenütt folytonos függvény, mely nem negatív és korlátos is* $(0 \leqq h(x) < K)$. *Ekkor*

(a) *az* (1.1) *alatti*

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{(x-y)^2}{4\lambda}}}{\sqrt{4\pi\lambda}} h(y)\,dy \qquad (-\infty<x<\infty,\ 0<\lambda<\Lambda)$$

függvény létezik és a B) *esetben korlátos, azaz* $|g(x)| \leqq \mu$;

(b) $g^{(r)}(x)$ *létezik* $(r=1,2,3,\ldots)$ *és*

$$g^{(r)}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^r}{\partial x^r}\left[\frac{e^{-\frac{(x-y)^2}{4\lambda}}}{\sqrt{4\pi\lambda}}\right] h(y)\,dy;$$

[2] β_k-nak $(k=1,2,\ldots,N)$ $\beta_k-\lambda$-val való behelyettesítése ugyanis $f(x)$ k-adik komponense grafikonjának *összenyomásával* ekvivalens.

(c) *minden, a* $0 \leqq t < 1$ *feltételnek eleget tevő t-re a*

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^r}{r!} g^{(2r)}(x) t^r \qquad (-\infty < x < \infty, 0 < \lambda < \Lambda)$$

függvénysor egyenletesen konvergens;

(d) *ha*

$$\lim_{t \to 1} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^r}{r!} g^{(2r)}(x) t^r = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^r}{r!} g^{(2r)}(x) \tag{1.4}$$

$$(-\infty < x < \infty, \ 0 < \lambda < \Lambda, \ 0 \leqq t < 1),$$

akkor

$$h(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^r}{r!} g^{(2r)}(x), \tag{1.5}$$

illetve

$$h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{y^2}{4\lambda}}}{\sqrt{4\pi\lambda}} g(x+iy)\, dy \qquad (-\infty < x < \infty, 0 < \lambda < \Lambda). \tag{1.6}$$

BIZONYÍTÁS. Az állítás az A) esetben triviális. A B) esetben: (a) nyilvánvaló. (b) a paraméteres integrálok deriválására vonatkozó, ismert tételből következik, felhasználva azt, hogy x és y minden értékére (1.1) integrandusza folytonos, x szerint akárhányszor parciálisan deriválható, e parciális deriváltak is folytonosak x és y szerint, emellett y szerinti integráljuk x bármely értéke mellett egyenletesen konvergens. (Ugyanis

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^{2r}}{\partial x^{2r}} \left[\frac{e^{-\frac{(x-y)^2}{4\lambda}}}{\sqrt{4\pi\lambda}} \right] h(y)\, dy \right| \leqq \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial^{2r}}{\partial x^{2r}} \left[\frac{e^{-\frac{(x-y)^2}{4\lambda}}}{\sqrt{4\pi\lambda}} \right] \right| h(y)\, dy \leqq \tag{1.7}$$

$$\leqq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1{,}09\sqrt{(2r)!}}{2^r \lambda^r} \frac{e^{-\frac{(x-y)^2}{8\lambda}}}{\sqrt{4\pi\lambda}} K\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1{,}09 K\sqrt{(2r)!}}{2^r \lambda^r} \frac{e^{-\frac{y^2}{8\lambda}}}{\sqrt{4\pi\lambda}}\, dy =$$

$$= \frac{1{,}09\sqrt{2}K\sqrt{(2r)!}}{2^r \lambda^r} < \infty;$$

a felhasznált egyenlőtlenség megtalálható [2], 98. o.-án).

A (c) állítás, H. POLLARD [3] cikkének gondolatait követve, így látható be:

$$g^{(2r)}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{He_{2r}\left(\frac{x-y}{\sqrt{2\lambda}}\right) e^{-\frac{(x-y)^2}{4\lambda}}}{\sqrt{4\pi\lambda}(2\lambda)^r} h(y)\, dy,$$

(ahol

$$He_{2r}(x) = (-1)^{2r} e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^{2r} e^{-\frac{x^2}{2}}}{dx^{2r}},$$

vagyis az $e^{-\frac{x^2}{2}}$-vel generált $2r$ indexű *Hermite*-polinom). Képezzük a $0 \leqq t < 1$ feltételnek eleget tevő t-vel a

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^r}{r!} g^{(2r)}(x) t^r = \tag{1.8}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4\pi\lambda}} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r t^r}{2^r r!} \int_{-\infty}^{\infty} He_{2r}\left(\frac{x-y}{\sqrt{2\lambda}}\right) e^{-\frac{(x-y)^2}{4\lambda}} h(y)\, dy$$

függvénysort.

Az (1.7) alatti egyenlőtlenség segítségével egyszerűen belátható, hogy (1.8) bal oldala, mint x egyes függvényeinek sora, $0 \leqq t < 1$ esetén egyenletesen konvergens.

A (d) állítás esetében (1.7)-ből következik, hogy

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_{r=0}^{\infty} \left| \frac{(-1)^r t^r}{2^r r!} \frac{\partial^{2r}}{\partial x^{2r}} \frac{e^{-\frac{(x-y)^2}{4\lambda}}}{\sqrt{4\pi\lambda}} h(y) \right| \right\} dy < \infty.$$

Következésképp (1.8) jobb oldalán az összegezés és az integrálás felcserélhető; felhasználva a

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r He_{2r}(x)\, t^r}{2^r r!} = \frac{e^{-\frac{x^2 t}{2(1-t)}}}{\sqrt{1-t}} \qquad (0 \leqq t < 1)$$

összefüggést (ez lényegében megtalálható pl. [3] 580. o.-án), végül is azt kapjuk, hogy

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^r}{r!} g^{(2r)}(x)\, t^r = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{(x-y)^2}{4\lambda(1-t)}}}{\sqrt{4\pi\lambda(1-t)}} h(y)\, dy. \tag{1.9}$$

De (1.9) jobb oldala $t \to 1$ esetén $h(x)$-hez tart (lásd pl. [5], II. Teil, 534. o.); ebből és (1.4)-ből következik (1.5):

A formálisan azonnal belátható (1.6) összefüggés bizonyítása visszavezethető a [4] 130. o.-án (6) és (7) alatt található képletekre, illetve utóbbiak ugyanott közölt forrására.

Megjegyzendő, hogy tételünk más mellékfeltételek mellett is kimondható; pl. igaz a $h(x) \geqq 0$ megszorítás *nélkül* is. Jelenleg a közölt alakja a legmegfelelőbb.

F. John [4] cikkében (1.5) bizonyos hővezetési egyenlet negatív λ $(-\Lambda < \lambda < 0)$ időponthoz tartozó $h(x)$ megoldását adja, ha a $\lambda = 0$-hoz tartozó kezdeti feltétel $g(x)$. Ezt a tényt azonban nem használjuk fel itt, jóllehet formálisan kapcsolatban van normális sűrűségfüggvények keverékének felbontásával is (l. [6]). Minket a következőkben csak (1.1) (1.5) segítségével történő numerikus megoldása érdekel; (1.5) felhasználása folytán vizsgálataink természetesen formális kapcsolatban lesznek [4] egyes részeivel és eredményeivel.

2.

Rátérünk (1.1) numerikus megoldására, amelyet az (1.5) alatti

$$h(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^r}{r!} g^{(2r)}(x) \qquad (-\infty < x < \infty, 0 < \lambda < \Lambda)$$

összefüggés alapján végezünk el. Az alább következőket lényegileg a [4] dolgozatból vettük át; részletes kidolgozásuk — melyet tanulságosnak tartunk itt ismertetni — helyenként új.

$g(x)$ $(-L \leqq x \leqq L)$ grafikonjából a valóságban nem kaphatjuk meg $g(x)$ értékeit; az x abszcisszához tartozó grafikon-ordináta leolvasása (kimérése) valamilyen $g^*(x)$ értéket ad, mely $h(x)$-hez közel van. Általában azonban csak azt tudjuk, hogy

$$|g(x) - g^*(x)| < \varepsilon,$$

ahol ε ismert.

Jelöljünk ki a $[-L, L]$ szakaszon egy ξ pontot, ettől jobbra és balra, tőle és egymástól egyforma h távolságra vegyünk fel rácspontokat. A $h(\xi)$ függvényértéket ármost az egyes rácspontokban leolvasott $g^*(\xi + jh)$ $(j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ grafikonordinátaértékek

$$\sum_{j=-m}^{m} c_j^{(m)}(\lambda)\, g^*(\xi + jh) = h^*(\xi) \tag{2. 1}$$

$(m = 1, 2, 3, \ldots)$ alakú lineáris kifejezésével akarjuk megközelíteni; itt a $c_j^{(m)}(\lambda)$ együtthatókat nyilván λ függvényének kell feltételeznünk.

Meghatározzuk a közelítés jellegét: az általános szokásnak megfelelően tekintjük azt az $R_{2m}(x)$ $2m$-ed fokú interpolációs polinomot, melyre fennáll, hogy

$$R_{2m}(\xi + jh) = g(\xi + jh) \qquad (j = 0, \pm 1, \ldots, \pm m)$$

és kikötjük, hogy az $R_{2m}(x)$ egyes értékeivel (tehát *nem* a mérési adatokkal, hanem a *pontos* függvényértékekkel) (2.1) mintájára képezett lineáris kifejezés azonos legyen (1.1)-nek a $g(x) \equiv R_{2m}(x)$-hez tartozó megoldásával, vagyis, hogy álljon fenn — (1.4) alapján — az alábbi azonosság:

$$\sum_{j=-m}^{m} c_j^{(m)}(\lambda)\, R_{2m}(\xi + jh) \equiv \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^r}{r!} R_{2m}^{(2r)}(\xi) \qquad (-L \leqq \xi \leqq L, 0 < \lambda < \Lambda). \tag{2. 2}$$

Figyelembe véve, hogy *bármely* $2m$-ed fokú $T_{2m}(x)$ polinomra fennáll, hogy

$$\sum_{r=0}^{m} \frac{(-\lambda)^r}{r!} T_{2m}^{(2r)}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{y^2}{4\lambda}}}{\sqrt{4\pi\lambda}} T_{2m}(x + iy)\, dy,$$

(erről $T_{2m}(x + iy)$-t az x hely körül *Taylor*-sorba fejtve, majd tagonként integrálva azonnal meggyőződhetünk) ez így is írható:

$$\sum_{j=-m}^{m} c_j^{(m)}(\lambda) \quad R_{2m}(\xi + jh) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{y^2}{4\lambda}}}{\sqrt{4\pi\lambda}} R_{2m}(\xi + iy)\, dy. \tag{2. 3}$$

A (2.2)-re vezető megállapodás azonban azt is eredményezi, hogy $c_j^{(m)}(\lambda)$ $(j=1, 2, \ldots, m;\ m=1, 2, 3, \ldots)$ egyértelműen meghatározható. Fejtsük ugyanis $R_{2m}(\xi+jh)$-t *Taylor*-sorba a ξ hely körül. (2.2) bal oldalát $R_{2m}(\xi)$ deriváltjai szerint átrendezve és ezek együtthatóit a jobb oldal megfelelő együtthatóival azonossá téve, a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$\text{(2. 4)} \qquad \sum_{r=-m}^{m} c_r^{(m)}(\lambda) r^s = \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad s = 1, 3, \ldots, 2m-1 \\ \dfrac{s!\,(-\lambda)^{s/2}}{(s/2)!\,h^s} & \text{ha} \quad s = 0, 2, \ldots, 2m \end{cases} \qquad (0<\lambda<\Lambda)$$

(0^0-t 1-nek értelmezzük).

Világos, hogy a most közölt gondolatmenet akkor is igaz, ha $R_{2m}(x)$ helyébe *bármilyen* $2m$-ed fokú polinomot írunk.

A (2.4) egyenletrendszernek van egyértelmű megoldása (lásd [4], 133. o.); $c_j^{(m)}(\lambda)$-t azonban mégsem ebből határozzuk meg, hanem a következő fogással:

(2.2) és (2.3) fennáll arra a $Q_{2m,j}(x)$ $2m$-ed fokú polinomra is, melyet így definiálunk:

$$Q_{2m,j}(rh) = \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad r \neq j \\ 1 & \text{ha} \quad r = j \end{cases} \qquad (r = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm m),$$

ahol j egyik a $0, \pm 1, \ldots, \pm m$ számok közül. Ezek a kikötések $Q_{2m,j}(x)$-et egyértelműen meghatározzák. Így tehát (2.2) ill. (2.3)-ban $R_{2m}(x)$ helyett $Q_{2m,j}(x)$-et és $\xi=0$-t írva, azt kapjuk, hogy

$$c_j^{(m)}(\lambda) = \sum_{r=0}^{m} \frac{(-\lambda)^r}{r!} Q_{2m,j}^{(2r)}(0) \qquad (0<\lambda<\Lambda),$$

illetve, hogy

$$\text{(2. 5)} \qquad c_j^{(m)}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{u^2}{4\lambda}}}{\sqrt{4\pi\lambda}} Q_{2m,j}(iu)\,du \qquad (0<\lambda<\Lambda).$$

Elég tehát $Q_{2m,j}(iu)$-t előállítani. A *Lagrange*-féle interpolációs képletet alkalmazva (az alappontok $-mh, -(m-1)h, \ldots, (j-1)h, jh, (j+1)h, \ldots, (m-1)h, mh$), azt kapjuk, hogy

$$Q_{2m,j}(iu) = \frac{(-1)^{m-j}}{(m+j)!\,(m-j)!\,h^{2m}} \frac{\prod\limits_{\varrho=-m}^{m} (iu-\varrho h)}{(iu-jh)} =$$

$$= \frac{(-1)^{-j}}{(m+j)!\,(m-j)!\,h^{2m}} \left[\frac{\prod\limits_{\varrho=1}^{m} (u^2+\varrho^2 h^2)}{u^2+j^2h^2} \right] (u^2+ijhu).$$

Ezt (2.5)-be beírva és az $u=hy$ összefüggéssel az y új változót bevezetve, végül is

$$\text{(2. 6)} \qquad c_j^{(m)}(\lambda) = \frac{(-1)^j}{(m+j)!\,(m-j)!} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{h^2y^2}{4\lambda}}}{\sqrt{4\pi(\lambda/h^2)}} \frac{y^2(y^2+1^2)\ldots(y^2+m^2)}{y^2+j^2} dy$$

$$(0<\lambda<\Lambda).$$

(2.6)-ból látható, hogy

$$\operatorname{sign} c_j^{(m)}(\lambda) = (-1)^j, \tag{2.7}$$

és

$$c_{-j}^{(m)}(\lambda) = c_j^{(m)}(\lambda).$$

Könnyen igazolható továbbá a

$$c_j^{(m)}(\lambda) = (-1)^{m+j} \binom{2m}{m+j} c_m^{(m)}(\lambda) + c_j^{(m-1)}(\lambda) \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots, m;\ 0 < \lambda < \Lambda) \tag{2.8}$$

rekurzív képlet. ($c_j^{(m)}(\lambda)$ értelmezéséből következik, hogy $c_j^{(l)}(\lambda) = 0$, ha $l < j$ ($j = 0, 1, 2, \ldots, m$); (2.4)-ből következik, hogy $c_0^{(0)}(\lambda) = 1$.)

A gyakorlatban adott m, h és λ-hoz tartozó $c_j^{(m)}(\lambda)$ értékekre van szükségünk. Közvetlen kiszámításuk így történik:

(2.6)-ból látható, hogy $c_j^{(m)}(\lambda)$ $\frac{\lambda}{h^2}$-nek m-edfokú polinomja. Írhatjuk tehát azt, hogy

$$c_j^{(m)}(\lambda) = \sum_{k=0}^{m} \beta_{j,k}^{(m)} \left(\frac{\lambda}{h^2}\right)^k \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots, m), \tag{2.9}$$

ahol $\beta_{j,k}^{(m)}$ λ-tól és h-tól független. Ha tehát a $\beta_{j,k}^{(m)}$ ($m = 1, 2, 3, \ldots;\ j, k = 0, 1, 2, \ldots, m$) mennyiségek táblázatával rendelkezünk, $c_j^{(m)}(\lambda)$-t könnyen kiszámíthatjuk.

Az említett táblázat a következő összefüggések alapján készíthető el.

(2.8)-ba (2.9)-et beírva, azt kapjuk, hogy

$$\beta_{j,k}^{(m)} = (-1)^{m+j} \binom{2m}{m+j} \beta_{m,k}^{(m)} + \beta_{j,k}^{(m-1)} \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots;\ j, k = 0, 1, 2, \ldots, m),$$

$c_0^{(0)}(\lambda) = 1$ és (2.6) alakja folytán pedig

$$\beta_{0,0}^{(m)} = 1 \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots)$$

($\beta_{j,k}^{(m)}$ definíciószerűen zérus, ha m, j vagy $k < 0$, vagy ha j vagy k m-nél nagyobb). A számításokat megkönnyítették még a következő könnyen igazolható összefüggések:

$$\beta_{j,0}^{(m)} = 0 \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots;\ j = 1, 2, \ldots, m),$$

$$\beta_{j,m}^{(m)} = \frac{(-1)^j}{m!} \binom{2m}{m+j} \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots;\ j = 0, 1, \ldots, m).$$

Így tehát $\beta_{m,k}^{(m)}$ ($m = 1, 2, 3, \ldots;\ k = 0, 1, \ldots, m$) ismeretében már bármely $\beta_{j,k}^{(m)}$ meghatározható rekurzíve. $\beta_{m,k}^{(m)}$ (2.6) integranduszában $j = m$-et írva, a szorzat kifejtésével és az integrálás elvégzésével számítható ki, illetve a mondott műveletek elvégzése után könnyen felírható a

$$\beta_{m,k}^{(m)} = -\frac{(2k-1)}{m(2m-1)} \beta_{m-1,k-1}^{(m-1)} - \frac{(m-1)^2}{2m(2m-1)} \beta_{m-1,k}^{(m-1)} \qquad (k = 1, 2, \ldots, m)$$

rekurzív képlet segítségével.

(2.9)-hez hasonló kifejtést a [4] dolgozat is használ; ott $\beta_{j,k}^{(m)}$ helyett $\gamma_{j,k}^{m}$ szerepel, melyet $\beta_{j,m}^{(m)}$-mel a $\gamma_{j,k}^{m}=m^k\beta_{j,k}^{(m)}$ összefüggés kapcsol össze; a $\gamma_{j,k}^{m}$-ek [4]-ben közölt (részleges!) táblázatát a fenti rekurzív összefüggések felhasználása nélkül számították ki).

A $\beta_{j,k}^{(m)}$ együtthatók értékeit $m=0, 1, 2, 3, 4, 5$; $j, k=0, 1, \ldots, m$-re a Függelékben közöljük.

3.

Rátérünk $h(x)$ fentebb leírt közelítése hibájának vizsgálatára. Tekintsük e hiba abszolút értékét a ξ pontban, vagyis a

$$|h(\xi)-h^*(\xi)| = E$$

mennyiséget. Írjuk ezt a következő alakban:

$$E = \left| h(\xi)-h^*(\xi) - \sum_{j=-m}^{m} c_j^{(m)}(\lambda)\; g(\xi+jh) + \sum_{j=-m}^{m} c_j^{(m)}(\lambda)\; g(\xi+jh)\right|.$$

Ekkor

$$E \leqq E_1+E_2,$$

ahol

(3. 1) $$E_1 = \left| \sum_{j=-m}^{m} c_j^{(m)}(\lambda)\; [g(\xi+jh)-g^*(\xi+jh)]\right|.$$

$$E_2 = \left| h(\xi) - \sum_{j=-m}^{m} c_j^{(m)}(\lambda)\; g(\xi+jh)\right|.$$

E_1 $g(x)$ valóságos és leolvasott értékeinek eltéréseiből származik, E_2 pedig abból, hogy $h(x)$ (1.5) alakú függvénysora helyett véges kifejezést vettünk.

E hibák becslései — más vonatkozásban — [4]-ben is szerepelnek; E_2 esetében támaszkodunk is az ott közöltekre.

Vizsgáljuk először az E_1 hibatagot. Mivel feltettük, hogy

$$|g(x)-g^*(x)|<\varepsilon \qquad (-\infty<x<\infty),$$

(2.1) folytán pedig

$$|c_j^{(m)}(\lambda)| = (-1)^j c_j^{(m)}(\lambda),$$

azért

$$E_1 \leqq \varepsilon \sum_{j=-m}^{m} (-1)^j c_j^{(m)}(\lambda).$$

A jobb oldal további becslése többféleképp történhetik — többek közt komplex függvénytani segédeszközökkel is — a legegyszerűbbnek azonban a következő módszer látszik, mely különbözik a [4]-ben használttól és pontosabb eredményre vezet.

Írjuk be E_1 becslésébe $c_j^{(m)}(\lambda)$ (2.6) alatti integrál alakját; azt kapjuk, hogy

$$E_1 \leqq \frac{\varepsilon}{(2m)!} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{h^2 y^2}{4\lambda}}}{\sqrt{4\pi(\lambda/h^2)}} (y^2+1^2)\ldots(y^2+m^2) \left\{ \sum_{j=-m}^{m} \binom{2m}{m+j} \frac{y^2}{y^2+j^2} \right\} dy$$

$$(m = 1, 2, 3, \ldots).$$

$\frac{y}{y^2+j^2}$ *Fourier*-transzformáltját bevezetve könnyen igazolható, hogy

$$\sum_{j=-m}^{m} \binom{2m}{m+j} \frac{y^2}{y^2+j^2} = \frac{2^{2m+1} y}{\operatorname{sh} \pi y} \int_0^{\pi/2} \operatorname{ch} 2yv \sin^{2m} v \, dv$$

és

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{ch} 2yv \sin^{2m} v \, dv \leqq \operatorname{ch} \pi y \int_0^{\pi/2} \sin^{2m} v \, dv = \frac{\pi(2m)!}{2^{2m+1}(m!)^2} \operatorname{ch} \pi y,$$

továbbá, a Γ-függvény logaritmusára vonatkozó egyik előállításból levezethető (vö. [4], 135. o.), hogy bármely valós y-ra és $m=1, 2, 3, \ldots$-ra

$$(3.2) \qquad y^2(y^2+1^2)\ldots(y^2+m^2) = 2\, e^{\frac{\theta}{6m}} m^{2m} e^{-2m} y \operatorname{sh} \pi y \sqrt{y^2+m^2} \cdot$$
$$\cdot e^{m\left[\log\left(1+\frac{y^2}{m^2}\right) - \frac{2y}{m} \operatorname{arctg} \frac{y}{m}\right]} \qquad (0 \leqq \theta \leqq 1).$$ [3]

Mindezt, ezenkívül az

$$m! \geqq \sqrt{2\pi m}\, m^m e^{-m}$$

és

$$\operatorname{ch} \pi y \leqq e^{\pi y}$$

egyenlőtlenségeket felhasználva, valamint az y integrációs változó helyett annak m-szeresét vezetve be, azt kapjuk, hogy

$$E_1 \leqq 2\varepsilon\, e^{\frac{1}{6m}} \int_0^{\infty} \frac{e^{m\left[\pi y - 2y \operatorname{arctg} y + \frac{(m+\frac{1}{2})}{m} \log(1+y^2) - \frac{h^2 m y^2}{4\lambda}\right]}}{\sqrt{4\pi(\lambda/h^2)}} dy.$$

Jelöljük az integrálban szereplő exponenciális függvény argumentumát $mA(y, \lambda)$-val. $A(y, \lambda)[0, \infty)$-en alulról konkáv és egyetlen maximuma van az $y = y_0$ pontban,

[3] Ilyen típusú szorzatokat felhasználó vizsgálatok szempontjából hasznos tudni, hogy (3.2) bal oldala elemi függvények és egy egyszerű *Fourier*-integrál szorzataként is előállítható. Vö. A. ERDÉLYI *et al.*: *Tables of integral transforms*. Vol. I. McGraw-Hill Book Co., New York, 1954; 30. o. (3).

ahol y_0 a

$$\pi - 2 \operatorname{arctg} y_0 + \frac{y_0}{m(1+y_0^2)} - \frac{h^2 m y_0}{2\lambda} = 0$$

egyenlet gyöke. $A(y, \lambda)$-t λ_0 körül kvadratikus maradéktagos *Taylor*-sorba fejtve és ezt a maradéktagot felülbecsülve, azt kapjuk, hogy

$$A(y, \lambda) \leqq A(y_0, \lambda) - \frac{h^2 m}{4\lambda}(y-y_0)^2,$$

ahol

$$A(y_0, \lambda) = \frac{h^2 m y_0^2}{4\lambda} + \frac{(m+\frac{1}{2})}{m}\log(1+y_0^2) - \frac{y_0^2}{m(1+y_0^2)}.$$

$A(y, \lambda)$ becslését a fenti integrálba beírva és a $[0, \infty)$-en vett integrált $(-\infty, \infty)$-en vettel becsülve felül, végül is azt kapjuk, hogy

$$E_1 \leqq 2\varepsilon e^{\frac{1}{6m}} e^{mA(y_0, \lambda)}. \tag{3.3}$$

Ha $m \to \infty$, y_0 tart a

$$\pi - \frac{h^2 m \xi}{2\lambda} = 0$$

egyenlet gyökéhez, $\frac{2\pi\lambda}{mh^2}$-hez, és belátható, hogy $m \to \infty$ esetén E_1 fenti becslése tart $2\varepsilon e^{\frac{\pi^2\lambda}{h^2}}$-hez, vagyis korlátos marad, ellentétben a [4]-ben közölt becsléssel, amely *nem* korlátos.

Vizsgáljuk most E_2-t. Itt nagyjából [4] gondolatmenetét követjük. Legyen a következőkben $m \geqq 1$. $R_{2m}(x)$ definíciója és (2.3) alapján

$$\sum_{j=-m}^{m} c_j^{(m)}(\lambda)\, g(\xi + jh) = \sum_{j=-m}^{m} c_j^{(m)}(\lambda)\, R_{2m}(\xi + jh) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{u^2}{4\lambda}}}{\sqrt{4\pi\lambda}} R_{2m}(\xi + iu)\, du,$$

és (1.7) folytán

$$h(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{u^2}{4\lambda}}}{\sqrt{4\pi\lambda}} g(\xi + iu)\, du.$$

Ekkor

$$E_2 = \left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{u^2}{4\lambda}}}{\sqrt{4\pi\lambda}} [g(\xi + iu) - R_{2m}(\xi + iu)]\, du \right|$$

és, bevezetve az $u=mhy$ összefüggéssel az y változót,

$$E_2 \leqq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{m^2h^2y^2}{4\lambda}}}{\sqrt{4\pi(\lambda/m^2h^2)}} |g(\xi+imhy)-R_{2m}(\xi+imhy)|\,dy.$$

$g(x)$ tulajdonságaiból következik (vö. [4], 129. o.), hogy bármely *komplex* z-re és valós λ-ra $(0<\lambda<\Lambda)$ $g(z)$ *analitikus* függvény. $R_{2m}(z)$ is nyilván analitikus minden z-re.

Így tehát $g(\xi+imhy)-R_{2m}(\xi+imhy)$ $g(z)$ interpolációs polinomjának maradéktagja a $\xi+imhy$ helyen, amidőn az interpolációs alappontok $\xi-mh$, $\xi-(m-1)h, \ldots, \xi+(m-1)h$, $\xi+mh$. Ez a maradéktag, mint tudjuk, $g(z)$ analitikus volta folytán előállítható komplex integrál alakjában (vö. [4], 137. o. (40)):

$$g(\xi+imhy)-R_{2m}(\xi+imhy)=\frac{\omega(\xi+imhy)}{2\pi i}\int_C \frac{g(\zeta)\,d\zeta}{\omega(\zeta)(\zeta-\xi-imhy)}, \tag{3.4}$$

ahol C egyszerű zárt görbe, melynek a $\xi+imhy$, $\xi-mh, \xi-(m-1)h, \ldots, \xi+$ $+(m-1)h$, $\xi+mh$ pontok mind a belsejében vannak és

$$\omega(z)=(z-\xi+mh)(z-\xi+[m-1]h)\ldots(z-\xi-[m-1]h)(z-\xi-mh).$$

Legyen C egy C_T paralelogramma-kerület, melyet az $\operatorname{Im}\zeta=\pm mh\eta$ $(\eta>|y|)$ és $\operatorname{Re}\zeta=\xi\pm\Delta$ $(\Delta>mh)$ összefüggésekkel definiált egyenesek származtatnak. Megjegyezzük, hogy η y-nak függvénye, $\eta=\eta(y)$.

Mivel bármely valós A és B-re

$$g(A+Bi)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-\frac{(A+iB-u)^2}{4\lambda}}}{\sqrt{4\pi\lambda}}h(u)\,du,$$

egyszerű becslésekkel belátható, hogy C_T függőleges oldalai mentén (3.4) $O(e^{-k\Delta^2})$ (K konstans) és így Δ-t minden határon túl növelve, az integrációs utat az $\operatorname{Im}\zeta=$ $=\pm mh\eta$-val definiált $y=\pm mh\eta$ egyenletű párhuzamosokba vihetjük át. Figyelembe véve, hogy $h(x)>0$, $g(A+iB)$ előbbi kifejezéséből következik, hogy e párhuzamosokon

$$|g(\zeta)|\equiv|g(x\pm imh\eta)|\leqq e^{\frac{m^2h^2\eta^2}{4\lambda}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-\frac{(x-u)^2}{4\lambda}}}{\sqrt{4\pi\lambda}}h(u)\,du=g(x)e^{\frac{m^2h^2\eta^2}{4\lambda}}\leqq\mu e^{\frac{m^2h^2\eta^2}{4\lambda}},$$

mivel pedig ez bármely λ-ra $(0<\lambda<\Lambda)$ igaz,

$$|g(\zeta)|\leqq\mu e^{\frac{m^2h^2\eta^2}{4\lambda}}.$$

$\omega(\xi + imhy)$, $\omega(\zeta)$ értékét beírva, mindebből azt kapjuk, hogy

$$|g(\xi + imhy) - R_{2m}(\xi + imhy)| \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{2\pi}\left|\sum_{\varrho=-m}^{m}(imhy + \varrho h)\right| \mu e^{\frac{m^2h^2\eta^2}{4\Lambda}} \int\limits_{\operatorname{Im}\zeta = \pm mh\eta} \frac{|d\zeta|}{|\zeta - \xi|\,|\zeta - \xi - imhy| \left|\prod_{\nu=1}^{m}([\zeta - \xi]^2 - \nu^2 h^2)\right|} =$$

$$= \frac{\mu}{2\pi} e^{\frac{m^2h^2\eta^2}{4\Lambda}} h^{2m+1} m|y| \prod_{\varrho=1}^{m}(m^2y^2 + \varrho^2)\cdot$$

$$\cdot\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{|x - imh\eta|\,|x - imh\eta - imhy| \left|\prod_{\nu=1}^{m}([x - imh\eta]^2 - \nu^2 h^2)\right|} + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{|x + imh\eta|\,|x + imh\eta - imhy| \left|\prod_{\nu=1}^{m}([x + imh\eta]^2 - \nu^2 h^2)\right|}\right].$$

De ha $\eta \geqq 1$,

$$\left|\prod_{\nu=1}^{m}([x \pm imh\eta]^2 - \nu^2 h^2)\right| \geqq \prod_{\nu=1}^{m}(m^2h^2\eta^2 + \nu^2 h^2)$$

és

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{|x \pm imh\eta|\,|x \pm imh\eta - imhy|} \leqq \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + m^2h^2(\eta - |y|)^2} = \frac{\pi}{mh(\eta - |y|)},$$

és így

$$|g(\xi + imhy) - R_{2m}(\xi + imhy)| \leqq \frac{\mu e^{\frac{m^2h^2\eta^2}{4\Lambda}} |y| \prod_{\varrho=1}^{m}(m^2y^2 + \varrho^2)}{(\eta - |y|)\prod_{\nu=1}^{m}(m^2\eta^2 + \nu^2)} \qquad (\eta \geqq 1,\ \eta > |y|).$$

Így tehát

$$(3.5) \qquad E_2 \leqq 2\mu \int\limits_{0}^{\infty} \frac{e^{-\frac{m^2h^2y^2}{4\lambda} + \frac{m^2h^2\eta^2}{4\Lambda}}}{\sqrt{4\pi(\lambda/m^2h^2)}} \left(\frac{y}{\eta - y}\right) \prod_{\varrho=1}^{m}\left(\frac{m^2y^2 + \varrho^2}{m^2\eta^2 + \varrho^2}\right) dy \qquad (\eta \geqq 1,\ \eta > y).$$

(3.2) folytán, ha $y \geqq 0$,

$$e^{-\frac{m^2h^2y^2}{4\lambda}+\frac{m^2h^2\eta^2}{4\Lambda}}\left(\frac{y}{\eta-y}\right)\prod_{\varrho=1}^{m}\left(\frac{m^2y^2+\varrho^2}{m^2\eta^2+\varrho^2}\right) \leqq \tag{3.6}$$

$$\leqq e^{\frac{1}{6m}}\left(\frac{\eta}{\eta-y}\right)\sqrt{\frac{1-e^{-2\pi m y}}{1-e^{-2\pi m\eta}}}\cdot\sqrt{\frac{1+y^2}{1+\eta^2}}\cdot$$

$$\cdot e^{m\left[\pi y+\log(1+y^2)-2y\,\mathrm{arctg}\,y-\frac{mh^2y^2}{4\lambda}\right]}\cdot e^{-m\left[\pi\eta+\log(1+\eta^2)-2\eta\,\mathrm{arctg}\,\eta-\frac{mh^2\eta^2}{4\Lambda}\right]} <$$

$$< e^{\frac{1}{6m}}\left(\frac{\eta}{\eta-y}\right)e^{m[P(y,\lambda)-P(\eta,\Lambda)]} \quad (\eta \geqq 1,\ \eta > y \geqq 0),$$

ahol

$$P(y,\lambda) = \pi y+\log(1+y^2)-2y\,\mathrm{arctg}\,y-\frac{mh^2y^2}{4\lambda},$$

$P(\eta, \Lambda)$-t pedig ebből y helyett η-t és λ helyett Λ-t írva kapjuk.

A $P(y,\lambda)-P(\eta,\Lambda)$ kifejezést a következőképp majoráljuk kezelhetőbb kifejezéssel:

Könnyű igazolni, hogy a $P(y,\lambda)-P(\eta,\Lambda)$ függvénynek maximuma van $[0, \infty)$-en; tekintsük ugyanis első deriváltját, *feltételezve*, hogy $0 \leqq \frac{d\eta}{dy} < \infty$ és tegyük 0-val egyenlővé:

$$\frac{d}{dy}[P(y,\lambda)-P(\eta,\Lambda)] = \pi-2\,\mathrm{arctg}\,y-\frac{mh^2y}{2\lambda}- \tag{3.7}$$

$$-\left(\pi-2\,\mathrm{arctg}\,\eta-\frac{mh^2\eta}{2\Lambda}\right)\frac{d\eta}{dy} \quad (y \geqq 0).$$

Legyen a

$$\pi-2\,\mathrm{arctg}\,y-\frac{mh^2y}{2\lambda} = 0 \tag{3.8}$$

egyenlet pozitív gyöke y_0, a

$$\pi-2\,\mathrm{arctg}\,\eta-\frac{mh^2\eta}{2\Lambda} = 0 \tag{3.9}$$

egyenlet pozitív gyöke pedig η_0. Grafikus ábrázolás segítségével belátható, hogy $\eta_0 > y_0$ és hogy $\eta_0 - y_0$ m-mel nő. Minthogy η_0 $\eta(y)$ egyik értéke, meg kell követelnünk $\eta_0 \geqq 1$ fennállását, vagyis azt, hogy

$$\frac{\pi-2\,\mathrm{arctg}\,\eta_0}{\eta_0} = \frac{mh^2}{2\Lambda} \leqq \frac{\pi}{2}$$

legyen.

Ennélfogva a *következőkben kikötjük, hogy*

$$mh^2 \leqq \pi\Lambda.$$

Válasszuk meg most $\eta(y)$-t így:

$$\eta(y) = \sup_{0 \leq y < \infty} (\eta_0, \eta_0 - y_0 + y). \tag{3.10}$$

Ez a választás megfelel az $\eta(y) \geq 1$, $\eta(y) > y$ követelményeknek, emellett

$$\eta(y_0) = \eta_0.$$

Így tehát y_0 gyöke mind a (3.8), mind a (3.9) egyenletnek, vagyis pozitív gyöke (3.7)-nek, bármekkora is $\frac{d\eta}{dy}$.

$P(y, \lambda) - P(\eta, \Lambda)$-nak y_0-ban maximuma van, mert η (3.10) alatti megválasztása mellett

$$\frac{d^2}{dy^2}[P(y, \lambda) - P(\eta, \Lambda)] = -\frac{2}{1+y^2} - \frac{mh^2}{2\lambda} + \tag{3.11}$$

$$+\left(\frac{d\eta}{dy}\right)^2 \left(\frac{2}{1+\eta^2} + \frac{mh^2}{2\Lambda}\right) \leq -\frac{mh^2}{2}\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\Lambda}\right) < 0.$$

Fejtsük maradéktagos *Taylor*-sorba — kvadratikus tagig bezárólag — $P(b, \lambda) - P(\eta, \Lambda)$-t az y_0 hely körül; (3.11) folytán

$$P(y, \lambda) - P(\eta, \Lambda) \leq P(y_0, \lambda) - P(\eta_0, \Lambda) - \frac{mh^2}{4}\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\Lambda}\right)(y - y_0)^2. \tag{3.12}$$

(3.8) és (3.9) segítségével azt kapjuk, hogy

$$P(y_0, \lambda) - P(\eta_0, \Lambda) = \log(1 + y_0^2) + y_0 \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{y_0}\right) - \left[\log(1 + \eta_0^2) + \eta_0 \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\eta_0}\right)\right];$$

mivel azonban a $\log(1+u^2) + u \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{u}\right)$ függvény monoton növekvő $[0, \infty)$-en és $\eta_0 > y_0$, a jobb oldal *negatív*.

(3.5)-be beírva (3.6)-ot és $P(y, \lambda) - P(\eta, \Lambda)$ (3.12) alatti becslését felhasználva, $\frac{\eta}{\eta - y}$-t pedig a (3.10)-ből következő

$$\frac{\eta}{\eta - y} \leq 1 + \frac{y}{\eta_0 - y_0}$$

egyenlőtlenség alapján felülbecsülve, az integrálás elvégzése után végül is azt kapjuk, hogy

$$E_2 \leq \frac{2\mu}{\eta_0 - y_0}\left[\frac{\eta_0}{\sqrt{1 - \lambda/\Lambda}} + \frac{1}{mh}\sqrt{\frac{\lambda}{\pi}}\frac{1}{1 - \lambda/\Lambda}\right] \cdot e^{\frac{1}{6m}} e^{m[P(y_0, \lambda) - P(\eta_0, \Lambda)]}, \tag{3.13}$$

feltéve, hogy

$$mh^2 \leq \pi\Lambda \quad (m \geq 1).$$

Itt nem részletezendő, grafikus eszközökkel végrehajtható vizsgálat azt mutatja, hogy ez a korlát zérushoz tart, ha $m \to \infty$.

4.

Foglaljuk össze, hogyan történik a fentiek alapján az (1.2) alatti

$$f(x) = \sum_{k=1}^{N} p_k \frac{e^{-\frac{(x-\alpha_k)^2}{4\beta_k}}}{\sqrt{4\pi\beta_k}}$$

$(0<\beta_1 \leqq \beta_2 \leqq \ldots \leqq \beta_N,\ p_k>0,\ k=1, 2, \ldots, N)$ normális sűrűségfüggvény-szuperpozíció felbontása.

Az 1. pontban láttuk, hogy a felbontás alapja az

$$f^*(x; \lambda) = \sum_{k=1}^{N} p_k \frac{e^{-\frac{(x-\alpha_k)^2}{4(\beta_k-\lambda)}}}{\sqrt{4\pi(\beta_k-\lambda)}} \qquad (0<\lambda<\beta_1)$$

függvény (a felbontás *bázisa)* grafikonjának közelítő előállítása általunk megadott λ mellett és hogy ez ekvivalens kiindulási problémánk megoldásával, ha abban $g(x)$ helyett $f(x)$-et, $h(y)$ helyett $f^*(y; \lambda)$-t, Λ helyett β_1-et írunk. Könnyen igazolható, hogy ezekre a függvényekre az 1.1. Tételben kimondott feltételek teljesülnek (vö. az 1.1. Tétel bizonyításával). Így tehát (1.5) folytán

$$f^*(x; \lambda) = \sum_{k=1}^{N} \frac{(-\lambda)^r}{r!} f^{(2r)}(x) \qquad (-\infty<x<\infty,\ 0<\lambda<\beta_1),$$

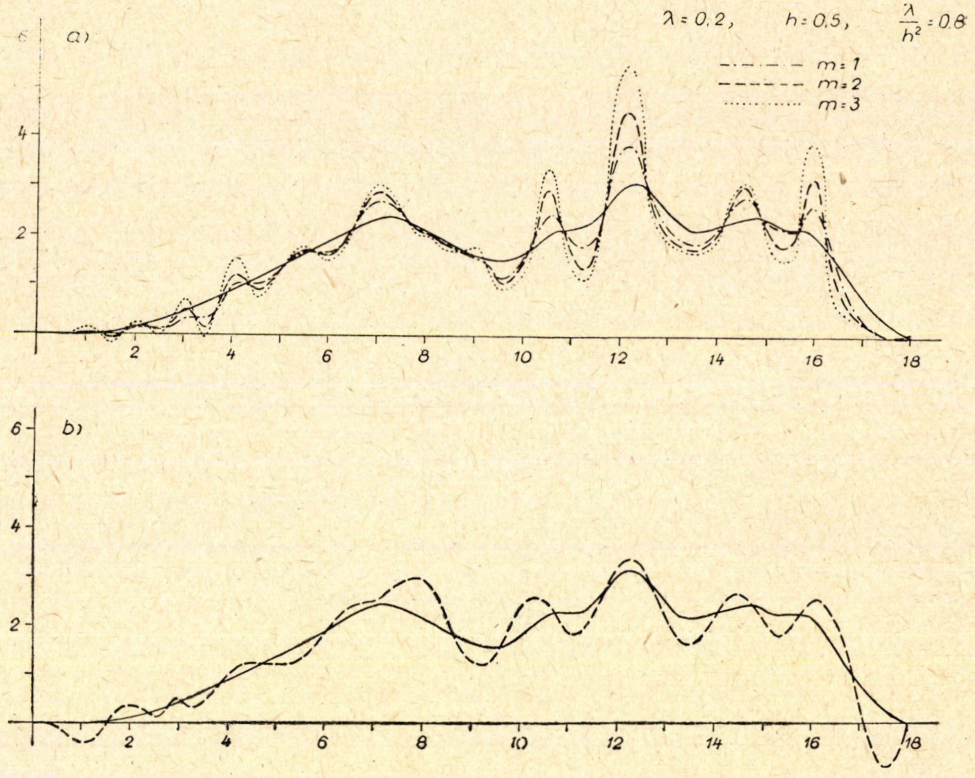
amelyet (2.1) folytán az $x=\xi$ pontban *közelítőleg* előállít az

$$\bar{f}^*(\xi; \lambda) = \sum_{j=-m}^{m} c_j^{(m)}(\lambda)\, \bar{f}(\xi+jh)$$

$(m=1, 2, 3, \ldots)$ kifejezés, ahol $\bar{f}(\xi+jh)$ az $f(x)$ grafikonjából az $x = \xi+jh$ pontban leolvasott közelítő ordinátaérték, a $c_j^{(m)}(\lambda)$ mennyiségek pedig a 2. pontban bevezetettek, melyeket λ, h és m rögzítése után a Függelékben közölt táblázat segítségével számítunk ki. Adott λ, h és m mellett a közelítés hibáját (3.2) adja meg, (3.3) és (3.13) figyelembevételével. Az ezekben szereplő ε-t most $|f(x)-\bar{f}(x)|<\varepsilon$ definiálja. ε-ra konkrét esetben általában csak megállapodásokat tehetünk. μ-t $|g(x)|\leqq\mu$ értelmezi, értéke a grafikonból leolvasható. Λ szerepét β_1 veszi át, ennek értéke azonban legfeljebb csak becsülhető az $\bar{f}^*(x; \lambda)$ grafikonjában legerősebben különváló komponensek egyes leolvasható adataiból (pl. „félszélesség"). A (3.13) fennállása feltételeként szereplő $mh^2 \leqq \pi\Lambda$ egyenlőtlenség teljesülése is csak Λ említett becslése ismeretében ellenőrizhető, — vagyis csak a felbontás elvégzése *után* állapítható meg (nagyjából), jól választottuk-e meg m és h értékét. Ezzel a hibabecslés kényes pontjait is felsoroltuk a szóban forgó felbontás esetében.

Példaként bemutatjuk egy *Tiselius*-féle készülékkel felvett $f(x)$ normális sűrűségfüggvény-szuperpozíció felbontását; grafikonjának bizonyos szakaszát az 1a) ábrán folytonos vonal mutatja. Ezt a grafikont különben már vizsgáltuk [7] dolgozatunkban. Az $f(x)$-hez tartozó $\bar{f}^*(x; \lambda)$ $(0\leqq x\leqq 18)$ $\lambda=0{,}2$, $h=0{,}5$ értékekkel kapott grafikonját $m=1$ esetén a — · — · — · — vonal, $m=2$ esetén a — — — — —

vonal, $m=3$ esetén a ······· vonal mutatja az 1a) ábrán. A ······ vonallal felrajzolt grafikon legélesebben különváló komponenseinek részletesebb vizsgálatából azt kapjuk, hogy példánkban $\beta_1 \approx 0{,}24$; ebből következik, hogy (3.13) alkalmazható.



1a és 1b ábra

A példánkban szereplő kis m értékek (1, 2, 3) mellett az E_1 és E_2 hibakorlátok elég nagyok; használhatókká csak jóval nagyobb m-ekre válnának. Mindazonáltal az 1a) ábrát felhasználhatjuk a komponensek számának és egyes adatainak megállapítására, mert a különvált komponensek grafikonrészletei egyes *Gauss*-függvénygörbék grafikonjának megfelelő részletével azonosíthatók; a tényleges hibák nem torzítják el őket oly mértékben, mint ahogy azt a hibakorlátok mutatnák. Az összkép m növelésekor nem változik, csak jobban kirajzolódnak az egyes komponensek; ez is a használhatóságra mutat. A kiolvasott adatok utólagos egyeztetése a kísérleti eredménnyel, illetve a kísérleti háttér alapján történő értékelésük természetesen nem mellőzhető. A matematikai módszer támpontok nyújtásánál többet nem adhat.

Az 1b) ábrán a — — — — — vonal a [7] dolgozatban közölt módszerrel $f^*(x;\lambda)$-ra $(0 \leqq x \leqq 18)$, $\lambda=0{,}2$, $h=0{,}5$ esetében nyert közelítés grafikonját mutatja. (Ez nem azonos a [7]-beli 1. ábrán a — — — — — vonallal felrajzolt görbével!)

A maximumok nem egészen ugyanott mutatkoznak, mint az 1a) ábrán, bár számuk — nem véve figyelembe a görbevégeket, amelyeket a hiba a legerősebben befolyásol — ugyanaz. Mivel az 1a) ábrán m növelésekor a maximumok nagyjából ugyanott maradnak, a fentiekben leírt eljárást előnyben kell részesítenünk a [7]-ben közölttel szemben. Megjegyzendő, hogy végrehajtása jóval egyszerűbb és gyorsabb, mint a [7]-ben közölté, *Fourier*-analizátor sem kell hozzá és jobban meg is felel a numerikus eljárások szellemének.

Szerző köszönetet mond MAKAI ENDRÉnek értékes tanácsaiért.

FÜGGELÉK

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{(x-y)^2}{4\lambda}}}{\sqrt{4\pi\lambda}} h(y)\, dy,$$

$$g^*(x) \approx g(x); \qquad h^*(x) \approx h(x),$$

$$h^*(x) = \sum_{j=-m}^{m} c_j^{(m)}(\lambda)\; g^*(\xi + jh) \qquad (m = 1, 2, 3, \dots).$$

$$c_{-j}^{(m)}(\lambda) = c_j^{(m)}(\lambda),$$

$$c_j^{(m)}(\lambda) = \sum_{k=0}^{m} \beta_{j,k}^{(m)} \left(\frac{\lambda}{h^2}\right)^k \qquad (j = 0, 1, 2, \dots, m).$$

A $\beta_{j,k}^{(m)}$ mennyiségek táblázata

$m = 0$

$j \backslash k$	0
0	1,00000

$m = 1$

$j \backslash k$	0	1
0	1,00000	2,00000
1	0	−1,00000

$m = 2$

$j \backslash k$	0	1	2
0	1,00000	2,50000	3,00000
1	0	−1,33333	−2,00000
2	0	0,08333	0,50000

$m = 3$

$j \backslash k$	0	1	2	3
0	1,00000	2,72222	4,66666	3,33333
1	0	−1,50000	−3,25000	−2,50000
2	0	0,15000	1,00000	1,00000
3	0	−0,01111	−0,08333	−0,16666

$m = 4$

$j \diagdown k$	0	1	2	3	4
0	1,00000	2,84722	5,68750	6,24999	2,91666
1	0	−1,60000	−4,06666	−4,83333	−2,33333
2	0	0,20000	1,40833	2,16666	1,16666
3	0	−0,02539	−0,20000	−0,50000	−0,33333
4	0	0,00178	0,01458	0,04166	0,04166

$m = 5$

$j \diagdown k$	0	1	2	3	4	5
0	1,00000	2,92722	6,37083	8,52500	6,41666	2,10000
1	0	−1,66666	−4,63611	−6,72916	−5,25000	−1,75000
2	0	0,23809	1,73373	3,25000	2,83333	1,00000
3	0	−0,03968	−0,32202	−0,90625	−0,95833	−0,37500
4	0	0,00496	0,04169	0,13194	0,18055	0,08333
5	0	−0,00031	−0,00271	−0,00902	−0,01388	−0,00833

IDÉZETT IRODALOM

[1] R. J. TRUMPLER—H. F. WEAVER: *Statistical astronomy.* University of California Press, Berkeley and Los Angeles, 1953.

[2] P. MEDGYESSY: *Decomposition of superpositions of distribution functions.* Akadémiai Kiadó, Budapest, 1961.

[3] H. POLLARD: Distribution functions containing a Gaussian factor. *Proceedings of the American Mathematical Society* **4** (1953) 578—582.

[4] F. JOHN: Numerical solution of the equation of heat conduction for preceding times. *Annali di Matematica Pura ed Applicata,* Serie IV, XL (1955) 129—142.

[5] PH. FRANK—R. MISES: *Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik.* 2. vermehrte Auflage. F. Vieweg und Sohn, Braunschweig, 1935.

[6] G. DOETSCH: Zerlegung einer Funktion in Gauss'sche Fehlerkurven und zeitliche Zurückverfolgung eines Temperaturzustandes. *Mathematische Zeitschrift* **41** (1936) 283—318.

[7] MEDGYESSY PÁL: Valószínűség-eloszlásfüggvények keverékének felbontása összetevőire. *Az MTA Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei* II (1953) 165—177.

(Beérkezett: 1965. szeptember 1.)

NUMERICAL SOLUTION OF AN INTEGRAL EQUATION OF CONVOLUTION TYPE AND ITS APPLICATION TO THE DECOMPOSITION OF SUPERPOSITIONS OF GAUSS' FUNCTIONS

P. MEDGYESSY

Summary

It is shown that, under certain conditions, the exact solution of the integral equation (1.1) is furnished by (1.5). On his basis an approximate solution $h^*(x)$ of (1.1) is given by means of the linear expression (2.1) of the observed values $g^*(x+jh)$ $(j=0, \pm 1, \dots, \pm m)$ of $g(x)$. The coefficients $c_j^{(m)}(\lambda)$ in (2.1) are yielded by (2.9); a table of the numbers $\beta_{j,k}^{(m)}$ is appended to the treatise. Errors can be estimated by (3.1), (3.3) and (3.13). — The numerical solution can be applied to decomposing the superposition (1.2) i. e. to representing the graph of (1.3) approximately. An example from the field of the investigations of plasma proteins is also presented.

A MATEMATIKAI MODELLEZÉS ÉS AZ ELEKTRONIKUS SZÁMOLÓGÉPEK ALKALMAZÁSÁNAK NÉHÁNY IDŐSZERŰ KÉRDÉSE

Írta: DOBÓ ANDOR és SZAJCZ SÁNDOR

1. §.

A Magyar Tudományos Akadémia III. és VI. Osztálya 1956. május 31-én tartott együttes ülésén TARJÁN REZSŐ „A gyorsműködésű automatikus számológépek fejlődési iránya" c. előadásának hozzászólói közül RÉNYI ALFRÉD többek között a következőket mondotta (l. [1] 83. o.): „A moszkvai kongresszuson elhangzott egy megjegyzés: ma a számológépeken elsősorban olyan számítási módszereket használnak, melyeket túlnyomó többségben már előzőleg is használtak kézi számológépeken, a matematikai módszer megválasztása terén eddig nem történt más, mint az, hogy a meglevő és ismert módszerek közül kiválasztották azt, amely a gépen legjobban elvégezhető. Viszont eddig nem igen foglalkoztak új, sajátos módszerek kidolgozásával. Egyike a kevés kivételnek az úgynevezett Monte-Carlo-módszer, amellyel mi is elkezdtünk a Matematikai Kutató Intézetben foglalkozni... . Meg vagyok győződve arról, hogy idővel sok más új módszert is fognak találni a matematikusok. Helyes volna, ha nálunk is többet foglalkoznának ezekkel a kérdésekkel."

Hogy az elektronikus számológépek használata számára elgondolt módszerek fejlődése miképpen alakult az utóbbi években, azt mi nem tudjuk, de nem is vagyunk hivatottak és érdekeltek felmérni, megítélni. E helyen inkább a gépek egy más irányú „kihasználási technikájával" kapcsolatosan szeretnénk néhány észrevételt tenni.

Ha áttekintjük azt a hazai irodalmat, mely az országban működő elektronikus számológépek mellett kialakult kollektívák tevékenységéről ad bizonyos képet, akkor számos egészen különböző alkalmazási területeken látjuk felhasználását ezen gépeknek. Ez alapján szinte azt mondhatnánk, hogy az elektronikus gépek megjelenésével a matematika alkalmazásának igénylése ugrásszerűen megnövekedett. A jelentős számban felmerülő matematikai kérdések megválaszolását egyesek az elektronikus számológéppark növelésével, kifejlesztésével vélik megoldhatónak, míg mások úgy látják, ezeket a gépeket nem fogjuk tudni kihasználni. Ezen utóbbi véleményt gyakran azzal indokolják, hogy az elektronikus gépeken számos esetben olyan feladatokat oldanak meg, melyek kézi gépeken is aránylag rövid idő alatt megoldhatók.

A géppark kérdéséhez való hozzáállás a szakemberek körében igen megoszló s azt csak helyeselni lehet, hogy az ezzel kapcsolatos mind a mai napig megoldatlan kérdéseket a matematikai közélet élénken vitatja.

Részünkről e kérdéskomplexumhoz a matematikai modellezés problémáján keresztül szeretnénk néhány észrevételt tenni, melynek egy részét tömören így fogalmazhatjuk meg: Ha a *gazdaságossági szempontok szem előtt tartásával* akarjuk elérni, hogy az elektronikus számológépek a munkaidejük túlnyomó részében olyan számításokat végezzenek, melyekhez ma hozzá sem kezdhetnénk ezen gépek hiányában, akkor ezt elsősorban úgy lehetne elérni, hogy a matematikai modellezést igényesebb szinten, nagyobb technikával végeznénk.

A kívánt szintű matematikai modellezés következtében ugyanis — a látszat ellenére — lehetőség adódik a problémák egy részének olyan módon történő megoldására, mely nem igényli az elektronikus számológépek alkalmazását; a problémák másik részének megválaszolása pedig éppen a magasabb szinten kidolgozott modell bonyolultsága következtében teszi szükségessé az elektronikus számológép használatot. Ilyen szempontok fordulnak elő például bizonyos termelési folyamatok optimális üzemeltetésének elektronikus számológéppel történő meghatározásánál, mikoris a paraméterek időszakos eltolódása folytán visszatérő, viszonylag gyors számolási munkát kell végezni. Ennek véghezvitele el sem képzelhető a folyamat matematikai modelljének felállítása nélkül.

Ilyen eseteket véve alapul márszem betűnően mutatkozik az elektronikus számológépek kihasználásának és és a modellezésnek a „függőségi" kérdése. Egy-egy feladat kapcsán a kellő modell megválasztása, ill. felállítása esetenként elkerülhetővé teheti az elektronikus számológép igénybevételét, s ilyenformán növelhető az olyan területek bevonásának száma, melynél a termelés irányítása nem folyamatosan igényel ellenőrző vagy irányító elektronikus számológépi munkát.

A modellezés területén mutatkozó „lemaradást" talán azzal is lehet magyarázni, hogy a kézi számológépek mellett bizonyos problémák modelljeit meg sem próbáltuk felállítani, mert mire ez alapján a számítások elkészültek volna, az eredmények aktualitásukat már régen elveszítették. Az itt említettekkel szemben leginkább az jelentené a változást, ha a programozó matematikusok (ez alatt nem kódolókat értünk) mellett jelentős módon kialakulnának a modellezéssel foglalkozó matematikus csoportok is. (Az persze vitatható lehet, hogy a gyakorlatban miképpen célszerű ezt megvalósítani. Elképzelhető például egy olyan változat — s ez látszik a legkézenfekvőbbnek —, miszerint a számoló központokban elsősorban csak programoznak, s az intézményeknél, vállalatoknál végeznék a modellezést, mivel egy-egy szakterületen felmerült probléma matematikai modelljének felállítása egyébként is az illető szakterület kutatóinak, szakembereinek együttműködését igényli.)

Ma már mindkettőt lehet és kell olyan szinten végezni, hogy az a matematikusok egy önálló területét határolja körül. Mivel az elektronikus számológépek alkalmazásaira vonatkozó kutatómunkának még csak a kezdeténél tartunk, így már csak ezért sem érthetünk egyet azzal az — egyébként gyakran hangoztatott — véleménnyel, hogy a programozással és programozás-elmélettel foglalkozó egyben modellező is legyen és fordítva. Ilyenkor szokás hivatkozni arra, mit ér a modell, ha az olyan, hogy a programozó képtelen azt gépre vinni. Annak felismerése végett, hogy „mit lehet és mit nem" még nem kell feltétlenül a programozás technikáját ismerni; különben is hiába tudunk programozni, ha „nincs mit gépre vinni". Ha pl. a fizikus egyik-másik matematikai formulát nem tudja ezért vagy azért használni, azért a matematikusnak nem kell feltétlenül fizikusnak lennie ahhoz, hogy a gyakorlat számára kezelhetőbb összefüggést adjon.

Ugyanígy kell a kérdést tekinteni a programozó és modellező matematikusok esetében is. Hogy konkrét eredmények születhessenek, ahhoz persze gyakran a határterületeket is ismerni kell. Hogy ekkor kinek mennyire kell előremenni, azt az esetek igényeinek kell eldöntenie.

Ez ideig a kérdéskört igen általánosan érintettük. Hogy az itt elmondottak egy részéhez konkrétebb formában is hozzászólhassunk, azért először egy kiragadott példát mutatunk be.

2. §

A NIM Számítástechnikai Közlemények 1965/5. számában ([2]) VÁRKONYI ZSOLT a következő probléma megoldását tűzte ki célul:

„Csillék hozzák a követ egy tárolóba és tehergépkocsik szállítják el onnan. *Kérdés:* mekkora legyen a tároló minimális térfogata?" (Persze a problémának ilyen megfogalmazásban nem sok értelme van, később azonban kiderül, hogy a szerző milyen szempontok szem előtt tartásával keresi ezt a minimális értéket.) VÁRKONYI a megoldás módszeréül szimulációs eljárást alkalmaz. Minden bizonnyal a probléma ily módon való megoldása a gyakorlat szempontjából elfogadható volt. Ennek ellenére önkéntelenül is felvetődik az a kérdés, hogy a feladat megoldásához szükség volt-e az ELLIOTT 803 B. számológépet igénybe venni. A kérdésre persze egyértelmű válasz — a körülmények ismerete hiányában — nem adható. Elképzelhető azonban, hogy ez esetben a kielégítő választ megadta volna az alábbiak során tárgyalt modellből közvetlenül nyerhető eredmény is, melyhez végső fokon csak egy normális eloszlástáblázat szükséges, meg esetleg egy logarléc.

MODELL: Tegyük fel, hogy a tárolóhoz a $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \ldots$ időpontokban érkeznek a csillék, ahol a $\tau_n - \tau_{n-1}$ $(n=1, 2, \ldots; \tau_0 = 0)$ időkülönbségek egyforma eloszlású, független pozitív valószínűségi változók tetszőleges $F(x)$ eloszlásfüggvénnyel.

Tegyük fel továbbá, hogy a tárolóhoz $\tau_1', \tau_2', \tau_3' \ldots$ időpontokban érkező szállítógépkocsik $\tau_n' - \tau_{n-1}'$ $(n=1, 2, \ldots; \tau_0' = 0)$ időkülönbsége ugyancsak egyforma eloszlású, független pozitív valószínűségi változók tetszőleges $G(x)$ eloszlásfüggvénnyel. Tételezzük fel, hogy egy-egy csille a térfogatú, egy-egy szállítógépkocsi pedig b térfogatú anyagot képes szállítani. Jejölje ξ_t a $(0, t]$ időközben a tárolóhoz érkező csillék számát, η_t pedig az ugyanezen időközben érkező szállítógépkocsik számát. (A tett feltételek folytán $\{\xi_t\}$ és $\{\eta_t\}$ független valószínűségi változók rekurrens folyamatot alkotnak.)

$$\text{Legyen } m_1 = \int_0^\infty x\,dF(x), \quad \sigma_1^2 = \int_0^\infty (x-m_1)^2\,dF(x),$$

$$m_2 = \int_0^\infty x\,dG(x), \quad \sigma_2^2 = \int_0^\infty (x-m_2)^2\,dG(x),$$

ahol $m_1, m_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2$ véges értékek.

Ha K-val jelöljük a tároló köbtartalmát, s azt akarjuk elérni, hogy az előre adott ε értékű kockázat mellett T ideig „túlcsordulás" ne történjék, akkor a K értékét a

$$P\{\sup_{0 \leqq t \leqq T} (a\xi_t - b\eta_t) \leqq K\} \geqq 1 - \varepsilon$$

összefüggés alapján kell meghatározni.

A gyakorlatban K értékének meghatározása jó közelítéssel a következőképpen történhet. Mivel σ_1^2 és $\sigma_2^2 < \infty$, ezért TAKÁCS LAJOS egy idevágó tétele értelmében (l. [3] 376. o.) ξ_t és η_t aszimptotikusan normális eloszlást követ, azaz

$$\lim_{t\to\infty} P\left\{\frac{\xi_t - \frac{t}{m_1}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2 t}{m_1^3}}} < x\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du,$$

$$\lim_{t\to\infty} P\left\{\frac{\eta_t - \frac{t}{m_2}}{\sqrt{\frac{\sigma_2^2 t}{m_2^3}}} < x\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du.$$

Ennek következtében

$$\lim_{t\to\infty} P\left\{\frac{\xi_t - c\eta_t - \left(\frac{1}{m_1} - \frac{c}{m_2}\right)t}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_1^2}{m_1^3} + \frac{c^2\sigma_2^2}{m_2^3}\right)t}} < x\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du,$$

ahol $c = \frac{b}{a}$. A fentiek alapján tehát, ha t elég nagy $\{\xi_t - c\eta_t\}$ jó közelítéssel *Wiener*-folyamatot alkot, vagyis

$$P\left\{\xi_t - c\eta_t < \frac{K}{a}\right\} \approx \Phi\left(\frac{\frac{K}{a} - \left(\frac{1}{m_1} - \frac{c}{m_2}\right)t}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_1^2}{m_1^3} + \frac{c^2\sigma_2^2}{m_2^3}\right)t}}\right),$$

ahol

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du.$$

Wiener-folyamat esetén viszont ismeretes, hogy (l. [4] 392. o.)

$$P\{\sup_{0 \leqq t \leqq T} (\xi_t - c\eta_t) \geqq x\} = 2P\{(\xi_T - c\eta_T) \geqq x\},$$

így végső fokon K értékét a

$$\Phi\left(\frac{\frac{K}{a} - \left(\frac{1}{m_1} - \frac{c}{m_2}\right)T}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_1^2}{m_1^3} + \frac{c^2\sigma_2^2}{m_2^3}\right)T}}\right) \geqq 1 - \frac{\varepsilon}{2}$$

egyenlőtlenségből kell meghatározni.

A kapott eredményt az alábbi tételben foglalhatjuk össze:

Tétel: A modellben leírt feltételezések mellett, ha valamely tároló K köbtartalmát úgy kívánjuk megválasztani, hogy egy előre adott ε értékű kockázat mellett T ideig „túlcsordulás" ne történjék, akkor T elég nagy értéke esetén a K értéket jó közelítéssel a

$$\Phi\left(\frac{\frac{K}{a}-\left(\frac{1}{m_1}-\frac{c}{m_2}\right)T}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_1^2}{m_1^3}+\frac{c^2\sigma_2^2}{m_2^3}\right)T}}\right)=1-\frac{\varepsilon}{2}$$

összefüggésből határozhatjuk meg, ahol

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du.$$

A gyakorlati alkalmazás szempontjából feltehető, hogy $M(a\xi_t)=M(b\eta_t)$, vagyis, hogy a csillék által a tárolóba szállított anyag átlagosan ugyanannyi, mint amennyit elszállítanak onnan. Ha ugyanis a csillék átlagosan több anyagot szállítanának a tárolóba, mint amennyit a gépkocsik elvisznek onnan, akkor előbb-utóbb „szisztematikusan" túlcsordulás lenne bármilyen nagyméretű tároló esetén. Ellenkező esetben pedig fölöslegesen sok lenne a várakozó gépkocsik száma. Ez az észrevétel bizonyos értelemben szabályozhatja a szállítógépkocsik igénybevételét, mivel ezen modell alapján célszerűbb az elszállítást megszervezni. Az elmondottak értelmében tehát

$$\frac{m_2}{m_1}=\frac{b}{a}=c,$$

s így K értékét a

$$\Phi\left(\frac{\frac{K}{a}}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_1^2}{m_1^3}+\frac{c^2\sigma_2^2}{m_2^3}\right)T}}\right)=1-\frac{\varepsilon}{2}$$

összefüggésből kell meghatároznunk.

Könnyen belátható, hogy az itt kapott eredménnyel bizonyos raktározási problémakörben felmerülő kérdések is megválaszolhatók. (Gondolunk itt elsősorban ZIERMANN MARGIT [5] dolgozatában vizsgált kérdéskörre.)

3. §

Mivel a matematika alkalmazásának igénylése — ennek kapcsán a modellezés kérdése — jelentősen függ az ipar fejlettségi fokától, így az elektronikus számológépek alkalmazási igénylését ez a tény döntően befolyásolja. Idevonatkozóan nagyon is találóak HAJÓS GYÖRGY alábbi sorai (lásd [6] 229. o.): „...még mindig érezzük annak következményét, hogy a felszabadulásig a magyar ipar csak járószalagon járt, hogy nem igen voltak matematikusokat is foglalkoztató kutatóintézetek. Ilyen vonatkoztatásban a helyzet ma sem rózsás. Azt hiszem, tanulni kellene a hagyományosan fejlettebb iparú országoktól. Ha majd kellő számmal foglalkoztatnak matematikusokat a különböző kutatóintézetekben, mert az egyes szakterületeken nálunk is látják majd, hogy ez hasznos, akkor erősen fokozódik az a fejlődés, mely nálunk is megindult, de az üteme nem elég erős."

Hogy ma még a hazai ipar nem igényli a matematika alkalmazását olyan szinten mint pl. a fejlettebb ipari országok, ahhoz véleményünk szerint jelentősen hozzájárul az is, hogy számos ipari vonatkozású munkahelyen sok esetben reprodukálás folyik. Így azután érthető, hogy gyakran figyelmen kívül marad az eredeti konstrukció elkészítésénél szóba jövő matematikai meggondolások szerepe és jelentősége.

Az ipar vezetői valójában igyekeznek a matematika módszereit igénybe venni, ez azonban ma még inkább csak a propagálás és „divatos terület művelés" következménye. Ez a hozzáállás teremti meg azután annak lehetőségét, hogy kellő támogatás mellett egyre több dilettáns foglalkozhat a matematika alkalmazásával. (Félő, hogy az idő múlásával — ezek a személyek — a hozzánemértés következtében hibás, gyakorlatilag semmire sem használható eredményeiket a matematika hasznavehetetlenségével fogják magyarázni.) Többnyire ilyen és hasonló okokkal magyarázható az a tény is, hogy számos ipari munkahelyről a vezetők különböző szakembereket programozási tanfolyamokra küldenek anélkül, hogy meggyőződnének, valójában így érhető-e el a helyi problémák matematikai módszerekkel történő megválaszolása. Ami a kérdés gazdaságossági oldalát illeti, olyan ez, mintha valamikor azt kívánták volna a szakemberek egy részétől, tanuljanak meg esztergályozni, mert ha szükség lesz rá, akkor mód adódik gépre vinni és általuk megmunkálni az anyagot.

Ami egy elektronikus gép kiszolgáló személyzetének összetételét illeti, úgy véljük, hogy erre nézve még ma is többé-kevésbé helytálló NEUMANN JÁNOS 1954-ben tett megállapítása. Eszerint „mintegy 3—5 mérnökre és technikusra (2,5—3 műszakos üzemelés esetében, ez minden szempontból elsősorban az állandó operatív felülvizsgálat és fenntartás szempontjából a legcélszerűbb), 2—3 matematikusra és 10—20 kódolóra, tehát összesen 15—30 emberre van szükség. (Vö.: [9], 72. o.)

NEUMANN JÁNOS idézett soraiban a matematikusok számának megjelölése egyáltalán nem meglepő, ha ehhez még hozzátesszük JOHN HAMMERSLEY (Trinity College, Oxford) alábbi sorait:

„A való életben a matematikus főfeladata, hogy megfogalmazza a problémákat absztrakt matematikai modell felállításával úgy, hogy a modellben szereplő egyenletek elég egyszerűek legyenek a megoldhatóság szempontjából, de ne legyenek annyira durvák sem, hogy a valóságot már ne tükrözzék. Az egyenletek megoldása már egyszerűbb technikai kérdés a modellkészítés megragadó, csavaros fogásaihoz képest, amely egyaránt megköveteli a világos, éles, józan észt és a művészi és alkotói képzelet legmagasabb fokú képességeit." (Vö.: [10] 477. o.)

A már idézett helyen HAJÓS GYÖRGY „Igaz, hogy sok mindent tettünk az alkalmazások bizonyos területeken való elindítása és fellendítése érdekében, de tehettünk volna még többet, és ez az irányító munka hibátlanabb és töretlenebb is lehetett volna." mondatát olvasva vetődik fel az a kérdés, hogy különösen most a matematika új fejezeteinek erőteljes bontakozása, valamint az elektronikus számológépek alkalmazhatósága mellett a hazai matematikusok hogyan segíthetnék még eredményesebben elő — az álalkalmazások veszélyének elkerülésével — a matematikai módszerek széles körű bevezetésének elterjedését. Úgy véljük ehhez továbbra is elsősorban azt az utat kell járni, melyen már eddig is elindultunk. Ez konkrétebben azt jelenti, hogy a matematikusoknak a *Rényi*-féle kategorizálás E) típusú feladatkörét az eddiginél is jelentősebb formában és fokon kell művelni.

Emlékeztetőül idézzük (l. [7] 557. o.), hogy „E) a matematikát alkalmazza a matematikus, aki maga vagy mások által elért új matematikai eredményekről felismeri, hogy azok felhasználhatók egy vagy több matematikán kívüli területeken, és ezen felhasználást elősegítő, alkotó jellegű munkát végez .... ez esetben a matematikus nem a gyakorlati problémákhoz keres matematikai módszert, hanem a matematikai eredményhez keres és talál alkalmazást." (Igen hasznos lenne az ilyen tevékenység publikációs lehetőségeit megteremteni.)

A matematikusok itt jelzett irányú tevékenysége rendkívül meggyorsíthatja az iparban, de — a mindennapi élet számos területén is — az emberek tevékenységének hasznosabb alakulását. Itt többek között a matematikának olyan területeken való alkalmazására is gondolunk, melyeknél nem közvetlenül, hanem inkább közvetve származik haszon. Kiragadott példákat említve az operáció analízis néhány modellje például lehetővé teheti a rádió, a televízió műsorának matematikai meggondolásokon alapuló, számos — gyakran ellentmondó — szempontot szem előtt tartó, „kedvezőbb" összeállíthatóságát. Nem lenne érdektelen pl. matematikai meggondolások alapján a filmek filmszínházak közötti elosztásának kérdését megvizsgálni, s a modellt konkrét eredmény elérés végett elektronikus számológépre vinni. A vizsgálat tárgya lehetne ismert modell alapján pl. a filmvásárlás, filmkészítés bizonyos irányú kérdése is. Más példa lehet e vonatkozásban a közlekedés területe. Hogy e felsorolások mellett konkrétebb vizsgálatról is beszéljünk, ezért bemutatunk a következőkben egy problémát, melynek megválaszolásán keresztül egyben azt is látni fogjuk, hogy a modellezés — ellentétben az előbbi példánkkal — még akkor sem zárhatja ki az elektronikus számológép igénybevételének szükségességét, ha pl. formálisan is — igen leegyszerűsödve — csak a négy alapművelet szerepel kapott összefüggéseink között. Az itt bemutatásra kerülő feladatot kétségkívül szimulációs eljárás alkalmazása mellett elektronikus számológéppel is vizsgálhatnánk, azonban előnyösebbnek látszik a szimulációs módszer alkalmazásának elhagyásával a problémát a matematikai modell felhasználása után gépre vinni.

4. §

Tekintsünk egy várost, melyben N számú olyan útkereszteződés van, melynél a közlekedési járművek (villamos, autóbusz stb.) megállóhelyeit közvetlenül az útkereszteződések előtt, illetve után helyezték el. Egy-egy útkereszteződésnél feltételezzük, hogy négy megálló van, s ezek összes elhelyezési lehetőségeit az 1. ábra mutatja be.

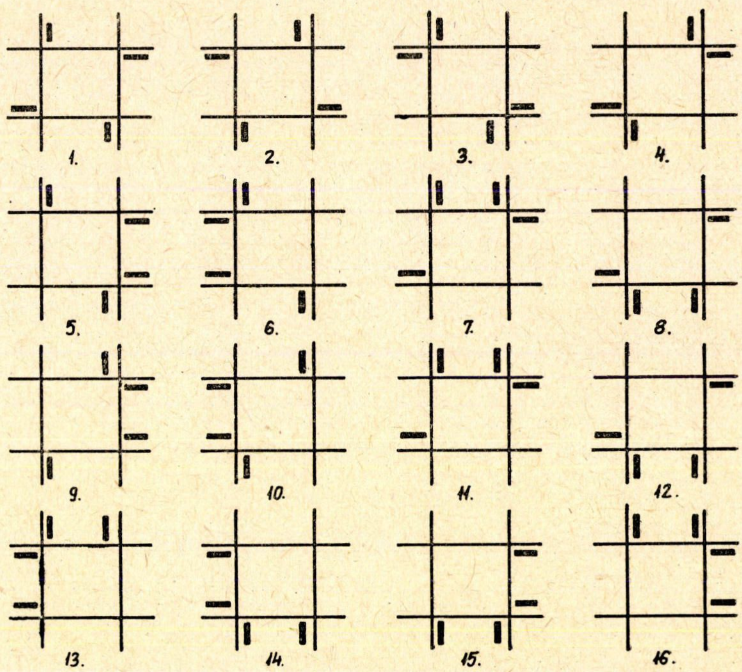
Tegyük fel, hogy az $Ny \to K$ irányban közlekedő utasok közül egy tetszőleges kereszteződésnél a t időpontban átlagosan $n_1 = n_1(t)$ szállt át a $D \to É$ irányban közlekedő és $m_1 = m_1(t)$ az $É \to D$ irányban közlekedő járműre, s ezt a megvalósulást a 2. ábra szemlélteti. A további három irányból érkező utasok kereszteződésnél történő átszállásának a realizációit a 3. ábra szemlélteti, melyen a jelölések a 2. ábrán alkalmazott jelölésekkel analóg módon értelmezendők.

Kérdés: Az N számú kereszteződésnél milyen elrendezésben helyezzük el a megállókat, ha azt akarjuk, hogy:

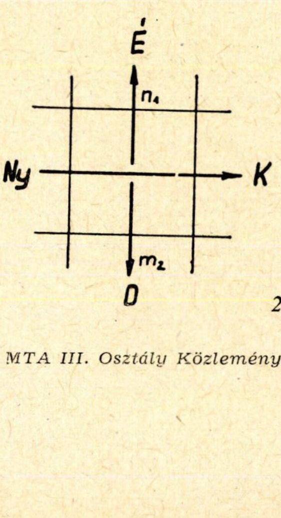
1° *Az adott járművek menetidejének várható értéke minimális legyen.*

2° *Az utasoknak a kereszteződéseknél átszállásra fordított átlagos idejük minimális legyen.*

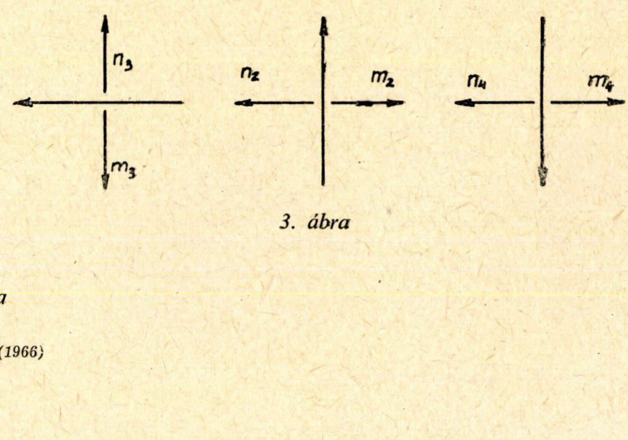
(A közölt megfogalmazásból látható, hogy az 1° és 2° vizsgálata a közlekedés meggyorsítását segítheti elő.)



1. ábra

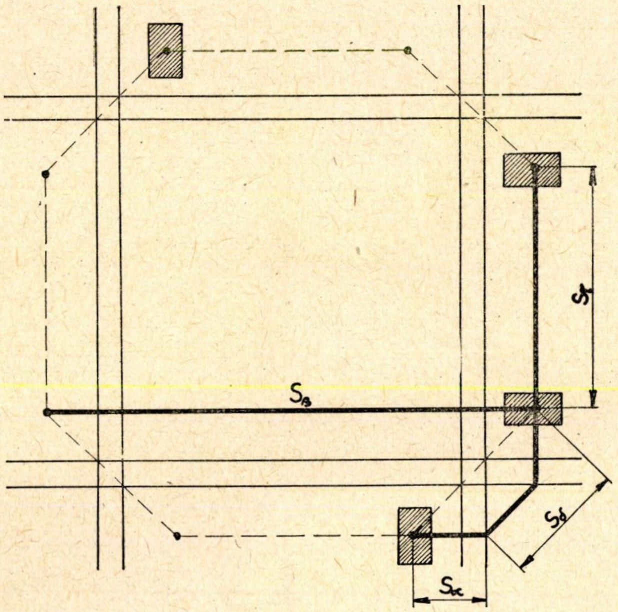


2. ábra



3. ábra

Vezessük be a következő jelöléseket: $a=a(t)$, $b=b(t)$ és $c=c(t)$ jelölje rendre a piros, zöld és sárga jelzések átlagos időtartamát (a továbbiakban a jelzéseket mindig az út $Ny \to K$ irányában tekintjük) valamely t időpontban.[1] Jelölje $\beta=\beta(t)$ a közlekedő járműnek a 4. ábrán feltüntetett S_β hosszúságú út megtételéhez szükséges átlagos idejét. A gyalogosok az S_α, S_δ, illetve S_τ hosszúságú utat átlagosan rendre $\alpha=\alpha(t)$, $\delta=\delta(t)$, illetve $\tau=\tau(t)$ idő alatt teszik meg. A kereszteződést és ebből kifolyólag a 4. ábrát szimmetrikusnak tételezzük fel, így ezen jelölések alapján



4. ábra

az ábrán előforduló meg nem jelölt útszakaszokon való átkelések átlagos idejét — más megállóhely elhelyezése esetén is — meg lehet határozni. Vizsgálataink során kiindulási és vonatkoztatási alapul az 1. ábra 1. elhelyezési esetét tekintjük, mivel a járművek ennél az elhelyezésnél, a kereszteződés jelzőrendszerétől függetlenül jutnak el a megállóhelyig. A gyakorlat legtöbb esetében az eddig bevezetett függvények lépcsős függvénynek tekinthetők, melyeknek „ugráshelyei" azonos időpontban vannak. Adott t időpontban — az ugráshelyek egy kis környezetének kivételével — jó közelítéssel feltételezhető, hogy $\frac{a}{a+b+2c}$, $\frac{b}{a+b+2c}$, $\frac{2c}{a+b+2c}$ valószínűséggel kapunk piros, zöld, illetve sárga jelzéseket.

[1] Mivel a jelzések időtartamait nemcsak a gyalogos átkelések, hanem más közlekedési eszközök jelenléte is befolyásolja, így feltételezhető, hogy ezen értékek a megállók elrendezésétől jelentéktelenül függenek. (Ellenkező esetben ezzel a ténnyel is számolnunk kell!)

ALAPTÉTEL: *A járműveknek a kereszteződéseknél történő átlagos várakozási ideje független a megállók elhelyezésétől.*

Bizonyítás: Mivel egy tetszőleges megálló vagy az útkereszteződés előtt van, vagy utána, ezért elegendő egy irányban ezt a két esetet vizsgálni. $Ny \to K$ irányt vizsgálva mindkét esetben a keresett érték:

$$\left(\frac{c}{2}+\beta\right)\frac{c}{a+b+2c}+\left(\frac{c}{2}+a+c+\beta\right)\frac{c}{a+b+2c}+$$

$$+\left(\frac{a}{2}+c+\beta\right)\frac{a}{a+b+2c}+\beta\frac{b}{a+b+2c}+v=\frac{(a+2c)^2}{2(a+b+2c)}+\beta+v,$$

ahol $v=v(t)$ a járműnek a leszállás, illetve felszállással kapcsolatos átlagos várakozási idejét jelenti, ez szintén lépcsős függvénynek tekinthető, az előbbiekkel azonos ugráshelyekkel.

Az imént bizonyított alaptétellel az 1°-re választ adtunk és ez egyben azt is jelenti, hogy a 2°-re történő válaszadásnál figyelmen kívül hagyhatjuk az 1°-re gyakorolt hatást. Mivel a különböző kereszteződéseknél az átszállásra fordított várakozási idők átlagai függetlenek, ezért elég egy tetszőlegesen rögzített kereszteződésnél vizsgálni az átszállási idők átlagát oly módon, hogy a szóba jövő 16 eset közül keressük azt az elrendeződést, mely esetén ez az érték a legkisebb.

Az 1. ábra 1., 2. és 5. alatti elrendeződésére vonatkozóan ezek az értékek a következők:

$$V_1(t)=(n_1+n_4+m_2+m_3)\frac{(a+2c)^2}{2(a+b+2c)}+(n_2+n_3+m_1+m_4)\frac{(b+2c)^2}{2(a+b+2c)}+$$

$$+(n_1+n_2+n_3+n_4+m_1+m_2+m_3+m_4)\tau+(n_3+n_4+m_1+m_2)\delta+$$

$$+(bn_1+an_2+bm_3+am_4)\frac{\delta}{a+b+2c},$$

$$V_2(t)=(n_1+n_3+m_1+m_3)\frac{(a+2c)^2}{2(a+b+2c)}+(n_2+n_4+m_2+m_4)\frac{(b+2c)^2}{2(a+b+2c)}+$$

$$+(n_1+n_2+n_3+n_4+m_1+m_2+m_3+m_4)(\tau+\delta)+(n_3+m_1)(b+c)+$$

$$+(n_1+m_3)b\frac{\frac{b}{2}+\beta+2c}{2(a+b+2c)}+(n_4+m_2)\left(\frac{a}{2}+\beta\frac{a+2c}{2(a+b+2c)}\right)+$$

$$+(n_2+m_4)a\frac{\frac{a}{2}+\beta+b+2c}{2(a+b+2c)}-(n_3+m_1)\frac{b^2}{2(a+b+2c)},$$

$$V_5(t) = (n_1+n_4+m_1+m_3+m_4)\frac{(a+2c)^2}{2(a+b+2c)}+$$

$$+(n_2+n_3+m_1+m_4)\frac{(b+2c)^2}{2(a+b+2c)}+3bm_1\frac{a+c-b(\alpha+\delta)}{2(a+b+2c)}+$$

$$+n_2\frac{a\delta}{a+b+2c}+m_3\frac{b\delta}{a+b+2c}+m_4\frac{(a+c)(\tau+\alpha)-c^2}{a+b+2c}+$$

$$+(n_2+n_3+n_4+m_1+m_3+m_4)\tau+\alpha(n_1+m_1+m_2)+\beta n_1+(n_1+n_3+n_4+m_1+m_2)\delta.$$

(A számításaink során feltételeztük, hogy az a jelzés, amely a jármű megérkezésének a pillanatában fennállt, az általában még a jelzés átlagos idejének a feléig fennáll.)

Minthogy a jelzett értékek t függvényei, így a gyakorlatban elképzelhető, hogy az egyes esetek összehasonlítása során különböző időpontokban ugyanazon kereszteződésnél egymástól eltérő módon kellene a megállókat elrendezni. t-től független elrendeződés nyerhető azáltal, hogy az összehasonlítást a kapott függvények integrál közepeire végezzük. Esetünkben ezek az értékek:

$$M_1 = \frac{1}{T}\int_0^T V_1(t)\,dt,$$

$$M_2 = \frac{1}{T}\int_0^T V_2(t)\,dt,$$

$$M_5 = \frac{1}{T}\int_0^T V_5(t)\,dt,$$

ahol T értékét többnyire 24^h-nak célszerű választani.

Végezetül arra szeretnénk rámutatni, hogy már aránylag egyszerűbb problémák megoldásán való fáradozás alkalmával is előfordulhat az az eset, amikor olyan feltétel megadása mellett kell megoldást keresni, mely esetén eleve lehetetlen az elektronikus számológép igénybevétele, ugyanekkor a probléma modellezés útján viszonylag egyszerű eszközökkel megoldható. Erre példa lehet a (8) dolgozat problémaköre a 2. tételben szereplő feltételek megadásának vizsgálata mellett.

IRODALOM

[1] TARJÁN REZSŐ: A gyorsműködésű automatikus számológépek fejlődési iránya: Hozzászólások *MTA III. Osztály Közleményei* 7 (1957) 1.

[2] VÁRKONYI ZSOLT: Anyagtároló bunker minimális térfogatának meghatározása elektronikus számológépen. *NIM Számítástechnikai Közlemények* 1965/5.

[3] TAKÁCS LAJOS: Részecskeszámlálók elméletében fellépő sztochasztikus folyamatokról, *MTA III. Osztály Közleményei* **6** (1956) 3—4.

[4] J. L. DOOB: *Stochastics processes*, New York, 1953.

[5] ZIERMANN MARGIT: A Szmirnov-tétel alkalmazása egy raktározási problémára. *MTA Mat. Kut. Int. Közleményei* VIII. B. (1963) 4.

[6] HAJÓS GYÖRGY: A matematika szerepe a többi tudományban, *Fizikai Szemle* **15** (1965) 8.

[7] RÉNYI ALFRÉD: A matematika alkalmazásairól tartandó vita tézisei, *Magyar Tudomány* (1962) 9.

[8] DOBÓ ANDOR és SZAJCZ SÁNDOR: A megbízhatóság növelésének egy optimális elosztásáról. *MTA III. Osztály Közleményei* **15** (1965) 4.

[9] NEUMMAN JÁNOS: *Válogatott előadások és tanulmányok*, Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1965.

[10] MINA REES: Matematikusok az árupiacon. *MTA III. Osztály Közleményei* **8** (1958) 4.

(Beérkezett: 1965. szeptember 6.)

ÚJ MÓDSZEREK ÉS EREDMÉNYEK A KOMBINATORIKUS ANALÍZISBEN, I.

Írta: RÉNYI ALFRÉD

Bevezetés

A matematika legújabb fejlődésének egyik legjellemzőbb vonása a diszkrét módszerek fokozottabb előtérbe kerülése, és ezen belül a kombinatorika renaissance-a. Néhány évtizeddel ezelőtt a kombinatorikát a matematika lényegében lezárt fejezetének tekintették. A fejlődés alaposan rácáfolt erre és — mint már annyiszor — újból megmutatta, hogy a tudományban nincsenek és nem lehetnek végleg lezárt, „elintézett" fejezetek, problémakörök.

A kombinatorikai kutatás fellendülésének okainak részletes vizsgálatába itt nem bocsátkozunk; csak megemlítjük, hogy ebben jelentős szerepet játszottak a következő körülmények:

A) A nagysebességű elektronikus számológépek megjelenése, különös tekintettel arra, hogy ezek digitális (azaz diszkrét) működésű gépek.

B) A matematikai módszerek fokozottabb térhódítása új területeken, elsősorban a közgazdaságban, biológiában és más tudományokban, amelyek problémái általában nem folytonos jellegűek, gyakran vezetnek gráfelméleti (lásd pl. [1], [2]) és más kombinatorikai kérdésekre.

C) Az információelmélet kifejlődése, amely elsősorban a diszkrét jelátvitellel működő híradástechnikai eljárások problematikájából fejlődött ki.

D) A matematikai statisztika biológiai, mezőgazdasági, ipari stb. alkalmazásai is számos kombinatorikai problémára vezettek, pl. a kísérletek tervezése (design of experiments) terén.

E) A statisztikus fizika számos kombinatorikai problémát vetett fel. (L. pl. [3], [4].)

F) A valószínűségszámításban még az eddiginél is nagyobb mértékben előtérbe kerültek a kombinatorikus módszerek. (Lásd pl. [5].)

A kombinatorika megalapítóinak általában LEIBNIZet és PASCALt szokták tekinteni. LEIBNIZet a kombinatorikához filozófiai meggondolások vezették el, míg PASCALTt valószínűségszámítási vizsgálatai.

A kombinatorikát ma általában úgy szokták definiálni, mint a véges halmazok és azokon értelmezett függvények elméletét. (L. pl. [6].) Ezen belül is a kombinatorika elsősorban az említett jellegű problémákra vonatkozó *leszámlálási* feladatokkal foglalkozik. J. RIORDAN, a modern kombinatorikus analízisről szóló nemrégiben megjelent, kitűnő könyvének [7] bevezetésében szintén a kombinatorikának ezt a vonását emeli ki, mint legjellemzőbbet.

A kombinatorika mai állására egyrészt a konkrét eredmények gazdagsága, másrészt ezek egymástól való meglehetős izoláltsága, általános elméletek és módszerek viszonylagos hiánya jellemző. A kombinatorika azonban számos ponton kapcsolódik a matematika más ágaihoz, pl. a valószínűségszámításon kívül, amelyet már említettünk, a véges testek, véges geometriák elméletén át az algebrához és a geometriához.

Kombinatorikus analízis alatt általában az analízis módszereinek a kombinatorikában való alkalmazását értik. Ebben az értelemben a kombinatorikus analízis EULER és LAPLACE munkásságával kezdődik és középpontjában a generátorfüggvény fogalma áll. Helytelen volna azonban úgy tekinteni a kombinatorikus analízist, mint amelyben szükségképpen a kombinatorikus összefüggések nyerése a cél és az analitikus módszer az eszköz: gyakran ugyanis a „szereposztás" fordított, amenynyiben az ilyen vizsgálatok az analízis számára is gyümölcsözőek és új eredményekre vezetnek.

A cikksorozattal, melyet e dolgozattal megindítunk, a kombinatorikus analízis néhány sokat ígérő újabb módszerére és eredményére kívánjuk a kutatók figyelmét felhívni. Különös figyelmet fordítunk az olyan vizsgálatokra, amelyek reményt nyújtanak arra, hogy azokból általános módszerek fognak kialakulni. E cikksorozat jellegét illetően tehát elsősorban ismertető jellegű, de emellett számos új eredményt (valamint ismert eredményekre új bizonyításokat, ismert tételek általánosításait stb.) is tartalmaz. Azok az eredmények (ill. bizonyítások), amelyeknél más forrásra nem hivatkozunk, legjobb tudomásunk szerint újak; hangsúlyozzuk azonban, hogy éppen azáltal, hogy a kombinatorika gazdag anyaga nincs ma még kellően rendszerezve, különösen nehéz e téren megállapítani egy újonnan talált összefüggésről vagy bizonyításról, hogy az valóban új-e.

1. §. Véges halmazok particiói

Legyen H_n egy n elemű halmaz ($n=1, 2, \ldots$). H_n elemeiről csak annyit teszünk fel, hogy megkülönböztethetők és így megszámozhatók. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük tehát (és a következőkben mindig fel is tesszük), hogy H_n elemei az $1, 2, \ldots, n$ számok. A H_n halmaz egy particióján H_n elemeinek valamilyen módon osztályokba való sorolását értjük. Egy particiót leírhatunk úgy, hogy az egy osztályba tartozó elemeket tetszőleges sorrendben egy-egy zárójelbe tesszük, és e zárójelbe zárt osztályokat egymás mellé írjuk úgy, hogy a nagyobb elemszámú osztályok megelőzik a kisebb elemszámú osztályokat. Pl. H_5 azon particióját, amelynél a páros és a páratlan számok egy-egy osztályt alkotnak, a következőképpen jelöljük: $(1, 3, 5)\,(2, 4)$. Nyilván $(5, 1, 3)\,(4, 2)$ ugyanazt a particiót jelöli. Egy partició ilyen felírását *zárójeles normál alak*nak nevezzük.

Minden particiót egy ekvivalencia reláció (egy szimmetrikus reflexív és tranzitív reláció) értelmez és megfordítva, minden partició definiál egy ilyen relációt. Egy lehetséges mód egy partició jellemzésére a következő: minden a H_n halmazon értelmezett f függvény egyértelműen definiálja H_n egy particióját, oly módon, hogy egy osztályba soroljuk H_n azon elemeit, amelyeken az f függvény ugyanazt az értéket veszi fel. Két particiót azonosnak tekintünk, ha azokat ugyanaz az ekvivalencia-reláció értelmezi.[1] Két a H_n halmazon értelmezett függvény, f és g akkor és csak akkor értelmezi ugyanazt a particiót, ha H_n bármely x és y elemére $f(x)=f(y)$ akkor és csak akkor áll fenn, ha $g(x)=g(y)$, azaz ha megadható olyan h függvény, hogy $h(f(x))$ -$g(x)$ és h *egyrétű*, azaz különböző helyeken különböző értékeket vesz fel, tehát h az f értékkészletének g értékkészletére való kölcsönösen egyértelmű leképezését létesíti.

Jelölje T_n $(n=1, 2, \ldots)$ a H_n halmaz összes (különböző) particióinak számát; teljes felsorolással beláthatjuk, hogy $T_1=1$, $T_2=2$, $T_3=5$, $T_4=15$. Pl. H_4 összes particiói a következők:

(1) (2) (3) (4)	(12) (3) (4)	(12) (34)	(123) (4)	(1234)
	(13) (2) (4)	(13) (24)	(124) (3)	
	(14) (2) (3)	(14) (23)	(134) (2)	
	(23) (1) (4)		(234) (1)	
	(24) (1) (3)			
	(34) (1) (2)			

Az első kérdés, amivel foglalkozni kívánunk, a T_n számsorozat meghatározása. Célszerű lesz T_n-et $n=0$-ra is definiálni, oly módon, hogy $T_0=1$. Ez esetben fennáll a következő jól ismert, érdekes formula a T_n sorozat ún. *exponenciális generátorüggvényére*, vagyis a $T(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{T_n x^n}{n!}$ függvényre:

$$T(x) = e^{e^x-1}. \tag{1.1}$$

Az (1. 1) formula bizonyítására számos mód kínálkozik; ezek közül itt csak négyet ismertetünk.

a) (1. 1) *bizonyítása a* T_n *sorozatra vonatkozó rekurziv relációból.*

Könnyen belátható, hogy fennáll a következő összefüggés:

$$T_{n+1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}T_{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}T_k. \tag{1.2}$$

(1. 2) abból következik, hogy H_{n+1} összes particióit osztályozhatjuk először aszerint,

[1] Egy n elemű véges *halmaz* particiói nem tévesztendők össze az *n szám* particióival. Pl. ha $n=3$, a $H_3=\{1, 2, 3\}$ halmaznak 5 particiója van, mégpedig

(1)(2)(3)

(12)(3)

(13)(2)

(23)(1)

(123)

míg a 3 számnak csak 3 particiója van: $3=1+1+1=2+1=3$. A különbség onnan származik, hogy H_n elemeit megkülönböztethetőnek tekintjük és így az a partició, amelynél a 3 elemet egy kételemű és egy egyelemű osztályra bontjuk, háromféleképpen valósítható meg. Bár a számok particióinak vizsgálata is érdekes kombinatorikai kérdésekre vezet, mégis inkább a számelméletbe tartozik, mint a kombinatorikába.

hogy az $n+1$ szám hány más számmal van egy osztályban; ha ez a szám k, és k értékét rögzítjük, az így kiválasztott particiókat osztályozhatjuk aszerint, hogy melyik ez a k szám (az $1, 2, \ldots, n$ számok közül), és ha ezeket is rögzítettük, nyilván annyi ilyen partició adható meg, ahány particiója van a többi $n-k$ számnak. Mármost (1. 2) mindkét oldalát $\frac{x^n}{n!}$-sal szorozva és $n=0, 1, 2, \ldots$-re összegezve adódik a

$$T'(x)=e^x \cdot T(x) \tag{1. 3}$$

differenciálegyenlet, amelyet megoldva és figyelembe véve a $T(0)=1$ kezdőfeltételt, adódik (1. 1).

Ez az (1. 1) reláció legismertebb bizonyítása.[2]

b) (1. 1) *bizonyítása* T_n *explicit képlete alapján.*

Említettük, hogy egy partició sokféleképpen írható fel zárójeles normál alakban. Pl. H_4 azon particiója, amelynél 1 és 3 egy osztályban vannak, a 2 és 4 egyedül egy-egy osztályt alkotnak, a következő 4-féle módon írható fel zárójeles normál alakban:

$$(1, 3)\ (2)\ (4)$$
$$(1, 3)\ (4)\ (2)$$
$$(3, 1)\ (2)\ (4)$$
$$(3, 1)\ (4)\ (2).$$

Általában, ha H_n egy π particiója l_k darab k elemű osztályból áll ($k=1, 2, \ldots, n$, $\sum_{k=1}^{n} kl_k=n$), akkor π nyilván $1!^{l_1}\, 2!^{l_2} \ldots n!^{l_n}.\ l_1!\, l_2! \ldots l_n! = \prod_{k=1}^{n} k!^{l_k} \cdot l_k!$-féleképpen írható fel zárójeles normál alakban. Ha egy ilyen felírásból a zárójeleket elhagyjuk, az $1, 2, \ldots, n$ számok egy permutációját nyerjük. Könnyen belátható, hogy ezúton az $1, 2, \ldots, n$ számok minden permutációja H_n egy és csak egy olyan particiójából jön létre, amely l_k darab k elemű osztályt tartalmaz. Ily módon H_n azon particióinak száma, amelyek l_k darab k elemű osztályt tartalmaznak, nyilván $\frac{n!}{\prod_{k=1}^{n} k!^{l_k} \cdot l_k!}$ és így

$$T_n = \sum_{\sum_{k=1}^{n} kl_k=n} \frac{n!}{\prod_{k=1}^{n} k!^{l_k} \cdot l_k!}. \tag{1. 4}$$

(1. 4) mindkét oldalát $\frac{x^n}{n!}$-sal szorozva és n-re 0-tól ∞-ig összegezve kapjuk, hogy

$$T(x) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{l_k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x^k}{k!}\right)^{l_k}}{l_k!} \right) = \prod_{k=1}^{\infty} e^{\frac{x^k}{k!}} = e^{e^x-1}, \tag{1. 5}$$

amivel (1. 1) egy újabb bizonyítását nyertük.

[2] L. pl. [8], I. fej. 8/c. példa, 30. o.

Megjegyzendő, hogy az (1. 4) „explicit" képlet nagy n-re nem alkalmas T_n tényleges kiszámítására; e célra az (1. 2) rekurzió sokkal jobban használható.

c) (1. 1) *bizonyítása Gian-Carlo Rota*[3] *funkcionál-módszerével.*

Jelölje $\Phi(u, n)$ az összes olyan $f(x)$ függvények halmazát, amelyek a H_n halmazon vannak értelmezve és értékkészletük a $H_u=\{1, 2, \dots, u\}$ halmaz. $\Phi(u, n)$ elemeinek száma nyilván u^n. Bármely $f\in\Phi(u, n)$ meghatározza H_n egy particióját; megfordítva, ha π a H_n halmaz egy tetszőleges particiója és π osztályának számát $N(\pi)$-vel jelöljük, úgy π-hez $u(u-1)\dots(u-N(\pi)+1)$ számú függvény tartozik $\Phi(u, n)$-ből. Ilyen módon, ha Π_n jelöli H_n összes particióinak halmazát,

$$u^n = \sum_{\pi\in\Pi_n} u(u-1)\dots(u-N(\pi)+1). \tag{1.6}$$

Az (1. 6) reláció u minden pozitív egész értékére fennáll; ebből azonban már következik, hogy az (1. 6) bal és jobb oldalán álló u-ban n-edfokú polinomok azonosak, tehát (1. 6) u minden valós (sőt komplex) értékére is teljesül. Definiáljuk most az $L(P)$ lineáris funkcionált az u változó összes polinomjainak halmazán (vektorterén) oly módon, hogy

$$L(1)=1, \quad L\big(u(u-1)\dots(u-k+1)\big) = 1 \quad \text{ha} \quad k=1, 2, \dots .$$

Ezen feltételek által az L funkcionál egyértelműen definiálva van, hiszen minden $P(u)$ n-edfokú polinom előállítható

$$P(u) = c_0+c_1u+c_2u(u-1)+\dots+c_nu(u-1)\dots(u-n+1) \tag{1.7}$$

(ún. *Newton-sor*[4]) alakban és így a feltételeink szerint

$$L(P(u)) = \sum_{k=0}^{n} c_k. \tag{1.8}$$

Mármost (1. 6) szerint

$$L(u^n)=T_n. \tag{1.9}$$

Tehát T_n nem más, mint az L funkcionál értéke az u^n egytagú polinomra.

Ebből először is adódik T_n-re egy újabb explicit képlet. Ugyanis az u^n polinom *Newton*-sora jól ismert:

$$u^n = \sum_{r=1}^{n} S(n, r)u(u-1)\dots(u-r+1), \tag{1.10}$$

ahol az $S(n, r)$ számok az ún. *másodfajú Stirling-számok*[5] (l. pl. [11], 168. o.) és

[3] Lásd [9]. E dolgozat 32 dolgozatot sorol fel, melyek a T_n számsorozattal foglalkoznak.

[4] L. pl. [10], II. kötet 12. o. (1.7)-ben $c_k=\frac{1}{k!}\Delta^k f(0), \quad k=0, 1, \dots, n.$

[5] (1.10) tekinthető a másodfajú Stirling-számok definíciójának. Egy másik definíció: $S(n, r)= =\frac{1}{r!}[\Delta^r x^n]_{x=0}$, ahol Δ a differencia-operátor: $\Delta P(x)=P(x+1)-P(x)$. Megjegyzendő, hogy a $\Delta f(x)=f(x+1)-f(x)$ operátor segítségével az L funkcionál az $L(P)=[e^\Delta P]$ alakban írható fel. Mivel, mint ismeretes, a Δ operátor a $Df(x)=f'(x)$ differenciáloperátorral $\Delta=e^D-1$ alakban fejezhető ki (l. pl. [11], 13. o.), tehát az L funkcionál $L(P)=[e^{e^D-1}P]_{x=0}$ alakban is kifejezhető.

így (1. 8) és (1. 9) szerint

$$T_n = \sum_{r=1}^{n} S(n, r). \tag{1. 11}$$

(1. 9) alapján az (1. 1) összefüggés a következőképpen vezethető le. Terjesszük ki az L funkcionál értelmezését az összes olyan $g(u)$ egész függvényekre, amelyekre ez lehetséges[6], a linearitás megőrzésével, vagyis ha

$$g(u) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n u^n \quad \text{akkor legyen} \quad L(g(u)) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n T_n,$$

feltéve, hogy e sor abszolut konvergens. Akkor

$$T(x) = L\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n x^n}{n!}\right) = L(e^{ux}) = L((1+(e^x-1))^u) = \tag{1. 12a}$$

$$= L\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{u(u-1)\dots(u-k+1)}{k!}(e^x-1)^k\right),$$

tehát

$$T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(e^x-1)^k}{k!} = e^{e^x-1}, \tag{1. 12b}$$

amivel (1.1) egy újabb igazolását nyertük.[7]

d) (1. 1) *bizonyítása a másodfajú Stirling-számok generátorfüggvénye segítségével.*

[6] Könnyen belátható, hogy L ily módon az összes exponenciális típusú egész függvényekre kiterjeszthető.

[7] Az (1.12)-ben szereplő formális műveletek jogosultságát a következőképpen lehet belátni az L funkcionál egész függvényekre való kiterjesztése nélkül: Az

$$e^{ux} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u(u-1)\dots(u-k+1)}{k!}(e^x-1)^k \tag{$*$}$$

azonosságból következik, hogy x^n együtthatója $(*)$ bal és jobb oldalán ugyanaz, tehát

$$\frac{u^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{u(u-1)\dots(u-k+1)}{k!} \sum_{\substack{\sum_{i=1}^{k} l_i = n \\ l_i \geq 1}} \frac{1}{l_1!\, l_2! \dots l_k!}. \tag{$**$}$$

Alkalmazva $(**)$-ra (amelynek mindkét oldalán u-nak egy polinomja áll) az L funkcionált, adódik

$$\frac{T_n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \sum_{\substack{\sum_{i=1}^{k} l_i = n \\ l_i \geq 1}} \frac{1}{l_1!\, l_2! \dots l_k!}. \tag{$***$}$$

Mármost a $(***)$ azonosságot beszorozva x^n-al és összegezve n szerint adódik $T(x) = e^{e^x-1}$. E bizonyítás során az L funkcionált csak polinomokra alkalmaztuk. E bizonyítás megmutatja egyben a Rota-féle bizonyítás kapcsolatát a b) alatti bizonyítással is.

(1. 10) u-val való beszorzásával adódik

$$u^{n+1} = \sum_{r=1}^{n+1} S(n+1, r)u(u-1)\dots(u-r+1) = u\sum_{r=1}^{n} S(n, r)u(u-1)\dots(u-r+1)$$

és így együttható-összehasonlítással kapjuk az

$$S(n+1, r) = S(n, r-1) + rS(n, r) \quad (r=1, \dots, n+1) \tag{1. 13}$$

rekurzív összefüggést, ahol $S(n, 0)$ alatt 0 értendő, ha $n \geqq 1$ azonban $S(0, 0) = 1$. (1. 13)-ból viszont, bevezetve a

$$\sigma_r(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{S(n, r)x^n}{n!} \quad (r = 1, 2, \dots) \tag{1. 14}$$

jelölést, adódik

$$\sigma_r'(x) = \sigma_{r-1}(x) + r\sigma_r(x) \quad (r=1, 2, \dots). \tag{1. 15}$$

Mivel nyilvánvalóan $\sigma_0(x) \equiv 1$ és $\sigma_r(0) = 0$, ha $r \geqq 1$, tehát indukcióval adódik

$$\sigma_r(x) = \frac{(e^x-1)^r}{r!} \quad (r = 0, 1, \dots). \tag{1. 16}$$

Mármost (1. 11) szerint (figyelembe véve, hogy $S(n, r) = 0$ ha $r > n$),

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{T_n x^n}{n!} = \sum_{r=0}^{\infty} \sigma_r(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(e^x-1)^r}{r!} = e^{e^x-1},$$

amivel (1. 1) egy negyedik bizonyítását nyertük.

A másodfajú *Stirling*-számoknak egyébként egyszerű közvetlen kombinatorikai jelentése is van: $S(n, r)$ jelenti egy n elemű halmaz összes olyan particióinak a számát, amelyek pontosan r osztályból állnak. Ez legegyszerűbben (1. 13) segítségével látható be indukcióval. Ha ugyanis $T(n, r)$ jelöli a H_n halmaz összes olyan particióinak számát, amelyek pontosan r osztállyal bírnak, akkor $T(n, r)$-re nyilván fennáll, hogy

$$T(n+1, r) = T(n, r-1) + rT(n, r), \tag{1. 17}$$

hiszen H_{n+1} r osztályból álló particiói két típusba oszthatók: azok, amelyekben az $n+1$-edik elem egyedül alkot egy osztályt — ezek száma $T(n, r-1)$ — és azok, amelyekben az $n+1$-edik elem nem egyedül alkot egy osztályt; ez utóbbiakat azonban úgy nyerjük, hogy H_n tetszőleges r osztályból álló particióját véve, $n+1$-et az r osztály valamelyikéhez csatoljuk és így az utóbbiak száma $rT(n, r)$. Mármost (1. 13)-ból és (1. 17)-ből következik, hogy ha $T(n, r) = S(n, r)$ adott n-re és ez $r = 1, 2, \dots, n$-re, akkor $T(n+1, r) = S(n+1, r)$ $r = 1, 2, \dots, n+1$-re. Mivel azonban nyilván $S(1, 1) = 1$ és $T(1, 1) = 1$ következik, hogy minden n-re és r-re $S(n, r) = T(n, r)$. Megjegyzendő, hogy (1. 16) is levezethető a *Rota*-féle módszerrel, a következőképpen. Legyen L_r az a polinomokon értelmezett lineáris funkcionál, amelyre $L_r(u(u-1)\dots(u-r+1)) = 1$ és $L_r(u(u-1)\dots(u-j+1)) = 0$, ha $j \neq r$. Akkor nyilván

$$S(n, r) = L_r(u^n) \tag{1. 18}$$

és így

$$(1.19)\quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{S(n,r)x^n}{n!} = L_r(e^{ux}) = L_r\left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{u(u-1)\dots(u-j+1)}{j!}(e^x-1)^j\right) = \frac{(e^x-1)^r}{r!}.$$

Végül a másodfajú *Stirling*-számokra explicit képlet is megadható (1. 4) mintájára:

$$(1.20)\quad S(n,r) = \sum_{\substack{\sum_{k=1}^{n} kl_k = n \\ \sum_{k=1}^{n} l_k = r}} \frac{n!}{\prod_{k=1}^{n} k!^{l_k} l_k!}.$$

Nyilván (1. 20)-ból r szerinti összegezéssel adódik (1. 4).

Természetesen (1. 16) is levezethető (1. 20)-ból.

A másodfajú *Stirling*-számokra (1. 2) bizonyításához hasonló meggondolással adódik a

$$(1.21)\quad S(n+1,r) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} S(n-j, r-1)$$

rekurzió. Ebből újabb bizonyítást nyerhetünk (1. 16)-ra, ugyanis (1. 21)-ből adódik $\sigma_r(x)$-re az (1. 15)-től különböző

$$(1.22)\quad \sigma_r'(x) = \sigma_{r-1}(x)e^x \qquad (r=1,2,\dots)$$

differenciálegyenlet-rendszer és (1. 22)-ből indukcióval következik (1. 16).

Vizsgáljuk most H_n azon particióinak számát, amelyeknél az osztályok száma a C halmazba esik, ahol C a természetes számok tetszőleges részhalmaza. Ha e particiók számát $S(n,[C])$-vel jelöljük, akkor nyilván

$$S(n,[C]) = \sum_{r\in C} S(n,r)$$

és így

$$(1.23)\quad \sigma_{[C]}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{S(n,[C])x^n}{n!} = \sum_{r\in C} \frac{(e^x-1)^r}{r!}.$$

Speciálisan, ha $C=Z_1$, a páratlan számok halmaza, ill. $C=Z_0$ a páros számok halmaza

$$(1.24)\quad \sigma_{[Z_1]}(x) = \mathrm{sh}(e^x-1), \quad \text{ill.} \quad \sigma_{[Z_0]}(x) = \mathrm{ch}(e^x-1)$$

és így

$$(1.25)\quad \sigma_{[Z_0]}(x) - \sigma_{[Z_1]}(x) = e^{-(e^x-1)}.$$

Megjegyzendő, hogy az (1. 1) és (1. 25) összefüggésekből érdekes sorok adódnak az e, ill. $\frac{1}{e}$ számokra. Ugyanis (1. 1)-ből

$$(1.26)\quad T_n \cdot e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!} \qquad (n=1,2,\dots)$$

és hasonlóképpen (1. 25)-ből

$$\frac{D(n)}{e} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k k^n}{k!} \qquad (n = 1, 2, \ldots), \tag{1.27}$$

ahol $D(n)$ jelöli a H_n halmaz páros számú osztályból álló particiói számának és páratlan számú osztályból álló particiói számának a különbségét. Az (1. 26) sorok először G. DOBINSKI [12] dolgozatában szerepelnek; tőle függetlenül RADOS GUSZTÁV [13] is bebizonyította, hogy a $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!}$ sor összege e egészszámú többszöröse. Az (1. 27) képlet, illetve az a megjegyzés, hogy a $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k k^n}{k!}$ sor összege $\frac{1}{e}$ egészszámú többszöröse, tudomásunk szerint nem volt eddig ismeretes.

Az (1. 26) képlet még tovább általánosítható. Ugyanis nyilvánvalóan

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k(k-1)\ldots(k-n+1)}{k!} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{(k-n)!} = e = eL(u(u-1)\ldots(u-n+1)) \qquad (n = 0, 1, \ldots). \tag{1.28}$$

Tehát, ha $Q(u)$ tetszőleges polinom, akkor (lásd [9])

$$eL(Q(u)) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{Q(k)}{k!}. \tag{1.29}$$

Így tehát, ha $Q(u)$ tetszőleges egész együtthatós polinom, úgy a $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{Q(k)}{k!}$ sor összege e-nek egész számú többszöröse. Hasonlóképpen általánosítható (1. 27) is. Ugyanis

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (k(k-1)\ldots(k-n+1))}{k!} = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k-n)!} = \frac{(-1)^n}{e} = \tag{1.30}$$

$$= \frac{(-1)^n}{e} L(u(u-1)\ldots(u-n+1))$$

és így, ha $Q(u)$ tetszőleges polinom, $Q(u) = \sum_{n=0}^{N} c_n u(u-1)\ldots(u-n+1)$.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k Q(k)}{k!} = \frac{1}{e} L(Q^*(u)), \tag{1.31}$$

ahol $Q^*(u) = \sum_{n=0}^{N} (-1)^n c_n u(u-1)\ldots(u-n+1)$. Így tehát, ha $Q(u)$ tetszőleges egész együtthatós polinom, az (1. 31) bal oldalán álló sor összege $\frac{1}{e}$-nek egész számú többszöröse. Nyilván

$$L(Q^*(u)) = \sum (-1)^n c_n = \left[\frac{\sum (-1)^n \Delta^n Q}{n!}\right]_{u=0} = [e^{-\Delta} Q]_{u=0}. \tag{1.32}$$

2. §. Véges halmaz particiói az osztályok elemszámára vonatkozó korlátozás mellett

Legyen A pozitív egész számok egy tetszőleges halmaza. Jelölje $T_n(A)$ a H_n halmaz összes olyan particióinak számát, amelynél minden osztály elemeinek száma A-ba tartozik.

Be fogjuk bizonyítani (1. 1) általánosításaként, hogy

$$T_A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T_n(A)x^n}{n!} = e^{A(x)}, \tag{2. 1}$$

ahol

$$A(x) = \sum_{k\in A} \frac{x^k}{k!}.$$

Mind a négy, az első §-ban közölt, (1. 1)-re adott bizonyítás megfelelő változtatásokkal alkalmas (2. 1) bizonyítására is.

a) (2. 1) *bizonyítása a $T_n(A)$-ra vonatkozó rekurzió alapján.*

Könnyen belátható, hogy fennáll a

$$T_{n+1}(A) = \sum_{k+1\in A} \binom{n}{k} T_{n-k}(A) \tag{2. 2}$$

rekurzió; ebből

$$T_A'(x) = T_A(x)\cdot A'(x) \tag{2. 3}$$

és így, figyelembe véve, hogy $T_A(0) = 1$, adódik (2. 1).

b) (2. 1) *bizonyítása $T_n(A)$ explicit képlete alapján.*

(1. 4)-hez hasonlóan belátható, hogy

$$T_n(A) = \sum_{\substack{\sum_{k=1}^{n} kl_k = n \\ k\in A}} \frac{n!}{\prod_{\substack{k=1\\k\in A}}^{n} k!^{l_k}\cdot l_k!} \tag{2. 4}$$

és ebből

$$T_A(x) = \prod_{k\in A} \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x^k}{k!}\right)^l}{l!} \right) = e^{A(x)}. \tag{2. 5}$$

c) (2. 1) *bizonyítása Rota funkcionál-módszerével.*

Jelölje $\varphi_A(u, n)$ a H_n halmazon értelmezett összes olyan $f(x)$ függvények számát, amelyek értékkészlete a $H_u = \{1, 2, \ldots, u\}$ halmaz és amelyek minden x értéket ($x = 1, 2, \ldots, u$), amelyet ténylegesen felvesznek, k_x-szer vesznek fel, ahol $k_x \in A$. Ez esetben nyilván fennáll a

$$\Phi_A(u, n+1) = u \sum_{k+1\in A} \binom{n}{k} \Phi_A(u-1, n-k) \tag{2. 6}$$

rekurzió és így, bevezetve a

$$\varphi_A(u, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Phi_A(u, n) x^n}{n!} \tag{2. 7}$$

jelölést,

$$\frac{\partial \varphi_A(u, x)}{\partial x} = u \cdot \varphi_A(u-1, x) A'(x). \tag{2. 8}$$

Mivel

$$\varphi_A(1, x) = A(x) + 1, \tag{2. 9}$$

tehát indukcióval következik

$$\varphi_A(u, x) = (A(x)+1)^u. \tag{2. 10}$$

Másrészt nyilván, ha $\Pi_n(A)$ jelöli H_n összes olyan particióinak halmazát, amelyeknél az osztályok elemszámai mind A-ba esnek,

$$\Phi_A(u, n) = \sum_{\pi \in \Pi_n(A)} u(u-1) \dots (u - N(\pi) + 1), \tag{2. 11}$$

tehát ha L ugyanazt a funkcionált jelenti, mint az 1. §-ban, akkor

$$T_n(A) = L(\Phi_A(u, n)). \tag{2. 12}$$

Ennélfogva

$$T_A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T_n(A) x^n}{n!} = L\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n \Phi_A(u, n)}{n!}\right) = L((1+A(x))^u) = \tag{2. 13}$$

$$= L\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{u(u-1)\dots(u-k+1)}{k!} (A(x))^k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A(x))^k}{k!} = e^{A(x)}.$$

d) (2. 1) *bizonyítása az általánosított másodfajú Stirling-számok segítségével.*

Jelölje $S(n, r, A)$ a H_n halmaz azon particióinak számát, amelyek r osztályból állnak és minden osztály elemszáma A-ba tartozik. Az $S(n, r, A)$ $(n = 1, 2, \dots)$ számsorozat generátorfüggvényének meghatározásához az előző §-ban bevezetett L_r funkcionált használjuk. Kiindulva újból a (2. 11) azonosságból, kapjuk, hogy

$$S(n, r, A) = L_r(\Phi_A(u, n)) \tag{2. 14}$$

és így

$$\sigma_r(x, A) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{S(n, r, A)}{n!} x^n = L_r((1+A(x))^u) = \frac{A(x)^r}{r!}. \tag{2. 15}$$

Az $S(n, r, A)$ számokat *az A halmaz másodfajú Stirling-számai*nak nevezzük. E számokat tudomásunk szerint eddig nem vizsgálták, annak ellenére, hogy ezek a másodfajú *Stirling*-számok természetes általánosításai. Természetesen fennáll a

$$\sum_{r=1}^{n} S(n, r, A) = T_n(A) \tag{2. 16}$$

azonosság, továbbá a

$$\sum_{r=1}^{n} S(u, r, A)u(u-1)\dots(u-r+1) = \Phi_A(u, n) \tag{2.17}$$

összefüggés, és a

$$S(n, r, A) = \sum_{\substack{\sum\limits_{\substack{k=1\\k\in A}}^{n} kl_k = n \\ \sum\limits_{\substack{k=1\\k\in A}}^{n} l_k = r}} \frac{n!}{\prod\limits_{\substack{k=1\\k\in A}}^{n} k!^{l_k} \cdot l_k!} \tag{2.18}$$

explicit képlet.

Az A halmazra vonatkozó másodfajú *Stirling*-számokra nem általánosítható az (1. 13) rekurzió, azonban az (1. 21) rekurzió analogonja érvényes és a következőképpen írható fel:

$$S(n+1, r, A) = \sum_{j+1\in A} \binom{n}{j} S(n-j, r-1, A). \tag{2.19}$$

Ezen rekurzió segítségével e számok n és r kis értékeire meghatározhatók. (2. 19)-ből egy újabb bizonyítást nyerhetünk (2. 15)-re, ugyanis (2. 19)-ből

$$\sigma_r'(x, A) = A'(x)\sigma_{r-1}(x, A) \tag{2.20}$$

és ebből (2. 15) indukcióval következik.

Érdemes megvizsgálni a következő példát: Legyen $A = Z_1$ a páratlan számok halmaza, akkor $A(x) = \operatorname{sh} x$ és így, bevezetve a $T_n(Z_1) = Q_n$ és $S(n, r, Z_1) = Q(n, r)$ jelöléseket,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{Q_n x^n}{n!} = e^{\operatorname{sh} x}, \tag{2.21}$$

valamint

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{Q(n, r)x^n}{n!} = \frac{(\operatorname{sh} x)^r}{r!} \qquad r = 1, 2, \dots. \tag{2.22}$$

Utóbbi összefüggésből sorbafejtéssel és együttható-összehasonlítással kapjuk, hogy

$$Q(n, r) = \frac{1}{2^r \cdot r!} \sum_{j=0}^{r} \binom{r}{j} (2j-r)^n (-1)^{r-j}. \tag{2.23}$$

A $Q(n, r)$ és Q_n számokat $r \leqq n \leqq 7$-re a következő táblázat adja meg:

$n \backslash r$	1	2	3	4	5	6	7	Q_n
1	1	0	0	0	0	0	0	1
2	0	1	0	0	0	0	0	1
3	1	0	1	0	0	0	0	1
4	0	4	0	1	0	0	0	5
5	1	0	10	0	1	0	0	12
6	0	16	0	20	0	1	0	37
7	1	0	91	0	35	0	1	128

A Q_n számsorozatra érvényes a következő rekurzió:

$$Q_{n+1} = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \binom{n}{2k} Q_{n-2k},$$

amelyből (2. 21) közvetlenül is levezethető. $Q(n, r)$ nyilvánvalóan csak akkor különbözhet 0-tól, ha n és r megegyező paritásúak.

3. §. Véges halmaz particiói más korlátozások mellett

Legyen B a természetes számok egy tetszőleges halmaza. Jelölje $U_n(B)$ a H_n halmaz összes olyan particióinak számát, amelynél bármely k-ra a k elemű osztályok száma B-be tartozik.

Be fogjuk bizonyítani, hogy

$$U_B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{U_n(B)x^n}{n!} = \prod_{k=1}^{\infty} B\left(\frac{x^k}{k!}\right), \tag{3. 1}$$

ahol

$$B(y) = \sum_{l \in B} \frac{y^l}{l!}. \tag{3. 2}$$

(3. 1)-et legegyszerűbben $U_n(B)$ explicit képlete alapján bizonyíthatjuk be. (2. 4)-hez hasonlóan belátható, hogy

$$U_n(B) = \sum_{\substack{\sum_{k=1}^{n} kl_k = n \\ l_k \in B}} \frac{n!}{\prod_{k=1}^{n} k!^{l_k} \cdot l_k!}. \tag{3. 3}$$

(3. 3)-ból (3. 1) közvetlenül következik.

Legyen most A és B természetes számok két halmaza és jelölje $T_n(A, B)$ a H_n halmaz azon particióinak számát, amelyeknél minden osztály elemszáma A-hoz tartozik és minden $k \in A$-ra a partició k elemű osztályainak száma B-be tartozik. (2. 4) és (3. 2) általánosításaként adódik, hogy

$$T_n(A, B) = \sum_{\substack{\sum_{k=1}^{n} kl_k = n \\ k \in A \\ l_k \in B}} \frac{n!}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \in A \\ l_k \in B}}^{n} k!^{l_k} \cdot l_k!} \tag{3. 4}$$

és ebből

$$T(x, A, B) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T_n(A, B)x^n}{n!} = \prod_{k \in A} B\left(\frac{x^k}{k!}\right), \tag{3. 5}$$

ahol $B(y)$ jelentése ugyanaz, mint (3. 2)-ben.

Végül, ha $S(n, r, A, B)$ jelöli H_n azon particióinak számát, amelyek r osztályból állnak, minden osztály elemszáma az A halmazba tartozik és minden $k \in A$-ra a k elemű osztályok száma B-be tartozik, akkor

(3. 6)
$$S(n, r, A, B) = \sum_{\substack{\sum_{k=1}^{n} l_k = r,\ \sum_{k=1}^{n} k l_k = n \\ k \in A,\ l_k \in B}} \frac{n!}{\prod_{k=1}^{n} k!^{l_k} \cdot l_k!}$$

és így

(3. 7)
$$\sigma_r(x, A, B) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{S(n, r, A, B) x^n}{n!}$$

egyenlő $\prod_{k \in A} B\left(\frac{w^k}{k!}\right)$-ban w^r együtthatójával.

4. §. A másodfajú Stirling-számok egy másik kombinatorikai értelmezése

Vizsgáljuk a következő kérdést: hány olyan n-edrendű variáció adható meg k különböző elemből (ezekről az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy az $1, 2, \ldots, k$ számok), amelyben mind a k elem legalább egyszer előfordul. E számot jelöljük $V(n, k)$-val.

Legyen $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ egy a kívánt tulajdonsággal bíró variáció, azaz x_i az $1, 2, \ldots, k$ számok valamelyikével egyenlő $(i = 1, 2, \ldots, n)$ és az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ számsorozatban az $1, 2, \ldots, k$ számok mindegyike legalább egyszer előfordul. Minden ilyen sorozathoz egyértelműen hozzárendelhető az $1, 2, \ldots, n$ számok egy k osztályból álló particiója, ti. az, amelynél akkor és csak akkor soroljuk egy osztályba az i és j számot, ha $x_i = x_j$. Nyilvánvaló, hogy ily módon az $1, 2, \ldots, n$ számok minden egyes k osztályú particióját $k!$-szor kapjuk meg, mivel az $1, 2, \ldots, k$ számok és a partició osztályai között $k!$-féleképpen adható meg egyértelmű megfeleltetés. Ennélfogva

(4. 1)
$$V(n, k) = k! S(n, k).$$

Ezzel a másodfajú *Stirling*-számok egy, az előzőekben tárgyalttól eltérő kombinatorikai értelmezéséhez jutottunk el. (Megjegyzendő, hogy a másodfajú *Stirling*-számokat általában ezen értelmezés kapcsán szokták bevezetni; lásd pl. [11]). A (4. 1) összefüggésből egy újabb explicit képletet nyerhetünk a másodfajú *Stirling*-számokra. Ugyanis $V(n, k)$ kiszámítható „szitálással", azaz a jól ismert logikai formulával: (lásd pl. [14]).

A szóban forgó variációk számát megkaphatjuk úgy, hogy az $1, 2, \ldots, k$, elemek összes n-edosztályú variációinak számából levonjuk azok számát, amelyekben a j szám nem fordul elő $(j = 1, 2, \ldots, k)$, ehhez hozzáadjuk a kétszer levontak számát, s.i.t. Így nyerjük a

(4. 2)
$$V(n, k) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} (k-j)^n$$

képletet és ebből az

(4. 3)
$$S(n, k) = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} (k-j)^n$$

képletet. (4. 3)-ból leolvasható, hogy

$$S(n,k)=\frac{d^n}{dx^n}\left[\frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}e^{(k-j)x}\right]_{x=0}\tag{4. 4}$$

és így

$$\sigma_k(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{S(n,k)}{n!}x^n=\frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}e^{(k-j)x}=\frac{(e^x-1)^k}{k!},\tag{4. 5}$$

vagyis ezúton is eljuthatunk a másodfajú Stirling-számok generátorfüggvényének (1. 16) képletéhez. Megfordítva, (4. 3) levezethető kombinatorikai meggondolások nélkül, tisztán analitikusan (4. 5)-ből. Megjegyzendő, hogy (4. 5)-ből $S(n, k)$-ra a következő explicit képletet nyerjük:

$$S(n,k)=\frac{1}{k!}\sum_{\substack{r_i\geqq 1\\ \Sigma r_i=n}}\frac{n!}{r_1!\,r_2!\dots r_k!}.\tag{4. 6}$$

A (4. 6) képlet csak jelölésben különbözik az (1. 20) képlettől és közvetlenül nyerhető az utóbbiból is.

Természetesen az általánosított másodfajú Stirling-számok is értelmezhetők bizonyos korlátozásoknak eleget tevő variációk számaként. Ugyanis, ha $V(n, k, A)$ jelöli az $1, 2, \dots, k$ számokból képezhető azon n-ed osztályú variációk számát, amelyekben az $1, 2, \dots, k$ számok mindegyikének előfordulásainak száma a pozitív egész számok egy megadott A részhalmazába esik, akkor

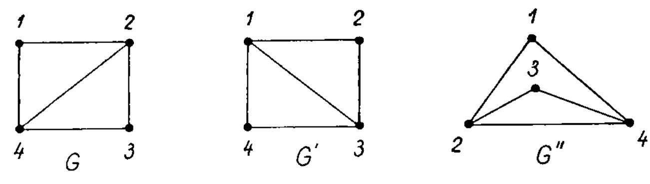
$$V(n,k,A)=k!\,S(n,k,A).\tag{4. 7}$$

5. §. Fákra vonatkozó kombinatorikai problémák

Gráfon a következőkben mindig irányítatlan, többszörös élek és hurkok nélküli gráfot értünk.[8] Egy gráfot szögpontjainak és éleinek megadásával definiálunk. Ha a G gráf szögpontjainak halmaza a $H_n=\{1, 2, \dots, n\}$ halmaz, a G gráf egyértelműen jellemezhető élei halmazával, amely a H_n halmazból képezett (i, j) $(1\leqq i<j\leqq n)$ számpárok $H_n^{(2)}$ halmazának egy tetszőleges részhalmaza lehet. Az (i, j) élről azt mondjuk, hogy az i és j (ill. a j és i) szögpontokat köti össze; az (i, j) élt az i (vagy j) pontból kiinduló élnek is fogjuk nevezni. Egy G gráf szögpontjainak számát $N(G)$-vel, éleinek számát $E(G)$-vel fogjuk jelölni. A gráfokra vonatkozó kombinatorikai leszámlálási problémáknál kétféle kérdésfeltevés lehetséges. A gráf pontjait tekinthetjük megkülönböztethetőnek, vagy megkülönbözhetetlennek. Az első esetben a gráf pontjait megszámozhatjuk, ezért az első típusú problémák esetében *számozott szögpontú* gráfokról beszélünk. Az ellenkező esetben számozatlan szögpontú, vagy topológiai gráfokról beszélünk. Lényegében arról van itt szó, hogy mikor tekintünk két gráfot azonosnak. Amikor számozott szögpontú gráfokról beszélünk, a G és G' gráfokat akkor tekintjük azonosnak, ha ugyanannyi szögpontból állnak, szögpontjaik meg vannak számozva, két szögpont akkor és csak

[8] A gráfelmélet alapfogalmaira vonatkozólag l. [15], [16] és [1].

akkor van G-ben összekötve, ha a megfelelő sorszámú szögpontok G'-ben össze vannak kötve. Az ellenkező esetben akkor tekintjük a G és G' (számozatlan szögpontú) gráfokat azonosnak, ha megadható szögpontjaik között egy olyan kölcsönösen egyértelmű leképezés, hogy két szögpont G-ben akkor és csak akkor van összekötve, ha a leképezésnél nekik megfelelő pontok G'-ben össze vannak kötve. Pl. az 1. ábrán látható G és G' gráfok mint számozott szögpontú gráfok különbözőek, de mint topológiai gráfok azonosak, míg a G és G'' gráfok mint számozott szögpontú gráfok is azonosak.



1. ábra

Mi itt csak számozott szögpontú gráfokkal foglalkozunk.

*Út*nak nevezzük egy G gráf pontjainak és éleinek egy olyan $P_1 e_1 P_2 e_2 \ldots \ldots P_k e_k P_{k+1}$ sorozatát ($k=1, 2, \ldots$), hogy $P_1, P_2, \ldots, P_{k+1}$ a G gráf különböző pontjai és e_j a G gráf éle, amely a P_j és P_{j+1} pontokat köti össze ($j=1, 2, \ldots, k$). Egy *út hossza* alatt éleinek számát értjük, tehát a $P_1 e_1 \ldots e_k P_{k+1}$ út hossza k.

*Kör*nek nevezzük a G gráf pontjainak és éleinek egy olyan $P_1 e_1 P_2 e_2 \ldots P_k e_k$ sorozatát ($k=3, 4, \ldots$), hogy $P_1, P_2, \ldots, P_k$ a G gráf különböző pontjai, e_j a G gráf éle, amely a P_j és P_{j+1} pontokat köti össze ($j=1, 2, \ldots, k-1$) és e_k a G gráf éle, amely a P_k és P_1 pontokat köti össze.

Egy G gráfot *összefüggő*nek nevezünk, ha bármely két pontját összeköti legalább egy út. A G gráfot *fá*nak nevezzük, ha összefüggő és nem tartalmaz kört.

Egy tetszőleges gráf szögpontjai között az úttal való összeköthetőség egy ekvivalencia reláció. Ily módon minden gráf összefüggő gráfokra bontható, amelyek között nincs él. Ezeket az összefüggő gráfokat az eredeti gráf (összefüggő) *komponenseinek* nevezik.

Egy gráfot, amelynek minden komponense fa, *erdő*nek nevezünk.

Könnyen beláthatók a következő egyszerű állítások.

A) Egy fa bármely két pontját egyetlen egy út köti össze.

B) Egy G összefüggő gráfban $E(G) \geqq N(G)-1$ és egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha G fa.

A) abból következik, hogy ha a P és Q pontokat két út kötné össze és P-ből elindulva az első úton R volna az első olyan P-től különböző szögpont, amely a második úthoz is hozzátartozik, úgy P-ből az első úton R-be menve és onnan a második úton P-be visszatérve egy G-hez tartozó kört kapnánk, tehát G nem volna fa.

B) a következőképpen látható be: Ha G egy összefüggő gráf, lehetséges, hogy bizonyos élei elhagyása után is még összefüggő marad. Hagyjunk el G-ből annyi élt, hogy minden további él elhagyásával G már megszűnik összefüggő lenni. Azt állítjuk, hogy az így nyert G^* gráf fa. Ha ugyanis G^* tartalmazna egy kört, ennek tetszőleges élét elhagyva, G^* még összefüggő maradna. Elég tehát belátni, hogy egy n szögpontú fa éleinek száma $n-1$ és hogy egy n szögpontú és $n-1$ élű összefüggő gráf fa. Az első állítás indukcióval látható be; az állítás $n=1$-re nyilván igaz, tegyük fel, hogy $n<m$-re már bebizonyítottuk és legyen G egy m szögpontú fa. Legyen P G egy tetszőleges szögpontja. Ha G-ből elhagyjuk a P pontot, és az összes P-ből kiinduló éleket, G-ből egy G' erdőt kapunk. Ha G' komponenseinek száma k, úgy az indukció szerint G'-ben $m-k-1$ él van; mivel P-ből G' minden komponensébe pontosan egy él kell hogy vezessen, G eleinek száma $m-k-1+k=$ $=m-1$. A második állítást úgy láthatjuk be, hogy ha G egy n szögpontú és $n-1$ élű összefüggő gráf volna, amely tartalmaz egy k szögpontú kört, úgy e kör pontjait egyetlen ponttá összehúzva úgy, hogy bármely más pontot, amely e kör valamely pontjával össze volt kötve, az új ponttal összekötünk, egy olyan összefüggő gráfot kapnánk, amelyben $n-k+1$ pont és $n-k-1$ él volna, ami az előbbiek szerint lehetetlen.

Egy G gráf egy P pontja *fok*án a P-ből kiinduló élek számát értjük. A 0 fokú pontokat *izolált pont*oknak, az 1 fokú pontokat *vég*pontoknak nevezzük. Igazak a következő állítások:

C) Egy $n \geqq 2$ szögpontú fának legalább 2 és legfeljebb $n-1$ végpontja van.

C) a következőképpen látható be: Legyen P G-nek egy tetszőleges pontja. Ha P végpont, vegyük a P-ből kiinduló (egyik) leghosszabb utat; ennek másik végpontja G-nek is végpontja. Ha P nem végpont, legalább 2 él, e és e' indul ki P-ből, a P-ből kiinduló és e-vel, ill. e'-vel kezdődő (egyik) leghosszabb út másik végpontja G-nek is végpontja.

Jelölje t_n az n megadott (számozott) szögponttal bíró különböző fák számát. Elsőnek A. CAYLEY [17] bizonyította, hogy

$$t_n = n^{n-2}. \tag{5.1}$$

Az (5.1) ún. *Cayley-féle képlet* legegyszerűbb bizonyítása A. PRÜFER [18] módszerével történhet. Be fogjuk bizonyítani e módszerrel, hogy az $1, 2, \ldots, n$ szögpontokkal bíró fák F_n halmaza egy-egyértelműen leképezhető az $1, 2, \ldots, n$ elemekből képezhető összes $n-2$ tagú sorozatok halmazára; e leképezés létezéséből (5.1) már következik, mivel a szóban forgó sorozatok száma nyilván n^{n-2}.

A szóban forgó leképezés a következő: legyen G egy n szögpontú fa, amelynek szögpontjai az $1, 2, \ldots, n$ számokkal vannak megszámozva. Keressük meg G végpontjai közül a legnagyobb sorszámút; legyen ez P_{y_1}. Legyen x_1 azon (egyetlen) G-beli szögpont sorszáma, amellyel P_{y_1} össze van kötve. Hagyjuk el G-ből a P_{y_1} pontot és a $P_{y_1}P_{x_1}$ élt; az így nyert fát nevezzük G'-nek. Keressük meg G' végpontjai közül a legnagyobb sorszámút; legyen ez P_{y_2}. Legyen x_2 azon (egyetlen) G'-beli szögpont sorszáma, amellyel P_{y_2} össze van kötve G'-ben. Hagyjuk el G'-ből a P_{y_2} pontot és a $P_{y_2}P_{x_2}$ élt; az így nyert fát jelöljük G''-vel. Folytassuk ezt az eljárást addig, amíg csak egy két szögpontú fa marad. Rendeljük hozzá a G fához az $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-2})$ számsorozatot. Be fogjuk bizonyítani, hogy ily módon az $1, 2, \ldots, n$ számokból képezhető összes lehetséges $n-2$ tagú sorozatot megkaphatjuk és különböző sorozatokhoz különböző fák tartoznak.

Az első állítás bizonyítása úgy végezhető el, hogy tetszőleges, az $1, 2, \ldots, n$ számokból képezett $(x_1, \ldots, x_{n-2})$ sorozathoz megszerkesztünk egy fát, amelyhez éppen ezt a sorozatot rendeli hozzá a Prüfer-féle algoritmus. Legyenek $z_1, \ldots, z_k$ az $1, 2, \ldots, n$ számok közül azok, amelyek az $x_1, x_2, \ldots, x_{n-2}$ sorozatban nem fordulnak elő (nyilván $k \geqq 2$) csökkenően elrendezve. Kössük össze a P_{x_1} és P_{z_1} pontokat. Ezek után vizsgáljuk az $(x_2, ..., x_{n-2})$ és $(z_2, ..., z_k)$ sorozatokat. Ha x_1 nem fordul elő az $(x_2, ..., x_{n-2})$ sorozatban, írjuk be x_1-et a $(z_2, ..., z_k)$ sorozatba úgy, hogy a sorozat monoton csökkenő maradjon; ha azonban x_1 előfordul az $x_2, ..., x_{n-2}$ számok között, úgy ez a lépés elmarad. A $(z_2, ..., z_k)$ sorozatból ily módon létrejött sorozatot jelölje $(z_1', z_2', ..., z_{k'}')$. Kössük össze P_{x_2}-t és $P_{z_1'}$-t. Az eljárást addig folytatjuk, amíg az x_i-k el nem fogynak; a megmaradó két z-nek megfelelő két pontot is összekötjük. Azt, hogy ily módon mindig fát kapunk, indukcióval láthatjuk be. Ugyancsak indukcióval láthatjuk be, hogy különböző sorozatokhoz különböző fák tartoznak és megfordítva.

A t_n sorozatra fennáll a következő rekurzió:

$$2(n-1)t_n = \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} t_k t_{n-k} \cdot k(n-k). \tag{5.2}$$

Ugyanis egy n szögpontú fát felépíthetünk a következőképpen: kiválasztunk az n pontból k pontot $(1 \leqq k \leqq n-1)$, ezekből készítünk egy G_1 fát (ez t_k-féleképpen lehetséges), a megmaradó $n-k$ pontból is készítünk egy G_2 fát (ez t_{n-k}-féleképpen lehetséges), végül G_1 egy tetszőleges pontját összekötjük G_2 egy tetszőleges pontjával. Ilyen módon minden egyes n szögpontú fát $2(n-1)$-féleképpen nyerünk, hiszen a G_1-et G_2-vel összekötő él a végeredményként nyert G fa $n-1$ éle közül bármelyik lehet, és ha ezt az élt G-ből elhagyjuk, a fa két fára esik szét, amelyek közül bármelyik lehet G_1.

(5.2)-ből, bevezetve az

$$y = f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t_k x^k}{(k-1)!} \tag{5.3}$$

jelölést, következik, hogy

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)t_n x^n}{n!} = f^2(x);$$

így nyerjük, hogy

$$2y' - \frac{2y}{x} = 2yy',$$

tehát

$$\frac{dx}{x} = dy\left(\frac{1}{y} - 1\right),$$

azaz (figyelembe véve, hogy $f(0)=0$)

$$x = ye^{-y}. \tag{5.4}$$

Ilyen módon azt az eredményt kapjuk, hogy az

$$y = G(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{k-1} x^k}{k!} \tag{5.5}$$

sor az $x = ye^{-y}$ függvény inverz függvényének a sorfejtése. E sorfejtést természetesen tisztán analitikus módszerrel is előállíthatjuk (az ún. *Bürmann—Lagrange* sorfejtésre vonatkozó általános képletből[9]; figyelemre méltó azonban, hogy az előbbiekben ennek az analitikus feladatnak a megoldását egy kombinatorikai eredményből a (Cayley-féle (5.1) képletből) nyertük. Megfordítva, a fenti meggondolásból (5.1) egy újabb bizonyítása adódik, felhasználva a (5.2) rekurzív összefüggést és az $x=ye^{-y}$ függvény inverz függvényének sorfejtését (amelyet e célból analitikus módszerrel direkt bebizonyíthatunk). Ugyanis (lásd [19] l. c.) ha $x=\frac{y}{\varphi(y)}$, akkor

$$y=\sum \frac{x^n}{n!}\left[\frac{d^{n-1}\varphi(t)^n}{dt^{n-1}}\right]_{t=0}.$$

Ily módon, ha $x=ye^{-y}$,

$$y=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}n^{n-1}.$$

Megjegyzendő, hogy az $x=ye^{-y}$ függvény inverz függvénye (5.5) sorfejtése alapján tisztán analitikus bizonyítást nyerhetünk az (5.2) azonosságra, tehát arra, hogy

$$2(n-1)n^{n-2}=\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}k^{k-1}(n-k)^{n-k-1}. \tag{5. 6}$$

A *Prüfer*-féle módszer felhasználható számos más, fák leszámlálására vonatkozó feladat megoldására is.

Vizsgáljuk meg például a következő kérdést: Hány olyan n (számozott) szögpontú fa van, amelynek pontosan r végpontja van $(2\leqq r\leqq n-1)$? Nevezzük a *Prüfer*-féle leképezésnél egy n szögpontú fához hozzárendelt $(x_1, x_2, ..., x_{n-2})$ számsorozatot az illető fa *profil*jának. Nyilvánvaló, hogy ha P_k a G fa egy tetszőleges szögpontja, a k szám a G fa profiljában $d(P_k)-1$-szer fordul elő, ahol $d(P_k)$ a P_k pont foka G-ben; G végpontjai tehát azok és csak azok a P_k pontok, amelyekre k nem fordul elő G profiljában.

Ha tehát G-nek pontosan r végpontja van, és ezek a $P_{a_1}, P_{a_2}, ..., P_{a_r}$ pontok, úgy G profilja az $1, 2, ..., n$ sorozat azon $b_1, b_2, ..., b_{n-r}$ elemeiből áll, amelyek az $a_1, a_2, ..., a_r$ számoktól különböznek, és ez utóbbi számok legalább egyszer előfordulnak G profiljában. Mármost $n-r$ elemből olyan $n-2$ tagú sorozatot, amelyben az $n-r$ elem mindegyike ténylegesen előfordul, amint a 4. §-ban láttuk, $(n-r)!\,S(n-2, n-r)$-féleképpen készíthetünk, és így az n számozott szögpontú és pontosan r végponttal bíró fák száma

$$t_{n,r}=\binom{n}{r}(n-r)!\,S(n-2,n-r)=\frac{n!}{r!}S(n-2,n-r). \tag{5. 7}$$

Azt, hogy

$$\sum_{r=2}^{n-1}\frac{n!}{r!}S(n-1,n-r)=n^{n-2} \tag{5. 8}$$

[9] L. pl. [19].

persze közvetlenül is beláthatjuk, ha (1.10)-ben n helyébe $(n-2)$-t és u helyébe n-et helyettesítünk. Ugyanis (1.10)-ből

$$\sum_{r=2}^{n-1} \frac{n!}{r!} S(n-2, n-r) = \sum_{l=1}^{n-2} S(n-2, l) n(n-1)\dots(n-l+1) = n^{n-2}.$$

Az elmondottakból az is következik, hogy ha $t_{n,r}(A)$ jelöli azon n szögpontú fák számát, amelyeknek r végpontjuk van és amelyekben az 1-nél magasabb fokú pontok fokszámai mind az A halmazba tartoznak, ahol A a $2, 3, \dots$ számsorozat egy tetszőleges részhalmaza és A' jelöli az összes $a-1$ alakú számok halmazát, ahol $a \in A$, akkor

$$t_{n,r}(A) = \binom{n}{r} S(n-2, n-r, A')(n-r)! \qquad (2 \leqq r \leqq n-1). \tag{5.9}$$

Ha tehát $t_n(A)$ jelöli az összes olyan n-szögpontú fák számát, amelyek *1-nél magasabb fokú* szögpontjainak fokai az A halmazba tartoznak, akkor (2.17) szerint

$$t_n(A) = \sum_{r=2}^{n-1} t_{n,r}(A) = \sum_{l=1}^{n-2} S(n-2, l, A') n(n-1)\dots(n-l+1) = \tag{5.10}$$

$$= \Phi_{A'}(n, n-2).$$

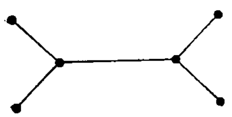
(5.10) a *Cayley*-formula általánosításának tekinthető.

Speciálisan, ha pl. A a $\{2\}$ halmaz, tehát A' az 1 számból mint egyetlen elemből álló halmaz, $\Phi_{A'}(n, n-2) = \frac{n!}{2}$, ugyanis a H_{n-2} halmazon értelmezett azon függvények száma, amelyek az $1, 2, \dots, n$ értékeket vehetik fel és mindegyiket csak egyszer, $\binom{n}{2}(n-2)! = \frac{n!}{2}$. Valóban, az olyan n-szögpontú fák, amelyekben minden pont foka 1 vagy 2, egyetlen él által alkotott útból állnak és ezek száma $\frac{n!}{2}$. Másik példaként vizsgáljuk azt az esetet, ha A a $\{3\}$ halmaz. Ez esetben A' a 2 számból mint egyetlen elemből álló halmaz és így

$$\Phi_{A'}(n, n-2) = \begin{cases} 0, & \text{ha } n \text{ páratlan,} \\ 1, 3\dots(2k-3)\binom{2k}{k-1}(k-1), & \text{ha } n = 2k \end{cases}$$

adja meg azon n számozott szögpontú fák számát, amelyekben minden pont foka 1 vagy 3.

Például ha $n=6$, $\Phi_{A'}(6,4) = 90$. Az összes 6 szögpontú fák, amelyekben minden pont foka 1 vagy 3, a 2. ábrán látható típusúak, és leszámlálással is könnyen belátható, hogy 90 ilyen fa van.



2. ábra

Az (5.7) képlet alapján kiszámíthatjuk az n szögpontú fák végpontjainak átlagos számát. Ha e számot M_n-nel jelöljük, úgy tehát (1. 10) szerint

$$M_n = \frac{1}{n^{n-2}} \sum_{r=2}^{n-1} r t_{n,r} = \tag{5.11}$$

$$= \frac{1}{n^{n-2}} \sum_{l=1}^{n-2} S(n-2, l) n(n-1) \dots (n-l) = n\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-2}.$$

Tehát

$$\lim_{n\to\infty} \frac{M_n}{n} = \frac{1}{e}, \tag{5.12}$$

vagyis egy n szögpontú fának közelítőleg átlagosan $\frac{n}{e}$ végpontja van. Az (5.7) képletből kiindulva bebizonyítottam (l. [20]), hogy ha az n^{n-2} számozott szögpontú fa közül egyet találomra kiválasztunk (oly módon, hogy minden egyes fa ugyanolyan valószínűséggel kerülhet kiválasztásra) és v_n jelöli e találomra választott fa végpontjainak számát, úgy a v_n valószínűségi változó, ha $n \to \infty$, határértékben normális eloszlású $\frac{n}{e}$ várható értékkel és $\frac{1}{e}\sqrt{n(e-2)}$ szórással, vagyis

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{v_n - \frac{n}{e}}{\frac{1}{e}\sqrt{n(e-2)}} < x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du. \tag{5.13}$$

Speciálisan (5.13)-ból következik, hogy az n szögpontú fáknak körülbelül a felének a végpontjainak száma kisebb $\frac{n}{e}$-nél.

Alábbiakban közöljük (5.13) [20]-ban adott bizonyításának egy egyszerűsítését. Először számítsuk ki v_n szórásnégyzetét, amelyet D_n^2-tel jelölünk. (1.10) szerint

$$\sum_{r=2}^{n-1} r(r-1) t_{n,r} = n(n-1)(n-2)^{n-2}, \tag{5.14}$$

tehát tekintettel (5.11)-re

$$D_n^2 = n(n-1)\left(1-\frac{2}{n}\right)^{n-2} + n\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-2} - n^2\left(1-\frac{1}{n}\right)^{2n-2} \tag{5.15}$$

és így

$$\lim_{n\to\infty} \frac{D_n^2}{n} = \frac{e-2}{e^2}. \tag{5.16}$$

Ahhoz, hogy (5.13)-at bebizonyítsuk, kimutatjuk, hogy $\dfrac{v_n - \frac{n}{e}}{\frac{1}{e}\sqrt{n(e-2)}}$ karakterisztikus függvénye konvergál a normális eloszlás karakterisztikus függvényéhez, vagyis, hogy t minden valós értékére

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{r=2}^{n-1}\frac{t_{n,r}}{n^{n-2}}e^{\frac{it(er-n)}{\sqrt{n(e-2)}}}=e^{-\frac{t^2}{2}}. \tag{5.17}$$

Mármost ennek bizonyításához előbb egy igen egyszerű lemmát bizonyítunk be, amely itt (és más hasonló esetekben is) jól használható.

LEMMA: *Legyen $F_n(x)$ $(n=1, 2, \ldots)$ eloszlásfüggvények egy sorozata és*

$$\varphi_n(t)=\int_{a_n}^{b_n}e^{ixt}\,dF_n(x), \tag{5.18}$$

ahol $a_n<b_n$.
Ha t minden valós értékére

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(t)=\varphi(t), \tag{5.19}$$

ahol $\varphi(t)$ egy karakterisztikus függvény, akkor

$$\lim_{n\to\infty}F_n(x)=F(x) \tag{5.20}$$

az $F(x)$ eloszlásfüggvény minden x folytonossági pontjában.

A lemma bizonyítása. Mivel (5.19) $t=0$-ra is fennáll és $\varphi(t)$ feltevésünk szerint karakterisztikus függvény, tehát $\varphi(0)=1$; ebből következik, hogy

$$\lim_{n\to\infty}\int_{a_n}^{b_n}dF_n(x)=1 \tag{5.21}$$

és így, hogy

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{a_n}dF_n(x)+\int_{b_n}^{+\infty}dF_n(x)=0. \tag{5.22}$$

(5.18)-ból és (5.22)-ből azonban már következik, hogy

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{itx}\,dF_n(x)=\varphi(t), \tag{5.23}$$

vagyis az $F_n(x)$ eloszlásfüggvény karakterisztikus függvénye konvergál $\varphi(t)$-hez, és így a karakterisztikus függvényekre vonatkozó folytonossági tétel szerint (l. [8]) fennáll (5.20).

Mármost helyettesítsük (1.10)-be $u=n-it\sqrt{n}$-t. Azt kapjuk, hogy

$$\sum_{r=2}^{n-1}\frac{t_{n,r}}{n^{n+2}}\prod_{j=r+1}^{n}\left(1-\frac{it\sqrt{n}}{j}\right)=\left(1-\frac{it}{\sqrt{n}}\right)^{n-2}.$$

Ha most $\left|r-\frac{n}{e}\right|<n^{2/3}$, akkor

$$\prod_{j=r+1}^{n}\left(1-\frac{it\sqrt{n}}{j}\right)=e^{-it\sqrt{n}+\frac{it}{\sqrt{n}}\left(r-\frac{n}{e}\right)+\frac{t^2(e-1)}{2}+o(1)},$$

ahol a $o(1)$-gyel jelölt maradéktag $\left|r-\frac{n}{e}\right|<n^{2/3}$ mellett r-ben egyenletesen tart 0-hoz. Így tehát

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{\left|r-\frac{n}{e}\right|<n^{2/3}}\frac{t_{n,r}}{n^{n-2}}e^{\frac{ite}{\sqrt{n}}\left(\frac{r-\frac{n}{e}}{\sqrt{e-2}}\right)}=e^{-t^2/2}. \tag{5.24}$$

Mármost jelölje $F_n(x)$ a $\dfrac{\nu_n-\frac{n}{e}}{\frac{1}{e}\sqrt{n(e-2)}}$ valószínűségi változó eloszlásfüggvényét. Mivel (5.24) bal oldala felírható az

$$\int_{-\frac{en^{1/6}}{\sqrt{e-2}}}^{+\frac{en^{1/6}}{\sqrt{e-2}}} e^{itx}\,dF_n(x)$$

alakban, tehát lemmánkból (5.17) következik.

6. §. Egy további fa-leszámlálási probléma

Páros körüljárásúnak nevezünk egy G gráfot akkor, ha szögpontjai H halmazának megadható egy olyan, két osztályból álló particiója, hogy ha ezen osztályok H_1 és $H_2=H-H_1$, akkor G bármely éle egy H_1-beli szögpontot egy H_2-beli szögponttal köt össze. Ismeretes, hogy egy gráf akkor és csak akkor páros körüljárású, ha nem tartalmaz páratlan sok élből álló kört[10]. E tétel bizonyítása a következő. Ha G olyan gráf, amely nem tartalmaz páratlan sok élből (tehát páratlan sok szögpontból) álló kört, akkor azt kell kimutatnunk, hogy szögpontjai úgy oszthatók két idegen osztályba, hogy G bármely éle különböző osztályba tartozó szögpontokat köt össze. Ennek bizonyításánál az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy G összefüggő, ugyanis, ha egy gráf minden komponense páros körüljárású, akkor nyilván az egész gráf is az. Mármost, ha G összefüggő, induljunk el G egy tetszőleges P_1 szögpontjából: ezt osszuk be az 1. osztályba. G összes olyan szögpontjait, amelyek G-ben P_1-gyel össze vannak kötve, osszuk be a 2. osztályba. Ezek után G összes olyan szögpontjait, amelyek össze vannak kötve egy, már a 2. osztályba beosztott szögponttal, osszuk be az 1. osztályba; ezután G minden olyan szögpontját, amely egy már 1. osztályba beosztott szögponttal össze van kötve, osszuk be a 2. osztályba, s.i.t. Ezt az eljárást folytassuk addig, amíg G minden pontja be nincs osztva az 1., ill. 2. osztályba. Az a feltétel, hogy G-ben nincs páratlan kör, biztosítja, hogy soha nem kerülünk konfliktusba, azaz nem fordulhat elő, hogy

[10] Az ilyen kört (amely természetesen ugyanannyi pontot tartalmaz, mint élt, tehát pontjainak száma is páratlan), röviden páratlan körnek nevezzük.

egy pontot mind az 1., mind pedig a 2. osztályba be kellene osztanunk. Az a feltétel, hogy G összefüggő, biztosítja, hogy G összes pontjait beosztjuk vagy az 1. vagy a 2. osztályba. A tétel másik állítása (hogy ti. páros körüljárású gráf nem tartalmaz páratlan kört) nyilvánvaló.

Az elmondottakból az is következik, hogy egy *összefüggő* páros körüljárású gráf esetében a szögpontok halmazának $H=(H_1, H_2)$ particiója egyértelműen meg van határozva.

A bebizonyított tétel szerint *minden fa páros körüljárású*, hiszen semmilyen kört nem tartalmaz, így páratlan kört sem. A következőkben azonban olyan páros körüljárású fák leszámlálásával fogunk foglalkozni, amelyeknél a szögpontok két osztálya előre meg van adva. Jelölje $v(n, m)$ azon fák számát, amelyek szögpontjai a $P_1, \ldots, P_n$ és $Q_1, Q_2, \ldots, Q_m$ pontok, és amelyek minden egyes éle egy P_k $(1 \leqq k \leqq n)$ pontot köt össze egy Q_l $(1 \leqq l \leqq m)$ ponttal.

Be fogjuk bizonyítani, hogy

$$v(n, m) = n^{m-1} m^{n-1}. \tag{6.1}$$

A (6.1) képletet először SCOINS [24] bizonyította be; alábbiakban (6.1)-re egy igen egyszerű új bizonyítást adunk az előző §-ban ismertetett *Prüfer*-féle módszer segítségével.

Ha egy, a megadott típusú fára alkalmazzuk a *Prüfer*-féle algoritmust, azzal a különbséggel, hogy az eljárást a legnagyobb indexű P-végponttal kezdjük és egy fához most két számsorozatot rendelünk hozzá, egy $(x_1, \ldots, x_{m-1})$ és egy $(y_1, y_2, \ldots, \ldots, y_{n-1})$ sorozatot úgy, hogy amikor egy végpontot elhagyunk és az elhagyott végpont a P_k ponttal van összekötve, akkor a k számot az x-ek közé írjuk, míg ha az elhagyott végpont egy Q_l ponttal van összekötve, l-et az y-ok közé írjuk. Ilyen módon, mint könnyen belátható, $m-1$ darab x-et és $n-1$ darab y-t kapunk, ugyanis az eljárás végén egyetlen egy él marad meg, amely egy P pontot egy Q ponttal köt össze, tehát annyi x-et kapunk, ahányszor egy Q pontot elhagyunk, vagyis $m-1$-et és megfordítva: annyi y-t kapunk, ahányszor egy P pontot elhagyunk, tehát $n-1$-et, és ily módon minden vizsgált típusú fához egy az $1, 2, \ldots, n$ számokból álló $(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1})$ és egy az $1, 2, \ldots, m$ számokból álló $(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1})$ sorozat van hozzárendelve és könnyen belátható az is, hogy megfordítva, minden ilyen sorozatpárhoz egy kívánt típusú fa tartozik. Az $(x_1, \ldots, x_{m-1})$ és $(y_1, \ldots, y_{n-1})$ sorozatokhoz tartozó fát a következőképpen konstruáljuk meg: Legyenek $a_1, a_2, \ldots, a_n$ az $1, 2, \ldots, n$ számok közül azok, amelyek az $(x_1, \ldots, x_{m-1})$ sorozatból hiányoznak, csökkenőleg elrendezve és legyenek $b_1, \ldots, b_v)$ az $1, 2, \ldots, m$ számok közül azok, amelyek az $y_1, \ldots, y_{n-1}$ sorozatból hiányoznak, csökkenőleg elrendezve. Mármost a keresett fát úgy konstruáljuk, hogy először a P_{a_1} pontot összekötjük a Q_{y_1} ponttal, ezután megvizsgáljuk, hogy y_1 előfordul-e az $y_2, \ldots, y_{n-1}$ sorozatban: ha nem, úgy y_1-et a nagyság szerint megfelelő helyre beírjuk a b-k közé. Ezután a b-sorozat első elemét összekötjük P_{x_1}-gyel, s.i.t.

Azt, hogy ilyen módon mindig egy előírt típusú fát kapunk és hogy a hozzárendelés egyértelmű, indukcióval láthatjuk be. Ezzel (6.1)-et bebizonyítottuk.

(6.1) segítségével egy érdekes azonosságot nyerhetünk. Ugyanis egy tetszőleges fa kétféleképpen fogható fel páros körüljárású gráfként. Az összes n szögpontú fákat megkapjuk tehát, és mindegyiket pontosan 2-szer, ha az összes lehetséges módon 2 nem üres osztályba osztjuk az $1, 2, \ldots, n$ pontokat és ezen osztályokból az összes lehetséges módon páros körüljárású fát készítünk. (6.1)-re és (5.1)-re való tekintettel nyerjük így a

$$2n^{n-2} = \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} k^{n-k-1} \cdot (n-k)^{k-1} \tag{6. 2}$$

azonosságot.

7. §. Fák megoszlása magasságuk szerint

Egy G fa szögpontjai legyenek $P_1, \ldots, P_n$. G-nek *a P_1 pont fölötti magasságán* a P_1-ből kiinduló leghosszabb út hosszát nevezzük; a G fa P_1 pont fölötti magasságát $h_{P_1}(G)$-vel jelöljük.

Jelölje $g_n(k)$ a $P_1, \ldots, P_n$ (számozott) szögpontokból álló azon fák számát, amelyeknek a P_1 pont fölötti magassága $\leqq k$ $(k=0, 1, \ldots)$. Nyilván $g_n(k)=t_n$, ha $k \geqq n-1$ és $n \geqq 1$, hiszen egy n szögpontú G fa magasságára $h_{P_1}(G) \leqq n-1$.

Vizsgáljuk meg a $g_n(k)$ $(n=1, 2, \ldots)$ számsorozat (exponenciális) generátorfüggvényét, amelyet a

$$G_k(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_n(k)}{(n-1)!} x^n \tag{7. 1}$$

képlettel definiálunk.

A $g_n(k)$ számokra fennáll a következő rekurziós formula:

(7. 2)

$$g_n(k) = \sum_{l=1}^{n-1} \binom{n-1}{l} \sum_{\sum_{i=1}^{l} m_i = n-1} \frac{(n-l-1)!}{(m_1-1)!\,(m_2-1)! \ldots (m_l-1)!} \cdot g_{m_1}(k-1) \ldots g_{m_l}(k-1).$$

(7.2)-t a következőképpen láthatjuk be: Jelölje E a G fa azon szögpontjainak halmazát, amelyek a P_1 ponttal éllel vannak összekötve. Ha E elemeinek száma l $(1 \leqq l \leqq n-1)$, akkor ez az l pont $\binom{n-1}{l}$-féleképpen választható. A megmaradó $n-l-1$ pont nyilván l osztályra esik szét, annak megfelelően, hogy P_1-ből E mely pontján át vezet hozzá út. Jelöljék $Q_1, \ldots, Q_l$ a P_1-gyel közvetlenül összekötött pontokat és legyen $m_i - 1$ azon pontok száma, amelyekbe P_1-ből vezető út Q_i-n halad át $(i=1, 2, \ldots, l)$. Ez esetben az $n-l-1$ pontot az l osztályra nyilván $\frac{(n-l-1)!}{(m_1-1)! \ldots (m_l-1)!}$ -féleképpen lehet elosztani. Az i-edik osztály pontjaiból és a Q_i pontból nyilván $g_{m_i}(k-1)$ -féleképpen lehet Q_i fölött legfeljebb $k-1$ magasságú fát alkotni és akárhogyan is végezzük ezt el, e fákból a Q_i pontokat P_1-gyel összekötve egy P_1 felett legfeljebb k magasságú fát kapunk. Ezzel (7.2)-t bebizonyítottuk. (7.2)-t $\frac{x^n}{(n-1)!}$-sal beszorozva és n szerint (rögzített k mellett) összegezve kapjuk, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_n(k) x^n}{(n-1)!} = x \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{g_m(k-1) x^{m-1}}{(m-1)!} \right)^l,$$

tehát

$$G_k(x) = x \cdot e^{G_{k-1}(x)}. \tag{7.3}$$

Mivel $g(0)=1$, $g_n(0)=0$, ha $n \geqq 2$, tehát

$$G_0(x)=x. \tag{7.4}$$

Így (7.3)-ból rekurzióval $G_k(x)$-et meghatározhatjuk:

$$\begin{aligned} G_1(x) &= xe^x \\ G_2(x) &= xe^{xe^x} \\ G_3(x) &= xe^{xe^{xe^x}} \end{aligned} \tag{7.5}$$

s. i. t.

A (7.3) rekurziós képlet J. RIORDANtól származik (l. [21]). Megadható $g_n(k)$-ra explicit képlet is:

$$g_n(k) = \sum_{\substack{l_1+\ldots+l_k=n-1 \\ l_i \geqq 0}} \frac{(n-1)!}{l_1!\,l_2!\ldots l_k!} l_1^{l_2} l_2^{l_3} \ldots l_{k-1}^{l_k}. \tag{7.6}$$

(7.6) a következőképpen látható be: ha egy n szögpontú fa magassága P_1 felett $\leqq k$, akkor P_1-től különböző szögpontjai k osztályba sorolhatók aszerint, hogy az őket P_1-gyel összekötő út hossza $1, 2, \ldots, k$. Jelölje O_j azon pontok halmazát, amelyeket P_1-gyel j hosszúságú út köt össze ($j=1, 2, \ldots, k$) és l_j az O_j halmaz elemeinek számát. Nyilván minden O_1-be tartozó szögpont össze van kötve P_1-gyel, minden O_2-be tartozó szögpont össze van kötve O_1 egyetlen egy pontjával, és általában O_j minden pontja össze van kötve O_{j-1} egyetlen egy pontjával. Mivel (7.6) obb oldala éppen a $P_2, \ldots, P_n$ pontok k osztályra való lehetséges eloszlásainak és az említett módon való összekötéseinek számát adja meg, tehát (7.6) fennáll.

Megjegyzendő, hogy (7.6) úgy értendő, hogy 0^0 mindig 1-et jelent. Szorítkozhatnánk (7.6)-ban az $l_1, \ldots, l_k$ egész számoknak olyan sorozataira, amelyekre amellett, hogy $\sum_1^k l_i = n-1$ és $l_i \geqq 0$, az is igaz, hogy ha $l_i = 0$, akkor $l_{i+1} = 0$ $(1 \leqq i \leqq \leqq k-1)$, ugyanis azon l_i sorozatok adaléka, amelyekre ez nem teljesül, úgyis O, de éppen ezért nem szükséges az említett feltételnek eleget nem tevő sorozatokat kizárni. (7.6)-hoz hasonlóan látható be a következő képlet is

$$d_n(k) = g_n(k) - g_n(k-1) = \sum_{\substack{\sum_1^k l_i = n-1 \\ l_i \geqq 1}} \frac{(n-1)!}{l_1!\ldots l_k!} l_1^{l_2} l_2^{l_3} \ldots l_{k-1}^{l_k} \tag{7.7}$$

$d_n(k)$ nyilván azon n szögpontú fák számát jelenti, melyek P_1 feletti magassága pontosan k-val egyenlő. (7.7) persze levezethető (7.6)-ból is.

Tekintettel arra, hogy $g_n(k) = t_n = n^{n-2}$, hacsak $k \geqq n-1$, tehát

$$\lim_{k \to \infty} G_k(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n-2}}{(n-1)!} x^n = G(x), \tag{7.8}$$

ahol $y = G(x)$ inverz függvénye az $x = ye^{-y}$ függvénynek.

A nyert eredményeket a következőképpen általánosíthatjuk: jelölje $d_n(k, l)$ azon n-szögpontú fák számát, amelyeknek magassága P_1 felett pontosan k, és amelyekben pontosan l pont van éllel összekötve P_1-gyel. Akkor

$$d_n(k, l) = \frac{1}{l!} \sum_{\substack{\sum_2^k l_i = n-1-l \\ l_i \geq 1}} \frac{(n-1)!}{l_2! \dots l_k!} l^{l_2} l_2^{l_3} \dots l_{k-1}^{l_k}. \tag{7.9}$$

A $d_n(k, l)$ számsorozatra fennáll a

$$d_n(k, l) = \binom{n-1}{l} \sum_{h=1}^{n-1-l} l^h d_{n-l}(k-1, h). \tag{7.10}$$

Egy másik irányú általánosítását nyerjük képleteinknek, ha azon n szögpontú fák számát vizsgáljuk, amelyek magassága P_1 felett k és amelyekben pontosan l olyan pont van, amelyet P_1-gyel k hosszúságú út köt össze. Jelöljük e fák számát $t_n(k, l)$-lel. Akkor

$$t_n(k, l) = \frac{1}{l!} \sum_{l_1 + \dots + l_{k-1} = n-1-l} \frac{(n-1)!}{l_1! \dots l_{n-1}!} l^{l_2} \dots l_{k-2}^{l_{k-1}} l_{k-1}^{l} \tag{7.11}$$

és fennáll a következő rekurzió

$$t_n(k, l) = \binom{n-1}{l} \sum_{h=1}^{n-1-l} h^l t_{n-l}(k-1, h). \tag{7.12}$$

Vizsgáljuk most meg a $t_n(k, l)$ számsorozat kettős generátorfüggvényét rögzített k mellett, vagyis a

$$F_k(x, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{n-1} \frac{t_n(k, l)}{(n-1)!} x^n \cdot z^l \tag{7.13}$$

függvényt. E függvényekre könnyen igazolhatjuk az

$$F_k(x, z) = F_{k-1}(xe^{xz}) \tag{7.14}$$

rekurziót. Mivel $F_1(x, z) = xe^{xz}$, tehát

$$\begin{aligned} F_2(x, z) &= xe^{xe^{xz}} \\ F_3(x, z) &= xe^{xe^{xe^{xz}}} \\ &\vdots \\ &\text{s. i. t.} \end{aligned} \tag{7.15}$$

Világos, hogy (7.14) mellett $F_k(x, z)$-re érvényes az

$$F_{k+1}(x, z) = xe^{F_k(x, z)} \tag{7.16}$$

rekurzió is, továbbá, hogy az $F_k(x, z)$ függvények a $G_k(x)$ függvényekkel a következő módon függnek össze:

$$F_k(x, 1) = G_k(x) \tag{7.17}$$

$$F_k(x, 0) = G_{k-1}(x) \tag{7.18}$$

$$F_k(x, e^x) = G_{k+1}(x). \tag{7.19}$$

Tehát (7.16)-ból speciális esetként kapjuk meg (7.3)-at a $z=1, z=0, z=e^x$ helyettesítések bármelyikével.

Nemrégiben SZEKERES GYÖRGYgyel megvizsgáltuk a $\frac{d_n(k)}{n^{n-2}}$ $(k=1, 2, \ldots, n-1)$ eloszlást. A $G_k(x)$ generátorfüggvényre vonatkozó (7.3) rekurzió, valamint a függvényiteráció elmélete (l. [22]) segítségével sikerült bebizonyítani, hogy létezik a

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k\leq x\sqrt{2n}} \frac{d_n(k)}{n^{n-2}} = D(x) \tag{7.20}$$

határeoszlásfüggvény (l. [23]), ahol

$$D(x) = \frac{4\pi^{5/2}}{x^3} \sum_{p=1}^{\infty} p^2 e^{-\frac{\pi^2 p^2}{x^2}}. \tag{7.21}$$

A $D(x)$ eloszlásfüggvény kifejezhető ismert azonosságok (pl. a *Poisson*-formula) segítségével a

$$D(x) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} e^{-\nu^2 x^2}(1-2\nu^2 x^2) \tag{7.22}$$

alakban is. A $D'(x)=d(x)$ sűrűségfüggvény a következő alakban állítható elő:

$$d(x) = 4x \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^2(2\nu^2 x^2 - 3) e^{-\nu^2 x^2} \right). \tag{7.23}$$

E képlet alapján kiszámíthatók a $D(x)$ eloszlásfüggvény összes momentumai

$$M_S = \int_0^{\infty} x^S g(x)\, dx = 2\Gamma\left(\frac{S}{2}+1\right)(S-1)\zeta(S), \tag{7.24}$$

ahol $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ a *Riemann*-féle zeta-függvény.

Speciálisan $S=1$-re (7.24)-ből határátmenettel adódik

$$M_1 = \sqrt{\pi}. \tag{7.25}$$

Így tehát egy n szögpontú fa egy adott pontja feletti magasságának átlagára aszimptotikusan 2,50663 $\sqrt{n}$ adódik. (7.24)-ből kiszámítható a $D(x)$ eloszlásfüggvény szórásnégyzete is:

$$D^2 = M_2 - M_1^2 = \frac{\pi(\pi-3)}{3}. \tag{7.26}$$

Nem érdektelen megjegyezni, hogy mielőtt még ezt bebizonyítottuk volna, PALÁSTI ILONA a *Monte-Carlo* módszerrel empirikusan vizsgálta a fák átlagos magasságát és pl. $n=90$-re négy kísérletben átlagos magasságként 19,75 adódott; összehasonlítva ezt a SZEKERES GYÖRGYgyel bebizonyított elméleti eredménnyel, mely szerint egy 90 szögpontú fa átlagos magassága $\sim$ 23,76, a megegyezés elég jónak mondható. Megemlítendő, hogy a *Monte-Carlo* kísérletek elektronikus számolmegép nélkül, „kézzel” való elvégzését a *Prüfer*-módszer tette lehetővé: a módszer, amit PALÁSTI ILONA alkalmazott, ugyanis abban állt, hogy véletlen számtáblázat alapján felírt $(x_1, ..., x_{n-2})$ sorozatokat és ezekhez megkonstruálta a hozzátartozó fát és ennek meghatározta a magasságát P_1 felett.

Alábbiakban közöljük $d_n(k)$ értékének táblázatát $2 \leqq n \leqq 6$=ra:

$n \backslash k$	1	2	3	4	5	t_n
2	1	0	0	0	0	1
3	1	2	0	0	0	3
4	1	9	6	0	0	16
5	1	40	60	24	0	125
6	1	195	560	420	120	1296

* * *

E dolgozat következő, II. és III. részében a kombinatorika további, fejlődésben levő és az érdeklődés középpontjában álló irányait fogjuk ismertetni.

IRODALOMJEGYZÉK

[1] C. BERGE, *Théorie des graphes et ses applications,* Dunod, Paris, 1958.
[2] F. HARARY—R. Z. NORMAN—D. CARTWRIGHT, *Structural models, An introduction to the theory of directed graphs,* Wiley, New York, 1965.
[3] F. BECKENBACH, *Applied combinatorial mathematics,* Wiley, New York, 1964.
[4] H. S. GREEN—C. A. HURST, Order-disorder-phenomena, *Monographs in Statistical Physics,* No. 5, Interscience Publ., London, 1964.
[5] F. SPITZER, *Principles of random walk,* VanNostrand, New York, 1964.
[6] N. BOURBAKI, *Théorie des ensembles,* Paris, III. §. 5. 8.
[7] J. RIORDAN; *An introduction to combinatorial analysis,* Wiley, New York, 1958.
[8] RÉNYI A.: *Valószínűségszámítás,* Tankönyvkiadó, Budapest, 1954.
[9[G.-C. ROTA, The number of partitions of a set, *American Math. Monthly,* **71** (1964) 498—504.
[10] SZÁSZ P.: *A differenciál- és integrálszámítás elemei,* Budapest, 1951.
[11] JORDAN K., *Calculus of finite differences,* Budapest, 1939, 168. o.
[12] G. DOBINSKI, *Grunert's Archiv* **61** (1877) 333—336.
[13] RADOS G.: *Mat. Term. Tud. Ért.* **11** (1892—93) 358—361.
[14] HAJÓS GY.—NEUKOMM GY.—SURÁNYI J.: *Matematikai versenytételek,* I. rész, Tankönyvkiadó, Budapest, 1955, 97—98. o.
[15] D. KÖNIG, *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen,* Akad. Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1936.
[16] O. ORE, Theory of graphs, *Amer. Math. Soc. Coll. Publ. Vol.* 38., 1962.
[17] A. CAYLEY, *Collected papers,* Cambridge, 1897, Vol. 13. pp. 26—28.
[18] A. PRÜFER, Neuer Beweis eines Satzes über Permutationen, *Archiv für Math. u. Phys.* **27** (1918) 142—144.
[19] G. PÓLYA—G. SZEGŐ, *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis,* Springer, Berlin, 1925, I. 125. o.
[20] A. RÉNYI, Some remarks on the theory of trees, *Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci.* **4** (1959) 72—85.
[21] J. RIORDAN, The enumeration of trees by height and diameter, *IBM Journal of Research and Development* **4** (1960) 473—478.
[22] G. SZEKERES, Regular iteration of real and complex functions, *Acta Math.* **100** (1958) 103—258.
[23] A. RÉNYI—G. SZEKERES, On the height of trees, *Journal of the Australian Math. Soc.* (sajtó alatt).
[24] H. J. SCOINS, The number of trees, *Proc. Cambridge Phil. Soc.* **58** (1962) 12—16.

A KÜLFÖLDI SZAKIRODALOMBÓL

VIZSGÁLATOK A VÉGTELEN DIMENZIÓS BILINEÁRIS METRIKÁJÚ TEREK GEOMETRIÁJA KÖRÉBŐL*

Írta: JU. P. GINZBURG és I. SZ. JOHVIDOV

TARTALOM

1. §. Bevezetés

1. A végtelen dimenziós, általános bilineáris metrikájú, speciálisan a hermitikus indefinit metrikájú lineáris terek iránti érdeklődés a negyvenes évek elején kezdődött. E terek vizsgálatához az elméleti fizikusok és a matematikusok különböző irányokból csaknem egyidejűleg jutottak el. Indefinit metrikájú terek a kvantummechanikában először P. DIRAC-nál [1] és W. PAULI-nál [2] szerepeltek a negyvenes évek elején. Körülbelül ugyanakkor, konkrét dinamikai feladatokból kiindulva, SZ. L. SZOBOLJEV szükségesnek találta az ilyenfajta terek hermitikus operátorainak tanulmányozását. Ezekben a feladatokban a tér metrikáját (a „skaláris szorzatot") olyan végtelen hermitikus alak értelmezte, amelyben a negatív négyzetek száma ($\varkappa$) véges („véges rangú indefinitás"). 1944-ben megjelent L. SZ. PONTRJAGIN alapvető jelentőségű [3] munkája az ilyen véges $\varkappa$ rangú indefinit metrikájú terek ($\Pi_\varkappa$ terek) hermitikus (önadjungált) operátorairól. Ugyanebben a dolgozatban megvizsgálásra került a $\Pi_\varkappa$ terek geometriájának néhány kérdése is. A valós Π_1 tereket a Hilbert-tér ún. Lorentz-transzformációinak elméletével kapcsolatban M. G. KREJN [4] tanulmányozta. 1948-ban M. G. KREJN e terek geometriájára vonatkozóan további eredményeket ért el a végtelen dimenziós Lobacsevszkij-terek csavarvonalai elméletének kidolgozása során (lásd még [8]). Végül I. SZ. JOHVIDOV kandidátusi disszertációjában [6], majd I. SZ. JOHVIDOV és M. G. KREJN a [7], [8] monográfiában a $\Pi_\varkappa$ $(0<\varkappa<\infty)$ terek általános axiomatikus tárgyalását adta meg, és a $\Pi_\varkappa$ terek operátorai néhány osztályának vizsgálata mellett e terek geometriájára vonatkozóan is új eredményeket kaptak.

Másrészt még 1947-ben M. I. VISIK [9] rámutatott a $\Pi_\varkappa$-nál általánosabb terekben (nevezetesen a „végtelen rangú" hermitikusan indefinit metrikával el-

* *Успехи математических наук* **17**, (1962), № 4 3—56.

látott terekben) végezhető vetítések elmélete és bizonyos önadjungált parciális differenciálegyenletekhez tartozó peremértékfeladatok megoldása közötti kapcsolatra. Később ezt az ötletet R. NEVANLINNA is felvetette és ezzel összefüggésben több dolgozatban [10]—[13] elkezdte az általános hermitikusan indefinit metrikájú terekben értelmezhető vetítések elméletének kialakítását. A metrikáról feltette, hogy majorálható valamely HILBERT-féle metrikával (lásd alább, 2. §, 5. pont).

