A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK

KÖZLEMÉNYEI

XIV. KÖTET

AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST
1964

TARTALOMJEGYZÉK

A KÜLFÖLDI SZAKIRODALOMBÓL

Szegedi Nyomda Vállalat 64-1211

A MAGYAR
TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK
OSZTÁLYÁNAK

KÖZLEMÉNYEI

XIV. KÖTET 1. SZÁM

AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST
1964

III. OSZT. KÖZL.

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK
KÖZLEMÉNYEI

XIV. kötet 1. szám

Szerkesztőség: Budapest, V., Nádor utca 7.

Kiadóhivatal: Budapest, V., Alkotmány utca 21.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleménye, változó terjedelmű füzetekben jelennek meg, és az Akadémia III. Osztályának felolvasóülésén bemutatott matematikai dolgozatokat, valamint egyéb dolgozatokat, referátumokat, továbbá az Osztály munkájára vonatkozó közleményeket, könyvismeretetéseket stb. közölnek. Évenként egy kötet jelenik meg (négy szám alkot egy kötetet).

Kéziratok a következő címre küldendők:

A Magyar Tudományos Akadémia
III. Osztályának Közleményei.
Budapest, V., Nádor u. 7.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi levelezés.

Minden szerzőt 100 különlenyomat illet meg megjelent munkájáért.

Közlésre el nem fogadott kéziratokat a szerkesztőség lehetőleg visszajuttat a szerzőhöz, de felelősséget a beküldött kéziratok megőrzéséért vagy továbbításáért nem vállal.

A Közlemények előfizetési ára kötetenként belföldi címre 40 forint, külföldi címre 60 forint. Belföldi megrendelések az Akadémiai Kiadó, Budapest, V., Alkotmány u. 21. (Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 05-915-111-46), külföldi megrendelések a „Kultúra" Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalat, Budapest, I., Fő utca 32. (Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 43-790-057-181) útján eszközölhetők.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztálya a következő idegen nyelvű folyóiratokat adja ki:

1. Acta Mathematica Hungarica
2. Acta Physica Hungarica.

EMLÉKEZÉS CZIPSZER JÁNOSRA

1963 júniusában nagy veszteség érte a magyar matematikusokat s közelebbről a Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézetét: CZIPSZER JÁNOS, 33 éves korában tragikus körülmények között, váratlanul elhunyt.

Nagy kár, hogy ennek sorra kellett kerülnie, hogy ma már nem tekinthetjük CZIPSZER JÁNOST annak, aminek az 1959. évi GRÜNWALD GÉZA emlékdíj odaítélésére kiküldött bizottság munkássága méltatása során tekintette: „*az analízis hazai kutatóinak egyik legtehetségesebb, eredményekben gazdag pálya előtt álló tagja*"-ként.

Matematikai dolgozatai „*eredeti, ötletes gondolkodásmódja és elegancia iránti érzéke*" mellett — szintúgy mint a köznapi élet megnyilvánulásaiban — rendkívül erős kritikai szellemről tanúskodnak.

„*Az utóbbit talán túlzásba is viszi*" — olvasható az említett méltatásban — „*mikor eredményeinek közlésénél végső kicsiszoltságukig, minden részletükben való kielemzésükig vár és ha az óhajtott eleganciát elérni nem sikerül, inkább el is áll a közléstől.*" „*... ismerve* CZIPSZER JÁNOS *publikálatlan szép és érdekes eredményeit, mégis kívánatosnak kell mondanunk, hogy eddig közölt figyelemre méltó munkáit mielőbb továbbiakkal egészítse ki.*"

Ha CZIPSZER JÁNOS az utóbbinak ma már nem is tud eleget tenni, e sorok írója úgy véli, hogy helyette mindazok, akiknek birtokában állnak publikálatlan „szép és érdekes" eredményei, nem cselekszenek akarata ellenére, ha azokat közzéadják.

Az alábbiakban ismertetésre kerül egy CZIPSZER által vizsgált probléma, mely bepillantást nyújt eredeti, ötletes, szellemes gondolatvilágába.

*

Maga a probléma a következő: Haladjon a P pont a síkban egy adott P_0 pontból $t=0$ időpontban kiindulva olyan pályán, hogy ha állandó pályasebessége v és a Q pont egy adott Q_0 pontból ugyanezen időpontban elindulva tetszőleges félegyenesen állandó $c<v$ sebességgel mozog, a két pont előbb-utóbb feltétlenül találkozzék, bármelyik Q_0-ból kiinduló félegyenesen történik is Q mozgása.

E többek által ismert probléma megoldásának gondolatmenete a következő: A $t=0$ időpillanatban induljon el P a Q_0 irányába. Ha Q ugyanekkor P_0 irányába indult volna el, akkor $t_0=\dfrac{\overline{Q_0P_0}}{v+c}=\dfrac{d}{v+c}$ idő elteltével az L_0 pontban kellene találkozniok. Tegyük fel, hogy az L_0 pontban nem találkoztak. Minthogy a t_0 idő elteltével P és Q a Q_0 ponttól egyenlő távolságra van, ezért ha P az L_0 pontból a továbbiakban úgy halad, hogy a Q_0 ponttól való távolsága minden időpontban megegyezik a Q_0P_0 félegyenessel α szöget bezáró egyenes pályán állandó c sebességgel mozgó Q pontnak ugyanazon ponttól való távolságával, akkor mindenképpen találkoznia kell a két pontnak. Ez esetben P pályamenti sebessége a sík Q_0 kezdőpontú polárkoordinátáinak segítségével így írható:

$$v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2.$$

Minthogy $r = ct$, azért

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\sqrt{v^2-c^2}}{c}\cdot\frac{1}{t}.$$

A $\varphi(t_0)=0$ kezdeti feltétel mellett kapjuk, hogy

$$\varphi = \frac{\sqrt{v^2-c^2}}{c}\ln\frac{t}{t_0},$$

innen

(1) $$t = t_0 e^{\varphi\frac{c}{\sqrt{v^2-c^2}}} = \frac{d}{v+c}e^{\varphi\frac{c}{\sqrt{v^2-c^2}}}.$$

Ez tehát azt jelenti, hogy P-nek L_0-ból logaritmikus spirális görbén kell mozognia.

Czipszer János e problémával kapcsolatban a következő kérdéseket vizsgálta:

Ha most φ jelöli a Q pályájának a Q_0P_0 félegyenessel bezárt szögét, akkor legyen $t(\varphi)$ az az időtartam, amely a vizsgált pályán mozgó P pontnak Q-val való első találkozásáig eltelik. Legyen $T = \sup\{t(\varphi): 0 \leqq \varphi < 2\pi\}$. Különböző, az előbbi kikötéseknek eleget tevő pályákhoz más és más T érték fog tartozni; kérdés, van-e és ha van, melyik pályán érhető el T minimuma.

Megmutatjuk, hogy az (1) pálya szolgáltatja ezt a minimumot.

Tekintsünk egyet a vizsgált pályák közül és tekintsük a hozzátartozó $t\left(\frac{2\nu\pi}{n}\right)$ számokat valamilyen n természetes szám és $0 \leqq \nu \leqq n-1$ mellett. Ezek növekvő sorrendbe rendezve legyenek $t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1}$, legyen továbbá P_ν az a pont, amelyben P a t_ν pillanatban tartózkodik. Ekkor

$$\overline{P_{\nu-1}P_\nu}^2 = c^2t_\nu^2 + c^2t_{\nu-1}^2 - 2c^2t_\nu t_{\nu-1}\cos(\varphi_\nu - \varphi_{\nu-1}),$$

ahol φ_ν jelöli a P_ν pont polárszögét. Minthogy a φ_ν szögek $\frac{2k\pi}{n}$ alakúak, azért innen

$$\overline{P_{\nu-1}P_\nu}^2 \geqq c^2t_\nu^2 + c^2t_{\nu-1}^2 - 2c^2t_\nu t_{\nu-1}\cos\frac{2\pi}{n}.$$

Viszont nyilván

$$\overline{P_{\nu-1}P_\nu} \leqq v(t_\nu - t_{\nu-1}),$$

így

$$c^2(t_\nu^2 + t_{\nu-1}^2) - 2c^2t_\nu t_{\nu-1}\cos\frac{2\pi}{n} \leqq v^2(t_\nu - t_{\nu-1})^2,$$

ahonnan

$$v^2-c^2\cos\frac{2\pi}{n}\leqq(v^2-c^2)\frac{(t_\nu^2+t_{\nu-1}^2)}{2t_\nu t_{\nu-1}}.$$

Bevezetve a $\tau_\nu=\frac{t_\nu}{t_{\nu-1}}$ jelölést és figyelembe véve a

$$\cos\frac{2\pi}{n}=1-2\sin^2\frac{\pi}{n}$$

összefüggést, az

$$1+\frac{c^2}{v^2-c^2}2\sin^2\frac{\pi}{n}\leqq\frac{1}{2}\left(\tau_\nu+\frac{1}{\tau_\nu}\right)$$

egyenlőtlenséget kapjuk. Innen

$$1+\frac{2c^2}{v^2-c^2}\sin^2\frac{\pi}{n}+\sqrt{\frac{4c^2}{v^2-c^2}\sin^2\frac{\pi}{n}+\frac{4c^4}{(v^2-c^2)^2}\sin^4\frac{\pi}{n}}\leqq\tau_\nu.$$

További tagok elhagyásával az

$$1+\frac{2c}{\sqrt{v^2-c^2}}\sin\frac{\pi}{n}\leqq\tau_\nu$$

egyenlőtlenséghez jutunk. Ebből összeszorzással

$$t_0\left(1+\frac{2c}{\sqrt{v^2-c^2}}\sin\frac{\pi}{n}\right)^{n-1}\leqq t_{n-1}$$

adódik, s minthogy nyilván $t_{n-1}\leqq T$ azért a $t_0\geqq\frac{d}{v+c}$ egyenlőtlenséget figyelembe véve (ahol $d=\overline{P_0Q_0}$) és az $n\to\infty$ határmenetet elvégezve

$$\frac{d}{v+c}e^{\frac{2c\pi}{\sqrt{v^2-c^2}}}\leqq T.$$

A baloldalon azonban éppen az (1) pályához tartozó T érték áll, úgyhogy ez csakugyan minimuma az összes lehetséges pályákhoz tartozó ilyen számoknak.

E problémával kapcsolatban CZIPSZER még az alábbiakat vizsgálta: feltéve, hogy a Q pont pályájának φ irányszöge a $(0, 2\pi)$ intervallumban egyenletes eloszlású valószínűségi változó, tekintsük a P pont szóbajövő pályái közül azokat, amelyekre létezik a $t(\varphi)$ változó várható értéke. Kérdés, melyik pályán lesz ez az érték minimális.

A problémát azzal a megszorítással tárgyaljuk, hogy csak azokat a pályákat vesszük figyelembe, amelyekre a $t(\varphi)$ függvény *Riemann*-integrálható. Ekkor ugyanis $t(\varphi)$ várható értéke

$$M=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}t\left(\frac{2k\pi}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{\nu=0}^{n-1}t_\nu.$$

Azonban az előző okoskodásból nyerhető

$$\frac{d}{v+c}\left(1+\frac{2c}{\sqrt{v^2-c^2}}\sin\frac{\pi}{n}\right)^{\nu} \leqq t_\nu$$

egyenlőtlenség alapján

$$M \geqq \lim_{n\to\infty} \frac{d}{v+c}\frac{1}{n}\sum_{\nu=0}^{n-1}\left(1+\frac{2c}{\sqrt{v^2-c^2}}\sin\frac{\pi}{n}\right)^{\nu} = \lim_{n\to\infty}\frac{d}{v+c}\frac{1}{n}\frac{\left(1+C\sin\frac{\pi}{n}\right)^{n}-1}{C\sin\frac{\pi}{n}}$$

$$\left(C=\frac{2c}{\sqrt{v^2-c^2}}\right).$$

Elvégezve az $n\to\infty$ határátmenetet

$$M \geqq \frac{d}{v+c}\frac{\sqrt{v^2-c^2}}{2c\pi}(e^{C\pi}-1.$$

Itt a jobboldal az (1) pályához tartozó M várható érték, úgyhogy ismét ez a pálya szolgáltatja (az említett megszorítások mellett) a minimális értéket.

*

Azt hiszem, valamennyiünket — akik CZIPSZER JÁNOSt ismertük — mély fájdalommal tölt el az a tudat, hogy munkásságára ma már csak emlékezni tudunk.

Dobó Andor

AZ ARTIN-GYŰRŰK ELMÉLETÉNEK NÉHÁNY KÉRDÉSÉRŐL

Írta: KERTÉSZ ANDOR

Emil Artin emlékének

1. 1962. december 20-án, életének 65. évében, váratlanul elhunyt EMIL ARTIN. Halála súlyos veszteség nemcsak a hamburgi Egyetem Matematikai Szemináriuma számára, ahol professzorként tevékenykedett, hanem egyben az egész matematika számára is, amelyet számos alapvető fontosságú eredménnyel gazdagított.

EMIL ARTIN sokoldalú tudományos tevékenységet folytatott. Ennek bizonyítéka 7 könyv és több mint 40 tudományos dolgozat. ARTIN elsősorban az algebrai számelmélet, a topológia és az algebra területén dolgozott. Különösen kiemelendő az a hatás, amelyet a modern algebra fejlődésére gyakorolt. Az ő jelentősége az algebra fejlődésében nemcsak abban áll, hogy nagyfontosságú eredményeket ért el, mint pl. a féligegyszerű gyűrűkre vonatkozó ún. WEDDERBURN—ARTIN-féle struktúratételek, ideálelméleti eredményei, a testek elrendezhetőségéről szóló SCHREIERral közös tétele, vagy az alternatívgyűrűk jellemzéséről szóló nevezetes tétele, hanem abban is, hogy igen nagy részt vállalt ennek az újonnan keletkezett tudományágnak rendszerezésében. Így pl. VAN DER WAERDEN nevezetes könyve részben ARTIN előadásaira épül.

Nem lehet feladatom, hogy EMIL ARTIN tudományos munkásságát itt részletesen ismertessem és életművét méltassam.

E dolgozatban az Artin-gyűrűk elméletének néhány újabb eredményével és problémájával foglalkozunk, s amikor ezt tesszük, tisztelettel és hálával emlékezünk EMIL ARTINra, aki ennek az elméletnek alapjait lerakta, s a további kutatásokhoz értékes ösztönzést adott.

2. Az újabb irodalomban olyan asszociatív gyűrűt neveznek Artin-gyűrűnek, amely balideáljaira nézve minimumkövetelménynek tesz eleget.[1] ARTINnak köszönhetjük ugyanis azt a nagyfontosságú felfedezést, hogy a véges rangú asszociatív algebrák elméletének lényeges eredményei a minimumkövetelménynek eleget tevő gyűrűk sokkal szélesebb osztályára is átvihetők, sőt ez az általánosítás a problémáknak egy sokkal természetesebb tárgyalását teszi lehetővé [1]. Az Artin-gyűrűk vizsgálata a modern gyűrűelmélet magvát alkotja; éspedig nemcsak azért, mert a gyűrűelmélet történetileg az algebrák elméletéből fejlődött ki, s így természetesen először az algebrák osztályához legközelebb álló gyűrűosztályokat, az Artin-féle és Noether-féle gyűrűk osztályait vizsgálták, hanem azért is, mert azok a módszerek,

[1] Azaz, a gyűrű balideáljainak bármely (nem üres) rendszere tartalmaz minimális elemet. Ez a feltétel ekvivalens azzal, hogy a gyűrű balideáljainak bármely csökkenő lánca véges sok lépés után megszakad. — E referátumban gyűrűn mindig asszociatív gyűrűt értünk. — Az algebrában járatos olvasó a lábjegyzeteket a továbbiakban figyelmen kívül hagyhatja.

amelyek az Artin-gyűrűk vizsgálata során alakultak ki, az általános gyűrűelméletben is hasznosnak bizonyultak. Gondolhatunk itt pl. arra az EMMY NOETHERnek köszönhető felismerésre, hogy bizonyos gyűrűk szerkezete a vektorterek lineáris transzformációival függ össze, s ezáltal bizonyos gyűrűelméleti problémákat vektorterekre vonatkozó problémáknak tekinthetünk. Jóllehet a gyűrűelméletben már egész sor ilyen jellegű tétel ismeretes, még ma sem vagyunk abban a helyzetben, hogy ezt a felfedezést kellő mértékben értékelhessük, hiszen még nem láthatjuk, hogy milyen messze vezethetnek a benne rejlő lehetőségek. Mindamellett világos, hogy az a törekvés, hogy bizonyos gyűrűk szerkezetét vektorterek lineáris transzformációinak segítségével írjuk le, hosszú időre meghatározta a gyűrűelmélet arculatát.

3. Legyen R tetszőleges Artin-gyűrű és N az R radikálja.[2] Mint ismeretes, N nilpotens ideál. Az N radikálra vonatkozólag két szélső esetet különböztethetünk meg: az R gyűrű lehet radikálmentes (azaz $N=0$), ez az ún. *féligegyszerű gyűrűk* esete; továbbá az R lehet radikálgyűrű (azaz $N=R$), és ez az ún. *nilpotens Artin-gyűrűk* esete. A féligegyszerű és nilpotens Artin-gyűrűk osztályát kielégítő módon le lehet írni. Először ezzel a két osztállyal foglalkozunk.

4. A WEDDERBURN—ARTIN-féle struktúratétel szerint *bármely féligegyszerű gyűrű véges sok, ferdetest feletti mátrixgyűrű direkt összegével izomorf.* Eszerint egy féligegyszerű gyűrűt véges sok ferdetest, és ugyanannyi, egyértelműen hozzájuk rendelt természetes szám, ti. a szóban forgó kvadratikus mátrixok típusa, teljesen meghatározza.

A féligegyszerű gyűrűket számos más jellemző tulajdonság is kitünteti az összes gyűrű osztályában. Ilyen például a NOETHER által felfedezett tulajdonság: *egy féligegyszerű gyűrű egységelemes és véges sok minimális balideál direkt összege* [22]; vagy a GOLDMAN-féle tulajdonság: *bármely balideálnak van jobbegységeleme* ([10], erre vonatkozólag lásd még [7]).

Említsünk néhányat a további jellemzések közül is. *Az R gyűrű akkor és csak akkor féligegyszerű, ha van jobbegységeleme, és teljesül a következő (egymással ekvivalens) tulajdonságok egyike:*

a) *R-nek van véges sok maximális balideálja, amelyek metszete a nullideál;*

b) *R tetszőleges 0-tól különböző elemének baloldali annullátora az R gyűrű véges sok maximális balideáljának metszete;*

c) *R bármely balideálja szerváns balideál R-ben;*[3]

d) *R összeesik balideáljai bármely maximális független rendszerének (direkt) összegével* ([19], [20]).[4]

[2] Egy gyűrű *radikálját* úgy definiálják, mint a gyűrű összes nilpotens balideáljának az összegét. Egy gyűrű valamely L balideálját (ideálját) nilpotensnek hívják, ha alkalmas m természetes számra $L^m=0$.

[3] Az R gyűrű valamely L balideálját *szervánsnak* nevezzük, ha bármely L feletti egyismeretlenes lineáris egyenletrendszer, amely R-ben megoldható, L-ben is megoldható.

[4] Az R gyűrű baliedáljainak valamely $S=[L_\lambda]_{\lambda\in\Lambda}$ rendszerét *függetlennek* nevezzük, ha bármely $\lambda\in\Lambda$ esetén $L_\lambda\cap\sum_{\substack{\tau\in\Lambda\\ \tau\neq\lambda}}L_\tau=0$. Az S független rendszer maximális, ha R bármely 0-tól különböző L' balideálja esetén az $[S, L']$ rendszer nem független.

Egy olyan jellemzés, amelynél a jobbegységelem létezését nem kell megkövetelni a következő: *egy gyűrű akkor és csak akkor féligegyszerű, ha van véges sok moduláris maximális balideálja, amelyek metszete a nullideál.*[5]

A féligegyszerű gyűrűk további jellemzéséhez szükségünk van a STEINFELD OTTÓ által bevezetett kváziideál fogalmára. Egy R gyűrű valamely Q additív részcsoportját kváziideálnak nevezzük, ha

$$RQ \cap QR \subseteqq Q$$

teljesül [23]. *Egy gyűrű akkor és csak akkor féligegyszerű, ha radikálmentes és véges sok minimális kváziideáljának direkt összegeként áll elő* [20]. Példák mutatják, hogy a NOETHER-féle jellemzésnek olyan élesítése, amely az imént említett tételben a radikálmentesség helyett az egységelem létezését követelné meg, nem lehetséges.

Legyen R tetszőleges gyűrű, Γ (nem üres) indexhalmaz és S az x_α $(\alpha \in \Gamma)$ határozatlanok halmaza. Tekintsük R felett az

$$f_\beta = r_\beta \qquad (r_\beta \in R;\ \beta \in \Omega) \tag{1}$$

egyenletek rendszerét, ahol Ω egy másik tetszőleges indexhalmazt jelöl és valamennyi f_β az x_α határozatlanoknak R feletti lineáris kifejezése (azaz véges sok x_α-nak R-ből és a racionális egész számok Z gyűrűjéből vett együtthatókkal való lineáris kombinációja:[6]

$$f_\beta = \sum_{j=1}^{k(\beta)} (a_{\beta j} x_{\alpha(\beta,j)} + m_{\beta j} x_{\alpha(\beta,j)}) \qquad (a_{\beta j} \in R;\ m_{\beta j} \in Z;\ \alpha(\beta,j) \in \Gamma). \tag{2}$$

Azt mondjuk, hogy az (1) egyenletrendszer R-ben megoldható, ha létezik olyan $x_{\alpha(\beta,j)} \to h_{\alpha(\beta,j)}$ egyértelmű leképezés, ahol $h_{\alpha(\beta,j)} \in R$, $\beta \in \Omega$ és j (minden β-ra) befutja az $\{1, \ldots, k(\beta)\}$ halmazt, hogy az (1) egyenletek $x_{\alpha(\beta,j)} = h_{\alpha(\beta,j)}$ helyettesítéssel teljesülnek.

Az (1) egyenletrendszer (R-ben, vagy R valamely bővítésében) való megoldásához nyilvánvalóan szükséges a következő feltétel teljesülése: egy

$$s_1 f_{\beta_1} + s_2 f_{\beta_2} + \ldots + s_l f_{\beta_l} + u_1 f_{\beta_1} + u_2 f_{\beta_2} + \ldots + u_l f_{\beta_l} = 0 \qquad (s_i \in R;\ u_i \in Z)$$

alakú egyenlőségből mindig következik

$$s_1 r_{\beta_1} + s_2 r_{\beta_2} + \ldots + s_l r_{\beta_l} + u_1 r_{\beta_1} + u_2 r_{\beta_2} + \ldots + u_l r_{\beta_l} = 0.$$

Ha ez a követelmény teljesül, akkor az (1) egyenletrendszert *kompatibilisnek* nevezzük.

Azt mondjuk, hogy az R gyűrű *lineárisan zárt*, ha bármely R feletti kompatibilis lineáris egyenletrendszer R-ben megoldható. GACSÁLYI SÁNDOR kimutatta, hogy bármely ferdetest lineárisan zárt [9]. A ferdetestek azonban korántsem merítik ki a lineárisan zárt gyűrűk osztályát.

1. Probléma. Meghatározandó az összes lineárisan zárt gyűrű.

[5] Az R gyűrű L balideálját *modulárisnak* nevezik, ha R-nek van jobboldali egységeleme modulo L, azaz, ha bármely $x(\in R)$ elemre $x - xe \in L$ teljesül.

[6] Félreértés elkerülése céljából megjegyezzük, hogy két lineáris formát akkor és csak akkor tekintünk egyenlőnek, ha bármely határozatlan mindkét formában ugyanazzal az R-beli, ill. Z-beli együtthatóval van ellátva. Így például mindig $ax \neq mx$ $(a \in R;\ m \in Z)$, még abban az esetben is, ha $m = 1$ és a az R gyűrű esetleges egységeleme. — Ha R egységelemes gyűrű, az általánosság korlátozása nélkül feltehetjük, hogy (2)-ben minden β-ra és j-re $m_{\beta j} = 0$.

A lineárisan zárt gyűrűk osztályához tartoznak a féligegyszerű gyűrűk. Példák mutatják azonban, hogy a lineárisan zárt gyűrűk még ezek által sincsenek kimerítve; a lineáris zártsághoz ugyanis sem a radikálmentesség, sem pedig a minimumkövetelmény nem szükséges. Ha az R gyűrű féligegyszerű, akkor bármely R feletti (1) kompatibilis lineáris egyenletrendszer R-ben megoldható, és az egyenletrendszer összes megoldása egy

$$x_\alpha = c_\alpha + \Sigma d_i t_i \qquad (\alpha \in \Gamma;\ d_i \in R)$$

alakú képletrendszer segítségével nyerhető, ahol a t_i-k az R gyűrű bizonyos T_i részhalmazaiból szabadon választható paraméterek, a c_α konstansok pedig az (1) egyenletek jobboldalain álló konstansok (véges bal-) lineáris kombinációi [14], [18].

A féligegyszerű Artin-gyűrűket mint lineárisan zárt gyűrűket jellemzi a következő tétel: *egy gyűrű akkor és csak akkor féligegyszerű, ha bármely balideálja (mint gyűrű) lineárisan zárt* [18].

5. Térjünk át most a nilpotens Artin-gyűrűk esetére. Ch. Hopkins [12] dolgozatában nilpotens Artin-gyűrűkkel is foglalkozik. Kimutatja, hogy ha egy nilpotens gyűrű balideáljaira nézve minimumkövetelménynek tesz eleget, akkor jobbideáljaira nézve is és megfordítva. Továbbá, nilpotens Artin-gyűrű részgyűrűire nézve is minimumkövetelménynek tesz eleget. A nilpotens Artin-gyűrűk additív csoportja torziócsoport, tehát bármely nilpotens Artin-gyűrű véges sok nilpotens Artin-féle p-gyűrű direkt összege [12].[7]

Hopkins vizsgálataihoz kapcsolódva Szele Tibor [26] további eredményeket ért el, megadva a nilpotens Artin-gyűrűknek egy viszonylag teljes leírását. A viszonylagosság itt azt jelenti, hogy amint a Wedderburn—Artin-féle struktúratétel a radikálmentes Artin-gyűrűk szerkezetének leírását a ferdetestek esetére vezeti vissza, éppen úgy a Szele-féle elmélet a nilpotens Artin-gyűrűket a véges nilpotens gyűrűk segítségével jellemzi. Szele vizsgálatainak az a felismerés a kiinduló pontja, hogy *nilpotens Artin-gyűrű additív részcsoportjaira nézve is minimumkövetelménynek tesz eleget*, és így Kuros [21] szerint egy ilyen gyűrű additív szerkezete tökéletesen ismeretes:

$$R = C(p_1^{n_1}) + \dots + C(p_k^{n_k}) \qquad (1 \leqq n_i \leqq \infty).^8$$

Hopkins ismertetett tételei közvetlen következményei ennek az eredménynek. Szele bizonyította a következőt is: *Ha a nilpotens R gyűrű balideáljaira nézve maximumkövetelménynek tesz eleget, akkor maximumkövetelménynek tesz eleget az R additív csoportja is a részcsoportjaira nézve*, s így R additív csoportja véges sok ciklikus csoportnak a direkt összege. Egy ilyen gyűrű additív csoportja tehát teljesen ismert. Ezzel kapcsolatos a

2. Probléma. Meghatározandó azoknak a nilpotens gyűrűknek a szerkezete, amelyek balideáljaikra nézve maximumkövetelménynek tesznek eleget.

[7] Egy R gyűrűt p-gyűrűnek neveznek (p rögzitett prímszám), ha R bármely 0-tól különböző elemének (additív) rendje a p szám hatványa. — Ha az R gyűrű additív csoportja torziócsoport vagy torziómentes csoport, akkor az R gyűrűt torziógyűrűnek ill. torziómentes gyűrűnek nevezzük.

[8] Itt p_i prímszámot jelöl. $C(p_i^{n_i})$-vel a $p_i^{n_i}$ rendű ciklikus csoportot jelöljük, ha $n_i < \infty$ és a Prüfer-féle kváziciklikus csoportot, ha $n_i = \infty$. — A „+" jel itt és az alábbi (3) képletben Abel-csoportok direkt összegét jelöli.

6. Tekintsük most az Artin-gyűrűk általános esetét. Itt alapvető fontosságú az additív szerkezet meghatározása. SZELE TIBOR bebizonyította, hogy tetszőleges R Artin-gyűrű R^+ additív csoportja mindig

$$R^+ = \sum \mathfrak{R} + \sum_{\text{véges}} C(p^\infty) + \sum_{p^k, m} C(p^k) \tag{3}$$

alakú,[9] ahol m rögzített természetes szám, a direkt összeg első és harmadik tagjában fellépő direkt összeadandók halmazának számossága tetszőleges, míg a másodikban fellépőké véges [8]. FUCHS LÁSZLÓ kimutatta, hogy egy (3) alakú Abel-csoportra mindig lehet Artin-gyűrűt építeni [6]. Bármely Artin-gyűrű, mely nem tartalmaz $C(p^\infty)$ típusú részcsoportot, egy torziómentes Artin-gyűrűnek és véges sok, csupa különböző prímszámhoz tartozó Artin-féle p-gyűrűnek gyűrűelméleti direkt összege [8]. Azt a kérdést, hogy vajon hasonló állítás általában is érvényes-e, SZÁSZ FERENC válaszolta meg:

Bármely Artin-gyűrű egy torziómentes Artin-gyűrűnek és véges sok Artin-féle p-gyűrűnek a (gyűrűelméleti) direkt összege [25]. Ez a tétel a tetszőleges Artin-gyűrűk struktúraproblémáját visszavezeti a torziómentes Artin-gyűrűk és az Artin-féle p-gyűrűk vizsgálatára. A torziómentes Artin-gyűrűk esetében figyelemre méltó az a tény, hogy az ilyen gyűrűknek mindig van balegységelemük, s ez egységelem, ha a gyűrű egyetlen balannullátora a zéruselem [25], továbbá, hogy az ilyen gyűrűk bármely balideáljának additív csoportja algebrailag zárt Abel-csoport. Másrészt lényeges, hogy egységelemes Artin-féle p-gyűrű additív csoportja véges, tehát igen egyszerű szerkezetű.

FUCHS és SZELE [8] bizonyította be a következő tételt: *Artin-gyűrű balideáljaira nézve akkor és csak akkor tesz eleget a maximumkövetelménynek is, ha nincs $C(p^\infty)$ típusú részcsoportja.*

Legyen R Artin-gyűrű és N az R radikálja. Az R/N faktorgyűrű radikálmentes Artin-gyűrű (azaz féligegyszerű gyűrű), az N radikál azonban mint gyűrű általában nem Artin-féle. A nilpotens Artin-gyűrűkre vonatkozó SZELE-féle tétel alapján könnyű belátni, hogy N akkor és csak akkor Artin-féle, ha additív csoportja véges sok $C(p^k)$ $(1 \leqq k \leqq \infty)$ típusú csoport direkt összege. Artin-gyűrűk radikáljának additív csoportját vizsgálva SZÁSZ FERENC [25] bebizonyította a következő tételt: *Egy R Artin-gyűrű N radikáljának torziórészgyűrűje N gyűrű-direkt összeadandója. Egy G Abel-csoport valamely Artin-gyűrű radikáljának akkor és csak akkor additív csoportja, ha*

$$G \cong \sum \mathfrak{R} + \sum_{\text{véges}} C(p^\infty) + \sum_{p^k | m} C(p^k).$$

Olyan Artin-gyűrűkre vonatkozólag, amelyek jobbideáljaikra nézve is minimumkövetelménynek tesznek eleget, J. DIEUDONNÉ és H.-J. HOEHNKE folytattak vizsgálatokat [5], [11]. Tisztázatlan azonban még a következő kérdés:

3. Probléma. Melyek azok az Artin-gyűrűk, amelyek jobbideáljaikra nézve is minimumkövetelménynek tesznek eleget? (E kérdésre olyan felelet volna kívánatos, amely lehetőleg a gyűrű additív szerkezetével függ össze.)

A féligegyszerű és nilpotens Artin-gyűrűk osztálya csupa ilyen gyűrűből áll. Másrészt, mint ismeretes, nem minden Artin-gyűrű rendelkezik ezzel a tulajdon-

[9] $\mathfrak{R}$-rel jelöljük a racionális számok additív csoportját.

sággal. Nem régen SZÁSZ FERENC bizonyította be, hogy *minden végtelen* $\mathfrak{m}$ *számossághoz van olyan egységelemes gyűrű, amelynek pontosan három balideálja* (éspedig R maga, a radikál és a nullideál), *de legalább* $\mathfrak{m}$ *különböző jobbideálja van* [24]. Ez a tétel igenlő feleletet ad a következő, SZELE TIBOR által felvetett kérdésre: van-e olyan gyűrű, amelynek csak véges sok balideálja, de végtelen sok jobbideálja van?

Egységelemes Artin-gyűrű nem tartalmaz $C(p^\infty)$ típusú részcsoportot. Ez a tulajdonság tehát szükséges ahhoz, hogy egy Artin-gyűrű beágyazható legyen egységelemes Artin-gyűrűbe. Megfordítva, FUCHS és SZELE kimutatta, hogy ha egy Artin-gyűrű nem tartalmaz $C(p^\infty)$ típusú részcsoportot, akkor mindig beágyazható egységelemes Artin-gyűrűbe [8]. Megoldatlan még azonban a következő beágyazási probléma:

4. Probléma. Meghatározandó az összes olyan gyűrű, amely beágyazható Artin-gyűrűbe.

Egy ilyen gyűrű additív csoportja nyilvánvalóan egy torziómentes csoport, egy korlátosrendű torziócsoport és véges sok $C(p^\infty)$ típusú csoport direkt összege.

7. A féligegyszerű gyűrűket, mint operátortartományokat is figyelemre méltó tulajdonságok jellemzik. Egy idevonatkozó eredmény szerint *egy R gyűrű akkor és csak akkor féligegyszerű, ha bármely R-modulus a maximális triviális részmodulusnak és egy teljesen redukálható R-modulusnak a direkt összege* [10].[10] Példaként említünk egy másik eredményt is: *egy R gyűrű akkor és csak akkor féligegyszerű, ha R-nek bármely L balideáljára és a tetszőleges G R-modulus bármely g elemére az Lg részmodulus G-nek direkt összeadandója* [13].

Az ún. injektív modulusok[11] osztálya is alkalmas arra, hogy a féligegyszerű gyűrűket jellemezze: *egy R gyűrű akkor és csak akkor féligegyszerű, ha bármely R-modulus a maximális triviális részmodulusnak és egy injektív R-modulusnak a direkt összege* ([3], [16]).

5. Probléma. Adjunk meg olyan moduluselméleti tulajdonságot, amely pontosan az Artin-gyűrűket jellemzi.

A kommutatív egységelemes Artin-gyűrűk ugyanis jellemezhetők ilyen módon: *egy kommutatív, egységelemes R gyűrű akkor és csak akkor Artin-féle, ha tetszőlegesen sok projektív*[12] *unitér R-modulus komplett direkt összege szintén projektív* [4].

[10] Egy G R-moduluson olyan additív Abel-csoportot értünk, amelynek az R gyűrű baloldali operátortartománya. Ha R egységelemes gyűrű, s R egységeleme a G moduluson identikus operátorként hat, akkor a G R-modulust *unitér* R-modulusnak nevezzük. Egy G R-modulus összes olyan x eleme, amelyre $Rx=0$ részmodulust alkot. Ezt a részmodulust a G *maximális triviális részmodulusának* mondják. — Az egyszerű R-modulusok direkt összegeként előálló R-modulusokat *teljesen redukálhatónak* nevezzük. *Egyszerű* az olyan R-modulus, amelynek legfeljebb két részmodulusa (ti. a zérus-részmodulus és maga a modulus) van.

[11] *Injektívnek* neveznek egy olyan R-modulust, amely minden őt tartalmazó R-modulusnak direkt összeadandója.

[12] Egy R-modulust *projektívnek* neveznek, ha direkt összeadandója valamely szabad R-modulusnak.

IRODALOM

[1] ARTIN, E., Zur Theorie der hyperkomplexen Zahlen, *Abh. Hamburg* **5** (1927), 251–260.
[2] ARTIN, E., NESBITT, C. J. and THRALL, R. M., *Rings with minimum condition*, Ann Arbor, 1948.
[3] CARTAN, H. and EILENBERG, S., *Homological Algebra*, Princeton, 1956.
[4] CHASE, S. U., Direct product of modules, *Trans. Amer. Math. Soc.* **97** (1960), 457–473.
[5] DIEUDONNÉ, J., Sur les systèmes hyperkomplexes, *J. reine u. angew. Math.* **184** (1942), 178–192.
[6] FUCHS, L., Ringe und ihre additive Gruppe, *Publ. Math. Debrecen* **4** (1956), 488–508.
[7] FUCHS, L. and SZELE, T., Contribution to theory of semi-simple rings, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **3** (1952), 235–239.
[8] FUCHS, L. and SZELE, T., On Artinian rings, *Acta Sci. Math. Szeged* **17** (1956), 30–40.
[9] GACSÁLYI, S., On algebraically closed abelian groups, *Publ. Math. Debrecen* **2** (1952), 292–296.
[10] GOLDMAN, O., A characterization of semi-simple rings with the descending chain condition, *Bull. Amer. Math. Soc.* **52** (1946), 1021–1027.
[11] HOEHNKE, H.–J., Lösung eines Problemes von Ch. Hopkins, *J. reine u. angew. Math.* **198** (1957), 112–120.
[12] HOPKINS, CH., Rings with minimal condition for left ideals, *Ann. of Math.* **40** (1939), 712–730.
[13] KERTÉSZ, A., A féligegyszerű gyűrűk egy új jellemzése, *Acta Univ. Debrecen* **1** (1954), 151–153.
[14] KERTÉSZ, A., The general theory of linear equation systems over semi-simple rings, *Publ. Math. Debrecen* **4** (1955), 79–86.
[15] KERTÉSZ, A., Beiträge zur Theorie der Operatormoduln, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **8** (1957), 235–257.
[16] KERTÉSZ, A., Systems of equations over modules, *Acta Sci. Math. Szeged* **18** (1957), 207–234.
[17] KERTÉSZ, A., Correction to my paper „System of equations over modules", *Acta Sci. Math. Szeged* **19** (1958), 251–252.
[18] KERTÉSZ, A., Vizsgálatok az operátormodulusok elméletében II., *Magyar Tud. Akad. Mat. Fiz. Oszt. Közl.* **9** (1959), 15–50.
[19] KERTÉSZ, A., Vizsgálatok az operátormodulusok elméletében III., *Magyar Tud. Akad. Mat. Fiz. Oszt. Közl.* **9** (1959), 105–120.
[20] KERTÉSZ A., és STEINFELD, O., A féligegyszerű gyűrűk jellemzéseiről, *Magyar Tud. Akad. Mat. Fiz. Oszt. Közl.* **9** (1959), 301–314.
[21] KUROSCH, A., Zur Zerlegung unendlicher Gruppen, *Math. Ann.* **106** (1932), 107–113.
[22] NOETHER, E., Hyperkomplexe Grössen und Darstellungstheorie, *Math. Z.* **30** (1929), 641–692.
[23] STEINFELD, O., On ideal-quotients and prime ideals, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **4** (1953), 289–298.
[24] SZÁSZ, F., Szele Tibor egy gyűrűelméleti problémájának a megoldása, *Magyar Tud. Akad. Mat. Fiz. Oszt. Közl.* **12** (1962), 47–50.
[25] SZÁSZ, F., Über Artinsche Ringe, *Bull. Acad. Polon. Sci. Série sci. math. astr. phys.* **11** (1963), 351–354.
[26] SZELE, T., Nilpotent Artinian rings, *Publ. Math. Debrecen* **4** (1955), 71–78.

(Beérkezett: 1963. V. 20.)

FOLYTONOS ÁLLAPOTÚ MARKOV FOLYAMATOK STATISZTIKAI VIZSGÁLATÁRÓL, I.

Írta: ARATÓ MÁTYÁS

BEVEZETÉS

A sztochasztikus folyamatok statisztikai vizsgálata mindössze mintegy 20 éves múltra tekint vissza. Az első jelentős eredmény MANN és WALD [1] nevéhez fűződik, akik az n-dimenziós diszkrét stacionárius *Gauss—Markov* folyamatok paramétereinek becslésével foglalkoztak. Itt kell megemlítenünk NEUMANN JÁNOS nevét is, aki az egydimenziós időben diszkrét stacionárius *Gauss—Markov* folyamat paramétereinek becslésével foglalkozott és ő javasolta az ún. széria-korrelációs együttható bevezetését. Az első összefoglaló jellegű munka U. GRENANDER [1] 1950-ben megjelent dolgozata. Munkája úttörő jelentőségű, elsősorban az időben folytonos folyamatok statisztikája terén s mind a mai napig nem vesztette el aktualitását, amit az is mutat, hogy orosz nyelvre nemrég fordították le és könyv alakban adták ki. A. N. KOLMOGOROV még 1948-ban felvetette a stacionárius *Gauss—Markov* folyamat paraméterei becslésének a problémáját, mint az egyik legfontosabb feladatot a folyamatok statisztikájában. Már akkor megjegyezte, hogy a problémának csak úgy van értelme — és különleges sajátossága, — ha a paramétereket nem külön-külön vizsgáljuk, hanem együttesen. Részleges megoldást nyújtott LINNIK [1] dolgozatában. További eredményeket ért el ebben az irányban LUVSZANCEREN [1], [2]. A probléma teljes megoldását, abban a formában ahogyan azt KOLMOGOROV felvetette és lényegében a megoldást is várta, a szerző adta meg disszertációjában [1].

A sztochasztikus folyamatok (vagy egyszerűen folyamatok) statisztikája az ötvenes években óriási fellendülésnek indult, elsősorban a rádiótechnikai és más fizikai alkalmazások hatására. Ebben az időben bontakozik ki a valószínűségszámításban a folyamatok elmélete és kezd ott központi helyet elfoglalni. Az utóbbi időben jelent meg P. BILLINGSLEY [1] értékes könyve *Markov* folyamatok statisztikai vizsgálatáról, azonban ő főleg időben diszkrét folyamatokkal foglalkozik s jelen dolgozattal nincsen kapcsolata.

Dolgozatomban a matematikai statisztika elemeinek és a sztochasztikus folyamatok elméletének ismeretét feltételezem, azonban ahol erre szükség van, a megfelelő irodalmi utalás szerepelni fog. Az olvasó számára talán lényeges megszorításnak tűnik, hogy eleinte csak *Gauss* folyamatokkal foglalkozom, de amint az irodalomból megállapítható, az eddigi kutatások tulajdonképpen csak *Gauss* folyamatokra vonatkoznak — bár sok eredmény átvihető más típusú folyamatokra is — és az ismert alkalmazási problémákban ez a feltétel teljesül is. Másrészt látni fogjuk, hogy a feladatok még *Gauss* folyamatok esetén is jóval bonyolultabbak, mint független megfigyeléseknél.

Jelen és a későbbi dolgozatok is összefoglaló jellegűek, tehát az ismertetett anyag részletes tárgyalását adják az új eredmények ismertetése mellett, hogy ily módon az olvasó teljes képet kapjon a tárgykörről. Elsődleges célom azoknak a sajátosságoknak a megmutatása, melyek éppen a folyamatok statisztikai problémáira jellemzőek s független megfigyeléssorozatok esetén nem fordulnak elő. A legalapvetőbb ily tulajdonság annak megvizsgálása pl. paraméter becslések esetén, hogy az ismeretlen paraméter becslései milyen határeloszlással bírnak? Itt az alapvető nehézség abban áll, hogy az ismeretlen paraméterértékek közel lehetnek (és a gyakorlatban legtöbbször ez a helyzet) egy olyan értékhez, mely értékre az addig reguláris folyamat szingulárissá válik. Szinguláris folyamatok esetén pedig nem érvényes a centrális határeloszlástétel, ily módon a becslések eloszlása nem lehet egyenletesen (a paraméter értékekben) aszimptotikusan normális eloszlású (még ha minden paraméter értékre az is), ami azt jelenti, hogy a becslések alapján nyert konfidencia intervallumok szerkesztése nem történhet a határeloszlás segítségével. Természetesen ez az egyik megfogalmazási lehetőség, más úton a folyamatokra jellemző speciális tulajdonságokat az információ elmélet segítségével nyerhetünk.

Erre a problémakörre aspiranturám ideje alatt A. N. Kolmogorov hívta fel a figyelmemet. Az ő útmutatásai és állandó segítsége, valamint Ja. G. Szinaj értékes megjegyzései tették lehetővé disszertációm megírását. Ezen a helyen is kifejezem mindkettőjüknek köszönetemet.

Dolgozatom felhasználja disszertációm eredményeit és részletes bizonyítással tartalmazza azokat a tételeket, melyek a [2], [3] dolgozatokban bizonyítás nélkül jelentek meg.

IDŐBEN FOLYTONOS, STACIONÁRIUS, NORMÁLIS, EGYDIMENZIÓS ESET

1. §. A folyamat jellemzése. Fizikai értelmezés és matematikai leírás

A fizikai folyamatok egy igen jelentős részében a folyamat lefolyását nem a

$$\frac{dx(t)}{dt} = -\lambda x(t) \qquad (\lambda > 0)$$

differenciálegyenlet írja le, (melynek megoldása $x = x_0 e^{-\lambda t}$), hanem egy ún. sztochasztikus differenciálegyenlet, melyet

$$d\xi(t) = -\lambda\xi(t)\,dt + d\zeta(t), \qquad (\mathbf{M}\zeta(t) = \mathbf{M}\xi(t) = 0) \tag{1. 1}$$

alakba írunk, ahol $\zeta(t)$ az ún. *Wiener* folyamat (független növekményű, *Gauss—Markov* folyamat) $\zeta(t+\tau)$ és $\xi(t)$, $\tau > 0$-ra függetlenek. A továbbiakban — ahol ezt külön nem jegyezzük meg — csak *Gauss* folyamatokkal foglalkozunk. A fenti differenciálegyenletnek az értelmezése a következő integrálegyenlet segítségével történik: $\xi(t)$ a megoldása a

$$\xi(t) - \xi(t_0) = -\lambda \int_{t_0}^{t} \xi(s)\,ds + \zeta(t) - \zeta(t_0) \tag{1. 1'}$$

integrálegyenletnek, ahol az integrál négyzetes középben értendő, a megoldás létezése és egyértelműsége következik általános tételekből (Doob [1], Ito [1]), természetesen négyzetes középben.

Az (1. 1) differenciálegyenlettel jellemzett sztochasztikus folyamat lefolyása abban különbözik a közönséges differenciálegyenlettel leírttól, hogy a csillapodás nem történik folyamatosan, hanem bizonyos perturbálás lép mindig fel.

Amennyiben pl. a *Wiener* folyamat leírja az ideális gázban vagy folyadékban levő részecske mozgását magának a részecske sebességének a figyelembevétele nélkül, úgy a stacionárius *Gauss—Markov* folyamat figyelembe veszi a részecske sebességét is. Megemlítjük még, hogy a kis sztochasztikus perturbáló tagot figyelembe vevő eljárást a differenciálegyenletek elméletében ANDRONOV és PONTRJAGIN [1] vezette be.