R. NEVANLINNA vizsgálatait tanítványa, I. S. LOUHIVAARA folytatta [14], [15], majd felhasználta őket a másodrendű önadjungált parciális differenciáloperátorok korlátos tartományra vonatkozó általánosított Dirichlet-feladatánál a megoldás létezésének és egyértelműségének bizonyítására [16]. F. BROWDER [17], [18] és W. LITTMAN]19] hamarosan általánosította I. S. LOUHIVAARA eredményeit nem-önadjungált operátorokra és nemkorlátos tartományokra. Mindezen eredmények áttekintését az olvasó megtalálhatja a [20] munkában. A fent említett művek geometriai eredményeit nemrég I. S. LOUHIVAARA is összefoglalta a [21] cikkben.

2. A végtelen rangú hermitikusan indefinit metrikával ellátott terek között különleges helyet foglalnak el az úgynevezett J-terek, vagyis olyan Hilbert-terek, amelyekben az (x, y) közönséges skaláris szorzaton kívül értelmezve van egy (Jx, y) alakkal megadott indefinit metrika is, ahol $J=P_+ - P_-$, P_+ és P_- pedig (általában végtelen dimenziós) merőleges vetítések operátorai, $P_+ + P_- = I$. Éppen ezek a terek gyakran szerepelnek az elméleti és matematikai fizika feladataiban. A $\Pi_\varkappa$ terek a J-terek speciális esetei ($\varkappa = \min \{\dim P_+, \dim P_-\} < \infty$).

A J-tereket absztrakt formában JU. P. GINZBURG vezette be [22]—[24]. Ő a nem-önadjungált operátorok karakterisztikus függvényeinek M. SZ. LIVSIC [25], [26] és M. SZ. BRODSZKIJ [26], [27] által kidolgozott elméletével összefüggő feladatokból indult ki. Általánosítva V. P. POTAPOVnak [28] a (véges dimenziójú) analitikus J-nemnyújtó mátrixfüggvények multiplikatív szerkezetére vonatkozó eredményeit a megfelelő operátorfüggvényekre JU. P. GINZBURG előtt felmerült annak szükségessége, hogy tanulmányozza a J-terek geometriájának alapvető tényeit és e terek bizonyos operátorosztályait. JU. P. GINZBURG-gal majdnem egy időben és tőle függetlenül R. S. PHILLIPS [29] is találkozott a J-terekkel disszipatív hiperbolikus differenciálegyenlet-rendszerek vizsgálata során. R. S. PHILLIPS miközben perem-altereket szerkeszt ezekhez a rendszerekhez, bizonyos J-tér ún. nemnegatív, nempozitív és semleges altereit tekinti, speciálisan az ilyen típusú alterek közül a maximálisakat. Ugyanezekkel a kérdésekkel találkozott H. LANGER [30], [31] a J-terek önadjungált operátorainak tanulmányozása során. A J-terek altereinek teljes osztályozását JU. P. GINZBURG adta meg [32], [33] (lásd a jelen munka 6. §-át).

3. Az ötvenes években az elméleti fizikában időről időre újra felmerült az indefinit metrika vizsgálatának szükségessége. Így 1950-ben K. BLEULER [34] és S. N. GUPTA [35] a kvantumelektrodinamika problémáira alkalmazták az indefinit metrikát. Ugyanerre a kérdésre vonatkoznak S. N. GUPTA további munkái (lásd [40]). Az indefinit metrikának a kvantumelektrodinamikában való alkalmazásával külön fejezet foglalkozik A. I. AHIJEZER és V. B. BERESZTYECKIJ ismert könyvében [36].

Az indefinit metrikájú terek iránt újult (és kezdetben igen jelentős) érdeklődést váltottak ki a fizikusok részéről W. HEISENBERG [37], W. PAULI és G. KÄLLÉN [38], N. N. BOGOLJUBOV, B. V. MEDVEGYEV és M. K. POLIVANOV [39] munkái, valamint számos egyéb dolgozat,[1] amely a terek kvantumelméletének felépítésével foglalkozott (az úgynevezett „kísértet-állapotok elmélete" stb.). Nekünk nincsenek adataink, amelyek alapján megítélhetnénk, hogy az indefinit metrikájú terek alkalmazása hozzájárult-e a kvantumtérelmélet felépítésének útjában álló akadályok eltávolításához, annál is kevésbé, mert az utóbbi időben a fizikusok körében néhány kétkedő kijelentés hangzott el ezzel kapcsolatban[2]. Minthogy azonban ez az irányzat igen kiterjedt irodalmat szült, amely tisztán matematikai tényeket is tartalmaz, felmerült annak a szükségessége, hogy valamilyen módon megértsük és összegezzük őket. Az első ilyenfajta kísérleteket maguk a fizikusok végezték (S. N. GUPTA [40], R. ASCOLI és E. MINARDI [41], A. UHLMANN [42], [43], L. K. PANDIT [44], NAGY KÁZMÉR [45]).

E munkák némelyikében, [40]—[43], különböző módszereket ajánlottak az általános hermitikusan indefinit metrikával ellátott terek axiomatikus bevezetésére, vizsgálták a terek geometriájának elemeit, valamint alkalmazták az ilyen terekben értelmezett „hermitikus operátorokat". Sajnos meg kell jegyezni, hogy ezeknek a műveknek a matematikai színvonala nem magas, egyesek közülük pedig egyszerűen matematikai hibákat tartalmaznak, mégpedig néha igen durva hibákat (lásd alább, 5. §, 3. pont).

Sok ilyen műben közös az a (matematikai) hiányosság, hogy szerzőik önkényesen használják az „indefinit metrikájú Hilbert-tér" kifejezést, és ennek a kifejezésnek magukban a művekben nagyon homályos tartalom felel meg. Arról van szó, hogy rendszerint tekintenek egy lineáris teret egy rajta értelmezett hermitikusan indefinit alakkal, de mindenféle topológia nélkül, úgyhogy a „Hilbert-tér" kifejezés csak arra való, hogy valamilyen geometriai képzettársítást eredményezzen, ami idővel magukat a szerzőket is félrevezeti. Megjegyezzük, hogy itt egyáltalán nem érintünk egyéb durva hibákat, amelyek abból származnak, hogy bizonyos kijelentéseket, amelyek csak véges dimenziójú terekre igazak, átvisznek végtelen dimenziójúakra, és hogy a Hilbert-térbeli unitér és önadjungált operátorok elméletéből számos tényt kiterjesztenek az indefinit metrikájú terek megfelelő operátoraira ([40]—[42]). A jelen cikk egyik szerzője ezeket a hibákat részben már bírálat tárgyává tette (lásd *Referativnij Zsurnal, Matematika* (1961), 8 Б 459—462 számú referátumok).

Egyúttal meg kell mondani, hogy az említett munkák hibás voltuk ellenére (vagy éppen azért) a matematikusok részéről új érdeklődést váltottak ki az elmélet ezen ága iránt. Mindenesetre az utóbbi időben több új dolgozat jelent meg BOGNÁR JÁNOS [46], [47], JU. P. GINZBURG [32], [33], I. SZ. JOHVIDOV [48], [49] és H. LANGER [30], [31] tollából, amelyekben a hermitikusan indefinit metrikájú és általános bilineáris metrikájú terek geometriája további kidolgozást nyert. Másrészt amig a $\Pi_\varkappa$ terek geometriájára vonatkozó vizsgálatokat a [7], [8] monográfia összefoglalta, addig általánosabb terekre vonatkozó hasonló munka a legutóbbi időkig nem készült. Ebben az irányban az első és eddig egyetlen kísérlet E. SCHEIBE nemrég megjelent cikke [50] volt. Ennek kétségtelen érdeme, hogy a hermitikusan bilineáris metrikájú (speciálisan a J-metrikával ellátott) terek geometriája alapjainak

[1] E művek viszonylag teljes áttekintése megtalálható NAGY KÁZMÉR [45] cikkében; ugyanott igen bőséges irodalomjegyzék is van.

[2] *Megjegyzés a korrektúránál.* A legutóbbi időben jelent meg F. A. BEREZIN [64] cikke, amely ismét felhasználja az indefinit metrikát a kvantumtérelmélet kérdéseinek vizsgálatára.

szigorú matematikai tárgyalását adja. E. SCHEIBE [50] dolgozata azonban szélesebb körök számára nehezen hozzáférhető kiadványban jelent meg és nagy hézagok vannak benne, mert a szerző, úgy látszik, egyáltalán nem ismeri a szovjet matematikusok munkáit. Azonkívül, bár a tárgyalásmód általában szigorú, E. SCHEIBE dolgozatának utolsó paragrafusában (8. §) hibákat követett el számos tétel megfogalmazásában és bizonyításában (lásd alább, 3. §, 6. pont).

4. Az itt következő áttekintésnek az a célja, hogy kitöltse a matematikai irodalomban meglevő hézagot és az általános bilineáris metrikával ellátott terek geometriájának a lehetőség szerint teljes és következetes kifejtését adja. Reméljük, hogy ez hasznos lesz azoknak a matematikusoknak és elméleti fizikusoknak, akik olyan kérdések iránt érdeklődnek, amelyekkel kapcsolatban felmerül az indefinit metrika vizsgálatának szükségessége.

A cikk tartalma a tartalomjegyzékből látható. Feltételezzük, hogy az olvasó ismeri a Banach- és Hilbert-terek általános elméletének alapjait. Ugyanakkor, E. SCHEIBE dolgozatához hasonlóan, munkánkban felhasználjuk a lokálisan konvex topologikus vektorterek elméletének apparátusát azzal a különbséggel, hogy mindazt, amit a cikk olvasásához ezekről a terekről tudni kell, a 2. § 2. pontjában (apróbetűs rész) röviden ismertetjük.

A dolgozatban foglalt tételek közül egyesek most kerülnek először közlésre. Ezeket bizonyítással kísérjük. A bizonyítás szerepel azokban az esetekben is, amikor a szerzőknek ismert állításokat sikerült bizonyos mértékben élesíteni. Ez vonatkozik speciálisan a 2. és 3. § bizonyos állításaira, amelyek szeparált topológia („nemelfajuló metrika") esetében közvetlenül adódnak a dualitás elméletének N. BOURBAKI [51] művében (ennek a műnek az ismeretét nem tételezzük fel) megtalálható általános tételeiből. Az általános esetben viszont ez az út számos kiegészítő megfontolást igényel.

Annak érdekében, hogy a tárgyalás menetét ne zavarjuk meg, a dolgozat alapvető részében nem érintjük az egyes fogalmak keletkezésének és fejlődésének történetét, sem azt a kérdést, hogy a különböző eredmények kitől származnak. A megfelelő utalásokat a cikk végén gyűjtöttük össze („Megjegyzések és irodalmi utalások").

Befejezésül megemlítjük, hogy számos, a cikkben foglalt új eredményt kimondtunk abban a két közös előadásunkban, amelyet a IV. Össz-szövetségi Matematikai Kongresszuson 1961 júliusában (lásd [52]) és az odesszai Tudósok Házának mechanikai és matematikai szekciójában 1961. december 18-án tartottunk.

2. §. Különböző topológiák bilineáris metrikájú terekben

1. Legyen adva egy $\mathfrak{E}$ komplex lineáris tér és egy rajta értelmezett $G(x, y)$ bilineáris alak:

$$G(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2) =$$
$$= \alpha_1 \overline{\beta}_1 G(x_1, y_1) + \alpha_2 \overline{\beta}_1 G(x_2, y_1) + \alpha_1 \overline{\beta}_2 G(x_1, y_2) + \alpha_2 \overline{\beta}_2 G(x_2, y_2).$$

Itt x_1, x_2, y_1, y_2 az $\mathfrak{E}$ tér elemei, $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ pedig komplex számok. Ebben az esetben *G-metrikával ellátott* $\mathfrak{E}$ *térről* vagy röviden *G-térről* fogunk beszélni.

Legérdekesebb az az eset, amikor a $G(x, y)$ alak hermitikus:

$$G(y, x) = \overline{G(x, y)} \qquad (x, y \in \mathfrak{E}),$$

de általában indefinit (G^h-*tér*).

Megemlítjük, hogy a véges dimenziójú G-terek elméletét már régen kidolgozták (G. FROBENIUS [53]) és elég részletesen megtalálható a lineáris algebrával foglalkozó tankönyvekben (lásd például [54], X. fej.). Ezért a további tárgyalás során általában feltesszük, hogy az $\mathfrak{E}$ tér végtelen dimenziójú.

Azt mondjuk, hogy az $x(\in \mathfrak{E})$ vektor *balról (jobbról) G-ortogonális* az $y \in \mathfrak{E}$ vektorra, ha $G(x, y) = 0$ (illetve $G(y, x) = 0$). Ezek a definíciók természetes módon kiterjeszthetők az $\mathfrak{E}$ tér tetszés szerinti részhalmazaira. A G^h-terek esetében a baloldali és jobboldali G-ortogonalitás fogalma nyilván egybeesik. Azt, hogy egy $\mathfrak{E}$ tér $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ halmazai G-ortogonálisak egymásra, a továbbiakban szimbolikusan így fogjuk írni: $G(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}) = 0$.

Az $x_0(\in \mathfrak{E})$ vektort $\mathfrak{E}$ *baloldali izotróp vektorának* nevezzük, ha x_0 balról G-ortogonális $\mathfrak{E}$-re: $G(x_0, \mathfrak{E}) = 0$. Analóg módon értelmezhetők *az $\mathfrak{E}$ tér jobboldali izotróp vektorai.* Hermitikus G-metrika esetén egyszerűen $\mathfrak{E}$ *izotróp vektorairól* fogunk beszélni. Ha $\mathfrak{E}$-nek van nullától különböző izotróp vektora, az azt jelenti, hogy a G alak az $\mathfrak{E}$ téren elfajul. Az ilyen $\mathfrak{E}$ tereket *elfajuló G-tereknek* nevezzük. Az $\mathfrak{E}$ G-tér összes baloldali (jobboldali) izotróp vektorai egy $\mathfrak{E}_0$ lineált (lineáris sokaságot) alkotnak, *az $\mathfrak{E}$ tér baloldali (jobboldali) izotrop lineálját*[3].

Legyen $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{E}$ tetszés szerinti lineál. Az $\mathfrak{L}$ lineálon tekintett $G(x, y)$ alak $\mathfrak{L}$-en egy G-metrikát indukál, amelyre nézve $\mathfrak{L}$-ről kiderülhet, hogy elfajuló vagy nemelfajuló, függetlenül attól, hogy az egész $\mathfrak{E}$ tér elfajuló-e. Világos, hogy ha $\mathfrak{L}$ elfajuló, akkor $\mathfrak{L} \supset \mathfrak{L}_0$, ahol $\mathfrak{L}_0(\neq \{0\})$ az *$\mathfrak{L}$ lineál izotróp lineálja.*

2. A $G(x, y)$ alakon kívül az $\mathfrak{E}$ térben értelmezve lehet valamilyen τ topológia is. Mi csak úgynevezett lokálisan konvex topológiákat fogunk tekinteni. Emlékeztessünk ezzel kapcsolatban néhány alapvető definícióra.

Az $\mathfrak{E}$ lineáris téren értelmezett $p(x)$ funkcionált *félnormának* nevezzük, ha rendelkezik a következő tulajdonságokkal (x, x_1, x_2 az $\mathfrak{E}$ tér tetszés szerinti elemei, λ tetszőleges komplex szám):

$$\alpha)\quad p(x) \geqq 0,$$

$$\beta)\quad p(\lambda x) = |\lambda|\, p(x),$$

$$\gamma)\quad p(x_1 + x_2) \leqq p(x_1) + p(x_2).$$

Legyen adva $\mathfrak{E}$-ben egy $p_\alpha(x)$ $(\alpha \in A)$ félnormákból álló (véges vagy végtelen) rendszer. Az $x_0 \in \mathfrak{E}$ pont $\mathfrak{U}(x_0) = \mathfrak{U}^{\delta}_{\alpha_1, \ldots, \alpha_k}(x_0)$ *konvex környezetének* nevezzük mindazon $x_0 \in \mathfrak{E}$ pontok összességét, amelyekre teljesülnek a

$$p_{\alpha_j}(x - x_0) < \delta \qquad (j = 1, 2, \ldots, k)$$

egyenlőtlenségek, ahol $\delta > 0$ és $\alpha_j \in A$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$ rögzítettek. Az összes $\mathfrak{U}(x)$ $(x \in \mathfrak{E})$ konvex környezetek rendszerét az $\mathfrak{E}$ térben értelmezett τ *lokálisan konvex topológiának,* magát az $\mathfrak{E}$ teret pedig *lokálisan konvex lineáris topologikus térnek* nevezzük. A τ topológiát meghatározó $\mathfrak{U}(x)$ környezeteket röviden *τ-környezeteknek* fogjuk hívni.

[3] Véges dimenziójú $\mathfrak{E}$ tér esetén a bal oldali és jobb oldali izotróp lineál dimenziója mindig megegyezik és egyenlő az $\mathfrak{E}$ tér úgynevezett defektusával (lásd pl. [54], 324. oldal).

Legyen $\mathfrak{M}\subset\mathfrak{E}$. Az $x_0(\in\mathfrak{E})$ pontot az $\mathfrak{M}$ *halmaz τ-érintkezési pontjának* nevezzük, ha az x_0 pont bármelyik τ-környezete tartalmaz $\mathfrak{M}$-beli pontot. Az $\mathfrak{M}$ halmaz τ-érintkezési pontjainak összességét az $\mathfrak{M}$ halmaz *τ-lezárásának* nevezzük és az $\overline{\mathfrak{M}}^{(\tau)}$ jellel jelöljük. Könnyen látható, hogy $\mathfrak{M}\subset\overline{\mathfrak{M}}^{(\tau)}$. Ha $\mathfrak{M}=\overline{\mathfrak{M}}^{(\tau)}$, akkor az $\mathfrak{M}$ halmazt *τ-zártnak* mondjuk.

Ha az $\mathfrak{E}$ lineáris térben két topológia, τ' és τ'' van értelmezve és ezek olyan tulajdonságúak, hogy bármelyik $x(\in\mathfrak{E})$ pont bármelyik τ''-környezete tartalmazza ugyanennek a pontnak egy τ'-környezetét, akkor azt mondjuk, hogy a τ' topológia *erősebb,* mint a τ'' topológia ($\tau'\geqq\tau''$), vagy hogy τ'' *gyengébb,* mint τ' ($\tau''\leqq\tau'$). Ha egyidejűleg $\tau'\geqq\tau''$ és $\tau''\geqq\tau'$, akkor a τ', τ'' topológiákat *ekvivalensnek* mondjuk ($\tau'=\tau''$).

Az $f(x)$ $(x\in\mathfrak{E})$ számértékű függvényt (funkcionált) az $x_0\in\mathfrak{E}$ pontban a *τ topológiára nézve folytonosnak* („*τ-folytonosnak*") mondjuk, ha bármilyen $\varepsilon>0$ számhoz található olyan $\mathfrak{U}(x_0)$ τ-környezet, hogy minden $x\in\mathfrak{U}(x_0)$ pontra érvényes az

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$$

egyenlőtlenség. Lineáris (vagyis additív és homogén) $f(x)$ funkcionálnak az egész $\mathfrak{E}$ térben való τ-folytonosságához, mint rendesen, elégséges az $x=0$ pontban való τ-folytonosság.

A továbbiakban alkalmasabb lesz számunkra a lineáris funkcionálok τ-folytonosságának egy másik definíciója, amelyben nem τ-környezetekről, hanem magukról a $p_\alpha(x)$ $(\alpha\in A)$ félnormákról van szó. Ez a definíció a következő állításból adódik:

1°. *Ahhoz, hogy az $f(x)$ lineáris funkcionál az $\mathfrak{E}$ téren folytonos legyen a $p_\alpha(x)$ $(\alpha\in A)$ félnormák rendszere által meghatározott τ topológiára nézve, szükséges és elégséges, hogy bizonyos $\alpha_1,\alpha_2,\ldots\alpha_n\in A$ véges indexrendszerre és $M>0$ számra minden $x\in\mathfrak{E}$ esetén teljesüljön az*

$$|f(x)|\leqq M\max_{1\leqq k\leqq n} p_{\alpha_k}(x) \tag{2.1}$$

egyenlőtlenség.

Valóban, ha $f(x)$-re fennáll a (2. 1) egyenlőtlenség, akkor tetszés szerinti $\varepsilon>0$ számot választva $|f(x)|<\varepsilon$ minden $x\in\mathfrak{U}^{\delta}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}(0)$ pontra, ahol $\delta=\varepsilon/M$, és így $f(x)$ τ-folytonos.

Fordítva, legyen $f(x)$ lineáris és τ-folytonos funkcionál az $\mathfrak{E}$ téren. Akkor van olyan $\alpha_1,\alpha_2,\ldots$ $\ldots,\alpha_n\in A$ indexrendszer és $\delta>0$ szám, hogy $q(x)=\max\limits_{1\leqq k\leqq n}p_{\alpha_k}(x)<\delta$ esetén $|f(x)|<1$. Most legyen x az $\mathfrak{E}$ tér tetszés szerinti vektora. Ha $q(x)\neq0$, akkor tekintsük az $y=\dfrac{\delta}{2q(x)}x$ vektort; minthogy $q(y)=\dfrac{\delta}{2}<\delta$, fennáll $|f(y)|<1$, és így az $M=\dfrac{2}{\delta}$ választás mellett teljesül (2. 1). Ha viszont $q(x)=0$, akkor $q(\lambda x)=\lambda q(x)=0$ bármely $\lambda>0$ számra, tehát $|f(\lambda x)|<1$, $|f(x)|<\dfrac{1}{\lambda}$, következésképpen $f(x)=0$. Ily módon ebben az esetben is érvényes a (2. 1) egyenlőtlenség. Az 1°. állítást ezzel bebizonyítottuk.

A lokálisan konvex τ topológiát *szeparáltnak* nevezzük, ha bármely $x\neq0$ ponthoz található olyan $\alpha\in A$ index, hogy $p_\alpha(x)\neq0$. Könnyen látható, hogy a τ topológia szeparáltsága ekvivalens a $\overline{\{0\}}^{(\tau)}=\{0\}$ egyenlőséggel, ahol $\{0\}$ az a halmaz, amely az egyetlen $0\in\mathfrak{E}$ elemből áll.

Bennünket a továbbiakban speciálisan azok a lokálisan konvex terek fognak érdekelni, amelyekben a szeparált topológiát megszámlálhatóan sok $p_n(x)$ $(n=1,2,\ldots)$ félnorma értelmezi. Könnyű igazolni, hogy ezek a lokálisan konvex terek[4] *metrizálhatók,* amennyiben topológiájuk megadható a következő *távolság* segítségével:

$$\varrho(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}\frac{p_n(x-y)}{1+p_n(x-y)}\qquad (x,y\in\mathfrak{E}).$$

Az így értelmezett metrika eltolással szemben invariáns:

$$\varrho(x+z,y+z)=\varrho(x,y)\qquad (x,y,z\in\mathfrak{E}). \tag{2.2}$$

[4] És csak ezek (lásd [51], 97. old.).

Ha a vizsgált $\mathfrak{E}$ tér erre a metrikára vonatkozóan teljes, akkor *Fréchet-térnek* (*$\mathfrak{F}$-térnek*) nevezzük[5].

Ha az $\mathfrak{E}$ tér lokálisan konvex τ topológiáját véges számú $p_1(x), \ldots, p_n(x)$ félnorma értelmezi, akkor ezeket az egyetlen $q(x) = \max_{1 \leqq k \leqq n} p_k(x)$ félnormával helyettesítve nyilvánvalóan az eredetivel ekvivalens topológiát kapunk. Ebben az esetben a τ topológiát és az $\mathfrak{E}$ teret *félnormálhatónak* fogjuk mondani. Ha egy félnormálható topológia szeparált, akkor a topológiát meghatározó $q(x)$ félnorma közönséges *norma* ($q(x) = \|x\|$), és $\mathfrak{E}$ *normált tér.* Ha $\mathfrak{E}$ teljes erre a normára vonatkozóan, akkor az $\mathfrak{E}$ tér *Banach-tér* (*$\mathfrak{B}$-tér*), ami az $\mathfrak{F}$-tér speciális esete.

Még speciálisabb eset, ha $\mathfrak{E}$ *Hilbert-tér* (*$\mathfrak{H}$-tér*) az (x, y) skaláris szorzattal és az $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ normával (feltéve, hogy $\mathfrak{E}$ teljes erre a normára vonatkozóan). Foglalkoznunk kell majd úgynevezett *pre-Hilbert-terekkel* is, vagyis olyan félnormálható $\mathfrak{E}$ terekkel, amelyeknek a $q(x) = \sqrt{(x, x)}$ félnormával megadható τ topológiája vagy nem szeparált ((x, y) pozitív szemidefinit skaláris szorzat $\mathfrak{E}$-ben), vagy ha szeparált (azaz (x, y) definit), akkor az $\mathfrak{E}$ normált tér általában nem teljes az $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ normára vonatkozóan.

3. Legyen tehát értelmezve az $\mathfrak{E}$ G-térben egy lokálisan konvex (ezt a jelzőt a továbbiakban sehol sem fogjuk kiírni) τ topológia. Azt mondjuk, hogy a τ topológia *balról (jobbról) felülmúlja az adott G-metrikát,* ha az összes $f_{y_0}(x) = G(x, y_0)$, (illetve $h_{x_0}(y) = \overline{G(x_0, y)}$) lineáris funkcionálok τ-folytonosak az $\mathfrak{E}$ téren. Ha egy τ topológia balról is, jobbról is felülmúlja a G-metrikát, akkor azt mondjuk, hogy τ *felülmúlja a G-metrikát.* Hermitikus G-metrika esetén ez a három definíció egybeesik. A G-metrikát balról felülmúló topológiára nyilvánvaló és a továbbiakban sokszor alkalmazásra kerülő példa az úgynevezett $\tau_0^b = \tau_0^b(\mathfrak{E}, G)$ *gyenge topológia,* amelyet maga a G-metrika indukál a

$$p_y(x) = |G(x, y)| \qquad (y \in \mathfrak{E})$$

félnormák rendszere segítségével. Analóg módon, az $\mathfrak{E}$ térbeli jobbról felülmúló τ_0^j gyenge topológiát a

$$q_x(y) = |G(x, y)| \qquad (x \in \mathfrak{E})$$

félnormák rendszere értelmezi. Magától értetődik, hogy hermitikus G-metrika esetén $\tau_0^b = \tau_0^j \equiv \tau_0$. Azonkívül *ha* $\mathfrak{E}$ *nemelfajuló, akkor a* τ_0 *topológia szeparált.* Ugyanez vonatkozik a τ_0^b (τ_0^j) topológiára, ha $\mathfrak{E}$ a megfelelő oldalról nemelfajuló, vagyis ha $\mathfrak{E}$-nek nincs nullától különböző baloldali (jobboldali) izotróp vektora.

A 2. pontban felsorolt definíciókból közvetlenül adódik az alábbi állítás:

2°. τ_0^b *a leggyengébb azok közül a topológiák közül, amelyek az adott G-metrikát balról felülmúlják.*

Hasonló állítás érvényes a τ_0^j és a τ_0 topológiára.

4. Minket a továbbiakban főleg a G-metrikát felülmúló *Hilbert-féle* topológia ($\mathfrak{H}$-topológia) fog érdekelni. Ez a topológia, ha létezik $\mathfrak{E}$-ben, egyértelműen meg van határozva. Sőt, igaz a következő tétel:

2. 1. tétel. *Balról (jobbról) nemelfajuló G-metrikájú $\mathfrak{E}$ térben (ekvivalenciától eltekintve) legfeljebb egy balról (jobbról) felülmúló Fréchet-topológia értelmezhető.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\mathfrak{E}$-ben két Fréchet-topológia van értelmezve, τ' és τ'', amelyek például balról felülmúlják a G-metrikát. Ezt a két topológiát egy-egy

[5] Megemlítjük, hogy S. Banach [55] könyvében (F) típusú tereknek nevezi azokat a lineáris teljes metrikus tereket, amelyekben a vektorok összeadásának és vektor skalárral való szorzásának művelete folytonos, továbbá a távolságnak megvan a (2. 2) tulajdonsága. Ily módon minden $\mathfrak{F}$-tér (F) típusú tér.

távolságfüggvény, $\varrho'(x, y)$ és $\varrho''(x, y)$ $(x, y \in \mathfrak{E})$ határozza meg, amelyek rendelkeznek a (2. 2) tulajdonsággal. Tekintsünk egy új τ''' metrikus topológiát, amelyet a szintén (2. 2) tulajdonságú

$$\varrho'''(x, y) = \varrho'(x, y) + \varrho''(x, y) \qquad (x, y \in \mathfrak{E}) \tag{2. 3}$$

távolság határoz meg. Könnyű belátni, hogy a τ''' topológia erősebb a τ', τ'' topológiáknál:

$$\tau' \leqq \tau''', \quad \tau'' \leqq \tau'''.$$

A τ' (ill. τ'', τ''') topológiával ellátott $\mathfrak{E}$ teret a továbbiakban $\mathfrak{E}_1$ (ill. $\mathfrak{E}_2$, $\mathfrak{E}_3$) fogja jelölni.

Az $\mathfrak{E}_1$, $\mathfrak{E}_2$ terek Fréchet-terek, azaz (F) típusúak. Annak bebizonyításához, hogy $\mathfrak{E}_3$ is (F) típusú, igazolni kell még $\mathfrak{E}_3$ teljességét. Legyen $\{x_n\} \subset \mathfrak{E}_3$ valamely τ'''-fundamentális sorozat. (2. 3) következtében ez a sorozat a τ', τ'' topológiákban is fundamentális, minthogy pedig az $\mathfrak{E}_1$, $\mathfrak{E}_2$ terek teljesek, az $\{x_n\}$ sorozatnak van bennük x', ill. x'' limesze. A τ' és a τ'' topológia balról felülmúlja a G-metrikát, tehát tetszés szerinti $y \in \mathfrak{E}$ elemre fennáll

$$\lim_{n \to \infty} G(x_n, y) = G(x', y) = G(x'', y).$$

Az $\mathfrak{E}$ tér balról nemelfajuló lévén, ebből következik, hogy $x' = x'' \equiv x$, és ez a vektor az $\{x_n\}$ sorozat τ'''-limesze. Ezzel bebizonyítottuk $\mathfrak{E}_3$ teljességét.

Most tekintsük azt az I_{13} operátort, amely mindegyik $x \in \mathfrak{E}_3$ vektornak ugyanezt az $x \in \mathfrak{E}_1$ vektort felelteti meg. Az I_{13} operátor az $\mathfrak{E}_3$ teret lineárisan és kölcsönösen egyértelműen képezi le $\mathfrak{E}_1$-re, továbbá $\tau' \leqq \tau'''$ miatt a leképezés folytonos. Minthogy az $\mathfrak{E}_3$, $\mathfrak{E}_1$ terekre érvényes Banachnak az inverz operátorra vonatkozó klasszikus tétele [55], az $I_{31} = I_{13}^{-1}$ operátor is folytonos, ebből pedig következik, hogy $\tau' \geqq \tau'''$ és így $\tau' = \tau'''$. Pontosan így igazolható az is, hogy $\tau'' = \tau'''$, tehát végeredményben $\tau' = \tau''$. A tételt ezzel bebizonyítottuk.

A 2. 1. tétel semmit sem mond arról, hogy létezik-e az $\mathfrak{E}$ térben legalább egy Fréchet-topológia, amely a G-metrikát (balról, jobbról) felülmúlja. Amint az alábbi példa mutatja, ilyen topológia nem mindig létezik.

Legyen az $\mathfrak{E}$ tér az x változó összes x^t alakú függvényeinek lineáris burka, ahol $0 \leqq x \leqq 1$ és $0 \leqq t \leqq 1$. Tekintsük az $\mathfrak{E}$ térben a következő módon értelmezett G-metrikát. Rendeljük hozzá minden α irracionális számhoz $(0 < \alpha < 1)$ az

$$\alpha = [m_1, m_2, \ldots] = \cfrac{1}{m_1 + \cfrac{1}{m_2 + \ldots}}$$

végtelen lánctört kifejtést, ahol $m_1, m_2, \ldots, m_k, \ldots$ természetes számok. Azonkívül rendezzük valahogy sorozatba az összes racionális számokat: $r_1, r_2, \ldots$; $0 \leqq r_k \leqq 1$ $(k = 1, 2, \ldots)$.

Legyen most tetszés szerinti a $[0, 1]$ intervallumba eső irracionális α, β és racionális r_j, r_k számokra

$$G(x^\alpha, x^\beta) = 0, \qquad G(x^{r_j}, x^{r_k}) = 0,$$

$$G(x^{r_k}, x^\alpha) = G(x^\alpha, x^{r_k}) = m_k \qquad (j, k = 1, 2, \ldots),$$

ahol $\alpha = [m_1, m_2, \ldots, m_k, \ldots]$. Az x^t függvények lineáris kombinációira terjesszük ki G értelmezését úgy, hogy hermitikus bilineáris alakot kapjunk, és tekintsük a G-metrikát az $\mathfrak{E}$ téren.

Megmutatjuk, hogy *nincs olyan megszámlálhatóan sok félnormával megadható τ topológia, amely felülmúlná az adott G-metrikát.* Indirekt bizonyítás céljából tegyük fel, hogy van ilyen félnormákból álló $\{p_n(x)\}_1^\infty$ rendszer. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $p_1(x) \leqq \leqq p_2(x) \leqq \dots$ $(x \in \mathfrak{E})$. Akkor a $h_u(v) = \overline{G(u, v)}$ $(u \in \mathfrak{E})$ funkcionálok τ-folytonosságából és az 1°. állításból következik, hogy találhatók olyan pozitív $C(u)$ és természetes n_u számok, amelyekre minden $v \in \mathfrak{E}$ esetén

$$|G(u, v)| \leqq C(u) p_{n_u}(v).$$

Speciálisan

$$|G(x^\alpha, x^{r_k})| \leqq C(x^\alpha) p_{n(\alpha)}(x^{r_k}) \qquad (n(\alpha) \equiv n_{x^\alpha}).$$

Vezessük be a $\varphi_{nk} = p_n^2(x^{r_k})$ jelölést. Akkor $\alpha = [m_1, m_2, \dots, m_k, \dots]$ esetén

$$m_k^2 \leqq C^2(x^\alpha) \varphi_{n(\alpha)k}.$$

Most tekintsük azt az $\alpha = [m_1, m_2, \dots, m_k, \dots]$ irracionális számot, amelyre

$$m_k = \Big[\sum_{i, j \leqq k} \varphi_{ij}\Big] + k,$$

ahol $[a]$ az a-ban foglalt legnagyobb egész szám. Ha $k > n(\alpha)$, akkor $m_k > \varphi_{n(\alpha)k}$, tehát

$$m_k^2 \leqq C^2(x^\alpha) m_k \qquad (k > n(\alpha)),$$

ami elég nagy k értékekre lehetetlenség.

5. Azt fogjuk mondani, hogy a félnormálható τ topológia *majorálja a G-metrikát,* ha

$$|G(x, y)| \leqq C p(x) p(y) \qquad (x, y \in \mathfrak{E}),$$

ahol $p(x)$ az $\mathfrak{E}$ G-tér τ topológiáját leíró félnorma és $C > 0$. *Ha egy τ topológia majorálja a G-metrikát, akkor felül is múlja.* Ennek a fordítottja általában nem igaz, amint az alábbi példa mutatja.

Tekintsünk a $\mathfrak{H}$ Hilbert-térben egy $A = A^*$ nemkorlátos önadjungált operátort, amelynek értelmezési tartománya $\vartheta(A) \equiv \mathfrak{E}$. Vezessünk be $\mathfrak{E}$-ben egy G^h-metrikát a

$$G(x, y) = (Ax, y) \qquad (x, y \in \mathfrak{E})$$

képlet segítségével. Könnyen belátható, hogy $\mathfrak{E}$-nek az a topológiája, amelyet az $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ norma értelmez, felülmúlja, de nem majorálja ezt a G-metrikát.

Teljes normált terekben azonban más a helyzet. Nevezetesen igaz a következő tétel.

2. 2. TÉTEL. *Ha egy Banach-féle topológia ($\mathfrak{B}$-topológia) felülmúlja a G-metrikát, akkor majorálja is.*

Bizonyítás. Értelmezze az $\mathfrak{E}$ G-tér $\mathfrak{B}$-topológiáját az $\|x\|$ $(x \in \mathfrak{E})$ norma. Minthogy ez a topológia felülmúlja a G-metrikát, fennáll a

$$|G(x, y)| \leqq C(y) \|x\| \qquad (x, y \in \mathfrak{E}) \tag{2. 4}$$

egyenlőtlenség, ahol $C(y) = \sup\limits_{\|x\|=1} |G(x, y)|$. Tekintettel arra, hogy a $p_y(x) = |G(x, y)|$ $(x \in \mathfrak{E})$ funkcionálok konvexek és $\mathfrak{B}$-folytonosak, I. M. GELFAND ismert lemmája értelmében (lásd pl. [56], 59. oldal) a $C(y)$ funkcionál is $\mathfrak{B}$-folytonos, vagyis

$$|C(y)| \leqq \text{const. } \|y\| \qquad (y \in \mathfrak{E}).$$

Ezt a becslést a (2. 4) képletbe behelyettesítve kapjuk az állítást.

Megjegyezzük, hogy ha a τ topológia majorálja a G-metrikát, akkor a $G(x, y)$ alak mint x és y kétváltozós függvénye folytonos. A 2. 2. tételből speciálisan következik, hogy ha $G(x, y)$ $\mathfrak{B}$-folytonos külön az x és külön az y változóban, akkor kétváltozós függvényként is folytonos. Ez nemcsak $\mathfrak{B}$ terekre, hanem $\mathfrak{F}$ terekre is igaz (vö. [50]), amint az egy igen általános tételből ([51], III. fej. 4. 1. §, 2. állítás) adódik.

Ha a G-metrikát majoráló τ topológia az $\mathfrak{E}$ térben pre-Hilbert-féle és ezt a topológiát a $H(x, y)$ $(x, y \in \mathfrak{E})$ skaláris szorzat értelmezi, akkor a H alakot az adott G-metrika *hermitikusan nemnegatív majoránsának* nevezzük. Ily módon a $H(x, y)$ alak akkor és csak akkor lesz a G-metrika hermitikusan nemnegatív majoránsa, ha

$$|G(x, y)|^2 \leqq CH(x, x) H(y, y) \qquad (x, y \in \mathfrak{E},\ C > 0).$$

Kimutatható ([56], 64. oldal), hogy ennek a feltételnek a teljesüléséhez elégséges a

$$|G(x, x)| \leqq C_1 H(x, x) \qquad (x \in \mathfrak{E},\ C_1 > 0)$$

becslés fennállása.

Ha $x \neq 0$ esetén $H(x, x) > 0$, akkor a *G-metrika hermitikusan pozitív majoránsáról* fogunk beszélni. Világos, hogy az $\mathfrak{E}$ G-térben minden ilyen majoráns szeparált pre-Hilbert-topológiát indukál, amely általában nem teljes. Az $\mathfrak{E}$ teret a szokásos módon teljessé téve ebben a topológiában egy $\tilde{G}$-metrikával ellátott $\tilde{\mathfrak{E}}$ Hilbert-teret kapunk, ahol $\tilde{G}(x, y)$ a $G(x, y)$ alak $\tilde{\mathfrak{E}}$-ra való folytonos kiterjesztése. Az ily módon megszerkesztett $\tilde{\mathfrak{E}}$ $\tilde{G}$-tér azonban elfajuló lehet abban az esetben is, amikor $G(x, y)$ nemelfajuló. A 3. § 4. pontjában egy fontos esetet fogunk megemlíteni, amikor a fenti teljessé tétel nem vezet a G-metrika elfajulására.

6. Rövidség kedvéért állapodjunk meg abban, hogy a továbbiakban az olyan G-metrikával ellátott $\mathfrak{E}$ teret, amelyet egy $\mathfrak{B}$ tér ($\mathfrak{H}$ tér) topológiája felülmúl, egyszerűen *G-metrikával ellátott Banach-térnek (Hilbert-térnek)*, vagy még rövidebben *($\mathfrak{B}$, G)-térnek* (*($\mathfrak{H}$, G)-térnek*) fogjuk nevezni.

Amint az 5. pontban kiderítettük, ahhoz, hogy egy $\mathfrak{E}$ $\mathfrak{B}$ tér ($\mathfrak{B}$, G)-tér legyen, szükséges és elégséges a

$$|G(x, y)| \leqq C\|x\|\,\|y\| \qquad (C > 0;\ x, y \in \mathfrak{E}) \tag{2. 5}$$

egyenlőtlenség fennállása. Most feleltessük meg mindegyik $x \in \mathfrak{E}$ vektornak a

$$h_x = h_x(y) = \overline{G(x, y)} \in \mathfrak{E}^*$$

lineáris funkcionált, ahol szokás szerint $\mathfrak{E}^*$ az $\mathfrak{E}$ (komplex) $\mathfrak{B}$ tér konjugált tere.

Tekintsük azt a G^b lineáris operátort, amely az $\mathfrak{E}$ teret $\mathfrak{E}^*$-ba képezi le és az $x \in \mathfrak{E}$ vektorhoz a $h_x \in \mathfrak{E}^*$ funkcionált rendeli hozzá: $h_x = G^b x$. A G^b operátort *a $G(x, y)$ alak baloldali Gram-operátorának* nevezzük az $\mathfrak{E}$ téren. A (2. 5.) egyenlőtlenségből következik, hogy

$$\|G^b x\| = \|h_x\| = \sup_{\|y\|=1} |G(x, y)| \leqq C\|x\| \qquad (x \in \mathfrak{E}),$$

vagyis G^b korlátos operátor. Ha a $h \in \mathfrak{E}^*$ funkcionálokra és az $y \in \mathfrak{E}$ vektorokra bevezetjük a

$$\overline{h(y)} = (h, y)$$

jelölést, akkor a $G(x, y)$ alakra a következő előállítást kapjuk:

$$G(x, y) = \overline{h_x(y)} = (h_x, y) = (G^b x, y) \qquad (x, y \in \mathfrak{E}),$$

ami igazolja terminológiánkat.

Teljesen analóg módon bevezethetjük *a $G(x, y)$ alak G^j jobboldali Gram-operátorát az $\mathfrak{E}$ téren, így a*

$$G(x, y) = (x, G^j y) \qquad (x, y \in \mathfrak{E})$$

előállítást kapjuk. Itt a G^j lineáris folytonos operátor mindegyik $y \in \mathfrak{E}$ vektorhoz a $G^j y = f_y = f_y(x) = G(x, y) \in \mathfrak{E}^*$ lineáris funkcionált rendeli hozzá, (x, f) pedig az

$$f(x) = \overline{(f, x)} \qquad (x \in \mathfrak{E}, f \in \mathfrak{E}^*)$$

számot jelenti.

Abban a speciális esetben, amikor a G-metrika hermitikus, nyilvánvaló, hogy $G^b = G^j \equiv G$. Ebben az esetben egyszerűen *a $G(x, y)$ alak $\mathfrak{E}$ térbeli G Gram-operátoráról* fogunk beszélni:

$$G(x, y) = (Gx, y) = (x, Gy) \qquad (x, y \in \mathfrak{E}).$$

7. A fent bevezetett definíciók különösen természetessé válnak, ha az $\mathfrak{E}$ tér $(\mathfrak{H}, G)$-tér. Ebben az esetben $\mathfrak{E}^* = \mathfrak{E}$ és az $(x, f) = \overline{(f, x)}$ szimbólum a közönséges skaláris szorzatot jelöli $(x, f \in \mathfrak{E})$, úgyhogy a

$$G(x, y) = (G^b x, y) = (x, G^j y) \qquad (x, y \in \mathfrak{E}) \tag{2. 6}$$

képlet a Hilbert-térbeli korlátos bilineáris funkcionálok előállításáról szóló ismert tételt ([56], 63. oldal) fejezi ki, a G^b, G^j korlátos operátorok pedig egymás adjungáltjai:

$$(G^b)^* = G^j, \quad (G^j)^* = G^b.$$

A (2. 6) képletből többek között az is látható, hogy az $\mathfrak{E}$ tér balról (jobbról) nemelfajuló volta ekvivalens azzal, hogy a G^b (G^j) operátornak a $\lambda = 0$ szám nem sajátértéke.

Most térjünk át a $(\mathfrak{H}, G^h)$-terek részletesebb tárgyalására. Ebben az esetben $G = G^*$ önadjungált operátor az $\mathfrak{E}$ Hilbert-térben. Ezen operátor $\sigma(G)$ spektruma valós számokból álló korlátos zárt halmaz. Ha $0 \notin \sigma(G)$, akkor a G operátor folytonos inverzzel rendelkezik és spektrális felbontása a következő alakú:

$$G = \int_m^{-\varepsilon} \lambda \, dE_\lambda + \int_\varepsilon^M \lambda \, dE_\lambda \qquad (\varepsilon > 0, \; E_m = 0, \; E_M = I). \tag{2. 7}$$

3°. *Ha $0 \notin \sigma(G)$, akkor az $\mathfrak{E}$ térben az (x, y) skaláris szorzattal meghatározott τ Hilbert-topológia helyettesíthető egy vele ekvivalens, és valamilyen $(x, y)'$ skaláris szorzattal meghatározott τ' Hilbert-topológiával, amelyre nézve a $G(x, y)$ alak Gram-operátora*

$$G' = P_+ - P_- \equiv J$$

alakú, ahol P_+ és P_- két ortogonális projektor (az ortogonalitás az $(x, y)'$ skaláris szorzatra vonatkozóan áll fenn), és $P_+ P_- = 0$, $P_+ + P_- = I$.

A bizonyítás azonnal adódik a következő választás segítségével: $P_- = E_0$, $P_+ = I - E_0$, ahol E_λ a G operátor fentebb bevezetett spektrálserege, és

$$(2.8) \qquad (x, y)' = (GP_+x, y) - (GP_-x, y) = (GJx, y) \qquad (x, y \in \mathfrak{E}).$$

A (2. 7), (2. 8) képletekből könnyen nyerhető, hogy

$$\varepsilon(x, x) \leqq (x, x)' \leqq \|GJ\|(x, x) \qquad (x \in \mathfrak{E}),$$

vagyis hogy a τ, τ' topológiák ekvivalensek.

Az, hogy a P_+ (és egyben a P_-) projektor az $(x, y)'$ skaláris szorzatra vonatkozóan ortogonális (önadjungált), közvetlenül igazolható: minthogy G felcserélhető a $P_+ = I - E_0$ operátorral, fennáll

$$(P_+x, y)' = (GP_+x, y) = (P_+Gx, y) = (Gx, P_+y) = (x, P_+y)'.$$

Végül könnyen látható, hogy $J^2 = I$, és ezért

$$G(x, y) = (Gx, y) = (GJ^2x, y) = (Jx, y)' \qquad (x, y \in \mathfrak{E}).$$

A most vizsgált eset, amikor a $G(x, y)$ alak hermitikus Gram-operátora $G = J = P_+ - P_-$ alakú, a továbbiakban fontos szerepet játszik (lásd a 6. §-t). Az $\mathfrak{E}$ Hilberteret ebben az esetben *J-metrikával ellátott térnek* vagy *J-térnek* fogjuk nevezni.

Végül előfordulhat, hogy a megadott J-metrika olyan, hogy $\varkappa = \min(\dim P_+, \dim P_-) < \infty$. A $\varkappa$ számot a J-metrika *indefinitási rangjának* nevezzük, és az ilyen J-metrikával ellátott $\mathfrak{E}$ teret $\Pi_\varkappa$-val jelöljük (meghatározottság kedvéért a továbbiakban fel fogjuk tenni, hogy $\varkappa = \dim P_+$).

A $\Pi_\varkappa$ tér axiomatikusan is leírható, ezt a 3. § 4. pontjában fogjuk ismertetni. Azonkívül, mint alább meglátjuk, a 6. § egyik eredménye lehetővé teszi, hogy az összes J-terek családjában a $\Pi_\varkappa$ tereket másképpen is jellemezzük (6. 5. tétel).

8. Azt mondjuk, hogy az $\mathfrak{E}$ tér τ topológiája a *G-metrikával balról (jobbról) kompatibilis*, ha τ balról (jobbról) felülmúlja a G-metrikát és fennáll a Fréchet—Riesz-tétel: bármely lineáris τ-folytonos $f(x)$ $(x \in \mathfrak{E})$ funkcionál előállítható

$$(2.9) \qquad f(x) = G(x, y_0)$$

(ill. $f(x) = \overline{G(y_0, x)}$) alakban valamilyen $y_0 \in \mathfrak{E}$ segítségével.

Nyilvánvaló, hogy ezen előállítások egyértelműsége ekvivalens az $\mathfrak{E}$ térnek a megfelelő oldalról nemelfajuló voltával.

2. 3. TÉTEL. *A $\tau_0^b(\mathfrak{E}, G)$ $\left(\tau_0^j(\mathfrak{E}, G)\right)$ topológia a leggyengébb a G-metrikával balról (jobbról) kompatibilis topológia.*

A bizonyítást a $\tau_0^b = \tau_0^b(\mathfrak{E}, G)$ topológiára végezzük el. Ha az $f(x)$ lineáris funkcionál folytonos ebben a topológiában, akkor az 1°. állítás alapján találhatók olyan $y_1, \ldots, y_n \in \mathfrak{E}$ vektorok és olyan M szám, hogy

$$|f(x)| \leqq M \max_{1 \leqq i \leqq n} |G(x, y_i)|.$$

Ebből következik, hogy ha

$$(2.10) \qquad G(x, y_i) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

akkor $f(x) = 0$. Ha (2. 10) érvényes minden $x \in \mathfrak{E}$ mellett, akkor $f = 0$, következésképpen az $y_0 = 0$ választás esetén teljesül a (2. 9) összefüggés.

Most tegyük fel, hogy a (2. 10) képlet nem minden $x \in \mathfrak{E}$ elemre igaz. Tekintsük a következő n-dimenziós vektorok halmazát:

$$\bar{g}_x = \{G(x, y_1), \ldots, G(x, y_n)\}.$$

Legyenek $x_1, \ldots, x_k$ $(1 \leqq k \leqq n)$ olyanok, hogy a $\bar{g}_{x_1}, \ldots, \bar{g}_{x_n}$ vektorok lineárisan függetlenek és hogy tetszés szerinti x-re a $\bar{g}_x$ vektor $x_1, \ldots, x_k$ lineáris kombinációja:

$$\bar{g}_x = \lambda_1 \bar{g}_{x_1} + \ldots + \lambda_k \bar{g}_{x_k} \qquad (\lambda_j = \lambda_j(x),\ j = 1, 2, \ldots, k).$$

Ez azt jelenti, hogy

$$G(x, y_i) = G(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_k x_k, y_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

(2. 11)

$$G(x - (\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_k x_k), y_i) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Ebből, amint azt a bizonyítás elején kifejtettük, adódik az

(2. 12) $$f(x) = f(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_k x_k)$$

egyenlőség.

Most tegyük fel, hogy $\mu_1, \ldots, \mu_n$ kielégíti a

$$\mu_1 G(x_j, y_1) + \ldots + \mu_n G(x_j, y_n) = f(x_j) \qquad (j = 1, 2, \ldots, k)$$

egyenletrendszert, amely kompatibilis, mivel az együtthatókból képezett sorvektorok lineárisan függetlenek. Ekkor érvényes a

(2. 13) $$G(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_k x_k, \bar{\mu}_1 y_1 + \ldots + \bar{\mu}_n y_n) = f(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_k x_k)$$

egyenlőség. Viszont a (2. 11) képletből következik, hogy

(2. 14) $$G(x, \bar{\mu}_1 y_1 + \ldots + \bar{\mu}_n y_n) = G(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_k x_k, \bar{\mu}_1 y_1 + \ldots + \bar{\mu}_n y_n).$$

A (2. 12), (2. 13), (2. 14) összefüggések felhasználásával azt kapjuk, hogy tetszés szerinti x-re

$$f(x) = G(x, \bar{\mu}_1 y_1 + \ldots + \bar{\mu}_n y_n),$$

vagyis az

$$y_0 = \bar{\mu}_1 y_1 + \ldots + \bar{\mu}_n y_n$$

jelölés mellett fennáll (2. 9).

Mivel a 2°. állítás alapján τ_0^b a leggyengébb, a G-metrikát balról felülmúló topológia, a 2. 3. tételt bebizonyítottuk.

A G-metrikával kompatibilis topológia, amint a továbbiakban meg fogjuk mutatni, általában nincs egyértelműen meghatározva. Abban az alkalmazások szempontjából fontos esetben, amikor a tér G-metrikával ellátott reflexív $\mathfrak{B}$ tér $((\mathfrak{B}^r, G)$-*tér*), meg fogjuk adni a legerősebb ilyen topológiát. Ehhez szükségünk lesz a következő tételre.

2. 4. TÉTEL[6]. *Ha az $\mathfrak{E}$ térben a τ', τ'' lokálisan konvex topológiák balról (jobbról) kompatibilisak a G-metrikával és τ' félnormálható, akkor*

(2. 15) $$\tau' \geqq \tau''.$$

[6] A 2. 4. tétel igaz marad akkor is, ha τ' megszámlálhatóan sok félnormával írható le, azaz metrizálható (vö. az [51], IV. fej., 2. §, 6. állítással, ahol az egész tárgyalás szeparált topológiákra vonatkozik; ebben az esetben τ' az úgynevezett MACKEY-féle topológia).

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy a τ' topológiát a $p(x)$ félnorma, a τ'' topológiát pedig a $p_\alpha(x)$ $(\alpha \in A)$ félnormákból álló rendszer értelmezi és hogy ezek a topológiák balról kompatibilisak a G-metrikával. Ha (2. 15) nem teljesül, akkor van olyan $\mathfrak{U}^{(\varepsilon)}_{\alpha_1,\dots,\alpha_k}(0)$ τ''-környezet, hogy bármilyen $\mathfrak{V}^\delta(0)$ τ'-környezetre az

$$\mathfrak{N}_\delta = \mathfrak{V}^\delta(0) \setminus \mathfrak{U}^{(\varepsilon)}_{\alpha_1,\dots,\alpha_k}(0)$$

halmaz nem üres.

Legyen $x_n \in \mathfrak{N}_{\frac{1}{n}}$. Nyilván található olyan $k_0 \leqq k$ természetes szám, hogy végtelen sok n_i természetes számra fennálljanak a

$$p(x_{n_i}) < \frac{1}{n_i}, \qquad p_0(x_{n_i}) \equiv p_{\alpha_{k_0}}(x_{n_i}) \geqq \varepsilon$$

egyenlőtlenségek. Legyen $y_i = n_i x_{n_i}$. Akkor

$$p(y_i) < 1 \qquad (i = 1, 2, \dots), \tag{2. 16}$$

$$p_0(y_i) \geqq \varepsilon n_i \qquad (i = 1, 2, \dots). \tag{2. 17}$$

Most tekintsük az $\mathfrak{E}$ térben azt az $\mathfrak{L}_0$ lineált, amely a $p_0(x) = 0$ egyenletet kielégítő $x \in \mathfrak{E}$ vektorokból áll. Képezzük az $\tilde{\mathfrak{E}} = \mathfrak{E}/\mathfrak{L}_0$ faktor-teret, és tetszés szerinti $X \in \tilde{\mathfrak{E}}$ elem normáját értelmezzük az $\|X\| = p_0(x)$ képlettel, ahol $x \in X$. Könnyen belátható, hogy $\|X\|$-nak ez a definíciója egyértelmű és ily módon $\tilde{\mathfrak{E}}$ normált térré válik. Legyen $F(X)$ tetszés szerinti lineáris folytonos funkcionál az $\tilde{\mathfrak{E}}$ téren ($F \in \tilde{\mathfrak{E}}^*$): $|(F(X)| \leqq \|F\| \|X\|$. Értelmezzünk egy $f(x)$ lineáris funkcionált az $\mathfrak{E}$ téren a következőképpen:

$$f(x) = F(X), \quad \text{ha} \quad x \in X.$$

Nyilvánvaló, hogy

$$|f(x)| \leqq \|F\| \, p_0(x),$$

tehát az 1°. állítás alapján $f(x)$ τ''-folytonos. Ennélfogva található olyan y_0, amelyre $f(x) \equiv G(x, y_0)$, és így az $f(x)$ funkcionál τ'-folytonos. Megint felhasználva az 1°. állítást azt kapjuk, hogy valamilyen $M_f > 0$ számmal

$$|f(x)| \leqq M_f p(x)$$

minden $x \in \mathfrak{E}$ elemre. Következésképpen (2.16) alapján $|f(y_i)| \leqq M_f$, tehát

$$|F(Y_i)| \leqq M_f \qquad (y_i \in Y_i \in \tilde{\mathfrak{E}}, \ i = 1, 2, \dots).$$

Ily módon tetszés szerinti rögzített $F \in \tilde{\mathfrak{E}}^*$ mellett az $\{F(Y_i)\}$ számhalmaz korlátos, úgyhogy a BANACH—STEINHAUS-tétel (lásd [57], 255. oldal) értelmében az $\{Y_i\}$ halmaz korlátos az $\tilde{\mathfrak{E}}$ térben. Ez azonban ellentmond a (2. 17) összefüggésekből adódó

$$\|Y_i\| \geqq \varepsilon n_i \qquad (i = 1, 2, \dots)$$

egyenlőtlenségeknek. A kapott ellentmondásból következik a (2. 15) reláció helyessége. Ezzel a 2. 4. tételt bebizonyítottuk.

KÖVETKEZMÉNY. *Ha két félnormálható topológia balról (jobbról) kompatibilis a G-metrikával, akkor ezek a topológiák ekvivalensek egymással.*

Most tegyük fel, hogy az $\mathfrak{E}$ tér $(\mathfrak{B}, G)$-tér, és legyen G^b és G^j a $G(x, y)$ alak bal oldali ill. jobb oldali Gram-operátora (lásd a 6. pontot). Definiáljunk $\mathfrak{E}$-ben két félnormálható topológiát: a $\tau_1^b(\mathfrak{E}, G)$ topológiát a $p^b(x) = \|G^b x\|$ félnorma, a $\tau_1^j(\mathfrak{E}, G)$ topológiát pedig a $p^j(x) = \|G^j x\|$ félnorma segítségével.

2. 5. TÉTEL. *Ha az $\mathfrak{E}$ tér $(\mathfrak{B}^r, G)$-tér, akkor $\tau_1^b(\mathfrak{E}, G)$ $\left(\tau_1^j(\mathfrak{E}, G)\right)$ a legerősebb a G-metrikával balról (jobbról) kompatibilis lokálisan konvex topológia.*

Bizonyítás. Az, hogy $\tau_1^b = \tau_1^b(\mathfrak{E}, G)$ balról felülmúlja a G-metrikát, az alábbi egyenlőtlenség-sorozatból következik (a jelöléseket lásd a 6. pontban):

$$|G(x, y)| = |h_x(y)| \leqq \|h_x\| \, \|y\| = \|G^b x\| \, \|y\| = \|y\| p^b(x).$$

Most legyen $f(x)$ tetszés szerinti τ_1^b -folytonos funkcionál az $\mathfrak{E}$ téren:

$$|f(x)| \leqq C_f p^b(x). \tag{2. 18}$$

Értelmezzünk a G^b operátor $\mathfrak{R}(G^b)(\subset \mathfrak{E}^*)$ értékkészletén egy $F(h)$ funkcionált az

$$F(h) = f(x) \quad \text{ha} \quad h = G^b x \tag{2. 19}$$

képlet segítségével. Az F funkcionál egyértékű, ugyanis a $G^b x_1 = G^b x_2$ egyenlőségből következik, hogy $p^b(x_1 - x_2) = \|G^b(x_1 - x_2\| = 0$, vagyis (2. 18) miatt $f(x_1) = f(x_2)$. Az F funkcionál lineáris volta nyilvánvaló. Minthogy $h \in \mathfrak{R}(G^b)$, $h = G^b x$ esetén

$$|F(h)| = |f(x)| \leqq C_f \|G^b x\| = C_f \|h\|,$$

a HAHN—BANACH-tétel komplex terekre vonatkozó analogonját (lásd [51], 110. oldal) felhasználva F-et folytonos funkcionálként kiterjeszthetjük az egész $\mathfrak{E}^*$ térre. Az $\mathfrak{E}$ tér reflexivitása folytán található olyan $y_0 \in \mathfrak{E}$ vektor, hogy $h \in \mathfrak{E}^*$ esetén

$$F(h) = \overline{h(y_0)}.$$

A (2. 19) összefüggés segítségével azt kapjuk, hogy minden $x \in \mathfrak{E}$ elemre

$$f(x) = \overline{h(y_0)} = (h, y_0) = (G^b x, y_0) = G(x, y_0),$$

vagyis az f funkcionálra érvényes a (2. 9) előállítás. Ily módon a τ_1^b topológia balról kompatibilis a G-metrikával, és minthogy τ_1^b félnormálható, a 2. 4. tétel értelmében ez a legerősebb ilyen tulajdonságú topológia.

KÖVETKEZMÉNY. *Ahhoz, hogy az $\mathfrak{E}$ $(\mathfrak{B}^r, G)$-térben egy lokálisan konvex τ topológia a G-metrikával balról (jobbról) kompatibilis legyen, szükséges és elégséges a*

$$\tau_0^b(\mathfrak{E}, G) \leqq \tau \leqq \tau_1^b(\mathfrak{E}, G)$$

$$\left(\tau_0^j(\mathfrak{E}, G) \leqq \tau \leqq \tau_1^j(\mathfrak{E}, G)\right)$$

összefüggések fennállása.

Megemlítjük, hogy amint a

$$G(x, y) = \int_0^1 x(t)\overline{y(t)}\,dt \qquad (x, y \in \mathfrak{E})$$

alak útján G-metrikával felruházott $\mathfrak{E} = C(0, 1)$ tér példája mutatja, a 2.5. tételben lényeges az a követelmény, hogy $\mathfrak{E}$ reflexív legyen.

3. §. G-terek lineáljai és alterei

1. Legyen $\mathfrak{E}$ valamilyen G-tér. Ezt a teret először tisztán algebrai szempontból fogjuk vizsgálni, vagyis mindenféle topológiától elvonatkoztatva. Egyszerűség kedvéért a G-metrikát hermitikusnak fogjuk tekinteni, bár az olvasó meggyőződhet majd róla, hogy megfontolásaink nagyrészt helyesek maradnak az általános esetben is, hacsak a „G-ortogonális, izotróp, nemelfajuló stb." kifejezéseket a „balról (jobbról) G-ortogonális, izotróp, nemelfajuló stb." kifejezésekkel helyettesítjük. Azokban a pontokban viszont, ahol lényeges, hogy a G-metrika hermitikus legyen (mint például a 2., 3. és 4. pontban), ezt a körülményt külön hangsúlyozni fogjuk.

Az $\mathfrak{L}(\subset \mathfrak{E})$ nemelfajuló lineált *maximális nemelfajuló* lineálnak mondjuk, ha nincs benne $\mathfrak{E}$-nek egyetlen más nemelfajuló lineáljában sem. Igaz a következő *maximalitási elv:*

1°. *Minden nemelfajuló $\mathfrak{L}(\subset \mathfrak{E})$ lineál benne van egy maximális nemelfajuló lineálban.*

Csakugyan, ha $\{\mathfrak{L}_\alpha\}_{\alpha \in A}$ egy $\mathfrak{E}$-beli lineálokból álló, az $\mathfrak{L}_\alpha \subset \mathfrak{L}_\beta$ inkluzióra nézve teljesen rendezett rendszer, akkor $\bigcup_{\alpha \in A} \mathfrak{L}_\alpha$ ismét lineál, méghozzá nemelfajuló, ha mindegyik $\mathfrak{L}_\alpha (\alpha \in A)$ nemelfajuló.

Ezek szerint az összes nemelfajuló lineálok halmaza az inkluzióra nézve induktíve rendezett, és így az 1°. állítás Zorn lemmájából adódik.

Az $\mathfrak{M}(\subset \mathfrak{E})$ halmaz *G-ortogonális komplementumának* azoknak az $\mathfrak{E}$-beli vektoroknak az $\mathfrak{M}'$ összességét nevezzük, amelyek G-ortogonálisak $\mathfrak{M}$-re. Könnyen látható, hogy $\mathfrak{M}'$ lineál. Ha $\mathfrak{L}$ lineál az $\mathfrak{E}$ térben, akkor nyilvánvaló, hogy $\mathfrak{L} \cap \mathfrak{L}'$ az $\mathfrak{L}$ lineál izotróp lineálja, úgyhogy $\mathfrak{L}$ akkor és csak akkor nemelfajuló, ha $\mathfrak{L} \cap \mathfrak{L}' = \{0\}$. A G-ortogonális komplementumoknak vannak bizonyos nyilvánvaló tulajdonságai, mint például:

$$\mathfrak{L} \subset (\mathfrak{L}')' = \mathfrak{L}''. \tag{3.1}$$

$$\text{Ha} \quad \mathfrak{L} \subset \mathfrak{M}, \quad \text{akkor} \quad \mathfrak{L}' \supset \mathfrak{M}' \quad \text{és} \quad \mathfrak{L}'' \subset \mathfrak{M}''. \tag{3.2}$$

$$\mathfrak{L}''' = \mathfrak{L}', \tag{3.3}$$

$$(\mathfrak{L} + \mathfrak{M})' = \mathfrak{L}' \cap \mathfrak{M}', \tag{3.4}$$

$$(\mathfrak{L} \cap \mathfrak{M})' \supset \mathfrak{L}' + \mathfrak{M}'. \tag{3.5}$$

Az utolsó két képletben, és a továbbiakban mindig, a „$+$" jel a halmazok algebrai összeadását jelöli, vagyis $\mathfrak{L} + \mathfrak{M}$ az $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}$ halmazok lineáris burka. Ha itt $\mathfrak{L} \cap \mathfrak{M} = \{0\}$, akkor $\mathfrak{L} + \mathfrak{M} = \mathfrak{L} \dotplus \mathfrak{M}$, vagyis az összeg direkt összeg. A (3. 1)—(3. 5) képletek nyilván nemcsak lineálokra, hanem tetszés szerinti $\mathfrak{L}, \mathfrak{M} \subset \mathfrak{E}$ halmazokra is érvényesek.

Az $\mathfrak{E}_0 = \mathfrak{E}'$ lineál az $\mathfrak{E}$ tér izotróp lineálja (2. §, 1. pont), és bármelyik $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{E}$ lineálra

$$\mathfrak{L}' \supset \mathfrak{E}_0. \tag{3.6}$$

2°. *Az $\mathfrak{L}(\subset \mathfrak{E})$ lineál akkor és csak akkor maximális nemelfajuló lineál, ha*

$$\mathfrak{L} \dotplus \mathfrak{E}_0 = \mathfrak{E}. \tag{3.7}$$

Valóban, az, hogy $\mathfrak{L}$ nemelfajuló, közvetlenül következik az $\mathfrak{E}$ tér $\mathfrak{E}_0$ izotrop lineáljának definíciójából, valamint a (3. 7) direkt felbontásból, és fennáll $\mathfrak{L}' = \mathfrak{E}_0$. Ha $\mathfrak{L}_1$ nemelfajuló lineál és $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{L}_1$, akkor $\mathfrak{L}_1' \subset \mathfrak{L}' = \mathfrak{E}_0$, úgyhogy (3. 6) értelmében $\mathfrak{L}_1' = \mathfrak{E}_0$. De $\mathfrak{L}_1 \cap \mathfrak{L}_1' = \{0\}$, ennélfogva $\mathfrak{L}_1 \cap \mathfrak{E}_0 = \{0\}$ és így $\mathfrak{L}_1 = \mathfrak{L}$, azaz $\mathfrak{L}$ maximális nemelfajuló lineál.

Fordítva, ha $\mathfrak{L}$ maximális nemelfajuló lineál, akkor $\mathfrak{L} \cap \mathfrak{E}_0 = \{0\}$. Állítsuk elő az $\mathfrak{E}$ teret

$$\mathfrak{E} = (\mathfrak{L} \dotplus \mathfrak{E}_0) \dotplus \mathfrak{M} = (\mathfrak{L} \dotplus \mathfrak{M}) \dotplus \mathfrak{E}_0$$

alakú direkt összegként (lásd pl. [58], 2. old.), ahol $\mathfrak{M}$ valamilyen lineál. A fent bizonyítottak szerint ebből következik, hogy $\mathfrak{L} \dotplus \mathfrak{M}$ maximális nemelfajuló lineál, mivel azonban már $\mathfrak{L}$ ilyen tulajdonságú volt, $\mathfrak{M} = \{0\}$, és ezzel a (3. 7) összefüggést igazoltuk.

Az 1°. és 2°. állításból kitűnik, hogy az $\mathfrak{E}_0$ izotróp lineálnak az $\mathfrak{E}$ térből (3. 7) alakú felbontás segítségével történő „kiválasztása" nem egyértelmű. Egyébként ez már abban az esetben is nyilvánvaló, amikor az $\mathfrak{E}$ tér véges dimenziójú (mondjuk, kétdimenziós) és az $\mathfrak{E}_0$ izotróp lineál egydimenziós[7].

2. Hermitikus G-metrika esetén a $G(x, x)$ szám minden $x \in \mathfrak{E}$ elemre valós. Attól függően, hogy pozitív, negatív vagy nullával egyenlő, az x vektort *pozitívnak*, *negatívnak*, illetve *semlegesnek* fogjuk nevezni. Az olyan $\mathfrak{L}(\subset \mathfrak{E})$ lineált, amelynek minden $x(\neq 0)$ vektora pozitív (negatív, semleges), *pozitív (negatív, semleges)* lineálnak mondjuk. $\mathfrak{E}$ pozitív és negatív lineáljait közös néven *definit* lineáloknak nevezzük. Természetes módon értelmezhetők az $\mathfrak{E}$ tér *nemnegatív* és *nempozitív*, valamint *maximális* pozitív (negatív, nemnegatív, nempozitív, semleges) lineáljai. A lineálok imént felsorolt fajtáinak mindegyikére érvényes, és az 1°. állítással teljesen analóg módon bizonyítható a megfelelő *maximalitási elv*.

Tegyük fel, hogy az $\mathfrak{E}$ tér előállítható

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_0 \dotplus \mathfrak{E}_+ \dotplus \mathfrak{E}_-$$

G-ortogonális direkt összeg alakjában, ahol $\mathfrak{E}_0$ az $\mathfrak{E}$ tér izotróp lineálja, $\mathfrak{E}_+$ és $\mathfrak{E}_-$ pedig pozitív, ill. negatív lineál. Minden ilyen felbontást az $\mathfrak{E}$ tér *kanonikus felbontásának* nevezünk. Könnyen látható, hogy egy *kanonikus felbontás* $\mathfrak{E}_+$, $\mathfrak{E}_-$ *komponensei maximális pozitív, ill. negatív lineálok az* $\mathfrak{E}$ *térben.*

A kanonikus felbontás igen egyszerű példáját szolgáltatja az a $(\mathfrak{H}, G^h)$-típusú $\mathfrak{E}$ tér, amelyben

$$G(x, y) = (Gx, y)$$

[7] Az utóbbi körülmény nem akadályozta meg A. Uhlmann-t abban ([42], 2. §), hogy a (3. 7) felbontás egyértelműségét állítsa.

és a G Gram-operátor korlátos hermitikus operátor $\mathfrak{E}$-ben. Ha G spektrális felbontása

$$G = \int_m^M \lambda \, dE_\lambda \qquad (E_{\lambda-0} = E_\lambda; \quad m < \lambda \leqq M)$$

alakú, akkor a

$$P_- = \int_m^0 dE_\lambda, \qquad P_0 = E_{+0} - E_0, \qquad P_+ = \int_{+0}^M dE_\lambda$$

ortogonális projektorok három, egymásra (a Hilbert-féle $\mathfrak{H}$-metrika értelmében) merőleges $\mathfrak{E}_0 = P_0\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_+ = P_+\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_- = P_-\mathfrak{E}$ alteret határoznak meg. Könnyű belátni, hogy az így kapott $\mathfrak{E}_0$, $\mathfrak{E}_+$, $\mathfrak{E}_-$ alterek a Hilbert-tér kanonikus (tehát a G-metrikára nézve is ortogonális) $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_0 \dotplus \mathfrak{E}_+ \dotplus \mathfrak{E}_-$ felbontását értelmezik (lásd pl. [11]). Abban a speciális esetben, amikor $\mathfrak{E}_0 = \{0\}$ és ezenfelül a G operátor spektruma nem metszi a $(-\varepsilon, \varepsilon)$ számközt, ez a példa már szerepelt a 2. § 7. pontjában és ennek segítségével jutottunk el a J-metrika fogalmához.

3. A G^h-típusú $\mathfrak{E}$ terek kanonikus felbontásának kérdése szoros kapcsolatban áll a 2. § 5. pontjában említett majoráns-problémával. Valóban, ha

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_0 \dotplus \mathfrak{E}_+ \dotplus \mathfrak{E}_- \tag{3.8}$$

az $\mathfrak{E}$ tér egy kanonikus felbontása, akkor az a $H(x, y)$ hermitikus bilineáris alak, amelyet a

$$H(x, y) = G(x, y), \qquad x, y \in \mathfrak{E}_+;$$
$$H(x, y) = -G(x, y), \qquad x, y \in \mathfrak{E}_-;$$
$$H(\mathfrak{E}_0, \mathfrak{E}_0) = H(\mathfrak{E}_0, \mathfrak{E}_+) = H(\mathfrak{E}_0, \mathfrak{E}_-) = H(\mathfrak{E}_+, \mathfrak{E}_-) = 0$$

összefüggések értelmeznek, a $G(x, y)$ alak nemnegatív majoránsa. Speciálisan ha $\mathfrak{E}_0 = \{0\}$, akkor $H(x, y)$ hermitikusan pozitív majoráns. Ha $\mathfrak{E}_0 \neq \{0\}$, akkor hermitikusan pozitív majoráns nyerése céljából elég a $H(x, y)$ alakhoz tetszés szerinti, az $\mathfrak{E}$ téren hermitikusan pozitív alakot hozzáadni.

Tehát *a* (3. 8) *kanonikus felbontás útján az adott G-metrika hermitikusan pozitív majoránsaihoz jutunk*. Ezek szerint a nem majorálható G-metrikára vonatkozó példa, amelyet a 2. § 4. pontjában ismertettünk, többek között azt mutatja, hogy *vannak G-terek, amelyek nem bonthatók fel kanonikusan*[8]. Ezzel kapcsolatban felmerül a probléma: *van-e mindegyik G^h-térnek, amelynek a G-metrikája majorálható, legalább egy kanonikus felbontása*? Erre a kérdésre a válasz, amint a 2. pontban láttuk, igenlő, ha az adott G-metrikához található olyan hermitikusan pozitív $H(x,y)$ majoráns, amely az $\mathfrak{E}$ térben egy teljes Hilbert-topológiát indukál. Ha azonban $H(x, y)$ (nem teljes) pre-Hilbert-topológiát indukál, akkor a feladat lényegesen bonyolultabbá válik.

4. Legyen $\mathfrak{E}$ nemelfajuló G^h-tér, amelynek van

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_+ \dotplus \mathfrak{E}_-$$

kanonikus felbontása. Az $\mathfrak{E}_+$, $\mathfrak{E}_-$ terek szeparált pre-Hilbert-terek a $G(x, y)$, ill.

[8] *Megjegyzés a korrektúránál.* Mint megtudtuk, „felbonthatatlan" térre ennél egyszerűbb példa szerepel a [65] dolgozatban, amely még 1946-ból származik. Ennek a példának az elemzése azt mutatja, hogy a benne megszerkesztett G-metrika nem majorálható (vö. 2. § 4. és 5. pont).

$-G(x, y)$ skaláris szorzatra nézve. Ha ez a két tér teljes, akkor $\mathfrak{E}$ (teljes) Hilbert-tér az

$$\text{(3. 9)}\quad \begin{cases} (x, y) = G(x_+, y_+) - G(x_-, y_-) & (x, y \in \mathfrak{E}), \\ x = x_+ + x_-, \quad y = y_+ + y_-; \quad x_+, y_+ \in \mathfrak{E}_+; & x_-, y_- \in \mathfrak{E}_- \end{cases}$$

skaláris szorzatra vonatkozóan, és $\mathfrak{E}_+$, $\mathfrak{E}_-$ egymásra merőleges (zárt) alterek. Ezek szerint a vizsgált esetben az $\mathfrak{E}$ tér egyszerűen J-metrikával ellátott Hilbert-tér (lásd 2. §, 7. pont).

Ha viszont az $\mathfrak{E}_+$, $\mathfrak{E}_-$ terek közül legalább az egyik nem teljes, akkor a nem teljes tereket a szokásos módon teljessé téve és a $G(x, y)$ alakot folytonosan kiterjesztve ismét J-metrikával ellátott térre jutunk. Nyilván ugyanezt a teret kapjuk, ha rögtön az egész $\mathfrak{E}$ teret tesszük teljessé a (3. 9) skaláris szorzatra vonatkozóan és a $G(x, y)$ alakot (3. 9)-re nézve folytonosan terjesztjük ki.

Az ismertetett eljárás többek között lehetővé teszi, hogy a $\Pi_\varkappa$ terekre (lásd 2. §, 7. pont) új módon tekintsünk. Ezek a terek axiomatikusan is leírhatók a következőképpen. Legyen megadva egy G^h-típusú $\mathfrak{E}$ tér, amelynek az alábbi tulajdonságai vannak:

I. $\mathfrak{E}$ nemelfajuló.

II. $\mathfrak{E}$ tartalmaz $\varkappa$-dimenziós $(0 < \varkappa < \infty)$ pozitív lineált és nem tartalmaz ennél magasabb dimenziójú pozitív lineált (feltesszük, hogy $2\varkappa \leqq \dim \mathfrak{E} \leqq \infty$).

Ebből a két kikötésből azonnal adódik (lásd pl. a [7] dolgozatot) az $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_+ \dotplus \mathfrak{E}_-$ kanonikus felbontás, ahol $\dim \mathfrak{E}_+ = \varkappa$. Ha $\mathfrak{E}_-$ teljes Hilbert-tér (az $\|x\| = |G(x, x)|^{\frac{1}{2}}$, $x \in \mathfrak{E}_-$ normára nézve), akkor az $\mathfrak{E}$ tér $\Pi_\varkappa$ típusú. Ellenkező esetben úgy jutunk $\Pi_\varkappa$ térhez, hogy az $\mathfrak{E}$ teret előbb teljessé tesszük az imént leírt módon (vö. [7], 1. 4. tétel).

5. Legyen τ tetszés szerinti, az adott G-metrikát felülmúló (2. §, 3. pont) topológia az $\mathfrak{E}$ G-térben. Minthogy mindegyik $f_{y_0}(x) = G(x, y_0)$ (ill. $h_{x_0}(y) = G(x_0, y)$) funkcionál τ-folytonos, *bármelyik* $\mathfrak{M}(\subset \mathfrak{E})$ *halmaz* $\mathfrak{M}'$ *G-ortogonális komplementuma* τ*-zárt* (2. §, 2. pont). Továbbá könnyen látható, hogy

$$\text{(3. 10)}\qquad (\overline{\mathfrak{M}}^{(\tau)})' = \overline{(\mathfrak{M}')}^{(\tau)} = \mathfrak{M}'.$$

Megemlítjük, hogy ez az összefüggés érvényes marad akkor is, ha a baloldalon az $\mathfrak{M}$ halmazt lineáris burkával helyettesítjük. Egyébként az alább következő 3. 1. tételben is az $\mathfrak{L}$ lineál helyett vehetünk tetszés szerinti $\mathfrak{E}$-beli halmazt, de akkor az $\overline{\mathfrak{L}}_{(\tau)}$ szimbólumon az $\mathfrak{L}$ halmaz τ-zárt lineáris burkát kell érteni.

3. 1. TÉTEL. *Ha* τ *tetszés szerinti, a G-metrikával kompatibilis topológia az* $\mathfrak{E}$ *térben,* $\mathfrak{L}$ *pedig tetszés szerinti lineál* $\mathfrak{E}$*-ben, akkor* $\mathfrak{L}''$ *megegyezik az* $\mathfrak{L}$ *lineál* τ*-lezárásával:*

$$\mathfrak{L}'' = \overline{\mathfrak{L}}^{(\tau)}.$$

Bizonyítás. Mindenekelőtt emlékeztetünk arra, hogy a valamely G-metrikával kompatibilis τ topológiák felülmúlják ezt a metrikát (2. §, 8. pont) és így a jelen pont elején mondottak értelmében $\mathfrak{L}'$ és $\mathfrak{L}''$ τ-zárt. Másrészt $\mathfrak{L}'' \supset \mathfrak{L}$, tehát

$$\mathfrak{L}'' \supset \overline{\mathfrak{L}}^{(\tau)}.$$

Az ellenkező irányú inkluzió fennállásának igazolása céljából tekintsünk egy $x_0 \notin \overline{\mathfrak{L}}^{(\tau)}$ pontot. Ekkor van olyan $\mathfrak{U}^{\delta}_{\alpha_1, \dots, \alpha_k}(x_0)$ τ-környezet, amelyet a

$$p_{\alpha_i}(x-x_0) < \delta \qquad (i=1, \dots, k)$$

egyenlőtlenség-rendszer határoz meg (a $p_\alpha(x)$ $(\alpha \in A)$ félnormák értelmezik a τ topológiát az $\mathfrak{E}$ térben (2. §, 2. pont)) és amelyre az $\mathfrak{U}^{\delta}_{\alpha_1, \dots, \alpha_k}(x_0) \cap \mathfrak{L}$ halmaz üres. Másszóval, ha bevezetünk egy $p(x)$ félnormát a

$$p(x) = \sup_{1 \leq i \leq k} p_{\alpha_i}(x)$$

képlet segítségével, akkor

$$\inf_{x' \in \mathfrak{L}} p(x'-x_0) \geq \delta. \tag{3.11}$$

Tekintsük az $\mathfrak{E}$ téren a

$$q(x) = \inf_{x' \in \mathfrak{L}} p(x-x') \tag{3.12}$$

funkcionált és bizonyítsuk be, hogy $q(x)$ félnorma. Valóban:

α) $q(x) \geq 0$.

β) $q(\lambda x) = \inf_{x' \in \mathfrak{L}} p(\lambda x - x') = \inf_{x' \in \mathfrak{L}} p(\lambda x - \lambda x') = |\lambda| \inf_{x' \in \mathfrak{L}} p(x-x') = |\lambda|\, q(x)$.

γ) Ha $x_1, x_2 \in \mathfrak{E}$, akkor bármilyen $\varepsilon > 0$ számhoz találhatók olyan $x_1', x_2' \in \mathfrak{L}$ vektorok, hogy

$$p(x_1 - x_1') < q(x_1) + \varepsilon, \quad p(x_2 - x_2') < q(x_2) + \varepsilon.$$

Legyen $x' = x_1' + x_2' \in \mathfrak{L}$. Akkor

$$q(x_1 + x_2) \leq p(x_1 + x_2 - x') \leq p(x_1 - x_1') + p(x_2 - x_2') < q(x_1) + q(x_2) + 2\varepsilon,$$

és minthogy ε tetszés szerinti,

$$q(x_1 + x_2) \leq q(x_1) + q(x_2).$$

Most tekintsük az $\mathfrak{L}_0 = \{x_0\}$ egydimenziós lineált, és értelmezzünk $\mathfrak{L}_0$-on egy $f(x)$ lineáris funkcionált az

$$f(\alpha x_0) = \alpha\delta$$

egyenlőséggel. Minthogy $q(\alpha x_0) = |\alpha|\, q(x_0)$, továbbá (3. 11) és (3. 12) értelmében $q(x_0) \geq \delta$, az $\mathfrak{L}_0$ lineálon fennáll az

$$|f(x)| \leq q(x) \tag{3.13}$$

egyenlőtlenség. A HAHN—BANACH-tétel szerint $f(x)$-et a (3. 13) összefüggés megtartásával folytatni lehet az egész $\mathfrak{E}$ térre. A (3. 12) definícióból következik, hogy $q(x) \leq p(x)$, és így (2. § 1°.) $f(x)$ τ-folytonos. Minthogy τ kompatibilis G-vel, található olyan $y_0 \in \mathfrak{E}$ vektor, amelyre

$$f(x) = G(x, y_0).$$

(3. 12) folytán $x \in \mathfrak{L}$ esetén $q(x) = 0$, tehát (3. 13) értelmében minden $x \in \mathfrak{L}$ vektorra $G(x, y_0) = f(x) = 0$, vagyis $y_0 \in \mathfrak{L}'$. A $G(x_0, y_0) = f(x_0) = \delta \neq 0$ összefüggések azt mu-

tatják, hogy $x_0 \notin (\mathfrak{L}')' = \mathfrak{L}''$. Ily módon bebizonyítottuk, hogy $x_0 \notin \overline{\mathfrak{L}}^{(\tau)}$ esetén $x_0 \notin \mathfrak{L}''$, vagyis

$$\overline{\mathfrak{L}}^{(\tau)} \supset \mathfrak{L}''.$$

A tételt bebizonyítottuk.

Következményként nyerjük az alábbi állítást:

3°. *Az $\mathfrak{L}'' = \mathfrak{L}$ egyenlőséghez szükséges és elégséges, hogy az $\mathfrak{L}$ lineál τ-zárt legyen, ahol τ egy a G-metrikával kompatibilis topológia.*

Az $\mathfrak{L}'' = \mathfrak{L}$ egyenlőség másfajta elégséges feltételeit később, a 4. §-ban fogjuk tárgyalni.

Azt mondjuk, hogy az $\mathfrak{L}$ *lineál τ-sűrű $\mathfrak{E}$-ben*, ha

$$\overline{\mathfrak{L}}^{(\tau)} = \mathfrak{E}.$$

4°. *Ahhoz, hogy az $\mathfrak{L}$ lineál τ-sűrű legyen $\mathfrak{E}$-ben (τ egy G-vel kompatibilis topológia $\mathfrak{E}$-ben), szükséges és elégséges, hogy teljesüljön az*

$$\mathfrak{L}' = \mathfrak{E}' (= \mathfrak{E}_0) \tag{3.14}$$

egyenlőség, ahol $\mathfrak{E}_0$ az $\mathfrak{E}$ tér izotróp lineálja. Speciálisan ha $\mathfrak{E}$ nemelfajuló, akkor (3. 14) *az*

$$\mathfrak{L}' = \{0\}$$

alakot ölti.

Valóban, ha $\mathfrak{L}' = \mathfrak{E}'$, akkor $\mathfrak{L}'' = \mathfrak{E}'' = \mathfrak{E}$, azaz $\overline{\mathfrak{L}}^{(\tau)} = \mathfrak{E}$. Megfordítva, ha $\mathfrak{L}'' = \overline{\mathfrak{L}}^{(\tau)} = \mathfrak{E}$, akkor $\mathfrak{L}''' = \mathfrak{E}'$, következésképpen (lásd a (3. 3) képletet) $\mathfrak{L}' = \mathfrak{E}'$.

5°. *Az $\mathfrak{L} + \mathfrak{L}'$ összeg akkor és csak akkor τ-sűrű $\mathfrak{E}$-ben (a τ topológiáról ugyanazt tesszük fel, mint a 4°. állításban), ha $\mathfrak{L}''$ mindegyik izotróp vektora az $\mathfrak{E}$ térnek is izotróp vektora (vagyis $\mathfrak{L}'' \cap (\mathfrak{L}'')' = \mathfrak{E}_0$). Speciálisan ha $\mathfrak{E}$ nemelfajuló, akkor a feltétel arra redukálódik, hogy $\mathfrak{L}''$ nemelfajuló.*

A bizonyítás a 4°. állításból és a (3. 4), (3. 3) szabályokból adódik.

Az $\mathfrak{L} + \mathfrak{L}' = \mathfrak{E}$ *egyenlőség* kritériumaival a 4. § jelentős részében foglalkozunk majd (definit $\mathfrak{L}$ lineálok esetében pedig az 5. §-ban is).

6. Ebben a pontban a G^h-terek semleges lineáljainak (lásd 2. pont) a tulajdonságaival foglalkozunk. Bizonyítást csak azokban az esetekben közlünk, amikor az eredmények újak. A többi tény bizonyítását az olvasó megtalálhatja E. SCHEIBE [50] dolgozatában, ahonnan mi is merítettük őket.

6°. *Az $\mathfrak{L}(\subset \mathfrak{E})$ lineál akkor és csak akkor lesz $\mathfrak{L}'$ izotróp lineálja, ha $\mathfrak{L}$ semleges lineál és $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}''$.*

Hogy megkönnyítsük ennek és a következő állításoknak az igazolását, emlékeztetünk arra, hogy mindegyik $\mathfrak{L}$ semleges lineálra jellemző az $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{L}'$ összefüggés.

3. 2. TÉTEL. *Az $\mathfrak{L}(\subset \mathfrak{E})$ semleges lineál akkor és csak akkor maximális semleges lineál, ha $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}''$, és $\mathfrak{L}'$ szemidefinit (azaz nemnegatív vagy nempozitív) lineál.*

KÖVETKEZMÉNY. *Bármelyik $\mathfrak{L}(\subset \mathfrak{E})$ maximális semleges lineál vagy maximális nemnegatív lineál, vagy maximális nempozitív lineál, vagy pedig egyszerre mindkét tulajdonsággal rendelkezik.*

Valóban, ha feltesszük az ellenkezőt, akkor azonnal adódik, hogy $\mathfrak{L}'$ tartalmaz pozitív és negatív vektorokat is, ami ellentmond a 3. 2. tételnek.

Az olyan $\mathfrak{L}(\subset \mathfrak{E})$ semleges lineálokat, amelyek egyidejűleg maximális nemnegatív és maximális nempozitív lineálok, *hipermaximálisaknak* fogjuk nevezni.

3. 3. TÉTEL. *Az $\mathfrak{L}(\subset \mathfrak{E})$ lineál akkor és csak akkor hipermaximális semleges lineál, ha $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}'$.*

Bizonyítás. Mint minden semleges lineálra, az $\mathfrak{L}$ hipermaximális lineálra is teljesül az $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{L}'$ összefüggés, továbbá $\mathfrak{L}$ maximalitása miatt $\mathfrak{L}'$ szemidefinit (3. 2. tétel). Minthogy pedig $\mathfrak{L}$ hipermaximális, nyilván $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}'$.

Megfordítva, legyen $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}'$. Ekkor $\mathfrak{L}$ semleges lineál, és a 3. 2. tétel értelmében maximális semleges lineál. De $\mathfrak{L}$ hipermaximális is, mert különben $\mathfrak{L}'$ tartalmazna pozitív vagy negatív vektort. A tételt bebizonyítottuk.

A további állítások során két $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{L}_1 \subset \mathfrak{E}$ semleges lineálból álló párokat fogunk vizsgálni. Minden ilyen párra érvényesek az alábbi azonosságok:

$$(\mathfrak{L}+\mathfrak{L}_1) \cap (\mathfrak{L}+\mathfrak{L}_1)' = \mathfrak{L}_1 \cap \mathfrak{L}' + \mathfrak{L} \cap \mathfrak{L}_1', \tag{3. 15}$$

$$\mathfrak{L}+\mathfrak{L}_1+(\mathfrak{L}+\mathfrak{L}_1)' = (\mathfrak{L}_1+\mathfrak{L}') \cap (\mathfrak{L}+\mathfrak{L}_1'). \tag{3. 16}$$

Azt mondjuk, hogy az $\mathfrak{L}$ és az $\mathfrak{L}_1$ semleges lineál egymással *ferdén kapcsolt,* ha

$$\mathfrak{L}_1 \cap \mathfrak{L}' = \mathfrak{L} \cap \mathfrak{L}_1' = \{0\}.$$

A (3. 15) azonosságból rögtön adódik a következő állítás:

7°. *Az $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{L}_1(\subset \mathfrak{E})$ semleges lineálok akkor és csak akkor ferdén kapcsoltak, ha az $\mathfrak{L}+\mathfrak{L}_1$ lineál nemelfajuló.*

A (3.16) azonosságból viszont a következőt nyerjük:

8°. *Az $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{L}_1(\subset \mathfrak{E})$ semleges lineálokra az*

$$\alpha) \quad \mathfrak{L}+\mathfrak{L}_1+(\mathfrak{L}+\mathfrak{L}_1)' = \mathfrak{E}$$

és a

$$\beta) \quad \mathfrak{L}_1+\mathfrak{L}' = \mathfrak{L}+\mathfrak{L}_1' = \mathfrak{E}$$

állítás egymással ekvivalens.

Megemlítjük, hogy az $\alpha)$ (vagy $\beta)$) állításból nemelfajuló $\mathfrak{E}$ tér esetében az alábbi következményeket kapjuk:

$\gamma)$ *$\mathfrak{L}'$ és $\mathfrak{L}_1'$ egymással ferdén kapcsolt, vagyis* $\mathfrak{L}' \cap \mathfrak{L}_1'' = \mathfrak{L}'' \cap \mathfrak{L}_1' = \{0\}$;
$\delta)$ $\mathfrak{L}+\mathfrak{L}_1$ *nemelfajuló és* $(\mathfrak{L}+\mathfrak{L}_1)'' = \mathfrak{L}+\mathfrak{L}_1$;
$\varepsilon)$ $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}''$, $\mathfrak{L}_1 = \mathfrak{L}_1''$, *továbbá $\mathfrak{L}$ és $\mathfrak{L}_1$ ferdén kapcsolt;*
$\zeta)$ $(\mathfrak{L}+\mathfrak{L}_1)'$ *nemelfajuló és*

$$\mathfrak{L}' = \mathfrak{L}+(\mathfrak{L}+\mathfrak{L}_1)'; \quad \mathfrak{L}_1' = \mathfrak{L}_1+(\mathfrak{L}+\mathfrak{L}_1)'.$$

Az E. SCHEIBE [50] dolgozatának 8. §-ában található 6. tétel azonban, amely szerint nemelfajuló $\mathfrak{E}$ térben az $\alpha)-\zeta)$ állítások mindannyian ekvivalensek, nyilvánvalóan téves.

Valóban, a $\zeta) \to \varepsilon) \to \gamma)$ és $\delta) \to \varepsilon)$ inkluziók ugyan viszonylag könnyen igazolhatók, a $\gamma) \to \beta)$, $\gamma) \to \varepsilon)$ állítások azonban nem helytállók, amiről könnyű meggyőződni akár olyan $\mathfrak{E}$ térre vonatkozó egyszerű példák segítségével is, amelyek (Hilbert-féle) J-terek. Elegendő például, ha veszünk olyan $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{L}_1 \subset \mathfrak{E}$ (zárt) semleges altereket, amelyek teljesítik a $\beta)$ (vagy az $\varepsilon)$) feltételt, azután tetszés szerinti, $\mathfrak{L}$-ben, ill. $\mathfrak{L}_1$-ben sűrű, nem zárt lineálokkal helyettesítjük őket. Ekkor a β) és ε) összefüggés többé nem teljesül, γ) viszont érvényben marad (E. SCHEIBE bizonyításában éppen ott a hiba, hogy nyilvánvalónak tekinti a $\gamma) \to \beta$) inkluziót). Megjegyezzük, hogy a 4°. állítás értelmében a γ) összefüggésből csak az következik, hogy az $\mathfrak{L}_1 + \mathfrak{L}'$, $\mathfrak{L} + \mathfrak{L}_1'$ összegek τ-sűrűek $\mathfrak{E}$-ben (τ tetszés szerinti, G-vel kompatibilis topológia). A $\delta) \to \alpha$) következtetés is helytelen, ennek megcáfolása azonban bizonyos segédeszközöket igényel, amelyeket a 6. § 3. pontjában fogunk ismertetni.

Az [50] dolgozat 8. §-ában szereplő 6. tétel hibás volta néhány téves állításra vezetett az említett munka ezután következő 7. és 8. tételében. Az utóbbi tételek azonban tartalmaznak helytálló kijelentéseket is, amelyeket most röviden ismertetünk.

Tekintünk egy nemelfajuló, G^h típusú $\mathfrak{E}$ teret, amelynek van kanonikus $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_+ \dot{+} \mathfrak{E}_-$ felbontása. Jelölje $Q_\pm$ azokat az operátorokat („G-vetítéseket"), amelyek minden $x \in \mathfrak{E}$ vektorhoz a megfelelő $x_\pm \in \mathfrak{E}_\pm$ összetevőket rendelik hozzá. A $T = Q_+ - Q_-$ operátor nyilván involúció tulajdonságú: $T^2 = I$, az azonosság operátora. Azonkívül T invariánsan hagyja a G alakot („G-izometria"):

$$G(Tx, Ty) = G(x, y) \qquad (x, y \in \mathfrak{E}).$$

3. 4. TÉTEL. *Az imént megszerkesztett involúciónak a következő tulajdonságai vannak:*

1) *Bármely $\mathfrak{L}(\subset \mathfrak{E})$ lineál esetén $\mathfrak{L}$ és $T\mathfrak{L}$ algebrai dimenziója (a Hamel-bázisok számossága* [58]*) megegyezik. Ha az $\mathfrak{L}$ lineál semleges (vagy maximális semleges, vagy $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}''$), akkor $T\mathfrak{L}$ is ugyanilyen tulajdonságú.*

2) *Ha $\mathfrak{L}$ semleges lineál, akkor a $Q_\pm$ vetítések segítségével történő $\mathfrak{L} \to \mathfrak{E}_\pm$ leképezések kölcsönösen egyértelműek. Az $\mathfrak{L} + T\mathfrak{L}$ lineálnak van kanonikus felbontása, mégpedig*

$$\mathfrak{L} + T\mathfrak{L} = Q_+\mathfrak{L} \dot{+} Q_-\mathfrak{L},$$

ahol $Q_+\mathfrak{L}$ és $Q_-\mathfrak{L}$ egymással G-izometrikus (vagyis izomorf, beleértve a G-metrika változatlanul hagyását is), ha a $Q_-\mathfrak{L}$ lineálon megfordítjuk a G-metrika előjelét.

3) *Ha $\mathfrak{L}$ semleges lineál, akkor $(\mathfrak{L} + T\mathfrak{L})''$ nemelfajuló, más szóval az $(\mathfrak{L} + T\mathfrak{L}) + (\mathfrak{L} + T\mathfrak{L})'$ lineál τ-sűrű $\mathfrak{E}$-ben* (vö. az 5°. állítással).

Ily módon a T involúció módot nyújt arra, hogy az $\mathfrak{L}$ semleges lineálhoz megszerkesszünk egy vele ferdén kapcsolt $T\mathfrak{L}$ semleges lineált. Speciálisan ez a módszer mindig alkalmazható a nemelfajuló, $(\mathfrak{H}, G^h)$ típusú $\mathfrak{E}$ terekben, mivel az utóbbiaknak van kanonikus felbontásuk. Speciálisan J-terekben egyszerűen $T = J$ (lásd 6. §, vö. még a [7] munka 2. 3. lemmájával).

7. Áttérve a $(\mathfrak{H}, G)$ típusú $\mathfrak{E}$ terek lineáljainak a vizsgálatára, mindenekelőtt foglalkozzunk az alterekkel, vagyis a ($\mathfrak{H}$-metrikában) zárt $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{E}$ lineálokkal. Legyen $P_\mathfrak{M}$ az $\mathfrak{E}$ tér $\mathfrak{M}$-re való merőleges vetítése. Tekintsük az $\mathfrak{M}$ alteret önmagába leképező $G_\mathfrak{M} = P_\mathfrak{M} G$ korlátos operátort, ahol G az adott G-metrika Gram-operátora $\mathfrak{E}$-ben (2. §, 6. pont). Könnyen belátható, hogy a G-metrika az $\mathfrak{M}$ altéren egy $G_\mathfrak{M}$-metrikát indukál, úgyhogy az $\mathfrak{M}$ altér $(\mathfrak{H}, G_\mathfrak{M})$-tér. Másrészt $\mathfrak{M}$ tekinthető lokálisan konvex topologikus térnek arra a $\tau_1(\mathfrak{M}, G_\mathfrak{M})$ (2. §, 8. pont) topológiára nézve, amelyet a

$$p_\mathfrak{M}(x) = \|G_\mathfrak{M} x\|$$

félnorma értelmez.

Az $\mathfrak{M}(\subset\mathfrak{E})$ alteret *szabályosnak*[9] nevezzük, ha $p_{\mathfrak{M}}(x)$ norma, továbbá az $\mathfrak{M}$ altéren a $p_{\mathfrak{M}}(x)$, $\|x\|$ normák ekvivalensek. Ebből a definícióból nyilvánvalóan adódik a következő állítás.

9°. *Ahhoz, hogy az $\mathfrak{M}(\subset\mathfrak{E})$ altér szabályos legyen, szükséges és elégséges, hogy az $\mathfrak{M}$-hez tartozó $G_{\mathfrak{M}}$ Gram-operátornak legyen folytonos inverze.*

Amint BANACH klasszikus tételéből következik, ezt a kritériumot másképpen is meg lehet fogalmazni: *az $\mathfrak{M}$ altér akkor és csak akkor szabályos, ha $p_{\mathfrak{M}}(x)$ norma az $\mathfrak{M}$ altéren és $\mathfrak{M}$ teljes ebben a normában.*

Az altereknek egy másik fontos osztályát értelmezi a következő definíció: az $\mathfrak{M}(\subset\mathfrak{E})$ alteret *relatíve szabályosnak* nevezzük, ha a $p_{\mathfrak{M}}(x)=\|G_{\mathfrak{M}}x\|$, $p_{\mathfrak{E}}(x)=\|Gx\|$ félnormák egymással ekvivalens $\tau_1(\mathfrak{M}, G_{\mathfrak{M}})$, $\tau_1(\mathfrak{E}, G)$ topológiákat értelmeznek $\mathfrak{M}$-en.

10°. *Minden $\mathfrak{M}(\subset\mathfrak{E})$ szabályos altér relatíve szabályos. Az ellenkező irányú állítás akkor és csak akkor érvényes, ha az egész $\mathfrak{E}$ tér szabályos.*

Az első állítás a

$$\|G_{\mathfrak{M}}x\|=\|P_{\mathfrak{M}}Gx\|\leqq\|Gx\|\leqq\|G\|\,\|x\|$$

becslésekből adódik, amelyekhez szabályos $\mathfrak{M}$ esetén az $\alpha\|x\|\leqq\|G_{\mathfrak{M}}x\|$ $(\alpha>0)$ egyenlőtlenség járul. Megfordítva, ha minden relatíve szabályos $\mathfrak{M}$-re fennáll $\alpha\|x\|\leqq\|G_{\mathfrak{M}}x\|$ $(\alpha>0,\ x\in\mathfrak{M})$, akkor az $\mathfrak{M}=\mathfrak{E}$ választással azt kapjuk, hogy

$$\alpha\|x\|\leqq\|Gx\|\leqq\|G\|\,\|x\|,$$

vagyis $\mathfrak{E}$ szabályos. Végül ha tudjuk, hogy $\mathfrak{M}$ relatíve szabályos, $\mathfrak{E}$ pedig szabályos, akkor világos, hogy $\mathfrak{M}$ is szabályos.

A szabályosság és a relatív szabályosság fogalmát másképp is ki lehet fejezni. Az $\{x_n\}\subset\mathfrak{M}$ sorozatot *$\mathfrak{M}$-ben aszimptotikusan izotrópnak* nevezzük, ha $(Gx_n, y)\to 0$ $(n\to\infty)$ egyenletesen minden $y\in\mathfrak{M}$, $\|y\|=1$ vektorra. Abból, hogy $\|G_{\mathfrak{M}}x\|=\sup\limits_{\|y\|=1,\,y\in\mathfrak{M}}|(G_{\mathfrak{M}}x, y)|$, következik:

11°. *Az $\{x_n\}\subset\mathfrak{M}$ sorozat akkor és csak akkor aszimptotikusan izotróp $\mathfrak{M}$-ben, ha* $\lim\limits_{n\to\infty}\|G_{\mathfrak{M}}x_n\|=0$.

Ebből közvetlenül nyerjük az alábbiakat:

12°. *Ahhoz, hogy az $\mathfrak{M}(\subset\mathfrak{E})$ altér relatíve szabályos legyen, szükséges és elégséges, hogy minden sorozat, amely $\mathfrak{M}$-ben aszimptotikusan izotróp, $\mathfrak{E}$-ben is aszimptotikusan izotróp legyen.*

13°. *Ahhoz, hogy az $\mathfrak{M}(\subset\mathfrak{E})$ altér szabályos legyen, szükséges és elégséges, hogy minden olyan $\{x_n\}$ sorozat, amely aszimptotikusan izotróp $\mathfrak{M}$-ben, nullához tartson.*

Megjegyezzük, hogy az $\mathfrak{M}$-ben aszimptotikusan izotróp $\{x_n\}\subset\mathfrak{M}$ sorozatok definíciójában sehol sem használtuk fel azt a tényt, hogy $\mathfrak{M}$ altér. Kiterjesztve a definíciót tetszés szerinti $\mathfrak{L}(\subset\mathfrak{E})$ lineálokra és a 12°., 13°. állításokban az $\mathfrak{M}$ alteret az $\mathfrak{L}(\subset\mathfrak{E})$ lineállal helyettesítve ezeket az állításokat felhasználhatjuk *az $\mathfrak{E}$ tér relatíve szabályos és szabályos lineáljainak* értelmezésére.

3. 5. TÉTEL. *Az $\mathfrak{L}(\subset\mathfrak{E})$ lineál és (Hilbert-féle) lezárása, $\overline{\mathfrak{L}}$, csak egyidejűleg lehet szabályos (ill. relatíve szabályos).*

[9] Nem-hermitikus G-metrika esetén különbséget kell tenni a $\|G^*_{\mathfrak{M}}x\|$, $\|G_{\mathfrak{M}}x\|$ félnormák között (vö. [32]) és ennek megfelelően külön vizsgálni a „jobbról szabályos" és a „balról szabályos" altereket. Egyszerűség kedvéért mi ismét a $G^*=G$ esetre szorítkozunk.

Bizonyítás. Először megmutatjuk, hogy minden sorozat, amely aszimptotikusan izotróp $\mathfrak{L}$-ben, aszimptotikusan izotróp $\bar{\mathfrak{L}}$-ban is. Valóban, legyen $\{x_n\}(\subset \mathfrak{L})$ aszimptotikusan izotróp sorozat $\mathfrak{L}$-ben. Tetszés szerinti $\tilde{y} \in \bar{\mathfrak{L}}$ $(\|\tilde{y}\|=1)$ vektorhoz található $\{y_m\} \subset \mathfrak{L}$, $\|y_m\|=1$ $(m=1, 2, \ldots)$ approximáló sorozat $(\lim\limits_{m\to\infty} \|y_m-\tilde{y}\|=0)$. Minthogy $\{x_n\}$ aszimptotikusan izotróp $\mathfrak{L}$-ben, bármilyen $\varepsilon>0$ számra és minden $m=1, 2, \ldots$ értékre

$$|(Gx_n, y_m)| < \varepsilon \qquad (n > N_\varepsilon).$$

Ebben az egyenlőtlenségben (minden rögzített $n > N_\varepsilon$ érték mellett) elvégezve az $m\to\infty$ határátmenetet, azt kapjuk, hogy

$$|(Gx_n, \tilde{y})| \leqq \varepsilon \qquad (n > N_\varepsilon),$$

vagyis $\lim\limits_{n\to\infty} (Gx_n, \tilde{y})=0$ az $\tilde{y}$ $(\|\tilde{y}\|=1)$ változóra nézve egyenletesen.

Most legyen $\bar{\mathfrak{L}}$ szabályos altér, $\{x_n\}$ pedig egy aszimptotikusan izotróp sorozat $\mathfrak{L}$-ben. Akkor az imént bizonyítottakból és a 13°. állításból nyerjük, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\|=0$ és így az $\mathfrak{L}$ lineál szabályos. Ha viszont $\bar{\mathfrak{L}}$ relatíve szabályos, akkor ugyanilyen megfontolás és a 12°. állítás segítségével azt kapjuk, hogy $\mathfrak{L}$ is relatíve szabályos.

Megfordítva, legyen az $\mathfrak{L}$ lineál szabályos (relatíve szabályos), és legyen $\{x_n\}$ az $\bar{\mathfrak{L}}$ altérben aszimptotikusan izotróp sorozat. Vegyünk fel $\mathfrak{L}$-ben egy $\{\tilde{x}_n\}$ sorozatot, amelyre $\|x_n-\tilde{x}_n\| < \frac{1}{n}$ $(n=1, 2, \ldots)$. Tetszés szerinti $y \in \mathfrak{L}(\|y\|=1)$ vektorra fennáll:

$$|(G_{\bar{\mathfrak{L}}}\tilde{x}_n, y)| \leqq |(G_{\bar{\mathfrak{L}}}x_n, y)| + |(G_{\bar{\mathfrak{L}}}(\tilde{x}_n - x_n), y)|.$$

A jobb oldalon álló összeg mindkét tagja $n\to\infty$ esetén y-ra nézve egyenletesen nullához tart: az első azért, mert $\{x_n\}$ aszimptotikusan izotróp $\bar{\mathfrak{L}}$-ban, a második pedig a

$$|(G_{\bar{\mathfrak{L}}}(\tilde{x}_n - x_n), y)| \leqq \|G_{\bar{\mathfrak{L}}}\| \, \|\tilde{x}_n - x_n\| < \frac{1}{n} \|G_{\mathfrak{L}}\| \qquad (n=1, 2, \ldots)$$

egyenlőtlenség miatt. Ily módon az $\{\tilde{x}_n\}$ sorozat aszimptotikusan izotróp $\mathfrak{L}$-ben. Szabályos $\mathfrak{L}$ esetén ebből következik, hogy $\|x_n\| \to 0$ ha $n\to\infty$, tehát $\|x_n\| \to 0$, vagyis $\bar{\mathfrak{L}}$ szabályos. Ha $\mathfrak{L}$ relatíve szabályos, akkor $\{\tilde{x}_n\}$ aszimptotikusan izotróp $\mathfrak{C}$-ben. A 11°. állítás szerint ez azt jelenti, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \|Gx_n\|=0$. De akkor $\lim\limits_{n\to\infty} \|Gx_n\|=0$ is fennáll, úgyhogy $\bar{\mathfrak{L}}$ is relatíve szabályos. A tételt teljesen bebizonyítottuk.

Hogy a szabályos és a relatíve szabályos lineálok és alterek milyen szerepet játszanak a $(\mathfrak{H}, G)$-terekben, azt később fogjuk megmagyarázni (lásd 4. §, 2. pont, 5. §, 5. pont, 6. §, 1., 3. és 4. pont).

4. §. A G-vetítés elmélete

1. Ismert dolog, hogy milyen fontos szerepet játszik a vektorok alterekre való merőleges vetítésének a művelete a Hilbert-terek elméletében. Ebben a paragrafusban részletesen tanulmányozni fogjuk az analóg műveletet G-terekben.

Legyen $\mathfrak{E}$ G-tér, $\mathfrak{L}$ pedig lineál $\mathfrak{E}$-ben. Azt mondjuk, hogy az $y_1(\in \mathfrak{L})$ vektor *az* $y_0 \in \mathfrak{E}$ *vektornak az* $\mathfrak{L}$ *lineálra való jobb oldali (bal oldali) G-vetülete,* ha az $y_0 - y_1$ vektor jobbról (balról) G-ortogonális $\mathfrak{L}$-re, azaz ha $G(x, y_0 - y_1) = 0$ $(G(y_0 - y_1, x) = 0)$ minden $x \in \mathfrak{L}$ esetén.

A következő tétel általános szkémát ad, amelynek segítségével a G-vetületek[10] létezésére vonatkozó további tételek nyerhetők.

4. 1. TÉTEL. *Legyen* $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{E}$, *és* τ *egy G-vel balról kompatibilis topológia* $\mathfrak{L}$*-en. Akkor ahhoz, hogy létezzék az* y_0 *vektornak* $\mathfrak{L}$*-re való jobb oldali G-vetülete, szükséges és elégséges, hogy az*

$$f_{y_0}(x) = G(x, y_0)$$

funkcionál τ*-folytonos legyen.*

Bizonyítás. Ha y_1 az y_0 vektor jobb oldali G-vetülete $\mathfrak{L}$-re, akkor $G(x, y_0 - y_1) = 0$ minden $x \in \mathfrak{L}$ elemre, és így

$$f_{y_0}(x) = G(x, y_1) \qquad (x \in \mathfrak{L}).$$

Minthogy τ balról kompatibilis G-vel az $\mathfrak{L}$ lineálon, az $f_{y_0}(x)$ funkcionál τ-folytonos.

Most tegyük fel, hogy valamely $y_0 \in \mathfrak{E}$ vektorra az $f_{y_0}(x) = G(x, y_0)$ funkcionál τ-folytonos. Akkor tekintettel arra, hogy a τ topológia balról kompatibilis G-vel az $\mathfrak{L}$ lineálon, található olyan $y_1 \in \mathfrak{L}$, hogy minden $x \in \mathfrak{L}$ esetén $f_{y_0}(x) = G(x, y_1)$, $G(x, y_0) = G(x, y_1)$, $G(x, y_0 - y_1) = 0$, vagyis y_1 az y_0 vektor G-vetülete $\mathfrak{L}$-re.

Speciálisan ha a 2. §-ban bevezetett jelölésmód szerint $\tau_0^b = \tau_0^b(\mathfrak{L}, G)$ az $\mathfrak{L}$ lineálon a G-metrikával balról kompatibilis leggyengébb topológia (lásd a 2. 3. tételt), akkor a 4. 1. tételből következik:

1°. *Ahhoz, hogy egy* $y_0 \in \mathfrak{E}$ *vektornak létezzék az* $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{E}$ *lineálra való jobb oldali G-vetülete, szükséges és elégséges, hogy az* $f_{y_0}(x)$ *funkcionál* τ_0^b*-folytonos legyen* $\mathfrak{L}$*-en.*

Ha az $\mathfrak{L}$ lineál $(\mathfrak{B}^r, G)$-tér, vagyis ha $\mathfrak{L}$-en megadható olyan reflexív Banach-topológia, amely az $\mathfrak{L}$ lineálon felülmúlja a G-metrikát, akkor a 2. 5. tétel felhasználásával kapjuk:

2°. *Az* $y_0 \in \mathfrak{E}$ *vektornak az* $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{E}$ *lineálra való jobboldali G-vetülete létezéséhez szükséges és elégséges, hogy az* $f_{y_0}(x)$ *funkcionál* $\mathfrak{L}$*-en folytonos legyen a* $\tau_1^b(\mathfrak{L}, G)$ *topológiára nézve* (lásd 2. §, 8. pont).

Ha az $\mathfrak{L}$ lineál $(\mathfrak{B}^r, G)$-tér, akkor természetesen a 2°. és az 1°. állítás egyaránt alkalmazható. A 2. 5. tétel értelmében a 2°. állítás használata olyankor kényelmes, amikor a G-vetület létezését, az 1°. állításé pedig a 2. 3. tétel alapján olyankor, amikor a G-vetület nem-létezését kell bebizonyítani.

Abban az esetben, amikor az $\mathfrak{E}$ tér és az $\mathfrak{L}(\subset \mathfrak{E})$ lineál $(\mathfrak{H}, G)$-tér, az $y_0 \in \mathfrak{E}$ vektor $\mathfrak{L}$ altérre való G-vetíthetőségének kritériuma más alakban is megfogalmazható. Ebből a célból jelölje $P_{\mathfrak{L}}$ az $\mathfrak{E}$ térnek $\mathfrak{L}$-re való Hilbert-féle merőleges vetítését,

[10] Ezután minden tételt jobb oldali G-vetületekre fogalmazunk meg. Baloldali G-vetületekre teljesen analóg állítások érvényesek.

$G_{\mathfrak{L}}$ pedig az $\mathfrak{L}$ altéren tekintett $G(x, y)=(Gx, y)$ alak bal oldali Gram-operátorát (3. §, 7. pont):

$$G(x, y) = (G_{\mathfrak{L}}x, y) \qquad (x, y \in \mathfrak{L}).$$

A 2°. állítás alapján ahhoz, hogy az $y_0 \in \mathfrak{E}$ vektornak legyen jobb oldali G-vetülete $\mathfrak{L}$-en, szükséges és elégséges, hogy az $f_{y_0}(x) = G(x, y_0)$ funkcionál $\tau_1^b(\mathfrak{L}, G)$-folytonos legyen az $\mathfrak{L}$ altéren, vagyis folytonos legyen $\mathfrak{L}$-en a következő félnormára nézve:

$$p^b(x) = \sup_{\|y\|=1,\, y\in\mathfrak{L}} |G(x, y)| = \sup_{\|y\|=1,\, y\in\mathfrak{L}} |(G_{\mathfrak{L}}x, y)| = \|G_{\mathfrak{L}}x\| =$$

$$= \sqrt{(G_{\mathfrak{L}}^* G_{\mathfrak{L}}x, x)} = \|H_{\mathfrak{L}}x\| = \sup_{\|y\|=1,\, y\in\mathfrak{L}} |H_{\mathfrak{L}}(x, y)|$$

$$\bigl(H_{\mathfrak{L}}(x, y) = (H_{\mathfrak{L}}x, y); \quad x, y \in \mathfrak{L}\bigr),$$

ahol $H_{\mathfrak{L}}$ tetszés szerinti önadjungált operátor $\mathfrak{L}$-en, amelyre $H_{\mathfrak{L}}^2 = G_{\mathfrak{L}}^* G_{\mathfrak{L}}$; speciálisan lehet $H_{\mathfrak{L}} = \sqrt{G_{\mathfrak{L}}^* G_{\mathfrak{L}}}$. De a 2. 5. tétel folytán az $\mathfrak{L}$ altéren a $\|H_{\mathfrak{L}}x\|$ félnorma által indukált $\tau_1(\mathfrak{L}, H_{\mathfrak{L}})$ topológia ezen az altéren kompatibilis a $H_{\mathfrak{L}}$-metrikával. Ebből adódik, hogy az y_0 vektornak az $\mathfrak{L}$ altérre való jobb oldali G-vetülete akkor és csak akkor létezik, ha az $\mathfrak{L}$-en tekintett $f_{y_0}(x)$ funkcionál előállítható $f_{y_0}(x) = (H_{\mathfrak{L}}x, y_1)$ $(y_1 \in \mathfrak{L})$ alakban, vagyis ha minden $x \in \mathfrak{L}$ vektorra fennáll

$$(Gx, y_0) = (H_{\mathfrak{L}}x, y_1), \quad (x, P_{\mathfrak{L}}G^* y_0) = (x, H_{\mathfrak{L}}y_1).$$

Az utóbbi akkor és csak akkor lehetséges, ha $P_{\mathfrak{L}}G^* y_0 \in \mathfrak{R}(H_{\mathfrak{L}})$. Ezek szerint igaz az alábbi állítás:

3°. *Ahhoz, hogy az $\mathfrak{E}$ $(\mathfrak{H}, G)$-térben az y_0 vektornak létezzék az $\mathfrak{L}$ altérre való jobb oldali G-vetülete, szükséges és elégséges, hogy*

$$\int_m^M \frac{1}{\lambda^2}\, d\|E_\lambda^{(\mathfrak{L})} G^* y_0\|^2 < \infty \tag{4.1}$$

legyen, ahol $E_\lambda^{(\mathfrak{L})}$ $(E_m^{(\mathfrak{L})} = 0,\ E_M^{(\mathfrak{L})} = P_{\mathfrak{L}})$ a $H_{\mathfrak{L}}^2 = G_{\mathfrak{L}}^* G_{\mathfrak{L}}$ feltételnek eleget tevő $H_{\mathfrak{L}}$ önadjungált operátor „egységfelbontása".

Nyilvánvaló, hogy ha $\mathfrak{L}$ egy hermitikus G-metrikával ellátott tér, akkor lehet $H_{\mathfrak{L}} = G_{\mathfrak{L}}$, úgyhogy ebben az esetben $E_\lambda^{(\mathfrak{L})}$ a $G_{\mathfrak{L}}$ operátor „egységfelbontása". Viszont $\mathfrak{L}$-en nem hermitikus G-metrika esetén a (4. 1) feltételnél alkalmasabb a következő:

$$\int_m^{M^2} \frac{1}{\lambda}\, d\|\tilde{E}_\lambda^{(\mathfrak{L})} G^* y_0\|^2 < \infty,$$

ahol $\tilde{E}_\lambda^{(\mathfrak{L})}$ $(0 \leq \lambda \leq M^2)$ a $G_{\mathfrak{L}}^* G_{\mathfrak{L}}$ operátor „egységfelbontása". A G-vetület létezésére vonatkozó egyéb kritériumok találhatók a jelen paragrafus 4. pontjában, valamint az 5. §-ban.

Megemlítjük, hogy a G-vetület egyértelműségének kérdése általános G-metrika esetén sem okoz semmi nehézséget és pontosan úgy oldható meg, mint a véges dimenziójú esetben (vö. [12]). Nevezetesen, könnyű igazolni, hogy *ahhoz, hogy egy* $y \in \mathfrak{E}$ *vektornak az* $\mathfrak{L}$ *lineálra legfeljebb egy jobb oldali G-vetülete létezzék, szükséges és elégséges, hogy* $\mathfrak{L}$ *jobbról nemelfajuló legyen.* Ha viszont ez a feltétel nem teljesül és y_1 az y vektor valamelyik jobb oldali G-vetülete $\mathfrak{L}$-re, akkor y-nak $\mathfrak{L}$-re való bármely másik $\tilde{y}_1$ jobb oldali G-vetülete az

$$\tilde{y}_1 = y_1 + x_0$$

képlet segítségével található meg, ahol x_0 az $\mathfrak{L}$ lineál tetszés szerinti jobb oldali izotróp vektora.

2. Azt mondjuk, hogy az $\mathfrak{E}$ G-tér $\mathfrak{L}$ lineálja *(jobb oldali) vetítésre nézve teljes,* ha minden $y(\in \mathfrak{E})$ vektornak létezik $\mathfrak{L}$-re való jobb oldali G-vetülete.

4. 2. TÉTEL. *Ahhoz, hogy az* $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{E}$ *lineál vetítésre nézve teljes legyen, szükséges és elégséges, hogy a* $\tau_0^b(\mathfrak{E}, G)$, $\tau_0^b(\mathfrak{L}, G)$ *topológiák ekvivalensek legyenek* $\mathfrak{L}$*-en.*

Bizonyítás. Legelőször megjegyezzük, hogy az $\mathfrak{L}$ lineálon

$$\tau_0^b(\mathfrak{E}, G) \geqq \tau_0^b(\mathfrak{L}, G). \tag{4.2}$$

Valóban, minden

$$\mathfrak{U}(0) = \{x \in \mathfrak{L}, |G(x, y_1)| < \varepsilon, \ldots, |G(x, y_n)| < \varepsilon; \; y_1, \ldots, y_n \in \mathfrak{L}\}$$

alakú $\tau_0^b(\mathfrak{L}, G)$-környezet egyúttal a 0 pont $\tau_0^b(\mathfrak{E}, G)$-környezete $\mathfrak{L}$-ben.

Most tegyük fel, hogy $\mathfrak{L}$ vetítésre nézve teljes. Ekkor minden $\mathfrak{L}$-ben fekvő $\tau_0^b(\mathfrak{E}, G)$-környezet, amely a $|G(x, y_i)| < \varepsilon$ $(i = 1, 2, \ldots, n;\; y_i \in \mathfrak{E})$ egyenlőtlenségeknek eleget tevő $x \in \mathfrak{L}$ vektorokból és csak azokból áll, $\tau_0^b(\mathfrak{L}, G)$-környezet is, amelyet a $|G(x, y_i')| < \varepsilon$ egyenlőtlenség-rendszer jellemez, ahol y_i' az y_i $(i = 1, \ldots, n)$ vektor $\mathfrak{L}$-re való jobb oldali G-vetülete. Ezek szerint $\tau_0^b(\mathfrak{L}, G) \geqq \tau_0^b(\mathfrak{E}, G)$, és a (4. 2) összefüggésből következik, hogy az $\mathfrak{L}$ lineálon $\tau_0^b(\mathfrak{L}, G) = \tau_0^b(\mathfrak{E}, G)$. A tételben szereplő feltétel szükségességét bebizonyítottuk.

Megfordítva, legyen az $\mathfrak{L}$ lineálon a $\tau_0^b(\mathfrak{L}, G)$ és a $\tau_0^b(\mathfrak{E}, G)$ topológia egymással ekvivalens. Legyen y az $\mathfrak{E}$ tér tetszés szerinti vektora. Akkor az

$$f_y(x) = G(x, y) \qquad (x \in \mathfrak{L})$$

funkcionál $\tau_0^b(\mathfrak{E}, G)$-folytonos, következésképpen $\tau_0^b(\mathfrak{L}, G)$-folytonos is. Ebből az 1°. állítás alapján adódik, hogy y-nak van jobb oldali G-vetülete $\mathfrak{L}$-re. A tételt bebizonyítottuk.

Abban az esetben, amikor $\mathfrak{L}$ egy $(\mathfrak{B}^r, G)$-típusú $\mathfrak{E}$ tér altere, más kritérium is adható arra, hogy $\mathfrak{L}$ vetítésre nézve teljes legyen. Nevezetesen igaz a következő tétel.

4. 3. TÉTEL. *Ahhoz, hogy az* $\mathfrak{E}$ $(\mathfrak{B}^r, G)$*-tér* $\mathfrak{L}$ *altere vetítésre nézve teljes legyen, szükséges és elégséges, hogy az* $\mathfrak{L}$*-en tekintett* $\tau_1^b(\mathfrak{E}, G)$, $\tau_1^b(\mathfrak{L}, G)$ *topológiák egymással ekvivalensek legyenek.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\mathfrak{L}$ vetítésre nézve teljes. Bebizonyítjuk, hogy $\tau_1^b(\mathfrak{E}, G)$ balról kompatibilis G-vel az $\mathfrak{L}$ altéren. Minthogy mindegyik $f_y(x) = G(x, y)$ funkcionál $\tau_1^b(\mathfrak{E}, G)$-folytonos, azt kell még megmutatni, hogy bármely az $\mathfrak{L}$ altéren $\tau_1^b(\mathfrak{E}, G)$-folytonos $f(x)$ lineáris funkcionál előállítható

$$f(x) = G(x, y_f) \tag{4.3}$$

alakban, ahol $y_f \in \mathfrak{L}$.

Tegyük fel, hogy a $\tau_1^b(\mathfrak{E}, G)$ topológiát a $p(x)$ $(x \in \mathfrak{E})$ félnorma értelmezi és az $f(x)$ funkcionál $\tau_1^b(\mathfrak{E}, G)$-folytonos $\mathfrak{L}$-en, vagyis érvényes az

$$(4.4) \qquad |f(x)| \leqq Cp(x) \qquad (x \in \mathfrak{L})$$

egyenlőtlenség. A Hahn—Banach-tétel komplex terekre vonatkozó alakja értelmében $f(x)$ kiterjeszthető az egész $\mathfrak{E}$ térre a (4. 4) összefüggés megtartásával; az így folytatott $f(x)$ tehát az egész $\mathfrak{E}$ téren $\tau_1^b(\mathfrak{E}, G)$-folytonos funkcionál. Minthogy a $\tau_1^b(\mathfrak{E}, G)$ topológia balról kompatibilis G-vel az $\mathfrak{E}$ téren (2. 5. tétel), található olyan $y_0 \in \mathfrak{E}$ vektor, hogy

$$f(x) = G(x, y_0) \qquad (x \in \mathfrak{E}).$$

Ha y_f az $y_0$vektor jobboldali G-vetülete $\mathfrak{L}$-re, akkor $\mathfrak{L}$-en fennáll a (4. 3) egyenlőség és így $\tau_1^b(\mathfrak{E}, G)$ balról kompatibilis G-vel az $\mathfrak{L}$ altéren. Minthogy a $\tau_1^b(\mathfrak{L}, G)$ topológia ugyanilyen tulajdonságú, a 2. 4. tétel következménye alapján a $\tau_1^b(\mathfrak{L}, G)$, $\tau_1^b(\mathfrak{E}, G)$ topológiák ekvivalensek $\mathfrak{L}$-en. A tételben szereplő feltétel szükségességét bebizonyítottuk. Ami a feltétel elégséges voltát illeti, az pontosan úgy igazolható, mint az előző tételnél.

Visszaemlékezve a relatíve szabályos altér definíciójára (3. §, 7. pont) a 4. 3. tételt például $(\mathfrak{H}, G^h)$ típusú $\mathfrak{E}$ terekre így lehet megfogalmazni: *az* $\mathfrak{L}(\subset \mathfrak{E})$ *altér vetítésre nézve akkor és csak akkor teljes, ha relatíve szabályos.* Ebből speciálisan következik (lásd a 3. §, 10°. állítást), hogy *a szabályosság az* $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{E}$ *altér vetítésre vonatkozó teljességének elégséges feltétele.*

3. A vetítésre vonatkozó teljesség fogalmával szorosan kapcsolatos az $\mathfrak{E}$ G-tér G-ortogonális lineálok összegeként való előállításának a kérdése. Annak érdekében, hogy a tárgyalást ne bonyolítsuk, ebben a pontban az $\mathfrak{E}$ térben hermitikus G-metrika esetére fogunk szorítkozni.

4°. *Ha* $\mathfrak{M}$ *és* $\mathfrak{N}$ *két egymásra G-ortogonális lineál* $(G(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}) = 0)$ *és*

$$(4.5) \qquad \mathfrak{M} + \mathfrak{N} = \mathfrak{E},$$

akkor $\mathfrak{M}$ *és* $\mathfrak{N}$ *vetítésre nézve teljes. Ha ezenkívül* $\mathfrak{E}$ *nemelfajuló, akkor* $\mathfrak{M}$ *és* $\mathfrak{N}$ *is nemelfajuló és* $\mathfrak{M}' = \mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}' = \mathfrak{M}$ (*itt* $\mathfrak{M}'$ *az* $\mathfrak{M}$ *lineál G-ortogonális komplementuma* $\mathfrak{E}$*-ben* (lásd 3. §, 1. pont)).

Bizonyítás céljából vegyünk egy tetszés szerinti $x \in \mathfrak{E}$ vektort. A (4. 5) összefüggésből következik, hogy $x = x_1 + x_2$, ahol $x_1 \in \mathfrak{M}$, $x_2 \in \mathfrak{N}$, vagyis $G(\mathfrak{M}, x - x_1) = 0$. Tehát x_1 az x vektor $\mathfrak{M}$-re való G-vetülete és így $\mathfrak{M}$ vetítésre nézve teljes. Most tegyük fel, hogy $\mathfrak{E}$ nemelfajuló. Akkor $\mathfrak{M}$ és $\mathfrak{N}$ szintén nemelfajuló azért, mert $\mathfrak{M}$ vagy $\mathfrak{N}$ bármelyik izotróp vektora az $\mathfrak{E}$ térben is izotróp lenne. Az $\mathfrak{M}' = \mathfrak{N}$ egyenlőség igazolása céljából elég megmutatni, hogy $G(x, \mathfrak{M}) = 0$ esetén $x \in \mathfrak{N}$. Ez valóban így van, mert különben fennállna $x = x_1 + x_2$, $0 \neq x_1 \in \mathfrak{M}$, $x_2 \in \mathfrak{N}$, $G(x_1, \mathfrak{M}) = 0$, és x_1 az $\mathfrak{M}$ lineál izotróp vektora lenne.

Az alábbi állítás bizonyos értelemben az előbbinek a megfordítása.

5°. *Ha az* $\mathfrak{L}$ *lineál vetítésre nézve teljes* $\mathfrak{E}$*-ben, akkor*

$$(4.6) \qquad \mathfrak{L} + \mathfrak{L}' = \mathfrak{E},$$

következésképpen $\mathfrak{L}'$ *is vetítésre nézve teljes. Továbbá, ha* $\mathfrak{E}$ *nemelfajuló, akkor* $\mathfrak{L}$ *és* $\mathfrak{L}'$ *is nemelfajuló, és a* (4. 6) *összeg direkt összeg. Azonkívül* $\mathfrak{L}'' = \mathfrak{L}$.

Valóban, ha $\mathfrak{L}$ vetítésre nézve teljes és x az $\mathfrak{E}$ tér tetszés szerinti vektora, x_1 pedig e vektor $\mathfrak{L}$-re való G-vetülete, akkor $x=x_1+(x-x_1)$ $(x_1\in\mathfrak{L},\ x-x_1\in\mathfrak{L}')$, és a (4. 6) egyenlőséget bebizonyítottuk. Az 5°. állítás többi részei közvetlenül adódnak a 4°. állításból.

Látjuk, hogy ha $\mathfrak{L}$ vetítésre nézve teljes lineál az $\mathfrak{E}$ nemelfajuló G-térben, akkor

(4. 7) $$\mathfrak{L}''=\mathfrak{L}.$$

Emlékeztetünk arra, hogy a 3. § 3°. állításában megadtuk a (4. 7) egyenlőség érvényességének szükséges és elégséges feltételét. A (4. 7) összefüggésből és a 3. 1. tételből a következőket nyerjük:

6°. *Minden vetítésre nézve teljes lineál zárt a nemelfajuló* $\mathfrak{E}$ *tér bármelyik a G-metrikával kompatibilis, és így bármelyik a G-metrikát felülmúló topológiájában.*

4. Legyen $\mathfrak{L}$ valamilyen lineál az $\mathfrak{E}$ G-térben. Azt a $Q_{\mathfrak{L}}$ operátort, amely mindegyik $x\in\mathfrak{E}$ vektornak megfelelteti e vektor $\mathfrak{L}$-re való jobb oldali G-vetületeinek a halmazát (amely üres is lehet), *$\mathfrak{L}$-re való jobb oldali G-vetítésnek* fogjuk nevezni.

7°. *Ha* $\mathfrak{L}$ *egy* $(\mathfrak{H}, G)$ *típusú* $\mathfrak{E}$ *tér T korlátos lineáris operátorának az értékkészlete, akkor az* $\mathfrak{L}$*-re való jobb oldali G-vetítés* $Q_{\mathfrak{L}}$ *operátorát a következő képlettel lehet kiszámítani*[11]*:*

(4. 8) $$Q_{\mathfrak{L}}=T(T^*G^*T)^{-1}T^*G^*$$
$$\big(G(x,y)=(Gx,y);\ x,y\in\mathfrak{E}\big).$$

A bizonyításhoz megjegyezzük, hogy ha $x\in\mathfrak{E}$ és $y\in Q_{\mathfrak{L}}x$, akkor tetszés szerinti $z\in\mathfrak{L}$ $(z=Th_1,\ h_1\in\mathfrak{E})$ vektorra

$$(Gz,y-x)=0,\qquad (GTh_1,y-x)=0,$$

innen pedig

$$T^*G^*y=T^*G^*x.$$

Minthogy $y\in\mathfrak{L}$, valamilyen $h\in\mathfrak{E}$ vektorra $y=Th$. Ennélfogva $T^*G^*Th=$ $=T^*G^*x$, tehát $h\in(T^*G^*T)^{-1}T^*G^*x$ és

$$y=Th\in T(T^*G^*T)^{-1}T^*\ G^*x.$$

Megfordítva, ha egy $x\in\mathfrak{E}$ vektorra $y\in T(T^*G^*T)^{-1}T^*G^*x$, akkor $y\in\mathfrak{L}$, $y=Th$, ahol

$$h\in(T^*G^*T)^{-1}T^*G^*x,\qquad T^*G^*Th=T^*G^*x.$$

Ha $z=Th_1$ az $\mathfrak{L}$ lineál tetszés szerinti vektora $(h_1\in\mathfrak{E})$, akkor

$$(Gz,y-x)=(GTh_1,y-x)=(GTh_1,Th-x)=(h_1,T^*G^*Th-T^*G^*x)=0,$$

következésképpen $y\in Q_{\mathfrak{L}}x$. Ily módon bebizonyítottuk, hogy $y\in Q_{\mathfrak{L}}x$ akkor és csak akkor, ha minden $x\in\mathfrak{E}$ vektorra $y\in T(T^*G^*T)^{-1}T^*G^*x$, ebből pedig következik a 7°. állítás helyessége.

Tekintsünk most egy tetszés szerinti $\mathfrak{L}\subset\mathfrak{E}$ (zárt) alteret, és legyen $P_{\mathfrak{L}}$ az $\mathfrak{L}$ altérre való Hilbert-féle merőleges vetítés operátora. Mivel $P_{\mathfrak{L}}$ értékkészlete $\mathfrak{L}$, a 6°. állítás

[11] Itt A^{-1} azt az operátort jelenti, amely mindegyik $x\in\mathfrak{E}$ vektornak megfelelteti az összes olyan y vektorok (esetleg üres) halmazát, amelyekre $Ay=x$.

felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$Q_{\mathfrak{L}} = P_{\mathfrak{L}}(P_{\mathfrak{L}}G^*P_{\mathfrak{L}})^{-1}P_{\mathfrak{L}}G^*.$$

Tekintsük a $G_{\mathfrak{L}} = P_{\mathfrak{L}}GP_{\mathfrak{L}}$ operátort, vagyis az $\mathfrak{L}$ altéren vizsgált $G(x, y)$ alak Gram-operátorát (3. §, 7. pont). Fennáll $P_{\mathfrak{L}}(P_{\mathfrak{L}}G^*P_{\mathfrak{L}})^{-1} = G_{\mathfrak{L}}^{*-1}$, tehát

$$Q_{\mathfrak{L}} = G_{\mathfrak{L}}^{*-1}P_{\mathfrak{L}}G^*.$$

Innen közvetlenül adódnak az alábbi eredmények a G-vetületek létezéséről és egyértelműségéről $(\mathfrak{H}, G)$ típusú $\mathfrak{E}$ térben.

α) Ahhoz, hogy az $\mathfrak{E}$ tér mindegyik vektorának az $\mathfrak{L}$ altérre legfeljebb egy jobb oldali G-vetülete legyen, szükséges és elégséges, hogy az $\mathfrak{L}$ altéren $G_{\mathfrak{L}}^*x = 0$ csak $x = 0$ esetén álljon.

β) Ahhoz, hogy az $x \in \mathfrak{E}$ vektornak az $\mathfrak{L}$ altérre legalább egy jobb oldali G-vetülete létezzék, szükséges és elégséges a $P_{\mathfrak{L}}G^*x \in \mathfrak{R}(G_{\mathfrak{L}}^*)$ összefüggés fennállása.

γ) Az $\mathfrak{L}(\subset \mathfrak{E})$ altér vetítésre vonatkozó teljességéhez szükséges és elégséges, hogy

$$\mathfrak{R}(P_{\mathfrak{L}}G^*) \subset \mathfrak{R}(G_{\mathfrak{L}}^*)$$

legyen.

Néha előfordul, hogy célszerű az *α), β), γ)* állításokat némiképp eltérő alakban használni. Szorítkozzunk arra az esetre, amikor a $G(x, y) = (Gx, y)$ alak hermitikus, és legyen a G operátornak az $\mathfrak{E}$ tér

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{L} \oplus \mathfrak{M}$$

$\mathfrak{H}$-ortogonális összegként való előállításához tartozó mátrixa

$$G = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{pmatrix} \tag{4.9}$$

alakú.

Akkor:

α') Ahhoz, hogy $\mathfrak{E}$ mindegyik vektorának az $\mathfrak{L}$ altérre legfeljebb egy G-vetülete legyen, szükséges és elégséges, hogy G_{11} ne vegye fel a nulla értéket $\mathfrak{L}$-en (kivéve a 0 helyet).

β') Ahhoz, hogy az $x \in \mathfrak{E}$ vektornak az $\mathfrak{L}$ altérre legalább egy G-vetülete létezzék, szükséges és elégséges a

$$G_{12}P_{\mathfrak{M}}x \in \mathfrak{R}(G_{11})$$

összefüggés fennállása.

γ') Az $\mathfrak{L}$ altér vetítésre vonatkozó teljességéhez szükséges és elégséges, hogy

$$\mathfrak{R}(G_{12}) \subset \mathfrak{R}(G_{11})$$

legyen.

A *β')* állítás felhasználásával könnyű példát szerkeszteni olyan $(\mathfrak{H}, G)$ típusú, nemelfajuló $\mathfrak{E}$ térben fekvő valódi $\mathfrak{L}$ altérre, amelynek G-ortogonális komplementuma, $\mathfrak{L}'$ egyedül a 0 vektorból áll. Ehhez elég, ha a G-metrikát úgy választjuk, hogy G_{11}, G_{22} és G_{12} ne vegye fel a nulla értéket értelmezési tartományán és $\mathfrak{R}(G_{11}) \cap \mathfrak{R}(G_{12}) = \{0\}$ legyen (ezeket a feltételeket legegyszerűbb úgy teljesíteni, hogy a dim $\mathfrak{M}=1$ választással élünk; ekkor G_{12} alkalmas megválasztásával még az is könnyen elérhető, hogy a G-metrika az $\mathfrak{E}$ téren pozitív legyen).

Ily módon azt látjuk, hogy az $\mathfrak{L}\dotplus\mathfrak{L}'$ direkt összeg nem szükségképpen sűrű az $\mathfrak{E}$ Hilbert-térben, tehát a 3. § 5°. állításában lényeges, hogy a τ topológia kompatibilis legyen G-vel (és nem elég, ha csak felülmúlja G-t).

5. §. Definit lineálok hermitikusan bilineáris metrikájú terekben

Az egész 5. § folyamán feltesszük, hacsak külön nem kötjük ki az ellenkezőjét, hogy az $\mathfrak{E}$ G-térben értelmezett G-metrika hermitikus.

1. Legyen $\mathfrak{L}$ tetszés szerinti definit lineál az $\mathfrak{E}$ G-térben. Vezessük be a negatív, ill. pozitív $\mathfrak{L}$ lineálokra a sign $\mathfrak{L}=-1$ ill. $+1$ jelölést. Az a körülmény, hogy a $G(x,y)$ alak az $\mathfrak{L}$ lineálon definit, lehetővé teszi, hogy $\mathfrak{L}$-en bevezessünk egy $\tau_2=\tau_2(\mathfrak{L},G)$ szeparált pre-Hilbert-*topológiát* az

$$(5.1)\qquad (x,y)=\operatorname{sign}\mathfrak{L}\cdot G(x,y)\qquad (x,y\in\mathfrak{L})$$

képlettel értelmezett skaláris szorzat segítségével. Ezek szerint a τ_2-norma

$$|x|=|G(x,x)|^{\frac{1}{2}}\qquad (x\in\mathfrak{L})$$

alakú. Teljesen nyilvánvaló, hogy a τ_2-topológia felülmúlja (és majorálja) a G-metrikát $\mathfrak{L}$-en (2. §, 5. pont).

Minthogy a τ_2-topológia a definit lineálokon nagyon természetes topológia, érdeklődésre tarthat számot, ha e lineálokra vonatkozó néhány feladatot (G-vetítés, vetítésre vonatkozó teljesség, szabályosság stb.) ezzel a topológiával összefüggésben oldunk meg. Ennek során, úgy mint a 4. §-ban, ismét az $f_{y_0}(x)=G(x,y_0)$ ($x\in\mathfrak{L}$, y_0 az $\mathfrak{E}$ tér tetszés szerinti rögzített eleme) alakú lineáris funkcionálok folytonosságának a kérdéséből indulunk ki, de most a τ_2-topológiára vonatkozóan.

Ha az $f_y(x)=G(x,y)$ funkcionál tetszés szerinti $y\in\mathfrak{E}$ esetén τ_2-folytonos $\mathfrak{L}$-en, akkor az $\mathfrak{L}$ definit lineált *regulárisnak* fogjuk mondani. Ha viszont létezik csak egy olyan $y_0\in\mathfrak{E}$ elem is, hogy az $f_{y_0}(x)$ ($x\in\mathfrak{L}$) funkcionál nem folytonos a τ_2-topológiában, akkor az $\mathfrak{L}$ lineált *szingulárisnak* nevezzük.

Nyilvánvaló, hogy minden véges dimenziójú definit lineál, úgyszintén a definit G-metrikával ellátott terekben bármelyik lineál reguláris. Általában azonban ez nincs így (lásd alább a 4. pontot).

5. 1. tétel. *Legyen $\mathfrak{L}(\subset\mathfrak{E})$ definit lineál. Annak, hogy az $f_{y_0}(x)=G(x,y_0)$ ($x\in\mathfrak{L}$, $y_0\in\mathfrak{E}$) funkcionál τ_2-folytonos legyen, a következő a szükséges és elégséges feltétele:*

$$(5.2)\qquad m(y_0)=\inf_{x\in\mathfrak{L}} G(x-y_0,x-y_0)>-\infty\qquad (\operatorname{sign}\mathfrak{L}=1),$$

$$(5.2')\qquad M(y_0)=\sup_{x\in\mathfrak{L}} G(x-y_0,x-y_0)<\infty\qquad (\operatorname{sign}\mathfrak{L}=-1).$$

Ennélfogva az $\mathfrak{L}$ definit lineál akkor és csak akkor reguláris, ha minden $y_0\in\mathfrak{E}$ vektorra teljesül az (5.2) (*illetve* (5.2′)) *feltétel.*

Egy τ_2-folytonos $f_{y_0}(x)$ funkcionál normája kifejezhető az $m(y_0)$, $M(y_0)$ mennyiségekkel az

(5. 3) $$|f_{y_0}|^2 = G(y_0, y_0) - m(y_0) \qquad (\text{sign } \mathfrak{L} = 1),$$

illetve

(5. 3') $$|f_{y_0}|^2 = M(y_0) - G(y_0, y_0) \qquad (\text{sign } \mathfrak{L} = -1)$$

képlet szerint.

A bizonyítást nyilván elég pozitív lineál (sign $\mathfrak{L} = 1$) esetére szorítkozva végezni, mert a sign $\mathfrak{L} = -1$ eset visszavezethető erre a kiindulási G-metrika előjelének egyszerű megfordítása útján.

Szükségesség. Legyen az $f_{y_0}(x) = G(x, y_0)$ funkcionál τ_2-folytonos, vagyis

$$|G(x, y_0)| \leqq C|x| \qquad (x \in \mathfrak{L}).$$

Akkor bármelyik $x \in \mathfrak{L}$ vektorra (lásd az (5. 1) képletet)

$$\begin{aligned} G(x-y_0, x-y_0) &= (x, x) - 2 \operatorname{Re} G(x, y_0) + G(y_0, y_0) \geqq \\ &\geqq |x|^2 - 2C|x| + G(y_0, y_0) = \\ &= (|x| - C)^2 + G(y_0, y_0) - C^2 \geqq G(y_0, y_0) - C^2 > -\infty. \end{aligned}$$

Ennélfogva

$$m(y_0) = \inf_{x \in \mathfrak{L}} G(x - y_0, x - y_0) > -\infty.$$

Megjegyezzük, hogy speciálisan a $C = |f_{y_0}|$ választással azt kapjuk, hogy

(5. 4) $$m(y_0) \geqq G(y_0, y_0) - |f_{y_0}|^2.$$

Elégségesség. Legyen $m(y_0) = \inf_{x \in \mathfrak{L}} G(x - y_0, x - y_0) > -\infty$. Akkor tetszés szerinti $x \in \mathfrak{L}$ $(|x| = 1)$ vektorra fennáll

$$m(y_0) \leqq G(x - y_0, x - y_0) = 1 - 2 \operatorname{Re} G(x, y_0) + G(y_0, y_0),$$

és így

(5. 5) $$\operatorname{Re} G(x, y_0) \leqq \tfrac{1}{2} C_0,$$

ahol $C_0 = 1 + G(y_0, y_0) - m(y_0)$. Az (5. 5) képletben x helyébe $(-x)$-et írva (a korábbiak értelmében $|-x| = 1$)

(5. 6) $$-\operatorname{Re} G(x, y_0) \leqq \tfrac{1}{2} C_0.$$

Az (5. 5), (5. 6) képleteket egybevetve azt kapjuk, hogy tetszés szerinti $x \in \mathfrak{L}$ $(|x| = 1)$ vektorra

(5. 7) $$|\operatorname{Re} G(x, y_0)| \leqq \tfrac{1}{2} C_0.$$

Itt x helyébe $(-ix)$-et írva (megint $|-ix| = 1$) adódik:

(5. 8) $$|\operatorname{Im} G(x, y_0)| \leqq \tfrac{1}{2} C_0.$$

Végül az (5. 7), (5. 8) képletekből következik, hogy

$$|G(x, y_0)| \leqq C_0 \qquad (x \in \mathfrak{L}, |x| = 1),$$

vagyis az $f_{y_0}(x) = G(x, y_0)$ funkcionál τ_2-folytonos.

A tétel utolsó állításának (az (5. 3) összefüggésnek) a bebizonyítása céljából vegyünk egy $\{x_n\} \subset \mathfrak{L}$ sorozatot, amely eleget tesz a következő három feltételnek:

a) $|x_n| = |f_{y_0}|$ $(n = 1, 2, \ldots)$ — normálás.

b) Tetszés szerinti $\varepsilon > 0$ számra $n > N(\varepsilon)$ esetén

$$|f_{y_0}(x_n)| = |G(x_n, y_0)| \geqq |f_{y_0}|^2 - \frac{\varepsilon}{2}$$

(az $|f_{y_0}|$ norma definíciója szerint ez lehetséges).

c) $\operatorname{Re} G(x_n, y_0) = |G(x_n, y_0)|$ $\quad (n = 1, 2, \ldots)$;

ez úgy érhető el, hogy mindegyik x_n vektort megszorozzuk az $\exp\{-i \arg G(x_n, y_0)\}$ skalárral (eközben az a), b) tulajdonságok nem vesznek el).

Mármost $n > N(\varepsilon)$ esetén az a), b), c) összefüggések alapján

$$m(y_0) \leqq G(x_n - y_0, x_n - y_0) = |f_{y_0}|^2 - 2|G(x_n, y_0)| + G(y_0, y_0) \leqq$$
$$\leqq |f_{y_0}|^2 - 2|f_{y_0}|^2 + \varepsilon + G(y_0, y_0) = G(y_0, y_0) - |f_{y_0}|^2 + \varepsilon.$$

Minthogy az $\varepsilon > 0$ szám tetszés szerinti,

$$m(y_0) \leqq G(y_0, y_0) - |f_{y_0}|^2,$$

és ezt az (5. 4) képlettel összevetve kapjuk:

$$m(y_0) = G(y_0, y_0) - |f_{y_0}|^2. \tag{5. 3}$$

Az 5. 1. tételt maradéktalanul bebizonyítottuk.

KÖVETKEZMÉNY. *Ahhoz, hogy egy $y_0 (\in \mathfrak{E})$ vektornak az $\mathfrak{L}$ definit lineálra legyen G-vetülete, szükséges és elégséges, hogy a véges* $\inf\limits_{x \in \mathfrak{L}} G(x - y_0, x - y_0) = m(y_0)$ (*illetve* $\sup\limits_{x \in \mathfrak{L}} G(x - y_0, x - y_0) = M(y_0)$) *érték valamilyen $x_0 \in \mathfrak{L}$ elemen éressék, és éppen ez az elem az y_0 vektor $\mathfrak{L}$-re való G-vetülete.*

Csakugyan, legyen x_0 az y_0 vektor $\mathfrak{L}$-re való G-vetülete ($\operatorname{sign} \mathfrak{L} = +1$). Akkor minden $x \in \mathfrak{L}$ elemre

$$f_{y_0}(x) = G(x, y_0) = G(x, x_0) = (x, x_0),$$

azaz $|f_{y_0}| = |x_0|$. Innen (5. 3) értelmében

$$m(y_0) = G(y_0, y_0) - |f_{y_0}|^2 = G(y_0, y_0) - G(x_0, x_0) = G(x_0 - y_0, x_0 - y_0).$$

Megfordítva, legyen $m(y_0) = G(x_0 - y_0, x_0 - y_0)$ $(x_0 \in \mathfrak{L})$. Először is vegyük észre, hogy ha valamilyen $z \in \mathfrak{E}$ vektorra $m(z) = G(z, z)$, akkor (5. 3) miatt $|f_z| = 0$, vagyis $f_z(x) = G(x, z) = 0$ $(x \in \mathfrak{L})$. Másodszor nyilvánvaló, hogy minden $x \in \mathfrak{L}$ vektorra $m(y_0) = m(y_0 - x)$. Ennélfogva

$$m(y_0 - x_0) = m(y_0) = G(y_0 - x_0, y_0 - x_0),$$

tehát $G(x, y_0 - x_0) = 0$ $(x \in \mathfrak{L})$, azaz x_0 az y_0 vektornak az $\mathfrak{L}$ lineálra való G-vetülete.

Az 5. 1. tétel most nyert következményéből közvetlenül adódik a megfelelő kritérium a definit lineálok vetítésre vonatkozó teljességére, de ennek a kimondását elhagyjuk.

2. Az 5. 1. tétel és következménye az $\mathfrak{L}$ definit lineálra való G-vetíthetőség egy új kritériumához és $\mathfrak{L}$ vetítésre vonatkozó teljességének a megfelelő kritériumához vezet.

5. 2. TÉTEL. *Az $y_0 \in \mathfrak{E}$ vektor $\mathfrak{L}$ definit lineálra való x_0 G-vetületének létezéséhez szükséges és elégséges, hogy az $f_{y_0}(x) = G(x, y_0)$ funkcionál τ_2-folytonos legyen és valamely $x_0 \in \mathfrak{L}$ vektorra bekövetkezzék az $|x_0| = |f_{y_0}|$ és a*

$$G(x_0, y_0) = |f_{y_0}|^2 \operatorname{sign} \mathfrak{L} \tag{5. 9}$$

egyenlőség.

Bizonyítás. Megint a sign $\mathfrak{L} = 1$ esetre szorítkozunk.

Triviális, hogy az (5. 9) feltétel szükséges, ugyanis az $y_0 \in \mathfrak{E}$ vektor $x_0 \in \mathfrak{L}$ G-vetületére

$$f_{y_0}(x) = G(x, y_0) = G(x, x_0) = (x, x_0) \qquad (x \in \mathfrak{L}),$$

innen pedig $|f_{y_0}| = |x_0|$ és $G(x_0, y_0) = (x_0, x_0) = |f_{y_0}|^2$.

Elégségesség. Tegyük fel, hogy $x_0 \in \mathfrak{L}$, $|x_0| = |f_{y_0}|$ és $G(x_0, y_0) = |f_{y_0}|^2$. Akkor figyelembe véve az (5. 3) képletet

$$G(x_0 - y_0, x_0 - y_0) = |x_0|^2 - 2|f_{y_0}|^2 + G(y_0, y_0) = G(y_0, y_0) - |f_{y_0}|^2 = m(y_0),$$

és az 5. 1. tétel következménye alapján x_0 az y_0 vektor $\mathfrak{L}$-re való G-vetülete.

KÖVETKEZMÉNY. *Az $\mathfrak{L}$ ($\subset \mathfrak{E}$) definit lineál vetítésre vonatkozó teljességéhez szükséges és elégséges, hogy $\mathfrak{L}$ reguláris legyen és tetszés szerinti $y_0 \in \mathfrak{E}$ vektorhoz található legyen olyan x_0 $(|x_0| = |f_{y_0}|)$, amelyre teljesül az (5. 9) feltétel.*

Megjegyzés. Az 5. 2. tételben szereplő feltétel elégséges voltát (és így az egész tételt is) közvetlenül, az 5. 1. tétel elkerülésével is be lehet bizonyítani.

Valóban, a FRÉCHET—RIESZ-tétel értelmében a τ_2-folytonos $f_{y_0}(x) = G(x, y_0)$ funkcionál felírható $f_{y_0}(x) = (x, \tilde{x}_0)$ alakban, ahol $\tilde{x}_0$ valamilyen „ideális" elem abban az $\tilde{\mathfrak{L}}$ Hilbert-térben, amelyet a szeparált $\mathfrak{L}$ pre-Hilbert-tér teljessé tétele útján kapunk. Ilyenkor, amint ismeretes, fennáll az $|f_{y_0}| = |\tilde{x}_0|$ egyenlőség. Másrészt feltevésünk szerint van olyan $x_0 \in \mathfrak{L}$ vektor, amelyre $|x_0| = |f_{y_0}|$ és $G(x_0, y_0) = |f_{y_0}|^2 = |\tilde{x}_0|^2$. De akkor

$$|f_{y_0}|^2 = G(x_0, y_0) = (x_0, \tilde{x}_0) \leqq |x_0|\,|\tilde{x}_0| = |f_{y_0}|^2,$$

vagyis $\tilde{x}_0$ és x_0 egymással kollineáris: $\tilde{x}_0 = \lambda x_0 \in \mathfrak{L}$. Könnyű belátni, hogy az adott esetben $\lambda = 1$, úgyhogy $G(x, y_0) = (x, x_0) = G(x, x_0)$ minden $x \in \mathfrak{L}$ vektorra.

Az 5. 2. tétel bizonyításának az imént ismertetett változata azzal az előnnyel jár, hogy sehol sincs benne kihasználva a G-metrika hermitikus volta. Definit lineálokról és ezek τ_2-topológiájáról pedig tetszés szerinti G-terekben is lehet beszélni. Ebben az esetben az 5. 2. tételben G-vetület helyett jobb oldali G-vetület értendő. Analóg tétel érvényes a bal oldali G-vetületekre.

A FRÉCHET—RIESZ-tételből rögtön következik, hogy *az $\mathfrak{L}$ ($\subset \mathfrak{E}$) definit lineál regularitása és τ_2-teljessége elégséges $\mathfrak{L}$ vetítésre vonatkozó teljességéhez.* Ugyanakkor a τ_2-teljesség, eltérően a regularitástól, a vetítésre vonatkozó teljességnek nem szükséges feltétele, amint az triviális példákból látható[12].

3. Az 5. 1. tétel, amely kritériumot ad az $\mathfrak{L}$ $(\subset \mathfrak{E})$ definit lineál regularitására, nyitva hagyja azt a kérdést, léteznek-e szinguláris (azaz nem reguláris) lineálok. Amint a későbbiekben ki fog derülni, szinguláris lineálokra, legalábbis $\Pi_\varkappa$ terekben, aránylag régóta ismeretesek példák (lásd [8]). A legutóbbi időkben azonban ez a kérdés újra felkeltette az érdeklődést egyes hibás állításokkal kapcsolatban, amelyek több elméleti fizikai cikkben szerepeltek.

A. Uhlmann [42] cikkében teljesen jogosan bírálja R. Ascoli és E. Minardi [41] dolgozatát azért, hogy ezek a szerzők figyelmen kívül hagyták a nemelfajuló $\mathfrak{E}$ G-tér kanonikus felbontásának többértelműségét. Ugyanakkor maga A. Uhlmann R. Ascoli és E. Minardi nyomán megismétli azt a téves kijelentést, hogy bármelyik $\mathfrak{E}$ G-tér izotróp lineálra és maximális nemelfajuló lineálra való felbontása egyértelmű, amiről korábban már volt szó (3. §, 1. pont).

Bár az „indefinit metrikájú Hilbert-tér" elnevezést (lásd 1. §, 3. pont) ugyanolyan helytelenül használja, mint néhány más szerző, A. Uhlmann ([42], [43]) eltér elődeitől abban, hogy elismeri a szóban forgó terek szigorú axiomatizálásának és meghatározott topológia bevezetésének a szükségességét. Nevezetesen nemelfajuló $\mathfrak{E}$ G-terek vizsgálatára szorítkozik és kiegészítő követelmény gyanánt bevezet egy posztulátumot, amely az általunk elfogadott terminológiával így hangzik:

(U) *Az $\mathfrak{E}$ tér bármelyik $\mathfrak{L}$ definit lineáljával együtt az $\mathfrak{L}$ lineál τ_2-teljes burkát, $\tilde{\mathfrak{L}}$-ot is tartalmazza.*

Az (U) posztulátumból kiindulva Uhlmann eljut az $\mathfrak{E}$ tér

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_+ \dotplus \mathfrak{E}_- \tag{5. 10}$$

kanonikus felbonthatóságáról szóló tételhez, ahol $\mathfrak{E}_+$ és $\mathfrak{E}_-$ két τ_2-teljes, egymásra G-ortogonális definit lineál (sign $\mathfrak{E}_\pm = \pm 1$). Ily módon az derül ki, hogy $\mathfrak{E}$ lényegében J-tér. Amint azonban a későbbiek folyamán (6. §, 6. 5. tétel) rámutatunk, az utóbbi körülmény végtelen dimenziós $\mathfrak{E}_+$ és $\mathfrak{E}_-$ esetén összeegyeztethetetlen az (U) posztulátummal.[13]

Az A. Uhlmann által az (5. 10) kanonikus felbontás létezésére adott bizonyítás elemzése azt mutatja, hogy az elkövetett hibák forrása a következő: a bizonyítás során burkoltan fel van téve, hogy minden τ_2-teljes definit lineál reguláris. Amint az alább felsorolt tételekből (többek között az 5. 5. tételből) látható, ez az állítás hamis.

4. Ebben a pontban több, szinguláris lineálokra vonatkozó tételt ismertetünk, elhagyva azokat a bizonyításokat, amelyek már korábban megjelentek.

5. 3. Tétel ([47], [49]). *Minden nemelfajuló, végtelen dimenziós, indefinit G-metrikával ellátott $\mathfrak{E}$ G-tér tartalmaz szinguláris lineált.*

Megemlítjük, hogy az a feltétel, hogy $\mathfrak{E}$ nemelfajuló (eltérően a két másik kikötéstől, a végtelen-dimenziósságtól és a G-metrika indefinit voltától), nem lényeges. Az a fontos, hogy ha az $\mathfrak{E}$ teret felbontjuk izotróp ($\mathfrak{E}_0$) és nemelfajuló ($\mathfrak{E}_1$) lineálra ($\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_0 \dotplus \mathfrak{E}_1$) (lásd 3. §, 1. pont), akkor $\mathfrak{E}_1$ dimenziója ne legyen véges.

5. 4. Tétel ([49]). *Legyen $\mathfrak{L}$ definit lineál a nemelfajuló $\mathfrak{E}$ G-térben. Ahhoz, hogy $\mathfrak{L}$ szinguláris legyen, szükséges és elégséges az $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{E}_1 \subset \mathfrak{E}$ inkluzió, ahol $\mathfrak{E}_1$ olyan lineál, amely teljessé téve Π_1 térré* (lásd 3. §, 4. pont) *válik, és az $\mathfrak{L}$ lineálnak ezen Π_1 tér normája szerinti $\overline{\mathfrak{L}}$ lezárása elfajuló altér.*

[12] Például elég tekinteni egy $\mathfrak{E}$ G-teret, amelynek kanonikus előállítása (lásd 3. §, 2. pont) $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_+ \dotplus \mathfrak{E}_-$, ahol $\mathfrak{E}_+$ szeparált, nemteljes pre-Hilbert-tér (a τ_2-topológiában). Nyilvánvaló, hogy $\mathfrak{E}_+$ (és ugyanúgy $\mathfrak{E}_-$) vetítésre nézve teljes.

[13] Az $\mathfrak{E} = \Pi_\varkappa$ esetet, amikor az (U) posztulátum teljesül, ebben a vonatkozásban triviálisnak kell tekinteni.

Az 5. 4. tételben említett $\mathfrak{E}_1$ lineált a feltétel szükségességének bizonyítása során ténylegesen meg lehet szerkeszteni: $\mathfrak{E}_1$ az $\mathfrak{L}$ lineálnak és annak az $y_0 \in \mathfrak{E}$ vektornak a lineáris burka, amelyre az $f_{y_0}(x) = G(x, y_0)$ funkcionál nem τ_2-folytonos. A feltétel elégséges voltának bizonyítása pedig, hasonlóan az 5. 3. tétel [49] bizonyításához, a következő kisegítő állításokra támaszkodik.

1°. *Legyen $\mathfrak{E}$ tetszés szerinti normált G^h-tér a G-metrikát majoráló $\|x\| (x \in \mathfrak{E})$ normával:*

$$(5.11) \qquad |G(x, y)| \leq C\|x\| \|y\| \qquad (x, y \in \mathfrak{E}).$$

Ha $\mathfrak{L}$ $(\subset \mathfrak{E})$ definit lineál, akkor az $f_{y_0}(x) = G(x, y_0)$ funkcionál τ_2-folytonosságához szükséges, hogy az y_0 vektor G-ortogonális legyen az $\overline{\mathfrak{L}}$ altér minden izotróp vektorára (ahol $\overline{\mathfrak{L}}$ az $\mathfrak{L}$ lineál lezárása az $\mathfrak{E}$ térben az $\|x\|$ norma szerint).

Valóban, tegyük fel, hogy $x_0 (\neq 0)$ az $\overline{\mathfrak{L}}$ altér izotróp vektora és $G(x_0, y_0) \neq 0$. Approximáljuk az x_0 vektort egy $\{x_n\} \subset \mathfrak{L}$ sorozattal: $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x_0\| = 0$. Az (5. 11) majorálás miatt

$$\lim_{n\to\infty} |x_n| = \lim_{n\to\infty} |G(x_n, x_n)|^{\frac{1}{2}} = |G(x_0, x_0)|^{\frac{1}{2}} = 0.$$

Ugyanakkor

$$\lim_{n\to\infty} f_{y_0}(x_n) = \lim_{n\to\infty} G(x_n, y_0) = G(x_0, y_0) \neq 0,$$

vagyis az $f_{y_0}(x)$ funkcionál nem folytonos a τ_2-topológiában.

Megjegyzés. Amint a bizonyításból látható, az 1°. állítás igaz marad akkor is, ha a G-metrikát valamilyen félnormálható topológia majorálja (lásd 2. §, 5. pont). Emlékeztetünk arra, hogy abban az esetben, amikor az $\mathfrak{E}$ tér $(\mathfrak{B}, G)$ típusú, az (5. 11) becslés ekvivalens azzal a kikötéssel, hogy a $\mathfrak{B}$-topológia felülmúlja a G-metrikát (2. 2. tétel). Ha pedig $\mathfrak{E} = \Pi_\varkappa$, akkor meg lehet mutatni [49], hogy az 1°. állításban szereplő feltétel elégséges is az $f_{y_0}(x)$ funkcionál τ_2-folytonosságához.

2°. *Ha $\mathfrak{L}$ definit lineál egy nemelfajuló, normált és az* (5. 11) *tulajdonsággal rendelkező $\mathfrak{E}$ G^h-térben, továbbá az $\mathfrak{L}$ lineál $\mathfrak{E}$-beli $\overline{\mathfrak{L}}$ lezárása elfajuló, akkor $\mathfrak{L}$ szinguláris.*

Ez közvetlenül következik az 1°. állításból, ha számításba vesszük, hogy $\overline{\mathfrak{L}}$ bármelyik $x_0 (\neq 0)$ izotróp vektorához $\mathfrak{E}$ nemelfajuló volta miatt található olyan $y_0 \in \mathfrak{E}$ vektor, hogy $G(x_0, y_0) \neq 0$.

Az 1°. és 2°. állítás az 5. 3. tétel bizonyítása során lehetővé teszi az $\mathfrak{L}$ szinguláris lineál tényleges megszerkesztését.

Egy $\mathfrak{E}$ G-tér τ_2-teljes szinguláris lineáljainak általános jellemzését a következő tétel adja meg.

5. 5. TÉTEL ([49]). *Ahhoz, hogy az $\mathfrak{L}$ $(\subset \mathfrak{E})$ szinguláris lineál τ_2-teljes legyen, szükséges és elégséges, hogy az $\mathfrak{L}$ lineálnak egy Π_1 térbe való (az 5. 4. tétel szerint lehetséges) G-izometrikus beágyazása után a Π_1-beli $\overline{\mathfrak{L}}$ lezárás előállítható legyen $\overline{\mathfrak{L}} = \mathfrak{L} \dotplus \{x_0\}$ alakú direkt összegként, ahol $\{x_0\}$ az $\overline{\mathfrak{L}}$ altér $x_0 (\neq 0)$ izotróp vektora által kifeszített egydimenziós altér.*

Ebből a tételből azonnal adódik, hogy τ_2-teljes szinguláris lineálok léteznek, legalábbis tetszés szerinti indefinit G^h-metrikával ellátott végtelen dimenziós

$\mathfrak{H}$-térben, és ez ellentmond A. UHLMANN 3. pontban említett hipotézisének. Valóban, feltevéseink mellett az $\mathfrak{E}$ tér mindig tartalmaz (zárt) szemidefinit $\mathfrak{M}$ altereket, amelyeknek izotróp lineáljai egydimenziósak. Ha $\mathfrak{M}$ ilyen altér, és $\mathfrak{M} = \mathfrak{L} \dotplus \{x_0\}$ ennek előállítása az $\{x_0\}$ izotróp lineál és egy $\mathfrak{M}$-ben sűrű $\mathfrak{L}$ lineál direkt összegeként (lásd [8], 421. oldal), akkor a 2°. állítás értelmében $\mathfrak{L}$ szinguláris, az 5. 5. tétel szerint pedig $\mathfrak{L}$ τ_2-teljes.

5. Befejezésül felsorolunk néhány állítást normált G^h-terek és speciálisan $(\mathfrak{H}, G^h)$-terek definit lineáljainak és altereinek τ_2-teljességéről és regularitásáról.

5. 6. TÉTEL. *Nemelfajuló és normált $\mathfrak{E}$ G^h-térben, amelyben teljesül az (5. 11) feltétel, tetszés szerinti $\mathfrak{L}$ definit lineál és lezárása, $\overline{\mathfrak{L}}$ csak egyidejűleg lehet reguláris.*

Bizonyítás. Az, hogy ha $\overline{\mathfrak{L}}$ reguláris (tehát definit is), akkor $\mathfrak{L}$ szintén reguláris, triviális.

Megfordítva, legyen $\mathfrak{L}$ reguláris definit lineál. A 2°. állítás alapján az $\overline{\mathfrak{L}}$ altér nemelfajuló (definit). Ha $\overline{\mathfrak{L}}$ szinguláris volna, akkor létezne olyan $y_0 \in \mathfrak{E}$ vektor, $\alpha > 0$ szám és $\{x_n\} \subset \overline{\mathfrak{L}}$ sorozat, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = 0$ és

$$|G(x_n, y_0)| > \alpha \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Most elég venni egy $\{x_n'\} \subset \mathfrak{L}$ sorozatot, amelyre például $\|x_n - x_n'\| < \dfrac{\alpha}{2\|y_0\| Cn}$ $(n = 1, 2, \ldots)$; így (5. 11) felhasználásával kapjuk:

$$\lim_{n\to\infty} |x_n'| = 0,$$

$$|G(x_n', y_0)| \geqq |G(x_n, y_0)| - |G(x_n - x_n', y_0)| > \frac{\alpha}{2} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Ez viszont azt jelenti, hogy az $\mathfrak{L}$ lineál szinguláris, ellentétben a feltevéssel.

Áttérve a $(\mathfrak{H}, G^h)$-terekre, fel fogjuk használni az alterek és lineálok szabályosságának a 3. § 7. pontjában bevezetett fogalmát. Mindenekelőtt megjegyezzük, hogy a 3. § 9°. állításából következik az alábbi:

3°. *Egy $(\mathfrak{H}, G^h)$-térbeli $\mathfrak{M}$ definit altér akkor és csak akkor τ_2-teljes, ha szabályos.*

Valóban, ha $G_{\mathfrak{M}}$ az $\mathfrak{M}$ altéren tekintett G-metrika Gram-operátora (egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy sign $\mathfrak{M} = +1$), akkor $G_{\mathfrak{M}}$ és $G_{\mathfrak{M}}^{\frac{1}{2}}$ csak egyidejűleg lehet folytonosan invertálható. De $G_{\mathfrak{M}}$ folytonos invertálhatósága $\mathfrak{M}$ szabályosságával ekvivalens, $G_{\mathfrak{M}}^{\frac{1}{2}}$ folytonos invertálhatósága pedig az $\mathfrak{M}$ altér τ_2-teljességével ekvivalens. Az utóbbi közvetlenül adódik BANACH tételéből és az

$$|x|^2 = (Gx, x) = (G_{\mathfrak{M}} x, x) = (G_{\mathfrak{M}}^{\frac{1}{2}} x, G_{\mathfrak{M}}^{\frac{1}{2}} x) = \|G_{\mathfrak{M}}^{\frac{1}{2}} x\|^2 \qquad (x \in \mathfrak{M})$$

összefüggésből.

5. 7. TÉTEL. *Nemelfajuló, $(\mathfrak{H}, G^h)$ típusú $\mathfrak{E}$ térben a τ_2-teljes $\mathfrak{L}$ definit lineál regularitásához szükséges és elégséges, hogy $\mathfrak{L}$ ($\mathfrak{H}$-zárt) altér legyen.*

Bizonyítás. Elégségesség. Legyen $\mathfrak{L}$ τ_2-teljes definit altér $\mathfrak{E}$-ben. A 3°. állítás értelmében $\mathfrak{L}$ szabályos altér. De akkor $\mathfrak{L}$ vetítésre nézve teljes (4. §, 2. pont) és így reguláris (5. 2. tétel, következmény).

Szükségesség. Tegyük fel, hogy $\mathfrak{L}$ reguláris, de nem zárt, és lezárása $\bar{\mathfrak{L}}$. Az $\bar{\mathfrak{L}} \setminus \mathfrak{L}$ halmaz nem üres. Vegyünk egy $y_0 \in \bar{\mathfrak{L}} \setminus \mathfrak{L}$ vektort. Minthogy a τ_2-teljesség és a regularitás miatt az $\mathfrak{L}$ lineál vetítésre nézve teljes (2. pont), képezhetjük az y_0 vektornak az $\mathfrak{L}$ lineálra való $x_0 (\in \mathfrak{L})$ G-vetületét. A $z_0 = y_0 - x_0$ $(\in \bar{\mathfrak{L}})$ vektor G-ortogonális $\mathfrak{L}$-re, tehát $\bar{\mathfrak{L}}$-ra is. Speciálisan $(Gz_0, z_0) = (Gz_0, y_0 - x_0) = 0$. Másrészt $\mathfrak{L}$ regularitása miatt az $\bar{\mathfrak{L}}$ altér definit (2°. állítás), ennélfogva $z_0 = 0$, $y_0 = x_0 \in \mathfrak{L}$. Ellentmondásba kerültünk az $y_0 \in \bar{\mathfrak{L}} \setminus \mathfrak{L}$ feltevéssel. A tételt bebizonyítottuk.

A 6. §-ban meg fogjuk mutatni (lásd a 4. pontot), hogy J-terekben az 5. 7. tétel bizonyos értelemben megfordítható: *definit (zárt) altér akkor és csak akkor reguláris, ha τ_2-teljes (azaz szabályos* — lásd a 3°. állítást)[14].

Ebből a következő állítás adódik:

4°. *J-térbeli $\mathfrak{L}$ definit lineálokra a regularitás és a szabályosság fogalma egybeesik.*

Valóban, ha $\mathfrak{L}$ reguláris definit lineál $\mathfrak{E}$-ben, akkor lezárása, $\bar{\mathfrak{L}}$ is reguláris (5. 6. tétel), tehát szabályos. De akkor $\mathfrak{L}$ is szabályos (3. 5. tétel).

Megfordítva, ha az $\mathfrak{L}$ lineál szabályos, akkor $\bar{\mathfrak{L}}$ is szabályos. $\mathfrak{L}$ definit volta miatt $\bar{\mathfrak{L}}$ szemidefinit, és minthogy szabályos is, $\bar{\mathfrak{L}}$ definit (3. §, 9°.). Minthogy továbbá $\bar{\mathfrak{L}}$ vetítésre nézve teljes is (4. §, 2. pont), az $\bar{\mathfrak{L}}$ altér reguláris (5. 2. tétel, következmény), és vele együtt az $\mathfrak{L}$ lineál is reguláris.

6. §. J-metrikával ellátott terek

Ebben a paragrafusban részletesen fogjuk tanulmányozni a J-tereket (2. §, 7. pont), vagyis azokat a $(\mathfrak{H}, G^h)$-tereket, amelyekben a G-metrikát megadó Gram-operátor alakja $G \equiv J = P_+ - P_-$ (P_+ és P_- Hilbert-féle merőleges vetítések operátorai, $P_+ + P_- = I$). Amint a 2. § 3°. állításában megmutattuk, bármelyik $(\mathfrak{H}, G^h)$-típusú $\mathfrak{E}$ tér, amelynek a G Gram-operátora korlátosan invertálható, J-térré alakítható át azáltal, hogy a Hilbert-féle metrikáját ($\mathfrak{H}$-metrikáját) bizonyos vele ekvivalens metrikával helyettesítjük.

1. A továbbiak szempontjából lényeges a következő nyilvánvaló állítás (lásd 2. §, 8. pont):

1°. *Egy $\mathfrak{E}$ J-tér $\mathfrak{H}$-topológiája kompatibilis a J-metrikával $\mathfrak{E}$-n, tehát a $\mathfrak{H}$-topológia azonos a τ_1-topológiával az $\mathfrak{E}$ téren.*

Innen és a 3. 1. tételből adódik:

2°. *Egy $\mathfrak{E}$ J-tér tetszés szerinti $\mathfrak{L}$ lineáljára $\mathfrak{L}'' = \bar{\mathfrak{L}}$, ahol $\bar{\mathfrak{L}}$ az $\mathfrak{L}$ lineál $\mathfrak{H}$-lezárása. Speciálisan, ha $\mathfrak{L}$ altér, akkor $\mathfrak{L}'' = \mathfrak{L}$.*

Felhasználva az 1°. és a 3. § 5°. állítását, meggyőződhetünk a következő állítás helyességéről:

3°. *Ha $\mathfrak{L}$ lineál az $\mathfrak{E}$ J-térben, akkor ahhoz, hogy $\mathfrak{L} + \mathfrak{L}'$ sűrű legyen $\mathfrak{E}$-ben ($\overline{\mathfrak{L} + \mathfrak{L}'} = \mathfrak{E}$), szükséges és elégséges, hogy az $\bar{\mathfrak{L}} (= \mathfrak{L}'')$ altér nemelfajuló legyen.*

[14] Magától értetődik, hogy $(\mathfrak{H}, G^h)$-terekben ez már nem igaz. Elegendő tekinteni egy olyan $(\mathfrak{H}, G^h)$ típusú $\mathfrak{E}$ teret, amelynek a G Gram-operátora pozitív és G^{-1} nem korlátos. Akkor maga $\mathfrak{E}$ reguláris, de nem szabályos (nem τ_2-teljes).

Speciálisan ha $\mathfrak{L}$ *altér, akkor* $\overline{\mathfrak{L}+\mathfrak{L}'}=\mathfrak{E}$ *akkor és csak akkor, ha* $\mathfrak{L}$ *nemelfajuló.*

A 4. § 6°. állításából következik, hogy egy $\mathfrak{E}$ J-térbeli $\mathfrak{L}$ nem-zárt lineál nem lehet vetítésre nézve teljes. Ami viszont a zárt lineálokat, vagyis az $\mathfrak{L}\subset\mathfrak{E}$ altereket illeti, $\mathfrak{L}$ vetítésre vonatkozó teljességéhez szükséges és elégséges (4. 3. tétel), hogy $\mathfrak{L}$-en a $\tau_1(\mathfrak{L}, J)$, $\tau_1(\mathfrak{E}, J)$ topológiák egymással ekvivalensek legyenek, minthogy pedig az 1°. állítás alapján az $\mathfrak{E}$ téren $\tau_1(\mathfrak{E}, J)$ egybeesik a $\mathfrak{H}$-topológiával, bebizonyítottuk az alábbi állítást:

4°. *Az* $\mathfrak{E}$ *J-tér* $\mathfrak{L}$ *altere vetítésre nézve akkor és csak akkor teljes, ha szabályos* (3. §, 7. pont).

Definit $\mathfrak{L}$ alterek esetén az 5. § 3°. állítása értelmében a fenti 4°. állítást így lehet átfogalmazni:

5°. *Definit altér vetítésre nézve akkor és csak akkor teljes, ha* τ_2*-teljes.*

2. Vezessük be az $\mathfrak{E}_+=P_+\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_-=P_-\mathfrak{E}$ jelöléseket. Akkor fennáll az

$$\mathfrak{E}=\mathfrak{E}_+\oplus\mathfrak{E}_-$$

egyenlőség, és ez az $\mathfrak{E}$ térnek egy kanonikus felbontása (3. §, 2. pont).

6°. *Legyen* $\mathfrak{L}$ *tetszés szerinti nemnegatív (nempozitív) lineál az* $\mathfrak{E}$ *J-térben. Akkor a* P_+ (P_-) *vetítő operátor az* $\mathfrak{L}$ *lineált lineáris és* $\mathfrak{H}$*-homeomorf módon (azaz kölcsönösen egyértelműen és a* $\mathfrak{H}$*-topológiára nézve mindkét irányban folytonosan) képezi le a* $P_+\mathfrak{L}\subset\mathfrak{E}_+$ $(P_-\mathfrak{L}\subset\mathfrak{E}_-)$ *lineálra.*

A bizonyítást végezzük nemnegatív $\mathfrak{L}$ lineál esetére szorítkozva. Az $\mathfrak{L}$ lineál $P_+\mathfrak{L}$-re való P_+ leképezésének kölcsönös egyértelműsége abból látható, hogy $P_+x=0$, $x\in\mathfrak{L}$ esetén $x=P_-x$, minthogy pedig $\mathfrak{L}$ nemnegatív, $x=0$. Ami a $P_+\mathfrak{L}$ lineált $\mathfrak{L}$-be átvivő inverz leképezés folytonosságát illeti, az az

$$\|x\|^2=\|P_+x\|^2+\|P_-x\|^2\leqq 2\|P_+x\|^2$$

egyenlőtlenségből adódik, amely a

$$0\leqq G(x, x)=(Jx, x)=\|P_+x\|^2-\|P_-x\|^2$$

összefüggés miatt bármilyen $x\in\mathfrak{L}$ vektorra érvényes.