Az (1. 1) egyenlet interpretálható úgy, mint a $\xi(t)$ sebességű véletlen hatásoknak alávetett részecske mozgásegyenlete, ahol a súrlódási erő arányos a részecske sebességével. Hasonlóan interpretálható $\xi(t)$ mint egy véletlen változásoknak alávetett potenciál, ahol a potenciál növekedése arányos magával a potenciállal.

Mivel feltettük, hogy a folyamat *Gauss* típusú és $\mathbf{M}\xi(t)=0$, a folyamatot egyértelműen megadja a kovariancia függvénye. Bebizonyítjuk a következő ismert tételt:

1. TÉTEL. *Az egydimenziós $\xi(t)$ Gauss folyamat* $(\mathbf{M}\xi(t)=0)$ *markovitásának szükséges és elégséges feltétele az, hogy $R(s, t)$ függvénye eleget tegyen az alábbi feltételnek:*

$$R(s, t)=R(s, u)\,R(u, t), \qquad s<u<t, \tag{1.2}$$

ahol

$$R(s, t) = \frac{\mathbf{M}\xi(s)\xi(t)}{D\xi(s)}.$$

Bizonyítás. Ha a $\xi(t)$ folyamat *Gauss* és *Markov* típusú, akkor

$$\mathbf{M}\{\xi(t)|\xi(u), \xi(s)\}=\mathbf{M}\{\xi(t)|\xi(u)\}=R(u, t)\xi(u)$$

és $\xi(t)-\mathbf{M}\{\xi(t)|\xi(u), \xi(s)\}$ merőleges $\xi(s)$-re (ha $s<u$), amit a következőképpen jelölünk: $\xi(t)-\mathbf{M}\{\xi(t)|\xi(u), \xi(s)\}\perp\xi(s)$, így

$$\mathbf{M}\{\xi(t)\xi(s)\}=\mathbf{M}\{\xi(s)\xi(u)R(u, t)\}=R(u, t)\mathbf{M}\{\xi(s)\xi(u)\}.$$

$\mathbf{D}\xi(s)$-el osztva megkapjuk az (1. 2) összefüggést.

Tegyük most fel, hogy a valós *Gauss* $\xi(t)$ folyamatra teljesül a (1. 2) összefüggés, akkor nyilván teljesül az

$$\mathbf{M}\{\xi(t)\xi(s)\}=R(u, t)\mathbf{M}\{\xi(s)\xi(u)\} = 0$$

összefüggés is, azaz $\xi(t)-R(u, t)\xi(u)\perp\xi(s)$, ha $s<u$, tehát 1 valószínűséggel

$$R(u, t)\xi(u)=\mathbf{M}\{\xi(t)|\xi(u)\}=\mathbf{M}\{\xi(t)|\xi(u), \xi(s_1), \ldots, \xi(s_n)\},$$

ahol

$$s_i<u, \quad (i=\overline{1, n}),$$

tehát a folyamat *Markov* folyamat.

Abban a speciális esetben, amikor a folyamat stacionárius és $\mathbf{D}^2\xi(s)=\sigma_\xi^2$, $R(s, t) = R(t-s)$,

$$R(t_1+t_2)=R(t_1)R(t_2), \tag{1.3}$$

következésképpen

$$R(t)=\sigma_\xi^2 e^{-\lambda|t|}. \tag{1.4}$$

Egyszerű számolással belátható, hogy az (1. 1) egyenletben szereplő λ paraméter és a korrelációs függvényben szereplő λ paraméter azonosak. Az (1. 1′) megoldása ugyanis stacionárius *Gauss—Markov* folyamat lesz, ily módon korrelációs függvénye (1. 4) alakú. Ha $\mathbf{M}(d\zeta(t))^2 = \sigma_\zeta^2 dt$, akkor fennáll a $\sigma_\zeta^2 = 2\lambda\sigma_\xi^2$ összefüggés is (1. 1) alapján.

Könnyen belátható, hogy a szeperábilis $\xi(t)$ folyamat folytonos, nem differenciálható 1 valószínűséggel (*Kolmogorov* tétele, l. Doob [1], 576 o.).

Az $\int_{t_0}^{t} \xi(t)\,dt = \eta(t)$ folyamat létezik négyzetes középben és igaz a következő összefüggés:

$$\mathbf{M}\eta(t)\eta(s) = \frac{\sigma_\xi^2}{\lambda^2}\left[e^{-\lambda s} + e^{-\lambda t} + 2\lambda s - 1 - e^{-\lambda(t-s)}\right]. \tag{1. 5}$$

Nyilván

$$\mathbf{M}\eta(t)\eta(s) = \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s} \sigma_\xi^2 e^{-\lambda|t_1 - t_2|}\,dt_1\,dt_2$$

és innen egyszerű számolással adódik állításunk. Bebizonyítjuk még a következő tételt:

2. Tétel: *A stacionárius Gauss—Markov folyamat kielégíti az* (1. 1) *differenciálegyenletet, azaz a* $\xi(t) - \xi(t_0) + \lambda\eta(t)$ *folyamat egy Wiener folyamat.*

Bizonyítás. Az (1. 5) összefüggés alapján

$$\mathbf{M}(\eta(t))^2 = \frac{2\sigma_\xi^2}{\lambda^2}\left[e^{-\lambda t} + \lambda t - 1\right], \tag{1. 6}$$

másrészt, ha $t_2 \geqq t_1 \geqq s_2 \geqq s_1$, akkor

$$\mathbf{M}\big(\eta(t_2) - \eta(t_1)\big)\big(\eta(s_2) - \eta(s_1)\big) = \frac{\sigma_\xi^2}{\lambda}\left(e^{\lambda s_2} - e^{\lambda s_1}\right)\left(e^{-\lambda t_1} - e^{-\lambda t_2}\right) = \tag{1. 7}$$

$$= -\frac{1}{\lambda^2}\mathbf{M}\big(\xi(t_2) - \xi(t_1)\big)\big(\xi(s_2) - \xi(s_1)\big).$$

Igaz az is, hogy

$$\mathbf{M}\big(\eta(t)\xi(s)\big) = \begin{cases} \dfrac{\sigma_\xi^2}{\lambda}\left[2 - e^{-\lambda t} - e^{-\lambda(t-s)}\right] & \text{ha} \quad t > s \\[2ex] \dfrac{\sigma_\xi^2}{\lambda}\left[e^{-\lambda(s-t)} - e^{-\lambda s}\right] & \text{ha} \quad t \leqq s \end{cases} \tag{1. 8}$$

és így

$$\mathbf{M}\big[\big(\eta(t_2) - \eta(t_1)\big)\big(\xi(s_2) - \xi(s_1)\big)\big] = \frac{\sigma_\xi^2}{\lambda}\left(e^{\lambda s_2} - e^{\lambda s_1}\right)\left(e^{-\lambda t_1} - e^{-\lambda t_2}\right) = \tag{1. 9}$$

$$= \mathbf{M}\big[\big(\eta(s_2) - \eta(s_1)\big)\big(\xi(t_2) - \xi(t_1)\big)\big].$$

(1. 9) és (1. 7) alapján belátható, hogy a

$$\lambda\eta(t) + \xi(t) - \xi(t_0)$$

folyamat független növekményű és normális, azaz *Wiener* folyamat, amivel állításunkat igazoltuk.

BAXTER tételéből [1] következik, hogy

$$\lim_{\max(t_k - t_{k-1}) \to 0} \sum [\xi(t_k) - \xi(t_{k-1})]^2 = \sigma_\zeta^2 \cdot T \qquad (1 \text{ valószínűséggel}), \tag{1. 10}$$

ahol $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T$ egy felosztása a $[0, T]$ intervallumnak. Ily módon bár az egydimenziós stacionárius *Gauss—Markov* folyamatot 3 paraméterrel, az m, σ_ξ^2, λ paraméterekkel (ahol $m = \mathbf{M}\xi(t)$) lehet megadni, (1. 10) segítségével a σ_ζ^2 „diffúziós együttható" egyetlen realizáció alapján 1 valószínűséggel meg van határozva, így a $\sigma_\zeta^2 = 2\lambda\sigma_\xi^2$ összefüggés miatt az ismeretlen paraméterek száma 2 (vagy m és λ, vagy m és σ_ξ^2). Természetesen ebben a speciális esetben nem szükséges általános tételekre hivatkozva bizonyítani az (1. 10) összefüggést, elemi számolások segítségével is beláthatjuk (1. 10) helyességét.

Egyszerű számolással belátható, hogy

$$R(t) = \frac{\sigma_\zeta^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iut}}{|\lambda + iu|^2} du,$$

így a folyamat spektrál sűrűségfüggvénye

$$f_\xi(u) = \frac{\sigma_\zeta^2}{2\pi} \frac{1}{|\lambda + iu|^2}$$

alakú.

2. §. A likelihood hányados. Elégséges statisztikák és azok eloszlása

Az (1. 10) összefüggés más megfogalmazásban azt fejezi ki, hogy két különböző $\sigma_{\zeta_1}^2 \neq \sigma_{\zeta_2}^2$ „diffúziós együtthatójú" stacionárius *Gauss—Markov* folyamathoz tartozó, a $\xi(t)$ $(0 \leq t \leq T)$ realizációk terén értelmezett P_1 és P_2 mértékek egymásra nézve szingulárisak.

A $\xi(t)$ $(0 \leq t \leq T)$ realizációk R_ξ tere felfogható mint a $\xi(0)$ valós számegyenes és a $\eta(t) = \xi(t) - \xi(0)$ realizációk terének direkt szorzata. Jelölje W a jólismert *Wiener*-féle feltételes mértéket $(0, \sigma_\zeta)$ paraméterekkel a $0 < t \leq T$ intervallumon értelmezett függvények terén, L pedig a közönséges *Lebesgue* mértéket a számegyenesen. Legyen $V = L \times W$. Ha P jelöli az m, λ, σ_ξ^2 paraméterű $\xi(t)$ stacionárius *Gauss—Markov* folyamathoz tartozó mértéket a P mérték abszolút folytonos V-re nézve és a V szerinti *Radon—Nikodym* deriváltja (lásd CH. STRIEBEL).

$$\frac{dP}{dV} = \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}} \frac{1}{\sigma_\zeta} \exp\left\{-\frac{\lambda}{\sigma_\zeta^2}\left[s_{01}^2 - \frac{1}{2}\sigma_\zeta^2 T + \frac{1}{2}\varkappa s_{02}^2\right]\right\} \tag{2. 1}$$

lesz, ahol

$$\varkappa = \lambda T, \tag{2. 2}$$

$$s_{01}^2 = \frac{1}{2}\{[\xi(o) - m]^2 + [\xi(T) - m]^2\}, \qquad s_{02}^2 = \frac{1}{T}\int_0^T (\xi(t) - m)^2 \, dt. \tag{2. 3}$$

Innen látható, hogy ismert m esetén s_{01}^2, s_{02}^2 alkotják az ismeretlen λ (vagy σ_2^ξ) paraméter elégséges statisztikai rendszerét. Ha λ ismert és m ismeretlen (2. 1) következő alakjából (vö. GRENANDER 65. o.).

$$(2.4)\quad \frac{dP}{dV} = \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}}\cdot\frac{1}{\sigma_\zeta}\exp\left\{-\frac{\lambda}{\sigma_\zeta^2}\left[-2m\left(\frac{\xi(o)+\xi(T)}{2}+\frac{\varkappa}{2}\frac{1}{T}\int_0^T \xi(t)\,dt\right)+\right.\right.$$
$$\left.\left.+m^2\left(1+\frac{\varkappa}{2}\right)-\frac{1}{2}\sigma_\zeta^2 T+\frac{\varkappa}{2}\frac{1}{T}\int_0^T \xi^2(t)\,dt+\frac{\xi^2(o)+\xi^2(T)}{2}\right]\right\}$$

látható, hogy az ismeretlen m paraméter elégséges statisztikája az

$$(2.5)\quad m_1 = \frac{\xi(o)+\xi(T)}{2},\quad m_2 = \frac{1}{T}\int_0^T \xi(t)\,dt$$

statisztikák súlyozott számtani közepe

$$(2.6)\quad m^* = \frac{m_1+\frac{\varkappa}{2}m_2}{1+\frac{\varkappa}{2}}.$$

Ismeretlen m, λ paraméterek esetén (2. 1)-et írjuk át a következő alakba

$$(2.7)\quad \frac{dP}{dV} = \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}}\cdot\frac{1}{\sigma_\zeta}\exp\left\{-\frac{\lambda}{\sigma_\zeta^2}\left[s_1^2-\frac{1}{2}\sigma_\zeta^2 T+\frac{1}{2}\varkappa s_2^2+(m-m_1)^2+\frac{\varkappa}{2}(m-m_2)^2\right]\right\},$$

ahol

$$(2.8)\quad s_1^2 = \frac{1}{2}\{[\xi(o)-m_1]^2+[\xi(T)-m_1]^2\} = \frac{1}{4}[\xi(T)-\xi(o)]^2,$$

$$s_2^2 = \frac{1}{T}\int_0^T [\xi(t)-m_2]^2\,dt.$$

A (2. 7) formula alapján látható, hogy az m_1, m_2, s_1^2, s_2^2 rendszer egy elégséges statisztikát alkot.

A

$$(2.9)\quad t=t'\cdot T,\quad \xi=\xi'\sigma_\zeta\sqrt{T}$$

leképezéssel az általános feladatot a $T=1$ és $\sigma_\zeta=1$ esetre vezethetjük vissza, amikor is $\lambda'=\lambda.\,T=\varkappa$, azaz az időegység megválasztásától függetlenül ismert m esetén a folyamat realizációi egyetlen paraméterrel, $\varkappa$-val vannak jellemezve. A későbbiekben gyakran feltesszük, hogy a (2. 9) leképezést már elvégeztük és a λ paraméter helyett egyszerűen $\varkappa$-át írunk. Ekkor (2. 1) a következő alakú lesz

(2. 1′) $$\sqrt{\frac{\varkappa}{\pi}}\exp\left\{-\varkappa\left[s_{01}^2-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\varkappa s_{02}^2\right]\right\}.$$

Formálisan a (2. 1) ill. (2. 1′) összefüggések „levezethetők" a következő módon is.

Legyen $\mathbf{M}\xi(t)=0$, akkor $\xi(0)$ sűrűségfüggvénye

(2. 10) $$f_{\xi(o)}(x_0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_\xi}e^{-\frac{x_0^2}{2\sigma_\zeta^2}}=\sqrt{\frac{\lambda}{\pi}}\frac{1}{\sigma_\zeta}e^{-\frac{\lambda x_0^2}{\sigma_\zeta^2}}$$

alakú, másrészt az (1. 1′) összefüggés alapján a $\zeta(t)$ és $\xi(t)$ folyamatok sűrűségfüggvény „funkcionálja" között a következő összefüggést kapjuk

(2. 11) $$\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_\zeta^2}\int_0^T\frac{d\zeta^2}{dt}\right\}=\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_\zeta^2}\int_0^T\frac{(d\xi+\lambda\xi\,dt)^2}{dt}\right\}=$$

$$=\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_\zeta^2}\left[\int_0^T\frac{d\xi^2}{dt}+2\lambda\int_0^T\xi\,d\xi+\lambda^2\int_0^T\xi^2(t)\,dt\right]\right\}.$$

Felhasználjuk közben, hogy az $m(x, t)$, $b(x, t)$ együtthatójú $\eta(t)$ diffúziós folyamatra az $\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_n$ változók együttes sűrűségfüggvényének közelítő kifejezése

$$p(x_0, \ldots, x_n)=p_0(x_0)\prod_{i=0}^{n-1}[2\pi b(x_i, t_i)]^{-1/2}\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\left[\frac{x_{i+1}-x_i}{\Delta_i}-a_i\right]^2\frac{\Delta_i}{b_i}\right\}$$

lesz, ahol

$$t_{i+1}-t_i=\Delta_i,\ \eta_i=\eta(t_i),\ a_i=a(x_i, t_i),\ b_i=b(x_i, t_i),\ t_n=T,\ t_0=0.$$

Ebben a kifejezésben szereplő összeg pedig a

$$-\frac{1}{2}\int_0^T\left[\frac{d\eta}{dt}-a(x, t)\right]^2\frac{dt}{b(x, t)}$$

alakú integrálhoz hasonlít.

Ismeretes azonban, hogy (lásd Doob, 444. o.)

$$\int_0^T\xi\,d\xi=\frac{1}{2}[\xi^2(T)-\xi^2(o)]-\frac{1}{2}T\sigma_\xi^2.$$

Így (2. 10) figyelembevételével (2. 11)-ből formálisan kiadódik (2. 1′). Az ilyen egyszerű „számolások" precíz bizonyítása azonban jóval hosszadalmasabb, amiről az olvasó meggyőződhet a fenti (2. 1) összefüggés (CH. STRIEBEL), de más összefüggések bizonyítása kapcsán is (lásd pl. JU. V. PROHOROV cikkét).

A

$$m_1 = \frac{\xi(o)+\xi(T)}{2}, \quad m_2 = \frac{1}{T}\int_0^T \xi(t)\,dt,$$

$$s_{01}^2 = \frac{1}{2}\{[\xi(o)-m]^2+[\xi(T)-m]^2\}, \quad s_{02}^2 = \int_0^T (\xi(t)-m)^2\,dt$$

elégséges statisztikarendszer eloszlásának meghatározását végezzük el a következőkben. Legyen az egyszerűség kedvéért $m=0$, akkor a fenti valószínűségi változók együttes karakterisztikus függvénye

$$\mathbf{M}\exp\{i\alpha_1 m_1 + i\alpha_2 s_{01}^2 + i\alpha_3 m_2 + i\alpha_4 s_{02}^2\} = \frac{2\sqrt{\lambda}\,e^{\frac{\varkappa}{2}}(\varkappa^2-2T\sigma_\zeta^2 i\alpha_4)^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{T}\,[\varphi(\alpha_2,\alpha_4)]^{\frac{1}{2}}}\cdot \tag{2. 13}$$

$$\cdot\exp\frac{1}{2}\left\{-\frac{\alpha_1\alpha_3\sigma_\zeta^2+\alpha_3^2\sigma_\zeta^2}{\varkappa^2-2T\sigma_\zeta^2 i\alpha_4}T+\left(\frac{i\alpha_1}{2}-T\frac{i\alpha_3\lambda+\alpha_2\alpha_3\sigma_\zeta^2}{\varkappa^2-2T\sigma_\zeta^2 i\alpha_4}\right)\cdot\right.$$

$$\cdot\left[\left(\frac{i\alpha_1\sigma_\zeta^2}{2}\left(1+e^{-\sqrt{\varkappa^2-2T\sigma_\zeta^2 i\alpha_4}}\right)+i\alpha_3\sigma_\zeta^2\,\frac{1-e^{-\sqrt{\varkappa^2-2T\sigma_\zeta^2 i\alpha_4}}}{\sqrt{\varkappa^2-2T\sigma_\zeta^2 i\alpha_4}}\right)\cdot\right.$$

$$\cdot\frac{\left(\varkappa-T\sigma_\zeta^2 i\alpha_2+\sqrt{\varkappa^2-2T\sigma_\zeta^2 i\alpha_4}\right)e^{\sqrt{\varkappa^2-2T\sigma_\zeta^2 i\alpha_4}}-\left(\varkappa-T\sigma_\zeta^2 i\alpha_2-\sqrt{\varkappa^2-2T\sigma_\zeta^2 i\alpha_4}\right)}{T\cdot\varphi(\alpha_2,\alpha_4)}+$$

$$+\left(\frac{i\alpha_1}{2}\sigma_\zeta^2\left(1+e^{\sqrt{\varkappa^2-2T\sigma_\zeta^2 i\alpha_4}}\right)-i\alpha_3\sigma_\zeta^2\,\frac{1-e^{\sqrt{\varkappa^2-2T\sigma_\zeta^2 i\alpha_4}}}{\sqrt{\varkappa^2-2T\sigma_\zeta^2 i\alpha_4}}\right)\cdot$$

$$\left.\left.\cdot\frac{\left(\varkappa-T\sigma_\zeta^2 i\alpha_2+\sqrt{\varkappa^2-2T\sigma_\zeta^2 i\alpha_4}\right)-\left(\varkappa-T\sigma_\zeta^2 i\alpha_2-\sqrt{\varkappa^2-2T\sigma_\zeta^2 i\alpha_4}\right)e^{-\sqrt{\varkappa^2-2T\sigma_\zeta^2 i\alpha_4}}}{T\varphi(\alpha_2,\alpha_4)}\right]\right\},$$

ahol

$$\varphi(\alpha_2,\alpha_4) = \frac{1}{T^2}e^{\sqrt{\varkappa^2-2T\sigma_\zeta^2 i\alpha_4}}\left(\varkappa-T\sigma_\zeta^2 i\alpha_2+\sqrt{\varkappa^2-2T\sigma_\zeta^2 i\alpha_4}\right)^2- \tag{2. 14}$$

$$-\frac{1}{T^2}e^{-\sqrt{\varkappa^2-2T\sigma_\zeta^2 i\alpha_4}}\left(\varkappa-T\sigma_\zeta^2 i\alpha_2-\sqrt{\varkappa^2-2T\sigma_\zeta^2 i\alpha_4}\right)^2.$$

A (2. 13) és (2. 14) összefüggésből következik, hogy m_1, m_2 karakterisztikus függvénye

$$\exp-\frac{1}{2}\left\{\alpha_1^2\frac{\sigma_\zeta^2(1+e^{-\varkappa})}{4\lambda}+\alpha_1\alpha_3\frac{\sigma_\zeta^2(1-e^{-\varkappa})}{T\lambda^2}+\alpha_3^2\frac{\sigma_\zeta^2\left(T+\frac{e^{-\varkappa}-1}{\lambda}\right)}{\varkappa^2}\right\}, \tag{2. 15}$$

míg s_{01}^2, s_{02}^2 karaktirisztikus függvénye

$$\frac{2\sqrt{\frac{\lambda}{T}}e^{\frac{\varkappa}{2}}(\varkappa^2-2T\sigma_\xi^2 i\alpha_4)^{\frac{1}{4}}}{[\varphi(\alpha_2,\alpha_4)]^{\frac{1}{2}}}. \tag{2.16}$$

Ha $\varkappa=\lambda T\to 0$ $(\sqrt{\lambda}m_1, \sqrt{\lambda}m_2, \lambda s_{01}^2, \lambda^2 s_{02}^2)$ karakterisztikus függvénye

$$\frac{\left(1+\frac{\varkappa}{2}\right)e^{-\frac{(\alpha_1+\alpha_3)^2}{2(1-\sigma_\xi^2 i\alpha_2)}\sigma_\xi^2-\frac{\varkappa\sigma_\xi^2}{12}\alpha_3^2}}{\left\{1-\sigma_\xi^2 i\alpha_2+\frac{\varkappa}{2}\left[(1-\sigma_\xi^2 i\alpha_2)^2+1-2\sigma_\xi^2\frac{i\alpha_4}{T}\right]\right\}^{\frac{1}{2}}}+o(\varkappa) \tag{2.17}$$

alakú, amiből következik, hogy $\varkappa\to 0$ esetén m_1 és s_{01}^2 aszimptotikusan elégséges statisztikarendszert alkot.