6. 1. TÉTEL. a) *Ahhoz, hogy az* $\mathfrak{L}\subset\mathfrak{E}$ *nemnegatív (pozitív) lineál maximális nemnegatív (pozitív) altér*[15] *legyen, szükséges és elégséges a*

$$P_+\mathfrak{L}=\mathfrak{E}_+ \tag{6. 1}$$

feltétel teljesülése.

b) *Ahhoz, hogy az* $\mathfrak{L}\subset\mathfrak{E}$ *nempozitív (negatív) lineál maximális nempozitív (negatív) altér legyen, szükséges és elégséges a*

$$P_-\mathfrak{L}=\mathfrak{E}_- \tag{6. 2}$$

feltétel teljesülése.

c) *Ahhoz, hogy az* $\mathfrak{L}\subset\mathfrak{E}$ *semleges lineál maximális semleges altér legyen, szükséges és elégséges, hogy a* (6. 1), (6. 2) *egyenlőségek közül az egyik teljesüljön.*

[15] Így hívjuk az $\mathfrak{E}$ térnek azokat a maximális nemnegatív (pozitív) lineáljait, amelyek $\mathfrak{H}$-alterek.

Bizonyítás. Először tegyük fel, hogy az $\mathfrak{L}$ nemnegatív lineálra fennáll a (6. 1) egyenlőség. Ha létezne olyan nemnegatív $\mathfrak{L}_1 \supset \mathfrak{L}$ altér, amelyre $\mathfrak{L}_1 \setminus \mathfrak{L} \neq 0$, akkor a 6°. állítás alapján azt kapnánk, hogy $P_+\mathfrak{L}_1 \setminus \mathfrak{E}_+ = P_+\mathfrak{L}_1 \setminus P_+\mathfrak{L} \neq 0$, és ez ellentmond a $P_+\mathfrak{L}_1 \subset \mathfrak{E}_+$ inkluziónak. Minthogy minden pozitív (és semleges) altér nemnegatív, az a), c) feltételek elégséges voltát bebizonyítottuk. A b) feltétel elégségessége analóg módon igazolható.

Most legyen $\mathfrak{L}$ valamilyen nemnegatív (pozitív) altér. Ha $P_+\mathfrak{L} \neq \mathfrak{E}_+$, akkor $P_+\mathfrak{L}$ zártsága miatt, ami a 6°. állításból következik, található $(0 \neq) x_0 \in \mathfrak{E}_+ \ominus P_+\mathfrak{L}$ vektor. Nem nehéz belátni, hogy ebben az esetben $\mathfrak{L}_1 = \mathfrak{L} \oplus \{x_0\}$ nemnegatív (és pozitív $\mathfrak{L}$ esetén pozitív) altér, amely tartalmazza $\mathfrak{L}$-et, következésképpen $\mathfrak{L}$ nem maximális. Ha viszont $\mathfrak{L}$ semleges altér és $P_+\mathfrak{L} \neq \mathfrak{E}_+$, $P_-\mathfrak{L} \neq \mathfrak{E}_-$, akkor $\mathfrak{L} \oplus \{x_0 + y_0\}$, ahol $(0 \neq) x_0 \in \mathfrak{E}_+ \ominus P_+\mathfrak{L}$, $(0 \neq) y_0 \in \mathfrak{E}_- \ominus P_-\mathfrak{L}$, $\|x_0\| = \|y_0\|$, egy $\mathfrak{L}$-et tartalmazó semleges altér, tehát $\mathfrak{L}$ nem lehet maximális semleges altér. A tételt bebizonyítottuk.

Minthogy az $\mathfrak{L}$ Hilbert-tér dimenziója (az $\mathfrak{L}$-beli teljes ortonormális bázisok számossága) lineáris homeomorf leképezések során nem változik meg, a 6°. állításból és a 6. 1. tételből az alábbiakat kapjuk.

6. 2. TÉTEL. *Az $\mathfrak{E}$ J-tér minden maximális nemnegatív és pozitív alterének a dimenziója megegyezik és egyenlő az $\mathfrak{E}_+ = P_+\mathfrak{E}$ altér dimenziójával. Az $\mathfrak{E}$ tér minden maximális nempozitív és negatív alterének dimenziója megegyezik és egyenlő az $\mathfrak{E}_- = P_-\mathfrak{E}$ altér dimenziójával. Az $\mathfrak{E}$ térben minden maximális semleges altér dimenziója egyenlő $\mathfrak{E}_+$ és $\mathfrak{E}_-$ dimenziója közül a kisebbikkel.*

Ebből és a kanonikus felbontások komponenseinek maximalitásából (3. §, 2. pont) közvetlenül adódik az alábbi állítás, amelyet úgy tekinthetünk, mint a kvadratikus alakok tehetetlenségi törvényének általánosítását.

7°. *Ha*

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{M}_+ \dotplus \mathfrak{M}_-$$

az $\mathfrak{E}$ J-tér kanonikus felbontása, akkor

$$\dim \mathfrak{M}_+ = \dim \mathfrak{E}_+, \quad \dim \mathfrak{M}_- = \dim \mathfrak{E}_-.$$

3. Tekintsünk valamilyen $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{E}$ lineált. Ha van olyan K lineáris operátor, amely az $\mathfrak{E}_+$ alteret $\mathfrak{E}_-$-ba képezi le, az $\mathfrak{E}_-$ altéren azonosan nulla, és amelyre igaz az, hogy $\mathfrak{L}$ az $\mathfrak{E}$ tér

$$x = x_+ + Kx_+ \qquad (x_+ \in \mathfrak{E}_+)$$

alakban felírható vektoraiból és csak ezekből áll, akkor azt fogjuk mondani, hogy *K az $\mathfrak{L}$ lineál $\mathfrak{E}_+$-ra vonatkozó szög-operátora.* Analóg módon definiálható *az $\mathfrak{L}$ lineál $\mathfrak{E}_-$-ra vonatkozó szög-operátora.*

A következőkben bizonyítás nélkül idézünk számos egyszerű állítást, amelyek a szög-operátorok segítségével leírják a J-terek maximális altereinek elhelyezkedését (a bizonyításokat lásd a [33] dolgozatban[16]).

6. 3. TÉTEL. *Ahhoz, hogy az $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{E}$ lineál maximális nemnegatív altér legyen, szükséges és elégséges, hogy az $\mathfrak{L}$ lineál $\mathfrak{E}_+$-ra vonatkozó K szög-operátora létezzék és kontrakció legyen: $\|K\| \leq 1$. Ezen belül $\mathfrak{L}$ akkor és csak akkor maximális pozitív*

[16] A [33] cikkben „szög-operátor" helyett a „szög-együttható" elnevezés szerepel.

altér, ha K az $\mathfrak{E}_+$ altéren teljesen nem-izometrikus kontrakció ($0 \neq x \in \mathfrak{E}_+$ *esetén* $\|Kx\| < \|x\|$), *továbbá* $\mathfrak{L}$ *akkor és csak akkor maximális semleges altér, ha a* K *operátor az* $\mathfrak{E}_+$ *altéren izometrikus* ($x \in \mathfrak{E}_+$ *esetén* $\|Kx\| = \|x\|$).

Ebből és a nempozitív lineálokra érvényes analóg állításból következik, hogy *az* $\mathfrak{L}$ *lineál akkor és csak akkor hipermaximális semleges* (3. §, 6. pont) *altér, ha szög-operátora az* $\mathfrak{E}_+$ *alteret izometrikusan* $\mathfrak{E}_-$*-ra képezi le.*

6. 4. TÉTEL. *Az* $\mathfrak{L}$ ($\subset \mathfrak{E}$) *maximális pozitív (negatív) altér akkor és csak akkor szabályos (és így vetítésre nézve teljes* (4. §, 2. pont)*), ha* $\mathfrak{E}_+$*-ra (ill.* $\mathfrak{E}_-$*-ra) vonatkozó* K *szög-operátorára teljesül a*

$$\|K\| < 1$$

egyenlőtlenség.

Megjegyezzük, hogy a 6. 3. és 6. 4. tétel másik, ekvivalens megfogalmazását kapjuk, ha az $\mathfrak{L}$ lineál K szög-operátora helyett azt az $\mathfrak{L}$-re „ferdén" vetítő E operátort ($E^2 = E$) tekintjük, amelyre nemnegatív lineál esetén $EP_+ = E$, $P_+E = P_+$, nempozitív lineál esetén $EP_- = E$, $P_-E = P_-$. Nem nehéz belátni, hogy ezen E vetítő operátor és a K szög-operátor között fennállnak az

$$E = P_+ + K \ (\mathrm{sign}\ \mathfrak{L} \geqq 0), \qquad E = P_- + K \ (\mathrm{sign}\ \mathfrak{L} \leqq 0)$$

egyenlőségek.

A 6. 4. tételből azt nyerjük, hogy a J-terek osztályában a $\Pi_\varkappa$ terek (2. §, 7. pont) a következőképpen jellemezhetők.

6. 5. TÉTEL. *Ahhoz, hogy az* $\mathfrak{E}$ *J-térben minden definit (pozitív vagy negatív) altér szabályos legyen, szükséges és elégséges, hogy az* $\mathfrak{E}_+$, $\mathfrak{E}_-$ *alterek közül legalább az egyiknek a dimenziója véges legyen, vagyis hogy az* $\mathfrak{E}$ *tér* $\Pi_\varkappa$*-típusú legyen* ($\varkappa = \min\{\dim \mathfrak{E}_+, \dim \mathfrak{E}_-\}$).

Egy $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{E}$ altér és J-ortogonális komplementuma, $\mathfrak{L}'$ szög-operátorai között a kapcsolatot a következő állítás adja meg:

8°. *Ha* K *az* $\mathfrak{L}$ *altér* $\mathfrak{E}_+$*-ra vonatkozó szög-operátora, akkor* K^* *az* $\mathfrak{L}'$ *altér* $\mathfrak{E}_-$*-ra vonatkozó szög-operátora.*

A bizonyítás abból adódik, hogy $x \in \mathfrak{L}'$ akkor és csak akkor, ha tetszés szerinti $x_+ \in \mathfrak{E}_+$ vektorra $(Jx, x_+ + Kx_+) = 0$, azaz $(P_+x, x_+) = (K^*P_-x, x_+)$. Minthogy $\mathfrak{R}(K^*) \subset \mathfrak{E}_+$, az utóbbi egyenlőség ekvivalens azzal, hogy $P_+x = K^*P_-x$. Más szóval $x \in \mathfrak{L}'$ akkor és csak akkor, ha

$$x = K^*P_-x + P_-x,$$

ez pedig éppen azt jelenti, hogy K^* az $\mathfrak{L}'$ altér $\mathfrak{E}_-$-ra vonatkozó szög-operátora.

Innen közvetlenül kapjuk az alábbiakat:

9°. *Ha* $\mathfrak{L}$ *maximális nemnegatív (nempozitív, pozitív, negatív) altér, akkor* $\mathfrak{L}'$ *maximális nempozitív (illetve rendre nemnegatív, negatív, pozitív) altér.*

Azonkívül a 8°. állításból és a 6. 4. tételből az $\mathfrak{E}$ J-tér összes kanonikus felbontásainak következő leírása adódik:

6. 6. TÉTEL. *Ahhoz, hogy* $\mathfrak{M}_+$ *és* $\mathfrak{M}_-$ *az* $\mathfrak{E}$ *J-tér valamilyen kanonikus felbontásának a komponensei legyenek, szükséges és elégséges, hogy fennálljanak az*

$$\mathfrak{M}_+ = (P_+ + K)\mathfrak{E}_+, \qquad \mathfrak{M}_- = (P_- + K^*)\mathfrak{E}_- \tag{6. 3}$$

összefüggések, ahol a K lineáris operátor teljesíti a

$$\|K\|<1, \quad K\mathfrak{E}_+\subset\mathfrak{E}_-, \quad K\mathfrak{E}_- = 0$$

feltételeket.

Most megmutatjuk, hogy egy $\mathfrak{E}$ *J-térben bármilyen $\mathfrak{L}$ altér tanulmányozása visszavezethető maximális alterek vizsgálatára.* Ehhez tekintsük az $\mathfrak{L}$ altér olyan

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_+\oplus\mathfrak{L}_-\oplus\mathfrak{L}_0$$

kanonikus felbontását, amelynek a komponensei nemcsak J-ortogonálisak, hanem $\mathfrak{H}$-ortogonálisak is egymásra (lásd 3. §, 2. pont). Vezessük be a következő jelöléseket:

$$\mathfrak{E}_+^{(1)} = P_+\mathfrak{L}_+, \quad \mathfrak{E}_-^{(1)} = \overline{P_-\mathfrak{L}_+}, \quad \mathfrak{E}_+^{(2)} = \overline{P_+\mathfrak{L}_-}, \quad \mathfrak{E}_-^{(2)} = P_-\mathfrak{L}_-,$$

$$\mathfrak{E}_+^{(3)} = P_+\mathfrak{L}_0, \quad \mathfrak{E}_-^{(3)} = P_-\mathfrak{L}_0, \quad \mathfrak{E}^{(k)} = \mathfrak{E}_+^{(k)}\oplus\mathfrak{E}_-^{(k)} \qquad (k=1,2,3).$$

Ha $x\in\mathfrak{L}_+$, $y\in\mathfrak{L}_-$, akkor

$$(P_+x, P_+y)+(P_-x, P_-y) = (x, y) = 0$$

és

$$(P_+x, P_+y)-(P_-x, P_-y) = (Jx, y) = 0.$$

Ebből következik az $\mathfrak{E}_+^{(1)}$ és $\mathfrak{E}_+^{(2)}$, $\mathfrak{E}_-^{(1)}$ és $\mathfrak{E}_-^{(2)}$ alterek $\mathfrak{H}$-ortogonalitása. Ugyanilyen megfontolások alapján végül is bebizonyíthatjuk, hogy az $\mathfrak{E}^{(1)}, \mathfrak{E}^{(2)}, \mathfrak{E}^{(3)}$ alterek páronként $\mathfrak{H}$-ortogonálisak és J-ortogonálisak. Nem nehéz belátni, hogy az $\mathfrak{E}^{(k)}$ $(k=1, 2, 3)$ altéren a J-metrika azt a J_k-metrikát indukálja, amelynek Gram-operátora $J_k = P_+^{(k)}-P_-^{(k)}$, ahol $P_+^{(k)}$ és $P_-^{(k)}$ az $\mathfrak{E}_+^{(k)}$ ill. $\mathfrak{E}_-^{(k)}$ altérhez tartozó Hilbert-féle merőleges vetítés operátora. A 6. 1. tétel értelmében $\mathfrak{L}_+$ maximális pozitív altér $\mathfrak{E}^{(1)}$-ben, $\mathfrak{L}_-$ maximális negatív altér $\mathfrak{E}^{(2)}$-ben, $\mathfrak{L}_0$ hipermaximális semleges altér $\mathfrak{E}^{(3)}$-ban. Könnyen látható, hogy az $\mathfrak{L}$ altér J-ortogonális komplementuma — az $\mathfrak{L}'$ altér — előállítható

$$\mathfrak{L}' = (\mathfrak{L}_+)_1'\oplus(\mathfrak{L}_-)_2'\oplus\mathfrak{L}_0\oplus\mathfrak{E}^{(4)} \tag{6. 4}$$

alakban, ahol $(\mathfrak{M})_k'$ az $\mathfrak{M}\subset\mathfrak{E}^{(k)}$ altér J_k-ortogonális komplementuma $\mathfrak{E}^{(k)}$-ban és $\mathfrak{E}^{(4)} = \mathfrak{E}\ominus[\mathfrak{E}^{(1)}\oplus\mathfrak{E}^{(2)}\oplus\mathfrak{E}^{(3)}]$. A (6. 4) felbontás bizonyításánál felhasználtuk, hogy a 3. 3. tétel alapján $(\mathfrak{L}_0)_3'=\mathfrak{L}_0$.

4. Az 5. 2. tétel következménye szerint az $\mathfrak{E}$ G-térben minden vetítésre nézve teljes definit lineál reguláris. Ha az $\mathfrak{E}$ tér J típusú, akkor ennek a fordítottja is igaz, amint az alábbi állításból következik.

6. 7. tétel. *Az $\mathfrak{E}$ J-térben minden nem-szabályos definit altér szinguláris.*

A 3. pont végén mondottak értelmében a bizonyítást elég maximális pozitív nem-szabályos $\mathfrak{L}\subset\mathfrak{E}$ altérre végezni. Ha K az $\mathfrak{L}$ altér szög-operátora, akkor a 6. 3. tétel alapján

$$([P_+-K^*K]x_+, x_+) = \|x_+\|^2-\|Kx_+\|^2>0$$

minden nullától különböző $x_+\in\mathfrak{E}_+$ vektorra. Ebből és a 6. 4. tétel szerint fennálló $\|K^*K\|=\|K\|^2=1$ egyenlőségből következik, hogy a $\lambda=0$ pont, amely az $\mathfrak{E}_+$ altéren tekintett $T= P_+-K^*K$ operátornak nem sajátértéke, a spektrum torlódási pontja. Legyen E_λ $(0<\lambda\leqq M)$ az $\mathfrak{E}_+$ altéren tekintett T operátor balról folytonos spektrálserege $(E_0=0,\ E_M=P_+,\ E_{\lambda-0}=E_\lambda)$. Tekintsük a

$$\Delta_1=\left(\frac{M}{8},M\right],\quad \Delta_2=\left(\frac{M}{27},\frac{M}{8}\right],\ldots,\quad \Delta_n=\left(\frac{M}{(n+1)^3},\frac{M}{n^3}\right],\ldots$$

félig zárt intervallumokat. Az $\mathfrak{M}_k=E_{\Delta_k}\mathfrak{E}_+$ alterek sorozatából válasszuk ki a sorozat nullától különböző tagjaiból álló $\{\mathfrak{M}_{k_n}\}$ részsorozatot (minthogy $\lambda=0$ a T operátor spektrumának torlódási pontja, ez a részsorozat végtelen). Vegyünk fel $x_n^+\in\mathfrak{M}_{k_n}\subset\mathfrak{E}_+$, $\|x_n^+\|=1$ $(n=1,2,\ldots)$ vektorokat. Nyilván

$$(Tx_n^+,x_n^+)\leqq\frac{1}{n^3}\qquad(n=1,2,\ldots).$$

Tekintettel arra, hogy $(x_i^+,x_j^+)=\delta_{ij}$, az

$$y_0^+=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x_n^+\in\mathfrak{E}_+$$

vektor létezik. Most tekintsük az

$$y_n=n(x_n^++Kx_n^+)\in\mathfrak{L}\qquad(n=1,2,\ldots)$$

sorozatot. Fennáll

$$(Jy_n,y_n)=n^2(J[x_n^++Kx_n^+],x_n^++Kx_n^+)=$$

$$=n^2([P_+-K^*K]x_n^+,x_n^+)=n^2(Tx_n^+,x_n^+)\leqq\frac{1}{n},$$

tehát $(Jy_n,y_n)\to0$ $(n\to\infty)$. Ugyanakkor

$$(Jy_n,y_0^+)=n(x_n^+,y_0^+)=1\qquad(n=1,2,\ldots),$$

és így az

$$f_{y_0^+}(x)=(Jx,y_0^+)$$

funkcionál nem τ_2-folytonos. Ily módon bebizonyítottuk, hogy az $\mathfrak{L}$ altér szinguláris.

5. Ebben a pontban meg fogjuk mutatni, hogy a $(\mathfrak{H},G^h)$-terek osztályában a J-terek az „univerzalitás" tulajdonságával rendelkeznek. Annak érdekében, hogy áttérhessünk a pontos megfogalmazásokra, bevezetjük a következő definíciót. Azt fogjuk mondani, hogy a $(\mathfrak{H},G^h)$ típusú $\mathfrak{E}_1,\mathfrak{E}_2$ terek *ekvivalensek*, ha az $\mathfrak{E}_1$ térnek létezik $\mathfrak{H}$-homeomorf és G-izometrikus lineáris leképezése[17] az $\mathfrak{E}_2$ térre.

6. 8. TÉTEL. *Legyen $\mathfrak{E}$ olyan J-tér, amelyre* $\dim\mathfrak{E}_+=\dim\mathfrak{E}_-=\mathfrak{M}$. *Akkor bármilyen $\mathfrak{N}\leqq\mathfrak{M}$ dimenziójú $\mathfrak{E}_1$ $(\mathfrak{H},G^h)$-térhez található $\mathfrak{E}$-ben vele ekvivalens $\mathfrak{L}$ altér.*

[17] Az U leképezést G-izometrikusnak nevezzük, ha $x,y\in\mathfrak{E}_1$ esetén $G_2(Ux,Uy)=G_1(x,y)$ (itt $G_i(x,y)$ az az alak, amely az $\mathfrak{E}_i$ tér G-metrikáját értelmezi).

A bizonyítást nyilván elegendő arra az esetre elvégezni, amikor $\mathfrak{E}_1$ pozitív (lásd 3. pont) és $\dim \mathfrak{E}_1 = \mathfrak{N} = \mathfrak{M}$. Legyen $\mathfrak{E}_1$ ilyen $(\mathfrak{H}, G^h)$-tér, és az $\mathfrak{E}_1$-beli G-metrikát indukálja a $G_1(x, y)$ alak, a $\mathfrak{H}$-topológiát pedig az $(x, y)_1$ skaláris szorzat. Az utóbbi nyilván megválasztható úgy, hogy G_1-nek — a $G_1(x, y)$ alak $\mathfrak{E}_1$-beli Gram-operátorának — a normája legfeljebb 1 legyen. Most legyen U_1 az $\mathfrak{E}_1$ térnek az $\mathfrak{E}_+$ altérre való $\mathfrak{H}$-izometrikus leképezése (ennek létezését az $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}$ egyenlőség biztosítja). Tekintsünk egy $\mathfrak{E}_+$-on önadjungált A operátort, amely teljesíti a

$$P_+ - A^2 = U_1 G_1 U_1^{-1}$$

feltételt; ez az $\|U_1 G_1 U_1^{-1}\| \leqq 1$ egyenlőtlenség következtében lehetséges. Legyen

$$K = VA,$$

ahol V az $\mathfrak{E}_+$ altérnek $\mathfrak{E}_-$-ra való tetszés szerinti $\mathfrak{H}$-izometriája. Fennáll $\|A\| \leqq 1$, tehát $\|K\| \leqq 1$.

Legyen $\mathfrak{L}$ $(\subset \mathfrak{E})$ olyan altér, amelynek szög-operátora K-val egyenlő. A 6. 3. tétel alapján $\mathfrak{L}$ maximális nemnegatív altér. Bebizonyítjuk, hogy $\mathfrak{L}$ és $\mathfrak{E}_1$ ekvivalens egymással. Ennek érdekében megjegyezzük, hogy először is a 6°. állítás értelmében az $U = U_1^{-1} P_+$ leképezés $\mathfrak{L}$-nek $\mathfrak{E}_1$-re való $\mathfrak{H}$-homeomorfizmusa. Másodszor, $x, y \in \mathfrak{L}$ esetén

$$J(x, y) = ([P_+ - K^*K]P_+x, P_+y) = ([P_+ - A^2]P_+x, P_+y) =$$
$$= (G_1 U_1^{-1} P_+ x, U_1^{-1} P_+ y)_1 = (G_1 Ux, Uy)_1 = G_1(Ux, Uy),$$

és így az U leképezés G-izometrikus. A tételt bebizonyítottuk.

6. Befejezésül vizsgáljunk meg néhány kérdést a J-terek bázisaival kapcsolatban. A szeparábilis esetre fogunk szorítkozni (annak ellenére, hogy analóg eredmények általánosabb feltevések mellett is megfogalmazhatók) abból a célból, hogy felhasználhassuk a $\mathfrak{H}$-térbeli biortogonális rendszerek N. K. BARItól [59] származó elméletének alaptételeit[18].

Emlékeztetünk arra, hogy az $\mathfrak{E}$ szeparábilis $\mathfrak{H}$-térben vektorok két teljes rendszere, $\mathfrak{S} = \{e_k\}_1^\infty$ és $\mathfrak{S}^* = \{g_k\}_1^\infty$ akkor alkot $\{\mathfrak{S}, \mathfrak{S}^*\}$ *biortogonális rendszert*, ha $(e_i, g_j) = \delta_{ij}$. Az $\mathfrak{S}^*$ rendszert (amelyet $\mathfrak{S}$ egyértelműen meghatároz) az $\mathfrak{S}$ rendszer *konjugáltjának* nevezzük. Az $\mathfrak{S}$ rendszert *Bessel-félének* mondjuk, ha $x \in \mathfrak{E}$ esetén

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(x, g_k)|^2 < \infty,$$

és *Hilbert-félének*, ha tetszés szerinti, a

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\gamma_k|^2 < \infty$$

feltételt teljesítő γ_k $(k = 1, 2, \ldots)$ számokhoz található egy és csak egy olyan $x \in \mathfrak{E}$ vektor, amelyre $(x, g_k) = \gamma_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Ismeretes, hogy ha $\mathfrak{S}$ Bessel-féle, akkor $\mathfrak{S}^*$ Hilbert-féle. *Ha egy $\mathfrak{S}$ rendszer egyszerre Bessel-féle és Hilbert-féle, akkor $\mathfrak{S}$ bázis az $\mathfrak{E}$ térben,* vagyis bármelyik $x \in \mathfrak{E}$ vektor egyértelműen előállítható erősen konvergens

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k e_k, \quad \gamma_k = (x, g_k) \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

[18] Lásd még a [60] munkát.

sor összegeként. Az ilyen bázisokat *Riesz-bázisoknak* hívják. Amint I. M. GELFAND [61] megmutatta, *az $\mathfrak{S}$ bázis akkor és csak akkor Riesz-bázis, ha vektorainak bármilyen átrendezése esetén bázis marad.* A Riesz-bázis, a Bessel-féle és a Hilbert-féle rendszer további ekvivalens definícióit lásd az [59], [60] munkákban.

Most legyen $\mathfrak{S}=\{e_k\}_1^\infty$ az $\mathfrak{E}$ J-térben teljes J-ortonormális rendszer, azaz $(Je_i, e_j) = \pm\delta_{ij}$. Legyen $g_k = Je_k$, ha $(Je_k, e_k)=1$, és $g_k = -Je_k$, ha $(Je_k, e_k) = -1$. Ekkor az $\mathfrak{S}^* = \{g_k\}$ rendszer az $\mathfrak{S}$ rendszer konjugáltja. Könnyű belátni, hogy az $\{e_k\}$, $\{\pm Je_k\}$ rendszerek egyszerre Bessel-félék vagy Hilbert-félék. Ebből következik az alábbi állítás.

10°. *Ahhoz, hogy az $\mathfrak{E}$ térben teljes és J-ortonormális $\mathfrak{S}$ rendszer az $\mathfrak{E}$ tér Riesz-bázisa legyen, elégséges, ha $\mathfrak{S}$ vagy Bessel-féle (tetszés szerinti $x\in\mathfrak{E}$ esetén $\sum_{n=1}^{\infty}|(Jx, e_k)|^2<\infty$), vagy Hilbert-féle (a $(Jx, e_k)=\gamma_k$, $k=1, 2, \ldots$ egyenletrendszer egyértelműen megoldható $\mathfrak{E}$-ben, hacsak $\sum_{k=1}^{\infty}|\gamma_k|^2<\infty$).*

Legyen $\mathfrak{S}=\{e_k\}_1^\infty$ teljes J-ortonormális rendszer $\mathfrak{E}$-ben. Tekintsük az $\mathfrak{M}_+$, $\mathfrak{M}_-$ altereket — az $\mathfrak{S}_+ = \{e_k:(Je_k, e_k)=1\}$, ill. $\mathfrak{S}_- = \{e_k:(Je_k, e_k) = -1\}$ rendszerek zárt lineáris burkait. Nyilvánvaló, hogy

$$\overline{\mathfrak{M}_+ \dotplus \mathfrak{M}_-} = \mathfrak{E}.$$

6. 9. TÉTEL. *Ahhoz, hogy az $\mathfrak{S}=\{e_k\}_1^\infty$ J-ortonormális rendszer az $\mathfrak{E}$ tér Riesz-bázisa legyen, szükséges és elégséges az*

$$\mathfrak{M}_+ \dotplus \mathfrak{M}_- = \mathfrak{E}$$

feltétel, vagyis hogy $\mathfrak{M}_+$ és $\mathfrak{M}_-$ az $\mathfrak{E}$ tér valamilyen kanonikus felbontásának komponensei legyenek.

Bizonyítás. Ha $\mathfrak{M}_+ \dotplus \mathfrak{M}_- = \mathfrak{E}$, akkor tetszés szerinti $x\in\mathfrak{E}$ vektor előállítható $x=x_+ + x_-$ $(x_+\in\mathfrak{M}_+,\ x_-\in\mathfrak{M}_-)$ alakban. Minthogy $\mathfrak{S}_+$ és $\mathfrak{S}_-$ J-ortonormális bázis az $\mathfrak{M}_+$ ill. $\mathfrak{M}_-$ definit altérben, fennáll

$$\sum_{e_k\in\mathfrak{S}_+}|(Jx_+, e_k)|^2<\infty, \qquad \sum_{e_k\in\mathfrak{S}_-}|(Jx_-, e_k)|^2<\infty.$$

vagyis

$$\sum_{k=1}^{\infty}|(Jx, e_k)|^2<\infty.$$

Ilyen módon az $\mathfrak{S}$ rendszer Bessel-féle, tehát a 10°. állítás szerint $\mathfrak{S}$ Riesz-bázis $\mathfrak{E}$-ben.

Megfordítva, legyen $\mathfrak{S}=\{e_k\}_1^\infty$ Riesz-bázis az $\mathfrak{E}$ térben. Ha x az $\mathfrak{E}$ tér tetszés szerinti vektora, akkor $x=\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k e_k$ $(\gamma_k=\pm(Jx, e_k))$, ahol $\sum_{k=1}^{\infty}|\gamma_k|^2<\infty$. Legyen $e_k\in\mathfrak{S}_+$ esetén $\gamma_k^+=\gamma_k$, $\gamma_k^-=0$, $e_k\in\mathfrak{S}_-$ esetén pedig $\gamma_k^+=0$, $\gamma_k^-=\gamma_k$. Akkor $\sum_{k=1}^{\infty}|\gamma_k^+|^2<\infty$, $\sum_{k=1}^{\infty}|\gamma_k^-|^2<\infty$, és így léteznek az $x_+=\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k^+e_k\in\mathfrak{M}_+$, $x_-=\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k^-e_k\in\mathfrak{M}_-$ vektorok, ebből viszont következik az

$$\mathfrak{M}_+ \dotplus \mathfrak{M}_- = \mathfrak{E}$$

direkt felbontás érvényessége.

A bebizonyított tételből könnyen adódik, hogy *egy $\mathfrak{S}$ vektorrendszer akkor és csak akkor alkot J-ortonormális Riesz-bázist az $\mathfrak{E}$ J-térben, ha $\mathfrak{S}=\mathfrak{S}_+\cup\mathfrak{S}_-$, ahol $\mathfrak{S}_+$ és $\mathfrak{S}_-$ J-ortonormális bázis az $\mathfrak{M}_+$ ill. $\mathfrak{M}_-$ definit altérben, vagyis az $\mathfrak{E}$ tér valamelyik kanonikus felbontásának komponenseiben.* Ez az állítás, tekintettel a 6. 6. tételre, az $\mathfrak{E}$ *J*-tér Riesz-bázisainak teljes leírását adja.

Ami tetszés szerinti G^h-típusú $\mathfrak{E}$ tér $\mathfrak{S}=\{e_k\}_1^\infty$ G-ortonormális rendszereit $(G(e_i, e_j)=\pm\delta_{ij})$ illeti, ezen a téren csak R. NEVANLINNA [11] alábbi eredménye ismeretes, amelyet bizonyítás nélkül idézünk.

11°. *Ahhoz, hogy tetszés szerinti $x, y\in\mathfrak{E}$ vektorokra érvényes legyen a*

$$G(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} G(e_i, e_i)G(x, e_i)G(e_i, y)$$

abszolút konvergens bilineáris felbontás, szükséges és elégséges, hogy minden $x\in\mathfrak{E}$ vektorra

$$1) \qquad \sum_{i=1}^{\infty}|G(x, e_i)|^2<\infty,$$

$$2) \qquad \sum_{i=1}^{\infty}|G(x, e_i^-)|^2\leqq G(x, x)\leqq \sum_{i=1}^{\infty}|G(x, e_i^+)|^2$$

legyen ($G(e_i, e_i)=1$ esetén $e_i^+=e_i, e_i^-=0$; $G(e_i, e_i)=-1$ esetén $e_i^-=e_i, e_i^+=0$).
Ha ráadásul az $\mathfrak{E}$ G^h-tér nemelfajuló, akkor bármelyik x eleme egyértelműen előállítható

$$x=\sum_{i=1}^{\infty}\gamma_i e_i$$

alakú sor segítségével, amely a

$$H(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} G(x, e_i)G(e_i, y)$$

skaláris szorzat által indukált normában konvergál.

Megjegyzések és irodalmi utalások

2. §, 1. pont. Tetszés szerinti (általában nem-hermitikus) G-metrikával ellátott G-terek ilyen általános feltételek mellett való vizsgálatára, úgy látszik, ez az első eset.

2. pont. G-térbeli lokálisan konvex topológiák vizsgálatának az ötlete E. SCHEIBE-től származik [50], ő azonban hermitikus G-metrika esetére szorítkozott. E. SCHEIBE másik korlátozó feltevése az, hogy a tér nemelfajuló, ami maga után vonja a megfelelő topológiák szeparáltságát. Figyelembe kell venni, hogy az [50] cikk terminológiája (különösen a dolgozat algebrai részében) eltér a mienktől. Többek között az $\mathfrak{E}$ G-tér nemelfajuló és elfajuló lineáljait E. SCHEIBE reguláris, ill. szinguláris altereknek nevezi, az izotróp lineálokat pedig radikáloknak.

3. és 4. pont. A 2°. állítás és a 2. 1. tétel (mindkettő csak G^h-metrika esetére) az [50] műben szerepel. A „G-metrikát felülmúló topológia" kifejezés új. Lényegileg azonban (más terminológiával — vö. az 5. ponthoz írt megjegyzéssel) G^h-metrikát felülmúló $\mathfrak{H}$-topológiákkal már R. NEVANLINNA [11]—[13] foglalkozott. Viszont az említett munkák közül az utolsóban [13] szó van adott G^h-metrikát felülmúló ekvivalens és nem-ekvivalens $\mathfrak{H}$-topológiákról, pedig a 2. 1. tétel kimondja hogy az összes ilyen topológiák ekvivalensek. Nyilván az S. BANACH klasszikus tételével (vagy „zárt gráf tétellel") kapcsolatos gondolatkör R. NEVANLINNA vizsgálatainak területén kívül esett.
A 4. pont végén ismertetett példát illetően lásd a következő megjegyzést.

5. pont. G^h-metrikák hermitikusan nemnegatív és hermitikusan pozitív majoránsait először R. NEVANLINNA tanulmányozta [11]—[13], de figyelmen kívül hagyta azt a kérdést, hogy adott G^h-metrikához találhatók-e ilyenek. Az az általánosabb kérdésfeltevés, amely majoráns félnormálható topológiákra vonatkozik, itt szerepel először.

A 4. pontban ismertetett példa többek között azt mutatja, hogy van olyan G-metrika, amelyet semmilyen félnormálható topológia, és így semmilyen hermitikusan nemnegatív majoráns se majorál. Ennek a példának a szerzője M. L. BRODSZKIJ. Az a megjegyzés, hogy az M. L. BRODSZKIJ által szerkesztett G-metrikát egyetlen olyan topológia sem múlja felül, amelyet megszámlálhatóan végtelen sok félnorma értelmez, JU. P. GINZBURGtól származik.

6. és 7. pont. Gram-operátorokat $(\mathfrak{B}, G)$-terekben azelőtt nem vizsgáltak. $(\mathfrak{H}, G^h)$-terek esetén lényegileg már R. NEVANLINNÁ-nál [11] szerepeltek, ezért tanítványai és E. SCHEIBE ezeket a tereket *Nevanlinna-féléknek* nevezték.

A végtelen dimenziójú J-tereket JU. P. GINZBURG vezette be [22]—[24]. Megemlítjük, hogy az [50] dolgozat szerzője ezekre a terekre a következő eléggé esetlen kifejezést alkalmazza: „két Hilbert-tér különbsége". A 3°. állítás H. LANGER-től származik [31].

8. pont. A 2. 3. tétel nemelfajuló G^h-tér esetére megtalálható E. SCHEIBE [50] munkájában; itt a szerző a bizonyítás iránt érdeklődő olvasónak N. BOURBAKI [51] tanulmányát ajánlja. E bizonyítást JU. P. GINZBURG rekonstruálta és általánosította tetszés szerinti G-terekre. Ugyancsak tőle ered a 2. 5. tétel.

3. §, 1. pont. Itt az ismertetésben E. SCHEIBÉ-t követjük [50]. Csak arra kell figyelemmel lenni, hogy a semleges lineálokat az [50] dolgozat totálisan szinguláris altereknek nevezi.

3. pont. A (3. 8) kanonikus felbontás segítségével megszerkesztett $H(x, y)$ majoráns *minimális* abban az értelemben, hogy az adott G^h-metrika minden nemnegatív $H_1(x, y)$ majoránsára, amelyre $H_1(\mathfrak{C}_0, \mathfrak{C}_0)=H_1(\mathfrak{C}_0, \mathfrak{C}_+)=H_1(\mathfrak{C}_0, \mathfrak{C}_-)=H_1(\mathfrak{C}_+, \mathfrak{C}_-)=0$, fennáll a

$$H_1(x, x) \geqq H(x, x) \qquad (x \in \mathfrak{C})$$

egyenlőtlenség. Ilyen majoránsokat $(\mathfrak{H}, G^h)$-terekben R. NEVANLINNA tanulmányozott [11]—[13].

5. pont. A 3. 1. tétel és 3°., 4°., 5°. következményei nemelfajuló G^h-metrika esetében E. SCHEIBÉ-től [50], tetszés szerinti G-metrikára való általánosításuk pedig JU. P. GINZBURGtól ered.

6. pont. Ezen pont eredményeinek a többsége a $\Pi_\varkappa$ terek speciális esetére már korábban ismeretes volt (lásd [8], 2. 3. lemma, 4. 1. lemma, 4. 1. tétel). Ferdén kapcsolt semleges lineálokkal (M. G. KREJN elnevezése) $\Pi_\varkappa$ terekben először L. SZ. PONTRJAGIN-nak volt dolga [3], majd I. SZ. JOHVIDOV alkalmazta őket [62], [6], [8][19].

J-terek hipermaximális semleges lineáljait JU. P. GINZBURG vizsgálta [33]. A 3. 3. tételt általános feltételek mellett I. SZ. JOHVIDOV bizonyította be. J-terek esetében ez a tétel a [33] munka állításaiból következik.

7. pont. Az aszimptotikusan izotróp sorozatokat, szabályos és relatíve szabályos altereket JU. P. GINZBURG vezette be [32], [33]. Ezen fogalmak (nem-zárt) lineálokra való általánosítása és a 3. 5. tétel I. SZ. JOHVIDOV-tól származik.

E pont összes eredményei természetes módon kiterjeszthetők $(\mathfrak{B}, G)$-terekre.

4. §, 1. pont. $\Pi_\varkappa$ tér nemelfajuló altereire való G-vetületeket L. SZ. PONTRJAGIN vizsgált [3], és az ő nyomán általánosabb feltevések mellett I. SZ. JOHVIDOV és M. G. KREJN [7], [8]. $(\mathfrak{H}, G^h)$-terek esetében a (zárt alterekre való) G-vetületek elméletének kidolgozását R. NEVANLINNA kezdte el [12]; kutatásait tanítványa, I. S. LOUHIVAARA folytatta [15], [21]. Az utoljára említett munkában már nem-hermitikus G-metrikával ellátott $\mathfrak{H}$-terekről van szó. I. S. LOUHIVAARÁ-tól függetlenül ebben az irányban általánosabb eredményeket kapott JU. P. GINZBURG [32], [52]. A tetszés szerinti G^h-terekben való G-vetítés kérdésével először I. SZ. JOHVIDOV foglalkozott [48], definit lineálokra való G-vetítésre szorítkozva (vö. 5. §, 1. és 2. pont). A G-vetületek általános elméletét JU. P. GINZBURG dolgozta ki [52].

A 3°. állítás $(\mathfrak{H}, G^h)$-terek esetére megtalálható I. S. LOUHIVAARA [15] cikkében. Ugyanő egy másik dolgozatában [21] idézi a nem-hermitikus G-metrikával ellátott $(\mathfrak{H}, G)$-térben való G-vetíthetőségnek egy igen bonyolult feltételét, hivatkozva F. BROWDER és W. LITTMAN eredményeire [17]—[19].

2. pont. G^h-térbeli lineál vetítésre vonatkozó teljességének fogalma lényegében E. SCHEIBE [50] munkájában szerepelt. Tőle függetlenül ezt a fogalmat és magát a „vetítésre vonatkozó teljesség" kifejezést I. SZ. JOHVIDOV vezette be [48]. A 4. 2. tétel nemelfajuló G^h-térbeli nemelfajuló $\mathfrak{L}$ lineál esetében E. SCHEIBÉ-től származik [50], az általános esetben pedig, épp úgy mint a 4. 3. tételt, JU. P. GINZBURG mondta ki először az [52] munkában. Az utóbbi tétel $(\mathfrak{H}, G)$-tér esetére a [32] cikkben jelent meg.

[19] *Megjegyzés a korrektúránál.* Lásd még BOGNÁR J. nemrég közölt cikkét [63].

3. pont. E pont állításai nemelfajuló $\mathfrak{C}$ és $\mathfrak{L}$ esetére E. SCHEIBE [50] dolgozatában szerepelnek.

4. pont. A 7°., α), β), γ) állítások a [32] dolgozatban jelentek meg. A β) állítás megtalálható I. S. LOUHIVAARA [21] művében is.

5. §, 1. pont. A reguláris és szinguláris definit lineál fogalmát I. SZ. JOHVIDOV vezette be [48]; az 5. § eredményei alapjában véve tőle származnak.

Az $m(y_0)$, $M(y_0)$ határokat ($\mathfrak{H}$, G^h)-térbeli $\mathfrak{L}$ (zárt) alterekre R. NEVANLINNA vizsgálta [12] a G-vetítés problémájával kapcsolatban. Speciálisan ő bizonyította be, hogy e megszorítások mellett a G-vetíthetőségnek az 5. 1. tétel következményében ismertetett feltétele szükséges, és τ_2-teljes $\mathfrak{L}$ altér esetén elégséges.

2. pont. Az 5. 2. tétel kissé eltérő alakban a [48] megjegyzésben került közlésre; az említett megjegyzés utolsó mondata megalapozatlan kijelentést tartalmaz arra nézve, hogy ebből a tételből a G^{-1} operátor zártsága miatt következnék a G-vetíthetőség JU. P. GINZBURGtól származó kritériuma ([32], 2. tétel).

3. és 4. pont. A. UHLMANN [42] munkájára BOGNÁR JÁNOS hívta fel a figyelmünket; tőle származik az 5. 3. tétel első bizonyítása is [46], [47]. Ezzel a bizonyítással 1960 végén módunk volt kéziratban megismerkedni. Ugyanakkor M. G. KREJN és I. SZ. JOHVIDOV a BOGNÁR JÁNOSsal folytatott levelezés során rámutatott, hogy az 5. 3. tételre adott bizonyítása önmagában nem mond ellent A. UHLMANN feltevésének, amennyiben az ezen bizonyításban megszerkesztett szinguláris lineál nem τ_2-teljes. Ellentmondást, amint BOGNÁR J. megjegyezte, csak akkor kapunk, ha az 5. 3. tételt összekapcsoljuk A. UHLMANN (U) posztulátumával. De ez a megközelítési mód nem célszerű, mert a $\Pi_\varkappa$ terektől eltekintve egyelőre nem ismerünk olyan G-tereket, amelyekben az (U) posztulátum teljesülne (a $\Pi_\varkappa$-tól különböző J-terekben már biztosan nem teljesül (6. 5. tétel)). Ami pedig a $\Pi_\varkappa$ tereket illeti, az 5. 5. tételből következik, hogy A. UHLMANN feltevésének ellentmondó példát korábban I. SZ. JOHVIDOV és M. G. KREJN konstruált ([8], 421. oldal).

6. §, 1. pont. E pont alapvető eredményei lényegében egybeesnek azokkal a tételekkel, amelyeket (más terminológiában) E. SCHEIBE közölt először [50].

2. pont. A 6°. állítás, a 6. 1. és a 6. 2. tétel JU. P. GINZBURGtól származik [33] (vö. még H. LANGER [31] és E. SCHEIBE [50] munkáival). A 7°. állítást korábban E. SCHEIBE bizonyította be [50].

3. pont. Ezen pont eredményei alapjában véve JU. P. GINZBURGtól származnak [32], [33]. A J-térbeli maximális nemnegatív és nempozitív, valamint semleges alterek bizonyos kontrakciókkal való kapcsolatára vonatkozó, a mienkhez közeli ötleteket alkalmazott, kevésbé kialakult formában, R. S. PHILLIPS [29] disszipatív hiperbolikus rendszerek tanulmányozása során.

A nemnegatív alterekre ferdén vetítő E operátorokat H. LANGER vezette be [30], [31]; tőle származik a következő eredmény, amely a 6. 3. tétel következménye: *ahhoz, hogy az E ($EP_+=E$, $P_+E=P_+$) vetítés értékkészlete maximális nemnegatív altér legyen, szükséges és elégséges az $\|E\|\leq\sqrt{2}$ egyenlőtlenség teljesülése.*

4. és 5. pont. A 6. 7. és a 6. 8. tételt JU. P. GINZBURG bizonyította be.

6. pont. A 10°. állítás és a 6. 9. tétel JU. P. GINZBURGtól származik. A 6. 9. tételnél kevésbé teljes állítást bizonyított be E. SCHEIBE [50], N. K. BARI elméletének felhasználása nélkül.

IRODALOM

[1] P. A. M. DIRAC: Bakerian lecture. The physical interpretation of quantum mechanics, *Proc. Roy. Soc.* A **180** (1942), 1—40.

[2] W. PAULI: On Dirac's new method of field quantization, *Revs. Mod. Phys.* **15** (1943), 175—207.

[3] Л. С. Понтрягин: Эрмитовы операторы в пространстве с индефинитной метрикой, *Известия АН СССР*, сер. матем. **8** (1944), 243—280.

[4] М. Г. Крейн, М. А. Рутман: Линейные операторы, оставляющие инвариантным конус в пространстве Банаха, *Успехи мат. наук* **3**, № 1 (1948), 3—95.

[5] М. Г. Крейн: Винтовые линии в пространстве Лобачевского бесконечного числа измерений, *Успехи мат. наук* **3**, № 3 (1948), 158—160.

[6] И. С. Иохвидов: Унитарные и самосопряженные операторы в пространстве с индефинитной метрикой, (диссертация). Одесса, 1950.

[7] И. С. Иохвидов, М. Г. Крейн: Спектральная теория операторов в пространствах с индефинитной метрикой. I, *Труды Московского мат. общества* **5** (1956), 367—432.

[8] И. С. Иохвидов, М. Г. Крейн: Спектральная теория операторов в пространствах с индефинитной метрикой. II, *Труды Московского мат. общества* **8** (1959), 413—496.

[9] М. И. Вишик: Метод ортогональных проекций для общих самосопряженных уравнений, *Доклады АН СССР* **58** (1947), 957—960.
[10] R. Nevanlinna: Über metrische lineare Räume. II. Bilinearformen und Stetigkeit, *Ann. Acad. Sci. Fenn.*, AI, **113** (1952).
[11] R. Nevanlinna: Über metrische lineare Räume. III. Theorie der Orthogonalsysteme, *Ann. Acad. Sci. Fenn.*, AI, **115** (1952).
[12] R. Nevanlinna: Über metrische lineare Räume. IV. Zur Theorie der Unterräume, *Ann. Acad. Sci. Fenn.*, AI, **163** (1954).
[13] R. Nevanlinna: Über metrische lineare Räume. V. Relationen zwischen verschiedenen Metriken, *Ann. Acad. Sci. Fenn.*, AI, **222** (1956).
[14] I. S. Louhivaara: Bemerkung zur Theorie der Nevanlinnaschen Räume, *Ann. Acad. Sci. Fenn.*, AI, **232** (1956).
[15] I. S. Louhivaara: Zur Theorie der Unterräume in linearen Räumen mit indefiniter Metrik, *Ann. Acad. Sci. Fenn.*, AI, **252** (1958).
[16] I. S. Louhivaara: Über das Dirichletsche Problem für die selbstadjungierten linearen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, *Rend. Circ. Mat. Palermo*, ser. II, **5** (1956), 260—273.
[17] F. E. Browder: A remark on the Dirichlet problem for non-elliptic self-adjoint partial differential equations, *Rend. Circ. Mat. Palermo.* **6** (1957), 249—253.
[18] F. E. Browder: On the Dirichlet problem for linear non-elliptic partial differential equations. II, *Rend. Circ. Mat. Palermo* **7** (1958), 303—308.
[19] W. Littman: Remarks on the Dirichlet problem for general linear partial differential equations, *Comm. Pure Appl. Math.*, **11** (1958), 145—151.
[20] C. L. Dolph: Recent developments in some non-self-adjoint problems of mathematical physics, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **67** (1961), 1—69.
[21] I. S. Louhivaara: Über verschiedene Metriken in linearen Räumen, *Ann. Acad. Sci. Fenn.*, AI, **282** (1960).
[22] Ю. П. Гинзбург: О J-нерастягивающих оператор-функциях, *Доклады АН СССР* **117** (1957), 171—173.
[23] Ю. П. Гинзбург: О J-нерастягивающих операторах в гильбертовом пространстве, *Научные записки физ.-мат. факультета Одесского пед. института* **22**, № 1 (1958), 13—20.
[24] Ю. П. Гинзбург: J-нерастягивающие аналитические оператор-финкции, (диссертация) Одесса, 1958.
[25] М. С. Лившиц: О спектральном разложении линейных несамосопряженных операторов, *Мат. сборник* **34** (1954), 145—198.
[26] М. С. Бродский, М. С. Лившиц: Спектральный анализ несамосопряженных операторов и промежуточные системы, *Успехи мат. наук* **13**, № 1 (1958), 3—85.
[27] М. С. Бродский: Характеристические матрицы-функции линейных операторов, *Мат. сборник* **39** (1956), 179—200.
[28] В. П. Потапов: Мультипликативная структура J-нерастягивающих матриц-функций, *Труды Московского мат. общества* **4** (1955), 125—236.
[29] R. S. Phillips: Dissipative operators and hyperbolic systems of partial differential equations, *Trans. Amer. Math. Soc.* **90** (1959), 193—254.
[30] Г. Лангер: О J-эрмитовых операторах, *Доклады АН СССР* **134** (1960), 263—266.
[31] H. Langer: Zur Spektraltheorie *J*-selbstadjungierter Operatoren, *Math. Ann.* **146** (1962), 60—85.
[32] Ю. П. Гинзбург: О проектировании в гильбертовом пространстве с билинейной метрикой, *Доклады АН СССР* **139** (1961), 775—778.
[33] Ю. П. Гинзбург: О подпространствах гильбертова пространства с индефинитной метрикой, *Научные записки кафедр мат., физ. и естествознания Одесского пед. института* **25**, № 2 (1961), 3—9.
[34] K. Bleuler: Eine neue Methode zur Behandlung der longitudinalen und skalaren Photonen, *Helv. Phys. Acta* **23** (1950), 567—586.
[35] S. N. Gupta: Theory of longitudinal photons in quantum electrodynamics, *Proc. Phys. Soc.*, A **63** (1950), 681—691.
[36] A. Ahijezer, V. Beresztyeckij: *Kvantum elektrodinamika*, Budapest, Akadémiai Kiadó, 1961.
[37] W. Heisenberg: Hilbert space II and "ghost" states of Pauli and Källén, *Nuovo Cimento* **4**, suppl. No. 2 (1956), 743—747.

[38] G. KÄLLÉN, W. PAULI: On mathematical structure of T. D. Lee's model of a renormalizable field theory, *Mat. Fys. Medd. Kgl. Danske Videnskab. Selskab.* **30**, No. 7 (1955).
[39] Н. Н. Боголюбов, Б. В. Медведев, М. К. Поливанов: К вопросу об индефинитной метрике в квантовой теории поля, *Научные доклады высшей школы, физ.-мат. науки*, № 2 (1958), 137—142.
[40] S. N. GUPTA: Quantum mechanics with an indefinite metric, *Canad. J. Phys.* **35** (1957), 961—968.
[41] R. ASCOLI, E. MINARDI: On quantum theories with indefinite metric, *Nuclear Physics* **9** (1958/1959), 242—254.
[42] A. UHLMANN: Schema einer Quantenmechanik mit indefiniter Metrik, *Nuclear Physics* **9** (1958/1959), 588—595.
[43] A. UHLMANN: Über Quantentheorien mit indefiniter Metrik, *Wiss. Z. Friedrich-Schiller-Univ., Jena, Math.-naturwiss. Reihe* **8** (1958/1959), 361—366.
[44] L. K. PANDIT: Linear vector spaces with indefinite metric, *Nuovo Cimento* **10**, suppl. No. 11 (1959), 157—182.
[45] K. L. NAGY: Indefinite metric in quantum field theory, *Nuovo Cimento* **17**, suppl. No. 1 (1960), 92—131.
[46] J. BOGNÁR: A discontinuity property of the inner product in linear spaces with an indefinite metric, *II. Magyar Matematikai Kongresszus,* (Kiegészítés az előadáskivonatokhoz) Budapest, 1960, 8—10.
[47] Я. Богнар: Об одном явленин разрывности скалярного произведения в пространствах с индефинитной метрикой, *Успехи мат. наук* **17**, № 1 (1962), 157—159.
[48] И. С. Иохвидов: Регуглярные и проекционно-полные линеалы в пространствах с общей эрмитово-билинейной метрикой, *Доклады АН СССР* **139** (1961), 791—794.
[49] И. С. Иохвидов: Сингулярные линеалы в пространствах с произвольной эрмитово-билинейной метрикой, *Успехи мат. наук* **17**, № 4 (1962), 127—134.
[50] E. SCHEIBE: Über hermitische Formen in topologischen Vektorräumen. I, *Ann. Acad. Sci. Fenn.,* AI, **294** (1960).
[51] N. BOURBAKI: *Espaces vectoriels topologiques,* Chap. I—II, Paris, Hermann, 1953.
[52] Ю. П. Гинзбург, И. С. Иохвидов: О новых результатах по геометрии и теории операторов в пространствах с общей индефинитной метрикой, *Труды IV-го Всесоюзного мат. съезда* (1962).
[53] G. FROBENIUS: Über lineare Substitutionen und bilineare Formen, *J. Reine Angew. Math.* **84** (1877), 1—63.
[54] А. И. Мальцев: *Основы линейной алгебры,* Москва—Ленинград, Гостехиздат, 1948.
[55] S. BANACH: *Théorie des opérations linéaires,* Warszawa, 1932.
[56] Н. И. Ахиезер, И. М. Глазман: *Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве,* Москва-Ленинград, Гостехиздат, 1950.
[57] Л. В. Канторович, Г. П. Акилов: *Фукциональный анализ в нормированных пространствах,* Москва, Физматгиз, 1959.
[58] M. M. DAY: *Normed linear spaces,* Berlin, Springer, 1958.
[59] Н. К. Бари: Биортогональные системы и базисы в гильбертовом пространстве, *Учёные записки Московского гос. университета* 148, *Математика* **4** (1951), 69—107.
[60] Р. С. Гутер, П. Л. Ульянов: О новых результатах в теории ортогональных рядов, a következő kötetben: С. Качмаж, Г. Штейнгауз: *Теория ортогональных рядов,* Москва, Физматгиз, 1958.
[61] И. М. Гельфанд: Замечание к работе Н. К. Бари „Биортогональные системы и базисы в гильбертовом пространстве". *Учёные записки Московского гос. университета* 148, *Математика* **4** (1951), 224—225.
[62] И. С. Иохвидов: Унитарные операторы в пространстве с индефинитной метрикой, *Записки Научно-исследовательского института мат. и мех. Харьковского гос. университета и Харьковского мат. общества* **21** (1949), 79—86.
[63] J. BOGNÁR: О существовании квадратного корня из оператора, самосопряжённого относительно индефинитной метрики, *A Magyar Tud. Akad. Mat. Kut. Int.. Közl.* **6** (1961), 351—363.
[64] Ф. А. Березин: О модели Ли, *Доклады АН СССР* **143** (1962), 811—814.
[65] L. J. SAVAGE: The application of vectorial methods to metric geometry, *Duke Math. Journ.* **13** (1946), 521—528.

Fordította: Bognár János

Technikai szerkesztő: L. Ziermann Margit

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója
Műszaki szerkesztő: Farkas Sándor
A kézirat nyomdába érkezett: 1965. XII. 16. — Terjedelem: 13,75 (A/5) ív, 11 ábra

Szegedi Nyomda 66-5896

Ára: 30,— Ft

TARTALOMJEGYZÉK

A KÜLFÖLDI SZAKIRODALOMBÓL

Megjelent: 1966. márc. 30-án.

Index: 26 498

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK

KÖZLEMÉNYEI

XVI. KÖTET 2. SZÁM

AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST
1966

III. OSZT. KÖZL.

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK
KÖZLEMÉNYEI

XVI. kötet 2. szám

Szerkesztőség: Budapest, V., Nádor utca 7.

Kiadóhivatal: Budapest, V., Alkotmány utca 21.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei változó terjedelmű füzetekben jelenik meg és az Akadémia III. Osztályának felolvasóülésein bemutatott matematikai dolgozatokat, valamint egyéb dolgozatokat, referátumokat, továbbá az Osztály munkájára vonatkozó közleményeket, könyvismertetéseket stb. közöl. Évenként egy kötet jelenik meg (négy szám alkot egy kötetet).

Kéziratok a következő címre küldendők:

A Magyar Tudományos Akadémia
III. Osztályának Közleményei
Budapest, V., Nádor u. 7.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi levelezés.

Minden szerzőt 100 különlenyomat illet meg megjelent munkájáért.

Közlésre el nem fogadott kéziratokat a szerkesztőség lehetőleg visszajuttat a szerzőhöz, de felelősséget a beküldött kéziratok megőrzéséért vagy továbbításáért nem vállal.

A Közlemények előfizetési ára kötetenként belföldi címre 40 forint, külföldi címre 60 forint. Belföldi megrendelések az Akadémiai Kiadó, Budapest, V., Alkotmány u. 21 (Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 05-915-111-46), külföldi megrendelések a „Kultúra" Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalat, Budapest, I., Fő utca 32 (Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 43-790 057-181) útján eszközölhetők.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztálya a következő idegen nyelvű folyóiratokat adja ki:

1. Acta Mathematica Hungaricae.
2. Acta Physica Hungaricae.

ÚJ MÓDSZEREK ÉS EREDMÉNYEK A KOMBINATORIKUS ANALÍZISBEN, II.

Írta: RÉNYI ALFRÉD

8. §. A Pascal-háromszög egy tulajdonsága és általánosításai

A binomiális együtthatókat rendezzük el egy kétirányban végtelen mátrixba a következőképpen: az n-edik sor k-adik eleme, amelyet a_{nk}-val jelölünk ($n, k = 0, 1, \ldots$), legyen

$$a_{nk} = \binom{n+k}{k}. \tag{8.1}$$

Így tehát a következő mátrixot nyerjük:

1	1	1	1	1	...
1	2	3	4	5	...
1	3	6	10	15	...
1	4	10	20	35	...
1	5	15	35	70	...
1	6	21	56	126	...
...					

3. ábra

Az (a_{nk}) mátrix nyilván lényegében azonos a *Pascal*-háromszöggel, csak éppen el van forgatva 45°-al.

Régóta ismeretes volt (lásd pl. [44]), hogy ha az (a_{nk}) mátrixból bárhogyan kiveszünk egy olyan négyzetes részmátrixot, amelynek bal felső sarka a 3. ábrán ábrázolt mátrix határán van, vagyis ha vizsgáljuk az

$$M_{a,b} = (a_{nk})_{\substack{a \leqq n \leqq b \\ 0 \leqq k \leqq b-a}}$$

vagy az

$$M^{(c,d)} = (a_{nk})_{\substack{0 \leqq n \leqq d-c \\ c \leqq k \leqq d}}$$

mátrixot ($0 \leqq a < b$, $0 \leqq c < d$), e mátrixok mindegyikének determinánsa 1-gyel lesz egyenlő.

Így például

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 10 \\ 1 & 5 & 15 \end{vmatrix} = 60+30+30-24-50-45 = 1.$$

Általában legyen

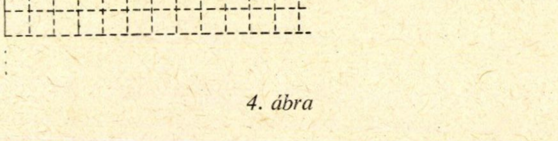
$$D_{a,a+k}=\begin{vmatrix} \binom{a}{0} & \binom{a+1}{1} & \dots & \binom{a+k}{k} \\ \binom{a+1}{0} & \binom{a+2}{1} & \dots & \binom{a+k+1}{k} \\ \vdots & & & \\ \binom{a+k}{0} & \binom{a+k+1}{1} & \dots & \binom{a+2k}{k} \end{vmatrix}.$$

Tegyük fel, hogy már bebizonyítottuk, hogy $D_{a,a+j}=1$, ha $j=0, 1, \dots, k-1$ és $a=0, 1, \dots$. A $D_{a,a+k}$ determináns minden sorából (kivéve az elsőt) kivonva a felette álló sort, azt kapjuk, figyelembe véve az $\binom{a+h}{i}-\binom{a+h-1}{i}=\binom{a+h-1}{i-1}$ azonosságot, hogy

$$D_{a,a+k}=\begin{vmatrix} 1 & \binom{a+1}{1} & \dots & \binom{a+k}{k} \\ 0 & \binom{a+1}{0} & \dots & \binom{a+k}{k-1} \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & \binom{a+k}{0} & \dots & \binom{a+2k-1}{k-1} \end{vmatrix}=D_{a+1,a+k}$$

Figyelembe véve, hogy $D_{a,a}=\left|\binom{a}{0}\right|=|1|=1$, teljes indukcióval következik, hogy $D_{a,a+k}=1$ $(a=0, 1, \dots; k=0, 1, \dots)$.

A legutóbbi időkig ez a tétel, mint izolált tény, mint érdekes kuriózum volt ismeretes. Nemrégiben azonban ELWYN R. BERLEKAMP[1] [25] ezt a binomiális együtthatókra vonatkozó tényt messzemenően általánosította és az így nyert általános eredményt az információelméletben hibajavító kódok konstruálására használta fel. BERLEKAMP bebizonyította többek között a következő tételt: Legyen adva a síkbeli négyzetrács rácsvonalaiból álló tetszőleges végtelen „lépcső" (lásd 4. ábra).

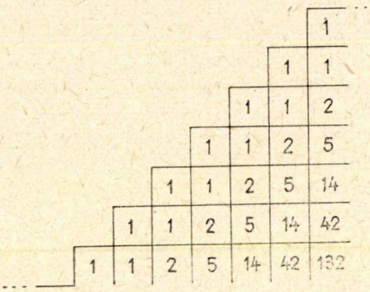


4. ábra

[1] Ez úton mondok köszönetet E. R. BERLEKAMPnak, hogy sajtó alatt levő kéziratát rendelkezésemre bocsátotta.

Akkor a „lépcső" határvonala alatti rácsnégyzeteket egy és csak egyféleképpen lehet kitölteni egész számokkal olymódon, hogy bármely olyan rácsvonalakkal határolt négyzetet választunk is ki, amelynek bal felső sarka a lépcső határvonalán fekszik, e négyzet által határolt mátrix determinánsának értéke 1.

BERLEKAMP tételének bizonyítása igen egyszerű, ezért csak vázoljuk. Azon rácsnégyzetekben, amelyek bal felső sarka a lépcső határvonalán fekszik, nyilván 1-nek kell állni. Ha már bizonyos rácsnégyzeteket kitöltöttünk, találhatunk mindig olyan rácsnégyzetet, amely egy olyan mátrix jobb alsó sarkában áll, melynek összes többi elemét már meghatároztuk és amelynek bal felső sarka a lépcső határán van. Ez esetben az a feltétel, hogy a szóban forgó mátrix determinánsa 1 legyen, egy elsőfokú egyenletet ad, amelyben az ismeretlen együtthatója 1, és mivel feltevés szerint a mátrix többi elemei mind egész számok, következik, hogy a szóban forgó rácsnégyzet egy egyértelműen meghatározott egész számmal töltendő ki. Így a tétel állítása indukcióval következik.



5. ábra

Így például vizsgáljunk meg egy periodikus egylépéses lépcsőt. Az ismertetett eljárás szerint kitöltve a rácsnégyzeteket, az 5. ábrán látható számokat kapjuk. Látjuk, hogy a kapott (a_{nk}) mátrix *Hankel*-féle, azaz elemei ($n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots, k \geqq n$) $a_{nk}=b_{k-n}$ alakban írhatók, ahol $b_0=1$, $b_1=1$, $b_2=2$, $b_3=5$, $b_4=14$, $b_5=42$, $b_6=132, \ldots$. E számsorozat az ún. *Catalan-féle számok* sorozata, amelyek előállíthatók $b_n = \binom{2n-1}{n-1} - \binom{2n-1}{n-2}$ alakban ($n \geqq 2$).

BERLEKAMP egy algoritmust adott meg tetszőleges „lépcső"-höz tartozó számok megkonstruálására.

9. §. Latin négyzetek

A (statisztikai) kísérletek tervezésével kapcsolatos kombinatorikai problémák részletes ismertetésére itt nem térhetünk ki, mert ez egy egész könyvet igényelne (l. pl. [26]). E problémák jellegzetessége, hogy megoldásukra a *Galois*-testek és véges geometriák elméletére van szükség. Itt csak egy — még csak részben megoldott — problémát tárgyalunk latin négyzetekre vonatkozólag; mielőtt erre rátérnénk, néhány definíciót bocsátunk előre.

Latin négyzetnek nevezünk egy (c_{ik}) négyzetes mátrixot ($1 \leqq i, k \leqq n$), ha annak elemei az $1, 2, \ldots, n$ számok és a mátrix minden sorában és minden oszlopában az $1, 2, \ldots, n$ számok egy permutációja áll. Ha például növénytermesztési kísérleteknél n-féle „kezelést" akarunk kipróbálni, tekintettel arra, hogy a talaj minősége helyről-helyre általában változik, a talaj minőségének zavaró hatásának kiküszöbölése céljából előnyös, ha az n kezelést egy n^2 parcellából álló blokkon úgy alkalmazzuk, hogy az egyes parcellákba az azon alkalmazott kezelés sorszámát beírva egy latin négyzetet kapjunk; ez nagyon megkönnyíti a statisztikai kiértékelést. Latin négyzetet igen sokféleképpen lehet konstruálni; itt csak egy konstrukciós eljárást említünk meg, az ún. addiciós eljárást. Legyenek $a_1, a_2, \ldots, a_n$ és $b_1, b_2, \ldots, b_n$ az $1, 2, \ldots, n$ számok tetszőleges permutációi és legyen $c_{ik} \equiv a_i + b_k \mod n$, $1 \leq c_{ik} \leq n$. (A 0 maradékosztályt tehát n-nel reprezentáljuk.) Nyilvánvaló, hogy a (c_{ik}) mátrix latin négyzet lesz, hiszen a maradékosztályok egy permutációját mod n eltolva újból egy permutációt kapunk. Ha például $n=5$ és a két permutáció 3 1 4 5 2 és 2 5 1 3 4, akkor a következő latin négyzetet nyerjük:

$$\begin{matrix} 5 & 3 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 5 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 4 & 1 \end{matrix} \tag{9.1}$$

Figyeljük meg, hogy e latin négyzetben a vízszintes sorokban szomszédként az 1, 2, 3, 4, 5 számokból képezhető 20 számpár közül csak 15 fordul elő, 5 pár ((14) (25) (31) (42) (53)) viszont kétszer is előfordul. Vannak kísérletek, amelyeknél a szomszédos kezelések bizonyos mértékig befolyásolhatják egymást. Így természetes módon merül fel a kérdés: lehet-e olyan $n \times n$-es latin négyzetet konstruálni, amelynél az $1, 2, \ldots, n$ számokból alkotott $n(n-1)$ lehetséges rendezett számpár mindegyike egyszer előfordul vízszintes szomszédként és egyszer függőleges szomszédként? E kérdésre részleges választ E. N. GILBERT [27] adott. GILBERT oly módon konkretizálta a kérdést, hogy csak a fent vázolt addiciós módszerrel konstruálható latin négyzeteket vizsgálta és azt kérdezte, hogy milyennek kell lennie az (a_i) és (b_j) permutációknak, hogy az azokból (9. 1) alapján konstruált (c_{ik}) latin négyzet a kívánt tulajdonsággal bírjon. E kérdésre a válasz igen egyszerű, ugyanis feltételünk azt kívánja meg, hogy a szóbanforgó két permutáció azzal a tulajdonsággal bírjon, hogy az $a_{i+1} - a_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ különbségek mod n egymástól különbözők legyenek (tehát kongruensek legyenek mod n az $1, 2, \ldots, n-1$ számok egy permutációjával) és a $\{b_j\}$ permutáció is ugyanezzel a tulajdonsággal bírjon. Az ilyen permutációkat nevezzük a rövidség kedvéért *tökéletes* permutációknak.

Ezek után felvetődnek a következő kérdések: n mely értékeire létezik az $1, 2, \ldots, n$ számoknak tökéletes permutációja; adott n-re, hány tökéletes permutáció van és ezeket hogyan lehet megkonstruálni. Az első kérdésre a válasz igen egyszerű: Ha $a_1, a_2, \ldots, a_n$ az $1, 2, \ldots, n$ számok egy tökéletes permutációja, akkor

$$\begin{aligned} (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \ldots + (a_n - a_{n-1}) &= a_n - a_1 = \\ = 1 + 2 + \ldots + n - 1 &= \frac{n(n-1)}{2} \mod n. \end{aligned} \tag{9.2}$$

Ha n páratlan, akkor tehát $a_n = a_1$, ami lehetetlen; tehát páratlan n-re nem létezik tökéletes permutáció. Ha viszont n páros, (9. 2) teljesítése lehetséges. Valóban, egyszerű példákkal meg lehet mutatni, hogy n minden páros értékére megadható az $1, 2, \ldots, n$ számoknak tökéletes permutációja.

Például, ha $n = 2k$, a

$$2k,\ 1,\ 2k-1,\ 2,\ 2k-2,\ \ldots,\ k+1,\ k$$

permutáció tökéletes, hiszen a konzekutív elemek különbségei mod $2k$ az

$$1, 2k-2, 3, 2k-4, 5, \ldots, 2, 2k-1$$

számok mind különbözőek. Az összes tökéletes permutációkról egyelőre nincs áttekintésünk.

n speciális (páros) értékeire GILBERT más módon is konstruált tökéletes permutációkat. Ha pl. $n=p-1$, ahol p egy páratlan primszám, amelyre nézve 2 primitív gyök, akkor az $a_i \equiv 2^{i-1} \bmod p$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ előírással definiált permutáció tökéletes, ugyanis az $a_{i+1}-a_i \equiv 2^i-2^{i-1}=2^{i-1} \bmod p$ számok definíció szerint különbözőek.

Így például, ha $n=4=5-1$, akkor 2 primitív gyök mod 5, 1, 2, 4, 8 kongruens rendre 1, 2, 4, 3-mal mod 5, tehát 1, 2, 4, 3 tökéletes permutáció mod 4; valóban a különbségek 1, 2, 3 különbözőek. Így tehát a

$$\begin{array}{cccc} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{array}$$

latin négyzet (amelyet úgy konstruáltunk az addiciós módszerrel, hogy (a_i) és (b_j) permutációként egyaránt az 1, 2, 4, 3 permutációt választottuk) bír azzal a tulajdonsággal, hogy minden számpár egyszer és csak egyszer fordul elő vízszintes szomszédként és függőleges szomszédként egyaránt. (E latin négyzet emellett szimmetrikus is.)

B. GORDON [45] egy általános módszert adott tökéletes latin négyzetek konstruálására a csoportelmélet segítségével.[2] Legyen G egy n-elemű *Abel*-csoport. Nevezzük a G csoportot S-típusúnak, ha elemei elrendezhetők olyan módon egy $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sorozatba, hogy a $b_i = a_1, a_2 \ldots a_i$ szorzatok $(i=1, 2, \ldots, n)$ mind különbözőek (tehát $b_1, \ldots, b_n$ az $a_1, \ldots, a_n$ elemek egy permutációja). B. GORDON bebizonyította, hogy egy véges *Abel*-csoport akkor és csak akkor S-típusú, ha előállítható egy 2^k rendű ciklikus csoport $(k \geqq 1)$ és egy páratlan rendű csoport direkt szorzataként. Könnyen belátható, hogy ha G S-típusú és $c_{jk}=b_j^{-1}b_k$, ahol a b_i sorozatot a fent említett módon definiáltuk, akkor a (c_{jk}) $(j, k=1, 2, \ldots, n)$ mátrix egy tökéletes latin négyzet. Jegyezzük meg, hogy a most bevezetett terminológiával a mod n vett maradékosztályok additív csoportja akkor és csak akkor S-típusú, ha n páros, és ebben a speciális esetben a most megadott konstrukció a tökéletes latin négyzetek tökéletes permutációból való fentebb adott származtatására redukálódik.

A GORDON módszerével konstruált tökéletes latin négyzetek mind csoportszorzástáblák. Nyitott probléma, hogy egy tetszőleges tökéletes latin négyzet csoport-szorzástábla-e.

A tárgyalt probléma szorosan összefügg a következő gráfelméleti problémával is: egy G gráf *arboricitás*-ának nevezzük azon erdők minimális számát, amelyekre felbontható. A felbontás itt úgy értendő, hogy ha G szögpontjainak halmaza a H halmaz, éleinek halmaza az E halmaz, vagyis $G=(H, E)$ és a felbontásban szereplő erdők ugyanilyen jelöléssel $G_k=(H_k, E_k)$ $(k=1, 2, \ldots, r)$, akkor $H_k=H$ $(k=1, 2, \ldots, n)$

[2] E dolgozatra DÉNES JÓZSEF volt szíves a figyelmet felhívni.

és $\sum_{k=1}^{r} E_k = E$. A minimális számú erdőre való felbontás esetében nyilván elérhető az is, hogy az E_k élhalmazok idegenek legyenek.

Nyilvánvaló, hogy pl. egy fa arboricitása 1, míg egy kör arboricitása 2, továbbá egy kocka éleiből álló gráf arboricitása 2.

Gráfok arboricitása meghatározásának problémáját általánosságban NASH-WILLIAMS oldotta meg [46].

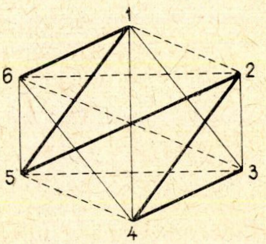
F. HARARY gráfelméleti szemináriumában (a michigani egyetemen) vetettem fel 1964-ben gráfok minimális számú erdőre való felbontása effektív megkonstruálásának problémáját. Speciális esetekre e kérdést a szeminárium egy résztvevője, L. W. BEINEKE [47] megoldotta, így pl. arra az esetre, ha G $2k$ szögpontú teljes gráf. Ez esetben, mivel G-nek $k(2k-1)$ éle, és egy $2k$ szögpontú erdőnek legfeljebb $2k-1$ éle van, nyilván k-nál kevesebb erdőre nem lehet G-t felbontani, és k erdőre is csak úgy bontható, ha ezek mindegyike fa. Egy ilyen felbontást a következőképpen nyerhetünk. A

$$2k, 1, 2k-1, 2, 2k-2, \ldots, k+1, k$$

tökéletes permutációból kiindulva képezzünk egy $2k$ oszlopból és k sorból álló mátrixot, amelynek i-edik sorát a fenti tökéletes permutáció mod $2k$ $(i-1)$-gyel való eltolásával nyerjük ($i=1, 2, \ldots, k$). E mátrix soraihoz egy-egy fát (pontosabban utat) rendelünk hozzá úgy, hogy a sorban szomszédos számokkal megszámozott pontokat éllel kötjük össze. Pl. ha $k=6$, a mátrix a következő

$$\begin{matrix} 6 & 1 & 5 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 6 & 3 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 6 & 5. \end{matrix}$$

A teljes 6-szög e mátrixnak megfelelő 3 fára való felbontását a 6. ábra mutatja:



6. ábra

amelyen a 3 utat vastag, vékony, ill. pontozott vonallal rajzoltuk be.

Annak bizonyítása, hogy az említett mátrix minden k-ra megoldja a felmerült problémát, azon alapszik, hogy a

$$2k, 1, 2k-1, 2, \ldots, k+1, k$$

tökéletes permutációnak megvan az a tulajdonsága is, hogy ha e permutációt $a_1, a_2, \ldots, a_{2k}$-val jelöljük, úgy

$$a_{2b-j+1} - a_j \equiv k \mod 2k.$$

Ennek következtében, ha

$$i-1+a_j = c \quad \text{és} \quad i-1+a_{j+1} = d,$$

akkor

$$k+i-1+a_{2k-j} \equiv d \mod 2k$$

és

$$k+i-1+a_{2k-j+1} \equiv c \mod 2k,$$

vagyis, ha a (c, d) rendezett számpár a mátrix felső k sora valamelyikében fordul elő, akkor a (d, c) rendezett számpár az alsó k sor valamelyikében fordul elő. Más szóval, az $(i-1+a_j)$ mátrixnak megvan az a tulajdonsága, hogy az $1, 2, \ldots, 2k$ számokból alkotható $\binom{2k}{2}$ *rendezetlen* számpár mindegyike pontosan egyszer fordul elő egy sorban egymás mellett a mátrix felső k sorából alkotott $k \times 2k$-as mátrixban.

E fejezet befejezéseként megemlítünk egy latin négyzetekre vonatkozó nehéz problémát, amely hosszú időn át nyitott volt és csak nemrégiben sikerült azt megoldani. Az $1, 2, \ldots, n$ számokból képezett (c_{ik}) és (d_{ik}) latin négyzeteket *ortogonális*nak nevezik, ha a (c_{ik}, d_{ik}) rendezett számpárok között nincs két azonos. Például az alábbi két 4-edrendű latin négyzet ortogonális:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{array}$$

Ezt könnyen beláthatjuk, ha a két latin négyzetet szuperponáljuk, azaz úgy írjuk bele egy 4×4 mezős mátrixba, hogy a mátrix minden mezejébe két szám kerüljön: első helyre az első négyzet, második helyre a második négyzet megfelelő eleme. Ha a két latin négyzet ortogonális, akkor az így kapott $n \times n$ rendezett számpár mind különböző. A fenti példában ez így van:

$$\begin{array}{cccc} 11 & 22 & 33 & 44 \\ 23 & 14 & 41 & 32 \\ 34 & 43 & 12 & 21 \\ 42 & 31 & 24 & 13 \end{array}$$

Régóta ismeretes volt, hogy nem létezik két 6×6-os ortogonális latin négyzet. EULER azt sejtette, hogy általában, ha $n = 4k+2$, akkor nem létezik két $n \times n$-es ortogonális latin négyzet. Ezt a sejtést R. C. BOSE és S. S. SHRIKHANDE [28] és E. T. PARKER [29] 1959-ben megcáfolták. Ma már tudjuk, hogy $n = 2$ és $n = 6$ kivételével minden n-re létezik két ortogonális latin négyzet.

Egy 10×10-es ortogonális latin négyzet-párt az alábbiakban mutatunk be (10 helyett 0-t írtunk).

$$\begin{array}{cccccccccc} 0 & 4 & 1 & 7 & 2 & 9 & 8 & 3 & 6 & 5 \\ 8 & 1 & 5 & 2 & 7 & 3 & 9 & 4 & 0 & 6 \\ 9 & 8 & 2 & 6 & 3 & 7 & 4 & 5 & 1 & 0 \\ 5 & 9 & 8 & 3 & 0 & 4 & 7 & 6 & 2 & 1 \\ 7 & 6 & 9 & 8 & 4 & 1 & 5 & 0 & 3 & 2 \\ 6 & 7 & 0 & 9 & 8 & 5 & 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 0 & 7 & 1 & 9 & 8 & 6 & 2 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 0 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 8 & 9 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 2 & 3 & 9 & 7 & 8 \end{array} \qquad \begin{array}{cccccccccc} 0 & 7 & 8 & 6 & 9 & 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \\ 6 & 1 & 7 & 8 & 0 & 9 & 4 & 5 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 2 & 7 & 8 & 1 & 9 & 6 & 3 & 4 \\ 9 & 6 & 1 & 3 & 7 & 8 & 2 & 0 & 4 & 5 \\ 3 & 9 & 0 & 2 & 4 & 7 & 8 & 1 & 5 & 6 \\ 8 & 4 & 9 & 1 & 3 & 5 & 7 & 2 & 6 & 0 \\ 7 & 8 & 5 & 9 & 2 & 4 & 6 & 3 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 2 & 3 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 0 & 9 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 8 & 9 & 7. \end{array}$$

Megjegyezzük, hogy amikor a 10×10-es ortogonális latin négyzetek létezésének problémája még nyitott volt, felmerült a gondolat, hogy elektronikus számológép segítségével döntsék el a kérdést. Kiderült azonban, hogy ez az út gyakorlatilag nem járható, mert az összes lehetőségek végigpróbálása a ma létező leggyorsabb számológépen is száz évnél hosszabb időt igényelt volna.

10. §. Az Ising-féle modell

Az ún. *Ising-modell* (lásd pl. [30], ahol részletes irodalomjegyzék is található) a ferromágneses anyagok elméletében játszik szerepet. Kristályos szerkezetű szilárd testekről lévén szó, első közelítésben az atomokat úgy képzeljük el, hogy rácsszerűen helyezkednek el: egy rácsszerű pontrendszer minden rácspontjában egy atom foglal helyet. Minden egyes atomot tekinthetünk egy-egy mágnesnek, amelynek mágneses momentuma (*spin*je) kétféle irányítással bírhat: pozitív vagy negatív irányítással. Képzeljük el az atomokat megszámozva és legyen $s_j = \pm 1$ aszerint, hogy a j-edik atom spinje pozitív vagy negatív. Ez esetben első közelítésben (csak a „szomszédos"[3] atomok közötti kölcsönhatást véve figyelembe, az egymástól távolabb levő atomok kölcsönhatását elhanyagolva) az $S_1, S_2, \ldots, S_N$ spin-értékek által jellemzett állapotban a rendszer belső energiája

(10.1) $$\mathcal{E} = -\mathcal{I} \sum_{(j,k)\in A}' S_j S_k,$$

ahol $\mathcal{I}$ egy pozitív állandó és az összegezés csak olyan (j, k) számpárokra terjesztendő ki, amelyek szomszédos rácspontok indexei. (A-val jelöltük azoknak a (j, k) számpároknak a halmazát, amelyekre j és k szomszédos rácspontok sorszámai.) A rendszer legfőbb termodinamikai jellemzőit az ún. *állapotfüggvény* határozza meg, amelyet a

(10. 2) $$Z = \sum_{\substack{S_j=\pm 1\\ 1\le j\le N}} e^{K \sum_{(j,k)\in A} S_j S_k}$$

képlet definiál; a (10. 2) jobb oldalán az összegezés az összes lehetséges spin-eloszlásra terjesztendő ki, vagyis $S_1, S_2, \ldots, S_N$ egymástól függetlenül felveszik a ± 1 értékeket és így az összegnek 2^N tagja van. A K szám definíciója $K = \frac{\mathcal{I}}{kT}$, ahol $\mathcal{I}$ a (10. 1)-ben szereplő állandó, k a *Boltzmann*-féle állandó és T az anyag abszolút hőmérséklete. A Z állapotfüggvény tulajdonképpen — egy konstans faktortól eltekintve — felfogható, mint a rendszer (10. 1) által megadott energiájának generátorfüggvénye.

Ha ugyanis az $S_1, \ldots, S_N$ spineket valószínűségi változóknak tekintjük, amelyek a ± 1 értékeket egymástól függetlenül, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$ valószínűséggel veszik fel, akkor a rendszer energiája, $\mathcal{E}$ is valószínűségi változó lesz, amelynek generátorfüggvénye

(10. 3) $$g(z) = \frac{1}{2^N} \sum_{\substack{S_j=\pm 1\\ 1\le j\le N}} e^{-z\mathcal{I} \sum_{(j,k)\in A} S_j S_k}$$

[3] Egy rácsszerű pontrendszernél többféleképpen is lehet definiálni azt, hogy mely pontokat tekintünk szomszédoknak. E kérdésre a későbbiekben visszatérünk.

és így a Z állapotfüggvény előállítható

$$Z = 2^N g\left(-\frac{\mathcal{J}}{kT}\right) \tag{10.4}$$

alakban.

A fizikában a rendszer (átlagos) belső energiáját az

$$\bar{E} = \lim_{T\to\infty} kT^2 \frac{\partial}{\partial T} \ln Z \tag{10.5}$$

képlettel szokták kifejezni. (10. 5) nyilvánvaló következménye a (10. 4) képletnek és annak a ténynek, hogy egy valószínűségi változó várható értékét megkaphatjuk, ha a generátorfüggvényét differenciáljuk és Z helyébe 0-t helyettesítünk. Valóban, (10. 4) szerint

$$\lim_{T\to\infty} kT^2 \frac{\partial}{\partial T} \ln Z = g'(0).$$

Mármost a Z állapotfüggvényt a következőképpen lehet átalakítani: jelölje c a vizsgált rácsban egy rácspont szomszédainak a számát. (Feltesszük, hogy a rács és a pontok szomszédos voltának definíciója olyan, hogy minden pontnak ugyanannyi szomszédja van, vagyis a rács homogén). Akkor

$$Z = \sum_{\substack{S_j=\pm 1\\ 1\le j\le N}} \prod_{(j,k)\in A} e^{KS_jS_k} = (\cosh K)^{\frac{CN}{2}} \cdot \sum_{S_j=\pm 1} \prod_{(j,k)\in A} (1+WS_jS_k), \tag{10.6}$$

ahol

$$W = \tanh K. \tag{10.7}$$

Ugyanis

$$e^{\pm k} = (\cosh K)(1 \pm \tanh K), \tag{10.8}$$

tehát, ha $S_j = \pm 1$ és $S_k = \pm 1$

$$e^{KS_jS_k} = (\cosh K)(1+WS_jS_k). \tag{10.9}$$

Elvégezve (10.6)-ban a beszorzást, azt kapjuk, hogy

$$Z = (\cosh K^{\frac{NC}{2}} \sum_{S_j=\pm 1} \sum_{r\ge 0} W^r \sum_{\substack{(k_i,l_i)\in A\\ 1\le i\le r\\ (k_i,l_i)\ne(k_h,l_h) \text{ ha } l\ne h.}} S_{k_1}S_{l_1}S_{k_2}S_{l_2}\dots S_{k_r}S_{l_r} \tag{10.10}$$

Könnyen belátható, hogy ha egy

$$S_{k_1}S_{l_1}S_{k_2}S_{l_2}\dots S_{k_r}S_{l_r} \tag{10.11}$$

szorzatot összegezünk úgy, hogy $S_1, \dots, S_N$ egymástól függetlenül felveszik a ± 1 értékeket, ez az összeg csak akkor nem lesz 0, ha a $k_1, l_1, k_2, l_2, \dots, k_r, l_r$ számsorozatban az $1, 2, \dots, N$ számok mindegyike páros sokszor fordul elő. Minden (10. 11) alakú szorzathoz egyértelműen hozzárendelhető egy, a $P_1, P_2, \dots, P_N$ szögpontokból (tehát a rács rácspontjaiból) álló gráf, amelyben a P_i és P_j pontokat akkor és csak akkor kötjük össze éllel, ha az (i, j) számpár előfordul a $(k_1, l_1), \ldots, (k_r, l_r)$ számpárok között. A (10. 11) alakú tagok összege tehát akkor és csak akkor lesz 0-tól különböző, ha a hozzárendelt gráf minden szögpontjának foka páros. Nevezzük az ilyen gráfokat *zárt*nak.

Ha viszont a (10. 11)-hez rendelt gráf zárt, akkor a (10. 11) szorzat értéke mindig $+1$, tehát a (10. 11) tagot összegezve $S_j = \pm 1$-re $(j = 1, 2, \ldots, N)$ mindig 2^N-et kapunk. Jelölje $n(r)$ a vizsgált rács szögpontjaiból alkotott és r élt tartalmazó olyan zárt gráfok számát, amelyekben minden él „szomszédos" pontokat köt össze, akkor tehát

(10. 12) $$Z = 2^N (\cosh K)^{\frac{NC}{2}} \cdot \sum_{r=0}^{\left[\frac{N(N-1)}{2}\right]} n(r)\, W^r.$$

Így tehát a ferromágneses anyagok *Ising*-modellje állapotfüggvényének meghatározása egy gráf-leszámlálási feladatra vezethető vissza.

Egy megadott rácsra (a szomszédos pontok definíciójának valamilyen módon való rögzítése mellett) az *Ising*-probléma tehát abból áll, hogy meg kell határozni a rácsra az $n(r)$ számsorozatot, vagyis le kell számlálni a rács szögpontjaiból és kizárólag szomszédos pontokat összekötő élekből álló előírt élszámú zárt (azaz csupa páros fokú pontból álló) gráfokat.

Oldjuk meg legelőször ezt a feladatot az egydimenziós esetben, tehát (figyelembevéve, hogy a rácsnak homogénnek kell lennie) abban az egyszerű esetben, ha a rács egy szabályos N-szög, amelyben a sokszög ugyanazon oldalán fekvő pontpárokat nevezzük „szomszédos"-nak. Ez esetben nyilvánvalóan $C = 2$, $n(0) = n(N) = 1$ és $n(k) = 0$, ha $0 < k < N$, tehát

(10. 13) $$Z = (2 \cosh K)^N + (2 \sinh K)^N$$

és így

$$Z = 2 \sum_{l=0}^{\left[\frac{N}{2}\right]} \binom{N}{2l} e^{(N-4l)K}$$

Tehát a rendszer energiájának lehetséges értékei az $N - 4l$ számok $(l = 0, 1, \ldots, [N/2])$ és ha az atomok spinjeit véletlenszerűen választjuk ± 1-nek, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$ valószínűséggel, akkor

$$P(\mathscr{E} = N - 4l) = \frac{2\binom{N}{2l}}{2^N} \qquad \left(l = 0, 1, \ldots, \left[\frac{N}{2}\right]\right).$$

Az átlagos energia ez esetben természetesen zérus (az eloszlás 0-ra való szimmetriája folytán).

Egy másik érdekes speciális eset a következő: Álljon a rendszer egy tetraéder 4 csúcsából és nevezzük szomszédosnak azokat a pontpárokat, amelyek ugyanazon él végpontjai. Ez esetben $C = 3$ és a lehetséges zárt gráfok a következők:

1. a gráf, amelynek nincsenek élei,
2. a tetraéder egy lapján fekvő háromszög,
3. a tetraéder négy éléből álló négyszög.

Ilyen módon $n(0)=1$, $n(3)=4$, $n(4)=3$ és így

$$Z=16(\cosh K)^6(1+4(\tanh K)^3+3(\tanh K)^4),$$

tehát

$$Z=2e^{6K}+8+6e^{-2K},$$

vagyis az energia lehetséges értékei $-6\mathcal{J}$, 0, $+2\mathcal{J}$ és a hozzátartozó valószínűségek $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{8}$, az energia várható értéke 0.

Fizikai szempontból legfontosabb feladat volna egy térbeli kockarácsra megoldani az *Ising*-problémát. Ezt a feladatot azonban eddig nem sikerült senkinek megoldani. Jelentős eredmény volt, amikor 1944-ben *L.* ONSAGER [31] megoldotta a síkbeli négyzetrácsra az *Ising*-problémát. E problémára ma már több megoldás ismeretes. M. KAC és I. C. WARD [32] 1952-ben egy tisztán kombinatorikai megoldást adtak, amely azonban nem volt teljes. (E megoldás alapötlete B. L. VAN DER WAERDEN-től származik [43].) Megoldásukat S. SHERMAN [33] tette teljessé 1960-ban. A *Kac—Ward—Sherman*-féle megoldásnak egy új és áttekinthető variánsát C. A. HURST és H. S. GREEN [34] dolgozták ki. A *Hurst—Green*-féle megoldás az ún. PFAFFIÁN fogalmán alapszik. Az *Ising*-probléma és az ún. *dominóprobléma* kapcsolatát M. E. FISHER és P. W. KASTELEYN fedezték fel [35], [36]. E kapcsolat segítségével a kérdés visszavezethető a dominóproblémára, amint azt KASTELEYN [37] bebizonyította.

A következő fejezetben a kétdimenziós *Ising*-probléma megoldását ezen az úton fogjuk bemutatni. Ennek során KASTELEYN egy tételére egy új, egyszerűbb bizonyítást adunk.

11. §. A Pfaffián

Az ún. *Pfaffián* (l. pl. [38]) a determinánshoz hasonló fogalom: egy (párosrendű, antiszimmetrikus) mátrixhoz az alábbi módon hozzárendelt számot jelenti: Legyen $A=[a_{ij}]$ egy párosrendű, antiszimmetrikus mátrix, azaz legyen $a_{ji}=-a_{ij}$, és $a_{ii}=0$ $(1\leqq i,j\leqq 2N)$. Az A mátrix pfaffiánját, melyet $P(A)$-val jelölünk, a következőképpen definiáljuk:

$$P(A)=\sum(-1)^{I(p_1,\dots,p_N)}a_{p_1p_2}a_{p_3p_4}a_{p_{2N-1}p_{2N}}, \tag{11.1}$$

ahol az összegezés az $1, 2, \dots, 2N$ számok összes olyan $p_1, p_2, \dots, p_{2N}$ permutációira terjesztendő ki, amelyek az alábbi feltételeknek tesznek eleget:

$$p_{2i-1}<p_{2i} \qquad i=1,2,\dots,N \tag{11.2}$$

$$p_1<p_3<\dots<p_{2N-1},$$

és $I(p_1\dots,p_{2N})$ a $p_1,p_2,\dots,p_{2N}$ permutáció inverzióinak számát jelenti. Például ha $N=1$ $P(A)=a_{12}$, ha $N=2$

$$P(A)=a_{12}a_{34}-a_{13}a_{24}+a_{14}a_{23}$$

ha $N=3$

$$\begin{aligned}P(A)=&a_{12}(a_{34}a_{56}-a_{35}a_{46}+a_{36}a_{45})\\&-a_{13}(a_{24}a_{56}-a_{25}a_{46}+a_{26}a_{45})\\&+a_{14}(a_{23}a_{56}-a_{25}a_{36}+a_{26}a_{35})\\&-a_{15}(a_{23}a_{46}-a_{24}a_{36}+a_{26}a_{34})\\&+a_{16}(a_{23}a_{45}-a_{24}a_{35}+a_{25}a_{34}).\end{aligned}$$

Ha A egy $2N$-edrendű mátrix, $P(A)$ kifejtése $1\cdot 3\cdot 5 \ldots 2N-1 = (2N-1)!!$ tagból áll.

A pfaffiánt szokták az $\diagdown a_{ij}|$ szimbólummal is jelölni, vagy úgy felírni, mint a determinánst, azzal az eltéréssel, hogy csak azokat az a_{ij} tagokat írják fel, melyekre $i\leqq j$ (mivel csak ezek fordulnak ténylegesen elő a pfaffiánban); például $N=2$-re

$$P(A)=\begin{vmatrix}a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ & a_{23} & a_{24}\\ & & a_{34}\end{vmatrix}.$$

A pfaffián fogalmát A. CAYLEY vezette be, a *Pfaff*-féle problémával kapcsolatban. A pfaffiánok kiszámítását a következő tétel könnyíti meg:

TÉTEL. *Ha $D(A)$ jelöli az A antiszimmetrikus mátrix determinánsát, akkor, ha A páratlan rendű, $D(A)=0$, míg ha A páros rendű, akkor*

$$D(A)=P^2(A),$$

ahol $P(A)$ az A mátrix pfaffiánja.

E tétel bizonyítása megtalálható pl. [39]-ben, ezért azt itt nem részletezzük. (BEKE MANÓ a pfaffiánt „Pfaff-féle alak"-nak nevezi; a pfaffián kifejezést rövidsége miatt tartjuk jobbnak.) Még csak azt jegyezzük meg, hogy a pfaffiánokat újabban a kvantum-térelméletben is felhasználják (lásd [40]).

12. §. A dominó-probléma

Vizsgáljunk egy téglalapot, amelynek oldalai az n és m pozitív egész számok. Ezt a téglalapot osszuk fel oldalaival párhuzamos egyenesekkel $n\cdot m$ egységnyi oldalú négyzetre. Egy ilyen négyzetrácsot a következőkben $n\times m$-es *általános sakktáblá*nak fogunk nevezni. Nevezzünk *dominó*nak egy téglalapot, amelynek élei 1 és 2 egység hosszúságúak. Egy $n\times m$-es sakktábla nyilván akkor és csak akkor fedhető le maradéktalanul egymást nem fedő dominókkal, ha $n\cdot m$ páros.

Ha ez a feltevés teljesül, akkor általában ez a lefedés sokféleképpen valósítható meg. Jelölje $\Delta(n, m)$ az $n\times m$-es sakktábla dominókkal való lefedéseinek számát. A dominóprobléma a $\Delta(n, m)$ függvény meghatározására vonatkozik. E fejezetben megmutatjuk, hogy $\Delta(n, m)$ antiszimmetrikus mátrixok pfaffiánjaival fejezhető ki. Valójában ennél többet bizonyítunk be. Jelölje $\Delta(n, m, r, s)$ az $n\times m$-es sakktábla azon lefedéseinek számát, amelyben r dominó helyezkedik el úgy, hogy hosszabbik oldala a sakktábla n hosszúságú oldalával párhuzamos, és s dominó úgy, hogy hosszabbik oldala a sakktábla m hosszúságú oldalával párhuzamos. Nyilván $s=\frac{nm}{2}-r$. A következőkben meg fogjuk határozni a $\Delta(n, m, r, s)$ számokat.

pontosabban a

$$\Gamma(n, m, z_1, z_2) = \sum_{r+s=\frac{nm}{2}} \Delta(n, m, r, s) z_1^r z_2^s$$

(kettős) generátorfüggvényt; ebből speciális esetként nyerjük $\Delta(n, m)$-et, hiszen

$$(12.1) \qquad \Delta(n, m) = \sum_{r+s=\frac{nm}{2}} \Delta(n, m, r, s) = \Gamma(n, m, 1, 1).$$

A $\Gamma(n, m, z_1, z_2)$ generátorfüggvény értékét mint egy antiszimmetrikus mátrix pfaffiánját fogjuk kifejezni. A sakktáblát úgy képzeljük elhelyezve, hogy vízszintes oldalának hossza n, a függőleges oldalának hossza m. Számozzuk meg az $n \times m$-es sakktábla „kockáit" oly módon, hogy a sakktábla legalsó sorában álló kockákat balról jobbra haladva rendre az $1, 2, \ldots, n$ számokkal számozzuk meg, a sakktábla alulról második sorában álló kockákat ugyancsak balról jobbra haladva az $n+1, \ldots, 2n$ számokkal számozzuk meg, s.í.t., végül a legfelső sor elemeit balról jobbra haladva az $(m-1)n+1, \ldots, mn$ számokkal számozzuk meg. Ezek után definiáljuk az (a_{ij}) nm-ed rendű mátrixot a következőképpen:

$$(12.2) \quad a_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{ha az } i \text{ és } j \text{ sorszámú kockák a sakktáblán nem szomszédosak} \\ & \text{és ha } i=j, \\ z_1, & \text{ha } i<j \text{ és az } i \text{ és } j \text{ sorszámú kockák a sakktáblán szomszé-} \\ & \text{dosak és ugyanabban a sorban vannak (tehát ha } i=kn+l \\ & \text{és } j=kn+l+1 \text{ ahol } 0 \leqq k \leqq m-1 \text{ és } 1 \leqq l \leqq n-1) \\ (-1)^i z_2, & \text{ha } i<j \text{ és az } i \text{ és } j \text{ sorszámú kockák a sakktáblán} \\ & \text{szomszédosak és ugyanabban az oszlopban vannak (tehát,} \\ & \text{ha } i=kn+l \;\; j=(k+1)n+l, \text{ ahol } 0 \leqq k \leqq m-2 \;\; 1 \leqq l \leqq n), \\ -a_{ji}, & \text{ha } j>i. \end{cases}$$

Az $A_{n,m}(z_1, z_2) = (a_{ij})$ nm-rendű mátrix nyilván antiszimmetrikus. Mivel nm feltevés szerint páros, n és m közül legalább az egyik páros. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy n páros. Mármost azt fogjuk bebizonyítani, hogy a (12. 1) alatt definiált generátorfüggvény egyenlő a (12. 2) által definiált mátrix pfaffiánjával, tehát

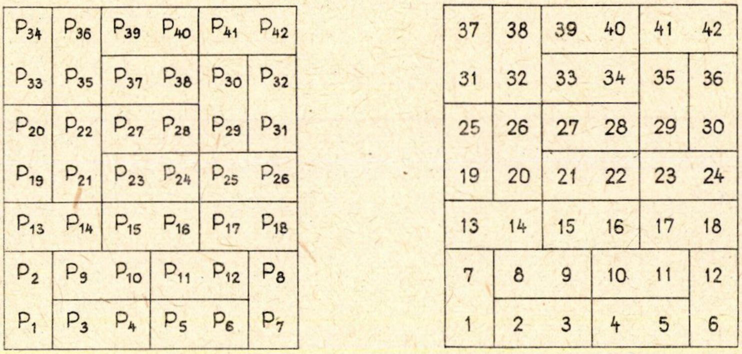
$$(12.3) \qquad \Gamma(n, m, z_1, z_2) = P\big(A_{n,m}(z_1, z_2)\big).$$

E tétel KASTELEYNtől [37] származik.

Alábbiakban egy új, egyszerű bizonyítást adunk (12. 3)-ra.

(12. 3) *bizonyítása.* Legyen $N = \dfrac{nm}{2}$ és n legyen páros. Tekintsük az $n \times m$-es sakktábla egy tetszőleges olyan lefedését dominókkal, amelyben r dominó vízszintesen, és $s = N - r$ dominó függőlegesen helyezkedik el. Minden egyes dominó két szomszédos kockát fed le. A dominók által lefedett kocka-párok sorszámai legyenek a $(p_1, p_2), (p_3, p_4), \ldots, (p_{2N-1}, p_{2N})$ számpárok, ahol $p_{2i-1} < p_{2i}$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$ és $p_1 < p_3 < \ldots < p_{2N-1}$. Másszóval a p_i számokat úgy definiáljuk, hogy elindulunk a sakktábla bal alsó sarkából, végighaladunk a legalsó soron balról jobbra; az első dominó első kockájának, mellyel találkozunk, a sorszáma lesz p_1 (tehát mindig $p_1 = 1$) és ezen dominó másik kockájának sorszáma lesz p_2 (tehát $p_2 = 2$ vagy $p_2 = n+1$); a következő dominó kockáinak sorszámai lesznek

p_3 és p_4 (tehát ha $p_2=2$, akkor $p_3=3$, míg ha $p_2=n+1$, akkor $p_3=2$), s.í.t... Ha az első sor végére értünk, az alulról második, azután a harmadik, stb. soron haladunk végig, mindig balról jobbra. A 7. ábra egy 6×7-es sakktábla egy dominókkal való lefedésére vonatkozólag megmutatja a p_i számok értelmezését.

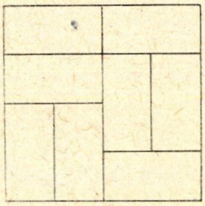


7. ábra

Így tehát az $n\times m$-es sakktábla minden egyes dominókkal való lefedéséhez egyértelműen hozzárendeltük a $P(A_{nm}(z_1, z_2))$ pfaffián kifejtésének egy tagját, ti. az

$$a_{p_1 p_2} a_{p_3 p_4} \cdots a_{p_{2N-1} p_{2N}} \tag{12.4}$$

tagot; megfordítva, nyilván minden ilyen kifejtési taghoz egyértelműen hozzátartozik az $n\times m$-es sakktábla egy dominókkal való lefedése. A 8. ábrán látható pl. a 4×4-es sakktáblának az $a_{15}a_{26}a_{34}a_{711}a_{812}a_{910}a_{1112}a_{1314}a_{1516}$ kifejtési taghoz rendelt dominókkal való lefedése:



8. ábra

(12. 2)-ből nyilvánvaló, hogy az $n\times m$-es sakktábla egy dominókkal való lefedéséhez tartozó (12. 4) kifejtési tag értéke $\pm z_1^r, z_2^s$, ahol r jelenti a lefedés vízszintes helyzetű dominóinak számát és $s=N-r$ a függőleges állású dominóinak a számát. Ahhoz, hogy (12. 3)-at bebizonyítsuk, csak azt kell kimutatnunk, hogy a (12. 4) alatti szorzatokat a pfaffián definíciója szerinti előjellel ellátva minden tag pozitív előjelű lesz, azaz

$$(-1)^{I(p_1, \ldots, p_{2N})} a_{p_1 p_2} a_{p_3 p_4} \cdots a_{p_{2N-1} p_{2N}} = z_1^r z_2^s. \tag{12.5}$$

Mivel

$$a_{p_1 p_2} \cdots a_{p_{2N-1} p_{2N}} = (-1)^{\sum\limits_{p_{2i}-p_{2i-1}=n} p_{2i-1}} z_1^r z_2^s \tag{12.6}$$

tehát csak azt kell kimutatnunk, hogy

$$(-1)^{I(p_1, \ldots, p_{2N})} = (-1)^{\sum\limits_{p_{2i}-p_{2i-1}=n} p_{2i-1}} \tag{12.7}$$

Másszóval azt kell kimutatni, hogy egy dominólefedéshez tartozó $p_1, \ldots, p_{2N}$ permutáció inverzióinak számának paritása megegyezik a függőlegesen álló dominók alsó kockájához tartozó p_{2i-1} számok összegének paritásával. Mivel n feltevés szerint páros, a sakktábla balról számított első, harmadik, ..., $n-1$-edik oszlopában vannak az összes páratlan sorszámú kockák. Így tehát $\sum_{p_{2i}-p_{2i-1}=n} p_{2i-1}$ paritása megegyezik a balról számítva páratlan oszlopindexű oszlopokban (nevezzük ezeket röviden páratlan oszlopoknak) elhelyezkedő dominók számával. E számot jelölhetjük α-val; ekkor tehát $\alpha \equiv \sum_{p_{2i}-p_{2i-1}=n} p_{2i-1} \mod 2$. Másrészt az inverziók számának paritásának meghatározásánál szorítkozhatunk a függőleges állású dominókhoz tartozó p_i számoknak a náluk kisebb számokkal való inverzióinak összeszámlálására; ugyanis tekintsünk egy vízszintes állású dominót; ennek két kockája szükségképpen két konzekutív számmal van megszámozva és így e két szám az őket megelőző, náluk nagyobb számokkal ugyanannyi inverziót alkot, és így együtt az inverziók összegéhez páros számú inverzióval járulnak hozzá, ami az inverziószám paritását nem befolyásolja. Ami a függőleges állású dominókat illeti, ezeknek megfelelő számpárok $(p, p+n)$ alakúak és a $p+n$-nél nagyobb számok a p_i sorozatban $p+n$-et nyilván nem előzhetik meg. Számolni tehát csak azokat az inverziókat kell, amelyeket egy függőlegesen álló dominó alsó kockájához rendelt szám alkot az őt a p_i sorozatban megelőző és nála nagyobb számokkal.

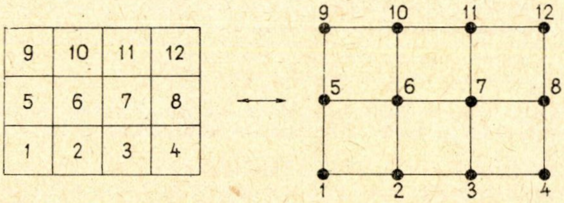
E számok nem lehetnek mások, mint a függőleges dominótól balra, vele egy magasságban elhelyezkedő függőleges dominók felső kockáihoz rendelt számok, valamint a függőleges dominótól jobbra, nála eggyel mélyebben álló dominók (amelyek felső kockája van tehát egy vonalban a szóban forgó dominó alsó kockájával), felső kockáihoz rendelt számok. Ezek számát kell tehát minden függőleges dominóra összeszámolni, és megvizsgálni, hogy hány olyan dominó van — jelöljük ezek számát β-val —, amelyekre e szám páratlan. Például a 7. ábrán a $p_{35}=32$ szám inverzióban van $p_{34}=37$-tel, továbbá $p_{30}=35$-tel és $p_{32}=36$-tal.

Be fogjuk bizonyítani, hogy $\alpha=\beta$. Mivel, mint láttuk $\beta \equiv I(p_1, ..., p_{2N}) \mod 2$, ebből már (12. 7) következik. Nevezzük δ-dominónak az olyan függőleges állású dominót, amelynek alsó kockájának sorszáma páratlan sok, nála nagyobb számmal alkot inverziót a p_i permutációban. Azt állítjuk, hogy egy δ-dominó mindig páros oszlopindexű oszlopban (röviden: páros oszlopban) helyezkedik el. Ugyanis, ha d_1 jelöli a δ-val egy sorban, tőle balra álló, függőleges dominók számát és d_2 a δ-nál egy kockával lejjebb és tőle jobbra álló, függőleges dominók számát, úgy feltevés szerint d_1+d_2 páratlan, tehát d_1 és d_2 közül pontosan az egyik páratlan. Mármost ha δ alsó kockája a j-edik sorban van, akkor a j-edik és $j-1$-edik sor egy-egy kockáját lefogó függőleges dominók száma páros kell, hogy legyen, mert az alsó $j-1$ sor által alkotott téglalapban összesen páros sok kocka van és mivel a teljesen e téglalapban fekvő dominók egyenként 2 kockát, tehát összesen páros sok kockát fednek le, az ebből a téglalapból kinyúló dominók száma is páros kell, hogy legyen. Ebből már következik, hogy ha d_2 páros és d_1 páratlan, akkor δ-tól balra is páros sok olyan függőleges dominó áll, amely a $j-1$-edik és j-edik sor egy-egy kockáját fedi le, és mivel a j-edik sorban δ-tól balra álló vízszintes dominók együtt páros sok kockát fednek le a j-edik sorból, δ-tól balra páratlan sok oszlop van és így δ maga páros oszlopban van. Hasonlóképpen látható be az állítás, ha d_1 páros és d_2 páratlan, továbbá az is, hogy minden páros oszlopban álló függőleges dominó δ-dominó.

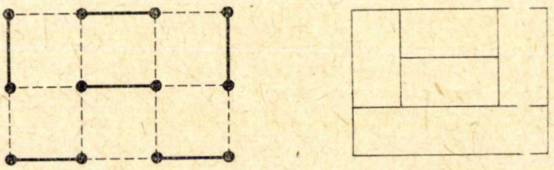
Nevezzük δ'-dominónak a páratlan oszlopban álló függőleges helyzetű dominókat. A mondottak szerint minden függőleges dominó vagy δ-dominó vagy δ'-dominó. Be fogjuk bizonyítani, hogy a δ és δ' dominók száma mindig ugyanakkora; ebből a kívánt állítás már következik. Ugyanis minden vízszintes dominó egy kockát fed le egy páros oszlopból és egyet egy páratlan oszlopból. Mivel a páros és a páratlan oszlopokban összesen ugyanannyi kocka van (tekintve, hogy az oszlopok száma, n, feltevés szerint páros), tehát a függőleges dominók együttvéve ugyanannyi kockát fednek le a páros oszlopokból, mint a páratlan oszlopokból, tehát ugyanannyi dominó van a páros oszlopokban, mint a páratlan oszlopokban. Ennélfogva a δ és δ' dominók száma ugyanakkora. Tehát ezzel (12. 7)-et és így (12. 3)-at bebizonyítottuk.

Kasteleyn másféle síkbeli rácsokra is megmutatta, hogy a rács dominóval való lefedéseinek száma kifejezhető alkalmasan választott mátrixok pfaffiánjai segítségével. Mi itt nem foglalkozunk azonban tovább e kérdéssel, hiszen nem célunk itt az *Ising*-modellek elméletének részletes ismertetése, hanem csak az, hogy megmutassuk, milyen típusú kombinatorikai problémák merülnek fel ennek kapcsán. Ezért csak arra szorítkozunk, hogy röviden vázoljuk a következő fejezetben az *Ising*-probléma összefüggését a dominó-problémával.

Mielőtt erre rátérnénk, megjegyezzük, hogy az általános dominóprobléma a gráfelmélet nyelvén a következőképpen fogalmazható meg. Legyen adva egy tetszőleges, páros számú szögpontból álló G gráf. A G gráf 1-fokú faktorának nevezzük a G gráf éleinek egy olyan E részhalmazát, hogy G bármely szögpontja az E-hez tartozó élek közül pontosan egyhez tartozik hozzá. A dominó-probléma egy megadott gráfra ekvivalens az illető gráf 1-rendű faktorai számának meghatározásával. A fentiekben tárgyalt, a sakktáblára vonatkozó dominó-probléma az említett gráfelméleti problémának úgy válik speciális esetévé, ha a G gráfot úgy konstruáljuk meg, hogy a sakktábla minden kockájának megfeleltetünk G-ben egy szögpontot és a szomszédos kockáknak megfelelő pontokat és csak azokat kötjük össze éllel. Például a 4×3-as sakktáblának a 9. ábrán látható gráf felel meg, míg a 10. ábra e sakktábla egy dominókkal való lefedését és a hozzárendelt gráf meg-



9. ábra



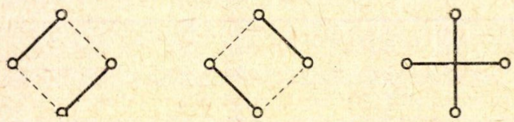
10. ábra

felelő 1-fokú faktorát ábrázolja (az 1-fokú faktor élei vastag vonallal vannak kihúzva, a többi él csak pontozva van).

Tetszőleges gráf esetére az 1-fokú faktor létezésének megállapítása sem könnyű kérdés. Egy hasznos szükséges és elégséges feltételt Tutte adott meg [41]. Tutte tétele szerint egy gráfnak akkor és csak akkor van elsőfokú faktora, ha a gráfból tetszőleges módon elhagyva r pontot ($r=0, 1, \ldots$), a megmaradó gráf összefüggő komponensei közül a páratlan számú pontból álló komponensek száma kisebb $r+1$-nél. Nemrégiben ERDŐS PÁLlal bebizonyítottuk hogy egy n számú pontból álló véletlen gráfnak, amennyiben elegendő számú éle van ahhoz, hogy majdnem biztosan összefüggő legyen, $n\to\infty$-re majdnem biztosan van elsőfokú faktora ([42]). Más szóval, ha találomra kiválasztunk egyet az összes n (számozott) szögpontú és $\frac{1}{2}n\log n+\omega(n)\cdot n$ élű gráfok közül és q_n jelöli annak valószínűségét, hogy e gráfnak van elsőfokú faktora, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} q_n=1$, feltéve, hogy $\lim\limits_{n\to\infty}\omega(n) = +\infty$.

13. §. Az Ising-modell és a dominó-probléma kapcsolata

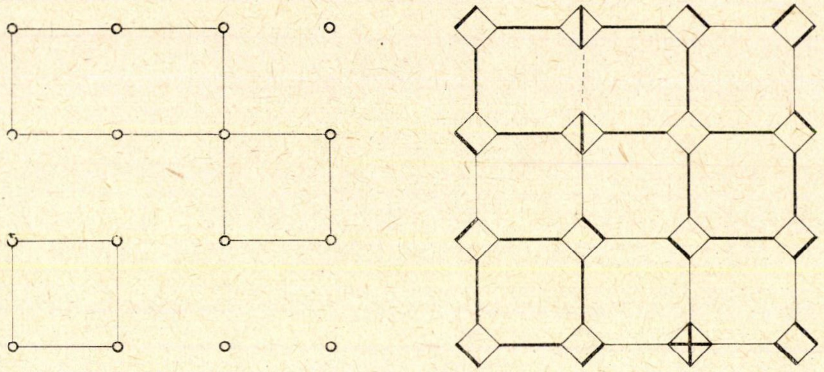
Láttuk, hogy az *Ising*-probléma megoldása visszavezethető egy rács rácspontjaiból alkotható azon zárt gráfok megszámlálására, amelyek előírt számú élt tartalmaznak és minden élük két szomszédos rácspontot köt össze. Mármost egy négyzetrács minden egyes rácspontja helyébe helyezzünk egy „négypólust”, vagyis egy négyzetet, amelynek csúcsai a rácspontba befutó négy élen helyezkednek el. E négyzetnek képzeljük el berajzolva a két átlóját is. A két átló metszéspontját nem tekintjük rácspontnak; másszóval a két átlót úgy képzeljük el, hogy azok nem metszik egymást; ez persze a síkban nem valósítható meg, csak ha az egyik átlóval kilépünk a térbe és az áthidalja a másikat. A rácspontok helyére rajzolt négyzet négy csúcsát nevezzük el északi, keleti, déli és nyugati pólusnak. Ilyen módon egy új rácsot kaptunk, amelyben minden pontban négy él találkozik. Az ábra, amelyet nyerünk, hasonlít a fürdőszobákban gyakran alkalmazott csempepadló mintájára, ezért azt röviden fürdőszoba-padló gráfnak nevezzük. Mármost az eredeti rács bármely zárt gráfjához, amelynek élei mind az eredeti rács szomszédos pontjait kötik össze, hozzárendelhető a fürdőszoba-padló gráf egy elsőfokú faktora, tehát e zárt gráfok számának meghatározása egy dominóproblémára vezethető vissza. Az elsőfokú faktort a következőképpen nyerjük. Ha a P és Q szomszédos pontok a rácsban össze vannak kötve egy éllel, akkor a P pontnak megfelelő négypólusnak és a Q pontnak megfelelő négypólusnak a szomszédos csúcsait összekötjük egy éllel; ha az eredeti rácsban egy rácspontból délre (északra) és keletre (nyugatra) vezet egy-egy él, összekötjük a rácspontnak megfelelő négypólus északi (déli) és nyugati (keleti) pólusát. Ha egy rácspontból északra és délre (ill. keletre és nyugatra) vezetett ki két él, a megfelelő négypólusnak a keleti és nyugati (ill. északi és déli) pólusait kötjük össze. Ha egy rácspontból négy él vezetett ki, a megfelelő négypólus pólusai között nem létesítünk összeköttetést. Végül, ha a rács egy pontja izolált volt, a megfelelő négypólusban két közös pont nélküli élt húzunk meg; ez persze háromféle módon lehetséges (l. 11. ábra).



11. ábra

Akárhogyan is hajtjuk ezt végre, a fürdőszoba-padló gráfnak egy elsőfokú faktorát nyerjük. (Az izolált pontok miatt fellépő többértelműséget egy ügyes fogással lehet ellensúlyozni: azáltal, hogy a faktoroknak előjelet tulajdonítunk, mégpedig úgy, hogy a 11. ábrán szereplő első két lehetőségnek pozitív, a harmadiknak negatív előjelet adunk; így az összeszámlálásnál helyreáll az egy-egyértelmű megfeleltetés.)

A 12. ábrán egy zárt rácspont-gráfnak megfelelő fürdőszoba-padló gráf egyik lehetséges elsőfokú faktorát mutatjuk be:



12. ábra

Az ismertetett megfeleltetés segítségével az *Ising*-problémában fellépő gráfleszámlálási feladatok visszavezethetők mátrixok pfaffiánjának a kiszámítására. Ez utóbbi feladat viszont determinánsok kiszámítására vezet.

A fellépő determinánsok explicit alakban kiszámíthatók; a további részletekbe itt nem megyünk bele, csak utalunk a már idézett munkákra, különösen [3]-ra és [4]-re.

Annak ellenére, hogy az *Ising*-problémakört és az azzal kapcsolatban felmerülő kombinatorikai problémákat csak vázlatosan ismertettük, reméljük, sikerült azért némi bepillantást nyújtani ebbe a fizikai alkalmazásai szempontjából fontos és a felhasznált matematikai módszerek eredetiségét tekintve is rendkívül érdekes kérdéskomplexumba.

Reméljük, hogy a felsorolt példákkal sikerült némi képet adni a kombinatorikus analízis néhány újabb problémaköréről és egyes módszereiről. E kép persze a legcsekélyebb mértékben sem tarthat igényt arra, hogy teljes legyen. E dolgozat III. részében e kép teljesebbé tétele érdekében a kombinatorika néhány más, szintén gyors fejlődésben lévő és az érdeklődés középpontjában álló irányát kívánjuk ismertetni.

IRODALOMJEGYZÉK*

[25] E. R. Berlekamp, *Invertible arrays, Convolutional codes and noise bursts* (sajtó alatt).
[26] H. B. Mann, *Analysis and design of experiments,* Dover, New York, 1949.
[27] E. N. Gilbert, Latin squares which contain no repeated digrams, *SIAM Review* **7** (1965) 189—198.

*Ez az irodalomjegyzék folytatása e dolgozat I. része (*MTA III. Oszt. Közl.* **16** (1966) 77—105) irodalomjegyzékének.

[28] R. C. Bose—S. S. Shrikande—E. T. Parker, Further results on the construction of mutually orthogonal latin squares and the falsity of Euler's conjecture, *Canadian J. of Math.* **12** (1960) 189—203.
[29] E. T. Parker, Orthogonal latin squares, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **45** (1959) 859—862.
[30] G. F. Newell—E. W. Montroll, On the theory of the Ising-modell of ferromagnetism, *Review of Modern Physics* **25** (1963) 353—389.
[31] L. O. Onsager, Chrystal statistics, I. A two-dimensional model with an order-disorder transition, *Phys. Rev.* **65** (1944) 117—149.
[32] M. Kac—I. C. Ward, A combinaforial solution of the two-dimensional Ising-model, *Phys. Rev.* **88** (1952) 1332—1337.
[33] S. Sherman, Combinatorial aspects of the Ising-model for ferromagnetism I., *J. Math. Phys.* **1** (1960) 202—217.
[34] C. A. Hurst—H. S. Green, New solution of the Ising-problem for a rectangular lattice, *J. Chem. Phys.* **33** (1960) 1059—1062.
[35] M. E. Fisher, Statistical mechanics of dimers on a plane lattice, *Phys. Rev.* **124** (1961) 1664—1672.
[36] P. W. Kasteleyn, The statistics of dimers on a lattice, *Physica* **27** (1961) 1209—1225.
[37] P. W. Kasteleyn, Dimer statistics and place transitions, *J. Math. Phys.* **4** (1963) 287—293.
[38] A. C. Aitken, *Determinants and matrices*, Oliver and Boyd, 1948, Edinburgh, p. 50.
[39] Beke Manó, *Determinánsok*, Athenaeum, Budapest, 1916, 135—138. o.
[40] E. R. Caianello, Theory of coupled quantized fields, *Nuovo Cimento*, **14** (1959) Supp. 177—191.
[41] W. T. Tutte, The factorization of linear graphs, *Journal of the London Math. Soc.* **22** (1947) 107—111.
[42] Erdős P.—Rényi A., On the existence of a factor of degree one of a connected random graph, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* (sajtó alatt).
[43] B. L. van der Waerden, *Z. Physik* **118** (1941) 473.
[44] T. Muir, *A treatise on the theory of determinants*, 1928. Ch. XX.
[45] B. Gordon., Sequences in groups with distinct partial products, *Pacific. Journ. of Math.* **11** (1961) 1309—1313.
[46] C. St. I. A. Nash—Williams, Decomposition of finite graphs into forests, *Journal London Math. Soc.* **39** (1964) 12.
[47] L. W. Beineke, Decomposition of complete graphs into forests, *MTA Mat. Kut. Int. Közl.* **9** A (1964) 589—593.

(Beérkezett: 1965. XI. 10.)

NEW METHODS AND RESULTS IN COMBINATORIAL ANALYSIS

by

Alfréd Rényi

Summary

One of the most characteristic features of the recent development of mathematics is a renaissance of combinatorics. The new development of combinatorics brought forward a great wealth of particular results but relatively few general methods. The main aim of this paper is to call the attention to some recent results in combinatorial analysis which seem to contain the germs of new general methods.

§ 1—4 deal with the partitions of finite sets, with special emphasis on the method of G. C. Rota, and on *Stirling's* numbers and a generalization of these numbers.

§ 5—6 deal with counting problems concerning (labelled) trees and with *Prüfer*'s method of counting. § 7 deals with the distribution of (labelled) trees according to their height above a given point; a short account of the recent results of G. Szekeres and the author (which will be published in detail elsewhere) is given. § 8 discusses a recent generalization by E. R. Berlekamp of a property of *Pascal*'s triangle. § 9 deals with Latin squares, especially perfect Latin squares. § 10—12 deal with the *Ising* modell of ferromagnetism, Pfaffians and the dimer-problem. The paper will be continued.

EGY ÁLTALÁNOS MÓDSZER FÜGGVÉNYEGYENLETEK NÉHÁNY OSZTÁLYÁNAK MEGOLDÁSÁRA, I.*

Írta: VINCZE ENDRE

1. §. Bevezetés

Az értekezés bevezető részében mindenekelőtt célkitűzéseinket, a megoldandó problémákat és azok előzményeit kívánjuk vázolni.

A függvényegyenletek ma már eléggé nagy, de még mindig csak kialakulóban levő elméletében viszonylag kevés olyan általános megoldási módszer ismeretes, mellyel az egyenleteknek nagyobb osztálya is minden (legalábbis elvi) nehézség nélkül megoldható. E téren elsősorban magyar szerzők munkái emelendők ki, nevezetesen ACZÉL J. [2] eredményei számos egyváltozós additív típusú függvényegyenlet-osztály megoldására vonatkozóan, HOSSZÚ M. több algebrai vizsgálata a többváltozós függvényegyenletekkel kapcsolatosan, s FENYŐ I. [22], [23] eredményei, aki a disztribució-elmélet felhasználásával old meg függvényegyenleteket. A legújabb vizsgálatok közös jellemzője a nagymértékű általánosságra és a megoldásoknál használt feltételek enyhítésére való törekvés. Hasonló elgondolás jegyében készült ez az értekezés is.

Egy olyan általános megoldási módszert kívánunk bemutatni, mellyel elsősorban az

$$\text{(A)} \qquad F(x+y) = \sum_{i=1}^{n} G_i(x) H_i(y),$$

$$\text{(B)} \qquad F(x+y)+G(x-y) = \sum_{i=1}^{n} H_i(x) K_i(y),$$

$$\text{(C)} \qquad F(x+y) = \sum_{i=1}^{n} G_i(x) H_i(y) \Big/ \sum_{j=1}^{m} K_j(x) L_j(y)$$

típusú függvényegyenletek (egymástól függetlenül értendő!), vagy ilyen egyenletekből álló függvényegyenlet-rendszerek oldhatók meg minden *elvi nehézség nélkül;* a megoldásnál használt feltételekről a vonatkozó helyen részletesen szólunk. A (B) és (C) típusú függvényegyenlet-osztályok bizonyos feltételek teljesülése esetén (A)-t is tartalmazzák.

Magának a módszernek közvetlen előzménye nincsen, noha a felsorolt (A)—(C) egyenlet-típusok számos speciális esetét „egyedenként” igen sokan és részletesen vizsgálták. Ki fog derülni, hogy ezek az egyenletek, az eddigieknél lényegesen álta-

* A dolgozat, kisebb változtatásoktól és rövidítésektől eltekintve, megegyezik a szerző 1964 május 3-án benyújtott és 1965. június 29-én megvédett kandidátusi disszertációjával. A módszer alapgondolatát részletesen ismerteti E. HILLE „Topics in Classical Analysis“ c. munkájában, mely a «T. L. SAATY, *Lectures on Modern Mathematics*, Vol III., Wiley, New York – London – Sydny, 1965, 22 – 24 pp.» gyűjteményes kiadásban jelent meg.

lánosabb feltételek mellett, szinte teljesen „mechanikusan" oldhatók meg az általunk *„determinánsos módszer"*-nek nevezett eljárással. Az elnevezést az indokolja, hogy a megoldási eljárásban alapvetően fontos szerep jut az egyenletekben szereplő függvényekből felépített függvénydeterminánsoknak.

Egy megoldási módszert elsősorban „példákon" keresztül lehet bemutatni, ezért mi is, kiválasztva a felsorolt típusokba tartozó legfontosabb és gyakran felbukkanó eseteket, először e speciális egyenleteken demonstráljuk e módszer teljesítőképességét, a későbbiekben pedig részletesen szólunk az általános esetről is. Noha, mint már utaltunk rá, a nyert eredmények általánosabbak számos eddigi vizsgálatnál, a hangsúlyt mégis a *megoldási eljárásra* kívánjuk helyezni. Véleményünk szerint a függvényegyenletek elméletét ill. a függvényegyenletek alkalmazhatóságának kiszélesítését éppen a konkrét megoldási eljárások mozdíthatják elő, bár nem tagadjuk, hogy az egyes „egyedi" esetekre alkalmazott „ad-hoc" módszerek ill. fogások is célravezetőek, sőt olykor rövidebbek és „tetszetősebbek" is lehetnek. E megoldási módszernél gyakorlati nehézség olyankor lép fel, amikor a megoldandó egyenlet sok ismeretlen függvényt tartalmaz, s a megoldásnál szükségessé váló esetszétválasztások száma is rohamosan emelkedik. Ez azonban a dolog természetéből jön, hisz az ilyen egyenleteknek általában *több* olyan megoldásrendszere van, melyek egymástól lényegesen különböznek (egymásnak nem speciális esetei), mint amennyi ismeretlen függvény az egyenletben szerepel.

Ahol csak lehetett, s ez a terjedelmet nem növelte lényegesen, a lehető legáltalánosabb feltételek mellett mutatjuk be e megoldási módszert. Ki fog derülni, hogy a felsorolt (A)—(C) egyenletek megoldásainál elegendő olyan algebrai természetű megszorításokat tennünk a szereplő függvények „értelmezési tartományára" ill. „értékkészletére" vonatkozóan, melyek csupán ezek algebrai struktúráját határozzák meg, s e struktúrákban érvényes (lényegében) *elemi műveletek* segítségével a megoldás már elintézhető. Minden további megszorító feltevés felesleges és csak elterelheti a figyelmet az egyenletekben szereplő függvényeket már meghatározó legfontosabb tulajdonságokról. Az értekezésben, anélkül hogy erre a későbbiekben esetenként hivatkoznánk, felhasználtam ezzel kapcsolatos néhány dolgozatom eredményeit (vö. [70]—[76]), de itt több helyen is, az előzetesen publikált tételek lényegesen általánosabb ill. egyszerűbb formában kerülnek bizonyításra.

Az egyes paragrafusok elején részletesen felsoroljuk a tárgyalt problémakör előzményeit, de a felsorolt eredményekre általában nem támaszkodunk.

2. §. Jelölések. Definíciók. Bevezető tételek

A később bebizonyítandó lineáris függőségre vonatkozó tétel (2.2. tétel) előzményei D. R. CURTISS [20] (vö. [15]), T. POPOVICIU [54] és H. KIESEWETTER [34] (vö. [33]) vizsgálatai, akik a tételt *paramétertől nem függő* függvényekre bizonyították. Az e §-ban szereplő PEXIDER-egyenletek irodalma igen nagy (vö. [2]), ezért e tekintetben csupán az eredeti [52] dolgozatra és a legújabb eredményekre, nevezetesen HOSSZÚ M. [29] és ACZÉL J. [5] munkáira, ill. [69]-re utalunk; a probléma ilyen értelemben való teljes és általános megoldása eddig hiányzott.

2. 1. Legyen Q_1 és Q_2 két *tetszőleges nem üres halmaz*, továbbá Q *tetszőleges zérus-karakterisztikájú test.* A szokással megegyezően a Q testben értelmezett két műveletet „összeadás"-nak és „szorzás"-nak, inverzeiket „kivonás"-nak és „osztás"-

nak nevezzük, s e műveleteket, ill. inverzeiket a közönséges összeadás, kivonás, szorzás, osztás jeleivel jelöljük. Jelentse „0" ill. „1" az összeadás, ill. szorzás egységelemét, „na" ill. „a^n" ($a \in Q$) pedig olyan n tagból ($n \geqq 2$ természetes szám) álló összeget, ill. n tényezőből álló szorzatot, melynek minden tagja, ill. tényezője $a \in Q$.

A később kimondandó tételek egy része tetszőleges p karakterisztikájú (véges, ill. végtelen) testben is érvényes, feltéve, hogy $p > n$, ahol n jelentése[1] a (2. 29) egyenletből világos. Az egyszerűség és rövidség kedvéért azonban a tételek ilyen általános megfogalmazására, ill. bizonyítására nem térünk ki.

Más jelölésekről mindig a vonatkozó helyen lesz szó.

2. 2. A $Q_1 \times Q_2$ szorzathalmazt Q-ba *egyértelműen* leképező

(2. 1) $$F_k(z, t) \quad [z \in Q_1, t \in Q_2;\ F_k(z, t): Q_1 \times Q_2 \to Q;\ k = 1, 2, \ldots, n]$$

függvényekre a *lineáris függőség ill. függetlenség* fogalmát a következőképpen általánosítjuk:

2. 1. Definíció. *A $Q_1 \times Q_2$ szorzathalmazon értelmezett* (2. 1) *függvényeket „z-ben" („első változójukra nézve") lineárisan függőeknek nevezzük, ha léteznek olyan Q-beli*

$$c_k(t) \quad [t \in Q_2;\ c_k(t): Q_2 \to Q;\ k = 1, 2, \ldots, n]$$

egyidejűleg sehol sem zérus függvények, melyekkel a

(2. 2) $$\begin{cases} c_1(t) F_1(z, t) + c_2(t) F_2(z, t) + \ldots + c_n(t) F_n(z, t) \equiv 0 \\ \sum_{k=1}^{n} |c_k(t)| > 0 \end{cases}$$

egyenlet minden $z \in Q_1$, $t \in Q_2$ értékpárra érvényes. Ha van (legalább egy) olyan $t_0 \in Q_2$ érték, melynél a

(2. 3) $$c_1 F_1(z, t_0) + c_2 F_2(z, t_0) + \ldots + c_n F_n(z, t_0) \equiv 0$$

$$(z \in Q_1;\ c_k \in Q,\ k = 1, 2, \ldots, n)$$

azonosságból szükségképpen $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$ következik, akkor a (2. 1) *függvények „z-ben" („első változójukra nézve") lineárisan függetlenek.*

MEGJEGYZÉS. A szereplő függvények „abszolút értékeire" sehol sem lesz szükségünk, így „a $c_k(t)$ függvények, vagy a c_k konstansok egyidejűleg sehol sem zérusak" kikötést következetesen a (2. 2)-ben szereplő (ill. annak megfelelő) „egyenlőtlenséggel" jelöljük — függetlenül attól, hogy a szereplő függvények, ill. konstansok abszolút értéke értelmezhető-e vagy sem.

Külön felhívjuk a figyelmet arra, s ezt többször használni is fogjuk, hogy az $F_k(z, t)$ ($k = 1, 2, \ldots, n$) függvényekben szereplő t *paraméter* több változót is egyesíthet: $t = t(t_1, t_2, \ldots, t_p)$, ahol a t_k ($k = 1, 2, \ldots, p$) változók (egymástól függetlenül) a $Q_2^{(k)}$ halmazt futják be és $Q_2^{(1)} \times Q_2^{(2)} \times \ldots \times Q_2^{(p)} = Q_2$. Ily módon, az előbbi tény

[1] Ha a Q test szerepét tetszőleges (nem feltétlenül zérusosztó-mentes) gyűrű veszi át, akkor e feltétel úgy módosul, hogy tetszőleges $\neq 0$ gyűrű-elem *additív rendje* $O^+(a) \geqq p > n$. Ilyen általánosításra több helyen is lehetőség volna.

kihangsúlyozására célszerűbb lenne talán (2. 1) helyett az $F_k(z, t) = F_k(z; t_1, t_2, ..., t_p)$ jelölést használni, de a rövidség kedvéért ettől eltekintünk.

2. 3. Tekintsük a (2. 1) függvényekből alkotott

$$\begin{vmatrix} F_1(z_1, t) & F_2(z_1, t) \dots F_n(z_1, t) \\ F_1(z_2, t) & F_2(z_2, t) \dots F_n(z_2, t) \\ \dots & \dots \\ F_1(z_n, t) & F_2(z_n, t) \dots F_n(z_n, t) \end{vmatrix}$$

típusú függvénydeterminánsokat, melyeket a következőkben csak röviden

$$\Delta[F_1(z_1, t), F_2(z_2, t), ..., F_n(z_n, t)]\text{-}$$

-nel jelölünk, tehát csak a *főátlóban* levő elemeket írjuk ki (oszlopokban a függvények indexe, sorokban a változók indexe állandó!). Ha nem vezet félreértésre, használni fogjuk a még rövidebb

$$\Delta(F_1, F_2, ..., F_n)$$

jelölést is, feltételezve, hogy a determináns minden egyes sorában *különböző* z_k $(k = 1, 2, ..., n)$ változó és *csak ez* szerepel az előforduló függvények argumentumában; tehát az F_k $(k = 1, 2, ..., n)$ függvények *nem függnek* második változójuktól sem.

2. 4. Legyen i és j két tetszőleges index az $i \neq j$ és $1 \leqq i, j \leqq n$ megszorításokkal és legyen $c(t)$ $[c(t): Q_1 \times Q_2 \to Q]$ egy tetszőleges Q-beli függvény, a determinánsok közismert tulajdonságai alapján a következő azonosságok helyessége nyilvánvaló:

(2. 4)
$$\Delta[F_1(z_1, t), ..., F_i(z_i, t), ..., F_j(z_j, t), ..., F_n(z_n, t)] =$$
$$= -\Delta[F_1(z_1, t), ..., F_j(z_i, t), ..., F_i(z_j, t), ..., F_n(z_n t)],$$
(oszlopcsere!);

(2. 5)
$$\Delta[F_1(z_1, t), ..., F_i(z_i, t), ..., F_j(z_j, t), ..., F_n(z_n, t)] =$$
$$= \Delta[F_1(z_1, t), ..., F_i(z_i, t) + c(t) F_j(z_i, t), ..., F_j(z_j, t), ..., F_n(z_n, t)];$$

(2. 6)
$$\Delta[F_1(z_1, t), ..., c(t)F_i(z_i, t), ..., F_j(z_j, t), ..., F_n(z_n, t)] =$$
$$= c(t)\Delta[F_1(z_1, t), ..., F_i(z_i, t), ..., F_j(z_j, t), ..., F_n(z_n, t)] =$$
$$= \Delta[F_1(z_1, t), ..., F_i(z_i, t), ..., c(t)F_j(z_j, t), ..., F_n(z_n, t)],$$
(kiemelési szabály!);

(2. 7) *ha* $F_i(z, t) = c(t) F_j(z, t)$ *fennáll, akkor*
$$\Delta[F_1(z_1, t), ..., F_i(z_i, t), ..., F_j(z_j, t), ..., F_n(z_n, t)] \equiv 0$$
is teljesül;

(2. 8)
$$\Delta[F_1(z_1, t), ..., F_i(z_i, t), ..., F_n(z_n, t)] +$$
$$+ \Delta[F_1(z_1, t), ..., G_i(z_i, t), F_{i+1}(z_{i+1}, t), ..., F_n(z_n, t)] =$$
$$= \Delta[F_1(z_1, t), ..., F_i(z_i, t) + G_i(z_i, t), ..., F_n(z_n, t)],$$
(összeadási szabály!);

(2. 9a)
$$\Delta[F_1(z_1,t),\ldots,F_{n-1}(z_{n-1},t),F_n(z_n,t)]=$$
$$=(-1)^{n-1}\{F_n(z_1,t)\Delta[F_1(z_2,t),\ldots,F_{n-1}(z_n,t)]-$$
$$-F_n(z_2,t)\Delta[F_1(z_1,t),F_2(z_3,t),\ldots,F_{n-1}(z_n,t)]+\ldots-\ldots+$$
$$+(-1)^{n-1}F_n(z_n,t)\Delta[F_1(z_1,t),\ldots,F_{n-1}(z_{n-1},t)]\},$$

(utolsó oszlop szerinti kifejtés!);

(2. 9b)
$$\Delta[F_1(z_1,t),\ldots,F_n(z_n,t)]=$$
$$=(-1)^{n-1}\{F_1(z_n,t)\Delta[F_2(z_1,t),\ldots,F_n(z_{n-1},t)]-$$
$$-F_2(z_n,t)\Delta[F_1(z_1,t),F_3(z_2,t),\ldots,F_n(z_{n-1},t)]+\ldots-\ldots+$$
$$+(-1)^{n-1}F_n(z_n,t)\Delta[F_1(z_1,t),\ldots,F_{n-1}(z_{n-1},t)]\},$$

(utolsó sor szerinti kifejtés!).

2. 5. A későbbiek során alapvető fontosságú lesz a következő egyszerű tétel:

2. 1. TÉTEL. *Ha a $Q_1\times Q_2$ szorzathalmazt Q-ba egyértelműen leképező*

$$F_i(z,t)\quad [z\in Q_1,\ t\in Q_2,\ F_i(z,t):Q_1\times Q_2\to Q;\ i=1,2,\ldots,kn+n]$$

függvények minden szóbajöhető $z_1,z_2,\ldots,z_n\in Q_1$, $t\in Q_2$ értékekre az

$$\sum_{i=0}^{k}\Delta[F_{in+1}(z_1,t),F_{in+2}(z_2,t),\ldots,F_{in+n}(z_n,t)]=0 \tag{2. 10}$$

egyenletet kielégítik, akkor a

$$\sum_{i=0}^{k}\Delta[F_{in+1}(z_1,t),F_{in+2}(z_2,t),\ldots,F_{in+n}(z_n,t),F_0(z_{n+1},t)]=0 \tag{2. 11}$$

egyenlet is minden szóbajöhető $z_1,z_2,\ldots,z_{n+1}\in Q_1$, $t\in Q_2$ értékekre teljesül, ahol $F_0(z,t)$ tetszőleges olyan függvény, mely a $Q_1\times Q_2$ szorzathalmazt Q-ba egyértelműen képezi le.

BIZONYÍTÁS. A Δ kifejezések értelmezése miatt bármely $i=0,1,2,\ldots,k$ esetén (2. 9a) alapján

$$\Delta[F_{in+1}(z_1,t),F_{in+2}(z_2,t),\ldots,F_{in+n}(z_n,t),F_0(z_{n+1},t)]=$$
$$=(-1)^n\{F_0(z_1,t)\Delta[F_{in+1}(z_2,t),F_{in+2}(z_3,t),\ldots,F_{in+n}(z_{n+1},t)]-$$
$$-F_0(z_2,t)\Delta[F_{in+1}(z_1,t),F_{in+2}(z_3,t),\ldots,F_{in+n}(z_{n+1},t)]+\ldots-\ldots+$$
$$+(-1)^nF_0(z_{n+1},t)\Delta[F_{in+1}(z_1,t),F_{in+2}(z_2,t),\ldots,F_{in+n}(z_n,t)]\}$$

fennáll (ez az egyenlet az utolsó oszlop szerinti kifejtésnek felel meg), ezért — mindkét oldalon a $\sum_{i=0}^{k}$ összegezést elvégezve — a

$$\sum_{i=0}^{k} \Delta[F_{in+1}(z_1, t), F_{in+2}(z_2, t), \dots, F_{in+n}(z_n, t), F_0(z_{n+1}, t)] =$$

$$= (-1)^n \Big\{F_0(z_1, t) \sum_{i=0}^{k} \Delta[F_{in+1}(z_2, t), F_{in+2}(z_3, t), \dots, F_{in+n}(z_{n+1}, t)] -$$

$$-F_0(z_2, t) \sum_{i=0}^{k} \Delta[F_{in+1}(z_1, t), F_{in+2}(z_3, t), \dots, F_{in+n}(z_{n+1}, t)] + \dots - \dots +$$

$$+(-1)^n F_0(z_{n+1}, t) \sum_{i=0}^{k} \Delta[F_{in+1}(z_1, t), F_{in+2}(z_2, t), \dots, F_{in+n}(z_n, t)]\Big\} = 0$$

egyenlet is teljesül, hiszen (2. 10) miatt az egyenletben szereplő $F_0(z_j, t)$ $(j = 1, 2, \dots, n+1)$ tényezők szorzói rendre zérussal egyenlőek, s éppen ezt kellett bizonyítanunk.

A következőkben e tételre mint *„bővítési tételre" fogunk hivatkozni, a* (2. 11) *egyenletet* pedig a (2. 10) *egyenlet „bővítésének" fogjuk nevezni.*

2. 6. A Δ kifejezések segítségével *szükséges és elégséges* feltételt adhatunk arra, hogy a (2. 1)-ben szereplő függvények milyen feltétel mellett lesznek első változójukra nézve *egymástól lineárisan függőek.*

2. 2. TÉTEL. *Ha a* (2. 1)*-ben szereplő* $F_k(z, t)$ $(k = 1, 2, \dots, n)$ *függvények minden* $z_1, z_2, \dots, z_n \in Q_1$, $t \in Q_2$ *esetén kielégítik a*

$$\Delta[F_1(z_1, t), F_2(z_2, t), \dots, F_n(z_n, t)] = 0 \tag{2.12}$$

egyenletet, akkor és csak akkor ezek a függvények z-ben (első változójukra nézve) egymástól lineárisa függőek, tehát (2. 2) *érvényes.*

BIZONYÍTÁS. Először (2. 12) *szükségességét* bizonyítjuk. Írjunk (2. 2)-ben z helyett rendre $z_1, z_2, \dots, z_n (\in Q_1)$-et, akkor a

$$c_1(t)F_1(z_1, t) + \dots + c_n(t)F_n(z_1, t) = 0,$$
$$c_1(t)F_1(z_2, t) + \dots + c_n(t)F_n(z_2, t) = 0,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$c_1(t)F_1(z_n, t) + \dots + c_n(t)F_n(z_n, t) = 0$$

egyenletrendszert nyerjük, melynek a $c_i(t)$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ függvényekre nézve csak akkor van egyidejűleg sehol sem zérus megoldásrendszere, ha az egyenletrendszer determinánsa minden $z_1, z_2, \dots, z_n \in Q_1$ és $t \in Q_2$ esetén zérus, ami pedig éppen (2. 12)-t jelenti.

Az *elégségesség* bizonyítására teljes indukciót alkalmazunk. Az $n = 1$ esetre az állítás nyilvánvaló, mert

$$\Delta[F_1(z_1, t)] = F_1(z_1, t) = 0$$

miatt van olyan $c_1(t) \neq 0$ függvény, hogy $c_1(t)F_1(z, t) \equiv 0$, tehát (2. 12)-ből (2. 2) következik. Tegyük fel, hogy állításunkat már $n-1$-re bebizonyítottuk és hogy (2. 12) is érvényes. Ebből következni fog, hogy (2. 2) n-re is érvényben marad.

Legyen ugyanis $Q_2 = Q_2' \cup Q_2''$, $Q_2' \cap Q_2'' = \theta$ (θ üres halmaz) és feltesszük, hogy *minden* $z_1, z_2, \ldots, z_n \in Q_1$ értékre és minden Q_2'-, ill. Q_2''-beli t értékre

$$\Delta[F_1(z_1, t), \ldots, F_{n-1}(z_{n-1}, t)] \equiv 0, \quad \text{ha} \quad t \in Q_2', \tag{2. 13}$$

$$\Delta[F_1(z_1, t), \ldots, F_{n-1}(z_{n-1}, t)] \not\equiv 0, \quad \text{ha} \quad t \in Q_2'', \tag{2. 14}$$

fennáll. A (2. 13) esetben az indukciós feltevés szerint

$$\left.\begin{array}{l} c_1'(t)F_1(z, t) + \ldots + c_{n-1}'(t)F_{n-1}(z, t) \equiv 0 \\ \sum\limits_{i=1}^{n-1} |c_i'(t)| > 0 \end{array}\right\} (z \in Q_1, t \in Q_2')$$

és így $c_n'(t) \equiv 0$ $(t \in Q_2')$ választással

$$\left\{\begin{array}{l} c_1'(t)F_1(z, t) + \ldots + c_{n-1}'(t)F_{n-1}(z, t) + c_n'(t)F_n(z, t) \equiv 0 \\ \sum\limits_{i=1}^{n} |c_i'(t)| > 0 \qquad (z \in Q_1, t \in Q_2') \end{array}\right. \tag{2. 15}$$

is fennáll tetszőleges $F_n(z, t)$ mellett. Ha viszont (2. 14) teljesül, akkor minden $t \in Q_2''$-höz található olyan *rögzített* $z_1(t), z_2(t), \ldots, z_{n-1}(t) \in Q_1$ értékrendszer, melyre

$$c_n''(t) = (-1)^{n-1}\Delta[F_1(z_1(t), t), \ldots, F_{n-1}(z_{n-1}(t), t)] \neq 0 \qquad (t \in Q_2'') \tag{2. 16}$$

érvényes, azaz $c_n''(t)$ sehol nem tűnik el. Feltevésünk szerint (2. 12) érvényben van, tehát akkor speciálisan

$$\Delta[F_1(z_1(t), t), \ldots, F_{n-1}(z_{n-1}(t), t), F_n(z, t)] \equiv 0 \qquad (z \in Q_1, t \in Q_2'')$$

is érvényes, (2. 9b) miatt pedig

$$F_1(z, t)\Delta[F_2(z_1(t), t), \ldots, F_n(z_{n-1}(t), t)] -$$
$$- F_2(z, t)\Delta[F_1(z_1(t), t), F_3(z_2(t), t), \ldots, F_n(z_{n-1}(t), t)] + \ldots - \ldots +$$
$$+ (-1)^{n-1}F_n(z, t)\Delta[F_1(z_1(t), t), \ldots, F_{n-1}(z_{n-1}(t), t)] \equiv 0$$

azaz

$$c_1''(t)F_1(z, t) + c_2''(t)F_2(z, t) + \ldots + c_n''(t)F_n(z, t) \equiv 0 \tag{2. 17}$$

adódik. A $c_i''(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ függvények jelentése nyilvánvaló; s mivel $c_n''(t)$ (2. 16) szerint sehol nem tűnik el, a

$$\sum_{i=1}^{n} |c_i''(t)| > 0$$

egyenlőtlenség is nyilván teljesül. A

$$c_i(t) = \left\{\begin{array}{lll} c_i'(t), & \textit{ha} & t \in Q_2' \\ c_i''(t), & \textit{ha} & t \in Q_2'' \end{array}\right\} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

választással a (2. 15) és (2. 17) azonosságok egyesítése tehát valóban (2. 2)-vel egyenértékű, s így a bizonyítás véget ért.

2. 7. a későbbiek során különösen gyakran fogjuk használni a 2. 2. tétel két egyszerű következményét, melyeket itt részletezünk.

2. 1. KOROLLÁRIUM. *Ha az*

$$F_i(z) \qquad [z \in Q_1;\ F_i(z)\colon Q_1 \to Q;\ i=1, 2, \ldots, n] \tag{2. 18}$$

függvények egymástól lineárisan függőek, azaz ha

$$\Delta[F_1(z_1), F_2(z_2), \ldots, F_n(z_n)] = 0$$

teljesül, akkor ez az

$$F_i(z) = k_{i+1}F_{i+1}(z)+\ldots+k_nF_n(z), \qquad (i=1, 2, \ldots, n-1)$$

$$F_n(z) \equiv 0$$

egyenletek legalább egyikének fennállását vonja maga után.

BIZONYÍTÁS. A 2. 2. tétel szerint a (2. 18) függvényekre

$$c_1F_1(z)+c_2F_2(z)+\ldots+c_nF_n(z) = 0 \qquad \sum_{i=1}^{n} |c_i| > 0$$

érvényes; mivel a (2. 18) függvények csak z-nek függvényei, a t paraméter az itt szereplő konstansokban sem lép fel. Ha itt $c_1 \neq 0$, akkor $F_1(z)$ valóban a mondott módon fejezhető ki a $k_i = -c_i/c_1$ $(i=2, 3, \ldots, n)$ konstansokkal. A továbbiakban legyen $c_1=0$, s most c_2-re végzünk hasonló okoskodást, stb. Eljutunk végül ahhoz az esethez, amikor $c_1=c_2=\ldots=c_{n-1}=0$, s mivel egyidejűleg minden c_i nem tűnhet el, $c_n \neq 0$, s így szükségképpen $F_n(z) \equiv 0$. Így minden esetet megvizsgáltunk.

2. 2. KOROLLÁRIUM. *Ha az*

$$\begin{cases} F_1(z, t) & [z \in Q_1, t \in Q_2;\quad F_1(z, t)\colon Q_1 \times Q_2 \to Q] \\ F_i(z) & [z \in Q_1;\quad F_i(z)\colon Q_1 \to Q;\quad i=2, 3, \ldots, n] \end{cases} \tag{2. 19}$$

függvények egymástól lineárisan függőek, azaz ha

$$\Delta[F_1(z_1, t), F_2(z_2), \ldots, F_n(z_n)] = 0$$

teljesül, akkor ez az

$$F_1(z, t) = k_2(t)F_2(z)+\ldots+k_n(t)F_n(z),$$

$$F_i(z) = k_{i+1}F_{i+1}(z)+\ldots+k_nF_n(z), \ (i=2, 3, \ldots, n-1)$$

$$F_n(z) \equiv 0$$

egyenletek legalább egyikének fennállását vonja maga után.

BIZONYÍTÁS. A 2. 2. tétel szerint a (2. 19) függvényekre

$$\begin{cases} c_1(t)F_1(z, t)+c_2(t)F_2(z)+\ldots+c_n(t)F_n(z) = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} |c_i(t)| > 0 \end{cases} \tag{2. 20}$$

érvényes. Ha itt $c_1(t)\neq 0$ minden $t\in Q_2$-re teljesül, akkor $F_1(z,t)$ valóban a mondott módon fejezhető ki a $k_i(t)=-c_i(t)/c_1(t)$ $(i=2,3,\ldots,n)$ függvényekkel. Ha viszont van olyan $t_0\in Q_2$, melyre $c_1(t_0)=0$, akkor (2. 20)-ból a $t=t_0$, $c_i(t_0)=c_i$ $(i=2,3,\ldots,n)$ helyettesítésekkel a 2. 1. korolláriumban már tárgyalt

$$c_2F_2(z)+c_3F_3(z)+\ldots+c_nF_n(z)=0 \qquad \sum_{i=2}^{n}|c_i|>0$$

eset áll elő, amiből az állítás további része már következik.

2. 8. A *Pexider*-féle függvényegyenletek megoldásaira a későbbiek során gyakran lesz szükségünk. Bár a bemutatandó megoldási módszer ezeknek az egyenleteknek a megoldására is jól alkalmazható, itt valamelyest általánosabb eredményt kaphatunk, ha anélkül oldjuk meg, hisz a „determinánsos-módszer" a szereplő függvények „értékkészletéről" általában test-, de legalábbis gyűrű-tulajdonságokat tételez fel.

Legyen *$Q_0(*)$ tetszőleges Abel-féle félcsoport a $z=z_1*z_2$ $(z_1,z_2,z\in Q_0)$ művelettel,* továbbá *$Q_0(+)$ tetszőleges additív módon írt Abel-féle csoport* és végül *$Q_0'(\cdot)$ tetszőleges multiplikatív módon írt Abel-féle csoportnak egy zérus-elemmel való bővítése.* A későbbiekben $Q_0(+)$ alatt mindig a Q zérus karakterisztikájú test *additív* csoportját, ill. $Q_0'(\cdot)$ alatt a Q test *multiplikatív* csoportjának a zérus elemmel való bővítését fogjuk érteni.

Tekintsük a $Q_0(*)$ félcsoporton érvényes

$$F(z_1*z_2)=G(z_1)+H(z_2), \tag{2. 21}$$

$$[z_1,z_2,z_1*z_2\in Q_0(*);\ F(z),G(z),H(z)\colon Q_0(*)\to Q_0(+)]$$

$$F(z_1*z_2)=G(z_1)H(z_2) \tag{2. 22}$$

$$[z_1,z_2,z_1*z_2\in Q_0(*);\ F(z),G(z),H(z)\colon Q_0(*)\to Q'(\cdot)]$$

Pexider-féle függvényegyenleteket. Érvényes a

2. 3. TÉTEL. *A $Q_0(*)$ Abel-féle félcsoporton érvényes* (2. 21) *függvényegyenlet legáltalánosabb megoldásai az*

$$F(z_1*z_2)=f(z_1*z_2)+c_1+c_2,$$

$$G(z)=f(z)+c_1,$$

$$H(z)=f(z)+c_2$$

függvények, ahol $f(z)$ az

$$f(z_1*z_2)=f(z_1)+f(z_2) \tag{2. 23}$$

$$[z_1,z_2,z_1*z_2\in Q_0(*);f(z)\colon\ Q_0(*)\to Q_0(+)]$$

Cauchy-féle függvényegyenletet kielégítő tetszőleges függvény, $c_1\in Q_0(+)$ és $c_2\in Q_0(+)$ pedig tetszőleges konstansok.

MEGJEGYZÉS. Itt és a továbbiakban, — hacsak eleve nincs biztosítva, hogy a szereplő függvények mindegyike a *teljes* $Q_0(*)$ félcsoporton van értelmezve, — a megoldást csak $F(z_1*z_2)$-re adjuk meg.

BIZONYÍTÁS. (2. 21) alapján

$$G(z_1)+H(z_2) = F(z_1 * z_2) = F(z_2 * z_1) = G(z_2)+H(z_1),$$

tehát $z_2 = z_0$ rögzítéssel

$$H(z) = G(z)+H(z_0)-G(z_0) = G(z)+c_2-c_1 \tag{2. 24}$$

$$(c_2-c_1 = \text{konst.}).$$

Ezt felhasználva, a $z_1 * z_2$ művelet asszociatívitása miatt (2. 21)-ből

$$G(z_1 * z_2)+G(z_3)+c_2-c_1 = F(z_1 * z_2 * z_3) =$$

$$= G(z_1)+G(z_2 * z_3)+c_2-c_1$$

írható, ahonnan a $z_3 = z_0$ rögzítéssel

$$G(z_1)+G(z_2 * z_0)-G(z_0) = G(z_1)+K(z_2) =$$

$$= G(z_1 * z_2) = G(z_2 * z_1) = G(z_2)+K(z_1),$$

s innen a $z_2 = z_0$ rögzítéssel

$$K(z) = G(z)+K(z_0)-G(z_0) = G(z)-c_1 \qquad (c_1 = \text{konst.})$$

adódik. Mivel a

$$G(z_1 * z_2)-c_1 = G(z_1)-c_1+G(z_2)-c_1$$

egyenlet (2. 23)-mal ekvivalens, ezért

$$G(z) = f(z)+c_1,$$

következésképpen (2. 24) miatt

$$H(z) = f(z)+c_2$$

és végül (2. 21) és (2. 23) alapján

$$F(z_1 * z_2) = f(z_1 * z_2)+c_1+c_2,$$

amit bizonyítanunk kellett.

2. 9. Előrebocsátjuk LOSONCZI L. egy érdekes példáját (levélbeli közlés) az

$$f(xy) = h(x)h(y)$$

függvényegyenletre vonatkozóan, ahol $x, y, f(u), h(x)$ valósak. A példa azt mutatja, hogy a $h(x)$ függvény akár végtelen sok helyen is zérus értéket vehet fel, anélkül hogy ebből $h(x)$ vagy $f(u)$ azonosan zérus volta következne; e példa a következő: Legyen $h(p) = 1$, ha p prím, s legyen $h(n) = 0$ a többi természetes számra; ekkor $f(n) = 1$, ha n-nek csak két prímtényezője van, s $f(n) = 0$, ha n-nek legalább három tényezője van a természetes számok körében. E függvények kielégítik az előbbi egyenletet, s az értelmezési tartomány a szorzásra nézve félcsoportot alkot. E példa is arra hívja fel a figyelmet, hogy a (2. 2) *Pexider*-féle függvényegyenletnek, ha az értelmezési tartomány *nem csoport*, s az értékkészletben a zérust is megengedjük, a *Cauchy*-egyenlet megoldásaival nem kifejezhető megoldásai is lehetségesek.

A közömbös részhalmaz definíciója. A $Q_0(*)$ félcsoporton érvényes (2. 22) függvényegyenlet megoldásához előzőleg tehát a $Q_0(*)$ félcsoportot kell részletesebben megvizsgálnunk. Egyszerűség kedvéért itt a $z_1 * z_2$ műveletet „szorzatnak", a műveletben szereplő elemeket pedig „tényezőknek" nevezzük, $Q_0(*)$ helyet pedig Q_0-t írunk. Legyen $Q_{02}=Q_0*Q_0$ és $Q_{03}=Q_{02}*Q_0$, azaz *a legalább két*, ill. *három tényezőt tartalmazó z elemek halmaza.* Legyen továbbá $Q_{01} = Q_0 \setminus Q_{02}$; nevezzük ezt *prímek halmazának*, miután egyetlen Q_{01}-beli elem sem bontható semmilyen módon tényezőkre; feltesszük, hogy Q_{01} *nem üres halmaz.* Képezzük a $\bar{Q}_{02} = Q_{01}*Q_{01}$ halmazt. Mivel Q_0-ban a tényezőkre való bontás (még a z_1*z_2 művelet kommutatívitásától is eltekintve) általában *nem* egyértelmű, ezért $\bar{Q}_{02}$-nek lehet közös része Q_{03}-mal is. Legyen $\bar{Q}'_{02} = \bar{Q}_{02} \cap Q_{03}$, mely már csak olyan elemeket tartalmaz, amelyek mindegyike rendelkezik egyrészt (legalább egy) kéttényezős prím-felbontással, másrészt (legalább egy) háromtényezős felbontással is. Két ilyen prím-tényezőkre való bontást akkor tekintünk különbözőnek, ha azok nemcsak a tényezők sorrendjében különböznek egymástól. Írjuk most fel *minden* $\bar{Q}'_{02}$-beli elem *összes lehetséges és egymástól különböző* két-tényezős prím-felbontásait, a kommutatívitás miatt a tényezők sorrendjét *tetszés szerint* választva:

$$z'_a * z''_a, \quad z'_b * z''_b, \quad z'_c * z''_c, \ldots$$

Legyen most $Q'_{01}=\{z'_a, z'_b, z'_c, \ldots\}$ és $Q''_{01}=\{z''_a, z''_b, z''_c, \ldots\}$. *E halmazokból képezett* $\bar{Q}_{01} = Q''_{01} \setminus (Q'_{01} \cap Q''_{01})$ *halmazt az eredeti* Q_0 *halmaz egy közömbös részhalmazának nevezzük, feltéve, hogy az nem üres halmaz.* A szerkesztésből a $z'_k * z''_k$ művelet kommutatívitása miatt világos, hogy ilyen közömbös rész általában nemcsak egy lehetséges. Az is nyilvánvaló, hogy minden ilyen közömbös részhalmaz a prímek halmazának is részhalmaza. Ha viszont Q_0-ban nincs prím elem, akkor nyilván részhalmaz sincs.

Jelöljön $h(z)$ $[z \in Q_0(*);\ h: Q_0(*) \to Q(\cdot)]$ *olyan függvényt, mely a* $Q_0(*)$ *alaphalmaz (félcsoport) egy nem-üres közömbös* $\bar{Q}_{01}$ *részhalmazán tetszőleges, míg azon kívül csak zérus értéket vesz fel:*

$$h(z) = \begin{cases} \textit{tetszőleges}, & \textit{ha} \quad z \in \bar{Q}_{01}, \\ 0, & \textit{ha} \quad z \in (Q_0 \setminus \bar{Q}_{01}). \end{cases} \tag{2. 25}$$

E függvény a (2. 22) függvényegyenlet általános megoldásánál lényeges szerepet fog játszani. A $h(z)$ függvény értelmezéséből rögtön adódik a

2. 1. LEMMA. *Ha* $h(z_1)h(z_2) \equiv k$ *(konst.) minden* $z_1, z_2 \in Q_0(*)$ *elempárra teljesül, akkor* $h(z) \equiv 0$ $(z \in Q_0(*))$.

BIZONYÍTÁS. Ugyanis minden $z \in Q_{02}$ esetén $h(z)=0$, tehát $k=0$ is fennáll és $z_1=z_2$ helyettesítéssel bármely $z_1 \in Q_0(*)$ esetén $h(z_1)^2=0$, amiből $h(z)\equiv 0$ következik.

A (2. 22) függvényegyenlet megoldásait illetően érvényes a

2.4. TÉTEL. *A $Q_0(*)$ Abel-féle félcsoporton érvényes (2.22) függvényegyenlet legáltalánosabb megoldásai az*

(M 1.1) $\quad F(z_1 * z_2) \equiv 0, \quad G(z) \equiv 0, \quad H(z)$ *tetszőleges;*

(M 1.2) $\quad F(z_1 * z_2) \equiv 0, \quad G(z)$ *tetszőleges,* $\quad H(z) \equiv 0;$

(M 1.3) $\quad F(z_1 * z_2) = c_1 c_2 g(z_1 * z_2), \quad G(z) = c_1 g(z), \quad H(z) = c_2 g(z);$

(M 1.4) $\quad F(z_1 * z_2) = c_1 h(z_1) h(z_2), \quad G(z) = h(z), \quad H(z) = c_1 h(z)$

függvények, ahol $g(z)$ a

(2.26)
$$g(z_1 * z_2) = g(z_1) g(z_2)$$
$$[z_1, z_2, z_1 * z_2 \in Q_0(*);\ g(z): Q_0(*) \to Q(\cdot)]$$

Cauchy-féle függvényegyenletet kielégítő tetszőleges függvény, $h(z)$ a (2.25) formulával értelmezett függvény, c_1 és c_2 pedig tetszőleges $Q_0(\cdot)$-beli konstansok.

BIZONYÍTÁS. (2.22) alapján

$$G(z_1) H(z_2) = F(z_1 * z_2) = F(z_2 * z_1) = G(z_2) H(z_1).$$

Ha itt $G(z) \equiv 0$, akkor $H(z)$ tetszőleges és $F(z_1 * z_2) \equiv 0$, s ez éppen az (M 1.1) megoldásrendszer.

A továbbiakban feltesszük, hogy $G(z) \not\equiv 0$, s ekkor van olyan $z_0 \in Q_0(*)$, melyre $G(z_0) \neq 0$, így $H(z) = k_1 G(z)$, ahol $k_1 = H(z_0)/G(z_0) = \text{konst.}$

Legyen először $k_1 = 0$, akkor $H(z) \equiv 0$, $G(z) =$ tetszőleges, s $F(z_1 * z_2) \equiv 0$ következik, ami éppen az (M 1.2) megoldásrendszert adja.

Legyen másodszor $k_1 \neq 0$. Ekkor a $z_1 * z_2$ művelet asszociatívitása miatt (2.22)-ből

$$k_1 G(z_1 * z_2) G(z_3) = F(z_1 * z_2 * z_3) = k_1 G(z_1) G(z_2 * z_3)$$

adódik. Mivel $k_1 G(z_0) \neq 0$, ezért a $z_3 = z_0$ majd $z_2 = z_0$ rögzítéssel

$$G(z_1 * z_2) = G(z_1) \frac{G(z_2 * z_0)}{G(z_0)} G(z_1) K(z_2) = G(z_2) K(z_1) = G(z_2 * z_1),$$

$$K(z) = \frac{K(z_0)}{G(z_0)} G(z) = k_2 G(z) \qquad (k_2 = \text{konst.})$$

írható, tehát

(2.27)
$$G(z_1 * z_2) = k_2 G(z_1) G(z_2).$$

Legyen itt először $k_2 \neq 0$; k_2-vel való szorzás után a (2.26) egyenlettel ekvivalens egyenletet nyerünk, így

$$G(z) = g(z)/k_2, \quad H(z) = k_1 g(z)/k_2$$

és

$$F(z_1 * z_2) = k_1 g(z_1 * z_2)/k_2^2,$$

azaz éppen az (M 1.3) megoldásrendszert kapjuk.

Feltevésünk szerint $G(z)\not\equiv 0$, tehát a (2. 27) egyenletben a $k_2=0$ esetén $G(z_1 * z_2)\equiv 0$ nem vonja maga után $G(z)\equiv 0$ teljesülését is. Ez nyilván csak akkor lehetséges, ha $z=z_1 * z_2$ *nem vesz fel minden* $Q_0(*)$*-beli értéket*. Így a (2. 27) egyenletből $G(z)$-re csak a következő adódik:

$$G(z)=\begin{cases}0, & \textit{ha} \quad z\in Q_{02},\\ \textit{tetszőleges}, & \textit{ha} \quad z\in Q_{01}.\end{cases}$$

Most is érvényes továbbá $H(z)=k_1G(z)$. Helyettesítsük ezeket a (2. 22) egyenletbe. Ha $z_1\in Q_{02}$ vagy $z_2\in Q_{02}$, akkor $F(z_1 * z_2)=k_1G(z_1)G(z_2)=0$. Ennek alapján az is nyilvánvaló, hogy $F(z_1 * z_2)\equiv 0$, ha $z_1 * z_2\in Q_{03}$. Ha viszont $z_1\in Q_{01}$ és $z_2\in Q_{01}$, de $z_1 * z_2\in Q_{03}$, akkor $G(z_1)$ és $G(z_2)$ már nem lehet egyidejűleg tetszőleges, hanem $F(z_1 * z_2)=0$ miatt legalább az egyikük zérus. Mint láttuk, $z_1, z_2\in Q_{01}$ esetén $z_1 * z_2\in \bar{Q}_{02}$ és $z_1 * z_2\in Q_{03}$ egyidejűleg csak akkor áll fenn, ha pl. $z_1=z_a'\in Q_{01}'$ és $z_2=z_a''\in Q_{01}''$ teljesül. Legyen tehát $G(z_1)=0$, ha $z_1\in Q_{01}'$, s ekkor a Q_0 halmaz $\bar{Q}_{01}$ ún. közömbös részén $G(z_2)$ $[z_2\in\bar{Q}_{01}=Q_{01}''\setminus(Q_{01}'\cap Q_{01}'')]$ már valóban tetszőleges. Így $G(z)=h(z)$, következésképpen $H(z)=k_1h(z)$ és $F(z_1 * z_2)=k_1h(z_1)h(z_2)$, s ez éppen az (M 1. 4) megoldásrendszer.

Mivel minden esetet megvizsgáltunk, a tétel bizonyítása véget ért.

2. 10. A következőkben többször lesz szükségünk az alábbi egyszerű lemmákra.

2. 2. LEMMA. *Ha a* (2. 23) *függvényegyenletet kielégítő* $f(z)$ $[z\in Q_0(*)$; $f\colon Q_0(*)\to Q_0(+)]$ *függvényre minden* $z\in Q_{02}$ *esetén* $f(z)=2k=konst.$ *fennáll, akkor egyben* $f(z)\equiv 0$ *is teljesül az egész* $Q_0(*)$ *félcsoporton.*

BIZONYÍTÁS. Ugyanis $2f(z)=f(z * z)=2k$ miatt minden $z\in Q_0(*)$ elemre egyidejűleg $f(z)=k$ is teljesül, tehát szükségképpen $k=0$.

2. 3. LEMMA. *Ha a* (2. 26) *függvényegyenletet kielégítő* $g(z)$ $[z\in Q_0(*)$; $g\colon Q_0(*)\to Q_0(\cdot)]$ *függvényre minden* $z\in Q_{02}$ *esetén* $g(z)=k=konst.$ *fennáll, akkor egyben* $g(z)\equiv 0$ *vagy* $g(z)\equiv 1$ *is teljesül az egész* $Q_0(*)$ *félcsoporton.*

BIZONYÍTÁS. Ha $k\neq 0$, akkor $z_1 * z_2\in Q_{02}$ miatt minden $z\in Q_0(*)$ esetén

$$kg(z)=g(z_1 * z_2)g(z)=g(z_1 * z_2 * z)=k\neq 0$$

is fennáll, tehát $g(z)\equiv 1$. Ha viszont $k=0$, akkor bármely $z\in Q_0(*)$ $[z * z\in Q_{02}]$ elemre $g(z)g(z)=g(z * z)=0$ alapján $g(z)\equiv 0$ következik.

2. 4. LEMMA. *Legyen* $g(z)$ *a* (2. 26) *függvényegyenlet egy megoldása. Jelölje* Q_{00} *azoknak a* z_0 *elemeknek a halmazát, melyekre* $g(z_0)=0$ $(z_0\in Q_{00})$. *Ha* $Q_{00}\neq Q_0$, *azaz ha* $g(z)\not\equiv 0$, *akkor a* $Q_0\setminus Q_{00}$ *halmaz valódi részfélcsoportja* Q_0*-nak.*

BIZONYÍTÁS. Nyilvánvaló, hogy $Q_{00}\cap(Q_0\setminus Q_{00})=\theta$ (θ üres halmaz). Elegendő annyit bizonyítani, hogy bármely $z_1, z_2\in(Q_0\setminus Q_{00})$ elempár esetén $z_1 * z_2\in(Q_0\setminus Q_{00})$ is fennáll. Ez viszont valóban igaz, mert ha $g(z_1)g(z_2)=g(z_1 * z_2)=0$ teljesülne, akkor legalább a $g(z_1)$ és $g(z_2)$ értékek egyike zérus lenne, de ez ellentmond annak, hogy z_1 és z_2 nem tartozik Q_{00}-hoz.

2. 11. Valódi részfélcsoportra vonatkozó közömbös részhalmaz definíciója. Szükségünk lesz még *a* $Q_0\setminus Q_{00}$ *halmazra vonatkozó közömbös részhalmaz* fogalmára is. Legyen $Q_{002}=Q_{00} * Q_{00}$; feltesszük, hogy $Q_{002}\neq Q_{00}$.

Válasszuk ki $Q_{00} \setminus Q_{002} \subset Q_{00}$ részhalmaz mindazon $z'_{0a}, z'_{0b}, z'_{0c}, \ldots$ elemeit, melyekhez található (legalább egy) olyan $z_a, z_b, z_c, \ldots \in (Q_0 \setminus Q_{00})$ elem, hogy

$$z'_{0a} * z_a, \quad z'_{0b} * z_b, \quad z'_{0c} * z_c, \ldots \in Q_{002}$$

fennáll. Legyen $Q'_{00} = \{z'_{0a}, z'_{0b}, z'_{0c}, \ldots\}$. *A* $\bar{Q}_{00} = (Q_{00} \setminus Q_{002}) \setminus Q'_{00}$ *halmazt az eredeti* Q_0 *halmaz* $(Q_0 \setminus Q_{00})$*-ra vonatkozó közömbös részhalmazának nevezzük, feltéve hogy az nem üres halmaz.* A szerkesztésből világos, hogy ez mindig *egyértelműen* megadható.

Az is belátható, hogy bármely $z_{0a} \in \bar{Q}_{00}$ esetén tetszőleges $z_1 \in (Q_0 \setminus Q_{00})$-ra $z_{0a} * z_1 \in \bar{Q}_{00}$ is fennáll. Nyilván $\bar{Q}_{00}$ értelmezése alapján $z_{0a} * \notin Q_{002}$, de $z_{0a} * z_1 \notin$ $\notin [(Q_{00} \setminus Q_{002}) \setminus \bar{Q}_{00}]$ is teljesül; ha ugyanis $z'_1 \in (Q_0 \setminus Q_{00})$-ra és $z_{0a} \in \bar{Q}_{00}$-ra $z_{0a} * z'_1 \in [(Q_{00} \setminus Q_{002}) \setminus \bar{Q}_{00}]$ teljesülne, akkor alkalmas $z'_a \in (Q_0 \setminus Q_{00})$-ra $(z_{0a} * z'_1) *$ $* z'_a \in Q_{002}$ is fennáll, de eszerint volna olyan $z'_1 * z'_a \in (Q_0 \setminus Q_{00})$ elem, mellyel $z_{0a} *$ $* (z'_1 * z'_a) \in Q_{002}$, amit pedig $z_{0a} \in \bar{Q}_{00}$ értelmezése kizár.

Definiálja végül e $\bar{Q}_{00}$ *halmazon, és csak ezen, a* $G_0(z)$ *függvényt a*

$$G_0(z_{0a} * z_a) = G'_0(z_{0a}) g(z_a) \tag{2. 28}$$

$$[z_{0a}, z_{0a} * z_a \in \bar{Q}_{00}, z_a \in (Q_0 \setminus Q_{00}); \quad g(z_a) \neq 0]$$

függvényegyenlet (vö. 2. 4. lemma).

2. 12. A bemutatandó általános megoldási módszer előkészítő lépései után először az

$$F(z_1 * z_2) = \sum_{i=1}^{n} G_i(z_1) H_i(z_2) \tag{2. 29}$$

$$[z_1, z_2, z_1 * z_2 \in Q_0(*); \; F(z), G_i(z), H_i(z)\colon Q_0(*) \to Q; \quad i = 1, 2, \ldots, n]$$

függvényegyenlet több fontos speciális esetét kívánjuk tárgyalni, ahol az $F(z)$, $G_i(z)$, $H_i(z)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ *ismeretlen, vagy részben adott függvények.*

A (2. 29) típusú egyenletek vizsgálatánál célszerű lesz feltennünk, hogy *a* $z_1 * z_2$ *szorzat legalább* $n+1$ *különböző* $Q_0(*)$*-beli értéket vesz fel,* továbbá hogy *a* Q *testnek* is *van legalább* $n+1$ *különböző eleme;* ellenkező esetben a szereplő függvényekből megalkotandó összes $(n+1)$-edrendű függvénydeterminánsok triviálisan identitásba mennének át (azonosan zérusok lennének).

3. §. A Pexider-féle függvényegyenletek néhány általánosítása

ACZÉL J. [81], [2], majd I. STAMATE [59] foglalkozik az

$$F(x+y) = F(x) + F(y) + F(x) F(y)$$

függvényegyenlettel, majd ennek az egyenletnek az általánosításait, nevezetesen az

$$F(x+y) = F(x) + F(y) + G(x) G(y)$$

és

$$F(x+y) = G(x) + H(y) + K(x) L(y)$$

egyenleteket DARÓCZY Z. [21] tárgyalja. Ez utóbbi egyenlet a *Pexider*-egyenletek egy közös általánosítása, de tartalmazza még ACZÉL J. [2] által tárgyalt

$$F(x+y) = G(x)H(y)+K(y)$$

egyenletet is. A felsorolt vizsgálatok feltételei erősebbek az itt közlendőnél.

S. GOŁĄB és S. ŁOJASIEWICZ [24] közös dolgozatában fordul elő az

$$F(xy) = G(x)F(y)+H(x)y+K(x)$$

egyenlet, melyet valósban ACZÉL J. [3], [2] old meg.

3. 1. Vizsgáljuk először az

$$F(z_1 * z_2) = G(z_1)+H(z_2)+K(z_1)L(z_2) \tag{3. 1}$$

$$[z_1, z_2, z_1 * z_2 \in Q_0(*);\ F(z), G(z), H(z), K(z), L(z): Q_0(*) \to Q]$$

függvényegyenletet, mely a (2. 21) és (2. 22) *Pedixer*-egyenletek egy közös általánosítása. A következőt bizonyítjuk be:

3. 1. TÉTEL. *A* $Q_0(*)$ *félcsoporton érvényes* (3. 1) *függvényegyenlet legáltalánosabb megoldásai a következő függvények:*

$$\begin{aligned} F(z_1 * z_2) &= f(z_1 * z_2)+a_1, \\ G(z) &= f(z)-a_3K(z)+a_2+\tfrac{1}{2}a_1, \\ H(z) &= f(z)+\tfrac{1}{2}a_1-a_2, \\ K(z) &\ \textit{tetszőleges}, \\ L(z) &\equiv a_3; \end{aligned} \tag{M2. 1}$$

$$\begin{aligned} F(z_1 * z_2) &= f(z_1 * z_2)+a_1, \\ G(z) &= f(z)+\tfrac{1}{2}a_1-a_2, \\ H(z) &= f(z)-a_3L(z)+a_2+\tfrac{1}{2}a_1, \\ K(z) &\equiv a_3, \\ L(z) &\ \textit{tetszőleges}; \end{aligned} \tag{M2. 1'}$$

$$\begin{aligned} F(z_1 * z_2) &= a_1g(z_1 * z_2)+f(z_1 * z_2)+a_2, \\ G(z) &= a_3g(z)+f(z)+a_4, \\ H(z) &= a_5g(z)+f(z)+a_6, \\ K(z) &= a_7g(z)+a_8, \\ L(z) &= a_9g(z)+a_{10}, \\ a_1 &= a_7a_9,\ a_2 = a_4+a_6+a_8a_{10}, \\ a_3+a_7a_{10} &= 0,\ a_5+a_8a_9 = 0; \end{aligned} \tag{M2. 2}$$

(M2. 3)
$$F(z_1 * z_2) = a_1 f(z_1 * z_2)^2 + a_2 f(z_1 * z_2) + f_1(z_1 * z_2) + a_3,$$
$$G(z) = a_1 f(z)^2 + f_1(z) + a_4,$$
$$H(z) = a_1 f(z)^2 + a_5 f(z) + f_1(z) + a_6,$$
$$K(z) = 2a_1 f(z) + a_7,$$
$$L(z) = f(z) + a_8,$$
$$a_2 = 2a_1 a_8 = a_5 + a_7, \quad a_3 = a_4 + a_6 + a_7 a_8;$$

(M2. 4)
$$F(z_1 * z_2) = f(z_1 * z_2) + a_1 h(z_1) h(z_2) + a_2,$$
$$G(z) = f(z) + a_3 h(z) + a_4,$$
$$H(z) = f(z) + a_5 h(z) + a_6,$$
$$K(z) = a_1 h(z) - a_5,$$
$$L(z) = h(z) + a_7,$$
$$a_2 = a_4 + a_6 - a_5 a_7, \quad a_3 + a_1 a_7 = 0;$$

ahol $f(z)$ és $f_1(z)$ ill. $g(z)$ a (2. 23) ill. (2. 26) Cauchy-egyenletet kielégítő függvények, $h(z)$ a (2. 25) formulával definiált függvény, a_i $(i=1, 2, \ldots, 10)$ pedig tetszőleges Q-beli konstansok a feltüntetett megszorításokkal. Más megoldások nincsenek.