A (2..13) *összefüggés bizonyítása.*

Legyen

$$m_1^{(n)}=\frac{\xi_1+\xi_n}{2},\quad s_{01}^{(n)}=\frac{\xi_1^2+\xi_n^2}{2},\quad m_2^{(n)}=\sum_2^n \xi_i\cdot\Delta t,\quad s_{02}^{(n)}=\sum_2^n \xi_i^2\cdot\Delta t,$$

ahol

$$\Delta t=\frac{T}{n},\quad \xi_i=\xi\left(\frac{i-1}{n}T\right),\ (i=1,2,\dots,n)\quad \text{és}\quad \beta=e^{-\lambda\Delta t}=1-\lambda\Delta t+o(\Delta t).$$

Nyilván

$$\mathbf{M}e^{i(\alpha_1 m_1^{(n)}+\alpha_2 s_{01}^{(n)}+\alpha_3 m_2^{(n)}+\alpha_4 s_{02}^{(n)})}= \tag{2.18}$$

$$=(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\sigma^{-n}(1-\beta^2)^{-\frac{n-1}{2}}\int\dots\int e^{-\frac{1}{2}[XA_nX^*-XC^*]}dx_1\dots dx_n,$$

ahol

$$A_n=\frac{1}{\sigma^2(1-\beta^2)}\begin{pmatrix} a_1 & -\beta & 0 & 0\cdots 0\\ -\beta & a & -\beta & 0\cdots 0\\ 0 & -\beta & a & -\beta\cdots 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots\ a & -\beta\\ 0 & 0 & \cdots -\beta & a_1\end{pmatrix}=\frac{1}{\sigma^2(1-\beta^2)}B_n,$$

$$a_1=1-i\alpha_2\sigma_\xi^2\Delta t,\quad a=2(1-\lambda\Delta t-i\alpha_4\sigma_\xi^2\Delta t+\lambda^2(\Delta t)^2+o(\Delta t)),$$

$$C^*=2\begin{pmatrix}\frac{i\alpha_1}{2}\\ i\alpha_3\Delta t\\ \vdots\\ i\alpha_3\Delta t\\ \frac{i\alpha_1}{2}\end{pmatrix}.$$

Közben felhasználtuk, hogy a $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ valószínűségi változók együttes eloszlásának sűrűségfüggvénye:

$$f_{\xi_1,\ldots,\xi_n}(x_1, \ldots, x_n) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\sigma^{-n}(1-\beta^2)^{-\frac{n-1}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2(1-\beta^2)}\cdot\right. \tag{2. 19}$$

$$\left.\cdot\left[(1-\beta^2)x_1^2 + \sum_2^n (x_i-\beta x_{i-1})^2\right]\right\},$$

vagy mátrix alakban

$$f_{\xi_1,\ldots,\xi_n}(x_1, \ldots, x_n) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\sigma^{-n}(1-\beta^2)^{-\frac{n-1}{2}}\cdot \tag{2. 19'}$$

$$\cdot\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2(1-\beta^2)}XR_n^{-1}X^*\right\}$$

alakú, ahol

$$R_n^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\beta & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ -\beta & 1+\beta^2 & -\beta & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & -\beta & 1+\beta^2 & -\beta & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & & & \\ 0 & 0 & & & & & 1+\beta^2 & -\beta \\ 0 & 0 & & & & & -\beta & 1 \end{pmatrix}$$

és

$$X=(x_1, \ldots, x_n), \quad X^* = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

(2. 19) egyszerűen belátható, ha figyelembe vesszük, hogy ξ_n kielégíti a

$$\xi_{n+1} = \beta\xi_n + \zeta_{n+1} \tag{2. 20}$$

differencia egyenletet, ahol ζ_n egy független *Gauss* eloszlású valószínűségi változó sorozat (fehér zaj) és $\sigma_\xi^2 = (1-\beta^2)\sigma_\xi^2$, ahol σ_ξ^2-et egyszerűen σ^2-el jelöljük. A (2. 20) leképezés ($i=1, 2, \ldots, n$) függvénydeterminánsának értéke 1, így (2. 19) egyszerűen következménye a ζ_i ($i=\overline{1}, n$) változók függetlenségének.

Elégítse ki a $d_1, d_2, \ldots, d_n$ számsorozat az

$$\begin{aligned} a_1 d_1 - \beta d_2 &= \frac{i\alpha_1}{2}\sigma_\zeta^2\cdot\Delta t \\ -\beta d_1 + a d_2 - \beta d_3 &= i\alpha_3\sigma_\zeta^2(\Delta t)^2 \\ &\vdots \\ -\beta d_{k-1} + a d_k - \beta d_{k+1} &= i\alpha_3\sigma_\zeta^2(\Delta t)^2 \\ &\vdots \\ -\beta d_{n-1} + a_1 d_n &= \frac{i\alpha_1}{2}\sigma_\zeta^2\Delta t \end{aligned} \tag{2. 21}$$

egyenletrendszert, akkor

$$XA_nX^* - XC^* = YA_nY^* - D_n \tag{2.22}$$

alakba írható, ahol

$$D_n = a_1 d_1^2 + a(d_2^2 + \ldots + d_{n-1}^2) + a_1 d_n^2 - 2\beta(d_1 d_2 + \ldots + d_n d_{n-1}) = \tag{2.23}$$

$$= d_1(a_1 d_1 - \beta d_2) + d_2(ad_2 - \beta d_1 - \beta d_3) + \ldots + d_{n-1}(ad_{n-1} - \beta d_{n-2} - \beta d_n) +$$

$$+ d_n(a_1 d_n - \beta d_{n-1}) = \frac{i\alpha_1}{2}(d_1 + d_n)\sigma_\zeta^2 \cdot \Delta t + i\alpha_3 \sigma_\zeta^2 (\Delta t)^2 \sum_2^{n-1} d_i.$$

A (2. 21) egyenletrendszer partikuláris megoldása

$$d_i = d = \frac{i\alpha_3\sigma_\zeta^2}{\lambda^2 - 2\sigma_\zeta^2 i\alpha_4} \qquad (i=2, \ldots, n-1),$$

míg az általános megoldás

$$d_i = d + \theta_1 u_1^i + \theta_2 u_2^i \qquad (i=1, \ldots, n) \tag{2.24}$$

alakú, ahol u_1, u_2 az

$$\beta u^2 - au - \beta = 0$$

egyenlet két gyöke, azaz

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{a - \sqrt{a^2 - 4\beta^2}}{2\beta} = 1 - \Delta t\sqrt{\lambda^2 - 2\sigma_\zeta^2 i\alpha_4} + o(\Delta t), \\ u_2 &= \frac{a + \sqrt{a^2 - 4\beta^2}}{2\beta} = 1 + \Delta t\sqrt{\lambda^2 - 2\sigma_\zeta^2 i\alpha_4} + o(\Delta t). \end{aligned} \tag{2.25}$$

θ_1, θ_2 a (2. 21) egyenletrendszer első és utolsó egyenletéből, mint „kezdeti feltételekből” határozhatók meg, tehát

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \left(\frac{i\alpha_1}{2}\sigma_\zeta^2 \Delta t - \frac{i\alpha_3\sigma_\zeta^2 \Delta t(\lambda - i\alpha_2\sigma_\zeta^2)}{\lambda^2 - 2\sigma_\zeta^2 i\alpha_4}\right) \cdot \\ &\cdot \frac{a_1 u_2^n - \beta u_2^{n-1} - (a_1 u_2 - \beta u_2^2)}{(a_1 u_1 - \beta u_1^2)(a_1 u_2^n - \beta u_2^{n-1}) - (a_1 u_2 - \beta u_2^2)(a_1 u_1^n - \beta u_1^{n-1})} \\ \theta_2 &= \left(\frac{i\alpha_1}{2}\sigma_\zeta^2 \Delta t - \frac{i\alpha_3\sigma_\zeta^2 \Delta t(\lambda - i\alpha_2\sigma_\zeta^2)}{\lambda^2 - 2\sigma_\zeta^2 i\alpha_4}\right) \cdot \\ &\cdot \frac{a_1 u_1 - \beta u_1^2 - (a^1 u_1^n - \beta u_1^{n-1})}{(a_1 u_1 - \beta u_1^2)(a_1 u_2^n - \beta u_2^{n-1}) - (a_1 u_2 - \beta u_2^2)(a_1 u_1^n - \beta u_1^{n-1})} \end{aligned} \tag{2.26}$$

CRAMER ismert tétele szerint (CRAMER 136. o.)

$$\int \ldots \int \exp\left\{-\frac{1}{2} XA_nX^*\right\} dx_1 \ldots dx_n = (2\pi)^{\frac{n}{2}} |A_n|^{-\frac{1}{2}}$$

és így (2. 22) alapján (2. 18) a következő alakú lesz:

$$(2.27) \qquad (1-\beta^2)^{\frac{1}{2}} |B_n|^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{D_n}{2\sigma_\xi^2 \Delta t}}.$$

Először határozzuk meg $e^{\frac{D_n}{2\sigma_\xi^2 \Delta t}}$ határétékét amint $n \to \infty$. Egyszerű számolással kapjuk, hogy

$$a_1 u_1 - \beta u_1^2 = \Delta t\left(\lambda - i\sigma_\xi^2 \alpha_2 + \sqrt{\lambda^2 - 2\sigma_\xi^2 i\alpha_4}\right) + o(\Delta t),$$

$$a_1 u_2 - \beta u_2^2 = \Delta t\left(\lambda - i\sigma_\xi^2 \alpha_2 - \sqrt{\lambda^2 - 2\sigma_\xi^2 i\alpha_4}\right) + o(\Delta t),$$

$$a_1 u_1^n - \beta u_1^{n-1} = e^{-T\sqrt{\lambda^2 - 2\sigma_\xi^2 i\alpha_4}}\left(\lambda - i\sigma_\xi^2 \alpha_2 - \sqrt{\lambda^2 - 2\sigma_\xi^2 i\alpha_4}\right) + o(1),$$

$$a_1 u_2^n - \beta u_2^{n-1} = e^{T\sqrt{\lambda^2 - 2\sigma_\xi^2 i\alpha_4}}\left(\lambda - i\sigma_\xi^2 \alpha_2 + \sqrt{\lambda^2 - 2\sigma_\xi^2 i\alpha_4}\right) + o(1),$$

és így

$$(2.28) \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{D_n}{2\sigma_\xi^2 \Delta t} = \frac{1}{2}\Bigg\{-\frac{\alpha_1\alpha_3\sigma_\xi^2 + \alpha_3^2\sigma_\xi^2 T}{\lambda^2 - 2\sigma_\xi^2 i\alpha_4} +$$

$$+\left(\frac{i\alpha_1}{2} - \frac{i\alpha_3\lambda + \alpha_3\alpha_2\sigma_\xi^2}{\lambda^2 - 2\sigma_\xi^2 i\alpha_4}\right)\Bigg[\left(\frac{i\alpha_1}{2}\sigma_\xi^2 + \frac{i\alpha_1\sigma_\xi^2}{2} e^{-T\sqrt{\lambda^2 - 2\sigma_\xi^2 i\alpha_4}} + i\alpha_3\sigma_\xi^2 \frac{1 - e^{-T\sqrt{\lambda^2 - 2\sigma_\xi^2 i\alpha_4}}}{\sqrt{\lambda^2 - 2\sigma_\xi^2 i\alpha_4}}\right)\cdot$$

$$\cdot\frac{\left(\lambda - i\sigma_\xi^2\alpha_2 + \sqrt{\lambda^2 - 2\sigma_\xi^2 i\alpha_4}\right)e^{T\sqrt{\lambda^2 - 2\sigma_\xi^2 i\alpha_4}} - \left(\lambda - i\alpha_2\sigma_\xi^2 - \sqrt{\lambda^2 - 2\sigma_\xi^2 i\alpha_4}\right)}{\varphi(\alpha_2, T\alpha_4)} +$$

$$+\left(\frac{i\alpha_1}{2}\sigma_\xi^2 + \frac{i\alpha_1}{2}\sigma_\xi^2 e^{T\sqrt{\lambda^2 - 2\sigma_\xi^2 i\alpha_4}} - i\alpha_3\sigma_\xi^2 \frac{1 - e^{T\sqrt{\lambda^2 - 2\sigma_\xi^2 i\alpha_4}}}{\sqrt{\lambda^2 - 2\sigma_\xi^2 i\alpha_4}}\right)\cdot$$

$$\cdot\frac{\left(\lambda - i\sigma_\xi^2\alpha_2 + \sqrt{\lambda^2 - 2\sigma_\xi^2 i\alpha_4}\right) - e^{-T\sqrt{\lambda^2 - 2\sigma_\xi^2 i\alpha_4}}\left(\lambda - i\alpha_2\sigma_\xi^2 - \sqrt{\lambda^2 - 2\sigma_\xi^2 i\alpha_4}\right)}{\varphi(\alpha_2, T\alpha_4)}\Bigg]\Bigg\}.$$

$|B_n|$ kiszámításánál vegyük figyelembe, hogy

$$(2.29) \qquad |B_n| = a_1^2|\tilde{B}_{n-2}| - 2\beta^2 a_1 |B_{n-3}| + \beta^4 |\tilde{B}_{n-4}|,$$

ahol $|\tilde{B}_n|$ kielégíti a

$$(2.30) \qquad |\tilde{B}_n| = a|\tilde{B}_{n-1}| - \beta^2|B_{n-2}|$$

differenciaegyenletet és így

$$(2.31) \qquad |\tilde{B}_n| = \alpha_1 v_1^n + \alpha_2 v_2^n,$$

ahol v_1 és v_2 a

$$v^2 - av + \beta^2 = 0$$

egyenlet megoldásai, míg α_1 és α_2 az

$$|\tilde{B}_1| = a, \quad |\tilde{B}_2| = a^2 - \beta^2$$

feltételekből határozhatók meg. Azt kapjuk tehát, hogy

$$\alpha_1 = \frac{v_1}{v_1 - v_2}, \quad \alpha_2 = -\frac{v_2}{v_1 - v_2}. \tag{2.32}$$

Végül

$$|B_n|^{-1/2} = \left\{\frac{v_1^{n-3}}{v_1 - v_2}[a_1 v_1 - \beta^2]^2 - \frac{v_2^{n-3}}{v_1 - v_2}[a_1 v_2 - \beta^2]^2\right\}^{-1/2}. \tag{2.33}$$

Mivel

$$v_1 = 1 - \lambda \Delta t + \Delta t \sqrt{\lambda^2 - 2\sigma_\zeta^2 i\alpha_4} + o(\Delta t),$$

$$v_2 = 1 - \lambda \Delta t - \Delta t \sqrt{\lambda^2 - 2\sigma_\zeta^2 i\alpha_4} + o(\Delta t),$$

azt kapjuk, hogy

$$a_1 v_1 - \beta^2 = \Delta t\left(\lambda - \sigma_\zeta^2 i\alpha_2 + \sqrt{\lambda^2 - 2\sigma_\zeta^2 i\alpha_4}\right) + o(\Delta t),$$

$$a_1 v_2 - \beta^2 = \Delta t\left(\lambda - \sigma_\zeta^2 i\alpha_2 - \sqrt{\lambda^2 - 2\sigma_\zeta^2 i\alpha_4}\right) + o(\Delta t),$$

$$v_1^{n-3} = e^{T(\sqrt{\lambda^2 - 2\sigma_\zeta^2 i\alpha_4} - \lambda)} + o(1),$$

$$v_2^{n-3} = e^{-T(\sqrt{\lambda^2 - 2\sigma_\zeta^2 i\alpha_4} - \lambda)} + o(1),$$

és így

$$(1-\beta^2)^{\frac{1}{2}}|B_n|^{-\frac{1}{2}} = \frac{2\sqrt{\lambda}(\lambda^2 - 2\sigma_\zeta^2 i\alpha_4)e^{\frac{\lambda T}{2}}}{\varphi(\alpha_2, T\alpha_4)}(1 + o(1)). \tag{2.34}$$

(2. 27) (2. 28) és (2. 34)-ből következik (2. 13), amivel állításunkat bebizonyítottuk.

Az itt ismertetett eljárás természetesen az egyik lehetséges módja az $m_1, m_2, s_{01}^2, s_{02}^2$ funkcionálok karakterisztikus függvényének meghatározására. Másik út kínálkozik oly módon, hogy a feltételes karakterisztikus függvényre (a $\xi(0) = x$ feltétel mellett) differenciálegyenletet írunk fel, s amely differenciálegyenletnek a megoldását (melynek egyértelműségét DÜNKIN [1] eredményei biztosítják) keressük meg.

Legyen ugyanis

$$u(T, x) = \mathbf{M}\{e^{i(\alpha_1 m_1 + \alpha_2 s_{01}^2 + \alpha_3 T m_2 + \alpha_4 T s_{02}^2)}|_{\xi(0)=x}\}. \tag{2.35}$$

Ekkor egyszerűen belátható, hogy

$$\begin{aligned} u(T + \Delta T, x) = {} & \frac{1}{\sqrt{2\pi \Delta T}\,\sigma_\zeta}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x_1 - x + \lambda x \Delta T)^2}{2\Delta T \sigma_\zeta^2}}\left[u(T, x) + \frac{\partial u}{\partial x_1}\bigg|_{x_1 = x}(x - x_1) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\bigg|_{x_1 = x}\frac{(x_1 - x)^2}{2} + \ldots\right](1 + i\alpha_4 x^2 \Delta T)(1 + i\alpha_3 x \Delta T)\left[1 - \frac{i\alpha_1}{2}(x_1 - x) - \right. \\ & \left. - \frac{\alpha_1^2}{8}(x_1 - x)^2 + \ldots\right]\left[1 - \frac{i\alpha_2}{2}((x_1 - x)^2 + 2x(x_1 - x)) - \right. \\ & \left. - \frac{\alpha_2^2}{8}(4x^2(x_1 - x)^2 + \ldots) + \ldots\right] dx_1. \end{aligned} \tag{2.36}$$

$\Delta T \to 0$ esetén (2. 36)-ból a következő parciális differenciálegyenletet kapjuk $u(T, x)$-re:

$$(2.37)\quad \frac{\partial u}{\partial T} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x}\left[-x(\lambda + i\alpha_2) - \frac{i\alpha_1}{2}\right] + u\left[x^2\left(\lambda i\alpha_2 + i\alpha_4 - \frac{\alpha_2^2}{2}\right) + \right.$$

$$\left. - x\left(\lambda\frac{i\alpha_1}{2} + i\alpha_3 - \frac{\alpha_1\alpha_2}{2}\right) - \frac{i\alpha_2}{2} - \frac{\alpha_1^2}{8}\right].$$

A (2. 37) differenciálegyenlethez hasonló egyenlet megoldása szerepelni fog a későbbiekben, így ezt most elhagyjuk.

3. §. A paraméterek becslései és eloszlásaik.

Legyen λ ismert, akkor a várható érték maximum likelihood becslése (2. 4)-ből

$$(3.1)\quad \hat{m} = \frac{\xi(o) + \xi(T) + \lambda\int_0^T \xi(t)\,dt}{2 + \lambda T}$$

normális eloszlású (m, σ_1) $\left(\text{ahol } \sigma_1^2 = \frac{\sigma_\xi^2}{2(1+\varkappa)^2}(4\varkappa + 1 - e^{-\varkappa})\right)$ paraméterekkel (vö. GRENANDER 115. o.).

Ez a becslés minimális szórású, mivel a $\frac{dP}{dV}$ likelihood hányados a LEHMANN—SCHEFFÉ [1] értelemben teljes függvényrendszert alkot ismeretlen m esetén.

Legyen $m = 0$ és λ (vagy σ_ξ^2) ismeretlen. λ maximum likelihood becslése (2. 1) alapján

$$\log\frac{dP}{dv} = c + \frac{1}{2}\log\frac{\lambda}{\sigma_\xi^2} - \frac{\lambda}{\sigma_\xi^2}\left[s_{01}^2 - \frac{1}{2}\sigma_\xi^2 T + \frac{1}{2}\lambda T s_{02}^2\right]$$

miatt a következő egyenlet megoldása lesz:

$$(3.2)\quad \frac{\sigma_\xi^2}{2\lambda} - \left(s_{01}^2 - \frac{1}{2}\sigma_\xi^2 T\right) - \lambda T s_{02}^2 = 0,$$

vagy σ_ξ^2-re $\left(\sigma_\xi^2 = \frac{\sigma_\zeta^2}{2\lambda} \text{ alapján}\right)$

$$(3.3)\quad \sigma_\xi^4 - \left(s_{01}^2 - \frac{1}{2}\sigma_\zeta^2 T\right)\sigma_\xi^2 - \frac{T}{2}\sigma_\zeta^2 s_{02}^2 = 0.$$

Könnyű belátni, hogy (3. 3) egyetlen pozitív megoldása

$$(3.4)\quad \hat{\sigma}_\xi^2 = 1/2(s_{01}^2 - 1/2\sigma_\zeta^2 T) + 1/2\sqrt{(s_{01}^2 - 1/2\sigma_\zeta^2 T)^2 + 2T\sigma_\zeta^2 s_{02}^2}.$$

Legyen az egyszerűség kedvéért

$$d = 1/2(s_{01}^2 - 1/2\sigma_\zeta^2 T),$$

akkor, mint az könnyen belátható

$$P\{\hat{\sigma}_\xi^2 < y\sigma_\xi^2\} = P\{d + \sqrt{d^2 + 1/2\, T\sigma_\xi^2 s_{02}^2} < y\sigma_\xi^2\} = \tag{3. 5}$$

$$= P\left\{\frac{2\varkappa\lambda}{y^2\sigma_\xi^2} s_{02}^2 + \frac{2\lambda}{y\sigma_\xi^2} s_{01}^2 < \frac{\varkappa}{y} + 1\right\}.$$

A (2. 16) összefüggésből belátható, hogy a $\eta_y = \frac{2\varkappa^2}{y^2\sigma_\xi^2} s_{01}^2 + \frac{2\varkappa}{y\sigma_\xi^2} s_{01}^2$ valószínűségi változó aszimptotikusan normális eloszlású, ha $\varkappa \to \infty$ és a $\hat{\sigma}_\xi^2$ becslés ekvivalens az s_{02}^2 becsléssel. Igaz a következő (tegyük fel, hogy $\sigma_\xi^2 = 1$ és $T = 1$, azaz elvégeztük a (2. 9) transzformációt).

3. 1. TÉTEL: *Ha $m = 0$ és $\varkappa \to \infty$ az*

$$s_{02}^2 \sim \sigma_\xi^2$$

becslés aszimptotikusan efficiens és az

$$\frac{s_{02}^2 - \sigma_\xi^2}{s_{02}^2 \sqrt{2/\varkappa}}$$

hányados eloszlása tart a (0, 1) *normális eloszláshoz.*

Bizonyítás. Egyszerű számolással adódik a várható értékre és szórásnégyzetre, hogy

$$\begin{aligned} \mathbf{M} s_{02}^2 &= \sigma_\xi^2 \\ \mathbf{D} s_{02}^2 &= \frac{\sigma_\xi^2}{\varkappa^2}(2\varkappa + e^{-2\varkappa} - 1), \end{aligned} \tag{3. 6}$$

és s_{02}^2 karakterisztikus függvénye

$$f(\alpha) = \tag{3. 7}$$

$$= \frac{2\left(1 - \frac{4i\alpha\sigma_\xi^2}{\varkappa}\right)^{1/4} e^{\varkappa/2}}{\left[\left(1 + \sqrt{1 - \frac{4i\alpha}{\varkappa}\sigma_\xi^2}\right)^2 e^{\varkappa\sqrt{1 - \frac{4i\alpha}{\varkappa}\sigma_\xi^2}} - \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4i\alpha}{\varkappa}\sigma_\zeta^2}\right)^2 e^{-\varkappa\sqrt{1 - \frac{4i\alpha}{\varkappa}\sigma_\xi^2}}\right]^{1/2}}$$

alakú (vö. (2. 16)) $\varkappa \to \infty$ esetén az

$$\frac{s_{02}^2 - \sigma_\xi^2}{\sigma_\xi^2 \sqrt{2/\varkappa}}$$

valószínűségi változó karakterisztikus függvénye $e^{-\frac{\alpha^2}{2}}$-hez tart, azaz normális eloszlású lesz. Másrészt $s_{02}^2 \to \sigma_\xi^2$ valószínűségben, ha $\varkappa \to \infty$, így CRAMER ismert tétele szerint (CRAMER, 281. o.) a tétel állítása igaz. Mivel a (2. 1') likelihood függvényrendszer nem teljes (erre a problémára később még visszatérünk), nem létezik minimális szórású torzítatlan becslése σ_ξ^2-nek (vagy $\varkappa$-nak).