MEGJEGYZÉS. Az (M2. 1) megoldásrendszertől az (M2. 1′) nem különbözik lényegesen. Vegyük észre ugyanis, hogy a (3. 1) egyenletben a $G(z)$ és $H(z)$ ill. a $K(z)$ és $L(z)$ függvények egyidejűleg felcserélhetők; e cserékkel kapjuk (M2. 1)-ből (M2. 1′)-t. Ilyen cserékkel az (M2. 2)—(M2. 4) megoldásokból újak nem állnak elő.

BIZONYÍTÁS. Könnyen meggyőződhetünk róla, hogy az (M2. 1)—(M2. 4) alatti függvények a (3. 1) egyenletet a konstansokra tett megszorításokkal valóban kielégítik. Így csak azt kell bizonyítanunk, hogy minden megoldás az (M2. 1)—(M2. 4) alatt felsorolt típusok egyikébe tartozik.

A (3. 1) egyenlet bal oldalának szimmetriája miatt
$$G(z_1) + H(z_2) + K(z_1)L(z_2) = G(z_2) + H(z_1) + K(z_2)L(z_1),$$
tehát
$$\begin{vmatrix} G(z_1) - H(z_1) & 1 \\ G(z_2) - H(z_2) & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} K(z_1) & L(z_1) \\ K(z_2) & L(z_2) \end{vmatrix} = 0,$$
azaz a korábbi determinánsos jelöléssel

(3. 2)
$$\Delta(G-H, 1) + \Delta(K, L) = 0.$$

„Bővítsük” ezt az egyenletet 1-gyel, akkor
$$\Delta(G-H, 1, 1) + \Delta(K, L, 1) = 0$$
és (2. 7) miatt
$$\Delta(K, L, 1) = 0$$

adódik. A 2. 1. korollárium szerint a következő eseteket kell megvizsgálnunk:

$$\left.\begin{aligned} &(3.\,1.\,\text{A}) \qquad L(z) \equiv b_1, \\ &(3.\,1.\,\text{B}) \qquad K(z) = b_1 + b_2 L(z) \end{aligned}\right\} \quad (b_1, b_2 = \text{konst.}).$$

3. 1. A. Helyettesítsük a (3. 1. A) megoldást (3. 2)-be, akkor (2. 6) és (2. 8) miatt

$$\Delta(G-H, 1) + \Delta(K, b_1) = \Delta(G-H, 1) + \Delta(b_1 K, 1) = \Delta(G-H+b_1 K, 1) = 0,$$

tehát a 2. 1. korollárium szerint

$$G(z) - H(z) + b_1 K(z) = 2b_2 \qquad (b_2 = \text{konst.}). \tag{3. 3}$$

A (3. 1. A) és (3. 3) összefüggésekkel (3. 1)-ből

$$\begin{aligned} F(z_1 * z_2) &= G(z_1) + G(z_2) + b_1 K(z_2) - 2b_2 + b_1 K(z_1) = \\ &= G(z_1) + b_1 K(z_1) - b_2 + G(z_2) + b_1 K(z_2) - b_2 \end{aligned}$$

adódik, mely már (2. 21) típusú *Pexider*-egyenlet. A megoldás tehát

$$\begin{aligned} F(z_1 * z_2) &= f(z_1 * z_2) + 2b_3, \\ G(z) + b_1 K(z) - b_2 &= f(z) + b_3, \end{aligned}$$

ahol $f(z)$ a (2. 23) *Cauchy*-egyenletet kielégítő függvény, $K(z)$ pedig tetszőleges. Végül (3. 3) és (3. 1. A) alapján

$$\begin{aligned} H(z) &= f(z) + b_3 - b_2, \\ L(z) &\equiv b_1. \end{aligned}$$

Ez a megoldásrendszer valóban (M2. 1)-et adja, tehát a (3. 1. A) esetet elintéztük. A továbbiakban feltesszük, hogy $L(z) \not\equiv \text{konst.}$

3. 1. B. Helyettesítsük a (3. 1. B) függvényt (3. 2)-be, akkor (2. 8), (2. 7), (2. 6) és (2. 4) alapján

$$\begin{aligned} \Delta(G-H, 1) + \Delta(b_1 + b_2 L, L) &= \Delta(G-H, 1) + \Delta(b_1, L) + \Delta(b_2 L, L) = \\ &= \Delta(G-H, 1) + \Delta(-b_1 L, 1) = \Delta(G-H-b_1 L, 1) = 0, \end{aligned}$$

ahonnan (vö. 2. 1. korollárium)

$$G(z) - H(z) - b_1 L(z) = b_3 \qquad (b_3 = \text{konst.}) \tag{3. 4}$$

következik. A (3. 1. B) és (3. 4) összefüggések segítségével (3. 1)-ből

$$F(z_1 * z_2) = G(z_1) + G(z_2) - b_1 L(z_2) - b_3 + [b_1 + b_2 L(z_1)] L(z_2),$$

$$F(z_1 * z_2) = G(z_1) + G(z_2) + b_2 L(z_1) L(z_2) - b_3 \tag{3. 5}$$

lesz. A $z_1 * z_2$ művelet asszociatívitása és kommutatívitása alapján (3. 5)-ből

$$\begin{aligned} F(z_1 * t * z_2) &= G(z_1 * t) + G(z_2) + b_2 L(z_1 * t) L(z_2) - b_3 = \\ &= G(z_1) + G(z_2 * t) + b_2 L(z_1) L(z_2 * t) - b_3 \end{aligned}$$

írható, azaz

$$(3.\,6) \qquad \Delta[G(z_1 * t) - G(z_1),\, 1] + \Delta[L(z_1 * t),\, b_2 L(z_2)] = 0.$$

„Bővítsük" ezt az egyenletet 1-gyel, akkor [vö. (2. 7) és (2. 6)]

$$b_2 \Delta[L(z_1 * t),\, L(z_2),\, 1] = 0$$

adódik, s mivel feltevésünk szerint $L(z) \not\equiv$ konst., a 2. 2. korolláriumot is figyelembe véve, elegendő csak a

$$(3.\,1.\,\mathrm{B}1) \qquad b_2 = 0,$$

$$(3.\,1.\,\mathrm{B}2) \qquad L(z * t) = M_1(t)L(z) + M_2(t)$$

eseteket vizsgálnunk.

3. 1. B1. A $b_2 = 0$ esetben $L(z)$ tetszőleges függvény és (3. 1. B)-ből következik, hogy $K(z) \equiv b_1$. Mivel szimmetria okok miatt a (3. 1) egyenletben $G(z)$ a $H(z)$-vel és $K(z)$ az $L(z)$-vel *egyidejűleg* felcserélhető, ez az eset is ugyanúgy intézhető el, mint az $L(z) \equiv$ konst. eset. A megoldások tehát az (M2. 1′) alatt felsorolt függvények.

A továbbiakban feltesszük, hogy $b_2 \neq 0$.

3. 1. B2. A (3. 1. B2) egyenletből a baloldal szimmetriája miatt

$$M_1(z_1)L(z_2) + M_2(z_1) = M_1(z_2)L(z_1) + M_2(z_2),$$

$$(3.\,7) \qquad \Delta(M_1,\, L) + \Delta(M_2,\, 1) = 0.$$

„Bővítsük" ezt az egyenletet a szokásos módon 1-gyel, kapjuk, hogy

$$\Delta(M_1,\, L,\, 1) = 0.$$

Mivel $L(z) \not\equiv$ konst., elegendő csak az

$$(3.\,8) \qquad M_1(z) = b_4 L(z) + b_5 \qquad (b_4,\, b_5 = \text{konst.})$$

esetet vizsgálni.

Helyettesítsük ezt (3.7)-be:

$$\Delta(b_4 L + b_5,\, L) + \Delta(M_2,\, 1) = \Delta(b_5,\, L) + \Delta(M_2,\, 1) =$$
$$= \Delta(-b_5 L,\, 1) + \Delta(M_2,\, 1) = \Delta(M_2 - b_5 L,\, 1) = 0,$$

innen pedig

$$(3.\,9) \qquad M_2(z) - b_5 L(z) = b_6 \qquad (b_6 = \text{konst.})$$

következik. A (3. 8) és (3. 9) egyenletek alapján (3. 1. B2)-ből

$$(3.\,10) \qquad L(z_1 * z_2) = [b_4 L(z_1) + b_5]L(z_2) + b_5 L(z_1) + b_6$$

adódik.

Mielőtt a (3. 10) egyenlet megoldásához kezdenénk, célszerű lesz a $G(z_1 * z_2)$ kifejezésre is explicit formulát keresni. E célból a (3. 10) összefüggést (3. 6)-ba írjuk:

$$\Delta[G(z_1 * t) - G(z_1),\, 1] +$$
$$+ \Delta[b_4 L(z_1)L(t) + b_5 L(z_1) + b_5 L(t) + b_6,\, b_2 L(z_2)] =$$
$$= \Delta[G(z_1 * t) - G(z_1),\, 1] + \Delta[b_5 L(t) + b_6,\, b_2 L(z_2)] =$$
$$= \Delta[G(z_1 * t) - G(z_1) - b_2 b_5 L(t)L(z_1) - b_2 b_6 L(z_1),\, 1] = 0,$$

azaz a 2. 2. korollárium szerint

$$G(z*t)-G(z)-b_2b_5L(t)L(z)-b_2b_6L(z) = M_3(t) \tag{3. 11}$$

érvényes. A változók cseréjével a szokásos módon a

$$\Delta(G+b_2b_6L-M_3, 1) = 0$$

egyenlet, majd ebből

$$G(z)+b_2b_6L(z)-M_3(z) = b_7 \qquad (b_7=\text{konst.})$$

írható. Ezt is figyelembe véve (3. 11)-ből a

$$G(z_1*z_2) = b_2b_5L(z_1)L(z_2)+b_2b_6[L(z_1)+L(z_2)]+ \\ +G(z_1)+G(z_2)-b_7 \tag{3. 12}$$

egyenletet nyerjük.

Térjünk most vissza a (3. 10) egyenlet tárgyalásához. Két alapesetet különböztetünk meg:

$$b_4\neq 0, \tag{3. 1. B2a}$$

$$b_4=0. \tag{3. 1. B2b}$$

3. 1. B2a. Ha $b_4\neq 0$, (3. 10)-ből a (2. 22) alakú

$$b_4L(z_1*z_2)+b_5^2-b_4b_6=[b_4L(z_1)+b_5][b_4L(z_2)+b_5] \tag{3. 13}$$

Pexider-egyenletet kapjuk. Feltevésünk szerint $L(z)\not\equiv$konst., ezért a 2. 4. tételben szereplő (M1. 1) és (M1. 2) megoldások figyelmen kívül maradnak s részletesen csak az (M1. 3) és (M1. 4) esetekből adódó megoldásokat kell tárgyalnunk.

3. 1. B2a1. Az (M1. 3) megoldások alapján (3. 13)-ból

$$\begin{cases} b_4L(z)+b_5 = c_1g(z) \not\equiv 0, \\ b_4L(z_1*z_2)+b_5^2-b_4b_6 = c_1^2g(z_1*z_2) \end{cases} \tag{3. 14}$$

következik, tehát a két egyenletet egymásba helyettesítve

$$b_4(c_1-1)L(z_1*z_2)+c_1b_5-b_5^2+b_4b_6 = 0 \tag{3. 15}$$

írható. Ha itt $c_1\neq 1$ lenne, akkor (3. 14) és (3. 15)-ből $g(z_1*z_2)\equiv k$ (konst.), tehát a 2. 1. lemma szerint $g(z)\equiv 0$ vagy $g(z)\equiv 1$ következne, s ez (3. 14) miatt a kizárt $L(z)\equiv$konst. esetet vonná maga után. Eszerint szükségképpen $c_1=1$ és (3. 14)-ből

$$L(z) = \frac{1}{b_4}[g(z)-b_5], \qquad b_5^2-b_4b_6 = b_5 \tag{3. 16}$$

adódik, ahol tehát $g(z)$ a (2. 26) alakú *Cauchy*-egyenletet kielégítő függvény. Így $L(z)$ már valóban (M2. 2) alakú és (3. 1. B) alapján a $K(z)$ függvény is (M2. 2) alakú.

A (3.16) megoldást felhasználva (3. 12)-ből

$$b_4^2G(z_1*z_2) = b_2b_5[g(z_1)-b_5][g(z_2)-b_5]+ \\ +b_2b_6b_4[g(z_1)+g(z_2)-2b_5]+b_4^2[G(z_1)+G(z_2)]-b_4^2b_7,$$

azaz átrendezés után egy (2. 23) alakú *Cauchy*-egyenletet nyerünk:

$$b_4^2G(z_1 * z_2) - b_2b_5g(z_1 * z_2) + b_0 =$$
$$= [b_4^2G(z_1) - b_2b_5g(z_1) + b_0] + [b_4^2G(z_2) - b_2b_5g(z_2) + b_0],$$

ahol

$$b_0 = 2b_2b_5^2 - b_2b_5^3 - b_4^2b_7.$$

Eszerint

$$b_4^2G(z) - b_2b_5g(z) + b_0 = b_4^2f(z), \tag{3. 17}$$

ahol $f(z)$ a (2. 23) egyenletet elégíti ki, tehát a $G(z)$ függvény is (M2. 2) alakú. A (3. 16) és (3. 17) megoldások alapján (3. 4)-ből $H(z)$-re is (M2. 2) alakú megoldás adódik.

Végül a (3. 5) egyenletből a (3. 16) és (3. 17) megoldásokat felhasználva az $F(z_1 * z_2)$ függvényt határozzuk meg:

$$F(z_1 * z_2) = f(z_1) + \frac{b_2b_5}{b_4^2}g(z_1) - \frac{b_0}{b_4^2} + f(z_2) + \frac{b_2b_5}{b_4^2}g(z_2) - \frac{b_0}{b_4^2} +$$
$$+ \frac{b_2}{b_4^2}[g(z_1) - b_5][g(z_2) - b_5] - b_3 =$$
$$= f(z_1 * z_2) + \frac{b_2}{b_4^2}g(z_1 * z_2) - \frac{2b_0}{b_4^2} + \frac{b_2b_5^2}{b_4^2} - b_3,$$

tehát $F(z_1 * z_2)$ is (M2. 2) alakú függvény.

A megoldásokban szereplő konstansokra bevezethetjük az

$$a_1 = \frac{b_2}{b_4^2}, \quad a_2 = -\frac{2b_0}{b_4^2} + \frac{b_2b_5^2}{b_4^2} - b_3, \quad a_3 = \frac{b_2b_5}{b_4^2}, \quad a_4 = -\frac{b_0}{b_4^2},$$
$$a_5 = \frac{b_2b_5}{b_4^2} - \frac{b_1}{b_4}, \quad a_6 = -\frac{b_0}{b_4^2} + \frac{b_1b_5}{b_4} - b_3, \quad a_7 = \frac{b_2}{b_4},$$
$$a_8 = b_1 - \frac{b_2b_5}{b_4^2}, \quad a_9 = \frac{1}{b_4}, \quad a_{10} = -\frac{b_5}{b_4}$$

rövidebb jelöléseket is, s mint arról könnyen meggyőződhetünk, a konstansokra (M2. 2)-ben tett megszorítások valóban teljesülnek.

Ezzel a (3. 1. B2a1) esetet elintéztük.

3. 1. B2a2. A (3. 13) egyenletnek szóbajöhető megoldása még (M1. 4) alapján

$$\begin{cases} b_4L(z) + b_5 = h(z), \\ b_4L(z_1 * z_2) + b_5^2 - b_4b_6 = h(z_1)h(z_2), \end{cases} \tag{3. 18}$$

ahol $h(z)$ a (2. 25) formulával definiált függvény. Innen $h(z)$ értelmezése miatt

$$b_4L(z_1 * z_2) + b_5 = h(z_1 * z_2) = 0,$$

ezért

$$h(z_1)h(z_2) \equiv b_5^2 - b_4b_6 - b_5 = \text{konst.}$$

Ebből viszont a 2. 1. lemma szerint $h(z)\equiv 0$ következik, ami (3. 18) miatt a már kizárt $L(z)\equiv$konst. esetet vonja maga után, tehát innen nem származik újabb megoldás.

3. 1. B2b. Ha (3. 10)-ben $b_4=0$, akkor az

$$L(z_1 * z_2) = b_5 L(z_1)+b_5 L(z_2)+b_6 \tag{3. 19}$$

egyszerűbb egyenletet nyerjük, ahol ismét két esetet célszerű megkülönböztetnünk:

(3. 1. B2b1) $b_5\neq 0$,

3. 1. B2b2) $b_5=0$.

3. 1. B2b1. Ha (3. 19)-ben $b_5\neq 0$, akkor egy (2. 21) alakú *Pexider*-egyenlettel állunk szemben, így

$$\begin{cases} L(z_1 * z_2)+b_6 = f(z_1 * z_2)+2c_1, \\ b_5 L(z)+b_6 = f(z)+c_1, \end{cases} \tag{3. 20}$$

s $L(z_1 * z_2)$ kiküszöbölésével

$$(b_5-1)f(z_1 * z_2) = b_6(b_5-1)-c_1(2b_5-1).$$

Ha itt $b_5\neq 1$ lenne, ez az $f(z_1 * z_2)=c_0=$ konst. egyenletet, tehát a 2. 2 lemma szerint az $f(z)\equiv 0$ és így a már kizárt $L(z)\equiv$konst. eset fennállását vonná maga után. Viszont $b_5=1$ esetén $c_1=0$ és (3. 20) valóban az (M2. 3) alakú megoldásra egyszerűsödik, (3. 1. B) miatt pedig $K(z)$ is (M2. 3) alakú.

Ekkor (3. 12) alapján

$$G(z_1 * z_2) = b_2[f(z_1)-b_6][f(z_2)-b_6]+b_2b_6[f(z_1)+f(z_2)-2b_6]+$$
$$+G(z_1)+G(z_2)-b_7$$

azaz az átrendezés után a (2. 23) alakú

$$G(z_1 * z_2)-\tfrac{1}{2}b_2 f(z_1 * z_2)^2-b_0=$$
$$=[G(z_1)-\tfrac{1}{2}f(z_1)^2-b_0]+[G(z_2)-\tfrac{1}{2}b_2 f(z_2)^2-b_0]$$
$$b_0=b_7+b_2b_6^2$$

Cauchy-egyenletet nyerjük, s így a megoldás

$$G(z)-\tfrac{1}{2}b_2 f(z)^2-b_0=f_1(z),$$

ahol $f_1(z)$ is (2. 23)-at kielégítő függvény. A $G(z)$ és $L(z)$ függvények ismeretében (3. 4)-ből $H(z)$ is (M2. 3) alakú lesz.

Végül $F(z_1 * z_2)$-t a (3. 5) egyenletből határozzuk meg:

$$F(z_1 * z_2) = \tfrac{1}{2}b_2 f(z_1)^2+f_1(z_1)+b_0+\tfrac{1}{2}b_2 f(z_2)^2+$$
$$+f_1(z_2)+b_0+b_2[f(z_1)-b_6][f(z_2)-b_6]-b_3 =$$
$$=\tfrac{1}{2}b_2 f(z_1 * z_2)^2-b_2b_6 f(z_1 * z_2)+f_1(z_1 * z_2)+2b_0+b_2b_6^2-b_3,$$

tehát ez is (M2. 3) alakú függvény.

Az (M2. 3) megoldásoknál a rövidebb

$$a_1 = \tfrac{1}{2}b_2, \quad a_2 = -b_2b_6, \quad a_3 = 2b_0+b_2b_6^2-b_3, \quad a_4 = b_0,$$

$$a_5 = -b_1, \quad a_6 = b_0+b_1b_6-b_3, \quad a_7 = b_1-b_2b_6, \quad a_8 = -b_6$$

jelöléseket használtuk, melyekre az ott tett kikötések is valóban teljesülnek.

Ezzel a (3. 1. B2b1) esetet is elintéztük.

3. 1. B2b2. Legyen (3. 19)-ben $b_5=0$, akkor

$$L(z) = \begin{cases} b_6, & ha \quad z\in Q_{02}, \\ tetsz\H{o}leges, & ha \quad z\in Q_{01}, \end{cases} \tag{3.21}$$

pontosabban itt csak annyi igaz, hogy a (3. 19) egyenlet az $L(z)$ függvény Q_{01} halmazon felvett értékeire nem ad megszorítást. Ekkor (3. 12) a (2. 21) alakú

$$G(z_1*z_2)-b_7=[G(z_1)+b_2b_6L(z_1)-b_7]+[G(z_2)+b_2b_6L(z_2)-b_7]$$

Pexider-egyenletre egyszerűsödik, ezért a megoldás

$$\begin{cases} G(z_1*z_2)-b_7 = f(z_1*z_2)+2c_1, \\ G(z)+b_2b_6L(z)-b_7 = f(z)+c_1, \end{cases} \tag{3.22}$$

tehát $G(z_1*z_2)$ kiküszöbölésével

$$b_2b_6L(z_1*z_2) = -c_1,$$

s így $L(z)$ értelmezése miatt $c_1 = -b_2b_6^2$. Ezt felhasználva (3. 5)-ből

$$F(z_1*z_2) = f(z_1)-b_2b_6L(z_1)+b_7-b_2b_6^2+$$
$$+f(z_2)-b_2b_6L(z_2)+b_7-b_2b_6^2+b_2L(z_1)L(z_2)-b_3,$$

azaz egy (2. 22) alakú

$$\frac{1}{b_2}[F(z_1*z_2)-f(z_1*z_2)-2b_7+3b_2b_6^2+b_3] = [L(z_1)-b_6][L(z_2)-b_6]$$

Pexider-egyenletet nyerünk. Itt az (M1. 1) és (M1. 2) típusú megoldások $L(z)\not\equiv$ konst. miatt figyelmen kívül maradnak. De nem kapunk új megoldást (M1. 3)-ból sem, mert $L(z)-b_6=c_1g(z)$ esetén (3. 21) miatt minden $z\in Q_{02}$ elemre $c_1g(z)\equiv 0$, ez pedig vagy $c_1=0$-t, vagy a 2. 3. lemma szerint $g(z)\equiv 0$-t von maga után; mindkét esetben $L(z)\equiv$ konst. lenne.

Az (M1. 4) megoldás alapján

$$F(z_1*z_2) = f(z_1*z_2)+b_2h(z_1)h(z_2)+2b_7-3b_2b_6^2-b_3,$$

$$L(z)=h(z)+b_6,$$

(3. 22), (3. 4) és (3. 1. B) szerint pedig

$$G(z) = f(z)-b_2b_6h(z)-2b_2b_6^2+b_7,$$

$$H(z) = f(z)-(b_2b_6+b_1)h(z)-2b_2b_6^2+b_7-b_1b_6-b_3,$$

$$K(z) = b_2h(z)+b_1+b_2b_6.$$

Ezek valóban (M2. 4) alakú megoldások, ahol

$$a_1 = b_2,\quad a_2 = 2b_7 - 3b_2b_6^2 - b_3,\quad a_3 = -b_2b_6,\quad a_4 = -2b_2b_6^2 + b_7,$$

$$a_5 = -b_2b_6 - b_1,\quad a_6 = -2b_2b_6^2 + b_7 - b_1b_6 - b_3,\quad a_7 = b_6$$

rövidebb jelöléseket használtuk, melyek a tett megszorításokat is ténylegesen kielégítik.

Ezzel minden esetet megvizsgálva, a tétel bizonyítását is befejeztük.

3. 2. A következőkben megvizsgálandó függvényegyenlet szintén a (2. 21) és (2. 22) *Pexider*-féle egyenletek egy közös általánosításának tekinthető. A megoldás menetét lényegesen befolyásolni fogja egyrészt az a körülmény, hogy az egyenletben *ismert* függvény is szerepel, másrészt pedig, hogy a szereplő függvények „értelmezési tartománya" részhalmaza e függvények „értékkészletének".

Legyen *Q' tetszőleges multiplikatív módon írt Abel-féle csoport és* $Q' \subseteq Q$, továbbá a Q'-ben és Q-ban értelmezett szorzás legyen azonos. Tekintsük az

$$F(z_1z_2) \doteq G(z_1)F(z_2) + H(z_1)z_2 + K(z_1) \tag{3.23}$$

$$[z_1, z_2, z_1z_2 \in Q';\ F(z), G(z), H(z), K(z): Q' \to Q]$$

függvényegyenletet. Érvényes a

3. 2. TÉTEL. *A Q' Abel-féle félcsoporton érvényes* (3. 23) *függvényegyenlet legáltalánosabb megoldásai a következő függvények:*

(M3. 1)
$$F(z) = a_1z + a_2,\quad G(z)\ \textit{tetszőleges},$$
$$H(z) = a_1z - a_1G(z),\quad K(z) = a_2 - a_2G(z);$$

(M3. 2)
$$F(z) = \begin{cases} a_6z + a_5, & \textit{ha}\quad z \in Q_2' = Q'Q', \\ \textit{tetszőleges}, & \textit{ha}\quad z \in (Q' - Q_2'). \end{cases}$$
$$G(z) \equiv 0,\quad H(z) = a_6z,\quad K(z) \equiv a_5;$$

(M3. 3)
$$F(z) = \frac{1}{a_1}[g_0(z) - a_2z - a_3],\qquad G(z) = g_0(z),$$
$$H(z) = \frac{a_2}{a_1}[g_0(z) - z],\quad K(z) = \frac{a_3}{a_1}[g_0(z) - 1],\qquad (a_1 \neq 0);$$

(M3. 4)
$$F(z) = f_0(z) - a_4z - a_5,\quad G(z) \equiv 1,$$
$$H(z) = -a_4z + a_4,\quad K(z) = f_0(z);$$

(M3. 5)
$$F(z) = zf_0(z) - a_6z - a_4,\quad G(z) = z,$$
$$H(z) = zf_0(z),\quad K(z) = a_4z - a_4,$$

ahol $g_0(z)$ és $f_0(z)$ a

$$g_0(z_1z_2) = g_0(z_1)g_0(z_2), \tag{3.24}$$

$$f_0(z_1z_2) = f_0(z_1) + f_0(z_2) \tag{3.25}$$

$$[z_1, z_2, z_1z_2 \in Q';\ g_0(z), f_0(z): Q' \to Q]$$

Cauchy-egyenleteket kielégítő függvények, a_i ($i=1, 2, \ldots, 6$) pedig tetszőleges Q-beli konstansok. Más megoldások nincsenek.

BIZONYÍTÁS. Könnyen meggyőződhetünk róla, hogy a felsorolt függvényrendszerek valóban megoldások, így csak azt kell bizonyítanunk, hogy más megoldások nincsenek.

A (3.23) egyenlet bal oldalának szimmetriája alapján a szokásos módon a

$$\Delta[G(z_1), F(z_2)]+\Delta[H(z_1), z_2]+\Delta[K(z_1), 1] = 0 \tag{3. 26}$$

egyenlet írható fel. „Bővítsük" ezt az egyenletet z-vel, majd 1-gyel:

$$\Delta[G(z_1), F(z_2), z_3]+\Delta[K(z_1), 1, z_3] = 0, \tag{3. 27}$$

$$\Delta[G(z_1), F(z_2), z_3, 1] = 0,$$

s ez a 2. 1. korollárium szerint csak az

$$\left.\begin{aligned} &F(z) = a_1 z+a_2, && \text{(3. 2. A)}\\ &G(z) = a_1 F(z)+a_2 z+a_3 && \text{(3. 2. B)}\end{aligned}\right\} \quad (a_1, a_2, a_3 = \text{konst.})$$

esetekben állhat fenn.

3. 2. A. Helyettesítsük a (3. 2. A) megoldást (3. 27)-be:

$$\Delta[G(z_1), a_1 z_2+a_2, z_3]+\Delta[K(z_1), 1, z_3] = \Delta[a_2 G(z_1)+K(z_1), 1, z_3] = 0,$$

tehát a 2. 1. korollárium szerint

$$a_2 G(z)+K(z) = a_3 z+a_4 \qquad (a_3, a_4 = \text{konst.}). \tag{3. 28}$$

A (3. 2. A) és (3. 28) megoldásokkal (3. 26)-ból

$$\Delta[G(z_1), a_1 z_2+a_2]+\Delta[H(z_1), z_2]+\Delta[-a_2 G(z_1)+a_3 z_1+a_4, 1] =$$

$$= \Delta[G(z_1), a_1 z_2]+\Delta[G(z_1), a_2]+\Delta[H(z_1), z_2]+\Delta[-a_2 G(z_1), 1]+$$

$$+\Delta(a_3 z_1, 1) = \Delta[a_1 G(z_1)+H(z_1)-a_3, z_2] = 0$$

adódik, tehát a 2. 1. korollárium szerint

$$a_1 G(z)+H(z)-a_3 = a_5 z \qquad (a_5 = \text{konst.}). \tag{3. 29}$$

Visszahelyettesítve a (3. 2. A), (3. 28) és (3. 29) megoldásokat (3. 23)-ba, könnyű számítással $a_1=a_5$, $a_3=0$, $a_2=a_4$ adódik. A konstansok e specializálásával valóban az (M3. 1) megoldásrendszer áll elő.

Ezzel a (3. 2. A) esetet elintéztük.

3. 2. B. Helyettesítsük a (3. 2. B) összefüggést (3. 27)-be:

$$\Delta[a_1 F(z_1)+a_2 z_1+a_3, F(z_2), z_3]+\Delta[K(z_1), 1, z_3] =$$

$$= \Delta[K(z_1)-a_3 F(z_1), 1, z_3] = 0,$$

tehát a szokásos módon

$$K(z)-a_3 F(z) = a_4 z+a_5 \qquad (a_4, a_5 = \text{konst.}), \tag{3. 30}$$

majd (3. 2. B), (3. 30) és (3. 26) alapján

$$\Delta[a_1F(z_1)+a_2z_1+a_3,\ F(z_2)]+\Delta[H(z_1), z_2]+\Delta[a_3F(z_1)+a_4z_1+a_5,\ 1] =$$
$$= \Delta[a_2z_1,\ F(z_2)]+\Delta[a_3,\ F(z_2)]+\Delta[H(z_1), z_2]+\Delta[a_3F(z_1), 1]+$$
$$+\Delta(a_4z_1,\ 1) = \Delta[-a_2F(z_1)+H(z_1)-a_4,\ z_2] = 0,$$

(3. 31) $$-a_2F(z)+H(z)-a_4 = a_6z \qquad (a_6=\text{konst.})$$

érvényes. Írjuk a (3. 2. B), (3. 30) és (3. 31) összefüggéseket (3. 23)-ba:

$$F(z_1z_2) = [a_1F(z_1)+a_2z_1+a_3]F(z_2)+$$
$$+[a_2F(z_1)+a_6z_1+a_4]z_2+a_3F(z_1)+a_4z_1+a_5,$$

(3. 32) $$F(z_1z_2) = a_1F(z_1)F(z_2)+(a_2z_1+a_3)F(z_2)+(a_2z_2+a_3)F(z_1)+$$
$$+a_6z_1z_2+a_4(z_1+z_2)+a_5.$$

Az áttekinthetőbb számítás kedvéért itt rögtön két esetet különböztetünk meg:

(3. 2. B1) $$a_1\neq 0,$$

(3. 2. B2) $$a_1=0.$$

3. 2. B1. A (3. 32) egyenletből $a_1\neq 0$ esetén az

(3. 33) $$F_0(z) = a_1F(z)+a_2z+a_3$$

jelöléssel az

$$F_0(z_1z_2) = F_0(z_1)F_0(z_2)+(a_1a_6-a_2^2+a_2)z_1z_2+(a_1a_4-a_2a_3)(z_1+z_2)+$$
$$+a_1a_5-a_3^2+a_3,$$

(3. 34) $$F_0(z_1z_2) = F_0(z_1)F_0(z_2)+b_1z_1z_2+b_2(z_1+z_2)+b_3$$

egyenletet nyerjük; a b_1, b_2, b_3 konstansok jelentése nyilvánvaló. Használjuk ki a (3. 34) egyenlet bal oldalának asszociatív voltát:

$$\Delta[F_0(z_1t),\ F_0(z_2)]+\Delta[b_2(t-1)z_1,\ 1] = 0,$$

(3. 35) $$\Delta[F_0(z_1)F_0(t)+b_1z_1t+b_2(z_1+t)+b_3,\ F_0(z_2)]+\Delta[b_2(t-1)z_1,\ 1] = 0.$$

„Bővítve" ezt az egyenletet 1-gyel a

$$\Delta[b_1z_1t+b_2z_1,\ F_0(z_2),\ 1] = -(b_1t+b_2)\Delta[F_0(z_1),\ z_2,\ 1] = 0$$

egyenlethez jutunk. Feltehetjük, hogy $\Delta[F_0(z), z, 1]\not\equiv 0$, ellenkező esetben ez (3. 33) alapján a már letárgyalt (3. 2. A) esethez vezetne, így $b_1=b_2=0$. Ezzel viszont (3. 35)-ből

$$b_3\Delta[F_0(z), 1]=0$$

adódik, tehát az ismét feltehető $\Delta[F_0(z_1), 1]\not\equiv 0$ miatt $b_3=0$.

(3. 34)-ből $b_1=b_2=b_3=0$ esetén a (3. 24) *Cauchy*-egyenlettel ekvivalens

$$F_0(z_1z_2)=F_0(z_1)F_0(z_2) \qquad F_0(z)=g_0(z)$$

adódik, továbbá

$$a_1a_6=a_2^2-a_2,\quad a_1a_4=a_2a_3,\quad a_1a_5=a_3^2-a_3.$$

Ezeket felhasználva a (3. 33), (3. 31), (3. 30) és (3. 2.B) alapján valóban az (M3. 3)-mal is megegyező megoldásokat nyerjük.

Ezzel a (3. 2. B1) esetet elintéztük.

3. 2. B2. Legyen (3. 32)-ben $a_1=0$:

(3. 36)
$$F(z_1z_2) = (a_2z_1+a_3)F(z_2)+(a_2z_2+a_3)F(z_1)+ \\ +a_6z_1z_2+a_4(z_1+z_2)+a_5,$$

és most használjuk ki a bal oldal argumentumának asszociatív voltát:

$$\Delta[a_2z_1t+a_3,\, F(z_2)]+\Delta[F(z_1t),\, a_2z_2+a_3]+\Delta[a_4(t-1)z_1,\, 1] = \\ = \Delta[(a_2z_1+a_3)F(t)+(a_2t+a_3)F(z_1)+a_6z_1t+a_4(z_1+t)+a_5,\, a_2z_2+a_3]+ \\ +\Delta[a_2z_1t+a_3,\, F(z_2)]+\Delta[a_4(t-1)z_1,\, 1] = 0,$$

azaz egyszerű átalakítás után a

(3. 37)
$$\Delta[F(z_1),\, (a_2^2t-a_2t+a_2a_3)z_2+a_2a_3t+a_3^2-a_3]+ \\ +\Delta[z_1,\, (a_3a_6-a_2a_4+a_4)t+a_3a_4-a_2a_5-a_4] = 0$$

egyenlethez jutunk. „Bővítsük" ezt 1-gyel:

(3. 38) $$\Delta[F(z_1),\, (a_2^2t-a_2t+a_2a_3)z_2,\, 1] = a_2(a_2t-t+a_3)\Delta[F(z_1),\, z_2,\, 1] = 0.$$

Mivel feltehető, hogy $\Delta[F(z_1), z_2, 1]\not\equiv 0$, elegendő csak az

(3. 2. B2a) $$a_2=0,$$

(3. 2. B2b) $$a_2=1 \quad \text{és} \quad a_3=0$$

eseteket vizsgálni.

3. 2. B2a. Helyettesítsük $a_2=0$-t (3. 37)-be:

(3. 39) $$\Delta[F(z_1),\, a_3^2-a_3]+\Delta[z_1,\, (a_3a_6+a_4)t+a_3a_4-a_4] = 0.$$

„Bővítsük" ezt az egyenletet z-vel, akkor

$$a_3(a_3-1)\Delta[F(z_1),\, 1,\, z_3] = 0,$$

s mivel $\Delta[F(z_1), 1, z_3]\not\equiv 0$, ez csak az

(3. 2. B2a1) $$a_3=0,$$

(3. 2. B2a2) $$a_3=1$$

esetekben állhat fenn.

3. 2. B2a1. Ha (3. 39)-ben $a_3=0$, akkor $a_4(t-1)\Delta(z_1, 1)=0$ miatt $a_4=0$ is fennáll és így $a_1=a_2=a_3=a_4=0$ helyettesítéssel (3. 36)-ból

$$F(z_1z_2)=a_6z_1z_2+a_5,$$

azaz

$$F(z) = \begin{cases} a_6z+a_5, & \textit{ha} \quad z\in Q_2' = Q'Q', \\ \textit{tetszőleges}, & \textit{ha} \quad z\in(Q'-Q_2'). \end{cases}$$

E megoldással (3. 31), (3. 30) és (3. 2. B)-ből a $H(z)$, $K(z)$ és $G(z)$ függvényekre is valóban az (M3. 2)-vel megegyező megoldásokat nyerünk.

3. 2. B2a2. Legyen most (3. 39)-ben $a_3=1$, akkor

$$\Delta[z_1, (a_6+a_4)t]=0$$

miatt $a_6=-a_4$ és figyelembe véve $a_2=0$-t is (3. 36)-ból az

$$F(z_1z_2)=F(z_1)+F(z_2)-a_4z_1z_2+a_4(z_1+z_2)+a_5$$

egyenletet nyerjük, mely az

$$F(z)+a_4z+a_5=f_0(z)$$

helyettesítéssel a (3. 25) *Cauchy*-egyenletbe megy át. A (3. 31), (3. 30) és (3. 2. B) alapján pedig a $H(z)$, $K(z)$ és $G(z)$ függvényekre is valóban (M3. 4) alakú megoldásokat kapunk.

3. 2. B2b. Tekintsük most azt az esetet, amikor (3. 38)-ban $a_2=1$ és $a_3=0$; írjuk ezeket (3. 37)-be:

$$\Delta(z_1, -a_4-a_5)=0,$$

ahonnan $a_5=-a_4$ következik. Helyettesítsük e konstansokat (3. 36)-ba:

$$F(z_1z_2)=z_1F(z_2)+z_2F(z_1)+a_6z_1z_2+a_4(z_1+z_2)-a_4, \tag{3.40}$$

ahonnan az

$$F(z)=zf_0(z)-a_6z-a_4 \tag{3.41}$$

helyettesítéssel a

$$z_1z_2[f_0(z_1z_2)-f_0(z_1)-f_0(z_2)]=0$$

egyenlethez jutunk. Ha itt $z_1z_2\neq 0$, akkor $f_0(z)$ a (3. 25) *Cauchy*-egyenletet kielégítő függvény, s (3. 41)-gyel a (3.31), (3. 30) és (3. 2. B) alapján nyerhető $H(z)$, $K(z)$ és $G(z)$ függvények is valóban (M3. 5) alakúak. Megmutatjuk végül, hogy (3. 41) a $z_1z_2=0$ esetben is megoldás; legyen ugyanis (3. 40)-ben pl. $z=0$, akkor a kapott

$$(z_2-1)[F(0)+a_4]=0$$

egyenletből $F(0)=-a_4$, de $z=0$-val ugyanez adódik (3. 41)-ből is.

Ezzel minden esetet megvizsgálva, a tétel bizonyítását is befejeztük.

3. 3. A *Pexider*-féle függvényegyenletek egy további általánosítása az

$$F(z_1*z_2)=\frac{G(z_1)+H(z_2)}{K(z_1)+L(z_2)} \tag{3.42}$$

$$[z_1, z_2, z_1*z_2\in Q_0(*);\ F(z), G(z), H(z), K(z), L(z):Q_0(*)\to Q]$$

függvényegyenlet is. Ennek megoldására részleteiben itt nem kívánunk kitérni, csupán hangsúlyozzuk, hogy ugyanúgy oldható meg, mint a korábbi egyenletek. Vegyük észre ugyanis, hogy a baloldal szimmetriáját kihasználva a törtek eltávolítása után a

$$[G(z_1)+H(z_2)][K(z_2)+L(z_1)]=[G(z_2)+H(z_1)][K(z_1)+L(z_2)]$$

egyenletet nyerjük, ami pedig a

$$\Delta(GL-HK, 1)+\Delta(G, K)+\Delta(L, H)=0$$

alakban is írható. A szokásos bővítésekkel, esetszétválasztásokkal és visszahelyettesítésekkel, majd az asszociatívitás kihasználásával már ismert alakú (*Cauchy-* ill. *Pexider*-egyenletekbe átírható) egyenleteket nyerünk.

Az esetszétválasztások nagy száma miatt a megoldás bemutatásától itt eltekintünk.

IRODALOMJEGYZÉK

[1] N. H. Abel, Méthode générale de trouver des fonctions d'une seule quantité variable lorsqu'une propriété de ces fonctions est exprimée par une équation entre deux variables indépendantes, *Magazin för Naturvidenskaberne,* **1** (1823) 1—10; Oeuvres complétes II., *Christiania* 1839, 213—221.

[2] J. Aczél, Vorlesungen über Funktionalgleichungen und ihre Anwendungen, *Basel-Stuttgart* 1961.

[3] J. Aczél, Miszellen über Funktionalgleichungen I., *Math. Nachrichten,* **19** (1958), 87—99.

[4] Aczél J., Megjegyzések a „változók szétválasztásának módszeréhez" és annak általánosítása, *Mat. Lapok,* **12** (1961), 62—71.

[5] J. Aczél, On a generalization of the functional equations of PEXIDER, *Publ. Inst. Math. Beograd,* **4** (18) (1964), 77—80.

[6] J. Aczél—Z. Daróczy, Über verallgemeinerte quasilineare Mittelwerte, die mit Gewichtsfunktionen gebildet sind, *Publ. Math. Debrecen,* **10** (1963), 171—190.

[7] J. Aczél—K. Fladt—M. Hosszú, Lösungen einer mit dem Doppelverhältnis zusammenhängenden Funktionelgleichung, *MTA Mat. Kut. Int. Közl.,* **7A** (1962), 335—355.

[8] V. Alaci, La solution analytique d'un systéme fonctionnel, *Bull. Sci. École Polyt. Timisoara,* **11** (1943—44), 174—178.

[9] J. D'Alembert, Addition au Mémoire sur la courbe que forme une corde tendue mise en vibration, *Hist. Acad. Berlin* 1750, 355—360.

[10] J. D'Alembert, Mémoire sur les principes de mécanique, *Hist. Acad. Sci. Paris,* 1769 (1772), 278—286.

[11] J. Andrade, Sur l'équation fonctionnelle de Poisson, *Bull. Soc. Math. France,* **28** (1900), 58—63.

[12] Th. Anghelutza, Sur une équation fonctionnelle, *Bull, Sci. École Polyt. Timisoara,* **11** (1943—44), 42—44.

[13] Th. Anghelutza, Observatii relative la ecuaţia functională a lui Poisson, *Lucr. Sţiint, Inst. Polit. Cluj.,* **2** (1959), 33—39.

[14] G. Arrighi, Sulla equazione funzionale $2f(x)f(y)=f(x+y)+f(x-y)$, *Boll. Unione Mat. Ital. (3),* **4** (1949), 255—257.

[15] Beke M., Determinánsok, *Budapest,* 1915.

[16] J. C. W. D. La Bere, Note 2598: The addition theorems for circular and hyperbolic sine, *Math. Gaz.,* **40** (1956), 130—131.

[17] I. Carstoiu, Sur quelques équations fonctionnelles et le calcul symbolique, *C. R. Paris,* **224** (1947), 1199—1200.

[18] A. L. Cauchy, Cours d'analyse l'École Polytechnique, **1**, Analyse algébrique, *Paris* 1821; Oeuvres IIe serie t. III, *Paris,* 1897, 98—113, 220.

[19] J. G. Van der Corput, Goniometrische functies gekarakteriseerd door een functionaalbetrekking I—II. *Euclides,* **17** (1940), 55—75.

[20] D. R. Curtiss, Relations between the Gramian, the Wronskian, and a third determinant connected with the problem of linear dependence, *Bull. Amer. Math. Soc.,* **17** (1910—11), 462—467.

[21] Z. Daróczy, Elementare Lösung einer mehrere unbekannte Funktionen enthaltenden Funktionalgleichung, *Publ. Math. Debrecen,* **8** (1961), 160—168.

[22] I. Fenyő, Über eine Lösungsmethode gewisser Funktionalgleichungen, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.,* **7** (1956), 383—397.

[23] Fenyő I., A disztribucióelmélet alkalmazása függvényegyenletek megoldására, *MTA Mat. Kut. Int. Közl.,* **1** (1956), 642.

[24] S. Gołąb—S. Łojasiewicz, Un théoréme sur la valeur moyenne θ dans la formule des accroissements finis, *Ann. Polon. Math.*, **3** (1956), 118—125.
[25] J. C. H. Gerretsen, De karakteriseering van de goniometrische functies door middel van een functionaalbetrekking, *Euclides*, **16** (1939), 92—99.
[26] O. Hájek, Funkcionálni rovnice trigonometrických funkcî, *Časopis*, **80** (1955), 481—485.
[27] E. Hopf, Über die Funktionalgleichungen der trigonometrischen und hyperbolischen Funktionen, *Sitz.-Ber. Math. Nat. Abt. Bayer. Akad. Wiss.*, **1945—46**, 167—173.
[28] Hosszú M., Egy alternatív függvényegyenletről, *Mat. Lapok*, **14** (1963), 98—102.
[29] M. Hosszú, Remarks on the PEXIDER's functional equation, *Studia Univ. Babes—Bolyai, Math. Phys.* 7 (1962), 99—102.
[30] J. L. W. V. Jensen, Om Fundamentalligningers Oplösning ven elementära Midler, *Tidsskrift Math.*, *(4)*, **2** (1878), 149—155.
[31] J. L. W. V. Jensen, Om Lösning at Funktionalligninger med det mindste Maal af Forudsätninger, *Mat. Tidsskr. (B)*, **8** (1897), 25—28.
[32] D. V. Ionescu, Quelques applications de certaines équations fonctionnelles, *Mathematica Cluj-Timisoara*, **19** (1943), 159—166.
[33] H. Kiesewetter, Struktur linearer Funktionalgleichungen im Zusammenhang mit N. H. Abels, Theorem, Dissertatio, *Berlin* 1958, 1—152.
[34] H. Kiesewetter, Struktur linearer Funktionalgleichungen im Zusammenhang mit dem Abelschen Theorem, *J. reine angew. Math.*, **206** (1961), 113—171.
[35] G. Kirschmer, Über eine mit den Pythagoräischen Zahlen zusammenhängender Gruppe, *Elemente Math.*, **12** (1957), 49—56.
[36] M. Krafft, Herleitung der trigonometrischen Funktionen aus ihren Funktionalgleichungen, *Deutsche Math.*, **4** (1939), 194—201.
[37] S. Kurepa, Semigroups of linear transformations in n-dimensional vector space, *Glasnik Mat-Fiz. Astr. Društvo Mat. Fiz. Hrvatske (2)*, **13** (1958), 3—32.
[38] S. Kurepa, Functional equations for invariants of matrices, *Glasnik Mat.-Fiz. Astr. Društvo Mat. Fiz. Hrvatske (2)*, **14** (1959), 97—113.
[39] S. Kurepa, A cosine functional equation in Hilbert space, *Canad. J. Math.*, **12** (1960), 45—50.
[40] S. Kurepa, On some functional equations in Banach spaces, *Studia Math.*, **19** (1960), 149—158.
[41] S. Kurepa, On the functional equation $f(x+y)=f(x)f(y)-g(x)g(y)$, *Glasnik Mat-Fiz. Astr. Društvo Mat. Fiz. Hrvatske (2)*, **15** (1960), 31—48.
[42] T. Levi-Civita, Sulle funzioni che ammettono una formula d'addizione del tipo $f(x+y)=$ $=\sum_{i=1}^{n} X_i(x)Y_i(y)$, *R. C. Accad. Lincei*, **22/2** (1913), 181—183.
[43] A. C. Lunn, The Foundations of Trigonometry, *Ann. Math. (2)*, **10** (1908—09), 37—45.
[44] G. van der Lyn, Sur l'équation fonctionnelle $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)g(y)$, *Mathematica Cluj*, **16** (1940), 91—96.
[45] D. S. Mitrinovitch, Sur une équation fonctionnelle, *C. R. Paris*, **237** (1953), 550—557.
[46] D. S. Mitrinovitch, Sur un procédé fournissant des équations fonctionnelles dont les solutions continues et différentiables peuvent etre déterminées, *Publ. Fac. Électrontech. Univ. Belgrade, Ser. Math.-Phys., No. 5* (1956), 1—8.
[47] J. Mollerup, En trigonometrisk-axiomatisk Undersögelse, *Mat. Tidsskr. (A)*, **1927**, 24—33.
[48] P. Montel, Sur deux systémes d'équations fonctionnelles, *Mathematica Cluj-Timişoara*, **21** (1945), 10—11.
[49] W. F. Osgood, *Lehrbuch der Funktionentheorie*, 2. Aufl., Leipzig, 1912, 558—597.
[50] S. Parameswaran, Trigonometry Retold, *Math. Gaz.*, **42** (1958), 81—83.
[51] O. Perron, Über Additions- und Subtraktionstheoreme, *Arch, Math. Phys. (3)*, **28** (1919—20), 97—100.
[52] H. W. Pexider, Notiz über Funktionaltheoreme, *Monatsh, Math. Phys.*, **14** (1903), 293—301.
[53] S. D. Poisson, Du parallélogramme des forces, *Corréspondance sur l'École Polytechnique*, **1** (1804—1808), 356—360.
[54] T. Popoviciu, Asupra unor ecuaţiei funcţionale, *Studii Cerc. Sti. Cluj*, **6** (1955), No. 3—4, 37—49.
[55] Ptolemaios; ismerteti: J. Troffke, *Geschichte der Elementar-Mathematik II.* (1903), 226.
[56] J. Ridder, Over de additive functionaalvergelijking en een additieve functionaalkongruentie, *Euclides*, **17** (1940), 84—92.
[57] R. Satô, A Study of Functional Equations, *Proc. Phys.-Math. Soc. Japan (3)*, **10** (1928), 212—222.

[58] R. SATÔ, On the Solutions of a System of Some Functional Equations, *Jap. J. Math.*, **8** (1931), 13—15.
[59] I. STAMATE, Asupra ecuaţiei funcţionale $f(x+y) = f(x)+f(y)+f(x)f(y)$, *Lucr. Stiinţ, Inst. Polit. Cluj*, **2** (1959).
[60] P. STÄCKEL., Sulla equazione funzionale $f(x+y)= \sum_{i=1}^{n} X_i(x)\, Y_i(y)$, *R. C. Accad. Lincei*, **22/2** (1913), 392—393.
[61] C. STÉPHANOS, Sur une catégorie d'équations fonctionnelles, *R. C. Circ. Mat. Palermo*, **18** (1904), 360—362.
[62] O. SUTO, Studies on some functional equations I. *Tōhoku Math. J.*, **6** (1914), 1—15.
[63] J. TANNERY, *Introduction à la théorie des fonctions d'une variable*, Paris 1886; §§ 82, 96.
[64] H. P. THIELMAN, On a pair of Functional Equations, *Amer, Math. Monthly*, **57** (1950), 544—547.
[65] H. E. VAUGHAN, Characterization of the Sine and Cosine, *Amer. Math. Monthyly*, **62** (1955), 707—713.
[66] L. VIETORIS, Zur Kennzeichnung des Sinus und verwandter Funktionen durch Funktionalgleichungen, *J. reine angew. Math.*, **186** (1944/49), 1—15.
[67] E. VINCZE, Über die Verallgemeinerung der trigonometrischen und verwandten Funktionalgleichungen, *Ann. Univ. Sci. Eötvös Budapest. (Sectio Math.)*, **3** (1960—61), 389—404.
[68] VINCZE E., A D'ALEMBERT—POISSON függvényegyenlet egyik általánosítása, *Mat. Lapok*, **12** (1961), 18—31.
[69] E. VINCZE, Über eine Verallgemeinerung der PEXIDERschen Funktionalgleichungen. *Studia Univ. Babes—Bolyai Cluj*, **7** (1962), 103—106.
[70] E. VINCZE, Eine allgemeinere Methode in der Theorie der Funktionalgleichungen, I; *Publ. Math. Debrecen*, **9** (1962), 149—163.
[71] E. VINCZE, Eine allgemeinere Methode in der Theorie der Funktionalgleichungen, II; *Publ. Math. Debrecen*, **9** (1962), 314—323.
[72] E. VINCZE, Über eine Verallgemeinerung der CAUCHYschen Funktionalgleichung, *Funkcialaj Ekvacioj (Tokyo)*, **6** (1964), 55—62.
[73] E. VINCZE, Eine allgemeinere Mehode in der Theorie der Funktionalgleichungen, III, *Publ. Math. Debrecen*, **10** (1963), 191—202.
[74] E. VINCZE, Eine allgemeinere Methode in der Theorie der Funktionalgleichungen, IV; *Publ. Math. Debrecen*, **10** (1963), 283—318.
[75] E. VINCZE, Beitrag zur Theorie der CAUCHYschen Funktionalgleichungen, *Archiv der Math.*, **15** (1964), 132—135.
[76] VINCZE E., Alternatív függvényegyenletek megoldásairól, *Mat Lapok*, **15** (1964), 179—195.
[77] E. B. VAN VLECK—F. H. DOUBLER, A Study of Certain Functional Equations for the ϑ-Functions, *Trans, Amer. Math. Soc.*, **17** (1916), 9—49.
[78] R. VOLPI, Osservazioni per una teoria puramente analitica ed elementare delle funzioni circolari ed iperboliche e loro relazioni coll'esponenziale, *Giorn. Mat. Battaglini*, **41** (1903), 33—46.
[79] W. H. WILSON, On a Certain General Class of Functional Equations, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **23** (1916—17), 392—393.
[80] W. H. WILSON, On Certain Related Functional Equations, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **26** (1919—20) 300—312.
[81] Я. Ацель, Некоторые общие методы в теории функциональных уравнений одной переменной. Новые применения функциональных уравнений, *Успехи Мат. Наук*, 3(69) (1956), 3—68.
[82] О. Э. Георгию, Об одной системе функциональных уравнений обобщающей функциональное уравнение Д. Н. Митриновича изученное также Я. Ацельем, *Publ. Fac. Electrotechn. Univ. Belgrade, Ser. Math.—Phys.*, 1960, No. 35.
[83] П. М. Котельников, О функциональных уравнениях, определяющих тригонометрические функции, *Математика в Школе*, **1951** (2), 1—12.
[84] С. И. Новоселов, *Специальный курс тригонометрии*, Москва 1953, 405—433.
[85] Г. Н. Сакович, Функциональные уравнения сумм экспоненциалов, *Publ. Math. Debrecen*, **11** (1964), 1—10.
[86] О. Хаек, Функциональные уравнения тригонометрических функций, *Чехослов. Мат. Журнал*, **5** (80) (1955), 432—434.

(Beérkezett: 1965. XI. 15)

VIZSGÁLATOK A MEGBÍZHATÓSÁGELMÉLET KÖRÉBŐL

Írta: DOBÓ ANDOR és SZAJCZ SÁNDOR

Néhány megjegyzés a megbízhatóság fogalmával és mértékével kapcsolatosan

A matematika szerepe és jelentősége világszerte megnövekedett, s napjainkban szinte minden tudományágban végbemegy a matematizálás folyamata. Ennek jelentős oka többek között az, hogy a legkülönbözőbb területeken dolgozó szakemberek észrevették, miszerint számos, ezideig intuitív módon megválaszolt kérdés egzaktabb módon is megválaszolható, ha számokat rendelünk a munkánkkal kapcsolatos különböző cselekedeteink lehetséges eredményeihez. Az emberi tevékenység egzaktabbá tételéhez a munka hatékonysága növelésének tényleges szükségessége vezetett. A modern technika rohamos fejlődése számos kérdés közül kiemelte azt, amely a különböző gyártmányok, berendezések, rendszerek felhasználási hatásfoka növelésének szükségességével kapcsolatos. E kérdéskomplexumok elvonatkoztatott módszerekkel való vizsgálata napjainkban új tudományágat teremtett, melyet megbízhatóságelméletnek neveznek. B. V. GNYEGYENKO szerint (l. [1]) a megbízhatóságelmélet „*azon általános eljárásokat és módszereket tanulmányozza, amelyeket be kell tartani a tervezésnél, gyártásnál, átvételnél, szállításnál és a gyártmány üzemeltetésénél a felhasználás maximális hatásfokának biztosítása érdekében; feladata továbbá a berendezések megbízhatóságára vonatkozó számítások kidolgozása elemeik megbízhatóságának ismerete alapján. A megbízhatóságelmélet meghatározza a hibák prognózisát, felkutatja a gyártmány megbízhatósága fokozásának a módszereit a szerkesztésnél és az elkészítésnél, valamint a megbízhatóság megőrzésének lehetőségeit az üzemeltetés folyamán*”.

A megbízhatóságelmélet ezen körülhatárolásából is látható, hogy a szóbajövő vizsgálatok nagyrésze a fizikusok, kémikusok, mérnökök stb. „hatáskörébe” tartozik. A problémakör konkrét tárgyaktól elvonatkoztatott részének vizsgálata azonban matematikai jellegű, s ezek megoldásához részben a már ismert matematikai módszerek alkalmazása, részben pedig új módszerek kidolgozása szükséges.

A megbízhatóságelmélet fiatal tudományág, ezért érthető, hogy ma még nem alakult ki az egységes terminológiája. Gyakran előfordul, hogy ugyanazon szakkifejezésnek különböző munkákban különböző értelmet tulajdonítanak, másrészt ugyanazon fogalmat különböző szavakkal fejeznek ki. Találhatók olyan dolgozatok is, melyben a „megbízhatóság” kifejezés jelentése a szöveg folyamán változik. — Jó összefoglalást ad a megbízhatósági vizsgálatok különböző meghatározásairól a [2] cikk. R. E. BARLOW és L. C. HUNTER szerint (l. [3]) azonban nincs a megbízhatósági definícióknak olyan természetes kiterjesztése, amely a javítás kérdését is magában foglalná. Dolgozatuknak bevezetőjében a következőket írják:

„A megbízhatóság kérdésével foglalkozó legtöbb munkának három fő hibája van:

a) Feltételezik, hogy a komponensek egymástól függetlenül működnek.
b) Csupán a leállások közötti átlagos időtartamot vizsgálják.
c) A javítás nem szerves alkotó része a megbízhatósági modellnek.

A valóságban azonban az elektronikus rendszer javítható, a komponensek nem függetlenek és bennünket nem a leállások (meghibásodások) közötti időtartam, hanem annak valószínűsége érdekel, hogy valamely megadott jövőbeli időpontban működik-e a berendezés.

A jelen cikkben azzal az általános problémával foglalkozunk, hogy valamely rendszer számára olyan megbízhatóság függvényt találjunk, amely ezt a három fogyatékosságot leküzdi".

Ezt követően kiterjesztik a rendszer hatásfokának és megbízhatóságának szokásos definícióját úgy, hogy az magába foglalja a javítást is. A szerzők a következő meggondolásból indulnak ki. A rendszer fizikai konfigurációja, valamint a cél, amelyért létrehozták, meghatároz bizonyos állapotteret (Ω). A rendszer t időpontban a számos lehetséges állapotok egyikében lehet. A rendszer állapota, mint az idő függvénye sztochasztikus folyamat, amelynek minta függvényét jelölje $x(t)$. Legyen A az állapotoknak olyan osztálya, amelyet bizonyos szempontból „kedvezőnek" nevezhetünk; továbbá legyen

$$g(x(t))=\begin{cases}1 & \text{ha } x(t)\in A\\ 0 & \text{egyébként.}\end{cases} \tag{1}$$

Barlow és Hunter szerint a rendszer megbízhatósága:

$$R(t)=E\{g(x(t))\}=\int_{\Omega} g(x(t,\omega))\,dP(\omega). \tag{2}$$

Más szóval $R(t)$ annak a valószínűsége, hogy a rendszer a t időpontban a kedvező állapotok egyikében van. Speciálisan, ha ξ a rendszer élettartamát jelenti és $A=\{\xi\geqq t\}$, akkor

$$R(t)=P\{\xi\geqq t\}=1-P\{\xi<t\}=1-F(t). \tag{3}$$

Ennélfogva (3), azaz a megbízhatóság függvény — korábban — többnyire elfogadott definíciója (2) speciális esete. A (2) szerint értelmezett megbízhatóság függvény valóban tartalmazza a javítás kérdését is, mert például, ha a rendszer két állapotú, s a meghibásodási és a javítási szakaszok exponenciális eloszlásúak λ, illetve μ paraméterrel, akkor

$$R(t)=\frac{\mu}{\lambda+\mu}+\frac{\lambda}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t}. \tag{4}$$

Jóllehet Barlow és Hunter az erősítés függvény[1] fogalmának bevezetésével (2)-nél is általánosabban értelmezi a megbízhatóságot, ennek ellenére nem tudunk egyetérteni azzal, hogy ez a definíció teljes általánosságában célszerű a rendszer megbízhatóságának jellemzésére.

[1] Az erősítés függvény, jele g, egy, az állapottérben értelmezett, tetszés szerinti Borel-féle mérhető függvény. Miután a rendszer állapota mint az idő függvénye sztochasztikus folyamat, ezért az erősítés függvény összefügg a folyamattal, azaz $g=g(x(t))$. Ez egy új, a régire szuperponált folyamatot határoz meg. A megbízhatóság általános definícióját kifejező (2) alatti összefüggésben a jelöléseket e szerint kell értelmezni.

Tekintettel arra, hogy *még napjainkban is eléggé vitatott a megbízhatóság fogalma* és kérdésköre, ezért úgy véljük, nem felesleges, ha az ezzel kapcsolatosan kialakult gondolatainkat és álláspontunkat e helyen ismertetjük.

Adott tárgyak, gyártmányok, berendezések műszaki használata szempontjából szükség van olyan jellemzők megadására, melyek — esetektől függően — mértékül szolgálnak a szóban levő tárgyak bizonyos tulajdonságai jellemzésére. A számos tulajdonság közül általában azt szükséges — legfeljebb nem elégséges — számbavenni, amely valamennyi tárgynak, gyártmánynak, kiszolgáló berendezésnek közös tulajdonsága, s ez valamilyen kapcsolatban van a tárgy funkciójával úgy, hogy csak közvetve függ annak anyagi és szerkezeti tulajdonságától.

A gyártmányok — a vázolt szempontoknak is eleget tevő — egyik közös vonása a következő

tulajdonság: *A gyártmány feladatát adott körülmények és igénybevételi feltételek mellett előre adott használati szakaszokon teljesíteni tudja.*

Ezt a tulajdonságot úgy is tekinthetjük, mint egy eseményt. A műszaki használat szempontjából ezt a kvalitatív jellegű megállapítást kvantitatív adattal kell jellemezni, vagyis a közölt eseményhez mértékként bizonyos mennyiséget kell rendelni. E végből további absztrahálásra van szükség. Most a szóba jöhető mértékeknek — mint jellemzőknek — a halmazából kell kiválasztanunk olyant, amely rendelkezik bizonyos tulajdonságokkal, nevezetesen;

I° Közvetlenül ne függjön a gyártmány anyagától, szerkezeti sajátosságaitól stb., közvetve azonban mégis olyan általános formában jellemezze azt, hogy annak felhasználásával a gyártmány lehetőleg minél több egyedi tulajdonságának számszerű jellemzését is meg lehessen adni.

II° A bevezetett mérték a gyártmányt úgy jellemezze, hogy az független legyen a felhasználás technikai állapotától; szükség esetén azonban számítástechnikailag kiterjeszthető legyen a tényleges felhasználást jellemző tulajdonságok mértékének a megadására is.

III° A mérték egyértelmű legyen, továbbá a két „ideálisan" azonos gyártmány esetén azonos értékű legyen.

A fenti tulajdonságoknak eleget tevő mérték általában már alkalmas arra, hogy két vagy több különböző gyártmány jelzett tulajdonságát összehasonlítsuk. Ez a gyakorlatban igen fontos követelmény.

A vázoltaknak matematikai megfogalmazásához tekintsük az alábbi tulajdonságokkal rendelkező absztrakt Ω teret, melynek pontjait ω-val jelöljük. Az Ω térben legyen adva a halmazoknak egy Ω-t is tartalmazó *Borel*-féle mezeje. Ezen a *Borel*-mezőn legyen értelmezve egy teljesen additív, nem negatív P halmaz függvény, melyre $P(\Omega)=1$. Ekkor azt mondjuk, hogy P valószínűségi mérték az Ω térben. Ha $\xi(\omega)$ az Ω-térben definiált mérhető valós függvény, akkor valószínűségi változónak nevezzük.

Definíció: A valós számhalmazon választott *Borel*-halmazon értelmezett $\xi(\omega)$ valószínűségi változó esetén az

$$R=P\{\omega:\ \omega\in\Omega,\ \xi(\omega)\in E\}=$$

$$=P\{\omega:\ \xi(\omega)\in E\}=P\{\xi(\omega)\in E\}=P\{\xi\in E\} \tag{5}$$

valószínűségi mértéket *megbízhatóság mérték*nek nevezzük. Ha $E=\{\omega: x\leqq\xi(\omega)<y\}$

akkor az eloszlásfüggvény fogalmának felhasználásával

(6) $$R=R(x, y)=P\{x \leqq \xi<y\}=F(y)-F(x),$$

s itt az $R(x, y)$ függvényt *megbízhatóság függvény*nek nevezzük.

A gyakorlatban igen gyakran $E=\{\omega: x \leqq \xi(\omega)<\infty\}$ és így

(7) $$R(x, \infty)=R(x) = 1-F(x).$$

(Mint látható, a megbízhatóság függvényből speciális esetként kapjuk az eloszlásfüggvényt.) Nézzük meg ezután, hogy a korábban kialakított koncepció hogyan hozható kapcsolatba az itt közölt matematikai fogalmakkal.

Jelölje Ω a valós tengelyt (időtengelyt) — mint a meghibásodás lehetséges időpontjainak összességét —, melynek egy pontja ω (ω elemi esemény). Jelentse $\xi(\omega)$ az adott gyártmány szempontjából értékelendő azon időtartam hosszát, amely egy ω_1 időponttól egészen a „meghibásodási" időpontig eltelik. (ω_1 az időtengelynek többnyire az a pontja, amelytől kezdődően a gyártmányt első ízben veszik igénybe a kívánt alkalmazási célnak megfelelően.) A közöltek folytán $\xi(\omega) = \omega-\omega_1$, ami azt jelenti, hogy a folyamat ω-ban homogén, vagy másszóval; $\xi(\omega)$ értéke csak az $\omega-\omega_1$ értéktől függ és független ω_1 választásától. Ebből kifolyólag ω_1 értékét nullának is választhatjuk. Ha mármost feltételezzük, hogy a vizsgált gyártmány a vázolt szempontok mellett akkor teljesíti feladatát, ha a meghibásodási pont, ami egyben az $\omega_1=0$ választás folytán a gyártmány élettartam hosszát fejezi ki, az $[x, y)$ intervallumba esik, vagyis ha

$$E = \{\omega: x \leqq \xi(\omega)=\omega<y\},$$

akkor ezen tény bekövetkezésének a jellemzésére az

(8) $$R=P\{\xi \in E\}$$

értéket használhatjuk. Heurisztikus meggondolások arra engednek következtetni, hogy ez a mérték felel meg leginkább az I°—III° tulajdonság követelményeinek.

Tekintettel arra, hogy a mindennapi életben a „megbízhatóság" fogalmának alkalmazásával általában azt juttatjuk kifejezésre, hogy bizonyos tárgyak adott körülmények között a kívánt módon viselkednek-e, ezért indokoltnak látszik ezt a mértéket *megbízhatóság mérték*nek, illetve *megbízhatóság függvény*nek nevezni. Ezzel tulajdonképpen eljutottunk mondanivalónk lényegéhez, nevezetesen ahhoz, hogy *valamely gyártmány megbízhatóság mértékén a gyártmány számos tulajdonságai közül egy jól definiált tulajdonsághoz rendelt valószínűségi mértéket értünk.*

Tekintsük mármost a valószínűségelméletben az ingadozás (szóródás) jellemzésének a problémáját. Mint ismeretes, az ingadozás jellemzésére számos mértékszámot használnak. Ilyen pl. a várható eltérés, a szórás, a minta terjedelem, az interkvartilis félterjedelem, stb.

Ha azt vizsgáljuk, hogy adott esetben az ingadozás melyik mértékszáma bizonyul megfelelőnek, akkor a körülményektől függően, hol az egyik, hol a másik mértékszámot fogadjuk el. Zavart okozna, ha minden esetben, az elfogadott mértékszámot neveznénk szóródásnak, mivel ekkor a szóródás elnevezés mindig más és más mértékszámot takarna. E helyett helyesebbnek látszik, ha a szóródásnak különböző mértékszámait definiáljuk és konkrét esetben mindig a megfelelő mértékszámot használjuk az ingadozás jellemzésére.

Úgy véljük ugyanez a helyzet s ugyanezt kell tennünk a megbízhatóság mértékszámai megválasztásakor.

Mivel (2) alapján $R(t)$ értéke a g megválasztásától függően változik, így különböző g esetén mindig más és más mértékszámot kapunk a megbízhatóság jellemzésére. Ezeket nyilvánvalóan nem lenne célszerű minden esetben ugyanazon szóval illetni.

A gyakorlatban a gyártány egy másik fontos jellemzője lehet *élettartamának a várható értéke*. Ennek definíciója a következő:

$$M\{\xi(\omega)\} = \int_{\Omega} \xi(\omega)\, dP(\omega) \tag{9}$$

feltéve, hogy $\xi(\omega)$ integrálható P-re vonatkozóan.

Mint ismeretes, ha $\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \ldots, \xi_n(\omega)$ az Ω térben definiált n valószínűségi változók, $E_1, E_2, \ldots, E_n$ pedig a valós tengelyen választott *Borel*-halmazok, melyekre a

$$P\{\xi_i(\omega) \in E_i : i = 1, 2, \ldots n\}_\omega = \prod_{i=1}^{n} P\{\xi_i(\omega) \in E_i\}_\omega \tag{10}$$

összefüggés teljesül, akkor a valószínűségi változókat függetleneknek mondjuk. Ha a $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ valószínűségi változókat úgy tekintjük, mint valamely rendszer alkotó elemeinek élettartamát, s ha ezekre teljesül (10), akkor az ilyen rendszert *független soros rendszer*nek nevezzük. Ez esetben

$$R = \prod_{i=1}^{n} P\{\xi_i \in E_i\} \tag{11}$$

szolgáltatja a rendszer megbízhatóság függvényét. A gyakorlatban többnyire

$$R = \prod_{i=1}^{n} P\{\xi_i \geqq t\} = \prod_{i=1}^{n} [1 - F_i(t)] = \prod_{i=1}^{n} R_i(t). \tag{12}$$

Dolgozatunk további részében független soros rendszerekkel kapcsolatos kérdéseket vizsgálunk.

Néhány, a megbízhatóságelmélet körébe vágó kérdés vizsgálata nem Markov-típusú sztochasztikus folyamatok esetén

A gyakorlatban valamely rendszerrel kapcsolatos s a megbízhatóságelmélet körébe vágó kérdéseket igen gyakran a *Markov*-láncok és folyamatok segítségével lehet megválaszolni. Ebben a részben a megbízhatóságelméletnek olyan kérdéskörével foglalkozunk, mely matematikai szempontból a nem *Markov*-típusú sztochasztikus folyamatok fejezetéhez tartozik. Vizsgálataink többnyire TAKÁCS LAJOS [4] dolgozatában található tételeinek bizonyos irányú általánosításain alapulnak. Anélkül, hogy külön is hivatkoznánk rá, megemlítjük, hogy esetenként használni fogunk a rekurrens folyamatok elméletéből olyan — ma már igen elterjedtnek mondható — meggondolásokat, melyet először TAKÁCS LAJOS [5] alatti dolgozatában alkalmazott. A kapott eredmények többek között lehetővé teszik, hogy R. E.

BARLOW és L. C. HUNTER [3] dolgozatában definiált „*rendszer efficienciáját*" (rendszer hatásfokát) bizonyos feltételek mellett közvetlenül meghatározhassuk.

A rendszer hatásfokának fogalmát BARLOW és HUNTER előtt is már használták, csak többnyire másképpen nevezték. A [3]-ban igen általánosan definiált hatásfoknak egy speciálisabb alakját a hazai irodalomban (l. pl. [7] 407. o.) a rendszer (üzem) kihasználási tényezőjének nevezték el.

Tekintsük a $\{\xi(t);\ 0 \leqq t < \infty\}$ sztochasztikus folyamatot, ahol a $\xi(t)$ valószínűségi változók értékkészletét valamilyen Ω absztrakt tér elemei alkotják. Legyen $\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, ahol $A_i \cap A_k = 0$, ha $i \neq k$. Tegyük fel, hogy $\xi(0) \in A_1$, továbbá, hogy a $\{\xi(t)\}$ folyamat növekvő t értékek esetén rendre az A_k-ból az A_{k+1} állapotba kerül ($k = 1, 2, \ldots, n$; $A_n \to A_1$). Jelöljék az egymásutáni A_k állapotban való tartózkodási időtartamokat rendre a $\xi_1(A_k)$, $\xi_2(A_k), \ldots$ valószínűségi változók. Feltesszük, hogy a $\xi_i(A_k)$ nem-negatív független valószínűségi változók, amelyekre

$$P\{\xi_i(A_k) \leqq x\} = G^{(k)}(x) \quad (k = 1, 2, \ldots, n;\ i = 1, 2, \ldots). \tag{1}$$

Legyen $P_{A_k}(t) = P_k(t) = P\{\xi(t) \in A_k\}$. Nyilvánvalóan

$$P_1(t) + P_2(t) + \ldots + P_n(t) = 1 \tag{2}$$

valamennyi t értékre. Most bebizonyítjuk a következő tételt.

1. TÉTEL:

$$P_{k+1}(t) = \int_0^t [1 - G^{(k+1)}(t-y)\, dM(y)] \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-1) \tag{3}$$

ahol

$$M(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F_{n+1}(t) \tag{4}$$

$$F_{n+1}(t) = \int_0^t L(t-y)\, dH_n(y), \tag{5}$$

s itt

$$L(t) = P\{\xi_1(A_1) + \ldots + \xi_1(A_k) < t\} \tag{6}$$

$H_n(t)$ pedig a

$$H(t) = P\{\xi_1(A_1) + \ldots + \xi_1(A_n) < t\} \tag{7}$$

eloszlásfüggvénynek önmagával való n-szeres konvolúcióját jelenti. ($H_0(t) = 1$ *ha* $t \geqq 0$ *és* $H_0(t) = 0$ *ha* $t < 0$).

Bizonyítás: Tekintsük az első $\bigcup_{i=1}^{k} A_i = E_k$ állapotot s tegyük fel, hogy ez az állapot a τ_1 időpontban ér véget s az ezt követő $\bigcup_{i=k+1}^{n} A_i \cup E_k = B_k$ állapotok rendre a $\tau_2, \tau_3, \ldots, \tau_n, \ldots$ időpontokban ismétlődnek.

Ekkor a $\tau_n - \tau_{n-1}$ $(n=2, 3, \ldots)$ időkülönbségek egyforma eloszlású, független pozitív valószínűségi változók,

$$H(t) = P\{\tau_n - \tau_{n-1} < t\} = P\{\xi_i(A_{k+1}) + \xi_i(A_{k+2}) + \ldots + \xi_i(A_p) +$$
$$+ \xi_{i+1}(A_1) + \ldots + \xi_{i+1}(A_k) < t\} = P\{\xi_1(A_1) + \xi_1(A_2) + \ldots + \xi_1(A_n) < t\}$$

eloszlásfüggvénnyel. Mivel a $\tau_{n+1} = \tau_1 + (\tau_2 - \tau_1) + \ldots + (\tau_{n+1} - \tau_n)$ előállítás szerint τ_{n+1} egyenlő $n+1$ számú független valószínűségi változó összegével, amelyek közül n számú eloszlásfüggvénye $H(t)$, míg a τ_1 valószínűségi változóé

$$L(t) = P(\tau_1 < t) = P\{\xi_1(A_1) + \ldots + \xi_1(A_k) < t\},$$

ezért

$$P\{\tau_{n+1} < t\} = L(t) * H_n(t) = \int_0^t L(t-y) dH_n(y) = F_{n+1}(t),$$

ahol $H_n(t)$ jelöli a $H(t)$ eloszlásfüggvénynek önmagával való n-szeres konvolúcióját.

Tekintettel arra, hogy

$$\{\xi(t) \in A_{k+1}\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{\tau_n \leqq t < \tau_n + \xi_n(A_{k+1})\},$$

így a

$$P\{\tau_n \leqq t < \tau_n + \xi_n(A_{k+1})\} = \int_0^{\infty} P\{\tau_n \leqq t < \tau_n + \xi_n(A_{k+1}) \mid \tau_n = y\} \, dF_n(y) =$$
$$= \int_0^t [1 - P\{\xi_n(A_{k+1}) \leqq t - y\}] \, dF_n(y) = \int_0^t [1 - G^{(k+1)}(t-y)] \, dF_n(y)$$

összefüggés következtében

$$P_{k+1}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t [1 - G^{(k+1)}(t-y)] \, dF_n(y) = \int_0^t [1 - G^{(k+1)}(t-y)] \, dM(y).$$

Megjegyzések:

a) Az $M(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F_{n+1}(t)$ a $(0, t]$ intervallumban befejeződött A_k állapotok számának várható értékét jelenti.

(8) b) $$P\{\tau_{n+1} < t\} = F_{n+1}(t) \leqq L(t) \cdot H^n(t), \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

ugyanis

$$\{\tau_{k+1} < t\} \subset \{\tau_k < t\} \cap \{\tau_{k+1} - \tau_k < t\} \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

következtében

$$P\{\tau_{k+1} < t\} \leqq P\{\tau_k < t\} P\{\tau_{k+1} - \tau_k < t\}.$$

Innen összeszorzással kapjuk, hogy

$$P\{\tau_{n+1} < t\} \leqq P\{\tau_1 < t\} \prod_{k=1}^{n} P\{\tau_{k+1} - \tau_k < t\}$$

s ebből b) már következik.

Megemlítjük még, hogy ha $n>0$ és $\lim_{t\to+0} H(t)=0$, akkor

(9)
$$\lim_{t\to+0}\frac{F_{n+1}(t)}{F_n(t)}=0,$$

továbbá az $F_{n+1}(t)\leqq L(t)H^n(t)$ következtében ha $H(t)<1$, akkor

(10)
$$M(t)\leqq\frac{L(t)}{1-H(t)}.$$

c) Mivel az

$$\mathscr{L}\{M(t)\}=\int_0^\infty e^{-st}\,dM(t)$$

$$\mathscr{L}\{L(t)\}=\int_0^\infty e^{-st}\,dL(t)$$

$$\mathscr{L}\{H(t)\}=\int_0^\infty e^{-st}\,dH(t)$$

Laplace—Stieltjes-transzformáció bevezetése mellett

(11)
$$\mathscr{L}\{M(t)\}=\frac{\mathscr{L}\{L(t)\}}{1-\mathscr{L}\{H(t)\}},$$

ezért

(12)
$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{\mathscr{L}\{L(t)\}}{1-\mathscr{L}\{H(t)\}}\right\}\leqq\frac{L(t)}{1-H(t)}.$$

Az $\mathscr{L}\{M(t)\}$-re kapott (11) összefüggésből ismert *Tauber*-típusú tétel felhasználásával közvetlenül adódik a

(13)
$$\lim_{t\to\infty}\frac{M(t)}{t}=\frac{1}{\int_0^\infty (1-H(t))\,dt}$$

aszimptotikus összefüggés. Ennek következtében az $M(t)$-re adódó egyenlőtlenség elsősorban kisértékű t-k esetén szolgáltat jelentősebb információt.

2. TÉTEL: *Ha* $m=\sum_{i=1}^{n} m_i<\infty$, *ahol* $m_i=\int_0^\infty \left(1-G^{(i)}(t-0)\right)dt$, *és* $P_k(t)$ *elég nagy értékű t esetén szigorúan monoton függvény, akkor*

(14)
$$\lim_{t\to\infty}\left[\int_0^t P_k(u)\,du-\frac{m_k}{m}t\right]=b_k$$

ahol

(15)
$$b_k=\lim_{t\to\infty}\left[\int_0^t P_k(u)\,du-tP_k(t)\right]=\lim_{s\to+0} s[\varphi_k(s)+\varphi_k'(s)],$$

s itt

$$\varphi_k(s) = \int_0^\infty e^{-st} d \int_0^t P_k(u)\, du = \int_0^\infty e^{-st} P_k(t)\, dt. \tag{16}$$

Bizonyítás: TAKÁCS LAJOS [4] dolgozatában közölt 5. tételének bizonyításánál alkalmazott gondolatmenet megismétlésével, vagy akár a SZÁSZ OTTÓ-tól származó *Tauber*-típusú tétel alkalmazásával kapjuk, hogy

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t P_k(u)\, du = \frac{m_k}{m}. \tag{17}$$

Ennek ismeretében pedig — a monotonitás kihasználásával — a tétel további részének igazolása DOBÓ ANDOR és SZAJCZ SÁNDOR [6] dolgozatában ismertetett LEMMA bizonyításánál közölt gondolatmenet alkalmazásával történhet.

Jelölje $\nu_k(t)$ a t ideig befejeződött A_k állapotok számát $\zeta_k(t)$ pedig a t ideig befejeződött A_k állapotok összhosszát.

3. TÉTEL:

$$1^\circ \quad P\{\nu_k(t) = n\} = F_n(t) - F_{n+1}(t+0) \tag{18}$$

$$2^\circ \quad P\{\zeta_k(t) < x\} = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{G}_n^{(k)}(x)\,[F_n(t) - F_{n+1}(t+0)] \tag{19}$$

ahol

$$\bar{G}_n^{(k)}(x) = \begin{cases} P\{\xi_1(A_k) + \dots + \xi_n(A_k) < x\} & \textit{ha} \quad x \leqq t \\ 1 & \textit{egyébként}. \end{cases} \tag{20}$$

Bizonyítás: Mivel $\nu_k(t) = n$ akkor teljesül, ha $\tau_n \leqq t < \tau_{n+1}$, ezért felírható, hogy

$$P\{\nu_k(t) = n\} = P\{\tau_n \leqq t < \tau_{n+1}\} = \int_0^\infty P\{\tau_n \leqq t < \tau_{n+1} \mid \tau_n = y\}\, dF_n(y) =$$

$$= \int_0^t P\{\tau_{n+1} > t \mid \tau_n = y\}\, dF_n(y) = \int_0^t [1 - P\{\tau_{n+1} \leqq t \mid \tau_n = y\}]\, dF_n(y) =$$

$$= F_n(t) - F_{n+1}(t+0).$$

A 2° alatti állítás pedig a

$$P\{\zeta_k(t) < x\} = \sum_{n=1}^{\infty} P\{\xi_1(A_k) + \dots + \xi_{\nu_k(t)}(A_k) < x \mid \nu_k(t) = n\}\, P\{\nu_k(t) = n\}$$

összefüggés alapján nyerhető.

4. TÉTEL: *Ha* $m = \int_0^\infty x\, dH(x)$ *és* $\sigma^2 = \int_0^\infty (x-m)^2\, dH(x) < \infty$,

akkor

$$\lim_{t\to\infty} P\left\{\frac{\nu_k(t)-\dfrac{t}{m}}{\sqrt{\dfrac{\sigma^2 t}{m^3}}}<x\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du. \tag{21}$$

A *bizonyítás* W. FELLER ugyanazon módszere segítségével történhet, mint amelyet TAKÁCS LAJOS alkalmazott hasonló jellegű tétele bizonyításánál [8] dolgozatának 376. oldalán. Megjegyezzük, hogy itt τ_1 eloszlása nem feltétlenül egyezik meg a $\tau_n-\tau_{n-1}$ $(n=2, 3, \dots)$ valószínűségi változók eloszlásával, ez a tény azonban a határérték fenti alakját nem befolyásolja.

Jelölje az $\eta_k(t)$ valószínűségi változó a t időpontnak a közvetlen utána következő A_k állapot befejezésétől vett távolságát.

5. TÉTEL:

$$P\{\eta_k(t)\leqq x\} = \int_t^{t+x} [1-H(t+x-y+0)]\,dM(y). \tag{22}$$

Bizonyítás: Az $\{\eta_k(t)\leqq x\}$ akkor teljesül, ha a $(t, t+x]$ intervallumban legalább egy A_k állapot befejeződik. Ez pedig több egymást kizáró módon jöhet létre: $(t, t+x]$ intervallumban az utoljára befejeződött A_k állapot lehet az $n=1, 2, \dots$-ik és így

$$P\{\eta_k(t)\leqq x\} = \sum_{n=1}^{\infty} P\{t<\tau_n\leqq t+x<\tau_{n+1}\} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\int_t^{t+x} [1-H(t+x-y+0)]\,dF_n(y) =$$

$$= \int_t^{t+x} [1-H(t+x-y+0)]\,dM(y).$$

Q. e. d.

KÖVETKEZMÉNY: *Annak a valószínűsége, hogy a $(t, t+x]$ intervallumban legfeljebb n A_k állapot fejeződött be:*

$$P\{\nu_k(t+x)-\nu_k(t)\leqq n\} = 1-P\{\eta_k(t)\leqq x\} * H_n(x). \tag{23}$$

6. TÉTEL: *Ha* $m=\int_0^{\infty} x\,dH(x)<\infty$ *és* $P\{\eta_k(t)\leqq x\}$ *elég nagy értékű t esetén szigorúan monoton függvény, akkor*

$$\lim_{T\to\infty}\left\{\int_0^{T} P\{\eta_k(t)\leqq x\}\,dt-\frac{T}{m}\int_0^{x}[1-H(y)]\,dy\right\} = \beta_k \tag{24}$$

ahol

$$\beta_k = \lim_{T\to\infty} \left\{ \int_0^T P\{\eta_k(t) \leqq x\}\, dt - TP\{\eta_k(t) \leqq x\} \right\} = \tag{25}$$

$$= \lim_{s\to+0} s[\chi_k(s, x) + \chi_k'(s, x)],$$

s itt

$$\chi_k(s, x) = \int_0^\infty e^{-sT} d_T \int_0^T P\{\eta_k(t) \leqq x\}\, dt = \int_0^\infty e^{-sT} P\{\eta_k(T) \leqq x\}\, dT. \tag{26}$$

Bizonyítás: A SZÁSZ OTTÓ-tól származó *Tauber-típusú* tétel szerint

$$\lim_{T\to\infty} \frac{\int_0^T P\{\eta_k(t) \leqq x\}\, dt}{T} = \lim_{s\to+0} s\chi_k(s, x) = \frac{1}{m} \int_0^x [1 - H(y)]dy, \tag{27}$$

ennek alapján pedig a tétel további állítása a 2. Tétel bizonyításához hasonlóan történhet.

Értelmezzük a $\{\psi_k(t),\ 0 \leqq t < \infty\}$ sztochasztikus folyamatot olymódon, hogy

$$\psi_k(t) = \begin{cases} 1 & \text{ha} \quad \xi(t) \in A_k \\ 0 & \text{ha} \quad \xi(t) \in \bar{A}_k \end{cases}. \tag{28}$$

Legyen

$$\alpha_k(t) = \int_0^t \psi_k(t)\, du. \tag{29}$$

Az $\alpha_k(t)$ valószínűségi változó a $(0, t)$ intervallum azon u pontjaiból álló halmaz mértéke, amelyekre $\xi(u) \in A_k$. Másszóval az $\alpha_k(t)$ valószínűségi változó bizonyos „A_k szakaszok" hosszának összegeként állítható elő, ahol az utolsó „A_k szakasz" esetleg csonka.

7. TÉTEL: *Ha $k = 2, 3, \ldots, n-1$, akkor az $\alpha_k(t)$ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye*

$$\begin{aligned} P\{\alpha_k(t) \leqq x\} &= 1 - \left[\left(\sum_{n=0}^\infty \hat{H}_n(x)\,[L_n(t-x) - L_{n+1}(t-x)] \right) - \right. \\ &\left. - P\left\{ \sum_{i=k+1}^n \alpha_i(t) = x \right\} \right] * \left[1 - \sum_{n=0}^\infty K_n(x)[\hat{L}_n(t-x) - \hat{L}_{n+1}(t-x)] \right] \end{aligned} \tag{30}$$

ahol

$$\hat{L}(t) = P\{\xi_1(A_1) + \xi_1(A_2) + \ldots + \xi_1(A_{k-1}) < t\},$$

$$\hat{H}(t) = P\{\xi_1(A_{k+1}) + \ldots + \xi_1(A_n) < t\},$$

$$G^{(k)}(t) * \hat{H}(t) = K(t), \quad \hat{L}(t) * G^{(k)}(t) = L(t).$$

Bizonyítás: Legyen

$$P\{\alpha_k(t) \leqq x\} = \Omega_{A_k}(t, x). \tag{31}$$

A használt jelölések alapján TAKÁCS LAJOS [4] dolgozatának 1. Tétele értelmében

$$(32)\quad P\{\alpha_k(t)+\ldots+\alpha_n(t)\leqq x\} = \Omega_{\bigcup\limits_{i=k}^{n} A_i}(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} K_n(x)[\hat{L}_n(t-x)-\hat{L}_{n+1}(t-x)],$$

$$(33)\quad P\{\alpha_1(t)+\ldots+\alpha_{k-1}(t)<x\} = \Omega_{\bigcup\limits_{i=1}^{k-1} A_i}(t,x) = 1-\Omega_{\bigcup\limits_{i=k}^{n} A_i}(t,t-x),$$

$$(34)\quad P\{\alpha_{k+1}(t)+\ldots+\alpha_n(t)\leqq x\} = \Omega_{\bigcup\limits_{i=k+1}^{n} A_i}(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{H}_n(x)\,[L_n(t-x)-L_{n+1}(t-x)].$$

Mivel

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i(t) = t,$$

ezért

$$P\{\alpha_k(t)\leqq x\} = 1-P\{\alpha_1(t)+\ldots+\alpha_{k-1}(t)+\alpha_{k+1}(t)+\ldots+\alpha_n(t)<t-x\} =$$

$$= 1-\left[\Omega_{\bigcup\limits_{i=k+1}^{n} A_i}(t,x)-P\left\{\sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i(t) = x\right\}\right] * \Omega_{\bigcup\limits_{i=1}^{k-1} A_i}(t,x).$$

Q. e. d.

Megjegyzés: a) A $k=1$ és $k=n$ eset közvetlenül adódik TAKÁCS LAJOS hivatkozott tételéből.

b) Ha $\bar{v}_k(t)$ jelöli a $(0, t]$ intervallumban történő A_k állapotok számát, akkor

$$(35)\quad P\{\bar{v}_k(t)=n\}=P\{v_k(t)=n\}[1-P_k(t)]+P\{v_k(t)=n-1\}P_k(t).$$

$$(P\{v_k(t) = -1\} = 0).$$

c)

$$(36)\quad M\{\alpha_k(t)\} = M\left\{\int_0^t \psi_k(u)\,du\right\} = \int_0^t M\{\psi_k(u)\}\,du =$$

$$= \int_0^t P\{\psi_k(u) = 1\}\,du = \int_0^t P_k(u)\,du.$$

Ez az összefüggés lehetővé teszi számunkra a BARLOW és HUNTER [3] dolgozatában definiált rendszer efficienciájának[2] a közölt feltételek melletti közvetlen meghatá-

[2] Ha a meghibásodásnak a környezet hatásától függő eloszlásfüggvénye $F(t)$ akkor definíciószerűen a rendszer hatásfoka:

$$E_{ff} = \int_{-\infty}^{+\infty} E\{g[x(t)]\}\,dF(t)$$

Ha a környezet hatásától függő meghibásodás egyenletes eloszlású a $[0, T]$ intervallumban, akkor

$$E_{ff_T} = \frac{1}{T}\int_0^T E\{g[x(t)]\}\,dt.$$

rozását. Ugyanis $M\{\alpha_k(T)\}$ az állapotok egy adott szempontból „kedvezőnek" nevezhető osztályában való tartózkodás összidejének várható értéke, s BARLOW és HUNTER a rendszer hatásfokát pedig — bizonyos feltételek mellett — a z $\frac{M\{\alpha_k(T)\}}{T}$ értékkel jellemzi. Az $\frac{1}{T}\int\limits_0^T P_k(u)du$ kiszámítására az 1. és 2. Tételek adnak útbaigazítást.

8. TÉTEL. *Ha $\sigma<\infty$, akkor*

$$\lim_{t\to\infty} P\left\{\frac{\alpha_k(t)-\frac{m_k t}{m}}{\sqrt{\frac{m_k^2(\sigma^2-\sigma_k^2)+\sigma_k^2(m-m_k)^2}{m^3}t}}\leqq x\right\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}du, \tag{37}$$

s itt

$$\sigma_k^2=\int\limits_0^\infty (t-m_k)^2\,dG^{(k)}(t-0).$$

A tétel állítása könnyen belátható TAKÁCS LAJOS [4] dolgozatának 2. tétele felhasználásával.

Alkalmazások:

Bizonyos termelési folyamatok optimális üzemeltetésének meghatározásánál gyakran lényeges feltétel az, hogy bizonyos anyagból előre adott T ideig átlagosan minél többet termeljünk. (Ha azt írnánk elő, hogy a termelt anyag az idő függvényében maximális legyen, akkor elképzelhető, s valójában gyakran így is van, hogy viszonylag rövid idő alatt bizonyos részegységek részlegesen vagy teljesen tönkre mennek.) Ez technikailag úgy érhető el, hogy a keletkezendő hibákat mielőbb igyekszünk kiküszöbölni. Védelmi rendszer alkalmazásával bizonyos hibák bekövetkezését meg tudjuk akadályozni, más hibákat pedig viszonylag gyorsan tudunk észlelni.

A folyamatosan működő rendszereknél pl. a zavarjelző készülék elősegítheti a hiba gyorsabb feltárását, s ezáltal csökkenthető a kényszerállási idő. Az olyan rendszerekben pedig, amelyek a működési és a működésre kész állapotok váltakozásaival jellemezhetőek, a beépített zavarjelző készülék lényegesen megnövelheti a rendszer megbízhatóságát, mivel a működésre kész állapotban el lehet végezni az elemek ellenőrzését, esetleg még a hibák kijavítását is. Általában egy ilyen zavarjelző készülék nem azt jelzi, hogy a meghibásodott alkatrész pontosan melyik, hanem csak azt, hogy a hiba melyik alrendszerben van. (Minél kisebb számú alkatrészből áll egy alrendszer, annál kevesebb idő szükséges a hibás alkatrész feltárására.) Esetenként a zavarjelző alkalmazása, ha nem is óv meg végérvényesen valamely katasztrófális hiba bekövetkezésétől, azért ezen esemény bekövetkezésének idejét jelentősen „kitólhatja".

Megemlítjük, hogy számos területen találhatók olyan problémák, melyek a közölt eredményekkel megválaszolhatók. E helyen azért szorítkoztunk a védelmi rendszerekkel kapcsolatos kérdések tárgyalására, mert ilyen jellegű problémák ténylegesen felmerültek s vizsgálataik folyamatban vannak a NEHÉZVEGYIPARI KUTATÓ INTÉZET Automatizálási osztályán.

1. Valamely rendszer szakaszos igénybevétele esetén tételezzük fel, hogy a beépített zavarjelző teljesen hibátlanul végzi feladatát, vagyis a meghibásodásokat azonnal teljes megbízhatósággal jelzi. Jelölje A_1 azt az állapotot, hogy a rendszert termeltetni (igénybe venni) kívánjuk, A_2 pedig azt, hogy a rendszerrel nem kívánunk terméket előállítani. Jelölje továbbá B_1 a termelésre kész állapotot, B_2 pedig azt, hogy a rendszer javítás alatt áll ($A_1 \cap A_2 = \emptyset$, $A_1 \cup A_2 = \Omega; B_1 \cap B_2 = \emptyset, B_1 \cup B_2 = X$). Feltételezve, hogy az A és B állapotokkal jellemzett események teljesen függetlenek, a korábbi anyag tárgyalása során használt fogalmak és jelölések ismeretében könnyen meghatározhatjuk a rendszer hatásfokát. Tudniillik a rendszer az $A_1 \cap B_1$ állapot fennállása esetén fog termelni, s annak a valószínűsége, hogy a rendszer valamely t időpontban termelő állapotban van $P_{A_1}(t)P_{B_1}(t)$. Ez alapján a keresett érték:

$$\frac{1}{T}\int_0^T P_{A_1}(u)P_{B_1}(u)\,du,$$

s itt $P_{A_1}(t)$ és $P_{B_1}(t)$ értéke az 1. tétel segítségével határozható meg.

2. Tegyük fel, hogy a rendszer növekedő t értékek esetén rendre az A_1, A_2, A_3, A_4 ($A_4 \to A_1$) állapotba kerül, s itt

A_1; működésre kész állapotot (ez alatt nem történik termelés),
A_2; termelési (működési) állapotot,
A_3; meghibásodási (selejtet termelő) állapotot[3],
A_4; javítási állapotot jelent.

A termelés mindaddig történik, amíg a termék selejtes voltát valamilyen módon utólag nem konstatáljuk. Ha pl. a rendszer termelési állapotban történő meghibásodását zavarjelző készülékkel jelezzük, akkor a selejtes termék gyártásidejét jelentősen csökkenthetjük. Tegyük fel, hogy p annak a valószínűsége, hogy a zavarjelzőrendszer a hibát jelezni fogja. Egy-egy zavarjelző alkalmazása bizonyos költségbe kerül. Felmerül mármost az a kérdés, hogyha egy zavarjelző rendszert a selejtes anyag gyártásidejének csökkentésére kívánjuk beépíteni, akkor mennyire kifizetődő ez.

A kérdésre adandó válasz során tételezzük fel, hogy a szóban levő folyamat matematikai modellje az eddig közöltekhez hasonló. Ennek alapján, ha nem alkalmazunk jelző-rendszert, akkor valamely adott T ideig selejtes terméket gyártó összidők várható értéke:

$$M\{\alpha_3(T)\} = \int_0^T P_3(t)\,dt.$$

Jelölje a T idő alatt bekövetkezett A_3 állapotok számát $\bar{\nu}_3(T)$, ezek közül a zavarjelző által regisztráltak számát pedig $\varrho(T)$. A teljes valószínűség tétele szerint

$$P\{\varrho(T) = k\} = \sum_{l=k}^{\infty} P\{\varrho(T) = k \mid \bar{\nu}_3(T) = l\} P\{\bar{\nu}_3(T) = l\} \quad (k = 0,1,2,\dots)$$

[3] Az automatizálási problémáknál az A_3 igen gyakran azt az állapotot jelenti, amelybe a rendszer akkor kerül, amikor valamilyen — a folyamatot jellemző — paraméter a megengedett határon kívüli értéket vesz fel.

Figyelembe véve, hogy

$$P\{\varrho(T)=k\,|\,\overline{v}_3(T)=l\}=\binom{l}{k}p^k(1-p)^{l-k}$$

kapjuk, hogy

$$P\{\varrho(T)=k\}=\sum_{l=k}^{\infty}\binom{l}{k}p^k(1-p)^{l-k}P\{\overline{v}_3(T)=l\}.$$

A kapott összefüggés alapján a zavarjelző rendszer T ideig A_3 állapotot átlagosan

$$M\{\varrho(T)\}=\sum_{k=0}^{\infty}kP\{\varrho(T)=k\}$$

alkalommal fog észlelni. Ha feltételezzük, hogy a zavarjelző rendszer hibátlan működése esetén selejtes terméket nem állítunk elő, vagy legalább is a selejtet termelő időhossz olyan kicsiny, hogy az gyakorlatilag elhanyagolható, akkor a T ideig selejtes terméket gyártó összidők várható értéke átlagosan

$$M\{\varrho(T)\}\int_0^{\infty}(1-G^{(3)}(x-0))\,dx$$

értékkel csökken, s itt $G^{(3)}(x-0)$ az A_3 állapotban való tartózkodás eloszlásfüggvénye.

Feltételezhetjük, hogy a selejt által keletkezendő kár értéke a selejtes terméket gyártó idő függvényében C együtthatóval lineárisan változik, s ugyanakkor a zavarjelző rendszer karbantartási költsége a vételár és beszerelési költség együttes értékéhez $K=K(p)$ képest elhanyagolható. Ekkor a zavarjelző rendszer T ideig történő kifizetődését a

$$0<CM\{\varrho(T)\}\int_0^{\infty}(1-G^{(3)}(x-0))\,dx-K(p)$$

egyenlőtlenség teljesülése alapján dönthetjük el. Természetesen itt más gazdaságossági szempontok is figyelembe jöhetnek, s ezek a döntés modelljét jelentősen befolyásolhatják.

A vizsgálatok során feltételeztük, hogy zavarjelző rendszer alkalmazása esetén a zavarjelző által nem jelzett A_3 állapotban való tartózkodás eloszlásfüggvénye ugyanaz, mint akkor, amikor nem alkalmaztuk a zavarjelző rendszert. A gyakorlatban elképzelhető, hogy hibajelző készülék alkalmazása mellett a nem jelzett A_3 állapotban való tartózkodás eloszlásfüggvénye $(G^{*3}(x))$ módosul. Ez a tény csak annyiban befolyásolja számításainkat, hogy az $\int_0^{\infty}(1-G^{(3)}(x-0))dx$ helyett az $\int_0^{\infty}(1-G^{*3}(x))dx$ értékkel kell számolnunk.

Megemlítjük, hogy ha a kifizetődés eldöntésére kapott egyenlőtlenség jobb oldalát p-re vonatkozóan maximalizáljuk, akkor a hibajelző készülék alkalmazásából származó tiszta haszon a legnagyobb lesz. Ez egyben információt ad a zavarjelző készülék megbízhatóságának elérendő növelésére is. (A fentiekből látható, hogy nagy megbízhatóságú hibajelző alkalmazása esetenként nem feltétlenül előnyös.)

A zavarjelző készülék alkalmazása mellett felmerülő problémák gyakran igen nehezen kezelhető matematikai modellekhez vezetnek. Ilyenkor azután előfordul, hogy bizonyos meggondolások, a tárgyalást illetően lényeges szempontok — éppen a modell bonyolultsága folytán — figyelmen kívül maradnak.

Ilyen eset fordul elő pl. V. A. ZSOZSIKASVILI és A. L. RAJKIN [12] dolgozatában. A nevezett szerzők adott rendszer megbízhatóságának értékelését — a dolgozat szövegezését és jelöléseit figyelembe véve, illetve megtartva — az alábbi feltételek mellett vizsgálják:

1. A rendszer olyan elemekből áll, amelyek meghibásodása, illetve a hiba kijavításának ideje mindig független a többi elem meghibásodásától, illetve azok kijavítási idejétől.

2. Annak a valószínűsége, hogy az adott rendszer a t időpillanatban működési állapotban van, $Y(t)$-vel egyenlő.

3. Annak a feltételes valószínűsége, hogy a tetszőlegesen rögzített τ időpontban nem működő rendszer a t időpontig működni kezd, $X(t-\tau)$.

4. A rendszer elemei a működési és működésrekész állapotban azonos valószínűséggel hibásodnak meg.

5. A jelzett, illetve nem jelzett meghibásodások kijavítási idejének eloszlásfüggvénye $W_1(t)$, illetve $W_2(t)$.

6. Az ellenőrzött, illetve nem ellenőrzött meghibásodások eloszlásfüggvénye $F_1(t)$, illetve $F_2(t)$.

7. Javítás közben nem történik újabb meghibásodás. (Ez a gyakorlati esetek többségében nem okoz jelentős megszorítást, mivel a javítási idő a működési és működésre kész állapot idejéhez viszonyítva kicsiny.)

8. A hibajelző készülék abszolút megbízható.

Ezen feltételek mellett egy bizonyos elemet folyamatosan ellenőrizve a szerzők a hibajelző készüléknek a rendszer megbízhatóságára vonatkozó előnyeit a következő három esetben vizsgálták:

a) A jelzett hiba kiküszöbölésekor semmilyen módon nem lehet ellenőrizni a rendszer esetleges nem jelzett hibáit. Így ezen utóbbi hiba fennállása mindenképpen a rendszer meghibásodását jelenti.

b) Jelzett hiba esetén a rendszer fennmaradó részének működőképességét a javítás megkezdése előtt lehet ellenőrizni.

c) A jelzett hiba kijavítása után lehet ellenőrizni az esetleges többi hibákat még a rendszer használatba való átmenete előtt.

A szerzők az a), b), c) esetekben a következő formulákat kapták a $P_a(t)$, $P_b(t)$, $P_c(t)$ meghibásodási eloszlásfüggvényekre:

$$P_a(t) = 1-\left\{1-\int_0^t Y(\tau)\,dF_2(\tau)-\int_0^t [1-Y(\tau)]X(t-\tau)\,dF_2(\tau)\right\}\cdot$$

$$\cdot\left\{1-\int_0^t Y(\tau)\,dF_1(\tau)-\int_0^t [1-Y(\tau)][1-W_1(t-\tau)]X(t-\tau)\,dF_1(\tau)\right\},$$

$$P_b(t) = 1 - \Big\{1 - \int_0^t Y(\tau)\,dF_2(\tau) - \int_0^t [1-Y(\tau)]X(t-\tau)[1-F_1(\tau)]\,dF_2(\tau) -$$

$$- \int_0^t [1-Y(\tau)]\,X(t-\tau)[1-W_1(t-\tau)\,W_2(t-\tau)]F_1(\tau)\,dF_2(\tau)\Big\}\cdot$$

$$\cdot\Big\{1 - \int_0^t Y(\tau)\,dF_1(\tau) - \int_0^t [1-Y(\tau)][1-W_1(t-\tau)]X(t-\tau)\,dF_1(\tau)\Big\},$$

$$P_c(t) = 1 - \Big\{1 - \int_0^t Y(\tau)\,dF_2(\tau) - \int_0^t [1-Y(\tau)]X(t-\tau)[1-F_1(\tau)]\,dF_2(\tau) -$$

$$- \int_0^t [1-Y(\tau)]X(t-\tau)[1-\psi(t-\tau)]F_1(\tau)\,dF_2(\tau)\Big\}\cdot$$

$$\cdot\Big\{1 - \int_0^t Y(\tau)\,dF_1(\tau) - \int_0^t [1-Y(\tau)][1-W_1(t-\tau)]X(t-\tau)\,dF_1(\tau)\Big\},$$

ahol

$$\psi(t) = \int_0^t q(u)\,du, \qquad q(t) = \int_0^t w_1(u)\,w_2(t-u)\,du,$$

$$w_1(t) = \frac{dW_1(t)}{dt}, \qquad w_2(t) = \frac{dW_2(t)}{dt}.$$

Az alábbiakban kimutatjuk, hogy a fenti eredmények általában nem helytállóak. Evégből elegendő megmutatni azt, hogyha a hibajelző készülék a rendszer minden hibáját jelzi, vagyis, ha csak jelzett hiba okozhatja a rendszer meghibásodását — ez a gyakorlatban lehetséges —, akkor a feltételben szereplő függvényeket megválaszthatjuk úgy, hogy például

$$\lim_{t\to\infty} P_a(t) \neq 1.$$

Ez többek között elérhető, ha

$$Y(t) = \frac{1}{2}$$

$$W_1(t) = 1 - e^{-\mu t}$$

$$X(t) = 1 - e^{-\alpha t}$$

$$F_1(t) = 1 - e^{-\lambda t} \qquad (\mu \neq \alpha \neq \lambda \quad \text{és} \quad \lambda \neq \mu + \alpha).$$

Ekkor ugyanis

$$P_a(t) = \frac{\lambda}{2}\int_0^t e^{-\lambda\tau}d\tau + \frac{\lambda}{2}\int_0^t e^{-\mu(t-\tau)}(1-e^{-\alpha(t-\tau)})e^{-\lambda\tau}d\tau =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{\lambda-\mu-\alpha} - \frac{\lambda}{\lambda-\mu} - 1\right)e^{-\lambda t} + \frac{\lambda}{2(\lambda-\mu)}e^{-\mu t} -$$

$$-\frac{\lambda}{2(\lambda-\mu-\alpha)}e^{-(\mu+\alpha)t},$$

így

$$\lim_{t\to\infty} P_a(t) = \frac{1}{2}.$$

Ez a helytelen eredmény többek között azért adódott, mert a szerzők szerint csak az *első* hiba okozhatja a rendszer meghibásodását. Nem folyamatos működés esetén a szerzők elgondolása azért nem helytálló, mert az első jelzett hiba 1-nél kisebb valószínűséggel okozza a rendszer meghibásodását. (Esetünkben ez $\frac{1}{2}$ volt.)

Ahhoz, hogy helyes eredményt kapjunk, meg kellene határozni annak a valószínűségét, hogy a második hiba okozza a rendszer meghibásodását, feltéve, hogy az első hiba nem okozta, majd ezt az értéket hozzá kellene adni annak a valószínűségéhez, hogy az első hiba okozta a meghibásodást stb. Ily módon egy végtelen sort kapunk, aminek a meghatározása a feltevések mellett nem látszik egyszerűnek. A szerzők lényegében ezen sor első tagját határozták meg hibásan. Tudniillik itt sem vettek figyelembe minden lehetőséget. Pl. az a) esetben nem számoltak azzal a lehetőséggel, hogy a $\tau < t$ időpontban bekövetkezett jelzett hiba akkor is okozhatja a rendszer meghibásodását, ha a javítást a t idő előtt elvégzik, de a javítás befejezése előtt használni akarják a rendszert. Ennek figyelembevétele azért jelentős, mert $t-\tau$ tetszés szerinti nagy érték lehet.

Mivel ilyen hiányosságok a b) és c) esetekben még nagyobb mértékben megtalálhatók (itt az eshetőségek száma még nagyobb), ezért természetesen az ezekre kapott $P_b(t)$ és $P_c(t)$ formulák is hibásak.

Mindezek alapján látható, hogy a ZSOZSIKASVILI és RAJKIN által követett tárgyalási móddal történő helyes eredmény meghatározása rendkívül bonyolult és a második, harmadik stb. jelzett és nem jelzett hibák eloszlásfüggvényének megadása nélkül nem is lehetséges.

A teljesség kedvéért megemlítjük, hogy a hivatkozott dolgozat eredményei $Y(t) \equiv 1$ esetén helytállóak, ekkor azonban a hibajelző-készülék alkalmazása nem növeli a rendszer működési megbízhatóságát.

Egy rendszer megbízhatóságának vizsgálata a hibás alkatrészek kicserélése esetén

Dávid K. LLOYD és Myron LIPOW [9] könyvének 9. fejezetét követő 2. függelékben az alábbi probléma matematikai tárgyalása található:

Tekintsünk egy független soros rendszert, melyben n alkatrész van. Tételezzük fel, hogy mindegyik alkatrész élettartamának ugyanazon $G(t)$ az eloszlásfüggvénye.

A rendszer folyamatos működése közben meghibásodó alkatrészeket azonnal kicseréljük új alkatrészekkel, melyek élettartamának ugyancsak $G(t)$ az eloszlásfüggvénye. Ennek következtében, ha a rendszert a $t=0$ időpontban állítottuk üzembe s a működés kezdetén minden alkatrész új volt, akkor az első csere után $n-1$ alkatrész már egyformán öregedett, és így a régi alkatrészek hátralevő élettartama már többnyire rövidebb lesz, mint az újonnan beszerelt alkatrész élettartama. Ha a rendszer hosszabb időn keresztül működik, akkor más alkatrészek is tönkremennek és ezeket is azonnal új alkatrészekkel pótoljuk; ennek folytán a rendszer folyamatosan működik, de valamely időpontban az alkatrészek élettartama különböző.

A rendszer működésének kezdetén — mikoris az alkatrészek valamennyien teljesen újak — a rendszer megbízhatóságát (a „túlélési valószínűséget") az idő függvényében az

$$R(t) = [1-G(t)]^n \tag{1'}$$

összefüggés adja. Ha azonban a vizsgálati idő megkezdésének pillanatában egyes alkatrészek már bizonyos idő óta működtek, akkor az (1') egyenletet módosítanunk kell, mégpedig úgy, hogy figyelembe vesszük az alkatrészeknek a vizsgálati időpont kezdetéig elért életkorát.

Ha a vizsgálat megkezdése a t_0 időpontban történik, s eddig az alkatrészek élettartamai már $x_1, x_2, \ldots, x_n$ értékűek, akkor t_0-tól számított t ideig a rendszer feltételes megbízhatósága:

$$R(t; t_0 | x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1-G(x_i+t)}{1-G(x_i)} \tag{2'}$$

Az x_i értékek valószínűségi változók, melyek a vizsgálat megkezdésének időpontjától (t_0-tól), valamint a $G(t)$ eloszlásfüggvénytől függenek. Ha ismerjük az x_i élettartamok valószínűség sűrűségfüggvényeit, amelyek mondjuk $g(x_i, t_0)$ értékűek, akkor a rendszer feltétel nélküli megbízhatósága:

$$R(t; t_0) = \overbrace{\int_0^\infty \ldots \int_0^\infty}^{n} R(t; t_0 | x_1, x_2, \ldots, x_n) \prod_{i=1}^{n} g(x_i, t_0)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n = \tag{3'}$$

$$= \left[\int_0^\infty \frac{1-G(x+t)}{1-G(x)}\, g(x; t_0)\, dx \right]^n$$

A problémának Lloyd és Lipow által közölt további matematikai tárgyalása a (3')-ben szereplő $g(x, t_0)$ sűrűségfüggvény meghatározására terjed ki, melynek konkrét alakját az ún. „kicserélési egyenlet" felállításának segítségével határozzák meg. A kicserélési egyenletnek *Laplace*-transzformációval történő vizsgálata a $t \to \infty$ határérték számítás elvégzését teszi lehetővé, minek következtében a

$$\lim_{t_0 \to \infty} g(x, t_0) = \frac{1-G(x)}{\mu} \tag{4'}$$

egyenlethez jutnak, ahol $\mu = \int\limits_0^\infty (1 - G(x))dx$. Ennek ismeretében a (3′) alapján a rendszer megbízhatóságára $t_0 \to \infty$ esetén az

$$R(t;\infty) = \left[\int\limits_0^\infty \frac{1-G(x+t)}{\mu} dx\right]^n \tag{5′}$$

összefüggést kapják, melynek azután közelítő formában való megadásával foglalkoznak. A kapott eredmények elérésénél alkalmazott meggondolások matematikai szempontból meglehetősen kifogásolhatók.

E helyen nem szándékozunk kitérni a LLOYD és LIPOW által közölt matematikai meggondolások helytállásának kérdésére, mert ahhoz részletesebben kellene bemutatni vizsgálati módszerüket.

Jelen dolgozatunk ezen részének az a célja, hogy bemutassuk miképpen lehet viszonylag egyszerű meggondolásokkal az itt közölt problémakörnek bizonyos irányú általánosítását — s magát az itt közölt problémát is — a rekurrens folyamatok elméletében megtalálható matematikai eredmények ismeretében tárgyalni, illetve megválaszolni. Vizsgálataink során hivatkozhatnánk az előzőekben tárgyalt anyag itt felhasználható részeire is, ez esetben azonban kézenfekvőbbnek és természetesebbnek látszik PALÁSTI I. RÉNYI A., SZENTMÁRTONI T. és TAKÁCS L. [10] dolgozatában található eredményeket hasznosítani. Ezek az eredmények jelentős mértékben a felújításelméletben nyernek alkalmazást (lásd pl. [11]).

Modell:

Tegyük fel, hogy az n alkatrészből álló független soros rendszert a $t=0$ időpontban állítottuk üzembe. Legyen az i-edik ($i=1, 2, \ldots, n$) alkatrésznek a valódi élettartama[4] $G^{(i)}(x)$ eloszlású valószínűségi változó. Tegyük fel továbbá, hogy a későbbiek során üzembe helyezett i-edik típusú alkatrészek valódi élettartamai is egyforma eloszlású valószínűségi változók, ugyanazon $G^{(i)}(x)$ eloszlásfüggvénnyel. Ha valamelyik alkatrész tönkremegy, akkor abban a pillanatban újjal helyettesíthetjük[5]. Tételezzük fel, hogy a rendszer működtetése nem folyamatosan, hanem szakaszosan történik. Legyenek az egymást követő működési idők és állási idők azonos eloszlású független valószínűségi változók, mégpedig a működési szakaszok eloszlásfüggvénye $L(x) = 1-e^{-\lambda x}$ $(x \geqq 0)$ és a szüneteké $H(x)$.

Kérdés. Mi lesz a rendszer megbízhatósága az x idő függvényében, ha a vizsgálat megkezdése a t időpontban történik.

Előrebocsátásképpen közöljük, hogy az eloszlásfüggvénynek önmagával való n-szeres konvolucióját továbbra is alsó n indexszel jelöljük. Ennélfogva tehát:

$$H_n(x) = \int\limits_0^x H_{n-1}(x-y)\,dH(y) \tag{1}$$

[4] A tárgyalás során minden egyes alkatrésznél kétféle élettartalomról beszélünk:

1. *üzemi vagy látszólagos élettartam,* melyen a beállítás pillanatától a meghibásodásig (tönkremenésig) eltelt üzemidőt értjük (beleértve a véletlen szüneteket is).

2. *Valódi élettartam* az az idő, amely alatt az alkatrész ténylegesen működik (kihagyva a szüneteket).

[5] Ez a helyzet áll elő pl. az ún. soros tartalékolás elvén működő rendszer esetén.

ahol $H_0(x)=0$, ha $x<0$ és $H_0(x)=1$ ha $x\geqq 0$. Jelöljük a keresett megbízhatóság függvényt $R(x;t)$-vel.

TÉTEL:

$$R(x;t) = \prod_{i=1}^{n}\left[1-\int_{t}^{t+x}[1-F^{(i)}(t+x-y)]\,dm^{(i)}(y)\right] \tag{2}$$

ahol

$$F^{(i)}(u) = \sum_{k=0}^{\infty}\int_{0}^{u}\frac{(\lambda z)^k e^{-\lambda z}}{k!}H_k(u-z)\,dG^{(i)}(z), \tag{3}$$

$$m^{(i)}(y) = \sum_{n=1}^{\infty}F_n^{(i)}(y). \tag{4}$$

Bizonyítás: Először egyetlen alkatrészt, mondjuk az i-ediket vizsgáljuk. Mivel a működési szakaszok exponenciális eloszlásúak, ezért az i-edik típusú alkatrészek látszólagos élettartamai egyforma eloszlású független valószínűségi változók. Ha ezt a közös eloszlásfüggvényt $F^{(i)}(x)$-szel jelöljük, akkor (10)-nek idevágó eredménye alapján

$$F^{(i)}(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\int_{0}^{x}\frac{(\lambda z)^k e^{-\lambda z}}{k!}H_k(x-z)\,dG^{(i)}(z).$$

Jelentse a t időpontnak a közvetlen utána következő alkatrészcsere időpontjától vett távolságát az $\eta_t^{(i)}$ valószínűségi változó. Könnyen belátható, hogy

$$P\{\eta_t^{(i)}\leqq x\} = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{t}^{t+x}[1-F^{(i)}(t+x-y)]\,dF_n^{(i)}(y) = \tag{5}$$

$$= \int_{t}^{t+x}[1-F^{(i)}(t+x-y)]\,dm^{(i)}(y),$$

így az i-edik típusú alkatrész t időponttól számított megbízhatóság függvénye

$$R_i(x;t) = 1-P\{\eta_t^{(i)}\leqq x\}. \tag{6}$$

Mivel a vizsgált rendszer független soros rendszer volt, ezért

$$R(x;t) = \prod_{i=1}^{n}R_i(x;t) \tag{7}$$

Q. e. d.

KÖVETKEZMÉNYEK:

Az

$$\int_{0}^{\infty}(1-G^{(i)}(x))\,dx = a_i<\infty \quad \text{és} \quad \int_{0}^{\infty}(1-H(x))\,dx = b<\infty$$

jelölés mellett

$$\int_0^\infty x\,dF^{(i)}(x) = a_i(1+b\lambda) = \mu_i,$$

s így

$$(8) \qquad \lim_{t\to\infty} P\{\eta_t^{(i)} \leqq x\} = \frac{1}{\mu_i}\int_0^x (1-F^{(i)}(u))\,du,$$

$$(9) \qquad \lim_{t\to\infty} R(x;t) = R(x;\infty) = \prod_{i=1}^n \left(1-\frac{1}{\mu_i}\int_0^x (1-F^{(i)}(u))\,du\right).$$

Az (5), illetve (8) alapján történő számolás elvégzése meglehetősen bonyolult. A *Laplace—Stieltjes*-transzformáció bevezetése azonban többnyire egyszerűsíti a számolás elvégzését.

A

$$(10) \qquad \int_0^\infty e^{-sx}\,dH(x) = \chi(s)$$

és

$$(11) \qquad \int_0^\infty e^{-sx}\,dG^{(i)}(x) = \psi_i(s)$$

jelölés mellett

$$(12) \qquad \int_0^\infty e^{-sx}\,dF^{(i)}(x) = \varphi_i(s) = \psi_i(s-\lambda+\lambda\chi(s)),$$

s így az (5), illetve (8) alatti eloszlásfüggvények *Laplace—Stieltjes*-transzformáltja:

$$(13) \qquad \int_0^\infty e^{-sx}\,d_x P\{\eta_t^{(i)} \leqq x\} = [1-\varphi_i(s)]e^{st}\int_0^\infty e^{-su}\,dm^{(i)}(u) = \\ = \frac{1}{s}e^{st}\varphi_i(s)$$

és

$$(14) \qquad \int_0^\infty e^{-sx}\,d_x \lim_{t\to\infty} P\{\eta_t^{(i)} \leqq x\} = \frac{1-\varphi_i(s)}{\mu_i s}.$$

Ha most speciálisan $G^{(i)}(x)$-ről és $H(x)$-ről is feltesszük, hogy exponenciális, azaz

$$(15) \qquad G^{(i)}(x) = 1-e^{-\alpha_i x}$$
$$(16) \qquad H(x) = 1-e^{-\beta x} \qquad \Big\}\ x \geqq 0,$$

akkor visszatranszformálással kapjuk, hogy (vö. [10])

$$(17) \qquad F^{(i)}(x) = 1+\frac{(\beta+\omega_1)\alpha_i}{(\omega_1-\omega_2)\omega_1}e^{\omega_1 x}-\frac{(\beta+\omega_2)\alpha_i}{(\omega_1-\omega_2)\omega_2}e^{\omega_2 x}$$

ahol

$$\left.\begin{matrix}\omega_1\\ \omega_2\end{matrix}\right\} = \frac{-(\beta+\lambda+\alpha_i)\pm\sqrt{(\beta+\lambda+\alpha_i)^2-4\alpha_i\beta}}{2}. \tag{18}$$

Ennek következtében:

$$R(x;\infty) = \prod_{i=1}^{n}\left[1+\frac{(\beta+\omega_2)\alpha_i^2\beta}{(\omega_1-\omega_2)\omega_2^2(\beta+\lambda)}(1-e^{\omega_2 x})+\right.$$
$$\left.+\frac{(\beta+\omega_1)\alpha_i^2\beta}{(\omega_1-\omega_2)\omega_1^2(\beta+\lambda)}(1-e^{\omega_1 x})\right]. \tag{19}$$

Megjegyzés. Folyamatos működést tételezve fel, a rekurrens folyamatok elméletében található idevágó összefüggések közvetlen alkalmazásával kapjuk, hogy

$$R(x;t) = \prod_{i=1}^{n}\left[1-\int_{t}^{t+x}\left(1-G^{(i)}(t+x-u)\right)dm^{(i)}(u)\right], \tag{20}$$

ahol

$$m^{(i)}(u) = \sum_{n=0}^{\infty} G_{n+1}^{(i)}(u),$$

továbbá

$$R(x;\infty) = \prod_{i=1}^{n}\left[1-\frac{1}{a_i}\int_{0}^{x}\left(1-G^{(i)}(u)\right)du\right]. \tag{21}$$

IRODALOM

[1] Б. В. Гнеденко: Статистические методы в теории надежности (Всесоюзное общество „знание") 1964.

[2] G. R. Knight, E. F. Jervis, and G. R. Herd: The Definitions of Terms of Interest in the Study of Reliability, *IRE Transactions on Reliability and Quality Control, April,* 1955.

[3] R. E. Barlow and L. C. Hunter: System Efficiency and Reliability, *Technometrics* **2** (1960) 1.

[4] Takács Lajos: Tartózkodási idő problémákról, *M.T.A. III. Osztály Közleményei* **7** (1957) 3—4.

[5] Takács Lajos: Egy új módszer rekurrens sztochasztikus folyamatok tárgyalására, *M.T.A. Alk. Mat. Int. Közleményei,* II. 1953.

[6] Dobó Andor—Szajcz Sándor: Véletlen elhelyezési problémákról, *M.T.A. III. Osztály Közleményei,* **15** (1965) 4.

[7] Rényi Alfréd: *Valószínűségszámítás,* Tankönyvkiadó, Budapest 1954.

[8] Takács Lajos: Részecskeszámolók elméletében fellépő sztochasztikus folyamatokról, *M.T.A. III. Osztály Közleményei* **6** (1956,) 3—4.

[9] Dávid K. Lloyd and Myron Lipow: Reliability: management, methods and mathematics. Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey 1962.

[10] Palásti Ilona, Rényi Alfréd, Szentmártoni Tibor, Takács Lajos: A raktárkészlet pótlásáról, I. *M.T.A. Alk. Mat. Int. Közleményei* II. 1953.

[11] Takács Lajos: On a generalization of the renewal theory, *M.T.A. Mat. Kut. Int. Közleményei* **2** (1957) 1—2.

[12] В. А. Жожикашвили, А. Л. Райкин: Оценка надежности системы при наличии сигнализации повреждений. АВТОМАТИКА и ТЕЛЕМЕХАНИКА XXIII (1962) 3.

(Beérkezett: 1965. XI. 10.)

DISCUSSIONS ON THE FIELD OF THE THEORY OF RELIABILITY

by

A. Dobó—S. Szajcz

Summary

The authors describe in the 1 §. of this paper their worked out considerations and assumed a point of view in connection with the definition of function of the reliability. In the 2 §. they make general a certain results of LAJOS TAKÁCS. A kind of recurrent process is examined by them in which n-different state of affairs changes in determined order. (L. TAKÁCS has examined in the case of $n=2$). At the end of this §. just as in the 3 §. their results are applyed to the practical problems being in the theory of reliability, furthermore they occupy with the criticism of such a kind of works which have been written by the other authors.

EGY SZÁMELMÉLETI FÜGGVÉNY VIZSGÁLATA

Írta: KÁTAI IMRE

1. E dolgozatban egy, a primszámok eloszlásával kapcsolatos számelméleti függvénnyel fogunk foglalkozni.

Az

$$(1.1)\qquad S(n) = \sum_{p<n} \frac{1}{n-p} \qquad (p \text{ primszám})$$

függvényről könnyen belátható, hogy

$$(1.2)\qquad \sum_{n \leqq N} S(n) = N + O\left(\frac{N}{\log N}\right).$$

ERDŐS és DE BRUIJN bebizonyították [1], hogy

$$(1.3)\qquad c_1 N \leqq \sum_{n \leqq N} S^2(n) \leqq c_2 N,$$

$$(1.4)\qquad c_1 N/\log N \leqq \sum_{p \leqq N} S(p) \leqq c_2 N/\log N,$$

$$(1.5)\qquad c_1 N/\log N \leqq \sum_{p \leqq N} S^2(p) \leqq c_2 N/\log N,$$

ahol c_1, c_2 alkalmas pozitív állandók. Fenti összegek vizsgálata érdekes például abból a szempontból, hogy $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, S(n) = \infty$ teljesülése maga után vonná, hogy

$$\underline{\lim}_{k\to\infty} \frac{p_{k+1}-p_k}{\log p_k} = 0,$$

ahol p_k a nagyságszerinti sorrendben k-adik primszámot jelenti. Szerző [2] dolgozatában kimutatta, hogy ha igaz a *Riemann*-féle ζ-függvényre vonatkozó sűrűségi hipotézis, akkor

$$(1.6)\qquad \sum_{n \leqq N} S^2(n) = N + o(N), \qquad (N \to \infty).$$

Az (1. 6) összefüggést (1. 2)-vel összevetve, a

$$\sum_{n \leqq N} (S(n)-1)^2 = o(N)$$

formulát kapjuk. TURÁN PÁL kérdezte, hogy az $S(n)-1$ függvénynek alkalmas normálással létezik-e határeloszlása. Ezt bizonyítanom nem sikerült.

A [2] dolgozatban alkalmazott módszert finomítva, a sűrűségi hipotézis feltételezésével be fogjuk bizonyítani a pontosabb

$$\sum_{n\leqq N}(S(n)-1)^2 = O\left(\frac{N}{\log N}(\log\log N)^2\right)$$

egyenlőtlenséget, amiből elemien levezethető a

$$\sum_{q\leqq N}|S(q)-1| = O\left(\frac{N}{\log^2 N}(\log\log N)^{\frac{3}{2}}\right)$$

formula.

Valószínű, hogy fentiekből már

$$\sum_{q\leqq N}(S(q)-1)^2 = o\left(\frac{N}{\log N}\right)$$

is következik, ezt azonban nem sikerült bizonyítanom.

2. A továbbiakban p, q jelentsenek primszámokat. Legyen

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p, & \text{ha } n=p^k, \text{ primszámhatvány,} \\ 0 & \text{egyébként,} \end{cases}$$

$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ — a *Riemann*-féle ζ-függvény. Jelölje $N(\sigma_0, T)$ a $\zeta(s)$-függvénynek a $\sigma_0\leqq\sigma\leqq 1$, $|t|\leqq T$ tartományba eső gyökei számát. Legyen

$$S_1(n) = \sum_{m<n}\frac{\Lambda(m)}{n-m}.$$

1. TÉTEL. *Tegyük fel, hogy* $N(\sigma, T)=O(T^{2(1-\sigma)}\log^2 T)$ *egyenletesen teljesül az* $\frac{1}{2}\leqq\sigma\leqq 1$ *szakaszon, akkor fennáll a*

$$\sum_{n\leqq N}(S_1(n)-\log n)^2 = O(N\log N\cdot(\log\log N)^2) \tag{2. 1}$$

egyenlőtlenség.

Bizonyítás. Vezessük be a következő jelöléseket. Legyen $z=x+iy$, $\frac{1}{2}>x>0$, $-\pi<y<\pi$,

$$f_1(z) = \sum_{n=2}^{\infty}\Lambda(n)e^{-nz}, \tag{2. 2}$$

$$f_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}e^{-nz}, \tag{2. 3}$$

$$s(n) = \sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\nu}. \tag{2. 4}$$

Ilyen jelölések mellett

$$g(z) \stackrel{\text{def}}{=} \left(f_1(z) - \frac{1}{1-e^{-z}}\right) f_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (S_1(n) - s(n)) e^{-nz}. \tag{2.5}$$

Innen a *Parseval*-formula alkalmazásával

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |g(z)|^2 \, dy = \sum_{n=1}^{\infty} (S_1(n) - s(n))^2 e^{-2nx}. \tag{2.6}$$

Legyen

$$T(z) = \sum_{\varrho} z^{-\varrho} \Gamma(\varrho), \tag{2.7}$$

ahol az összegezésben ϱ a ζ-függvény nem-triviális gyökein fut végig. Ju. V. LINNIK bebizonyította [3], hogy

$$f_1(z) = \frac{1}{z} - T(z) + O\left(\log^3 \frac{1}{x}\right), \tag{2.8}$$

továbbá, hogy a sűrűségi hipotézist feltételezve [4]

$$\int_{-\Delta}^{\Delta} |T(z)|^2 \, dy = O\left(\frac{1}{x} \log^{-1} \frac{1}{x}\right), \tag{2.9}$$

ha

$$\Delta = \left(\log \frac{1}{x}\right)^{-7}. \tag{2.10}$$

Felhasználva, hogy $1 > x > 0$ esetén $\frac{1}{z} - \frac{1}{1-e^{-z}} = O(1)$, így

$$\int_{-\Delta}^{\Delta} |g(z)|^2 \, dy \leq c_1 \int_{-\Delta}^{\Delta} |f_2(z)|^2 dy + c_1 \left(\log \frac{1}{x}\right)^6 \int_{-\Delta}^{\Delta} |f_2(z)|^2 \, dy + \tag{2.11}$$
$$+ c_1 \int_{-\Delta}^{\Delta} |T(z)|^2 \, |f_2(z)|^2 \, dy.$$

Mivel $f_2(z) = -\log(1 - e^{-z})$, így

$$|f_2(z)|^2 = \frac{1}{4} \log^2(1 - 2e^{-x} \cos y + e^{-2x}) + O(1), \tag{2.12}$$

és innen közvetlenül látható, hogy

$$|f_2(z)|^2 = O\left(\log^2 \frac{1}{x}\right).$$

Ennek, továbbá a (2. 9) egyenlőtlenségnek a felhasználásával kapjuk, hogy (2. 11) bal oldala legfeljebb

$$O\left(\frac{1}{x}\log\frac{1}{x}\right). \tag{2. 13}$$

Másrészt $|y| \geqq \Delta$ esetén (2. 12)-ből könnyen nyerhető a

$$|f_2(z)| = O\left(\log\log\frac{1}{x}\right) \tag{2. 14}$$

becslés. Így

$$\int\limits_{\pi \geqq |y| \geqq \Delta} |g(z)|^2\, dy \leqq c_2 \left(\log\log\frac{1}{x}\right)^2 \left\{ \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f_1(z)|^2\, dy + \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left|\frac{1}{1-e^{-z}}\right|^2 dy \right\}. \tag{2. 15}$$

Mivel

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f_1(z)|^2\, dy = 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda^2(n) e^{-2nx} = O\left(\frac{1}{x}\log\frac{1}{x}\right),$$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left|\frac{1}{1-e^{-z}}\right|^2 dy = 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2nx} = O\left(\frac{1}{x}\right),$$

így (2. 15) baloldala legfeljebb

$$O\left(\frac{1}{x}\log\frac{1}{x}\cdot\left(\log\log\frac{1}{x}\right)^2\right). \tag{2. 16}$$

Felhasználva a (2. 13) és a (2. 16) állításokat, innen a

$$\sum_{n=1}^{\infty} (S_1(n) - s(n))^2 e^{-2nx} = O\left(\frac{1}{x}\log\frac{1}{x}\cdot\left(\log\log\frac{1}{x}\right)^2\right)$$

becslést nyerjük, amiből az $N = \dfrac{1}{x}$ választással

$$\sum_{n \leqq N} (S_1(n) - s(n))^2 = O(N\log N\cdot(\log\log N)^2) \tag{2. 17}$$

következik. Másrészt $s(n) = \log n + O(1)$, így (2. 1) fennáll.

Fenti tételünkből könnyen levezethető a következő állítás.

2. Tétel. *Az* 1. *Tétel feltétele mellett*

$$\sum_{n \leqq N} (S(n) - 1)^2 = O\left(\frac{N}{\log N}(\log_2 N)^2\right). \tag{2. 18}$$

Bizonyítás. Mivel

$$S_1(n) = \log n\cdot S(n) + \sum_{p<n} \frac{\log\dfrac{n}{p}}{n-p} + \sum_{\substack{p^k<n\\ k \geqq 2}} \frac{\log p}{n-p^k} = \log n\cdot S(n) +$$

$$+ A_1(n) + A_2(n),$$

továbbá

$$\sum_{n \leq N} A_1^2(n) = O(N), \qquad \sum_{n \leq N} A_2^2(n) = O(N),$$

így

$$\sum_{n \leq N} (S_1(n) - S(n) \log n)^2 = O(N).$$

Az előző tétel felhasználásával innen

$$\sum_{n \leq N} (S(n) - 1)^2 \log^2 n = O(N \log N (\log \log N)^2)$$

következik, ahonnan (2. 18) könnyen látható.

3. TÉTEL. *Az* 1. *Tétel feltétele mellett*

$$\sum_{q<n} |S(q) - 1| = O\left(\frac{N}{\log^2 N} (\log \log N)^{\frac{3}{2}}\right),$$

ahol q a primszámokon fut végig.

Bizonyítás. Szükségünk lesz a következő segédtételre.

LEMMA [5]. *Jelölje q_n a nagyságszerinti sorrendben n-edik primszámot, és legyen $d_i = q_{i+1} - q_i$. Akkor*

$$\sum_{q_i \leq x} \frac{1}{d_i} < c \frac{x}{\log^2 x} \log \log x, \qquad c > 0 \text{ állandó.}$$

A $S(n)$ függvény definíciójából világos, hogy $1 \leq v < d_i$ esetén

$$\frac{1}{v} + S(q_i) > S(q_i + v) > S(q_{i+1}). \tag{2. 19}$$

Jelölje I_i a $\left(\frac{d_i}{4}, \frac{3}{4} d_i\right)$ intervallumba eső egészek halmazát, továbbá $|I_i|$ ezek számát. A fenti (2. 19) egyenlőtlenségből következik, hogy

$$\frac{1}{|I_i|} \sum_{k \in I_i} S(q_i + k) + \frac{1}{|I_i|} \sum_{k \in I_i} \frac{1}{k} < S(q_i) < \frac{1}{|I_{i-1}|} \sum_{k \in I_{i-1}} S(q_{i-1} + k).$$

Ezt felhasználva kapjuk, hogy

$$|S(q_i) - 1| \leq \max \left\{ \frac{1}{|I_{i-1}|} \sum_{k \in I_{i-1}} |S(q_{i-1} + k) - 1| \frac{1}{|I_i|} \sum_{k \in I_i} |S(q_i + k) - 1| + O\left(\frac{1}{|I_i|}\right) \right\},$$

mivel

$$\sum_{k \in I_i} \frac{1}{k} = O(1).$$

Így

$$\sum_{q_i < N} |S(q_i) - 1| \leq c_3 \sum_{q_i < N} \frac{1}{|I_i|} \sum_{k \in I_i} |S(q_i + k) - 1| + O\left(\sum_{q_i < N} \frac{1}{|I_i|}\right).$$

A jobboldalon álló második tag $O\left(\frac{N}{\log^2 N}\log\log N\right)$ a Lemma miatt. A *Schwarz*-egyenlőtlenséget kétszer alkalmazva, a

$$\sum_{k\in I_i}|S(q_i+k)-1| \leqq |I_i|^{1/2}\Big(\sum_{k\in I_i}|S(q_i+k)-1|^2\Big)^{1/2},$$

majd a

$$\sum_{q_i<N}\frac{1}{|I_i|}\sum_{k\in I_i}|S(q_i+k)-1| \leqq \sum_{q_i<N}\frac{1}{|I_i|^{1/2}}\left(\sum_{k\in I_i}(S(q_i+k)-1)^2\right)^{1/2} \leqq$$

$$\leqq \left(\sum_{q_i<N}\frac{1}{|I_i|}\right)^{1/2}\left(\sum_{n<2N}|S(n)-1|^2\right)^{1/2}$$

egyenlőtlenséget nyerjük. Itt felhasználtuk, hogy $q_{j+1}<2q_j$. Így a Lemmát, valamint a 2. Tételt felhasználva valóban következik állításunk.

IRODALOMJEGYZÉK

[1] K. Prachar, *Primzahlverteilung*, Springer Verlag, 1957, 175.
[2] И. Катаи, Асимптотическая формула в теории чисел, *Annales Univ. Scient. Budapestiensis de Rolando Eötvös Nominatae*, Sectio Math. **6**, 1963, 83—87.
[3] Ю. В. Линник, Некоторые условные теоремы, касающиеся бинарных задач с простыми числами, Доклады Ак. Наук, СССР, 77 (1951), 15—18.
[4] Ю. В. Линник, Некоторые условные теоремы, касающиеся бинарной проблемы Гольдбаха, Известия Ак. Наук СССР, **16** (1952), 503—520.
[5] P. Erdős and A. Rényi, Some problems and results on consecutive primes, Simon Stevin 27, 1950, 115—125.

(Beérkezett: 1966. II. 1.)

ОБ ОДНОЙ ФУНКЦИИ В ТЕОРИИ ЧИСЕЛ

I. KÁTAI

Резюме

Обозначим через $N(\sigma_0, T)$ число корней функции Римана $\zeta(\sigma+it)$ в области $\sigma_0\leqq\sigma\leqq 1, |t|\leqq T$, и пусть

$$S(n) = \sum_{p<n}\frac{1}{n-p}, \qquad p \text{ простое.}$$

Автор доказал следующие условные утверждения: Предпологая, что отношение

$$N(\sigma_0, T) = O(T^{2(1-\sigma_0)}\log^2 T)$$

выполняется равномерно на отрезке $\frac{1}{2}\leqq\sigma_0\leqq 1$, то справедливы следующие оценки:

$$\sum_{n\leqq N}(S(n)-1)^2 = O\left(\frac{N}{\log N}(\log\log N)^2\right),$$

$$\sum_{q\leqq N}|S(q)-1| = O\left(\frac{N}{\log^2 N}(\log\log N)^{\frac{3}{2}}\right),$$

где q пробегает простые числа.
Доказательства основываются на методе Ю. В. Линника, разработанном им в работах [3], [4].

VIZSGÁLATOK A LINEÁRISAN KOMPAKT GYŰRŰK ELMÉLETÉBEN, I.

Írta: WIEGANDT RICHÁRD

Tartalom*

1. §. Bevezetés

Ez a dolgozat algebrai, pontosabban gyűrűelméleti tárgyú. Feltételezzük azonban, hogy a vizsgált gyűrűk egyúttal bizonyos tulajdonságokkal rendelkező topológikus terek. Ezt azért tettük, hogy topológikus módszerek segítségével lehetővéváljék a gyűrűknek olyan struktúrális vizsgálata és leírása, amely tisztán algebrai úton nem lenne elérhető. A felhasználásra kerülő topológikus módszereket részletesen ismertetni fogjuk.

A dolgozat a szerzőnek [31], [32], [33] és [34] idegennyelvű dolgozatai alapján készült és tartalmazza azok eredményeit.

A topológikus gyűrűket először az 1930-as évek elején D. VAN DANTZIG vizsgálta. Bár az azóta eltelt három évtizedben nagyszámú dolgozat jelent meg, amelyben bizonyos topológikus gyűrűket vizsgálnak (pl. normált gyűrűket), viszonylag kevés azoknak a dolgozatoknak a száma, amelyeknek célja a gyűrűk általános struktúrális vizsgálata topológiai eszközök segítségével. Ilyen irányú vizsgálatok terén elsőnek I. KAPLANSKY nevét kell megemlíteni. [10] dolgozatának első részében főleg a kompakt gyűrűket** vizsgálja és bebizonyítja az első *Wedderburn—Artin* struktúratételnek egy analogonját: kompakt féligegyszerű gyűrű algebrailag és topológiailag izomorf véges egyszerű gyűrűk (azaz véges testek feletti teljes mátrixgyűrűk komplett direkt összegével. Behatóan vizsgálta KAPLANSKY a lokálisan kompakt gyűrűk elméletét is ([11], [12], [13]). A lokálisan kompakt egyszerű egységelemes gyűrűket tárgyalja SZKORNYAKOV [23] egy nemrég megjelent dolgozatá-

* A dolgozat itt közölt I. része csupán az első négy paragrafust tartalmazza.
** Az itt szereplő fogalmak definícióit az I. részben ismertetjük.

ban, amelyből kitűnik, hogy ezek a gyűrűk nem mindig ferdetest feletti mátrixgyűrűk. Szerencsés fogalomnak bizonyult a lineáris kompaktság fogalma; ezt a fogalmat vektorterekre LEFSCHETZ [17] definiálta, gyűrűk és modulusok elméletében ZELINSKY [36] használta először. A lineárisan kompakt gyűrűk az *Artin*-gyűrűk általánosításai, ugyanis minden *Artin*-gyűrű a diszkrét topológiában lineárisan kompakt. ZELINSKY-nek sikerült az első *Wedderburn—Artin* struktúratételnek és KAPLANSKY fent említett tételének közös általánosítását is adnia. Nagy lépéssel vitte előre a lineárisan kompakt modulusok és gyűrűk elméletét LEPTIN [18], [19]. LEPTIN bizonyos vonatkozásban a legnagyobb mértékű általánosítását adta az első *Wedderburn—Artin* struktúratételnek. Ez utóbbi tétel szerint a féligegyszerű *Artin*-gyűrűk véges dimenziós vektorterek teljes endomorfizmusgyűrűinek véges direkt összegei. LEPTIN bebizonyította, hogy mindkét végességi feltételt elhagyva, éppen a lineárisan kompakt féligegyszerű gyűrűk jellemzése áll elő. LEPTIN vizsgálta a lineárisan kompakt gyűrűk *Jacobson*-radikálját is.

A topológikus gyűrűk irodalmának feldolgozása SZÁSZ FERENC [26], [27] referáló dolgozataiban található.

Ebben a munkában célunk a lineárisan kompakt gyűrűk további vizsgálata. Minthogy a lineárisan kompakt gyűrűk *Jacobson*-radikálja mindig zárt ideál, azért egy ilyen gyűrűnek a radikálja szerinti faktorgyűrűje radikálmentes és lineárisan kompakt. Ilyen módon bármely lineárisan kompakt gyűrű egy lineárisan kompakt radikálgyűrűnek egy radikálmentes lineárisan kompakt gyűrűvel való *Schreier*-bővítése. Mi a két határesettel fogunk foglalkozni; a II. részben LEPTIN eredményeihez kapcsolódva a radikálmentes lineárisan kompakt gyűrűket vizsgáljuk, a III. részben pedig a lineárisan kompakt radikálgyűrűk leírásával foglalkozunk.

Szeretnénk hangsúlyozni, hogy az itt bemutatásra kerülő eredmények természetesen nem zárják le a lineárisan kompakt gyűrűk elméletét. Szinte valamennyi §-ban természetszerűleg merülnek fel további kérdések, amelyek elég érdekesnek és fontosnak tűnnek ahhoz, hogy további vizsgálatok tárgyát képezzék.

A könnyebb érthetőség kedvéért ismertetünk olyan ismert tételeket is, amelyeket munkánkban felhasználunk. Más szerzők eredményeivel kapcsolatban azt az elvet követjük, hogy csak utalunk rájuk, amennyiben azok könyvekben (pl. [1], [2], [4], [8], [9], [17], [20], [21], [28], [30]) megtalálhatók, viszont részletesen ismertetjük a bizonyításokat is abban az esetben, amikor ezek csak dolgozatokban szerepelnek. A bizonyítások végét a HALMOS által bevezetett és azóta egyre gyakrabban használt [] jellel jelöljük. A szerző [31], [32], [33] és [34] dolgozataiban szereplő eredményekre a továbbiakban nem fogunk utalni.

A dolgozat I. részét az előkészületeknek szenteljük. Az eredmények könnyebb megértése végett részletes előkészületeket végzünk, különösen vonatkozik ez a topológiai előkészületekre, tekintettel arra, hogy eredményeink algebrai jellegűek. A 2. §-ban ismertetjük a felhasználásra kerülő algebrai fogalmakat és eredményeket. Vizsgálataink során mélyebb topológiai eredményekre nem lesz szükségünk, az általunk felhasznált topológiai eljárásokat a 3. és 4. §-ban részletesen tárgyaljuk. A 3. §-ban ismertetjük a topológikus tér és topológikus struktúra fogalmát a WITT által javasolt speciális filter-fogalom segítségével. Itt tárgyaljuk a struktúrák inverzlimeszére vonatkozó tételeket is. Az inverz-limesz képzésének nagy szerep jut a későbbi bizonyításokban. Ugyancsak ebben a §-ban közöljük JACOBSON sűrűségitételének topológiai megfogalmazását és a primitív gyűrűkre vonatkozó struktúratételét. Ezek közül a tételek közül az előbbit bizonyítás közben az 5. §-ban felhasználjuk, az utóbbira pedig utalás történik a 8. §-ban. Ugyancsak a 3. §-ban ismertetjük a transzfinit nilpotenciának LEPTINtől származó definícióját. Vizsgálatainkban a lineárisan kompakt gyűrűkön kívül fellépnek olyan gyűrűk is, amelyek hasonló gyűrűtopológiával rendelkeznek, és amelyekre analóg topológiai tételek érvényesek. Célszerűnek látszott tehát e két gyűrűosztály párhuzamos topológiai vizsgálata. Ezt úgy értük el, hogy általánosítottuk a lineárisan kompaktság fogalmát rögtön kétoldali modulusok esetére. A 4. §-ban ezzel az általánosított lineáris kompaktsági fogalommal foglalkozunk, és megvizsgáljuk topológiai tulajdonságait. A nyert eredmények ZELINSKY [35], [36] és LEPTIN [18] eredményeinek az általánosítása, a bizonyítások is hasonlóan történnek. Mint már említettük, ennek az általánosított lineáris kompaktsági fogalomnak csupán két speciális esetére lesz szükségünk, mégis az itt ismertetett tételek kiindulópontul szolgálhatnak más értelemben vett lineárisan kompakt gyűrűk vizsgálatához. (Gondolunk pl. olyan gyűrűkre, amelyeknek van kváziideálokból álló bázisfilterük és amelyekben minden zárt kváziideálokszerinti mellékosztályokból álló filternek van érintkezési pontja.)

A II. részben a radikálmentes lineárisan kompakt és lokálisan lineárisan kompakt gyűrűk jellemzésével foglalkozunk. Mint már említettük, a radikálmentes lineárisan kompakt gyűrűk teljes leírását LEPTIN adta azzal a tételével, amely az első *Wedderburn—Artin* struktúratételnek nagyfokú általánosítása. LEPTIN eredményeit a teljesség kedvéért bizonyítással együtt közöljük az 5. § első részében, a második részében ezeknek a gyűrűknek további moduluselméleti jellemzéseit adjuk, köztük három homológikus jellemzést. A 6. §-ban a radikálmentes lineárisan kompakt gyűrűknek gyűrűelméleti jellemzéseit adjuk, ezek az előző § eredményeiből könynyen nyerhetők. A 7. §-ban látni fogjuk, hogy a féligegyszerű lineárisan kompakt gyűrűk osztálya egybeesik a *Neumann*-reguláris lineárisan kompakt gyűrűk osztályával. A féligegyszerű lokálisan lineárisan kompakt gyűrűkkel foglalkozunk a 8. §-ban. Noha a lokális lineáris kompaktság fogalma már LEPSCHETZ [17] könyvében is megtalálható, ilyen gyűrűkkel vagy modulusokkal foglalkozó eredményekről a szerzőnek nincs tudomása. A lokálisan lineárisan kompakt gyűrűk vizsgálatát érdekessé teszi az a körülmény, hogy a hozzá topológiai szempontból közelálló lokálisan kompakt gyűrűk vizsgálatában nehézségek lépnek fel. I. KAPLANSKY vizsgálataihoz kapcsolódva SZKORNYAKOV [23] foglalkozott az egyszerű lokálisan kompakt egységelemes gyűrűkkel. Meglepő eredménye, hogy létezik nem diszkrét lokálisan kompakt egyszerű egységelemes gyűrű, amely nem ferdetest feletti teljes mátrixgyűrű. Eredményeink viszont azt mutatják, hogy a lokálisan lineárisan kompakt gyűrűk könnyebben leírhatók. A 8. § fő eredménye az, hogy minden féligegyszerű lokálisan lineárisan kompakt gyűrűnek van minimális balideálja. Így korolláriumként kapjuk, hogy a primitív lokálisan lineárisan kompakt gyűrűket JACOBSON struktúratétele írja le, az egyszerű lokálisan lineárisan kompakt gyűrűket pedig a *Litoff*-tétel. Látni fogjuk továbbá, hogy egy topologikusan egyszerű lokálisan lineárisan kompakt gyűrű lineárisan kompakt is, amennyiben a topológiája a legdurvább, vagy pedig van jobbegységeleme.

A III. részben a lineárisan kompakt radikálgyűrűkkel foglalkozunk. A radikálgyűrűk helyett t-nilpotens gyűrűket vizsgálunk, ez a két fogalom L-kompakt gyűrűk esetében, mint azt látni fogjuk, egybeesik. A lineárisan kompakt gyűrűkre bebizonyítjuk, hogy egy t-nilpotens gyűrű mindig radikálgyűrű, de a fordított állítás hamis; továbbá t-nilpotens lineárisan kompakt gyűrű a legdurvább topológiában L-kompakt is.

A t-nilpotens L-kompakt gyűrűk jellemzését úgy nyerjük, hogy felhasználjuk SZELE Tibornak nilpotens *Artin*-gyűrűkre vonatkozó tételét, és alkalmazzuk az inverz-limesz képzés ZELINSKY által kidolgozott módszerét. SZELE [29] a nilpotens *Artin*-gyűrűket nilpotens véges gyűrűkkel jellemezte, mi ezt a jellemzést számunkra megfelelően módosítjuk a 9. §-ban. A 9. § eredményéből inverz-limesz képzéssel leírjuk a 10. §-ban a t-nilpotens K-kompakt gyűrűket. A t-nilpotens L-kompakt gyűrűk jellemzése a 11. §-ban nilpotens véges gyűrűk inverz-limesze és egy olyan nilpotens zárt ideál segítségével történik, amelynek a köbe zérus.

Ezen a helyen szeretnék köszönetet mondani FUCHS LÁSZLÓ professzornak értékes észrevételeiért és tanácsaiért, amelyek munkámban nagy segítséget jelentettek.

I. Algebrai és topológiai előkészületek

2. §. Algebrai előkészületek

A halmazelméleti fogalmak közül használni fogjuk a tartalmazás, metszés, egyesítés fogalmait és az ezekre vonatkozó egyszerű összefüggéseket, a 10. §-ban végtelen halmazok számossságaira vonatkozó elemi tulajdonságokat is felhasználunk. Ezeket ismerteknek tételezzük fel és a továbbiakban nem részletezzük. Szükségünk lesz a *Kuratowski—Zorn* lemma következő alakjára:

Ha egy H halmaz bizonyos részhalmazainak a $\mathscr{H}$ halmaza olyan tulajdonságú, hogy minden $K_1 \subseteqq \ldots \subseteqq K_\alpha \subseteqq \ldots (K_1, \ldots, K_\alpha \in \mathscr{H})$ lánc esetén $K = \bigcup_\alpha K_\alpha$ is eleme $\mathscr{H}$-nak, akkor $\mathscr{H}$ tartalmaz maximális elemet, azaz olyan részhalmazt, amely nem valódi része egyetlen $\mathscr{H}$-beli részhalmaznak sem.

Mint ismeretes, a *Kuratowski—Zorn* lemma ekvivalens a kiválasztási axiómával; a kiválasztási axiómával ekvivalens állítások közül ez használható legkényelmesebben az absztrakt algebrai meggondolásoknál.

Az absztrakt algebra alapvető fogalmait és tételeit ismerteknek tételezzük fel, erre vonatkozóan a [21] és [30] tankönyvekre utalunk.

A dolgozatban előforduló struktúrák Abel-csoportok, gyűrűk, egy- és kétoldali modulusok. Ezeket latin nagybetűkkel jelöljük, elemeiket pedig általában latin kisbetűkkel. Azonos típusú struktúrákat, vagy pedig egy adott struktúra elemeit gyakran fogjuk indexekkel ellátni, végtelen indexhalmaz esetén görög kisbetűket használunk indexek gyanánt. Gyűrűn a továbbiakban mindig *asszociatív gyűrűt* értünk.

Egy S struktúra esetén $\{A, B\}$-vel jelöljük az A és B részhalmazok által generált részstruktúrát. A $\{\ \}$ jelet halmazok jelölésére is használjuk, ebből félreértés azonban nem fog származni, mert az így jelölt halmazok általában részstruktúrának fognak bizonyulni, más esetekben pedig külön felhívjuk a figyelmet arra, hogy struktúrát, vagy halmazt jelölünk a szóbanforgó jellel. Azonos típusú A, B struktúrák esetén $A+B$-vel jelöljük ezeknek algebrai értelemben vett direkt összegét; megkülönböztetésként $A \oplus B$-vel az jelöljük algebrai és topológiai értelemben vett direkt összeget (lásd 3. §). $\sum_\alpha A_\alpha$-val jelöljük az azonos típusú $A_1, \ldots, A_\alpha, \ldots$ struktúrák komplett direkt összegét; amikor diszkrét direkt összegről beszélünk, akkor ezt másként jelöljük, és mindig hangsúlyozzuk.

Egy R gyűrű feletti M moduluson mindig balmodulust értünk, azaz R elemeit M baloperátorainak tekintjük. Ha M egy R-modulus és L R-nek balideálja, akkor LM-en értjük az összes $\sum l_i m_i$ $(l_i \in L,\ m_i \in M)$ alakú véges összeg halmazát, amely nyilvánvalóan M-nek részmodulusa. rM-mel $(r \in M)$ fogjuk jelölni az összes $rm(m \in M)$ alakú elem halmazát. Mindezeket a jelöléseket gyűrűk esetében is használni fogjuk, minthogy minden R gyűrűt tekinthetünk R-modulusnak (pontosabban szólva R additív csoportját R-modulusnak).

Gyűrűk esetében a gyűrűelméleti direkt összegen kívül — amikoris a gyűrű bizonyos ideáljainak a direkt összege — fellép a moduluselméleti direkt összeg fogalma is. Ez utóbbi azt jelenti, hogy a gyűrű, mint önmaga feletti balmodulus, bizonyos balideáljainak a direkt összege. A „gyűrűelméleti" illetve „moduluselméleti" jelzőket azonban el fogjuk hagyni, mert a direkt komponensek ideál illetve balideál voltából nyilvánvaló lesz, hogy melyikről is van szó.

Az $R_1, \ldots, R_\alpha, \ldots$ gyűrűk *szubdirekt összegén* értjük a $\sum\limits_\alpha R_\alpha$ gyűrűnek minden olyan R részgyűrűjét, amelyre fennáll az, hogy mindegyik $a_\alpha\ (\in R_\alpha)$ legalább egy R-beli elem R_α-beli komponense.

2, 1. állítás. Jelölje $I_1, \ldots, I_\alpha, \ldots$ az R gyűrű ideáljainak egy rendszerét. Az R gyűrű akkor és csak akkor izomorf az $R/I_1, \ldots, R/I_\alpha, \ldots$ gyűrűknek valamely szubdirekt összegével, ha $\bigcap\limits_\alpha I_\alpha = 0$.

Ez az állítás speciális esete egy jólismert tételnek (BIRKHOFF [1] VI. Theorem 9, vagy SZÁSZ G. [28] 55. §. 72. tétel). BIRKHOFF [1] VI. Theorem 4-nek gyűrűelméleti speciális esete a

2, 2. állítás. Ha $I_1, \ldots, I_r$ az R gyűrűnek véges sok olyan ideálja, amelyre teljesül $\bigcap\limits_{i=1}^{r} I_i = 0$ és $\left\{\bigcap\limits_{j=1}^{i} I_j,\ I_i\right\} = R$ $(i = 2, \ldots, r)$, akkor R izomorf az $R/I_1 + \ldots + R/I_r$ direkt összeggel.

Az $r \in R$ elemet az R gyűrű *balannihilátorának* nevezzük, ha $rR = 0$. Amennyiben $rR = Rr = 0$, úgy azt mondjuk, hogy r R-nek *annihilátora*. Könnyű látni, hogy egy gyűrű összes balannihilátora illetve annihilátora ideált alkot, ezt *balannihilátorideálnak* illetve *annihilátorideálnak* nevezzük. Az $r \in R$ elem az M R-modulus *annihilátora*, ha $rM = 0$. M annihilátorai R-ben ideált alkotnak, amelyet M *annihilátorideáljának* nevezünk. Azt mondjuk, hogy M *hű R-modulus*, ha M annihilátorideálja 0.

Egy $M \neq 0$ R-modulust *irreducibilis*nek nevezünk, ha M-nek csak triviális részmodulusai vannak, azaz M és $\{0\}$. Tekintsük például egy K test additív csoportját és képezzük ennek véges vagy végtelen sok példányban vett komplett direkt összegét. Jelöljük ezt M-mel. M tekinthető egy K feletti vektortérnek. Jelölje R M összes lineáris transzformációjának (más szóval endomorfizmusának) a gyűrűjét. Világos, hogy M irreducibilis R-modulus.

2, 3. definíció. ([8] I. § 2.) *Tekintsünk egy R gyűrűt, és jelölje $\mathfrak{M}$ az összes irreducibilis R-modulus osztályát. Az R gyűrű* JACOBSON-*radikálján (röviden radikálján) értjük az összes $M \in \mathfrak{M}$ modulus annihilátorideáljának a metszetét, azaz a*

$$J = \{r \in R \mid rM = 0,\ M \in \mathfrak{M}\}$$

ideált, illetve magát R-et, amennyiben $\mathfrak{M}$ az üres halmaz.

Ismeretes a radikálnak több jellemzése. Ezek közül egyet mi is gyakran fogunk használni. Az R gyűrűben bevezethetünk egy műveletet, amit „$\circ$"-rel jelölünk, a következőképpen: $x, y \in R$ elemekre legyen

$$x \circ y = x + y + xy.$$

Az $y \in R$ elemet bal-kváziregulárisnak nevezzük, ha létezik olyan $x \in R$ elem, amelyre $x \circ y = 0$; ebben az esetben x-et y bal-kváziinverzének nevezzük. Azt mondjuk, hogy az $L \subseteq R$ balideál kvázireguláris, ha minden elemének van bal-kváziinverze.

Megjegyezzük, hogy eredetileg JACOBSON [7] igy definálta a „$\circ$" műveletet s a kvázireguláris balideált. Később gyakoribbá vált a „$\circ$" műveletnek $x \circ y = x + y - xy$ egyenlettel való definiálása és mint azt könnyű kimutatni, ez esetben ugyanahhoz a kvázireguláris balideál fogalomhoz jutunk. Számunkra valamivel kényelmesebb a „$\circ$" művelet fenti definíciója, ezért ezt használjuk.

2, 4. tétel. *Az R gyűrű radikálja olyan kvázireguláris ideál, amely R összes kvázireguláris balideálját tartalmazza.*

Arra vonatkozóan, hogy a radikál 2, 3. definíciója mellett a 2, 4. tétel érvényes, JACOBSON [8] könyvére hivatkozunk.

A 2, 4. tétel értelmében egy gyűrű radikálja a következőképpen értelmezhető:

2, 5. definíció. *Egy R gyűrű radikálján értjük R összes kvázireguláris balideáljának a halmazelméleti egyesítését.*

Fontos tény, hogy ha az előzőkhöz hasonlóan értelmezzük a jobb-kvázireguláritás és jobb-kváziinverz fogalmát, akkor a kvázireguláris jobbideálok egyesítése is a radikált határozza meg.

Megjegyezzük még, hogy ha egy $a \in R$ elem egyszerre bal- és jobb-kvázireguláris, akkor a bal- és jobb-kváziinverz megegyezik és egyértelműen meghatározott. Ezt az elemet *a kváziinverzének* nevezzük.

Jól ismert tény, hogy egy R gyűrűnek J radikálja szerinti R/J faktorgyűrűjének radikálja 0; J radikálja pedig önmaga.

2, 6. definíció. Egy R gyűrűt *féligegyszerűnek* nevezünk, ha radikálmentes, azaz R radikálja 0. Ha egy gyűrű radikálja maga az egész gyűrű, akkor *radikálgyűrűről* beszélünk.

2, 7. definíció. Egy R gyűrűt *egyszerűnek* nevezünk, ha csak triviális ideáljai vannak és nem radikálgyűrű.

Hangsúlyozzuk, hogy az egyszerűségnek ez a definíciója eltér a szokásostól, annál szűkebb fogalmat jelöl. Vizsgálataink szempontjából azonban ez lesz a célszerű; ezt a szóhasználatot indokolja az a tény is, hogy a 2, 7 definíciót használva *minden egyszerű gyűrű egyúttal féligegyszerű is.*

Primitív gyűrűn olyan R gyűrűt értünk, amelyhez létezik hű irreducibilis R-modulus.

Legyen R egyszerű gyűrű. Most a 2, 3. definíció szerint van olyan M irreducibilis R-modulus, amelyre $RM \neq 0$. M annihilátorideálja R egyszerűsége miatt 0, vagyis M hű irreducibilis R-modulus. Következőleg *minden egyszerű gyűrű primitív gyűrű is.* Ennél az állításnál szintén lényeges, hogy az egyszerűséget a 2, 7. definícióval adtuk meg.

A radikál 2, 3. definíciója alapján világos, hogy *minden primitív gyűrű féligegyszerű.*

Egy G csoportra azt mondjuk, hogy teljesíti a részcsoportok minimumfeltételét, ha G-ben a részcsoportoknak bármely $G_1 \supset G_2 \supset \ldots$ szigorúan fogyó lánca véges lépésben megszakad. Hasonlóan beszélhetünk arról, hogy egy R-modulusban teljesül a részmodulusok minimumfeltétele, vagy pedig arról, hogy egy R gyűrűben teljesül az ideálok vagy a balideálok minimumfeltétele. Egy gyűrűt, amelyben teljesül a balideálok minimumfeltétele, *Artin-gyűrűnek* nevezünk.

A 9. és 10. §-ban szükségünk lesz a következő állításokra.

2, 8. segédtétel. Ha I az R gyűrű ideálja, és mind I-ben, mind R/I-ben teljesül az ideálok minimumfeltétele, akkor R-ben is teljesül.

Bizonyítás.* Tekintsük R-ben ideáloknak egy szigorúan fogyó

$$R \supset K_1 \supset K_2 \supset \ldots \tag{1}$$

láncát. Kimutatjuk, hogy $K_i \cap I = K_{i+j} \cap I$ csak véges sok j indexre állhat fenn. Ellenkező esetben ugyanis lenne olyan i, hogy a

$$K_{i+j}/I \cap K_{i+j} = K_{i+j}/I \cap K_i \qquad (j = i_1, i_2, \ldots)$$

faktorgyűrűk $R/I \cap K_i$-nek egy végtelen szigorúan fogyó

$$R/I \cap K_i \supset K_{i+i_1}/I \cap K_{i_1} \supset K_{i+i_2}/I \cap K_i \supset \ldots$$

ideálokból álló láncát alkotná. Minthogy pedig érvényes

$$K_{i+j}/I \cap K_i \cong \{K_{i+j}, I\}/I \qquad (j = i_1, i_2, \ldots),$$

és mindkét oldal R megfelelő faktorgyűrűjében ideál, azért most

$$R/I \supset \{K_{i+i_1}, I\}/I \supset \{K_{i+i_2}, I\}/I \supset \ldots$$

végtelen ideálláncot alkotna R/I-ben, ami a feltétel szerint lehetetlen. Másrészt I-ben a $K_i \cap I$ $(i = 1, 2, \ldots)$ ideálok fogyó láncot alkotnak és a feltétel szerint csak véges sok esetben fordulhat elő valódi tartalmazás. Következőleg az (1) láncnak is csak véges sok tagja lehet. []

2, 9. segédtétel. Legyen H a G Abel-csoportnak részcsoportja. Ha H-ban és G/H-ban teljesül a részcsoportok minimumfeltétele, akkor G-ben is teljesül.

A 2, 9. segédtétel tulajdonképpen a 2, 8. segédtételnek speciális esete, mégpedig az az eset, amikor a szóban forgó gyűrű zérógyűrű.

Legyen N olyan modulus, amelynek baloldali operátortartománya R, jobboldali operátortartománya pedig S. *N talpán* értjük az N összes minimális (R, S)-részmodulusa által generált kétoldali modulust, amennyiben N-ben létezik minimális részmodulus és a 0 modulust egyébként. Hasonlóan értelmezhetjük egy M R-balmodulus talpát is. *Egy R gyűrű baltalpán* R összes minimális balideálja által generált balideált, illetve 0-t értjük, amennyiben R-nek nincs minimális balideálja. Ismeretes, hogy egy gyűrű baltalpa mindig ideál.

* Ez a bizonyítás könyvekben megtalálható.

Neumann-regulárisnak nevezünk egy R gyűrűt, ha minden $a \in R$ eleméhez létezik olyan $x \in R$ elem, amelyre teljesül $axa = a$.

Egy A Abel-csoportot *oszthatónak* nevezünk, ha minden n természetes számhoz és $a \in A$ elemhez az $nx = a$ egyenlet A-ban megoldható. Egy Abel-csoportban az összes osztható részcsoport által generált részcsoport ismét osztható, ez a csoport maximális osztható részcsoportja.

2, 10. állítás. ([4] § 66. F). Egy gyűrű additív csoportjának maximális osztható részcsoportja R-nek ideálja.

Ennek az állításnak az alapján beszélhetünk egy gyűrű *maximális osztható ideáljáról,* ezen az additív csoport maximális osztható részcsoportja által alkotott ideált értjük.

RÉDEIt [21] követve *az A struktúrának B-vel való Schreier-bővítésén* értünk minden olyan S struktúrát, amelynek A szerint vett faktorstruktúrája B-vel izomorf. A 9. és 10. §-ban gyűrűk *Schreier*-bővítéseinek ismeretére lesz szükségünk. [21] 54. § alapján egy A gyűrűnek a B gyűrűvel történő bármely R *Schreier*-bővítése előáll a következő módon. R elemei legyenek az (a, α) $(a \in B, \alpha \in A)$ alakú elempárok az

$$(a, \alpha)+(b, \beta) = (a+b, [a, b]+\alpha+\beta),$$

$$(a, \alpha)(b, \beta) = (ab, \langle a, b\rangle+\alpha b+a\beta+\alpha\beta\rangle \qquad (a, b \in B;\ \alpha, \beta \in A)$$

műveleti szabályokkal, ahol $[a, b]$, $\langle a, b\rangle$, αb, $a\beta$ kétváltozós függvényeket jelölnek A-beli értékekkel, s ezek a függvények kielégítenek bizonyos függvényegyenleteket. Vizsgálataink folyamán olyan gyűrűbővítések lépnek fel, amelyeknél A zérógyűrű, és elemei R-ben annihilátorok; továbbá A additív csoportja R additív csoportjában direkt összeadandó, ez esetben az R-beli műveleteket egyszerűbben definiálhatjuk, mégpedig az

$$(a, \alpha)+(b, \beta) = (a+,b\ \alpha+\beta),$$

$$(a, \alpha)(b, \beta) = (ab, \langle a, b\rangle) \qquad (a, b \in B;\ \alpha, \beta \in A)$$

szabályokkal, ahol az $\langle a, b\rangle$ függvény, amelyet multiplikatív faktorrendszernek nevezünk, kielégíti az

$$\langle a, 0\rangle = \langle 0, a\rangle = 0,$$

$$\langle ab, c\rangle = \langle a, bc\rangle,$$

$$\langle a+b, c\rangle = \langle a, c\rangle+\langle b, c\rangle,$$

$$\langle a, b+c\rangle = \langle a, b\rangle+\langle a, c\rangle \qquad (a, b, c \in B)$$

feltételeket.

Végül ismertetünk néhány homológikus algebrai fogalmat. Tekintsünk egy R gyűrűt. Jelöljük $\mathscr{C}$-vel azt a kategóriát, amelynek objektumai az R-modulusok és amelyben a leképezések az R-modulusok homomorfizmusai. Ha M és N két R-modulus, és φ M-nek N-be való homomorf leképezése, akkor $\operatorname{Im}\varphi$ jelenti mindazoknak az $n \in N$ elemeknek a halmazát, amelyek valamilyen $m \in M$ elemnek a képei; $\operatorname{Ker}\varphi$ jelenti mindazoknak az $m \in M$ elemeknek a halmazát, amelyekre $\varphi(m) = 0$. Azt a tényt, hogy φ M-nek N-be való homomorfizmusa, így jelöljük:

$$M \xrightarrow{\varphi} N$$

Exaktnak nevezünk egy

$$A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C$$

sorozatot, amennyiben $\operatorname{Im} \alpha = \operatorname{Ker} \beta$. A

$$O \to A \xrightarrow{\alpha} B$$

sorozat exaktsága azt jelenti, hogy α A-t B-be beágyazza, és az

$$A \xrightarrow{\alpha} B \to O$$

sorozat exaktsága pedig azt, hogy α A-t homomorf módon B-re képezi.

Azt mondjuk, hogy a

$$O \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to O \tag{2}$$

exakt sorozat *széteső*, ha $\operatorname{Im} \alpha = \operatorname{Ker} \beta$ B-nek direkt összeadandója. A (2) sorozat exaktsága a *Schreier*-bővítések terminológiájában éppen azt jelenti, hogy B A-nak C-vel való *Schreier*-bővítése. Az, hogy a (2) exakt sorozat széteső, azt jelenti, hogy a szóban forgó *Schreier*-bővítés direkt.

Azt mondjuk, hogy az

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "\gamma"'] & B \arrow[d, "\beta"] \\ & C \end{tikzcd}$$

diagramm *kommutatív*, ha $\beta\alpha = \gamma$.

Egy M R-modulust *projektívnek* nevezünk, ha bármely

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[d] & \\ A \arrow[r] & B \arrow[r] & O \end{tikzcd}$$

diagramm, amelyben az $A \to B \to O$ sorozat exakt, kiegészíthető egy

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[d] \arrow[dl] & \\ A \arrow[r] & B \arrow[r] & O \end{tikzcd}$$

kommutatív diagrammá (A, B $\mathscr{C}$-beli objektumok). A projektív R-modulusnak a duálisa az injektív R-modulus. Egy M R-modulust *injektívnek* nevezünk, ha bármely

$$\begin{tikzcd} O \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d] & B \\ & M & \end{tikzcd}$$

diagramm, amelyben a $O \to A \to B$ sorozat exakt, kiegészíthető egy

$$\begin{tikzcd} O \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[dl] \\ & M & \end{tikzcd}$$

kommutatív diagrammá (A, B $\mathscr{C}$-beli objektumok).

3. §. Topológiai előkészületek

Ebben a §-ban részletesen ismertetjük az általunk használt topológiai fogalmakat és állításokat. Mivel ezek a fogalmak és állítások jól ismertek, azért azokat példákkal nem illusztráljuk, a bizonyításokra vonatkozóan pedig a [2], [20] és [30] könyvekre utalunk.

Egy $H=\{a, b, \ldots\}$ halmazt, amelyet a $\leqq$ relációval részben rendeztünk, *irányítottnak* nevezzük, ha bármely $a, b \in H$ elemhez létezik olyan $c \in H$ elem, amelyre teljesül $a \leqq c$ és $b \leqq c$.

Tekintsünk ezután egy T halmazt és jelöljük $\mathbf{T}$-vel T részhalmazainak egy halmazát, amelyet a részhalmazok $\subseteqq$ tartalmazási relációjával részben rendezünk. Jelöljük egy pillanatra azt a tényt, hogy $A \subseteqq B$, $A \geqq B$-vel. Most $\mathbf{T}$ irányított volta azt jelenti, hogy bármely $A, B \in \mathbf{T}$ részhalmazhoz van olyan $C \in \mathbf{T}$ részhalmaz, amelyet mind A, mind B tartalmaz.

3, 1. definíció. T részhalmazainak egy $\mathbf{F}$ halmazát *filter*nek* nevezzük, ha $\mathbf{F}$ a részhalmazok tartalmazási relációjára nézve irányított, és $\mathbf{F}$ nem tartalmazza a $\emptyset$ üres halmazt.

Két $\mathbf{F}_1$ és $\mathbf{F}_2$ filtert *ekvivalensnek* nevezünk, ha bármely $A_1 \in \mathbf{F}_1$ és $A_2 \in \mathbf{F}_2$ elemekhez léteznek olyan $B_1 \in \mathbf{F}_1$ és $B_2 \in \mathbf{F}_2$ elemek, amelyekre fennáll $B_2 \subseteqq A_1$ és $B_1 \subseteqq A_2$. Világos, hogy az ekvivalens filterek a T halmaz részhalmazaiból álló filtereknek egy osztályát képezik. Az összes ekvivalens filter halmazelméleti egyesítése ismét egy ezekkel ekvivalens $\mathbf{F}_0$ filtert alkot, és $\mathbf{F}_0$ ebben a filterosztályban maximális, amin azt értjük, hogy bármely ehhez az osztályhoz tartozó $\mathbf{F}$ filterre teljesül $\mathbf{F} \subseteqq \mathbf{F}_0$.

E. WITT tanácsát követve LEPTIN definiálta így a filter fogalmát. A szokásos terminológiában ezt egy filter bázisának nevezik, és filteren az ekvivalens filterek maximális filterét értik. Számunkra azonban a 3, 1. definíció által adott filter-fogalom lényegesen célszerűbb lesz, ennek a magyarázata abban rejlik, hogy a vizsgálatainkban fellépő filterek lényeges tulajdonsága az, hogy egy R-modulus bizonyos részmodulusai szerinti mellékosztályokból állnak; márpedig egy ilyen filterrel ekvivalens filter nem áll szükségképpen mellékosztályokból.

Tekintsünk ezután egy *T topologikus teret*, mint tudjuk, ez azt jelenti, hogy T-ben ki van jelölve részhalmazoknak egy nem üres rendszere, az ebben a rendszerben előforduló részhalmazokat *nyílt halmazoknak* nevezzük és ezekre teljesül:

(1) véges sok nyílt halmaz metszete is nyílt,

(2) nyílt halmazok egyesítése is nyílt.

(1) alapján T maga, mint nyílt halmazok üres halmazának a metszete nyílt; (2) szerint pedig nyílt halmazok üres halmazának az egyesítése, vagyis az üres halmaz szintén nyílt.

Nyílt halmazok komplementer halmazait *zárt halmazoknak* nevezzük. Egy *H halmaz lezártján* értjük az összes H-t tartalmazó zárt halmaz metszetét, ez (2) szerint mindig zárt. Egy H halmaz lezártját mindig $\bar{H}$-sal jelöljük.

* A német szaknyelvben beszélnek *Filter*-ről és *Filtebasis*-ról, az utóbbit *Raster*nek is mondják. A 3,1. definíció a Filterbasis definíciója, de ezt LEPTIN [18], [19] dolgozatában Filternek nevezi. A magyar szaknyelv e téren még nem alakult ki, a Filtert szokták szűrőnek, a Rastert pedig rácsnak nevezni.

A T topológikus tér elemeit pontoknak nevezzük, egy $a \in T$ pontot tartalmazó U nyílt halmazt pedig *a környezetének.*

Az eddigi definíciókból nyilvánvaló, hogy egy $a \in T$ pont összes környezete egy $\mathbf{U}_a$ filtert alkot. Az $\mathbf{U}_a$ filtert és minden vele ekvivalens filtert az a pont bázisfilterének nevezzük.

Egy T halmazon több topológia is értelmezhető. Azt mondjuk, hogy T-nek τ_1 *topológiája durvább* a τ_2 topológiájánál, és ezt $\tau_1 \geqq \tau_2$-vel jelöljük, ha T-nek minden a pontjának egy, a τ_1 topológiában vett U_a környezetében benne van a-nak egy τ_2-ben vett V_a környezete. Két τ_1, τ_2 topológia *ekvivalens,* amennyiben $\tau_1 \geqq \tau_2$ és $\tau_2 \geqq \tau_1$ érvényes. Ez éppen azt jelenti, hogy a τ_1 topológia bázisfilterei ekvivalensek a τ_2 topológia bázisfiltereivel.

Egy A halmaz zártsága esetén nyilván teljesül $A = \bar{A}$. $a \in \bar{A}$ a definíció szerint azt jelenti, hogy a benne van minden A-t tartalmazó zárt halmazban, vagyis nincs benne egyetlen A-hoz diszjunkt nyílt halmazban sem. Ha viszont $a \notin \bar{A}$, akkor $\bar{A}$ komplementere a-nak A-hoz diszjunkt környezete. Eszerint $\bar{A}$ pontjait jellemzi

(3) $a \in \bar{A}$ akkor és csak akkor, ha a minden környezete tartalmaz A-beli elemet.

A T tér S részhalmazára azt mondjuk, hogy T-ben *sűrű,* ha $\bar{S} = T$.

Azt mondjuk, hogy az $\mathbf{F}$ filter *a-hoz konvergál* és ezt $\lim \mathbf{F} = a$-val jelöljük, ha a-nak bármely U_a környezete tartalmaz egy $F \in \mathbf{F}$ halmazt.

3, 2. definíció. A T teret *Hausdorff*-térnek nevezzük, ha bármely $\mathbf{F}$ filter legfeljebb egy ponthoz konvergálhat.

A T tér akkor és csak akkor Hausdorff-féle, ha bármely két $a \neq b$ pontjának van U_a és U_b diszjunkt környezete. Ha ugyanis U_a és U_b sohasem diszjunktak, akkor az $U_a \cap U_b$ metszetek olyan filtert alkotnak, amely a-hoz és b-hez is konvergál. Ha viszont van két olyan U_a és U_b környezet, amelyek diszjunktak bármely a és b pont esetén, akkor egy a-hoz konvergáló $\mathbf{F}$ filter b-hez már nem konvergálhat, mert akkor volna olyan $F \in \mathbf{F}$, amelyre teljesülne $F \subseteqq U_a \cap U_b = \emptyset$, ami lehetetlen.

Regulárisnak nevezünk egy topológikus teret, ha bármely a pontjához és bármely a-t nem tartalmazó B zárt halmazához létezik két, a-t illetve B-t tartalmazó diszjunkt nyílt halmaz. Világos, hogy reguláris tér mindig *Hausdorff*-féle.

Egy $\mathbf{F}$ filter *érintkezési pontján* értjük a $\downarrow\mathbf{F} = \bigcap_{F \in \mathbf{F}} \bar{F}$ halmaz elemeit. *Hausdorff*-tér esetén $\lim \mathbf{F} = a$-ból következik $\downarrow\mathbf{F} = a$ is. Ugyanis egy $b \neq a$ ponthoz tekintsünk egy olyan U_a környezetet, amelynek a lezártja sem tartalmazza b-t, ekkor van olyan $F \in \mathbf{F}$, amely benne van U_a-ban, és így $b \notin \downarrow\mathbf{F}$. Ha viszont volna olyan $F_1 \in \mathbf{F}$, amelynek a lezártja a-t nem tartalmazza, akkor F_1 komplementere a-nak egy olyan környezete, amely tartalmaz egy F_1-hez diszjunkt $F_2 \in \mathbf{F}$ halmazt, ami lehetetlen.

Ebből az is következik, hogy *Hausdorff*-térben bármely pont, mint bázisfilterének az érintkezési pontja, zárt halmaz.

Egy topológikus teret *kompaktnak* nevezzük, ha minden $\mathbf{F}$ filterének van érintkezési pontja, azaz $\downarrow\mathbf{F} \neq \emptyset$.

A T topológikus térnek S részhalmazában bevezethetünk egy olyan topológiát, amelyet T topológiája határoz meg, olyan módon, hogy S nyílt halmazai az $U \cap S$ metszetek lesznek, ahol U befutja T összes nyílt részhalmazát. S-nek ezt a topológiáját a T által indukált topológiának nevezzük.

Lokálisan kompaktnak nevezünk egy T teret akkor, ha minden pontjának van olyan környezete, amelynek a lezártja a T által indukált topológiában kompakt.

A T topológikus térnek egy S topológikus térbe való φ leképezését *folytonosnak* nevezzük, ha minden $a \in T$ pont esetén $\varphi(a) \in S$-nek bármely U környezetéhez van a-nak olyan $V \subseteq T$ környezete, amelyre $\varphi(V) \subseteq U$ teljesül. ($\varphi(V)$-vel jelöljük a $\varphi(v)$ $(v \in V)$ elemek halmazát). Jól ismert, hogy egy φ leképezés folytonos volta ekvivalens a következő két feltétel bármelyikével:

(4) S minden nyílt részhalmazának őse T-ben nyílt;

(5) S minden zárt részhalmazának őse zárt T-ben.

A T térnek az S térbe való ψ leképezését *nyíltnak* mondjuk, amennyiben minden $a \in T$ ponthoz és annak tetszőleges U környezetéhez van $\psi(a)$-nak olyan V környezete, amelyre fennáll $\psi(U) \supseteq V$.

Az egy-egyértelmű nyílt folytonos leképezéseket *homeomorfizmusoknak* szokták nevezni. Ezeknek szerepük topológiai vizsgálatoknál ugyanaz, mint az izomorfizmusoké az algebrában.

Egy M R-modulust *topológikus R-modulus*nak nevezzük, ha M topológikus tér, és a műveletek folytonosak, részletesen: tetszőleges $a, b \in M$ és $r \in R$ elem esetén $a-b$-nek bármely W_1 környezetéhez van a-nak olyan U_1 és b-nek olyan V_1 környezete, amelyre $u-v \in W_1$ $(u \in U_1, v \in V_1)$ teljesül, továbbá ra-nak bármely W_2 környezetéhez van r-nek olyan $U_2 \subseteq R$ és a-nak olyan V_2 környezete, amelyre fennáll $xv \in W_2$ $(x \in U_2, v \in V_2)$.

Itt hallgatólagosan feltettük, hogy R is topológikus teret alkot, ez azonban nem lényeges feltétel, mert az mindig feltehető, hogy R topológikus tér a *diszkrét* topológiában, amikoris minden halmaz — így minden pont is — nyílt.

Ennek a definíciónak megfelelően egy *topológikus csoporton* vagy *topológikus gyűrűn* olyan csoportot vagy gyűrűt értünk, amelyek topológikus teret alkotnak és amelyekben a műveletek folytonosak.

Ismert tétel, hogy egy topológikus csoport, ha *Hausdorff*-féle, akkor reguláris is. Így speciálisan a *Hausdorff*-topológiájú modulusok és gyűrűk reguláris teret alkotnak. A továbbiakban, ha topológikus térről (vagy struktúráról) lesz szó, *mindig feltételezzük, hogy a topológia Hausdorff-féle.*

Egy additív topológikus csoportban a topológiát meghatározza 0-nak egy bázisfiltere, ugyanis bármely a elemnek egy bázisfiltere ekvivalens az $\mathbf{U}_a = \{a+U\}$ bázisfilterrel, ahol U befutja 0-nak környezeteit. A továbbiakban *bázisfilteren* mindig 0-nak egy bázisfilterét értjük. Ha egy csoportban tekintünk egy olyan filtert, amelynek elemei 0-t tartalmazó részhalmazok, akkor ezáltal definiálhatunk egy topológiát, úgy hogy ezt a filtert tekintjük bázisfilternek; az összeadás azonban általában nem lesz folytonos művelet.

Az A topológikus csoportnak $\mathbf{C} = \{a_\gamma + U_\gamma\}$ filterét *Cauchy-filternek* nevezzük, ha az U_γ-k A-nak bázisfilterét alkotják. Azt mondjuk, hogy A topológiája *teljes,* ha minden *Cauchy*-filterének van érintkezési pontja. Világos, hogy kompakt csoport egyúttal teljes is.

Tekintsük az A csoportnak a B csoportra való egy-egyértelmű φ leképezését. Az előbbiek szerint annak szükséges és elégséges feltétele, hogy φ homeomorfizmus legyen az, hogy A-nak egy $\mathbf{U} = \{U\}$ bázisfilterének $\varphi(\mathbf{U}) = \{\varphi(U)\}$ képe B bázisfilterével ekvivalens filter legyen.

Egy topológikus csoport *súlyán* értjük az ekvivalens bázisfilterek számosságának a minimumát. Mivel a számosságok jólrendezett halmazt alkotnak, azért ilyen minimum mindig létezik.

Természetesen mindezek a fogalmak és megállapítások modulusokra és gyűrűkre is átvihetők, mivel ezeknek additív csoportjuk topológikus csoport.

A műveletek folytonosságának egyszerű következménye, hogy részcsoport, részmodulus, balideál, ideál lezártja szintén részcsoport, részmodulus, balideál illetve ideál.

Egy R gyűrűben jelöljük most $X \cdot Y$-nal az xy $(x \in X, y \in Y)$ alakú elemek halmazát.

3, 3. állítás. Ha A és B az R gyűrűnek két részgyűrűje, akkor fennáll $\overline{\bar{A} \cdot B} = \overline{A \cdot B}$ és $\overline{A \cdot \bar{B}} = \overline{A \cdot B}$.

Bizonyítás. Nyilvánvaló, hogy fennáll $\overline{A \cdot B} \subseteq \overline{\bar{A} \cdot B}$. Tekintsünk ezután egy $x \in \overline{\bar{A} \cdot B}$ elemet. x-nek bármely U_x környezete (3) szerint tartalmaz ab $(a \in \bar{A}, b \in B)$ alakú elemet. Mivel U_x ab-nek is környezete, azért a szorzás folytonossága miatt van a-nak olyan U_a környezete, amelyre $U_a \cdot b \subseteq U_x$ teljesül. $a \in \bar{A}$ miatt U_a-ban létezik $a_0 \in A$ elem, így $a_0 b \in U_x$. Azt kaptuk, hogy x-nek minden környezete tartalmaz $A \cdot B$-beli elemet, ezért (3) szerint $x \in \overline{A \cdot B}$. A második egyenlőség bizonyítása ugyanígy történik.

A következőkben ismertetjük a faktorstruktúrákban bevezethető topológiát, a homomorfia és izomorfia-tételek topológikus struktúrákon érvényes változatait és a komplett direkt összegben értelmezett topológiát.

Ezeket a fogalmakat és eredményeket topológikus R-modulusok esetében fogalmazzuk meg, de éppen úgy érvényesek kétoldali modulusokra, csoportokra és gyűrűkre is, azzal a különbséggel, hogy az utóbbiaknál részmodulus helyett normális részcsoportot, illetve ideált kell mondanunk.

Tekintsük az M topológikus R-modulusnak egy A részmodulusát. Ha A zárt, akkor M topológiája az M/A faktormodulusban egy olyan *Hausdorff*-topológiát indukál, amelyre vonatkozóan M/A topológikus R-modulus. Ennek az indukált topológiának egy bázisfilterét úgy kapjuk, hogy tekintjük az összes $U+A/A$ alakú részhalmazt, ahol U befutja M-nek egy bázisfilterét ($U+A/A$-n értjük az $u+A$ $(u \in U)$ mellékosztályok halmazát). Jelölje φ M-nek M/A-ra való természetes homomorfizmusát; φ nyílt-folytonos leképezés. Az A részmodulus zártsága azért lényeges kikötés, mert különben az indukált topológiában φ folytonossága miatt M/A-nak a 0 pontja nem lenne zárt halmaz, és így M/A nem lehetne *Hausdorff*-tér.

Nyílt részmodulus minden esetben zárt is, ugyanis, ha A nyílt részmodulus akkor az $\bigcup_{b \notin A} (b+A)$ nyílt halmaz komplementere éppen A. A φ természetes homomorfizmus nyílt voltának közvetlen következménye, hogy nyílt részmodulus szerinti faktormodulusban az indukált topológia diszkrét.

Ha N az M topológikus R-modulusnak a homomorf képe egy φ nyílt-folytonos homomorfizmusnál, akkor érvényes az

$$M/\mathrm{Ker}\,\varphi \cong N$$

izomorfia algebrai és topológiai értelemben. (Azon, hogy két struktúra algebrai és topológiai értelemben izomorf, azt értjük, hogy a köztük létesített leképezés izomorfizmus és homeomorfizmus, más szóval nyílt-folytonos izomorfizmus.)

Az első izomorfia-tétel így fogalmazható: legyen A és B az M topológikus R-modulusnak két zárt részmodulusa, és tegyük fel, hogy $\{A, B\}$ is zárt részmodulus. Ekkor érvényes az

$$A/A \cap B \cong \{A, B\}/B$$

izomorfia algebrai és topológiai értelemben.

Legyen M egy topológikus R-modulus és A, B $(A \subseteq B)$ zárt részmodulusok. Mivel a természetes homomorfizmusok nyílt-folytonos leképezések, azért a második izomorfia-tétel azt mondja ki, hogy fennáll az

$$M/A \Big/ B/A \cong M/B$$

izomorfia algebrai és topológiai értelemben.

Tekintsük az $M_1, \ldots, M_\alpha, \ldots$ topológikus R-modulusokat. Ezeknek a modulusoknak az $M = \sum_\alpha M_\alpha$ komplett direkt összegében bevezetjük az úgynevezett *Tyihonov-féle topológiát* a következőképpen. Tekintsünk minden M_α-ban egy U_α bázisfiltert, és jelöljük $(A_1, \ldots, A_\alpha, \ldots)$-val az $A_\alpha \subseteq M_\alpha$ halmazok *Descartes*-szorzatát. M-nek bázisfilterét alkossák azok az $U = (U_1, \ldots, U_\alpha, \ldots)$ $(U_\alpha \in \mathrm{U}_\alpha)$ halmazok, amelyekben véges kivétellel valamennyi $U_\alpha = M_\alpha$. M ebben a topológiában topológikus modulus. Ha a továbbiakban komplett direkt összegről esik szó, mindig feltételezzük, hogy az topológikus tér a *Tyihonov*-topológiával.

Kompakt R-modulusok komplett direkt összege a *Tyihonov*-topológiában kompakt. Diszkrét direkt összegre ez a tétel nem áll fenn, mivel a diszkrét direkt összeg még csak nem is alkot teljes teret sem. A diszkrét direkt összeg a *Tyihonov*-topológiával ellátott komplett direkt összegnek sűrű részhalmaza.

Legyen az M topológikus R-modulus az A és B zárt részmodulusainak algebrailag vett direkt összege. Azt mondjuk, hogy M A-nak és B-nek *topológiai értelemben* is direkt összege, ha az $A+B$ térben bevezetett *Tyihonov*-topológia ekvivalens az M-beli topológiával. Világos, hogy ennek szükséges és elegendő feltétele az, hogy $A+B$-nek tetszőleges (U, V) $(U \subseteq A, V \subseteq B)$ 0-környezetéhez van M-nek olyan W 0-környezete, amelyre $W \subseteq (U, V)$ teljesül. A és B algebrai és topológiai értelemben vett direkt összegét $A \oplus B$-vel jelöljük.

Amit itt modulusokra elmondottunk, mindaz — mint már megjegyeztük — érvényes kétoldali modulusokra, csoportokra és gyűrűkre egyaránt.

A 2, 2. állítás topológiai általánosítása a

3, 4. állítás. Ha R topológikus gyűrű és $I_1, \ldots, I_r$ R-nek olyan ideáljai, melyekre $I_1 \cap \ldots \cap I_r = 0$ és $\{I_1 \cap \ldots \cap I_{i-1}, I_i\} = R$ $(i = 2, \ldots, r)$, akkor R algebrai és topológiai értelemben izomorf az

$$R' = R/I_1 \oplus \ldots \oplus R/I_r$$

direkt összeggel.

Bizonyítás. A 2, 2. állítás szerint fennáll az izomorfia algebrai értelemben. R-nek R/I_i-re való természetes homomorfizmusa, mint tudjuk, nyílt-folytonos leképezés. Jelöljük R-nek R'-re való izomorfizmusát φ-vel, és tekintsük R'-ben 0-nak egy U' környezetét. Feltehető, hogy $U = (U_1, \ldots, U_r)$, ahol U_i R/I_i-nek 0-környezete. Válasszunk ezután R-ben egy olyan U 0-környezetet, amelyre teljesül $U + I_i/I_i \subseteq U_i$ $(i = 1, \ldots, r)$. Ez r végessége miatt megtehető. Ekkor U-ra teljesül $\varphi(U) \subseteq U'$, tehát φ folytonos leképezés. Ha U R-nek tetszőleges 0-környezete, akkor R'-nek $U' = (U+I_1/I_1, \dots, U+I_r/I_r)$ 0-környezetére nyilván teljesül $\varphi(U) \supseteq U'$, így φ nyílt leképezés. Ezzel kimutattuk, hogy φ R-nek R'-re való homeomorfizmusa. []

Gyakran előforduló fogalom lesz a továbbiakban az inverz-limesz fogalma. Ezt is csak R-modulusokra értelmezzük, de ugyanígy értelmezhető kétoldali modulusokra, csoportokra és gyűrűkre is.

Tekintsünk egy $\Gamma = \{\alpha, \beta, \dots\}$ irányított halmazt. Topologikus R-modulusok *inverz rendszerén* egy olyan Ω rendszert értünk, amely M_α $(\alpha \in \Gamma)$ topologikus R-modulusokból és olyan π^α_β $(\alpha > \beta)$ folytonos homomorfizmusokból áll, amelyek M_α-t M_β-ba képezik le, és amelyekre fennáll $\pi^\alpha_\gamma = \pi^\beta_\gamma \pi^\alpha_\beta$ $(\alpha > \beta > \gamma)$. Az inverz-rendszerre használni fogjuk az $\Omega = [M_\alpha, \pi^\alpha_\beta]$ jelölést.

Az Ω inverz-rendszer *inverz-limeszén* értjük a $\sum_{\alpha \in \Gamma} M_\alpha$ *Tyihonov*-topológiával ellátott komplett direkt összegnek azt az $M = \varprojlim \Omega$ részmodulusát, amelyet az $[x_\alpha] = (\dots, x_\alpha, \dots)$ $(\pi^\alpha_\beta x_\alpha = x_\beta, \alpha > \beta)$ alakú vektorok alkotnak. Ismeretes, hogy M a komplett direkt összegnek zárt részmodulusa. Azt a π_α folytonos homomorfizmust, amely M-et M_α-ba képezi le oly módon, hogy az $(\dots, x_\alpha, \dots) \in M$ vektorhoz az $x_\alpha \in M_\alpha$ elemet rendeli hozzá, M-nek M_α-ra való természetes homomorfizmusának nevezzük.

Azt mondjuk, hogy az M_α $(\alpha \in \Gamma)$ R-modulusoknak $\Omega = [M_\alpha, \pi^\alpha_\beta]$ inverz-rendszere az $\Omega_\lambda = [M_{\alpha\lambda}, \varrho^\alpha_{\beta\lambda}]$ inverz-rendszerek direkt összege, ha $M_\alpha = \sum_\lambda M_{\alpha\lambda}$ $(\alpha \in \Gamma)$ és $\varrho^\alpha_{\beta\lambda}$ pedig a π^α_β leképezésnek $M_{\alpha\lambda}$-ra való korlátozását jelenti. Azt a tényt, hogy Ω az Ω_λ inverz-rendszerek direkt összege, $\Omega = \sum_\lambda \Omega_\lambda$-val jelöljük.

3, 5. **állítás.** (ZELINSKY [35] Theorem 1). Érvényes az

$$\varprojlim \sum_\lambda \Omega_\lambda \cong \sum_\lambda \varprojlim \Omega_\lambda$$

izomorfia algebrai és topológiai értelemben.

Bizonyítás. $\varprojlim \sum_\lambda \Omega_\lambda$ elemei az $A = \sum_\lambda \sum_\alpha M_{\alpha\lambda}$ komplett direkt összegnek bizonyos elemei. Hasonlóan $B = \sum_\alpha \sum_\lambda M_{\alpha\lambda}$-nak bizonyos elemei alkotják $\sum_\lambda \varprojlim \Omega_\lambda$-t Minthogy A és B algebrai és topológiai értelemben izomorf, azért elegendő kimutatni, hogy ennél az izomorfizmusnál $\sum_\lambda \varprojlim \Omega_\lambda$ $\varprojlim \sum_\lambda \Omega_\lambda$-ra képeződik le. B-nek egy $[x_{\alpha\lambda}]$ vektora akkor és csak akkor tartozik $\sum_\lambda \varprojlim \Omega$-hoz, ha $\varrho^\alpha_{\beta\lambda} x_{\alpha\lambda} = x_{\beta\lambda}$ teljesül minden λ-ra és $\alpha > \beta$-ra. Másrészt egy $[x_{\alpha\lambda}] \in A$ vektor akkor és csak akkor tartozik $\varprojlim \sum_\lambda \Omega_\lambda$-hoz, ha $\pi^\alpha_\beta[x_{\alpha\lambda}] = [x_{\beta\lambda}]$ teljesül minden λ-ra. Ez viszont éppen azt jelenti, hogy $\varrho^\alpha_{\beta\lambda} x_{\alpha\lambda} = x_{\beta\lambda}$ érvényes minden λ-ra és $\alpha > \beta$-ra. []

Gyűrűk inverz-limeszére vonatkozóan szükségünk lesz a

3, 6. **állításra** (ZELINSKY [35] Lemma 3.). Radikálgyűrűk inverz-limesze is radikálgyűrű.

Bizonyítás. Legyen $R = \varprojlim [R_\alpha, \pi^\alpha_\beta]$, ahol az R_α-k radikálgyűrűk. Elegendő kimutatni, hogy R-nek minden elemének van bal-kváziinverze. Ha $[x_\alpha] \in R$, akkor a feltétel szerint minden x_α-nak van kváziinverze, azaz létezik olyan egyértelműen meghatározott $y_\alpha \in R_\alpha$ elem, amelyre fennáll $y_\alpha + x_\alpha + y_\alpha x_\alpha = 0$. Világos, hogy $\pi_\beta^\alpha y_\alpha = y_\beta \in R_\beta$ x_β-nak bal-kváziinverze, ezért $[y_\alpha] \in R\,[x_\alpha]$-nak bal-kváziinverze. []

Egy M R-modulust *lineárisan topologikusnak* nevezünk, ha van részmodulusokból álló bázisfiltere. Mivel nyílt részmodulust tartalmazó részmodulusok nyíltak, azért lineárisan topologikus R-modulusnak minden részmodulusból álló bázisfiltere nyílt részmodulusokból áll. Könnyű látni, hogy ha egy M R-modulusban kijelöljük részmodulusoknak egy **U** filterét, akkor **U**-t M bázisfilterének tekintve M-ben egy olyan topológiát vezettünk be, amelyre nézve a műveletek folytonosak is.

Már LEFSCHETZ [17] könyvében szerepel a lineárisan kompakt és lokálisan lineárisan kompakt vektortér fogalma. Egy M topologikus R-modulust *lineárisan kompaktnak* nevezünk, ha M lineárisan topologikus és M-ben minden olyan **F** filternek, amely zárt részmodulusok szerinti mellékosztályokból áll, van érintkezési pontja.

A lineárisan kompaktság feltétele a kompaktsághoz képest egyfelől erősebb kikötést tartalmaz, nevezetesen azt, hogy létezik részmodulusokból álló bázisfilter, másfelől kevesebbet tételez fel, amennyiben csak bizonyos **F** filterekről követeli meg $\downarrow \mathbf{F} \neq \emptyset$ teljesülését. Olyan R-modulusra, amely lineárisan kompakt, de nem kompakt, példaként tekintsünk egy végtelen sok elemet tartalmazó irreducibilis R-modulust a diszkrét topológiában. Erről nyilvánvaló, hogy lineárisan kompakt, másrészt viszont nem lehet kompakt a diszkrét topológiában, mivel végtelen sok elemet tartalmaz.

Lokálisan lineárisan kompaktnak nevezünk egy M R-modulust, ha M-nek van olyan $L \neq 0$ nyílt részmodulusa, amely lineárisan kompakt.

Egy R gyűrűt akkor tekintünk lineárisan kompaktnak, ha R, mint R-modulus lineárisan kompakt. Rögtön felmerül a lineáris kompaktság egy másik definíciójának a lehetősége is: R-et akkor mondjuk ideálokra nézve lineárisan kompaktnak, ha van ideálokból álló bázisfiltere és minden zárt ideálok szerinti mellékosztályokból álló filternek van érintkezési pontja. Már itt megemlítjük, hogy ez a két értelmezés két különböző gyűrűosztályt definiál (lásd a 11. § (a) részét és a 11,3 példát). Viszont közös mederben tárgyalható a két különböző típusú topológia vizsgálata. Ezt még nagyobb általánossággal a 4. §-ban fogjuk kifejteni.

Mivel a 7. §-ban alkalmazni fogjuk JACOBSON *sűrűségi tételét*, ezért a teljesség kedvéért közöljük annak topológiai megfogalmazását.

Jelöljön M egy irreducibilis R-modulust. Ismeretes, hogy M-nek R-rel felcserélhető endomorfizmusai egy K ferdetestet alkotnak. M-nek, mint K feletti vektortérnek R^* teljes endomorfizmusgyűrűjében (vagy más szóval M lineáris transzformációinak a gyűrűjében) bevezetünk egy lineáris topológiát a következőképpen: Tekintsünk véges sok $x_1, \ldots, x_n$ M-beli elemet és ezekhez alkossuk meg az

$$L = L(x_1, \ldots, x_n) = \{r \in R \mid rx_1 = \ldots = rx_n = 0\}$$

balideált. Az összes ilyen L balideál nyilván egy filtert alkot, és ezt tekintsük R^* bázisfilterének. JACOBSON sűrűségi tétele így szól:

3, 7. tétel ([8] 31. oldal, Density Theorem for Irreducible Modules). *R sűrű részgyűrűje az R^* gyűrűnek.*

A 8. §-ban a lokálisan lineárisan kompakt primitív gyűrűkről kimutatjuk, hogy ezek éppen a minimális balideállal rendelkező primitív gyűrűk. Ez utóbbiaknak igen szép leírását adja JACOBSON struktúra-tétele. A megfogalmazáshoz bevezetjük a véges rangú lineáris transzformáció fogalmát. Egy vektortér φ lineáris transzformációját *véges rangúnak* nevezzük, ha Im φ véges dimenziós vektortér.

3, 8. tétel ([8] 75. oldal, Structure Theorem (1) és (2) része). *Egy R gyűrű akkor és csak akkor minimális balideált tartalmazó primitív gyűrű, ha R egy ferdetest feletti vektortér teljes endomorfizmus-gyűrűjének olyan sűrű részgyűrűje, amely tartalmaz véges rangú lineáris transzformációt.*

A 2, 7. definíciónak megfelelően bevezetjük a topológikusan egyszerű gyűrű fogalmát.

3, 9. definíció. Egy R topológikus gyűrűt *topológikusan egyszerűnek* nevezünk, ha csak triviális zárt ideáljai vannak és radikálja 0.

E szerint tehát egy topológikusan egyszerű gyűrű mindig féligegyszerű.

Végül ismertetjük ideálok transzfinit nilpotenciájának a fogalmát. Az itt ismertetett definíció a nilpotenciának LEPTINtől [18] származó általánosítása. A III. részben tulajdonképpen a transzfinit nilpotens gyűrűket vizsgáljuk, és bizonyos topológikus feltételek mellett ezek éppen a radikálgyűrűk lesznek.

Tekintsünk egy R topológikus gyűrűt és R-ben egy A ideált. Definiáljuk R-ben az A_μ és $\underset{\mu}{A}$ ideálokat a következő módon. Legyen

$$A_0 = A \qquad \underset{0}{A} = A$$

$$A_{\mu+1} = \overline{A_\mu \cdot A} \qquad \underset{\mu+1}{A} = \overline{\underset{\mu}{A} \cdot \underset{\mu}{A}}$$

$$A_\lambda = \bigcap_{\mu<\lambda} A_\mu \qquad \underset{\lambda}{A} = \bigcap_{\lambda<\lambda} \underset{\mu}{A}, \quad \text{ha } \lambda \text{ limeszszám.}$$

Ilyen módon ideáloknak két leszálló láncához jutunk. Legyen ζ egy olyan rögzített rendszám, hogy a nála kisebb rendszámok számossága nagyobb legyen R számosságánál. Ekkor létezik egy olyan $\alpha<\zeta$ rendszám, amelyre $A_\mu = A_\alpha$ minden $\mu>\alpha$ rendszámra, így fennáll $A_\mu = A_\zeta$ is. Hasonlóan teljesülnie kell $\underset{\mu}{A} = \underset{\zeta}{A}$-nek is minden $\mu>\zeta$-ra. Vezessük be az $A_* = A_\zeta$ és $\underset{*}{A} = \underset{\zeta}{A}$ jelölést. A_* és $\underset{*}{A}$ olyan zárt ideál, amelyre teljesül

$$\overline{A_* \cdot A} = A_*, \quad \overline{\underset{*}{A} \cdot \underset{*}{A}} = \underset{*}{A}.$$

Az A ideált *transzfinit r-nilpotens*nek nevezzük, ha $A_* = 0$, és transzfinit nilpotensnek, ha $\underset{*}{A} = 0$. A transzfinit jelzőt el fogjuk hagyni és röviden *r-nilpotens* és *t-nilpotens* ideálokról beszélünk. Minthogy $\underset{*}{A} \subseteq A_*$, azért egy r-nilpotens ideál mindig t-nilpotens is. Leggyakrabban azzal az esettel lesz dolgunk, amikor $R = A$, ilyenkor a gyűrűt r-nilpotensnek, illetve t-nilpotensnek nevezzük, ha $R_* = 0$, illetőleg $\underset{*}{R} = 0$.

Ezeket a fogalmakat minden gyűrűben értelmezhetjük, mert a diszkrét topológiában valamennyi gyűrű topológikus gyűrű.

4. §. Lineárisan kompakt modulusok topológiai tulajdonságai

Ebben a §-ban célunk a lineárisan kompakt topológiának általánosítása, és ennek az általánosított fogalomnak topológiai vizsgálata.

Tekintsünk e végből egy R gyűrű feletti M balmodulust, és tegyük fel, hogy M-nek van egy S jobboperátortartománya, amelynek elemei R elemeivel felcserélhető operátorok, azaz bármely $r \in R$ és $s \in S$ operátor esetén teljesül $(rm)s = r(ms)$ minden $m \in M$ elemre. Vizsgálatainkban az S operátortartományra nézve a következő speciális esetek fognak fellépni:

a) S az üres halmaz, azaz M csupán R-modulus.

b) $S = R$. Ez a helyzet áll elő, ha M az R gyűrűnek ideálja, homomorf képe, vagy ilyenek a direkt összegei.

c) S ferdetest, M az S ferdetest feletti vektortér, és R M lineáris transzformációinak egy gyűrűje.

4, 1. definíció. Az M topologikus (R, S)-modulus topológiáját *lineáris*nak nevezzük, ha van kétoldali részmodulusokból álló bázisfiltere.

4, 2. definíció. Az M (R, S)-modulust *lineárisan kompakt*nak nevezzük, ha topológiája lineáris és minden olyan filternek, amely zárt kétoldali részmodulusok szerinti mellékosztályokból áll, van érintkezési pontja.

Tekintsünk egy R topologikus gyűrűt, mint önmaga feletti balmodulust és mint az üres halmaz feletti jobbmodulust. A 4, 2. definíció most gyűrű lineáris kompaktságának a szokásos definícióját adja. Ha viszont R-et, mint (R, R)-modulust tekintjük, akkor a 4, 1. definícióban az előzőkhöz képest erősebb kikötéssel élünk, nevezetesen azzal, hogy R-nek létezzék ideálokból álló bázisfiltere. Ezzel szemben most kevesebb filtertől kívánjuk meg azt, hogy legyen érintkezési pontja. Ha R-ben ilyen értelemben teljesülnek a 4, 2. definíció feltételei, akkor azt mondjuk, hogy *R ideálokra nézve lineárisan kompakt*. Később látni fogjuk, hogy a lineárisan kompakt gyűrűk osztálya különbözik az ideálokra nézve lineárisan kompakt gyűrűk osztályától.

A lineáris kompaktság fogalmát még általánosabban is definiálhatnánk oly módon, hogy tekintjük a topologikus-modulusoknak és folytonos homomorfizmusaiknak a kategóriáját. Minden M modulushoz hozzárendeljük additív részcsoportjainak egy $\mathcal{T}_M$ rendszerét, úgy hogy teljesüljenek az alábbi feltételek:

1. $M \in \mathcal{T}_M$;
2. ha $G_1 \subseteqq \ldots \subseteqq G_\alpha \subseteqq \ldots$ $\mathcal{T}_M$-beli részcsoportok növekvő lánca, akkor $\bigcup_\alpha G_\alpha \in \mathcal{T}_M$;
3. ha $G, H \in \mathcal{T}_M$ akkor $G \cap H \in \mathcal{T}_G$;
4. ha φ olyan folytonos homomorfizmus, amelyre $\mathrm{Ker}\,\varphi \in \mathcal{T}_M$, akkor $\mathcal{T}_{\mathrm{Im}\,\varphi} = \varphi(\mathcal{T}_M)$, ahol $\varphi(\mathcal{T}_M)$ jelenti a $\varphi(A)$ $(A \in \mathcal{T}_M)$ részcsoportok halmazát;
5. $\mathcal{T}_{M \oplus N} = \mathcal{T}_M \oplus \mathcal{T}_N$, ahol $\mathcal{T}_M \oplus \mathcal{T}_N$ jelenti $M \oplus N$-nek $A \oplus B (A \in \mathcal{T}_M,\ B \in \mathcal{T}_N)$ alakú részcsoportjainak a halmazát.

Egy M modulust $\mathcal{T}$-re vonatkozóan lineárisan topologikusnak nevezünk, ha van $\mathcal{T}_M$-beli részcsoportokból álló környezetbázisa. Azt mondjuk, hogy M $\mathcal{T}$-re vonatkozóan lineárisan kompakt, ha $\mathcal{T}$-re vonatkozóan lineárisan topologikus és minden $\mathcal{T}_M$-beli zárt részcsoportok szerinti mellékosztályokból álló F filtere $\downarrow F \neq \emptyset$.

Jelentse $\mathcal{T}_M$ egy M (R, S)-modulus összes részmodulusát. Most teljesülnek az 1—5. feltételek, és ebben az esetben éppen a 4, 1, és 4, 2. definíciót kapjuk.

Érdekes lenne vizsgálni a lineáris kompaktságnak azt a gyűrűelméleti esetét, amikor $\mathcal{T}_R$ jelenti a gyűrű kváziideáljainak a halmazát, és a gyűrű erre a tulajdonságra nézve lineárisan kompakt. A következő tételek bizonyíthatók lennének csupán az 1—5. axiómák felhasználásával, ez azonban a tárgyalást nehézkessé tenné. Minthogy vizsgálatainkban csak a 4, 2. definíció speciális eseteire lesz szükség, azért a tételeket ennek megfelelően mondjuk ki és bizonyítjuk be.

Bebizonyítunk néhány alapvető tételt a lineárisan kompakt kétoldali modulusokra vonatkozóan. Ezek a tételek ZELINSKY [35], [36] és LEPTIN [18] által balmodulusokra bizonyított tételek általánosításai, teljesen analóg bizonyításokkal. A teljesség kedvéért közöljük a bizonyításokat.

Mivel minden nyílt részmodulus egyúttal zárt is, azért a 4, 2. definíció alapján közvetlenül adódik, hogy egy lineárisan kompakt (R, S)-modulusban minden *Cauchy*-filternek van érintkezési pontja. Ezért érvényes a

4, 3. állítás. *Minden lineárisan kompakt (R, S)-modulus teljes.*

4, 4. állítás. *Ha egy M modulus topológiája lineáris és a zárt kétoldali részmodulusokra teljesül a minimumfeltétel, akkor M diszkrét és lineárisan kompakt.*

Mivel minden nyílt részmodulus egyúttal zárt is, azért M bázisfiltere tartalmaz minimális kétoldali részmodulust. M *Hausdorff*-tér, ez csak úgy lehetséges, ha 0 nyílt részmodulus, vagyis M diszkrét.

Legyen $\mathbf{F}=\{a_\lambda+V_\lambda\}$ egy zárt kétoldali részmodulusok szerinti mellékosztályokból álló filter, ahol V_λ jelöli a szóban forgó részmodulusokat. A feltétel szerint a V_λ-k között van minimális, legyen ez V_{λ_0}. Ekkor fennáll $\emptyset\neq a_{\lambda_0}+V_{\lambda_0}\subseteqq\downarrow\mathbf{F}$. []

A 4, 4. állítás azt mutatja, hogy a lineárisan kompaktság feltétele általánosítása a minimumfeltételnek.

4, 5. állítás. *Az M lineárisan kompakt (R, S)-modulusnak bármely G zárt kétoldali részmodulusa lineárisan kompakt.*

Ha $\mathbf{U}=\{U_\lambda\}$ M-nek részmodulusokból álló bázisfiltere, akkor világos, hogy $\mathbf{V}=\{U_\lambda\cap G\}$ G-nek részmodulusokból álló bázisfiltere. Az M által indukált topológia tehát lineáris. A további állítás nyilvánvaló. []

4, 6. állítás. *Ha az M (R, S)-modulus lineárisan topologikus, akkor bármely N lineárisan kompakt részmodulusa zárt.*

Legyen $a\in\bar{N}$ tetszőleges pont és jelölje $\mathbf{U}=\{U_\lambda\}$ M-nek részmodulusokból álló bázisfilterét. Ekkor a-nak minden $a+U_\lambda$ környezete tartalmaz N-beli elemet, tehát $(a+U_\lambda)\cap N$ nem üres és így az $\mathbf{F}=\{(a+U_\lambda)\cap N\}$ halmaz filtert alkot. Jelöljön a_λ egy, a továbbiakban rögzített elemet $(a+U_\lambda)\cap N$-ből és $b_\lambda\big(\in(a+U_\lambda)\cap N\big)$ egy további elemet. Mindenek előtt világos

$$a_\lambda+(U_\lambda\cap N)\subseteqq(a+U_\lambda)\cap N.$$

Mivel $b_\lambda-a_\lambda\in U_\lambda\cap N$, azért $b_\lambda\in a_\lambda+(U_\lambda\cap N)$, tehát

$$a_\lambda+(U_\lambda\cap N)\supseteqq(a_\lambda+U_\lambda)\cap N$$

is fennáll. E két tartalmazás azt mutatja, hogy az $\mathbf{F}$ filter elemei N-ben zárt részhalmazok szerinti mellékosztályok. Így N lineáris kompaktsága miatt $\downarrow\mathbf{F}\neq\emptyset$. De mivel $\mathbf{U}$ bázisfilter, ezért ez csak úgy lehetséges, ha $a\in\downarrow\mathbf{F}$, amiből $a\in N$ következik. N tehát valóban zárt. []

4, 7. állítás. *Jelölje φ az M lineárisan kompakt (R, S)-modulusnak az N lineárisan topológikus (R, S)-modulusba való folytonos homomorfizmusát. Ekkor* Im φ *lineárisan kompakt modulus.*

Mivel Im φ N-nek részmodulusa, azért Im φ-ben az N által indukált topológia nyilván lineáris.

Tekintsünk ezután egy olyan $\mathbf{F}^* = \{F_\lambda\}$ filtert Im φ-ben, amelynek elemei zárt részmodulusok szerinti mellékosztályok. A φ leképezés folytonossága miatt $\mathbf{F} = \{\varphi^{-1}(F_\lambda)\}$ zárt részmodulusok szerinti mellékosztályokból álló filter, ezért a feltétel szerint $\downarrow\mathbf{F} \neq 0$, következőleg $0 \neq \varphi(\downarrow\mathbf{F}) \subseteq \downarrow\mathbf{F}^*$. []

4, 8. állítás. *Legyen A és B az M lineárisan kompakt (R, S)-modulusnak zárt kétoldali részmodulusa. Ekkor az A és B által algebrailag generált $\{A, B\}$ részmodulus zárt M-ben.*

Legyen φ az M-nek M/A-ra való természetes homomorfizmusa. Tekintsük M/A-nak egy $\mathbf{V} = \{V_\lambda\}$ részmodulusokból álló bázisfilterét. $\mathbf{W} = \{V_\lambda \cap \varphi(B)\}$ $\varphi(B)$ $(\subseteq \subseteq M/A)$-nak bázisfiltere. Nyilvánvaló, hogy $\mathbf{W}$ elemei kétoldali részmodulusok és így $\varphi(B)$-ben a topológia lineáris. A 4, 5. állítás miatt B lineárisan kompakt, ezért a 4, 7. állítás következtében $\varphi(B)$ is lineárisan kompakt. Így a 4, 6. állítás szerint $\varphi(B)$ zárt M/A-ban, φ folytonossága miatt pedig $\varphi^{-1}(\varphi(B)) = \{A, B\}$ M-nek zárt részmodulusa. []

4, 9. állítás. *Legyen N zárt kétoldali részmodulus az M lineárisan topológikus (R, S)-modulusban. Ha N és M/N lineárisan kompakt modulusok, akkor M is lineárisan kompakt.*

Jelölje φ M-nek M/N-re való természetes homomorfizmusát és legyen $\mathbf{F} = \{F_\lambda\}$ M-ben egy zárt részmodulusok szerinti mellékosztályokból álló filter. Ekkor $\varphi(\mathbf{F}) = \{\varphi(F_\lambda)\}$ M/N-ben zárt részmodulusok szerinti mellékosztályokból álló filter, és így a feltétel szerint van olyan $x \in M$ elem, amelyre $\varphi(x) \in \downarrow\varphi(\mathbf{F})$ teljesül. Következőleg $x \in \bigcap(F_\lambda + N)$ és így minden λ-hoz van olyan $f_\lambda \in F_\lambda$ elem, amelyre $f_\lambda - x \in N$ érvényes. Ezért $\mathbf{E} = \{(F_\lambda - x) \cap N\}$ nem üres, zárt részmodulusok szerinti mellékosztályokból álló filter N-ben. A feltétel szerint van olyan $y \in N$ elem, amelyre $y \in \downarrow\mathbf{E}$. Ekkor nyilvánvaló, hogy fennáll $x + y \in \downarrow\mathbf{F}$. []

Emlékeztetünk arra, hogy egy M (R, S)-modulus talpán a minimális kétoldali részmodulusok által algebrailag generált B részmodulust értjük, illetve a 0 modulust, amennyiben M-nek nincs minimális részmodulusa.

4, 10. állítás. *Egy M diszkrét lineárisan kompakt (R, S)-modulus talpa véges sok minimális részmodulus direkt összege.*

Tegyük fel, hogy az $A_1, \ldots, A_r$ minimális kétoldali részmodulusok által generált B_r részmodulus ezeknek a direkt összege, $B_r = A_1 + \ldots + A_r$. Ha B_r tartalmazza M összes minimális kétoldali részmodulusát, akkor készen vagyunk. Ha létezik egy A_{r+1} minimális kétoldali részmodulus, amely nincs benne B_r-ben, akkor $A_{r+1} \cap B_r = 0$ és $B_{r+1} = B_r + A_{r+1}$ direkt összeg. Folytassuk ezt az eljárást és tegyük fel, hogy nem szakad meg véges sok lépésben. Legyen $B = A_1 + A_2 + \ldots$ az A_i-ik diszkrét direkt összege. Tekintsük minden n természetes számhoz az $U_n = A_{n+1} + A_{n+2} + \ldots$ részmodulust. Válasszunk ki minden A_i-ből egy $x_i \neq 0$ elemet. Ekkor az $\mathbf{F} = \{x_1 + \ldots + x_n + U_n\}$ halmaz nyilván filtert alkot és mivel M diszkrét, azért zárt részmodulusok szerinti mellékosztályokból álló filterről van szó. M lineárisan kompakt volta miatt a 4, 5. állítás következtében B is lineárisan kompakt, ezért fennáll $x_1+x_2+\ldots \in \downarrow \mathbf{F} \subseteq B$. Másrészt B elemei csak véges sok nullától különböző komponenst tartalmazhatnak, így ellentmondáshoz jutottunk. []

4, 11. állítás. *Legyenek $M_1, \ldots, M_\alpha, \ldots$ lineárisan kompakt (R, S)-modulusok. Ekkor az $M=\sum_\alpha M_\alpha$ komplett direkt összeg a Tyihonov-féle topológiában lineárisan kompakt.*

Nyilvánvaló, hogy M a *Tyihonov*-topológiában lineárisan topologikus. Arra vonatkozóan, hogy M lineárisan kompakt is, a tankönyvekre hivatkozunk (BOURBAKI [2] I. 10. § 3. tétel, LEFSCHETZ [17] (I. 24, 1)).

4, 12. állítás. *Ha $\Omega=[M_\alpha, \pi^\alpha_\beta]$ lineárisan kompakt (R, S)-modulusok inverz-rendszere, akkor $M=\varprojlim \Omega$ is lineárisan kompakt.*

Ismeretes ([17] (I. 38, 2)), hogy ha $\mathbf{U}_\alpha=\{U_{\alpha\lambda}\}$ M_α-nak kétoldali részmodulusokból álló bázisfiltere, akkor a

$$V_{\alpha\lambda}=\{x\in M \mid \pi_\alpha x\in U_{\alpha\lambda}\}$$

halmazok M-nek egy részmodulusokból álló bázisfilterét alkotja. M-ben tehát a topológia lineáris.

LEFSCHETZ [17] (I. 38, 3) szerint M zárt részhalmaza a $\sum_\alpha M_\alpha$ komplett direkt összegnek, amely a 4, 11. állítás szerint lineárisan kompakt. Alkalmazva a 4, 5. állítást, azt nyerjük, hogy M is lineárisan kompakt. []

Legyen M egy lineárisan topologikus (R, S)-modulus, és tekintsük M-nek egy részmodulusokból álló $\mathbf{U}=\{U_\alpha\}$ bázisfilterét. Jelölje π_α M-nek $M_\alpha=M/U_\alpha$-ra való természetes homomorfizmusát. Mivel U_α nyílt, azért M/U_α a π_α által indukált topológiában diszkrét (R, S)-modulus. Definiáljunk az indexek között egy részbenrendezést úgy, hogy $\alpha>\beta$ akkor és csak akkor álljon fenn, ha $U_\alpha\subset U_\beta$ és tekintsük minden $\alpha>\beta$ indexpárra a $\pi^\alpha_\beta=\pi_\beta\pi_\alpha^{-1}$ leképezését. Világos, hogy π^α_β éppen M_α-nak M_β-ra való természetes homomorfizmusa. Az $\Omega=[M_\alpha, \pi^\alpha_\beta]$ rendszer (R, S)-modulusoknak egy inverz-rendszerét alkotja.

4, 13. állítás. *A fenti jelölések mellett, ha M teljes, akkor algebrailag és topológiailag izomorf $\varprojlim \Omega$-val.*

A $\varphi(x)=(\ldots, x_\alpha, \ldots)$ $(x\in M,\ x_\alpha\in M_\alpha)$ leképezések M-nek $\varprojlim \Omega$-ba való homomorfizmusa. A φ leképezés egy-egyértelmű is, mert $\varphi(x)=0$-ból $x\in\bigcap_\alpha U_\alpha=0$ következik. φ M-et $\varprojlim \Omega$-ra képezi le, mert ha $(\ldots, y_\alpha, \ldots)\in \varprojlim \Omega$ $(y_\alpha\in M_\alpha)$, akkor válasszuk az x_α $(\in M_\alpha)$ elemet úgy, hogy $\pi_\alpha x_\alpha=y_\alpha$ fennálljon. Tekintsük M-ben a $\mathbf{C}=\{x_\alpha+U_\alpha\}$ filtert. Mivel $\mathbf{U}=\{U_\alpha\}$ bázisfilter, ezért $\mathbf{C}$ Cauchy-filter, és így M teljessége miatt létezik egy (és csakis egy) $x\in\downarrow\mathbf{C}$ elem. Erre az x-re pedig érvényes $\varphi(x)=(\ldots, y_\alpha, \ldots)$. A φ leképezés az U_α-t éppen $V_\alpha=\{(\ldots, y_\beta, \ldots)\in \varprojlim \Omega \mid y_\alpha=0\}$-ba viszi. Mivel minden M_α diszkrét, azért $\mathbf{V}=\{V_\alpha\}$ $\varprojlim \Omega$-nak bázisfiltere. φ tehát az $\mathbf{U}$ bázisfiltert egy-egyértelműen a $\mathbf{V}$ bázisfilterre képezi le, ezért mindkét irányban folytonos. []

4, 14. állítás. *Ha $\tilde{M}$ az M topologikus (R, S)-modulus teljes burka és $\mathbf{U}=\{U_\alpha\}$ M-nek részmodulusokból álló bázisfiltere, akkor $\tilde{M}$ algebrailag és topológiailag izomorf* $\varprojlim [M/U_\alpha, \pi_\beta^\alpha]$*-val.*

Jelölje $\tilde{U}$ az U részmodulus lezártját $\tilde{M}$-ban. Világos, hogy $\tilde{\mathbf{U}}=\{\tilde{U}_\alpha\}$ $\tilde{M}$-nak részmodulusokból álló bázisfiltere. A 4, 13. állítás következtében elegendő kimutatnunk, hogy fennáll az $\tilde{M}/\tilde{U}\cong M/U$ izomorfia tetszőleges U nyílt részmodulus esetén.

Egy U részmodulus lezártja M-ben nyilván $\tilde{U}\cap M$. Mivel U nyílt és így zárt is, azért $U=\tilde{U}\cap M$. Ezért minden $r+U$ $(\in M/U)$ mellékosztály, mint halmaz, benne van egy olyan $\tilde{r}+\tilde{U}$ $(\in \tilde{M}/\tilde{U})$ mellékosztályban, amely tartalmaz M-beli elemet. Másrészt $\tilde{U}$ nyílt, M pedig $\tilde{M}$-nak sűrű részhalmaza, ezért minden $\tilde{r}+\tilde{U}$ mellékosztály tartalmaz egy $r+U$ mellékosztályt. Ha viszont $r+U, s+U\in\tilde{r}+\tilde{U}$, akkor $r+\tilde{U}=s+\tilde{U}$ és $r-s\in\tilde{U}\cap M=U$, tehát $r+U=s+U$. Így minden $\tilde{r}+\tilde{U}$ mellékosztály egy és csakis egy $r+U$ mellékosztályt tartalmaz, tehát valóban $\tilde{M}/\tilde{U}\cong M/U$.[]

4, 15. állítás. *Legyen M lineárisan kompakt (R, S)-modulus a τ topológiában. Létezik olyan $\tau^*(\geqq\tau)$ topológia, amelyben M lineárisan kompakt, és M-nek minden $\tau'(\geqq\tau)$ lineárisan kompakt topológiájára $\tau'\leqq\tau^*$ érvényes. M-nek τ-zárt kétoldali részmodulusai τ^*-zártak is. A τ^* topológiát jellemzi az a tulajdonság, hogy benne minden olyan zárt kétoldali részmodulusokból álló $\mathbf{A}$ filter, amelyre $\downarrow\mathbf{A}=0$, 0-hoz konvergál, vagyis* $\lim \mathbf{A}=0$.

Legyen $\mathbf{U}$ M nyílt kétoldali részmodulusainak a halmaza a τ topológiában. Ha $U\in\mathbf{U}$ és $x\notin U$, akkor a *Kuratowski—Zorn* lemma szerint van olyan maximális U^* kétoldali részmodulus, amely tartalmazza U-t, de nem tartalmazza x-et. Jelölje (x) az összes x-et tartalmazó kétoldali részmodulus metszetét. Ha B egy U^*-ot valódi módon tartalmazó kétoldali részmodulus, akkor $(x)+U^*\subseteqq B$. Ezért $(x)+U^*$ minimális U^*-ot valódi módon tartalmazó kétoldali részmodulus. Alkossuk meg az összes U^* által generált $\mathbf{U}^*$ filtert. Mivel minden $U\in\mathbf{U}$ bizonyos $U^*(\in\mathbf{U}^*)$-ok metszete, azért $\mathbf{U}$ bázisfilter volta miatt $\downarrow\mathbf{U}^*=0$. Válasszuk $\mathbf{U}^*$-ot M-ben a τ^* topológia bázisfilterének. Világos, hogy M ebben a topológiában lineárisan topologikus. Az is világos, hogy τ^* τ-nál durvább topológia. Ha C M-nek τ-zárt kétoldali részmodulusa, akkor könnyű látni, hogy C előállítható $\mathbf{U}$-beli részmodulusok metszeteként. Ugyanis ha $x\notin C$, akkor az M tér regularitása miatt van olyan $U\in\mathbf{U}$ részmodulus, hogy $x\notin C+U$. Következőleg $C=\bigcap_{U\in\mathbf{U}}(C+U)$. Mivel U-val együtt $C+U$ is nyílt kétoldali részmodulus, azért $C+U\in\mathbf{U}$ és C valóban előáll a kívánt metszetként. Mivel minden $\mathbf{U}$-beli részmodulus előáll $\mathbf{U}^*$-beli részmodulusok metszeteként, azért C is előáll $\mathbf{U}^*$-beli részmodulusok metszeteként. Ebből következik, hogy C a τ^* topológiában is zárt. Ez egyúttal azt is jelenti, hogy egy $\mathbf{F}$ filterre, amely zárt részmodulusok szerinti mellékosztályokból áll, $\downarrow\mathbf{F}$ mind a τ, mind a τ^* topológiában ugyanazt jelenti, ezért M a τ^* topológiában is lineárisan kompakt.

Most kimutatjuk, hogy bármely $\mathbf{A}$ zárt kétoldali részmodulusból álló filterre a τ^* topológiában $\downarrow\mathbf{A}=0$-ból $\lim\mathbf{A}=0$ következik. Legyen U^* az $\mathbf{U}^*$ bázisfilternek egy eleme. Az előzőek alapján U^* előáll véges sok olyan U_i^* $(\in\mathbf{U}^*)$ részmodulus metszeteként, amelyekhez egyetlen minimális, őket tartalmazó C_i kétoldali részmodulus tartozik. Tekintsük az $\bigcap_{A\in\mathbf{A}}(A+U_i^*)$ metszetet. Ha $x\in\bigcap_{A\in\mathbf{A}}(A+U_i^*)$, akkor x eleme egy u_i+A $(u_i\in U_i^*)$ mellékosztálynak. Mivel $x+A=u_i+A$, és így

$(u_i+A)\cap U_i^*=(x+A)\cap U_i^*$, azért

$$(x+A)\cap U_i^*=(u_i+A)\cap U_i^*=u_i+(A+U_i^*)$$

érvényes. Így $\mathbf{D}=\{(x+A)\cap U_i^*\}_{A\in\mathbf{A}}$ U_i^*-ban zárt kétoldali részmodulusok szerinti mellékosztályokból álló filter. Minthogy U_i^* nyílt és így zárt is, azért a 4, 5. állítás szerint lineárisan kompakt, tehát van olyan $u_0\in U_i^*$ elem, amelyre $u_0\in\downarrow\mathbf{D}=$ $=\bigcap_{A\in\mathbf{A}}(x+A)\cap U_i^*$. Ebből $u_0\in x+A$ következik minden $A\in\mathbf{A}$-ra, azaz $x-u_0\in\bigcap_{A\in\mathbf{A}}A=0$, és így $x\in U_i^*$. Tehát érvényes a $\bigcap_{A\in\mathbf{A}}(A+U_i^*)\subseteqq U_i^*$ tartalmazás. Másrészt világos, hogy érvényes a fordított irányú tartalmazás is, ezért $\bigcap_{A\in\mathbf{A}}(A+U_i^*)=U_i^*$.

Ha minden $A\in\mathbf{A}$-ra $A+U_i^*\neq U_i^*$ állna fenn, akkor ebből $C_i\subseteqq\bigcap_{A\in\mathbf{A}}(A+U_i^*)=$ $=U_i^*\subset C_i$ következne, ami ellentmondás. Ezért valamilyen A-ra érvényes $A+U_i^*=U_i^*$, azaz $A\subseteqq U_i^*$. Válasszuk ezután $A_0(\in\mathbf{A})$-t úgy, hogy A_0 legyen benne minden U_i^*-hoz tartozó A-ban. Az U_i^*-ok véges száma miatt ilyen A_0 létezik. Ekkor fennáll $A_0\subseteqq\bigcap_{i=1}^{n}U_i^*=U^*$, tehát valóban $\lim\mathbf{A}=0$.

Legyen most τ' a τ-nál durvább lineárisan kompakt topológia, és $\mathbf{U}'$ τ'-nek egy részmodulusokból álló bázisfiltere. $\mathbf{U}'$ elemei nyilván τ-zártak is, és így az előzőek szerint τ^*-zártak is. Ezért $\downarrow\mathbf{U}'=0$-ból a τ^*-topológiában $\lim\mathbf{U}'=0$ következik, azaz $\tau'\leqq\tau^*$.

Legyen τ_1 olyan τ-nál durvább lineárisan kompakt topológia, amelyben minden $\mathbf{A}$ zárt kétoldali részmodulusokból álló filter esetén $\downarrow\mathbf{A}=0$-ból $\lim\mathbf{A}=0$ következik. Ha $\mathbf{U}^*$ jelöli a τ^* topológiának egy kétoldali részmodulusokból álló bázisfilterét, akkor ennek elemei nyilván τ_1-zártak, és $\downarrow\mathbf{U}^*=0$ miatt τ_1-ben $\lim\mathbf{U}^*=0$ érvényes, vagyis $\tau^*\leqq\tau_1$. []

4, 16. állítás. *Legyen N az M lineárisan kompakt (R, S)-modulusnak zárt kétoldali részmodulusa. M legdurvább lineárisan kompakt topológiája N-ben legdurvább lineárisan kompakt topológiát indukál.*

Ha ugyanis $\mathbf{A}$ olyan zárt kétoldali részmodulusokból álló filter, amelyre érvényes $\downarrow\mathbf{A}=0$, akkor M legdurvább topológiájában $\lim\mathbf{A}=0$, és így az indukált topológiában is hasonló igaz. Ezért a 4, 15. állítás szerint ez legdurvább lineárisan kompakt topológia. []

4, 17. állítás. *Legyen φ az M lineárisan kompakt (R, S)-modulusnak az N lineárisan kompakt (R, S)-modulusba való folytonos homomorfizmusa. Tegyük fel, hogy N-ben a topológia a legdurvább lineárisan kompakt topológia. φ M legdurvább τ^* lineárisan kompakt topológiájára nézve is folytonos.*

A 4, 16. állítás szerint $\operatorname{Im}\varphi$-ben a topológia a legdurvább lineárisan kompakt topológia. Elegendő azt kimutatnunk, hogy ha $V\subseteqq\operatorname{Im}\varphi$ nyílt kétoldali részmodulus, akkor $U=\varphi^{-1}(V)$ is nyílt M-ben a τ^* topológia szerint.

Világos, hogy U τ-nyílt kétoldali részmodulus. A 4, 15. állítás szerint U τ^*-zárt is. Mivel algebrai értelemben érvényes az $M/U\cong\operatorname{Im}\varphi/V$ izomorfia és V a feltétel szerint véges sok olyan $V_i\subseteqq\operatorname{Im}\varphi$ nyílt kétoldali részmodulus metszete, amelyekhez van minimális őket tartalmazó kétoldali részmodulus, azért hasonló igaz U-ra is, következőleg U τ^*-nyílt. []

Az alábbi definíció és a következő tételek szintén LEPTIN [18] és [19] dolgozata alapján jöttek létre. Igen fontosnak bizonyul a továbbiakban a következő

4, 18. definíció. *Az M (R, S)-modulust szűkebb értelemben lineárisan kompaktnak nevezzük, ha M lineárisan kompakt és minden nyílt kétoldali részmodulusához létezik minimális, őt valódi módon tartalmazó kétoldali részmodulusa.*

Vizsgálatainkban a szűkebb értelemben lineárisan kompakt modulusoknak két speciális esete fog szerepelni. Az egyik az $S=\emptyset$ eset, ekkor a LEPTIN által bevezetett és vizsgált szűkebb értelemben lineárisan kompakt modulusokat kapjuk. Ezeket a modulusokat *L-kompakt modulusok*nak fogjuk nevezni. A másik fontos eset az $S=R$ esethez tartozik; ebben az esetben röviden *K-kompakt modulusok*ról fogunk beszélni.

Egy R gyűrűt L-kompaktnak, illetve K-kompaktnak nevezünk, ha mint R-modulus, illetve (R, R)-modulus L-kompakt, illetve K-kompakt.

A szűkebb értelemben lineárisan kompakt (R, S)-modulusok többféleképpen jellemezhetők. Látni fogjuk, hogy egy szűkebb értelemben lineárisan kompakt modulusban a topológia mindig a legdurvább. Nem igaz azonban a megfordítás, vagyis egy lineárisan kompakt modulus a legdurvább lineárisan kompakt topológiában nem szükségképpen szűkebb értelemben lineárisan kompakt. (Erre vonatkozóan LEPTIN [18] 248. oldalára utalunk.)

4, 19. állítás. *Egy M (R, S)-modulusra a következő állítások ekvivalensek:*

(I) *M szűkebb értelemben lineárisan kompakt;*

(II) *M topológiája teljes és kielégíti az alábbi feltételek valamelyikét:*

(i) *M-nek bármely olyan φ folytonos homomorfizmusa, amelyre* Im φ *lineárisan topologikus, nyílt;*

(ii) *M-nek bármely olyan φ folytonos homomorfizmusa, amelyre* Im φ *lineárisan topologikus, olyan, hogy* Im φ*-ben a topológia a legdurvább lineáris topológia;*

(iii) *M-nek bármely nyílt U kétoldali részmodulusa szerinti faktormodulusában teljesül a kétoldali részmodulusok minimumfeltétele;*

(III) *M olyan $[M_\alpha, \pi^\alpha_\beta]$ rendszer inverz-limesze, amelyben az M_α-k diszkrétek és eleget tesznek a kétoldali részmodulusok minimumfeltételének.*

Először kimutatjuk, hogy az (I) feltételből következik a (II) feltétel (i) pontja. A 4, 3. állítás alapján világos, hogy M teljes. Tekintsük M-nek egy φ folytonos homomorfizmusát és tegyük fel, hogy Im φ lineárisan topologikus. Azt kell kimutatnunk, hogy bármely $U \subseteq M$ nyílt kétoldali részmodulus $U' = \varphi(U)$ képe nyílt kétoldali részmodulus. Az világos, hogy U' Im φ-nek kétoldali részmodulusa. Mivel Imφ topológiája lineáris, azért a 4, 7. állítás következtében Imφ lineárisan kompakt. Minthogy U' a 4, 7. állítás szerint szintén lineárisan kompakt, ezért a 4, 6. állítás miatt U' zárt. Tekintsük ezután az $N = M/U$ és $N' = \mathrm{Im}\, \varphi/U'$ faktormodulusokat. Minthogy $U' = \varphi(U + \mathrm{Ker}\, \varphi)$, azért feltehető, hogy $\mathrm{Ker}\, \varphi \subseteq U$. Ezért φ N-nek N'-re való folytonos izomorfizmusát indukálja. U nyílt lévén N diszkrét és M szűkebb értelemben vett lineáris kompaktsága miatt N-nek bármely kétoldali részmodulusához létezik minimális őt tartalmazó kétoldali részmodulus. Az előbbi izomorfia miatt hasonló állítás érvényes N'-ben is.

A 4, 10. állítás szerint N-nek B talpa véges sok minimális kétoldali részmodulus direkt összege. Ezért N'-nek B' talpa szintén ilyen. Így B'-ben teljesül a kétoldali részmodulusok minimumfeltétele. Ennek folytán B'-ben, mint N' alterében, a topológia a 4, 4. állítás következtében diszkrét. Következőleg 0 nyílt részmodulus B'-ben. Ezért létezik N'-nek olyan A' nyílt kétoldali részmodulusa, amelyre fennáll $A' \cap B' = 0$. Az állítás bizonyításához elegendő kimutatnunk, hogy $A' = 0$, mert ekkor N' diszkrét és így U' nyílt Im φ-ben. Tegyük fel az ellenkezőjét, azaz legyen $A' \neq 0$. A *Kuratowski—Zorn* lemma alkalmazásával válasszunk A'-höz olyan C' kétoldali részmodulust N'-ben, amely maximális az $A' \cap C' = 0$ tulajdonságra nézve. Az előző bekezdés vége szerint C'-höz létezik olyan D' kétoldali részmodulus, amely minimális a C'-t tartalmazó kétoldali részmodulusok között. C' választása miatt fennáll $A' \cap D' \neq 0$. Mivel érvényes az

$$A' \cap D' = A' \cap D'/A' \cap C' \cong \{A' \cap D', C'\}/C' \cong D'/C'$$

izomorfia és D'/C' minimális kétoldali részmodulus N'/C'-ben, azért $A' \cap D'$ is minimális kétoldali részmodulus N'-ben. Ezért fennáll $0 \neq A' \cap D' \subseteqq B$, amiből viszont $A' \cap B' \neq 0$ következik, ellentmondásban A' választásával.

Most kimutatjuk, hogy az (i) feltételből következik az (ii) feltétel teljesülése. Legyen Im φ-ben a topológia τ és legyen $\tau_1 \geqq \tau$ Im φ-nek egy lineáris topológiája. Ha V τ_1-nyílt részmodulus, akkor $\tau_1 \geqq \tau$ miatt τ-nyílt is, és φ folytonossága miatt $\varphi^{-1}(V)$ nyílt M-ben. φ tehát a τ_1 topológiával ellátott Im φ-re való folytonos homomorfizmus. Ezért az (i) feltétel szerint φ nyílt. Ha most U Im φ-nek egy tetszőleges τ-nyílt részmodulusa, akkor $\varphi^{-1}(U)$ is nyílt és létezik olyan U_1 τ_1-nyílt kétoldali részmodulus, hogy fennáll $U \supseteqq U_1$. Így tehát $\tau \geqq \tau_1$ is érvényes.

Az (ii) feltételből következik az (iii) feltétel. Tekintsük ugyanis M/U-ban kétoldali részmodulusoknak egy $V_1 \supset V_2 \supset \dots$ leszálló láncát, amelyre $\cap V_i = 0$. $\mathrm{V} = \{V_i\}$ M/U-ban egy lineáris τ_1 topológiát definiál. Tekintsük ezután M/U-ban az M által indukált τ topológiát. Ez diszkrét és az (ii) feltétel szerint a legdurvább lineáris topológia. Ezért fennáll $\tau_1 \leqq \tau$, vagyis τ_1 is diszkrét. Ez viszont csak úgy lehetséges, ha valamelyik véges k indexre $V_k = 0$. Ezzel kimutattuk a minimumfeltétel teljesülését.

Teljesüljön az (iii) feltétel, és jelölje $\mathrm{U} = \{U\}$ M-nek egy kétoldali részmodulusokból álló bázisfilterét. Mivel M teljes, azért a 4, 13. állítás szerint M előállítható az M/U $(U \in \mathrm{U})$ faktormodulusok által alkotott inverz-rendszer limeszeként. Az triviális, hogy minden M/U faktormodulus diszkrét és eleget tesz a kétoldali részmodulusok minimumfeltételének.

Ha az M modulus eleget tesz a (III) feltételnek, azaz $M = \varprojlim [M_\alpha, \pi^\alpha_\beta]$, akkor, mivel a 4, 4. állítás szerint minden M_α lineárisan kompakt, alkalmazható a 4, 12. állítás, és így M is lineárisan kompakt. Mivel minden M_α-nak van minimális kétoldali részmodulusa, azért világos, hogy M szűkebb értelemben lineárisan kompakt. []

4, 20. állítás. *Egy M szűkebb értelemben lineárisan kompakt (R, S)-modulus minden G zárt kétoldali részmodulusa is szűkebb értelemben lineárisan kompakt.*

G-nek minden V nyílt kétoldali részmodulusa előállítható $G \cap U$ alakban, ahol U M-nek nyílt kétoldali részmodulusa. A

$$G/V \cong \{G, U\}/U \subseteqq M/U$$

izomorfia miatt G/V-ben teljesül a kétoldali részmodulusok minimumfeltétele. Másrészt G a 4, 5. állítás szerint lineárisan kompakt és így a 4, 3. állítás szerint teljes is. Ezért G a 4, 19. állítás (II) (iii) feltétele szerint valóban szűkebb értelemben lineárisan kompakt. []

4, 21. állítás. *Jelölje φ az M szűkebb értelemben lineárisan kompakt (R, S)-modulusnak az N lineárisan topológikus (R, S)-modulusba való folytonos homomorfizmusát. Ekkor* Im φ *is szűkebb értelemben lineárisan kompakt.*

4, 7. állítás szerint Im φ lineárisan kompakt. Legyen $V \subseteqq \mathrm{Im}\, \varphi$ nyílt kétoldali részmodulus. φ folytonossága miatt $U = \varphi^{-1}(V)$ nyílt részmodulus, ezért M szűkebb értelemben vett lineáris kompaktsága miatt létezik minimális U-t tartalmazó kétoldali részmodulus. Az $M/U \cong \mathrm{Im}\, \varphi/V$ izomorfia miatt hasonló igaz V-re is, így Im φ valóban szűkebb értelemben lineárisan kompakt. []

4, 22. állítás. *Szűkebb értelmezésben lineárisan kompakt (R, S)-modulusok komplett direkt összege is szűkebb értelemben lineárisan kompakt.*

A 4, 11. állítás figyelembe vételével az állítás triviális.

4, 23. állítás. *Legyen M lineárisan topológikus (R, S)-modulus és N zárt kétoldali részmodulusa. Ha N és M/N az M által indukált topológiában szűkebb értelemben lineárisan kompakt, akkor M is szűkebb értelemben lineárisan kompakt*

A 4, 9. állítás alapján elegendő kimutatni, hogy M-nek bármely U nyílt kétoldali részmodulusához van minimális U-t tartalmazó kétoldali részmodulus. Amennyiben $N \subseteqq U$, akkor M/N szűkebb értelemben vett lineárisan kompaktsága miatt világos, hogy U-hoz van ilyen kétoldali részmodulus. Ha $N \nsubseteq U$, akkor $N \cap U$ N-ben nyílt részmodulus és így a feltételek szerint van minimális, őt tartalmazó $C \subseteqq N$ kétoldali részmodulus. Tekintsük a $\{C, U\} \subseteqq M$ részmodulust. Ez $C/N \cong U \cong$ $\cong \{C, U\}/U$ miatt nyilván U-tól különböző, minimális U-t tartalmazó részmodulus. []

Legyen az M lineárisan topológikus (R, S)-modulus, mint R-modulus, hű. Ez esetben R elemeit M folytonos endomorfizmusainak tekinthetjük. Ekkor az R gyűrűbe bevezethetünk egy lineáris topológiát, pontosabban olyan topológiát, amelynek van balideálokból álló bázisfiltere, a következőképpen. Legyen $\mathbf{U} = \{U\}$ M-nek nyílt kétoldali részmodulusaiból álló bázisfiltere és $x_1, \ldots, x_r \in M$ véges sok elem. Könnyű látni, hogy az

$$L(x_1, \ldots, x_r;\, U) = \{\varrho \in R \mid \varrho x_1, \ldots, \varrho x_r \in U\} \qquad (U \in \mathbf{U})$$

halmaz R-nek balideálja. Ha $y_1, \ldots, y_s \in M$ további véges sok elem és $V \in \mathbf{U}$, akkor nyilvánvalóan fennáll az

$$L(x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_s;\, U \cap V) \subseteqq L(x_1, \ldots, x_r;\, U) \cap L(y_1, \ldots, y_s;\, V)$$

összefüggés. Ezért ezek a balideálok egy $\mathbf{L}$ filtert alkotnak. Válasszunk $\mathbf{L}$-et R-ben bázisfilternek. Kimutatjuk, hogy ezáltal R lineárisan topológikus gyűrű lesz. Ha ugyanis $\xi \in \bigcap_{L \in \mathbf{L}} L$, akkor minden $x \in M$-re $\xi x \in \bigcap_{U \in \mathbf{U}} U = 0$, amiből $\bigcap_{L \in \mathbf{L}} L = 0$ következik, tehát a bevezetett topológia *Hausdorff*-féle lesz. Mivel $\mathbf{L}$ balideálokból áll, azért a műveletek folytonosságához elegendő a jobbszorzás folytonosságát kimutatni, azaz azt, hogy bármely $L = L(x_1, \ldots, x_r;\, U)$ balideálhoz és $\varrho \in R$ elemhez van olyan

$L_1 \in \mathbf{L}$ balideál, amelyre $L_1 \varrho \subseteqq L$ teljesül. Válasszuk L_1-nek $L(\varrho x_1, \ldots, \varrho x_r; U)$-t, most bármely $\xi \in L_1$ elemre $\xi \varrho x_i \in U$ $(i=1, \ldots, r)$, tehát $L_1 \varrho \subseteqq L$ és így R topologikus gyűrű.

Ennek a §-nak a hátralevő részében tegyük fel, hogy az M (R, S)-modulus, *mint R-modulus* hű és lineárisan topologikus.

4, 24. definíció. M-nek egy ϱ folytonos endomorfizmusát LEPTIN nyomán *hiperfolytonos*nak nevezzük, ha M-nek minden zárt rész-balmodulusát önmagába képezi le.

Világos, hogy R elemei hiperfolytonosak. M-nek összes S elemeivel felcserélhető hiperfolytonos endomorfizmusai egy H gyűrűt alkotnak és H R-et részgyűrűként tartalmazza. A továbbiakban feltételezzük, hogy H-t M lineáris topológiája segítségével a fent leírt módon topologizáltuk. Láttuk, hogy ezáltal H lineárisan topologikus gyűrű lett.

4, 25. állítás. *Ha az M (R, S)-modulus, mint R-modulus lineárisan kompakt, akkor a hiperfolytonos endomorfizmusok H gyűrűje is lineárisan kompakt.*

Először azt mutatjuk ki, hogy H teljes. Evégből tekintsük H-nak egy $\mathbf{C}=\{\alpha_\mu + L_\mu\}$ *Cauchy*-filterét. Definiáljuk M-nek egy önmagába történő leképezését a következőképpen. Ha $x \in M$ tetszőleges elem, akkor ehhez tartoznak bizonyos $\alpha + L(x, U) \in \mathbf{C}$ mellékosztályok, és képezzük az $\alpha x + U$ M-beli mellékosztályokat. Ezek egy $\mathbf{C}^*$ *Cauchy*-filtert alkotnak, és így M teljessége miatt létezik olyan $y \in M$ elem, amelyre $y \in \downarrow \mathbf{C}^*$. Világos, hogy ilyen módon minden x-hez egyetlen y-t rendeltünk hozzá. Jelöljük M-nek ezt az önmagába történő leképezését γ-val.

Kimutatjuk, hogy γ M-nek endomorfizmusa. Minthogy érvényes

$$L(x, y; U) \subseteqq L(x; U) \cap L(y; U) \subseteqq L(x-y; U),$$

azért megfelelő $\mathbf{C}$-beli mellékosztályokon fennáll

$$\alpha + L(x, y; U) \subseteqq (\alpha_1 + L(x; U)) \cap (\alpha_2 + L(y; U)) \subseteqq \alpha_3 + L(x-y; U).$$

Ezekből a $\mathbf{C}^*$ filter elemeire

$$\alpha x + U = \alpha_1 x + U, \quad \alpha y + U = \alpha_2 y + U, \quad \alpha(x-y) + U = \alpha_3(x-y) + U$$

következik. Ezért érvényes

$$\alpha_3(x-y) + U = \alpha(x-y) + U = \alpha x - \alpha y + U = (\alpha_1 x + U) - (\alpha_2 y + U).$$

Így γ definíciója miatt fennáll

$$\gamma(x-y) = \gamma x - \gamma y,$$

tehát γ endomorfizmus.

Ha U M-nek nyílt részmodulusa, akkor tetszőleges $x \in U$ elemre és $\alpha + L(x, U) \in \mathbf{C}$ mellékosztály esetén érvényes $\gamma x \in \alpha x + U \subseteqq U$, tehát fennáll $\gamma U \subseteqq U$. Mivel bármely A zárt kétoldali részmodulus előállítható nyílt részmodulusok metszeteként, azért $\gamma A \subseteqq A$ is érvényes.

Legyen U nyílt részmodulus és $\sigma \in S$ tetszőleges elem. Mivel σ folytonos jobboperátor, azért van olyan V nyílt részmodulus, hogy $V\sigma \subseteqq U$ teljesül. Tekintsük M-nek egy tetszőleges x elemét, és legyen α közös elem az $\alpha_1 + L(x; V)$, $\alpha_2 +$

$+L(x\sigma;\ U)\in \mathbf{C}$ mellékosztályokban. Ekkor γ definíciója miatt $\gamma x\in\alpha x+V$, továbbá fennáll

$$(\gamma x)\sigma\in(\alpha x+V)\sigma\subseteqq(\alpha x)\sigma+U = \alpha(x\sigma)+U;$$

másrészt érvényes

$$\gamma(x\sigma)\in\alpha(x\sigma)+U.$$

Minthogy ezek az összefüggések minden U nyílt részmodulusra igazak, azért szükségképpen

$$\gamma(x\sigma)=(\gamma x)\sigma$$

tehát γ bármely σ-val felcserélhető. Így tehát γ, az előbbieket figyelembe véve, eleme H-nak. Minthogy pedig $\gamma\in\downarrow\mathbf{C}$, azért H teljes.

A bizonyításban eddig csupán azt használtuk ki M-ről, hogy teljes.

H teljessége miatt alkalmazhatjuk a 4, 13. állítást, amely szerint H izomorf nyílt balideáljai szerinti faktormodulusainak inverz-limeszével. A 4, 12. állítás szerint tehát elegendő kimutatni, hogy bármilyen $L\in\mathbf{L}$ nyílt balideál esetén H/L lineárisan kompakt. Legyen evégből $L(x_1,\ldots,x_r;\ U)\in\mathbf{L}$, és jelöljük M-nek U szerinti faktormodulusának r példányban vett direkt összegét M_r-rel. A

$$\varphi(\xi) = (\xi x_1+U,\ldots,\xi x_r+U)\qquad(\xi\in H)$$

leképezés H-nak, mint H-modulusnak M_r-be való homomorfizmusa. Minthogy $\varphi(\xi)=0$ azt jelenti, hogy $\xi x_i\in U$ $(i=1,\ldots,r)$, azért $\operatorname{Ker}\varphi=L(x_1,\ldots,x_r;\ Ut)$ így H/L, mint H-modulus izomorf M_r-nek egy részmodulusával. Ez utóbbi viszon; lineárisan kompakt. []

Ezeknél a meggondolásoknál már lényegesen kihasználtuk azt a körülményt, hogy M, mint H-modulus lineárisan kompakt, és nem lett volna elegendő az a feltevés, hogy M, mint (H, S)-modulus lineárisan kompakt. Teljesen hasonlóan látható be az is, hogy egy M lineárisan kompakt R-modulusnak teljes endomorfizmus gyűrűje is lineárisan kompakt.

4, 26. állítás. *Ha M L-kompakt R-modulus, akkor hiperfolytonos endomorfizmusainak H gyűrűje is L-kompakt.*

A 4, 25. állítás szerint H lineárisan kompakt. Ezért elegendő azt kimutatni, hogy H bármely L nyílt balideálja esetén H/L-nek van minimális részmodulusa. Megtartva az előző jelöléseket a 4, 21. és 4, 22. állításból következik, hogy M_r és annak H/L-lel izomorf részmodulusa is L-kompakt. H/L diszkrét lévén, az L-kompaktságból következik a minimális részmodulus létezése. []

IRODALOMJEGYZÉK

[1] G. Birkhoff: *Lattice theory*, New York. 1948.
[2] N. Bourbaki: Общая топология, основные структуры, Москва, 1958.
[3] C. Faith—Y. Utumi: On a new proof of Litoff's theorem, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **14** (1963), 369—371.
[4] Fuchs L.: *Abelian groups*, Budapest, 1958.
[5] Fuchs L.—Szele T.: Contribution to the theory of semi-simple rings, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **3** (1952), 235—239.
[6] O. Goldman: A characterization of semi-simple rings with descending chain conditions, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **52** (1946), 1021—1027.

[7] N. JACOBSON: The radical and semi-simplicity for arbitrary rings, *Amer. Journ. Math.*, **67** (1945), 300—230.
[8] N. JACOBSON: *Structure of rings*, Providance, 1956.
[9] J. P. JANS: *Rings and homology*, New York, 1964.
[10] I. KAPLANSKY: Topological rings, *Amer. Journ. Math.*, **69** (1947), 153—183.
[11] I. KAPLANSKY: Locally compact rings I., *Amer. Journ. Math.*, **70** (1948), 447—459.
[12] I. KAPLANSKY: Locally compact rings II., *Amer. Journ. Math.*, **73** (1951), 20—24.
[13] I. KAPLANSKY: Locally compact rings III., *Amer. Journ. Math.*, **74** (1952), 929—935.
[14] KERTÉSZ A.: Beiträge zur Theorie der Operatormoduln, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **8** (1957), 235—257.
[15] KERTÉSZ A.: Vizsgálatok az operátormodulusok elméletében, III., *M.T.A. III. Oszt. Közl.*, **8** (1958) 105—120.
[16] A. KUROSCH: Zur Zerlegung unendlicher Gruppen, *Math. Annalen*, **106** (1932), 107—113 .
[17] S. LEFSCHETZ: *Algebraic topology*, New York, 1942.
[18] H. LEPTIN: Linear kompakte Moduln und Ringe, *Math. Zeitschr.*, **62** (1955), 241—267.
[19] H. LEPTIN: Linear kompakte Moduln und Ringe *II.*, *Math. Zeitschr.*, **66** (1957), 289—327.
[20] Л. С. Понтрягин: Непрерывные группы, Москва, 1954.
[21] RÉDEI L.: *Algebra I.*, Budapest, 1954.
[22] E. SĄSIADA: Solution of the problem of existence of simple radical rings., *Bull. Acad. Polon. Sci.*, **9** (1961), 257.
[23] L. A. SKORNJAKOV: Einfache lokal bikompakte Ringe, *Math. Zeitschr.*, **87** (1965), 241—251.
[24] SZÁSZ F.: Über Ringe mit Minimalbedingung für Hauptrechtsideale II., *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **12** (1961), 417—439.
[25] SZÁSZ F.: A főjobbideálokra nézve minimum-feltételű gyűrűk, *M.T.A. III. Oszt. Közl.*, **11** (1961), 135—177.
[26] SZÁSZ F.: A topológikus algebrákról és gyűrűkről I., *Mat. Lapok* **13** (1962), 256—278.
[27] SZÁSZ F.: A topológikus algebrákról és gyűrűkről II., *Mat. Lapok* **14** (1963), 74—87.
[28] SZÁSZ G.: *Bevezetés a hálóelméletbe*, Budapest, 1959.
[29] SZELE T.: Nilpotent Artinian rings. *Publ. Math. Debrecen*, **4** (1955), 71—78.
[30] B. L. VAN DER WAERDEN: *Algebra II.*, Springer-Verlag 1959.
[31] WIEGANDT R.: Über halbeinfache linear kompakte Ringe, *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica* **1** (1966), (megjelenés alatt).
[32] WIEGANDT R.: Über transfinit nilpotente Ringe, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **17** (1966) (megjelenés alatt).
[33] WIEGANDT R.: Über linear kompakte reguläre Ringe, *Bull. Acad. Polon. Sci.*, **13** (1965), 445—446.
[34] WIEGANDT R.: Über lokal linear kompakte Ringe, *Acta Sci. Math.* (megjelenés alatt).
[35] D. ZELINSKY: Rings with ideal nuclei, *Duke Math. Journ.* **18** (1951), 431—442.
[36] D. ZELINSKY: Linearly compact modules and rings, *Amer. Journ. Math.*, **75** (1953), 79—90.

(Beérkezett: 1966. I. 17)

EGY MEGJEGYZÉS H. DELANGE „SUR UN THEOREME DE RÉNYI" CÍMŰ DOLGOZATÁHOZ

Írta: KÁTAI IMRE

1. Bevezetés

Jelölje $\omega(n)$ az n természetes szám különböző, $\Omega(n)$ az n összes prímosztói számát, azaz ha n prímtényezős felbontása $n=p_1^{\alpha_1}\dots p_k^{\alpha_k}$, akkor $\Omega(n)=\alpha_1+\dots+\alpha_k$, $\omega(n)=k$.

Világos, hogy $\Omega(n)\geqq\omega(n)$ és egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha, n négyzetmentes.

Legyen q nemnegatív egész,

$$\lambda_q(n)=\begin{cases}1, & \text{ha}\quad \Omega(n)-\omega(n)=q,\\ 0 & \text{egyébként,}\end{cases}$$

$$v_q(x)=\sum_{n\leqq x}\lambda_q(n).$$

RÉNYI A. kimutatta [1], hogy

$$\frac{v_q(x)}{x}\to d_q, \qquad (x\to\infty).$$

A $q=0$ esetre vonatkozóan LANDAU megmutatta [2], hogy

$$\sum_{n\leqq x}\lambda_0(n)=d_0x+o(x^{1/2}) \tag{1}$$

fennállása a prímszámtételből következik, pontosan abból a tényből, hogy a *Riemann*-féle $\zeta(s)$ függvény a $\operatorname{Re}s=1$ egyenesen sehol sem vesz fel zérus értéket. H. DELANGE címben idézett [3] dolgozatában megmutatta, hogy ugyanebből a tényből IKEHARA *Tauber*-tételének általánosításával következik a

$$v_q(x)=d_qx+o(x^{1/2}(\log\log x)^q) \tag{2}$$

egyenlőség is.

Jelen dolgozatban megmutatjuk, hogy (1)-ből rendkívül egyszerűen, minden további *Tauber*-típusú tétel igénybevétele nélkül következik (2). Továbbá megmutatjuk, hogy a jól ismert

$$v_0(x)=d_0x+O(x^{1/2}(\log x)^{-1})$$

egyenlőség felhasználásával

$$v_q(x)=d_qx+O(x^{1/2}(\log\log x)^{q-1}) \tag{3}$$

minden $q\geqq 1$ esetén.

A bizonyítási gondolatmenetet finomítva adódna, hogy minden $n \geqq 0$ egészre

$$(4) \qquad v_q(x) = d_q x + x^{1/2}(\log\log x)^{q-1} P_{n,q}\left(\frac{1}{\log\log x}\right) + O\left(x^{1/2}(\log\log x)^{q-n-2}\right),$$

ahol $P_{n,q}(x)$ alkalmas n-edfokú polinom. Ezt az állítást azonban nem fogjuk bizonyítani.

2. A (2) és (3) formulák bizonyítása

Jelölje $\mathfrak{A}_q$ azon k természetes számok halmazát, amelyek törzstényezős előállítása $k = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$ alakú, ahol $\alpha_i \geqq 2$ $(i = 1, \dots, r)$, $\alpha_1 + \dots + \alpha_r - r = q$. Világos, hogy minden n természetes szám, amelyre $\lambda_q(n) = 1$, egyértelműen állítható elő $n = km$, $k \in \mathfrak{A}_q$, m négyzetmentes, $(k, m) = 1$ alakban. Ezért

$$(5) \qquad v_q(x) = \sum_{\substack{km \leqq x \\ k \in \mathfrak{A}_q \\ (k,m)=1}} |\mu(m)| = \sum_{\substack{k \leqq x \\ k \in \mathfrak{A}_q}} \sum_{\substack{m \leqq \frac{x}{k} \\ (k,m)=1}} |\mu(m)| = \sum_{\substack{k \leqq x \\ k \in \mathfrak{A}_q}} M\left(\frac{x}{k}, k\right),$$

bevezetve az

$$(6) \qquad M(y, k) = \sum_{\substack{m \leqq y \\ (m,k)=1}} |\mu(m)|,$$

jelöléseket.

A bizonyításhoz szükségünk lesz a következő segédtételekre.

1. LEMMA. *Ha* $k = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$, *akkor*

$$M(y, k) = \sum_{v \leqq y} \lambda(v) M\left(\frac{y}{v}\right),$$

ahol v az összes $v = p_1^{\beta_1} \dots p_r^{\beta_r}$, $\beta_1, \dots, \beta_k = 0, 1, \dots$ típusú számokon fut végig, továbbá $\lambda(v) = (-1)^{\beta_1 + \dots + \beta_r}$.

Bizonyítás. A lemma állítása legegyszerűbben talán a következő módon verifikálható.

Legyen χ_0 a mod k vett főkarakter, $L(s, \chi_0)$ a hozzátartozó *Dirichlet*-féle L-függvény, akkor

$$\sum_{(n,k)=1} \frac{|\mu(n)|}{n^s} = \frac{L(s, \chi_0)}{L(2s, \chi_0)} = \prod_{p|k} \left(1 + \frac{1}{p^s}\right)^{-1} \frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)} = \left(\sum \frac{\lambda(v)}{v^s}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\mu(n)|}{n^s}.$$

A fenti azonosságból közvetlenül látható a Lemma állítása.

2. LEMMA. *Jelölje $\vartheta_m(x)$ az x-et meg nem haladó, legfeljebb m különböző prímfaktort tartalmazó egészek számát, amelyben minden törzstényező legalább a második hatványon szerepel. Akkor*

$$\vartheta_m(x) = O\left(\frac{x^{1/2}}{\log x} (\log\log x)^{m-1}\right).$$

Bizonyítás.

$$\vartheta_1(x)=\sum_{\substack{p^\alpha\leqq x\\ \alpha\geqq 2}}1=\pi(\sqrt{x})+\pi(\sqrt[3]{x})+\ldots=O\left(\frac{x^{1/2}}{\log x}\right).$$

Így $m=1$-re az állítás igaz. Másrészt $m\geqq 2$ esetén, feltéve, hogy $(m-1)$-re érvényes az állítás, így

$$\vartheta_m(x)=O\left(\sum_{p^\alpha\leqq x^{1/m}}\vartheta_{m-1}\left(\frac{x}{p^\alpha}\right)\right)=O\left(\frac{x^{1/2}(\log\log x)^{m-2}}{\log x}\sum_{\substack{p^\alpha\leqq x^{1/m}\\ \alpha\geqq 2}}\frac{1}{p^{\alpha/2}}\right)=$$

$$=O\left(\frac{x^{1/2}(\log\log x)^{m-1}}{\log x}\right).$$

Vezessük be a

$$\Delta(x)=M(x)-d_0x$$

jelölést. (5) és az 1. Lemma felhasználásával kapjuk a

$$v_q(x)=\sum_{kv\leqq x}\lambda(v)M\left(\frac{x}{kv}\right)=d_0x\sum_{kv\leqq x}\frac{\lambda(v)}{kv}+\sum_{kv\leqq x}\lambda(v)\,\Delta\left(\frac{x}{kv}\right)$$

előállítást.

Legyen $d_0\sum\limits_{kv}^{\infty}\frac{\lambda(v)}{kv}=d_q$. Világos, hogy a baloldalon álló összeg konvergens.

Bebizonyítjuk, hogy

$$\text{(I)}\qquad \sum_{kv>x}\frac{1}{kv}=O\left(\frac{(\log\log x)^{q-1}}{x^{1/2}}\right),$$

továbbá azt, hogy a $\Delta(x)=o(x^{1/2})$, illetve a $\Delta(x)=O\left(\frac{x^{1/2}}{\log x}\right)$ ismert becslések felhasználásával

$$\text{(II)}\qquad \sum_{kv\leqq x}\left|\Delta\left(\frac{x}{kv}\right)\right|=o\left(x^{1/2}(\log\log x)^q\right),\quad\text{illetve}\quad =O\left(x^{1/2}(\log\log x)^{q-1}\right),$$

amiből (2), illetve (3) érvényessége következik.

Tekintsük először a rögzített $(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)$ típusú k-kat, azaz azokat, amelyekre $k=p_1^{\alpha_1}\ldots p_r^{\alpha_r}$; $\alpha_i\geqq 2$, $(i=1,\ldots,r)$, $\alpha_1+\ldots+\alpha_r=r+q$. Világos, hogy a különböző típusok száma véges. Másrészt rögzített típus esetén kv alakban egy szám legfeljebb egyféleképpen állítható elő, továbbá $r\leqq q$. Így

$$\sum_{kv>x}\frac{1}{kv}=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{2^lx<kv\leqq 2^{l+1}x}\frac{1}{kv}<\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\vartheta_q(2^{l+1}x)}{2^lx}=O\left(\frac{1}{x^{1/2}}\frac{(\log\log x)^{q-1}}{\log x}\right),$$

s innen az (I) állítás következik.

Térjünk most rá a (II) állítás bizonyítására. Legyen $\varepsilon(x)$ pozitív, monoton-csökkenő, nullához tartó függvény, amelyre $|\Delta(x)|<\varepsilon(x)x^{1/2}$. (1) miatt ilyen $\varepsilon(x)$

létezik. Legyen továbbá $g(x)$ pozitív, monoton végtelenhez tartó függvény. Ekkor

$$\sum_{kv \leq \frac{x}{g(x)}} \left| \Delta\left(\frac{x}{kv}\right) \right| < \varepsilon(g(x)) x^{1/2} \sum_{kv \leq x} \frac{1}{(kv)^{1/2}} < \varepsilon(g(x)) x^{1/2} O\left(\left\{\sum_{\substack{p^\alpha \leq x \\ \alpha \geq 2}} \frac{1}{p^{\alpha/2}}\right\}^q\right) =$$

$$= \varepsilon(g(x)) x^{1/2} O((\log\log x)^q),$$

továbbá

$$\sum_{\frac{x}{g(x)} \leq kv < x} \left| \Delta\left(\frac{x}{kv}\right) \right| = (g(x))^{1/2} O\left(\sum_{\frac{x}{g(x)} < kv < x} 1\right) = g(x)^{1/2} O(\vartheta_q(x)) =$$

$$= O\left(\frac{(g(x))^{1/2} x^{1/2} (\log\log x)^{q-1}}{\log x}\right).$$

Fentiekből már következik, hogy

$$\nu_q(x) = d_q x + o(x^{1/2} (\log\log x)^q).$$

Felhasználva a pontosabb

$$\nu_0(x) = (M(x) =) d_0 x + O(x^{1/2}/\log x)$$

formulát, innen $\varepsilon(x) = \frac{1}{\log x}$, $g(x) = (\log x)^2$ választással a (II) állítás második része is következik.

IRODALOMJEGYZÉK

[1] A. Rényi, On the density of certain sequences of integers, *Publications de Institut de Mathematiques de l'Academie Serbe des Sciences* **8** (1955), 157—162.
[2] E. Landau, *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen*, Bd. II. XLIV, § 162.
[3] H. Delange, Sur un théorème de Rényi, *Acta Arithm.* **11** (1965), 241—252.

(Beérkezett: 1966. II. 1.)

A REMARK ON H. DELANGE'S PAPER „SUR UN THEOREME DE RÉNYI"

by

Imre Kátai

Summary

Let $\Omega(n), \omega(n)$ defined by $\Omega(p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}) = \alpha_1 + \dots + \alpha_r$, $\omega(p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}) = r$, let $q \geq 0$ be any integer,

$$\lambda_q(n) = \begin{cases} 1, & \text{if } \Omega(n) - \omega(n) = q, \\ 0 & \text{another,} \end{cases}$$

$$\nu_q(x) = \sum_{n \leq x} \lambda_q(n).$$

H. DELANGE proved in the paper [3], that the estimation

$$\nu_q(x) = d_q x + o(x^{1/2}(\log \log x)^q),$$

follows from the prime-number theorem. The proof is based on the use of IKEHARA's tauberian-theorem.

In the present paper we proved that this estimation follows very simply from the relation [2[

$$\nu_0(x) = d_0 x + o(x^{1/2}).$$

Further from the little stronger estimation

$$\nu(x) = d_0 x + O(x^{1/2}/\log x)$$

follows the estimation

$$\nu_q(x) = d_q x + O(x^{1/2}(\log \log x)^{q-1}).$$

With the refinement of proof we could prove, that

$$\nu_q(x) = d_q x + x^{1/2} (\log \log x)^{q-1} P_{n,q}\left(\frac{1}{\log \log x}\right) + O(x^{1/2} (\log \log x)^{q-n-2}),$$

where $P_{n,q}(x)$ is a suitable polynomial of degree n.

MEGJEGYZÉS G. WINTGEN EGY TÉTELÉHEZ

Írta: BOD PÉTER

Georg WINTGENtől származik a következő definíció [1]:

Adva van valamilyen programozási feladat megvalósítható megoldásainak a halmaza $L = \{\underline{x} | \underline{g}(\underline{x}) \geqq \underline{o}\}$, valamint a célfüggvényeknek egy osztálya: $\mathfrak{Z}$. Tekintsük a következő típusú feladatot:

$$\underline{g}(\underline{x}) \geqq \underline{o}$$

$$z(\underline{x}) \to \max! \text{ (vagy min!)} \qquad [z(\underline{x}) \in \mathfrak{Z}].$$

A feladatot a célfüggvények $\mathfrak{Z}$ osztályára nézve indifferensnek nevezzük akkor és csak akkor, ha létezik olyan $\underline{x}_0$ pont a megvalósítható megoldások halmazában, amelyre

$$z(\underline{x}_0) \geqq z(\underline{x}) \qquad (\text{illetve } z(\underline{x}_0) \leqq z(\underline{x}))$$

minden $\underline{x} \in L$ és $z(\underline{x}) \in \mathfrak{Z}$-re.

WINTGEN bebizonyította a következő két tételt:

1. Ha $z_1(\underline{x}), z_2(\underline{x}), \ldots, z_k(\underline{x})$ véges sok, folytonos célfüggvény, amelyek mindegyike az L halmazon véges maximumot (minimumot) vesz fel és ha bármely két megvalósítható megoldásra áll, hogy

$$\underline{x}_1 \in L;\ \underline{x}_2 \in L \Rightarrow \underline{z}(\underline{x}_1) \cup \underline{z}(\underline{x}_2) \in \underline{z}(L) \ [\underline{z}(\underline{x}_1) \cap \underline{z}(\underline{x}_2) \in \underline{z}(L)]$$

— ahol általában $\underline{z}(\underline{x}) = \begin{pmatrix} z_1(\underline{x}) \\ z_2(\underline{x}) \\ \vdots \\ z_k(\underline{x}) \end{pmatrix}$ és $\underline{z}(L)$ a megvalósítható megoldások halmazának

a $\underline{z}(\underline{x})$ vektor-vektor függvénnyel nyert képhalmaza és $\cup$, illetve $\cap$ az alábbi műveletek jele:

$$\underline{x} \cup \underline{y} = [\max(x_i, y_i)];\ \underline{x} \cap \underline{y} = [\min(x_i, y_i)]$$

— akkor a feladat indifferens a $z_1(\underline{x}), z_2(\underline{x}), \ldots, z_k(\underline{x})$ függvényekből nemnegatív lineáris kombináció révén képezhető célfüggvények osztályára nézve.

2. A
$$B\underline{x} \leqq \underline{b}$$
$$\underline{c}^*\underline{x} \to \min!$$

lineáris programozási feladat, amelyben B minden sora pontosan egyetlen pozitív elemet tartalmaz indifferens a nemnegatív együtthatójú lineáris függvények osztályára nézve.

Az alábbiakban szükséges és elégséges feltételt adunk arra vonatkozóan, hogy egy kanonikus alakban megadott lineáris programozási feladat indifferens legyen a nem negatív együtthatójú lineáris függvényeknek, mint minimalizálandó célfüggvényeknek az osztályára nézve.

Előre bocsátunk néhány fogalmat és feltételezést [2]:

Kanonikus alakúnak nevezzük a lineáris programozás általános feladatának alábbi megfogalmazását: meghatározandó azon $\underline{x}$ vektorok halmaza, amelyekre

$$A\underline{x}=\underline{b}$$

$$\underline{x}\geqq\underline{o} \quad \text{(Az } A \text{ mátrix } (m\times n) \text{ típusú)}$$

és amelyekben a $\underline{c}^*\underline{x}$ lineáris függvény minimumát veszi fel. Feltételezzük, hogy a megvalósítható megoldások halmaza *egynél több elemet tartalmaz*, és a feltételrendszer *nem tartalmaz felesleges egyenleteket*, vagyis, hogy $m\leqq n$ és

$$Rang\,(A)=m.$$

Bázisnak nevezzük az A mátrix minden lineárisan független oszlop — m-esét. Legyen $A=[\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_n]$. A $B=[\underline{a}_{i_1}, \underline{a}_{i_2}, \ldots, \underline{a}_{i_m}]$ mátrix oszlopvektorai bázist alkotnak, ha

$$Rang\,(B)=m.$$

Bázismegoldásnak mondjuk a feltételi egyenletrendszer azon megoldásait, amelyek a $\underline{b}$ vektort egy bázis oszlopvektorainak lineáris kombinációjaként állítják elő, amelyekben tehát legalább $n-m$ zéruskomponens van (a nem bázisváltozók értéke zérus) és a bázisváltozókhoz tartozó oszlopvektorok az A mátrixban lineárisan függetlenek. Jelöljük $\underline{x}_B$-vel valamely B bázishoz tartozó bázisváltozók alkotta vektort, akkor

$$B\underline{x}_B=\underline{b} \quad \text{és} \quad \underline{x}_B=B^{-1}\underline{b}.$$

Valamely bázist *megvalósítható bázisnak* nevezzük, ha a hozzátartozó bázismegoldás nemnegatív. Végül egy bázis *degenerált*, ha a hozzátartozó bázismegoldásban van zérusértékű bázisváltozó is.

A lineáris programozás elméletéből ismert tény, hogy a megvalósítható bázismegoldások képe a megvalósítható megoldások L halmazának extremális pontjai és megfordítva, az L halmaz minden extremális pontjának koordinátáit egy megvalósítható bázismegoldás határozza meg.

TÉTEL: *Az*

$$A\underline{x}=\underline{b}$$

$$\underline{x}\geqq\underline{o}$$

$$z(\underline{x})\in\mathfrak{Z}\rightarrow\min! \qquad \mathfrak{Z}=\{\underline{c}^*\underline{x}\,|\,\underline{c}^*\geqq\underline{o}\}$$

lineáris programozási feladat indifferens minden nemnegatív együtthatójú lineáris függvényre akkor és — degenerációmentes esetben — csak akkor, ha az A mátrixnak van olyan B_0 megvalósítható bázisa, amelyre vonatkoztatva a mátrix valamennyi többi (tehát nem B_0-beli) oszlopvektorának koordinátái nem pozitívak. Ez a feltétel azt jelenti, hogy ha az A mátrixnak van megjelölt tulajdonságú bázisa (és az, tegyük fel, éppen a mátrix első m oszlopvektorából áll), akkor $A=[B_0, A_s]$ és $B_0^{-1}A_s\leqq\mathbf{o}$.

Bizonyítás: 1. *A feltétel elégséges:* legyen B_0 a tételben jelzett tulajdonsággal rendelkező megvalósítható bázis. Akkor $\underline{x}_{B_0}=B_0^{-1}\underline{b}\geqq\underline{o}$. Könnyű belátni, hogy az $\underline{x}_0=\begin{bmatrix}\underline{x}_{B_0}\\ \underline{o}\end{bmatrix}$ vektor optimális bázismegoldás. Az optimalitás elegendő feltétele ugyanis, hogy

$$\underline{\gamma}^* = \underline{c}^* - \underline{c}_{B_0}^* B_0^{-1} A \geqq \underline{o}^*$$

legyen, ahol $\underline{c}_{B_0}^*$ tartalmazza a bázisváltozók célfüggvényegyütthatóit. Mivel

$$B_0^{-1}A = B_0^{-1}[B_0, A_s] = [E_m, B_0^{-1}A_s]$$

ezért $\underline{\gamma}^*$ első m komponense zérus, az utána következő $n-m$ komponens pedig nemnegatív. (Ugyanis $\underline{c}^*\geqq\underline{o}^*$, $\underline{c}_{B_0}^*\geqq\underline{o}^*$ és $B_0^{-1}A_s\leqq\mathbf{o}$).

2. *A feltétel szükséges.* Legyen $\underline{x}_0=\begin{bmatrix}\underline{x}_{B_0}\\ \underline{o}\end{bmatrix}$ olyan extremális pont az L halmazban, amelyben minden $z(\underline{x})\in\mathfrak{Z}$ felveszi minimumát. Válasszunk ki egy tetszőleges célfüggvényt: $z=\underline{c}^x\underline{x}(\underline{c}\geqq\underline{o}^*)$. Az ehhez tartozó minimális célfüggvényérték: $z_0=\underline{c}_{B_0}^*B_0^{-1}\underline{b}$. Tekintsük a $H(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i - \underline{c}_{B_0}^* B_0^{-1}\underline{b} = o$ $(\underline{c}^*\neq\underline{o}^*)$ hipersíkot. Ez átmegy az $\underline{x}_0$ ponton és az $\underline{x}_0$ pontra tett feltevés miatt az L halmaz támaszsíkja. A halmaz minden pontjára $H(\underline{x})\geqq 0$ kell, hogy teljesüljön. Állítsuk elő az L halmaz egy tetszőleges pontjának koordinátáit a feltételi egyenletrendszer általános megoldásának a segítségével:

$$\underline{x} = \begin{bmatrix}\underline{x}_{B_0}\\ \underline{o}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-B_0^{-1}A_s\\ E_s\end{bmatrix}\underline{t}$$

Itt $\underline{t}$ egy $s = n-m$ elemű nemnegatív paramétervektor, amelynek komponense i minden nemnegatív valós számértéket felvehetnek, kivéve azokat, amelyekre az $\underline{x}$ vektor valamelyik eleme már negatív lenne. A $H(\underline{x})$ függvény az $\underline{x}$ helyen nem lehet negatív:

$$H(\underline{x}) = \underline{c}^*\underline{x} - \underline{c}_{B_0}^* B_0^{-1}\underline{b} = \underline{c}^*\begin{bmatrix}\underline{x}_{B_0}\\ \underline{o}\end{bmatrix} + \underline{c}^*\begin{bmatrix}-B_0^{-1}A_s\\ E_s\end{bmatrix}\underline{t} - \underline{c}_{B_0}^* B_0^{-1}\underline{b} \geqq 0$$

$$\underline{c}^*\begin{bmatrix}-B_0^{-1}A_s\\ E_s\end{bmatrix}\underline{t} \geqq 0$$

vagyis a $\underline{c}^*=[\underline{c}_{B_0}^*, \underline{c}_s^*]$ felbontás bevezetésével:

$$-\underline{c}_{B_0}^* B_0^{-1}A_s\underline{t} + \underline{c}_s^*\underline{t} \geqq 0$$

Ez az egyenlőtlenség azonban minden nemnegatív $\underline{c}^*$ vektor és $\underline{t}$ minden megengedett értéke mellett fenn kell, hogy álljon, így $\underline{c}_s^*$ és $\underline{t}$ komponenseinek minden elég kicsiny pozitív és $\underline{c}_{B_0}^*$ komponenseinek akármilyen nagy értékei mellett is. Ez csak úgy állhat fenn, ha

$$B_0^{-1}A_s \leqq \mathbf{o}$$

Ezzel a tételt igazoltuk.

Amennyiben a degeneráció fellépését is megengedjük, az indifferencia szükséges feltétele enyhébbé válik.

a) Az ún. „teljesen degenerált" esetben a feltételrendszer

$$A\underline{x} = \underline{o}$$

$$\underline{x} \geqq \underline{o}$$

alakú. Ilyen körülmények között a megvalósítható megoldások halmaza az $L = \{\underline{o}\}$ egyetlen triviális megoldásra zsugorodik. Ez az eset része a vizsgálatból kizárt $|L| = 1$ helyzetnek, annak ti., hogy a megvalósítható megoldások halmaza nem üres ugyan, de egyetlen elemből áll. Az ilyen szerkezetű feladatok nem tekinthetők igazi programozási feladatoknak; ezek minden egyértékű valós függvényre, mint célfüggvényre nézve, triviálisan indifferensek.

b) A nem teljesen degenerált esetben a $B_0^{-1}A_s$ mátrix azon soraiban, amelyek zérusértékű bázisváltozókhoz tartoznak, állhatnak pozitív elemek is. Az

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} \underline{x}_{B_0} \\ \underline{o} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -B_0^{-1}A_s \\ E_s \end{bmatrix} \underline{t}$$

általános megoldásban ugyanis ekkor a nemnegativitási követelmény ($\underline{x} \geqq \underline{o}$) miatt a paramétervektor bizonyos komponensei csak zérus értéket vehetnek fel. Ha viszont $\underline{t}$ zérus elemeket is tartalmazó nem negatív vektor, akkor a

$$\underline{c}_{B_0}^* B_0^{-1} A_s \underline{t} + \underline{c}_s^* \underline{t} \geqq 0$$

követelmény teljesüléséhez nem szükséges, hogy a $B_0^{-1}A_s$ mátrix minden eleme nempozitív legyen.

Meg kell jegyezni, hogy a tétel állításának elégséges volta következik WINTGEN 1. tételéből is. Tekintsük ugyanis az alábbi célfüggvényekből összeállított vektor-vektor függvényt:

$$\underline{z}(\underline{x}) = \begin{bmatrix} \underline{e}_1^* \underline{x} \\ \underline{e}_2^* \underline{x} \\ \vdots \\ \underline{e}_n^* \underline{x} \end{bmatrix} = E_n \underline{x}$$

ahol $\underline{e}_i^* = [0, 0, \ldots, \overset{i}{1}, \ldots, 0]$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Ez a függvény a megvalósítható megoldások halmazának minden elemét és így magát az L halmazt is önmagába képezi le. Megmutatható, hogy a WINTGEN 1. tételében értelmezett feltétel a $\underline{z}(L) = L$ halmazra teljesül. Az L halmaz zárt mind a $\cup$ mind a $\cap$ műveletre (tehát hálót alkot). Legyen ugyanis az L halmaz két tetszőleges eleme:

$$\underline{x}_1 = \begin{bmatrix} \underline{x}_{B_0} \\ \underline{o} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -B_0^{-1}A_s \\ E_s \end{bmatrix} \underline{t}_1; \quad \underline{x}_2 = \begin{bmatrix} \underline{x}_{B_0} \\ \underline{o} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -B_0^{-1}A_s \\ E_s \end{bmatrix} \underline{t}_2$$

Feltevésünk szerint $B_0^{-1}A_s \leqq \mathbf{o}$ és így $\underline{t}$ akármilyen nemnegatív komponensei mellett is

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} \underline{x}_{B_0} \\ \underline{o} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -B_0^{-1}A_s \\ E_s \end{bmatrix} \underline{t} \in L.$$

Könnyen belátható azonban, hogy

$$\underline{x}_1 \cup \underline{x}_2 = \begin{bmatrix} \underline{x}_{B_0} \\ \underline{o} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -B_0^{-1} A_s \\ E_s \end{bmatrix} [\underline{t}_1 \cup \underline{t}_2] \in L$$

$$\underline{x}_1 \cap \underline{x}_2 = \begin{bmatrix} \underline{x}_{B_0} \\ \underline{o} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -B_0^{-1} A_s \\ E_s \end{bmatrix} [t_1 \cap t_2] \in L.$$

Abból a tényből, hogy az L halmaz zárt a metszés műveletére, következik, hogy a megfelelő minimum-feladat indifferens a

$$z_1 = \underline{e}_1^* \underline{x}; \quad z_2 = \underline{e}_2^* \underline{x}; \quad \dots \quad z_n = \underline{e}_n^* \underline{x}$$

függvények nemnegatív lineáris kombinációjára, de ez éppen a nemnegatív együtthatójú lineáris függvények osztályát jelenti.

IRODALOM

[1] G. WINTGEN: Indifferente Optimierungsprobleme. *Beitrag zur internationalen Tagung „Mathematik und Kybernetik in der Ökonomie" Berlin, Október 1964. Konferenzprotokoll. Teil II.* Akademie Verlag. Berlin.
[2] G. HADLEY: *Linear Programming*, Addison—Wesley Publ. Comp. 1962.

(Beérkezett: 1965. nov. 11)

EINE BEMERKUNG ZU EINEM SATZ VON G. WINTGEN

von
PÉTER BOD

Verfasser beweist in Zusammenhang mit dem Begriff der sogenannten indifferenten Optimierungsaufgaben-eingeführt von G. Wintgen — [1] den folgenden Satz:
Die lineare Optimierungsaufgabe

$$A\underline{x} = \underline{b}$$

$$\underline{x} \geqq \underline{o}$$

$$z(\underline{x}) \in \mathfrak{Z} \rightarrow \min! \quad \mathfrak{Z} = \{\underline{c}^* \underline{x} | \underline{c}^* \geqq \underline{o}^*\}$$

ist indifferent gegenüber der Klasse der linearen Zielfunktionen mit nicht negativen Koeffizienten dann und — falls Entartung ausgeschlossen — nur dann, wenn die Matrix A so eine zulässige Basis B_0 besitzt, in der sämtliche Spalten von A die nicht zu B_0 gehören, nicht positive Koordinaten bekommen.

Technikai szerkesztő: L. Ziermann Margit

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója Műszaki szerkesztő: Farkas Sándor
A kézirat nyomdába érkezett: 1966. IV. 2. – Terjedelem: 10,75 (A/5) ív, 9 ábra

66-6241 Szegedi Nyomda

Ára: 23,– Ft

TARTALOMJEGYZÉK

INDEX

Index: 26 498

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK

KÖZLEMÉNYEI

XVI. KÖTET 3. SZÁM

AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST
1966

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK
KÖZLEMÉNYEI

XVI. kötet 3. szám

Szerkesztőség: Budapest, V., Nádor utca 7.

Kiadóhivatal: Budapest, V., Alkotmány utca 21.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei változó terjedelmű füzetekben jelenik meg, és az Akadémia III. Osztályának felolvasóülésein bemutatott matematikai dolgozatokat, valamint egyéb dolgozatokat, referátumokat, továbbá az Osztály munkájára vonatkozó közleményeket, könyvismertetéseket stb. közöl. Évenként egy kötet jelenik meg (négy szám alkot egy kötetet).

Kéziratok a következő címre küldendők:

A Magyar Tudományos Akadémia
III. Osztályának Közleményei.
Budapest, V., Nádor u. 7.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi levelezés.

Minden szerzőt 100 különlenyomat illet meg megjelent munkájáért.

Közlésre el nem fogadott kéziratokat a szerkesztőség lehetőleg visszajuttat a szerzőhöz, de felelősséget a beküldött kéziratok megőrzéséért vagy továbbításáért nem vállal.

A Közlemények előfizetési ára kötetenként belföldi címre 40 forint, külföldi címre 60 forint. Belföldi megrendelések az Akadémiai Kiadó, Budapest, V., Alkotmány u. 21. (Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 05-915-111-46), külföldi megrendelések a „Kultúra" Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalat, Budapest, I., Fő utca 32. (Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 43-790 057-181) útján eszközölhetők.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztálya a következő idegen nyelvű folyóiratokat adja ki:

1. Acta Mathematica Hungaricae,
2. Acta Physica Hungaricae.

HAZAI EREDMÉNYEK A FÉLCSOPORTELMÉLET TERÜLETÉN AZ 1956–1965 ÉVEKBEN

Írta: SZÁSZ GÁBOR

1. Bevezetés

Hazánkban az algebrai kutatások a múlt század utolsó negyedében indultak meg. Az akkori, majd a két világháború közötti társadalmi viszonyok azonban a kutatómunka számára kedvezőtlenek voltak. Ebben kell keresnünk annak magyarázatát, hogy bár akkor is jelentős, sőt világszínvonalon is kimagasló eredményeket értek el, de igen kevesen voltak tudományos munkát végző matematikusaink.

A felszabadulás után a matematikai, s ezen belül az algebrai kutatómunka minden eddiginél nagyobb támogatást kapott. Az egyetemek oktatólétszámának emelése, valamint a Matematikai Kutató Intézet létrehozása és az aspirantúra intézménye a korábbival össze sem hasonlítható lehetőséget teremtett a fiataloknak a kutatómunkába való bekapcsolódásra. Így alakulhatott ki az a kedvező helyzet, hogy a matematika legtöbb ágában ma legalább annyian végeznek kutatómunkát, mint korábban a matematika egész területén.

Különösen nagymértékű volt a fejlődés az algebra területén: a magyar algebrai kutatócsoport a világ élvonalába emelkedett. Ebben nagy része volt Rédei Lászlónak és korán elhúnyt tehetséges tanítványának, Szele Tibornak. A felszabadulás utáni hazai algebrai kutatások első szakaszáról igen jó összefoglalót írt Fuchs László[1], akinek magának is jelentős érdemei vannak a kutatómunka fellendülésében.

Dolgozatomban az absztrakt algebra egyik fiatal ágának, a félcsoportelméletnek azokat az eredményeit kívánom összefoglalni, amelyeket a hazai kutatók a legutóbbi évtizedben elértek. Ebben az alig több mint negyedszázados tudományágban végzett eredményes munka jól illusztrálja a magyarországi matematikai kutatások korszerűségét.

Nem térek ki azokra a jelentős eredményekre, amelyeket hazai kutatóink az operátormodulusok elméletének terén elértek. Ez ugyanis meghaladná ennek az ismertetésnek a kereteit, hiszen számos gyűrűelméleti fogalmat kellene tárgyalnunk. Ezt a kérdéskört egyébként is a gyűrűelmélet általánosításaként szokás tekinteni.

2. Alapfogalmak

Mint ismeretes, *félcsoport*nak olyan halmazt nevezünk, amelyben definiálva van egy asszociatív művelet; ezt a műveletet szorzásként jelöljük. A művelet kommutativitása általában nincs kikötve; ha teljesül, akkor *kommutatív félcsoport*ról

[1] FUCHS LÁSZLÓ, Az algebra fejlődéséről, különös tekintettel a hazai algebrai kutatásokra, *MTA III. Osztályának Közleményei*, 3 (1953), 381—396.

beszélünk. Nemkommutatív félcsoportnak is lehetnek olyan c elemei, hogy $cx=xc$ a félcsoport bármely x elemére érvényes; az ilyen elemek összességét a félcsoport *centrum*ának nevezzük.

Legyenek H és K az F félcsoport részhalmazai. A *H és K részhalmazok szorzatán* értjük és HK-val jelöljük az F összes hk ($h \in H$, $k \in K$) alakú elemeinek összességét. Ha az F valamely R részhalmazára $RR \subseteq R$ teljesül, akkor R-et az F *részfélcsoport*jának nevezzük. Ha az F valamely I részhalmazára

$$FI \subseteq I, \quad \text{ill.} \quad IF \subseteq I,$$

akkor azt mondjuk, hogy I az F-nek *balideál*ja, ill. *jobbideál*ja; ha I egyidejűleg bal- és jobbideál, akkor egyszerűen *ideál*nak mondjuk.

Számos olyan félcsoport ismeretes, amelyben a tekintett műveleten kívül olyan rendezési (azaz: reflexív, antiszimmetrikus és tranzitív) reláció is van értelmezve, amelyre nézve a művelet monoton, azaz ha $a \leqq b$, akkor a félcsoport bármely c elemére $ca \leqq cb$ és $ac \leqq bc$. Az ilyen félcsoportot a tekintett $\leqq$ relációra nézve *(részben) rendezett félcsoport*nak nevezzük: ha a félcsoport a tekintett $\leqq$ relációra nézve teljesen rendezett (azaz érvényes a trichotómia is), akkor *teljesen rendezett félcsoport*ról beszélünk.

A hazai félcsoportelméleti kutatómunka fő irányai az utolsó évtizedben a következők voltak:

a) Az ideálfogalom általánosításai.
b) A félcsoportok egyes speciális osztályainak vizsgálata.
c) Félcsoportok bővítése.
d) Rendezett félcsoportok elmélete.

Az alábbiakban erről a négy területről külön-külön számolunk be.

3. Az ideálfogalom általánosításai

Ismeretes, hogy az ideálok fontos szerepet játszanak a félcsoportelmélet számos problémakörében. Az újabb vizsgálatok azt mutatták, hogy bizonyos kérdések megválaszolásához hasznosak lehetnek az ideálfogalom egyes általánosításai.

STEINFELD OTTÓ 1956-ban megjelent [22] dolgozatában bevezeti a félcsoport *kváziideál*jának fogalmát[2]: az F félcsoport valamely Q részhalmazát kváziideálnak nevezi, ha

$$FQ \cap QF \subseteq Q.$$

Látható, hogy minden ideál kváziideál is, tehát valóban az ideálfogalom általánosításáról van szó. Továbbá, F minden kváziideálja egyszersmind részfélcsoportja is F-nek.

Az ideál és a kváziideál fogalmát közös alapgondolatnak megfelelően tovább általánosította LAJOS SÁNDOR ([8] vagy [14]), a következőképpen: az F félcsoport A részfélcsoportját (m, n)-ideálnak nevezi, ha

$$A^m F A^n \subseteq A$$

[2] Gyűrűkre már korábban definiálta a kváziideált; l.: STEINFELD OTTÓ, On ideal-quotients and prime ideals, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, 4 (1953), 289—298.

($m=0$, ill. $n=0$ esetén az illető tényezőt törölni kell). Hasonló az (m, n)-kváziideál definíciója is: így nevezi az A részfélcsoportot akkor, ha

$$A^m F \cap F A^n \subseteq A.$$

Nyilvánvaló, hogy az

(0, 1)-ideál a balideál,
(1, 0)-ideál a jobbideál,
(1, 1)-kváziideál az eredeti kváziideál;

az új fogalomalkotás tehát magában foglalja a régieket.

A bevezetett fogalmak hasznosaknak bizonyultak egyes félcsoportosztályok tulajdonságainak vizsgálatában. Mielőtt áttérnénk az ilyen természetű eredmények ismertetésére, az ezekre a fogalmakra vonatkozó fontosabb tételeket soroljuk fel.

STEINFELD — fentebb idézett dolgozatában — megmutatta, hogy ha egy F félcsoportban B balideál, J pedig jobbideál, akkor a $Q=B \cap J$ halmaz kváziideál, s F minden Q kváziideálja előállítható ilyen módon; mégpedig ha B a bal-, J a jobbideálok között minimális, akkor Q is minimális a kváziideálok között, és viszont. (Az előbbi tételt LAJOS SÁNDOR a [8]-ban általánosította; l. alább.) Megállapította, hogy a minimális kváziideálok éppen azok a kváziideálok, amelyek az F-beli műveletre nézve csoportot alkotnak, s egy félcsoport összes minimális kváziideáljai izomorfok. Bebizonyította, hogy ha egy félcsoportnak van minimális kváziideálja, akkor minden minimális bal- (és jobb-) ideál minimális kváziideálok egyesítéseként állítható elő, az összes minimális kváziideálok egyesítése pedig a félcsoport összes ideáljainak metszetével, az ún. *Szuskevics-mag*gal egyenlő. Részletesebben vizsgálja az *inverzes félcsoport*ok kváziideáljait; így nevezünk egy F félcsoportot akkor, ha bármely a eleméhez egy és csak egy olyan b elem található F-ben, hogy $aba=a$ és $bab=b$.

Egy évvel későbbi, [23] dolgozatában olyan félcsoportok kváziideáljait vizsgálja, amelyek valódi (tehát nem üres) M Szuskevics-maggal rendelkeznek. Egy I ideált *relatív minimális*nak mond, ha $M \subset I$, de nincs olyan J ideál, hogy $M \subset J \subset I$ teljesülne; hasonlóan értendő a relatív minimális balideál stb. is. Kimutatja, hogy relatív minimális bal- és jobbideál metszete vagy egyenlő M-mel, vagy pedig relatív minimális kváziideál; továbbá, hogy minden relatív minimális Q kváziideál rendelkezik az alábbi két tulajdonság valamelyikével:

(A) $QQ \subseteq M$;
(B) Ha $a, b \in Q-M$, akkor az $ax=b$ és $ya=b$ egyenlet megoldható.

Fordítva, ha egy Q kváziideálra $Q \supset M$ és (B) teljesül, akkor Q relatív minimális.

LAJOS SÁNDOR 1960-ban — Steinfeld egyik tételét általánosítva — kimutatja [8], hogy az F félcsoport valamely részhalmaza akkor és csak akkor (m, n)-kváziideál, ha egy $(m, 0)$- és egy $(0, n)$-ideál metszete. Ezt az eredményét kiegészíti az a későbbi megállapítása ([12], III. rész), hogy ha egy F félcsoport valamely I ideálja részcsoport (tehát, nem csak részfélcsoport) F-ben, akkor I benne van az F minden (m, n)-ideáljában.

Több dolgozatban vizsgálja a reguláris félcsoportok kváziideáljait. *Reguláris*nak[3] nevezzük az F félcsoportot, ha bármely a eleméhez található olyan $x \in F$,

[3] A magyar nyelvű algebrai irodalomban az olyan félcsoportot szokás „reguláris"-nak nevezni, amelyet ebben a dolgozatban „egyszerűsíthető"-nek mondunk. A jelen dolgozat terminológiája a bevett angol—francia terminológiához igazodik.

hogy $axa=a$. (Az inverzes félcsoportok, s még inkább a csoportok, nyilvánvalóan regulárisak.) LAJOS SÁNDOR eredményei szerint reguláris félcsoport bármely két kváziideáljának szorzata ismét kváziideál [9][4], bármely két (1, 1)-ideál szorzata ismét (1, 1)-ideál, sőt az utóbbiak maguk is reguláris félcsoportot alkotnak [10]. Továbbá, tetszőleges félcsoportban minden (m, n)-kváziideál (m, n)-ideál, reguláris félcsoportban pedig a fordított állítás is igaz, tehát ezekben a félcsoportokban a két fogalom egybeesik [8].

Egy további dolgozatában ([12], II. rész) bebizonyítja, hogy ha B bal-, J pedig jobbideál, akkor $A=JB$ (1, 1)-ideál; fordítva, reguláris félcsoport bármely A (1, 1)-ideálja előállítható ilyen módon.

Előbb idézett, [9] gyűrűelméleti dolgozatában lényegileg megfogalmazza annak szükséges és elegendő feltételét, hogy reguláris félcsoport valamely részfélcsoportja kváziideál legyen: a reguláris F félcsoport A részfélcsoportja akkor és csak akkor kváziideál F-ben, ha $AFA \subseteq A$.

4. A félcsoportok egyes speciális osztályainak vizsgálata

1. Csoportok egyesítéseként előállítható félcsoportok. Ezeknek a félcsoportoknak a tulajdonságai ma már eléggé tisztázottak és számos jellemzésük ismeretes. Az utóbbiak közül az elsők közé tartozik SZÉP JENŐ eredménye, amelyet a következő bekezdésben ismertetünk.

Az F félcsoport minden egyes a eleméhez rendeljük hozzá az F valamely F_a részhalmazát a következőképpen: Ha a-nak van inverze F-ben, tehát a $G=\{a^n\}$ $(n=..., -2, -1, 0, 1, 2, ...)$ halmaz F-nek részcsoportja, továbbá ha az F minden olyan b eleme felcserélhető a G egységelemével, amelyre $b^2=a$ teljesül, akkor legyen $F_a=G$; minden más esetben legyen $F_a=\{a^n\}$ $(n=1, 2, ...)$, tehát az F-ben az a elem által generált részfélcsoport. SZÉP tétele (l. [33]) kimondja, hogy egy F félcsoport akkor és csak akkor állítható elő közös elem nélküli csoportok halmazelméleti egyesítettjeként, ha az F minden a eleméhez van olyan $C_a \subseteqq F-F_a$, hogy $F_aC_a = F-F_a$.

2. Egységelemes félcsoportok. Mint ismeretes, egy F félcsoport valamely e elemét az F *bal-*, ill. *jobbegységelem*ének nevezünk, ha $ex=x$, ill. $xe=x$ az F minden x elemére; ha e egyidejűleg bal- és jobbegységelem, akkor az F *egységelem*ének mondjuk. Tudjuk, hogy minden félcsoportnak legfeljebb egy egységeleme van, de lehetséges az is, hogy nincs egységeleme.

RÉDEI LÁSZLÓ [20] dolgozatában bevezette a „balegység" fogalmát: az F félcsoport a elemét az F *balegységé*nek nevezte el, ha $aS=S$. Nyilvánvaló, hogy minden balegységelem még inkább balegység; fordítva azonban nem, sőt RÉDEI példát adott olyan félcsoportra, amelynek nincsen balegységeleme, de van balegysége.

Ha a balegységet definiáló egyenletben a bal oldali két tényezőt felcseréljük, akkor a *jobbegység* definíciójához jutunk; *egység* az olyan elem, amely egyidejűleg bal- és jobbegység. Ezeknek a fogalmaknak a segítségével LAJOS SÁNDOR és SZÉP JENŐ [15] az egységelemes félcsoportok két érdekes jellemzését adták meg: egy félcsoport akkor és csak akkor egységelemes, ha van benne egység, ill. akkor

[4] LAJOS SÁNDOR ezt az eredményt formailag reguláris gyűrűk kváziideáljaira mondta ki, de eredményéből triviálisan következik ugyanez a reguláris félcsoportokra is.

és csak akkor, ha tartalmaz olyan balegységet, amely nem balnövelő (a *Ljapin*-féle értelemben) és tartalmaz olyan jobbegységet is, amely nem jobbnövelő elem. Az F félcsoport valamely b elemét *balnövelő*nek nevezzük, ha van F-nek olyan valódi R részhalmaza, hogy $bR=F$.

3. Reguláris félcsoportok. KOVÁCS LÁSZLÓ és LAJOS SÁNDOR a reguláris félcsoportok néhány fontos tulajdonságát derítették fel. KOVÁCS LÁSZLÓnak igen nevezetes eredménye az az [5]-beli tétel, hogy egy félcsoport akkor és csak akkor reguláris, ha bármely J jobbideáljának és B balideáljának JB szorzata a két részhalmaz közös részével egyenlő[5]. Az 1956-ból származó eredményt azóta többen is felhasználták és tovább is fejlesztették.

Egy félcsoport bármely elemét tartalmazza legalább egy ideál, ti. a félcsoport maga, de általában több ideál is tartalmazza. Az a elemet tartalmazó összes ideálok közös része ismét ideál; ezt az a által generált *főideál*nak nevezzük, és (a)-val jelöljük. Hasonlóan, az a elemet tartalmazó összes bal-, ill. jobbideálok metszetét az a által generált *főbalideál*nak, illetve *főjobbideál*nak nevezzük és $(a)_B$-vel, ill. $(a)_J$-vel jelöljük. Ezek segítségével jellemzi LAJOS SÁNDOR 1961-ből való tétele a reguláris félcsoportokat: egy F félcsoport akkor és csak akkor reguláris, ha bármely B főbalideáljára és J főjobbideáljára $JB=J\cap B$ (l. [7]). Tovább menve, ennél még kevesebbet kívánó elegendő feltételt is adott, megállapítva, hogy a regularitáshoz már az is elegendő, ha csak $(a)_J(a)_B=(a)_J\cap(a)_B$ teljesül a félcsoport minden a elemére. Ebből pedig az következik, hogy kommutatív félcsoport akkor és csak akkor reguláris, ha minden főideálja idempotens.

Nemrég megjelent, [13] dolgozatában az olyan F félcsoportok regularitását vizsgálja, amelyekben bármely x elem eleget tesz az $xF=Fx$ egyenlőségnek; az ilyen félcsoportokat — a csoportelméletből vett analógia alapján — *normális félcsoport*oknak nevezzük. Kimutatja, hogy normális félcsoport akkor és csak akkor reguláris, ha minden balideálja idempotens (azaz, minden B balideálra $BB=B$).

A reguláris félcsoportokéval bizonyos mértékig rokon az intrareguláris félcsoportok osztálya. Egy F félcsoportot *intrareguláris*nak nevezünk, ha az F bármely a eleméhez található olyan $x, y\in F$, hogy $xa^2y=a$. LAJOS SÁNDOR a [11]-ben bebizonyítja, hogy ha F intrareguláris félcsoport, I pedig az F ideálja, akkor I minden ideálja F-ben is ideál. (Ugyanez tetszőleges F félcsoportra nyilvánvalóan nem érvényes.) Az intrareguláris félcsoportok elméletébe vág egy, megjelenés alatt álló eredményem [29], amely STONE egyik fontos hálóelméleti tételének félcsoportelméleti analogonja: egy F félcsoport akkor és csak akkor intrareguláris, ha minden olyan a, b elempárjához, amelyre $(a)\not\ni b$, található olyan P prímideál, amely az a elemet tartalmazza, de b-t nem.

4. Egyszerűsíthető félcsoportok. Egy F félcsoportról azt mondjuk, hogy *balról egyszerűsíthető*, ha tetszőleges $a, b, c\in F$ elemekre az $ab=ac$ egyenletből mindig $b=c$ következik; ha F (hasonló értelemben) jobbról is egyszerűsíthető, akkor *egyszerűsíthető* félcsoportnak nevezzük.

PEÁK ISTVÁN 1958-ban megírt [16] dolgozatában megállapítja, hogy ha egy ilyen félcsoportnak van centruma, de önmagán kívül nincs más ideálja, akkor ez a félcsoport szükségképpen csoport.

[5] A [4] lábjegyzetben elmondottak KOVÁCS LÁSZLÓ tételére is vonatkoznak.

Hasonló természetű problémát vizsgál, POLLÁK GYÖRGYgyel közösen, a későbbi, [18] dolgozatban. Ebben olyan félcsoportokról van szó, amelyekben minden $I_1 \supset I_2 \supset \ldots$ ideálsorozat véges; az ilyenekről azt mondjuk, hogy az ideáljaikra nézve *minimumkövetelmény*nek tesznek eleget. A dolgozat fő tétele a következő: Ha egy nem üres centrumú, balról egyszerűsíthető F félcsoport az ideáljaira nézve eleget tesz a minimumkövetelménynek, akkor F csoport.

5. *Teljes félcsoportok.* Ismeretes, hogy a csoportelméletben milyen nagy szerepet játszanak a csoport normális részcsoportjai. E fogalom általánosításaképpen RÉDEI LÁSZLÓ még 1952-ben megalkotta a félcsoport normális részcsoportjainak fogalmát[6]: az F félcsoport valamely N részfélcsoportját *balnormális*nak nevezi, ha az

$$F = N \cup a_1 N \cup a_2 N \cup \ldots \qquad (a_1, a_2, \ldots \in F)$$

osztályozás kompatibilis (azaz ha a hozzá tartozó $\equiv$ ekvivalenciarelációra teljesül az, hogy az F bármely x, y, z elemeire $x \equiv y$-ból $xz \equiv yz$ és $zx \equiv zy$ következik), továbbá, ha bármely i-re és n_1, $n_2 \in N$ elempárra $a_i n_1 = a_i n_2$ csak $n_1 = n_2$ esetén teljesül. WIEGANDT (l. [32]) egy félcsoport *normális* részfélcsoportján olyan részfélcsoportot ért, amely egyidejűleg bal- és jobbnormális.

A WIEGANDT által a [34]-ben vizsgált probléma, a félcsoportok osztályára leszűkítve, a következőképpen fogalmazható meg. Legyen T valamilyen, a félcsoportokra vonatkozó tulajdonság (pl. kommutativitás, regularitás stb.). Nevezzük a T-tulajdonságú F félcsoportot erre a tulajdonságra nézve *teljes*nek, ha F ún. direkt komponens minden olyan T-tulajdonságú S félcsoportban, amely F-et balnormális részfélcsoportként tartalmazza. (Akkor mondjuk, hogy F *direkt komponens* S-ben, ha van S-nek olyan G részfélcsoportja, hogy S minden eleme egyértelműen előállítható egy F-beli és egy G-beli elem szorzataként, továbbá F minden eleme G minden elemével felcserélhető.) A feladat az, hogy adott T tulajdonsághoz határozzuk meg az összes teljes félcsoportokat.

WIEGANDT ezt a feladatot előbb az egységelemes egyszerűsíthető félcsoportok, majd a kommutatív félcsoportok osztályára oldja meg ([34], illetve [35]). Az előbbiekkel kapcsolatos eredmény megfogalmazása előtt emlékeztetünk arra, hogy egy F félcsoport *automorfizmus*án az F-nek olyan, önmagára való kölcsönösen egyértelmű φ leképezését értjük, amelyre $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ $(a, b \in F)$ érvényes; ha a φ-ről a kölcsönös egyértelműség helyett csak az egyértelműséget tételezzük fel, akkor *endomorfizmus*nak mondjuk. Egységelemes F félcsoportnak lehetnek *belső automorfizmus*ai: így nevezünk egy φ automorfizmust akkor, ha található olyan $c \in F$, hogy c-nek van inverze F-ben és $\varphi(x) = cxc^{-1}$ az F minden x elemére. Ez utóbbi fogalom felhasználásával WIEGANDT első eredménye így fogalmazható meg: Egységelemes, egyszerűsíthető félcsoport akkor és csak akkor teljes, ha minden automorfizmusa belső és centruma csak az egységelemből áll.

A [35] egyik eredménye szerint kommutatív F félcsoport akkor és csak akkor teljes, ha $F^n = F$ minden n természetes számra. De megadja az összes ilyen félcsoportok leírását is: bármely teljes kommutatív félcsoport egyértelműen előállítható olyan direkt komponensek szorzataként, amelyek között csak a racionális számok additív csoportjával, a nemnegatív racionális számok additív félcsoportjával és

[6] RÉDEI LÁSZLÓ, Die Verallgemeinerung der Schreierschen Erweiterungstheorie, *Acta Sci. Math.*, **14** (1952), 252—273.

a *Prüfer*-féle p^∞ típusú csoportokkal izomorf félcsoportok fordulnak elő. Végül megállapítja, hogy minden kommutatív félcsoport izomorf egy alkalmasan választott teljes kommutatív félcsoport valamely részfélcsoportjával.

Nem a teljes félcsoportok elméletébe vág ugyan, de a normalitás fogalmához kapcsolódik PEÁK ISTVÁN [17] dolgozata, s ezért erről itt számolunk be. PEÁK a részfélcsoport normalitásának követelményeként egyedül a fentebb felírt osztályozás kompatibilitását tartja meg, s ezt az általánosabb normalitási fogalmat egységelemes F félcsoportban vizsgálja. Kimutatja, hogy ha N az F-nek olyan részcsoportja, amely tartalmazza F egységelemét, akkor az alábbi négy állítás ekvivalens:

1. N balnormális;
2. N jobbnormális;
3. $aN=Na$ az F minden a elemére,
4. az $F=N\cup aN\cup bN\cup\ldots$ és $F=N\cup Na\cup Nb\cup\ldots$ osztályozások osztályai páronként megegyeznek.

Másik tétele szerint, ha az M és N részfélcsoportok mindketten balnormálisak és mindketten tartalmazzák az F egységelemét, akkor az MN komplexusszorzat — s ha F még egyszerűsíthető is, akkor az $M\cap N$ metszet — szintén balnormális.

6. Végesen generált kommutatív félcsoportok. Egy F félcsoportot *végesen generált*nak nevezünk, ha megadható F-nek olyan $a_1, a_2, \ldots, a_n$ véges részhalmaza, hogy az F minden eleme ezek szorzataként előállítható (persze, ehhez az előállításhoz egy-egy elemet többször is felhasználhatunk tényezőként); pontosabban azt is mondjuk, hogy az F félcsoport *n elemmel generált*. RÉDEI LÁSZLÓ nemrég megjelent [21] könyvében részletesen kifejti a végesen generált kommutatív félcsoportok elméletét. Ebben a dolgozatban nincs elég helyünk arra, hogy RÉDEInek a könyvével jelentőségéhez mérten foglalkozzunk; erre csak külön részletes referátum vállalkozhatik. Így arra kell szorítkoznunk, hogy egészen röviden ismertessük a könyv tárgyát.

Az n elemmel generált F félcsoport elemeit az n-dimenziós affin tér pontjaival reprezentálva, F beágyazható a tér egész koordinátájú pontjainak F_0 modulusába. Az F_0-ban hálóműveletek értelmezhetők a következőképpen: ha az F félcsoport a és b elemének a tér $\{a_1, \ldots, a_n\}$, illetve $\{b_1, \ldots, b_n\}$ pontja felel meg, akkor legyen $\inf(a, b)=\{\min(a_1, b_1), \ldots, \min(a_n, b_n)\}$ és $\sup(a, b)=\{\max(a_1, b_1), \ldots, \max(a_n, b_n)\}$.

A könyv túlnyomó részben a végesen generált kommutatív félcsoportok kongruenciarelációnak leírásával foglalkozik. E célból bevezeti az úgynevezett *magfüggvényt:* a C kongruenciarelációhoz tartozó f_C magfüggvény értelmezési tartománya az $M_C = \{a-b; aCb\}$ halmaz (ahol aCb azt jelenti, hogy a kongruens b-vel a C-re nézve), értékkészlete az F félcsoport ideáljainak valamely halmaza, és

$$aCb \text{ akkor és csak akkor, ha } \inf(a, b)\in f_C(a-b).$$

Az ilyen f_C függvények teljes jellemzését megadja, s részletesen vizsgálja különböző típusaikat. Ellentétben a csoportok esetével, az M_C halmaz nem határozza meg a C-t, de van F-nek olyan I főideálja, amelyen meghatározza, tehát az I főideálban levő a, b elempárra aCb akkor és csak akkor teljesül, ha $a-b\in M_C$. Az ilyen főideálok egyesítését nevezi RÉDEI a *C kongruenciareláció magjá*nak. A vizsgálatok egyik fő eredménye az, hogy a végesen generált kommutatív félcsoportok osztálya (a csoportokhoz és a gyűrűkhöz hasonlóan) olyan algebrai struktúraosztály, amelyben a kongruenciarelációk a struktúra bizonyos részhalmazai segítségével egyértelműen meghatározhatók.

A könyv behatóan vizsgálja a végesen generált kommutatív félcsoportok ideáljainak hálóját, s megállapítja, hogy az olyan disztributív háló, amely eleget tesz a maximumkövetelménynek.

7. Félhálók. Az olyan kommutatív félcsoportot, amelyben minden elem idempotens is, *félháló*nak nevezzük.

A. H. CLIFFORD nyomán az F félcsoport önmagába való egyértelmű λ leképezését *baltranszláció*nak nevezzük, ha $\lambda(x)\cdot y = \lambda(xy)$, és *jobbtranszláció*nak nevezzük, ha $x\cdot\lambda(y) = \lambda(xy)$ az F minden x, y elempárjára; az F *transzlációján* pedig olyan leképezést értünk, amely az F-nek egyidejűleg bal- és jobbtranszlációja. Nyilvánvaló, hogy kommutatív félcsoportnak (speciálisan, félhálónak) minden baltranszlációja és jobbtranszlációja egyszersmind a félcsoport transzlációja. A λ baltranszlációt *speciális*nak mondjuk, ha van olyan c elem F-ben, hogy $\lambda(x) = cx$ minden x-re; az F speciális jobbtranszlációja olyan λ jobbtranszláció, amely előállítható $\lambda(x) = xc$ alakban, ahol c az F valamely rögzített eleme. CLIFFORD nyomán a λ bal- és μ jobbtranszlációt *egymáshoz kapcsolt*nak nevezzük, ha $x\cdot\lambda(y) = \mu(x)\cdot y$ a félcsoport bármely x, y elempárjára teljesül.

[25] dolgozatomban megállapítottam, hogy egy F félháló önmagába való leképezése akkor és csak akkor transzláció, ha a leképezés idempotens endomorfizmus és a képelemek halmaza F-nek ideálja. Továbbá kimutattam, hogy az „$x \leqq y$ akkor és csak akkor, ha $xy = y$” rendezési relációra nézve F minden egyes λ transzlációja teljesíti az *extenzivitás* (azaz, az $x \leqq \lambda(x)$ minden x-re) és a *monotonitás* követelményét. A vizsgálatokat SZENDREI JÁNOSsal közösen folytatva (l. [30]), újabb eredményeket sikerült elérnünk. Megállapítottuk, hogy az F félháló transzlációi F-nek pontosan azok az önmagába való egyértelmű leképezései, amelyek F minden speciális transzlációjával felcserélhetők, továbbá hogy az F összes transzlációi maguk is félhálót alkotnak, s ebben a félhálóban a speciális transzlációk az F-fel izomorf ideált képeznek.

8. Félcsoportok különleges tulajdonságú részfélcsoportokkal, illetve ideálokkal. POLLÁK GYÖRGY és RÉDEI LÁSZLÓ közös [19] dolgozatukban meghatározták az összes olyan félcsoportokat, amelyeknek minden valódi részfélcsoportjuk csoport. Kimutatták, hogy minden ilyen félcsoport szükségképpen *torziófélcsoport*, azaz olyan, amelyben bármely a elemhez található olyan m és n természetes szám, hogy $n > m$ és $a^n = a^m$. Pontosabban, a vizsgált tulajdonságú félcsoportok a következők: 1. az összes torziócsoportok; 2. az összes kételemű félcsoportok; 3. az összes olyan egy elemmel generált félcsoportok, amelyeknek a generáló eleméhez található olyan $n > 2$ természetes szám, hogy $a^n = a^2$.

SZÁSZ FERENC, korábbi gyűrűelméleti eredményeit általánosítva, az olyan félcsoportokat határozta meg, amelyekben minden végesen generált valódi részfélcsoport főjobbideál. A [24]-ben közölt vizsgálatok eredményeképpen kiderült, hogy pontosan 8 ilyen félcsoport van, s mind legfeljebb négy elemű; közülük 4 olyan, hogy minden valódi részfélcsoportja előáll a félcsoport alkalmasan választott elemének és magának a félcsoportnak a szorzataként.

RÉDEI LÁSZLÓ algebra könyvének német kiadásában[7] jellemzi az olyan fél-

[7] RÉDEI LÁSZLÓ, *Algebra I.*, Akademische Verlagsgesellschaft, Geest & Portig K.—G., Leipzig, 1959.

csoportokat, amelyeknek minden részhalmazuk részfélcsoport, s az ilyeneket *széttagolható félcsoport*oknak nevezi el. Azután felveti a következő problémát: Igaz-e, hogy ha egy F félcsoport ún. *Frattini-féle részfélcsoport*ja[8] üres, akkor F széttagolható? Egyidejűleg megjegyzi, hogy legfeljebb három elemből álló félcsoportra ez igaz. A problémát LAJOS SÁNDOR oldotta meg, kimutatván a [6]-ban, hogy nagyobb számosságú félcsoport esetén a válasz tagadó.

RÉDEI, idézett könyvében, meghatározza az összes olyan véges nemkommutatív félcsoportokat, amelyeknek minden valódi részfélcsoportjuk kommutatív. Ő vezeti be az ilyen félcsoportokra *az elsőfokúban nemkommutatív félcsoport* elnevezést (s hasonló értelemben beszél más „elsőfokban nemkommutatív struktúrák"-ról is).

Megjelenés alatt álló [26] dolgozatomban azokkal a félcsoportokkal foglalkozom, amelyeknek minden ideálja, vagy legalábbis minden főideálja *prím*, azaz minden I ideál (illetve főideál) olyan tulajdonságú, hogy a félcsoport tetszőleges x, y elempárja esetén az $xy \in I$ tartalmazás csak akkor áll fenn, ha $x \in I$ és $y \in I$ közül legalább az egyik teljesül. Kimutatom, hogy ilyen félcsoport összes ideáljai, illetve összes főideáljai teljesen rendezett halmazt képeznek a halmazelméleti tartalmazás relációjára nézve.

5. Félcsoportok bővítése

Legyen I az F félcsoport ideálja, s tekintsük F-nek azt az osztályozását, amelynek egyik osztálya I, az I-be nem tartozó minden egyes elem pedig önmaga alkot egy osztályt. Könnyen belátható, hogy az osztályok halmaza, amelyet F/I-vel jelölünk, az F-nek homomorf képe, s így szintén félcsoport, mégpedig zéruselemes: zéruseleme az I osztály. (Mint ismeretes, egy F félcsoport 0 elemét az F zéruselemének nevezzük, ha az F minden x elemére $x0=0x=0$ teljesül.) A konstrukció első alkalmazójának tiszteletére az F/I-t az F félcsoport I szerinti *Rees-féle faktorfélcsoport*jának nevezzük.

A faktorfélcsoport fogalmára támaszkodva CLIFFORD[9] kidolgozott egy, a csoportok *Schreier*-féle bővítésével analóg félcsoportbővítési eljárást. Legyen S és T két, közös elem nélküli félcsoport, s T-nek legyen zéruseleme. Az S-nek T-vel való *Clifford-féle bővítés*én értünk minden olyan F félcsoportot, amely S-et ideálként tartalmazza, s az F/S faktorfélcsoport izomorf T-vel.

RÉDEI[10] és VAN LEEUWEN[11] gyűrűelméleti vizsgálatainak analógiájára SZENDREI a [31]-ben bevezette a *kettőstranszláció* (más néven: *bitranszláció*) fogalmát. Ezen az F félcsoport olyan, önmagába való $\lambda=(\lambda_b, \lambda_j)$ leképezéspárját érti, amelynek első komponense baltranszláció, második komponense jobbtranszláció F-en, a λ_b és λ_j egymáshoz kapcsoltak és egymással felcserélhetők. A kettőstranszlációk valamely halmazát *barátságos*nak mondja, ha e halmaz bármely két, $\lambda=(\lambda_b, \lambda_j)$ és $\mu=(\mu_b, \mu_j)$ elemére $\lambda_b\mu_j=\mu_j\lambda_b$. Könnyen belátható, hogy ha egy ilyen halmaz

[8] A Frattini-féle részfélcsoportot ugyanúgy definiáljuk, mint a csoportelméletben a Frattini-féle részcsoportot.

[9] A. H. CLIFFORD, Extension of semigroups, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **68** (1950), 165—173.

[10] RÉDEI LÁSZLÓ, Csoportok és gyűrűk holomorfelmélete, *MTA III. Osztályának Közleményei*, **4** (1954), 27—48.

[11] L. C. A. VAN LEEUWEN, On the holomorphs of a ring, *Nederl. Akad. Wet. Proceedings, Ser. A*, **61** (1958), 162—169.

maximális, akkor félcsoportot alkot; az ilyent éppen ezért *maximális barátságos kettőstranszláció-félcsoport*nak nevezzük.

Egy félcsoporthoz általában több maximális barátságos kettőstranszláció-félcsoport tartozik. SZENDREI a [31]-ben elegendő, a [32]-ben pedig szükséges feltételt ad meg arra, hogy egy félcsoportnak csak egyetlen maximális barátságos kettőstranszláció-félcsoportja legyen: elegendő az egyoldali egyszerűsíthetőség, vagy az $FF=F$ fennállása; szükséges, hogy a transzlációk félcsoportja kommutatív legyen. Szükséges és elegendő feltételt is megállapít: T_1'-vel, illetve T_2'-vel jelölve azoknak a bal-, illetve jobbtranszlációknak a halmazát, amelyek legalább egy kettőstranszláció első, illetve második komponenseként fellépnek, bebizonyítja, hogy egy F félcsoportnak akkor és csak akkor van egyetlen maximális barátságos kettőstranszláció-félcsoportja, ha a T_1' minden eleme a T_2' bármely elemével felcserélhető.

A fenti fogalmak segítségével nyeri két dolgozatának fő eredményeit. A [31]-ben szükséges és elegendő feltételt ad meg arra, hogy egy S félcsoportnak létezzék a zéruselemes T félcsoporttal való *Clifford*-féle bővítése. A [32]-ben bevezeti a félcsoport *holomorf*jának fogalmát, s vizsgálja annak bizonyos részfélcsoportokkal való kapcsolatát: az F félcsoport holomorfján az F-nek saját maximális barátságos kettőstranszlációival való *Clifford*-féle bővítéseit értjük.

6. Rendezett félcsoportok elmélete

Ismeretes, hogy a természetes számok N additív félcsoportjának rendezése kiterjeszthető az N-et tartalmazó egész számok additív félcsoportjára. Ennek a konkrét esetnek általánosítása a következő probléma. Legyen S teljesen rendezett félcsoport, T pedig az S-et tartalmazó félcsoport; vajon az S-beli rendezés kiterjeszthető-e a T-re? FUCHS LÁSZLÓ az [1]-ben kimutatja, hogy ez lehetséges, mégpedig egyértelműen, ha egyrészt a $T-S$ bármely α eleméhez van olyan x és y $(x, y \in S)$, hogy $x\alpha \in S$ és $\alpha y \in S$, másrészt bármely $a \in S$ és $\xi, \eta \in T$ elemekre mind az $a\xi = a\eta$, mind a $\xi a = \eta a$ egyenletből $\xi = \eta$ következik.

Egy másik dolgozatában [2] a teljesen rendezett félcsoportok bizonyos speciális osztályaival foglalkozik. A rendezett F félcsoportról azt mondjuk, hogy

1. *pozitív rendezésű*, ha F bármely a, b elemére $ab \geqq a, b$;
2. *negatív rendezésű*, ha F bármely a, b elemére $ab \leqq a, b$;
3. *természetes rendezésű*, ha F bármely $a<b$ elempárjához van olyan $c \in F$ és $d \in F$, hogy $b=ca=ad$;
4. *archimedeszi rendezésű*, ha F-ben $a^n < b$ minden természetes n-re csak akkor teljesülhet, ha a egységelem F-ben.

Továbbá, az F_1 és F_2 rendezett félcsoportot *rendezésizomorf*nak mondjuk, ha F_1-nek van olyan, kölcsönösen egyértelmű φ leképezése F_2-re, hogy az F_1 valamely a, b elempárjára $a \leqq b$ akkor és csak akkor, ha $\varphi(a) \leqq \varphi(b)$. FUCHS meghatározza az összes olyan teljesen rendezett pozitív rendezésű félcsoportokat, amelyek rendezésizomorfok a valós számok additív félcsoportjának valamely részfélcsoportjával: ilyen, nyilvánvalóan, az egyelemű rendezett félcsoport, valamint minden olyan, teljesen és archimedeszien rendezett félcsoport, melynek nincs maximális eleme és nincs olyan (ún. *anomális*) a, b elempárja, hogy $a \neq b$, de $a^n < b^{n+1}$ és $b^n < a^{n+1}$

minden n természetes számra. Az archimedeszien rendezett csoportokra vonatkozó ismert tétel általánosításaként kimutatja, hogy minden, teljesen és archimedeszien rendezett természetes rendezésű félcsoport kommutatív, s megadja ezek teljes felsorolását.

A részben-rendezett félcsoportokat vizsgálva [3], ezeknek egy eléggé széles osztályára vonatkozólag jellemzi az olyan részben-rendezett csoportokat, amelyek a tekintett félcsoportosztályba tartozó valamely félcsoport homomorf képeként adódnak, s bennük a rendezés az illető félcsoportbeli rendezés következménye (azaz, ha a G csoport a részben-rendezett F félcsoport homomorf képe a φ homomorfizmus szerint és $\varphi(a) \leqq \varphi(b)$ a G-ben, akkor $a \leqq b$ az F-ben).

FUCHS LÁSZLÓ és STEINFELD OTTÓ nemrég megjelent közös [4] dolgozata a rendezett félcsoportok elemeinek prímelemek szorzatára való felbonthatóságát vizsgálja. Legyen F legalább két elemet tartalmazó, negatív és természetes rendezésű olyan félcsoport, amelyben bármely $a_1 < a_2 < \ldots$ növekvő sorozat véges. Továbbá, tartalmazzon F olyan e maximális elemet, amely balegységelem F-ben, s F minden egyes a, b elempárjához legyen olyan elem — jelöljük, szokás szerint, $a:b$-vel — hogy $xb \leqq a$ akkor és csak akkor, ha $x \leqq a:b$. FUCHS és STEINFELD kimutatták, hogy ha még az is teljesül, hogy az F bármely a, b elemére az $a = ba (\neq 0)$ összefüggésből $b = e$ és az $ab = 0$ egyenletből $a = 0$ vagy $b = 0$ következik, akkor e az F-nek egységeleme és a $0 < a < e$ feltételnek eleget tevő minden a elem felbontható páronként felcserélhető prímelemekre, s ez a felbontás sorrendtől eltekintve egyértelmű. Megjegyzik, hogy gyűrű és félgyűrű ideáljainak félcsoportjában a felsorolt követelmények teljesülnek.

Egyik legutóbbi dolgozatomban ([27], illetve német nyelven [28]) az F félcsoport elemeire egy $\leqq$ relációt vezettem be a következőképpen: legyen $a \leqq b$ akkor és csak akkor, ha $a \in (b)$. Ez a reláció mindig reflexív és tranzitív, de nem mindig antiszimmetrikus; az eredmények éppen arra vonatkoznak, hogy mikor antiszimmetrikus is ez a reláció, illetve hogy ha antiszimmetrikus, akkor a félcsoport milyen különleges tulajdonságokkal rendelkezik.

7. Záró megjegyzés

Ez a dolgozat annak az előadásnak a kibővítése, amelyet a Nyíregyházi Tanárképző Főiskolán hazánk felszabadulásának huszadik évfordulója alkalmából rendezett tudományos ülésszakon tartottam. Az előadás az ülésszak matematikai-fizikai szekciójában, 1965. április 2-án hangzott el.

IRODALOMJEGYZÉK

[1] FUCHS LÁSZLÓ, On the ordering of quotient rings and quotient semigroups, *Acta Sci. Math.*, **22** (1961), 42—45.

[2] FUCHS LÁSZLÓ, Note on fully ordered semigroups, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **12** (1961), 255—260.

[3] FUCHS LÁSZLÓ, On group homomorphic image of partially ordered semigroups, *Acta Sci. Math.*, **25** (1964), 139—142.

[4] FUCHS LÁSZLÓ—STEINFELD OTTÓ, Principal components and prime factorisation in partially ordered semigroups, *Ann. Univ. Sci. Budapestiensis, Sect. Math.*, **6** (1963), 103—111.

[5] KOVÁCS LÁSZLÓ, A note on regular rings, *Publicationes Math.*, **4** (1956), 465—468.
[6] LAJOS SÁNDOR, Rédei László egy félcsoportelméleti problémájáról, *Mat. Lapok*, **10** (1959), 274—277.
[7] LAJOS SÁNDOR, A Remark on Regular Semigroups, *Proc. Japan Acad.*, **37** (1961), 29—30.
[8] LAJOS SÁNDOR, Generalized ideals in semigroups, *Acta Sci. Math.*, **22** (1961), 217—222.
[9] LAJOS SÁNDOR, On quasiideals in regular rings, *Proc. Japan Acad.*, **38** (1962), 210—211.
[10] LAJOS SÁNDOR, О полугруппе подмножеств полугруппы, *Publicationes Math.*, **9** (1962), 223—226.
[11] LAJOS SÁNDOR, A note on intraregular semigroups, *Proc. Japan Acad.*, **39** (1963), 626—627.
[12] LAJOS SÁNDOR, Notes on (m, n)-ideals, I—III, *Proc. Japan Acad.*, **39** (1963), 419—421; **40** (1964), 631—632; **41** (1965), 383—385.
[13] LAJOS SÁNDOR, A criterion for Neumann regularity of normal semigroups, *Acta Sci. Math.*, **25** (1964), 172—173.
[14] LAJOS SÁNDOR, A félcsoportok ideálelméletéhez, I—II., *M. Tud. Akad. III. Osztályának Közleményei*, **11** (1961), 57—66 és **14** (1964), 293—300.
[15] LAJOS SÁNDOR—SZÉP JENŐ, Az egységelemes félcsoportok néhány jellemzése, *M. Tud. Akad. III. Osztályának Közleményei*, **15** (1965), 29—32.
[16] PEÁK ISTVÁN, Ein Satz über Halbgruppen, *Publicationes Math.*, **6** (1959), 111—112.
[17] PEÁK ISTVÁN, Über gewisse spezielle kompatible Klasseneinteilungen von Halbgruppen, *Acta Sci. Math.*, **21** (1960), 346—349.
[18] PEÁK ISTVÁN—POLLÁK GYÖRGY, Bemerkungen über die Halbgruppen mit Minimalbedingung, *Ann. Univ. Sci. Budapestiensis, Sect. Math.*, **3—4** (1960—61), 223—225.
[19] POLLÁK GYÖRGY—RÉDEI LÁSZLÓ, Die Halbgruppen, deren alle echten Teilhalbgruppen Gruppen sind, *Publicationes Math.*, **6** (1959), 126—130.
[20] RÉDEI LÁSZLÓ, Halbgruppen und Ringe mit Linkseinheiten ohne Linkseinselemente, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **11** (1960), 217—222.
[21] RÉDEI LÁSZLÓ, *Theorie der endlich erzeugbaren kommutativen Halbgruppen*, Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1963.
[22] STEINFELD OTTÓ, Über die Quasiideale von Halbgruppen, *Publicationes Math.*, **4** (1956), 262—275.
[23] STEINFELD OTTÓ, Über die Quasiideale von Halbgruppen mit eigentlichem Suschkevitsch-Kern, *Acta Sci. Math.*, **18** (1957), 235—242.
[24] SZÁSZ FERENC, Die Halbgruppen, deren endlich erzeugte echte Teilhalbgruppen Hauptrechtsideale sind, *Acta Sci. Math.*, **25** (1964), 135—138.
[25] SZÁSZ GÁBOR, Die Translationen der Halbverbände, *Acta Sci. Math.*, **17** (1956), 165—169.
[26] SZÁSZ GÁBOR, Über Primideale von Halbgruppen, megjelenik a *Publicationes Math.*, **13.** kötetében.
[27] SZÁSZ GÁBOR, A félcsoportok egy kvázirendezéséről, *Nyíregyházi Tanárképző Főiskola Tudományos Közleményei*, **1** (1965), 168—172.
[28] SZÁSZ GÁBOR, Über eine Quasiordnung von Halbgruppen, megjelenik a *Publicationes Math.*, **13.** kötetében.
[29] SZÁSZ GÁBOR, Halbgruppen, deren Elemente durch Primideale trennbar sind, megjelenik az *Acta Sci. Math.* c. folyóiratban.
[30] SZÁSZ GÁBOR—SZENDREI JÁNOS, Über die Translationen der Halbverbände, *Acta Sci. Math.*, **18** (1957), 44—47.
[31] SZENDREI JÁNOS, Félcsoportok bővítéséről, *A Szegedi Pedagógiai Főiskola Évkönyve*, 1962, 243—248.
[32] SZENDREI JÁNOS, A félcsoportok holomorfjai, *A Szegedi Tanárképző Főiskola Tudományos Közleményei*, 1965, 187—192.
[33] SZÉP JENŐ, Zur Theorie der Halbgruppen, *Publicationes Math.*, **4** (1956), 344—346.
[34] WIEGANDT RICHÁRD, On complete semi-groups, *Acta Sci. Math.*, **19** (1958), 93—97.
[35] WIEGANDT RICHÁRD, On complete semi-modules, *Acta Sci. Math.*, **19** (1958), 219—223.

ADOTT ZAVARJELZŐ RENDSZER ALKALMAZÁSÁVAL KAPCSOLATOS OPTIMALIZÁLÁSI PROBLÉMÁRÓL

Írta: MÉSZÁROS LAJOS

Bevezetés

Valamely adott termelési folyamatnak komplex módon történő automatizálása során bizonyos rendszerbeli hibák előfordulása következtében többnyire szakaszos időközökben történik a termelés. Amennyiben a termelési folyamatot elektronikus számológéppel vezéreljük, akkor a számológép programját, — adott szempontok szemelőtt tartása mellett, — bizonyos célfüggvény maximumának, vagy minimumának elérése érdekében határozzuk meg. A gyakorlatban a célfüggvény lehet pl. a rendszer efficienciája (a rendszer hatásfoka), melyet adott feltételek mellett maximalizálni akarunk. Mivel a termelési folyamatoknál a hiba előfordulások következtében kényszerállások lépnek fel, ezért a rendszer efficienciájának maximalizálása a kényszerállási idők csökkentésével érhető el. A kényszerállási időket pl. azáltal csökkenthetjük, hogy a hibaforrásokat igyekszünk megszüntetni, illetve a termelést gátló hatásaikat törekszünk kiküszöbölni. Ez megvalósítható pl. úgy, hogy zavarjelző (hibajelző) készüléket alkalmazunk a hibák bekövetkezésének megelőzése érdekében. A hibák egy részét gyakran a technológiai paramétereknek megengedett türés határokon kívül felvett értékei okozhatják. Ha a zavarjelző készüléket a még megengedett tűrés intervallumokon kívül felvett technológiai paraméter értékek jelzésére használjuk, akkor ezen paraméter szintek kellő módon történő megválasztásával elérhetjük, hogy a katasztrofális hiba bekövetkezése előtt — optikai, akusztikai jelzés esetén — a hibákat még időben elhárítsuk.

Ha valamely termelési folyamatot automatizáló rendszer működését M számú hibaforrás — amit a továbbiakban csatornának nevezünk — befolyásolja, akkor felmerül az a kérdés, hogy egy zavarjelző készüléket — amennyiben lehetséges — hány csatornára célszerű rákapcsolni, ha azt kívánjuk elérni, hogy a jelzőkészülékek alkalmazása hatásos és „kifizetődő" legyen. Egy zavarjelző készülék alkalmazása akkor „kifizetődő", ha a megfigyelés alatt álló csatornák számától és a hibák elhárítási költségétől függő ún. haszonfüggvény maximális, feltéve, hogy előírt megbízhatósági szint mellett a jelzőkészülék a kívánalmaknak megfelelően működik.

Tárgyalásaink során feltételezzük, hogy amennyiben valamelyik csatornán meghibásodás (paraméter túllépés) történik, akkor azt a zavarjelző készülék azonnal jelzi. Ezt követően megkezdődik a hiba elhárítása. (Ha valamely csatornán a hiba elhárítása befejeződik, akkor ezt a zavarjelző készülék nem jelzi). Ha M nagy értéket vesz fel, akkor gyakran előfordulhat, hogy egyidejűleg két vagy több meghibásodást kellene a készüléknek jeleznie. Feltételezzük, hogy a zavarjelző egy csatornán egyidejűleg mindig csak egy meghibásodást tud jelezni, vagyis, hogy az alkalmazott hibajelző készüléknek nincs tárolója (tárolóval ellátott készülék igénybevétele ugyanis lényegesen költségesebb volna). Azért, hogy a katasztrofális hiba bekövetkezését nagy megbízhatósággal megelőzzük, azt kívánjuk elérni, hogy a zavarjelző rendszer lehetőleg minden meghibásodást adott T ideig jelezzen.

A vázolt témakörben DOBÓ ANDOR és SZAJCZ SÁNDOR végzett bizonyos vizsgálatokat az [1] alatti dolgozatban. A jelen dolgozat kapcsolódik az [1] s ennek alapján a NEHÉZVEGYIPARI KUTATÓ INTÉZET, Automatizálási Osztályán megkezdett ilyen irányú vizsgálatokhoz, melynek matematikai megfogalmazását DOBÓ ANDOR és SZAJCZ SÁNDOR igen általánosan — a megbízhatóságelmélet egy problémaköreként — a következőképpen adták meg:

Legyen $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_k$ tetszés szerinti valószínűségi változó, $g_i(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_k)$ $(i=1, 2, ..., n)$ pedig a $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_k$ valószínűségi változók értékkészletén értelmezett tetszés szerinti, az adott esetektől függően bizonyos feltételeknek eleget tevő függvények.

Jelöljön $a_1, a_2, ..., a_l$ bizonyos paramétereket és $h_i(a_1, a_2, ..., a_l)$ ezeknek egy függvényét. Tekintsük a

$$P\{g_i(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_k) < h_i(a_1, a_2, ..., a_l)\} = y_i \qquad (i=1, 2, ..., n)$$

valószínűségeket, s legyenek $f_j(y_1, y_2, ..., y_n)$ $(j=1, 2, ..., m)$ ezen valószínűségeknek a függvényei $(m \leqq l)$.

Meghatározandó az $a_1, a_2, ..., a_l$ paraméterek közül jól definiált m számúnak azon értéke, melyre az $L(y_1, y_2, ..., y_n)$ függvény maximumát (minimumot) veszi fel az alábbi feltételek teljesülése mellett.

$$\begin{aligned} 1-\varepsilon_1 &\leqq f_1(y_1, y_2, ..., y_n) \\ 1-\varepsilon_2 &\leqq f_2(y_1, y_2, ..., y_n) \\ &\vdots \\ 1-\varepsilon_m &\leqq f_m(y_1, y_2, ..., y_n). \end{aligned}$$

Bizonyos a feltételekkel definiált paraméter tartomány meghatározásával kapcsolatos problémát az [1] dolgozat tárgyal.

A vizsgálataink során — mint látni fogjuk — az [1]-ben kapott eredményekből közvetlen helyettesítéssel nem származtathatók az esetünkben kívánt eredmények. Ennek ellenére a válaszadásnál jelentősen hasznosíthatók az ott alkalmazott meggondolások.

A csatornaszám optimális meghatározásánál alkalmazott matematikai feltételeket az 1. §-ban ismertetjük. A koincidencia eloszlásfüggvényt a 2. §-ban határozzuk meg.

A felvetett kérdésre a 3. §-ban válaszolunk. A kapott eredményből közvetlenül látni fogjuk, hogy a közölt vizsgálat a DOBÓ ANDOR és SZAJCZ SÁNDOR által definiált problémakörhöz tartozik.

1. §.

A matematikai modell felállítása

Legyen adott M csatorna. Ha valamelyik csatornán meghibásodás történik, azt egy zavarjelző készülék jelzi. Ezt követően megkezdődik a hiba elhárítása. (A tárgyalás során mindvégig feltételezzük, hogy javítás addig sohasem kezdődik el, amíg a zavarjelző készülék a meghibásodást nem jelezte.)

Jelöljük ξ-vel egy tetszés szerinti csatornán valamely folyamat működési idejét (élettartamát), η-val pedig a javítási idő hosszát. Nevezzük a zavarjelző által jelzendő időpontokat realizációs időpontnak. Legyen ζ az az időtartam, melyre a zavarjelző készüléknek szüksége van ahhoz, hogy bármelyik csatornán egy realizációs pontot érdemlegesen jelezni tudjon.

Tegyük fel, hogy kivétel nélkül minden csatornán ugyanazon alábbi feltételek teljesülnek:

1. $P(\xi < t+\Delta t | \xi \geqq t) = \lambda\Delta t + o(\Delta t)$.

Ez azt jelenti, hogy annak a valószínűsége, hogy egy csatornán a $(t, t+\Delta t)$ időközben meghibásodás történik, feltéve, hogy a t időpontban nem volt meghibásodás $\lambda\Delta t + o(\Delta t)$.

2. $P(\eta < t+\Delta t | \eta \geqq t) = \mu\Delta t + o(\Delta t)$

vagyis annak a valószínűsége, hogy a $(t, t+\Delta t)$ időközben a javítás befejeződjék, feltéve, hogy a t időpontban a hibaelhárítás folyamatban volt $\mu\Delta t + o(\Delta t)$.

Tegyük fel továbbá, hogy

3. $P(\zeta < t+\Delta t | \zeta \geqq t) = \gamma\Delta t + o(\Delta t)$

azaz annak a valószínűsége, hogy a $(t, t+\Delta t)$ időközben egy jelzés befejeződik, feltéve, hogy a t időpontban a jelzés folyamatban volt $\gamma\Delta t + o(\Delta t)$.

A továbbiakban mindvégig feltételezzük azt is, hogy valamely tetszés szerinti i csatornán egy realizációs pontnak a bekövetkezése független attól, hogy korábban melyik k $(k \neq i)$ csatornán volt realizációs pont. Bár a gyakorlatban ez a feltétel sem teljesül mindig, ez azonban — az extrém esetek tárgyalása szempontjából — nem jelent túlzottan erős feltételt, ha a zavarjelző készülékünk elég gyors, pl. másodpercnyi nagyságrendű.

2. §.

A koincidencia eloszlásfüggvénye

Jelölje τ_1 az első olyan realizációs pontot, amelynek bekövetkezésekor az előző realizációs pont jelzése még nem fejeződött be. A bevezetésben felvetett kérdés megválaszolásához szükségünk lesz — bizonyos feltételek mellett — a τ_1 eloszlásfüggvényének ismeretére. Ennek meghatározására az [1]-ben alkalmazott meggondolásokat fogjuk alkalmazni, s ez alapján bizonyítjuk az alábbi tételt.

1. TÉTEL: *Ha τ_1 jelenti az első olyan realizációs pontot, amelynek bekövetkezésekor az előző realizációs pont jelzése még nem fejeződött be, akkor*

$$P(\tau_1 < t) = F(t) = 1-[R_0(t)+R_1(t)],$$

ahol $R_l(t)$ $(l=0, 1)$ eleget tesz az alábbi differenciál-egyenletrendszernek:

$$R_0'(t) = -R_0(t)\lambda MQ(t)+R_1(t)\gamma$$
$$R_1'(t) = -R_1(t)(\gamma+\lambda(M-1)Q(t))+R_0(t)\lambda MQ(t),$$

amelyben

$$Q(t)=\frac{Q_1(t)}{Q_1(t)+Q_3(t)}$$

és itt $Q_1(t)$, $Q_2(t)$, $Q_3(t)$ a következő differenciál-egyenletrendszernek tesz eleget

$$Q_1'(t) = -\lambda Q_1(t)+\mu Q_3(t)$$
$$Q_2'(t) = -\gamma Q_2(t)+\lambda Q_1(t)$$
$$Q_3'(t) = -\mu Q_3(t)+\gamma Q_2(t)$$

Bizonyítás: Tekintsünk egy tetszés szerinti csatornát. Jelölje $Q_1(t)$ annak a valószínűségét, hogy a csatorna a t időpontban működés alatt áll, $Q_2(t)$ pedig annak a valószínűségét, hogy a zavarjelző készülék a t időpontban meghibásodást jelez. A $Q_3(t)$ legyen annak a valószínűsége, hogy a csatorna a t időpontban javítás alatt áll. Ekkor könnyen belátható, hogy $Q_1(t)$, $Q_2(t)$ és $Q_3(t)$ eleget tesz az alábbi differenciál-egyenletrendszernek:

$$Q_1'(t) = -\lambda Q_1(t)+\mu Q_3(t)$$
$$Q_2'(t) = -\gamma Q_2(t)+\lambda Q_1(t)$$
$$Q_3'(t) = -\mu Q_3(t)+\gamma Q_2(t)$$

Nyilvánvaló, hogy $Q_1(t)+Q_2(t)+Q_3(t) = 1$ így a $Q_1(0) = 1$ feltétel mellett kapjuk, hogy:

$$Q_1(t) = \frac{\gamma\mu}{\gamma\lambda+\gamma\mu+\lambda\mu} - e^{\omega_1 t}\left(\frac{\lambda(\gamma+\mu)}{\omega_1^2-\omega_1\omega_2}+\frac{\lambda}{\omega_1-\omega_2}\right)+e^{\omega_2 t}\left(\frac{\lambda(\mu+\gamma)}{\omega_2\omega_1-\omega_2^2}+\frac{\lambda}{\omega_1-\omega_2}\right)$$

$$Q_2(t) = \frac{\lambda\mu}{\gamma\lambda+\gamma\mu+\lambda\mu}+e^{\omega_1 t}\left(\frac{\lambda\mu}{\omega_1^2-\omega_1\omega_2}+\frac{\lambda}{\omega_1-\omega_2}\right)-e^{\omega_2 t}\left(\frac{\lambda\mu}{\omega_2\omega_1-\omega_2^2}+\frac{\lambda}{\omega_1-\omega_2}\right)$$

$$Q_3(t) = \frac{\lambda\gamma}{\gamma\lambda+\gamma\mu+\lambda\mu}+e^{\omega_1 t}\frac{\gamma\lambda}{\omega_1^2-\omega_1\omega_2}-e^{\omega_2 t}\frac{\gamma\lambda}{\omega_1\omega_2-\omega_2^2}$$

ahol:

$$\omega_1 = \frac{-(\lambda+\gamma+\mu)+\sqrt{\gamma^2+\lambda^2+\mu^2-2(\gamma\lambda+\gamma\mu+\lambda\mu)}}{2}$$

$$\omega_2 = \frac{-(\lambda+\gamma+\mu)-\sqrt{\gamma^2+\lambda^2+\mu^2-2(\gamma\lambda+\gamma\mu+\lambda\mu)}}{2}$$

s itt

$$\omega_2 < \omega_1 < 0.$$

Jelölje $R_l(t)$ $(l=0,1)$ annak valószínűségét, hogy a zavarjelzőnek a t időpontban l realizációs pontot kell jeleznie úgy, hogy a t ideig 1-nél több realizációs pontot egyetlen esetben sem kellett egyidejűleg jeleznie. Ekkor könnyen belátható, hogy:

$$R_0(t+\Delta t) = R_0(t)\left[\sum_{i=0}^{M} V_{i,0}(t)(1-\lambda\Delta t)^i\right]+R_1(t)\left[\gamma\Delta t\sum_{i=0}^{M-1} V_{i,1}(t)(1-\lambda\Delta t)^i\right]+o(\Delta t)$$

$$R_1(t+\Delta t) = R_1(t)\left[(1-\gamma\Delta t)\sum_{i=0}^{M-1} V_{i,1}(t)(1-\lambda\Delta t)^i\right]+$$

$$+R_0(t)\left[\sum_{i=0}^{M} V_{i,0}(t)\binom{i}{1}\lambda\Delta t(1-\lambda\Delta t)^{i-1}(1-\gamma\Delta t)\right]+o(\Delta t),$$

ahol

$$V_{i,k}(t) = \binom{M-k}{i} Q^i(t)(1-Q(t))^{M-k-i} \qquad (k=0,1)$$

és

$$Q(t) = \frac{Q_1(t)}{Q_1(t)+Q_3(t)}.$$

Ebből következik, hogy:

$$R_0'(t) = -R_0(t)\lambda MQ(t)+R_1(t)\gamma$$

$$R_1'(t) = -R_1(t)(\gamma+\lambda(M-1)Q(t))+R_0(t)\lambda MQ(t)$$

Annak a valószínűsége, hogy t ideig a zavarjelző készülék minden realizációs pontot jelzett, feltéve hogy a zavarjelző készülék hibátlanul működött:

$$R_0(t)+R_1(t).$$

Ez alapján annak a valószínűsége, hogy a készüléknek t ideig valamely $(0,t)$-be eső időpontban legalább 2 realizációs pontot kellett volna jeleznie:

$$F(t) = 1-[R_0(t)+R_1(t)] = P(\tau_1<t).$$

Q. e. d.

KÖVETKEZMÉNY: *Elég nagy $t>T_0$ esetén*

$$P(\tau_1<t) = F(t) \approx 1-e^{-\alpha t}$$

ahol:

$$\alpha = \frac{M(M-1)}{\gamma}\left[\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}\right]^2,$$

feltéve, hogy γ értéke λ és μ értékhez viszonyítva meglehetősen nagy és M értéke is legfeljebb tízes nagyságrendű.

Ennek belátása az [1] dolgozat 3. tételénél alkalmazott meggondolásokkal történhet.

3. §.

Az optimális csatornaszám meghatározása

Tételezzük fel, hogy bármely csatornán valamely előforduló hiba elhárítási költsége K' illetőleg K'' attól függően, hogy zavarjelző készüléket alkalmazunk, vagy sem $(K'<K'')$. Legyen a termelési folyamat s egyben a zavarjelző készülék használati ideje elég nagy, rögzített T érték, $\delta>0$ pedig tetszőlegesen kicsiny számmal előírt $\varepsilon = 1-\delta$ megbízhatósági szint. Tételezzük fel, hogy γ, λ, μ paramétereket ismerjük. A gyakorlatban γ értéke λ és μ értékhez viszonyítva meglehetősen nagy. Vegyük figyelembe ugyanis azt, hogy $\frac{1}{\gamma}$ a jelzési idő, $\frac{1}{\lambda}$ a működési $\frac{1}{\mu}$ pedig a javítási idő várható értékét jelenti, és az esetek többségében hetek, hónapok is eltelnek míg egy meghibásodás bekövetkezik. A javítási idő is órákig, napokig tarthat, ugyanekkor a jelzési idő mindössze néhány másodperc. Jelölje a csatornaszámtól függő haszon függvényt $H(M)$. Ezen szempontok figyelembe vétele mellett az 1. tétel következménye alapján rögzített T esetén, egy tetszés szerinti csatornán a nem jelzett realizációs pontok száma jó közelítéssel αT paraméterű Poisson eloszlást követ.

Amennyiben nem alkalmaznánk zavarjelző készüléket, akkor elég nagy értékű T esetén egy tetszés szerinti csatornán jó közelítéssel átlagosan $\dfrac{T}{\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}}$ meghibásodás fog bekövetkezni. Ezen szempontok szemelőtt tartása mellett, már közvetlenül adódik, hogy

$$H(M) = K''\frac{T}{\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}}M - \left(MK'\frac{T}{\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}}+(K''-K')\alpha T\right) \qquad (o<K'<K''),$$

ahol

$$\alpha = \frac{M(M-1)}{\gamma}\left[\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}\right]^2.$$

A $H(M)$ függvénynek maximuma az

$$M_{\max} = \frac{1}{2}+\gamma\left[\frac{\frac{1}{\mu}+\frac{1}{\lambda}}{2}\right]$$

helyen van. Az 1. tétel következményéből közvetlenül adódik, hogy előírt ε megbízhatóság mellett, γ, λ, μ ismeretében és T megadásával, ha M értékét úgy választjuk meg, hogy arra nézve teljesüljön az

$$M \leqq \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{4\gamma\ln\frac{1}{\varepsilon}}{\left(\frac{\lambda\mu}{\mu+\lambda}\right)^2 T}}$$

egyenlőtlenség, akkor legalább ε 100% biztonsággal állíthatjuk, hogy a készülék $0 \leqq t \leqq T$ intervallumon minden realizációs pontot jelez. Ez utóbbi szempont figyelembe vétele mellett a bevezetésben felvetett kérdésre már most jó közelítéssel az alábbi tétel adja meg a választ.

2. TÉTEL: *Adott ε kockázat mellett rögzített γ, λ, μ és T esetén (feltéve, hogy azok nagyságrendje a már közölt módon alakul) a $H(M)$ haszon függvénynek feltételes maximuma azon $M = M_{\text{opt}}$ helyen van, melyre nézve*

$$M_{\text{opt}} = \begin{cases} \dfrac{1}{2}+\dfrac{\gamma}{2}\left(\dfrac{1}{\mu}+\dfrac{1}{\lambda}\right), & \text{ha } \gamma\left(\dfrac{1}{\mu}+\dfrac{1}{\lambda}\right) \leqq \sqrt{1+\dfrac{4\gamma\ln\frac{1}{\varepsilon}}{\left(\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}\right)^2 T}} \\[2ex] \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\sqrt{1+\dfrac{4\gamma\ln\frac{1}{\varepsilon}}{\left(\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}\right)^2 T}}, & \text{ha } \sqrt{1+\dfrac{4\gamma\ln\frac{1}{\varepsilon}}{\left(\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}\right)^2 T}} \leqq \gamma\left(\dfrac{1}{\mu}+\dfrac{1}{\gamma}\right). \end{cases}$$

Más szóval ez azt jelenti, hogy a γ, λ, μ ismeretében T megadásával, ha M értékét M_{opt}-nak választjuk akkor, a $H(M)$ haszon függvény maximális olyan értelemben, hogy $\varepsilon 100\%$-nál nagyobb biztonsággal állíthatjuk, hogy a zavarjelző készülékünk a $0 \leqq t \leqq T$ intervallumon minden realizációs pontot jelez.

Megjegyzések:

I. Gyakorlati szempontból rendkívül előnyös az a tény, hogy M_{opt} értéke nem függ K' és K'' értékétől.

II. Valójában a zavarjelző készülék alkalmazása bizonyos költséggel jár. (Vételár, beszerelési költség, karbantartási költség.) Ennek megfelelően a tényleges hasznot úgy kapjuk meg, ha ezen utóbbi költségek összegét $H(M_{\mathrm{opt}})$ értékéből levonjuk. Amennyiben ez az érték pozitív, úgy a közölt szempontok mellett feltétlenül előnyös a zavarjelző készülék alkalmazása.

III. Természetesen a $H(M)$ haszon függvény maximalizálására több feltételt is előírhatunk. Ekkor egy több változós függvény feltételes maximumát kell megkeresni.

IRODALOM

[1] DOBÓ ANDOR és SZAJCZ SÁNDOR: Regisztrálással kapcsolatos sztochasztikus problémákról. *A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei,* **15** (1965) 1. szám.

(Beérkezett: 1965. XII. 21.)

ON THE OPTIMALIZATION PROBLEM OF THE APPLICATION OF A GIVEN DISTURBANCE INDICATOR SYSTEM

By

L. MÉSZÁROS

SUMMARY

Author occupys in this papers with the question of that a given disturbance indicator system is to practically switch on to how many ducts, that the application of one be paying. To this had to determine the probability of that the disturbance indicator should indicate only not more than one defect within a certain time.