Egy becslést aszimptotikusan efficiensnek nevezünk, ha aszimptotikus eloszlása létezik s az megegyezik a maximum likelihood becslés aszimptotikus eloszlásával.

Legyen továbbra is $\sigma_\xi^2=1$ és $T=1$. (2. 16)-ból látható, hogy $\varkappa\to 0$ esetén $2\varkappa s_{02}^2$ és $\varkappa s_{01}^2$ karakterisztikus függvénye

$$f(\alpha_1,\alpha_2)=\frac{1}{(1-i\alpha_1-2i\alpha_2)^{1/2}}+o(\varkappa), \tag{3. 8}$$

alakú, azaz s_{01}^2 és s_{02}^2 aszimptotikusan ekvivalensek. A (3. 8) összefüggésből látható, hogy

$$\frac{s_{02}^2}{\sigma_\xi^2}=2\varkappa s_{02}^2$$

$\varkappa\to 0$ esetén χ^2 eloszlású 1 szabadságfokkal:

$$P\left\{\frac{s_{02}^2}{\sigma_\xi^2}<x^2\right\}\to\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{x^2}e^{-y/2}y^{-1/2}\,dy=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^x e^{-y^2/2}\,dy. \tag{3. 9}$$

$\varkappa$ nem túl nagy és nem túl kicsiny értékeire az s_{01}^2 és s_{02}^2 statisztikákat kell felhasználni $\varkappa$ (illetve σ_ξ^2) becslésére. A $\varkappa$ paraméterre vonatkozó konfidencia intervallumok megszerkesztése a (3. 5) összefüggés alapján az $\eta_y=\frac{\varkappa^2}{y^2}s_{02}^2+\frac{\varkappa}{y}s_{01}^2$ valószínűségi változó eloszlásának meghatározása segítségével történhet. Az η_y változó karakterisztikus függvénye (vö. (2. 16)).

$$f_{\eta_y}(\alpha)= \tag{3. 10}$$

$$=\frac{2\left(1-\frac{2}{y^2}i\alpha\right)^{1/4}e^{\varkappa/2}}{\left[\left(1-\frac{i\alpha}{y}+\sqrt{1-\frac{2}{y^2}i\alpha}\right)^2e^{\varkappa\sqrt{1-\frac{2}{y^2}i\alpha}}-\left(1-\frac{i\alpha}{y}-\sqrt{1-\frac{2}{y^2}i\alpha}\right)^2e^{-\varkappa\sqrt{1-\frac{2}{y^2}i\alpha}}\right]^{1/2}}$$

alakú. Tetszőleges előre megadott α szint és σ_ξ^2 esetén a (3. 11)

$$P_{\sigma_\xi^2}\{\hat\sigma^2>x\}=\alpha \tag{3. 11}$$

egyenletnek egyetlen $x=\varphi(\sigma_\xi^2)$ megoldása lesz. Ennek inverz függvénye

$$\varphi^{-1}(x)=\psi_\alpha(x) \tag{3. 12}$$

szintén egyértelműen meghatározható és σ_ξ^2-re konfidenciahatárt szolgáltat, azaz σ_ξ^2-ben azonosan

$$P_{\sigma_\xi^2}\{\sigma_\xi^2\le\psi_\alpha(\hat\sigma^2)\}\equiv\alpha. \tag{3. 13}$$

$\varkappa\to\infty$ és $\varkappa\to 0$ esetén ezek a konfidenciahatárok megegyeznek a megfelelő aszimptotikus eloszlás által szolgáltatott konfidenciahatárokkal.

A konfidenciahatárok effektív kiszámítása egydimenziós esetben még nem történt meg. Komplex stacionárius *Gauss—Markov* folyamat esetén a $\varkappa$ „csillapodási együttható"-n (melynek becslésénél a megfelelő elégséges statisztikákból nyert maximum likelihood becslés karakterisztikus függvénye (3. 10) négyzete) vonatkozó számításokat a MOSZKVAI LOMONOSZOV EGYETEM *Valószínűségszámítási Tanszékén* végeztük el A. N. KOLMOGOROV vezetése alatt (lásd ARATÓ, RICSKOVA, SZINAJ).

Ismeretlen m és λ (vagy σ_ξ^2) esetén (2. 7) alapján a maximum likelihood egyenletek a következők lesznek:

$$\frac{\sigma_\xi^2}{2\lambda}(s_1^2 - 1/2\sigma_\xi^2 T) - \lambda T s_2^2 - (m-m_1)^2 - \lambda T(m-m_2)^2 = 0, \tag{3. 14}$$

$$2(m-m_1) + \lambda T(m-m_2) = 0.$$

A (3. 14) egyenletrendszer megoldása túlságosan bonyolult, érdemes azonban megjegyezni, hogy az $\hat{m}$ és $\hat{\lambda}$ becslések között

$$\hat{m} = \frac{2m_1 + \hat{\varkappa} m_2}{2+\hat{\varkappa}} \tag{3. 15}$$

alakú összefüggés áll fenn. Amint később látni fogjuk, σ_ξ^2 (vagy λ) becslése esetén a legtermészetesebb olyan statisztikákkal dolgozni, amelyek nem függnek a $\xi(t)$ folyamat kiindulási pontjától. Ilyen rendszer lehet pl. s_1^2, s_2^2, $(m_1 - m_2)^2$. Nagy $\varkappa$ értékek esetén nem nehéz az m, λ paraméterekre megfelelő becslést találni (legyen ismét $\sigma_\xi^2 = 1$, $T = 1$), fennáll a következő

3.2 TÉTEL: *$\varkappa \to \infty$ esetén az*

$$m \sim m_2, \quad \sigma_\xi^2 \sim s_2^2$$

becslések együttesen aszimptotikusan efficiensek és

$$\frac{m_2 - m}{2s_2^2}, \quad \frac{s_2^2 - \sigma_\xi^2}{s_2^2 \sqrt{2/\varkappa}}$$

együttes eloszlása tart a $\left(0, 0, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\right)$ *normális eloszláshoz.*

Bizonyítás. Egyszerű számolásokkal adódik, hogy

$$\mathbf{M} m_2 = m, \quad \mathbf{D} m_2 = \frac{2\sigma_\xi^2(\varkappa + e^{-\varkappa} - 1)}{\varkappa^2},$$

$$\mathbf{M} s_2^2 = \sigma_\xi^2 - \frac{2\sigma_\xi^2}{\varkappa}\left[1 + \frac{1}{\varkappa}(e^{-\varkappa} - 1)\right] \tag{3. 16}$$

$$\mathbf{D} s_2^2 = \frac{\sigma_\xi^4}{\varkappa}\left\{2 + \frac{1}{\varkappa}(e^{-2\varkappa} - 1) + \frac{8}{\varkappa^3}(\varkappa + e^{-\varkappa} - 1)^2 - \frac{4}{\varkappa^2}(4\varkappa + 2\varkappa e^{-\varkappa} - 7 + 8e^{-\varkappa} - e^{-2\varkappa})\right\}.$$

(2. 13)-ból látható, hogy $\varkappa \to \infty$ esetén, $m_2 - m$, s_{02}^2 együttes karakterisztikus függvénye

$$f(\alpha_1, \alpha_2) = \exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{\alpha_1^2 2\sigma_\xi^2}{\varkappa} + o\left(\frac{1}{\varkappa}\right)\right\} \exp\left\{i\alpha_2\sigma_\xi^2 - \frac{1}{2}\alpha_2^2\frac{2\sigma_\xi^4}{\varkappa} + o\left(\frac{1}{\varkappa}\right)\right\} \tag{3. 17}$$

alakú, amiből látható, hogy aszimptotikusan normális eloszlásúak. CRAMER már említett tétele szerint, mivel $m_2 \to m$ és $s_{02}^2 \to \sigma_\xi^2$ valószínűségben, a

$$\frac{m_2 - m}{\sqrt{\frac{2\sigma_\xi^2}{\varkappa^2}(\varkappa + e^{-\varkappa} - 1)}}, \quad \frac{s_{02}^2 - \sigma_\xi^2}{\sigma_\xi^2 \sqrt{\frac{2}{\varkappa}}}$$

és

$$\frac{m_2 - m}{2s_2^2}, \quad \frac{s_2^2 - \sigma_\xi^2}{s_2^2 \sqrt{\frac{2}{\varkappa}}}$$

mennyiségek együttes aszimptotikus eloszlása megegyezik (felhasználva, hogy $\left.\sigma_\xi^2 = \frac{1}{2\varkappa}\right)$. Ezzel tételünket bebizonyítottuk.

Tetszőleges T és σ_ξ^2 esetén — ami a gyakorlati alkalmazások szempontjából fontos — a 3.2 tétel nyilvánvaló következménye a

3.2′ TÉTEL: *Ha* $\varkappa = \lambda T \to \infty$ *az*

$$m \sim m_2, \quad \lambda \sim \frac{\sigma_\xi^2}{2s_2^2} = \hat{\lambda}$$

becslések együttesen efficiensek és az

$$\frac{m_2 - m}{\sqrt{\frac{2\sigma_\xi^2}{\lambda^2 T^2}(\lambda T + e^{-\lambda T} - 1)}}, \quad \frac{\hat{\lambda} - \lambda}{\sqrt{\frac{2\lambda}{T}}} \quad \left(\text{vagy} \quad \frac{\sigma_\xi^2 - s_2^2}{\sigma_\xi^2 \sqrt{\frac{2}{\lambda T}}}\right)$$

hányadosok együttes eloszlása tart a $\left(0, 0, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\right)$ *normális eloszláshoz.*

$\varkappa \to 0$ esetén az m_1 és m_2 statisztikák aszimptotikusan ekvivalensek, ami belátható karakterisztikus függvényük viselkedéséből. Ugyanakkor az s_1^2 és s_2^2 statisztikák

$$\begin{aligned} s_1^2 &= \frac{1}{4}[\xi(1) - \xi(0)]^2, \\ s_2^2 &= \int_0^1 (\xi(t) - \xi(0))^2\,dt - \left(\int_0^1 (\xi(t) - \xi(0))\,dt\right)^2 \end{aligned} \tag{3.17}$$

alakjából látható, hogy aszimptotikusan függetlenek mind az $m, \varkappa$ paraméterektől, mind pedig az m_1, m_2 statisztikáktól, ha $\varkappa \to 0$. Ez azt jelenti, hogy ebben az esetben az m paraméter teljesen szabad (nincsen rá semmilyen megkötésünk), míg a $\varkappa$ paramétert nem lehet alulról becsülni (azaz a σ_ξ^2 paramétert felülről).

A matematikai statisztikában jól ismert tény, hogy ha $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ $(n \geqq 2)$ egy független megfigyelésekből álló minta, ahol az egyes változók egy ismeretlen (m, σ) paraméterű normális sokaságból származnak, akkor az ismeretlen m paraméterre tetszőleges α megbízhatósági szinten véges konfidencia intervallum szerkeszthető. (CRAMER 563 o.).

Ez azt jelenti, hogy tetszőleges $\alpha > 1/2$ szint esetén is léteznek olyan $\bar{h}(x_1, \ldots, x_n)$ és $h(x_1, \ldots, x_n)$ függvények, melyekre

$$P\{\bar{h}(\xi_1, \ldots, \xi_n) \geqq m\} \geqq \alpha, \quad P\{h(\xi_1, \ldots, \xi_n) < m\} > \alpha$$

m és σ-ban egyenletesen. A $\bar{h}(\cdot)$ és $\bar{h}(\cdot)$ függvények függetlenek σ-tól. Ha $n=1$, azaz egyetlen ξ_1 megfigyelésünk van, ilyen $\bar{h}(\cdot)$ és $\bar{h}(\cdot)$ véges értékű függvények nem léteznek (azon természetes kikötés mellett, hogy $\bar{h}(\infty) > -\infty$ és $\bar{h}(-\infty) < \infty$).

Stacionárius *Gauss—Markov* folyamatokra igaz a következő (tegyük fel, hogy $T=1$, $\sigma_\zeta = 1$).

3.3 TÉTEL: *Legyenek $\alpha > 1/2$ és $\mu(\xi), \bar{\mu}(\xi)$ valós értékű ($-\infty$ és $+\infty$ értékeket is felvevő) az R_ξ téren a $C_{[0,1]}$ metrikában folytonos funkcionálok,*[1] *melyek eleget tesznek minden m és $\varkappa$ értékre ($-\infty < m < \infty$, $\varkappa > 0$) a*

$$P\{m \geqq \bar{\mu}(\xi)\} \geqq \alpha$$

$$P\{m < \bar{\mu}(\xi)\} \geqq \alpha$$

feltételeknek. Akkor

$$P\{\bar{\mu}(\xi) = -\infty\} \geqq f(\varkappa, \alpha)$$

$$P\{\bar{\mu}(\xi) = +\infty\} \geqq f(\varkappa, \alpha),$$

ahol $f(\varkappa, \alpha)$ a funkcionálók választásától független (azon természetes feltevés mellett, hogy $\inf\limits_{\mu} \bar{\mu}(\infty) > -\infty$, $\sup\limits_{\mu} \bar{\mu}(<\infty) < \infty$, *vagy* pl. *azon feltevés mellett, hogy eltolás esetén a funkcionál értéke az eltolás értékével változik) és*

$$f(\varkappa, \alpha) \to 1/2, \quad ha \quad \varkappa \to 0.$$

3.4. TÉTEL: *Legyen $\alpha > 0$ és $\varkappa(\xi)$ az R_ξ téren értelmezett pozitív, a $C_{[0,1]}$ metrikában folytonos funkcionál, mely minden m és $\varkappa$ értékre eleget tesz a*

$$P\{\varkappa \geqq \varkappa(\xi)\} \geqq \alpha$$

feltételnek. Akkor

$$P\{\varkappa(\xi) = 0\} \leqq g(\varkappa, \alpha),$$

ahol a pozitív $g(\cdot)$ függvény nem függ a funkcionál választásától (azon természetes feltétel mellett, hogy $\varkappa(\infty) = \varkappa(-\infty) = \infty$) és

$$g(\varkappa, \alpha) \to 1, \quad ha \quad \varkappa \to 0.$$

Megjegyzés. Természetesen $\varkappa \to \infty$ esetén az f és g függvények tetszőleges fix $\alpha < 1$ esetén 0-hoz tartoznak. Ez a 3.2 tétel következménye, melynek értelmében aszimptotikusan jó konfidencia intervallumok szerkeszthetők.

A 3.3 tétel bizonyítása.

Szimmetria okokból elegendő az állítást pl. $\bar{\mu}(\xi)$-re bizonyítani. Korlátos $\bar{\mu}(\xi)$ funkcionálra nem állhat fenn a $P\{m < \bar{\mu}(\xi)\} \geqq \alpha$ összefüggés minden m, $\varkappa$-ra, mivel, ha $\bar{\mu}(\xi) \leqq K < \infty$

$$P_{K,\varkappa}\{K < \bar{\mu}(\xi)\} = 0.$$

[1] Végtelen értékeket is felvevő funkcionálók folytonossága a $-\infty, +\infty$ pontokkal lezárt számegyenes topológiája által indukált folytonosságot jelenti.

Feltevéseink szerint elég nagy c értékre létezik olyan ($\bar{\mu}$-tól független) $\xi_0(t) \geqq \geqq -k > -\infty$, hogy $\bar{\mu}(\xi) \leqq c$ ha $\xi(t) \leqq \xi_0(t)$ (minden $0 \leqq t \leqq 1$-re). Legyen

$$\Gamma = \{\xi : \bar{\mu}(\xi) < c\}, \quad \Gamma_1 = \{\xi : -\varkappa^{-1+\delta} \leqq \xi \leqq \xi_0\},$$

ahol $0 < \delta < 1/2$. Nyilván $\Gamma \supset \Gamma_1$, $P(\Gamma) \geqq P(\Gamma_1)$ és

$$P_{c,\varkappa}\{c < \bar{\mu}(\xi)\} = 1 - P_{c,\varkappa}\{\Gamma\} \leqq 1 - P_{c,\varkappa}\{\Gamma_1\}. \tag{3.18}$$

Felhasználva a

$$\frac{dP}{dV} = \sqrt{\frac{\varkappa}{\pi}} \exp\Big\{-\varkappa(\xi_0 - c)^2 - 1/2\big[\varkappa\{(\xi(1) - c)^2 - (\xi(0) - c)^2\} - \\ -\varkappa + \varkappa^2 \int_0^1 (\xi(t) - c)^2\, dt\big]\Big\}$$

összefüggést azt kapjuk, hogy

$$P_{c,\varkappa}\{\Gamma_1\} = \int_{\Gamma_1} \frac{dP}{dV}\, dV \geqq \left(1 - \frac{\varkappa^{2\delta}}{2}\right) \int_{\Gamma_1} \sqrt{\frac{\varkappa}{\pi}}\, e^{-\varkappa(x_0 - c) - \frac{\varkappa}{2}[(x_1 - c)^2 - (x_0 - c)^2]}\, dL \times dW. \tag{3.19}$$

Legyen

$$\Gamma_2 = \{\xi : -\varkappa^{-1+\delta} \leqq \xi \geqq \xi_0,\ 0 < t \leqq 1;\ -\varkappa^{-1+\delta} + \varkappa^{-\varepsilon} < \xi(0) \leqq \xi_0(0) - \varkappa^{-\varepsilon}\},$$

ahol ε a $0 < \varepsilon < \delta/2$ intervallumban tetszőleges, és

$$\Gamma_3 = \{\xi : \sup_{0 \leqq t \leqq 1} |\xi(t) - \xi(0)| < \varkappa^{-\varepsilon},\ -\varkappa^{-1+\delta} + \varkappa^{-\varepsilon} < \xi(0) \leqq \xi_0(0) - \varkappa^{-\varepsilon}\}.$$

A *Wiener* folyamatra jól ismert (lásd DOOB 353. o.)

$$\int_{\Gamma_3} dW \geqq 1 - 2\varkappa^{\varepsilon} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, e^{-\frac{\varkappa^{-2\varepsilon}}{2}} \tag{3.20}$$

összefüggést felhasználva, az

$$\int_{\Gamma_2} e^{-\frac{\varkappa}{2}[(x_1 - c)^2 - (x_0 - c)^2]}\, dW \geqq e^{-\varkappa^{-\varepsilon}(\varkappa^{\delta} + |c|\varkappa)} \int dW \geqq e^{-\varkappa^{-\varepsilon}(\varkappa^{\delta} + c|\varkappa|)} \cdot \\ \cdot \left(1 - 2\varkappa^{\varepsilon} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, e^{-\frac{\varkappa^{-2\varepsilon}}{2}}\right) \tag{3.21}$$

egyenlőtlenséget nyerjük.

Jelölje $\Phi(x)$ a $(0, 1)$ normális eloszlásfüggvényt, akkor

(3.22)

$$\int_{\Gamma_2} \sqrt{\frac{\varkappa}{\pi}}\, e^{-\varkappa(x_0 - c)^2}\, dx_0 = \Phi\{\sqrt{2\varkappa}(\xi_0(0) - c - \varkappa^{-\varepsilon})\} - \Phi\{\sqrt{2\varkappa}(-\varkappa^{-1+\delta} - c + \varkappa^{-\varepsilon})\}.$$

(3. 19), (3. 21) és (3. 22)-ből nyerjük a

$$(3.23)\quad P_{c,\varkappa}\{\Gamma_1\} \geqq \left(1-\frac{\varkappa^{2\delta}}{2}\right)(1-\varkappa^{\delta-\varepsilon})\left(1-2\varkappa^{\varepsilon}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,e^{-\frac{\varkappa^{-2\varepsilon}}{2}}\right)\left[\Phi\{\sqrt{2\varkappa}(\xi_0(0)-\right.$$

$$\left.-c-\varkappa^{-\varepsilon})\}-\Phi\{\sqrt{2\varkappa}(-\varkappa^{-1+\delta}-c+\varkappa^{-\varepsilon})\}\right]$$

egyenlőtlenséget. Innen $\varkappa\to 0$ esetén látható, hogy

$$P_{c,\varkappa}\{c<\bar{\mu}(\xi)\}=1-P_{c,\varkappa}\{\Gamma_1\}\leqq\frac{1}{2}+\varepsilon_0,\quad \text{ha}\quad \varkappa<\varkappa_0(\varepsilon_0),$$

tetszőleges kicsiny $\varepsilon_0>0$ értékre. Ezzel tételünket bebizonyítottuk.

A 3.3 tétel a következőképpen is megfogalmazható: *ha a stacionárius Gauss—Markov folyamat m és $\varkappa$ (vagy σ_ξ^2) paramétere ismeretlen, akkor m-re a folytonos funkcionálok segítségével nem lehet véges konfidencia intervallumokat szerkeszteni.* Nem véges konfidencia intervallumok szerkesztésére ($\varkappa$-ra való minden megkötés nélkül) a továbbiakban még visszatérünk. Szerkesztésük hasonló ahhoz a módszerhez, ahogyan $\varkappa$-ra (vagy σ_ξ^2-re) történik ismert m esetén a konfidencia intervallum szerkesztése, azonban a 3.3 tétel által kifejezett speciális tulajdonságokat figyelembe vesszük.

KOROLLÁRIUM. *A bizonyításból látható, hogy tetszőleges $\varepsilon>0$-hoz van oly $A(\varepsilon)$, hogy (elég kis $\varkappa$ esetén)*

$$\sup_{m,\varkappa<\varkappa_0} P_{m,\varkappa}\{\bar{\mu}(\xi)>m\}\leq\frac{1}{2}+A\varkappa_0^{\frac{1}{2}-\varepsilon}.$$

Ezzel az $f(\varkappa,\alpha)$ függvény viselkedésére kaptunk becslést.

A 3.4 tétel bizonyítása hasonlóan történik, mint a 3.3 tételé. A tétel állítása szerint a $\varkappa$ paraméterre nem lehet 0-tól különböző alsó konfidenciahatárt szerkeszteni semmilyen megbízhatósági szinten.

IRODALOM

АНДРОНОВ, ПОНТРЯГИН: О статистическом рассмотрении динамических систьем. ЖЭТФ 3, 165 (1933).

АРАТО, М.: [1] Некоторые статистические вопросы стационарных гауссовских марковских процессов, Disszertáció, Moszkva, Állami Egyetem, 1962.

[2] О достаточных статистиках стационарных процессов, *Теория вероятностей и ее применения*, **6** (1961) 216—218.

[3] Оценка параметров стационарного гауссовского марковского процесса, Д. А. Н., **145** (1962) 13—16.

АРАТО, М. — КОЛМОГОРОВ, А. Н. — СИНАЙ, Я. Г.: Об оценке параметров комплексного стационарного гауссовского процесса, Д. А. Н., **146** (1962) 747—750.

АРАТО, М. — Рыкова, Л. В. — СИНАЙ, Я. Т.: Доверительные границы для коэффициента затухания комплексного стационарново гауссовского марковского процесса, *Теория вероятностей и ее применение* (sajtó alatt).

BAXTER, G.: A strong limit theorem for Gaussian Processes, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **7** (1956), 522—525.