EGY ÁLTALÁNOS MÓDSZER FÜGGVÉNYEGYENLETEK NÉHÁNY OSZTÁLYÁNAK MEGOLDÁSÁRA, II.*

Írta: VINCZE ENDRE

4. §. A sinus- és cosinus-egyenlet, s egy közös általánosításuk

A trigonometriai függvényegyenleteknek és általánosításainak igen nagy irodalma van, így ezt valamelyest részletesebben kívánjuk ismertetni.

Már PTOLEMAIOS [55] ismerte, hogy a $\sin x$ és $\cos x$ függvények kielégítik a

$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

egyenletet (ezt egy, a húrnégyszögekre vonatkozó arányossági tételből vezette le), s ennek az egyenletnek az alapján egy ún. „húrtáblázatot" készített (lényegében az első szögfüggvénytáblázat!), tehát a szóban forgó egyenletet a $\sin x$ és $\cos x$ függvények *tényleges meghatározására* használta. Természetesen nem kívánjuk PTOLEMAIOS-t a trigonometriai függvényegyenletek első „úttörőjeként" emlegetni, de rámutatunk, hogy a trigonometriai függvényegyenletek elméletében fontos és egyben ösztönző szerepet játszó gondolat magva már itt megtalálható, ti. hogy az összeadási és kivonási tételek *bármelyike* megfelelő mellékfeltételekkel *meghatározza* ezeket a függvényeket.

N. H. ABEL [1] kétszeri differenciálhatóság feltételezésével oldja meg az

$$S(x+y) = S(x)C(y)+S(y)C(x)$$

egyenletet, eredménye azonban nem teljes, mert a megoldásnál „elsikkad" az $S(x)=cx$, $C(x)\equiv 1$ megoldáspár. Később J. TANNERY [63] (vö. [30]) a

$$\text{(4. a)}\qquad \begin{cases} C(x+y) = C(x)C(y)-S(x)S(y), \\ S(x+y) = S(x)C(y)+S(y)C(x) \end{cases}$$

egyenletrendszert vizsgálja, majd W. F. OSGOOD [49] foglalkozik ezzel az egyenletrendszerrel; mindketten differenciálhatósági feltételek mellett (vö. [78], [43]). A továbbiak során W. H. WILSON [80] vizsgálatait emeljük ki, aki több más egyenlettel is kapcsolatba hozva, az

$$S(x-y) = S(x)C(y)-C(x)S(y),$$
$$C(x-y) = C(x)C(y)-k^2S(x)S(y)$$

egyenletrendszer megoldását az

$$F(x+y) = F(x)F(y)$$

(F komplex) egyenlet megoldásaira vezeti vissza.

* A dolgozat első része a *MTA Mat. Fiz. Oszt. Közl.*, **16** (1966), 179—208 oldalain jelent meg; az egyes fejezetek, képletek, tételek stb. számozása ehhez csatlakozóan folytatólagos. A *teljes irodalomjegyzéket* is az első részhez csatoltuk.

O. PERRON [51] a

$$\text{(4. b)} \qquad \begin{cases} C(x-y) = C(x)C(y)+S(x)S(y), \\ S(x-y) = S(x)C(y)-S(y)C(x) \end{cases}$$

egyenletrendszerhez a

$$\text{(4. c)} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{S(x)}{x} = 1$$

mellékfeltételt véve kimutatja, hogy a megoldás az $S(x)=\sin x$ és $C(x)=\cos x$ trigonometriai függvénypár, majd J. MOLLERUP [47] is a (4. b) egyenletrendszer kapcsán végez hasonló axiomatikus vizsgálatokat (folytonossági feltevés mellett). M. KRAFFT [36] az előbbieknél is egyszerűbb feltételek mellett [$C(x)>0$ a nullapont környezetében] oldja meg a (4. a) egyenletrendszert. J. C. H. GERRETSEN [25] kimutatja (vö. [2]), hogy a (4. b) rendszer helyett elegendő csupán a

$$\text{(4. d)} \qquad C(x-y) = C(x)C(y)+S(x)S(y)$$

egyenlettel foglalkozni és ha itt (4. c) teljesül, akkor a megoldás ismét a $C(x)=\cos x$, $S(x)=\sin x$ függvénypár. Ezt az eredményt tovább egyszerűsíti és élesíti J. G. VAN DER CORPUT [19] és J. RIDDER [56].

L. VIETORIS [67] *egymástól függetlenül* oldja meg az összes trigonometriai függvényegyenletet; a megoldás egy HAMEL-bázis segítségével az

$$A(x+y) = A(x)A(y),$$

$$g(x+y) = g(x)+g(y)$$

függvényegyenletekre való visszavezetéssel történik, ahol $A(x)$ és $g(x)$ valós változójú komplex függvényeket jelölnek. Valós változókra szorítkozva L. VIETORIS eredménye az eddig ismert legáltalánosabb, bár a megoldások hiányosak: a

$$\text{(4. e)} \qquad C(x+y) = C(x)C(y)-S(x)S(y)$$

egyenletnél a $C(x) = A(x)[1\pm g(x)]$, $S(x)=A(x)g(x)$; az

$$S(x+y) = S(x)C(y)+S(y)C(x)$$

egyenletnél az $S(x)=A(x)g(x)$, $C(x)=A(x)$; az

$$S(x-y) = S(x)C(y)-S(y)C(x)$$

egyenletnél pedig az $S(x)=g(x)$, $C(x) = 1-g(x)$ megoldáspár hiányzik.

V. ALACI [8] a (4. a) rendszer megoldását végtelen hatványsor alakban keresi, majd ezt az egyenletrendszert TH. ANGHELUTZA [12] a

$$C(x+y)+C(x-y) = 2C(x)C(y)$$

egyenletre való visszavezetéssel oldja meg, a szereplő függvényekről folytonosságot feltételezve (vö. P. MONTEL [48]). J. C. W. LA BERE [16] a sinus addiciós egyenletet egyszeri differenciálhatóság mellett oldja meg; hasonlóan differenciálhatóságot feltételezve tárgyalja S. PARAMESWARAN [50] is az ún. sinus kivonási egyenletet.

S. I. NOVOSELOV [84] (vö. [83]), majd H. E. VAUGHAN [65] ismét foglalkoznak a (4. d) egyenlettel, s azt a trigonometriai függvények jellemzésére használják. J. ACZÉL [3] egy G. KIRSCHMER [35] által felvetett problémára válaszolva a

$$C(u+v) = C(u)C(v) - S(u)S(v),$$

$$S(u+v) = S(u)C(v) + S(v)C(u),$$

$$S(u)^2 + C(u)^2 = E(u)^2,$$

$$E(u+v) = E(u)E(v)$$

egyenletrendszert oldja meg *komplexben* folytonossági feltevés mellett. Ugyancsak komplexben folytonossági feltevés mellett vizsgálják E. B. VAN VLECK és F. H'DOUBLER [77] a (4. a) egyenletrendszert, s ezt további általánosabb egyenletek megoldására használják.

S. KUREPA [41] (vö. [40]) mérhetőségi feltételek mellett BANACH térben vizsgálja a (4. e) egyenletet.

Mint látható, a nagyszámú vizsgálat és eredmény még ily hézagos és vázlatos ismertetése, ill. puszta felsorolása is eléggé terjedelmes.

Az e §-ban tárgyalandó

$$F(x+y) = G(x)H(y) + K(x)L(y) \tag{4. f}$$

egyenlet kapcsán utalunk még C. STÉPHANOS [61], T. LEVI-CIVITA [42] és P. STÄCKEL [60] munkáira, akik az

$$F(x+y) = \sum_{j=1}^{n} G_j(x)H_j(y) \tag{4. g}$$

egyenletet n-szeres differenciálhatóság mellett vizsgálják, de megoldást csak $F(x)$-re nézve adnak. I. FENYŐ [22], az előzőektől sokkal általánosabban, megoldási módszert mutat (4. g)-re a disztribúció-elmélet felhasználásával. További általános vizsgálatok találhatók W. H. WILSON [79] és R. SATO [58] munkáiban. A (4. g) speciális eseteit illetően utalunk még O. HÁJEK [26] és H. P. THIELMAN [64] munkáira is. Az $F(x)\equiv 0$ esetén (4. g)-ből előálló egyenlet speciális megoldásaival foglalkozik O. SUTO [62], D. S. MITRINOVITCH [45], [46]. J. ACZÉL [3], [2] és O. E. GHEORGHIU [82], majd legutóbb ACZÉL J. [4] a problémát teljes általánosságban elintézi.

A (4. f) egyenlet komplex megoldásait [67]-ben adtuk meg, de az ott követett megoldási módszer lényegesen hosszadalmasabb.

4. 1. Jelöljön a továbbiakban Q^2 *tetszőleges kvadratikus testet, melyben* tehát *minden* $x^2=a$ $(a\in Q^2)$ *másodfokú egyenletnek van megoldása* és tekintsük most az

$$S(z_1 * z_2) = S(z_1)C(z_2) + S(z_2)C(z_1) \tag{4. 1}$$

$$[z_1, z_2, z_1 * z_2 \in Q_0(*);\ S(z), C(z): Q_0(*) \to Q^2]$$

függvényegyenletet. Ezt röviden csak „sinus-egyenlet" néven szokás említeni. Felhívjuk a figyelmet arra, hogy mivel e függvényegyenlet jobb oldala a szereplő változókban és függvényekben egyaránt szimmetrikus, a megoldás is nehezebbé válik. Ezekben az esetekben a $z_1 * z_2$ művelet asszociativitásának ismételt kihasználása vezet célra. Érvényes a

4. 1. TÉTEL. *A $Q_0(*)$ félcsoporton érvényes* (4. 1) *függvényegyenlet legáltalánosabb megoldásai a következő függvények:*

$$\text{(M4. 1)} \qquad S(z) \equiv 0, \quad C(z) \text{ tetszőleges};$$

$$\text{(M4. 2)} \qquad C(z) \equiv 0, \quad S(z) = \begin{cases} 0, & ha\ z \in Q_{02}, \\ \text{tetszőleges}, & ha\ z \in (Q_0 \setminus Q_{02}), \end{cases}$$

$$\text{(M4. 3)} \qquad C(z) = g(z), \quad S(z) = \begin{cases} g(z) f(z), & ha\ z \in (Q_0 \setminus Q_{00}), \\ G_0(z), & ha\ z \in \bar{Q}_{00}, \\ 0, & ha\ z \in (Q_{00} \setminus \bar{Q}_{00}); \end{cases}$$

$$\text{(M4. 4)} \qquad S(z) = a[g_1(z) - g_2(z)], \quad C(z) = \tfrac{1}{2}[g_1(z) + g_2(z)];$$

ahol az $f(z)$ ill. $g(z)$, $g_1(z)$, $g_2(z)$ függvények a (2. 23) *ill.* (2. 26) *Cauchy-egyenletet elégítik ki, $G_0(z)$ a* (2. 28)*-ban definiált függvény, „a" pedig tetszőleges konstans. Más megoldások nincsenek.*

BIZONYÍTÁS. Ismét elég csak annyit bizonyítanunk, hogy a felsoroltakon kívül más megoldások nincsenek, mivel az (M4. 1)—(M4. 4) függvények valóban megoldások.

Használjuk ki a $z_1 * z_2$ művelet asszociatív és kommutatív voltát:

$$\text{(4. 2)} \qquad S(z_1 * t * z_2) = S(z_1 * t) C(z_2) + S(z_2) C(z_1 * t) = $$
$$= S(z_1) C(z_2 * t) + S(z_2 * t) C(z_1),$$

tehát a szokásos jelöléssel

$$\text{(4. 3)} \qquad \Delta[S(z_1 * t), C(z_2)] + \Delta[C(z_1 * t), S(z_2)] = 0.$$

„Bővítsük" ezt az egyenletet $C(z)$-vel:

$$\Delta[C(z_1 * t), C(z_2), S(z_3)] = 0,$$

mely a 2. 2. korollárium szerint az

$$\text{(4. 1. A)} \qquad S(z) \equiv 0,$$

$$\text{(4. 1. B)} \qquad C(z) = b_1 S(z), \quad (b_1 = \text{konst.})$$

$$\text{(4. 1. C)} \qquad C(z * t) = M_1(t) S(z) + M_2(t) C(z)$$

esetek egyikét vonja maga után.

4. 1. A. Az $S(z) \equiv 0$ esetén tetszőleges $C(z)$ függvény kielégíti (4. 1)-et, tehát éppen az (M4. 1) megoldáspárt kaptuk. A továbbiakban feltesszük, hogy $S(z) \not\equiv 0$.

4. 1. B. Ha $C(z) = b_1 S(z)$, akkor (4. 1)-ből egy (2. 22) alakú

$$\text{(4. 4)} \qquad S(z_1 * z_2) = 2b_1 S(z_1) S(z_2)$$

PEXIDER-egyenletet nyerünk. Itt két eset van:

$$\text{(4. 1. B1)} \qquad b_1 = 0,$$

$$\text{(4. 1. B2)} \qquad b_1 \neq 0.$$

4. 1. B1. Ha $b_1=0$, akkor valóban az (M4. 2) megoldáspárt nyerjük. A továbbiakban $S(z)\not\equiv 0$ egyenlőtlenségen kívül $S(z_1 * z_2)\not\equiv 0$ fennállását is feltesszük.

4. 1. B2. Ha viszont (4. 4)-ben $b_1\neq 0$, akkor az $S(z)=\frac{1}{2b_1}g(z)$ helyettesítéssel a (2.26) CAUCHY-egyenlethez jutunk, továbbá $C(z)=\frac{1}{2}g(z)$. Ezt a megoldáspárt (M4. 4) tartalmazza, éspedig a $g_2(z)\equiv 0$ esetben. Ezzel a (4. 1. B) esetet is elintéztük, s a továbbiakban feltehetjük, hogy $\Delta(C, S)\not\equiv 0$ is fennáll.

4. 1. C. A (4. 1. C) eset vizsgálatánál először a bal oldal szimmetriáját kihasználva a

$$\Delta(M_1, S)+\Delta(M_2, C) = 0 \tag{4. 5}$$

egyenletet írjuk fel, majd ezt S-sel „bővítjük":

$$\Delta(M_2, C, S)=0.$$

Mivel feltevésünk szerint $\Delta(C, S)\not\equiv 0$, innen szükségképpen

$$M_2(z) = b_1C(z)+b_2S(z) \qquad (b_1, b_2=\text{konst.}) \tag{4. 6}$$

következik. Ennek felhasználásával (4. 5)-ből $M_1(z)$ is megadható a $C(z)$ és $S(z)$ függvények segítségével:

$$\Delta(M_1, S)+\Delta(b_1C+b_2S, C) = \Delta(M_1-b_2C, S) = 0,$$

tehát $S(z)\not\equiv 0$ miatt

$$M_1(z)-b_2C(z) = b_3^2S(z) \qquad (b_3=\text{konst.}) \tag{4. 7}$$

adódik.

MEGJEGYZÉS. Csupán e helyen, a (4. 7) egyenlet felírásánál, használjuk csak ki a Q^2 test kvadratikus voltát, ti. hogy a b_3^2 konstans a Q^2 test *bármely* eleme lehet.

A (4. 6) és (4. 7) összefüggésekkel (4. 1. C)-ből a

$$C(z_1 * z_2) = b_1C(z_1)C(z_2)+b_2S(z_1)C(z_2)+ \\ +b_2S(z_2)C(z_1)+b_3^2S(z_1)S(z_2) \tag{4. 8}$$

egyenletet nyerjük.

A b_1, b_2, b_3 konstansokra további megszorításokat nyerünk, ha (4. 8)-at és (4. 1)-et a (4. 3) egyenletbe helyettesítjük (a rövidség kedvéért az $S(t)=S'$ és $C(t)=C'$ jelöléseket használjuk):

$$\begin{aligned}\Delta[S(z_1 * t), C(z_2)]+\Delta[C(z_1 * t), S(z_2)] &= \\ = \Delta(S'C+C'S, C)+\Delta(b_1C'C+b_2S'C+b_2C'S+b_3^2S'S, S) &= \\ = C'\Delta(S, C)+(b_1C'+b_2S')\Delta(C, S) &= \\ = [(b_1-1)C'+b_2S']\Delta(C, S) &= 0,\end{aligned}$$

tehát $\Delta(C, S)\not\equiv 0$ miatt $b_1=1$ és $b_2=0$. Így a (4. 8) egyenletből

$$C(z_1 * z_2) = C(z_1)C(z_2)+b_3^2S(z_1)S(z_2) \tag{4. 9}$$

adódik, ahol két esetet kell megkülönböztetnünk:

(4. 1. C1) $$b_3=0,$$

(4. 1. C2) $$b_3\neq 0.$$

4. 1. C1. Ha (4.9)-ben $b_3=0$, akkor $C(z)=g(z)$, ahol $g(z)$ a (2. 26) CAUCHY-egyenletet elégíti ki. Így (4. 1)-ből az

$$S(z_1 * z_2) = S(z_1)g(z_2)+S(z_2)g(z_1) \tag{4. 10}$$

egyenletet nyerjük. Vezessük be az $S(z)=g(z)F(z)$ helyettesítést, akkor a

$$g(z_1)g(z_2)[F(z_1 * z_2)-F(z_1)-F(z_2)] = 0 \tag{4. 11}$$

egyenlethez jutunk. Tudjuk (vö. 2. 4. lemma), hogy $g(z_1)g(z_2)\neq 0$, ha $z_1, z_2 \in \in (Q_0 \backslash Q_{00})$. Így (4. 11)-ből látható, hogy e halmazon $F(z)=f(z)$, ahol $f(z)$ a (2. 23) CAUCHY-egyenletet elégíti ki, s ezzel $S(z)=g(z)f(z)$. Legyen most $z_{01}, z_{02}\in Q_{00}$, $g(z_{01})=g(z_{02})=0$ és (4. 10) miatt $S(z_{01} * z_{02})\equiv 0$ is fennáll, tehát $S(z)=0$ ha $z\in Q_{002}$. Ezt felhasználva megmutatjuk végül, hogy

$$S(z)=\begin{cases} G_0(z), & \text{ha} \quad z\in \bar{Q}_{00}, \\ 0, & \text{ha} \quad z\in (Q_{00}\backslash \bar{Q}_{00}), \end{cases}$$

ahol $G_0(z)$-t (2. 28) értelmezni.

Válasszunk ki ugyanis egy tetszőleges $z_0\in(Q_{00}\backslash Q_{002})$ elemet; két eset van: $z_0=z'_{0a}\in[(Q_{00}\backslash Q_{002})\backslash \bar{Q}_{00}]$ vagy $z_0\in \bar{Q}_{00}$. Az első esetben értelmezés szerint van olyan $z_a\in(Q_0\backslash Q_{00})$, hogy $z'_{0a} * z_a\in Q_{002}$, tehát (4. 10) szerint

$$0 = S(z'_{0a} * z_a) = S(z'_{0a})g(z_a)+S(z_a)g(z'_{0a})$$

és $g(z'_{0a})=0, g(z_a)\neq 0$ miatt $S(z'_{0a})=0$. A második esetben viszont bármely $z_1\in(Q_0\backslash Q_{00})$ esetén (4. 10)-ből

$$S(z_0 * z_1) = S(z_0)g(z_1)+S(z_1)g(z_0) = S(z_0)g(z_1)$$

$$[z_0, z_0 * z_1\in \bar{Q}_{00}, z_1\in(Q_0\backslash Q_{00});\ g(z_1)\neq 0]$$

adódik, amit éppen bizonyítani kívántunk.

A (4. 1. C1) esetben tehát valóban az (M4. 3) megoldáspárt nyertük.

4. 1. C2. Végül a $b_3\neq 0$ esetben (4. 9) és (4. 1) alapján a

$$C(z_1 * z_2)+b_3S(z_1 * z_2) = [C(z_1)+b_3S(z_1)][C(z_2)+b_3S(z_2)],$$

$$C(z_1 * z_2)-b_3S(z_1 * z_2) = [C(z_1)-b_3S(z_1)][C(z_2)-b_3S(z_2)]$$

CAUCHY-egyenletpárt nyerjük, tehát

$$C(z)+b_3S(z) = g_1(z),$$

$$C(z)-b_3S(z) = g_2(z),$$

ahol $g_1(z)$ és $g_2(z)$ a (2. 26) egyenletet elégíti ki. Innen, $b_3\neq 0$ miatt, $C(z)$ és $S(z)$ számítható, s valóban az (M4. 4) alakú megoldáspárt nyerjük.

Minden esetet megvizsgáltunk és csak (M4. 1)—(M4. 4) alakú megoldásokat találtunk, tehát a tétel bizonyítása véget ért.

4. 2. A következő egyenlet, melyet vizsgálni kívánunk, a „cosinus-egyenlet” néven ismert

(4. 12) $$C(z_1 * z_2) = C(z_1)C(z_2) - S(z_1)S(z_2)$$

$$[z_1, z_2, z_1 * z_2 \in Q_0(*);\ C(z), S(z): Q_0(*) \to Q^2]$$

függvényegyenlet. A következőt bizonyítjuk be:

4.2. TÉTEL. *A $Q_0(*)$ Abel-félcsoporton érvényes* (4. 12) *függvényegyenlet legáltalánosabb megoldásai a következő függvények:*

(M5. 1) $$C(z) = \begin{cases} 0, \ \text{ha } z \in Q_{02}, \\ \text{tetszőleges, ha } z \in (Q_0 \setminus Q_{02}), \end{cases}$$

$$S(z) = aC(z), \qquad a^2 = 1;$$

(M5. 2) $$C(z) = \frac{1}{2b}[(a+b)g_2(z) - (a-b)g_1(z)],$$

$$S(z) = \frac{1}{2b}[g_1(z) - g_2(z)], \qquad a^2 - b^2 = 1, \qquad b \neq 0;$$

(M5. 3) $$C(z) = \begin{cases} g(z)[1 \pm f(z)], \ \text{ha } z \in Q_0 \setminus Q_{00}), \\ \pm G_0(z), \ \text{ha } z \in \bar{Q}_{00}, \\ 0, \ \text{ha } z \in (Q_{00} \setminus \bar{Q}_{00}), \end{cases}$$

$$S(z) = \begin{cases} g(z)f(z), \ \text{ha } z \in (Q_0 \setminus Q_{00}), \\ G_0(z), \ \text{ha } z \in \bar{Q}_{00}, \\ 0, \ \text{ha } z \in (Q_{00} \setminus \bar{Q}_{00}); \end{cases}$$

ahol az $f(z)$ ill. $g(z)$, $g_1(z)$, $g_2(z)$ függvények a (2. 23) *ill.* (2. 26) *Cauchy-egyenletet elégítik ki, $G_0(z)$ a* (2. 28)*-ban definiált függvény, a és b pedig tetszőleges konstansok a feltüntetett megszorítással. Más megoldások nincsenek.*

BIZONYÍTÁS. Mivel az (M5. 1)—(M5. 3) függvények valóban megoldások, itt is elég csak annyit bizonyítanunk, hogy a felsoroltakon kívül más megoldások nincsenek.

A szokásos módon $z_1 * z_2$ asszociatív voltát kihasználva a

(4. 13) $$\Delta[C(z_1 * t), C(z_2)] + \Delta[S(z_1), S(z_2 * t)] = 0$$

egyenlethez jutunk, melyet $C(z)$-vel „bővítünk”:

$$-\Delta[S(z_1 * t), S(z_2), C(z_3)] = 0.$$

Ez a 2. 2. korollárium szerint csak a

(4. 2. A) $$C(z) \equiv 0,$$

(4. 2. B) $$S(z) = b_1 C(z), \qquad (b_1 = \text{konst.})$$

(4. 2. C) $$S(z * t) = M_1(t) S(z) + M_2(t) C(z)$$

esetekben állhat fenn.

4. 2. A. A $C(z) \equiv 0$ esetén (4. 12)-ből $S(z_1) S(z_2) = 0$ adódik, tehát $S(z) \equiv 0$. Ezt a megoldáspárt az (M5. 2) a $g_1(z) \equiv g_2(z) \equiv 0$ ill. (M5. 3) a $g(z) \equiv 0$ és $G_0(z) \equiv 0$ esetekben tartalmazza. A továbbiakban feltesszük, hogy $C(z) \not\equiv 0$.

4. 2. B. Ha (4. 12)-ben $S(z) = b_1 C(z)$, akkor a

(4. 14) $$C(z_1 * z_2) = (1 - b_1^2) C(z_1) C(z_2)$$

PEXIDER-egyenlethez jutunk, ahol két esetet kell megkülönböztetnünk:

(4. 2. B1) $$1 - b_1^2 = 0,$$

(4. 2. B2) $$1 - b_1^2 \neq 0.$$

4. 2. B1. Ha (4. 14)-ben $1 - b_1^2 = 0$, kapjuk az (M5. 1) megoldáspárt. A továbbiakban $C(z) \not\equiv 0$ mellett $C(z_1 * z_2) \not\equiv 0$ teljesülését is feltételezzük.

4. 2. B2. Legyen (4. 14)-ben $1 - b_1^2 \neq 0$, akkor a $C(z) = g(z)/(1 - b_1^2)$ helyettesítéssel a (2. 26) CAUCHY-egyenletet nyerjük; továbbá $S(z) = b_1 g(z)/(1 - b_1^2)$. E megoldáspárt (M5. 2) tartalmazza, éspedig $b_1 = 0$ esetén a $g_1(z) \equiv g_2(z)$, ill. $b_1 \neq 0$ esetén pedig a $g_2(z) \equiv 0$, $a = -(b_1^2 + 1)/2b_1$, $b = (1 - b_1^2)/2b_1$ választással és a konstansokra tett megszorítás is teljesül.

A továbbiakban feltesszük, hogy $\Delta(S, C) \not\equiv 0$.

4. 2. C. A (4. 2. C) egyenletnél először a $z_1 * z_2$ művelet kommutativitását kihasználva a

(4. 15) $$\Delta(M_1, S) + \Delta(M_2, C) = 0,$$

majd ezt C-vel „bővítve" a

$$\Delta(M_1, S, C) = 0$$

egyenlethez jutunk. Mivel $\Delta(S, C) \not\equiv 0$, ez csak az

(4. 16) $$M_1(z) = b_1 S(z) + b_2 C(z) \qquad (b_1, b_2 = \text{konst.})$$

esetben állhat fenn. Most (4. 16)-ot (4. 15)-be írva M_2-re adhatunk hasonló kifejezést:

$$\Delta(b_1 S + b_2 C, S) + \Delta(M_2, C) = \Delta(M_2 - b_2 S, C) = 0,$$

tehát $C(z) \not\equiv 0$ miatt

(4. 17) $$M_2(z) - b_2 S(z) = b_3 C(z) \qquad (b_3 = \text{konst.}).$$

A (4. 16) és (4. 17) függvényekkel (4. 2. C)-ből az

(4. 18) $$S(z_1 * z_2) = b_1 S(z_1) S(z_2) + b_2 S(z_1) C(z_2) + \\ + b_2 S(z_2) C(z_1) + b_3 C(z_1) C(z_2)$$

egyenletet nyerjük. A (4. 12) és (4. 18) egyenleteket (4. 13)-ba írva — közben itt is a rövidebb $C(t)=C'$ és $S(t)=S'$ jelöléseket használva — a b_1, b_2, b_3 konstansokra kapunk további megszorításokat:

$$\Delta[C(z_1 * t), C(z_2)] + \Delta[S(z_1), S(z_2 * t)] =$$
$$= \Delta(C'C - S'S, C) + \Delta(S, b_1 S'S + b_2 C'S + b_2 S'C + b_3 C'C) =$$
$$= -S'\Delta(S, C) + (b_2 S' + b_3 C')\Delta(S, C) = [(b_2 - 1)S' + b_3 C']\Delta(S, C) = 0.$$

Mivel $\Delta(S, C) \not\equiv 0$, innen $b_2 = 1$ és $b_3 = 0$ következik, s így (4. 18)-ból az

(4. 19) $$S(z_1 * z_2) = b_1 S(z_1) S(z_2) + S(z_1) C(z_2) + S(z_2) C(z_1)$$

egyenletet nyerjük.

Most azt kívánjuk elérni, hogy alkalmas k konstansok megválasztásával

(4. 20) $$C(z_1 * z_2) + kS(z_1 * z_2) = [C(z_1) + kS(z_1)][C(z_2) + kS(z_2)]$$

típusú CAUCHY-egyenleteket írjunk fel. Egyrészt helyettesítsük a (4. 12) és (4. 19) egyenleteket (4. 20)-ba, másrészt végezzük el a jobb oldalon a szorzást:

$$C(z_1)C(z_2) - S(z_1)S(z_2) + kb_1 S(z_1)S(z_2) + k[S(z_1)C(z_2) + S(z_2)C(z_1)] =$$
$$= C(z_1)C(z_2) + k[S(z_1)C(z_2) + S(z_2)C(z_1)] + k^2 S(z_1)S(z_2),$$

tehát $S(z_1)S(z_2) \not\equiv 0$ miatt a

(4. 21) $$k^2 - b_1 k + 1 = 0$$

egyenlethez jutunk. Feltevésünk szerint a Q^2 test kvadratikus, tehát a (4. 21) egyenletnek is mindig van (legalább egy) megoldása. Két esetet kell megkülönböztetnünk:

(4. 2. C1) $k_1 \neq k_2$, *két különböző megoldása van* (4. 21)*-nek;*

(4. 2. C2) *csak egy* k_0 *megoldása van* (4. 21)*-nek.*

4. 2. C1. Ha $k_1 \neq k_2$ (4. 21) megoldásai, akkor (4. 20) miatt

$$C(z) + k_1 S(z) = g_1(z),$$
$$C(z) + k_2 S(z) = g_2(z),$$

ahol $g_1(z)$ és $g_2(z)$ a (2. 26) CAUCHY-egyenletet elégítik ki. Bevezetve itt a $k_1 - k_2 = 2b \neq 0$, $k_1 + k_2 = 2a$ jelöléseket

$$C(z) = \frac{1}{2b}[(a+b)g_2(z) - (a-b)g_1(z)],$$

$$S(z) = \frac{1}{2b}[g_1(z) - g_2(z)].$$

E függvényeket (4. 12)-be írva:

$$\frac{1}{2b}[(a+b)g_2(z_1*z_2)-(a-b)g_1(z_1*z_2)] =$$

$$=\frac{1}{4b^2}[(a+b)g_2(z_1)-(a-b)g_1(z_1)][(a+b)g_2(z_2)-(a-b)g_1(z_2)]-$$

$$-\frac{1}{4b^2}[g_1(z_1)-g_2(z_1)][g_1(z_2)-g_2(z_2)],$$

tehát

$$\frac{1}{4b^2}[(a+b)^2-1-2b(a+b)]g_2(z_1)g_2(z_2)+\frac{1}{4b^2}[(a-b)^2-1+2b(a-b)]g_1(z_1)g_1(z_2)+$$

$$+\frac{1}{4b^2}[-(a^2-b^2)+1][g_2(z_1)g_1(z_2)+g_1(z_1)g_2(z_2)]=$$

$$=\frac{a^2-b^2-1}{4b^2}[g_1(z_1)-g_2(z_1)][g_1(z_2)-g_2(z_2)] = (a^2-b^2-1)S(z_1)S(z_2) \equiv 0,$$

azaz $S(z)\not\equiv 0$ miatt $a^2-b^2=1$ kell legyen. Így valóban az (M5. 2) megoldásrendszert nyertük.

4. 2. C2. Ha a (4. 21) egyenletnek csak egy $k_0(\neq 0)$ megoldása van, akkor nyilván $b_1=2k_0$, $k_0=1$ vagy $k_0=-1$ és (4. 20) miatt

$$C(z)+k_0S(z) = g(z), \tag{4. 22}$$

ahol $g(z)$ a (2. 26) CAUCHY-egyenletet elégíti ki. A (4. 19) és (4. 22) egyenletből

$$S(z_1*z_2) = (b_1-2k_0)S(z_1)S(z_2)+S(z_1)g(z_2)+S(z_2)g(z_1) =$$
$$= S(z_1)g(z_2)+S(z_2)g(z_1)$$

következik. Ezt az egyenletet viszont 4. 1. C1.-ben [vö. (4. 10)] a most is érvényes $S(z)\not\equiv 0$ feltétel mellett már megoldottuk, tehát (4. 22)-t is felhasználva a nyert megoldások valóban (M5. 3) alakúak. A megoldásokban szereplő $\pm$ előjel úgy értendő, hogy egy megoldáson belül csak az egyiket vehetjük, mivel lényegében két külön esetről van szó. Egyszerű számítás mutatja, hogy az (M5. 3) alakú függvények valóban megoldások is.

Mivel minden esetet megvizsgáltunk, a tétel bizonyítása véget ért.

4. 3. A (4. 1) és (4. 12), s még több más hasonló típusú függvényegyenlet közös általánosítása az

$$F(z_1*z_2) = G(z_1)H(z_2)+K(z_1)L(z_2) \tag{4. 23}$$

$$[z_1, z_2, z_1*z_2 \in Q_0''(*);\ F(z), G(z), H(z), K(z), L(z): Q_0''(*)\to Q^2]$$

egyenlet, mely (2. 29)-nek speciális esete ($n=2$). Az esetszétválasztások nagy számát elkerülendő, ennél az egyenletnél két egyszerűsítő feltevéssel élünk. Egyrészt *a*

$Q_0''(\ast)$ *alaphalmazról feltesszük, hogy bármely* z *eleme* $z_1 \ast z_2$ *alakban is felírható,* másrészt a (4. 23) egyenletet csak a

$$\Delta(G, K, 1) \not\equiv 0, \tag{4. 24}$$

$$\Delta(H, L, 1) \not\equiv 0 \tag{4. 25}$$

feltételek teljesülése esetén tárgyaljuk. Ez utóbbi megszorítás azonban nem csorbítja az általánosságot. Ugyanis ha pl. $\Delta(G, K, 1) \equiv 0$, akkor vagy $K(z) \equiv k$ (konst.), vagy $G(z) = k_1 K(z) + k_2$ ($k_1, k_2 =$ konst.), de mindkét esetben (4. 23) a már megoldott (3. 1) egyenlet egy-egy speciális esetére redukálódik:

$$F(z_1 \ast z_2) = G(z_1)H(z_2) + kL(z_2),$$

$$F(z_1 \ast z_2) = K(z_1)[k_1 H(z_2) + L(z_2)] + k_2 H(z_2),$$

melyek megoldásait már könnyen felírhatjuk. Teljesen hasonló a helyzet a $\Delta(H, L, 1) \equiv 0$ esetben is.

4. 3. TÉTEL. *A* $Q_0''(\ast)$ *Abel-félcsoporton érvényes* (4. 23) *függvényegyenlet összes olyan megoldásai, melyek a* (4. 24) *és* (4. 25) *feltételeket is kielégítik, csak a következő alakú függények lehetnek:*

(M6. 1)
$$\begin{aligned} G(z) &= c_1 C_1(z), \\ H(z) &= c_2 C_1(z) + c_3 S_1(z), \\ K(z) &= c_4 C_1(z) + c_5 S_1(z), \\ L(z) &= c_6 C_1(z) + c_7 S_1(z), \\ &\Delta[C_1(z_1), S_1(z_2)] \not\equiv 0; \end{aligned}$$

(M6. 2)
$$\begin{aligned} G(z) &= S_2(z), \\ H(z) &= c_1 S_2(z) + c_2 C_2(z), \\ K(z) &= c_3 S_2(z) + c_4 C_2(z), \\ L(z) &= c_5 S_2(z) + c_6 C_2(z), \\ &\Delta[S_2(z_1), C_2(z_2)] \not\equiv 0; \end{aligned}$$

(M6. 3)
$$\begin{aligned} F(z_1 \ast z_2) &= c_1 c_2 g_1(z_1 \ast z_2) + c_5 c_6 g_2(z_1 \ast z_2), \\ G(z) &= c_1 g_1(z), \\ H(z) &= c_2 g_1(z) + c_3 g_2(z), \\ K(z) &= c_4 g_1(z) + c_5 g_2(z), \\ L(z) &= c_6 g_2(z), \\ &c_1 c_3 + c_4 c_6 = 0, \quad c_1 c_2 c_5 c_6 \neq 0; \\ &\Delta[g_1(z_1), g_2(z_2), 1] \not\equiv 0; \end{aligned}$$

$$\text{(M6. 4)} \qquad F(z_1 * z_2) = \begin{cases} [c_4 c_2^2 + 2c_1 c_2 c_3 + c_1 c_2 f(z_1 * z_2)] g(z_1 * z_2), \ ha \\ \qquad\qquad z_1 * z_2 \in (Q_0'' \backslash Q_{00}''), \\ c_1 c_2 G_0(z_1) g(z_2), \ ha \ z_1 * z_2 \in \bar{Q}_{00}'' \ és \\ \qquad\qquad z_1 \in \bar{Q}_{00}'', \ z_2 \in (Q_0'' \backslash Q_{00}''), \\ 0, \ ha \ z_1 * z_2 \in (Q_{00}'' \backslash \bar{Q}_{00}''); \end{cases}$$

$$G(z) = c_1 c_2 g(z),$$

$$H(z) = \begin{cases} [c_3 + f(z)] g(z), \ ha \ z \in (Q_0'' \backslash Q_{00}''), \\ G_0(z), \ ha \ z \in \bar{Q}_{00}'', \\ 0, \ ha \ z \in (Q_{00}'' \backslash \bar{Q}_{00}''), \end{cases}$$

$$K(z) = \begin{cases} [c_4 c_2 + c_1 c_3 + c_1 f(z)] g(z), \ ha \ z \in (Q_0'' \backslash Q_{00}''), \\ c_1 G_0(z), \ ha \ z \in \bar{Q}_{00}'', \\ 0, \ ha \ z \in (Q_{00}'' \backslash \bar{Q}_{00}''), \end{cases}$$

$$L(z) = c_2 g(z),$$

$$\Delta[g(z_1), 1] \not\equiv 0, \quad c_1 c_2 \neq 0;$$

ahol $C_1(z)$ *és* $S_1(z)$ *a* (4. 12) *cosinus-egyenletet,* $S_2(z)$ *és* $C_2(z)$ *a* (4. 1) *sinus-egyenletet,* $g_1(z), g_2(z)$, *és* $g(z)$ *ill.* $f(z)$ *a* (2. 26) *ill.* (2. 23) *Cauchy-egyenletet kielégítő függvények, a* c_i $(i=1, 2, \ldots, 6)$ *pedig* Q^2*-beli konstansok. Az* (M6. 3) *és* (M6. 4) *alatti függvények valóban megoldások is, míg az* (M6. 1) *és* (M6. 2) *alatt felsoroltak csak a konstansok megfelelő specializálása mellett elégítik ki* (4. 23)*-at.* A konstansok specializálására, valamint a hiányzó $F(z_1 * z_2)$ függvény meghatározására később visszatérünk.

BIZONYÍTÁS. Könnyen meggyőződhetünk róla, hogy az (M6. 3) és (M6. 4) alatti függvények valóban kielégítik (4. 23)-at. Így csak azt kell bizonyítanunk, hogy ezeken, továbbá az (M6. 1)—(M6. 2) alatt felsorolt *típusokon* kívül más megoldások nem lehetnek.

A (4. 23) egyenlet bal oldalának szimmetriája alapján

$$\Delta(G, H) + \Delta(K, L) = 0, \tag{4. 27}$$

majd ezt $L(z)$-vel bővítve

$$\Delta(G, H, L) = 0$$

és (4. 25) miatt csak a

$$G(z) = b_1 H(z) + b_2 L(z) \qquad (b_1, b_2 = \text{konst.}) \tag{4. 28}$$

eset állhat fenn. Nyilván b_1 és b_2 egyidejűleg nem zérus, mert ez ellentmondana (4. 24)-nek.

A (4. 28)-at (4. 27)-be írjuk.

$$\Delta(b_1 H + b_2 L, H) + \Delta(K, L) = \Delta(K - b_2 H, L) = 0,$$

tehát (4. 25) miatt csak a

$$K(z) - b_2 H(z) = b_3 L(z) \qquad (b_3 = \text{konst.}) \tag{4. 29}$$

eset jön szóba. A b_2 és b_3 itt sem lehet egyidejűleg zérus.

Helyettesítsük a (4. 28) és (4. 29) összefüggéseket (4. 23)-ba:

$$F(z_1 * z_2) = b_1 H(z_1)H(z_2) + b_2 H(z_1)L(z_2) + \\ + b_2 H(z_2)L(z_1) + b_3 L(z_1)L(z_2). \tag{4. 30}$$

Most a $z_1 * z_2$ művelet asszociativitása és kommutativitása alapján a szokásos módon a

$$\Delta[b_1 H(z_1 * t) + b_2 L(z_1 * t), H(z_2)] + \\ + \Delta[b_2 H(z_1 * t) + b_3 L(z_1 * t), L(z_2)] = 0 \tag{4. 31}$$

egyenlethez jutunk, melyet $L(z)$-vel „bővítünk”:

$$\Delta[b_1 H(z_1 * t) + b_2 L(z_1 * t), H(z_2), L(z_3)] = 0.$$

Látható, hogy (4. 25) miatt csak a

$$b_1 H(z * t) + b_2 L(z * t) = M_1(t) H(z) + M_2(t) L(z) \tag{4. 32}$$

megoldást kell vennünk. Ezek szerint viszont

$$\Delta(M_1, H) + \Delta(M_2, L) = 0, \tag{4. 33}$$

majd $L(z)$-vel „bővítve”

$$\Delta(M_1, H, L) = 0$$

is fennáll. Innen (4. 25) miatt

$$M_1(z) = b_4 H(z) + b_5 L(z), \tag{4. 34}$$

s (4. 33) szerint hasonlóan

$$\Delta(b_4 H + b_5 L, H) + \Delta(M_2, L) = \Delta(M_2 - b_5 H, L) = 0,$$

$$M_2(z) - b_5 H(z) = b_6 L(z) \qquad (b_5, b_6 = \text{konst.}) \tag{4. 35}$$

írható. A (4. 34) és (4. 35) egyenletek segítségével (4. 32) már csak két ismeretlen függvényt tartalmaz:

$$b_1 H(z * t) + b_2 L(z * t) = \\ = b_4 H(z) H(t) + b_5 H(z) L(t) + b_5 H(t) L(z) + b_6 L(z) L(t).$$

Írjuk a rövidség kedvéért ezt az egyenletet a

$$b_1 H'' + b_2 L'' = b_4 H H' + b_5 (H L' + L H') + b_6 L L' \tag{4. 36}$$

alakba, ahol tehát az $M'' = M(z * t)$, $M = M(z)$, $M' = M(t)$ $(M = H, L)$ jelöléseket használtuk.

Most a (4. 36) egyenlet megoldását azzal kezdjük, hogy keresünk olyan $d_1 \neq 0$, d_2, d_3 elemhármast, mellyel ez az egyenlet a

$$d_1(b_1 H'' + b_2 L'') = \\ = d_1^2 (b_1 H + b_2 L)(b_1 H' + b_2 L') - (d_2 H + d_3 L)(d_2 H' + d_3 L') \tag{4. 37}$$

alakba írható át, vagy ha ilyen elemhármas nincsen akkor olyan d_4, d_5 elempárt, mellyel ugyanez az egyenlet a

$$b_1 H'' + b_2 L'' = \tag{4. 38}$$
$$= (b_1 H + b_2 L)(d_4 H' + d_5 L') + (d_4 H + d_5 L)(b_1 H' + b_2 L')$$

alakba írható. Ha van a mondott tulajdonságú $d_1 \neq 0$, d_2, d_3 elemhármas, akkor az mindenesetre kielégíti a (4. 36) és (4. 37) jobb oldalainak összehasonlításából $\Delta(H, L) \not\equiv 0$ miatt adódó

$$\begin{cases} b_1^2 d_1^2 - d_2^2 = b_4 d_1, \\ b_1 b_2 d_1^2 - d_2 d_3 = b_5 d_1, \\ b_2^2 d_1^2 - d_3^2 = b_6 d_1 \end{cases} \tag{4. 39}$$

egyenletrendszert. Innen d_1-et kívánjuk kiszámítani, tehát

$$(b_1 b_2 d_1^2 - b_5 d_1)^2 = (d_2 d_3)^2 = (b_1^2 d_1^2 - b_4 d_1)(b_2^2 d_1^2 - b_6 d_1)$$
$$d_1^2 [d_1 (b_2^2 b_4 + b_1^2 b_6 - 2 b_1 b_2 b_5) + (b_5^2 - b_4 b_6)] = 0.$$

Mivel csak $d_1 \neq 0$ megoldásokat keresünk a

$$b_5^2 - b_4 b_6 \neq 0 \tag{4. 3. A}$$

$$b_5^2 - b_4 b_6 = 0 \tag{4. 3. B}$$

eseteket kell vizsgálnunk.

4. 3. A. A $b_5^2 - b_4 b_6 \neq 0$ esetben is csak akkor van $d_1 \neq 0$ megoldás, ha

$$b_2^2 b_4 + b_1^2 b_6 - 2 b_1 b_2 b_5 \neq 0, \tag{4. 3. A1}$$

s emellett még külön kell vizsgálnunk a

$$b_2^2 b_4 + b_1^2 b_6 - 2 b_1 b_2 b_5 = 0 \tag{4. 3. A2}$$

esetet is.

4. 3. A1. Ha tehát van $d_1 \neq 0$ megoldása a (4. 39) rendszernek, akkor (4. 37)-ből a

$$\begin{cases} b_1 H(z) + b_2 L(z) = \dfrac{1}{d_1} C(z), \\ d_2 H(z) + b_3 L(z) = S(z) \end{cases} \tag{4. 40}$$

helyettesítésekkel egy (4. 12) alakú cosinus-egyenletet kapunk, ahol a következő két esetet vizsgáljuk:

$$b_1 d_3 - b_2 d_2 = 0, \tag{4. 3. A1a}$$

$$b_1 d_3 - b_2 d_2 = 0. \tag{4. 3. A1b}$$

4. 3. A1a. Ha (4. 40) megoldható a $H(z)$ és $L(z)$ függvényekre nézve, akkor azok valóban $C(z)$ és $S(z)$ lineáris kombinációjaként állíthatók elő, ahol a $C(z)$ és $S(z)$ függvények a (4. 12) cosinus-egyenletet elégítik ki:

$$\left.\begin{aligned} H(z) &= c_2 C(z) + c_3 S(z), \\ L(z) &= c_6 C(z) + c_7 S(z), \end{aligned}\right\} (c_2 c_3, c_6, c_7 \doteq \text{konst.}).$$

Egyben (4. 40)-ből látható, hogy $\Delta(H, L) \not\equiv 0$ miatt $\Delta(C, S) \not\equiv 0$ is fennáll. E megoldásokkal (4. 28)- ill. (4. 29)-ből

$$G(z) = c_1 C(z), \quad K(z) = c_4 C(z) + c_5 S(z)$$

lesz. Így tehát valóban (M6. 1) típusú megoldásokat nyertünk.

4. 3. A1b. Könnyen belátható, hogy $b_1 d_3 - b_2 d_2 = 0$ lehetetlen. Szorozzuk meg ugyanis a (4. 39) egyenleteket rendre b_2^2, $b_1 b_2$, b_1^2-tel és írjunk $b_1 d_3$ helyett mindenütt $b_2 d_2$-t, akkor $d_1 \neq 0$ miatt

$$b_2^2 b_4 = b_1 b_2 b_5 = b_1^2 b_6$$

adódik, de ez (4. 3. A1) miatt lehetetlen.

4. 3. A2. Megmutatjuk, hogy ha a konstansokra (4. 3. A2) teljesül, akkor a (4. 36) egyenlet éppen (4. 38)-ba írható át. Hasonlítsuk össze (4. 36) és (4. 38) jobb oldalait, akkor $\Delta(H, L) \not\equiv 0$ miatt a d_4, d_5 ismeretlenek meghatározására a

$$(4.41) \qquad \begin{cases} 2b_1 d_4 - b_4 = 0, \\ b_2 d_4 + b_1 d_5 - b_5 = 0, \\ 2b_2 d_5 - b_6 = 0 \end{cases}$$

egyenletrendszert nyerjük. A $d_4, d_5, 1$ ismeretlenekre nézve akkor és csak akkor van nem-triviális megoldás, ha

$$\begin{vmatrix} 2b_1 & 0 & -b_4 \\ b_2 & b_1 & -b_5 \\ 0 & 2b_2 & -b_6 \end{vmatrix} = -2(b_1^2 b_6 + b_2^2 b_4 - 2b_1 b_2 b_5) = 0$$

fennáll, ez viszont éppen (4. 3. A2).

A (4. 38) egyenlet megoldásai

$$(4.42) \qquad \begin{cases} b_1 H(z) + b_2 L(z) = S(z), \\ d_4 H(z) + d_5 L(z) = C(z) \end{cases}$$

alakúak, ahol az $S(z)$ és $C(z)$ függvények a (4. 1) sinus-egyenletet elégítik ki. Itt is két esetet kell megvizsgálnunk:

(4. 3. A2a) $\qquad b_1 d_5 - b_2 d_4 \neq 0,$

(4. 3. A2b) $\qquad b_1 d_5 - b_2 d_4 = 0.$

4. 3. A2a. Ha (4. 42) megoldható a $H(z)$ és $L(z)$ függvényekre nézve, akkor azok valóban $S(z)$ és $C(z)$ lineáris kombinációjaiként állíthatók elő:

$$H(z) = c_1 S(z) + c_2 C(z),$$
$$L(z) = c_5 S(z) + c_6 C(z).$$

Egyben (4. 42)-ből látható, hogy $\Delta(H, L) \not\equiv 0$ miatt $\Delta(C, S) \not\equiv 0$ is fennáll. E megoldásokkal (4. 28)- ill. (4. 29)-ből

$$G(z) = S(z), \quad K(z) = c_3 S(z) + c_4 C(z)$$

adódik. Így tehát valóban (M6. 2) típusú megoldásokat nyertünk.

4. 3. A2b. Könnyen látható, hogy a $b_1d_5 - b_2d_4 = 0$ eset nem állhat fenn. Ekkor ugyanis a (4. 41) egyenletrendszer alapján

$$b_4b_6 = 4b_1b_2d_4d_5 = 4b_2^2d_4^2 = (b_2d_4 + b_1d_5)^2 = b_5^2$$

írható, de ez ellentmond (4. 3. A)-nak.

Ezzel a (4. 3. A) esetet letárgyaltuk.

4. 3. B. A $b_5^2 - b_4b_6 = 0$ esetnél két alesetet kell vizsgálnunk:

(4. 3. B1) $\qquad b_4 = 0,$

(4. 3. B2) $\qquad b_4 \neq 0.$

4. 3. B1. Ha $b_4 = 0$, akkor $b_5 = 0$ is áll, s (4. 36) a

$$b_1H(z * t) + b_2L(z * t) = b_6L(z)L(t) \tag{4. 43}$$

(2. 26) alakú PEXIDER-egyenletre egyszerűsödik. Feltevésünk szerint $Q_0''(*)$-ban bármely z_1 felírható $z_1 = z * t$ alakban is, tehát $b_1H'' + b_2L'' \equiv 0$ maga után vonja a kizárt $b_1H + b_2L \equiv 0$ (b_1, b_2 egyidejűleg nem zérus) esetet is. Ezért $b_6 \neq 0$. Így (4. 43)-ból $L(z) = cg(z) \not\equiv 0$ és $b_1H(z) + b_2L(z) = b_6c^2g(z) \not\equiv 0$ következik, ahol $g(z)$ a (2. 26) CAUCHY-egyenletet elégíti ki. Viszont ekkor $\Delta(H, L) \not\equiv 0$ miatt szükségképpen $b_1 = 0$ és $b_2 \neq 0$. Ezeket figyelembe véve (4. 30)-ból

$$F(z_1 * z_2) = b_2cH(z_1)g(z_2) + b_2cH(z_2)g(z_1) + b_3c^2g(z_1 * z_2) \tag{4. 44}$$

adódik. Használjuk most ki a $z_1 * z_2$ művelet asszociatív és kommutatív voltát:

$$b_2c\Delta[H(z_1 * t), g(z_2)] + b_2c\Delta[g(t)g(z_1), H(z_2)] = 0,$$

s $b_2c \neq 0$ miatt

$$\Delta[H(z_1 * t) - g(t)H(z_1), g(z_2)] = 0,$$

tehát $g(z) \not\equiv 0$ folytán

$$H(z * t) - g(t)H(z) = M(t)g(z). \tag{4. 45}$$

A $z * t$ művelet kommutativitása alapján

$$\Delta(g, H) + \Delta(M, g) = \Delta(M - H, g) = 0,$$

$$M(z) = H(z) + bg(z) \qquad (b = \text{konst.}),$$

s ezzel (4. 45)-ből

$$H(z * t) + bg(z * t) = [H(z) + bg(z)]g(t) + [H(t) + bg(t)]g(z)$$

lesz, mely pontosan (4. 10) alakú egyenlet. A megoldás tehát, mint 4. 1. C1.-ben láttuk,

$$H(z) = \begin{cases} -bg(z) + g(z)f(z), & \text{ha} \quad z \in (Q_0'' \setminus Q_{00}''), \\ G_0(z), & \text{ha} \quad z \in \bar{Q}_{00}'', \\ 0, & \text{ha} \quad z \in (Q_{00}'' \setminus \bar{Q}_{00}''). \end{cases}$$

A $H(z)$ függvény ismeretében (4. 44)-ből

$$F(z_1 * z_2) = \begin{cases} [b_3 c^2 - 2bb_2 c + b_2 cf(z_1 * z_2)]g(z_1 * z_2), & \text{ha } z_1 * z_2 \in (Q_0'' \setminus Q_{00}''), \\ b_2 c G_0(z_1) g(z_2), \text{ ha } z_1 * z_2 \in \bar{Q}_{00}'', & z_1 \in \bar{Q}_{00}'',\ z_2 \in Q_0'' \setminus Q_{00}'', \\ 0, \quad ha \quad z_1 * z_2 \in (Q_{00}'' \setminus \bar{Q}_{00}'') \end{cases}$$

adódik, továbbá (4. 28) és (4. 29) alapján

$$G(z) = b_2 c g(z),$$

$$K(z) = \begin{cases} (b_3 c - b_2 b) g(z) + b_2 g(z) f(z), & \text{ha } z \in (Q_0'' \setminus Q_{00}''), \\ b_2 G_0(z), \quad z \in \bar{Q}_{00}'', \\ 0, \quad \text{ha } z \in (Q_{00}'' \setminus \bar{Q}_{00}''). \end{cases}$$

E megoldások (4. 23)-at kielégítik és a konstansok megfelelő átírása után valóban (M6. 4) alakúak.

4. 3. B2. Legyen végül (4. 36)-ban $b_4 \neq 0$. Akkor (4. 3. B) miatt

$$b_4(b_1 H'' + b_2 L'') = (b_4 H + b_5 L)(b_4 H' + b_5 L') \tag{4. 46}$$

adódik, mely (2. 22) alakú PEXIDER-egyenlet. A 2. 4. tételben felsorolt megoldások közül az (M1. 1) és (M1. 2) figyelmen kívül marad, mivel $\Delta(H, L) \not\equiv 0$. Hasonlóan nem jön szóba (M1. 4) sem, mivel $Q_0''(*)$-ban nincs prím elem (tehát nincs közömbös részhalmaz sem). Az (M1. 3) megoldás alapján (4. 46)-ból

$$\left.\begin{aligned} b_1 H(z) + b_2 L(z) &= \frac{c^2}{b_4} g_1(z) \not\equiv 0, \\ b_4 H(z) + b_5 L(z) &= c g_1(z) \end{aligned}\right\} \qquad (c = \text{konst.})$$

adódik, s így $\Delta(H, L) \not\equiv 0$ miatt $c = b_1$ és $cb_5 = b_2 b_4$. Innen

$$H(z) = \frac{c}{b_4} g_1(z) - \frac{b_2}{c} L(z),$$

továbbá (4. 28) és (4. 29) alapján

$$G(z) = \frac{c^2}{b_4} g_1(z), \qquad K(z) = \frac{b_2 c}{b_4} g_1(z) + \frac{cb_3 - b_2^2}{c} L(z)$$

írható. E megoldásokkal (4. 23) az

$$F(z_1 * z_2) - \frac{c^3}{b_4^2} g_1(z_1 * z_2) = \frac{cb_3 - b_2^2}{c} L(z_1) L(z_2)$$

(2. 22) alakú PEXIDER-egyenletre egyszerűsödik.

Látható, hogy itt a $cb_3 - b_2^2 = 0$ eset $\Delta(G, K) \not\equiv 0$ miatt figyelmen kívül marad. Ha viszont $cb_3 - b_2^2 \neq 0$, akkor a megoldások

$$L(z) = bg_2(z), \qquad (b = \text{konst.})$$

$$F(z_1 * z_2) = \frac{c^3}{b_4^2} g_1(z_1 * z_2) + \frac{(cb_3 - b_2^2)b^2}{c} g_2(z_1 * z_2),$$

ahol $g_2(z)$ is (2. 26)-ot kielégítő függvény.

Így valóban az (M6. 3) megoldásokat nyertük és a konstansokra tett megszorítások is érvényesek.

Minden esetet megvizsgáltunk, így a tétel bizonyítása véget ért.

MEGJEGYZÉS. Szembetűnő, hogy a $Q_0''(*)$ alaphalmaznak azt a tulajdonságát, hogy nincs benne prím elem, csak a (4. 3. B1) és (4. 3. B2) esetek vizsgálatánál használtuk ki.

5. §. Függvényegyenletek, melyekben ismert függvények is szerepelnek

Külön figyelmet érdemelnek azok a (2.29) típusú függvényegyenletek, melyeknél a jobb oldalon már *ismert tulajdonságú* függvények is, vagy csak ilyenek állnak. Az ismert tulajdonság alatt azt fogjuk érteni, hogy e függvények egy megadott (az eredetinél általában egyszerűbb típusú) függvényegyenletet elégítenek ki, tehát azoknak (tetszőleges) megoldását képezik.

Itt is használni fogjuk az $M'' = M(z * t)$, $M' = M(t)$, $M = M(z)$ jelöléseket. Az e §-ban tárgyalt egyenletek néhány speciális esete J. ACZÉL [2] könyvében található.

5. 1. Vizsgáljuk először az

$$F(z * t) = a_1 C(z)C(t) + a_2 C(z)S(t) + a_3 S(z)C(t) + a_4 S(z)S(t) \tag{5. 1}$$

$$[F(z), C(z), S(z) : Q_0(*) \to Q]$$

függvényegyenletet, ahol a C, S függvénypár a (4. 12) cosinus-egyenletet elégíti ki:

$$C(z * t) = C(z)C(t) - S(z)S(t) \qquad [C(z), S(z) : Q_0(*) \to Q] \tag{5. 2}$$

a_1, a_2, a_3, a_4 pedig konstansok. Nyilván elegendő arra az esetre szorítkozni, amikor $\Delta(C, S) \not\equiv 0$, különben (5. 1) egy (2. 22) alakú PEXIDER-egyenletre egyszerűsödne. A $\Delta(C, S) \not\equiv 0$ esetén viszont (5. 2)-ből

$$S(z * t) = bS(z)S(t) + S(z)C(t) + C(z)S(t) \qquad (b = \text{konst.}) \tag{5. 3}$$

következik, mint azt 4. 2. C.-ben már láttuk. Így érvényes az

5. 1. TÉTEL. *Ha a $Q_0(*)$ Abel-félcsoporton érvényes* (5. 2) *és* (5. 3) *egyenleteket kielégítő $C(z)$, $S(z)$ függvények lineárisan függetlenek, azaz ha $\Delta(C, S) \not\equiv 0$, s egyidejűleg* (5. 1)*-et is kielégítik, akkor az* (5. 1) *egyenletben szükségképpen $a_2 = a_3$ és $a_1 + a_4 = ba_2$, továbbá*

$$F(z * t) = a_1 C(z * t) + a_2 S(z * t)$$

teljesül.

BIZONYÍTÁS. (5. 1) bal oldalának szimmetriája alapján

$$\Delta(a_2C, S)+\Delta(a_3S,C) = (a_2-a_3)\Delta(C, S) = 0,$$

tehát $\Delta(C, S)\not\equiv 0$ miatt valóban $a_2=a_3$.

Használjuk ki most a szokásos módon a $z*t$ művelet asszociativitását is, figyelembe véve ismételten az (5. 2) és (5. 3) egyenleteket is:

$$\begin{aligned}&\Delta(C'', a_1C)+\Delta(C'', a_2S)+\Delta(S'', a_2C)+\Delta(S'', a_4S) =\\ &= \Delta(C'C-S'S, a_1C)+\Delta(C'C-S'S, a_2S)+\\ &+\Delta(bS'S+C'S+S'C, a_2C)+\Delta(bS'S+C'S+S'C, a_4S) =\\ &= -a_1S'\Delta(S, C)+a_2C'\Delta(C, S)+a_2bS'\Delta(S, C)+a_2C'\Delta(S, C)+a_4S'\Delta(C, S) =\\ &= (a_1-a_2b+a_4)S'\Delta(C, S) = 0,\end{aligned}$$

azaz $\Delta(C, S)\not\equiv 0$ miatt $a_1+a_4 = a_2b$ következik.

Végül a konstansokra kapott összefüggésekkel (5. 1) így alakítható át:

$$\begin{aligned}F'' &= a_1CC'+a_2CS'+a_2SC'+(a_2b-a_1)SS' =\\ &= a_1(CC'-SS')+a_2(bSS'+CS'+SC') = a_1C''+a_2S''.\end{aligned}$$

Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

5. 2. Hasonló tétel mondható ki az

(5. 4) $$F(z*t) = a_1S(z)S(t)+a_2S(z)C(t)+a_3C(z)S(t)+a_4C(z)C(t)$$
$$[F(z), S(z), C(z): Q_0(*)\to Q]$$

egyenletre is, ahol az $S(z)$, $C(z)$ függvénypár a (4. 1) sinus egyenletet elégíti ki:

(5. 5) $$S(z*t) = S(z)C(t)+C(z)S(t) \qquad [S(z), C(z): Q_0(*)\to Q],$$

a_1, a_2, a_3, a_4 pedig konstansok. Mivel a $\Delta(S, C)\equiv 0$ esetben (5. 4) itt is egy (2. 22) alakú PEXIDER-egyenletre egyszerűsödne, elegendő csak egymástól lineárisan független $S(z)$, $C(z)$ függvénypárra szorítkozni. Viszont $\Delta(S, C)\not\equiv 0$ esetben, amint azt (4. 1. C)-ben láttuk, fennáll a

(5. 6) $$C(z*t) = C(z)C(t)+bS(z)S(t) \qquad (b=\text{konst.})$$

egyenlet is. A következőt bizonyítjuk:

5. 2. TÉTEL. *Ha a $Q_0(*)$ Abel-félcsoporton érvényes* (5. 5) *és* (5. 6) *egyenleteket kielégítő $S(z)$, $C(z)$ függvények lineárisan függetlenek, azaz ha $\Delta(S, C)\not\equiv 0$, s egyidejűleg* (5. 4)-et *is kielégítik, akkor az* (5. 4) *egyenletben szükségképpen $a_2=a_3$ és $a_1=a_4b$, továbbá*

$$F(z*t) = a_2S(z*t)+a_4C(z*t)$$

teljesül.

BIZONYÍTÁS. (5. 4) bal oldalának szimmetriájából

$$\Delta(a_2S, C)+\Delta(a_3C, S) = (a_2-a_3)\Delta(S, C) = 0$$

következik, tehát $\Delta(S, C)\not\equiv 0$ miatt $a_2=a_3$.

Most az asszociativitás alapján (5. 4)-ből, figyelemre véve az (5. 5) és (5. 6) egyenleteket is

$$\Delta(S'', a_1 S)+\Delta(S'', a_2 C)+\Delta(C'', a_2 S)+\Delta(C'', a_4 C) =$$
$$= \Delta(C'S+S'C, a_1 S)+\Delta(C'S+S'C, a_2 C)+$$
$$+\Delta(C'C+bS'S, a_2 S)+\Delta(C'C+bS'S, a_4 C) =$$
$$= a_1 S'\Delta(C, S)+a_2 C'\Delta(S, C)+a_2 C'\Delta(C, S)+a_4 bS'\Delta(S, C) =$$
$$=(-a_1+a_4 b)S'\Delta(S, C) = 0$$

következik, tehát $\Delta(S, C)\neq 0$ miatt valóban $a_1=a_4 b$.

Végül a konstansokra nyert megszorításokkal (5. 4)-et átalakítva

$$F'' = a_4 bSS'+a_2 SC'+a_2 CS'+a_4 CC' =$$
$$= a_2(SC'+CS')+a_4(CC'+bSS') = a_2 S''+a_4 C''$$

adódik. Ezzel a tétel bizonyítását befejeztük.

MEGJEGYZÉS. Külön felhívjuk a figyelmet arra, hogy bár korábban az (5. 2) és (5. 5) egyenleteket (egyszerűség kedvéért) csak kvadratikus testben oldottuk meg, az 5. 1 és 5. 2. tételek tetszőleges Q testben is érvényesek.

5. 3. Az 5. 1. és 5. 2. tételek ismeretében már könnyen válaszolhatunk arra a függőben maradt problémára, hogy a 4. 3. tételben az (M6. 1) és (M6. 2) alatti függvényrendszerek milyen megszorításokkal válnak megoldásokká. Érvényes az

5. 1. KOROLLÁRIUM. *A*

(M6. 1)
$$G(z) = c_1 C_1(z),$$
$$H(z) = c_2 C_1(z)+c_3 S_1(z),$$
$$K(z) = c_4 C_1(z)+c_5 S_1(z),$$
$$L(z) = c_6 C_1(z)+c_7 S_1(z),$$
$$\Delta[C_1(z_1), S_1(z_2)]\not\equiv 0;$$

függvényrendszer, ahol a szereplő $C(z)$ és $S(z)$ függvények az (5. 2) *és* (5. 3) *egyenleteket is kielégítik, a $Q_0(*)$ Abel-félcsoporton érvényes* (4. 23) *egyenletnek csak akkor megoldása, ha e függvényrendszerben és az* (5. 3)*-ban szereplő b_0 konstansokra*

$$c_1 c_3+c_4 c_7 = c_5 c_6, \quad c_1 c_2+c_4 c_6+c_5 c_7 = b_0 c_5 c_6$$

feltételek teljesülnek; ekkor

$$F(z_1 * z_2) = (c_1 c_2+c_4 c_6)C(z_1 * z_2)+c_5 c_6 S(z_1 * z_2).$$

BIZONYÍTÁS. Írjuk az (M6. 1) alatti függvényeket (4. 23)-ba:

$$F'' = c_1 C_1(c_2 C_1'+c_3 S_1')+(c_4 C_1+c_5 S_1)(c_6 C_1'+c_7 S_1'),$$

tehát az 5. 1. tétel szerint valóban

$$c_1 c_2+c_4 c_6+c_5 c_7 = b_0 c_5 c_6, \quad c_1 c_3+c_4 c_7 = c_5 c_6,$$

továbbá $F'' = (c_1c_2+c_4c_6)C''+c_5c_6S''$. Végül megemlítjük, hogy a 4. 2. C-ben látottak alapján világos, hogy $b_0=2a$ [(4. 21)-ben két *különböző* gyök van!], ha az (M5. 2) alatti megoldásról van szó; ill. $b_0=\pm 2$ [(4. 21)-ben két *összeeső* gyök van!], ha az (M5. 3) alatti megoldást választjuk.

5. 2. KOROLLÁRIUM. *A*

$$\text{(M6. 2)}\qquad \begin{aligned} G(z) &= S_2(z), \\ H(z) &= c_1S_2(z)+c_2C_2(z), \\ K(z) &= c_3S_2(z)+c_4C_2(z), \\ L(z) &= c_5S_2(z)+c_6C_2(z), \\ &\Delta[S_2(z_1),\, C_2(z_2)]\not\equiv 0; \end{aligned}$$

függvényrendszer, ahol a szereplő $S(z)$ és $C(z)$ függvények az (5. 5) *és* (5. 6) *egyenleteket is kielégítik, a $Q_0(*)$ Abel-félcsoporton érvényes* (4. 23) *egyenletnek csak akkor megoldása, ha e függvényrendszerben és az* (5. 6)*-ban szereplő $b=b_0^2$ konstansokra*

$$c_2+c_3c_6 = c_4c_5, \quad c_1+c_3c_5 = b_0^2c_4c_6$$

feltételek teljesülnek; ekkor

$$F(z_1 * z_2) = c_4c_5S(z_1 * z_2)+c_4c_6C(z_1 * z_2).$$

BIZONYÍTÁS. Írjuk az (M6. 1) alatti függvényeket (4. 23)-ba;

$$F'' = S_2(c_1S_2'+c_2C_2')+(c_3S_2+c_4C_2)(c_5S_2'+c_6C_2'),$$

tehát az 5. 2 tétel szerint valóban

$$c_2+c_3c_6 = c_4c_5, \quad c_1+c_3c_5 = b_0^2c_4c_6$$

továbbá $F'' = c_4c_5S''+c_4c_6C''$. Végül a 4. 1. C-ben látottak alapján világos, hogy $b_0=0$ [(4. 1. C1)-nek megfelelő eset!], ha az (M4. 3) alatti megoldásról van szó; ill. $b_0\neq 0$ esetén $a=1/2b_0$ [(4. 1. C2)-nek megfelelő eset!], ha az (M4. 4) alatti megoldást választjuk.

5. 4. Érdekes lesz megvizsgálni az

$$\text{(5. 7)}\qquad F(z * t) = a_1g(z)g(t)+a_2g(z)+a_3g(t) \qquad [F(z), g(z){:}\ Q_0(*)\rightarrow Q]$$

egyenletet is, ahol $g(z)$ a (2. 26) CAUCHY-egyenletet kielégítő függvény, a_1, a_2, a_3 pedig konstansok. Nyilván elegendő csak a $\Delta(g, 1)\not\equiv 0$ esetet tekinteni; ellenkező esetben csak trivialitásokat kapnánk. Érvényes az

5. 3. TÉTEL. *Ha a $Q_0(*)$ Abel-félcsoporton érvényes* (5. 7) *függvényegyenletben szereplő $g(z)$ függvény kielégíti a* (2. 26) *Cauchy-egyenletet, továbbá ha a $\Delta(g, 1)\not\equiv 0$ feltétel is teljesül, akkor* (5. 7)*-ben szükségképpen $a_2=a_3=0$ és a megoldás pedig*

$$F(z * t) = a_1g(z * t).$$

BIZONYÍTÁS. Az F'' szimmetriája alapján

$$\Delta(a_2g, 1)+\Delta(1, a_3g) = (a_2-a_3)\Delta(g, 1) = 0,$$

tehát valóban $\Delta(g, 1)\not\equiv 0$ miatt $a_2=a_3$.

Kihasználva F'' argumentumának asszociatív voltát a

$$\Delta(g'', a_1 g)+\Delta(g'', a_2)+\Delta(a_2, g) =$$
$$= \Delta(g'g, a_1 g)+\Delta(g'g, a_2)+\Delta(a_2, g) =$$
$$= a_2(g'-1)\Delta(g, 1) = 0$$

egyenletet kapjuk, azaz $\Delta(g, 1)\not\equiv 0$ miatt $a_2=0$.

Ekkor viszont valóban (5. 7)-ből $F''=a_1 g''$ következik.

MEGJEGYZÉS. Kézenfekvőnek látszott volna $a_2=a_3$ megkapása után (5. 7)-et az

$$F''-a_1 g'' = a_2 g+a_2 g'$$

alakba rendezi. Ez alakját tekintve már (2. 21) alakú PEXIDER-egyenlet, tehát a megoldását ismerjük, ami visszahelyettesítés után specializálódik. A tétel azonban *közvetlenül* azt mondja, hogy ez utóbbi PEXIDER-egyenlet csak triviális (azonosan zérus) megoldást tartalmaz.

5. 5. Hasonló tétel mondható ki az

$$(5.\ 8)\qquad F(z*t) = a_1 f(z)f(t)+a_2 f(z)+a_3 f(t) \quad [F(z), f(z)\colon Q_0(*)\to Q]$$

függvényegyenletre is, ahol $f(z)$ a (2. 23) CAUCHY-egyenletet kielégítő függvény, a_1, a_2, a_3 pedig konstansok. Itt is csak a $\Delta(f, 1)\not\equiv 0$ esetre szorítkozunk, ellenkező esetben $f(z)\equiv 0$ (vö. 2. 2. lemma). Érvényes az

5. 4. TÉTEL. *Ha a $Q_0(*)$ Abel-félcsoporton érvényes* (5. 8) *függvényegyenletben szereplő $f(z)$ függvény kielégíti a* (2. 23) *Cauchy-egyenletet, továbbá ha a $\Delta(f, 1)\not\equiv 0$ feltétel is teljesül, akkor* (5. 8)*-ban szükségképpen $a_1=0$ és $a_2=a_3$, a megoldás pedig*

$$F(z*t) = a_2 f(z*t).$$

BIZONYÍTÁS. A szimmetria és $\Delta(f, 1)\not\equiv 0$ miatt

$$\Delta(f, a_2)+\Delta(a_3, f) = (a_2-a_3)\Delta(f, 1) = 0,$$

tehát $a_2=a_3$. Az asszociativitás alapján pedig

$$\Delta(f'', a_1 f)+\Delta(f'', a_2)+\Delta(a_2, f) =$$
$$= \Delta(f+f', a_1 f)+\Delta(f+f', a_2)+\Delta(a_2, f) =$$
$$= a_1 f'\Delta(1, f)+a_2\Delta(f, 1)+a_2\Delta(1, f) = a_1 f'\Delta(1, f) = 0,$$

tehát $\Delta(f, 1)\not\equiv 0$ miatt $a_1=0$. A nyert konstansok alapján

$$F'' = a_2(f+f') = a_2 f'',$$

amit bizonyítani kívántunk.

5. 6. Az (5. 7) és (5. 8) egyenletek közös általánosításának tekinthető az

$$(5.\ 9)\qquad F(z*t) = a_1 g(z)g(t)+a_2 g(z)f(t)+a_3 f(z)g(t)+a_4 f(z)f(t)+$$
$$+a_5 g(z)+a_6 g(t)+a_7 f(z)+a_8 f(t) \quad [F(z), g(z), f(z)\colon Q_0(*)\to Q]$$

függvényegyenlet, ahol $g(z)$ ill. $f(z)$ a (2. 26) ill. (2. 23) CAUCHY-egyenletet kielégítő függvények, a_i $(i=1, 2, \ldots, 8)$ pedig konstansok. Nyilván elegendő a $\Delta(g,f,1)\not\equiv 0$ esetet vizsgálni; ellenkező esetben (5. 9) az (5. 7) ill. (5. 8) egyikére egyszerűsödik.

5. 5. TÉTEL. *Ha a $Q_0(\ast)$ Abel-félcsoporton érvényes* (5. 9) *függvényegyenletben szereplő $g(z)$ ill. $f(z)$ függvények kielégítik a* (2. 26) *ill.* (2. 23) *Cauchy-egyenletet, továbbá ha a $\Delta(g,f,1)\not\equiv 0$ feltétel is teljesül, akkor* (5. 9)*-ben szükségképpen*

$$a_2=a_3=a_4=a_5=a_6=0, \quad a_7=a_8,$$

a megoldás pedig

$$F(z\ast t) = a_1 g(z\ast t)+a_7 f(z\ast t).$$

BIZONYÍTÁS. Először a szokásos módon a szimmetriát használjuk ki, s a kapott

$$\Delta(g, a_2 f)+\Delta(f, a_3 g)+\Delta(g, a_5)+\Delta(a_6, g)+\Delta(f, a_7)+\Delta(a_8, f) =$$
$$= (a_2-a_3)\Delta(g,f)+(a_5-a_6)\Delta(g,1)+(a_7-a_8)\Delta(f,1) = 0$$

egyenletet rendre $1, f, g$ függvényekkel bővítjük; ekkor a következő három egyenletet nyerjük:

$$(a_2-a_3)\Delta(g,f,1) = 0,$$
$$(a_5-a_6)\Delta(g,f,1) = 0,$$
$$(a_7-a_8)\Delta(g,f,1) = 0.$$

Mivel $\Delta(g,f,1)\not\equiv 0$, ezért $a_2=a_3$, $a_5=a_6$ és $a_7=a_8$ adódik.

Vegyük figyelembe a jobb oldal asszociativitását is. Ekkor

$$\Delta(g'', a_1 g)+\Delta(g'', a_2 f)+\Delta(f'', a_2 g)+\Delta(f'', a_4 f)+$$
$$+\Delta(g'', a_5)+\Delta(a_5, g)+\Delta(f'', a_7)+\Delta(a_7, f) =$$
$$= \Delta(g' g, a_1 g)+\Delta(g'g, a_2 f)+\Delta(f+f', a_2 g)+$$
$$+\Delta(f+f', a_4 f)+\Delta(g'g, a_5)+\Delta(a_5, g)+\Delta(f+f', a_7)+\Delta(a_7, f) =$$
$$= a_2 g'\Delta(g,f)+a_2\Delta(f,g)+a_2 f'\Delta(1,g)+a_4 f'\Delta(1,f)+$$
$$+a_5 g'\Delta(g,1)+a_5\Delta(1,g)+a_7\Delta(f,1)+a_7\Delta(1,f) =$$
$$= a_2(g'-1)\Delta(g,f)+a_5(g'-1)\Delta(g,1)+a_2 f'\Delta(1,g)+a_4 f'\Delta(1,f) = 0.$$

„Bővítsük" ezt az egyenletet rendre az $1, f, g$ függvényekkel, kapjuk

$$a_2(g'-1)\Delta(g,f,1) = 0,$$
$$a_5(g'-1)\Delta(g,f,1)+a_2 f'\Delta(1,f,g) = 0,$$
$$a_4 f'\Delta(1,f,g) = 0.$$

Innen $\Delta(g,f,1)\not\equiv 0$ miatt valóban $a_2=a_5=a_4=0$ adódik.

Végül a nyert konstansokkal (5. 9) alapján

$$F'' = a_1 gg'+a_7(f+f') = a_1 g''+a_7 f'',$$

amit bizonyítanunk kellett.

5. 7. Különösen gyakran fordulnak elő az

$$(5.\,10)\qquad F(z*t) = a_1F(z)F(t)+a_2F(z)g(t)+a_3g(z)F(t)+a_4g(z)g(t)+$$
$$+a_5F(z)+a_6F(t)+a_7g(z)+a_8g(t)+a_9 \quad [F(z), g(z)\colon Q_0(*)\to Q]$$

típusú függvényegyenletek, ahol $g(z)$ a (2. 26) CAUCHY-egyenletet kielégítő függvény, a_i $(i=1, 2, \ldots, 9)$ pedig konstansok. Csak a $\Delta(F, g, 1)\not\equiv 0$ eset vizsgálatára kívánunk szorítkozni, ellenkező esetben (5. 10) lényegesen egyszerűbb egyenletekre redukálódik, melyeket korábban már megoldottunk. Érvényes az

5. 6. TÉTEL. *Legyen $\Delta(F, g, 1)\not\equiv 0$ és $g(z)$ elégítse ki a* (2. 26) *Cauchy-egyenletet is. Ekkor a $Q_0(*)$ Abel-félcsoporton érvényes* (5. 10) *függvényegyenletnek csak abban az esetben van megoldása, ha a benne szereplő konstansokra az*

$$(5.\,11)\qquad \begin{cases} a_2=a_3, \quad a_5=a_6, \quad a_7=a_8, \quad a_2a_5-a_1a_7=0, \\ a_2^2-a_1a_4-a_2=0, \quad a_5^2-a_1a_9-a_5=0, \\ a_4a_5-a_2a_7+a_7=0, \quad a_5a_7-a_2a_9-a_7=0 \end{cases}$$

feltételek teljesülnek.

BIZONYÍTÁS. (5. 10) bal oldalának szimmetriája alapján

$$\Delta(F, a_2g)+\Delta(g, a_3F)+\Delta(F, a_5)+\Delta(a_6, F)+\Delta(g, a_7)+\Delta(a_8, g) =$$
$$= (a_2-a_3)\Delta(F, g)+(a_5-a_6)\Delta(F, 1)+(a_7-a_8)\Delta(g, 1) = 0$$

írható, melyet rendre az $1, g, F$ függvényekkel „bővítve"

$$(a_2-a_3)\Delta(F, g, 1) = 0,$$
$$(a_5-a_6)\Delta(F, g, 1) = 0,$$
$$(a_7-a_8)\Delta(F, g, 1) = 0$$

adódik. Mivel $\Delta(F, g, 1)\not\equiv 0$, ezért $a_2=a_3$, $a_5=a_6$, $a_7=a_8$. E konstansokkal (5. 10) az

$$F'' = a_1FF'+a_2(Fg'+gF')+a_4gg'+a_5(F+F')+a_7(g+g')+a_9$$

egyenletre egyszerűsödik.

A z_1*z_2 művelet asszociativitása és kommutativitása alapján

$$\Delta(F'', a_1F)+\Delta(F'', a_2g)+\Delta(g'', a_2F)+\Delta(g'', a_4g)+$$
$$+\Delta(F'', a_5)+\Delta(a_5, F)+\Delta(g'', a_7)+\Delta(a_7, g) =$$
$$= \Delta(a_1F'F+a_2g'F+a_2F'g+a_4g'g+a_5F+a_5F'+a_7g+a_7g'+a_9, a_1F)+$$
$$+\Delta(a_1F'F+a_2g'F+a_2F'g+a_4g'g+a_5F+a_5F'+a_7g+a_7g'+a_9, a_2g)+$$
$$+\Delta(a_1F'F+a_2g'F+a_2F'g+a_4g'g+a_5F+a_5F'+a_7g+a_7g'+a_9, a_5)+$$
$$+\Delta(g', g, a_2F)+\Delta(a_5, F)+\Delta(g'g, a_7)+\Delta(a_7, g) =$$
$$= (-a_1a_2F'-a_1a_4g'-a_1a_7+a_1a_2F'+a_2^2g'+a_2a_5-a_2g')\Delta(F, g)+$$
$$+(-a_1a_5F'-a_1a_7g'-a_1a_9+a_1a_5F'+a_2a_5g'+a_5^2-a_5)\Delta(F, 1)+$$
$$+(-a_2a_5F'-a_2a_7g'-a_2a_9+a_2a_5F'+a_4a_5g'+a_5a_7+a_7g'-a_7)\Delta(g, 1) =$$
$$= [(a_2^2-a_1a_4-a_2)g'+(a_2a_5-a_1a_7)]\Delta(F, g)+$$
$$+[(a_2a_5-a_1a_7)g'+(a_5^2-a_1a_9-a_5)]\Delta(F, 1)+$$
$$+[(a_4a_5-a_2a_7+a_7)g'+(a_5a_7-a_2a_9-a_7)]\Delta(g, 1) = 0.$$

„Bővítsük" ezt rendre az $1, g, F$ függvényekkel, akkor

$$[(a_2^2-a_1a_4-a_2)g'+(a_2a_5-a_1a_7)]\Delta(F,g,1)=0,$$

$$[(a_2a_5-a_1a_7)g'+(a_5^2-a_1a_9-a_5)]\Delta(F,g,1)=0,$$

$$[(a_4a_5-a_2a_7+a_7)g'+(a_5a_7-a_2a_9-a_7)]\Delta(F,g,1)=0,$$

tehát $\Delta(F,g,1)\not\equiv 0$ miatt valóban a tételben kimondott megszorításokat nyerjük a szereplő konstansokra, s így a bizonyítást befejeztük.

Az 5. 6. tételből közvetlenül adódik az

5. 3. KOROLLÁRIUM. *Ha az* (5. 10) *egyenletben szereplő konstansokra az* (5. 11) *feltételek teljesülnek, továbbá ha*

(5. 12) $$|a_1|+|a_2|+|a_5|>0,$$

akkor ez a függvényegyenlet az $a_1=0$ *esetben az*

(5. 13) $$F(z*t)-a_4g(z*t)+a_9=[F(z)-a_4g(z)+a_9]+[F(t)-a_4g(t)+a_9],$$

(5. 14) $$F(z*t)+a_4g(z*t)+a_7=[F(z)+a_4g(z)+a_7]g(t)+[F(t)+a_4g(t)+a_7]g(z)$$

egyenletek egyikébe, $a_1\neq 0$ *esetén pedig az*

(5. 15) $$a_1F(z*t)+a_2g(z*t)+a_5=[a_1F(z)+a_2g(z)+a_5][a_1F(t)+a_2g(t)+a_5]$$

Cauchy-egyenletbe írható át. Ezek a visszavezetések a $\Delta(F,g,1)\equiv 0$ *esetben is érvényesek.*

BIZONYITÁS. Ha $a_1=0$, akkor (5. 11) miatt $a_2a_5=0$ is áll, tehát (5. 12) miatt vagy $a_2=0$ és $a_5\neq 0$, vagy $a_5=0$ és $a_2\neq 0$. Az első esetben (5. 11)-ből $a_5=1$ és $a_7=-a_4$, a másodikban $a_2=1$ és $a_9=-a_7$ következik.

Ha (5. 10)-ben $a_1=a_2=0$, $a_5=1$ és $a_7=-a_4$, akkor

$$F''=a_4gg'+F+F'-a_4g-a_4g'+a_9,$$

tehát valóban (5. 13) adódik.

Legyen (5. 10)-ben $a_1=a_5=0$, $a_2=1$ és $a_9=-a_7$, akkor

$$F''=Fg'+gF'+a_4gg'+a_7g+a_7g'-a_7,$$

s ez valóban (5. 14)-et adja.

Végül $a_1\neq 0$ esetben (5. 10) és (5. 11) alapján

$$a_1F''=a_1^2FF'+a_1a_2(Fg'+gF')+(a_2^2-a_2)gg'+a_1a_5(F+F')+$$
$$+a_2a_5(g+g')+a_5^2-a_5$$

adódik, s ez valóban (5. 15)-tel ekvivalens,

(5. 10) összes olyan megoldását, melyre $\Delta(F,g,1)\not\equiv 0$ áll, (5. 13)—(5. 15) alapján már könnyen felírhatjuk.

5. 8. Az 5. 6. tételhez hasonló érvényes az

(5. 16) $$F(z*t)=a_1F(z)F(t)+a_2F(z)f(t)+a_3f(z)F(t)+a_4f(z)f(t)+$$
$$+a_5F(z)+a_6F(t)+a_7f(z)+a_8f(t)+a_9 \qquad [F(z),f(z):Q_0(*)\to Q]$$

egyenletre is, ahol $f(z)$ a (2. 23) CAUCHY-egyenletet kielégítő függvény, a_i $(i=1,2,...,9)$ pedig konstansok. Itt is csak a $\Delta(F,f,1)\not\equiv 0$ esetre szorítkozunk, mert különben (5. 16) már ismert egyenletekre specializálódik. Érvényes az

5. 7. TÉTEL. *Legyen $\Delta(F,f,1)\not\equiv 0$ és $f(z)$ elégítse ki a (2. 23) Cauchy-egyenletet is. Ekkor a $Q_0(*)$ Abel-félcsoporton érvényes (5. 16) függvényegyenletnek csak abban az esetben van megoldása, ha a benne szereplő konstansokra az*

$$\begin{cases} a_2=a_3, \quad a_5=a_6, \quad a_7=a_8, \quad a_2^2-a_1a_4=0, \\ a_2a_5-a_1a_7-a_2=0, \quad a_5^2-a_1a_9-a_5=0, \\ a_4a_5-a_2a_7-a_4=0, \quad a_5a_7-a_2a_9=0 \end{cases} \tag{5. 17}$$

feltételek teljesülnek.

BIZONYÍTÁS. (5. 16) bal oldalának szimmetriája alapján, mint ahogy azt az (5. 10) egyenlet esetében is láttuk, nyerjük az $a_2=a_3$, $a_5=a_6$, $a_7=a_8$ összefüggéseket. E konstansokkal (5. 16) az

$$F''=a_1FF'+a_2(Ff'+fF')+a_4ff'+a_5(F+F')+a_7(f+f')+a_9$$

egyenletre egyszerűsödik. Innen a z_1*z_2 művelet asszociativitása és kommutatívitása alapján

$$\begin{aligned}
&\Delta(F'',a_1F)+\Delta(F'',a_2f)+\Delta(f'',a_2F)+\Delta(f'',a_4f)+\\
&+\Delta(F'',a_5)+\Delta(a_5,F)+\Delta(f'',a_7)+\Delta(a_7,f)=\\
&=\Delta(a_1F'F+a_2f'F+a_2F'f+a_4f'f+a_5F+a_5F'+a_7f+a_7f'+a_9,a_1F)+\\
&+\Delta(a_1F'F+a_2f'F+a_2F'f+a_4f'f+a_5F+a_5F'+a_7f+a_7f'+a_9,a_2f)+\\
&+\Delta(a_1F'F+a_2f'F+a_2F'f+a_4f'f+a_5F+a_5F'+a_7f+a_7f'+a_9,a_5)+\\
&+\Delta(f+f',a_2F)+\Delta(f+f',a_4f)+\Delta(a_5,F)+\Delta(f+f',a_7)+\Delta(a_7,f)=\\
&=(-a_1a_2F'-a_1a_4f'-a_1a_7+a_1a_2F'+a_2^2f'+a_2a_5-a_2)\Delta(F,f)+\\
&+(-a_1a_5F'-a_1a_7f'-a_1a_9+a_1a_5F'+a_2a_5f'+a_5^2-a_2f'-a_5)\Delta(F,1)+\\
&+(-a_2a_5F'-a_2a_7f'-a_2a_9+a_2a_5F'+a_4a_5f'+a_5a_7-a_4f'+a_7-a_7)\Delta(f,1)=\\
&=[(a_2^2-a_1a_4)f'+(a_2a_5-a_1a_7-a_2)]\Delta(F,f)+\\
&+[(a_2a_5-a_1a_7-a_2)f'+(a_5^2-a_1a_9-a_5)]\Delta(F,1)+\\
&+[(a_4a_5-a_2a_7-a_4)f'+(a_5a_7-a_2a_9)]\Delta(f,1).
\end{aligned}$$

„Bővítsük” ezt az egyenletet rendre az $1,f,F$ függvényekkel, akkor $\Delta(F,f,1)\not\equiv 0$ miatt valóban az (5. 17) megszorításokat nyerjük a szereplő konstansokra, s így a tétel bizonyítását is befejeztük.

Az 5. 7. tételből közvetlenül adódik az

5. 4. KOROLLÁRIUM. *Ha az (5. 16) egyenletben szereplő konstansokra az (5. 17) feltételek teljesülnek, továbbá ha*

$$|a_1|+|a_2|+|a_5|>0, \tag{5. 18}$$

akkor ez a függvényegyenlet az $a_1=0$ esetben az

$$F(z*t)-\tfrac{1}{2}a_4f(z*t)^2+a_9 = [F(z)-\tfrac{1}{2}a_4f(z)^2+a_9]+[F(t)-\tfrac{1}{2}a_4f(t)^2+a_9] \tag{5. 19}$$

Cauchy-egyenletbe, $a_1\neq 0$ esetén pedig az

$$a_1F(z*t)+a_2f(z*t)+a_5 = [a_1F(z)+a_2f(z)+a_5][a_1F(t)+a_2f(t)+a_5] \tag{5. 20}$$

Cauchy-egyenletbe írható át. Ezek a visszavezetések a $\Delta(F,g,1)\equiv 0$ esetben is érvényesek.

Bizonyítás. Legyen $a_1=0$, akkor (5. 17) és (5. 18) alapján $a_2=0$, $a_5=1$, $a_7=0$ adódik. E konstansokkal (5. 16) az

$$F'' = a_4ff'+F+F'+a_9$$

egyenletre egyszerűsödik, mely valóban (5. 19)-cel ekvivalens.

Ha viszont (5. 16)-ban $a_1\neq 0$, akkor az (5. 17) összefüggésekkel az

$$a_1F'' = a_1^2FF'+a_1a_2(Ff'+fF')+a_2^2ff'+$$
$$+a_1a_5(F+F')+(a_2a_5-a_2)(f+f')+a_5^2-a_5$$

egyenletet nyerjük, mely valóban megegyezik (5. 20)-szal.

6. §. A CAUCHY-függvényegyenlet egy általánosítása

Ún. alternatív függvényegyenletek először J. Aczél, K. Fladt és M. Hosszú [7] közös dolgozatában fordulnak elő. Ezt követően M. Hosszú [28] oldja meg az

$$f(x+y)^2 = [f(x)+f(y)]^2$$

egyenletet folytonossági feltevés mellett. További általánosabb eredmények a szerzőtől származnak [72], [75], [76].

6. 1. Tekintsük az alternatív egyenletek családjába tartozó

$$f(z_1*z_2)^n = [f(z_1)+f(z_2)]^n \tag{6. 1}$$

$$[z_1,z_2,z_1*z_2\in Q_0(*);\ f(z):Q_0(*)\to Q]$$

függvényegyenletet, mely nyilván a (2. 23) Cauchy-egyenlet egy általánosításának tekinthető; n természetes szám. Látható, hogy (2. 23)-nak közvetlen következménye (6. 1), de fordítva legfeljebb csak annyi igaz (ha a „gyökvonás" a Q testben egyáltalán megengedett!), hogy

$$f(z_1*z_2) = e(z_1,z_2)[f(z_1)+f(z_2)]$$

fennáll, ahol

$$e(z_1,z_2)^n\equiv 1.$$

Így (6. 1) megoldásai általánosabbak is lehetnének, s éppen ezért meglepő a következő

6. 1. TÉTEL. *A* $Q_0(*)$ *Abel-félcsoporton érvényes* (6. 1) *és* (2. 23) *függvényegyenletek, ha n természetes szám, egymással ekvivalensek, azaz* (6. 1) *minden megoldása* (2. 23)*-at is kielégíti és megfordítva.*

6. 2. A 6. 1. tétel bizonyítását előkészítendő, először két lemmát bizonyítunk.

6. 1. LEMMA. *Ha a* $Q_0(*)$ *félcsoportnak csak véges számú (egymástól különböző) eleme van, akkor sem a* (6. 1), *sem pedig a* (2. 23) *egyenletnek az* $f(z)\equiv 0$ *(triviális) megoldáson kívül nincs más megoldása.*

BIZONYÍTÁS. Mivel (6. 1) következménye (2. 23)-nak, elegendő csupán az általánosabb (6. 1) egyenletre bizonyítani állításunkat. Nyilván az $f(z)\equiv 0$ egyidejűleg mindkét egyenletnek megoldása, a továbbiakban ezt az esetet kizárjuk. Ha $f(z)\not\equiv 0$, akkor van olyan $z_0\in Q_0(*)$, melyre $f(z_0)\neq 0$. Megmutatjuk, hogy ez ellentmondásra vezet.

Alkossuk meg a

$$(6.2)\qquad z_0^2 = z_0 * z_0,\quad z_0^4 = z_0^2 * z_0^2, \ldots, z_0^{2k} = z_0^{2k-1} * z_0^{2k-1}, \ldots \qquad (k=1,2,\ldots)$$

sorozatot. A (6. 1) egyenlet ismételt alkalmazásával bármely k $(=1,2,\ldots)$-ra

$$f(z_0^{2k})^n = [f(z_0^{2k-1})+f(z_0^{2k-1})]^n = 2^n f(z_0^{2k-1})^n =$$
$$= 2^n[f(z_0^{2k-2})+f(z_0^{2k-2})]^n = 2^{2n} f(z_0^{2k-2})^n = \ldots$$

$$(6.3)\qquad f(z_0^{2k})^n = 2^{kn} f(z_0)^n \qquad (k=1,2,\ldots)$$

fennáll.

Legyen $Q_0(*)$ különböző elemeinek száma m. Ekkor a (6. 2) sorozat első $m+1$ számú elemei között is van már két $z_1=z_0^{2p}$, $z_2=z_0^{2q}$ $(p\neq q)$ egyező elem. Az ezekhez tartozó $f(z_1)^n$, $f(z_2)^n$ függvényértékek is szükségképpen megegyeznek, tehát (6. 3) miatt

$$2^{pn} f(z_0)^n = f(z_1)^n = f(z_2)^n = 2^{qn} f(z_0)^n,$$
$$f(z_0)^n(2^{pn}-2^{qn}) = 0,$$

s ha itt $f(z_0)\neq 0$, akkor $p\neq q$ miatt ellentmondást kaptunk. Ezzel a bizonyítás véget ért.

6. 1. KOROLLÁRIUM. *Ha az* $f(z)\not\equiv 0$ *függvény megoldása a* (6. 1) *vagy* (2. 23) *függvényegyenleteknek, akkor szükségképpen végtelen sok különböző értéket vesz fel.*

BIZONYÍTÁS. Itt is elegendő csupán az általánosabb (6. 1) egyenletet tekinteni. A 6. 1. lemma alapján világos, hogy $f(z)\not\equiv 0$ esetben $Q_0(*)$-ban *végtelen sok* különböző elem van. Legyen ismét valamely $z_0\in Q_0(*)$-ra $f(z_0)\neq 0$. Ekkor a (6. 2) sorozat tagjai, következésképpen a hozzájuk tartozó

$$f(z_0^2),\quad f(z_0^4), \ldots, f(z_0^{2k}), \ldots$$

függvényértékek is *mind különbözőek*, hisz ellenkező esetben ugyanúgy jutnánk ellentmondásra, mint a 6. 1. lemma bizonyításánál. Tehát a 6. 1. korollárium igaz.

MEGJEGYZÉS. A 6. 1. lemmánál, ill. korolláriumnál a $z_1 * z_2$ műveletnek sem az asszociatív, sem pedig a kommutatív voltát nem használtuk ki, ami lehetőséget nyújtott volna állításaink lényegesen általánosabb formában való kimondására is.

A 6. 1. lemmából közvetlenül adódik a

6. 2. KOROLLÁRIUM. *Ha az $f(z)\not\equiv 0$ függvény megoldása a* (6. 1) *vagy* (2. 23) *függvényegyenletnek, akkor tetszőleges $r_1, r_2, \ldots, r_k$ természetes számok esetén is*

$$\Delta[f(z_1)^{r_1},\ f(z_2)^{r_2}, \ldots, f(z_k)^{r_k}] \not\equiv 0. \tag{6.4}$$

Más szóval nincsen olyan $m=\max(r_1, r_2, \ldots, r_k)$-adfokú konstans együtthatójú algebrai egyenlet, melynek az $f(z)\not\equiv 0$ függvény összes felvett értéke gyöke lenne.

BIZONYÍTÁS. Ugyanis (6. 4) ellenkezője ellentmondásra vezet, mert a 2. 1. korollárium szerint azt jelentené, hogy léteznek olyan $a_1, a_2, \ldots, a_k$ egyidejűleg nem zérus Q-beli konstansok, melyekkel

$$\sum_{i=1}^{k} a_i f(z)^{r_i} \equiv 0, \qquad \sum_{i=1}^{k} |a_i| > 0 \tag{6.5}$$

fennáll. Viszont a (6. 5) $m=\max(r_1, r_2, \ldots, r_k)$-adfokú algebrai egyenletnek $f(z)$-re nézve Q-ban legfeljebb m számú különböző megoldása lehet, tehát a 6. 1. korollárium szerint feltevésünkkel ellentétben $f(z)\equiv 0$ következik.

6. 3. Most már következhet a 6. 1. tétel bizonyítása:

BIZONYÍTÁS. Mivel $f(z)\equiv 0$ mind a (6. 1), mind pedig a (2. 23) egyenletnek megoldása, a továbbiakban feltehetjük, hogy $f(z)\not\equiv 0$. Feltesszük továbbá, hogy $n\geqq 2$. Azt kívánjuk bizonyítani, hogy (6. 1)-ből mindig következik (2. 23); ennek fordítottja triviálisan igaz.

A (6. 1) egyenletet

$$f(z_1 * z_2)^n = f(z_1)^n + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} f(z_1)^{n-k} f(z_2)^k + f(z_2)^n$$

alakba írjuk és a szokásos módon kihasználjuk a $z_1 * t * z_2$ művelet asszociatív és kommutatív voltát:

$$\left[f(z_1)^n + \sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k} f(t)^{n-k} f(z_1)^k + f(t)^n\right] + \sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k} f(z_1 * t)^{n-k} f(z_2)^k + f(z_2)^n =$$

$$= f(z_1)^n + \sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k} f(z_2 * t)^{n-k} f(z_1)^k + \left[f(z_2)^n + \sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k} f(t)^{n-k} f(z_2)^k + f(t)^n\right].$$

Írjuk ezt az egyenletet a

$$\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k} \Delta[f(z_1 * t)^{n-k} - f(t)^{n-k},\ f(z_2)^k] = 0 \tag{6.6}$$

determinánsos alakba és „bővítsük" rendre az $f(z), f(z)^2, \ldots, f(z)^{n-2}$ függvényekkel; ily módon nyerjük a

$$\sum_{k=2}^{n-1}\binom{n}{k} \Delta[f(z_1 * t)^{n-k} - f(t)^{n-k},\ f(z_2)^k,\ f(z_3)] = 0,$$

$$\sum_{k=3}^{n-1}\binom{n}{k} \Delta[f(z_1 * t)^{n-k} - f(t)^{n-k},\ f(z_2)^k,\ f(z_3)^2,\ f(z_4)] = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\binom{n}{n-1} \Delta[f(z_1 * t) - f(t),\ f(z_2)^{n-1},\ f(z_3)^{n-2}, \ldots, f(z_n)] = 0 \tag{6.7}$$

egyenleteket.

E „bővítéseknek” természetesen csak akkor van értelme, ha $n \geqq 3$. Viszont az $n=2$ esetben nincs is rá szükség, mert (6. 6) és (6. 7) megegyezik, mindkét esetben a

$$(6.\,8)\qquad 2\Delta[f(z_1 * t)-f(t), f(z_2)] = 0$$

egyenletre egyszerűsödnek. Erre a speciális esetre később még visszatérünk, s a továbbiakban feltesszük, hogy $n \geqq 3$.

A (6. 7) egyenlet $f(z) \not\equiv 0$ miatt a 2. 1. korollárium szerint csak az

$$(6.\,3.\,\mathrm{A})\qquad f(z)^{n-k} = \sum_{i=1}^{n-k-1} b_i f(z)^i, \qquad \sum_{i=1}^{n-k-1} |b_i| > 0 \qquad (\mathrm{k}=1,2,\ldots,n-2),$$

$$(6.\,3.\,\mathrm{B})\qquad f(z*t)-f(t) = \sum_{k=1}^{n-1} a_k(t) f(z)^k, \qquad \sum_{k=1}^{n-1} |a_k(t)| > 0$$

esetekben állhat fenn.

6. 3. A. Mivel feltevésünk szerint $f(z) \not\equiv 0$, ezért a (6. 3. A) eset a 6. 2. korollárium alapján figyelmen kívül hagyható.

6. 3. B. A másik eset vizsgálatát azzal kezdjük, hogy a (6. 6) egyenletet most rendre az $f(z)^{n-1}$, $f(z)^{n-2}, \ldots, f(z)^2$ függvényekkel „bővítjük”. Így a következő egyenleteket nyerjük:

$$\sum_{k=1}^{n-2} \binom{n}{k} \Delta[f(z_1 * t)^{n-k} - f(t)^{n-k}, f(z_2)^{n-1}, f(z_3)^k] = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{n-3} \binom{n}{k} \Delta[f(z_1 * t)^{n-k} - f(t)^{n-k}, f(z_2)^{n-1}, f(z_3)^{n-2}, f(z_4)^k] = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$(6.\,9)\qquad \binom{n}{1} \Delta[f(z_1 * t)^{n-1} - f(t)^{n-1}, f(z_2)^{n-1}, f(z_3)^{n-2}, \ldots, f(z_n)] = 0.$$

Mivel (6. 4) szerint

$$\Delta[f(z_1)^{n-1}, f(z_2)^{n-2}, \ldots, f(z_{n-1})] \not\equiv 0,$$

ezért (6. 9)-ből a 2. 2. korollárium szerint

$$(6.\,10)\qquad f(z_1 * t)^{n-1} - f(t)^{n-1} = \sum_{i=1}^{n-1} b_i(t) f(z)^i, \qquad \sum_{i=1}^{n-1} |b_i(t)| > 0$$

következik. Helyettesítsük most a (6. 3. B) egyenletet (6. 10)-be:

$$(6.\,11)\qquad \Big[f(t) + \sum_{k=1}^{n-1} a_k(t) f(z)^k\Big]^{n-1} = f(t)^{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} b_i(t) f(z)^i,$$

mely egyenlet tehát minden $z, t \in Q_0(*)$ elempárra érvényes. Tekintsük most a bal oldalon az $f(z)$ függvény legnagyobb kitevőjű hatványát, ez éppen

$$a_{n-1}(t)^{n-1} f(z)^{(n-1)^2};$$

ilyen hatvány egyik oldalon sincs több. Ekkor viszont $a_{n-1}(t) \equiv 0$, mert ha volna olyan $t_0 \in Q_0(*)$, melyre $a_{n-1}(t_0) \neq 0$ fennáll, akkor ezt a t_0 értéket (6. 11)-be helyettesítve azt kapnánk, hogy $f(z)$ gyöke egy konstans együtthatójú valódi $(n-1)^2$-fokú algebrai egyenletnek, amit viszont $f(z)\not\equiv 0$ miatt a 6. 2. korollárium kizár. Az $a_{n-1}(t)\equiv 0$ ismeretében hasonlóan okoskodhatunk $a_{n-2}(t)$-re, majd az $a_{n-3}(t)$, $a_{n-4}(t), \ldots$ együttható-függvényekre is mindaddig, míg $f(z)$ mindenkori legnagyobb kitevőjű hatványa csak *egy* van, s ez éppen

$$a_k(t)^{n-1} f(z)^{k(n-1)},$$

tehát míg $k(n-1) > n-1$, azaz $k \geqq 2$. Így $a_k(t)\equiv 0$, ha $k\geqq 2$ és (6. 3. B) az

$$f(z * t) = a_1(t)f(z)+f(t) \tag{6. 12}$$

egyenletre egyszerűsödik.

Ugyanezt kapjuk az $n=2$ esetben is (6. 8) alapján, tehát (6. 1)-ből bármely $n\geqq 2$ természetes szám esetén az $f(z)\not\equiv 0$ feltevéssel a (6. 12) egyenlethez jutunk. Innen a bal oldal szimmetriája alapján a szokásos módon

$$\Delta[a_1(z_1), f(z_2)] + \Delta[f(z_1), 1] = \Delta[a_1(z_1)-1, f(z_2)] = 0$$

írható, tehát $f(z)\not\equiv 0$ miatt

$$a_1(z)-1 = af(z) \qquad (a=\text{konst.}),$$

s (6. 12)-ből az

$$f(z_1 * z_2) = af(z_1)f(z_2)+f(z_1)+f(z_2) \tag{6. 13}$$

egyenletet nyerjük.

Legyen végül (6. 13)-ban $z_1=z_2=z$ és (6. 1)-et is figyelembe véve

$$[af(z)^2+2f(z)]^n = 2^n f(z)^n,$$

$$a^n f(z)^{2n} + \sum_{k=1}^{n-1} 2^k \binom{n}{k} a^{n-k} f(z)^{2n-k} = 0 \tag{6. 14}$$

írható, de a 6. 2. korollárium szerint $f(z)\not\equiv 0$ esetén

$$\Delta[f(z_1)^{2n}, f(z_2)^{2n-1}, \ldots, f(z_n)^{n+1}] \not\equiv 0$$

is fennáll, tehát (6. 14)-ben szükségképpen $a=0$. Így (6. 13) valóban a (2. 23) CAUCHY-egyenletre egyszerűsödött, amivel a tétel bizonyítását befejeztük.

(Beérkezett: 1965. XII. 23.)

VIZSGÁLATOK A LINEÁRISAN KOMPAKT GYŰRŰK ELMÉLETÉBEN, II.*

Írta: WIEGANDT RICHÁRD

II. Lineárisan kompakt radikálmentes gyűrűkről

5. §. Féligegyszerű lineárisan kompakt gyűrűk jellemzései I.

Ebben a §-ban tulajdonképpeni célunk egy féligegyszerű lineárisan kompakt gyűrű R-modulusokkal való jellemzése. Ehhez előkészületként kimutatjuk, hogy lineárisan kompakt gyűrűk radikálja zárt, továbbá ismertetjük a második *Wedderburn—Artin*-féle struktúratétel LEPTINtől származó általánosítását, amely a topologikusan egyszerű lineárisan kompakt gyűrűket jellemzi.

Emlékeztetünk arra, hogy egy R gyűrű *lineárisan kompakt*, ha mint R-modulus lineárisan kompakt. Minthogy az R-modulusok lineáris kompaktsága az előző §-ban tárgyaltaknak speciális esete, azért alkalmazhatjuk az ott bebizonyított állításokat.

5, 1. állítás. ([18] Satz 8) *Lineárisan kompakt gyűrű Jacobson-radikálja zárt.*

Jelölje J az R lineárisan kompakt gyűrű *Jacobson*-radikálját. Minthogy J tartalmazza R-nek összes kváziireguláris balideálját, azért elegendő kimutatni, hogy J-nek $\bar{J}$ lezártja kváziireguláris. Az állítás bizonyított lesz, ha kimutatjuk, hogy $\bar{J}$ tetszőleges a elemének van bal-kváziinverze.

Legyen $\mathrm{U}=\{U_\gamma\}$ az R összes nyílt balideáljából álló filter, és tekintsük az összes

$$H_\gamma=\{x\in R \mid x+xa\in U_\gamma\}$$

halmazt. Világos, hogy H_γ balideál. Minthogy U_γ nyílt, azért zárt is, így ha valamilyen $y\in R$ elemre $y\notin H_\gamma$, azaz $y+ya\notin U_\gamma$, akkor létezik $y+ya$-nak olyan V környezete, amely U_γ-hoz diszjunkt, az összeadás és a szorzás folytonossága miatt tehát van y-nak olyan W környezete, amely H_γ-hoz diszjunkt. Ezért H_γ zárt balideál.

Tekintsük ezután minden $U_\gamma(\in \mathrm{U})$-hoz az

$$F_\gamma=\{f_\gamma\in R \mid f_\gamma\circ a\in U_\gamma\}$$

halmazokat. Egyik F_γ sem üres, ugyanis $a\in\bar{J}$ miatt minden $a+U_\gamma$ mellékosztály tartalmaz $b\in J$ elemet. b bal-kváziinverzét f_γ-val jelölve fennáll

$$\begin{aligned} f_\gamma\circ a &= f_\gamma+a+f_\gamma a\in f_\gamma+a+U_\gamma+f_\gamma(a+U_\gamma) = \\ &= f_\gamma+b+f_\gamma b+U_\gamma = f_\gamma\circ b+U_\gamma = U_\gamma, \end{aligned}$$

* A dolgozat I. része az *MTA Mat. Fiz. Oszt. Közl.* **16** (1966) 239—267. oldalain jelent meg. A *teljes irodalomjegyzéket* is az első részhez csatoltuk.

tehát valóban $f_\gamma \in F_\gamma$. Másrészt minden F_γ H_γ-nak egy mellékosztálya, mert ha f_γ és $f'_\gamma \in F_\gamma$, akkor érvényes

$$f_\gamma - f'_\gamma + (f_\gamma - f'_\gamma)a = f_\gamma \circ a - f'_\gamma \circ a \in U_\gamma,$$

és ezért H_γ definíciója szerint $f_\gamma - f'_\gamma \in H_\gamma$.

Nyilvánvaló, hogy $\mathbf{F} = \{F_\gamma\}$ filtert alkot, mégpedig zárt balideálok szerinti mellékosztályokból álló filtert. Ezért a feltevés szerint van olyan $f \in R$ elem, amelyre $f \in \downarrow \mathbf{F}$ érvényes. Minthogy bármely γ indexre $f \in F_\gamma$, ezért f felírható $f = f_\gamma + h_\gamma$ $(h_\gamma \in H_\gamma)$ alakban, és fennáll

$$\begin{aligned} f \circ a &= (f_\gamma + h_\gamma) \circ a = f_\gamma + h_\gamma + a + f_\gamma a + h_\gamma a = \\ &= f_\gamma \circ a + (h_\gamma + h_\gamma a) \in U_\gamma. \end{aligned}$$

Mivel ez minden γ-ra igaz, azért

$$f \circ a \in \bigcap_{U \in \mathbf{U}} U = 0$$

érvényes. []

Az 5, 1. állításból közvetlenül folyik, hogy bármely topológikusan egyszerű lineárisan kompakt gyűrű egyúttal féligegyszerű is.

5, 2. tétel. ([18] Satz 12). *Egy R lineárisan kompakt gyűrű akkor és csak akkor topológikusan egyszerű, ha egy ferdetest feletti vektortér teljes endomorfizmusgyűrűjével izomorf. Lineárisan kompakt topológikusan egyszerű gyűrű L-kompakt.*

Legyen R topológikusan egyszerű. Ekkor R-nek létezik nem bal-kváziReguláris a eleme. Az

$$A = \{y = x + xa \mid x \in R\}$$

halmaz R-nek nyilván balideálja. A

$$\varphi_a(x) = x + xa \qquad (x \in R)$$

leképezés R-nek A-ra való folytonos endomorfizmusa, ezért a 4, 7. és 4, 6. állítás miatt A R-ben zárt. Mivel a nem bal-kváziReguláris elem, azért biztosan $a \notin A$, és így létezik olyan L nyílt balideál, amely maximális arra a tulajdonságra nézve, hogy A-t tartalmazza, de a-t nem.

Tegyük fel, hogy egy L' balideál tartalmazza L-et valódi módon, akkor tehát $a \in L'$. Másrészt $A \subseteqq L'$ miatt bármely $x \in R$ elemre

$$x = (x + xa) - xa \in L + L' = L'.$$

Ezért $L' = R$ és L R-nek maximális balideálja. Jelöljük M-mel az R/L faktormodulust. Ez, L maximalitása miatt irreducibilis R-modulus. Tekintsük minden $m \in M$ elemhez az

$$N_m = \{r \in R \mid rm = 0\}$$

halmazt. Könnyű látni, hogy ez balideál, mégpedig L nyílt volta miatt nyílt balideál. Ezért $N = \bigcap_{m \in M} N_m$ zárt és egyúttal kétoldali ideál is. A feltétel szerint csak $N = 0$ vagy $N = R$ lehetséges. Az utóbbi esetben $R^2 \subseteqq L$, tehát $\overline{R^2} \neq R$ következne és R topológikus egyszerűsége miatt $R^2 = 0$ állna fenn, ami azt jelentené, hogy R radikálgyűrű. Ezért csak $N = 0$ lehetséges, és így R elemei M-nek endomorfizmusai.

Jelölje K M-nek R-rel felcserélhető endomorfizmusainak a halmazát. Minthogy K elemei R-rel felcserélhetők, azért feltehető, hogy K M-nek jobboperátortartománya. Mivel M irreducibilis, azért a felcserélhetőség miatt csak $M\gamma=0$ vagy $M(\gamma\in K)$ lehetséges. Így a $\gamma\neq 0$ esetben M-nek önmagára való leképezését kapjuk. Ker $\gamma=0$ vagy M miatt pedig világos, hogy bármely $\gamma\neq 0$ M-nek automorfizmusa. K tehát ferdetest, M pedig egy K feletti vektortér.

Alkalmazzuk JACOBSON sűrűségi tételét (3. 7. tétel), azt kapjuk, hogy R, mint az M irreducibilis R-modulus endomorfizmusainak a gyűrűje, sűrű M összes K-val felcserélhető endomorfizmusainak az R^* gyűrűjében. M mint irreducibilis R-modulus diszkrét és L-kompakt, így R^* éppen M hiperfolytonos endomorfizmusainak a gyűrűje, amely a 4, 26. állítás szerint szintén L-kompakt.

Ha az N_m $(m\in M)$ balideálok által generált $\mathbf{N}$ filtert tekintjük R-ben bázisfilternek, akkor ezáltal ugyanazt a topológiát vezetjük be R-ben, mint amit az R^* hiperfolytonos endomorfizmusok gyűrűjének a topológiája R-ben, mint altérben indukál. Mivel R eredeti topológiájában minden N_m nyílt volt, azért az $\mathbf{N}$ által bevezetett topológia az eredetinél durvább lineárisan kompakt topológia. Feltehetjük, hogy R-ben rögtön a legdurvább lineárisan kompakt topológiát választottuk, mivel ezáltal a zárt balideálok változatlanok maradnak (4, 15. állítás). Most tehát a két topológia R-ben megegyezik, ezért a 4, 6. állítás szerint R R^*-ban zárt. Minthogy pedig R R^*-ban sűrű, azért $R=R^*$. Azt is láttuk, hogy R L-kompakt.

Legyen most R egy K ferdetest feletti M vektortér teljes endomorfizmusgyűrűje. M nyilván irreducibilis R-modulus és a diszkrét topológiában lineárisan kompakt. A 4, 25. állítás alapján R is lineárisan kompakt.

Tekintsük R-nek egy tetszőleges $r\neq 0$ elemét. Ekkor létezik olyan $m\in M$ elem, hogy $rm\neq 0$. Ha $x\neq 0$ és y tetszőleges M-beli elemek, akkor léteznek olyan $s, t\in R$ endorfizmusok, hogy $sx=m$ és $t(rm)=y$ legyen, tehát $(trs)x=y$. Ezért az r elem által generált RrR ideálra nézve M irreducibilis. Ismét JACOBSON sűrűségi tételei alapján RrR R-nek sűrű részhalmaza, ezért $\overline{RrR}=R$ és így R topológikusan egyszerű. []

5, 3. tétel. *Legyen R lineárisan kompakt gyűrű. A következő feltételek ekvivalensek:*

a) *R radikálmentes;*

b) *R izomorf ferdetestek feletti vektorterek teljes endomorfizmusgyűrűinek komplett direkt összegével;*

c) *bármely unitér* lineárisan kompakt R-modulusban a maximális nyílt részmodulusok metszete 0;*

d) *bármely unitér lineárisan kompakt R-modulus minimális részmodulusok komplett direkt összege;*

e) *bármely*

$$0\to A\to B\to C\to 0$$

exakt sorozat széteső, ahol A, B, C unitér lineárisan kompakt R-modulusok, a leképezések pedig folytonos homomorfizmusok;

f) *bármely unitér lineárisan kompakt R-modulus projektív;*

g) *bármely unitér lineárisan kompakt R-modulus injektív.*

* Egy M R-modulus unitér, ha R egységelemes, és R-nek e egységelemére teljesül $em=m$ $(m\in M)$.

Kiegészítés: *Féligegyszerű lineárisan kompakt gyűrű L-kompakt.* Ez az 5, 2. tétel, az 5, 3. tétel b) feltétele és a 4, 22. állítás miatt triviális.

Azáltal, hogy a c)—g) feltételekben szereplő modulusok unitér modulusok, feltesszük, hogy az R operátortartomány egységelemes.

Az *a), b)* és *d)* feltételek ekvivalenciáját LEPTIN bizonyította be ([18] Satz 13 és [19] Satz 1). Ezek az állítások a féligegyszerű *Artin*-gyűrűkre vonatkozó *Wedderburn—Artin,* illetve *Noether*-féle jellemzések általánosításai. A féligegyszerű lineárisan kompakt gyűrűknek *c), e), f)* és *g)* tulajdonságokkal való jellemzése a diszkrét esetből ismert tételek általánosítása. (Vö.: JANS [9] 12. oldal és KERTÉSZ [14] Satz 5 és 6 ill. [15] 27. és 28. tétel). A bizonyításnak *a)⇒b)* és *c)⇒d)* részében lényegében LEPTINt követjük.

Bizonyítás. a)⇒b) Az 5, 2. tétel szerint elegendő kimutatni, hogy ha az R lineárisan kompakt gyűrű radikálmentes, akkor topológikusan egyszerű gyűrűk komplett direkt összege. Ennek a bizonyításához szükségünk lesz a következő segédtételre.

5, 4. segédtétel. *Ha $J_1, \ldots, J_r$ az R lineárisan kompakt gyűrűnek különböző maximális zárt ideálja, akkor*

$$\{J_1 \cap \ldots \cap J_{i-1}, J_i\} = R \qquad (i=2, \ldots, r).$$

Teljes indukációval kimutatjuk, hogy érvényes

$$\{I_1 \cap \ldots \cap J_{i-1}, J_i\} = R \qquad (i=2, \ldots, r).$$

Ez az $i=2$ esetben triviális. Legyen ezután $i>2$, és tegyük fel az állítás helyességét $j<i$-re. Tekintsük az $\{J_1 \cap \ldots \cap J_{i-1}, J_i\}$ ideált. A 4, 8. állítás miatt ez zárt, és így vagy J_i-vel vagy R-rel egyezik meg. Tegyük fel, hogy J_i-vel egyezik meg. Ekkor az $R/J_1 \cap \ldots \cap J_{i-1}$ faktorgyűrűben $J_j/J_1 \cap \ldots \cap J_{i-1}$ $(j=1, \ldots, i-1)$ maximális zárt ideálok, amelyekre az indukciós feltevés szerint fennáll

$$\{(J_1/J_1 \cap \ldots \cap J_{i-1}) \cap \ldots \cap (J_{j-1}/J_1 \cap \ldots \cap J_{i-1}), J_j/J_1 \cap \ldots \cap J_{i-1}\} = R/J_1 \cap \ldots \cap J_{i-1}$$

$(j=2, \ldots, i-1)$, továbbá érvényes

$$(J_1/J_1 \cap \ldots \cap J_{i-1}) \cap \ldots \cap (J_{i-1}/J_1 \cap \ldots \cap J_{i-1}) = 0.$$

Ezért alkalmazva a 3, 4. állítást, azt kapjuk, hogy $R/J_1 \cap \ldots \cap J_{i-1}$ algebrailag és topológiailag izomorf az

$$R/J_1 \cap \ldots \cap J_{i-1} \Big/ J_1/J_1 \cap \ldots \cap J_{i-1} \oplus \ldots \oplus R/J_1 \cap \ldots \cap J_{i-1} \Big/ J_{i-1}/J_1 \cap \ldots \cap J_{i-1}$$

direkt összeggel, azaz az

$$R/J_1 \oplus \ldots \oplus R/J_{i-1}$$

gyűrűvel. Jelöljük φ-vel $R/J_1 \cap \ldots \cap J_{i-1}$-nek $R/J_1 \oplus \ldots \oplus R/J_{i-1}$-re való izomorf leképezését és φ_j-vel $R/J_1 \cap \ldots \cap J_{i-1}$-nek R/J_j-re való felbontási homomorfizmusát. $J_j/J_1 \cap \ldots \cap J_{i-1}$ lineárisan kompakt és zárt ideál, ezért $\varphi(J_j/J_1 \cap \ldots \cap J_{i-1})$ is zárt ideál R/J_j-ben. De R/J_j topológikusan egyszerű, ezért $\varphi(J_i/J_1 \cap \ldots \cap J_{i-1})$ csak 0 vagy R/J_i lehet. A 0 esetet azonban ki kell zárnunk, mert abból $J_i \subseteq J_j (j<i)$ következne, ami lehetetlen. Ezért minden j-re $\varphi_j(J_i/J_1 \cap \ldots \cap J_{i-1}) = R/J_j$. Más-

részt R/J_j, mint topológikusan egyszerű lineárisan kompakt gyűrű, az 5, 2. tétel szerint egységelemes. Jelöljük ezt e_j-vel. Ekkor tehát érvényes

$$\varphi(J_i/J_1 \cap \ldots \cap J_{i-1})e_j = R/J_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, i-1)$$

vagyis

$$\varphi(J_i/J_1 \cap \ldots \cap J_{i-1}) = R/J_1 \oplus \ldots \oplus R/J_{i-1}.$$

Ebből viszont $J_i = R$ következik, ami szintén lehetetlen.

Most rátérünk annak a bizonyítására, hogy egy R radikálmentes lineárisan kompakt gyűrű topológikusan egyszerű lineárisan kompakt gyűrűk komplett direkt összege.

Tekintsünk egy M irreducibilis topológikus R-modulust, és jelöljük T-vel M balannihilátorainak az ideálját, azaz a

$$T = \{t \in R \mid tM = 0\}$$

halmazt. Ha $z \notin T$, akkor van olyan $m \in M$ elem, amelyre $zm \neq 0$, és az operátorszorzat folytonossága miatt létezik z-nek olyan U környezete, amelyre $0 \notin Um$, tehát $U \cap T \neq \emptyset$, és így T zárt. Az R/T faktorgyűrű az M irreducibilis R/T-modulusnak endomorfizmusaiból áll, mi több, figyelembe véve, hogy M és R/T lineárisan kompakt, a sűrűségi tételből következik, hogy R/T M-nek teljes endomorfizmusgyűrűje. Ezért R/T topológikusan egyszerű, T tehát R-ben maximális zárt ideál.

Minthogy R radikálja az összes irreducubilis R-modulus annihilátorideáljának a metszete, azért az előbbiek szerint R összes maximális zárt ideáljának a metszete benne van R radikáljában. De R radikálmentes, ezért a maximális zárt ideálok metszete 0.

Tekintsük R összes maximális zárt ideáljának a Γ halmazát és jelöljük $\tilde{R}$-sal a $\sum_{J \in \Gamma} R/J$ komplett direkt összeget. Minthogy $\bigcap_{J \in \Gamma} J = 0$, azért a 2, 1. tétel miatt R izomorf az R/J faktorgyűrűknek egy szubdirekt összegével. Ha φ_α jelöli R-nek R/J_α-ra való természetes homomorfizmusát, akkor tehát világos, hogy

$$\varphi(x) = \sum_\alpha \varphi_\alpha(x)$$

R-nek $\tilde{R}$-ba való folytonos homomorfizmusa. Minthogy $\varphi(x) = 0$ azt jelenti, hogy $\varphi_\alpha(x) = 0$ minden $J_\alpha \in \Gamma$-ra, azért ebben az esetben $x \in \bigcap_{J \in \Gamma} J = 0$ érvényes, és így φ egy-egyértelmű leképezés. Most megmutatjuk, hogy $\operatorname{Im} \varphi$ $\tilde{R}$-nek sűrű részhalmaza. Tekintsük ugyanis Γ-nak egy véges $J_1, \ldots, J_r$ részhalmazát és legyenek $y_i \in R/J_i$ $(i = 1, \ldots, r)$ előre adott tetszőleges elemek. Minthogy az 5, 4. segédtétel szerint

$$\{\bigcap_{j \neq i} J_j, J_i\} = R$$

azért léteznek olyan $x_i \in \bigcap_{j \neq i} J_j$ $(i = 1, \ldots, r)$ elemek, amelyekre $\varphi_i(x_i) = y_i$. Az $x = x_1 + \ldots + x_r$ elemre pedig érvényes $\varphi_i(x) = \varphi_i(x_i) = y_i$, tehát R-ben létezik olyan x elem, amelyre véges sok i értékre $\varphi_i(x)$ előre megadott értékeket vesz fel; $\operatorname{Im} \varphi$ tehát sűrű $\tilde{R}$-ban.

Másrészt φ folytonos homomorfizmus és R lineárisan kompakt, azért a 4, 7. és 4, 6. állításból következik, hogy $\mathrm{Im}\ \varphi$ $\tilde{R}$-nak zárt részgyűrűje. Így tehát $\mathrm{Im}\ \varphi = \tilde{R}$.

Feltehető, hogy R-nek a topológiája legdurvább lineárisan kompakt topológia. Tekintsük a Γ által generált $\mathbf{C}$ filtert és egy $\mathbf{U} = \{U\}$ R-beli bázisfiltert. Az $U + C$ ($U \in \mathbf{U}$, $C \in \mathbf{C}$) balideálok nyilván egy $\mathbf{V}$ filtert alkotnak, és $\downarrow\mathbf{V} = 0$. Ha $\mathbf{V}$-t tekintjük R bázisfilterének, akkor ezáltal az $\mathbf{U}$ által meghatározott topológiánál durvább topológiát kaptunk, ezért a feltétel szerint $\mathbf{V}$ az $\mathbf{U}$-val ekvivalens topológiát indukál; így minden $U_0 \in \mathbf{U}$ balideáljhoz van olyan $U + C \in \mathbf{V}$ balideál, amelyre $U + C \subseteqq U_0$ tehát $C \subseteqq U_0$. Azt nyertük, hogy ha U_0 R-nek tetszőleges nyílt balideálja, akkor van véges sok olyan $J_1, \ldots, J_r$ maximális zárt ideál, amelyre fennáll $J_1 \cap \ldots \cap J_r = C \subseteqq U_0$.

Az U_0 balideálnak R/J-ben az $\{U_0, J\}/J$ balideál felel meg, és amennyiben $J \neq J_1, \ldots, J_r$, úgy az 5, 4. segédtétel miatt $\{U_0, J\} \supseteqq \{(J_1 \cap \ldots \cap J_r), J\} = R$ érvényes. Ezért $\sum_{J \in \Gamma} \{U_0, J\}/J$ $\tilde{R}$-nek olyan nyílt balideálja, amelyre fennáll $\varphi(U_0) \supseteqq \sum_{J \in \Gamma} \{U_0, J\}/J$. Így φ nyílt leképezés. Ezzel kimutattuk, hogy R algebrai és topológiai értelemben topologikusan egyszerű lineárisan kompakt gyűrűk komplett direkt összege.

b)$\Rightarrow$c). Legyen $R = \sum_{\alpha} R_\alpha$, ahol R_α egy K_α ferdetest feletti V_α vektortér teljes endomorfizmusgyűrűje, és legyen M egy lineárisan kompakt R-modulus.

Tekintsük V_α-nak egy v elemét és K_α-nak vK_α-ra történő homomorfizmusát; a $v \neq 0$ esetben, mivel K_α ferdetest, ez izomorfizmus. Jelölje $e \in R_\alpha$ azt a lineáris transzformációt, amelyre $ev = v$, azaz vK_α-t önmagába viszi, és az összes vK_α-n kívüli vektort 0-ba képezi le. Kimutatjuk, hogy $R_\alpha e$ R-nek minimális balideálja. Ha ugyanis L olyan balideál, amelyre $0 \neq L \subseteqq R_\alpha e$, akkor L-nek bármely $l \neq 0$ elemére $l = re$ miatt $lv \neq 0$, l tehát vK_α-nak V_α-ba történő izomorfizmusa, miközben az összes többi vektort 0-ba viszi. Jelölje k V_α-nak azt az endomorfizmusát, amely lv-t v-re képezi, és az $\mathrm{Im}\, l$-en kívüli vektorokat 0-ba. Ekkor nyilván $e = kl \in L$, amiből $R_\alpha e = L$ következik. R_α-nek tehát van minimális balideálja. Mivel R_α topologikusan egyszerű, és R_α-nak B_α baltalpa 0-tól különböző ideál, azért B_α sűrű R_α-ban. R_α-t, és így R-et is, tehát minimális balideálok generálják.

Jelölje U M-nek egy tetszőleges nyílt részmodulusát és legyen $0 \neq m' \in M' = M/U$. Ha A jelöli az

$$A = \{r \in R \mid rm' = 0\}$$

halmazt, akkor A R-nek nyílt balideálja és R-rel együtt R/A-t is minimális részmodulusai generálják. Minthogy $R/A \cong Rm'$, ezért Rm'-t és vele együtt M'-t is minimális részmodulusok generálják. Ezért a 4, 10. állítás szerint M' véges sok minimális részmodulus direkt összege. Így M'-ben van (véges sok) olyan maximális részmodulus, amelynek a metszete 0. Áttérve M'-ből M-re azt kapjuk, hogy M-nek bármely U nyílt részmodulusa M maximális nyílt részmodulusainak a metszete. Mivel pedig $\cap U = 0$, azért M összes maximális nyílt részmodulusának a metszete 0.

c)$\Rightarrow$d). M maximális nyílt részmodulusainak egy Δ rendszerét *függetlennek* nevezzük, ha bármely véges sok $N_1, \ldots, N_r \in \Delta$ részmodulusra $M/(N_1 \cap \ldots \cap N_r)$ minimális részmodulusoknak r-tagú direkt összege. Független rendszer mindig létezik, mert egyetlen maximális nyílt részmodulus nyilván ilyet alkot. Ha Δ független rendszer és $\bigcap_{N\in\Delta} N\neq 0$, akkor Δ-t kibővítjük a következőképpen egy további maximális nyílt balideál hozzávételével. Legyen N olyan maximális nyílt balideál, amelyre $\bigcap_{N\in\Delta} N\nsubseteq N$. A feltétel szerint ilyen N létezik, jelöljük Δ'-vel az N-nel kiegészített Δ rendszert. Δ bármely véges $N_1, \ldots, N_r$ elemeire fennáll $\bigcap_i N_i \nsubseteq N$, tehát $\{\bigcap_i N_i, N\}=M$, és érvényes

$$0\neq M/N=\{\bigcap_i N_i, N\}/N \cong \bigcap_i N_i/(\bigcap_i N_i\cap N,)$$

ezért $\bigcap_i N_i/(\bigcap_i N_i\cap N)$ minimális részmodulus. Másrészt érvényes

$$M/\bigcap_i N_i=\{\bigcap_i N_i, N\}/\bigcap_i N_i \cong N/(\bigcap_i N_i\cap N,)$$

és így Δ függetlensége miatt $N/(\bigcap_i N_i\cap N)$ minimális részmodulusoknak r-tagú direkt összege. Minthogy pedig

$$M/(\bigcap_i N_i\cap N)\cong N/(\bigcap_i N_i\cap N)+\bigcap_i N_i/(\bigcap_i N_i\cap N,)$$

azért $M/(\bigcap_i N_i\cap N)$ minimális részmodulusoknak $r+1$ tagú direkt összege. Ezért Δ' független rendszer. Az eljárást folytatva eljutunk egy Δ_0 maximális független rendszerhez, amelyre már $\bigcap_{N\in\Delta_0} N=0$ érvényes.

Feltehető, hogy M-ben a τ topológia a legdurvább lineárisan kompakt topológia. Jelöljük $\mathbf{D}$-vel a Δ_0 által generált filtert. $\downarrow\mathbf{D}\subseteq\bigcap_{N\in\Delta_0} N=0$ miatt $\mathbf{D}$-t tekinthetjük egy τ_1 topológia bázisfilterének, és mivel $\mathbf{D}$ elemei τ-nyílt részmodulusok, azért $\tau\leqq\tau_1$ érvényes, tehát $\tau=\tau_1$. Ekkor a 4, 13. állítás szerint az $M_\alpha=M/U_\alpha$ $(U_\alpha\in\mathbf{D})$ modulusok olyan Ω inverz-rendszert alkotnak, amelynek limesze algebrailag és topológiailag izomorf M-mel. Másrészt M_α Δ_0 függetlensége miatt véges sok minimális részmodulus direkt összege. Ha $\alpha>\beta$, azaz $U_\alpha\subset U_\beta$, akkor feltehető, hogy $U_\beta=\bigcap_{i=1}^{l} N_i$ és $U_\alpha=\bigcap_{i=1}^{k} N_i$ $(k>l;\ N_i\in\Delta_0)$. Könnyű látni, hogy $M_\alpha=M/\bigcap_{i=1}^{k} N_i$-nek $M_\beta=M/\bigcap_{i=1}^{l} N_i$-re történő homomorfizmusánál az $M_{\alpha i}=\bigcap_{j\neq i} N_j/\bigcap_{i=1}^{k} N_i$ minimális részmodulusnak a képe 0, ha $i>l$, illetve az $M_{\beta i}=\bigcap_{i\neq j\leqq l} N_j/\bigcap_{i=1}^{l} N_i$ minimális részmodulus, ha $i\leqq l$. Az M_α és M_β modulus viszont éppen ezeknek az $M_{\alpha i}$-knek illetve $M_{\beta i}$-knek a direkt összege. Így az Ω rendszer az $M_{\alpha i}$-k által alkotott Ω_i rendszerek direkt összege. A 3, 5. állítás következtében érvényes

$$M\cong \varprojlim \Omega \cong \sum_i \varprojlim \Omega_i.$$

Minthogy az Ω_i rendszer modulusai, amennyiben 0-tól különböznek, izomorf egyszerű modulusok, azért $\varprojlim \Omega_i = M_i$ is egyszerű modulus. Következőleg algebrai és topológiai értelemben érvényes az $M \cong \sum_i M_i$ izomorfia, amivel kimutattuk a d) feltétel teljesülését.

Megjegyezzük, hogy a c)$\Rightarrow$d) bizonyításának befejező részét ugyanígy elvégezhettük volna, mint ahogyan azt az a)$\Rightarrow$b) bizonyításánál tettük.

d)$\Rightarrow$e) Tekintsünk egy tetszőleges olyan

$$0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to 0$$

exakt sorozatot, amelyben A, B, C unitér lineárisan kompakt R-modulusok, a leképezések pedig folytonosak. Azt kell kimutatnunk, hogy ekkor $\operatorname{Ker}\beta = \operatorname{Im}\alpha$ B-nek direkt összeadandója. Mindenekelőtt megjegyezzük a d) feltétel és a 4, 22. állítás következtében a tekintett modulusok L-kompaktok.

Minthogy fennáll $B/\operatorname{Ker}\beta \cong C$, azért a feltétel szerint érvényes a

$$B/\operatorname{Ker}\beta = \sum_{\gamma\in\Gamma} (B_\gamma/\operatorname{Ker}\beta) \tag{1}$$

direkt felbontás, ahol $B_\gamma/\operatorname{Ker}\beta$ $B/\operatorname{Ker}\beta$-nak minimális részmodulusa és β folytonossága miatt B_γ B-nek zárt részmodulusa. A feltétel szerint $\operatorname{Ker}\beta$-t és valamennyi B_γ-t $(\gamma\in\Gamma)$ minimális részmodulusaik generálják, ezért $\operatorname{Ker}\beta \subset B_\gamma$ miatt létezik minden B_γ-hoz egy olyan D_γ minimális részmodulus, amelyre a $\operatorname{Ker}\beta$ és D_γ által algebrailag generált $\{\operatorname{Ker}\beta, D_\gamma\}$ benne van B_γ-ban és $\operatorname{Ker}\beta \cap D_\gamma = 0$. Másrészt $B_\gamma/\operatorname{Ker}\beta$ egyszerű, ezért

$$\{\operatorname{Ker}\beta, D_\gamma\} = B_\gamma \qquad (\gamma\in\Gamma). \tag{2}$$

Jelölje D a D_γ-k $(\gamma\in\Gamma)$ által generált részmodulus lezártját. A 4, 8. állítás szerint $\{\operatorname{Ker}\beta, D\}$ B-ben zárt, ezért figyelembe véve (1)-et és (2)-t elő áll

$$\{\operatorname{Ker}\beta, D\} = B.$$

Másrészt

$$\{\operatorname{Ker}\beta, D\}/\operatorname{Ker}\beta = B/\operatorname{Ker}\beta = \sum_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma/\operatorname{Ker}\beta = \sum_{\gamma\in\Gamma} \{\operatorname{Ker}\beta, D_\gamma\}/\operatorname{Ker}\beta$$

miatt egy $x\in B$ elemre $x \in \operatorname{Ker}\beta \cap D$ csak akkor állhat fenn, ha $x=0$. Ezért $\operatorname{Ker}\beta$ és D algebrailag direkt összeget generál, tehát $B = \operatorname{Ker}\beta + D$. Minthogy a

$$\varphi : \operatorname{Ker}\beta + D \to B$$

izomorfizmus nyilván folytonos, azért az L-kompaktság miatt φ nyílt is. Ezzel bebizonyítottuk, hogy B-nek $\operatorname{Ker}\beta$ algebrai és topológiai értelemben direkt összeadandója, azaz a $0 \to A \to B \to C \to 0$ exakt sorozat széteső.

e)$\Rightarrow$f) Tekintsünk egy olyan

$$\begin{array}{ccc} & M & \\ & \downarrow{\scriptstyle\varphi} & \\ A & \xrightarrow{\alpha} B & \to 0 \end{array}$$

diagramot, amelyben az $A \to B \to 0$ sorozat exakt. Ekkor

$$0 \to \operatorname{Ker}\alpha \to A \xrightarrow{\alpha} B \to 0$$

szintén exakt sorozat, így a feltevés folytán széteső. Következőleg létezik A-nak $\mathrm{Ker}\,\alpha \oplus B$-re történő β nyílt-folytonos izomorfizmusa. Így a β^{-1} inverz leképezés is folytonos és az

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, "\varphi"'] \arrow[dd, "\varphi"] & \\ B \arrow[d, "\beta^{-1}"'] & & \\ A \arrow[r, "\alpha"] & B \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

diagram kommutatív, tehát M projektív.

f)$\Rightarrow$a) Jelölje J az R gyűrű radikálját. A feltétel szerint R, mint R-balmodulus lineárisan kompakt, ezért az 5, 1. állítás miatt J zárt és az R/J fektorgyűrű szintén lineárisan kompakt. Jelölje ι az identikus leképezést, és tekintsük az

$$\begin{tikzcd} & R/J \arrow[d, "\iota"] & \\ R \arrow[r, "\alpha"] & R/J \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

diagramot. A feltétel szerint R/J projektív, azért létezik R/J-nek, mint R-modulusnak egy R-be való φ folytonos izomorfizmusa, úgy, hogy fennálljon $\alpha\varphi = \iota$. Bebizonyítjuk, hogy most érvényes az

$$R = \mathrm{Im}\,\varphi + J \qquad (J = \mathrm{Ker}\,\alpha) \tag{3}$$

algebrai direkt felbontás. Legyen ugyanis $r \in R$, ekkor érvényes

$$\varphi\alpha(r) = a \in \mathrm{Im}\,\varphi$$

$$\alpha(r-a) = \alpha(r) - \alpha\varphi\alpha(r) = \alpha(r) - \alpha(r) = 0.$$

Következőleg $r - a \in \mathrm{Ker}\,\alpha$, és így minden $r \in R$ elem

$$r = a + b \quad (a \in \mathrm{Im}\,\varphi,\ b \in \mathrm{Ker}\,\alpha)$$

alakba írható. Tegyük fel, hogy az $a' \in \mathrm{Im}\,\varphi$ és $b' \in \mathrm{Ker}\,\alpha$ elemekre $a' + b' = 0$. Ekkor

$$0 = \alpha(a' + b') = \alpha(a').$$

Mivel $a' \in \mathrm{Im}\,\varphi$, azért létezik olyan R/J-beli c elem, amelyre $\varphi(c) = a'$, és fennáll

$$0 = \alpha(a') = \alpha\varphi(c) = c$$

amiből $a' = \varphi(c) = 0$ következik; ekkor azonban $b' = 0$ is teljesül. Ezzel kimutattuk, hogy (3) valóban teljesül.

Minthogy R egységelemes, azért a (3) moduluselméleti direkt felbontás következtében a J radikálnak van e jobbegységeleme.

Most már elegendő kimutatni a

5, 5. segédtételt. *Ha egy R gyűrű J radikálja jobbegységelemes, akkor $J = 0$.*

Jelöljük ugyanis e-vel J jobbegységelemet. Ismeretes, hogy J maga radikálgyűrű, ezért minden eleméhez, így $-e$-hez is, létezik olyan $y \in J$ eleme, amelyre $y \circ (-e) = 0$, azaz $y - e - ye = -e = 0$.

Azt a tényt, hogy R egységelemes és a modulusok unitér modulusok, eddig csupán itt használtuk fel.

A hátralevő részben az e)$\Rightarrow$f) és f)$\Rightarrow$a) részekhez analóg meggondolásokat végzünk.

e)$\Rightarrow$g) Tekintsünk egy olyan

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\varphi"'] & B \\ & M & \end{tikzcd}$$

diagramot, amelyben a $0 \to A \to B$ sorozat exakt. Ekkor

$$0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \to B/\mathrm{Im}\,\alpha \to 0$$

is exakt sorozat, ezért a feltétel szerint széteső, azaz érvényes $B \cong A \oplus (B/\mathrm{Im}\,\alpha)$. Jelölje β B-nek A-ra történő felbontási homomorfizmusát. Ez nyilván folytonos és a

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dd, "\varphi"'] & B \arrow[d, "\beta"] \\ & & A \arrow[dl, "\varphi"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

diagram kommutatív, tehát M injektív.

g)$\Rightarrow$a) Legyen J ismét R radikálja. A feltétel szerint J injektív, ezért létezik egy olyan φ folytonos izomorfizmus, hogy a

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & J \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\iota"'] & R \arrow[dl, "\varphi"] \\ & J & \end{tikzcd}$$

diagram kommutatív. Kimutathatjuk, hogy most érvényes az

$$R = \mathrm{Ker}\,\varphi + J \qquad (J = \mathrm{Im}\,\alpha)$$

direkt felbontás. A φ leképezés definíciójából világos, hogy $\mathrm{Ker}\,\varphi$ és J R-et generálja. Legyen $x \in \mathrm{Im}\,\alpha \cap \mathrm{Ker}\,\varphi$. Ekkor $J = \mathrm{Im}\,\alpha$ miatt $x = \alpha(x)$, továbbá

$$x = \iota x = \varphi\alpha(x) = \varphi(x) = 0.$$

Így $\mathrm{Im}\,\alpha \cap \mathrm{Ker}\,\varphi = 0$, és R valóban előáll a $\mathrm{Ker}\,\varphi$-nek és J-nek, mint balmodulusoknak a direkt összegeként. E direkt felbontásból következik, hogy R egységelemes volta miatt J-nek van jobbegységeleme. Ezért az 5, 5. segédtétel szerint $J = 0$ és így R radikálmentes. []

6. §. Féligegyszerű lineárisan kompakt gyűrűk jellemzései II.

Az 5, 3. tétel alkalmazásával könnyen fogjuk nyerni a féligegyszerű lineárisan kompakt gyűrűk gyűrűelméleti jellemzéseit. Ehhez azonban szükségünk lesz a következő általánosabb érvényű segédtételre.

6, 1. segédtétel. *Egy R egységelemes topológikus gyűrűnek bármely L zárt balideáljára a következő két feltétel ekvivalens:*

(i) *L jobbegységelemes;*
(ii) *L R-nek direkt összeadandója.*

A bizonyítás a *Peirce*-féle felbontáson alapul és ezenkívül még elemi topológiai meggondolásokat kell tennünk.

(i)$\Rightarrow$(ii) jelölje e az L jobbegységelemét és tekintsük az

$$L' = \{x \mid x = r - re, \ r \in R\}$$

balideált. e az L' balideált jobbról annihilálja, és fordítva, ha e az $s \in R$ elemet jobbról annulálja, akkor fennáll $s = s - se$, következőleg $s \in L'$. Ha tehát $s \notin L'$, akkor $se \neq 0$. A szorzás folytonossága miatt s-nek van olyan U környezete, hogy Ue a 0-t nem tartalmazza. Ebből $U \cap L' = \emptyset$ következik, és így $R \setminus L'$ nyílt, vagyis L' zárt.

$L = Le$-ből és $L'e = 0$-ból következik, hogy $L \cap L' = 0$. Másrészt érvényes $r = re + (r - re)$ minden $r \in R$ elemre, ezért érvényes az

$$R = L + L'$$

direkt felbontás, ahol L és L' zárt balideálok.

Kimutatjuk, hogy ez a felbontás topológiai értelemben is fennáll. Ehhez elegendő bebizonyítani, hogy 0-nak bármely $U_1 \subseteqq L$ és $U_2 \subseteqq L'$ környezetéhez létezik R-ben a 0-nak olyan W környezete, amelyre $W \subseteqq U_1 + U_2$. Világos, hogy $U_1 = U \cap L$ és $U_2 = U' \cap L'$ érvényes alkalmas $U, U' \subseteqq R$ környezetekkel; ezért feltehető, hogy $U_1 = U_0 \cap L$ és $U_2 = U_0 \cap L'$ $(U_0 \subseteqq U \cap U')$ alakú. Válasszuk meg ezután W-t, V_1-et és V_2-t úgy, hogy teljesüljenek a

$$V_1 e \subseteqq U_0, \quad V_2 - V_2 e \subseteqq U_0, \quad W \subseteqq V_1 \cap V_2$$

feltételek. Ekkor egy $w \in W$ elemre érvényes

$$we \in V_1 e \cap L \subseteqq U_0 \cap L = U_1,$$

$$w - we \in (V_2 - V_2 e) \cap L' \subseteqq U_0 \cap L' = U_2.$$

Következőleg $w = we + (w - we) \in U_1 + U_2$, amivel az állítást kimutattuk.

(ii)$\Rightarrow$(i) Jelölje most e R egységelemét, és legyen $R = L \oplus L'$. Ha $e = e_1 + e_2$ $(e_1 \in L, e_2 \in L')$ az egységelem felbontása, akkor a komponensek egyértelműsége miatt közvetlenül látható, hogy $Le_2 = 0$ és így e_1 L-nek jobbegységeleme. []

Most már be tudjuk bizonyítani a következő

6, 2. tételt. *Egy R lineárisan kompakt gyűrű akkor és csak akkor féligegyszerű, ha jobbegységelemes és teljesül rá az alábbi feltételek valamelyike:*

a) *R-ben a maximális nyílt balideálok metszete 0;*
b) *R minimális balideálok komplett direkt összege;*
c) *R-nek minden zárt balideálja direkt összeadandója;*
d) *R-nek minden zárt balideálja jobbegységelemes.*

Az a), b), c) feltételek az 5, 3. tétel c), d), e) feltételnek gyűrűelméleti megfelelői; *Artin*-gyűrűk esetében a d) feltétel a féligegyszerűség GOLDMAN—FUCHS—SZELE kritériumát adja ([5], [6]).

Bizonyítás. Alkalmazzuk az 5, 3. tételt R-re, mint R-modulusra, ekkor a féligegyszerűségből következik, hogy R jobbegységelemes és teljesül a). Továbbá a)$\Rightarrow$b)$\Rightarrow$c) is igaz.

Ha R jobbegységelemes és J a radikálja, akkor a c) feltételből következik, hogy J R-nek direkt összeadandója, vagyis $R=J\oplus K$. Jelölje e R jobbegységelemét és legyen $e = e_1+e_2$ $(e_1\in J, e_2\in K)$.

$$Je_2 \subseteq J\cap K=0$$

miatt minden $x\in J$ elemre teljesül $x = xe = x(e_1+e_2) = xe_1$, ezért J is jobbegységelemes és így az 5, 5. segédtétel folytán $J=0$. Így c)-ből következik R féligegyszerűsége.

d) és e) ekvivalenciája a 6, 1. segédtétel alapján triviális. []

7. §. Neumann-reguláris lineárisan kompakt gyűrűk

A *Neumann*-reguláris lineárisan kompakt gyűrűket úgy jellemezhetjük, hogy minden főbalideálja lezártjának (röviden zárt főbalideáljának) van jobbegységeleme. Ez a jellemzés a diszkrét esetben ismert. (vö. SZÁSZ F. [24] Satz 2, 6, ill. [25] 5, 4. Állítás). Bebizonyítjuk továbbá, hogy a lineárisan kompakt gyűrűk közül a *Neumann*-regulárisok éppen a féligegyszerűek.

7, 1. tétel. *Egy R lineárisan kompakt gyűrűre az alábbi állítások ekvivalensek:*

a) *R Neumann-reguláris;*
b) *R féligegyszerű;*
c) *R minden zárt főbalideáljának van jobbegységeleme.*

Bizonyítás. a)$\Rightarrow$b) Kimutatjuk, hogy minden *Neumann*-reguláris gyűrű egyúttal féligegyszerű is (JACOBSON [7] Theorem 8). Legyen ugyanis a R radikáljának egy tetszésszerinti eleme. Minthogy R *Neumann*-reguláris, azért van olyan $x\in R$ elem, amelyre fennáll $axa=a$. a-val együtt $-ax$ is eleme R radikáljának, így $-ax$ kvázireguláris elem, azaz létezik olyan $y\in R$ elem, hogy érvényes $y-ax-yax = 0$. Szorozzuk mindkét oldalt jobbról a-val, előáll

$$ya-axa-yaxa = 0,$$

azaz

$$ya-a-ya = 0.$$

Következőleg $a=0$ és így R radikálmentes.

b)$\Rightarrow$c) a 6, 2. tétel alapján triviális.

c)$\Rightarrow$a) Legyen a R-nek tetszőleges eleme és jelölje $\overline{(a)}_l$ az a elem által generált zárt főbalideált, továbbá e $\overline{(a)}_l$-nek jobbegységelemét. Tekintsük a-nak egy tetszőleges U_a környezetét; feltehető, hogy $U_a = a+U$, ahol U R-nek egy nyílt balideálja.

A szorzás folytonossága miatt létezik olyan V nyílt balideál R-ben, amelyre fennáll $V \subseteq U$ és $Ve \subseteq U$. $e \in \overline{(a)_l}$ miatt $e+V$ tartalmaz $(a)_l$-beli elemet, legyen az $e' = na+ra$ (n egész, $r \in R$). Legyen $x_u = ne'+e'r$, ekkor érvényes

$$x_u a = \big(n(na+ra)+(na+ra)r\big)a = n^2a^2+nra^2+$$
$$+nara+rara = (na+ra)^2 = e'^2 \in (e+V)^2 =$$
$$= e+eV+Ve+V^2 \subseteq e+U.$$

Jelölje $Z(U)$ a $Z(U)=\{z \in R \mid za \in U\}$ halmazt. Mivel bármely $y, z \in Z(U)$ és $r \in R$ elemre érvényes

$$(y \pm z)a = ya \pm za \in U,$$
$$(rz)a = r(za) \in RU \subseteq U,$$

azért $Z(U)$ balideál. Legyen $x \notin Z(U)$, ekkor van olyan $a \in R$ elem, hogy $xa \notin U$. Mivel U nyílt és így zárt is, azért x-nek van olyan U_x környezete, amelyre $U_x a \cap U = \emptyset$, következőleg $U_x \cap Z(U) = \emptyset$. Így $Z(U)$ zárt balideál.

Tekintsük $Z(U)$-nak $F(U) = x_u + Z(U)$ mellékosztályát. Ha $x \in F(U)$, akkor $xa \in (x_u+Z(U))a = x_u a + Z(U)a \subseteq e+U$, és így $F(U)$ benne van az $\{x \in R \mid xa \in e+U\}$ halmazban. A tartalmazás fordítva is fennáll, ha ugyanis $x \in \{x \in R \mid xa \in e+U\}$, akkor $(x-x_u)a = xa - x_u a \in e+U-(e+U) \subseteq U$ és így $x - x_u \in Z(U)$, következőleg $x \in F(U)$.

Legyen $\mathbf{U}$ R-nek egy bázisfiltere, és tekintsük az $\mathbf{F} = \{F(U) \mid U \in \mathbf{U}\}$ rendszert, könnyű látni, hogy $\mathbf{F}$ filtert alkot, mégpedig zárt balideálok szerinti mellékosztályból álló filtert. R lineáris kompaktsága miatt létezik egy $x_0 \in \downarrow\mathbf{F}$ elem, és érvényes $x_0 a \in \bigcap_{U \in \mathbf{U}} (e+U) = e$. Ebből következik, hogy $ax_0a = a$. Minthogy pedig a tetszőleges elem volt, azért R valóban *Neumann*-reguláris. []

Itt jegyezzük meg, hogy a)$\Rightarrow$c) következtetés helyessége minden topológikus gyűrűben érvényes és közvetlenül bizonyítható.

8. §. Lokálisan lineárisan kompakt gyűrűkről

8, 1. definíció. Egy R topológikus gyűrűt *lokálisan lineárisan kompaktnak* nevezünk, ha R-nek van olyan $L \neq 0$ nyílt balideálja, amely, mint R-modulus, lineárisan kompakt.

Az alábbi példa azt mutatja, hogy egy lokálisan lineárisan kompakt gyűrű nem szükségképpen lineárisan kompakt, még akkor sem, ha történetesen féligegyszerű is.

Tekintsünk egy $R_1 \neq 0$ lineárisan kompakt féligegyszerű gyűrűt és egy R_2 gyűrűt, amely végtelen sok test diszkrét direkt összege. R_2 a diszkrét topológiában nem lineárisan kompakt, hiszen nem is teljes. Az $R = R_1 \oplus R_2$ direkt összegben R_1 nullától különböző lineárisan kompakt nyílt ideál, R tehát lokálisan lineárisan kompakt. Legyen $\mathbf{F}$ R_2-ben egy olyan ideálok szerinti mellékosztályokból álló filter, amelyre $\downarrow\mathbf{F} = \emptyset$. Mivel $\mathbf{F}$ R-nek zárt ideálok szerinti mellékosztályokból álló filtere, azért R nem lehet lineárisan kompakt. Világos továbbá, hogy R is féligegyszerű gyűrű.

Ebben a §-ban az 5, 3. tétel alkalmazásával bebizonyítjuk, hogy minden féligegyszerű lokálisan lineárisan kompakt gyűrűnek van minimális balideálja.

Ezzel a primitív lokálisan lineárisan kompakt gyűrűk leírását visszavezettük a minimális balideált tartalmazó primitív gyűrűk leírására, ez utóbbiakat viszont jellemzi JACOBSON struktúratétele (3,8. tétel). Látni fogjuk továbbá, hogy milyen egyszerű szerkezetűek az egyszerű, illetve topológikusan egyszerű lokálisan lineárisan kompakt gyűrűk, ellentétben a lokálisan kompakt esettel.

8, 2. tétel. *Ha R féligegyszerű lokálisan lineárisan kompakt gyűrű, akkor R tartalmaz minimális balideált.*

Bizonyítás. Legyen L R-nek olyan 0-tól különböző nyílt balideálja, amely mint R-modulus lineárisan kompakt, és tekintsük az L balannihilátoraiból álló $A=\{r\in R \mid rL=0\}$ ideált. Könnyű látni, hogy A zárt ideál. Mivel $A\cap L$ R-nek olyan balideálja, amely zérógyűrű, azért $A\cap L$ benne van R radikáljában, következésképpen $A\cap L=0$.

Tekintsük az R/A faktorgyűrűt az R topológiája által indukált τ topológiában és jelölje φ R-nek R/A-ra való természetes homomorfizmusát. Mivel $L\cap A=0$, azért $\varphi(L)=L'$ L-lel izomorf R/A-modulus. R/A elemeit tekinthetjük L hiperfolytonos endomorfizmusainak, amennyiben az $\bar{r}=r+A\in R/A$ $(r\in R)$ és $x\in L$ elemhez az $\bar{r}(x)=rx$ $(\in L)$ elemet rendeljük hozzá. L hiperfolytonos endomorfizmusai H gyűrűjének a 4. §-ban leírt topológiája egy τ^* topológiát indukál R/A-ban. Ha $U^*(x_1,\dots,x_n;U)$ $(x_1,\dots,x_n\in L;\ U\subseteqq L)$ egy τ^*-nyílt balideál R/A-ban, akkor válasszuk meg a V R-beli nyílt balideált úgy, hogy teljesüljön $V\subseteqq L$, $Vx_1,\dots, Vx_n\subseteqq U$. Most a $V'=\varphi(V)$ τ-nyílt balideálra nyilván teljesül $V'\subseteqq U^*$, ezzel azt kaptuk, hogy $\tau\leqq\tau^*$.

Jelöljük Q-val R/A-nak H-beli lezártját. Mivel H a 4, 25. állítás szerint lineárisan kompakt, azért a Q zárt részgyűrű teljes. Ugyanígy, mint a 4, 25. állítás bizonyításánál belátható, hogy Q, mint gyűrű lineárisan kompakt.

Kimutatjuk, hogy L' Q-nak zárt balideálja. Legyen $q\in\bar{L}'$, és tekintsük q-nak $q+U_\alpha^*$ környezeteit. Mivel $q\in\bar{L}'$, azért $q\in l_\alpha+U_\alpha^*$ $(l_\alpha\in L')$ és fennáll $q=\downarrow\{l_\alpha+U_\alpha^*\}$. Másrészt könnyű látni, hogy $\{l_\alpha+U_\alpha^*\cap L'\}=\{(l_\alpha+U_\alpha^*)\cap L'\}$ filtert alkot. $\tau\leqq\tau^*$ miatt ez a filter τ-zárt R/A-részmodulusok szerinti mellékosztályokból áll, ezért L' lineáris kompaktsága miatt $\downarrow\{l_\alpha+U_\alpha^*\cap L'\}\in L'$. Következőleg $q\in L'$, azaz L' Q-nak τ^*-zárt részhalmaza. Legyen ezután $q\in Q$ és $l\in L'$. ql-nek bármely U_{ql}^* környezetéhez van q-nak olyan V_q^* környezete, amelyre teljesül $V_q^*l\subseteqq U_{ql}^*$. Mivel R/A Q-ban sűrű, azért létezik egy $r\in R/A\cap V_q^*$ elem, és így $rl\in U_{ql}^*\cap L'$. Következőleg $ql\in\bar{L}'=L'$. L' tehát valóban Q-nak zárt balideálja.

Ezután megmutatjuk, hogy L és L' mint Q-modulusok operátorizomorfok. Ehhez csupán azt kell belátnunk, hogy érvényes

$$\varphi(ql)=q\varphi(l) \qquad (q\in Q,\ l\in L).$$

Legyen $U^*(x, U_\alpha)$ egy Q-beli nyílt balideál. Ehhez válasszuk meg a $V(x,\alpha)$ R-beli nyílt balideált úgy, hogy teljesüljön $V(x,\alpha)x\subseteqq U_\alpha$. ql-nek $ql+V(x,\alpha)$ környezetéhez van q-nak olyan $q+W^*(x,\alpha)$ környezete, hogy teljesül $W^*(x,\alpha)l\subseteqq V(x,\alpha)$ és $W^*(x,\alpha)\varphi(l)\subseteqq U^*(x,\alpha)$. Mivel R/A Q-ban sűrű, azért létezik egy $r_{x,\alpha}\in(q+W^*(x,\alpha))\cap$

$\cap R/A$ elem és így $q+W^*(x,\alpha) = r_{x,\alpha}+W^*(x,\alpha)$, továbbá $ql+V(x,\alpha) = r_{x,\alpha}l+V(x,\alpha)$. x és α összes lehetséges választása mellett érvényes

$$ql = \cap\{r_{x,\alpha}l+V(x,\alpha)\},$$

ezért fennáll

$$\varphi(ql) = \cap\{\varphi(r_{x,\alpha}l)+\varphi(V(x,\alpha))\} \subseteq \cap\{r_{x,\alpha}\varphi(l)+U^*(x,\alpha)\}.$$

Másrészt $q = \cap\{r_{x,\alpha}+W^*(x,\alpha)\}$ miatt érvényes

$$q\varphi(l) = \cap\{r_{x,\alpha}+W^*(x,\alpha)\}\varphi(l) \subseteq \cap\{r_{x,\alpha}\varphi(l)+W^*(x,\alpha)\varphi(l)\} \subseteq$$
$$\subseteq \cap\{r_{x,\alpha}\varphi(l)+U^*(x,\alpha)\}$$

és így szükségképpen $\varphi(ql)=q\varphi(l)$.

Most kimutatjuk, hogy Q is féligegyszerű. Jelölje evégből J Q radikálját. Minthogy L és L' operátorizomorfok, ezért $\varphi^{-1}(JL')$ kvázireguláris balideál L-ben és így R féligegyszerűsége miatt $\varphi^{-1}(JL')=0$, vagyis $JL'=0$. Ezért L és L' operátorizomorf volta miatt fennáll

$$JL\cdot L = \varphi(JL)L = JL'L = 0,$$

és így $JL\subseteq A\cap L=0$. Mivel J elemei L-nek endomorfizmusai, azért szükségképpen $J=0$.

Minthogy Q lineárisan kompakt féligegyszerű gyűrű, azért 5, 3. b) miatt egységelemes. L és L' operátorizomorf volta miatt L unitér Q-modulus. Mivel Q elemei L-nek hiperfolytonos endomorfizmusai, azért L lineárisan kompakt Q-modulus. Így 5, 3. d) miatt L-nek létezik egy K minimális Q-részmodulusa. Ha $0\neq K_1$ $(\subseteq K)$ balideálja R-nek, akkor $L'K_1\neq 0$. Ellenkező esetben ugyanis $K_1^2\subseteq LK_1 = L'K_1=0$ volna, ami azt jelentené, hogy K_1 benne van R radikáljában. Most tehát $L'K_1\neq 0$, és érvényes

$$K=Q(L'K_1)=(QL')K_1\subseteq L'K_1=LK_1\subseteq K_1.$$

K tehát R-nek minimális balideálja. []

8, 3. korollárium. *Minden primitív lokálisan lineárisan kompakt gyűrűnek van minimális balideálja.*

Mivel a primitív gyűrűk egyszersmind féligegyszerűek is, azért az állítás a 8, 2. tétel alapján triviális.

A 8,3. korollárium tehát visszavezeti a lokálisan lineárisan kompakt gyűrűk vizsgálatát a minimális balideállal rendelkező primitív gyűrűk vizsgálatára. Ez utóbbi gyűrűk részletes leírása megtalálható JACOBSON [8] könyvének IV. fejezetében (lásd még a 3,8. tételt).

Az egyszerű lokálisan lineárisan kompakt gyűrűket a *Litoff*-tétel jellemzi, ugyanis érvényes a

8, 4. korollárium. *Minden egyszerű lokálisan lineárisan kompakt R gyűrű lokálisan egy S ferdetest feletti mátrixgyűrű, azaz R-nek minden véges részhalmaza beágyazható egy olyan M részgyűrűbe, amely egy S feletti teljes mátrixgyűrűvel izomorf.*

A 8, 3. tétel alapján R-nek van minimális balideálja, így az állítás közvetlenül folyik a *Litoff*-tételből, amely azt mondja ki, hogy *egy minimális balideált tartalmazó egyszerű gyűrű lokálisan egy ferdetest feletti mátrixgyűrű.* (Erre vonatkozóan lásd JACOBSON [8] 90. oldal Theorem 3-at; a tételnek elemi közvetlen bizonyítását adja FAITH—UTUMI [3] cikke.)

8, 5. korollárium. *Ha R jobbegységelemes egyszerű lokálisan lineárisan kompakt gyűrű, akkor R egy ferdetest feletti végesrangú mátrixgyűrűvel izomorf.*

A 8, 2. tétel alapján R-nek van minimális balideálja és így a minimális balideálok összege, R baltalpa 0-tól különböző ideál, tehát maga R. Ezért, ha e jelöli R jobbegységelemét, akkor $e = e_1 + \ldots + e_n$, ahol az e_i komponensek L_i minimális balideálok elmei $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Következőleg R-et véges sok minimális balideál generálja, és ezek közül kiválasztható nyilván szintén véges sok olyan, amelyeknek direkt összege R-et állítja elő. Ha viszont egy e jobbegységelemes gyűrű véges sok minimális balideál direkt összege, akkor E. NOETHER jól ismert tétele szerint R izomorf egy ferdetest feletti mátrixgyűrűvel.

Érdemes itt összehasonlítást tennünk a lokálisan lineárisan kompakt és a lokálisan kompakt gyűrűk között. Míg az eddig látottak alapján a lokálisan lineárisan kompakt gyűrűk szerkezete igen áttekinthetőnek mondható, addig a lokálisan kompakt gyűrűk körében mások a viszonyok. Legújabban SZKORNYAKOV [23] konstruált egy olyan egységelemes, egyszerű, lokálisan kompakt — nem diszkrét — gyűrűt, amely nem ferdetest feletti mátrixgyűrű.

A következő tétel két korolláriuma azt mutatja, hogy a topologikusan egyszerű lokálisan lineárisan kompakt (*Hausdorff*-terű) gyűrűk közül azok, amelyekben a topológia a legdurvább, vagy azok, amelyek jobbegységelemesek, éppen a topologikusan egyszerű lineárisan kompakt gyűrűk.

8, 6. tétel. *Ha R topologikusan egyszerű, lokálisan lineárisan kompakt gyűrű és $L(\neq 0)$ R-nek nyílt lineárisan kompakt balideálja, akkor R direkt összege L-nek, és egy olyan K diszkrét balideálnak, amelyet minimális balideálok generálnak.*

Bizonyítás. Mivel a 8, 2. tétel szerint R tartalmaz minimális balideált, ezért R-nek a B baltalpa 0-tól különböző, továbbá B R-ben sűrű ideál: $R = \bar{B}$. Legyen $L \neq 0$ R-nek lineárisan kompakt nyílt balideálja. Ha $L = R$, akkor a tétel állítása triviális. Az $L \neq R$ esetben tekintsük mindazokat a minimális balideálok által generált $K_1, \ldots, K_\alpha, \ldots$ balideálokat, amelyekre $K_\alpha \cap L = 0$. Mivel $L \neq R$ és $\bar{B} = R$, azért létezik legalább egy ilyen balideál. Legyen $K_{\alpha_1} \subseteqq K_{\alpha_2} \subseteqq \ldots$ ilyen balideáloknak egy felszálló lánca és legyen $K_0 = \bigcup_{\alpha_i} K_{\alpha_i}$. Világos, hogy K_0 balideál. Ha $a \in K_0$, akkor $a \in K_{\alpha_i}$ valamilyen α_i-re, és így a benne van véges sok balideál összegében, következőleg K_0-at is minimális balideálok generálják. Másrészt tekintsünk egy $b \in K_0 \cap L$ elemet. Minthogy $b \in K_{\alpha_j}$ valamilyen α_j-re, azért $b \in K_{\alpha_j} \cap L = 0$, és így fennáll $K_0 \cap L = 0$ is. Ezért alkalmazható a *Kuratowski—Zorn* lemma: létezik olyan K balideál, amelyet minimális balideálok generálnak és amely maximális a $K \cap L = 0$ tulajdonságra nézve.

$L + K$ tartalmazza R talpát, ellenkező esetben ugyanis volna olyan N minimális balideál, amelyre $N \cap (L + K) = 0$ teljesülne. Ekkor fennállna $(N + K) \cap L \neq 0$, amiből egy $l = n + k \neq 0$ $(l \in L,\ n \in N,\ k \in K)$ egyenlet következne, azaz $n = l - k \neq 0$. Ez azt jelentené, hogy $N \subseteqq L + K$, ami ellentmondás. Ezért érvényes

$$R = \bar{B} \subseteqq \overline{L + K} = L + K,$$

R tehát algebrai értelemben L és K direkt összege. Mivel L R-ben nyílt is, azért nyilvánvalóan $R = L \oplus K$ is érvényes. []

8, 7. korollárium. *Ha az R topológikusan egyszerű lokálisan lineárisan kompakt gyűrűben a topológia a legdurvább, akkor R lineárisan kompakt.*

A 8, 6. tétel szerint $R = L \oplus K$, ahol $L \neq 0$ lineárisan kompakt balideál, K pedig olyan diszkrét balideál amelyet minimális balideálok generálnak. Mivel R-ben és így K-ban is a topológia a legdurvább, azért K-t véges sok minimális balideál generálja. Ezért K is és vele együtt R is lineárisan kompakt.

8, 8. korollárium. *Ha az R topológikusan egyszerű, lineárisan kompakt gyűrű jobbegységelemes, akkor R lineárisan kompakt.*

A 8, 6. tétel szerint $R = L \oplus K$ és a K balideált $K_1, \ldots, K_n, \ldots$ minimális balideálok generálják. R-nek e jobbegységelemének legyen $e = l + (k_1 + \ldots + k_n)$ $(l \in L, k_i \in K_i)$ egy felbontása. Mivel a jobbegységelem, azért szükségképpen $K = \{K_1, \ldots, K_n\}$, és így K is és R is lineárisan kompakt.

Az 5, 2. tétel alapján a 8, 7. és 8, 8. korollárium így foglalható össze:

8, 9. tétel. *Ha az R topológikusan egyszerű lokálisan lineárisan kompakt gyűrűben a topológia a legdurvább, vagy R jobbegységelemes, akkor R egy ferdetest feletti vektortér teljes endomorfizmusgyűrűjével izomorf.*

III. Lineárisan kompakt radikálgyűrűkről

9. §. Az ideálok minimumfeltételét kielégítő nilpotens gyűrűk

A III. részben lineárisan kompakt radikálgyűrűkkel foglalkozunk. Ezeknek kielégítő jellemzését tudjuk adni abban az esetben, amikor a radikálgyűrű L-kompakt, és bizonyos megállapításokat teszünk az általános esetre vonatkozóan is. Az L-kompakt radikálgyűrűk leírásához szükségünk van az ideálok minimumfeltételének eleget tevő nilpotens gyűrűknek egy újabb jellemésére, továbbá a t-nilpotens K-kompakt gyűrűk meghatározására. Ezért először az ideálok minimumfeltételének eleget tevő nilpotens gyűrűket vizsgáljuk. Ehhez szükségünk lesz SZELE egy tételének ([29] Theorem 1) általánosítására. Ennek a megfogalmazásában használni fogjuk a következő jelölésmódot. Legyen M egy (R, S)-modulus. $R^k M$-en $(k = 1, 2, \ldots)$ értjük az összes $r_1 \ldots r_k m$ $(r_1, \ldots, r_k \in R; n \in M)$ alakú elem véges összegeit. Világos, hogy $R^k M$ M-nek (R, S)-részmodulusa. Hasonlóan definiáljuk az MS^l $(l = 1, 2, \ldots)$ és $R^k MS^l$ részmodulusokat is.

9,1. állítás. *Legyen M olyan (R, S)-modulus, amelyben teljesül az (R, S)-részmodulusok minimumfeltétele. Ha léteznek olyan k és l természetes egész számok, amelyekre $R^k M = MS^l = 0$, akkor M-ben teljesül a részcsoportok minimumfeltétele is.*

Bizonyítás. A $k = l = 1$ esetben $RM = MS = 0$ miatt M-nek minden részcsoportja (R, S)-részmodulus is, és az állítás triviális. Legyen ezután $l = 1$ és $k > 1$, és tételezzük fel az állítás helyességét $k - 1$-re. Most az $R^{k-1} M$ részmodulusra teljesül $R(R^{k-1} M) = 0$ és $(R^{k-1} M) S = 0$, így $R^{k-1} M$-ben érvényes a részcsoportokra vonatkozó minimumfeltétel. Tekintsük ezután az $M' = M / R^{k-1} M$ faktormodulust.

M'-re teljesül $R^{k-1}M'=0$ és $M'S=0$, így az indukációs feltevés miatt M'-ben érvényes a részcsoportok minimumfeltétele. Mivel mind $R^{k-1}M$-ben, mind $M/R^{k-1}M$-ben teljesül a részcsoportok minimumfeltétele, azért a 2, 9. segédtétel szerint M-ben is érvényes a részcsoportok minimumfeltétele.

Legyen végül k tetszőleges és $l>1$. Tételezzük fel az állítás helyességét k-ra és az l-nél kisebb természetes számokra. Tekintsük az MS^{l-1} részmodulust és az $M^*=M/MS^{l-1}$ faktormodulust. $R^k(MS^{l-1})\subseteq R^kM=0$ és $(MS^{l-1})S=0$ miatt az indukciós feltevésből következik, hogy MS^{l-1}-ben teljesül a részcsoportok minimumfeltétele. Minthogy $R^kM^*=0$ és $M^*S^{l-1}=0$, azért az indukciós feltevés miatt M^*-ban is érvényes a részcsoportok minimumfeltétele. Alkalmazva ismét a 2, 9. segédtételt, azt kapjuk, hogy M-ben is teljesül a részcsoportok minimumfeltétele. []

A 9, 1. állításnak két speciális esetére lesz szükségünk. Először tekintsük azt az esetet, amikor $R=M=S$. Ekkor előáll

(SZELE [29] Theorem 1): *ha R olyan nilpotens gyűrű, amelyekben teljesül az ideálok minimumfeltétele, akkor R-ben teljesül az additív részcsoportok minimumfeltétele is.*

Másodszor tekintsük azt az esetet, amikor $S=0$. Ekkor azt kapjuk, hogy *ha az M R-modulusban teljesül a részmodulusokra vonatkozó minimumfeltétel és van olyan k természetes szám, amelyre $R^kM=0$, akkor M-ben teljesül a részcsoportok minimumfeltétele is.*

KUROStól származik a következő

9, 2. állítás. *Ha egy G Abel-csoportban teljesül a részcsoportok minimumfeltétele, akkor G véges sok $p_i^{n_i}$-edrendű $C(p_i^{n_i})$ ciklikus csoport direkt összege, ahol $1\leqq n_i\leqq\infty$ és $C(p^\infty)$ a Prüfer-féle kváziciklikus csoportot jelöli.*

A bizonyításra nézve KUROS [16]-ra vagy FUCHS [4] 65. oldalára utalunk.

Egy R gyűrűt *p-gyűrűnek* nevezünk, ha additív csoportja p-csoport, azaz minden elemének a rendje a p prímszámnak hatványa.

A 9, 1. és 9, 2. állításból közvetlenül folyik a

9, 3. tétel. *Ha R egy, az ideálok minimumfeltételének eleget tevő nilpotens gyűrű, akkor érvényes az*

$$R = R_{p_1}+\ldots+R_{p_k}$$

gyűrű elméleti direkt felbontás, ahol az R_{p_i} $(i=1,\ldots,k)$ különböző p_i prímszámokhoz tartozó p_i-gyűrűk egyértelműen meghatározott nilpotens gyűrűk, amelyek eleget tesznek az ideálok minimumfeltételének.

A 9, 3. tétel értelmében elegendő az ideálok minimumfeltételének eleget tevő nilpotens p-gyűrűket vizsgálni és jellemezni. Ezekre érvényes a

9, 4. állítás. *Legyen R olyan nilpotens p-gyűrű, amely eleget tesz az ideálok minimumfeltételének. R-nek R^+ additív csoportja egy A^+ osztható Abel-csoportnak és egy B^+ véges Abel-csoportnak a direkt összege, továbbá $B^+ = C(p^{n_1})+\ldots+C(p^{n_k})$, A^+ a $C(p^\infty)$ kváziciklikus csoportnak véges sok példányban vett direkt összege és A^+ elemei R-nek annihilátorai, így ezek R-nek egy A ideálját alkotják.*

A 9, 1. és 9, 2 állítás következtében csupán azt kell kimutatnunk, hogy A^+ elemei R-nek annihilátorai. Legyen evégből $r\in R$ és $a\in A$ két tetszőleges elem, és jelölje l r-nek a rendjét, b pedig egy megoldását az $lx=a$ egyenletnek. Most előáll

$$ar=(lb)r=b(lr)=0.$$

Hasonlóan nyerjük azt, hogy a jobb oldali annihilátor is. []

SZELE [29] dolgozatában az ideálok minimumfeltételének eleget tevő nilpotens p-gyűrűket véges nilpotens p-gyűrűkkel jellemezte; ezt röviden vázoljuk. Tekintsük a 9,4. tételben szereplő B^+ csoport direkt felbontásában szereplő n_i kitevők maximumát és jelöljük ezt n-nel. Könnyű látni, hogy R-nek minden olyan r eleme, amelyre teljesül $p^n r=0$ egy R^* véges nilpotens gyűrűt alkot. R^* additív csoportja nyilván B^+-nak és annyi darab $C(p^n)$ ciklikus csoportnak a direkt összege, amennyi A^+ direkt felbontásában a komponensek száma. R^*-ot R egyértelműen meghatározza.

Fordítva, tekintsünk egy véges nilpotens R^* p-gyűrűt és legyen ennek additív csoportja $\sum_{i=1}^{k} C_i(p^n)+\sum_{i=1}^{l} C_i(p^{n_i})$ $(n_i \leqq n)$, továbbá legyenek a $C_i(p^n)$ ciklikus csoportok elemei R^*-nak annihilátorai. Ekkor R^*-ból az R végtelen nilpotens p-gyűrűt úgy nyerjük, hogy az egyes $C_i(p^n)$ komponenseket beágyazzuk a $C_i(p^\infty)$ *Prüfer*-csoportba és R additív csoportja $R^+=\sum_{i=1}^{k} C_i(p^\infty)+\sum_{i=1}^{l} C_i(p^{n_i})$ lesz. Két $r, s, \in R$ elem sorozatát pedig úgy definiáljuk, hogy ha $r=a+b$ és $s=c+d$ $(a, c \in \sum_{i=1}^{l} C_i(p^\infty)$; $b, d \in \sum_{i=1}^{l} C_i(p^{n_i}))$, akkor $rs=(a+b)(c+d)=bd$ legyen. R-et tehát meghatározza R^* és az R^+ additív csoportjából kiválasztott k darab olyan független elem, amelyek rendje éppen p^n.

SZELE Tibornak ez a jellemzése igen konstruktív. Az R-hez hozzárendelt R^* véges nilpotens gyűrű azonban R-nek nem homomorf invariánsa, azaz ha R-nek $\tilde{R}$ homomorf képe, akkor R^*-nek a képe ennél a homomorfizmusnál különbözhet az $\tilde{R}$-hoz hozzárendelt $\tilde{R}^*$ véges nilpotens gyűrűtől.

Nekünk a továbbiakban az ideálok minimumfeltételét kielégítő nilpotens p-gyűrűknek homomorf invariánsokkal való jellemzésére lesz szükségünk.

9, 5. tétel. *Legyen R olyan nilpotens p-gyűrű, amely eleget tesz az ideálok minimumfeltételének. R-hez tartozik egy izomorfiától eltekintve egyértelműen meghatározott véges nilpotens B p-gyűrű, amit R képének nevezünk, és egy N természetes szám. Ez a B kép izomorf az R/A faktorgyűrűvel, ahol A R-nek maximális osztható ideálja, és A elemei R-nek annihilátorai. A additív csoportja $C(p^\infty)$ Prüfer-csoportok direkt összege, és a komponensek száma éppen N.*

Mindazoknak a nilpotens p-gyűrűknek az osztálya, amelyek eleget tesznek az ideálok minimumfeltételének és amelyekhez egy adott B kép és N természetes szám tartozik, csak véges sok nem izomorf gyűrűt tartalmaz.

Bizonyítás. A 9, 4. állítás alapján a tétel első fele nyilvánvaló.

Legyen R egy olyan, az ideálok minimumfeltételének eleget tevő nilpotens p-gyűrű, amelyhez a B véges nilpotens p-gyűrű és az N természetes szám tartozik. Nyilvánvaló, hogy R az $A=\sum_{i=1}^{N} C_i(p^\infty)$ zérógyűrűnek B-vel való *Schreier*-bővítése. Ezért R elemeit (a, α) $(a \in B, \alpha \in A)$ elempároknak tekinthetjük. Minthogy A^+ R^+-nak direkt összeadandója, és A elemei R-nek annihilátorai, azért RÉDEI [21] 54. § alapján R-ben a következő műveleti szabályoknak kell fennállniok:

$$(a, \alpha)+(b, \beta) = (a+b, \alpha+\beta),$$

$$(a, \alpha)(b, \beta) = (ab, \langle a, b\rangle) \quad (a, b \in B; \alpha, \beta \in A),$$

ahol az $\langle a, b\rangle$ faktorrendszer kielégíti a

$$\langle 0, b\rangle = \langle a, 0\rangle = 0,$$

$$\langle ab, c\rangle = \langle a, bc\rangle,$$

$$\langle a+b, c\rangle = \langle a, c\rangle + \langle b, c\rangle,$$

$$\langle a, b+c\rangle = \langle a, b\rangle + \langle a, c\rangle \qquad (a, b, c \in B)$$

feltételeket.

Kimutatjuk, hogy A-nak B-vel való minden ilyen *Schreier*-bővítése egy ideálok minimumfeltételét kielégítő nilpotens p-gyűrűt szolgáltat. Az, hogy minden ilyen bővítésben teljesül az ideálok minimumfeltétele a 2, 8. segédtétel szerint nyilvánvaló; az is triviális, hogy a bővítés is p-gyűrű lesz. Jelölje n B nilpotencia-fokát, és tekintsünk egy $n+1$ tényezős $(a_1, \alpha_1)\dots(a_{n+1}, \alpha_{n+1})$ szorzatot $(a_1, \dots, a_{n+1} \in B;\ \alpha_1, \dots, \alpha_{n+1} \in A)$. Ekkor érvényes

$$((a_1, \alpha_1)\dots(a_n, \alpha_n))(a_{n+1}, \alpha_{n+1}) = (0, \beta)(a_{n+1}, \alpha_{n+1}) = (0, \langle 0, a_{n+1}\rangle) = 0.$$

Így tehát a bővítés nilpotens.

Megjegyezzük, hogy a bővítés nilpotens volta a *Schreier*-féle bővítések elmélete nélkül közvetlenül is belátható, de a *Schreier*-féle bővítéssel felső korlát is adódik a bővítés nilpotencia fokára nézve.

Tekintsük most a B képpel és N természetes számmal jellemzett gyűrűknek a $[B, N]$ osztályát. A $[B, N]$ osztályhoz tartozó nem izomorf gyűrűk száma a fentiek szerint legfeljebb annyi, mint ahányféleképpen az $\langle a, b\rangle$ faktorrendszer definiálható. Minthogy pedig $(a, 0)(b, 0) = (ab, \langle a, b\rangle)$, azért $\langle a, b\rangle \in A$ additív rendje nem haladhatja meg B számosságát, és így az összes lehetséges faktorrendszer mellett az $\langle a, b\rangle$ elemek A-nak egy véges A' részcsoportjába esnek. Az összes lehetséges faktorrendszer száma viszont legfeljebb annyi, mint a véges $B \times B$ halmaznak a véges A' halmazba történő leképezéseinek a száma, ami viszont véges. Következőleg a $[B, N]$ osztály csak véges sok nem izomorf gyűrűt tartalmaz. []

Az ideálok minimumfeltételét kielégítő nilpotens p-gyűrűk képe a gyűrűknek homomorf invariánsa, pontosabban érvényes a

9, 6. tétel. *Legyen R_1 és R_2 két olyan nilpotens p-gyűrű, amely eleget tesz az ideálok minimumfeltételének, és jelölje B_i R_i-nek a képét $(i=1, 2)$. Ha φ R_1-nek R_2-re történő homomorfizmusa, akkor létezik B_1-nek B_2-re történő olyan ψ homomorfizmusa, amelyre az*

$$\begin{array}{ccccc} R_1 & \xrightarrow{\varphi} & R_2 & \to & 0 \\ {\scriptstyle\alpha_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\alpha_2} & & \\ B_1 & \xrightarrow{\psi} & B_2 & \to & 0 \end{array}$$

diagramm kommutatív.

Bizonyítás. Jelölje A_i R_i-nek $(i=1, 2)$ maximális osztható ideálját. Ekkor $\operatorname{Ker} \alpha_i = A_i$ $(i=1, 2)$, és világos, hogy $\varphi(A_1)=A_2$. Felhasználva az izomorfiatételeket azt nyerjük, hogy

$$B_1 \xrightarrow{\beta} {R_1/A_1}\Big/{(\operatorname{Ker} \varphi + A_1)/A_1} \to 0,$$

$$0 \to {R_1/A_1}\Big/{(\operatorname{Ker} \varphi + A_1)/A_1} \xrightarrow{\gamma} R_1/(\operatorname{Ker} \varphi + A_1) \to 0,$$

$$0 \to R_1/(\operatorname{Ker} \varphi + A_1) \xrightarrow{\delta} \varphi(R_1)/\varphi(\operatorname{Ker} \varphi + A_1) = R_2/A_2 \to 0,$$

$$0 \to R_2/A_2 \xrightarrow{\varepsilon} B_2 \to 0$$

exakt sorozatok. Ezért $\psi = \varepsilon\delta\gamma\beta$ B_1-et a kívánt módon fogja B_2-re homomorf módon leképezni. []

Ebben a §-ban jellemeztük az ideálok minimumfeltételét kielégítő nilpotens gyűrűket.

SZÁSZ Ferenc hívta fel a figyelmemet arra, hogy ez a gyűrűosztály különbözik az ideálok minimumfeltételét kielégítő radikálgyűrűk osztályától. Igaz ugyan, hogy minden nilpotens gyűrű radikálgyűrű, mert bármely r elemének, ha $r^n=0$, $r' = \sum_{i=1}^{n-1} (-r)^i$ kváziinverze. Viszont E. SĄSIADA [22] bebizonyította olyan nem-nilpotens radikálgyűrűk létezését, amelyeknek csak triviális ideáljai vannak; egy ilyen gyűrű pedig eleget tesz az ideálok minimumfeltételének, de nem nilpotens. *Artin*-gyűrűk esetében viszont a radikálgyűrűk nilpotensek is (vö. [30], § 148.).

10. §. t-nilpotens K-kompakt gyűrűk

A 4, 18. definíció alapján egy R topológikus gyűrűt *K-kompaktnak* nevezünk, ha

(1) van ideálokból álló bázisfiltere,

(2) minden zárt ideálok szerinti mellékosztályokból álló **F** filterre $\downarrow\mathbf{F} \neq \emptyset$,

(3) minden nyílt ideálhoz van minimális őt tartalmazó ideál.

A 4,19. állítás szerint megadható a K-kompakt gyűrűkre a következő ekvivalens definíció:

Az R gyűrűt K-kompaktnak nevezzük, ha R olyan $[R_\alpha, \pi_\beta^\alpha]$ inverz-rendszer limesze, amelyben az R_α gyűrűk diszkrétek és eleget tesznek az ideálok minimumfeltételének.

A további vizsgálatokban a K-kompakt gyűrűknek ez a definíciója fog a legcélszerűbbnek bizonyulni.

Tekintsünk ezután egy R K-kompakt gyűrűt, amelyről tehát feltehető, hogy $R = \varprojlim [R_\alpha, \pi_\beta^\alpha]$, ahol az R_α-k diszkrét, az ideálok minimumfeltételét kielégítő gyűrűk. Ha R t-nilpotens, akkor nyilván mindegyik R_α nilpotens; jelöljük n_α-val R_α nilpotencia-fokát. Most érvényes $R^{n_\alpha} \subseteq U_\alpha$, ahol U_α azt a nyílt ideált jelöli, amelyre $R_\alpha = R/U_\alpha$. Ezek szerint fennáll

$$R_\omega = \bigcap_{i=1}^{\infty} R_i \subseteq \bigcap_\alpha \overline{R^{n_\alpha}} \subseteq \bigcap_\alpha U_\alpha = 0,$$

ahol ω az első végtelen rendszámot jelenti. Következőleg teljesül $\underset{*}{R}=\underset{\omega}{R}=0$. Kimutatjuk, hogy érvényes $R_\omega=\underset{\omega}{R}$ is. Az nyilvánvaló, hogy $\underset{\omega}{R}\subseteq R_\omega$. Minthogy az A, B ideálokra a 3,3. állítás szerint fennáll $\overline{\bar{A}\cdot\bar{B}}=\overline{A\cdot B}$, azért $R_{n^2}=\overline{R^{n^2}}=\underset{n}{R}$. Ebből viszont $R_\omega\subseteq\underset{\omega}{R}$ következik, tehát valóban $R_\omega=\underset{\omega}{R}$.

Mivel valamennyi R_α gyűrű nilpotens, azért ezek radikálgyűrűk. Így a 3,6. állítás alapján R is radikálgyűrű. Ezzel bebizonyítottuk a

10,1. tételt. *Ha R t-nilpotens K-kompakt gyűrű, akkor R r-nilpotens is és érvényes $R_\omega=\underset{\omega}{R}=0$. Minden t-nilpotens K-kompakt gyűrű radikálgyűrű.*

Most sem igaz az, hogy egy K-kompakt radikálgyűrű szükségképpen t-nilpotens. SĄSIADA [22] eredménye nyilván most is ellenpéldát szolgáltat.

A következő tétel azt mutatja, hogy elegendő a t-nilpotens K-kompakt gyűrűk jellemzésénél csak azokra szorítkozni, amelyek p-gyűrűk inverz-limeszei. Az egyszerűbb beszédmód kedvéért *egy R gyűrűt K_p-gyűrűnek nevezünk, ha R K-kompakt, és p-gyűrűk inverz-limesze.*

10,2. tétel. *Ha R egy t-nilpotens K-kompakt gyűrű, akkor R t-nilpotens K_p-gyűrűk direkt összege algebrai és topológiai értelemben.*

Bizonyítás. Legyen $R=\varprojlim[R_\alpha, \pi_\beta^\alpha]$. A 9,3. tétel szerint minden R_α egyértelműen felbontható $R_{\alpha p}$ p-gyűrűk direkt összegére, $R_\alpha=\sum_p R_{\alpha p}$. Így az $\Omega=[R_\alpha, \pi_\beta^\alpha]$ inverz-rendszer felbomlik az $\Omega_p=[R_{\alpha p}, \varrho_{\beta p}^\alpha]$ inverz-rendszerek direkt összegére, ahol $\varrho_{\beta p}^\alpha$ a π_β^α leképezést jelenti $R_{\alpha p}$-re korlátozva. A 3,5. állítás felhasználásával nyerjük, hogy

$$R=\varprojlim\Omega=\varprojlim\sum_p\Omega_p\cong\sum_p\varprojlim\Omega_p,$$

ami bizonyítandó volt. []

A t-nilpotens K_p-gyűrűk a következő tétellel írhatók le.

10, 3. tétel. *Legyen R egy t-nilpotens K_p-gyűrű. R-hez tartozik egy $\mathfrak{a}$ számosság, amely véges, vagy nem nagyobb, mint R súlya, továbbá egy B gyűrű, amely véges nilpotens p-gyűrűk inverz-limesze, és amelyet R képének nevezünk. Jelölje A R-nek maximális osztható ideálját. A zárt ideál, amelynek elemei R-nek annihilátorai, és érvényes az $A^+=\sum_\gamma C_\gamma(p^\infty)$ direkt felbontás, ahol a komponensek számossága éppen $\mathfrak{a}$. A B gyűrű algebrai és topológiai értelemben izomorf az R/A faktorgyűrűvel. Az R gyűrű A-nak B-vel való olyan Schreier-bővítése, amelyben az*

(4) $(a, \alpha)+(b, \beta)=(a+b, \alpha+\beta)$,

(5) $(a, \alpha)(b, \beta)=(ab, \langle a, b\rangle)$ $\quad (a, b\in B;\ \alpha, \beta\in A)$

műveleti szabályok érvényesek és az $\langle a, b\rangle$ multiplikatív faktorrendszer kielégíti a következő feltételeket:

(6) $\langle ab, c\rangle = \langle a, bc\rangle$,

(7) $\langle a+b, c\rangle = \langle a, c\rangle + \langle b, c\rangle$,

(8) $\langle a, b+c\rangle = \langle a, b\rangle + \langle a, c\rangle \quad (a, b, c \in B)$.

(9) *Minden A-beli U környezethez van olyan V B-beli környezet, hogy teljesül $\langle v, a\rangle, \langle a, v\rangle \in U$ minden $v \in V$ és $a \in B$ elempárra.*

Fordítva, tekintsünk egy $\mathfrak{a}$ számosságot, egy B-gyűrűt, amely véges nilpotens p-gyűrűk inverz-limesze. Képezzük az $A = \sum_\gamma C_\gamma(p^\infty)$ zérógyűrűt, ahol a komponensek számossága $\mathfrak{a}$, és tekintsük A-nak B-vel való Schreier-bővítései közül azt, amelyben a műveleti szabályokat (4) *és* (5) *határozza meg, a faktorrendszer pedig kielégíti a* (6)—(9) *feltételeket, jelöljük ezt R-rel. R t-nilpotens K_p-gyűrű. Jelölje $[B, \mathfrak{a}]$ a B és $\mathfrak{a}$ invariánsokkal jellemzett t-nilpotens K_p-gyűrűknek az osztályát és $\mathfrak{b}$ a B számosságát. $[B, \mathfrak{a}]$ legfeljebb $2^{\mathfrak{c}}$ nemizomorf gyűrűt tartalmaz, ahol $\mathfrak{c} = \max(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$.*

Bizonyítás. Legyen R egy t-nilpotens K_p gyűrű. Most fennáll $R = \varprojlim [R_\alpha, \pi_\beta^\alpha]$, ahol minden R_α olyan nilpotens p-gyűrű, amely kielégíti az ideálok minimumfeltételét. A 9, 5. tétel szerint minden R_α-hoz tartozik egy B_α kép és egy N_α természetes szám. A 9, 6. tétel következtében a B_α képek egy $[B_\alpha, \varrho_\beta^\alpha]$ inverz-rendszert alkotnak, jelöljük ennek inverz-limeszét B-vel. R, illetve B elemei

$$[r_\alpha] \qquad (\pi_\beta^\alpha r_\alpha = r_\beta,\ r_\alpha \in R_\alpha),$$

$$[b_\alpha] \qquad (\varrho_\beta^\alpha b_\alpha = b_\beta,\ b_\alpha \in B_\alpha)$$

alakú vektorok. Jelentse σ_α R_α-nak B_α-ra történő homomorfizmusát és tekintsük a

$$\sigma\colon [r_\alpha] \to [\sigma_\alpha r_\alpha]$$

leképezést. Nyilvánvaló, hogy σ R-nek B-re való homomorfizmusa. Tekintsük B-ben a 0 elemnek egy U környezetét. Feltehető, hogy U mindazoknak az elemeknek a halmaza, amelyekben az α_i-ik komponensek 0-k, rögzített véges sok $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ index mellett. Jelölje most V a

$$V = \{[r_\alpha] \in R \mid r_{\alpha_1} = \ldots = r_{\alpha_k} = 0\}$$

halmazt. Világos, hogy V R-nek olyan nyílt környezete, amelyre teljesül $\sigma V = U$. Következőleg a σ leképezés nyílt is és folytonos is, így érvényes a homomorfiatétel algebrai és topológiai értelemben, tehát

$$R/\mathrm{Ker}\,\sigma \cong B. \tag{10}$$

Jelöljük $\mathrm{Ker}\,\sigma$-t A-val, $\mathrm{Ker}\,\sigma_\alpha$-t A_α-val, és π_β^α-nak A_α-ra való korlátozását ω_β^α-val. Bebizonyítjuk, hogy érvényes $A = \varprojlim [A_\alpha, \omega_\beta^\alpha]$. Mindenekelőtt világos, hogy $[A_\alpha, \omega_\beta^\alpha]$ egy inverz-rendszert képez. Mivel $\sigma(\varprojlim [A_\alpha, \omega_\beta^\alpha]) = 0$, azért $\varprojlim [A_\alpha, \omega_\beta^\alpha] \subseteq A$. Másrészt ha $\sigma([r_\alpha]) = 0$, akkor minden r_α-nak A_α-ban kell feküdnie, ami azt jelenti, hogy $[r_\alpha] \in \varprojlim [A_\alpha, \omega_\beta^\alpha]$.

Minthogy minden A_α R_α-nak maximális osztható ideálja, azért A R-nek maximális osztható ideálja. Az A_α-k $C(p^\infty)$ kváziciklikus csoportok véges direkt összegei, így A is $C(p^\infty)$ kváziciklikus csoportok direkt összege. Mivel A súlya megegyezik direkt komponenseinek a számosságával, ezért ez nem haladhatja meg R súlyát.

Kimutatjuk, hogy A elemei R-nek annihilátorai. Legyen evégből $a=[a_\alpha]$ és $r=[r_\alpha]$ két tetszőleges elem A-ból illetve R-ből. Mivel minden A_α R_α-nak annihilátoraiból áll, azért fennáll $[a_\alpha][r_\alpha]=[r_\alpha][a_\alpha]=0$, következőleg az A ideál benne van R annihilátorideáljában.

A (10) izomorfia azt mutatja, hogy az R gyűrű A-nak B-vel való *Schreier*-bővítése, így feltehető, hogy R elemei az (a, α) $(a \in B, \alpha \in A)$ alakú párok. A^+ osztható csoport lévén, R^+-nak direkt összeadandója. Figyelembe véve ezt, és azt a körülményt, hogy A elemei R annihilátorai, azt kapjuk, hogy R-ben érvényes az összeadásra és a szorzásra vonatkozó (4) és (5) műveleti szabály, továbbá az $\langle a, b\rangle$ faktorrendszer kielégíti a (6), (7) és (8) feltételeket.

Most megmutatjuk, hogy $\langle a, b\rangle$-re teljesül a (9) feltétel is. Legyen e végből U egy tetszőleges A-beli 0-környezet. Feltehető, hogy $U=A\cap W$, ahol W R-nek alkalmas nyílt ideálja. Jelöljük σW-t V-vel, V B-nek 0-környezete. Most tehát bármely W-beli elem (v, u) $(v\in V, u\in U)$ alakú. Minthogy W ideál R-ben, azért az összes $(a, \alpha)(v, u)$ és $(v, u)(a, \alpha)$ szorzat W-ben fekszik, következőleg $\langle a, v\rangle, \langle v, a\rangle\in U$, vagyis $\langle a, b\rangle$-re teljesül a (9) feltétel is.

Tekintsünk ezután egy $\mathfrak{a}$ tetszőleges számosságot és egy olyan B gyűrűt, amely véges nilpotens p-gyűrűk inverz-limesze. Képezzük a $C(p^\infty)$ csoportnak $\mathfrak{a}$ példányban vett komplett direkt összegét, az erre épített zérógyűrűt jelöljük A-val, és vezessük be A-ban a *Tyihonov*-topológiát. Az (a, α) $(a\in B, \alpha\in A)$ elempárok által alkotott $R=B\times A$ szorzattérben értelmezzük a műveleteket a (4) és (5) képletekkel, úgy, hogy az $\langle a, b\rangle$ faktorrendszer teljesítse a (6)—(9) feltételeket. (9) következtében fennáll

$$\langle 0, a\rangle,\ \langle a, 0\rangle\in \bigcap_\gamma U_\gamma=0,$$

ezért RÉDEI [21] 54. § szerint R az A gyűrűnek B-vel való *Schreier*-bővítése.

Tekintsük A-nak egy $\mathbf{U}=\{U_\gamma\}$ ideálokból álló bázisfilterét. Ekkor a (9) feltétel miatt minden $U_\gamma\in\mathbf{U}$ ideálhoz van B-nek olyan $\mathbf{V}_\gamma=\{V_{\gamma\delta}\}$ ideálokból álló bázisfiltere, amelyre érvényes $\langle v, a\rangle$, $\langle a, v\rangle\in U_\gamma$ minden $V_{\gamma\delta}\in\mathbf{V}_\gamma$ ideálnak bármely v elemére. Jelölje $\mathbf{V}$ az összes $\mathbf{V}_\gamma$ által generált filtert, nyilvánvaló, hogy B-nek $\mathbf{V}$ is bázisfiltere. Alkossuk meg

$$\mathbf{W}=\{(V_{\gamma\delta}, U_\gamma)\}=\{W_\alpha\}\quad ((V, U)=\{(v, u)\mid v\in V, u\in U\})$$

rendszert, a γ, δ indexpárok minden lehetséges értékeire. Világos, hogy $\mathbf{W}$ egy filtert alkot, amelyet tekinthetünk R bázisfilterének. $\mathbf{W}$ elemei R-nek ideáljai. Mivel A és B is teljes topologikus gyűrűk, azért az $R=B\times A$ szorzattér is teljes. Így a 4, 13. állítás szerint R izomorf az $[R_\alpha, \pi^\alpha_\beta]$ inverz-rendszer limeszével, ahol R_α az $R/W_\alpha(W_\alpha\in\mathbf{W})$ faktorgyűrűt jelöli.

Most bebizonyítjuk, hogy R t-nilpotens K_p-gyűrű. Ehhez azt kell kimutatni, hogy minden R_α p-gyűrű és eleget tesz az ideálok minimumfeltételének. Az, hogy minden R_α p-gyűrű, (4) és a 3, 5. állítás miatt nyilvánvaló. Legyen $A_\alpha=\{A, W_\alpha\}/W_\alpha$. Az

$$\{A, W_\alpha\}/W_\alpha\cong A/A\cap W_\alpha=\sum_{i=1}^{k_\alpha} C_i(p^\infty)$$

izomorfia miatt nyilvánvaló, hogy minden A_α-ban teljesül az ideálok minimumfeltétele. Tegyük fel, hogy B a B_α véges nilpotens p-gyűrűk inverz-limesze. $B \cong R/A$ és a 4, 13. állítás miatt B_α-nak $R/A/\{A, W_\alpha\}/A$ $(W_\alpha \in \mathbf{W})$ vehető.

Minthogy fennáll

$$R_\alpha/A_\alpha = {R_\alpha/W_\alpha}\Big/_{\{A,\ W_\alpha\}} \cong R/\{A, W_\alpha\} \cong {R/A}\Big/_{\{A,\ W_\alpha\}/A} = B_\alpha$$

azért R_α/A_α-ban is teljesül az ideálok minimumfeltétele. Így tehát mind A_α-ban, mind R_α/A_α-ban érvényes az ideálok minimumfeltétele, ezért a 2, 8. segédtétel szerint R_α-ban is érvényes. Ezzel kimutattuk, hogy R K_p-gyűrű.

Ezekután azt mutatjuk ki, hogy R t-nilpotens. Legyen evégből $W_\alpha = (V_\alpha, U_\alpha) \in \mathbf{W}$. Minthogy $B_\alpha = B/V_\alpha$ nilpotens, azért minden α-hoz létezik olyan n_α természetes szám, amelyre $B_\alpha^{n_\alpha} \subseteqq V_\alpha$ érvényes. Ezért (9) felhasználásával előáll

$$R_\alpha^{n_\alpha+1} = (B, A)^{n_\alpha} R \subseteqq (V_\alpha, A) R \subseteqq (V_\alpha, U_\alpha) = W_\alpha,$$

ahol (X, Y) az összes (x, y) $(x \in X, y \in Y)$ alakú elempárok halmazát jelenti. Következőleg érvényes

$$\underset{*}{R} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{R^n} \subseteqq \bigcap_{\alpha} \overline{R^{n_\alpha+1}} \subseteqq \bigcap_{\alpha} W_\alpha = 0,$$

amivel kimutattuk, hogy R t-nilpotens. Ha $\mathfrak{a}$ és $\mathfrak{b}$ (B számossága) véges, akkor a 9, 5. tétel szerint a B és $\mathfrak{a}$ invariánsokkal jellemzett K_p-gyűrűk $[B, \mathfrak{a}]$ osztálya csak véges sok nem izomorf gyűrűt tartalmaz, és ez a szám, az ott tett meggondolások szerint nem haladhatja meg $2^{\mathfrak{c}}$-t, ahol $\mathfrak{c} = \max(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$. Legyen ezután $\mathfrak{c} = \max(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ végtelen, akkor ez nyilván éppen R súlya, és így az összes R_α számossága éppen $\mathfrak{c}$. A 9, 5. tétel szerint R_α egy $[B_\alpha, N_\alpha]$ gyűrűosztályhoz tartozik, és ez az osztály legfeljebb véges sok nemizomorf gyűrűt tartalmaz. Ezért a $[B, \mathfrak{a}]$ gyűrűosztály legfeljebb $2^{\mathfrak{c}}$ nemizomorf gyűrűt tartalmazhat. []

E § végén megemlítjük, hogy egyes diszkrét t-nilpotens gyűrűk beágyazhatók t-nilpotens K-kompakt gyűrűkbe sűrű részgyűrűként.

Legyen R egy olyan diszkrét gyűrű, amely rendelkezik a következő tulajdonságokkal:

(10) $\bigcap_{n=1}^{\infty} R^n = 0,$

(11) Az R/R^n $(n = 1, 2, \ldots)$ faktorgyűrűkben teljesül az ideálok minimumfeltétele.

10, 4. tétel. *Minden olyan R gyűrű, amely eleget tesz a* (10) *és* (11) *feltételeknek, sűrű részgyűrűként beágyazható egy t-nilpotens K-kompakt gyűrűbe.*

Bizonyítás. Definiáljunk R-ben egy topológiát az $\{R^n\}$ bázisfilterrel. Világos, hogy R topológikus gyűrű lesz. A 4, 14. állítás szerint R-nek $\tilde{R}$ teljes burka algebrailag és topológiailag izomorf az R/R^n faktorgyűrűk inverz-limeszével. []

11. § t-nilpotens L-kompakt gyűrűk

Megismételjük, hogy egy R topológikus gyűrűt *L-kompaktnak* nevezünk, ha
(1) van balideálokból álló bázisfiltere,
(2) minden zárt balideálok szerinti mellékosztályokból álló $\mathbf{F}$ filterre $\downarrow\mathbf{F} \neq 0$,
(3) minden nyílt balideálhoz van minimális őt tartalmazó balideál.

Ezzel ekvivalens definíció:

Az R gyűrű L-kompakt, ha R előáll olyan $[M_\alpha, \pi^\alpha_\beta]$ *inverz-rendszer limeszeként, amelyben az* M_α*-k diszkrét R-modulusok és eleget tesznek a részmodulusok minimumfeltételének.*

Ebben a §-ban jellemezzük a t-nilpotens L-kompakt gyűrűket oly módon, hogy minden ilyen R gyűrűhöz hozzárendelünk egy C zárt ideált és a $B=R/C$ gyűrűt, ahol $C^3=0$ és B már K-kompakt gyűrű (sőt látni fogjuk, hogy ezeknél több is igaz). Bebizonyítjuk továbbá, hogy az L-kompakt gyűrűk osztályában a t-nilpotens gyűrűk éppen a radikálgyűrűk. Azt is látni fogjuk, hogy egy t-nilpotens lineárisan kompakt gyűrű legdurvább lineárisan kompakt topológiájában mindig L- kompakt és így radikálgyűrű is.

11, 1. tétel. *Legyen R egy t-nilpotens L-kompakt gyűrű. Jelölje A R-nek maximális osztható ideálját és C a*

$$C=\{x\in R \mid xR\subseteqq A\}$$

halmazt, amit R magjának fogunk nevezni. C R-nek zárt ideálja, és így L-kompakt gyűrű, továbbá érvényes $CR^2=0$. *A* C/A *faktorgyűrű véges zérógyűrűk inverz-limesze, ezért maga is zérógyűrű. A* $B=R/C$ *faktorgyűrű, amit R képének nevezünk, véges nilpotens gyűrűk inverz-limesze, így B egyúttal K-kompakt is.*

Jelöljön R egy lineárisan topológikus gyűrűt és legyen C a magja és B a képe. Tegyük fel, hogy C olyan zárt ideál, amely az indukált topológiában L-kompakt és amelyre teljesül $CR^2=0$, *továbbá legyen B véges nilpotens gyűrűk inverz-limesze. Ekkor R t-nilpotens L-kompakt gyűrű.*

Bizonyítás. Tekintsük egy t-nilpotens L-kompakt R gyűrűt. Ha $\mathrm{U}=\{U_\alpha\}$ jelenti R-nek egy bázisfilterét, akkor $M_\alpha=R/U_\alpha$ minimumfeltételnek eleget tevő diszkrét R-modulus minden $U_\alpha\in \mathrm{U}$ balideál mellett. A minimumfeltétel következtében minden α indexhez van olyan n_α természetes szám, amelyre teljesül $R^{n_\alpha}M_\alpha= =R^{n_\alpha}R^{n_\alpha}M_\alpha$. Mivel R t-nilpotens, azért előáll

$$R^{n_\alpha}M_\alpha = \underset{*}{R}M_\alpha = 0.$$

Ezért a 9, 1. állítás miatt M_α-ban teljesül a részcsoportok minimumfeltétele is, és így a 9, 2. állítás szerint M_α, mint csoport felbontható véges sok ciklikus, vagy kváziciklikus p-csoport direkt összegére, azaz

$$M_\alpha = \sum_{i=1}^{k_\alpha} C_i(p_{\alpha i}^{n_{\alpha i}}) \qquad (1\leqq n_{\alpha i}\leqq\infty) \tag{4}$$

érvényes.

Most kimutatjuk, hogy A elemei R-nek balannihilátorai. Tekintsünk evégből egy tetszőleges $a\in A$ és $m_\alpha\in M_\alpha$ elemet. Jelöljük l_α-val m_α rendjét, l_α (4) következtében véges. Minthogy A osztható, azért létezik olyan $a_\alpha\in A$ elem, amelyre $l_\alpha a_\alpha=a$. Azt nyerjük, hogy

$$am_\alpha=(l_\alpha a_\alpha)m_\alpha=a_\alpha(lm_\alpha)=0,$$

tehát valóban A benne van R balannihilátorideáljában.

Ezután bebizonyítjuk, hogy A zárt. Legyen $d\in\bar{A}$ egy tetszőleges elem. Ekkor minden $U_\alpha\in\mathrm{U}$ balideál esetén $d+U_\alpha$ tartalmaz A-beli elemet, azaz $(d+U_\alpha)\cap A\neq\emptyset$.

A oszthatósága miatt tetszőleges n egészszámhoz létezik olyan $x_\alpha \in A$ elem, amelyre $nx_\alpha \in d+U_\alpha$. Jelöljük $Z(n, \alpha)$-val a

$$Z(n, \alpha)=\{x \in \bar{A} \mid nx \in U_\alpha\}$$

halmazt. Minthogy $U_\alpha \cap \bar{A} \subseteq Z(n, \alpha)$ azért $Z(n, \alpha)$ $\bar{A}$-ban nyílt, következésképpen zárt R-modulusa $\bar{A}$-nak. Világos, hogy az $nx \in d+U_\alpha$ relációnak összes $x \in \bar{A}$ megoldása egy $x_\alpha + Z(n, \alpha)$ mellékosztályt alkot. Mivel pedig $U_\gamma \subseteq U_\alpha \cap U_\beta$-ból

$$nx_\gamma \in d+U_\gamma \subseteq (d+U_\alpha) \cap (d+U_\beta)$$

következik, azért $\mathbf{Z} = \{x_\alpha + Z(n, \alpha)\}$ zárt részmodulusokból álló filtert alkot. De $\bar{A}$, mint R zárt R-modulusa, a 4, 5. állítás szerint lineárisan kompakt, ezért $\downarrow\mathbf{Z} \neq \emptyset$, és egy $x_0 \in \downarrow\mathbf{Z}$ elemre fennáll $nx_0 \in \bigcap_\alpha (d+U_\alpha) = d$, és $x_0 \in \bar{A}$. Ez azt jelenti, hogy $\bar{A}$-ban minden $nx=a$ $(a \in \bar{A})$ egyenlet megoldható, vagyis $\bar{A}$ additív csoportja osztható. Ezért A maximalitásából azt kapjuk, hogy $\bar{A} \subseteq A$, amivel kimutattuk, hogy A zárt.

$AR=0$ miatt $CR^2=0$ nyilvánvalóan igaz. A zártságának pedig triviális következménye, hogy C zárt ideál R-ben. Ezért a 4, 20. állítás szerint C is L-kompakt és így olyan C_α diszkrét R-modulusok inverz-limesze, amelyek eleget tesznek a részmodulusok minimumfeltételének. Figyelembe véve, hogy $C^3=0$, a 9, 1. állítás szerint minden C_α-ban teljesül a részcsoportok minimumfeltétele és így a C gyűrű (C mint C-modulus) L-kompakt.

$C \cdot C \subseteq CR \subseteq A$ miatt C/A zérógyűrű. Minthogy a C/A faktorgyűrű, mint C-modulus szintén L-kompakt, azért a 9, 2. állítás alapján, figyelembe véve, hogy A C-nek is maximális osztható ideálja, C/A véges zérógyűrűk inverz-limesze.

Tekintsük most az $N_\alpha = R/\{U_\alpha, A\}$ faktormodulusokat minden $U_\alpha \in \mathbf{U}$ balideál mellett. A (4) felbontás értelmében valamennyi N_α véges. Világos, hogy a

$$C_\alpha = \{x \in R \mid xR \subseteq \{U_\alpha, A\}\} \qquad (U_\alpha \in \mathbf{U})$$

halmazok zárt ideált alkotnak. Ha egy $x \in R$ elemre $xN_\alpha = 0$, akkor x-re teljesül $xR \subseteq \{U_\alpha, A\}$, vagyis $x \in C_\alpha$; következőleg a $B_\alpha = R/C_\alpha$ faktorgyűrűt felfoghatjuk úgy, mint N_α-nak egy endomorfizmusgyűrűjét. Mivel pedig N_α véges, azért szükségképpen B_α is véges és diszkrét. Következőleg C_α R-nek nyílt ideálja és R/C-ben $\{C_\alpha/C\} = \mathbf{C}$ nyílt ideáloknak egy olyan filterét alkotja, amelyre $\downarrow\mathbf{C}=0$. A $\mathbf{C}$ által indukált topológia R/C topológiájánál durvább, de R/C-ben, mint L-kompakt R-modulusban a topológia a legdurvább, következésképpen $\mathbf{C}$ tekinthető R/C bázisfilterének. Ezért a 4, 13. állítás szerint fennáll

$$B = R/C \cong \varprojlim [R/C/C_\alpha/C, \pi_\beta^\alpha] \cong \varprojlim [B_\alpha, \varrho_\beta^\alpha],$$

ahol π_β^α és ϱ_β^α a természetes módon előálló leképezésrendszereket jelöli. Mivel R t-nilpotens és $B_\alpha = R/C_\alpha$ véges, azért minden B_α nilpotens. Ezzel bebizonyítottuk, hogy B véges nilpotens gyűrűk inverz-limesze.

Legyen végül R egy olyan lineárisan topologikus gyűrű, amelynek C magja és B képe teljesíti a tételben kimondott feltételeket. C a 4, 6. állítás szerint zárt R-ben, ezért alkalmazható a 4, 23. állítás a C és R/C L-kompakt faktormodulusokra és így R L-kompakt gyűrű.

Mivel B egyúttal K-kompakt gyűrű is, és t-nilpotens, azért a 10, 1. tétel szerint $B_\omega = 0$. $B = R/C$ miatt tehát $R_\omega \subseteqq C$, és $CR^2 = 0$ következtében előáll

$$R_{\omega+2} = \overline{R_\omega \cdot R^2} \subseteqq \overline{CR^2} = 0.$$

Ezzel kimutattuk, hogy R r- és egyúttal t-nilpotens gyűrű. []

A következő tétel azt mutatja, hogy az L-kompakt radikálgyűrűket éppen a 11, 1. tételben írtuk le.

11. 2. tétel. *Egy R L-kompakt gyűrűre az alábbi feltételek ekvivalensek:*

a) *R radikálgyűrű;*
b) *R r-nilpotens gyűrű;*
c) *R t-nilpotens gyűrű.*

Bizonyítás. a)$\Rightarrow$b) Ez az állítás speciális esete LEPTIN [18] Satz 9-nek, amely szerint egy L-kompakt gyűrű radikálja r-nilpotens. Itt csak ebben a speciális esetben bizonyítjuk be ezt az állítást. Ha R radiálgyűrű, akkor a radikál definíciója szerint R minden M irreducibilis R-modulust annihilál, azaz $RM = 0$.

Tekintsük R-nek egy L nyílt balideálját, és az

$$L' = \{r \in R \mid R_* r \subseteqq L\}$$

halmazt. Mivel R_* ideál, azért világos, hogy L' balideál, továbbá $L \subseteqq L'$ miatt L' nyílt. Most két eset lehetséges:

(i) minden L nyílt balideál esetén $L' = R$, vagy
(ii) van olyan L nyílt balideál, amelyre L' valódi része R-nek.

Kimutatjuk, hogy az (ii) eset nem állhat fenn, feltételezése ellentmondáshoz vezet. Jelöljön ugyanis ebben az esetben K egy minimális L'-t tartalmazó balideált R-ben. Minthogy R a feltétel szerint L-kompakt, azért ilyen K mindig létezik. Most a K/L' R-modulus irreducibilis, ezért szükségképpen $RK \subseteqq L'$. Ennek következtében fennáll

$$R_* RK \subseteqq R_* L' \subseteqq L.$$

Tekintsük a

$$D = \{r \in R \mid rK \subseteqq L\}$$

halmazt. Világos, hogy $R_* R \subseteqq D$. D-ről könnyű látni, hogy zárt ideált alkot, ezért teljesül $R_* = \overline{R_* R} \subseteqq D$ is. Következőleg fennáll $R_* K \subseteqq L$, azaz $K \subseteqq L'$, ami ellentmondás. Így tehát csak az (i) eset lehetséges. Ez azt jelenti, hogy $R_* R \subseteqq L$ érvényes minden L nyílt balideálra, ezért $R_* R \subseteqq \bigcap L = 0$, tehát $R_* = 0$, amivel kimutattuk, hogy R r-nilpotens.

b)$\Rightarrow$c) Ez triviális.

c)$\Rightarrow$a) Tegyük fel, hogy R t-nilpotens L-kompakt gyűrű, de nem radikálgyűrű. Legyen J R radikálja. J az 5, 1. tétel szerint zárt R-ben. Az $R/J \neq 0$ faktorgyűrű lineárisan kompakt féligegyszerű gyűrű, ezért az 5, 3. tétel alapján egységelemes. Egységelemes gyűrű azonban nem lehet t-nilpotens, ennek megfelelően $\underset{*}{R} \subseteqq J$ sem állhat fenn, ami ellentmond annak a feltevésnek, hogy $\underset{*}{R} = 0$. []

A 11, 2. tétel állítása lineárisan kompakt gyűrűkre már nem általánosítható. LEPTIN ([19] 2. §) konstruált többek között olyan lineárisan kompakt gyűrűket, amelyeknek a radikálja idempotens. Ennek tárgyalására, mivel igen hosszadalmas lenne, nem térünk ki.

A 4. §-ban definiált különböző típusú lineáris kompaktsági fogalmak szempontjából alapvető fontosságú lesz a következő példa. Látni fogjuk, hogy:

a) a különböző típusú lineárisan kompakt modulusok osztályai általában különböző gyűrűosztályok, sőt még a különböző típusú szűkebb értelemben vett lineárisan kompakt modulusok osztályai is különböző egymást nem tartalmazó osztályok. A SĄSIADA [22] által konstruált csak triviális ideállal rendelkező radikálgyűrűk K-kompaktak, de mivel nem t-nilpotensek azért a 11, 2. tétel szerint nem lehetnek L-kompakt gyűrűk. Az alábbi példa olyan gyűrűt szolgáltat, amely L-kompakt, de nem K-kompakt. Továbbá:

b) Egymást nem tartalmazó osztályok a K-kompakt és L-kompakt radikálgyűrűk osztályai is. A példában szereplő gyűrű ugyanis t-nilpotens L-kompakt gyűrű lesz, azaz L-kompakt radikálgyűrű, amely nem K-kompakt.

c) A t-nilpotens L-kompakt gyűrűk osztálya valódi módon tartalmazza a t-nilpotens K-kompakt gyűrűk osztályát. Az ugyanis, hogy minden t-nilpotens K-kompakt gyűrű egyben L-kompakt is, ez a 10, 2. és a 10, 3. tételek alapján világos.

11, 3. példa. Jelölje P a p-adikus egészszámokat ellátva a p-adikus topológiával és legyen $P_i = p^i P$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Tekintsük úgy, hogy P a $C(p^\infty)$ kváziciklikus csoportnak a teljes endomorfizmusgyűrűje. A $P_1^+ + C(p^\infty)$ csoportelméleti direkt összeg felett definiáljuk a szorzást a következőképpen:

$$(a+\alpha)(b+\beta) = ab + a\beta \qquad (a, b \in P_1;\, a, \beta \in C(p^\infty)).$$

Egyszerű számolással meggyőződhetünk róla, hogy ez a szorzás asszociatív, továbbá az összeadással szemben disztributív is. Jelöljük az így előállt gyűrűt R-rel. A szorzás definíciójából világos, hogy a P_i $(i = 1, 2, \ldots)$ halmazok R-nek balideáljai. Vezessünk be R-be egy lineáris topológiát úgy, hogy $\{P_i\}$-t R bázisfilterének tekintjük. Ahhoz, hogy ezúton R topológikus gyűrű lett, elegendő kimutatni a jobb szorzás folytonosságát, azaz ha $ab + a\beta + P_i$ az $(a+\alpha)(b+\beta)$ szorzatnak egy környezete, akkor létezik olyan P_k balideál, amelyre $(a+\alpha+P_k)(b+\beta) \subseteqq ab + a\beta + P_i$. Válasszuk k-t úgy, hogy fennálljon $p^k \geqq \max(p^i, o(\beta))$, ekkor érvényes

$$(a+\alpha+P_k)(b+\beta) = ab + a\beta + P_k b + P_k \beta \subseteqq ab + a\beta + P_i,$$

tehát R topológikus gyűrű. Mivel P_1 és $C(p^\infty) \cong R/P_1$ egyaránt L-kompakt, azért a 4, 23. állítás szerint R is L-kompakt.

Ezzel szemben R nem K-kompakt, bár mind P_1, mind $C(p^\infty)$ K-kompakt gyűrűk. Ezt úgy láthatjuk be, hogy kimutatjuk a $C(p^\infty) \subseteqq I$ tartalmazást R bármely I nyílt ideáljára. Ha ugyanis I nyílt ideál, akkor $P_1 \cap I$ P_1-ben nyílt, következőleg van olyan n természetes szám, amelyre $P_n \subseteqq I$. I ideál voltából pedig $C(p^\infty) = P_n C(p^\infty) \subseteqq I$ következik, ezért R-nek nem lehet ideálokból álló bázisfiltere.

Végül kimutatjuk, hogy R t-nilpotens. R balannihilátorideálja és magja éppen $C(p^\infty)$. Ezt felhasználva kapjuk:

$$\underset{\omega+1}{R} \subseteqq R_{\omega+1} = \overline{R_\omega \cdot R} = \overline{\bigcap_{n=1}^{\infty} (P_n + C(p^\infty)) \cdot R} = \overline{C(p^\infty) \cdot R} = 0,$$

amiért is R t-nilpotens és a 11, 2 tétel szerint radikálgyűrű is.

Bebizonyítjuk, hogy a 11, 1. tétellel bizonyos t-nilpotens lineárisan kompakt gyűrűket is jellemeztünk, ugyanis érvényes a

11, 4. tétel. *Egy t-nilpotens lineárisan kompakt gyűrű a legdurvább lineárisan kompakt topológiában L-kompakt.*

Bizonyítás. A bizonyításban felhasználjuk azt az állítást, hogy egy *R L-kompakt gyűrű feletti lineárisan kompakt M R-modulus is L-kompakt.* Ennek a bizonyításához azt kell megmutatnunk, hogy bármely $U \subseteqq M$ nyílt részmodulus esetén az M/U faktormodulusban van minimális részmodulus. Ha $R(M/U)=0$, akkor tekintsük M/U-nak egy $m \neq 0$ elemét. Megmutatjuk, hogy m véges rendű. Ellenkező esetben a diszkrét lineárisan kompakt M/U modulusnak $\{m\}$ olyan végtelen ciklikus részcsoportja, amelynek lineárisan kompaktnak kell lennie. Tekinstük a $\frac{3^n-1}{2}m+\{3^n m\}$ $(n=1, 2, \dots)$ mellékosztályokból álló $\mathbf{F}$ filtert. $\mathbf{F}$ elemei fogyó láncot alkotnak, és $\downarrow\mathbf{F}=\emptyset$, ami ellentmondásban van azzal, hogy $\{m\}$ lineárisan kompakt. Következőleg m véges rendű elem. Ebből triviálisan következik, hogy $\{m\}$-nek és így M/U-nak van minimális részmodulusa. Az $R(M/U)\neq 0$ esetben tekintsük M-nek egy olyan x elemét, amelyre $Rx \nsubseteq U$, és az

$$L=\{r\in R \mid rx\in U\}$$

halmazt. Nyilvánvaló, hogy L R-nek nyílt balideálja, továbbá érvényes az

$$R/L \cong \{Rx, U\}/U \subseteqq M/U$$

izomorfia. Mivel pedig R L-kompakt, azért R/L-nek, következésképpen M/U-nak is van minimális részmodulusa.

Most bebizonyítjuk, hogy R/R_* *a legdurvább lineárisan kompakt topológiában L-kompakt.* Ehhez transzfinit indukcióval azt mutatjuk ki, hogy minden μ rendszámhoz R/R_μ L-kompakt. $\mu=0$-ra $R=R_0$ miatt R/R_0 triviálisan L-kompakt. Tegyük fel ezután, hogy a μ rendszámra R/R_μ L-kompakt. Most érvényes

$$R/R_\mu \cong {}^{R/R_{\mu+1}}\Big/_{R_\mu/R_{\mu+1}}$$

Kimutatjuk, hogy $R_\mu/R_{\mu+1}$ is L-kompakt. Minthogy $R(R_\mu/R_{\mu+1})=0$, azért $R_\mu/R_{\mu+1}$-et tekinthetjük R/R_μ-modulusnak. De R/R_μ az indukciós feltevés miatt L-kompakt, azért az előzőek szerint $R_\mu/R_{\mu+1}$ is L-kompakt. Alkalmazva a 4, 23. állítást azt nyerjük, hogy $R_\mu/R_{\mu+1}$ is L-kompakt.

Ha pedig λ limesz-szám, akkor a 4, 13. állításhoz hasonlóan belátható, hogy R/R_λ algebrailag izomorf az R/R_μ $(\mu<\lambda)$ faktorgyűrűk S inverz-limeszével. S, mint az R/R_μ L-kompakt gyűrűk komplett direkt összegének zárt részgyűrűje a 4, 22.

állítás szerint szintén L-kompakt. Jelöljük φ-vel $R/\underset{\lambda}{R}$-nek S-re való izomorfizmusát, és $\mathbf{U}$-val R-nek egy balideálokból álló bázisfilterét. Mivel $R/\underset{\mu}{R}$-ben az $\{U,\underset{\mu}{R}\}/\underset{\mu}{R}$ ($U\in\mathbf{U}$) alakú balideálok bázisfiltert alkotnak, azért a

$$V_\mu=\{x\in S\mid \pi_\alpha x\in\{U,\underset{\mu}{R}\}/\underset{\mu}{R}\}$$

alakú balideálok S-nek egy $\mathbf{V}$ bázisfilterét alkotják. V-nek a φ^{-1} leképezésénél $R/\underset{\lambda}{R}$-ban az $\{U,\underset{\mu}{R}\}/\underset{\lambda}{R}$ balideál felel meg, világos, hogy $\{U,\underset{\lambda}{R}\}/\underset{\lambda}{R}\subseteq\{U,\underset{\mu}{R}\}/\underset{\lambda}{R}$. Az $\mathbf{R}=\{\underset{\mu}{R}/\underset{\lambda}{R}\}_{\mu<\lambda}$ filterre teljesül $\downarrow\mathbf{R}=0$, azért $R/\underset{\lambda}{R}$-nek a legdurvább lineárisan kompakt topológiájában a 4, 15. állítás szerint $\lim\mathbf{R}=0$ is teljesül. Ez azt jelenti, hogy létezik olyan ν rendszám, amelyre $\underset{\nu}{R}/\underset{\lambda}{R}\subseteq\{U,\underset{\lambda}{R}\}/\underset{\lambda}{R}$ teljesül. Következőleg fennáll $\{U,\underset{\nu}{R}\}/\underset{\lambda}{R}\subseteq\{U,\underset{\lambda}{R}\}/\underset{\lambda}{R}$ is. Ezek a meggondolások azt mutatják, hogy φ nyílt-folytonos leképezés, és így $R/\underset{\lambda}{R}$ L-kompakt.

Ezzel kimutattuk, hogy $R/\underset{*}{R}$ a legdurvább lineárisan kompakt topológiában L-kompakt. Minthogy pedig R t-nilpotens, azért $R=R/\underset{*}{R}$ L-kompakt. []

A 11, 4. és 11, 2. tételekből közvetlenül folyik a

11, 5. korollárium. *Egy t-nilpotens lineárisan kompakt gyűrű mindig radikálgyűrű.*

Ez a korollárium általánosítása annak az állításnak, amely szerint egy nilpotens *Artin*-gyűrű radikálgyűrű.

Miként azt a 11, 2. tétel bizonyítása után már megemlítettük, LEPTIN [19] 2. §-ának eredményei mutatják, hogy ennek a korolláriumnak a megfordítása nem érvényes; egy lineárisan kompakt radikálgyűrű nem szükségképpen t-nilpotens, és így nem szükségképpen L-kompakt a legdurvább lineárisan kompakt topológiában.

A 11, 4. tétel bizonyításánál láttuk, hogy egy R lineárisan kompakt gyűrű $R/\underset{*}{R}$ faktorgyűrűje a legdurvább lineárisan kompakt topológiában L-kompakt, továbbá az is igaz, hogy $R/\underset{*}{R}$ t-nilpotens. Ezzel előállt a

11, 6. korollárium. *Egy R lineárisan kompakt radikálgyűrű az $\underset{*}{R}$ lineárisan kompakt idempotens radikálgyűrűnek az $R/\underset{*}{R}$ t-nilpotens lineárisan kompakt gyűrűvel való Schreier-bővítése.*

(Beérkezett: 1966. I. 17.)

BEITRÄGE ZUR THEORIE DER LINEAR KOMPAKTEN RINGE

Von

RICHARD WIEGANDT

ZUSAMMENFASSUNG

Diese Arbeit enthält die Ergebnisse der Arbeiten [31], [32], [33] und [34] mit ausführlichen Vorbereitungen Der erste Teil dieser Arbeit ist in dieser Zeitschrift (**16** (1966) 239—267) erschienen. Das Literaturverzeichnis ist dem ersten Teil beigefügt.

AZ INDIVIDUÁLIS ERGODIKUS TÉTELRŐL

Írta: SZŰCS JÓZSEF

Jelen cikkünk célja az individuális ergodikus tétel rövid bizonyítása. A bizonyítás A. M. GARSIÁnak [2] alatt idézett közleménye alapján fog történni. [2]-ben GARSIA egyszerű módon bebizonyít egy tételt, amelyet *Hopf*-féle maximális ergodikus tételnek nevez. Jelen cikk szerzőjének tudomása szerint nem a *Garsia*-féle tételt, hanem a közleményünkben szereplő, annál általánosabb 2. Lemmát szokás *Hopf*-féle maximális ergodikus tételnek nevezni. (Erre vonatkozóan l. [3]-at!) Cikkünkben megmutatjuk, hogy a *Garsia*-féle gondolatmenet a 2. Lemma bizonyítására is alkalmazható, amiből már könnyű levezetni az individuális ergodikus tételt (a *Garsia*-féle tételből viszont nem lehet).

Először is emlékeztetünk bebizonyítandó tételünkre.

INDIVIDUÁLIS ERGODIKUS TÉTEL. *Legyen (X, S, μ) tetszőleges pozitív mértéktér, T pedig az X halmaz olyan önmagára való kölcsönösen egyértelmű leképezése, amelyre teljesülnek a következő feltételek: ha $H \in S$, akkor $TH \in S$ és $T^{-1}H \in S$, továbbá $\mu(TH) = \mu(T^{-1}H) = \mu(H)$. Ekkor minden $f \in L^1_\mu(x)$ függvényre μ majdnem mindenütt létezik (és véges) a*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(T^i x) = F(x)$$

határérték, $F(Tx) = F(x)$ μ majdnem minden x-re és $F \in L^1_\mu(X)$.

Mielőtt rátérnénk bizonyításunkra, bevezetünk néhány jelölést. Minden, X-en értelmezett f valós értékű függvény esetében legyen

$$f_n(x) = \sum_{i=0}^{n-1} f(T^i x) \qquad (x \in X)$$

és

$$f_n^*(x) = \max_{1 \le i \le n} f_i(x) \qquad (x \in X)$$

$(n = 1, 2, \ldots)$.

Bizonyításunk a következő lemmán alapszik.

1. LEMMA (GARSIA[1]). *Teljesüljenek az individuális ergodikus tétel feltételei. Legyen f olyan, X-en értelmezett (véges) valós értékű mérhető függvény, amelynek*

[1] Ezt a lemmát GARSIA említett cikkében csupán abban az esetben bizonyítja be, amikor nemcsak $f^+ \in L^1_\mu(X)$, hanem $f \in L^1_\mu(X)$ is teljesül.

pozitív része, f^+ integrálható, és legyen A azoknak az x pontoknak a halmaza, amelyekben legalább egy n-re $f_n^*(x)>0$. Ekkor

$$\int_A f(x)\,d\mu(x) \geqq 0.$$

Bizonyítás. Legyen adott n mellett A_n azoknak az x pontoknak a halmaza, amelyekben $f_n^*(x)>0$. Minthogy $A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_n \subset \ldots$ és $A=\bigcup_1^\infty A_n$, elegendő azt kimutatnunk, hogy minden n-re

$$\int_{A_n} f(x)\,d\mu(x) \geqq 0.$$

Ehhez először is azt fogjuk kimutatni, hogy

$$f(x) \geqq (f_n^*)^+(x)-(f_n^*)^+(Tx) \qquad (x \in A_n). \tag{1}$$

f_n^* definíciója folytán ugyanis

$$(f_n^*)^+(Tx) \geqq f_i(Tx) \qquad (1 \leqq i \leqq n,\ x \in X).$$

Mindkét oldalhoz $f(x)$-et hozzáadva azt kapjuk, hogy

$$f(x)+(f_n^*)^+(Tx) \geqq f_{i+1}(x) \qquad (1 \leqq i \leqq n,\ x \in X); \tag{2}$$

(2) nyilván igaz $i=0$ esetén is. Legyen most $x \in A_n$. Ekkor $(f_n^*)^+(x)=f_n^*(x)$. Minthogy $f_n^*(x)$ értéke előfordul az $f_{i+1}(x)$ $(i=0,\ldots,n-1)$ értékek között, ezért (2) szerint (és amiatt, hogy (2) igaz $i=0$ esetén is)

$$f(x)+(f_n^*)^+(Tx) \geqq (f_n^*)^+(x).$$

Ebből tüstént következik (1).

Teljes indukcióval bebizonyítjuk, hogy $(f_n^*)^+$ integrálható $(n=1,2,\ldots)$. Ez az $n=1$ esetben igaz, mert $(f_1^*)^+=f^+$, és f^+ a lemma feltevése szerint integrálható. Legyen $n \geqq 2$, és tegyük fel, hogy $(f_{n-1}^*)^+$ integrálható. Legyen $x \in A_n$. Ekkor $(f_n^*)^+(x)=f_i(x)$ valamelyik i-re 1 és n között. Legyen A_n' mindazon A_n-beli x pontok halmaza, amelyekhez ez az i választható 1 és $n-1$ között is, azaz ha $(f_n^*)^+(x)=(f_{n-1}^*)^+(x)$. Tehát az indukciófeltevés folytán

$$\int_{A_n'} (f_n^*)^+(x)\,d\mu(x) < \infty. \tag{3}$$

Ha $x \notin A_n'$ és $x \in A_n$, akkor $f(T^{n-1}x)>0$. Ellenkező esetben ugyanis $f_{n-1}(x) \geqq f_n(x)$, és így $(f_n^*)^+(x) \leqq (f_{n-1}^*)^+(x)$ volna, amiből $x \in A_n'$ következnék. Nyilvánvaló, hogy ha $x \in A_n - A_n'$, akkor $(f_n^*)^+(x)=f_n(x)=f(T^{n-1}x)+f_{n-1}(x) \leqq f^+(T^{n-1}x)+(f_{n-1}^*)^+(x)$. Ámde $f^+(T^{n-1}x)$ integrálható, mivel f^+ is az és mivel a μ mérték invariáns T-vel szemben, tehát az indukciófeltevés folytán

$$\int_{A_n-A_n'} (f_n^*)^+(x)\,d\mu(x) \leqq \int_{A_n-A_n'} [f^+(T^{n-1}x)+(f_{n-1}^*)^+(x)]\,d\mu(x) < \infty. \tag{4}$$

(3) és (4) alapján $\int_{A_n}(f_n^*)^+(x)\,d\mu(x)<\infty$, tehát $(f_n^*)^+$ integrálható.

A lemma állítása mármost (1)-ből, továbbá abból, hogy $\int_X (f_n^*)^+(x)\,d\mu(x) < \infty$ és abból, hogy $(f_n^*)^+(x) = 0$, ha $x \in X - A_n$, a következőképpen adódik:

$$\int_{A_n} f(x)\,d\mu(x) \geqq \int_{A_n} [(f_n^*)^+(x) - (f_n^*)^+(Tx)]\,d\mu(x) =$$
$$= \int_X (f_n^*)^+(x)\,d\mu(x) - \int_{A_n} (f_n^*)^+(T_x)\,d\mu(x) \geqq$$
$$\geqq \int_X (f_n^*)^+(x)\,d\mu(x) - \int_X (f_n^*)^+(Tx)\,d\mu(x) = 0.$$

Az 1. Lemmából könnyen következik a

2. LEMMA. (*Hopf*-féle maximális ergodikus tétel). *Legyen* $f \in L^1_\mu(X)$, λ *valós szám és* $E_\lambda = \left\{x : \frac{1}{n} f_n(x) > \lambda \text{ valamelyik } n\text{-re}\right\}$. *Ekkor*

$$\int_{E_\lambda} f(x)\,d\mu(x) \geqq \lambda \cdot \mu(E_\lambda).$$

Bizonyítás. Ha $\lambda < 0$ és emellett $\mu(E_\lambda) = \infty$, akkor az állítás triviális. A többi esetben $(f - \lambda)^+$ integrálható, és alkalmazható az 1. Lemma.

Most már könnyű lesz bebizonyítanunk az individuális ergodikus tételt. Legyen ugyanis $f \in L^1_\mu(X)$, és tekintsük az

$$\bar{F}(x) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} f_n(x) \qquad (x \in X)$$

és az

$$\underline{F}(x) = \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} f_n(x) \qquad (x \in X)$$

függvényeket. Mivel $f_n(Tx) = f_{n+1}(x) - f(x)$ $(x \in X;\ n = 1, 2, \ldots)$, nyilván $\bar{F}(x) = \bar{F}(Tx)$ és $\underline{F}(x) = \underline{F}(Tx)$ $(x \in X)$. Legyen $\alpha < \beta$ (α és β valós számok), és definiáljuk az $M_{\alpha\beta}$ halmazt a következő módon: $M_{\alpha\beta} = \{x : \underline{F}(x) < \alpha,\ \bar{F}(x) > \beta\}$.

Bebizonyítjuk, hogy minden ilyen $M_{\alpha\beta}$ halmaz nullamértékű. Elegendő ezt csupán az olyan α, β párokra bebizonyítani, amelyekre $\beta > 0$. Ellenkező esetben ugyanis $\beta \leqq 0$ és így $\alpha < 0$ és az f-ről $-f$-re való áttéréssel ez az eset is a $\beta > 0$ esethez hasonlóan intézhető el.

Mivel $TM_{\alpha\beta} = M_{\alpha\beta}$ $(\alpha < \beta)$, feltehetjük egy pillanatra, hogy $X = M_{\alpha\beta}$. Ekkor

$$X = M_{\alpha\beta} = \left\{x : \frac{1}{n} f_n(x) > \beta \text{ valamelyik } n\text{-re}\right\} =$$
$$= \left\{x : -\frac{1}{n} f_n(x) > -\alpha \text{ valamelyik } n\text{-re}\right\}.$$

A 2. Lemmát alkalmazva ebből azt kapjuk, hogy

$$\beta \cdot \mu(M_{\alpha\beta}) \leqq \int_{M_{\alpha\beta}} f(x)\,d\mu(x) \leqq \alpha \cdot \mu(M_{\alpha\beta}).$$

Ha itt $\beta > 0$, akkor $\mu(M_{\alpha\beta})$ véges, de ez csak úgy lehet, hogy $\mu(M_{\alpha\beta}) = 0$. Tehát majdnem mindenütt létezik az $F(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} f_n(x)$ limesz, ami esetleg végtelen is lehet. Ha $F(x)$ létezik, $F(Tx)$ is létezik és $F(Tx) = F(x)$, mert ekkor $F(x) = \underline{F}(x) = \overline{F}(x)$. Nyilván $|F(x)| \leqq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |f|_n(x)$ $(x \in X)$. Mivel $\int_X \frac{1}{n} |f|_n(x)\,d\mu(x) = \int_X |f|(x)\,d\mu(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, a Fatou-lemmából tüstént következik F integrálhatósága és az, hogy $F(x)$ majdnem mindenütt véges. Ezzel az individuális ergodikus tételt teljes egészében bebizonyítottuk.

IRODALOM

[1] BIRKHOFF, G. D., Proof of the ergodic theorem, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **17**, 656—660 (1931).

[2] GARSIA, A. M., A simple proof of E. Hopf's maximal ergodic theorem, *Journal of Math. and Mech.*, **14** (1965), 381—382.

[3] JACOBS, K., *Neuere Methoden und Ergebnisse der Ergodentheorie*, Berlin—Göttingen—Heidelberg (1960).

[4] NEUMANN, J. v., Proof of the quasiergodic hypothesis, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **18**, 70—82 (1932).

(Beérkezett: 1966. II. 1.)

SUR LE THÉORÈME ERGODIQUE INDIVIDUEL

J. SZŰCS

RÉSUMÉ

Dans sa Note [2] A. M. Garsia a promis une démonstration simple du théorème ergodique maximal de E. Hopf, mais il ne démontre effectivement qu'un cas particulier de ce théorème qui ne permet pas d'en déduire le théorème ergodique individuel. Pour en déduire le théorème ergodique individuel, il faut démontrer le théorème de A. M. Garsia pour toute fonction mesurable f dont la partie positive est intégrable.

Dans la présente Note nous montrons que la méthode de A. M. Garsia peut être employée aussi pour démontrer le théorème original de E. Hopf et par conséquent le théorème ergodique individuel.

OMEGA TÍPUSÚ VIZSGÁLATOK A PRÍMSZÁMELMÉLETBEN

Írta: KÁTAI IMRE

1. Bevezetés

Az analitikus számelmélet egyik — ma már igen kiterjedt — vizsgálati irányát képezik a különböző számelméleti függvények eltéréseinek kutatásai. Az első jelentős lépést ebben az irányban PHRAGMEN és Erhard SCHMIDT után E. LANDAU pozitív együtthatós *Dirichlet*-sorokra vonatkozó tétele [1] jelentette. Ez azt mondja ki, hogy ha az $F(s)=\sum \frac{a_n}{n^s}$ *Dirichlet* sor a_n együtthatói nemnegatívok $n>n_0$ esetén, továbbá a sor konvergencia-abszcisszája a véges α érték, akkor az $F(s)$ függvény az α pontban szinguláris. Ennek segítségével bebizonyítható például, hogy $\overline{\lim\limits_{x\to\infty}}(\psi(x)-x)\cdot x^{-\theta}>0$, $\underline{\lim\limits_{x\to\infty}}(\psi(x)-x)\cdot x^{-\theta}<0$, ha a *Riemann*-féle $\zeta(s)$-függvényeknek a $\operatorname{Re}s>\theta$ félsíkban van gyöke. Ugyanezen fetétel mellett levezethetők a $\overline{\lim\limits_{x\to\infty}}\, M(x)\cdot x^{-\theta}>0$, $\underline{\lim\limits_{x\to\infty}}\, M(x)\cdot x^{-\theta}<0$ egyenlőtlenségek is. A $\psi(x)-x$ függvény helyett a $\pi(x)-\operatorname{li} x$ függvényt tekintve LANDAU tétele nem elég erős RIEMANN állításának cáfolataként annak igazolására, hogy a fenti függvény végtelen sokszor változtatja előjelét. Ez több matematikus próbálkozása után 1914-ben sikerült J. E. LITTLEWOODnak [1].

Több számelméleti függvény vizsgálatánál a végtelen sokszori jelváltás igazolása ugyan viszonylag könnyű, de olyan véges intervallum explicit megadása, amelyben a függvény egyaránt felvesz pozitív és negatív értékeket, nehéz. Utalhatunk itt például arra, hogy olyan intervallumot megadni numerikusan, amelyben $\pi(x)-\operatorname{li}x$ először jelet vált, csupán 1955-ben sikerült LITTLEWOOD egyik tanítványának, [3] S. SKEWESnak. Az utóbbi időben ezen a területen igen jelentős fejlődés történt. TURÁN PÁL igen mély diophantikus-approximáció elméleti eredményeinek felhasználásával KNAPOWSKI és TURÁN explicit omega-becsléseket nyertek a prímszámok különböző számtani sorokban való eloszlására vonatkozólag [1], [2], [3]. Ezen módszer segítségével (az irodalomban általában hatványösszeg-módszer néven szokás említeni) KNAPOWSKInak lokalizált jelváltást sikerült bizonyítania $M(x)$-re vonatkozóan, W. STASnak pedig a $S(\beta)=\sum\frac{\mu(n)}{n}e^{-(\beta/n)^2}$ függvény abszolút értékének bizonyos intervallumon való maximumát sikerült alulról megbecsülnie, feltéve a *Riemann*-sejtés helyességét.

Szerző dolgozata ezen témakörhöz kapcsolódik. E dolgozatban felsorolt tételek (itt általában bizonyítás nélkül szerepelnek) bizonyítással, vagy a bizonyításra való utalással megtalálhatók szerző [1] kandidátusi értekezésében, illetve e kérdéskörrel foglalkozó dolgozataiban [2], [3], [4], [5], [6], [7].

A dolgozatban szereplő tételek tárgyalása folyamán minden esetben kiemeljük, hogy a tételeinkben szereplő paraméterek numerikusan meghatározhatók-e, vagy sem. A félreérthetőség elkerülése végett jelölésben is megkülönböztetjük a numerikusan meghatározható állandókat azoktól, amelyeknek csupán létezését tudjuk garantálni. Az előbbieket $c, c_1, c_2, \ldots$, az utóbbiakat $d, d_1, \ldots; K, K_1, \ldots$ betűkkel fogjuk jelölni. Azokat a függvényeket, amelyeknek az argumentumtól való függése explicit módon megadható $c_1(k), c_2(k), \ldots$ betűkkel jelöljük. A dolgozatban szereplő tételek többségének bizonyítása egy közös gondolati magra, a szerző által *„Rodoszkij-módszer”*-nek nevezett eljárásra vezethető vissza, mellyel RODOSZKIJ a következő tételt bizonyította be [1]:

Ha minden $x \geqq 1$ mellett fennáll a $|\psi(x)-x| \leqq cx^\theta$ becslés $\left(c>0, \theta \in [\frac{1}{2}, 1]\right)$, akkor léteznek olyan c-től függő pozitív c_1, c_2, c_3 konstansok, hogy $T > c_1$,

$$c_2(\log T)^{-\frac{1}{2}} < \alpha < \theta - c_3(\log T)^{-1}$$

esetén a

$$\left[T, T^{\frac{\theta+\sqrt{\theta^2-\alpha^2}}{\theta-\sqrt{\theta^2-\alpha^2}}}\right]$$

intervallum tartalmaz olyan x helyet, melyre $|\psi(x)-x| < x^\alpha$. Az említett tétel azt mutatja, hogy egy olyan intervallum, melyben $|\psi(x)-x| \geqq x^a$, nem lehet túl hosszú.

RODOSZKIJ fő segédeszköze a tetszőleges

$$F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$$

Dirichlet-sorra érvényes

$$\int_{(\sigma_0)} F(w) e^{w^2 u} dw = i\sqrt{\frac{\pi}{u}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\frac{\lambda_n^2}{4u}} \qquad (u \text{ valósparaméter})$$

formula.

TURÁN PÁL professzor úr volt szíves felhívni figyelmemet arra, hogy fenti formula már LITTLEWOODnál szerepel [3].

A tételek jelentős részében — az effektív tételekben — szerepel a $\varkappa = (2+\sqrt{3})^2$ állandó, abban a vonatkozásban, hogy egy $[T, T^\varkappa]$ intervallumban tudjuk a függvényeket alulról becsülni. Felvetődik a kérdés, hogy ez természetszerű, vagy a módszer nem eléggé adekvát voltából fakad. Erre vonatkozóan jelenleg nem tudunk válaszolni. Könnyen lehet, hogy az

$$\int_{(\sigma_0)} F(w) e^{w^2 u} dw$$

integrál helyett az

$$\int_{(\sigma_0)} F(w) e^{w^{4k+2} u} dw$$

integrált alkalmazva (k természetes szám) $\varkappa$ csökkenthető. E formula kezelése azonban nehéz. Megjegyezzük még, hogy ha például $M(x)$ felső becslésére $M(x) =$

$=0(x)$ helyett valamilyen $\theta<1$-gyel $M(x)=0(x^{\theta})$ érvényes lenne, akkor $\varkappa$ értéke $\dfrac{\theta+\sqrt{\theta^2-\frac{1}{4}}}{\theta-\sqrt{\theta^2-\frac{1}{4}}}$-re csökkenne. Hasonló állítás lenne érvényes a k-adik hatványmentes számok és $S(\beta)$ lokalizációs intervallumára.

2. Jelölések

(2.1) $\mu(n)$ — a *Möbius*-féle μ-függvény,

(2.2) $M(x)=\sum_{n\leqq x}\mu(n)$,

(2.3) $\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ — a *Riemann*-féle ζ-függvény,

(2.4) χ-modulo k vett multiplikativ karakter,

(2.5) $L(s,\chi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n^s}$-*Dirichlet*-féle L-függvény,

(2.6) $f(s)=-\frac{1}{\varphi(k)}\sum_{\chi}\left(\bar{\chi}(l_1)-\bar{\chi}(l_2)\right)\frac{L'}{L}(s,\chi)$, ahol az összegezés a mod k vett karakterekre történik.

(2.7) $\Lambda(n)=\begin{cases}\log p, & \text{ha } n=p^t,\ p \text{ prímszám}\\ 0 & \text{egyébként,}\end{cases}$

(2.8) $\psi(x)=\sum_{n\leqq x}\Lambda(n)$; $\quad\psi(x,k,l)=\sum_{\substack{n\leqq x\\ n\equiv l \pmod k}}\Lambda(n)$,

(2.9) $\vartheta(x)=\sum_{p\leqq x}\log p$; $\quad\vartheta(x,k,l)=\sum_{\substack{p\leqq x\\ p\equiv l \pmod k}}\log p$

(2.10) $\pi(x)=\sum_{p\leqq x}1$; $\quad\pi(x,k,l)=\sum_{\substack{p\leqq x\\ p\equiv l \pmod k}}1$,

(2.11) $\varrho_k(n)=\begin{cases}1, & \text{ha } n=1,\\ 1, & \text{ha } n>1,\ k\text{-adik hatványmentes,}\\ 0 & \text{egyébként,}\end{cases}$

(2.12) $R_k(x)=\sum_{n\leqq x}\varrho_k(n)$; $\quad P_k(x)=R_k(x)-\frac{x}{\zeta(k)}$,

(2.13) $S(\beta)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n}e^{-(\beta/n)^2}$,

(2.14) $s=\sigma+it$,

(2. 15) $c, c_0, c_1, c_2, \ldots$ numerikusan meghatározható pozitív állandók,

(2. 16) $d, d_0, d_1, \ldots, K, K_0, K_1, \ldots$ pozitív állandók, amelyeknek numerikus meghatározhatóságát nem garantáljuk,

(2. 17) $\varepsilon, \varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots$ tetszőleges kicsi pozitív állandók,

(2. 18) $\log_1 x = \log x, \ \log_{\nu+1} x = \log_\nu(\log x), \ \nu = 1, 2, \ldots$

(2. 19) $e_1(x) = e^x, \ e_{\nu+1}(x) = e_\nu(e_1(x)), \ \nu = 1, 2, \ldots$

(2. 20) $\varrho_0 = \frac{1}{2} + i\gamma_0$ – a ζ függvény legkisebb pozitív képzetes részű gyöke, $\gamma_0 = 14{,}13 \ldots$.

(2. 21) $\Delta(x) = \Delta(x, k, l_1, l_2) = \psi(x, k, l_1) - \psi(x, k, l_2),$

(2. 22) $$\operatorname{li} x = \int_2^x \frac{1}{\log u}\, du,$$

(2. 23) $$R_m(x, k, l) \overset{\text{def}}{=} \sum_{m \equiv l (\mathrm{mod}\ k)} \varrho_m(n), \qquad (l, k) = 1,$$

(2. 24) $$P_m(x, k, l) \overset{\text{def}}{=} R_m(x, k, l) - \frac{x}{\zeta(m)} \prod_{p/k} \left(1 - \frac{1}{p^m}\right)^{-1},$$

(2. 25) $$M_0(x) = \sum_{n \leqq x} \frac{\mu(n)}{n},$$

(2. 26) $$m(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) e^{-nx},$$

(2. 27) $$T(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^k}{(k-1)!\,\zeta(2k)},$$

(2. 28) $B_m(x, k, l_1, l_2) = R_m(x, k, l_1) - R_m(x, k, l_2), (l_1 l_2, k) = 1, l_1 \not\equiv l_2 \pmod k$

(2. 29) $$\sigma(x, k, l_1, l_2) = \sum_{n \equiv l_1 (\mathrm{mod}\ k)} \Lambda(n) e^{-nx} - \sum_{n \equiv l_2 (\mathrm{mod}\ k)} \Lambda(n) e^{-nx}, \qquad (l_1 l_2, k) = 1,$$
$$l_1 \not\equiv l_2 \pmod k.$$

3. Segédtételek

A következőkben megfogalmazunk néhány segédtételt, s ezek közül azokat, amelyek tankönyvekben nem szerepelnek, bebizonyítjuk.

A következő két lemma bizonyítással együtt szerepel K. A. Rodoszkij [1] dolgozatában.

1. LEMMA. *Ha* $0<\beta\leqq 1$ *és* $u\to\infty$, *akkor*

$$\frac{1}{2u}\int_1^\infty x^{\beta-1}\log x\cdot e_1\left(-\frac{\log^2 x}{4u}\right)dx = 2\sqrt{\pi u}\,\beta e_1(\beta^2 u)+0(1).$$

Bizonyítás. Vizsgáljuk a

$$I=-\frac{i\sqrt{u}\,\beta}{\sqrt{\pi}}\int_{2-\infty i}^{2+\infty i} e_1((1-\beta-w)^2u)\cdot(w-1)^{-1}dw$$

integrált. Az integrációs utat áttolva a $\mathrm{Re}\, w = 1-\alpha$ egyenesre a

$$I=2\sqrt{\pi u}\,\beta e_1(\beta^2 u)+0(1)$$

formulát kapjuk. Másrészt

$$I=-\frac{i\sqrt{u}\,\beta}{\sqrt{\pi}}\int_{2-\infty i}^{2+\infty i} e_1((1-\beta-w)^2u)\int_1^\infty x^{-w}dx\,dw.$$

Az integrálok felcserélése és a belső integrál kiszámítása után parciális integrálással a

$$I=\frac{1}{2u}\int_1^\infty x^{\beta-1}\log x\, e_1\left(-\frac{\log^2 x}{4u}\right)dx+0(1)$$

becslést nyerjük. Ezt összehasonlítva az I-re fentebb kapott kifejezéssel, következik az állítás.

2. LEMMA. *Ha* $0<\alpha<\theta$, $\log y = 2u(\theta-\sqrt{\theta^2-\alpha^2})>1$, $\log z = 2u(\theta+\sqrt{\theta^2-\alpha^2})$, *akkor érvényesek a következő egyenlőtlenségek:*

$$\frac{1}{2u}\int_1^y x^{\theta-1}\log x\cdot e_1\left(-\frac{\log^2 x}{4u}\right)dx<\theta(\theta^2-\alpha^2)^{-\frac{1}{2}}e_1(\alpha^2u), \tag{3.1}$$

$$\frac{1}{2u}\int_z^\infty x^{\theta-1}\log x\cdot e_1\left(-\frac{\log^2 x}{4u}\right)dx<2\theta(\theta^2-\alpha^2)^{-\frac{1}{2}}e_1(\alpha^2u), \tag{3.2}$$

$$\int_1^y x^{\theta-1}e_1\left(-\frac{\log^2 x}{4u}\right)dx<(\theta^2-\alpha^2)^{-\frac{1}{2}}[e_1(\alpha^2u)-1]. \tag{3.3}$$

Bizonyítás. A (3. 3) egyenlőtlenség bal oldalán álló integrálban $\log x = t$ helyettesítéssel

$$\int_1^y x^{\theta-1} e_1\left(-\frac{\log^2 x}{4u}\right) dx = \int_0^{\log y} e_1\left(\theta t - \frac{t^2}{4u}\right) dt \leqq$$

$$\leqq (\theta^2-\alpha^2)^{-\frac{1}{2}} \int_0^{\log y} \left(\theta - \frac{t}{2u}\right) e_1\left(\theta t - \frac{t^2}{4u}\right) dt =$$

$$= (\theta^2-\alpha^2)^{-\frac{1}{2}} \left(e_1\left(\theta \log y - \frac{\log^2 y}{4n}\right) - 1\right).$$

Mivel $\theta \log y - \dfrac{\log^2 y}{4u} = \alpha^2 u$, innen a (3. 3) egyenlőtlenség következik. A (3. 2) egyenlőtlenséget a (3. 3) formulából parciális integrálással vezethetjük le:

$$\frac{1}{2u}\int_1^y x^{\theta-1} \log x \cdot e_1\left(-\frac{\log^2 x}{4u}\right) dx = 1 - y^\theta e_1\left(-\frac{\log^2 y}{4u}\right) + \theta \int_1^y x^{\theta-1} e_1\left(-\frac{\log^2 x}{4u}\right) dx.$$

A (3. 1) egyenlőtlenség teljesen hasonló módon bizonyítható.

3. LEMMA. *Legyen*

$$F(w) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^w} \tag{3.4}$$

abszolút konvergens a $\operatorname{Re} w = \sigma_0$ *egyenesen. Akkor fennáll a*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_1\left(-\frac{\log^2 n}{4u}\right) = \frac{i\sqrt{u}}{\sqrt{\pi}} \int_{(\sigma_0)} F(w) e_1(w^2 u) dw \tag{3.5}$$

azonosság.

A bizonyítás megtalálható PRACHAR [1] könyvében.
Hasonló módon bizonyítható a következő segédtétel.

4. LEMMA. *Legyen a*

$$h(s) = \int_1^{\infty} \frac{dA(x)}{x^s} \tag{3.6}$$

integrál abszolút és egyenletesen konvergens a $\sigma > \sigma_1$ (>0) *félsíkban. Akkor érvényes a*

$$\int_1^{\infty} e_1\left(-\frac{\log^2 x}{4u}\right) dA(x) = \frac{i\sqrt{u}}{\sqrt{\pi}} \int_{(\sigma)} h(w) e_1(w^2 u) dw \tag{3.7}$$

azonosság. A jobb oldali integrál integrációs útja a $\operatorname{Re} w = \sigma$ *egyenes.*

Bizonyítás. A (3. 7) jobb oldalán álló integrálba (3. 6) jobb oldalát betéve az integrálok felcserélésével a

$$\int_{(\sigma)} h(w) e_1(w^2 u)\,dw = \int_{(\sigma)} \int_1^{\infty} \frac{dA(x)}{x^w} e_1(w^2 u)\,dw = \int_1^{\infty} \left(\int_{(\sigma)} \frac{e_1(w^2 u)}{x^w}\,dw \right) dA(x)$$

azonosságot kapjuk. A tett feltételek mellett az integrálok felcserélése megengedett. Másrészt könnyen látható, hogy

$$\int_{(\sigma)} x^{-w} e_1(w^2 u)\,dw = i\sqrt{\frac{\pi}{u}}\, e_1\left(-\frac{\log^2 x}{4u}\right).$$

(Ennek bizonyítása megtalálható PRACHAR [1] könyvének 381. lapján.) Innen (3. 7) azonnal következik.

5. LEMMA. *Legyen* $k \geqq 1$, $0 < l_1$, $l_2 \leqq k$, $(l_1 l_2, k) = 1$ *egészek,* $l_1 \neq l_2$, *akkor a*

$$f(s) = -\sum_{\chi} \frac{\bar{\chi}(l_1) - \bar{\chi}(l_2)}{\varphi(k)} \frac{L'}{L}(s, \chi)$$

függvénynek van szingularitása a $\sigma \geqq \frac{1}{2}$ *félsíkban.*

A bizonyítás megtalálható a szerző [5] dolgozatában. Ez az állítás implicit módon már KNAPOWSKI és TURÁN [2] dolgozatában szerepel.

4. A $M(x)$ függvény $\Omega_\pm$ becslése

A bevezetőben már említettük, hogy az $M(x)$ függvényre vonatkozó első lokalizált $\Omega_\pm$ típusú becslést S. KNAPOWSKI érte el. Első idevonatkozó dolgozatában [1] a *Riemann*-sejtés mellett a ζ-gyökök egyszerességét is feltételezi, a másodikban [2] csupán a *Riemann*-sejtést.

KNAPOWSKI tétele [2] pontosan a következőképpen hangzik. Feltéve, hogy a $0 < \sigma < 1$, $|t| \leqq \omega$ téglalapban minden ζ-gyök a $\sigma = \frac{1}{2}$ egyenesen fekszik, minden, a $c_1 \leqq T \leqq e_1(\omega^{10})$ intervallumba eső T-re

$$\max_{1 \leqq x \leqq T} M(x) \geqq T^{\frac{1}{2}} e_1\left(-15\,\frac{\log T \cdot \log_3 T}{\log_2 T}\right),$$

$$\min_{1 \leqq x \leqq T} M(x) \leqq -T^{\frac{1}{2}} e_1\left(-15\,\frac{\log T \cdot \log_3 T}{\log_2 T}\right).$$

Természetesen KNAPOWSKI tétele $M(x)$ végtelen sokszori jelváltását csak az $\omega = \infty$ esetben biztosítja.

Szerző [3] dolgozatában az $\omega = \infty$ esetre egy valamivel élesebb állítást bizonyított be.

1. TÉTEL. *Feltéve, hogy igaz a Riemann-sejtés,*

$$\max_{1 \leqq x \leqq T} M(x) \geqq T^{\frac{1}{2}} e_1(-c_2(\log_2 T)^2),$$

$$\min_{1 \leqq x \leqq T} M(x) \leqq -T^{\frac{1}{2}} e_1(-c_2(\log_2 T)^2),$$

hacsak $T > c_3$, *alkalmas numerikusan meghatározható* c_3 *állandóval.*

A fenti tételben szereplő $[1, T]$ lokalizációs intervallum rövidíthető. Ugyanis a *Riemann*-sejtés fennállása esetén

$$M(x) = 0\left(x^{\frac{1}{2}} e_1\left(A \frac{\log x}{\log_2 x}\right)\right),$$

(E. C. TITCHMARSH [1]), így $Y = Te_1\left(-3A \frac{\log T}{\log_2 T}\right)$ választással $x \leqq Y$ esetén

$$M(x) = 0\left(T^{\frac{1}{2}} e_1\left(-\frac{A}{2} \frac{\log T}{\log_2 T}\right)\right) = o(T^{\frac{1}{2}} e(-c_2(\log_2 T)^2)),$$

s ezért $M(x)$ az $1 \leqq x \leqq T$ intervallumra eső szélsőértékeit az $[Y, T]$ intervallumon veszi fel.

Később a szerző effektív, lokalizált $\Omega_\pm$ becslést mutatott meg kandidátusi értekezésében a $M(x)$ függvényre [1].

2. TÉTEL. *Alkalmas, numerikusan meghatározható* $\delta > 0$ *állandóval* $T > c_1$ *esetén*

$$\max_{T \leqq x \leqq T^\varkappa} x^{-\frac{1}{2}} M(x) \geqq \delta, \quad \max_{T \leqq x \leqq T^\varkappa} x^{-\frac{1}{2}} M(x) \leqq -\delta,$$

ahol $\varkappa = (2+\sqrt{3})^2$.

E tétel bizonyítása megtalálható az [5] dolgozatban.

Szerző tudomása szerinta $M(x)$ függvényre vonatkozóan ez az első effektív $\Omega_\pm$ típusú becslés, amely bebizonyítatlan sejtésektől függetlenül igaz.

Analóg tétel bizonyítható a k-adik hatványmentes számok részletösszegére is.

3. TÉTEL. *Alkalmas* δ_k, $d_1 = d_1(k)$ *pozitív állandókkal* $T > d_1$-re

$$\max_{T \leqq x \leqq T^K} \frac{P_k(x)}{x^{\frac{1}{2k}}} \geqq \delta_k, \qquad \min_{T \leqq x \leqq T^K} \frac{P_k(x)}{x^{\frac{1}{2k}}} \leqq -\delta_k.$$

A δ_k, $d_1(k)$ *állandók k-tól való függése explicite meghatározható, továbbá* $\varkappa = (2+\sqrt{3})^2$.

E tételt bizonyítás nélkül a szerző [5] dolgozata tartalmazza, s vázlatos bizonyítással az [1] értekezés.

A. O. GELFOND professzor kérdezte, hogy érvényesek-e hasonló tételek a

$$M(x, k, l) = \sum_{\substack{n \leqq x \\ n \equiv l \pmod{k}}} \mu(n)$$

összegre, illetve a

$$M(x,\chi,k)=\sum_{n\leqq x}\mu(n)\chi(n)$$

függvényre valós karakter esetén.

E kérdésre a válasz igen nehéznek látszik, ehhez a mod k vett $L(s,\chi)$ függvények valós tengelyhez közel eső gyökei imagináriusrészének abszolút alsó-becslésére lenne szükség. Kis k modulusokra (a megfelelő L-függvények gyökeinek numerikus ismerete alapján) kimondhatunk $\Omega_\pm$ típusú tételeket. Így például a $k=8$ esetre érvényes a következő tétel.

4. TÉTEL. *Ha l páratlan, akkor $T>c_1$ esetén*

$$\max_{T\leqq x\leqq T^{\varkappa}} x^{-\frac{1}{2}}M(x,8,l)>\delta,\qquad \min_{T\leqq x\leqq T^{\varkappa}} x^{-\frac{1}{2}}M(x,8,l)<-\delta,$$

ahol δ, c_1 numerikusan meghatározott pozitív állandók, $\varkappa=(2+\sqrt{3})^2$.

Erre a speciális esetre bebizonyíthatók a 3. tétel következő analogonjai is. Legyen $(k,l)=1$,

$$R_m(x,k,l)\overset{\text{def}}{=}\sum_{n\equiv l\,(\mathrm{mod}\,k)}\varrho_m(n),$$

(4. 1) $$P_m(x,k,l)\overset{\text{def}}{=}R_m(x,k,l)-\frac{x}{\zeta(m)}\prod_{p\mid k}\left(1-\frac{1}{p^m}\right)^{-1}.$$

Legyenek l_1, l_2 mod k vett inkongruens redukált maradékok, s legyen

(4. 2) $$B_m(x,k,l_1,l_2)=R_m(x,k,l_1)-R_m(x,k,l_2).$$

A (4. 1) és (4. 2) függvényekre nem ismeretes, hogy végtelen sokszor jelet váltanak-e. Érdekes lenne a következő sejtés igazolása:

Tetszőleges $k\geqq 1$, $(l_1l_2,k)=1$, $l_1\not\equiv l_2 \pmod k$ esetén

$$\max_{T\leqq x\leqq T^{\varkappa}} x^{-\frac{1}{2m}}P_m(x,k,l)>\delta_k,\qquad \min_{T\leqq x\leqq T^{\varkappa}} x^{-\frac{1}{2m}}P_m(x,k,l)<-\delta_k,$$

$$\max_{T\leqq x\leqq T^{\varkappa}} x^{-\frac{1}{2m}}B_m(x,k,l_1,l_2)>\delta_k,$$

alkalmas $\delta_k>0$ állandóval.

Kis k modulusokra (olyan k értékekre, amelyekre a hozzátartozó $L(s,\chi)$ függvények kis képzetes-részű gyökei ismertek) be tudjuk bizonyítani ezt az állítást. Így például érvényes a következő két tétel.

5. TÉTEL. *Ha $0<l_1, l_2<8$, $l_1\neq l_2$, páratlanok, akkor minden $m\geqq 2$ esetén*

$$\max_{T\leqq x\leqq T^{\varkappa}} x^{-\frac{1}{2m}}B_m(x,8,l_1\,l_2)>\delta_m,$$

hacsak $T>c_1(m)$, ahol $\varkappa=(2+\sqrt{3})^2$, δ_m, $c_1(m)$ m-től explicit módon függő pozitív állandók.

6. TÉTEL. *Ha l az 1, 3, 5, 7 számok bármelyike, akkor*

$$\max_{T\le x\le T^{\varkappa}} x^{-\frac{1}{2m}} P_m(x, 8, l) > \delta_m, \quad \min_{T\le x\le T^{\varkappa}} x^{-\frac{1}{2m}} P_m(x, 8, l) < -\delta_m,$$

hacsak $T > c_2(m)$, ahol $\varkappa = (2+\sqrt{3})^2$, δ_m, $c_2(m)$ m-től explicit módon függő állandók.

Most bebizonyítjuk az 5. tételt páratlan m esetére. Páros m-re a gondolatmenet ugyanaz, csak sok numerikus számítást igényel. A 6. tétel analóg módon bizonyítható.

A

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varrho_m(n)\chi(n)}{n^s} = \prod_p \left(1+\frac{\chi(p)}{p^s}+\ldots+\frac{\chi^{m-1}(p)}{p^{(m-1)s}}\right) = \frac{L(s,\chi)}{L(ms,\chi^m)}$$

formula felhasználásával a

$$g(s) = \sum_{n\equiv l_1 (\mathrm{mod}\, k)} \frac{\varrho_m(n)}{n^s} - \sum_{n\equiv l_2 (\mathrm{mod}\, k)} \frac{\varrho_m(n)}{n^s} \tag{4.3}$$

Dirichlet-sorra a

$$g(s) = \frac{1}{\varphi(k)} \sum_{\chi} (\bar{\chi}(l_1)-\bar{\chi}(l_2)) \frac{L(s,\chi)}{L(ms,\chi^m)} \tag{4.4}$$

előállítást nyerjük. Az előállításból következik, hogy $g(s)$ analitikusan folytatható az egész síkon. Pólusai csupán ott lehetnek, ahol az $L(ms, \chi^m)$ függvények valamelyikének gyöke van. Ugyanis a főkarakterhez tartozó L-függvény nem lép fel ténylegesen (4, 4) jobb oldalán. Ebből következik, hogy $g(s)$ reguláris a $\sigma > \frac{1}{m}$ félsíkban. Tételünk bizonyításához szükségünk lesz a 8 modulusú L-függvények kis gyökeinek ismeretére.

A $0 < \sigma < 1$, $|t| \le 12$ tartományban a mod 8 vett L-függvények gyökei a következők:

A $\chi_1 = 1, 1, -1, -1$ karakterhez tartozó gyökök:

$$\frac{1}{2} \pm i \cdot 4{,}89997\ldots$$

$$\frac{1}{2} \pm i \cdot 7{,}62842\ldots$$

$$\frac{1}{2} \pm i \cdot 10{,}80658\ldots$$

A $\chi_2 = 1, -1, 1, -1$ karakterhez tartozó gyökök:

$$\frac{1}{2} \pm i \cdot 6{,}02094\ldots$$

$$\frac{1}{2} \pm i 10{,}24377\ldots$$

A $\chi_3 = 1, -1, -1, 1$ karakterhez tartozó gyökök:

$$\frac{1}{2} \pm i \cdot 3{,}57615\ldots$$

$$\frac{1}{2} \pm i \cdot 7{,}43442\ldots$$

$$\frac{1}{2} \pm i \cdot 9{,}50320\ldots$$

Ezek a gyökök egyszeresek.

Fenti gyökök numerikus adatait KNAPOWSKI és TURÁN [3] dolgozatából vettük át (254. o.).

Vezessük be az

$$\mathscr{I}(\tau) = \sum_{n \equiv l_1(8)} \varrho_m(n) e_1\left(-\frac{\log^2 n}{4u} - i\tau \log n\right) - \sum_{n \equiv l_2(8)} \varrho_m(n) e_1\left(-\frac{\log^2 n}{4u} - i\tau \log n\right)$$

jelölést. Legyen τ pozitív szám. Fenti formulából parciális integrálással az

$$\mathscr{I}(\tau) = \int_1^\infty e_1\left(-\frac{\log^2 x}{4u} - i\tau \log x\right) dB_m(x, k, l_1, l_2) = \tag{4.5}$$

$$\int_1^\infty \frac{B_m(x, k, l_1, l_2)}{x}\left(\frac{\log x}{2u} + i\tau\right) e_1\left(-\frac{\log^2 x}{4u} - i\tau \log x\right) dx$$

relációt nyerjük.

A továbbiakban $B_m(x, k, l_1, l_2)$ helyett egyszerűen csak $B\ (x)$-et írunk. Mivel

$$|B(x)| = \left|\sum_{n \leqq x} \varepsilon(n, 8, l_1, l_2) \varrho_m(n)\right| = \left|\sum_{n \leqq x} \varepsilon(n, 8, l_1, l_2) \sum_{d^m | n} \mu(d)\right| =$$

$$= \left|\sum_{d^m \leqq x} \sum_{\substack{d^m | n \\ n \leqq x}} \varepsilon(n, 8, l_1, l_2)\right| = \sum_{d^m \leqq x} \left|\left\{\sum_{\substack{u \equiv l_1 (d^m)^{-1}(8) \\ u \leqq \frac{x}{d^m}}} 1 - \sum_{\substack{u \equiv l_2 (d^m)^{-1}(8) \\ u \leqq \frac{x}{d^m}}} 1\right\}\right| \leqq 2 \sum_{d^m \leqq x} \leqq 2x^{1/m},$$

így

$$B(x) = 0(x^{1/m}), \tag{4.6}$$

ahol az ordóban foglalt állandó numerikusan meghatározható.

A most bevezetendő y, z értékekre teljesüljenek a következő relációk.

$$\log y = 2u\left(\frac{1}{m} - \sqrt{\frac{1}{m^2} - \frac{1}{4m^2}}\right) = \frac{2u}{m}\left(1 - \sqrt{\frac{3}{4}}\right),$$

$$\log z = 2u\left(\frac{1}{m} + \sqrt{\frac{1}{m^2} - \frac{1}{4m^2}}\right) = \frac{2u}{m}\left(1 + \sqrt{\frac{3}{4}}\right),$$

$$\log y > 1, \quad u > 1.$$

Az u paraméter értékét később határozzuk meg.

Jelöljük rendre $\mathscr{I}_1(\tau), \mathscr{I}_2(\tau), \mathscr{I}_3(\tau)$-val a (4. 5) jobb oldalán álló integrandusnak az $[1, y]$, $[y, z]$, $[z, \infty]$ intervallumokra kiterjesztett integráljait. Felhasználva a (4. 6) becslést továbbá a 2. lemmát a

$$|\mathscr{I}(\tau)| \leqq \int_1^y x^{\frac{1}{m}-1}\left(\frac{\log x}{2u}+\tau\right) e_1\left(-\frac{\log^2 x}{4u}\right) dx < c_2(m)(\tau+1)e_1\left(\frac{u}{4m^2}\right),$$

és az

$$|\mathscr{I}_3(\tau)| < c_2(m)(\tau+1)e_1\left(\frac{u}{4m^2}\right)$$

egyenlőtlenségeket nyerjük. Innen

$$\mathscr{I}(\tau) = \mathscr{I}_2(\tau) + 0\left(m(\tau+1)e_1\left(\frac{u}{4m^2}\right)\right) \tag{4. 7}$$

következik.

Válasszunk most egy $\delta > 0$ számot és tételezzük fel, hogy a fent definiált $[y, z]$ intervallumon a

$$\max_{y \leqq x \leqq z}\left(B(x)+\delta x^{\frac{1}{2m}}\right) \leqq 0, \tag{4. 8}$$

$$\min_{y \leqq x \leqq z}\left(B(x)-\delta x^{\frac{1}{2m}}\right) \geqq 0 \tag{4. 9}$$

egyenlőtlenségek valamelyike teljesül.

Ebből kiindulva most $\mathscr{I}(\tau)$-t az $\mathscr{I}(0)$ segítségével felülről megbecsüljük.

$$\mathscr{I}_2(\tau) = \int_y^z \frac{B(x) \pm \delta x^{\frac{1}{2m}}}{x}\left(\frac{\log x}{2u}+i\tau\right) e_1\left(-\frac{\log^2 x}{4u} - i\tau \log x\right) dx \mp \tag{4. 10}$$

$$\mp \delta \int_y^z x^{\frac{1}{2m}-1}\left(\frac{\log x}{2u}+i\tau\right) e_1\left(-\frac{\log^2 x}{4u} - i\tau \log x\right) dx.$$

Fenti integrálban a $+$ illetve $-$ előjelet annak megfelelően választjuk, hogy (4. 8) vagy (4. 9) teljesül-e. Igy $B(x) \pm \delta x^{\frac{1}{2m}}$ állandó előjelű az $[y, z]$ intervallumon. Becsüljük meg a jobboldal első integrálját. Mivel az $[y, z]$ intervallumon $\frac{1}{m}\left(1-\sqrt{\frac{3}{4}}\right) \leqq \frac{\log x}{2u} \leqq \frac{1}{m}\left(1+\sqrt{\frac{3}{4}}\right)$, így

$$\left|\frac{\log x}{2u}+i\tau\right| \leqq \frac{\log x}{2u}+\tau \leqq \frac{\log x}{2u}+c \cdot m\,\frac{\log x}{2u}\,\tau \leqq (1+cm\tau)\frac{\log x}{2u}. \tag{4. 11}$$

Ennek felhasználásával

$$\left| \int_y^z \frac{B(x) \pm \delta x^{\frac{1}{2m}}}{x} \left(\frac{\log x}{2u} + i\tau \right) e_1 \left(-\frac{\log^2 x}{4u} - i\tau \log x \right) dx \right| \leqq$$

$$\leqq (1 + cm\tau) |\mathscr{I}_2(0)| + \delta (1 + cm\tau) \int_y^z x^{\frac{1}{2m} - 1} e_1 \left(-\frac{\log^2 x}{4u} \right) dx.$$

Ezen utóbbi integrált, továbbá (4. 10) jobb oldalának második tagját az 1. lemma segítségével becsülhetjük, az utóbbinál felhasználva még a (4. 11) egyenlőtlenséget. Így ezek abszolút értéke

$$\leqq c\delta (1 + m\tau) \sqrt{u}\, e_1 \left(\frac{u}{4m^2} \right).$$

Ebből a

$$|\mathscr{I}_2(\tau)| \leqq (1 + cm\tau) |\mathscr{I}_2(0)| + c\delta (1 + m\tau) \sqrt{u}\, e_1 \left(\frac{u}{4m^2} \right),$$

egyenlőtlenséget, majd a (4. 7) formulával való összehasonlítás után az

$$|\mathscr{I}(\tau)| \leqq (1 + cm\tau) |\mathscr{I}(x) + c\delta (1 + \tau) e_1 \left(\frac{u}{4m^2} \right) \sqrt{u} + cm^2 (\tau + 1) e_1 \left(\frac{u}{4m^2} \right)$$

egyenlőtlenséget nyerjük.

A továbbiakban τ értékét korlátozzuk a $0 < \tau < 20$ intervallumra. Utóbbi egyenlőtlenségünk így az

$$(4.12) \qquad |\mathscr{I}(\tau)| \leqq c_4(m) |\mathscr{I}(0)| + c_5 \delta \sqrt{u}\, e_1 \left(\frac{u}{4m^2} \right) + c_6(m) e_1 \left(\frac{u}{4m^2} \right)$$

alakba írható.

Kimutatjuk, hogy ez az egyenlőtlenség τ alkalmas választása mellett elég kis pozitív δ esetén nem állhat fenn, s ebből közvetlenül kapjuk a tételt.

A 3. lemma miatt a (4. 5) alatti $\mathscr{I}(\tau)$-ra érvényes az

$$\mathscr{I}(\tau) = \frac{i\sqrt{u}}{\sqrt{\pi}} \int_{(2)} g(w + i\tau) e_1 (w^2 u) dw$$

integrál előállítás.

Vizsgáljuk először a $\tau = 0$ esetet. A jobb oldali integrált toljuk át a

$$2 - i\infty, 2 - i5, 5, \frac{1}{m} - \frac{7}{m} i, \frac{1}{2m} - \frac{3}{m} i, -\frac{3}{m} i, \frac{3}{m} i, \frac{1}{2m} + i, \frac{3}{m} i, \frac{1}{m} + \frac{7}{m} i, 2 + i5$$

töréspontokkal rendelkező Γ töröttvonalra. E töröttvonalon és tőle jobbra $g(w)$

reguláris és abszolút értéke könnyen becsülhető a (4. 4) előállítás felhasználásával. $\mathscr{I}(0)$-t triviálisan becsülve

$$|\mathscr{I}(0)| \leqq \sqrt{\frac{u}{\pi}} \int_{\Gamma} |g(w)| e_1((\sigma^2 - t^2)) dt < c_5(m) e_1\left(\frac{u}{4m^2}\right).$$

Így (4. 12) egyenlőtlenségünk az

$$|\mathscr{I}(\tau)| \leqq c_5(m)\delta\sqrt{u}\, e_1\left(\frac{u}{4m^2}\right) + c_6(m) e_1\left(\frac{u}{4m^2}\right)$$

alakba írható át.

Tegyük fel a továbbiakban, hogy m páratlan. Mivel mod 8 minden karakter valós, így $L(ms, \chi^m) = L(ms, \chi)$. Tekintsük a

$$g(s) = \frac{1}{4} \sum_{\chi} (\bar{\chi}(l_1) - \bar{\chi}(l_2)) \frac{L(s, \chi)}{L(ms, \chi)}$$

függvénynek a kritikus sávba eső legkisebb pozitív imaginárius részű szingularitását. Ez az $\frac{1}{2m} + i\frac{\gamma_1}{m} = \frac{1}{2m} + i\cdot\frac{4{,}899\ldots}{m}$; $\frac{1}{2m} + i\frac{\gamma_2}{m} = \frac{1}{2m} + i\,\frac{6{,}029\ldots}{m}$; $\frac{1}{2m} + i\frac{\gamma_3}{m} = \frac{1}{2m} + i\frac{3{,}5761\ldots}{m}$ értékek valamelyike lesz. Jelöljük a legkisebb szingularitást $\frac{1}{m}\left(\frac{1}{2} + i\gamma\right)$-val. (Tudniillik, ha $\chi(l_1) = \chi(l_2)$, akkor a hozzátartozó $\frac{L(s, \chi)}{L(ms, \chi)}$ zérus együtthatóval szerepel.) Válasszuk most a $\tau = \gamma$ értéket, s az

$$\mathscr{I}(\tau) = \frac{i\sqrt{u}}{\sqrt{\pi}} \int_{(2)} g(w + i\tau) e_1(w^2 u) dw$$

integrált toljuk át az előzőleg definiált Γ töröttvonalra. A $g(w + i\tau)$ függvénynek a $w = \frac{1}{2m}$ pontban elsőrendű pólusa van numerikusan meghatározható rezidiummal. $\left(\text{A } \Gamma\text{-tól jobbra eső, ettől különböző reziduumok rendje } o\left(e_1\left(\frac{u}{4m^2}\right)\right)\right)$. A Γ kontúron az integrál becsülhető, így az

$$\mathscr{I}(\tau) = c_7(m) e_1\left(\frac{u}{4m^2}\right)\sqrt{u} + cg(m) e_1\left(\frac{u}{4m^2}\right)$$

becslést nyerjük, ahol $|c_7(m)| > 0$. Így elég nagy u-ra

$$|\mathscr{I}(\tau)| > \frac{|c_7(m)|}{2} e_1\left(\frac{u}{4m^2}\right),$$

és (4. 12)-vel összevetve

$$\sqrt{u}\,\frac{|c_7(m)|}{2} e_1\left(\frac{u}{4m^2}\right) < c_5(m)\delta\sqrt{u}\, e_1\left(\frac{u}{4m^2}\right) + c_6(m) e_1\left(\frac{u}{4m^2}\right),$$

ami nyilván nem állhat fenn, ha δ elég kicsi.

Tehát a (4. 8), (4. 9) egyenlőtlenségeink egyike sem teljesülhet. Innen $y=T$, $z=T^{\varkappa}$ jelöléssel következik a tétel.

Ismeretes, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n}$ sor konvergens, s határértéke 0. Természetesnek tűnik az a kérdés, hogy ez a konvergencia milyen gyors. LANDAUnak a bevezetésben idézett [1] tételéből következik, hogy

$$x^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{n\leq x}\frac{\mu(n)}{n}\right)\to 0$$

nem állhat fenn $x\to\infty$ esetén.

Ezzel kapcsolatban be tudjuk bizonyítani a következő tételt.

Legyen

$$M_0(x)\overset{\text{def}}{=}\sum_{n\leq x}\frac{\mu(n)}{n}.$$

7. TÉTEL. *Minden $T>c_1$ esetén*

$$\max_{T\leq x\leq T^{\varkappa}} M_0(x^{\frac{1}{2}})>\delta,\qquad \min_{T\leq x\leq T^{\varkappa}} M_0(x)x^{\frac{1}{2}}<-\delta,$$

ahol $\varkappa=(2+\sqrt{3})^2$, c_1,δ pozitív numerikus állandók.

Eddigi tételeinkben nagy szerepet kapott az effektivitás. Az eddigi tételeinkben szereplő állandók, amelyektől tételeink érvényességi határa függ, numerikusan kiszámíthatók. A következőkben megemlítünk néhány „nem-effektív" tételt. Ezekben a $[T, T^{\varkappa}]$ lokalizációs intervallum $[T, T^{1+\varepsilon}]$-ra rövidíthető tetszőleges $\varepsilon>0$ állandóval. Az $M(x)$ függvényre vonatkozóan a következő tételt bizonyíthatjuk.

Jelölje $\varrho=\beta_\varrho+i\gamma_\varrho$ a ζ-függvény gyökeit. Legyen θ ezen gyökök valós részeinek felső határa. Ebben az esetben érvényes a $M(x)=0(x^{\theta+\varepsilon})$ reláció, ahol $\varepsilon>0$ tetszőleges állandó. LANDAU tételéből [1] könnyen következik, hogy a $M(x)=0(x^{\beta})$ becslés $\beta<\theta$ esetén nem áll fenn. Következő tételünk azt mutatja, hogy $M(x)$ abszolút értékben nagy pozitív illetve negatív kilengései elég sűrűn vannak.

8. TÉTEL. *Legyenek $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ tetszőleges pozitív állandók. Akkor*

$$\max_{T\leq x\leq T^{1+\varepsilon_1}} x^{-\theta+\varepsilon_2}M(x)>1,\qquad \min_{T\leq x\leq T^{1+\varepsilon_1}} x^{-\theta+\varepsilon_2}M(x)<-1,$$

hacsak T elég nagy.

Hasonló tétel érvényes a $M_0(x)$ összegre.

9. TÉTEL. *Legyenek $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ tetszőleges pozitív állandók. Akkor*

$$\max_{T\leq x\leq T^{1+\varepsilon_1}} x^{-\theta+\varepsilon_2+1}M_0(x)>1,\qquad \min_{T\leq x\leq T^{1+\varepsilon_1}} x^{-\theta+\varepsilon_2+1}M_0(x)<-1$$

hacsak T elég nagy.

A négyzetmentes számokra vonatkozóan analóg tételt nem tudunk bizonyítani.

5. Számtani sorozatok prímszámainak összehasonlítása

Ismeretes, hogy a $p \equiv l (\mathrm{mod}\, k)$ számtani sorozatba eső, $p \leqq x$ egyenlőtlenségnek eleget tevő p prímszámok $\pi(x, k, l)$ számára érvényes a

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\pi(x, k, l)}{\mathrm{li}\, x} = \frac{1}{\varphi(k)}$$

reláció, hacsak $(l, k) = 1$. Ez azt mutatja, hogy a prímszámok az azonos k modulushoz tartozó különböző számtani sorozatokban egyenletesen oszlanak el. Már igen korán, CSEBISEVnél felvetődött a kérdés, hogy ez az egyenletesség milyen mértékben teljesül. Ő egy pontosan megfogalmazott állítása heurisztikus értelmezéseként azt állította, hogy a $p \equiv 3(4)$ számtani sorozatban több prímszám van, mint a $p \equiv 1(4)$ számtani sorozatban. HARDY és LITTLEWOOD [1] dolgozatukban megmutatták, hogy

$$\pi(x, 4, 1) - \pi(x, 4, 3)$$

végtelen sokszor vesz fel pozitív illetve negatív értékeket $x \to \infty$ esetén. HARDY és LITTLEWOOD ugyanakkor megmutatta, hogy CSEBISEV eredeti állítása, mely *Abel*-közepekre vonatkozik akkor és csak akkor igaz, ha a mod 4 vett nem-főkarakterhez tartozó L-függvénynek a kritikus sávba eső gyökei a $\sigma = \frac{1}{2}$ egyenesre esnek [1].

KNAPOWSKI és TURÁN „Comparative prime-number theory” című dolgozatsorozatukban szisztematikusan vizsgálták különböző számtani sorozatok prímszámai számának diszkrepancia-tulajdonságait. Először nyertek lokalizált $\Omega_{\pm}$-típusú becsléseket (azonos differenciájú) számtani sorozatok prímszám eloszlásával kapcsolatban. Tételeik kimondásában nagy gondot fordítanak a kiszámíthatóságra, az effektivitásra.

Ebben a paragrafusban megfogalmazunk néhány tételt (bizonyításaikat az előző paragrafus tételeinek bizonyításaival való nagyfokú analógia miatt nem részletezzük), amely RODOSZKIJ módszerével nyerhető.

Kis k modulusok esetén tételeink effektívek, tetszőleges k esetén azonban nem. Így például $k = 8$ esetén érvényes a következő tétel.

10. TÉTEL. *Ha l_1 és l_2 az* 1, 3, 5, 7 *számok közül két különböző szám, akkor*

$$\max_{T \leqq x \leqq T^{\varkappa}} x^{-\frac{1}{2}} (\psi(x, 8, l_1) - \psi(x, 8, l_2)) > \delta \tag{5.1}$$

továbbá, ha l_1, l_2 egyike sem 1, *akkor*

$$\max_{T \leqq x \leqq T^{\varkappa}} \frac{\pi(x, k, l_1) - \pi(x, k, l_2)}{\dfrac{\sqrt{x}}{\log x}} > \delta, \tag{5.2}$$

hacsak $T > c_1$, ahol δ, c_1 pozitív, numerikusan meghatározható állandók, $\varkappa = (2 + \sqrt{3})^2$.

KNAPOWSKI és TURÁN eredménye [1] majdnem minden szempontból jobb. Tételük a következőképpen hangzik.

Ha $T > c_1$, $l_1 \not\equiv l_2$ a 3, 5, 7 számok közül valók, akkor

$$\max_{T^{1/3} \leqq x \leqq T} (\psi(x, k, l_1) - \psi((x, k, l_2)) > \sqrt{T} e_1 \left(-23 \frac{\log T \cdot \log_3 T}{\log_2 T}\right),$$

$$\max_{T^{1/3} \leqq x \leqq T} (\pi(x, k, l_1) - \pi(x, k, l_2)) > \sqrt{T} e_1 \left(-23 \frac{\log T \cdot \log_3 T}{\log_2 T}\right),$$

ahol c_1 numerikusan meghatározható állandó. (5. 1) bizonyítása az 5. TÉTEL bizonyításához hasonló. Mivel a 3, 5, 7 maradékok mod 8 kvadratikus nem-maradékok, így (5. 1)-ből (5. 2) igen egyszerűen, a [5] dolgozatban követett módon levezethető. Fenti módszer nem alkalmas a

$$\pi(x, 8, 1) - \pi(x, 8, l)$$

függvények jelváltásának vizsgálatára. (KNAPOWSKI és TURÁN ezen függvény végtelensokszori jelváltását is megmutatta [1].)

Az általános eset. Tetszőleges k modulus esetén a

$$\psi(x, k, l_1) - \psi(x, k, l_2)$$

függvény végtelen sokszori jelváltását nem tudjuk sejtéstől függetlenül igazolni. KNAPOWSKI és TURÁN bizonyította be, hogy fenti függvény végtelen sokszor jelet vált, ha a k modulushoz tartozó L-függvényeknek a $0 < \alpha < 1$ kritikus sávban nincs valós gyöke. Ez a feltétel természetes, ugyanis ha a $\prod_{\chi} L(s, \chi)$ függvénynek van valós gyöke a kritikus sávban, s ez a legnagyobb valós részű (az összes többi gyök valós része kisebb!), akkor alkalmas l esetén $\psi(x, k, 1) - \psi(x, k, l)$ állandó előjelű.

KNAPOWSKI és TURÁN ezt a feltételt *Haselgrove*-feltételnek nevezik. Ezen feltétel tejesülése csak konkrét k modulusok esetén ismeretes. Nincs bebizonyítva az sem, hogy végtelen sok k modulusra teljesül a *Haselgrove*-feltétel. Megjegyezzük, hogy céljainkra megfelelne azon gyengébb feltétel teljesülése is, hogy tetszőleges $l_1 \not\equiv l_2(k)$ esetén az

$$f(s) = -\frac{1}{\varphi(k)} \sum_{\chi} (\bar{\chi}(l_1) - \bar{\chi}(l_2)) \frac{L'}{L}(s, \chi)$$

függvény legnagyobb valósrészű szingularitása nem valós.

KNAPOWSKI és TURÁN tétele pontosan a következőképpen hangzik [3]. Legyenek l_1, l_2, k természetes számok, $(l_1, k) = (l_2, k) = 1$, $l_1 \not\equiv l_2 (\mathrm{mod}\ k)$,

$$\Delta(x) = \psi(x, k, l_1) - \psi(x, k, l_2).$$

Ha a mod k vett $L(s, \chi)$ függvények egyike sem tűnik el a $0 < \sigma < 1$, $|t| \leqq A(k) \leqq 1)$ téglalapban, akkor $c_3 > 0$ alkalmas numerikus állandó és

$$\omega \geqq \max\{e_1(k^{c_3}),\ e_1(2(A(k))^{-3})\}$$

esetén a $\Delta(x)$ függvény minden $\omega \leqq x \leqq e_1(2\sqrt{\omega})$ intervallumban előjelet vált.

RODOSZKIJ módszerével kimutatható a következő tétel.

11. TÉTEL. *Ha $f(s)$ a $0<s<1$ szakaszon reguláris, akkor bármely $\varepsilon_1>0$, $\varepsilon_2>0$ állandókhoz található olyan $T_0=T_0(\varepsilon_1, \varepsilon_2, f)$ véges küszöbszám, hogy $T>T_0$ esetén*

$$\max_{T^{1-\varepsilon_1}\leq x\leq T} \Delta(x)x^{-\theta_1+\varepsilon_2} \geqq 1, \tag{5.3}$$

$$\min_{T^{1-\varepsilon_1}\leq x\leq T} \Delta(x)\cdot x^{-\theta_1+\varepsilon_2} \leqq -1. \tag{5.4}$$

E tétel bizonyítása megtalálható az [5] dolgozatban. Tételünk nem effektív, ugyanis $\varepsilon_1, \varepsilon_2, k$ függvényében nem tudjuk explicit módon meghatározni a T_0 küszöbszám értékét. Ha az $f(s)$ függvény szomszédos pólusai távolságára (elég lenne csak a $0<\sigma<1$, $|t|\leqq 1$ téglalapba esőkre), továbbá a pólusoknak a valós tengelytől való távolságára explicit pozitív alsó korlátot tudnánk adni, akkor ennek segítségével T_0 értékét explicite megadhatnánk. Ilyen tételek azonban a ζ-függvény esetén is csak a *Mertens*-hipozétis $(M(x)=0(\sqrt{x}))$, vagy a valamivel gyengébb

$$\int_1^T \left(\frac{M(x)}{x}\right)^2 dx = 0(\log T)$$

sejtés mellett ismeretesek. (Bármelyik teljesülése maga után vonja a *Riemann*-sejtést.)

Nem tudom bebizonyítani a következő gyengébb állítást sem.

Minden k-hoz és $\chi(\operatorname{mod} k)$-hoz található olyan $c_1(k)$ állandó és $\varphi(k, T)$ függvény, hogy $T>c_1(k)$ esetén van olyan $\varrho=\beta+i\gamma$ gyöke az $L(s,\chi)$ függvénynek, amelynek γ imaginárius része a $(T, 2T)$ intervallumban van és a $0<\sigma<1$, $|t-\gamma|<$ $<\varphi(k, T)$ tartományban egyik $L(s,\chi)$, $\chi(\operatorname{mod} k)$ függvény sem tűnik el, ahol $c_1(k)$, $\varphi(k, T)$ k-tól, illetve k-tól és T-től explicit módon függő mennyiségek.

Tételünk ilyen feltételeken alapuló fogalmazásának nem sok értelme lenne, mivel a feltételek verifikálása igen nehéznek látszik. A fent idézett KNAPOWSKI—TURÁN tételben szereplő $A(k)$ numerikus meghatározása esetleg könnyebb, s míg az első jelváltásnak az $A(k)$-tól való függése természetszerű, a pólushelyek konfigurációjától való függése nem. Ha a becslés effektív voltától eltekintünk, akkor tételünk élesebb a fenti KNAPOWSKI—TURÁN tételnél mind az eltérés nagyságára, mind a lokalizációs intervallum hosszára vonatkozólag. Sőt az eltérés nagyságát illetően az (5. 3) és (5. 4) egyenlőtlenségek túlságosan nem javíthatók, mert a tétel feltételei mellett érvényes a $\Delta(x)=0(x\theta^1\log^2 x)$ becslés.

A $\theta_1=\frac{1}{2}$ esetre RODOSZKIJ módszerével a pontosabb

$$\max_{T^{1-\varepsilon_1}\leq x\leq T} \Delta(x)\cdot x^{-\frac{1}{2}}\geqq\delta,$$

egyenlőtlenségeket nyerjük, ahol $\delta>0$ alkalmas pozitív állandó. A $\theta_1=\frac{1}{2}$ esetben LITTLEWOOD iterációs módszerének alkalmazásával a lokalizációs intervallum szűkíthető. Szerző [4] dolgozatában kimutatta a következő tételt.

12. TÉTEL. *Ha $\theta_1=\frac{1}{2}$ és az $f(s)$ függvény az $s=\frac{1}{2}$ pontban reguláris, akkor elég nagy a, ω és elég kis δ pozitív állandók esetén*

$$\max_{\omega\leq x\leq a\omega} \frac{\psi(x,k,l_1)-\psi(x,k,l_2)}{\sqrt{x}} > \delta,$$

és

$$\min_{\omega \leq x \leq a\omega} \frac{\psi(x,k,l_1)-\psi(x,k,l_2)}{\sqrt{x}} < -\delta.$$

Kérdés, hogy mit tudunk mondani a *Haselgrove*-feltétel mellett a

$$\pi(x,k,l_1)-\pi(x,k,l_2) \tag{5. 5}$$

függvény oszcillációjáról. Tetszőleges l_1, l_2 esetén nem tudjuk bizonyítani (5. 5) végtelen sokszori jelváltását. Ha l_1 és l_2 egyforma kvadratikus karakterűek (mindketten kvadratikus maradékok, illetve nem-maradékok) mod k, akkor (5. 5) végtelen sokszor jelet vált.

A 11. és 12. tétel egyszerű következménye a következő tétel. Jelölje $N_k(l)$ az $x_k \equiv l (\mathrm{mod}\ k)$ kongruencia megoldásszámát. Ismeretes, hogy

$$N_k(l) = \begin{cases} N_k(1), & \text{ha } l \text{ kvadratikus maradék} \\ 0\ \ \ \ \ \ \ \ , & \text{ha } l \text{ kvadratikus nem-maradék.} \end{cases}$$

13. TÉTEL. *Tegyük fel, hogy l_1, l_2 inkongrunes maradékok* mod k, $(l_1 l_2, k)=1$, $N_k(l_1)=N_k(l_2)$, *továbbá $f(s)$* a $0<s<1$ *szakaszon reguláris. Akkor tetszőleges $\varepsilon_1, \varepsilon_2>0$ esetén található olyan $T_0=T_0(\varepsilon_1, \varepsilon_2, f)$ állandó, amelyre érvényesek $T>T_0$ esetén a*

$$\begin{aligned} &\max_{T^{1-\varepsilon_1} \leq x \leq T} \big(\pi(x,k,l_1)-\pi(x,k,l_2)\big)x^{-\theta_1+\varepsilon_2} > 1, \\ &\min_{T^{1-\varepsilon_1} \leq x \leq T} \big(\pi(x,k,l_1)-\pi(x,k,l_2)\big)x^{-\theta_1+\varepsilon_2} < -1 \end{aligned} \tag{5. 6}$$

egyenlőtlenségek, és a $\theta_1=\frac{1}{2}$ esetben a pontosabb

$$\begin{aligned} &\max_{T \leq x \leq aT} \frac{\log x}{\sqrt{x}} \big(\pi(x,k,l_1)-\pi(x,k,l_2)\big) > \delta, \\ &\min_{T \leq x \leq aT} \frac{\log x}{\sqrt{x}} \big(\pi(x,k,l_1)-\pi(x,k,l_2)\big) < -\delta \end{aligned} \tag{5. 7}$$

egyenlőtlenségek elég nagy a-ra és elég kis pozitív δ-ra.

Ha $\theta_1>\frac{1}{2}$, akkor a $N_k(l_1)=N_k(l_2)$ feltétel elhagyható. Az (5. 7) alatti egyenlőtlenségek bizonyítással együtt szerepelnek a [4] dolgozatban. Ugyanaz a gondolatmenet alkalmazható a $\theta_1>\frac{1}{2}$ esetre is.

A $N_k(l_1) \neq N_k(l_2)$ eset igen nehéznek látszik.

6. A Ramanujan-formuláról

RIESZ MARCELL [1] mutatta ki, hogy a

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^k}{(k-1)!\zeta(2k)} = 0(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}) \tag{6. 1}$$

nagyságrendi becslés a *Riemann*-sejtéssel ekvivalens. HARDY és LITTLEWOOD [1] megmutatták RIESZ MARCELL ideáinak felhasználásával, hogy a

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k!\zeta(2k+1)} = 0(x^{-\frac{1}{4}+\varepsilon}) \tag{6.2}$$

becslés ugyancsak ekvivalens a *Riemann*-sejtéssel. Ezekben az az érdekes, hogy a formulák bal oldala a ζ-függvénynek csupán a $\sigma=1$ egyenestől jobbra eső értékeitől függ.

(6. 2) átírható $x=\beta^2$ helyettesítéssel a

$$S(\beta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} e_1\left(-\left(\frac{\beta}{n}\right)^2\right) = 0(\beta^{-\frac{1}{2}+\varepsilon})$$

alakba. HARDY és LITTLEWOOD tételéből azonnal következik, hogy ha a *Riemann*-sejtés nem igaz, akkor $S(\beta) = \Omega(\beta^{-\frac{1}{2}})$. Kérdés, hogy milyen Ω-becslést lehet adni a $S(\beta)$ függvényre a *Riemann*-sejtést feltételezve. W. STAS foglalkozott ezzel a problémával és kimutatta a következő tételt [3].

Ha a *Riemann*-féle ζ-függvény nem-triviális gyökei a $\sigma=\frac{1}{2}$ egyenesen fekszenek, akkor $T>c_1$-re

$$\max_{T^{1-o(1)}\leqq\beta\leqq T} |S(\beta)| > T^{-\frac{1}{2}-o(1)}$$

(Ugyanezen problémával foglalkozott *Stas* a megelőző [1], [2] dolgozatokban. A [1] dolgozatban az $\int\limits_1^T \left(\frac{M(x)}{x}\right)^2 dx = 0(\log T)$, a [2] dolgozatban pedig a *Riemann*-sejtés és a ζ-gyökök egyszerességét feltételezve bizonyítja be lényegileg a fenti egyenlőtlenséget.)

Szerző kandidátusi értekezésében, továbbá a [6] dolgozatban bebizonyított egy minden sejtéstől független $\Omega_\pm$ típusú lokalizált effektív becslést a fenti $S(\beta)$ *Ramanujan*-formulára.

14. TÉTEL. *$T>\beta_0$ esetén*

$$\max_{T\leqq x\leqq T^{\varkappa}} \beta^{\frac{1}{2}} S(\beta) > \delta, \qquad \min_{T\leqq x\leqq T^{\varkappa}} \beta^{\frac{1}{2}} S(\beta) < -\delta,$$

ahol $\delta>0$, $\beta_0>0$ numerikusan meghatározható állandók, $\varkappa = (2+\sqrt{3})^2$.

A bizonyítás RODOSZKIJ módszerével történik. Láthatóan itt a lokalilációs intervallum $(T, T^{\varkappa})$ hosszabb, mint STASnál. Feltételezve a *Riemann*-sejtést, módszerünk alkalmas a 14. tételben szereplő lokalizációs intervallumnak $(T^{1-o(1)}, T)$-re való csökkentésére [1], [6].

15. TÉTEL. *Ha a Riemann-sejtés igaz, akkor $T > c_1$ esetén*

$$\max_{T \cdot e_1(-\varphi(T)) \leqq \beta \leqq T} S(\beta) \geqq T^{-\frac{1}{2}} e_1(-c_2(\log_2 T)^2),$$

$$\min_{T \cdot e_1(-\varphi(T)) \leqq \beta \leqq T} S(\beta) \leqq -T^{-\frac{1}{2}} e_1(-c_2(\log_2 T)^2),$$

ahol

$$\varphi(T) = \log T \cdot \log_3 T \cdot (\log_2 T)^{-1}$$

és c_1, c_2 numerikusan meghatározható állandók.

Hasonló tételek érvényesek a RIESZ MARCELL formulára is. Legyen

$$T(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^k}{(k-1)!\zeta(2k)}.$$

16. TÉTEL. *$T > c_1$ esetén*

$$\max_{T \leqq x \leqq T^{\varkappa}} x^{-\frac{1}{2}} T(x) > \delta, \qquad \min_{T \leqq x \leqq T^{\varkappa}} x^{-\frac{1}{2}} T(x) < -\delta,$$

ahol $\varkappa = (2+\sqrt{3})^2$, c_1, δ numerikusan meghatározható pozitív állandók.

17. TÉTEL. *Ha igaz a Riemann-sejtés. akkor $T > c_1$ esetén*

$$\min_{T e_1(-Y) \leqq x \leqq T} T(x) > T^{\frac{1}{2}} e_1(-c_2 (\log_2 T)^2),$$

$$\min_{T e_1(-Y) \leqq x \leqq T} T(x) < -T^{\frac{1}{2}} e_1(-c_2(\log_2 T)^2),$$

ahol

$$Y = \log T \cdot \log_3 T \cdot (\log_2 T)^{-1},$$

továbbá c_1, c_2 numerikusan meghatározható állandók.

Megemlítjük még a következő tételt, amely ugyan nem effektív, de a lokalizációs intervallum rövidebb, mint a 14. tételben.

18. TÉTEL. *Minden $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$ állandóhoz található olyan $T_0 = T_0(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ küszöbszám, hogy $T > T_0$ esetén*

$$\max_{T^{1-\varepsilon_1} \leqq \beta \leqq T} S(\beta)\beta^{1-\theta+\varepsilon_2} > 1, \qquad \min_{T^{1-\varepsilon} \leqq \beta \leqq T} S(\beta)\beta^{1-\theta+\varepsilon_2} < 1,$$

$$\max_{T^{1-\varepsilon_1} \leqq \beta \leqq T} T(x)x^{-\theta+\varepsilon_2} > 1, \qquad \min_{T^{1-\varepsilon_1} \leqq \beta \leqq T} T(x)x^{-\theta+\varepsilon_2} < -1,$$

ahol

$$\theta \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\zeta(\varrho)=0} \operatorname{Re} f.$$

Az utolsó három tétel bizonyítását szerző nem publikálta.

7. Ábel-értelemben való összehasonlítás

HARDY, LITTLEWOOD [1] és LANDAU [2] bebizonyították, hogy

$$\lim_{x\to+0}\Big(\sum_{p\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,4)} e^{-px}-\sum_{p\equiv 3\,(\mathrm{mod}\,4)} e^{-px}\Big)=-\infty$$

akkor és csak akkor teljesül, ha a

$$\sum_{n=0}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^s}$$

függvény nem tűnik el a $\sigma>\frac{1}{2}$ félsíkban. Más szóval az, hogy a mod 4 vett nemfőkarakterhez tartozó $L(s,\chi)$ függvényre igaz a *Riemann—Piltz* sejtés szükséges és elegendő ahhoz, hogy a mod 4 vett 3 kezdőtagú sorozatban „több" prímszám legyen, mint az 1 kezdőtagúban.

KNAPOWSKI és TURÁN [3] dolgozatukban foglalkoztak a mod 8 vett különböző számtani sorozatok prímszámainak *Ábel*-értelemben való összehasonlításával és kimutatták, hogy ha $l\not\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,8)$ és

$$\lim_{x\to+0}\Big\{\sum_{p\equiv l(8)}\log p\cdot e^{-px}-\sum_{p\equiv l(8)}\log p\cdot e^{-px}\Big\}=-\infty, \tag{7.1}$$

akkor azon χ mod 8 vett karakterekhez tartozó L-függvényekre, amelyekre $\chi(l)\neq 1$, igaz a *Riemann*-sejtés. Fordítva, ha a 8 modulusú nem-főkarakterhez tartozó $L(s,\chi)$ függvényekre igaz a *Riemann—Piltz* sejtés, akkor minden $l\not\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,8)$ esetén

$$\lim_{x\to+0}\Big\{\sum_{p\equiv 1(8)}\log\cdot e^{-px}-\sum_{p\equiv l(8)}\log p\cdot e^{-px}\Big\}=-\infty.$$

Ebből az eredményből arra lehet gondolni, hogy a $\equiv l(\mathrm{mod}\,k)$ számtani sorozatban bizonyos értelemben több prímszám van ha l kvadratikus nem-maradék, mint ha l kvadratikus maradék.

E kérdéskört részletesen vizsgálta KNAPOWSKI és TURÁN a [3] dolgozatban. Másrészt (7. 1) helyett a

$$\sigma(x)=\sigma(x,k,l_1,l_2)=\sum_{n\equiv l_1(\mathrm{mod}\,k)}\Lambda(n)e^{-nx}-\sum_{n\equiv l_2(\mathrm{mod}\,k)}\Lambda(n)e^{-nx}$$

függvényt vizsgálva, a $k=8$ esetre kimutatták a következő állítást.

Tetszőleges inkongruens l_1,l_2 mod 8 vett maradékokra

$$\max_{y\le x\le y^{\frac{1}{3}}}\sigma(x)\ge y^{-\frac{1}{2}}e_1\left(-22\frac{\log\frac{1}{y}\cdot\log_3\frac{1}{y}}{\log_2\frac{1}{y}}\right),$$

ha $y<c_1$, ahol c_1 numerikusan meghatározható állandó.

RODOSZKIJ módszerével a következő tételek mutathatók ki [1].

19. TÉTEL. *Ha* $0<y<c_1$, $l_1\not\equiv l_2(\mathrm{mod}\,8)$, l_1,l_2 *páratlanok, akkor*

$$\max_{y^{\varkappa}\le x\le y}x^{\frac{1}{2}}\sigma(x)>\delta,\qquad \min_{y^{\varkappa}\le x\le y}x^{\frac{1}{2}}\sigma(x)<-\delta,$$

ahol $\delta>0$, $c_1>0$ *numerikusan meghatározható állandók*, $\varkappa=(2+\sqrt{3})^2$.

A *Haselgrove*-feltételből általános k-ra a következő tételt vezethetjük le [1].

20. TÉTEL. *Ha az*

$$f(s) = -\frac{1}{\varphi(k)} \sum_{\chi} (\bar{\chi}(l_1) - \bar{\chi}(l_2)) \frac{L'}{L}(s, \chi)$$

függvény reguláris a $0 < s < 1$ *szakaszon és* $l_1 \not\equiv l_2 (\bmod k)$, *redukált maradékok, akkor* $d_1 > 0$, $\delta > 0$ *alkalmas állandókkal, továbbá* $\varkappa = (2 + \sqrt{3})^2$ *választással minden* $0 < y < d_1$ *esetén fennáll a*

$$\max_{y^{\varkappa} \leq x \leq y} x^{\frac{1}{2}} \sigma(x, k, l_1, l_2) > \delta$$

egyenlőtlenség. (A tételben szereplő d_1, δ állandók k-tól való függését nem tudjuk megadni explicit alakban, csupán létezését garantáljuk.)

Érvényes még a következő tétel.

21. TÉTEL. *Ha az előző tételben szereplő* $f(s)$ *függvény reguláris a* $0 < s < 1$ *szakaszon, továbbá* $f(s)$ *szingularitásai reális részének felső határa* θ_1, *akkor bármely* $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$ *állandókhoz található olyan* $d_2 > 0$ *küszöbszám, hogy* $0 < y < d_2$ *esetén*

$$\max_{y \leq x \leq y^{1-\varepsilon_1}} \sigma(x, k, l_1, l_2) x^{\theta_1 - \varepsilon_2} > 1.$$

A 21. tétel feltételei és jelölései mellett érvényes a következő tétel is.

22. TÉTEL.

$$\max_{y \leq x \leq y^{1-\varepsilon_1}} \Big\{ \sum_{p \equiv l_2 (\bmod k)} \log p \cdot e^{-px} - \sum_{p \equiv l_2 (\bmod k)} \log p \cdot e^{-px} \Big\} x^{\theta_1 - \varepsilon_2} > 1$$

ha $\theta_1 > \frac{1}{2}$;

$$\max_{y^k \leq x \leq y} \Big\{ \sum_{p \equiv l_1 (\bmod k)} \log p \cdot e^{-px} - \sum_{p \equiv l_2 (\bmod k)} \log p \cdot e^{-px} \Big\} x^{\frac{1}{2}} > \delta,$$

ha l_1, l_2 *mindketten kvadratikus nem-maradékok.*

Be tudjuk bizonyítani a következő tételt.

23. TÉTEL. *Bevezetve a*

$$m(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) e^{-nx}$$

jelölést, minden $0 < y < c_1$ *esetén érvényesek a*

$$\max_{y^{\varkappa} < x < y} m(x)\sqrt{x} > \delta, \qquad \min_{y^{\varkappa} < x < y} m(x)\sqrt{x} < -\delta$$

egyenlőtlenségek, ahol $\varkappa = (2 + \sqrt{3})^2$, c_1, δ *pozitív, numerikusan meghatározható állandók.*

24. TÉTEL. *Ha* $\theta \overset{\mathrm{def}}{=} \sup_{\zeta(\varrho)=0} \mathrm{Re}\, \varrho$, $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$ *tetszőleges állandók, akkor létezik olyan* $y_0 = y_0(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ *pozitív állandó, hogy* $y < y_0$ *esetén*

$$\max_{y<x<y^{1-\varepsilon_1}} m(x) \cdot x^{\theta-\varepsilon_2} > 1, \qquad \min_{y<x<y_1^{-\varepsilon_1}} m(x) \cdot x^{\theta-\varepsilon_2} < -1.$$

(Az y_0 k-tól való függését explicite nem tudjuk megadni.)

Fenti módszerünk alkalmas további számelméleti függvények diszkrepanciáinak vizsgálatára is, ezek tárgyalására azonban nem térünk ki.

8. A Rodoszkij-módszer integrálközepes egyenlőtlenségek kimutatására

Az utóbbi időben előtérbe került — főként KNAPOWSKI, STAS és TURÁN munkáiban — egyes számelméleti függvények abszolút értéke integráljának alsó becslése. Nem törekszünk itt arra, hogy az összes elért eredményeket felsoroljuk, csupán néhányat fogunk megemlíteni. Megjegyezzük még, hogy Turánék általában effektív tételeket bizonyítottak be, szerző eredményei általában nem effektívek, csupán aszimptotikus érvényűek.

KNAPOWSKI bebizonyította [3], hogy $l_1 \not\equiv l_2 (\mathrm{mod}\, k)$, $(l_1 l_2, k) = 1$ esetén

$$\int_x^T \frac{|\psi(x,k,l_1) - \psi(x,k,l_2)|}{x}\, dx > T^{\frac{1}{4}}$$

$x = T \cdot e_1(-(\log T)^{0,9})$ választással, ha $T > c_1$, c_1 k-tól való függése explicite megadható.

Szerző kandidátusi értekezésében és [7] dolgozatában kimutatta a következő tételt.

25. TÉTEL. *Tetszőleges* $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$ *állandókhoz létezik olyan* $T_0 = T_0(k, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$ *küszöbszám, amellyel* $T > T_0$*-ra*

$$\int_{T^{1-\varepsilon_1}}^T \frac{|\psi(x,k,l_1) - \psi(x,k,l_2)|}{x}\, dx > T^{\theta_1 - \varepsilon_2}.$$

A *Mőbius*-függvény abszolút integrálközepét vizsgálva KNAPOWSKI [5] kimutatta, hogy ha a *Riemann*-sejtés igaz és a ζ-függvény gyökei egyszeresek, akkor

$$\int_x^T \frac{|M(x)|}{x}\, dx > T^{\frac{1}{2}} e_1 \left(-12 \frac{\log T}{\log_2 T} \cdot \log_3 T\right),$$

hacsak $T > c_1$, ahol $x = T e_1 \left(-100 \cdot \frac{\log T}{\log_2 T} \cdot \log_3 T\right)$.

Szerző a *Rodoszkij*-módszer alkalmazásával megmutatta a következő tételt.

26. TÉTEL. *Ha igaz a Riemann-sejtés, akkor $T > c_2$ esetén*

$$\int_X^T \frac{|M(x)|}{x} dx > T^{\frac{1}{2}} e_1\left(-(\log T \cdot \log_2 T)^{\frac{1}{2}}\right),$$

$$X = T \cdot e_1\left(-c_3 \sqrt{\log T \cdot \log_3 T}\right).$$

A KNAPOWSKI tételében és a 26. tételben szereplő c_1, c_2, c_3 állandók numerikusan meghatározhatók.)

A *Riemann*-sejtés feltevése nélkül a következő kevésbé pontos tétel mutatható ki.

27. TÉTEL. *Bármely $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$ állandókhoz található olyan $T_0 = T_0(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ küszöbszám, amellyel $T > T_0$ esetén*

$$\int_{T^{1-\varepsilon_1}}^T \frac{|M(x)|}{x} dx > T^{\theta_2 - \varepsilon_2},$$

ahol

$$\theta_2 = \sup_{\zeta(\varrho)=0} \operatorname{Re} \varrho.$$

Hasonló jellegű tételek bizonyíthatók még az $|\sigma(x, k, l_1, l_2)|$, $|S(\beta)|$ és más számelméleti függvények integráljára.

9. Számelméleti függvények előjelváltás-száma

Egy, KNAPOWSKI és TURÁN [1] dolgozatában álló probléma különböző számelméleti függvények előjelváltás-számának vizsgálata.

Vezessük be a következő jelölést. Legyen $U(x)$ tetszőleges, szakaszonként folytonos valós értékű függvény. Legyen $R \geqq 1$ és jelöljük $0 < r_1 < r_2 < \ldots < r_N$-nel azon R-et meg nem haladó r_ν számok összességét, amelyekre $U(r_\nu - 0) > 0$ és $U(r_\nu) \leqq 0$, vagy $U(r_\nu - 0) < 0$ és $U(r_\nu) \geqq 0$. Legyen továbbá $m(U, R) \stackrel{\text{def}}{=} N$. Speciálisan vezessük be a $m(M, R)$, illetve $m(\Delta, R)$ jelöléseket az $M(x) = \sum_{n \leqq x} \mu(n)$, illetve a $\Delta(x) = \psi(x, k, l_1) - \psi(x, k, l_2)$ függvényekre.

A 11. és 8. tételekből a

$$\varliminf_{R \to \infty} \frac{m(\Delta, R)}{\log_2 R} = \infty, \quad \varliminf_{R \to \infty} \frac{m(M, R)}{\log_2 R} = \infty$$

becslések nyerhetők.

A 12. tétel feltételei mellett a sokkal erősebb

$$\varliminf_{R \to \infty} \frac{m(\Delta, R)}{\log R} > 0 \tag{9.1}$$

reláció is fennáll. Valószínű, hogy (9. 1) lényegileg pontos abban az értelemben, hogy

$$\varlimsup_{R\to\infty} \frac{m(\Delta, R)}{\log R} < \infty.$$

Ennek bizonyítása igen nehéznek látszik.

Jelöljük $m_1(S, R)$-rel a $S(\beta)$ függvény $0<\beta<R$ szakaszra eső jelváltásainak számát. A 15. tétel miatt

$$\varlimsup_{R\to\infty} \frac{m_1(S, R)}{\log_2 R} = \infty.$$

Az $m_1(S, R)$-re felső becslés is adható. Mivel $S(\beta)$ előállítható a

$$S(\beta) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \beta^{2k}}{k!\zeta(2k+1)}$$

sorfejtéssel, így a

$$\mathscr{K}(\beta) = S(\sqrt{\beta}) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \beta^k}{k!\zeta(2k+1)} \tag{9.2}$$

sorral definiált $\mathscr{K}(\beta)$ függvény reguláris az egész síkon. Világos, hogy $m_1(S, R)$ nem nagyobb, mint a $\mathscr{K}(\beta)$ függvénynek a $|\beta| \leqq R^{\frac{1}{2}}$ körbe eső gyökei száma. A (9. 2) hatványsor-előállításból következik, hogy

$$|\mathscr{K}(\beta)| \leqq e^{|\beta|}.$$

Innen a *Jensen*-formula alkalmazásával a

$$m_1(S, R) < KR^{\frac{1}{2}} \tag{9.3}$$

egyenlőtlenséget nyerjük. Valószínű, hogy a (9. 3) egyenlőtlenség igen rossz, s finomabb gondolatmenet alkalmazásával javítható lesz.

Hasonló jellegű kérdések vizsgálhatók az [1] dolgozatban szereplő összes számelméleti függvényekre.

IRODALOMJEGYZÉK

G. H. HARDY and J. E. LITTLEWOOD: [1] Contributions to the theory of Riemann Zeta-Function and the theory of the distribution of primes, *Acta Math.*, **41** 119—196, (1918).

I. KÁTAI: [1] *Vizsgálatok az összehasonlító prímszámelmélet köréből*, kandidátusi értekezés, (1965).
[2] A Möbius-féle μ-függvényről, *MTA. III. Oszt. Közl.* **15**, 9—13, (1965).
[3] A Möbius-függvény számtani közepének Ω-becslése, *MTA III. Oszt. Közl.* **15**, 15—18, (1965).
[4] Eine Bemerkung zur „Comparative prime-number theory" von S. Knapowski und P. Turán, *Annales Univ. Sci. Budapestiensis*, **7**, 33—40 (1964).
[5] О сравнительной теории простых чисел, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, (sajtó alatt).
[6] Ω теоремы для распределения простых чицел, *Annales Univ. Sci. Budapestiensis*, **9**, (1966) (sajtó alatt).
[7] Об оценке типа Ω для функции Рамануджана, *Annales Univ. Sci. Budapestiensis*, **9**, (1966). (sajtó alatt).

E. LANDAU: [1] Über einen Satz von Tschebyscheff, *Math. Ann.* **61**, 527—550 (1905).
[2] Über einige ältere Vermutungen und Behauptungen in der Primzahltheorie, *Math. Zeitschr.* **1**, 213—219 (1918).

J. E. LITTLEWOOD: [1] Sur le distribution des nombres premiers, *Comptes Rendus* **158**, 1869—1872 (1914).
[2] Mathematical notes 12, *Journal of the London Math. Soc.* **12** (1914).
[3] Mathematical notes 3, On a theorem concerning the distribution of prime numbers, *Journal of the London Math. Soc.*, **2**, 41—45 (1927).
S. KNAPOWSKI: [1] On the Möbius function, *Acta Arithm.* **4**, 209—216 (1958).
[2] On oscillations of certain means formed from the Möbius series I, *Acta Arithm.*, **8**, 311—320 (1963).
[3] Contributions to theory of prime numbers in arithmetical progressions II, *Acta Arithm.*, **7**, 325—2335 (1962).
[4] On oscillations of certain means formed from the Möbius series II, *Acta Arithm.*, **10**, 377—386 (1965).
S. KNAPOWSKI and P. TURÁN: [1] Comparative prime-number theory, I—III, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **13**, 299—364 (1962).
[2] Comparative prime number theory IV—VI, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **14** 37—78 (1963).
[3] Comparative prime number theory, VII—VIII, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **14**, 241—268, (1963).
M. RIESZ: [1] On the Riemann hypothesis, *Acta Math.*, **40**, 185—190 (1916).
K. PRACHAR: [1] *Primzahlverteilung*, Berlin, Springer Verlag, 1957.
W. STAS: [1] Zur Theorie der Möbiusschen μ-Funktion, *Acta Arithm.*, **7**, 409—416 (1962).
[2] Über eine Reihe von Ramanujan, *Acta Arithm.*, **8**, 216—271 (1963).
[3] Some remarks on a series of Ramanujan, *Acta Arithm.* **10**, 359—368 (1963).
E. C. TITCHMARSH: [1] *The theory of the Riemann Zeta-Function*, Oxford, Clarendon Press, 1951.
S. SKEWES: [1] On the difference $\pi(x)-\mathrm{li}\,x$, *Proc. of the London Math. Soc.*, **17**, 48—70 (1955).
К. А. Родосский: [1] О правильности в распределении простых чисел, Успехи Мат. Наук **17**, 189—191 (1962).

(Beérkezett: 1966. III. 7.)

OMEGA-TYPE INVEASTIGATIONS IN THE PRIME NUMBER THEORY

By

I. KÁTAI

Summary

In the present paper we investigate Ω-properties of some number-theoretical functions. The theorems enumerated in this paper are not proved, their proof can be found in the dissertation [1] and in the earlier papers ([2]—[7]) of the author. The main results are the following.

If $T>c_1$, then we have

$$\max_{T<x<T^{\varkappa}} x^{-\alpha_A} A(x)>\delta, \qquad \min_{T<x<T^{\varkappa}} x^{-\alpha_A} A(x)<-\delta,$$

where $\varkappa=(2+\sqrt{3})^2$, c_1 and δ are explicitely calculable numerical constants, and $A(x)$ is one of the following functions:

$A(x)$	Definition of $A(x)$ can be found under	α_A	Number of the corresponding theorem
$M(x)$	(2. 2)	$\frac{1}{2}$	2.
$M_0(x)$	(2. 25)	$-\frac{1}{2}$	7.
$m\left(\frac{1}{x}\right)$	(2. 26)	$\frac{1}{2}$	23.

$A(x)$	Definition of $A(x)$ can be found under	α_A	Number of the corresponding theorem
$P_k(x)$	(2. 12)*	$\frac{1}{2k}$	3.
$B_m(x, 8, l_1 l_2)$	(2. 28)*	$\frac{1}{2m}$	5.
$P_m(x, 8, l)$	(2. 24)*	$\frac{1}{2m}$	6.
$S(x)$	(2. 13)	$-\frac{1}{2}$	14.
$T(x)$	(2. 27)	$\frac{1}{2}$	17.
$\Delta(x, 8, l_1, l_2)$	(2. 21)	$\frac{1}{2}$	10.
$\sigma\left(\frac{1}{x}, 8, l_1, l_2\right)$	(2. 29)	$\frac{1}{2}$	19.

Further we formulate some theorems, which are not effective. Some of them are true without any conjecture, others can be proved under additional conditions.

Let $\theta = \sup_{\zeta(\varrho)=0} \operatorname{Re} \varrho$, and let θ_1 be the least upper bound of the real parts of the poles of

$$f(s) = \frac{1}{\varphi(k)} \sum_{\chi} (\bar{\chi}(l_1) - \bar{\chi}(l_2)) \frac{L'}{L}(s, \chi)$$

Then the following theorem is true.

If ε_1 and ε_2 are arbitrary positive constants, then there exists a constant $T_0 = T_0(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ such that

$$\max_{T<x<T^{1+\varepsilon_1}} x^{-\alpha_A+\varepsilon_2} A(x) > 1, \qquad \min_{T<x<T^{1+\varepsilon_1}} x^{-\alpha_A+\varepsilon_2} A(x) < -1,$$

if $T > T_0$ *and the hypothesis D is fulfilled.*

$A(x)$	The definition of $A(x)$ con be found under №	α_A	Number of the corres ponding theorem	The conjecture D from which the theorem follows
$M(x)$	(2. 2)	θ	8.	
$M_0(x)$	(2. 25)	$\theta-1$	9.	
$\Delta(x, k, l_1, l_2)$	(2. 21)	θ_1	11.	Haselgrove's condition**
$\pi(x, k, l_1) - \pi(x, k, l_2)$		θ_1	13.	when l_1, l_2, have the same quadratic character, Haselgrove's condition
$S(x)$	(2. 13)	$\theta-1$	18.	
$T(x)$	(2. 27)	θ	18.	
$\sigma\left(\frac{1}{x}, k, l_1, l_2\right)$	(2. 29)	θ_1	21.	Haselgrove's condition
$m\left(\frac{1}{x}\right)$	(2. 26)	$-\theta$	24.	

* $\varrho_k(n) = \begin{cases} 1 \text{ if } n=1, \\ 1 \text{ if } n \text{ is } k\text{-free integer}, \\ 0 \text{ otherwise.} \end{cases}$

** Haselgrove's condition: The function $f(s)$ is regular in the interval $0<s<1$.

MEGJEGYZÉS AZ EGYSÉGELEMES FÉLCSOPORTOKRÓL

Írta: SZÁSZ FERENC

A közelmúltban e Közleményekben jelent meg LAJOS SÁNDOR és SZÉP JENŐ [5] közös cikke az egységelemes félcsoportok néhány új jellemzéséről az összes félcsoport osztályán belül. Ebben a dolgozatban is olyan feltételek megállapítása szerepel, amelyek az egységelemes félcsoportokat az összes félcsoport osztályán belül jellemzik.

Félcsoporton (vagy más szóval asszociatív rendszeren) tudvalevőleg olyan F halmazt értünk, amelyben minden $x, y \in F$ elempárra értelmezve van egy $x \cdot y \in F$ szorzat úgy, hogy minden $x, y, z \in F$ elemhármasra $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ teljesül. Egy F félcsoportot *balegységelemes*nek, ill. *jobbegységelemes*nek nevezzük, ha F-ben létezik olyan e_1, illetve e_2 elem, hogy minden x és $y (\in F)$ elemre $e_1 x = x$, illetve $y e_2 = y$ fennáll. Az F félcsoportot *egységelemes*nek nevezzük, ha F-nek van olyan eleme, amelyik egyidejűleg balegységelem és jobbegységelem is. Világos, hogy ha egy F félcsoportban létezik egy e_1 balegységelem és egy e_2 jobbegységelem, akkor szükségképpen $e_1 = e_2$ és így az $e = e_1 = e_2$ elem F-nek egységeleme. Egy $z \in F$ elemet a félcsoport *zérusá*nak nevezzük, ha minden $x \in F$ elemre $xz = zx = z$ teljesül. Ha létezik egy F félcsoportban zérus, akkor ez egyértelműen meg van határozva. Világos, hogy minden félcsoportnak létezik zéruselemes félcsoport bővítése. Egy z zéruselemes F félcsoportnak a b elemét F *balannihilátorá*nak (illetve j elemét jobbannihilátorának) hívjuk, ha $bx = z$ (illetve $xj = z$) teljesül minden $x \in F$ elemre. Világos, hogy maga a z zéruselem, ha létezik ilyen F-ben, F-nek mind bal oldali, mind jobb oldali annihilátora. Abban a félcsoportban, amelyben bármely két elem szorzata egy előre kijelölt rögzített elemmel egyenlő, minden elem egyidejűleg bal- és jobbannihilátor, és a kijelölt rögzített elem a félcsoport zérusa. Ebben az utóbbi F félcsoportban $|F| \geqq 2$ esetén mindig van olyan x, y, z elemhármas, hogy $x \neq y$, de $xz = yz$ vagy $zx = zy$. Valamilyen F félcsoportban az f elemet *balreguláris*nak (ill. jobbregulárisnak) nevezzük, ha minden $fx = fy$ $(x, y \in F)$ egyenletből (illetve minden $xf = yf$ egyenletből) már $x = y$ is folyik. Az egyidejűleg bal- és jobbreguláris elemet regulárisnak nevezzük. Az F félcsoport egy L részhalmaza (ill. R részhalmaza) *balideál* (*jobbideál*) F-ben, hogyha fennáll $FL \subseteqq L$ (illetve $RF \subseteqq R$). Az I részhalmaz F-nek *ideál*ja, ha I egyidejűleg mind balideál, mind pedig jobbideál F-ben. Egy z zéruselemes F félcsoportból egy olyan F' faktorfélcsoport készíthető F-nek bármely I ideálja szerint, amely az összes f' elemből áll, ahol $f \in F$, és $f \notin I$ esetén $f' = f$, míg $f \in I$ esetén $f' = z'$, ahol z az F-nek, z' az F'-nek a zérusa, és F' homomorf képe F-nek. Ehhez megjegyezzük, hogy az F' faktorfélcsoportot az F-nek az I ideálja szerint vett *Rees-féle faktorfélcsoportjá*nak nevezik, és általában egy olyan φ egyváltozós függvényt, amelynek értelmezési tartománya egy F félcsoport, értékkészlete egy F' félcsoportnak egy részhalmaza, és amelyre $\varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$ teljesül minden $x, y \in F$ elempárra, az F félcsoport F'-be (tehát F' egy részhalmazára) való *homomorfizmusá*nak nevezzük. F-nek a *centruma* mindazon x-ek halmaza, amelyekre minden y elemre $xy = yx$ teljesül $(x, y \in F)$.

A félcsoportok további tulajdonságaira, továbbá speciális félcsoportok ti. csoportok és gyűrűk definíciójára és alapvető tulajdonságaira nézve utalunk RÉDEI LÁSZLÓ [8] magyar nyelvű tankönyvére.

Közismert dolog, hogy a félcsoportok az algebrában, továbbá a matematika egyéb ágaiban és az automaták absztrakt elméletében milyen fontos szerepet játszanak (lásd pl. LJAPIN [6], HILLE [4], GLUSKOV [2]). E fontos szerep betöltésének oka főleg az, hogy bármely H halmaz önmagába való egyértelmű leképezéseinek F halmaza, a leképezések szorzatának a szokásos $(\varphi_1\varphi_2)h = \varphi_1(\varphi_2 h)$, $\varphi_i h \in H$, $h \in H$ és $\varphi_i \in F$ értelmezését alapul véve, nyilván egy egységelemes félcsoport. Ezen kívül igen sok fontos matematikai objektum, mint pl. egy topológikus tér önmagába való folytonos (egyértelmű) leképezéseinek a halmaza, vagy egy ferdetest feletti adott $n \times n$ típusú összes négyzetes matrix halmaza a leképezések, ill. matrixok szorzásának szokásos értelmezésével nyilván félcsoportot alkot. Mindhárom példa egyszersmind egységelemes félcsoportot ad. Ha azonban adott n-re nem az összes $n \times n$ típusú négyzetes matrixot tekintjük, könnyen kaphatunk példát nem egységelemes félcsoportra. Tekintsük ugyanis pl. a racionális számtest felett vett

$$\bar{e} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \bar{z} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad \bar{o} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3×3 típusú matrixokat a szokásos matrix-szorzással. Ekkor az $F = \{\bar{e}, \bar{z}, \bar{o}\}$ halmaz olyan félcsoport, amely nem egységelemes, és amelyben $\bar{e}$ jobbegységelem, $\bar{z}$ jobbannihilátor és $\bar{o}$ zéruselem. Hasonlóan a racionális számtest feletti

$$\bar{f} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \bar{g} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

matrixokkal generált $F_1 = \{\bar{f}, \bar{g}, \bar{o}\}$ félcsoport szintén nem egységelemes, de F_1-ben $\bar{f}$ balegységelem, $\bar{g}$ balannihilátor és $\bar{o}$ zéruselem. F_1-nek az $F_2 = \{\bar{g}, \bar{o}\}$ részhalmaza példa olyan félcsoportra, amelyben nincs sem balegységelem, sem jobbegységelem.

Már az eddig elmondottakból is következik a félcsoport egységelemének nagy szerepe, de topológikus terek további leképezéseinek, ill. *Banach*-terek operátorainak halmazaival lehetne még jobban megvilágítani a egységelemes félcsoportok fontosságát. Ezért kézenfekvőnek és célszerűnek látszik egy tetszőleges absztrakt F félcsoportban az egységelem létezésére szükséges és elegendő feltételeket megállapítani. Minthogy az összes asszociatív gyűrű osztályában az egységelemes gyűrűk mind direktfelbontások, mind pedig moduluselméleti szempontból kitüntetett szerepet játszanak, gyűrűkben is célszerű végezni és végeztek is vizsgálatokat olyan kritériumok megállapítására, amelyek ekvivalensek a gyűrű egységelemének a létezésével. Az egységelem létezésére vonatkozó ilyen jellegű bizonyos vizsgálatokat találhatunk pl. gyűrűk esetében R. BAER [1], J. N. HERSTEIN [3], G. MICHLER [7] és szerző [9], [10] dolgozataiban, vagy félcsoportok esetében, pl. LAJOS S. és SZÉP J. [5] dolgozatában.

A jelen dolgozatnak a célja további olyan kritériumnak a megállapítása, amely ekvivalens egy F félcsoport egységelemének a létezésével. Dolgozatomban megemlítem még e kritériumnak néhány következményét, amelyek konkrét esetekben valószínűleg hasznosnak bizonyulnak. Megjegyzem egyébként, hogy az alábbi tétel úgy is tekinthető, mint szerző [10] dolgozata 3. 2. 1 gyűrűelméleti tételének egyik félcsoportelméleti analogonja, ez az analógia azonban nem teljes, a félcsoportban a kivonás korlátlan elvégezhetőségének a hiánya miatt. Érvényes tehát a következő:

TÉTEL. *Egy F félcsoportra nézve egymással ekvivalens az alábbi két feltétel:*

a) *F egységelemes félcsoport;*

b) *F tartalmaz olyan f_1 balreguláris elemet és f_2 jobbreguláris elemet, amelyekre $Ff_1 \subseteq f_1 F$ és $f_2 F \subseteq Ff_2$ fennáll, továbbá F olyan félcsoport, amelynek az F' legszűkebb zéruselemes bővítésére egyidejűleg teljesül az alábbi két feltétel:*

(*) *F'-nek minden homomorf képe balannihilátormentes (azaz a zérus az F' minden homomorf képének egyetlen balannihilátora),*

(**) *F'-nek minden homomorf képe jobbannihilátormentes, (azaz a zérus az F' minden homomorf képének egyetlen jobbannihilátora).*

1. KÖVETKEZMÉNY. Egy F félcsoport akkor és csak akkor egységelemes, ha F tartalmaz centrumbeli reguláris elemet, és F-nek az F' legszűkebb zéruselemes bővítésére teljesül (*) és (**).

2. KÖVETKEZMÉNY. Egy olyan F félcsoport, amelynek minden nem-zérus eleme reguláris, akkor és csak akkor egységelemes, ha F centruma nem az F zéruseleme, és ha az F' legszűkebb zéruselemes bővítésére (*) és (**) teljesül.

3. KÖVETKEZMÉNY. Egy olyan kommutatív félcsoport, amelynek minden nemzérus eleme reguláris, akkor és csak akkor egységelemes, ha F-nek az F' legszűkebb zéruselemes bővítésére (*) és (**) teljesül.

Bizonyítás. Minthogy b) nyilvánvalóan folyik a)-ból, elegendő megmutatni, hogy a) is következik a b) feltételből. Legyen tehát F tetszőleges olyan félcsoport, amelyre teljesül a tételben szereplő b) feltétel, és be fogjuk bizonyítani, hogy létezik F-ben egységelem. Legyen L az F tetszőleges balideálja. Minthogy LF ideál és az F/LF Rees-féle faktorfélcsoport balannihilátormentes (*) miatt, ezért $L \subseteq LF$. Speciálisan $L = F$ esetére adódik $F \subseteq F^2 \subseteq F$, tehát $F^2 = F$, míg az $L = f \cup Ff$ speciális esetre azt kapjuk, hogy $f \in fF \cup FfF$, minden $f \in F$ elemre. Hasonlóan (xx) miatt $R \subseteq FR$ érvényes F minden R jobbideáljára, tehát speciálisan $f \in Ff \cup FfF$ teljesül minden $f \in F$ elemre. Ámde a b) feltételei szerint létezik olyan f_1 balreguláris elem és olyan f_2 jobbreguláris elem, amelyekre fennáll $Ff_1 \subseteq f_1 F$ és $f_2 F \subseteq Ff_2$. Ezért, és mivel $F^2 = F$, továbbá minden $f \in F$ elemre $f \in (Ff \cup FfF) \cap (fF \cup FfF)$ teljesül, szükségképpen adódik $f_1 \in f_1 F \cap Ff_1 F \subseteq f_1 F \cup f_1 F^2 = f_1 F$ és hasonlóan $f_2 \in Ff_2$. Létezik tehát olyan $g_1, g_2 \in F$ elempár, amelyre $f_1 = f_1 g_1$ és $f_2 = g_2 f_2$. Ez egyenletek közül az elsőt tetszőleges $x \in F$ elemmel jobbról szorozva és a balreguláris f_1 elemmel balról egyszerűsítve $x = g_1 x$, a második egyenletet x-szel balról szorozva és a jobbreguláris f_2 elemmel jobbról egyszerűsítve $x = xg_2$ nyerhető. Speciálisan tehát $g_2 = g_1 g_2$ és $g_1 = g_1 g_2$, tehát $g_1 = g_2$ adódik. Ennélfogva F-nek az $e = g_1 = g_2$ elemére és minden $x \in F$ elemre $ex = xe = x$ adódik, tehát e egységelem F-ben. Ezzel kimutattuk azt, hogy az a) és b) feltételek ekvivalensek, amivel a tétel bizonyítást nyert. Minthogy az 1., 2. és 3. Következmény nyilvánvalóan folyik a tételből, ezek nem igényelnek külön bizonyítást.

Érdemes volna megvizsgálni azt, hogy a tételben szereplő b) feltétel formálisan hogyan enyhíthető egy b′) feltétellé úgy, hogy b') még ekvivalens maradjon tartalmilag b)-vel, tehát az a) feltétellel is. Gyűrűknél ugyanis elegendő a bal-jobb szimmetrikus b) feltételnek bizonyos értelemben csak a „bal felét" vagy a „jobb felét" venni ahhoz, hogy a feltétel az egységelemes gyűrűket adja. De félcsoportoknál a kivonás értelmezésének hiánya akadályt látszik állítani ahhoz, hogy b)-nek pl. csak a „bal fele" (azaz létezik olyan f_1 balreguláris elem, amelyre fennáll $Ff_1 \subseteqq f_1 F$ és F'-re teljesül (*)) elegendő legyen az a)-val való ekvivalenciához.

IRODALOM

[1] R. Baer, Kriterien für die Existenz eines Einselementes in Ringen, *Math. Zeitschr.* **56** (1952), 1—17.

[2] V. M. Gluskov, Az automaták absztrakt elmélete, I, *MTA III. Oszt. Köz.* **13** (1963), 287—309; II, *MTA III. Oszt. Közl.* **14** (1964), 71—110 (fordítás oroszból).

[3] I. N. Herstein, On torsion free Artin rings, *Annales Univ. Sci. Budapest Eötvös, Sect. Math.*, 7 (1964), 97—98.

[4] E. Hille, *Functional Analysis and Semi-Groups*, Providence, 1948.

[5] Lajos S.—Szép J.: Az egységelemes félcsoportok néhány jellemzése, *MTA III. Oszt. Közl.*, **15** (1965), 29—32.

[6] E. Sz. Ljapin, *Polügruppü*, Moszkva, 1960 (oroszul).

[7] G. Michler, Kleine Ideale, Radikale und die Eins in Ringen, *Publ. Math. Debrecen*, **12** (1965) 231—252.

[8] Rédei L, *Algebra*, I., Budapest, 1954.

[9] F. Szász, Über Artinsche Ringe, *Bull. Acad. Polon. Sci. Cl.* III., **11**:6 (1963) 351—354.

[10] F. Szász, Einige Kriterien für die Existenz des Einselementes in einem Ring, *Acta Sci. Math. Szeged*, (sajtó alatt).

(Beérkezett: 1966. VI. 3.)

EINE BEMERKUNG ÜBER DIE HALBGRUPPEN MIT ZWEISEITIGEM EINSELEMENT

Von

F. Szász

ZUSAMMENFASSUNG

Verfasser gibt eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz des Einselementes einer Halbgruppe H an. Es gilt nämlich der folgende.

SATZ. Für eine Halbgruppe H sind die folgenden zweien Aussagen untereinander äquivalent:

a) H enthält zweiseitiges Einselement

b) H enthält ein linksregulares Element f_1 und ein rechtsregulares Element f_2 mit den Bedingungen $Hf_1 \subseteqq f_1 H$ und $f_2 H \subseteqq Hf_2$, weiterhin sind für die engste Halbgruppenerweiterung H' von H mit der Adjunktion eines Nullelementes die folgenden beiden Bedingungen erfüllt:

(*) jedes homomorphe Bild $H'\varphi$ von H' besitzt keinen von Null verschiedenen Linksannihilator;

(**) jedes homomorphe Bild $H'\varphi$ von H' besitzt keinen von Null verschiedenen Rechtsannihilator.

Dieser Satz kann, als eine teilweise Verallgemeinerung eines ringtheoretischen Satzes aus [10] angesehen werden.

Technikai szerkesztő: L. Ziermann Margit
A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója Műszaki szerkesztő: Farkas Sándor
A kézirat nyomdába érkezett: 1966. VI. 23. – Terjedelem: 10,5 (A/5) ív

66.6329 Szegedi Nyomda

Ára: 23,– Ft

TARTALOMJEGYZÉK

INDEX

Index: 26 498

A MAGYAR
TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK
OSZTÁLYÁNAK

KÖZLEMÉNYEI

XVI. KÖTET 4. SZÁM

AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST
1966

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK

KÖZLEMÉNYEI

XVI. kötet 4. szám

Szerkesztőség: Budapest, V., Nádor utca 7.

Kiadóhivatal: Budapest, V., Alkotmány utca 21.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei változó terjedelmű füzetekben jelenik meg, és az Akadémia III. Osztályának felolvasóülésein bemutatott matematikai dolgozatokat, valamint egyéb dolgozatokat, referátumokat, továbbá az Osztály munkájára vonatkozó közleményeket, könyvismertetéseket stb. közöl. Évenként egy kötet jelenik meg (négy szám alkot egy kötetet).

Kéziratok a következő címre küldendők:

A Magyar Tudományos Akadémia
III. Osztályának Közleményei.
Budapest, V., Nádor u. 7.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi levelezés.

Minden szerzőt 100 különlenyomat illet meg megjelent munkájáért.

Közlésre el nem fogadott kéziratokat a szerkesztőség lehetőleg visszajuttat a szerzőhöz, de felelősséget a beküldött kéziratok megőrzéséért vagy továbbításáért nem vállal.

A Közlemények előfizetési ára kötetenként belföldi címre 40 forint, külföldi címre 60 forint. Belföldi megrendelések az Akadémiai Kiadó, Budapest, V., Alkotmány u. 21. (Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 05-915-111-46), külföldi megrendelések a „Kultúra" Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalat, Budapest, I., Fő utca 32. (Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 43-790 057-181) útján eszközölhetők.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztálya a következő idegen nyelvű folyóiratokat adja ki:

1. Acta Mathematica Hungaricae,
2. Acta Physica Hungaricae.

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK 1966. ÉVI OSZTÁLYVEZETŐSÉGI BESZÁMOLÓJA*

I.

Tisztelt Osztályülés, kedves Vendégeink!

Az Osztályvezetőség előterjesztendő beszámolója és a meghívóval együtt kiküldött melléklet az 1965. májusától mostanáig terjedő időszakot öleli fel.

Az Elnökség határozatának megfelelően a mostani osztályvezetőségi beszámoló feladata az, hogy inkább tudománypolitikai és tudományszervezési kérdésekről adjon tájékoztatást. Az Osztályhoz tartozó intézmények konkrét tudományos eredményeiről a meghívóval együtt kiküldött melléklet nyújt áttekintést.

II.

Irányító tevékenység, az Osztály testületi munkája

Az Osztályra háruló munkát a bizottságok közreműködésével az Osztály, illetve az *Osztályvezetőség* irányította.

A testületek tevékenységi köréből — a szokásos módon és keretekben évről évre megismétlődő munka elemzését mellőzve — csupán néhány olyan területet emelünk ki, amelyek új vonásokat mutatnak. Ilyenek: néhány tudományág helyzetének a felmérése, az Osztály más szervekkel és testületekkel való kapcsolatainak alakulása, a bizottságok részben új módon végzett tevékenysége, törekvés újabb módszerek kialakítására a kutatóhelyek munkájának tervezése és ellenőrzése terén.

Az Osztály irányító tevékenysége szempontjából fontos kapcsolatok közül az első helyen a *Művelődésügyi Minisztérium*ot kell említeni. A Művelődésügyi Minisztérium az utóbbi években egyre fokozottabb jelentőséget tulajdonít az egyetemeken folyó kutatómunkának. Megnyilvánul ez abban, hogy a tanszékek kutatómunkáját növekvő mértékben igyekszik fejleszteni, és mind szervezési, mind tartalmi kérdésekben az Akadémiával egyetértésben igyekszik eljárni. Ugyanez mondható az *Egészségügyi Minisztérium*ra is.

Az MTESZhez** tartozó *Bolyai János Matematikai Társulat*tal és az *Eötvös Loránd Fizikai Társulat*tal fennálló kapcsolatok tradicionálisan jóknak mondhatók. Az együttműködés eredményei közé tartozik pl. a rendezett tanácskozások tudatos egyeztetése. Az egyesületek tanácskozásai közül többnek ad az Osztály az erkölcsi támogatáson kívül anyagi támogatást is.

* Előadta Budó Ágoston akadémikus, osztálytitkár, az 1966. május 5-én tartott nyilvános osztályülésen.

** Műszaki és Természettudományi Egyesületek Szövetsége.

A *Tudományos és Felsőoktatási Tanáccsal* (TFT) az Osztály a koordináló bizottságokon keresztül van érintkezésben. Az Osztályt érintő kutatások zömmel az 1., 2., 3. és a 19. számú főfeladat keretében folynak, amelyek felelőse az Akadémia — ezen belül egy kivételével az Osztály — és így mód van arra, hogy az Akadémia, illetőleg az Osztály e koordináló bizottságok munkáját közvetlenül figyelemmel kísérje és értékelje.

Az Akadémián belül az Osztály több más tudományos osztállyal áll kapcsolatban. Így a III. és VI. Osztály közös bizottsága a (szervezetileg a III. Osztályhoz tartozó) *Szilárdtestfizikai Komplex Bizottság,* továbbá a (szervezetileg a VI. Osztályhoz tartozó) *Automatikai kutatások,* továbbá a *Kibernetika és alkalmazásának fejlesztése Komplex Bizottság.* A III. és a VII. Osztály közös bizottsága a (szervezetileg a III. Osztályhoz tartozó) *Spektroszkópiai Bizottság,* továbbá a III. és az I. Osztály közös bizottsága a (szervezetileg az I. Osztályhoz tartozó) *Matematikai Nyelvészeti Bizottság.* Nem kétséges, hogy e kapcsolatok a jövőben még erősödni fognak, mert hiszen az egyes osztályok által reprezentált tudományok is egyre szorosabb érintkezésbe kerülnek egymással.

1. Az osztályülések rendszeresen megvitatták az Osztály munkáját, bizottsági javaslatok figyelembevételével összeállították az intézetfejlesztési tervet, javaslatot készítettek az 1966. évi *Állami Díj*ak odaítélésére vonatkozóan, jóváhagyták a tanszéki kutatócsoportok szervezeti szabályzatait.

1965-ben először került sor arra, hogy az *Állami Díj*ak odaítélésére vonatkozó személyi javaslatokat osztályülés előtt a bizottságok is megvitatták, és még ezt megelőzően előkészítő bizottságok nemcsak a beküldött javaslatokat tárgyalták, hanem áttekintették a matematika és a fizika egészét, és ennek alapján új, ill. mélyebben megalapozott javaslatok is születtek.

Foglalkozott az osztályülés azzal a kérdéssel is, hogy milyen módszert lenne célszerű alkalmazni a hosszú időtartamú, a baráti és a kapitalista országokban főleg meghívások alapján töltendő tanulmányutak engedélyezésekor. Így pl. felvetődött az évi keretszámok megállapításának a gondolata.

2. Az Osztályvezetőség két ülésen alaposan megvitatta a MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZET tevékenységét. Ezt megelőzően az intézet igazgatója a Tudományos Tanács közreműködésével részletes jelentést készített az Osztályvezetőség számára.

A vita során az Osztályvezetőség megállapította, hogy a jelentés képet ad az intézet tudományos munkájáról és általában az intézet tevékenységéről. A tudományos munkára vonatkozólag a jelentésben feltüntetett statisztikai adatok azt mutatják, hogy az intézetben eredményes kutatómunka folyik. Az Osztályvezetőség helyeselte, hogy a jelentés a szakmai eredmények rövid összefoglalása mellett igyekezett feltárni a hiányosságokat is, és rámutatott azokra a problémákra, amelyeket az intézet eddig — részben az intézeten kívül álló okokból — nem volt képes megoldani; a jelentés a megoldásra bizonyos elgondolásokat is tartalmazott. Ezek az elgondolások, ill. javaslatok további alapos megvitatást igényelnek. A jelentés és az Osztályvezetőség ehhez kapcsolódó vitája lehetőséget nyújt arra, hogy az intézet jövőbeli tevékenysége még eredményesebbé váljék.

Az Osztályvezetőség a jelentésnek a létszámra vonatkozó indokolását nem tartotta eléggé konkrétnak, mert maga a jelentés nem elemezte részletesen a jelenlegi témák indokoltságát és az egy téma kidolgozására szükséges kutatók számát.

Az Osztályvezetőség felhívta az igazgató figyelmét arra, hogy az intézet — a III. Osztály intézetfejlesztési tervének megvalósulásával párhuzamosan és azzal egybehangolva — tevékenységét erősebben koncentrálja, elsősorban az alábbi témakörökre:

a) valószínűségszámítás, matematikai statisztika, információelmélet, valamint ezek alkalmazásai;

b) analízis, különös tekintettel a differenciálegyenletek elméletére és a numerikus analízisre;

c) az operációkutatás és irányításelmélet matematikai módszerei;

d) az algebra, geometria és a topológia egyes fontos irányai.

Az intézet főként olyan kutatásokra összpontosítsa erejét, amelyek megfelelnek a társadalmi szükséglet (jelenlegi és távlati) objektív igényeinek, és ehhez hasznosítsa a kollektív munkából, továbbá az intézet szervezeti adottságából folyó lehetőségeket.

A jelentés részletesen foglalkozik a nemzetközi tudományos kapcsolatok kérdésével és ezen belül a kutatók külföldi utazásainak jelentőségével, megállapította, hogy az intézet vezetőségének a kiküldetési javaslatok megtételénél, valamint az Osztályvezetőségnek a javaslatok elbírálásánál a jövőben az eddiginél nagyobb körültekintéssel kell eljárnia.

Az Osztályvezetőség több alkalommal foglalkozott az *akadémiai tanszéki kutatócsoportok elhelyezési ügyeivel.* Remélhető, hogy az ELMÉLETI FIZIKAI KUTATÓ CSOPORT, a KRISTÁLYNÖVESZTÉSI TANSZÉKI KUTATÓ CSOPORT és a KRISTÁLYFIZIKAI TANSZÉKI LABORATÓRIUM a közeljövőben méltó elhelyezést kap.

Megvizsgálta az Osztályvezetőség a *III. Osztály Közleményei* profilját. Megállapította, hogy az Osztályközlemények az elnöki utasításban foglalt szempontoknak csak részben felel meg. Ennek az az oka, hogy az Osztályközleményeken kívül más olyan folyóiratok is vannak, amelyeknek profiljába az elnöki utasításban közölt feladatok részben beleillenek, és így e feladatok egy részét többé-kevésbé rendszeresen ezek a folyóiratok látják el. Pl. az Osztály ülésein elhangzott fizikai tárgyú előadások, székfoglalók szövegét legtöbbször a *Magyar Fizikai Folyóirat* közli — a szerzők kívánságának megfelelően —, és ugyanitt jelennek meg a fizikusokat érdeklő egyéb tanulmányok is. Tudományszervezési, módszertani cikkeket a *Magyar Tudomány* is közöl, bel- és külföldi tudományos tanácskozásokról a *Matematikai Lapok* rendszeresen beszámol. Az elnöki utasításban előírt feladatokat tehát teljes egészében megvalósítják az említett folyóiratok az Osztályközleményekkel együtt; ezért az Osztályvezetőség nem látja szükségesnek, hogy a Közlemények jelenlegi profilja módosuljon. Elfogadta viszont az Osztályvezetőség azt a javaslatot, hogy a Közleményekben az önálló eredményeket tartalmazó dolgozatokhoz rövid összefoglaló csatlakozzék valamelyik világnyelven.

Az Osztályvezetőség újból foglalkozott a *felolvasó ülésekkel.* Elhatározta, hogy a székfoglaló előadásokon és az Osztály tagjai által bejelentett előadásokon kívül akadémiai tag ajánlása alapján az Osztályhoz tartozó tudományterületeken dolgozó kutatók is tarthatnak előadásokat, és az intézetekben elért kutatási eredményekről összefoglaló előadások is szerepelhetnek a programban. Az ülések programjába lehet iktatni az Akadémia által meghívott külföldi vendégek előadásait is.

Összeállította az Osztályvezetőség az *1966. évi tudományos tanácskozások tervét:*

Nemzetközi Lumineszcencia Konferencia,
Elemi részek gyenge kölcsönhatásai tárgykörű kollokvium,
Elméleti Fizikai Nyári Iskola,
Függvényegyenletekkel foglalkozó kollokvium,
A több oldalú akadémiai együttműködési keretben számítástechnikai munkamegbeszélés.

Az Elnökség az Osztályvezetőség előterjesztésére már elfogadta a következő, *1967. évi tanácskozások tervét:*
A matematika gazdasági alkalmazásai tárgykörű konferencia,
A szilárdtestek mágneses tulajdonságai tárgykörű konferencia,
Nemzetköti Kvantumkémiai Iskola,
Nemzetközi Napfizikai Szimpózium.

Javaslatunkra az Elnökség elhatározta, hogy az Akadémia 1968-ban Nemzetközi Változócsillag szimpóziumot, 1971-ben pedig Nemzetközi Akusztikai Kongresszust rendez Budapesten.

3. A Bizottságok

A jelenlegi bizottsági rendszer kialakítására 1964-ben került sor. Az átszervezéskor az Osztály azt az elvet követte, hogy állandó bizottságok, illetőleg komplex bizottságok és albizottságok működjenek azokon a tudományterületeken, amelyeken saját kutatási bázis van.

A testületi tevékenységet sikerült egyszerűsíteni oly módon, hogy összevontuk a szerteágazó bizottsági tevékenységet: a testületek akadémiai feladatokat, TFT feladatokat, nemzetközi tudományos egyesületi feladatokat stb. egyaránt ellátnak.

a) A Matematikai Bizottság több alkalommal behatóan foglalkozott a *matematika alkalmazásaival kapcsolatos problémákkal.*

A hazai viszonyokat tekintve az alapvető nehézséget az jelenti, hogy az ugrásszerűen megnövekedett szükséglethez képest kevés az olyan matematikusok száma, akik a matematika eredményeit, módszereit, a matematikai gondolkodásmódot eredményesen tudják alkalmazni akár a többi tudományban, akár pedig a népgazdaságban felmerülő gazdasági és műszaki problémák megoldására. Emellett koránt sem elegendő azoknak a matematikusoknak a száma sem, akik az alkalmazások szempontjából is fontos elméleti ágak eredményes művelői. Sajnos, az elkövetkező években sem várható lényeges javulás, mert kevés matematikus kerül ki az egyetemekről. Sok gondot okoz a számológépekkel való ellátatlanság, ill. a meglevő számológép-park korszerűtlen volta is. Akadályozza az alkalmazásokat a kidolgozott eredmény gyakorlati bevezetésétől való idegenkedés az illetékes szakemberek részéről, de a matematikusok is többet tehettek volna az alkalmazások elősegítése érdekében.

A feladatok:

1. Erőteljesebben kell fejleszteni — az elméleti kutatások háttérbe szorítása nélkül — azokat a főbb kutatási irányokat, amelyek az alkalmazások szempontjából a legfontosabbaknak látszanak.

2. Az oktatási intézményekben matematikusok és matematikát alkalmazó szakemberek bevonásával fejleszteni kell a matematika alkalmazásainak oktatását.

3. Az eddigieknél sokkal több hosszabb időtartamú tanulmányutat kell biztosítani a matematika határterületeivel és a gyakorlati életben való alkalmazásokkal foglalkozó matematikusok részére.