BILLINGSLEY, P.: *Statistical Inference for Markov Processes*, Chicago, 1961.
CRAMER, H.: *Mathematical Methods of Statistics*, Uppsala, 1945.
DOOB, J. L.: Вероятностные процессы, Москва, 1956.
ДЫНКИН, Е. Б.: Функционалы от траекторий марковских случайных процессов Д. А. Н., **104** (1955) 691–693.
GRENANDER, U.: Stochastic processes and statistical inference, *Arkiv för Mat.* **1** (1950) 195–277.
GRENANDER, U.–ROSENBLATT, M.: *Statistical Analysis of Stationary Time Series*, New York, 1957.
КОЛМОГОРОВ, А. Н.: [1] Несмещенные оценки, Изв. А. Н. С. С. С. Р. **14** (1950) 303–326.
[2] Стационарные последовательности в гильбертоваи пространстве, Бюлл. М. Г. Y. **2** (1941) 6.
LEHMANN, E.–SCHEFFÉ, H.: Completness, Similar Regions and Unbiased Estimation, *Sankhya* **10** (1950), 305., **15** (1956), 219.
ЛИННИК, Ю., В.: Об одном вопросе статистики зависимых наблюдении ИЗВ. А. Н. С. С. С. Р. **14** (1950) 501–522.
ЛИВСАНЦЕРЕН, Ш.: [1] Оценки найбольшего правдоподобия и доверительные множества для неизвестных параметров стационарного гауссовского поцесса марковского типа, Д. А. Н. **98** (1954) 723–826.
[2] Disszertáció, Moszkva, 1954., МТУ.
MANN, H. B.–WALD, A.: On the statistical treatment of linear stochastic difference equations, *Econometrica* **11** (1943), 173–220.
NEUMANN, J.: Distribution of the ratio of the mean square successive difference to the variance, *Annals of Math. Stat.* **12** (1941) 367–395.
ПРОХОРОВ, Ю. В.: Сходимость случайных праццессов и предельные теоремы теории вероятностей, Теор. вер. и ее прим. **1** (1956) 177—338.
STRIEBEL, CH.: Densities for Stochastic Processes, *Annals of Math. Stat.* **30** (1959). 559–567.

(Beérkezett: 1963. IX. 9.)

A NEWTONI INFINITÉZIMÁLIS ANALÍZIS KIALAKULÁSA A XX. SZÁZADI MATEMATIKA TÖRTÉNETÍRÁS TÜKRÉBEN

Írta: VEKERDI LÁSZLÓ

I.

MORITZ CANTOR nagy műve[1] 85. fejezetében kezdi az infinitézimális számítás ismertetését. A fejezet címe: „Sorok. Mercator. Brouncker. Gregory. Newton." A XIX. század matematikájának egyik legjellemzőbb területét alkották a végtelen sorok. Az a tény, hogy CANTOR ezek felől indul a matematika mindmáig legnagyobb kalandjának, az infinitézimális számításnak az ismertetésébe, már magában véve is jelzi az interpretáció várható jellegét.

A végtelen sorok elméletének legfontosabb, alapvető kérdése ma az, hogy egy sor összetartó-e vagy sem, konvergens-e vagy divergens.

Mit tartott erről a XVII. század? CANTOR szerint — semmit.

Szerinte egy sor konvergenciára való megvizsgálásának a szükségessége „természetesen" csak a XIX. században merül fel, a XVII. és XVIII. század erre még csak nem is gondol. Az egyetlen kivétel akkor állt elő, „ha egy sort egy vele azonos függvény gyakorlati kiértékelésére akartak felhasználni. Ebben az esetben önmagától jelentkezett az a kellemetlenség, hogy divergens sorokkal való számolás nem vezet a kívánt eredményre, s ezen segíteni kellett" — úgy, hogy önkéntelenül is, intuitive konvergens sorokat alkalmaztak, a fogalom tisztázása, sőt felvetése nélkül. Így jár el lényegében JAMES GREGORY, a nagy skót matematikus 1668-ban megjelent *Exercitationes Geometriae*-jében.[2]

Teljesen a GREGORYéhoz hasonló sorfelfogással és részben azonos eredményekkel találkozunk NICOLAUS MERCATOR 1668-ban Londonban megjelent *Logarithmotechnica*-jában. Ez a németalföldi matematikus Londonban élt, ahol „WALLIS és közvetlen tanítványai olyan felületek kvadraturájára voltak képesek, amelyeket az abszcisszatengely, két ordináta és az

$$y=a_1x^{m_1}+a_2x^{m_2}+\dots+a_\mu x^{m_\mu}$$

egyenletű görbe határolt. Az egyenlő szárú hiperbola esetében ez már 1647 óta ismert volt GREGORIUS A SANTO VICENTIO által, aki ezt a területet logaritmus segítségével számította ki, a hiperbola egyik asymptotáját választva abszcisszának. De a hiperbola egyenlete ebben az esetben nem a fenti alakot öltötte, hanem $xy=1$ volt, és ezért a két eredmény egyetlen tétellé való összefogására minden kísérlet sikertelennek bizonyult.

[1] *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. 3. (Schluss-) Band. Von 1668—1758.* Leipzig 1898.

[2] Uo. 58—60.

Itt az a pont, ahol közbelépett MERCATOR. A hiperbola egyenletét $y = \frac{1}{1+a}$ formára alakította át, és volt bátorsága az $\frac{1}{1+a}$ kifejezésben csak jelzett osztást az algebra közönséges szabályai szerint végre is hajtani.

Így tehát az

$$\frac{1}{1+a} = 1 - a + a^2 - a^3 + \ldots$$

in infinitum sor érvényességét tette fel.

Mai fogalmaink számára ez a lépés csaknem naivul egyszerű, akkor azonban új volt, s olyan horderejű, hogy a kortársak alig voltak képesek felmérni, bármennyire is becsülték azonnal MERCATOR felfedezését."[3]

CANTOR szerint tehát az infinitézimális számítás első nagy jelentőségű lépése az volt, hogy MERCATOR az egyenlő szárú hiperbola $xy = 1$ egyenletét $y = \frac{1}{1+a}$ alakra hozta, s az itt csak kijelölt osztást a közönséges osztás törvényei szerint valóban el is végezte.

Ezzel mintegy felbátorított a végtelennel való munkára. Ezt az irányt folytatja a fiatal NEWTON, aki 1669-ben küldte el COLLINSnak *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas* c. értekezését, amit COLLINS lemásolt, megmutatta Lord BROUNCKERnek, mindketten nagyon megdicsérik, de semmit se tettek a megjelenése érdekében, még a Royal Society jegyzőkönyveibe se vezetik be.

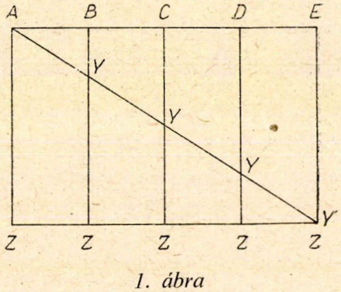
Pedig a dolgozatnak több szempontból is óriási jelentősége van.

A 86. fejezetben CANTOR a kontinens matematikusainak a sorelméletben elért eredményeit ismerteti, az infinitézimális analízis newtoni formájának a felfedezését a 88. fejezetben kíséri tovább, amelynek a címe: „Kúpszeletek. Síkgörbék elmélete." Ez a fejezet a mi szempontunkból igen fontos.

1669-ben jelent meg ISAAC BARROW *Lectiones geometricae* c. könyve, amelyikben fiatal tanítványa, NEWTON is segített. BARROW geometriája a mozgás fogalmából indul ki. „Az időt valamilyen alakzattal ábrázolja, amelyik az egyenletességet fejezi ki, névszerint egyenessel és körrel. Hiszen az időt egydimenziós és a pillanat folytonos folyásából előálló mennyiségnek lehet tekinteni. (BARROW, *Lectiones geometricae* 6. oldal: ex unius momenti quasi continuo fluxu constitutum imaginatur.) Végül BARROW csak az egyenest választja az idő érzékeltetésére és egy, az idővonalra merőlegesen állított egyenest az egyes pillanatokban uralkodó sebesség érzékeltetésére. Ezeket a sebességegyeneseket azonos vagy különböző hosszúságúaknak veszi, aszerint, hogy a sebességet állandónak vagy változónak képzeli. A sebességvonalak összessége által képezett területek az adott időben adott sebességekkel történő mozgások, az egyesített sebesség (Uo. 10: aggregata velocitas), a mozgató erő (Uo. 13: vis motiva) képét adják."

„Az *AEZZ* négyszög és az *AEY* háromszög megvilágosítja, mit ért a fentiek alatt ... BARROW a *Z*, *Y* stb. pontok helyeit (Ort) a mozgás alkalmazásával nyeri. Így jut el a görbékhez, amelyekkel a második felolvasás foglalkozik."[4]

[3] Uo. 53–54.
[4] Uo. 127–128.

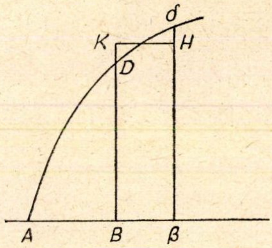


1. ábra

Az érintőszerkesztés módszerét is a mozgások összetételének a segítségével ismerteti, ahogy azt már előtte is tették ROBERVAL és TORRICELLI. Ezt a módszert igen jól ismerték Angliában. WALLIS már 1659-ben védelmébe veszi TORRICELLIT ROBERVAL plagizációs vádjaival szemben.[5] HUYGENS is érintőproblémaként kezelte geniális módon az evolvens-evoluta kérdését.[6]

Az érintőprobléma tehát a kor egyik centrális — és legjobban kidolgozott — matematikai kérdéskomplexuma, WALLIS és BARROW semmi lényegesen újat nem hoztak a kérdésben, csupán lehetővé tették az angol matematikának az itáliai, GALILEI tanítványai körében kialakult módszerekhez való csatlakozását.

A következő, 89. fejezet „NEWTON és LEIBNIZ első felfedezései az infinitézimális számítás területén". A fejezet annak a megállapításával kezdődik, hogy mindaz, amit az előző fejezetben ismertetett, „rég ismert módszerek szellemes felhasználóinak volt köszönhető". De amit NEWTON az 1669-es *De analysi...*-jében közölt COLLINSszal, az már egészen új. Az írás az $y=ax^{\frac{m}{n}}$ alakú görbék kvadratúrájával kezdődik, amit $\frac{an}{m+n}x^{\frac{m+n}{n}}$ alakban ad meg. Ez az eredmény nem új (war nichts weniger als neu), WALLIS már 1655-ben ismerte. Új volt azonban a bizonyítás. Ahol WALLIS intuitív módon bizonyított, ott NEWTON új bizonyítási módszert alkalmazott.



2. ábra

„NEWTON bizonyítása a következő. Jelölje x egy $AD\delta$ görbe AB bázisát, jelölje y a reá merőleges BD applikátát, z az ABD területet. Jelölje o betű a kicsiny $B\beta$ vonalszakaszt (ezt az o-t nem szabad, mint néha teszik, zérussal összetéveszteni). Legyen továbbá $BK=v$, és a $BKH\beta(=ov)$ négyszög területe legyen egyenlő a $B\beta D\delta$ területtel. NEWTON adottnak veszi z-nek x-től való függését, és megkeresi ebből az összefüggésből y-t; mai írásmódban, amit NEWTON nem ismert, azt mondanánk $z=\int ydx=F(x)$-ből megkeresi $y=\frac{dF(x)}{dx}$-et."

A továbbiakban NEWTON a binomiális tétel segítségével történő sorbafejtést alkalmaz és hatványsorokat differenciál, „de a szorzatok és hányadosok differenciálásának még nyoma sincs".[7]

Ez a NEWTON-féle fluxiós-kalkulus lényege, bár magát a nevet még nem használja. A „folyás" fogalmának és elnevezésének az eredete valószínűleg NAPIER-re vagy CAVALIERIre nyúlik vissza. Végeredményben tehát nem új, de a lényeg a jelzésen van, és pontokkal való jelölés kétségkívül NEWTONtól származik. Az írás, amiben ezt kifejti, a *Methodus fluxionum et serium infinitorum* csak halála után, 1736-ban jelenik meg nyomtatásban, de valószínűleg az 1670-es évek elején (1671) írta. NEWTON

[5] Uo. 129.
[6] Uo. 134—143.
[7] Uo. 150—151.

itt a matematikai mennyiségeket úgy tekinti, mint amelyek folytonos mozgás útján jönnek létre, és *fluens*eknek nevezi őket. Azt a sebességet, amellyel a fluensek nőnek vagy csökkennek, *velocitas*-nak vagy *fluxio*-nak nevezi, és a fluens jelölésére használt betű fölé tett ponttal jelöli. A jelölés – hangsúlyozza CANTOR — jelenti NEWTON nagy lépését, hiszen egyébként ezeket a fogalmakat előtte már alkalmazták az itáliaiak. De NEWTON azáltal, hogy ugyanazt a betűt használja egy matematikai mennyiség — fluens — és a mennyiség változásának — fluxio — a jelölésére, megnyitja az utat egy új, egységes kalkulus kialakítása felé.

És CANTOR nem mulasztja el megjegyezni, hogy ebben LEIBNIZ messze NEWTON felett áll, nemcsak a jelölésben, hanem a jelöléssel összefüggő műveleti szabályok kidolgozásában is: LEIBNIZ teremti meg a differenciálszámítás algoritmusát.[8]

NEWTON a *Methodus*-ban két problémát tűz ki. 1. Adva van két fluens egymáshoz való viszonya, határozzuk meg a fluxióik közti viszonyt. 2. Adva van egy olyan egyenlet, amely fluensek fluxióit is tartalmazza, meg kell határozni a fluensek egymáshoz való viszonyát.

„Az általános módszer, amit NEWTON a fluxiókat is tartalmazó egyenletről a fluensek között fennálló egyenletre való visszatérésre alkalmazott, ... a fluensek hatványai szerint rendezett végtelen sorokba való sorbafejtésből áll." A sorbafejtésben azonban hibákat követett el – jegyzi meg CANTOR.[9]

A CANTOR-féle rekonstrukció lényeges pontjai a következőkben foglalhatók össze:

1. A XVII. század 50-es és 60-as éveiben Angliában JOHN WALLIS körében jelentős eredményeket érnek el az abszcisszatengely, két ordináta és egy magasabb fokú parabola által határolt terület kiszámításában.

2. MERCATOR egy zseniális sorbafejtés segítségével felismeri, hogy az egyenlő szárú hiperbola alatti terület ugyancsak a WALLIS-féle módszerekkel számítható ki. Ezáltal közismertté teszi a sorbafejtés kvadraturában való nagy jelentőségét. Hasonló, részben még nagyobb eredményeket ér el ezen a területen JAMES GREGORY.

3. BARROW (TORRICELLI és ROBERVAL nyomán) az érintőmeghatározás kérdését egy mozgásgeometriai modell segítségével oldja meg, amelyben a görbét egy pont mozgása által létrejöttnek képzeli úgy, hogy a mozgás sebességének egy tengelyre — az időtengelyre — való vetülete mozgás közben konstans.

4. NEWTON az 1669-es Collinsnak küldött írásában általánosítja WALLIS eredményeit és — a binomiális tétel segítségével — új bizonyítását adja az $y=ax^{\frac{m}{n}}$ és $\frac{an}{m+n}x^{\frac{m+n}{n}}$ alakú kifejezések közötti kölcsönös összefüggésnek. Ezáltal felismeri, hogy differenciálás és integrálás inverz műveletek. CANTOR ezt tartja az infinitézimális számítás felfedezése szempontjából legjelentősebb lépésnek.

5. Később — a *De analysi* ... továbbfejlesztéseként — NEWTON NAPIERtől vagy CAVALIERItől vett mozgásgeometriai megfontolásokra alapítva, a matematikai mennyiségeket folytonos mozgás által létrejött *fluens*-eknek, a mennyiségek változásának a sebességét a fluensek *fluxió*-inak nevezve, egységes jelölési módhoz jut, amely a fluensek közötti relációk és a fluxiók közötti relációk közötti összefüggés

[8] Uo. 187.
[9] Uo. 155–166.

jellegét (integrálás és differenciálás inverz műveletek) még jobban kidomborítja. Ez a módszere is sorbafejtésen alapul és nehézkes. Egészében véve a LEIBNIZ jelölési és számolási módja sikerültebb: az infinitézimális számítás algoritmusát LEIBNIZ teremti meg.

A Cantor-féle rekonstrukcióhoz csatlakozik — annak kisebb-nagyobb fogyatékosságait fokozatosan kiküszöbölve — a német matematikatörténészek zöme.

Az első jelentős módosítást CANTOR interpretációján ZEUTHEN[10] végzi, ZEUTHEN interpretációja lesz a másik nagy interpretációs vonal kiindulása, amelyet a legtöbb angol és francia matematikatörténész követ. ZEUTHEN az infinitézimális számítás genezisének a centrumába a területszámítás helyett az érintőmeghatározás és az érintőből való görbemeghatározás (fordított érintőfeladat) problematikáját helyezi. Láttuk, hogy CANTOR a területmeghatározás problémái mellett ezt kevésbé jelentősnek ítélte. ZEUTHEN szerint itt hoz a XVII. század az antikvitás infinitézimális problémáihoz képest először jelentős újítást. Az új tulajdonképpen már megjelenik a XVII. század legelején: a NAPIER-féle logaritmus-definícióban és GALILEInél. GALILEI és NAPIER egy tényleges, ill. egy képzelt pontnak a mozgását vizsgálva, tulajdonképpen a folytonos függvény fogalmát teremtik meg, és a NEWTON-féle fluxiós módszert készítik elő. De előbb még egy hosszú kerülőt kell végigjárnia a matematikának: az antikvitás exhausziós és demokritoszi módszereihez csatlakozva.[11] Ezt a nagy kitérőt ZEUTHEN „integrálszámítás előtti integrálás" (Integration vor der Integralrechnung) néven foglalja össze: ide sorolja KEPLER, TORRICELLI, GREGORIUS A SANTO VICENTIO, FERMAT, PASCAL, ROBERVAL és HUYGENS terület, térfogat, súlypont meghatározásra szolgáló módszereit. Ezek mind az antik geometriai módszerek egyre tökéletesebb elsajátításán alapultak.

De az antik módszerek újratanulása közben a matematika fejlődése olyan gyors lett, hogy elkerülhetetlenné váltak intuitív bizonyítási módszerek is: ezeket alkalmazva jut WALLIS — aki egyébként szintén jól ismerte a szigorú antik módszereket — a híres kvadraturáira.[12]

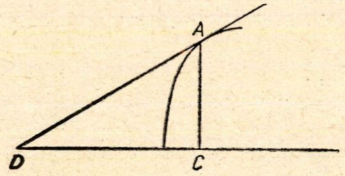
Az intuitív módszerek szerepelnek az egyre nagyobb jelentőségűvé váló végtelen sorok elméletében is.

ZEUTHEN egyetért CANTORral: szerinte sem jutottak eddig lényegében túl az antikvitás infinitézimális módszerein. Ekkor jelentkezik az új (s egyben a zeutheni interpretáció CANTORtól való eltérése). A XVII. század közepén, második felében számos problémát — mint pl. érintőmeghatározás, maximum-minimum feladatok, algebrai egyenletek gyökeinek az összeesése — közös csoportba foglalnak össze. Ismerte ezeket az antikvitás is, de nem tekintette őket — szemben az integrációs módszerekkel — közös csoportba foglalhatóknak.[13]

TORRICELLI és ROBERVAL egymástól függetlenül — TORRICELLI közvetlenül GALILEIhez kapcsolódva — meghatározzák a hajított test parabolikus pályájának az érintőjét a mozgások összetevésének a segítségével. A TORRICELLI-iskola jelentős részleteredményeket ért el, de általános módszert kinematikus érintőmeghatározással nem lehetett adni. Ehhez algebrára volt szükség.[14] Itt lép be a fejlődésbe a nagy Toulouse-i matematikus, FERMAT.

[10] ZEUTHEN, H. G.: *Geschichte der Mathematik im XVI. und XVII. Jahrhundert.* Leipzig 1903.
[11] Uo. 235—237.
[12] Uo. 248—280.
[13] Uo. 316.
[14] Uo. 322—325.

FERMAT a maximum-minimum problémával hozza kapcsolatba az érintőmeghatározást: ez jelenti az első nagy lépést az új infinitézimális számítás megteremtése felé. Abból indul ki, hogy a CA ordináta és a CD szubtangens (s_t) közötti viszony érintés esetében maximum vagy minimum lesz,[15] s egyes esetekben már a kvadratura és az érintőmeghatározás között fennálló inverz-viszonyt is felismeri. Az inverzviszony általános voltának a felismerése BARROW érdeme.



3. ábra

BARROW ezen tételét — az érintőszerkesztés és a kvadratura közötti összefüggést kifejező „megfordíthatósági tételt" (Umkehrungssatz) — implicite már NAPIER kimondotta volt logaritmus-definíciójában, s főleg GALILEI a $\frac{ds}{dt} = gt$ törvényében, amit ő grafikusan integrált, s kapta az $s = \frac{g}{2}t^2$ eredményt. Az érintőszerkesztés és a kvadratura közötti összefüggés implicite benne volt a DE BEAUNE-feladatban. Ezt az összefüggést használja fel WALLIS, amikor a TORRICELLI—ROBERVAL-féle érintőszerkesztést általánosítva egy fordított érintőfeladatnak differenciálegyenlet alakot ad, kinematikai megfogalmazásban. WALLISON át jut BARROW-hoz, aki általánosítja és explicite kimondja.

BARROW általános megfordítási tételét TORRICELLI kinematikai érintőmódszerével és tisztán geometriai úton bizonyítja. Módszere nem egy bizonyos görbére vonatkozik, hanem általános: összefüggést ad egy tetszőleges y függvény és $v = \frac{dy}{dx}$ között, s kimutatja, hogy ez az összefüggés egy $y = \int v dx$ kvadraturával fejezhető ki. De BARROW-nál még hiányzik a differenciálhányados fogalma.[16]

NEWTON itt is, akárcsak a fizikában, azt az utat járja következetesen végig, amire GALILEI lépett. Az idő, mint független változó (parameter) segítségével jellemez mennyiségeket (fluensek, x, y, z stb.), s így ezeknek megadhatók a sebességei (fluxiók, $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$, stb.) és azok viszonyai: $\dot{x}/\dot{y}$ stb.

A módszer segédeszközét a *De analysi per aeqationes infinitas*-ban adta meg, sorbafejtésekkel. NEWTON már tisztában van azzal, hogy a fluxioképzés (differenciálás) és a kvadratura inverz műveletek. „Az $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ viszony képzésénél fogva pontosan ugyanaz, mint a $\frac{dy}{dx}$ differenciálhányados, és magát NEWTON $\dot{x}, \dot{y}, \ldots$ fluxió-meghatározását a dx, dy differenciálok tiszta, mindenféle meghatározatlan «végtelen kicsi» fogalomtól mentes definícióinak lehet tekinteni."[17]

Erre utal egyébként az is, hogy $\dot{x} = 1$ esetében $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \dot{y}$-ot ír, s ezt z-vel, fluxióját $\dot{z}$-val vagy $\ddot{y}$-val jelöli. „Látjuk, hogy a független változó fogalom, ha ez a kifejezés

[15] Uo. 330–333.
[16] Uo. 354.
[17] Uo. 375.

még nem is fordul elő, olyan tisztán és egyszerűen áll előttünk, akár egy modern tankönyvben."[18]

A *Principia* is sokkal egyszerűbb lett volna, ha a fluxiós módszert használja. Mégsem alkalmazza. Egy olyan mennyiséget, amely egy másik mennyiség valamilyen függvénye, nem fluensek relációjával, hanem egy görbe ordinátájával reprezentál, s az integráció helyett inkább geometrikus kvadraturákat alkalmaz.[19] LEIBNIZ nem jelent elvi haladást NEWTONhoz képest, jelentősége szerencsés szimbolikus jelölésmódjában van, ami a továbbiakban egységes számolási módszer alapjává válhatott.[20]

A ZEUTHEN-féle interpretáció CANTORétól való eltérései az alábbiakban foglalhatók össze:

1. Igen nagy jelentőséget tulajdonít a függvényfogalom megjelenésének, s ezt már GALLIEIre és NAPIER-re vezeti vissza.
2. Semmi — vagy majdnem semmi — jelentőséget sem tulajdonít a további fejlődés szempontjából az antik módszerek újraéledésének.
3. A kvadratura-problémákkal való foglalkozásnál fontosabbaknak tartja a (később) differenciálással megoldható problémák előtérbe nyomulását és egy csoportba való összefoglalását.
4. Központi jelentőséget tulajdonít BARROW megfordítási tételének.
5. NEWTON fluxiós módszerében látja a GALILEInél megindult problémák betetőzését, ezt a módszert lényegében a mai differenciálszámítással veszi azonosnak. Emellett csak alárendelt szerepet tulajdonít — a differenciálszámítás szempontjából — a *De analysi* ...-nek.
6. Kétségtelennek tartja NEWTON módszerének eredetiségét és elvileg tisztázottabb voltát LEIBNIZéval szemben, de elismeri a leibnizi módszer számolástechnikai előnyeit.

A következő — véleményünk szerint igen jelentős — lépést a newtoni infinitézimálkalkulus történetének felderítésében OTTO TOEPLITZ tette. Helyesebben nem is pontosan ő, hanem a göttingeni matematika, aminek TOEPLITZ inkább csak „szócsöve" volt. S ez nem lekicsinylés akar lenni, ellenkezőleg: a legnagyobb dicséret. Nem lehet elégszer figyelmeztetni arra, mit jelentett a modern matematika történetében Göttingen. Az egyik legnagyobb göttingeni matematikus, FELIX KLEIN *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus* c. könyvének harmadik kötete, a *Präzisions- und Approximationsmathematik* (Berlin 1928) az infinitézimális számítás kialakulása szempontjából nélkülözhetetlen részleteket tartalmaz. „Minden gyakorlati területen van a pontosságnak egy küszöbértéke" — állapítja meg —, de van-e ilyen küszöbérték a térbeli elképzelésben is? Az arithmetikában ugyanis nincs, „az a pontosság, amivel a számok definiálhatók, korlátlan ".[21]

Teljesen ebbe a precíziósmatematikába tartozik pl. a kommenzurábilis — inkommenzurábilis közötti különbségtevés. De hová tartozik a függvény? Az empirikus görbe ugyanis nem függvényt definiál, hanem egy $y = f(x) \pm \varepsilon$ „függvénysávot" (Funktionsstreifen). Egy empirikus görbe mindig — akkor is, ha nem rajzoljuk, csak „elképzeljük" — korlátolt pontosságú lehet „és így nem a precíziósmatematika éles

[18] Uo. 376.
[19] Uo. 394.
[20] Uo. 412.
[21] KLEIN, FELIX: *Elemäntarmathematik vom höheren Standpunkte aus. 3. Bd. Prezisions- und Approximationsmathematik.* Berlin 1928. 4.

függvényfogalmának, hanem a függvénysávnak felel meg".[22] A precíziósmatematika éles, $y=f(x)$ függvényfogalma empirikusan se meg nem valósítható, se el nem „képzelhető".

Lehet-e a precíziósmatematika $y=f(x)$ függvényfogalmát úgy beszűkíteni, hogy az az empirikus görbénél megszokott tulajdonságokat, illetve ezekkel analóg tulajdonságokat mutasson? Lehet. A precíziósmatematika $f(x)$ függvényfogalmának ehhez az alábbi öt tulajdonsággal kell rendelkeznie:

1. Kontinuitás, — azaz sehol se szakadjon meg, ne „ugorjon" a görbe. — Ennek a követelménynek a precíziósmatematikában az ún. „folytonos" függvények felelnek meg.

2. Az x tengely, a görbe, és két ordinátája közt mindig legyen egy terület (Flächeninhalt) elhatárolható. — Ennek a követelménynek megfelel az a precíziósmatematikai tétel, hogy minden folytonos függvény integrálható.

3. A görbének véges intervallumban csak véges számú maximuma vagy minimuma legyen. — Ez nem következik a folytonosságból, mert pl. $y=x \sin \frac{1}{x}$ esetében a hullámok sűrűsödésének soha nincs vége. Ehhez meg kell követelni, hogy „az $y=f(x)$ függvény az éppen vizsgált intervallumban véges számú monoton (csak növekvő vagy csak csökkenő) darabra essen szét".[23]

4. Empirikus görbéinknek irányt is tulajdonítunk: ezt egy $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ úgynevezett differenciahányadossal fejezzük ki, ahol $\Delta x \neq 0$ kicsi a görbe hosszához, de nagy a szélességéhez képest. „Az empirikus görbe a tapasztalat szerint megközelítőleg egybeesik az x, y-ból $x+\Delta x, y+\Delta y$-ba vezető egyenessel."

A precíziósmatematikában a Δx minden előre megadott értéknél kisebb lehet, s ebben az esetben az (x, y) és $(x+\Delta x, y+\Delta y)$ pontokat összekötő szelő minden határon túl közeledik az (x, y) pontbani érintőhöz, a szelő irányát kifejező $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ differenciahányados pedig az érintő irányát megadó kifejezéshez, amit — differenciálhányadosnak neveznek, és y'-vel vagy $\frac{dy}{dx}$-el jelölnek. De ilyen differenciálhányados nem minden folytonos függvény esetében létezik, pl. az $f(x)=|x|$ függvénynek, ami minden valós x-hez abszolút értékét rendeli, az $x=0$ pontban nincs differenciálhányadosa — a függvényt ábrázoló görbének nincs egyértelműen megadott iránya. Azért ha azt akarjuk, hogy a folytonos függvény megfeleljen egy empirikus görbének — „aminek mindig van iránya" —, meg kell követelni a differenciálhányados létezését.[24]

Ezekkel a tulajdonságokkal rendelkező függvények adják vissza kvalitative az empirikus görbéknél megszokott sajátságokat. De ezzel még semmit sem tudunk a kvantitatív viszonyokról. Arra a kérdésre, hogy „mennyire lehet egy empirikus görbét lefutás, irány és görbület szempontjából egyszerű, analitikusan definiált függvényekkel megközelíteni?"[25] — a sorbafejtések adnak választ.

[22] Uo. 17.
[23] Uo. 23.
[24] Uo. 24—26.
[25] Uo. 51.

Nem mintha a „természet" különösebben kedvelné az egyszerű, fentiek értelmében definiált függvényeket, s nem mintha ezek lennének a precíziósmatematika legfontosabb részei. Pusztán arról van szó, hogy a precíziósmatematikának ezek a részei aránylag könnyen alkalmazhatók a mindig csak korlátolt pontosságú megfigyelésekre.[26]

Nos, éppen a KLEIN által a fizikai alkalmazhatóság érdekében a függvénytől megkívánt pontokat járja végig TOEPLITZ[27] szerint a nyugat-európai matematika fejlődése. CAVALIERI az első, aki először lép túl — nem sokkal — ARKHIMÉDÉSZ parabolakvadratúráján, amennyiben sikerül — arkhimédészi exhauszciós módszerrel „feltornáznia" magát az ARKHIMÉDÉSZ által megoldott másodfokú parabola ($y=x^2$) kvadratúrájáról az $y=x^9$-el leírható paraboláig, $y=x^{10}$-nél azonban megakadt.

FERMAT-nak sikerül — végtelen geometriai sor összegének a segítségével 1650 körül megoldania az $y=x^k$ parabola kvadraturáját tetszőleges k egész kitevőre.[28] Ez idő tájt — 1647 — kerül közlésre GREGORIUS A SANTO VINCENTIOnak csupa mesterkélt, üres tételt tartalmazó nagy könyve végén az egyenlő szárú hiperbola: $y=x^{-1}$, azaz $y=\dfrac{1}{x}$ kvadraturája.

Mint GREGORIUS felfedezéséből is látszik, a területszámítás egyre inkább bizonyos meghatározott alakú idomokra: az abszcissza, a görbe és két ordinátája által határolt területekre kezdett korlátozódni. Ezekre vonatkozik CAVALIERI két fontos tétele.[29]

Könnyű felismerni, hogy eddig a KLEIN-féle 1. és 2. követelmény birodalmában mozógtunk. Most TOEPLITZ — megfelelően a KLEIN-receptnek — bevezeti a „monotoniát". És itt elhagyja a történelmi sorrendet, — kitérőt végez, visszafelé, a múltba. A nyugat-európai matematika történetében nem itt volt a folytatás. A nyugati matematika csak később ért el a monotonia fogalmához. ARKHIMÉDÉSZ azonban már ide is eljutott: axiomatizálta az ívhosszmeghatározáshoz szükséges monotonia fogalmat.[30]

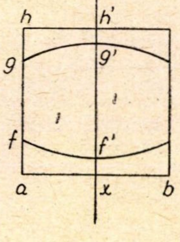
Az európai matematika más, pontatlanabb, intuitív úton közeledett a területszámítás általános megoldásához: az indivizibiliák útján. Nem tudták, hogy ebben

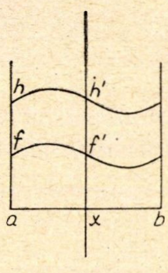
[26] Uo. 51–84.

[27] TOEPLITZ. OTTO: *Die Entwicklung der Infinitesimalrechnung. Eine Einleitung in die Infinitesimalrechnung nach der genetischen Methode.* Berlin–Göttingen–Heidelberg 1949.

[28] Uo. 51–52.

[29] Uo. 55: 1., Ha egy f görbe alatti terület F, egy g görbe alatti G és úgy van szerkesztve egy h görbe, hogy minden egyes ordinátájára $xh' = xf'+xg'$ akkor $H = F+G$. 2., Ha h görbe úgy van szerkesztve, hogy minden ordinátáján a-tól b-ig $xh'=\varrho\cdot xf'$, akkor $H=\varrho F$.





[30] Uo. 60–73.

is megelőzte őket ARKHIMÉDÉSZ, mert ezt a módszert tárgyaló „Módszer"-e csak 1906-ban került elő. HEIBERG találta meg egy kivakart és szent szöveggel teleírt bizánci kéziraton, Isztambulban.

Az európai matematikán a XVII. század első felében valóságos tevékenységi láz vesz erőt. Az indivizibila-módszer diszkussziói mellett egyre intenzívebben foglalkoznak az érintőmeghatározás kérdésével, a megfordított érintő feladattal, maximum-minimum problémákkal, a GALILEI-iskolában mozgásmatematikával, a sebességgel, NAPIER a képzelt mozgás egy különös esetével: a logaritmussal.

Ezekben a felfedezésekben csírájában benne van az integrál- és differenciálszámítás. „És ez a fejlődés legvilágosabban kiemeli azt a pontot, amit a szokásos ábrázolással többnyire elrejtenek, szinte szándékosan, bár az egyetlen meglepő gondolat az egészben."[31] 1650 körül voltaképpen már minden kellék együtt van, ami az infinitézimális számításhoz szükséges. Mégsem jöhetett létre addig, amíg ez az „egyetlen meglepő gondolat" napvilágra nem jön. Ez az „egyetlen meglepő gondolat" a XVII. század egész addigi, szerteágazó, értékes, de nagyon pontatlan, intuitív indivizibilia-fogalomra, vagy az antik geometria fogalmaira építő részletkutatását egyszerre összefogja, egységesíti, s — integrál-differenciálszámítássá alakítja át.

Mi ez a meglepő gondolat?

Bizonyos fokig visszatérés ARKHIMÉDÉSZhez, aki axiomatizálta az ívhosszmeghatározáshoz szükséges monotonia-fogalmat. Felismerte, hogy „ívhossz"-ról matematikailag, azaz pontosan, csak akkor beszélhetünk, ha előre megköveteljük a létezését. Ha körülhatároljuk, gondosan kizárjuk mindazokat a veszélyeket, amik eleve lehetetlenné tennék a róla való matematizálást. Ahogy TOEPLITZ mondja: megadjuk a kívánt dolog matematikai „receptjét".[32]

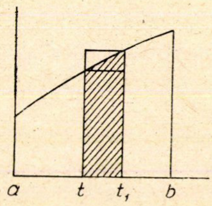
Ehhez a meglepő arkhimédészi gondolathoz tér vissza a XVII. század hatvanas éveinek a végén ISAAC BARROW, NEWTON mestere. Kimutatja, hogy az érintőmeghatározás (differenciálás) és területszámítás (integrálás) nem magától értetődő, mindig elvégezhető műveletek. Észreveszi, hogy csak akkor tudunk érintőt szerkeszteni egy görbéhez, ha a görbét előre olyannak vettük fel, hogy legyen érintője. Hasonlóképpen csak akkor beszélhetünk egy görbe alatti területről, ha a görbét előre olyannak választottuk, hogy ez a terület létezzen. Azaz legyen a-tól b-ig mindenütt végigcsúsztatható a görbe mentében, ugrás nélkül, egy tetszés szerint keskeny tt_1 terület (folytonosság) és legyen a görbe véges ab szakaszokkal csupa vagy csak növekvő, vagy csak csökkenő részekre felosztható (monotonia). S ha ez a két feltétel kielégül, azaz folytonos és monoton függvények esetében, az érintőszerkesztés és területmeghatározás összetartoznak, egyik következik a másikból, egymás után alkalmazva megsemmisítik egymás hatását, pontosan úgy viselkednek ebből a szempontból, mint a hatványozás és gyökvonás: egymás megfordított műveletei.

ISAAC BARROW felfedezi 1667-ben azt, amit ma az infinitézimális számítás fundamentális tételének nevezünk: differenciálás és integrálás (folytonos és monoton függvények esetében) egymásnak inverz műveletei.

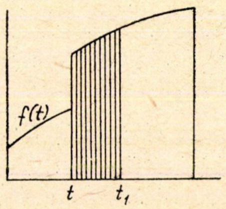
Láttuk, ugyanezt tartotta már ZEUTHEN BARROW nagy tételének, csak még folytonosság és monotonia nélkül. ZEUTHEN még nem hallgatta FELIX KLEINT, ZEUTHENnél még egészen másként fedezte fel BARROW ugyanazt ...

[31] Uo. 91.
[32] Uo. 60.

TOEPLITZ megmagyarázza BARROW-nak, tulajdonképpen mit is vitt végbe. Felfedezte a „Fundamentalsatz"-ot: „Ha $F(t)=\int_a^t f(x)dx$, $a \leqq t \leqq 1$, $f(x)$ folytonos és monoton, akkor $F'(t)=f(t)$. BARROW bizonyítása éppen olyan egyszerű, mint



4. ábra



5. ábra

amilyen világos. Tekintsük $F'(t)=\lim\limits_{t_1 \to t} \frac{F(t_1)-F(t)}{t_1-t}$ határátmenetet. Mármost $F(t_1)-F(t)=\int_a^{t_1} f(t)dx-\int_a^t f(x)dx=\int_t^{t_1} f(x)dx$ a vonalkázott alakzat területe. Mivel $f(x)$ monoton

$$f(t)<f(x)<f(t_1) \text{ ha } t<x<t_1$$

és $$(t_1-t)f(t)<\int_t^{t_1} f(x)dx<(t_1-t)f(t_1); \text{ így } f(t)<\frac{F(t_1)-F(t)}{t_1-t}<f(t_1).$$

Ha $t_1 \to t$, akkor $f(t_1)$ minden függvényértéket felvesz t_1 és t között. Ha az $f(x)$ függvény $x=t$-nél megszakadna (ettől monoton még lehetne) akkor $\lim\limits_{t_1 \to t} f(t_1)$ nem lenne egyenlő $f(t)$-vel. Ha $\lim\limits_{x \to t} f(x)=f(t)$ függetlenül attól, hogy jobbról vagy balról közeledik az x a t-hez, akkor az $f(x)$ függvényt az $x=t$ helyen folytonosnak nevezzük. Mivel előre feltételeztük, hogy $f(x)$ függvény folytonos, következik, hogy

$$\lim_{t_1 \to t} \frac{F(t_1)-F(t)}{t_1-t}=f(t)^{33}.$$

Ha egyáltalán lehetséges egyetlen embert megtisztelni az infinitézimális számítás felfedezője címmel — véli TOEPLITZ —, akkor az ISAAC BARROW... BARROW azonban bizonyosan nem pályázna erre a címre. Nagy könyve megjelenése után visszavonul a Bibliához, és a geometria csak kedvtelése marad, de mindig szigorúan EUKLIDÉSZ modorában.

A prioritásharcnak — TOEPLITZ szerint — nem LEIBNIZ és NEWTON, hanem BARROW és NEWTON között kellett volna kitörni, a prioritásharc — mint CANTOR olyan szépen kifejtette — politikai kérdés volt a tory NEWTON és a fejedelmét, a whig-jelölt hannoveri választót támogató LEIBNITZ között.

De a harc gyökerei nem itt voltak. A harc gyökerei „a matematika egész fejlődésében találhatók, kiváltképpen a függvényfogalom fejlődésében."[34]

[33] Uo. 92–93.
[34] Uo. 123.

DESCARTES a görög geometria nagy részét algebraizálta, de tudatosan a görög matematika egy részére szorítkozott: az infinitézimális eljárásokhoz — TOEPLITZ szerint — nem nyúlt.

Ennek következtében alakul ki kétféle függvényfogalom. Az egyik a DESCARTES által kirekesztett infinitézimálgeometriai megfontolásokhoz csatlakozik. Csírájában már GALILEInél és CAVALIERInél is megtalálható, és BARROW-ban ér csúcsára. Ez az irány jelenti a geometriai függvényfogalom kialakulását. A függvény itt a geometriai és mechanikai képek összefogásából és általánosításából alakul ki, egy szabályt jelent, amely minden, adott a és b határok közt fekvő x értékhez egy $y=f(x)$ számot rendel.

DESCARTES analitikus geometriájához csatlakozva fejlődik ki a másik irány. Ez az irány a függvényt sokkal szűkebben értelmezi, algebrai kifejezésnek fogja fel (Rechenausdruck): racionális törtfüggvénynek, gyöknek, polinomnak, végtelen sornak.

„GREGORIUS A SANTO VICENTIO, a jezsuita páter és HUYGENS még a régi, görög módon gondolkoznak; BARROWt megragadja a geometriai függvényfogalom fejlődése és megkísérli beépíteni a görög gondolkozásmódba. NEWTON alig pár évvel fiatalabb BARROW-nál, de ő már az új, algebrai kifejezésekre alapított függvényfogalom generációjához tartozik.”[35] A „generációváltás” a matematika történetében éppen olyan jelentős, mint a művészettörténetben. Csak az új generáció: NEWTON és LEIBNIZ generációja érti meg a BARROW-féle tétel lényegét, azt az óriási megkönnyítést, amit ez a tétel a számolás, a kalkulus szempontjából jelent.

Összefoglalva TOEPLITZ interpretációját, azt látjuk, hogy szerinte az első lépés a folytonásság fontosságának a megsejtése volt, ami a parabolákra való szorítkozásban és a mozgás segítségülhívásában nyilvánult. A görbe alatti terület kvadraturájában a módszer további fejlődését a speciális alakú területek bevezetése segítette elő. Azután esetenként, a folytonosság és a szakaszonkénti monotonia biztosításával, intuitív határátmenettel történt az érintőszámítás, a fordított érintőfeladat, a maximum-minimum problémák, evolvens-evoluta problémák megoldása. A fejlődés végső következményét BARROW vonta le: megteremtette a megfordíthatóan differenciálható-integrálható függvény fogalmát.

Ez a fejlődés nagyjából annak a négy kvalitatív követelménynek felel meg, amit FELIX KLEIN kívánt meg a fizikában célszerűen alkalmazható függvényektől. A KLEIN-féle kvantitatív lépcsőt TOEPLITZ interpretációjában NEWTON és LEIBNIZ jelentik: megmutatják, hogyan kell tetszőleges pontossággal számolni az ilyen függvényekkel.

TOEPLITZ könyve máig legteljesebb és legszebben megírt vázlata az infinitézimális számítás korai történetének. S mivel az a perspektíva, amiből az egész fejlődést tekinti — ti. a fizikai alkalmazások perspektívája — bizonyos fokig valóban egyben a történelmi fejlődés perspektívája is, sok helyen történelmileg is helyes képet ad a kalkulus kialakulásáról. De nem szabad elfelejteni, hogy az infinitézimális számítás csak a XVIII. és XIX. században forrott össze elválaszthatatlanul a fizikával, a XVII. században a két diszciplina még függetlenül fejlődik egymástól. Elég arra emlékeztetni, hogy NEWTON nagy fizikai művében, a *Principia*ban nem alkalmazza azokat az infinitézimális módszereket, amiknek akkor már két évtizede birtokában volt, s amik számunkra elválaszthatatlanul egybeforrottak a newtoni

[35] Uo. 124.

fizika fogalmával, s hogy HUYGENS, a modern fizika NEWTONnal és GALILEIvel egyenrangú megteremtője sohasem alkalmazta a kalkulust.

Könnyű már nekünk elképzelni pl. GALILEIt, amint egy vízióra és egy különböző hajlásszögre beállított lejtő segítségével „integrálja" a fizika első „differenciálegyenleteit"...

De GALILEI bizonyosan nem gondolt arra, hogy differenciálegyenletet integrál. A történelem alapvető igazságtalansága, hogy nem lehet megkérdezni azokat, akikről írunk: ők mit gondolnak arról, amit róluk állítunk. Így minden történetírás — bizonyos fokig — múltba vetített utópia: a jelen értelmét és gyökereit keresi. Azért csak az lehet jó történetíró, akinek a múlthoz, amiről ír, köze van. Akinek a tárgyalt múlt egy kicsit saját története. Végeredményben két megbízható történetírói műfaj van: a memoár és a — levelezés.

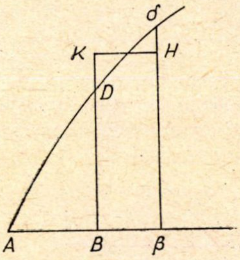
Nos, a göttingeni iskola memoárjait az infinitézimális számítás eredetéről így kell megítélni. Egy előnye bizonyosan van: észrevette és kiemelte azt az éles fordulatot, ami a matematika történetében a XVII. század közepén bekövetkezik: a kvantitatív módszerek, a számolás, a kiszámítás elképesztő és hirtelen térhódítását, a számtáblázatokkal, logaritmussal és szögfüggvényekkel való munka terjedését, ami nélkülözhetetlen előfeltétele volt az infinitézimális kalkulusnak.

De nekünk, akik nem rendelkezünk olyan sok éves matematikai memóriával, mint a göttingaiak, kötelességünk ezt a személyes és meleghangú történetet egy objektív, hideg, óriási filológiai apparaturával dolgozó, nagyon nehezen olvasható, nagyon megbízható, túlságosan is pontos, szigorú leírással kiegészíteni.

JOSEPH E. HOFMANNra gondolok: *ő a* matematikatörténész a XVII. század szép, de zavaros vizein.

Der große NEWTON wird häufig genannt und ist doch kaum bekannt — kezdi a NEWTON korai matematikájáról írott nagy monográfiáját.[36] NEWTON legendává lett, az igazi NEWTONt rég elfelejtették. NEWTON — az igazi — 1664-ben kezd komolyan foglalkozni matematikával. „SCHOOTENT, a cartesiánus geometriát, OUGHTREDEt, WALLISt és VIÈTEt tanulmányozza. Egyébként BARROW matematikai előadásait is hallgatta."[37]

HOFMANN részletesen ismerteti az 1669. aug 10-én COLLINSnak küldött *De analysi per aequationes numeros terminorum infinitas*t. Az első négy fejezet a sorelmélet szabályait foglalja össze, az ötödik fejezet a fluxió fogalmát vezeti be, de még a fluxió elnevezés nélkül, a további fejezetek alkalmazások: görbék hossza, sorok koefficiensei, mechanikus görbék.



6. ábra

Az első fejezetben közölt, $y=ax^{\frac{m}{n}}$ alakú függvények $\frac{an}{m+n}x^{\frac{m+n}{n}}$ alakú kvadraturáját és ennek a megfordíthatóságát a tizedik fejezetben igazolja. „Egy előkészítő részben $AB=x$; $BD=y$, ABD *felület* $=z$ jelöléseket vezeti be, és

[36] HOFMANN, JOS. E.: „Studien zur Vorgeschichte des Prioritätstreites zwischen Leibniz und Newton um die Entdeckung der höheren Analysis. I. Abhandlung: Materialen zur ersten mathematischen Schaffensperiode Newtons (1665—1675)", *Abhandlungen der Preussischen Akademie der Wissenschaften, Jahrgang 1943. Mathematisch-naturwiss. Klasse. Nr. 2.* Berlin 1943. (továbbiakban: Vorgesch.)