4. Igen fontos az alkalmazások terén az elért eredmények nyilvánosságra hozásának és köztudomásúvá tételének az elősegítése, ezért nagy figyelmet kell fordítani az ilyen jellegű folyóirat- és könyvkiadásra.

5. Nagyobb számban van szükség olyan szakemberekre, akik képesek az összekötőkapocs szerepét betölteni a matematika és a felhasználási területek között. Ilyen szakemberek kinevelésével tervszerűen is foglalkozni kell, pl. mérnökök, közgazdászok matematikai továbbképzése útján.

A Bizottság alapos előkészítő munka után behatóan elemezte *a hazai biometriai kutatások helyzetét.* Megállapította, hogy bár kellően képzett, nagy gyakorlattal rendelkező kutatók igen komoly erőfeszítéseket tesznek, az igények rohamos növekedése miatt alig tudnak eleget tenni a rájuk váró feladatoknak. A Bizottság véleménye szerint a Biometriai Osztálynak a tudományos kutatómunkát elsőrendű feladatának kell tekintenie. Célszerű lenne az orvosi, biológiai intézményeket matematikusokkal megerősíteni.

A Bizottság — a *Művelődésügyi Minisztérium* felkérésére — nagy felelősségtudattal foglalkozott *az egyetemi tanári és docensi pályázatok elbírálásával.* A Bizottság szükségesnek látja: az Akadémia hasson oda, hogy vezető matematikai jellegű munkahelyek betöltésénél az illetékes minisztériumok kérjék ki az Akadémia véleményét, miként azt a *Művelődésügyi Minisztérium* már megteszi.

Foglalkozott a Bizottság *Az MTA Matematikai Kutató Intézetének Közleményei* c. folyóirat helyett 1966. január 1-től megjelenő *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica* c. idegen nyelvű folyóirat ügyével. A folyóirat elsőrendű feladata, hogy a matematika alkalmazásaival foglalkozó cikkeknek helyet biztosítson.

A Bizottság javaslatára az MTA SZÁMÍTÁSTECHNIKAI KÖZPONTJÁBAN *Numerikus matematikai és számítástechnika* témájú szak-matematikusi tanfolyam indul.

A Bizottság *a matematikus káderutánpótlás problémáit* két részre bontva vitatta meg.

Matematikus szakember-utánpótlás. A matematikusok iránt egyre nagyobb igény mutatkozik meg. A szakemberhiánynak a fő oka az, hogy a matematikus hallgatók száma éveken át a szükségletnél jóval alacsonyabb volt. Az első teendő tehát a matematikus szükséglet országos felmérése, a második pedig a matematikusképzés kereteinek a kibővítése. Régóta felmerült, indokolt javaslat a mérnökmatematikusképzés megindítása. Egyetemet végzett matematikusok mellett nagy hiány van középfokú képzettségű szakemberekben is, elsősorban programozókban. Fontos lenne ezért számítástechnikai felsőfokú technikum létesítése. Az utánpótlás biztosítására kívánatos volna a jól bevált középiskolai matematikai tagozatú osztályok számának növelése. A matematikus utánpótlást szolgálhatja a KÖZGAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEMen folyó tervmatematikus-képzés is.

— *A tudományos kutatói utánpótlás* kielégítőnek mondható. Számos tehetséges fiatal matematikus nő fel, támogatásuk lehetőségei azonban nem megfelelők. E tekintetben többek között a következő javaslatok hangzottak el:

Az eddiginél sokkal több lehetőséget kell biztosítani arra, hogy a matematikai kutatóintézetek és az egyetemi tanszékek társadalmi ösztöndíjat adhassanak tehetséges hallgatóknak.

Kívánatos, hogy a kutatáshoz megfelelő képességekkel rendelkező hallgatók az egyetem elvégzése után még egy-két évig az egyetemen maradhassanak mint doktorandusok, a tudományos kutatómunkába való bekapcsolódás és az egyetemi doktori cím megszerzése céljából.

A Bizottság a *tanszéki kutatások helyzetével* kapcsolatban megállapította, hogy e téren legfőbb nehézség a nagy terhelésből fakadó időhiány. A nagy terhelést a teljes embert igénylő oktató-nevelő munka mellett a sokrétű szervező és társadalmi munka okozza. Tudományos önképzésre és elmélyülésre, tudományos előadásokon való részvételre, ilyenek tartására, tudományos eredmények kidolgozására nem jut kellő idő. Nemcsak hetenként biztosítható kutatónapokra, hanem más irányú terheléstől mentesített kutató-félévekre volna szükség. Túlzottnak mondható a helybeli előmenetel elvárása és ennek biztosítása, amely sok esetben nem segíti elő az egészséges fejlődést. Nehézségek mutatkoznak a tanszéki kutatás anyagi feltételeivel kapcsolatban is.

b) A FIZIKAI BIZOTTSÁG feladata a beszámoló időszakában a fizikai kutatások albizottságokra lebontott, ill. a SZILÁRDTESTFIZIKAI KOMPLEX BIZOTTSÁGba átvitt irányításának, értékelésének és az albizottságokban hozott határozatoknak koordinálása, egyeztetése volt. A Fizikai Bizottság ezenkívül foglalkozott a műszaki egyetemeken folyó fizikai oktatás problémáival, az 1966-ban Budapesten tartandó *Nemzetközi Lumineszcencia Kongresszus* előkészítésével stb. Több ízben foglalkozott a Bizottság nemzetközi tudománypolitikai kérdésekkel. Kezdeményezésére a *Nemzetközi Elméleti és Alkalmazott Fizikai Unió* szocialista országok nemzeti bizottságainak titkárai Varsóban elhatározták, hogy évenként más-más országban rendszeresen értekezletet tartanak abból a célból, hogy tevékenységüket koordinálják. Az 1965. évi, Budapesten tartott megbeszélést a Bizottság készítette elő.

c) A SZILÁRDTESTFIZIKAI KOMPLEX BIZOTTSÁG a beszámolási időszakban igen aktív tevékenységet fejtett ki. A hazai szilárdtestfizikai kutatások célkitűzéseivel kapcsolatban megállapította, hogy azokat a szocialista országok közötti együttműködés és népgazdaságunk érdekeinek megfelelően elsősorban az alábbi területeken kell konkrét formában megszabni:

1. tiszta kiinduló anyagok előállításával, valamint elemek és vegyületek kristályainak növesztésével és vizsgálatával kapcsolatos alap- és alkalmazott kutatások;
2. félvezető és lumineszkáló anyagok fizikája;
3. fémek fizikája;
4. mágneses jelenségek fizikája.

Kidolgozta a Bizottság a félvezetők kutatásával foglalkozó több oldalú akadémiai együttműködési bizottság IV., Budapesten tartott ülésének programját.

A Bizottság állásfoglalása szerint a nemzetközi kapcsolatok fejlesztését — amelynél a társadalmi hasznosság kritériumát kell alapul venni — elsősorban a szocialista országokkal kell szorgalmazni. A szocialista országok közötti kapcsolatok hatékonyabbá válhatnának, ha egyszerűsödnének a közös munkák elvégzését nehézzé tevő adminisztratív feltételek. Sürgősen túl kell jutni azon a stádiumon, hogy a nemzetközi kapcsolatok kölcsönös látogatásokból és nyilatkozatokból álljanak. A közös munkák eredményes végzésének több előfeltétele van, ezek közül néhány:

1. kutatók intézetek közötti, valutamentes cseréje;
2. kutatóberendezések gyors és egyszerű átszállítása az egyik együttműködő intézetből a másikba;
3. a nyers és problematikus kutatási eredmények fölötti érdemi diszkussziók betervezés nélküli lebonyolítása.

A KFKI* SZILÁRDTESTFIZIKAI LABORATÓRIUM látogatásakor elhangzott javaslat szerint lehetővé kell tenni, hogy a gyakorlati élet arra alkalmas szakértői pályázat alapján 1—2 éves hazai ösztöndíjat kapjanak a Laboratóriumban végzendő tanulmányokra. Az ösztöndíjnak nemcsak a módszerek elsajátítása lenne a célja, hanem egy-egy ipari fontosságú kérdés tényleges megoldása is.

d) A MAGFIZIKAI ALBIZOTTSÁG üléseit Debrecenben az ATOMMAG KUTATÓ INTÉZETben és a KFKI* MAGFIZIKAI FŐOSZTÁLYán tartotta. Az Albizottság tagjai megtekintették a munkahelyeket és tájékozódtak a kutatások állásáról. Javaslatot dolgoztak ki Van de Graaf laboratórium létesítésére az ATOMMAG KUTATÓ INTÉZETben. A gyorsító-laboratórium az egész hazai atommagfizikai kutatás céljait szolgálja majd.

e) Az ATOMHÉJFIZIKAI ALBIZOTTSÁG külső szakemberek bevonásával megvitatta a hazánkban folyó kvantumkémiai kutatások helyzetét. Hazánkban főleg egyetemi intézetekben folynak eredményes kutatások, az elért eredményeket ismerik és elismerik külföldön is. A nehézségek ellenére — a számológéphiány és a nagy oktatási elfoglaltság — jó lehetőségek vannak hazánkban erős kvantumkémiai bázisok kialakítására a meglevő kutatóhelyeken. A legelső teendő ezzel kapcsolatban az, hogy a különböző kutatóhelyek munkatársai 1—2 évente megbeszélésre jöjjenek össze több napos időtartamra, hogy tájékoztassák egymást kutatásaikról, és alakítsanak ki témakooperációt. Fizikusokon kívül több kémikus is foglalkozik kvantumkémiai kutatásokkal, de kívánatos lenne, hogy még több kémikus kapcsolódjék be a kutatásokba, és hogy a kémikus hallgatók az egyetemi oktatás keretében kapják meg a megfelelő kvantumkémiai alapképzést.

f) A NAGYENERGIÁJÚ ÉS ELEMI RÉSZECSKÉK FIZIKÁJÁNAK ALBIZOTTSÁGA értékelte a KÖZPONTI FIZIKAI KUTATÓ INTÉZETben, az ELMÉLETI FIZIKAI KUTATÓ CSOPORTban, az MTA ELMÉLETI FIZIKAI TANSZÉKI KUTATÓ CSOPORTban, az ELTE ATOMFIZIKAI TANSZÉKEN és a JÓZSEF ATTILA TUDOMÁNYEGYETEM ELMÉLETI FIZIKAI INTÉZETében folytatott kozmikus sugárzási és elemi részek fizikájával kapcsolatos kutatásokat.

g) A SPEKTROSZKÓPIAI ALBIZOTTSÁG javaslatára a baráti országok spektroszkópiával foglalkozó kutatói szoros együttműködést tartanak fenn. Ennek keretében a kutatók kölcsönösen tájékoztatják egymást kutatásaikról, és évente más-más országban munkaértekezletet is szerveznek. Értékelte az Albizottság a hazai emissziós spektrográfiai kutatás utolsó négy évben elért eredményeit.

h) A CSILLAGÁSZATI BIZOTTSÁG előkészítette a bajai Városi Tanácshoz tartozó CSILLAGVIZSGÁLÓ INTÉZET Akadémia által történő átvételét. Ez az intézet ez év január 1-től az MTA CSILLAGVIZSGÁLÓ INTÉZEThez tartozik. A bajai csillagászok a mesterséges holdak megfigyelésén kívül kisebb mértékben változócsillagok vizsgálatával is foglalkoznak. A Bizottság javaslatára a CSILLAGVIZSGÁLÓ INTÉZET az ELTE CSILLAGÁSZATI TANSZÉKén közös mérőlaboratóriumot állított fel. E közös laboratórium létrehozása nagymértékben segíti a mátrai obszervatórium tudományos tevékenységét, ugyanakkor a csillagászat iránt érdeklődő egyetemi hallgatók gyakorlati kiképzéséhez is megfelelő bázist teremt.

i) A SZPUTNYIKMEGFIGYELÉSI ALBIZOTTSÁG feladata a mesterséges holdak átvonulásainak rendszeres megfigyelésével kapcsolatos tevékenység megszervezése. Irányításával Budapesten, Baján, Miskolcon és Szombathelyen működik vizuális

* Központi Fizikai Kutató Intézet.

megfigyelőállomás; a *budapesti* MŰSZAKI EGYETEMen pedig folyamatban van egy rádió-szputnyikmegfigyelő állomás szervezése. Az elmúlt évben a bajai állomás már bekapcsolódott a Szovjetunió által szervezett fotografikus szinkron észlelési programba is.

Az albizottság a budapesti, miskolci és szombathelyi állomáson tartott, tudományos továbbképzéssel egybekötött üléseken foglalkozott az állomások észlelési, tudományos, szervezési és egyéb problémáival, valamint a megfigyelési adatokat tartalmazó jelentések egységessé tételével. A megfigyelőhálózat megfigyelési adatait táviratban több külföldi központnak küldi meg.

III.

A kutatóhálózat fejlesztése

Az Osztály az Elnökség felhívására kidolgozta a kutatóhálózat fejlesztésére vonatkozó terveit, ill. beható elemzés után átdolgozta a korábban kialakított javaslatait.

Változatlanul fontosnak tartja az Osztály, hogy Szegeden alakuljon meg az MTA SZEGEDI MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZETE, amely lényegében a MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZET 3 szegedi osztályából lenne létrehozható. Bár erre vonatkozólag elnökségi döntés még nem történt, úgy látszik, hogy különböző okok miatt a közeljövőben nem alakulhat meg az intézet, hanem előreláthatólag átmeneti megoldásként — a szegedi osztályokból akadémiai tanszéki kutatócsoportok jönnek létre.

Foglalkozott az Osztály az MTA SZÁMÍTÁSTECHNIKAI KÖZPONTJÁnak fejlesztésével is, és javasolta, hogy a Központot feladatainak ellátásához el kell látni egy korszerű gyorsműködésű tranzisztoros számológéppel. Ezt a javaslatot az Elnökség magáévá tette.

Javasolta továbbá az Osztály két akadémiai tanszéki kutatócsoport létesítését is; az egyiket a *debreceni* KOSSUTH LAJOS TUDOMÁNYEGYETEM MATEMATIKAI INTÉZETében, elsősorban a biometriai kutatások folytatása céljából, a másikat pedig a *miskolci* NEHÉZIPARI MŰSZAKI EGYETEM MATEMATIKAI INTÉZETÉben, főként a kohászat, a bányászat és ezek gépesítésével kapcsolatos matematikai kutatások érdekében.

A fizikai kutatások területén Debrecenben, az ATOMMAG KUTATÓ INTÉZETben egy Van de Graaf laboratórium létrehozását javasolta az Osztály, továbbá az MTA ELMÉLETI FIZIKAI KUTATÓ CSOPORT, az MTA KRISTÁLYFIZIKAI TANSZÉKI LABORATÓRIUM, valamint az MTA KRISTÁLYNÖVESZTÉSI TANSZÉKI KUTATÓ CSOPORT méltó elhelyezését. E javaslatokat az Elnökség elfogadta, megvalósításuk a közeljövőben remélhető.

IV.

A kiemelt szilárdtestfizikai kutatások fejlesztése

Az elmúlt néhány évtized alatt egyik legintenzívebben fejlődő és gyakorlati hatásaiban is forradalmi változásokat előidéző tudomány a szilárdtestfizika volt. Ez a fejlődés napjainkban még fokozottabb ütemben folyik, és nyilvánvaló, hogy a híradástechnika, a műszeripar, a finom metallurgia nagy sikerei a legszorosabb kapcsolatban vannak a szilárdtestfizika fejlődésével.

Hazai viszonyaink között a szilárdtestfizikai kutatások fejlesztése különösen indokoltnak látszik, mivel népgazdaságunk számos szektorában a szükséges előrehaladás és később a nemzetközileg is versenyképes termékek gyártása nem látszik biztosíthatónak a hazai kutatások megfelelő irányú, koncentrált művelése nélkül. Éppen ezért az Elnökség a szilárdtestfizikai kutatásokat az akadémiai kiemelt kutatások közé sorolta, és a kiemelt kutatás gondozásával és mindenirányú programjának előkészítésével a III. és a VI. Osztály közös testületét, a szervezetileg a III. Osztályhoz tartozó SZILÁRDTESTFIZIKAI KOMPLEX BIZOTTSÁGot bízta meg.

Amint az a beszámoló korábbi részéből kitűnhetett, a SZILÁRDTESTFIZIKAI KOMPLEX BIZOTTSÁG igen komolyan vette és veszi feladatát, és éppen ezért már korábban több alkalommal úgy foglalt állást a különböző sürgető megkeresésekkel kapcsolatban, hogy a témalebontást felelősen csak akkor tudja elvégezni, ha megismerkedik valamennyi akadémiai, egyetemi és ipari szilárdtestfizikai kutatóintézménnyel, és helyszíni látogatások során győződik meg az említett kutatóhelyeken levő lehetőségekről. Ezek a látogatások most már lényegében befejeződtek és a témacsoportokra való bontás, valamint a szűkebb célkitűzések megállapítása folyamatban van.

V.

A kutató káderek fejlődése

A beszámolási időszakban a minősítési és káderfejlesztési munka általában jó volt, a fejlesztésre és minősítésre illetékes szervek képviselői gondos mérlegelés alapján készítették el terveiket.

Néhány kisebb-nagyobb probléma azonban mutatkozott a káderfejlesztés terén. Az egyik az, hogy a kutatók személyi állományában megmerevedés tapasztalható, nem mutatkozik fluktuálás, ami a minőségi fejlesztést, illetve cserét akadályozza. Hiba az, hogy a gyakornokok és a tudományos segédmunkatársak szinte automatikusan kerülnek státuszba, és a kutatóhelyek vezetői nem minden esetben élnek azzal a lehetőséggel, hogy a kutatómunkára nem a legalkalmasabbnak bizonyult fiatal kádereket másokkal cseréljék ki. Ezt külső körülmények is erősen befolyásolják. Pl. a számítástechnika területén jól képzett szakemberekben igen nagy a szívóhatás. Ez a nagy bérkülönbségnek és más munkahelyeken levő korszerű számológépnek tudható be.

Felmerült az a gondolat, helyes volna, ha a kutatóintézetek 1—2 évre elcserélnének egész állású kutatókat egyetemi oktatókkal, ami az egyetemi oktatóknak lehetőséget nyújtana arra, hogy ezalatt intenzív kutatómunkát végezzenek (pl. a tudományok doktora fokozat elnyeréséért), a kihelyezett kutatóknak viszont arra, hogy az oktatómunkában gyakorlatra tegyenek szert. Célszerűnek látszanék továbbá belföldi ösztöndíjakat biztosítani akadémiai kutatóintézetekben való tudományos munka végzésére más intézményekben dolgozó kutatók részére.

VI.

Előadások, tanácskozások, publikációk, könyvkiadás

Az Osztály tudományos életének hazai fórumaként — az egyes kutatóhelyek belső életén túlmenően — elsősorban a *tudományos előadások, viták, tanácskozások* tekintendők. E téren korábban a nyilvános előadóülések játszottak fontos szerepet. Az ülések látogatottsága, sajnos, még mindig csekély, és ezzel a kérdéssel az Osztályvezetőség továbbra is foglalkozni fog.

Ugyanakkor örvendetes fejlődésnek indultak a testületi üléseken szervezett előadások és szakmai viták. Különösen kiemelkedő tevékenységet fejtett ki e téren a MATEMATIKAI BIZOTTSÁG, a SZILÁRDTESTFIZIKAI KOMPLEX BIZOTTSÁG, a SPEKTROSZKÓPIAI BIZOTTSÁG, a MAGFIZIKAI ALBIZOTTSÁG és a SZPUTNYIKMEGFIGYELÉSI ALBIZOTTSÁG.

Az elmúlt évben több tudományos tanácskozást rendeztünk, ezek felsorolása a mellékletben található meg.

A tudományos élet egyik legjellegzetesebb vonása a *publikációs tevékenység.* A publikációk száma világszerte rohamosan növekszik, aminek oka az is, hogy szokássá vált a tudományos tevékenységet a publikációk számán át értékelni. Ez pedig a kutatókat arra serkenti, hogy a publikációs anyagot felaprózzák és apró részeredményekről is jelentessenek meg közleményt. Ez a nem örvendetes jelenség a hozzánk tartozó tudományterületek hazai művelőinek publikációs tevékenységében is megfigyelhető.

A közlemények jelentős része az *Acta Mathematica*ban, az *Acta Physica*ban és a többi hazai folyóiratban lát napvilágot. Az Actákat és más idegen nyelvű matematikai és fizikai folyóiratot a külföldi kutatóhelyek jól ismerik, mégis a helyzet az, hogy a hazai eredmények jóval könnyebben kerülnek át a nemzetközi szakirodalomba, pl. monográfiákba, ha azok a megfelelő külföldi speciális folyóiratban kerültek közlésre. Ebből ered sok esetben a külföldi folyóiratban való megjelentetés igénye.

Bár — mint a mellékletből is látszik — a *könyvkiadási tevékenység* volumenjének fejlesztése kívánatos, mégis eredményként lehet elkönyvelni, hogy egyre több hazai szerző könyve jelenik meg.

Végig tekintve az Akadémia által eddig kiadott matematikai könyvek listáján, megállapítható, hogy e kiadványok tudományos színvonalára és kiállítására is kivétel nélkül igen kedvező bírálatot kaptunk mind a hazai, mind pedig a külföldi szakfolyóiratokban. A magyar szerzők által írt matematikai monográfiákat a Kiadó kivétel nélkül megjelenteti egy, de többnyire két idegen nyelven is, és ezek jelentős sikert aratnak. Ez a tény nagy erkölcsi sikere a hazai matematikai kutatásoknak.

Itt említem meg, hogy a NEMZETKÖZI CSILLAGÁSZATI UNIÓ a magyar csillagászokat kérte fel, hogy a *Csillaghalmaz Katalógus* második kiadását készítsék el, amelyet az Akadémiai Kiadó ad majd ki.

VII.

Nemzetközi kapcsolatok

A nemzetközi kooperáció — a belföldi kooperáció mellett — fontos eleme a napjainkban egyre nélkülözhetetlennebbé váló kollektív kutatási módszernek. Ma már e kooperációk a hozzánk tartozó területeken egyre inkább kezdenek élőkké válni, ami a téma munkamegosztásos művelésén, anyagok kicserélésén, a kooperációban résztvevő partnerek tagjainak kölcsönös látogatásán át közös publikációkban lefektetett eredményekig vezet. Fontos feladat, hogy a reális alapot nélkülöző kooperációk megszüntetése mellett a valóságos együttműködéseket minél nagyobb mértékben támogassuk és fejlesszük.

Megállapítható, hogy a magyar matematikusoknak, fizikusoknak és csillagászoknak külföldi tudósokkal való kapcsolatai igen széles körűek. Sok külföldi szakember látogat el hazánkba, és tart előadásokat, szép számmal jelennek meg közös publikációk hazai és külföldi kutatók társszerzőségében; magyar szakemberek neves külföldi intézményektől kapnak meghívásokat, és azokban értékes előadásokat tartanak. Az Osztály nemzetközi szervezetekben 5 kollektív és 4 egyéni tudományos tagsággal rendelkezik. A beszámolási időszakban magyar csillagász hosszabb ideig tartózkodott Kubában, ahol felkérésre a kubai csillagászati kutatások megindításához nyújtott értékes segítséget.

A KÖZPONTI FIZIKAI KUTATÓ INTÉZET régebbi jó kapcsolatai mellett az utóbbi időben az ATOMMAG KUTATÓ INTÉZET (ATOMKI) és az MTA ELMÉLETI FIZIKAI TANSZÉKI KUTATÓ CSOPORT is igen jó kapcsolatot létesített a DUBNAI EGYESÍTETT ATOMKUTATÓ INTÉZETtel. A *debreceni* ALFA-SPEKTROSZKÓPIAI CSOPORT igen eredményes dubnai szereplése nagymértékben hozzájárult a két intézet kapcsolatainak elmélyüléséhez. Az ATOMKI munkatársai közül számosan dolgoznak Dubnában. A dubnai intézet nyomásgenerátorainak továbbfejlesztésére és kihasználására vonatkozóan az ATOMKI együttműködési javaslatot készített. A nukleáris elektronika terén is sikeresen együttműködik a két intézet. Debreceni munkacsoport dolgozott Rossendorfban is közös kutatási témán.

VIII.

Fő feladatok

Az előterjesztett beszámoló alapján az Osztályvezetőség a következő időszakban az alábbiakat tekinti fő feladatának:

1. A szilárdtestfizika területén a fő kutatási irányok kijelölése, a szellemi és anyagi fejlesztési erőknek e területekre való koncentrálása, a kiemelt kutatás irányítási és ellenőrzési, szakmai és gazdasági módszereinek kidolgozása.

2. A megkezdett munkát, folytatva az Osztályvezetőség tovább kíván foglalkozni az akadémiai matematikai intézmények kutatási irányainak körülhatárolásával.

3. A káderfejlesztési munka további javítása, a fiatal kádereknek a perspektivikus célok megvalósítása érdekében való tudatos kiválogatása, nevelése és fejlesztése.

4. A kutatómunka érdemi, szakmai irányítására és ellenőrzésére alkalmas, az eddiginél hatékonyabb módszerek felkutatása és alkalmazása.

5. Az ELMÉLETI FIZIKAI KUTATÓ CSOPORT, a KRISTÁLYNÖVEKEDÉSI TANSZÉKI KUTATÓ CSOPORT és a KRISTÁLYFIZIKAI TANSZÉKI KUTATÓ LABORATÓRIUM megfelelő elhelyezése.

NEUTRINÓFIZIKA*

Írta: NAGY KÁROLY

A természettudományok, de különösképpen a fizika fejlődése korunkban oly rohamos léptekkel halad előre, hogy annak új tudományos eredményeit még a legjobb képességekkel megáldott tudós sem tudja ma átfogni. A tudományos pályára lépő fiatal ember az alapok elsajátítása után igen hamar specializálódik egy szűkebb területre. Ahogy az évek múlnak és munkánkkal egyre mélyebbre hatolunk a természet csodálatos világába, egy-egy probléma rabul ejti az újat kutató elménket és az érdeklődési körünk tovább szűkül.

Az egyetem elvégzése után tisztelt tanítómesterem, NOVOBÁTZKY KÁROLY, figyelmemet az elektromágneses tér kvantumelméletére irányította. A mozgó szigetelők elektrodinamikájának energia—impulzus-viszonyait tisztázni akaró vizsgálatok mintegy fél évszázadon át foglalkoztatták a fizikusokat. A tér energia—impulzus-tenzorával kapcsolatos problémák NOVOBÁTZKY KÁROLY és fiatal tanítványainak vizsgálataival nyertek végleges megoldást. Tudományos pályám első lépéseit e témakörben tettem meg. Első eredményeim is e területen születtek. Az említett kutatások klasszikus fizikai lezárását a kvantumelméleti tárgyalással egészítettem ki. Nevezetesen, kidolgoztam az elektromágneses tér kvantumelméletét homogén, izotróp szigetelőkben. E vizsgálataim befejeztével érdeklődésem az elemi részek fizikája felé fordult. Előbb a spinnel és mágneses momentummal rendelkező részecskék relativisztikus mozgásproblémáit tanulmányoztam. Ebben az időben lepte meg a fizikus világot LEE és YANG először hihetetlennek tűnő felismerése a gyenge kölcsönhatások paritássértéséről. Az egész világon megindult lázas kutatás terelte figyelmemet a gyenge kölcsönhatások elméleti vizsgálata felé. Az utóbbi nyolc évben e területen dolgozom, és különösen a neutrinókkal kapcsolatos problémák vonzzák érdeklődésemet. Ezért választottam székfoglaló előadásom témájául a neutrinófizikát. A nagyenergiájú fizika ezen új ágának kialakulását ismertetem röviden, majd az e problémakörbe tartozó szerény eredményeimről kívánok vázlatosan beszámolni.

A fizikusok előtt ismertek azok a körülmények, amelyek 1933-ban PAULIt arra a gondolatra vezették, hogy a neutrinó létezését feltételezze. A béta-bomlásban emittált elektronok vagy pozitronok energiaspektruma egy bizonyos $E_{\max}$ maximális energiáig folytonos. Ha a folyamatban csak egy részecske keletkezik (pl. az elektron), akkor energiájának a kvantumelmélet szerint monokromatikusnak kellene lennie. Úgy tűnt, hogy a folyamatban az impulzusmomentum megmaradásának törvénye is megsérül. Példaként tekintsük a C^{14} mag $C^{14} \to N^{14} + e^-$-bomlását. A mag impulzusmomentuma ($\hbar$ egységekben) eggyel változik, az elektron viszont

* Székfoglaló előadás. Elhangzott az *MTA III. Osztály*ának felolvasóülésén 1966. március 30-án.

csak 1/2 impulzusmomentumot visz el. A mutatkozott ellentmondások feloldására PAULI feltételezte, hogy az elektronnal együtt egy semleges, valószínű zérus nyugalmi tömegű fermion is emittálódik. Ez a részecske a *neutrinó*. (Pontosabban: a pozitron emissziójával együtt keletkezett semleges fermiont nevezzük neutrinónak, az elektronnal együtt az antineutrinó emittálódik.) A neutrinó viszi el a hiányzó energiát, impulzust és impulzusmomentumot. FERMI a neutrinó-hipotézis alapján dolgozta ki 1934-ben a béta-bomlás első elméletét. E szerint a béta-kölcsönhatás *Hamilton*-operátora:

$$H=\int(\bar{\psi}_p O_\alpha \psi_n)(\bar{\psi}_e O_\alpha \psi_\nu)dV+\text{herm. konj.} \tag{1}$$

Itt ψ_i $(i=p, n, e, \nu)$ a proton-, neutron-, elektron- és neutrinótér operátora. $\bar{\psi}=\psi^+\gamma_4$, O_α a γ_α mátrixokból felépíthető mátrix, a $+$ jel a hermitikus konjugáltat jelzi. Az (1) *Hamilton*-operátorra vonatkozó relativisztikus invariancia követelménye O_α-ra öt különböző alakot megengedett. A későbbi vizsgálatok döntötték el végül, hogy

$$O_\alpha=\gamma_\alpha(1+\gamma_5), \tag{2}$$

ahol

$$\gamma_5=\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4. \tag{3}$$

Az atommagok béta-bomlásával kapcsolatos kísérleti és elméleti vizsgálatok (mint pl. az emittált elektron energiaspektruma, elektron-neutrinó szögkorreláció, magvisszalökődés stb.) mind-mind bizonyították, hogy a *Pauli*-féle neutrinóhipotézis reális, a neutrinó tényleg létezik. Húsz éven keresztül azonban csak indirekt kísérleti bizonyítékok álltak rendelkezésünkre. Ezek alapján meglehetősen sok információt sikerült nyernünk a neutrinó fizikai sajátságairól: pl. nyugalmi tömegéről, mágneses momentumáról. Ezen két mennyiségre vonatkozó kísérleti értékek nagyon valószínűvé tették, hogy mindkettő zérussal egyenlő.

Mivel a neutrinó fermion, ezért létezik antirészecskéje is: az *antineutrinó*. Mindkettő elektromosan semleges, spinje 1/2, tömege és mágneses momentuma valószínű zérus. (E mennyiségek jelenlegi kísérleti korlátjáról később lesz szó.) A neutrinófizika kezdeti szakaszában volt olyan elképzelés is, hogy az antineutrinó azonos a neutrinóval, tehát $\nu\equiv\bar{\nu}$. Erre az elgondolásra épült a *Majorana*-féle neutrinóelmélet. Felmerült a gondolat, milyen kísérlettel lehet eldönteni, hogy a két részecske valóban különbözik-e egymástól. Az ún. kettős béta-bomlás alkalmasnak mutatkozott a kérdés eldöntésére, mert e folyamat másként megy végbe ha a neutrinó nem a *Dirac*-, hanem a *Majorana*-elmélet szerint írható le.

a) A *Dirac*-egyenlet szerint $\nu\not\equiv\bar{\nu}$. A kettős béta-bomlás alapfolyamata a következőképpen képzelhető el:

$$n\to p+e^-+\bar{\nu} \tag{4. a}$$

és ezt követi a

$$n\to p+e^-+\bar{\nu} \tag{4. b}$$

bomlás. Mivel (4. a)-ban $\bar{\nu}$ emittálódik, ez nem tud a másik neutronon befogódni. Az atommag két neutronja átalakul tehát két protonná, miközben két elektron és két antineutrinó keletkezik:

$$2n\to 2p+2e^-+2\bar{\nu}. \tag{4. c}$$

A bomlás felezési ideje 10^{20} év, ha a felszabaduló kinetikai energia 2 MeV.

b) A *Majorana*-elmélet szerint $\nu \equiv \bar{\nu}$. Ekkor a kettős béta-bomlás alapfolyamata a következő:

(5. a) $$n \to p + e^- + \nu,$$

(5. b) $$\nu + n \to p + e^-.$$

Az első bomlásban keletkezett neutrinó a második neutronon befogódik, így a mag két neutronja neutrinóemisszió nélkül alakul át két protonná két elektron emissziója kíséretében. A bomlás felezési ideje 2 MeV felszabaduló kinetikai energia esetén 10^{12} év.

A kísérleti adatok a *Dirac*-féle neutrinó-elméletet támogatják. Ebből a szempontból legjelentősebb a *Davis*-féle kísérlet. Atomreaktorból kijövő antineutrinókkal vizsgálta az

(6) $$\bar{\nu} + Cl^{37} \to Ar^{37} + e^-$$

folyamatot. Ha $\nu \neq \bar{\nu}$, akkor ennek a folyamatnak tiltottnak kell lennie. Ha viszont $\nu = \bar{\nu}$, akkor a folyamatnak 1 MeV energiájú neutrinókra $\sim 10^{-44}$ cm^2 hatáskeresztmetszettel kell bekövetkeznie. *Davis* mérései azt mutatták, hogy (6) hatáskeresztmetszete biztosan $< 0{,}9 \cdot 10^{-45}$ cm^2, ami a neutrinó és antineutrinó egymástól különböző voltát bizonyítja.

A neutrinófizika fejlődésében igen jelentős eredményeket hoztak az atomreaktorból nyert szabad neutrinókkal végzett kísérletek. Itt az alapfolyamatok a következők:

(7) $$\begin{gathered} \nu + n \to p + e^-, \\ \bar{\nu} + p \to n + e^+. \end{gathered}$$

Ezek hatáskeresztmetszete BETHE számítása szerint 1 MeV energiájú neutrinókra $\sim 10^{-44}$ cm^2. A hatáskeresztmetszet kis értéke miatt a folyamat hosszú ideig megfigyelhetetlen volt és csak 1956-ban sikerült. A kísérlet REINES és COWAN, valamint munkatársai nevéhez fűződik. Ez volt az első kísérlet, amely közvetlen bizonyítékot szolgáltatott a neutrinók létezéséről.

A gyenge kölcsönhatások paritássértő voltának felismerése 1956-ban a neutrinófizikában új szakasz kezdetét jelentette. A nagymértékben megindult elméleti és kísérleti vizsgálatok egész sora egyértelműen bizonyította a neutrinó és antineutrinó lényegesen különböző voltát. A SALAM, LANDAU, LEE és YANG által egymástól függetlenül kidolgozott kétkomponensű neutrinóelmélet szerint a neutrinó spinje az impulzusával antiparalel, az antineutrinóé pedig párhuzamos. Eszerint az elmélet szerint — amely a paritássértést mutató kísérletekkel igen jól egyezik — a neutrinó nyugalmi tömege azonosan zérus: $m_\nu = 0$. Ugyanis, ha $m_\nu \neq 0$ lenne, lehetne olyan megfigyelő, aki a neutrinónál nagyobb sebességgel haladna és így számára a neutrinó-impulzus ellenkező irányúra változna, amikor a megfigyelő túllépi a neutrinó sebességét. A spin iránya viszont változatlan maradna. A neutrinó eközben a természetben nem létező állapotba menne át. Ez az ellentmondás csak akkor nem lép fel, ha $m_\nu \equiv 0$, mert ilyen részecske a vákuumbeli fénysebességgel mozog és azt semmilyen megfigyelő nem lépheti túl. A kétkomponensű neutrinóelmélet szerint a neutrinó nyugalmi tömege tehát azonosan zérus.

A gyenge kölcsönhatások fizikájában ezidőtájt igen komoly problémát jelentett, hogy az elmélet által várható egyes folyamatok nem fordulnak elő a természetben. Ilyenek pl.

$$\mu \to e + \gamma,$$

$$\mu^- + Z \to Z + e^-, \tag{8}$$

$$\mu^\pm \to e^\pm + e^+ + e^-,$$

s í. t.

Az elmélet szerves részét alkotó megmaradási tételek megengednék e folyamatok létezését. Érthetetlen volt, hogy akkor miért nem fordulnak mégsem elő. Ekkor vetődött fel az a gondolat, hogy a természetben esetleg nemcsak egyfajta neutrinó létezik, hanem kettő. Az egyik a müonnal, a másik az elektronnal van kapcsolatban. Pontosabban szólva: az

$$n \to p + e^- + \bar{\nu}_e \tag{9}$$

béta-bomlásban az ún. *el-neutrinó* antirészecskéje, a

$$\pi^- \to \mu^- + \nu_\mu \tag{10}$$

pion-bomlásban pedig az ún. *mü-neutrinó* keletkezik.

Ha kétfajta neutrinó létezik, akkor a (8) folyamatok tiltottak. Nézzük pl. a $\mu \to e + \gamma$ bomlást. A *Fermi*-féle elmélet szerint ez a folyamat egyfajta neutrinóval a következőképpen mehetne végbe:

$$\mu \xrightarrow{\text{gyenge k.}} e + \nu + \bar{\nu} \xrightarrow{\text{elektromágneses k.}} e + \gamma + \nu + \bar{\nu} \xrightarrow{\text{gyenge k.}} e + \gamma. \tag{11}$$

Ez a gyenge kölcsönhatásban másodrendű folyamat. Ha kétfajta neutrinó van a természetben és egyik a müonnal, másik az elektronnal társul, akkor (11) a következőképpen módosul:

$$\mu \xrightarrow{\text{gyenge k.}} e + \nu_\mu + \bar{\nu}_e \xrightarrow{\text{elektromágneses k.}} e + \gamma + \nu_\mu + \bar{\nu}_e \xrightarrow{\text{gyenge k.}} e + \gamma. \tag{12}$$

A második gyenge folyamat nem következhet be, mivel ν_μ-t az elektron nem tudja befogni. Tehát a $\mu \to e + \gamma$ bomlás tiltott. Hasonlóképpen látható be a (8)-beli többi folyamatra is.

A második neutrinó létezésére célzó elgondolások után igen nagy érdeklődés nyilvánult meg világszerte a neutrinófizika iránt. E vizsgálatok között azok voltak a legjelentősebbek, amelyek a második neutrinó kísérleti kimutatására irányultak. A döntő kísérletet 1962-ben végezték el Brookhavenben, amely kétséget kizáróan igazolta, hogy kétfajta neutrinó létezik és $\nu_e \neq \nu_\mu$. Meg kell jegyezni, hogy a kísérlet alapgondolata B. PONTECORVÓtól származik, aki azt 1959-ben javasolta a kievi nagyenergiájú fizikai konferencián. A brookhaveni kísérletben a neutrinókat a $\pi \to \mu + \nu_\mu$ bomlásból nyerték. A pionokat 15 GeV energiájú protonok keltették berillium céltárgyon ütközve. A keletkezett részecskenyalábot 13,5 m vastag vas leárnyékoláson vezették keresztül. Ez az erősen kölcsönható pionokat magkölcsönhatás, a müonokat pedig ionizációs veszteség révén abszorbeálta. A mü-neutrinó és az anyag kölcsönhatása a vas árnyékolás mögé helyezett alumínium szikrakamrában, mint detektorban ment végbe. Ez a következő alapfolyamatokat váltja ki:

$$\begin{aligned} &\nu_\mu + n \to p + \mu^-, \\ &\bar{\nu}_\mu + p \to n + \mu^+. \end{aligned} \tag{13}$$

Ha csak egyfajta neutrinó létezne, akkor végbemennének a

$$\begin{aligned} &\nu + n \to p + e^-, \\ &\bar{\nu} + p \to n + e^+ \end{aligned} \tag{13'}$$

folyamatok is. Ekkor egyforma gyakorisággal keletkeznének elektronok és müonok. Ha viszont $\nu_e \neq \nu_\mu$, akkor elektronok keletkezése nem várható. A kísérlet gondos analizálása azt mutatta, hogy a keletkezett töltött részek müonok. Ez tehát azt jelenti, hogy a természetben kétfajta neutrinó létezik: ν_e az el-neutrinó, ν_μ a mü-neutrinó. Az 1962—64 között Brookhavenben és a CERN-ben elvégzett kísérletek az elsőnél sokkal nagyobb számú mérési adattal megerősítették a két neutrinó létezését igazoló első megfigyelést.

Még a mü-neutrinó kísérleti kimutatása előtt több elméleti munka foglalkozott a két neutrinó problematikájával. Felvetődött a kérdés, hogy milyen fizikai sajátságokkal rendelkezik a mü-neutrinó? Miben különbözik a két neutrinó egymástól?

A mü-neutrinóval — mint a müon-dublett semleges részecskéjével — én először 1959-ben, akadémiai doktori értekezésem utolsó fejezetében foglalkoztam, amikor az elemi részecskék lehetséges kölcsönhatásainak egy szimmetria-elvvel, az ún. tömegtükrözési transzformációval szembeni invarianciáját vizsgáltam. Megjegyzem, hogy az irodalomban először SAKATÁnál szerepel a ν_μ, aki még 1943-ban gondolt egy semleges, zérus tömegű fermionra. Hazánkban először MARX GYÖRGY egyik dolgozatában fordul elő, amelyben a müon és az elektron közötti különbséget értelmezi egy új középerős kölcsönhatás feltételezésével.

1960-ban kezdtem el foglalkozni azzal a kérdéssel, hogy milyen fizikai mennyiség különbözteti meg a két neutrinót egymástól. Arra a gondolatra jutottam, hogy esetleg létezik egy eddig ismeretlen kölcsönhatás, amelyben a müon-dublett részt vesz, de az elektron-dublett nem, és ez a kölcsöhatás végül is azt eredményezi, hogy a mü-neutrinó nyugalmi tömege zérustól különböző. Hogy e gondolatnak van-e reális magva, ahhoz először azt kellett megnézni, hogy a zérustól különböző mü-neutrinótömeg az eddigi kísérleti eredményekkel összeegyeztethető-e. A müon-bomlást találtam a legegyszerűbb olyan folyamatnak, amely elméletileg könnyen tárgyalható, mivel ebben erősen kölcsönható részek nem vesznek részt és így az ismeretlen erős kölcsönhatás nem okoz problémát. Megvizsgáltam a

$$\mu^- \to e^- + \nu_\mu + \bar{\nu}_e \tag{14}$$

müon-bomlás elektron-energiaspektrumát azzal a feltevéssel, hogy $m_{\nu_e} = 0$, de $m_{\nu_\mu} \neq 0$. A folyamatot kiváltó gyenge kölcsönhatásra a

$$H = \frac{G}{\sqrt{2}} \int (\bar{\psi}_e \gamma_\alpha (1+\gamma_5) \psi_{\nu_e})(\bar{\psi}_{\nu_\mu} \gamma_\alpha (1+\gamma_5) \psi_\mu)\, dV \tag{15}$$

kölcsönhatási *Hamilton*-operátort használtam, amely mint ismeretes, a gyenge kölcsönhatás $V-A$ csatolásának felel meg. A bomlás átmeneti valószínűségét az S-mátrix-formalizmus alapján határoztam meg az ismert módon:

$$w = (2\pi)^4 |M|^2 \delta^4 (p_f - p_i) \prod_{l=1}^{3} \frac{dk_l}{(2\pi)^3}, \tag{16}$$

ahol

$$M = \frac{G}{\sqrt{2}} (\bar{u}_e \gamma_\alpha (1+\gamma_5) u_{\bar{\nu}_e})(\bar{u}_{\nu_\mu} \gamma_\alpha (1+\gamma_5) u_\mu), \tag{17}$$

p_i a kezdeti, p_f a végállapotban levő részecskék négyes-impulzusa, k_l a végállapotbeli fermionok hármas-impulzusa, u_k ($k=e, \bar{\nu}_e, \nu_\mu, \mu$) a megfelelő fermionok egység spinorjai. Az itt nem részletezendő számítás az elektron energiaspektrumára a következő eredményt adja:

$$w(E)\,dE = A\sqrt{E^2 - m_e^2}\,F^2 \left\{ K(E_0 - E) - \frac{FE_0}{3} [3(E_0 - E)^2 + E^2 - m_e^2] \right\}, \tag{18}$$

ahol

$$F = \frac{E_0^2 - 2E_0 E + m_e^2 - m_{\nu_\mu}^2}{E_0^2 - 2E_0 E + m_e^2}; \quad K = E_0^2 - m_e^2 - m_{\nu_\mu}^2, \tag{19}$$

E az elektron energiája, E_0 a müon nyugalmi energiája. Mivel az energiaspektrum a nagyenergiás végén függ érzékenyen m_{ν_μ}-től, az $E \gg m_e$ határesetet vizsgáljuk. Ekkor

$$w(\varepsilon)\,d\varepsilon = AE_0^5 I(\varepsilon)\,d\varepsilon, \tag{20}$$

ahol

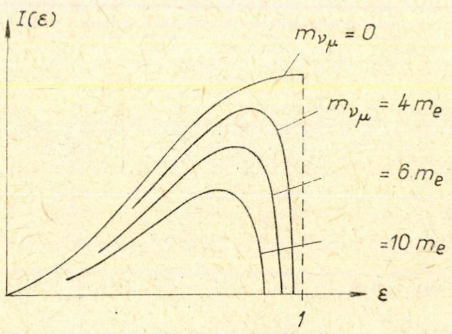
$$I(\varepsilon) = \frac{\varepsilon^2}{4}\left[1 - \frac{2\varepsilon}{3} - \mu^2 - \frac{\mu^4}{(1-\varepsilon)^2} + \frac{\mu^6}{(1-\varepsilon)^3}\left(1 - \frac{\varepsilon}{3}\right)\right], \tag{21}$$

$$\varepsilon = 2\frac{E}{E_0}, \quad \mu = \frac{m_{\nu_\mu}}{E_0}. \tag{22}$$

A (20)-ban szereplő A együttható a csatolási állandót és más univerzális állandókat magába foglaló konstans. Az $I(\varepsilon)$ függvényt különböző m_{ν_μ} értékekre az alábbi görbék ábrázolják. Az elméleti görbéknek a mérési eredményekkel való összehasonlításából az látszik, hogy az

$$m_{\nu_\mu} < 10\, m_e$$

tömegérték nem mond ellene a tapasztalatnak. E vizsgálataimmal egy időben BAHCALL és CURTIS is foglalkozott a problémával és ők az $m_{\nu_\mu} \sim 5 m_e$ tömegértékre következtettek.



1. ábra

Abban a reményben, hogy m_{ν_μ}-re pontosabb felső korlátot kapok, megvizsgáltam más folyamatot is, nevezetesen a $\pi^- \to e^- + \bar{\nu}_e / \pi^- \to \mu^- + \bar{\nu}_\mu$ bomlási arányt. A pion-bomlás egy erős és egy gyenge kölcsönhatáson keresztül megy végbe:

$$\pi^- \xrightarrow{\text{erős k.}} n + \bar{p} \xrightarrow{\text{gyenge k.}} e^-(\bar{\mu}) + \bar{\nu}_e(\bar{\nu}_\mu). \tag{23}$$

A $\pi \to e\bar{\nu}_e$ bomlás átmeneti valószínűségére jellemző M átmeneti mátrixelem:

$$M = \frac{G}{\sqrt{2}} A_\alpha(\bar{u}_e \gamma_\alpha (1+\gamma_5) u_{\bar{\nu}_e}), \tag{24}$$

ahol A_α az axiálvektor áram átmeneti mátrixeleme a $|\pi\rangle$ és a $|0\rangle$ állapotok között. Mivel ugyanez az A_α szerepel a $\pi \to \mu\bar{\nu}_\mu$ átmeneti valószínűségben is, a bomlási arányból kiesik és azért az

$$R\left(\frac{\pi \to e\bar{\nu}_e}{\pi \to \mu\bar{\nu}_\mu}\right) \tag{25}$$

arány az erős kölcsönhatás ismerete nélkül is pontosan kiszámítható. R kifejezése egyedül a bomlásban szereplő részecskék tömegétől függ.

$$R\left(\frac{\pi \to e\bar{\nu}_e}{\pi \to \mu\bar{\nu}_\mu}\right) = R_0 r, \tag{26}$$

ahol

$$R_0 = \frac{m_e^2}{m_\mu^2}\left(\frac{m_\pi^2 - m_e^2}{m_\pi^2 - m_\mu^2}\right)^2 \tag{27}$$

az $m_{\nu_\mu} = 0$ esetre érvényes bomlási arány, és

$$r^{-1} = \left[1 + m_{\nu_\mu}^2 \frac{m_{\nu_\mu}^2 - 2m_\pi^2 - 2m_\mu^2}{(m_\pi^2 - m_\mu^2)^2}\right]^{1/2} \left[1 + m_{\nu_\mu}^2 \frac{2m_\mu^2 + m_\pi^2 - m_{\nu_\mu}^2}{m_\mu^2(m_\pi^2 - m_\mu^2)}\right]. \tag{28}$$

A tömegek legújabb értékeit beírva, adódik:

m_{ν_μ}/m_e	0	5	10	20
r	1	0,99996	1,00001	1,00259

Az $m_{\nu_\mu}/m_e = 5-10$ értékekre $r \sim 1$, $R \sim R_0 = 1{,}282 \cdot 10^{-4}$. Az $m_{\nu_\mu}/m_e = 20$ értékre $R = 1{,}32 \cdot 10^{-4}$ adódik. ANDERSON 1960-ban végzett mérései szerint: $R_{\text{exp}} = (1{,}21 \pm \pm 0{,}07) \cdot 10^{-4}$.

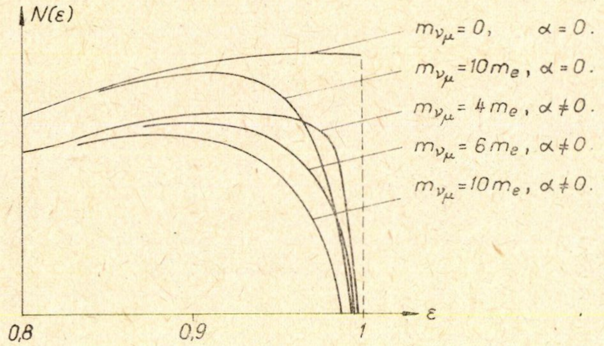
Ezek a számítások is azt mutatják, hogy az $m_{\nu_\mu} \leqq 10 m_e$ érték még összefér a tapasztalattal.

Mivel a müon- és pion-bomlásban elektromosan töltött részek is szerepelnek, figyelembe kell vennünk az elektromágneses térrel való kölcsönhatást is. Ez a kölcsönhatás korrekciót ad a fenti eredményekhez. Ezen ún. sugárzási korrekciók meghatározása a relativisztikus kvantumelmélet módszereivel történik. A számításokat véges mü-neutrinó tömeggel CSIKOR FERENC végezte el szakdolgozatában mindkét bomlásra. A müon-bomlás elektron-energiaspektrumát a finomszerkezeti állandóban $\left(\alpha = \frac{e^2}{\hbar c}\right)$ lineáris korrekció a spektrum nagyenergiás végén befolyásolja jelentősen, éspedig csökkenti.

A mért spektrummal való összehasonlításból az $m_{\nu_\mu} < 6 m_e$ értékek látszanak valószínűnek.

A pion-bomlás bomlási arányához számított korrekciókat gyakorlatilag nem befolyásolja az m_{ν_μ} véges értéke. Így ebből nem adódott m_{ν_μ}-re pontosabb érték a korrekciók nélküli felső korlátnál.

A mü-neutrinó nyugalmi tömegének közelítő megbecslésére végzett vizsgálataink eredményeit összefoglalva megállapíthatjuk, hogy a jelenlegi kísérleti adatokkal nincs ellentétben az a feltevésünk, hogy $m_{\nu_\mu} \neq 0$. Sőt, a müon-bomlás spektrumának nagyenergiás végén mutatkozó leesés határozottan amellett szól, hogy $m_{\nu_\mu} \neq 0$.



2. ábra

Mivel az elemi részek tömegeit a különféle terekkel való kölcsönhatásuk eredményezi, feltételezhető, hogy a mü-neutrinó véges nyugalmi tömegét valamilyen eddig ismeretlen kölcsönhatás okozza. Nagyon vonzónak látszik az a gondolat, hogy ebben az ismeretlen kölcsönhatásban nemcsak a mü-neutrinó, hanem a müon is részt vesz és ez eredményezi az $m_\mu - m_e$ tömegkülönbséget is. Az utóbbi probléma magyarázatára már vezettek be korábban ilyen kölcsönhatásokat (pl. MARX GY. és NAGY KÁZMÉR), azonban ezekben m_{ν_μ}-t zérusnak vették. Érdemes lenne ezeket a vizsgálatokat kiterjeszteni az $m_{\nu_\mu} \neq 0$ értelmezésére is. Újabban M. A. MARKOV foglalkozik ilyen vizsgálatokkal, aki feltételezi, hogy a müondublett egy pszeudovektor térrel van kölcsönhatásban. E kölcsönhatást a

$$\frac{g\hbar}{mc}\gamma_5\gamma_\mu\gamma_\nu\frac{\partial\Phi_\mu}{\partial x_\nu}$$

alakban veszi fel. A g csatolási állandó $10^{-6}-10^{-7}$ értékű. Elképzelhető, hogy ez, vagy más hasonló kölcsönhatás a mü-neutrinó nyugalmi tömegén kívül a legújabb kozmikus neutrinós kísérletek eredményeit is értelmezni tudja.

A mü-neutrinó felfedezése az utóbbi években elért fizikai eredmények között az egyik legjelentősebb tudományos eredmény. Ha sikerül megtalálnunk azt a törvényt, amely helyesen írja le a többi elemi résszel való kölcsönhatását és amely számot ad annak minden fizikai sajátságáról, akkor kezünkben lesz annak az ajtónak a kulcsa, amely a neutrinófizika igen gazdag világát ma még elzárja előlünk.

Befejezésül összefoglalom a két neutrinó fizikai mennyiségeire vonatkozó jelenlegi ismereteinket:

	ν_e	ν_μ
tömeg	< 200 eV	< 3 MeV
töltés	$< 10^{-17}\ e$	$< 10^{-13}\ e$
mágneses momentum	$< 10^{-10}\ \mu_{\mathrm{Bohr}}$	$< 10^{-10}\ \mu_{\mathrm{Bohr}}$
$\sigma_{\mu N}$	10^{-44} cm^2, $E_{\nu e} \sim 1$ MeV 10^{-38} cm^2, $E_{\nu_e} \sim 1$ GeV	10^{-38} cm^2, $E_{\nu_\mu} \sim 1$ GeV

Igen tisztelt Tudományos Akadémia! Megköszönöm azt a személyemet kitüntető bizalmat, amellyel levelező tagjai sorába beválasztott. Életem egyik legfőbb törekvésének azt tekintem, hogy erre a magas kitüntetésre méltó legyek.

Engedjék meg, hogy székfoglalómat EÖTVÖS LORÁND azon szavaival zárjam, amelyeket hasonló alkalomból mondott a *Magyar Tudományos Akadémia III. Osztálya* előtt: „Érdemtelenségem érzete sokáig visszatartott abban, hogy e tudományos testületben széket foglaljak; mert ámbár megválasztásom óta többször voltam szerencsés e helyen értekezhetni, székfoglalóul valami késszel, egy kikerekített egésszel kívántam volna föllépni. De az idő múlt s az idővel én is idősebb lettem, napról napra meggyőződve arról, hogy a tudományban készek sohasem leszünk. Kérem ezért a tisztelt Akadémiát, legyen elnéző most is, midőn e zöld asztal előtt széket foglalva, arra csak töredéket hozhattam."

EGY ÁLTALÁNOS MÓDSZER FÜGGVÉNY-EGYENLETEK NÉHÁNY OSZTÁLYÁNAK MEGOLDÁSÁRA, III.*

Írta: VINCZE ENDRE

7. §. Két speciális függvényegyenletrendszer megoldhatóságának feltételei

7. 1. A későbbiekben rá fogunk mutatni, hogy e determinánsos módszerrel (2. 29) típusú egyenletekből álló függvényegyenletrendszerek is minden *elvi* nehézség nélkül megoldhatók. Itt csupán két speciális egyenletrendszert kívánunk tárgyalni; gyakori felbukkanásuk irányította rá a figyelmet. Az e §-ban tárgyaltakhoz hasonló függvényegyenletrendszer J. ACZÉL és Z. DARÓCZY [6] közös munkájában szerepel.

7. 2. Tekintsük a $Q_0(*)$ félcsoporton érvényes

$$(7.1)\quad G(z*t) = a_1G(z)G(t)+a_2G(z)H(t)+a_3H(z)G(t)+a_4H(z)H(t)+G(z)+G(t),$$

$$(7.2)\quad H(z*t) = a_5G(z)G(t)+a_6G(z)H(t)+a_7H(z)G(t)+a_8H(z)H(t)+H(z)+H(t),$$

$$[G(z),\ H(z)\colon Q_0(*)\to Q]$$

egyenletekből álló egyenletrendszert. Érvényes a

7. 1. TÉTEL. *Ha a $Q_0(*)$ ABEL-félcsoporton érvényes* (7. 1) *és* (7. 2) *egyenletekből álló egyenletrendszerben a $G(z)$ és $H(z)$ függvényekre*

$$(7.3)\qquad \Delta(G, H)\not\equiv 0$$

teljesül, akkor ennek az egyenletrendszernek csak abban az esetben van megoldása, ha a benne szereplő konstansok kielégítik az

$$a_2 = a_3,\quad a_6 = a_7;$$

$$\begin{vmatrix} a_2 & a_5 \\ a_4 & a_6 \end{vmatrix} = 0,\qquad \begin{vmatrix} a_2 & a_1-a_6 \\ a_4 & a_2-a_8 \end{vmatrix} = 0,\qquad \begin{vmatrix} a_5 & a_1-a_6 \\ a_6 & a_2-a_8 \end{vmatrix} = 0$$

feltételi egyenleteket.

MEGJEGYZÉS. A $\Delta(G, H)\equiv 0$ esetben (7. 1) és (7. 2) csak egy ismeretlen függvényt tartalmazó egyenletekre egyszerűsödik; hasonló típusokat az előzőekben már tárgyaltunk. A bizonyítás során az $M''=M(z*t)$, $M'=M(t)$, $M=M(z)[M=G,\ H]$ jelöléseket ismételten használni fogjuk.

* A dolgozat első és második része az *MTA Mat. Fiz. Oszt. Közl.*, **16** (1966), 179—208 és 301—331 oldalain jelent meg; az egyes fejezetek, képletek, tételek stb. számozása ezekhez csatlakozóan folytatólagos. A *teljes irodalomjegyzéket* is az első részhez csatoltuk.

BIZONYÍTÁS. A bal oldalak szimmetriája alapján

$$a_2\Delta(G, H)+a_3\Delta(H, G)=(a_2-a_3)\Delta(G, H) = 0,$$

$$a_6\Delta(G, H)+a_7\Delta(H, G)=(a_6-a_7)\Delta(G, H) = 0,$$

tehát (7. 3) miatt valóban $a_2=a_3$ és $a_6=a_7$.

Az asszociativitás folytán pedig (7. 1) és (7. 2) ismételt felhasználásával (7. 1)-ből

$$\begin{aligned}\Delta(G'', a_1G)+\Delta(G'', a_2H)+\Delta(H'', a_2G)+\Delta(H'', a_4H)+\Delta(G'', 1)+\Delta(1, G) =\\ = \Delta(a_1G'G+a_2H'G+a_2G'H+a_4H'H+G+G', a_1G)+\\ +\Delta(a_1G'G+a_2H'G+a_2G'H+a_4H'H+G+G', a_2H)+\\ +\Delta(a_5G'G+a_6H'G+a_6G'H+a_8H'H+H+H', a_2G)+\\ +\Delta(a_5G'G+a_6H'G+a_6G'H+a_8H'H+H+H', a_4H)+\\ +\Delta(a_1G'G+a_2H'G+a_2G'H+a_4H'H+G+G', 1)+\Delta(1, G)=0,\end{aligned}$$

azaz rövid számítás után

$$[(a_4a_5-a_2a_6)G'+(a_2^2-a_1a_4-a_2a_8+a_4a_6)H']\Delta(G, H) = 0 \tag{7. 4}$$

adódik, tehát (7. 3) miatt valóban

$$\begin{vmatrix} a_2 & a_5 \\ a_4 & a_6 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} a_2 & a_1-a_6 \\ a_4 & a_2-a_8 \end{vmatrix} = 0.$$

Vegyük észre továbbá, hogy a (7. 1)—(7. 2) egyenletrendszer bizonyos szimmetriát mutat, éspedig abban az értelemben, hogy a

$$G(z) \leftrightarrow H(z), \quad a_1 \leftrightarrow a_8, \quad a_2(=a_3) \leftrightarrow a_6(=a_7), \quad a_4 \leftrightarrow a_5 \tag{7. 5}$$

egyidejű cserékkel (7. 1)-ből (7. 2), ill. (7. 2)-ből (7. 1) adódik. Így az asszociativitás kihasználása (7. 2)-ben ugyanazt eredményezi, mint ha (7. 4)-ben, ill. a belőle felírt determinánsokban az említett cseréket végrehajtjuk:

$$\begin{vmatrix} a_6 & a_4 \\ a_5 & a_2 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} a_6 & a_8-a_2 \\ a_5 & a_6-a_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

7. 3. Hasonló tétel érvényes a

$$G(z*t) = a_1G(z)G(t)+a_2G(z)H(t)+a_3H(z)G(t)+a_4H(z)H(t), \tag{7. 6}$$

$$H(z*t)=a_5G(z)G(t)+a_6G(z)H(t)+a_7H(z)G(t)+a_8H(z)H(t) \tag{7. 7}$$

$$[G(z), H(z): Q_0(*)\to Q]$$

egyenletekből álló egyenletrendszerre is.

7. 2. TÉTEL. *Ha a $Q_0(*)$ ABEL-félcsoporton érvényes (7. 6) és (7. 7) egyenletekből álló egyenletrendszerben a G és H függvényekre*

$$\Delta(G, H)\not\equiv 0$$

teljesül, akkor ennek az egyenletrendszernek csak abban az esetben van megoldása, ha a benne szereplő konstansok kielégítik az

$$a_2=a_3, \quad a_6=a_7;$$

$$\begin{vmatrix} a_2 & a_5 \\ a_4 & a_6 \end{vmatrix}=0, \qquad \begin{vmatrix} a_2 & a_1-a_6 \\ a_4 & a_2-a_8 \end{vmatrix}=0, \qquad \begin{vmatrix} a_5 & a_1-a_6 \\ a_6 & a_2-a_8 \end{vmatrix}=0$$

feltételi egyenletrendszert.

MEGJEGYZÉS. A $\Delta(G, H)\equiv 0$ eset figyelmen kívül hagyható, mert ekkor (7. 6), ill. (7. 7) egy-egy speciális esetét képezi a már részletesen vizsgált (4. 23) egyenletnek.

BIZONYÍTÁS. A bal oldalak szimmetriájából a szokásos módon most is $a_2=a_3$ és $a_6=a_7$ adódik.

Az asszociativitást kihasználva (7. 6) alapján egyrészt

$$\begin{aligned}\Delta(G'', a_1G)+\Delta(G'', a_2H)+\Delta(H'', a_2G)+\Delta(H'', a_4H) &= \\ = \Delta(a_1G'G+a_2H'G+a_2G'H+a_4H'H, a_1G)&+ \\ +\Delta(a_1G'G+a_2H'G+a_2G'H+a_4H'H, a_2H)&+ \\ +\Delta(a_5G'G+a_6H'G+a_6G'H+a_8H'H, a_2G)&+ \\ +\Delta(a_5G'G+a_6H'G+a_6G'H+a_8H'H, a_4H)&= \\ = [(a_4a_5-a_2a_6)G'+(a_2^2-a_1a_4-a_2a_8+a_4a_6)H']\Delta(G, H) &= 0\end{aligned}$$

adódik, tehát $\Delta(G, H)\not\equiv 0$ miatt valóban

$$\begin{vmatrix} a_2 & a_5 \\ a_4 & a_6 \end{vmatrix}=0, \qquad \begin{vmatrix} a_2 & a_1-a_6 \\ a_4 & a_2-a_8 \end{vmatrix}=0.$$

Másrészt az előző tétel bizonyításánál említett szimmetriaviszonyok [vö. (7. 5)] itt is fennállnak, így

$$\begin{vmatrix} a_6 & a_4 \\ a_5 & a_2 \end{vmatrix}=0, \qquad \begin{vmatrix} a_6 & a_8-a_2 \\ a_5 & a_6-a_1 \end{vmatrix}=0$$

is teljesül, s ezzel a tételt igazoltuk.

7. 4. Érdekes megjegyezni, hogy a (7. 1)—(7. 2), ill. (7. 6)—(7. 7) egyenletrendszerben a konstansokra *ugyanazok* a relációk érvényesek, noha a két egyenletrendszer nemcsak hogy nem ekvivalens, de általában nem is írható egymásba.

8. §. Az n-edrendű lineáris függvényegyenlet visszavezetése alacsonyabbrendű függvényegyenletekre

E § előzményeit lényegében már a (4. f) és (4. g) egyenletek kapcsán az előzőekben említettük. Legutóbb G. N. SAKOVITS [85] foglalkozott ennek az egyenletnek több fontos speciális esetével.

8. 1. Útmutatást kívánunk adni az

$$F(z_1 * z_2) = \sum_{k=1}^{n} G_k(z_1)H_k(z_2) \tag{8. 1}$$

$$[z_1, z_2, z_1 * z_2 \in Q_0(*);\ F(z), G_k(z), H_k(z): Q_0(*) \to Q;\ k = 1, 2, \ldots, n]$$

típusú függvényegyenletek vizsgálatához, ill. megoldásához tetszőleges n természetes szám esetén is, ahol az F, G_k, H_k $(k=1, 2, \ldots, n)$ függvények között van (legalább egy) *ismeretlen* függvény is.

8. 1. DEFINÍCIÓ. *Ha* (8. 1)*-ben a*

$$\Delta(G_1, G_2, \ldots, G_n) \not\equiv 0, \tag{8. 2}$$

$$\Delta(H_1, H_2, \ldots, H_n) \not\equiv 0 \tag{8. 3}$$

feltételek egyidejűleg teljesülnek, akkor (8. 1)*-et „a* $Q_0(*)$ ABEL*-félcsoporton pontosan n-edrendű lineáris függvényegyenletnek" nevezzük.*

8. 2. DEFINÍCIÓ. *Az* $F_1, F_2, \ldots, F_m$ $[F_k: Q_1 \to Q;\ k=1, 2, \ldots, m]$ *függvények tetszőleges* Q_1 *halmazon vannak értelmezve. Azt mondjuk, hogy e függvényrendszer „a* Q_1 *halmazon pontosan m-edrangú", ha lineárisan függetlenek, azaz ha*

$$\Delta(F_1, F_2, \ldots, F_m) \not\equiv 0.$$

Legyen e függvényrendszer lineárisan függő, tehát

$$\Delta(F_1, F_2, \ldots, F_m) \equiv 0. \tag{8. 4}$$

Ha (8. 4)*-nek minden* $(r+1)$*-edrendű aldeterminánsa azonosan eltűnik, de van (legalább egy) nem azonosan eltűnő r-edrendű aldeterminánsa, akkor „a függvényrendszer a* Q_1 *halmazon pontosan r-edrangú"* $(r>0)$. *Az* $F_1 = F_2 = \ldots = F_m = 0$ *függvényrendszer és csak ez* 0*-adrangú.*

8. 1. LEMMA. *Legyen a* (8. 1) *egyenletben szereplő* $\{G_k\}$ *ill.* $\{H_k\}$ *függvényrendszer rangja* $r(G_k)$, *ill.* $r(H_k)$. *Ha* $n > r = \min\left(r(G_k), r(H_k)\right) > 0$ *fennáll, akkor* (8. 1) *mindig visszavezethető egy legfeljebb r-edrendű lineáris függvényegyenletre.*

BIZONYÍTÁS. Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy a függvényegyenlet rangja éppen $r = r(G_k)$, továbbá, hogy a G_k függvények indexelését úgy végeztük, hogy

$$\Delta(G_1, G_2, \ldots, G_r) \not\equiv 0$$

fennáll. Mivel $n > r$, ezért

$$\Delta(G_i, G_1, G_2, \ldots, G_r) \equiv 0,$$

$$(i = r+1, \ldots, n),$$

azaz

$$G_i = a_{i1}G_1 + a_{i2}G_2 + \ldots + a_{ir}G_r \qquad (n \geqq i \geqq r+1).$$

Írjuk e függvényeket (8. 1)-be, akkor az

$$F(z_1 * z_2) = \sum_{k=1}^{r} G_k(z_1)H_k(z_2) + \sum_{i=r+1}^{n}\left[\sum_{k=1}^{r} a_{ik}G_k(z_1)\right]H_i(z_2) =$$

$$= \sum_{k=1}^{r} G_k(z_1)\left[H_k(z_2) + \sum_{i=r+1}^{n} a_{ik}H_i(z_2)\right] = \sum_{k=1}^{r} G_k(z_1)K_k(z_2)$$

egyenletet nyerjük. A

$$K_k(z) = H_k(z) + \sum_{i=r+1}^{n} a_{ik}H_i(z) \qquad (k = 1, 2, \ldots, r)$$

függvényrendszer rangja általában $r(K_k) \leqq r$. Ezzel a 8. 1. lemmát igazoltuk.

Nyilvánvaló, hogy a 8. 1. lemma ismételt felhasználásával minden esetben elérhető, hogy a (8. 1) egyenlet vagy az

$$F(z_1 * z_2) \equiv 0,$$

vagy pedig egy

$$F(z_1 * z_2) = \sum_{k=1}^{\bar{n}} \bar{G}_k(z_1)\bar{H}_k(z_2) \tag{8. 5}$$

alakú lineáris egyenletre egyszerűsödik, ahol

$$\Delta(\bar{G}_1, \bar{G}_2, \ldots, \bar{G}_{\bar{n}}) \not\equiv 0,$$

$$\Delta(\bar{H}_1, \bar{H}_2, \ldots, \bar{H}_{\bar{n}}) \not\equiv 0,$$

tehát pontosan *n-edrendű lineáris függvényegyenlet*. Ezért a következőkben feltehetjük, hogy (8. 1) pontosan n-edrendű.

8. 2. Szükségünk lesz a következő lemmára:

8. 2. LEMMA. *Ha az $a_{k,i}$ konstansok szimmetrikusak, azaz $a_{k,i} = a_{i,k}$, akkor tetszőleges $H_1, H_2, \ldots, H_n$ függvényrendszerre*

$$\sum_{k=2}^{p-1}\sum_{i=1}^{k-1} a_{k,i}\Delta(H_i, H_k, H_{p+1}, \ldots, H_n) + \tag{8. 6}$$

$$+ \sum_{k=1}^{p-2}\sum_{j=k+1}^{p-1} a_{k,j}\Delta(H_j, H_k, H_{p+1}, \ldots, H_n) = 0$$

érvényes.

BIZONYÍTÁS. Vegyük észre, hogy (8. 6) első kettős összege — az indexek alkalmas átírása után — a következőképpen alakul:

$$\sum_{k=2}^{p-1}\sum_{i=1}^{k-1} a_{k,i}\Delta(H_i, H_k, H_{p+1}, \ldots, H_n) = \sum_{i=2}^{p-1}\sum_{k=1}^{i-1} a_{i,k}\Delta(H_k, H_i, H_{p+1}, \ldots, H_n) =$$

$$= \sum_{k=1}^{p-2}\sum_{j=k+1}^{p-1} a_{j,k}\Delta(H_k, H_j, H_{p+1}, \ldots, H_n) =$$

$$= -\sum_{k=1}^{p-2}\sum_{j=k+1}^{p-1} a_{k,j}\Delta(H_j, H_k, H_{p+1}, \ldots, H_n).$$

Ilyen átalakítások után (8. 6) helyessége nyilvánvaló, amivel a lemmát igazoltuk.

A 8. 2. lemmát felhasználva bizonyítható a

8. 1. TÉTEL. *Ha a* (8. 1) *függvényegyenletet kielégítő* $\{H_k(z)\}$ *függvényrendszer rangja pontosan* $n=r(H_k)$, *akkor*

$$(8.\ 7) \qquad G_p(z) = \sum_{i=1}^{n} a_{p,i}H_i(z) \qquad (p = 1, 2, \ldots, n),$$

ahol az $a_{p,i}$ *együtthatók szimmetrikusak:* $a_{p,i}=a_{i,p}$ $(i, p=1, 2, \ldots, n)$.

MEGJEGYZÉS. A bizonyításból ki fog tűnni, hogy a tétel *nem asszociatív* $z_1 * z_2$ művelet esetén is érvényes.

BIZONYÍTÁS. A (8. 1) egyenletből a $z_1 * z_2$ művelet kommutativitása alapján a szokásos módon a

$$\sum_{k=1}^{n} \Delta(G_k, H_k) = 0$$

egyenletet nyerjük. „Bővítsük" most ezt az egyenletet rendre a $H_n, H_{n-1}, \ldots, H_2$ függvényekkel, akkor a következőket kapjuk:

$$\sum_{k=1}^{n-1} \Delta(G_k, H_k, H_n) = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$(8.\ 8) \qquad \sum_{k=1}^{p} \Delta(G_k, H_k, H_{p+1}, H_{p+2}, \ldots, H_n) = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$(8.\ 9) \qquad \sum_{k=1}^{2} \Delta(G_k, H_k, H_3, H_4, \ldots, H_n) = 0,$$

$$\Delta(G_1, H_1, H_2, H_3, \ldots, H_n) = 0.$$

E legutolsó egyenletből $\Delta(H_1, H_2, \ldots, H_n) \not\equiv 0$ miatt

$$(8.\ 10) \qquad G_1 = \sum_{i=1}^{n} a_{1,i}H_i \qquad (a_{1,i} = \text{konst};\ i = 1, 2, \ldots, n)$$

következik. Írjuk ezt (8. 9)-be:

$$\Delta\left(\sum_{i=1}^{n} a_{1,i}H_i, H_1, H_3, \dots, H_n\right) + \Delta(G_2, H_2, H_3, \dots, H_n) =$$
$$= \Delta(a_{1,2}H_2, H_1, H_3, \dots, H_n) + \Delta(G_2, H_2, H_3, \dots, H_n) =$$
$$= \Delta(G_2 - a_{1,2}H_1, H_2, H_3, \dots, H_n) = 0,$$

tehát $\Delta(H_2, H_3, \dots, H_n) \not\equiv 0$ miatt

$$(8.\,11) \qquad G_2 - a_{1,2}H_1 = \sum_{i=2}^{n} a_{2,i}H_i \qquad (a_{2,i} = \text{konst};\ i = 2, 3, \dots, n).$$

Mivel a jobb oldalon $a_{2,1}$ konstans nem szerepel, megállapodhatunk abban, hogy $a_{1,2} = a_{2,1}$ legyen, s így (8. 11) helyett

$$G_2 = \sum_{i=1}^{n} a_{2,i}H_i$$

írható.

Tegyük most fel, hogy a $(p-1)$-edik lépésig bezárólag (8. 11)-hez hasonló alakú kifejezést nyertünk minden G_k-ra $(k=2, 3, \dots, p-1 \leqq n-1)$, azaz

$$(8.\,12) \qquad G_k = \sum_{i=1}^{k-1} a_{i,k}H_i + \sum_{j=k}^{n} a_{k,j}H_j = \sum_{i=1}^{n} a_{k,i}H_i,$$
$$[a_{i,j} = a_{j,i};\ i,j \leqq k;\ k = 2, 3, \dots, p-1 \leqq n-1],$$

akkor ebből következni fog, hogy G_p is hasonló alakú. Írjuk ugyanis a (8. 10) és (8. 12) alatti függvényeket (8. 8)-ba, tehát a 8. 2. lemmát is felhasználva

$$\sum_{k=1}^{p-1} \Delta\left(\sum_{i=1}^{n} a_{k,i}H_i, H_k, H_{p+1}, \dots, H_n\right) + \Delta(G_p, H_p, H_{p+1}, \dots, H_n) =$$
$$= \sum_{k=1}^{p-1}\left[\sum_{i=1}^{k-1} a_{k,i}\Delta(H_i, H_k, H_{p+1}, \dots, H_n) + \sum_{j=k+1}^{p-1} a_{k,j}\Delta(H_j, H_k, H_{p+1}, \dots, H_n) + \right.$$
$$\left. + a_{k,p}\Delta(H_p, H_k, H_{p+1}, \dots, H_n)\right] + \Delta(G_p, H_p, H_{p+1}, \dots, H_n) =$$
$$= \sum_{k=2}^{p-1}\sum_{i=1}^{k-1} a_{k,i}\Delta(H_i, H_k, H_{p+1}, \dots, H_n) + \sum_{k=1}^{p-2}\sum_{j=k+1}^{p-1} a_{k,j}\Delta(H_j, H_k, H_{p+1}, \dots, H_n) +$$
$$+ \Delta\left(H_p, \sum_{k=1}^{p-1} a_{k,p}H_k, H_{p+1}, \dots, H_n\right) + \Delta(G_p, H_p, H_{p+1}, \dots, H_n) =$$
$$= \Delta\left(G_p - \sum_{k=1}^{p-1} a_{k,p}H_k, H_p, H_{p+1}, \dots, H_n\right) = 0$$

adódik, azaz

$$G_p - \sum_{k=1}^{p-1} a_{k,p}H_k = \sum_{i=p}^{n} a_{p,i}H_i \qquad (a_{p,i} = \text{konst};\ i = p, p+1, \dots, n).$$

Mivel a jobb oldalon az $a_{k,p}$ $(k=1, 2, \ldots, p-1)$ konstansok nem szerepelnek, legyen $a_{k,p}=a_{p,k}$ $(k=1, 2, \ldots, p-1)$, s így valóban

$$G_p = \sum_{i=1}^{n} a_{p,i} H_i \quad [a_{i,j} = a_{j,i};\ i,j \leqq p]$$

is fennáll. Ez az eljárás nyilván $p=n$-ig folytatható. Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

A 8. 1. tétel segítségével tehát a (8. 1)-ben szereplő $G_k(z)$ függvények kifejezhetők a $\{H_k(z)\}$ függvényrendszerrel és (8. 1) helyett

$$F(z_1 * z_2) = \sum_{k=1}^{n} \left[\sum_{i=1}^{n} a_{k,i} H_i(z_1) \right] H_k(z_2) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{k,i} H_i(z_1) H_k(z_2) \tag{8. 13}$$

írható.

8. 3. A következőkben csupán a $\{G_k(z)\}$ és $\{H_k(z)\}$ függvényrendszerekre vonatkozó függvényegyenleteket kívánunk nyerni. Érvényes a

8. 2 TÉTEL. *Ha a* (8. 1) *egyenletet kielégítő* $\{H_k(z)\}$ *függvényrendszer rangja* $n=r(H_k)$, *akkor minden* $1 \leqq p \leqq n$*-re*

$$G_p(z_1 * z_2) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^{(p)} H_j(z_1) H_i(z_2) \tag{8. 14}$$

fennáll, ahol $a_{i,j}^{(p)} = a_{j,i}^{(p)}$ *(szimmetrikus) konstansok.*

BIZONYÍTÁS. A (8. 1) egyenletből a $z_1 * z_2$ művelet asszociatív és kommutatív voltát kihasználva

$$\sum_{k=1}^{n} \Delta(G_k'', H_k) = 0 \tag{8. 15}$$

írható, ahol $G_k'' = G_k(z * t)$ korábbi jelölést használtuk. „Bővítsük" ezt az egyenletet rendre a $H_n, \ldots, H_{p-1}, H_{p+1}, \ldots, H_1$ függvényekkel, akkor végül is a

$$\Delta(G_p'', H_1, H_2, \ldots, H_n) = 0$$

egyenlethez jutunk. Innen $\Delta(H_1, H_2, \ldots, H_n) \not\equiv 0$ miatt

$$G_p'' = \sum_{i=1}^{n} M_{p,i}' H_i \tag{8. 16}$$

következik, ahol $M_{p,i}' = M_{p,i}(t)$.

A (8. 16) egyenlet viszont ismét (8. 1) típusú, s mivel a $\{H_i(z)\}$ függvényrendszer rangja feltevésünk szerint $r(H_i)=n$, ezért alkalmazható rá a 8. 1. tétel. Eszerint

$$M_{p,i}(t) = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^{(p)} H_j(t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

ahol $a_{i,j}^{(p)}$ szimmetrikus konstansok. Így (8. 16) helyett

$$G_p'' = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^{(p)} H_j' H_i \qquad [a_{i,j}^{(p)} = a_{j,i}^{(p)};\ i,j = 1, 2, \ldots, n] \tag{8. 17}$$

írható. Ez nyilván minden $1 \leqq p \leqq n$ egész számra elvégezhető, így a tételt bebizonyítottuk.

A (8. 17)-ben szereplő $a_{i,j}^{(p)}$ konstansokra további megszorításokat nyerhetnénk, ha (8. 17)-et (8. 15)-be helyettesítenénk, ezt azonban itt nem szükséges elvégeznünk.

8. 4. A 8. 1. és 8. 2. tételből közvetlenül adódik a

8. 1. KOROLLÁRIUM. *Ha a* (8. 1) *egyenletet kielégítő* $\{G_k(z)\}$ *és* $\{H_k(z)\}$ *függvényrendszer rangja* $n=r(G_k)=r(H_k)$, *akkor* (8. 1)*-ből a*

$$\sum_{i=1}^{n} a_{i,p}H_i(z_1 * z_2) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^{(p)}H_i(z_1)H_j(z_2) \qquad (p=1,2,\dots,n) \tag{8. 18}$$

egyenletrendszer következik, ahol az $[a_{i,p}]$ $(i,p=1,2,\dots,n)$ *és* $[a_{i,j}^{(p)}]$ $(i,j=1,2,\dots,n)$ *együttható-mátrixok szimmetrikusak, továbbá*

$$\det[a_{i,p}]\neq 0,$$
$$\det[a_{i,j}^{(p)}]\neq 0 \qquad (p=1,2,\dots,n). \tag{8. 19}$$

BIZONYÍTÁS. Feltevésünk szerint $\Delta(H_1, H_2, \dots H_n)\not\equiv 0$, tehát (8. 7) és (8. 14) összehasonlításából azonnal (8. 18) adódik. Az együttható-mátrixok determinánsaira felírt egyenlőtlenségek is nyilván teljesülnek, ha ugyanis ezek egyike is nem teljesülne, akkor (8. 7) vagy (8. 14) alapján a kizárt $\Delta(G_1, G_2, \dots, G_n)\equiv 0$ következne. Érvényes továbbá a

8. 2. KOROLLÁRIUM. *Ha* (8. 18) *és* (8. 19) *egyidejűleg fennáll, akkor*

$$H_p(z_1 * z_2) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{i,j}^{(p)}H_i(z_1)H_j(z_2) \qquad (p=1,2,\dots,n) \tag{8.20}$$

is következik, ahol a $[b_{i,j}^{(p)}]$ $(i,j=1,2,\dots,n)$ *együttható-mátrix szimmetrikus.*

(8. 19) esetén ugyanis (8. 18) tetszőleges $H_p(z * z_2)$-re megoldható; a $b_{i,j}^{(p)}$ konstansok szimmetrikus volta nyilvánvaló.

8. 5. Keressünk most olyan $A_1, A_2, \dots, A_n$ nem mind zérus konstansokat, melyekkel a (8. 20) alatti egyenleteket rendre megszorozva és összeadva

$$\sum_{p=1}^{n} A_pH_p(z_1 * z_2) = \sum_{k=1}^{m}\left[\sum_{i=1}^{n} B_i^{(k)}H_i(z_1)\right]\left[\sum_{j=1}^{n} C_j^{(k)}H_j(z_2)\right] \tag{8.21}$$

alakú legfeljebb $m(<n)$-edrendű lineáris függvényegyenletet nyerünk. Ilyen konstansok akkor léteznek, ha a (8. 20) és (8. 21) összehasonlításából adódó

$$\sum_{k=1}^{m} B_i^{(k)}C_j^{(k)} - \sum_{p=1}^{n} A_pb_{i,j}^{(p)} = 0 \qquad (i,j=1,2,\dots,n;\ m<n) \tag{8.22}$$

egyenletrendszernek van nem triviális megoldása, melyen itt azt értjük, hogy

$$\left(\sum_{p=1}^{n}|A_p|\right)\prod_{k=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n}|B_i^{(k)}|\right)\left(\sum_{j=1}^{n}|C_j^{(k)}|\right)\neq 0. \tag{8.23}$$

A (8. 22) egyenletrendszer n^2 számú egyenletből áll. Tekintsük ismeretlennek csak az A_p, $B_i^{(k)}$ konstansokat, akkor az ismeretlenek száma $mn+n$, s a (8. 22) homogén lineáris egyenletrendszer mátrixa pedig

$$(8.24)\qquad \begin{bmatrix} \boxed{C_j^{(k)}} & & & & 0 & \boxed{-b_{1,j}^{(p)}} \\ & \boxed{C_j^{(k)}} & & & & \boxed{-b_{2,j}^{(p)}} \\ & & \boxed{C_j^{(k)}} & & & \boxed{-b_{3,j}^{(p)}} \\ & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & & \boxed{C_j^{(k)}} & \boxed{-b_{n,j}^{(p)}} \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} (j=1,2,\dots,n) \\ (k=1,2,\dots,m<n) \\ (p=1,2,\dots,n) \end{matrix}$$

alakú. Az egyes „blokkokban" szereplő felső indexek oszlopot, az alsók sort jelölnek, így

$$\boxed{C_j^{(k)}} = \begin{vmatrix} C_1^{(1)} & C_1^{(2)} \dots C_1^{(m)} \\ C_2^{(1)} & C_2^{(2)} \dots C_2^{(m)} \\ \dots & \dots \\ C_n^{(1)} & C_n^{(2)} \dots C_n^{(m)} \end{vmatrix} \qquad (m<n)$$

$$\boxed{-b_{i,j}^{(p)}} = \begin{vmatrix} -b_{i,1}^{(1)} & -b_{i,1}^{(2)} \dots -b_{i,1}^{(n)} \\ -b_{i,2}^{(1)} & -b_{i,2}^{(2)} \dots -b_{i,2}^{(n)} \\ \dots & \dots \\ -b_{i,n}^{(1)} & -b_{i,n}^{(2)} \dots -b_{i,n}^{(n)} \end{vmatrix},$$

a blokkokon kívül pedig csak zérusok állnak.

A (8. 24) mátrixban, eltekintve a (8. 23) megszorítástól, a $C_j^{(k)}$ ismeretlenek fölött szabadon rendelkezhetünk, s ezek alkalmas választásával (legalább) az $m=n-1$ esetben mindig elérhető, hogy a (8. 22) homogén lineáris egyenletrendszernek legyen a triviálistól különböző megoldása, ehhez ti. az $m=n-1$ esetben csak az szükséges, hogy (8. 24) determinánsa eltűnjön.

Ez pl. a következőképpen érhető el: A (8. 24) mátrix determinánsát kifejtjük és zérussal tesszük egyenlővé; bármely $C_j^{(k)}$ ismeretlen a kifejtésben legfeljebb n-edik hatványon fordul elő. Az összesen $(n-1)n$ számú $C_j^{(k)}$ ismeretlenek közül valamely kiválasztott $C_{j*}^{(k*)}$ kivételével a többi n^2-n-1 számút, figyelembe véve (8. 23)-at is, tetszőlegesen előírjuk, s az így előálló $C_{j*}^{(k*)}$-ra n-edrendű közönséges algebrai egyenletet pedig megoldjuk. Mivel a többi n^2-n-1 számú $C_j^{(k)}$ konstansot *tetszőlegesen* írtuk elő, ez az eljárás feltételezi, hogy az alapul választott Q testben [vö. (8. 1)] minden, legfeljebb n-edrendű algebrai egyenletnek van megoldása.

Így a (8. 20) alatti egyenletrendszer mindig visszavezethető (8. 21)-re, ahol $m<n$ és a $\Delta(H_1, H_2, \dots, H_n)\not\equiv 0$ megszorítás, továbbá (8. 23) miatt ez az egyenlet pontosan $m(<n)$-edrendű lineáris függvényegyenlet.

Figyelembe véve a 8. 1. lemmát is a következőt mondhatjuk:

8. 3. TÉTEL. *Ha a Q testben minden legfeljebb n-edrendű algebrai egyenletnek van megoldása, akkor bármely* (8. 1) *típusú függvényegyenlet mindig visszavezethető egy legfeljebb $n-1$-edrendű lineáris függvényegyenletre.*

8. 6. Az előzőek alapján már nyilvánvaló, hogy tetszőleges (8. 1) típusú egyenlet teljes megoldásrendszerének felírásához konkrét módszer áll rendelkezésünkre. Ha (8. 1)-ben valamennyi függvényt *ismeretlennek* tekintjük, akkor (8. 1) teljes megoldása azt jelenti, hogy *minden* (8. 1) típusú legfeljebb n-edrendű lineáris függvényegyenletet meg kell oldanunk. Így természetesnek mondható az a törekvés, melyet az általános eset vizsgálatánál az előzőekben végig megvalósítottunk, ti. hogy a megoldást az eredetinél alacsonyabbrendű egyenletek segítségével állítsuk elő. Természetesen egy-egy konkrét esetben, amikor a szereplő függvények nem mindegyike ismeretlen, vagy a szereplő függvények között lineáris függőséget vagy függetlenséget állapíthatunk meg, a megoldás korántsem olyan hosszadalmas, mint az általános esetben.

Az elmondottakból az is kitűnik, hogy e módszerrel minden, a (8. 1) típusú egyenletekből felépített függvényegyenlet-rendszer is megoldható, hisz az egyes egyenleteket külön-külön megoldva, s a megoldásokat az eredeti egyenletrendszerbe visszahelyettesítve, legfeljebb a megoldások specializálódnak.

9. §. A D'Alembert—Poisson-féle függvényegyenlet

Az alkalmazási lehetőségek nagy száma miatt is a

$$C(x+y)+C(x-y) = 2C(x)C(y) \tag{9. a}$$

egyenlet szerepel a legtöbbet a trigonometriai függvényegyenletek irodalmában. Csupán néhány eredmény vázolására szorítkozva a következőket említjük: J. D'ALEMBERT [9], [10] és S. D. POISSON [53] analicitási feltételek mellett vizsgálják; A. L. CAUCHY [18], J. L. W. V. JENSEN [31] és J. ANDRADE [11] folytonossági feltételek mellett oldják meg; E. HOPF [27] kimutatja, hogy az $|y|\leqq 1$ ill. $y\geqq 1$ tartományokban a nem folytonos megoldások gráfja mindenütt sűrű; I. CARSTOIU [17] a LAPLACE-transzformáció segítségével oldja meg; G. ARRIGHI [14] kimutatja, hogy ha $C(x)$ valamely x helyen, pl. jobbról folytonos, akkor mindenütt folytonos; TH. ANGHELUTZA [13] további megoldásokat mutat differenciálhatóságot feltételezve; L. VIETORIS [66] megadja a legáltalánosabb valós változójú komplex megoldást; S. KUREPA [39] (vö. [37], [38]) HILBERT-térben mérhetőségi feltételek mellett vizsgálja; I. FENYŐ [22] disztribúció-módszere itt is alkalmazható.

A konkrét alkalmazásokra nem térünk ki részletesen.

9. 1. Legyen $Q_0(+)$ tetszőleges (additív módon írt) ABEL*-csoport és Q továbbra is tetszőleges test. Legyen továbbá Q' olyan test, mely Q-ból az összes olyan x elem bővítésével áll elő, mely megoldása az $x^2(a^2-1)=1$ egyenletnek, miközben $a\neq\pm 1$ a Q test elemeit futja be.* A $Q_0(+)$-ban értelmezett „összeadás" általában nem egyezik meg a Q-ban, ill. Q'-ben levővel, de mégsem fog félreértésre vezetni, ha mindkettőt egyformán jelöljük, mert $Q_0(+)$-beli elemekkel csak a szereplő függvények argumentumában, a Q-ban (vagy Q'-ben) levőkkel pedig csak azon kívül fogunk találkozni.

Tekintsük a

$$C(z_1+z_2)+C(z_1-z_2) = 2C(z_1)C(z_2) \tag{9. 1}$$

$$[z_1, z_2, z_1+z_2, z_1-z_2 \in Q_0(+);\ C(z)\colon Q_0(+)\to Q]$$

függvényegyenletet, melyet csak egyszerűen D'ALEMBERT—POISSON-egyenlet néven tart számon az irodalom. Célunk megmutatni, hogy az előzőekben már körvonalazott determinánsos megoldási módszer erre az egyenletre is alkalmazható, s éppen ezért az eddigieknél lényegesen általánosabb eredményt kapunk. Egyszerű számítás mutatja, hogy a $z_1+z_2 \in Q_0(+)$ művelet kommutativitásából csupán $C(z)=C(-z)$ $[z \in Q_0(+)]$ adódik (a $C(z)$ függvényt az analízisből vett mintára továbbra is „páros függvénynek" fogjuk nevezni), az asszociativitás kihasználásából pedig éppenséggel semmit nem nyerünk. A módszer mégis úgy lesz alkalmazható, hogy észrevesszük a bal oldal mindkét argumentumának biszimmetrikus voltát és ennek alapján írunk fel determinánsos egyenletet; ismeretes, hogy a $B(u, v)$ függvényt akkor nevezzük biszimmetrikusnak, ha kielégíti a

$$B[B(u_1, u_2), B(u_3, u_4)] = B[B(u_1, u_3), B(u_2, u_4)]$$

függvényegyenletet.

Érvényes a következő

9. 1. TÉTEL. *A* $Q_0(+)$ ABEL-*csoporton érvényes* (9. 1) *függvényegyenlet összes megoldásai a következő függvények:*

(M7. 1) $$C(z) \equiv 0,$$

(M7. 2) $$C(z) = \tfrac{1}{2}[g(z) + g(z)^{-1}];$$

ahol $g(z) \neq 0$ *a* (2. 26) *típusú*

(9/2. 26) $$g(z_1+z_2) = g(z_1)g(z_2)$$

$$[z_1, z_2, z_1+z_2 \in Q_0(+);\ g(z)\colon Q_0(+) \to Q']$$

CAUCHY-*egyenlet olyan megoldása, melyre*

$$\tfrac{1}{2}[g(z)+g(z)^{-1}]\colon Q_0(+) \to Q \qquad [z \in Q_0(+)]$$

teljesül. Más megoldások nincsenek.

MEGJEGYZÉS. Szembetűnő, hogy a (9. 1) egyenlet összes Q-beli megoldásai csak olyan $g(z)$ függvények segítségével állíthatók elő, melyek a Q-ba *nem* tartozó értékeket is felvehetnek.

BIZONYÍTÁS. Alkalmazzuk a (9. 1) egyenletet a $(z_1+u+v+z_2) \in Q_0(+)$ összegre kétféle módon:

$$C(z_1+u+v+z_2) = 2C(z_1+u)C(v+z_2) - C(z_1+u-v-z_2) =$$
$$= 2C(z_1+u)C(z_2+v) - 2C(z_1-v)C(u-z_2) + C(z_1-v-u+z_2),$$
$$C(z_1+v+u+z_2) = 2C(z_1+v)C(u+z_2) - C(z_1+v-u-z_2) =$$
$$= 2C(z_1+v)C(z_2+u) - 2C(z_1-u)C(v-z_2) + C(z_1-u-v+z_2),$$

tehát a $C(z)$ függvény páros voltát is figyelembe véve a

$$\Delta[C(z_1+u), C(z_2+v)] + \Delta[C(z_1-u), C(z_2-v)] = 0$$

egyenlet írható fel. Ezt (9. 1) alapján a későbbiek szempontjából még könnyebben kezelhető formába írjuk át, azaz

$$\Delta[C(z_1+u),\ C(z_2+v)]+\Delta[2C(z_1)C(u)-C(z_1+u),\ 2C(z_2)C(v)-C(z_2+v)] =$$
$$= \Delta[C(z_1+u),\ C(z_2+v)]+\Delta[-C(z_1+u),\ 2C(z_2)C(v)]+$$
$$+\Delta[2C(z_1)C(u),\ -C(z_2+v)]+\Delta[-C(z_1+u),\ -C(z_2+v)]=0,$$

tehát

(9. 2) $$\Delta[C(z_1+u),\ C(z_2+v)]-\Delta[C(z_1+u),\ C(v)C(z_2)]+$$
$$+\Delta[C(z_1+v),\ C(u)C(z_2)]=0$$

adódik. „Bővítsük" most ezt az egyenletet a szokásos módon $C(z)$-vel, akkor a

(9. 3) $$\Delta[C(z_1+u),\ C(z_2+v),\ C(z_3)] = 0$$

azonosságot kapjuk, ahol két esetet fogunk megkülönböztetni.

MEGJEGYZÉS. Látható, hogy (9. 3)-ban az eddigiektől eltérően *két* paraméter is szerepel. Ez egyrészt kedvező, mert (9. 3) ezáltal „erősebb" megszorítást jelöl ki $C(z)$-re nézve, mint a korábbi hasonló típusú (de csak egy paramétert tartalmazó) determinánsos egyenletek, tehát a megoldás ezért „elvileg" könnyebbé válik. Másrészt azonban a (9. 3)-ból a 2. 2. tétel alapján következő

$$M_1(u,v)C(z+u)+M_2(u,v)C(z+v)+M_3(u,v)C(z) \equiv 0,$$
$$\sum_{i=1}^{3}|M_i(u,v)|>0$$

azonosság túl általános, tehát túl sok (s az esetek nagy többségében megoldást nem adó) aleset vizsgálatát igényelné, de mindenesetre járható út lenne, ha a szokásos módon vizsgálnánk a $C(z+u)$, $C(z+v)$ és $C(z)$ függvények „z szerinti" lineáris függőségét. Nyilván (9. 3) alkalmas specializálása könnyít a helyzeten.

Folytatva a 9. 1. tétel bizonyítását, világos, hogy (9. 3) a

(9. 1A) $$\Delta[C(z_1+v),\ C(z_2)]\equiv 0$$

esetben teljesül. Ha viszont $\Delta[C(z_1+v),\ C(z_2)]\not\equiv 0$, akkor van olyan $v=v_0\in Q_0(+)$ rögzített elem, melyre

(9. 1B) $$\begin{cases}\Delta[C(z_1+u),\ C(z_2+v_0),\ C(z_3)]\equiv 0,\\ \Delta[C(z_1+v_0),\ C(z_2)]\not\equiv 0\end{cases}$$

fennáll. E két eset vizsgálata kimeríti az összes lehetőséget.

9. 1A. Látható, hogy (9. 1A)-ból a

(9. 1A1) $$C(z) \equiv 0,$$

(9. 1.A2) $$C(z+v) = M(v)C(z)$$

esetek egyike következik.

9. 1. A1. A $C(z)\equiv 0$ valóban megoldása (9. 1)-nek. A továbbiakban feltesszük, hogy $C(z)\not\equiv 0$.

9. 1. A2. Ha $C(z+v)=M(v)C(z)$, akkor $\Delta(M, C)=0$ és a feltételezett $C(z)\not\equiv 0$ alapján $M(z)=kC(z)$, tehát

$$C(z_1+z_2)=kC(z_1)C(z_2). \tag{9. 4}$$

A $Q_0(+)$ csoporttulajdonsága folytán z_1+z_2 a teljes $Q_0(+)$ halmazt befutja, így $C(z_1+z_2)\equiv 0$-ból $C(z)\equiv 0$ is következne. Feltehető tehát, hogy (9. 4)-ben $k\neq 0$. Helyettesítsük (9. 4)-et az eredeti (9. 1)-be, akkor a nyert

$$kC(z_1)C(z_2)+kC(z_1)C(-z_2) = 2C(z_1)C(z_2)$$

egyenletből $C(z)=C(-z)\not\equiv 0$ miatt $k=1$ következik. Így $C(z)$ egy, a (2. 26) alakú CAUCHY-egyenletet kielégítő *páros* függvény. Ezt a megoldást (M 7. 2) a $g(z)^2\equiv 1$ esetben tartalmazza. Ugyanis, ha $C(z)\not\equiv 0$ multiplikatív, akkor sehol sem zérus, s ha páros is, akkor $C(z)^2=C(z)C(-z)=C(z)C(z)^{-1}=1$. A továbbiakban feltehetjük, hogy

$$\Delta[C(z_1+v_0),\ C(z_2)]\not\equiv 0. \tag{9. 5}$$

MEGJEGYZÉS. Az a tény, hogy a $C(z)$ függvény lehet egyidejűleg páros és multiplikatív, s mégsem azonosan konstans függvény, első pillanatra meglepő. De valóban a

$$C(z_1+z_2)=C(z_1)C(z_2)=C(z_1)C(-z_2)=C(z_1-z_2) \qquad [z_1, z_2\in Q_2(+)]$$

azonosságból $C(z)\equiv$konst. *csak akkor* következik, ha *minden* $u, v\in Q_0(+)$ elempárhoz található olyan $z_1, z_2\in Q_0(+)$, melyek a $z_1+z_2=u$, $z_1-z_2=v$ egyenletrendszert kielégítik. Pl. az egész számok additív csoportjában a mondott egyenletrendszer nem oldható meg korlátlanul, és ezen a csoporton meg is adható olyan $C(z)\not\equiv$konst., mely egyidejűleg páros és multiplikatív: $C(2n)=1$, $C(2n-1)=-1$, ha n egész.

9. 1. B. A (9. 1. B) esetben már csak az

$$C(z+u)=M_1(u)C(z+v_0)+M_2(u)C(z) \tag{9. 6}$$

egyenletet kell megvizsgálnunk. A változók szimmetriája miatt innen

$$\Delta[M_1(z_1),\ C(z_2+v_0)]+\Delta[M_2(z_1),\ C(z_2)] = 0, \tag{9. 7}$$

$$\Delta[M_1(z_1),\ C(z_2+v_0),\ C(z_3)] = 0,$$

tehát (9. 5) miatt

$$M_1(z) = k_1C(z+v_0)+k_2C(z) \qquad (k_1, k_2=\text{konst.}), \tag{9. 8}$$

továbbá (9. 7)-ből $C(z)\not\equiv 0$ alapján

$$\Delta[k_1C(z_1+v_0)+k_2C(z_1),\ C(z_2+v_0)]+\Delta[M_2(z_1),\ C(z_2)] =$$

$$= \Delta[M_2(z_1)-k_2C(z_1+v_0),\ C(z_2)] = 0$$

$$M_2(z) = k_2C(z+v_0)+k_3C(z) \qquad (k_3=\text{konst.}) \tag{9. 9}$$

következik. Ezeket felhasználva (9. 6) szerint

$$C(z+u) = k_1C(z+v_0)C(u+v_0)+k_2C(z+v_0)C(u)+ \tag{9. 10}$$
$$+k_2C(z)C(u+v_0)+k_3C(z)C(u).$$

A k_1, k_2, k_3 konstansokra további megszorításokat nyerhetünk a szokásos módon is, azaz ha (9. 6)-ot (9. 2)-be írjuk. Itt azonban már letérünk a szokásos útról, mert a $Q_0(+)$ alaphalmaz csoporttulajdonsága lényegesen nagyobb szabadságot biztosít, mint az eddigiekben és így könnyebben is érünk célt. Legyen ugyanis (9. 10)-ben $u=0$, akkor [$C(z)\not\equiv 0$ miatt $C(0)=1$; vö. (9. 1)]

$$C(z) = k_1C(v_0)C(z+v_0)+k_2C(z+v_0)+k_2C(v_0)C(z)+k_3C(z),$$

tehát (9. 5) miatt

$$k_1C(v_0)+k_2 = 0,$$
$$k_2C(v_0)+k_3-1 = 0$$

adódik. E konstansokkal (9. 10) a

$$C(z+u)=k_1[C(z+v_0)-C(v_0)C(z)][C(u+v_0)-C(v_0)C(u)]+C(z)C(u) \tag{9. 11}$$

egyenletre egyszerűsödik. (9. 1) szerint továbbá

$$C(u+2v_0)=2C(u+v_0)C(v_0)-C(u),$$

s ha most (9. 11)-ben u helyett $(u+v_0)$-t írunk, nyerjük a

$$C(z+u+v_0) = k_1[C(z+v_0)-C(v_0)C(z)][2C(v_0)C(u+v_0)-C(u)-C(v_0)C(u+v_0)]+$$
$$+C(z)C(u+v_0)$$

egyenletet. A bal oldal szimmetriája és (9. 5) alapján itt szükségképpen

$$-k_1C(v_0)^2+1 = -k_1, \tag{9. 12}$$

tehát

$$C(z+u+v_0) = k_1C(v_0)[C(z+v_0)C(u+v_0)+C(z)C(u)]- \tag{9. 13}$$
$$-k_1[C(z+v_0)C(u)+C(z)C(u+v_0)].$$

Végül (9. 11), (9. 12), (9. 13) szerint

$$C(z+u+v_0)-C(v_0)C(z+u) = [k_1C(v_0)-C(v_0)-k_1C(v_0)^3]C(z)C(u)+$$
$$+[k_1(v_0)^2-k_1][C(z+v_0)C(u)+C(z)C(u+v_0)],$$

$$C(z+u+v_0)-C(v_0)C(z+u) = [C(z+v_0)-C(v_0)C(z)]C(u)+ \tag{9. 14}$$
$$+[C(u+v_0)-C(v_0)C(u)]C(z).$$

Az eddigiek során a $v_0 \in Q_0(+)$ helyről csupán annyit tételeztünk fel, hogy alkalmasan megválasztva (9. 5) fennáll. A (9. 11)-ben szereplő k_1 „konstans" természetszerűleg *függ* v_0-tól, vö. (9. 12); innen az is látható, hogy $C(v_0)^2 \neq 1$. Tegyük fel most, hogy létezik olyan $v_0 \in Q_0(+)$, melyre *egyidejűleg* (9. 5) és a (9. 12)-ből adódó

$$(9.15) \qquad k_1 = \frac{1}{C(v_0)^2 - 1} = k^2 \qquad (k \in Q;\ k \neq 0)$$

is fennáll, ahol tehát — hangsúlyozzuk — a (9. 15) egyenletnek van Q-ban k-ra nézve megoldása. Bizonyítjuk, hogy ekkor (9. 1) *minden* megoldása (M7. 2) alakú és a szereplő $g(z)$ függvény *is* $Q_0(+)$-t Q-ba képezi le, más szóval (9. 1)-nek az (M7. 2) típusú megoldásai közül csak azok állíthatók elő csupán Q-beli értékeket felvevő $g(z)$ függvényekkel, mely megoldások értékkészletében létezik olyan $C(v_0)$, hogy (9. 5) és (9. 15) egyidejűleg fennáll.

Ha ugyanis (9. 15) fennáll, akkor (9. 11) és (9. 14) szerint

$$kC(z+u+v_0)+[1-kC(v_0)]C(z+u) =$$
$$= [kC(z+v_0)+(1-kC(v_0))C(z)][kC(u+v_0)+(1-kC(v_0))C(u)],$$
$$-kC(z+u+v_0)+[1+kC(v_0)]C(z+u) =$$
$$= [-kC(z+v_0)+(1+kC(v_0))C(z)][-kC(u+v_0)+(1+kC(v_0))C(u)],$$

azaz két (2. 26) alakú CAUCHY-egyenletet nyertünk, tehát

$$kC(z+v_0)+[1-kC(v_0)]C(z) = g_1(z),$$
$$-kC(z+v_0)+[1+kC(v_0)]C(z) = g_2(z),$$

s a $g_1(z)$, $g_2(z)$ függvények — értelmezésük folytán — *csak* Q-beli értékeket vesznek fel. Látható továbbá, hogy (9. 5) miatt $\Delta(g_1, g_2) \not\equiv 0$ is fennáll. Helyettesítsük most a kapott

$$C(z) = \tfrac{1}{2}[g_1(z)+g_2(z)]$$

megoldást a (9. 1)-ből következő $C(2z)+1 = 2C(z)^2$ egyenletbe, akkor

$$\tfrac{1}{2}[g_1(z)^2+g_2(z)^2]+1 = \tfrac{1}{2}[g_1(z)^2+2g_1(z)g_2(z)+g_2(z)^2],$$
$$g_1(z)g_2(z) = 1.$$

Innen látható, hogy $Q_0(+)$ csoporttulajdonsága és a $C(z) \not\equiv 0$ feltevés $g_1(z)g_2(z) \neq 0$ fennállását minden $z \in Q_0(+)$-ra már eleve biztosította, ezért valóban az (M7. 2) megoldást nyertük.

Ha viszont a (9. 15) egyenlet nem oldható meg Q-ban, akkor bővítve Q-t a k $(k^2 = k_1)$ elemmel oly módon, hogy a bővített Q' halmaz továbbra is testet alkosson, az előző gondolatmenet továbbra is érvényes, csupán a $g_1(z)$ függvény, értelmezése folytán, értékeit Q'-ből veszi azzal a megszorítással, hogy

$$C(z) = \tfrac{1}{2}[g_1(z)+g_1(z)^{-1}]:\ Q_0(+) \to Q$$

minden $z \in Q_0(+)$-ra igaz. Mivel (9. 15)-ben $C(v_0)$ a kizárt $C(v_0)^2 \neq 1$ esettől eltekintve *bármely* Q-beli értéket felvehet, ezért (9. 1) *összes* megoldása csak akkor adható meg (2. 26) típusú CAUCHY-egyenletet kielégítő $g(z)$ függvények segítségével, ha Q-t az *összes* olyan x elemmel bővítjük, mely megoldása az $x^2(a^2-1) = 1$ $(a \in Q;\ a^2 \neq 1)$ egyenletnek.

A felsorolt függvények valóban megoldások, így a tétel bizonyítását befejeztük.

9. 2. A most bizonyított tétel alapján már könnyen belátható a következő is:

9. 2. TÉTEL. *Legyen $C(z)\not\equiv 0$ és $C(z)^2\not\equiv 1$, s elégítse ki a* (9. 1) *egyenletet. Ha létezik olyan $v_0\in Q_0(+)$ elem $C(z)$ értelmezési tartományában, melyre a*

$$\Delta[C(z_1+v_0),\, C(z_2)]\not\equiv 0 \tag{9. 5}$$

feltétel teljesül, továbbá van olyan $k\in Q$, mellyel

$$k^2[C(v_0)^2-1]=1 \qquad (k\in Q) \tag{9. 16}$$

fennáll, akkor és csak akkor (9. 1) *megoldásai*

$$C(z)=\tfrac{1}{2}[g(z)+g(z)^{-1}] \tag{9. 17}$$

$$g(z_1+z_2)=g(z_1)g(z_2)\neq 0$$

$$[z\in Q_0(+);\ g(z)\colon Q_0(+)\to Q]$$

alakúak, ahol tehát a $g(z)$ függvény is csak Q-beli értékeket vesz fel.

BIZONYÍTÁS. A (9. 5) és (9. 16) feltételek elégséges volta a megelőző tétel bizonyításából nyilvánvaló. A feltételek szükségességének belátására elég azt kimutatnunk, hogy bármely (9. 17) megoldás esetén *van olyan $v_0\in Q_0(+)$, mellyel* (9. 5) és (9. 16) *egyidejűleg fennáll.* Sőt több is igaz, *minden olyan $v_0\in Q_0(+)$, melyre $C(v_0)^2\neq 1$, a mondott tulajdonságú.*

Egyrészt, ha $C(z)^2\not\equiv 1$ és (9. 17) alakú, akkor $g(z)^2\not\equiv 1$ is fennáll. Ugyanis $g(z)^2\equiv 1$-ből

$$C(z)^2=\left[\frac{g(z)+g(z)^{-1}}{2}\right]^2=\frac{[g(z)^2+1]^2}{4g(z)^2}$$

miatt $C(z)^2\equiv 1$ következne; nyilván ugyanígy $C(v_0)^2\neq 1$ esetben $g(v_0)^2\neq 1$ is következik. Másrészt $g(z)^2\not\equiv a$ (konst.), mivel ellenkező esetben $g(z_1+z_2)^2=$ $=g(z_1)^2g(z_2)^2\neq 0$ miatt $a=a^2$, azaz $a=g(z)^2\equiv 1$ adódna.

Kiszámítjuk a (9. 5)-ben szereplő determináns értékét, így

$$\Delta[C(z_1+v_0),\, C(z_2)]=\frac{1}{4}\,\Delta[g(z_1)g(v_0)+g(z_1)^{-1}g(v_0)^{-1},\, g(z_2)+g(z_2)^{-1}]=$$

$$=\frac{1}{4}[g(v_0)-g(v_0)^{-1}]\Delta[g(z_1),\, g(z_2)^{-1}]=\frac{g(v_0)^2-1}{4g(v_0)}\,\frac{g(z_1)^2-g(z_2)^2}{g(z_1)g(z_2)}\not\equiv 0$$

a kizárt $g(z)^2\not\equiv a$ miatt valóban igaz minden olyan $v_0\in Q_0(+)$-ra, mely esetén $g(v_0)^2\neq 1$, azaz $C(v_0)^2\neq 1$ áll. Tehát (9. 5) szükségképpen teljesül.

Végül (9. 16) abból következik, hogy (9. 17) esetén *minden* $C(v_0)^2-1\neq 0$ Q-ban teljes négyzet:

$$C(v_0)^2-1=\frac{1}{4}[g(v_0)+g(v_0)^{-1}]^2-1=\left[\frac{g(v_0)^2-1}{2g(v_0)}\right]^2\neq 0.$$

Ezzel mindent bizonyítottunk.

10. §. A D'Alembert—Poisson-féle függvényegyenlet általánosításának megoldhatósága

A (9a) egyenlet általánosításaival kapcsolatosan W. H. WILSON [80], VAN DER LYN [44], D. V. IONESCU [32] és I. FENYŐ [22], [23] munkáit említjük, R. SATO [57] pedig a (C) típusú egyenleteket vizsgálja (de megoldást nem ad). Ide sorolható még a [68] dolgozat is.

10. 1. A (9. 1) függvényegyenlet egyik általánosítása az

$$F(z+t)+G(z-t) = \sum_{k=1}^{n} F_k(z)G_k(t) \tag{10. 1}$$

$$[z, t, z+t, z-t \in Q_0(+);\ F(z), G(z), F_k(z), G_k(z):\ Q_0(+) \to Q;\ k = 1, 2, \dots, n]$$

egyenlet; $Q_0(+)$ *itt is tetszőleges (additív módon írt)* ABEL-*csoportot jelent.* Feltesszük, hogy (10. 1)-ben legalább egy ismeretlen függvény is szerepel. Célunk megmutatni, hogy (10. 1) mindig visszavezethető (8. 1) típusú egyenletek megoldására, így (10. 1) típusú egyenletek megoldását is a determinánsos módszerrel megadhatjuk. Érvényes a

10. 1. TÉTEL. *A* $Q_0(+)$ ABEL-*csoporton értelmezett* (10. 1) *függvényegyenlet visszavezethető az*

$$\left.\begin{aligned} A(z+t)+A(z-t) &= 2\sum_{k=1}^{n} P_k(z)R_k(t),\\ B(z+t)-B(z-t) &= 2\sum_{k=1}^{n} Q_k(z)S_k(t),\\ C(z+t)-C(z-t) &= 2\sum_{k=1}^{n} P_k(z)S_k(t),\\ D(z+t)+D(z-t) &= 2\sum_{k=1}^{n} R_k(z)Q_k(t) \end{aligned}\right\} \tag{10. 1'}$$

függvényegyenlet-rendszerre, ahol az $A(z)$, $B(z)$, $P_k(z)$ *és* $R_k(z)$ $(k=1, 2, \dots, n)$ *függvények párosak, a* $C(z)$, $D(z)$, $Q_k(z)$ *és* $S_k(z)$ $(k=1, 2, \dots, n)$ *függvények pedig páratlanok, s e függvények segítségével a* (10. 1)*-ben szereplő függvények a következőképpen állíthatók elő:*

$$F(z)=\tfrac{1}{2}[A(z)+B(z)+C(z)+D(z)],$$

$$G(z)=\tfrac{1}{2}[A(z)-B(z)+C(z)-D(z)],$$

$$F_k(z)=P_k(z)+Q_k(z),\quad G_k(z)=R_k(z)+S_k(z)$$

$$(k=1, 2, \dots, n).$$

BIZONYÍTÁS. Bármely, a $Q_0(+)$ ABEL-csoporton értelmezett $M(z)\,[Q_0(+)\to Q]$ függvény felbontható egy páros és páratlan függvény összegére; ugyanis az

$$M(z)=\tfrac{1}{2}[M(z)+M(-z)]+\tfrac{1}{2}[M(z)-M(-z)]$$

felbontásban az első rész nyilván páros, a második pedig páratlan. Bontsuk fel a (10. 1)-ben szereplő F, G, F_k, G_k $(k=1, 2, \ldots, n)$ függvényeket is ily módon:

$$(10.2)\quad \begin{cases} F(z) = P(z)+Q(z), & P(z) = P(-z), \quad Q(z) = -Q(-z), \\ G(z) = R(z)+S(z), & R(z) = R(-z), \quad S(z) = -S(-z); \\ F_k(z) = P_k(z)+Q_k(z), & P_k(z) = P_k(-z), \quad Q_k(z) = -Q_k(-z), \\ G_k(z) = R_k(z)+S_k(z), & R_k(z) = R_k(-z), \quad S_k(z) = -S_k(-z), \\ & (k = 1, 2, \ldots, n). \end{cases}$$

Írjuk most fel (10. 1) és (10. 2) alapján az

$$(10.1a)\quad P(z+t)+Q(z+t)+R(z-t)+S(z-t) = \sum_{k=1}^{n} [P_k(z)+Q_k(z)][R_k(t)+S_k(t)],$$

$$(10.3)\quad F(z-t)+G(z+t) = \sum_{k=1}^{n} F_k(z)G_k(-t),$$

$$(10.3a)\quad P(z-t)+Q(z-t)+R(z+t)+S(z+t) = \sum_{k=1}^{n} [P_k(z)+Q_k(z)][R_k(t)-S_k(t)]$$

$$(10.4)\quad F(-z+t)+G(-z-t) = \sum_{k=1}^{n} F_k(-z)G_k(t),$$

$$(10.4a)\quad P(z-t)-Q(z-t)+R(z+t)-S(z+t) = \sum_{k=1}^{n} [P_k(z)-Q_k(z)][R_k(t)+S_k(t)],$$

$$(10.5)\quad F(-z-t)+G(-z+t) = \sum_{k=1}^{n} F_k(-z)G_k(-t),$$

$$(10.5a)\quad P(z+t)-Q(z+t)+R(z-t)-S(z-t) = \sum_{k=1}^{n} [P_k(z)-Q_k(z)][R_k(t)-S_k(t)]$$

egyenleteket. Végezzük el továbbá a „(10. 1a)+(10. 3a)+(10. 4a)+(10. 5a)" összevonásokat:

$$2P(z+t)+2P(z-t)+2R(z+t)+2R(z-t) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \{[P_k(z)+Q_k(z)][R_k(t)+S_k(t)]+[P_k(z)+Q_k(z)][R_k(t)-S_k(t)]+$$

$$+[P_k(z)-Q_k(z)][R_k(t)+S_k(t)]+[P_k(z)-Q_k(z)][R_k(t)-S_k(t)]\} = 4\sum_{k=1}^{n} P_k(z)R_k(t),$$

azaz bevezetve az

$$(10.6)\quad A(z) \overset{\text{def}}{=} P(z)+R(z)$$

jelölést az

$$(10.7)\quad A(z+t)+A(z-t) = 2\sum_{k=1}^{n} P_k(z)R_k(t)$$

egyenletet nyerjük, ahol $A(z)$ értelmezéséből kifolyólag *páros* függvény.

Hasonlóan nyerjük „(10. 1a) – (10. 3a) – (10. 4a) + (10. 5a)” összevonásokkal a

$$2P(z+t)-2P(z-t)+2R(z-t)-2R(z+t)=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\{[P_k(z)+Q_k(z)][R_k(t)+S_k(t)]-[P_k(z)+Q_k(z)][R_k(t)-S_k(t)]-$$

$$-[P_k(z)-Q_k(z)][R_k(t)+S_k(t)]+[P_k(z)-Q_k(z)][R_k(t)-S_k(t)]\}=4\sum_{k=1}^{n}Q_k(z)S_k(t)$$

egyenletet, azaz a

(10. 8) $$B(z)\stackrel{\text{def}}{=}P(z)-R(z)$$

jelöléssel

(10. 9) $$B(z+t)-B(z-t)=2\sum_{k=1}^{n}Q_k(z)S_k(t)$$

írható, ahol $B(z)$ nyilván *páros* függvény.

Ugyanígy kapjuk a „(10. 1a) – (10. 3a) + (10. 4a) – (10. 5a)” összevonások útján a

$$2Q(z+t)-2Q(z-t)+2S(z-t)-2S(z+t)=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\{[P_k(z)+Q_k(z)][R_k(t)+S_k(t)]-[P_k(z)+Q_k(z)][R_k(t)-S_k(t)]+$$

$$+[P_k(z)-Q_k(z)][R_k(t)+S_k(t)]-[P_k(z)-Q_k(z)][R_k(t)-S_k(t)]\}=4\sum_{k=1}^{n}P_k(z)S_k(t)$$

egyenletet, tehát

(10. 10) $$C(z)\stackrel{\text{def}}{=}Q(z)-S(z)$$

(10. 11) $$C(z+t)-C(z-t)=2\sum_{k=1}^{n}P_k(z)S_k(t)$$

adódik, ahol $C(z)$ *páratlan* függvény.

Végül a „(10. 1a) + (10. 3a) – (10. 4a) – (10. 5a)” összevonások alapján

$$2Q(z+t)+2S(z+t)+2Q(z-t)+2S(z-t)=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\{[P_k(z)+Q_k(z)][R_k(t)+S_k(t)]+[P_k(z)+Q_k(z)][R_k(t)-S_k(t)]-$$

$$-[P_k(z)-Q_k(z)][R_k(t)+S_k(t)]-[P_k(z)-Q_k(z)][R_k(t)-S_k(t)]\}=4\sum_{k=1}^{n}R_k(z)Q_k(t)$$

adódik, melyet a

(10. 12) $$D(z)\stackrel{\text{def}}{=}Q(z)+S(z)$$

jelöléssel a

(10. 13) $$D(z+t)+D(z-t)=2\sum_{k=1}^{n}R_k(z)Q_k(t)$$

alakba írhatunk, ahol $D(z)$ *páratlan* függvény.

Könnyen látható továbbá, hogy a (10. 7), (10. 9), (10. 11) és (10. 13) egyenletekből álló egyenletrendszer megoldása után (10. 2), (10. 6), (10. 8), (10. 10) és (10. 12) alapján

$$F(z)=\tfrac{1}{2}[A(z)+B(z)+C(z)+D(z)],$$

$$G(z)=\tfrac{1}{2}[A(z)-B(z)+C(z)-D(z)].$$

Végül (10. 2)-ből az $F_k(z)$, $G_k(z)$ függvények is adottak. Ezzel a tételt igazoltuk.

10. 2. A 10. 1. tételből közvetlenül adódik a

10. 1. KOROLLÁRIUM. *A* (10. 1′) *alatti egyenletrendszerből a*

$$\left\{\begin{aligned} C(z+t) &= \sum_{k=1}^{n}[P_k(z)S_k(t)+P_k(t)S_k(z)], \\ D(z+t) &= \sum_{k=1}^{n}[R_k(z)Q_k(t)+R_k(t)Q_k(z)] \end{aligned}\right. \tag{10. 14}$$

egyenletek következnek.

BIZONYÍTÁS. Cseréljük fel ugyanis a (10. 1′) utolsó két egyenletében a z és t változókat, majd adjuk össze a kapott egyenleteket. Mivel a $C(z)$ és $D(z)$ függvények páratlanok, ezért valóban a (10. 14) egyenletekhez jutunk. Ezek már ténylegesen (8. 1) típusúak.

A $P_k(z)$, $Q_k(z)$, $R_k(z)$, $S_k(z)$ $(k=1, 2, \ldots, n)$ függvények ismeretében egyrészt az $F_k(z)$ és $G_k(z)$ $(k=1, 2, \ldots, n)$ függvények, másrészt a (10. 1′)-ben szereplő $A(z)$ és $B(z)$ függvények is meghatározhatók, így az $F(z)$ és $G(z)$ is ismertnek tekinthető.

Megjegyezni kívánjuk, hogy a (10. 14) egyenletek megoldását *lényegesen* könnyíti az a tény, hogy a bennük szereplő függvények mindegyike páros, ill. páratlan. Részleteiben a megoldással itt nem kívánunk foglalkozni.

(Beérkezett: 1966. VI. 19)

EINE ALLGEMEINE METHODE ZUR LÖSUNG EINIGER KLASSEN VON FUNKTIONALGLEICHUNGEN, I—II—III.

Von

E. VINCZE

Die aus drei Teilen bestehende Arbeit skizziert eine allgemeine Lösungsmethode für Funktionalgleichungen von Typen

$$F(x+y)=\sum_{i=1}^{n} G_i(x)\,H_i(y), \tag{A}$$

$$F(x+y)+(x-y)=\sum_{i=1}^{n} H_i(x)K_i(y), \tag{B}$$

$$F(x+y)=\sum_{i=1}^{n} G_i(x)\,H_i(y)\Big/\sum_{j=1}^{m} K_j(x)L_j(y) \tag{C}$$

auf. Man kann aber diese sogenannte *Determinantenmethode* auch für solche Funktionalgleichungssysteme anwenden, die die oben genannten Gleichungen (A), (B), (C) bilden.

Im Kapitel 1 wurde darauf hingewiesen, dass diese (vom gewissen Gesichtspunkte aus elementare) Methode auch im Falle angewendet werden kann, als es für den Definitionsbereich nur Halbgruppen- (eventuell Gruppen-) Eigenschaften bzw. für die Funktionswerte nur Körpereigenschaften vorausgesetzt werden. Im Kapitel 2 wurde eine allgemeinere Definition der linearen Abhängigkeit von Funktionen und einige daraus folgende Eigenschaften angegeben. Ebenda ist auch die *Pexider*sche Funktionalgleichung

$$F(z_1 * z_2) = G(z_1)\, H(z_2) \tag{2. 22}$$

$$[z_1, z_2, z_1 * z_2 \in Q_0(*);\; F(z), G(z), H(z): Q_0 \to Q'(\cdot)]$$

gelöst (Satz 2. 4.), wobei $Q_0(*)$ eine beliebige kommutative Halbgruppe ist, bzw. $Q'(\cdot)$ die auch mit Nullelement „erweiterte" multiplikative Gruppe eines Körpers Q (der Charakteristik 0) bezeichnet.

Im Kapitel 3 sind die Funktionalgleichungen (3. 1) und (3. 23) gelöst (vgl. Sätze 3. 1. und 3. 2.), die je eine Verallgemeinerung von (2. 22) sind. Im Kapitel 4 sind die sogenannte Sinusgleichung (4. 1) und die Cosinusgleichung (4. 12) voneinander unabhängig im quadratischen Körper Q^2 behandelt (vgl. Sätze 4. 1. und 4. 2.). Ebenda wurde auch eine gemeinsame Verallgemeinerung von vorigen Gleichungen (4. 1) und (4. 12) gelöst (vgl. Satz 4. 3.). Im Kapitel 5 sind Funktionalgleichungen mit Funktionen der „bekannten" Eigenschaften untersucht (vgl. Sätze 5. 1—5. 7.).

Im Kapitel 6 ist die Äquivalenz der Funktionalgleichungen (6. 1) und (2. 23) bewiesen, wobei n eine natürliche Zahl bezeichnet. In den Kapiteln 7 und 8 sind Funktionalgleichungssysteme bzw. die allgemeine Gleichung (A) untersucht. Schliesslich wurde die Determinantenmethode in den Kapiteln 9 und 10 auch für die Gleichungen (B) angewendet (vgl. Sätze 9. 1. und 10. 1.), inzwischen auch ein bisher ungelöstes Problem von *S. Kurepa* bezüglich der Gleichung (9. 1) gelöst ist (vgl. Satz 9. 2.). Wir betonen, dass die Lösungen der sämtlichen hier vorkommenden Funktionalgleichungen auf die (früher schon gelösten) *Cauchy*schen Gleichungen zurückgeführt wurden. Das ganze Literaturverzeichnis wurde zum ersten Teile beigefügt.

GYŰRŰK JACOBSON-FÉLE RADIKÁLJÁRÓL

Ott-Heinrich Keller 60. születésnapjára tisztelettel és meleg barátsággal

Írta: KERTÉSZ ANDOR

1. §. Bevezetés

A véges rangú asszociatív algebrák elméletében, amelyet a nem-kommutatív gyűrűelmélet kiindulópontjának tekinthetünk, igen fontos szerepet játszik a radikál fogalma. A radikál az algebra összes nilpotens jobbideáljának az egyesítése, mely olyan egyértelműen meghatározott kétoldali ideál, amelynek nagysága bizonyos értelemben az algebra „irregularitását" méri. Minél kisebb a radikál, annál kevésbé „irreguláris" az algebra. Ha a radikál a lehető legkisebb, vagyis a nullideál, akkor az algebra „reguláris", s szerkezetét jól leírja a WEDDERBURN-féle struktúratétel. Emellett még igaz, hogy a radikál szerinti faktoralgebra radikálja a nullideál.

ARTIN [1] nevéhez fűződik az a felismerés, hogy a véges rangú asszociatív algebrák elméletének jelentős része átvihető olyan gyűrűk esetére, amelyek jobbideáljaikra nézve a minimumkövetelménynek tesznek eleget. Ebben az esetben még a klasszikus radikálfogalom is kielégítő marad. Nem felel meg azonban a célnak ez a radikálfogalom, ha tetszőleges asszociatív gyűrűket tekintünk. Éppen ezért természetes, hogy többen kísérletet tettek a radikálfogalom általánosítására. A feladat megoldása nem egyértelmű. Az irodalomban ma már számos radikálfogalom szerepel, amelyek mindegyike egybeesik a klasszikus radikállal, ha a gyűrű a minimumkövetelménynek tesz eleget.

A különböző radikálok közül talán a JACOBSON-féle radikál bizonyult a leghasznosabbnak a gyűrűelméletben. E dolgozat célja, hogy a nem kifejezetten algebraérdeklődésű olvasó számára is közel hozzuk a gyűrűelmélet e fontos fogalomalkotását, és röviden összefoglaljuk a JACOBSON-féle radikálra vonatkozó legfontosabb ismereteket. A dolgozat főforrása természetesen JACOBSON [4] dolgozata és [5] könyve. Bár a dolgozat összefoglaló jellegű, néhány új megállapítást is tartalmaz. A radikálnak a 12. tételben adott jellemzései közül új az (f) és (g) jellemzés (ezek közül az (f) korábban idegen nyelven publikálva, lásd [7]), továbbá új a féligegyszerű gyűrűket jellemző 15. tétel.

Végül megjegyezzük, hogy a következőkben *radikálon mindig a* JACOBSON-*féle radikált fogjuk érteni.*

2. §. Előkészítés

Ebben a paragráfusban előrebocsátjuk a későbbiek során használt alapfogalmakat és jelöléseket.

Gyűrűn mindig *asszociatív* gyűrűt értünk. Ha azt mondjuk, hogy G R-modulus, az azt jelenti, hogy a G additív csoport az R gyűrűvel mint *jobb oldali* operátortartománnyal van ellátva. A csoport, operátormodulus és gyűrű fogalmára vonatkozó alapvető fontosságú elemi tényeket ismertnek tételezzük fel. (Erre vonatkozólag lásd pl. RÉDEI [8].)

Ha R egységelemes gyűrű ($1 \in R$) és G olyan R-modulus, hogy G bármely g elemére fennáll a

$$g \cdot 1 = g$$

egyenlőség, akkor a G operátormodulust (BOURBAKI [3] szerint) *unitér R-modulusnak* nevezzük.

Ha G olyan R-modulus, amely egyetlen, mondjuk g elemmel van generálva, akkor *ciklikus R-modulusnak* nevezzük. Ekkor G nyilvánvalóan az összes

$$gr + gn \qquad (r \in R)$$

alakú elemekből áll, ahol n racionális egész szám. Ha a G unitér R-modulust a g elem generálja, akkor G-t már a gr ($r \in R$) alakú elemek kimerítik. A ciklikus modulus fogalmának egy finomítását adja a következő definíció: Egy G R-modulust *szigorúan ciklikusnak* hívnak, ha valamely $g \in G$ elemre

$$gR = G.$$

Unitér modulusok esetében „ciklikus" és „szigorúan ciklikus" ugyanazt jelenti.

Legyen H a G R-modulus valamely részmodulusa és Q a G tetszőleges részhalmaza. A $(H: Q)$ hányadoson az R összes olyan r elemének halmazát értjük, amelyekre $Qr \subseteq H$, azaz

$$(H: Q) \stackrel{\text{def}}{=} \{r \mid r \in R;\ q \in R;\ qr \in H \quad \text{minden} \quad q \in Q\text{-ra}\}.$$

$(H: Q)$ az R gyűrű egy jól meghatározott jobbideálja. A $(0: G) = 0$ esetben azt mondjuk, hogy G *hű* R-modulus. Ha $(0: G) = R$, azaz, ha minden $g(\in G)$ és $r(\in R)$ elemre $gr = 0$, akkor G-t *triviális* R-modulusnak hívjuk.

Ha a G R-modulusnak pontosan két különböző részmodulusa van, akkor *egyszerű* R-modulusnak nevezzük. Ha a G egyszerű R-modulus valamely g elemére $gR \neq 0$, akkor $gR = G$, s G minden nulltól különböző eleme ugyanilyen tulajdonságú. Az ilyen modulust *irreducibilis* modulusnak nevezzük.

Ha B az R gyűrű jobbideálja, akkor B R-modulusnak tekinthető, amennyiben az R operátortartomány elemeivel való szorzást az R gyűrűben értelmezett szorzásként definiáljuk. Ha a B jobbideált ebben az értelemben tekintjük R-modulusnak, akkor jelölésére a B_R jelet használjuk. Speciálisan R_R azt jelenti, hogy az R gyűrűt jobb oldali R-modulusnak tekintjük. Operátorizomorfizmus jelölésére — ha az operátortartomány R — az $\cong_R$ jel szolgál.

Egy R gyűrű valamely A részhalmaza által generált ideálját (A)-val, jobbideálját $(A)_j$-vel, balideálját $(A)_b$-vel jelöljük. Legyen A és B az R gyűrű két részhalmaza. Az $A + B$ összegen az összes

$$a + b \qquad (a \in A;\ b \in B)$$

alakú elemek halmazát értjük. Az AB szorzat a

$$\sum a_i b_i \qquad (a_i \in A;\ b_i \in B)$$

alakú *véges* összegek összességét jelenti. Ha n természetes szám, az A n-edik hatványán az

$$A^n \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{A}_{1} \cdot \underbrace{A}_{2} \cdot \ldots \cdot \underbrace{A}_{n}$$

szorzatot értjük.

Ha A és B jobbideál (balideál), ill. ideál R-ben, akkor $A+B$ és AB szintén jobbideál (balideál), ill. ideál R-ben és fennáll

$$A+B=(A, B)_j \quad (=(A, B)_b),$$

ill.

$$A+B=(A, B).$$

Az R gyűrű egy a elemét *nilpotens elemnek* mondjuk, ha valamely m természetes számra $a^m=0$. Hasonlóan egy A jobbideált, balideált, ill. ideált *nilpotensnek* nevezünk, ha valamely m természetes számra $A^m=(0)$. Egy jobbideált, balideált, ill. ideált *nil-jobbideálnak*, *nil-balideálnak ill. nil-ideálnak* hívunk, ha minden eleme nilpotens. Nyilvánvaló, hogy bármely nilpotens jobbideál (balideál, ideál) nil-jobbideál (nil-balideál, nil-ideál), de ennek az állításnak a megfordítottja általában nem igaz.

Azt mondjuk, hogy az R gyűrű az S_ν $(\nu\in\Gamma)$ gyűrűk *szubdirekt összege*, ha minden $\nu(\in\Gamma)$ indexhez van R-nek egy φ_ν epimorfizmusa S_ν-re, úgy hogy ha r az R-nek 0-tól különböző eleme, akkor legalább egy ν-re $r\varphi_\nu\neq 0$. E definícióból könnyen adódik a következő

LEMMA. *Az R gyűrű akkor és csak akkor szubdirekt összege az S_ν $(\nu\in\Gamma)$ gyűrűknek, ha R-nek minden ν-höz van olyan A_ν ideálja, hogy $R/A_\nu\cong S_\nu$ és*

$$\bigcap_{\nu\in\Gamma} A_\nu = (0).$$

Egy R gyűrűt *Artin-gyűrűnek* nevezünk, ha jobbideáljaira nézve minimumkövetelménynek tesz eleget, azaz ha R jobbideáljainak bármely nemüres rendszerében van minimális elem. E definícióból könnyen adódik, hogy R akkor és csak akkor Artin-gyűrű, ha jobbideáljainak bármely csökkenő lánca

$$B_1 \supseteqq B_2 \supseteqq \ldots$$

véges, azaz tagjai egy bizonyos m indextől kezdve megegyeznek: $B_m=B_{m+1}=\ldots$.

Megállapodunk még abban, hogy ha valamely modulus faktormodulusáról, vagy gyűrű faktorgyűrűjéről van szó és x a tekintett modulus vagy gyűrű eleme, akkor $\bar{x}$-sal jelöljük a tekintett faktorstruktúrának azt az elemét, amely mint mellékosztály az x elemet tartalmazza.

3. §. Primitív ideálok és gyűrűk

Az R gyűrű valamely A ideálját *primitív ideálnak* nevezik, ha van olyan G irreducibilis R-modulus, hogy $A=(0: G)$. Ha létezik hű irreducibilis R-modulus, akkor az R gyűrűt *primitív gyűrűnek* hívják. E definícióból következik, hogy egy R gyűrű akkor és csak akkor primitív, ha (0) az R primitív ideálja.

(A fentiekben tulajdonképpen „jobb primitív" gyűrűket és ideálokat definiáltunk, minthogy az alapul vett modulusok jobbmodulusok. Ha balmodulusokat tekintünk, akkor a „balprimitív" gyűrűk és ideálok fogalmához jutunk. Azt a kérdést, hogy e fogalmak különbözőek-e, BERGMAN [2] döntötte el, olyan jobbprimitív gyűrűt konstruálva, amely nem balprimitív.)

A primitív gyűrűk és ideálok kapcsolatát fejezi ki a következő tétel:

1. TÉTEL. *Az R gyűrű A ideálja akkor és csak akkor primitív, ha az R/A faktorgyűrű primitív.*

Bizonyítás. Legyen A az R primitív ideálja. Ekkor van olyan G irreducibilis R-modulus, hogy $(0: G)=A$. A G modulust R/A-modulussá, mégpedig egyszerű R/A modulussá tesszük azáltal, hogy G tetszőleges g és R/A tetszőleges $\bar{r}=r+A$ $(r\in R)$ elemére a $g\bar{r}$ szorzatot

$$g\bar{r} \overset{\text{def}}{=} gr$$

által definiáljuk. Ez a definíció megengedett, mert $\bar{r}=\bar{s}$-ból $r-s\in A$, tehát $g(r-s)=0$, azaz $gr=gs$ következik. Még meg kell jegyeznünk, hogy G mint R/A-modulus hű: ha ugyanis $G\bar{r}=0$, azaz $Gr=0$, akkor $r\in A$, azaz $\bar{r}=\bar{0}$.

Legyen most megfordítva R/A primitív gyűrű. Ekkor létezik egy G hű irreducibilis R/A modulus. A

$$gr \overset{\text{def}}{=} g\bar{r} \qquad (g\in G;\ r\in R)$$

definíció által G R-modulussá válik, amely nyilvánvalóan irreducibilis R-modulus. Tegyük fel, hogy $Gr=0$, azaz $G\bar{r}=0$. Ebből következik, hogy $\bar{r}=\bar{0}$, azaz $r\in A$. Másrészt világos, hogy minden $r\in A$ elemre fennáll $Gr=0$. Tehát $(0: G)=A$, azaz A az R gyűrű primitív ideálja.

Megjegyzendő, hogy nem minden R gyűrűhöz van irreducibilis R-modulus. Pl. ha R zérógyűrű, akkor abból, hogy $R^2=(0)$ és $GR=G$,

$$0=GR^2=(GR)R=GR=G$$

következik. Zérógyűrűnek tehát nincs primitív ideálja.

Abból a célból, hogy egy R gyűrű primitív ideáljait „belsőleg", tehát R-modulusoktól függetlenül jellemezhessük, bevezetjük a következő fogalmat:

Egy R gyűrű valamely B jobbideálját *modulárisnak* nevezzük, ha R-nek van mod B balegységeleme, azaz ha van R-ben olyan e elem, hogy minden R-beli x elemre

$$x-ex\in B$$

teljesül. Hasonlóképpen az R valamely L balideálját modulárisnak hívjuk, ha R-nek van mod L jobbegységeleme. Ha R egy A ideálja egyidejűleg moduláris jobbideál és moduláris balideál, akkor A *moduláris ideál.* Más szavakkal, az A ideál akkor és csak akkor moduláris, ha az R/A faktorgyűrű egységelemes gyűrű. Ha R-nek van balegységeleme, ill. jobbegységeleme, akkor R minden jobbideálja, ill. balideálja moduláris. Az R gyűrű egy olyan maximális jobbideálját, amely moduláris jobbideál, *moduláris maximális jobbideálnak* nevezzük.

2. TÉTEL. *Ha az R gyűrű az A és B moduláris jobbideálok összege, akkor $A\cap B$ szintén moduláris.*

Bizonyítás. Legyen e mod A és f mod B balegységelem. Ekkor

$$e=a_1+b_1$$

és

$$f=a_2+b_2$$

alkalmas $a_1, a_2 \in A$, $b_1, b_2 \in B$ elemekkel. Megmutatjuk, hogy

$$e_0=a_2+b_1$$

mod $A \cap B$ balegységelem. Minden $r(\in R)$ esetén definiáljuk az

$$r^* \stackrel{\text{def}}{=} (e-b_1)r-a_2r$$

elemet. Ez az r^* elem $e-b_1=a_1$ miatt A-ban van. Az r^* elem a következő alakban is írható:

$$r^*=r-(a_2+b_1)r-(r-er).$$

Minthogy $r^* \in A$ és $r-er \in A$, következik, hogy

$$r-(a_2+b_1)r \in A.$$

Másrészt, definiáljuk az

$$r^{**} \stackrel{\text{def}}{=} (f-a_2)r-b_1r$$

elemet. Ekkor hasonlóan következik, hogy

$$r-(a_2+b_1)r \in B,$$

tehát a_2+b_1 valóban mod $A \cap B$ balegységelem, q. e. d.

1. KÖVETKEZMÉNY. *Ha az R gyűrű az A és B moduláris jobbideálok direkt összege, akkor R-nek van balegységeleme.*

Bizonyítás. A 2. tétel szerint $A \cap B=(0)$ moduláris jobbideál, tehát az R-nek van mod (0) balegységeleme, amely nyilvánvalóan balegységelem.

2. KÖVETKEZMÉNY. *Legyen A moduláris jobbideál, M moduláris maximális jobbideál az R gyűrűben. Ekkor az $A \cap M$ szintén moduláris jobbideál.*

Bizonyítás. Ha A benne van M-ben, akkor az állítás nyilvánvaló. Legyen most $A \subsetneqq M$. Ekkor $A+M=R$ és a 2. tétel alapján az $A \cap M$ moduláris, q. e. d.

3. KÖVETKEZMÉNY. *Az R gyűrű véges sok moduláris maximális jobbideáljának a metszete szintén moduláris.*

Bizonyítás. Legyen $M_1, M_2, \ldots, M_n$ az R gyűrű moduláris jobbideálja. Az állítás bizonyítását n szerinti teljes indukcióval végezzük. Az $n=1$ esetben az állítás igaz. Tegyük fel, hogy $n-1$-re is igaz $(n>1)$. Következésképp

$$M'=M_1 \cap M_2 \cap \ldots \cap M_{n-1}$$

moduláris. Minthogy

$$M_1 \cap M_2 \cap \ldots \cap M_n=M' \cap M_n,$$

állításunk azonnal adódik a 2. következményből.

Érdemes e helyen megemlíteni a következő nyitott kérdést:
Két moduláris jobbideál metszete vajon mindig moduláris-e?

Egy R gyűrű moduláris jobbideáljai és a szigorúan ciklikus R-modulusok közötti kapcsolatot fejezi ki a következő tétel:

3. TÉTEL. *Legyen R tetszőleges gyűrű. Ha G szigorúan ciklikus R-modulus: $G=gR$, akkor*

$$G\cong_R R/(0:g),$$

ahol $(0:g)$ *moduláris jobbideál R-ben. Ha megfordítva B az R gyűrű moduláris jobbideálja, akkor van olyan $G=gR$ szigorúan ciklikus R-modulus, hogy*

$$B=(0:g).$$

Bizonyítás. Legyen először $G=gR$. Ekkor az

$$r\to gr \qquad (r\in R)$$

leképezés az R_R R-modulusnak G-re való R-homomorfizmusa. E homomorfizmus magja a $B=(0:g)$ jobbideál. A homomorfizmustétel szerint

$$G\cong_R R/(0:g).$$

Minthogy g maga is G-beli elem, R-nek van olyan e eleme, amelyre

$$g=ge.$$

Ekkor minden R-beli r elemmel

$$gr=ger,$$

azaz

$$g(r-er)=0.$$

Következésképp $r-er\in B$, tehát B moduláris jobbideál.

Megfordítva, legyen B az R gyűrű moduláris jobbideálja. Ekkor R-nek van mod B balegységeleme, mondjuk e, azaz minden $r(\in R)$ elemre

$$r-er\in B. \tag{1}$$

Az R/B faktormodulus szigorúan ciklikus, minthogy (1) miatt

$$\bar{r}-\bar{e}r=\bar{0},$$

azaz

$$\bar{r}=\bar{e}r$$

minden $r(\in R)$-re. Tehát $R/B=\bar{e}R$. Minthogy továbbá — ugyancsak (1) miatt — $r\in B$ akkor és csak akkor teljesül, ha $er\in B$, következik

$$(0:\bar{e})=B,$$

s ezzel a tétel bizonyítását befejeztük.

Ezek után már megfogalmazhatjuk és bebizonyíthatjuk a primitív ideálok „belső" jellemzésére vonatkozó tételt:

4. TÉTEL. *Az R gyűrű A ideálja akkor és csak akkor primitív, ha R-nek van olyan M moduláris maximális jobbideálja, amelyre*

$$A=(M:R).$$

Bizonyítás. Legyen A az R primitív ideálja. Ekkor van olyan G irreducibilis R-modulus, amelyre $A=(0\colon G)$. Ha g a G modulus tetszőleges 0-tól különböző eleme, akkor $G=gR$, tehát a 3. tétel szerint

$$G \cong_R R/(0\colon g), \tag{2}$$

ahol az $M \overset{\text{def}}{=} (0\colon g)$ jobbideál moduláris és a G modulus *egyszerű* volta miatt maximális. Megmutatjuk, hogy $A=(M\colon R)$. Nyilván fennáll $(0\colon G)\subseteq(0\colon g)$, azaz $A\subseteq M$ és így $RA\subseteq M$. Tehát $A\subseteq(M\colon R)$. Ha másfelől $x\in(M\colon R)$, akkor $(R/M)x=\bar{0}$. Ezért (2) alapján $Gx=0$, azaz $x\in A$. Tehát $(M\colon R)\subseteq A$ is teljesül.

Megfordítva, tegyük fel, hogy M moduláris maximális jobbideál R-ben és $A=(M\colon R)$. Ez azt jelenti, hogy R/M irreducibilis R-modulus és $A=(\bar{0}\colon R/M)$. Ebből következik, hogy A primitív ideál.

A most bebizonyított tétel közvetlen következménye az alábbi állítás:

Egy R gyűrű akkor és csak akkor primitív, ha van olyan M moduláris maximális jobbideálja, hogy $(M\colon R)=(0)$.

Most néhány példát adunk meg primitív gyűrűkre. Mindenekelőtt megjegyezzük, hogy minden ferdetest primitív. Ha ugyanis K ferdetest, akkor K-nak egyetlen maximális jobbideálja van, ez a (0) ideál, amely egyben moduláris is és fennáll $(0\colon K)=(0)$. A ferdetestek azonban még távolról sem merítik ki a primitív gyűrűk osztályát. Annyi azonban igaz, hogy *kommutatív primitív gyűrű szükségképpen test.* Legyen ugyanis R kommutatív primitív gyűrű. Ekkor van R-nek olyan M moduláris maximális jobbideálja, hogy $(M\colon R)=(0)$. Minthogy M ebben az esetben ideál, fennáll $RM\subseteq M$, azaz $M\subseteq(M\colon R)=(0)$. Következésképp $M=(0)$. Ezzel megmutattuk, hogy R egyszerű gyűrű. Minthogy a nullideál moduláris, R-nek van egységeleme. Jól ismert tétel szerint bármely egységelemes kommutatív egyszerű gyűrű test, így az R gyűrű test.

A következő példa azt mutatja, hogy egy primitív gyűrű nem szükségképpen ferdetest. Legyen K ferdetest, V egy K feletti vektortér és $\mathcal{T}(V)$ a V tér összes lineáris transzformációinak gyűrűje. Könnyű belátni, hogy V mint (jobb oldali) $\mathcal{T}(V)$-modulus egyszerű és hű. Tehát a $\mathcal{T}(V)$ gyűrű primitív. Ha azonban V-nek legalább két lineárisan független eleme van, akkor $\mathcal{T}(V)$ nem lehet ferdetest, mert akkor van nullosztója.

Bizonyítás nélkül megemlítjük, hogy ha R primitív gyűrű és n természetes szám, akkor az R elemeiből felépített $n\times n$ típusú mátrixok gyűrűje szintén primitív. Speciálisan, ferdetest feletti teljes mátrixgyűrű mindig primitív.

4. §. A radikál

Legyen R tetszőleges gyűrű és $\mathcal{C}(R)$ az összes egyszerű R-modulus osztálya. Minthogy bármely prímszámrendű Abel-csoport triviális R-modulusként tekintve nyilvánvalóan egyszerű R-modulus, a $\mathcal{C}(R)$ osztály egyetlen R gyűrű esetén sem üres. Könnyű belátni, hogy az

$$\{r \mid r\in R;\ Gr=0 \quad \text{minden} \quad G\in\mathcal{C}(R)\text{-re}\}$$

halmaz R-nek kétoldali ideálja. Ezt az ideált az R gyűrű *radikáljának* nevezik.

Adott R gyűrű esetén az R radikálját $\mathfrak{R}(R)$-rel fogjuk jelölni. A definíció alapján világos, hogy

$$\mathfrak{R}(R) = \bigcap_{G \in \mathscr{C}(R)} (0:G).$$

$\mathfrak{R}(R)$-re vonatkozólag két határeset lehetséges: $\mathfrak{R}(R)=(0)$ és $\mathfrak{R}(R)=R$. Az első esetben az R gyűrűt *radikálmentesnek* hívjuk, a második esetben azt mondjuk, hogy R *radikálgyűrű.*

A radikálmentes gyűrűk osztályába tartozik valamennyi primitív gyűrű. Ez világos, mert R primitív volta azt jelenti, hogy van olyan $G \in \mathscr{C}(R)$, hogy $(0: G)=(0)$ teljesül. A primitív gyűrűk azonban korántsem merítik ki a radikálmentes gyűrűk osztályát. Például a racionális egész számok $\mathscr{J}$ gyűrűje radikálmentes, de nem primitív. Ez utóbbi világos, mert $\mathscr{J}$ kommutatív, de nem test. Ahhoz, hogy $\mathscr{J}$ radikálmentes, csupán azt kell meggondolnunk, hogy $\mathscr{C}(\mathscr{J})$ az összes p prímszámra tartalmazza a $\mathscr{Z}(p)$ p-rendű ciklikus csoportot, mint unitér $\mathscr{J}$-modulust. Ekkor $\mathfrak{R}(\mathscr{J}) \subseteq \subseteq \bigcap_p (0: \mathscr{Z}(p)) = \bigcap_p (p) = (0)$.

Felléphet a másik határeset is. Az R gyűrű ugyanis akkor és csak akkor radiálgyűrű, ha bármely egyszerű R-modulus triviális, azaz, ha $\mathscr{C}(R)$ csupa triviális R-modulusból áll. Ez a helyzet pl. akkor, ha R zérógyűrű $(R^2=(0))$. Ha ugyanis valamely G egyszerű R-modulusra $GR=G$ állna fenn, akkor ebből

$$G=GR=(GR)R=GR^2=0$$

adódna, ami nem lehetséges.

A radikál egyik legfontosabb tulajdonságát fejezi ki a következő tétel:

5. TÉTEL. *Bármely R gyűrűre $R/\mathfrak{R}(R)$ radikálmentes gyűrű.*

Bizonyítás. Legyen $G \in \mathscr{C}(R)$. A G R-modulust a

$$g\bar{r} \overset{\text{def}}{=} gr \qquad (g \in G;\ r \in R;\ \bar{r}=r+\mathfrak{R}(R)) \tag{3}$$

definícióval egy $R/\mathfrak{R}(R)$-modulussá tesszük. A $g\bar{r}$ elem azért van egyértelműen meghatározva, mert $\mathfrak{R}(R) \subseteq (0: G)$. A (3) definíció alapján világos, hogy G-nek bármely $R/\mathfrak{R}(R)$-részmodulusa egyben R-részmodulus is. Következésképpen G egyszerű $R/\mathfrak{R}(R)$-modulus. Legyen most $G\bar{r}=0$ minden $\mathscr{C}(R)$-beli G-re. Ekkor $r \in \mathfrak{R}(R)$, azaz $\bar{r}=\bar{0}$. Ebből következik, hogy az $R/\mathfrak{R}(R)$ faktorgyűrű radikálmentes.

6. TÉTEL. *Az R gyűrű $\mathfrak{R}(R)$ radikálja tartalmazza az R összes nilpotens jobbideálját.*

Bizonyítás. Legyen A nilpotens jobbideál R-ben és $k>1$ az A nilpotenciafoka, azaz a legkisebb természetes szám, amelyre $A^k=(0)$. Ha minden $G \in \mathscr{C}(R)$-re $GA=0$ teljesül, akkor A a radikál definíciója miatt $\mathfrak{R}(R)$-ben van. Tegyük fel most, hogy valamely G egyszerű R-modulusra $GA=G$. Ekkor $GA^{k-1}=G$, de $GA^k=0$. Ezt figyelembe véve

$$0=GA^k=(GA)A^{k-1}=GA^{k-1}=G$$

adódik, ami nyilvánvalóan ellentmondást jelent. Tehát ez a második eset nem léphet fel, s így $A \subseteq \mathfrak{R}(R)$.

A radikál fontos „belső" jellemzését adja a következő tétel:

7. TÉTEL. *Egy R gyűrű radikálja az R összes primitív ideáljának metszete.*

Ez a tétel tulajdonképpen a radikál definíciójának egyszerű átfogalmazása a primitív ideál fogalmának segítségével. A teljesség kedvéért azonban még szükséges megjegyeznünk, hogy ha R-nek nincs primitív ideálja, akkor az összes primitív ideál metszetén az egész R gyűrűt értjük. Másrészt ebben az esetben bármely egyszerű R-modulus triviális, tehát R radikálgyűrű. Így a tétel állítása akkor is igaz marad, ha R-nek nincs primitív ideálja.

8. TÉTEL. *Egy R gyűrű akkor és csak akkor izomorf primitív gyűrűk szubdirekt összegével, ha radikálmentes.*

Bizonyítás. Legyen először R radikálmentes gyűrű. Ekkor léteznek olyan $A_\nu (\subseteqq R)$ primitív ideálok, amelyeknek metszete zérus:

$$\bigcap_\nu A_\nu = (0).$$

Az $S_\nu \overset{\text{def}}{=} R/A_\nu$ faktorgyűrűk primitív gyűrűk. A lemma szerint R izomorf az S_ν primitív gyűrűk valamely szubdirekt összegével.

Megfordítva tegyük fel, hogy R az S_ν $(\nu \in \Gamma)$ primitív gyűrűk valamely szubdirekt összege. A lemma szerint az S_ν gyűrűk mindegyike izomorf az R gyűrű valamely A_ν ideálja szerinti faktorgyűrűjével:

$$S_\nu \cong R/A_\nu \qquad (\nu \in \Gamma),$$

továbbá fennáll

$$\bigcap_{\nu \in \Gamma} A_\nu = (0).$$

Az 1. tétel szerint az A_ν ideálok primitívek. Következésképp az R gyűrű radikálmentes.

Minthogy bármely kommutatív primitív gyűrű test, az előző tételből azonnal adódik a

9. TÉTEL. *Kommutatív gyűrű akkor és csak akkor izomorf testek szubdirekt összegével, ha radikálmentes.*

5. §. A körművelet

Legyen e az E gyűrű valamely eleme. Az

$$x - ex \qquad (x \in R)$$

alakú elemek halmaza az R gyűrű egy J jobbideálját alkotja. Ez a jobbideál akkor és csak akkor esik egybe R-rel, ha $e \in J$. Ebben az esetben azt mondjuk, hogy e *jobb-kvázi-reguláris* (rövidítve: j. k. r.). Más szavakkal: az R gyűrű e eleme akkor és csak akkor j. k. r., ha R-ben van olyan e' elem, hogy

$$e + e' - ee' = 0$$

teljesül. Az e' elemet az e *jobb-kvázi-inverzének* hívjuk. Ha van R-ben olyan e'' elem, hogy

$$e + e'' - e''e = 0$$

teljesül, akkor azt mondjuk, hogy e *bal-kvázi-reguláris* (rövidítve: b. k. r.) és e'' az e *bal-kvázi-inverze*. Ha e egyidejűleg j. k. r. és b. k. r., akkor *kvázi-regulárisnak* (rövidítve: k. r.) hívjuk.

Tetszőleges R gyűrűben bevezethetünk egy új műveletet, amelyet *körműveletnek* nevezünk, a következőképpen:

$$a \circ b \overset{\text{def}}{=} a+b-ab \qquad (a, b \in R).$$

Az R gyűrű elemei erre a körműveletre nézve félcsoportot alkotnak, minthogy bármilyen R-beli a, b, c elemekre

$$(a \circ b) \circ c = (a+b-ab) \circ c = a+b+c-ab-ac-bc+abc =$$
$$= a \circ (b+c-bc) = a \circ (b \circ c).$$

Az R gyűrű 0 eleme a körműveletre nézve egységelem:

$$0 \circ a = a \circ 0 = a \quad \text{minden} \quad a (\in R)\text{-ra}.$$

Ha R egységelemes gyűrű és egységeleme 1, akkor minden $a(\in R)$-ra

$$1 \circ a = a \circ 1 = 1.$$

A körművelet segítségével könnyen kifejezhetjük a kváziregularitást. Az

$$e \circ e' = 0$$

egyenlet teljesülése azt jelenti, hogy e j. k. r., e' b. k. r., továbbá e' az e-nek jobb-kvázi-inverze, e az e'-nek bal-kvázi-inverze.

10. TÉTEL. *Az R gyűrű k. r. elemei a körműveletre nézve csoportot alkotnak.*

E tétel bizonyításához szükségünk van a következő segédtételre:

SEGÉDTÉTEL. *Egy x k. r. elem jobb-kvázi-inverzei és bal-kvázi-inverzei egybeesnek és ez az egyértelműen meghatározott kvázi-inverz szintén k. r.*

Bizonyítás. Legyen $x(\in R)$ k. r. elem. Ekkor van olyan R-beli y és z elem, hogy

$$x \circ y = 0 \quad \text{és} \quad z \circ x = 0.$$

Ebből következik

$$z = z \circ 0 = z \circ (x \circ y) = (z \circ x) \circ y = 0 \circ y = y,$$

továbbá, hogy a $z = y$ elem k. r. Ezzel a segédtételt bebizonyítottuk.

Minthogy a körművelet asszociatív, a 10. tétel bizonyításához az imént bizonyított segédtétel alapján már csak azt kell megmutatni, hogy $a \circ b$ k. r., ha a és b is k. r.

Legyen $a \circ a' = a' \circ a = 0$ $(a, a' \in R)$ és $b \circ b' = b' \circ b = 0$ $(b, b' \in R)$. Ekkor

$$(a \circ b) \circ (b' \circ a') = a \circ (b \circ b') \circ a' = (a \circ 0) \circ a' = a \circ a' = 0$$

és hasonlóan

$$(b' \circ a') \circ (a \circ b) = 0,$$

q. e. d.

Az R gyűrű egy A jobbideálját (balideálját) kvázi-regulárisnak (rövidítve: k. r.) nevezzük, ha A minden eleme j. k. r. (b. k. r.).

11. TÉTEL. *Az R gyűrű bármely nil-jobbideálja (nil-balideálja) k. r.*

Bizonyítás. Legyen a az R valamely nilpotens eleme, amelyre

$$a^n = 0 \quad (n \text{ természetes szám})$$

teljesül. Ekkor

$$a \circ b = b \circ a = 0,$$

ahol

$$b \overset{\text{def}}{=} -a - a^2 - a^3 - \dots - a^{n-1}.$$

Tehát minden nilpotens elem k. r.

6. §. A radikál néhány jellemzése

Mielőtt megfogalmaznánk egy olyan tételt, amely a radikál néhány jellemzését adja, bevezetünk egy fogalmat, amely a csoportok Frattini-féle részcsoportjával mutat hasonlóságot.

Legyen S az R gyűrű valamely részhalmaza. Ha $(S)_j = R$, akkor azt mondjuk, hogy S az R gyűrű egy jobbgenerátorrendszere. Jelölje $\Phi_j(R)$ az R összes olyan x elemeinek halmazát, amelyekre sx bármely $s(\in R)$ esetén törölhető az R bármely jobbgenerátorrendszeréből, azaz

$$R = (A, sx)_j \qquad (A \subseteqq R;\ s \in R)$$

-ből mindig $R = (A)_j$ következik. — $(S)_b$-vel jelölve az S által generált balideált, hasonlóan definiáljuk a $\Phi_b(R)$ halmazt. Könnyű belátni közvetlenül is, hogy $\Phi_j(R)$ és $\Phi_b(R)$ ideálok R-ben. Ez a tény azonban az alábbi, a radikál számos jellemzését magába foglaló tétel triviális következményeként is adódik.

12. TÉTEL. *Legyen R tetszőleges gyűrű. Az $\mathfrak{R}(R)$ radikál és az R alábbi részhalmazai egybeesnek:*

(a) *az R összes olyan jobbideáljainak H egyesítése, amelyek a körműveletre nézve csoportot alkotnak;*

(b) *az R összes k. r. jobbideáljainak Q egyesítése;*

(c) *az összes olyan $x(\in R)$ elemek Q_1 halmaza, amelyekre xr minden $r(\in R)$ esetén j. k. r.;*

(d) *az összes olyan $x(\in R)$ elemek Q_2 halmaza, amelyekre az rxs szorzat minden $r, s(\in R)$ esetén j. k. r.;*

(e) *az összes olyan $x(\in R)$ elemek Q_3 halmaza, amelyekre az rxs szorzat minden $r, s(\in R)$ esetén k. r.;*

(f) *$\Phi_j(R)$;*

(g) *az R összes olyan M maximális jobbideáljainak N metszete, amelyekhez $x \notin M$ $(x \in R)$ esetén mindig van olyan $r(\in R)$, hogy $rx \notin M$;*

(h) *az R összes moduláris maximális jobbideáljainak N' metszete;*

(i) *az R összes olyan x elemeinek D halmaza, amelyekre az Rx balideál benne van R minden maximális jobbideáljában;*

(j) *az R összes primitív jobbideáljainak P metszete.*

KÖVETKEZMÉNY. *Ha az* (a), ..., (j) *tulajdonságokkal definiált halmazok mindegyikéhez megalkotjuk a „duális halmazt" oly módon, hogy a szereplő „jobb-" ill. „balfogalmakat" mindenütt a megfelelő „bal-" ill. „jobbfogalmakkal" helyettesítjük, akkor az így nyert halmazok is egybeesnek az* $\mathfrak{R}(R)$ *radikállal.*

Bizonyítás. A következmény azonnal adódik a tételből, mert a Q_3 halmaz a fenti értelemben „önduális".

A 7. tétel értelmében $\mathfrak{R}(R)=P$. Így csak azt kell bizonyítanunk, hogy az R gyűrű (a), ..., (j) által definiált részhalmazai egybeesnek.

1. $H\subseteq Q$: R minden olyan jobbideálja, amely a körműveletre nézve csoport, k. r. jobbideál, következésképp $H\subseteq Q$.

2. $Q\subseteq Q_1$: Q minden x eleme az R valamely k. r. jobbideáljában van, tehát az xr szorzat minden $r(\in R)$-re j. k. r.

3. $Q_1\subseteq Q_2$: Legyen $x\in Q_1$. Ekkor minden $r, s(\in R)$ elemre az xsr elem j. k. r., tehát van olyan $y(\in R)$, hogy

$$xsr+y-xsry=0.$$

Ekkor

$$rxs+(ryxs-rxs)-rxs(ryxs-rxs)=r(xsr+y-xsry)xs=0,$$

azaz az rxs szorzat is j. k. r. elem.

4. $Q_2\subseteq Q_3$: Legyen $x\in Q_2$; $r, s\in R$. Minthogy az rxs szorzat j. k. r., van az R gyűrűben olyan y elem, amelyre

$$rxs+y-rxsy=0$$

érvényes. Ebből

$$y=rxsy-rxs=rx(sy-s)$$

adódik, ami azt mutatja, hogy y nemcsak b. k. r., hanem j. k. r. is. A segédtétel szerint rxs az y kvázi-inverze és rxs szintén k. r. elem.

5. $Q_3\subseteq \Phi_j(R)$: Legyen $x\in R$ és $x\notin \Phi_j(R)$. Megmutatjuk, hogy $x\notin Q_3$. Az R gyűrűnek van olyan s eleme és B részhalmaza, hogy

$$(sx, B)_j=R \quad \text{és} \quad sx\notin (B)_j.$$

A KURATOWSKI—ZORN-féle lemma alapján R-nek van olyan jobbideálja, amely maximális a

$$B\subseteq M, \qquad sx\notin M$$

tulajdonságokra nézve. Minthogy minden R-beli $z\notin M$ elemre

$$sx\in(z, M)_j$$

érvényes,

$$(sx, B)_j\subseteq(z, M)_j\subseteq R=(sx, B)_j,$$

tehát

$$(z, M)_j=R,$$

azaz M R-nek maximális jobbideálja. Az R/M faktormodulus egyszerű és $\bar{s}x\neq\bar{0}$ miatt irreducibilis. Van tehát olyan $r(\in R)$ elem, hogy

$$\bar{s}xr=\bar{s}\neq\bar{0} \qquad (\bar{0}=M). \tag{4}$$

Tegyük fel, hogy $x \in Q_3$. Ekkor van olyan $y(\in R)$, hogy

$$xrxr + y - xrxry = 0.$$

Ekkor

$$(\bar{s}xr)xr = \bar{s}xr = \bar{s}$$

és

$$(\bar{s}xr)xr = \bar{s}(xrxry - y) = \bar{s}y - \bar{s}y = \bar{0},$$

azaz $\bar{s} = \bar{0}$. Ez azonban (4) miatt nem lehetséges. Az $(xr)xr$ elem tehát nem j. k. r., s így $x \notin Q_3$.

6. $\Phi_j(R) \subseteqq N$: Legyen $x \in R$ és $x \notin N$. Megmutatjuk, hogy $x \notin \Phi_j(R)$. Az R gyűrűnek van olyan M maximális jobbideálja, hogy $x \notin M$ és valamilyen $r(\in R)$-re $rx \notin M$. Az M jobbideál maximalitásából következik, hogy

$$(M, rx)_j = R.$$

Az $\langle M, rx \rangle$ halmaz azonban az R gyűrű olyan jobbgenerátorrendszere, amelyből az rx elem nem törölhető. Tehát $x \notin \Phi_j(R)$.

7. $N \subseteqq N'$: Legyen B az R gyűrű egy moduláris maximális jobbideálja és e balegységelem mod B. Ha $x \notin B$, akkor $ex \notin B$. Következésképp $N \subseteqq N'$.

8. $N' \subseteqq D$: Ha $x \in R$ és $x \notin D$, akkor van olyan M maximális jobbideál, hogy valamilyen $r(\in R)$ elemre $rx \notin M$. Az R/M faktormodulus egyszerű és $\bar{r}x \neq \bar{0}$ miatt szigorúan ciklikus. A $B = (\bar{0} : \bar{r})$ moduláris jobbideál (lásd a 3. tételt) szintén maximális és $x \notin B$. Ebből következik, hogy $x \notin N'$.

9. $D \subseteqq P$: Legyen $x \in R$ és $x \notin P$. Ekkor az R gyűrűnek van olyan I primitív ideálja, amely nem tartalmazza x-et. A 4. tétel szerint létezik egy M (moduláris) maximális jobbideál, amelyre $I = (M : R)$. Az $x \notin I$ relációból következik $Rx \nsubseteqq M$, következésképp $x \notin D$.

10. $P \subseteqq H$: Elég megmutatnunk, hogy P minden eleme k. r., ebből ugyanis már következik, hogy P a körműveletre nézve csoport. Tegyük fel, hogy bizonyítandó állításunkkal ellentétben $x(\in P)$ nem k. r. Ekkor

$$x \notin \{y - xy \mid y \in R\}.$$

Legyen M az R gyűrű olyan jobbideálja, amely az

$$\{y - xy \mid y \in R\} \subseteqq M \quad \text{és} \quad x \notin M$$

tulajdonságokra nézve maximális (KURATOWSKI—ZORN lemmája alapján ilyen M létezik). Most megmutatjuk, hogy M az R maximális jobbideálja. Legyen $z \in R$ és $z \notin M$. Ekkor

$$x \in (M, z)_j.$$

Ebből tetszőleges $y(\in R)$ elemre

$$y = (y - xy) + xy \in (M, z)_j,$$

azaz

$$R = (M, z)_j$$

következik. M tehát maximális jobbideál R-ben. A $G = R/M$ modulus egyszerű, sőt irreducibilis R-modulus. Valóban, $x^2 - x \in M$-ből és $x \notin M$-ből következik $x^2 \notin M$, tehát $\bar{x}x \neq \bar{0}$ ($\bar{x}, \bar{0} \in G$). Az $I = (0 : G)$ ideál ezek szerint primitív és $x \notin I$.

Ezáltal ellentmondásba kerültünk azzal a feltevésünkkel, hogy $x \in P$. Következésképp P minden x eleme j. k. r., tehát van olyan $x'(\in R)$, hogy

$$x + x' - xx' = 0.$$

Ebből $x' \in P$ következik, tehát x' k. r. A segédtétel alapján adódik, hogy x szintén k. r.

Ezzel a 12. tétel bizonyítását befejeztük.

Érdemes a tétel néhány következményét megemlíteni.

1. KÖVETKEZMÉNY. *Egy R gyűrűre ekvivalensek a következő feltételek:*

(I) *R radikálgyűrű;*

(II) *R minden eleme k. r.;*

(III) *R-nek nincs moduláris maximális jobbideálja (balideálja);*

(IV) *R-nek nincs primitív ideálja.*

Minthogy egy halmaz részhalmazai üres rendszerének metszetén magát az egész halmazt értjük, állításunk nyilvánvalóan igaz.

2. KÖVETKEZMÉNY. *Egy balegységelemes (jobbegységelemes) gyűrű radikálja a gyűrű összes maximális jobbideáljának (balideáljának) metszete. Egy gyűrű balegységeleme (jobbegységeleme) tehát soha sincs a radikálban.*

Ez az állítás azonnal adódik az $\mathfrak{R}(R) = N'$ egyenlőségből, minthogy balegységelemes (jobbegységelemes) gyűrű bármely jobbideálja (balideálja) moduláris.

3. KÖVETKEZMÉNY. *Egy R gyűrű radikálja tartalmazza az R összes nil-jobbideálját és nil-balideálját.*

Ez az állítás a 11. tétel és az $\mathfrak{R}(R) = Q$ egyenlőség következménye.

4. KÖVETKEZMÉNY. *Egy R kommutatív gyűrű radikálja az R összes olyan A maximális ideáljának metszete, amelyre $x^2 \in A$-ból $x \in A$ következik.*

Bizonyítás. Az R kommutatív gyűrű A ideálja akkor és csak akkor primitív, ha az R/A faktorgyűrű primitív, tehát test. Viszont könnyű belátni, hogy R/A akkor és csak akkor test, ha A az R maximális ideálja és $x^2 \in A$-ból $x \in A$ következik. Ezek után az $\mathfrak{R}(R) = P$ egyenlőségből az állítás azonnal adódik.

Példaként határozzuk meg a K test feletti formális hatványsorok $K[[x]]$ gyűrűjének a radikálját. $K[[x]]$ egységelemes kommutatív gyűrű, s mint jól ismert, egyetlen maximális ideálja van: (x). Így a 12. tétel 2. következménye szerint $\mathfrak{R}(K[[x]]) = (x)$.

Lássunk egy további példát! Legyen R az összes $\frac{2x}{2y+1}$ alakú racionális számok gyűrűje, ahol x és y egész számok, továbbá $2x$ és $2y+1$ relatív prímek. R kommutatív radikálgyűrű, mert minden eleme q. r.:

$$\frac{2x}{2y+1} \circ \frac{-2x}{2(-x+y)+1} = 0.$$

E példa külön érdekessége, hogy R egyetlen eleme sem nilpotens.

7. §. Artin-gyűrűk radikálja

Az előzőkben bebizonyítottuk, hogy egy R gyűrű radikálja az R összes nilpotens jobbideálját, sőt nil-jobbideálját (balideálját) tartalmazza. Most azt mutatjuk meg, hogy ha R Artin-gyűrű, akkor $\mathfrak{R}(R)$ maga is nilpotens, s ebből következőleg Artin-gyűrű esetében „nilpotens" és „nil" ugyanazt jelenti.

13. TÉTEL. *Bármely Artin-gyűrű radikálja nilpotens.*

Bizonyítás. Legyen R Artin-gyűrű és tekintsük az $\mathfrak{R}(R)$, $(\mathfrak{R}(R))^2$, $(\mathfrak{R}(R))^3$, ... ideálok nem növekvő

$$\mathfrak{R}(R) \supseteqq (\mathfrak{R}(R))^2 \supseteqq (\mathfrak{R}(R))^3 \supseteqq \dots$$

láncát. Mivel R Artin-gyűrű, van olyan m természetes szám, hogy

$$(\mathfrak{R}(R))^m = (\mathfrak{R}(R))^{m+1} = \dots = (\mathfrak{R}(R))^{2m}.$$

Jelöljük $(\mathfrak{R}(R))^m$-et Q-val. Ekkor

$$Q^2 = Q.$$

Ha $Q = (0)$, akkor a bizonyítás már készen is van. Tegyük fel, hogy $Q \neq (0)$, s tekintsük az R összes olyan J jobbideáljának $\mathfrak{M}$ halmazát, amelyre

$$JQ = J \neq (0)$$

teljesül. Minthogy $Q^2 = Q$ miatt $\mathfrak{M}$ nem üres, és R Artin-gyűrű, $\mathfrak{M}$-nek van minimális eleme, mondjuk A, amelyre tehát

$$AQ = A \neq (0) \tag{5}$$

teljesül. Jelöljük A_0-val az A összes olyan a elemeinek halmazát, amelyekre $aQ = (0)$. Minthogy Q kétoldali ideál, az A_0 jobbideál R-ben. Legyen y az A-nak olyan eleme, mely nem eleme A_0-nak. Ekkor

$$(yQ)Q = yQ^2 = yQ \neq (0).$$

Az A jobbideál definíciója és az $yQ \subseteqq A$ reláció alapján azonnal adódik, hogy $yQ = A$. Tekintsük most az A/A_0 R-modulust. Ez (5) miatt legalább kételemű, s mivel minden $y \in A$, $y \notin A_0$ elemre $yQ = A$, az A/A_0 modulus egyszerű, sőt irreducibilis. Ugyancsak (5)-ből következik, hogy

$$(A/A_0)Q = A/A_0 \quad (\neq \bar{0}),$$

ami $Q \subseteqq \mathfrak{R}(R)$ miatt ellentmondásban van a radikál definíciójával. Tehát szükségképpen $Q = (0)$, azaz $\mathfrak{R}(R)$ valóban nilpotens.

KÖVETKEZMÉNY. *Egy Artin-gyűrű bármely nil-jobbideálja (nil-balideálja) nilpotens.*

8. § Algebrák radikálja

Legyen R egységelemes kommutatív gyűrű és A egy R-algebra. Az A algebra valamely R-jobbideálját *modulárisnak* nevezzük, ha az mint az A gyűrű jobbideálja moduláris. Az *A algebra radikálján* az A összes moduláris maximális R-jobbideáljának metszetét értjük. (Ha A-nak nincs moduláris maximális R-jobbideálja, akkor A radikálja maga A.)

14. TÉTEL. *Az A R-algebra radikálja egybeesik az A-nak mint gyűrűnek radikáljával.*

Bizonyítás. Elegendő azt megmutatnunk, hogy A minden M moduláris maximális jobbideálja R-jobbideál, azaz, hogy $MR \subseteq M$. Tegyük fel, hogy valamely $\lambda(\in R)$ és $x \in M$ elemre

$$x\lambda \notin M$$

és hogy e mod M balegységelem. Ekkor alkalmas $m(\in M)$ és $a(\in A)$ elemekre

$$e = m + (x\lambda)a = m + x(a\lambda) \in M,$$

amiből $M = A$ következik. Ez azonban ellentmondásban van M definíciójával. Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

KÖVETKEZMÉNY. *Egy K test feletti véges rangú A algebra radikálja nilpotens.* A-nak mint végesdimenziós J-vektortérnek van kompozíciósora, így A K-jobbideáljaira nézve kielégíti a minimumkövetelményt. A következmény állítása ekkor hasonlóan bizonyítható, mint a 13. tétel.

9. §. A féligegyszerű gyűrűk egy jellemzése

Egy radikálmentes Artin-gyűrűt *féligegyszerű gyűrűnek* nevezünk. A féligegyszerű gyűrűket számos nevezetes tulajdonság tünteti ki az összes asszociatív gyűrűk kategóriájában. Többek között érvényes a következő tétel:

Egy gyűrű akkor és csak akkor féligegyszerű, ha van balegységeleme és véges sok minimális jobbideáljának direkt összege (NOETHER [8]).

Ha egy R gyűrű radikálmentes, akkor — mint láttuk — az összes moduláris maximális jobbideáljainak metszete a (0) ideál. Ha R ezen felül még Artin-gyűrű is, akkor a jobbideálokra vonatkozó minimumkövetelmény miatt nyilvánvalóan kiválasztható R-nek *véges* sok olyan moduláris maximális jobbideálja, amelyek metszete zérus. Megmutatjuk, hogy ez a feltétel nemcsak szükséges, hanem elegendő is ahhoz, hogy R féligegyszerű gyűrű legyen. Legyen R olyan gyűrű, amelyben véges sok moduláris maximális jobbideál metszete a zérusideál. Ekkor a 2. tétel 3. következménye szerint R-nek van balegységeleme. Másrészt felhasználva azt a tételt, hogy ha egy gyűrűben véges sok maximális jobbideál metszete (0), akkor a gyűrű véges sok minimális jobbideál direkt összege (KERTÉSZ [6], 5. tétel), azt kapjuk, hogy R véges sok minimális jobbideál direkt összege. Mármost a féligegyszerű gyűrűk NOETHER-féle jellemzéséből következik, hogy R féligegyszerű. Ezzel bebizonyítottuk a következő tételt:

15. TÉTEL. *Egy gyűrű akkor és csak akkor féligegyszerű, ha van véges sok olyan moduláris maximális jobbideálja, amelyek metszete zérus.*

IRODALOMJEGYZÉK

[1] ARTIN, E.: Zur Theorie der hyperkomplexen Zahlen, *Abh. Hamburg* **5** (1927), 251—260.
[2] BERGMAN, G. M.: A ring primitive on the right but not on the left, *Proc. Amer. Math. Soc.* **15** (1964), 473—475; Erratum, *Proc. Amer. Math. Soc.* **15** (1964), 1000.
[3] BOURBAKI, N.: Éléments de mathématique, I. Partie, Livre II: Algèbre, *Paris,* 1947.
[4] JACOBSON, N.: The radical and semi-simplicity for arbitrary rings, *Amer. J. Math.* **67** (1945), 300—320.
[5] JACOBSON, N.: Structure of rings, (Coll. Publ.) *Providence,* 1956.
[6] KERTÉSZ, A.: Féligegyszerű gyűrűk mint operátortartományok, *MTA Mat. Fiz. Oszt. Közl.* **5** (1955), 149—186.
[7] KERTÉSZ, A.: A characterization of the Jacobson radical, *Proc. Amer. Math. Soc.* **14** (1963), 595—597.
[8] NOETHER, E.: Hyperkomplexe Grössen und Darstellungstheorie, *Math. Z.* **30** (1929), 641—692.
[9] RÉDEI, L.: Algebra I., *Budapest,* 1954.

(Beérkezett: 1966. VII. 27.)

Technikai szerkesztő: L. Ziermann Margit
A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója Műszaki szerkesztő: Farkas Sándor
A kézirat nyomdába érkezett: 1966. X. 10. – Terjedelem: 5,50 (A/5) ív, 2 ábra

66-6410 Szegedi Nyomda

Ára: 12,– Ft

TARTALOMJEGYZÉK

INDEX

1966. december 31.

Index: 26 498