[37] Uo. 7.

azt a feladatot tűzi ki, hogy az x és z között adott összefüggésből meghatározza y-t. Ebből a célból bevezet egy szomszédos ordinátát és $A\beta = x+o$, *Aβδ felület* $= z+ov$ jelölést vezeti be.

A továbbiakat a $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}=z$ vagy $\frac{4}{9}x^3=z^2$ példán vezeti le, x-et $x+o$-val helyettesíti, z-t $z+ov$-vel, kiküszöböli mindkét oldalon az o-t nem tartalmazó tagot, végigoszt o-val, és így a

$$\frac{4}{9}(3x^2+3xo+o^2)=2zv+v^2$$

egyenletre jut. A továbbiakban a saját szavaival folytatom: Si iam supponamus $B\beta$ in infinitum diminui et evanescere sive o esse nihil, erunt v et y aequales, et termini per o multiplicati evanescent; quare restabit

$$\frac{4}{9}\times 3xx=2zv \text{ sive } \frac{2}{3}xx(=zy)=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}y \text{ sive } x^{\frac{1}{2}}\left(=\frac{x^2}{x^{\frac{3}{2}}}\right)=y.$$

Quare e contra, si $x^{\frac{1}{2}}=y$, erit $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}=z$.

Teljesen hasonlóan halad az I. fejezetben adott szabálynak az általános bizonyítása. NEWTON kimutatja, hogy $z=\frac{n}{m+n}ax^{\frac{m+n}{n}}$-ból $y=ax^{\frac{m}{n}}$ következik, és megfordítva."[38]

A mű befejezésül egy függvény hatványsorba fejtését adja meg.

A *De analysi* jelentősége óriási lett volna, ha ismertté válik. Talán a matematika egész fejlődése másként alakul — írja HOFMANN. COLLINS azonban jóformán semmit sem ismertetett NEWTON eredményeiből. JAMES GREGORY (1638—1675), aki évek óta foglalkozott hasonló kérdésekkel, csak pár, számára használatlan eredményt tud meg tőle, bizonyítás nélkül.

JAMES GREGORY érintő-módszere már *Geometriae pars universalis* — (Padua 1668)-ában megjelent. GREGORY skót nemes, aki a protektorátus alatt, 1663-ban Itáliába emigrál.

Padovában STEFANO DEGLI ANGELI, a galileista matematikus a TORRICELLI-kör módszereivel ismerteti meg. Ugyancsak Itáliában ismerkedik meg MICHEL-ANGELO RICCI eredményeivel.

[38] Uo. 16. — A latin szöveg fordítása: „Ha most feltételezzük, hogy $B\beta$ már végtelenül csökkent és eltűnt, azaz o zérus lett, v és y egyenlőek lesznek, és a o-val szorzott tagok eltűnnek; tehát megmarad

$$\frac{4}{9}\times\frac{3}{3}xx=2zv \quad\text{vagy}\quad \frac{2}{3}xx(=zy)=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}y \quad\text{vagy}\quad x^{\frac{1}{2}}\left(=\frac{x^2}{x^{\frac{3}{2}}}\right)=y.$$

Tehát megfordítva, ha $x^{\frac{1}{2}}=y$, akkor $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}=z$ lesz." — A o-t nem szabad nullának fordítani, mint oly sok könyv, pl. D. J. STRUIK, *A matematika rövid története*, Bpest, 1958. 119. is teszi. (Ugyanezt a hibát követi el az angol kiadás is.)

RICCI az ellenreformáció jelentős személyisége, magas egyházi funkciókat töltött be. MERSENNE római tartózkodása (1644) alatt közvetítő volt az olasz és francia iskola között. RICCI hosszú éveket töltött az érintőprobléma megoldásával. Későn, 1666-ban adta közzé az apollonioszi szigorú módszerek továbbépítésén alapuló módszerét az $x^p y^q = z^{p+q}$ (ahol $ax + by = cz$) egyenletű görbék érintőszerkesztésére. RICCI nyomán dolgozta ki H. SLUSE (1622—1685) $f(x, y) = \Sigma a_{ik} x^i y^k = ø$ formában előállított algebrai görbék s_t szubtangensének a meghatározására szolgáló módszerét. A szubtangenst az

$$x\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}+y\frac{f(x,y+k)-f(x,y)}{k}=0$$

egyenletből kapja meg, a végbevitt osztás után a h és k-t tartalmazó tagok elhagyásával.[39]

JAMES GREGORY a RICCI érintőszerkesztését egyszerűsíti, s SLUSE-hoz hasonlóan, a FERMAT módszerével rokon eljáráshoz jut, amennyiben az $\frac{f(x)}{s_t} \approx \frac{f(x+h)}{s_t+h}$ egyenletet írja fel, a kifejezést kifejti és rendezi h hatványai szerint, és a h elsőnél magasabb fokú hatványait tartalmazó tagokat elhagyja. Ezáltal arra az eredményre jut, amit mi $s_t = \frac{f(x)}{f'(x)}$-szel jelölnénk.[40]

GREGORY azonban messze túljut elődein. Az eddigi korszak — a „Hochbarock" — tudása arisztokratikus, nehezen elsajátítható, tudósok szűk körére szorítkozó volt. Érdeklődő, de szakmailag többnyire nem eléggé képzett közvetítők tartották a tudósok között a kapcsolatot személyesen és kiterjedt levelezésükkel. A tudósok megélhetés és munkalehetőség tekintetében „gyakorlati" foglalkozások és bizonytalan patrónusok kényszerének és kényének voltak kiszolgáltatva.

Az 1660-as évekkel alapvető változás következik be. A tudomány önálló lesz, az akadémiákban megteremti saját szervezeti formáit, a levelezést felváltja a folyóirat, a tudományos élet határozott, elismert és egyre jobban megbecsült része lesz az államok felépítésének.

Az általános matematikai tudás most is alacsony. A kor — a Spätbarock, ahogy HOFMANN nevezi — vezéregyéniségei VIÈTE és DESCARTES nyomán átfogó módszerekre törekednek, amikkel az eddigi eredmények kisebb tudás birtokában is áttekinthetők lesznek. A régibb, nehéz geometriai módszereket felváltja a teljesítőképesebb algebrai. Ez rövid és könnyen kezelhető szimbolikához és számolástechnikához vezet, s előkészíti a hatványsormódszert. A hatványsorok az új matematika hatalmas fegyverei lesznek, *kiegészítőjük*, a differenciálszámítás pedig a Spätbarock szakmai és ismeretelméleti tendenciáinak az összjátékából előálló csúcsteljesítmény.

GREGORY már itáliai tartózkodása alatt az új, végtelen sorokkal dolgozó módszer felé tájékozódik. Az arkhimédészi exhauszciós eljárás kibővítésével nagy jelentőségű módszert dolgoz ki a kúpszelet-szektorok kvadraturájára. A módszer kívül írható háromszög- és belülírható négyszögbeosztás azonos határ felé „konvergáló" (a szó tőle ered) kettős sorozatán alapul. A sorozat határértékére egyszerű közelítő for-

[39] BECKER, O. und J. E. HOFMANN: *Geschichte der Mathematik*, Bonn 1951, 198. (Továbbiakban: Becker—Hofmann.).
[40] Vorgesch., 30, Becker—Hofmann, 198.

mulákat ad meg, és megkísérli bizonyítani a körkvadratura „analitikus" — azaz a szó általa használt értelmében algebrai egyenletek segítségével történő — megoldásának a lehetetlenségét.

De hibát követ el a sorelmélet alkalmazásában, és csak az angol iskola, WALLIS, MERCATOR eredményeinek a megismerése segíti hozzá a helyes megoldáshoz. „Nehezen ássa le magát a *Logarithmotechnica* magváig", de megismerkedve a logaritmus fogalmával, nemcsak eddigi soraira dolgoz ki sokkal jobb közelítéseket, nemcsak π-re kap igen gyorsan konvergáló sorokat, s adja szigorú bizonyítását a MERCATOR-sornak, hanem 1670 végén felfedezi a NEWTON-féle binomiális-tételt is, bevezeti folytatólagos differenciálás segítségével a hatványsorbafejtést, megadja a trigonometrikus függvények és logaritmusaiknak a sorait, visszavezeti a logaritmikus görbe ívhosszmeghatározását a hiperbolakvadraturára, s végül a sorokat egyenletmegoldásra és nehéz számelméleti problémák eldöntésére is felhasználja.

Még teljesen a geometriai-verbális felfogásban nőtt fel, és érett férfikorában sikerült áttörnie a számításos, analitikus gondolkozásmódhoz. Az áttörés jelentőségét megérthetjük, ha meggondoljuk, hogy pl. HUYGENSnek, aki kora egyik legnagyobb matematikusa volt, sohasem sikerült. Éppen ez a legnyilvánvalóbb bizonyítéka GREGORY — „a modern matematika egyik megalapítója" — kiváló képességeinek.[41]

JOHN COLLINST azonban „szűklátóköre" és „NEWTON-imádata" megakadályozza GREGORY felismerésében. Mint afféle autodidaktának, fölöttébb imponált neki a nagy NEWTON barátsága, s meggondolás nélkül szolgáltatja ki neki GREGORY eredményeit. GREGORY mellett pedig senki sem áll. „If, it were not for you, I would be, as it were, dead to all the world" — idéz HOFMANN GREGORY 1671. febr. 25-én COLLINShoz írt leveléből.[42] „Így történhetett, hogy GREGORY halála után csakhamar teljes feledésbe merült, és NEWTONt tekintették egy sor csodálatos tétel felfedezőjének, jóllehet ezek első felfedezője a valóságban nem ő, hanem GREGORY volt."[43]

NEWTON csak DARY és GREGORY munkáinak — és így közvetve SLUSE eredményeinek — az átnézése után jön rá saját módszereinek az általános érvényére. „Hogy ebben mennyire befolyásolták GREGORY eredményei, amelyeket kétségkívül önállóan utánaszámolt, teljesen tisztázatlan és valószínűleg sohasem lesz felderíthető."[44] NEWTON kortársai azonban — s ebben még GREGORY sem volt kivétel — nehézkes geometriai módszerekkel dolgoztak, „NEWTON már analitikusan gondolkozott, a szót a modern értelemben használva ... Pár sorban és általánosságban meg tudta oldani azt, amit addig nehézkes és szubtilis vizsgálatokban is csak tökéletlenül sejtetni tudtak."[45]

NEWTON sorelméletét és fluxiótanát 1665—1674 között dolgozza ki, ez a Sturm und Drang periódusa, végleges fogalmai azonban ekkor még hiányoznak. Két évre

[41] Becker—Hofmann, 198. J. E. HOFMANN: *Geschichte der Mathematik, 2. Bd.* Berlin, 1957, 51—52. (Továbbiakban: Hofmann II.)

[42] Vorgesch. 48. Vö. *The Correspondence of Isaac Newton*, Ed. by H. W. TURNBULL, Vol. I. 1661—1675, Cambridge 1959, 61. A szövegben az idézet nem hangzik annyira tragikusan, és főleg nincs NEWTON elleni éle: I can not expresse, how much I think my self engaged to you for your account of new books; if it wer not for you, I wold be, as it wer dead, to al the wordle ...

As for Mr. NEWTON his universal method, I imagine I have some knowledge of it, both as to geometrick & mechanickcurves, however I thank you for the serieses ye sent me, & send you these following in requital.

[43] Vorgesch. 49.

[44] Uo. 100.

[45] Uo. 117.

abbahagyja a matematikát, és csak 1676-ban tér vissza, de már mint Mester, aki ismereteit egyenesen kinyilatkoztatásnak érzi. S ez súlyos válságba kergeti.[46]

Ugyanis: „A balsors (das Unglück) úgy hozta magával, hogy az analitikus érintőmódszer első felfedezője nem NEWTON volt, s kínosan ható szőrszálhasogatással kellett bizonygatnia, hogy a SLUSE eljárása nyilván más alapokon keletkezett és nem olyan általános, mint az övé. S továbbá úgy akarta (ti. a balsors), hogy LEIBNIZ éppen SLUSEtól kapta döntő indítékát, s ebben a tekintetben messzebb és mélyebbre látott, mint NEWTON."[47]

S ezután az előkészítés után már nem lesz nehéz levonni a végkövetkeztetést: Die mathematische Hochleistung des Spätbarocks ist die Erfindung des Calculus. Sie ist das ausschliessliche Verdienst des Leipziger Professorensohnes G. W. LEIBNIZ (1646—1716).[48]

A „Prioritätsstreit" J. E. HOFMANN nyomán új fázisba lépett. Talán JAMES GREGORY és LEIBNIZ között kellene megvívni? A két „SLUSE-tanítvány" között, a skót és a szász között, akiktől ügyes angolok — jóllehet részben jóhiszeműen és öntudatlanul — ellopták felfedezéseiket?

J. E. HOFMANN a prioritásvita legnagyobb szaktekintélyei közé tartozik, és a leibnizi matematika genezisének a tisztázásában alapvető munkát végzett. Ma talán ő a XVII. századi matematika legjobb ismerője. S ha nem is élezi ki a kérdést ennyire, mint azt a fenti, összefüggéseikből kiragadott idézetek mutatják, a HOFMANN-interpretáció tendenciája kétségkívül NEWTON-ellenes.

S emellett az a tipikusan tudománytörténész beállítottság jellemző rá, amit JACQUES HADAMARD a NEWTON születésének háromszázadik évfordulójára rendezett ünnepségen így jellemzett: „Mind tudjuk, hogy a tudománytörténészeknek az a legnagyobb dicsőség, ha bebizonyítják, hogy soha nem fedezett fel senki semmit".

Ezt a mondatot választotta J. O. FLECKENSTEIN a prioritásvitáról írott kitűnő kis összefoglalása mottójául.[49]

FLECKENSTEIN lényegesen kevésbé elfogult, mint HOFMANN. Helyesebben, ő más szempontból elfogult. FLECKENSTEIN svájci, eredetileg csillagász volt, filozófus, s míg HOFMANN „szellemtörténeti" háttérbe ágyazza be a matematika fejlődését, ő a „gondolkozástörténeti előfeltételeket" (ideengeschichtlichen Voraussetzungen) keresi. Természetesen ő is leibniziánus, hiszen hosszú évekig foglalkozott LEIBNIZzal, s így az egész newtoni matematika lényegét leibnizi szemszögből — a differenciálegyenletek szemszögéből — interpretálja. Még a *Principia* főérdemét is abban látja, hogy lehetőséget ad a naprendszer n-testproblémaként, differenciálegyenlet-rendszerrel való tárgyalására.[50]

[46] Uo. 118.
[47] Uo. 119.
[48] Hofmann II, 62.
[49] FLECKENSTEIN, J. O.: *Der Prioritätsstreit zwischen Leibniz und Newton*, Basel und Stuttgart, 1956.
[50] Uo. 2. — A *Prinzipiá*-ban természetesen szó sincs erről. Nemcsak a differenciálegyenleteket nem ismeri, az n-test problémát sem. A három-test problémáira egy speciális XVII. századi, a területelven alapuló módszert alkalmaz. — Vö.: TRUESDELL, C.: „A Program toward Rediscovering the Rational Mechanics of the Age of Reason", *Archive for History of Exact Sciences* **1**, 3—36, 1960.

Ez a formai felfedezés a nagy szerinte a *Principiá*-ban, mert egyébként, tartalmilag, a gravitációs törvény semmi egyéb, mint HUYGENS 1659-es centrifugálisformulájának alkalmazása a harmadik KEPLER-törvényre.

NEWTON nagy érdeme — ha a *Principia* tételeit nem is öltözteti ebbe az új ruhába — az új matematikai kalkulus megteremtése. Ez az új kalkulus nem egyéb, mint „a dinamika algebrára való leképezése" (eine Abbildung der Dynamik auf Algebra), a változó erők dinamikájáé, ami megkövetelte a változás (út) változása (sebesség) változásának (gyorsulás) az analízisét.

A kalkulus: az erők matematikája.

GALILEI, aki a mozgást a (mozgás indivizibiliájaként felfogott) sebességnek a folytonos változásával állította elő, intuitive már érzi az erőknek ezt az új matematikáját. Azonban nemcsak ő, még DESCARTES sem érkezett el soha a dinamika algebrára való leképezéséig. Sőt: DESCARTES ebből a szempontból kitérőt jelent. DESCARTES és a cartesiánusok (ide számítja FLECKENSTEIN FERMAT és PASCAL matematikai módszereit is!) a maguk metszéspontösszeesésen, ill. szelő-határhelyzeten felépülő érintőmeghatározásaikkal csak a kinematika matematikai igényeit elégítik ki. „Ezáltal sikerül a cartesiánusoknak kinematikát űzni és azt az algebrára leképezni, de a dinamika zárva marad előttük; és ezáltal a cartesiánus fizika magasabbrendű algebrai görbék kinematikája lesz csupán."[51]

A fejlődés útja nem ezen a cartesiánus geometrián át vezet, hanem GALILEI firenzei iskolájához csatlakozik, és az indivizibilia-matematikán keresztül történik. Ennek az iránynak az alapvető, nagy művét CAVALIERI írja meg: *De geometria indivisibilibus continuorum* (Bologna 1635) címen.

FLECKENSTEIN a CAVALIERI-módszert a NEWTON-féle fluxió-elmélet szemszögéből interpretálja, s így nagyon szépen le tudja vezetni a newtoni matematika keletkezését — „ideengeschichtlich" — a GALILEI-iskolából.

Már csak HENRY MOREnak kell egy immateriális tér és egy egyenletesen folyó idő realitásként való feltételezésével „biztosítani az új változás-fogalom metafizikai hátterét", BARROWnak és JAMES GREGORYnak felismerni az integrálás és differenciálás műveletének inverz voltát,[52] és akkor „megérett Cambridge számára az idő, hogy DESCARTES algebrai módszereinek GALILEI dinamikus elképzeléseire való alkalmazásával megteremtse az infinitézimális kalkulust."[53]

BARROW is megteremtette volna — véli FLECKENSTEIN —, ha nincs annyira fogva a firenzeiek geometriai módszereiben. GREGORY már lényegesen tovább lát, úgyhogy tulajdonképpen nem BARROW és LEIBNIZ, hanem GREGORY és LEIBNIZ között kellene megvívni a prioritásharcot.[54]

Így áll NEWTON — „ideengeschichtlich". Még csak egy kis „induktív empirizmust" kell kölcsönvennie ahhoz, hogy megteremthesse a kalkulust, s ezt WALLIS szállítja.[55]

„Közvetlenül a pubertás utáni években" bontakozik ki NEWTON géniusza, s teremti meg az infinitézimális analízis alapfogalmait: a fluens és a fluxió fogalmát, s az algoritmusát, a kalkulust.

[51] Uo. 4.
[52] Uo. 8.
[53] Uo. 7.
[54] Uo. 8.
[55] Uu. 10–11.

Főművében, a *Principiá*-ban csak az alapfogalmakat ismerteti, az új módszer alkalmazásától „visszariad", s jóllehet a könyv nem egy propozícióját ennek a segítségével fedezhette fel, nagy könyvében „sehol sem alkalmazza".

LEIBNIZ viszont épp ezen a területen, az új módszer alkalmazásainak a területén veti be legjobb képességeit, s nyomában alakul diadalmenetté az infinitézimális számítás — fejezi be interpretációját FLECKENSTEIN.

A HOFMANN és a TOEPLITZ módszeréhez hasonlítható D. TH. WHITESIDE kalkulus-interpretációja a XVII. század matematikájáról szóló nagy monográfiájában.[56] Forrás ismerete a HOFMANNéhoz fogható, s a modern matematika felől közelít a XVII. századhoz, mint TOEPLITZ tette volt.

Négy nagy fejezetre osztja a XVII. század matematikáját: aritmetikára és algebrára, függvényelméletre, geometriára (szintetikus és analitikus) és a kalkulusra. Legnagyobb részt természetesen a kalkulus ismertetése foglalja el. A kalkulushoz az utat a függvényfogalom tárgyalása készíti elő. Épp úgy, mint TOEPLITZnél, a logaritmus és geometriai modellje áll itt is a fejlődés kezdetén, mint „type-function". A számolás és táblázatos függvények szerepét tartja ő is a következő lépésnek. De itt lényegesen tovább lát elődeinél: a táblázatok számításaiból adódó interpolációs feladatokban a „függvényfogalom" fejlődésének egyik fontos tényezőjét ismeri fel. WHITESIDE interpretációjának ez a legérdekesebb része. Az interpolációelméletet WALLIS és JAMES GREGORY uralják. Az ő kezükben lesz a táblázatok számításainak a megkönnyítését szolgáló segédszámításokból igazi matematika: differenciaszámítás. Ez a rész iskolapéldája annak, hogyan kell a matematikai gondolkozás egy fejezetét „pattern"-analízissel közel hozni a mához. WALLIS professzor — ahogy WHITESIDE ismerteti — nyugodtan előadhatná elméletét a mai Oxfordban is, a matematikában nem érezhetők a közben eltelt évszázadok, a matematikus gondolkozásmódja, „észjárása", gondolkozási „pattern"-ja időn kívül álló, örök. Úgy adjuk vissza igazán helyesen, ha mai fogalmainkkal közeledünk hozzá, ha mai formuláinkkal írjuk le. De nem úgy, mint MORITZ CANTOR, aki a modern szimbolizmussal modern észjárást is vitt a tárgyalt gondolatokba. Utóbbihoz a „pattern"-analízis szabályai szerint nem szabad nyúlni. Az akkori észjárást kell visszaadni mai matematikai formákban, s akkor kiderül, hogy a több száz, vagy több ezer éves matematikai gondolatok épp olyan „modernek", mint a maiak.

Láttuk, ki fedezte fel a matematikatörténetnek ilyen modern matematikai eszközökkel történő belső gondolati átvilágítását: FELIX KLEIN. Nem árt erre emlékeztetni, mert WHITESIDE éppen őt és TOEPLITZet nem idézi óriási apparaturájában. Nem „plagizálási" okokból. Egyszerűen azért, mert azok az elődök kerülik el legkönnyebben az ember figyelmét, akikkel lényegében egyetért.

A „függvényfogalom" fejlődésében a következő nagy lépést az interpoláció után a sorok jelentik a WHITESIDE interpretációjában is. Ahogy a sorelmélet történetét bevezeti, az nagyon jellemző a „pattern"-analízisre. A valós számok jólrendezhetőségét felhasználva, teljesen mai matematikai eszközökkel és szimbolizmussal, definiál bizonyos $l_0, l_1, \ldots, l_n, l$ számokat, amikkel azután összeg formájában, ahhoz hasonlóan, ahogyan pl. a tizedes törteket szoktuk a 10 növekvő negatív hatványainak az összegével előállítani, definiál egy λ számot.

[56] WHITESIDE, D. TH.: Patterms of Mathematical Thought in the later Seventeenth Century", *Archive for History of Exact Sciences*, **1**, 179—388, 1961.

„A további haladás implicite benne van a helyérték fogalmában és abban áll, hogy a $[l_0, l_1, \dots l_n, l]$ rendezett halmazt λ-val jelölhetjük.

Ha az ember elérte az absztrakt gondolkozás kívánt fokát, természetesen felmerül az a kérdés, hogy milyen módon lehet értelmet adni a kötetlen $l_0, l_1, \dots, l_n, \dots$ sorozatnak, ahol n korlátlanul nagy lehet, és ahol az l_i-ket valamely a generálásukra elegendő, rekurziós formulával (pattern) definiálhatjuk."[57] Nagyon fontos a hozzáfűzött jegyzet: „Történetileg ezt [ti. az absztrakt gondolkozás szükséges fokát] legalább akkor elérte már az ember, mikor HIPPASUS, EUDOXUS és a többiek, az i. e. V. században ilyen végtelen számsorozatok elméletére alapozták a valós számarányok definícióját. Ez a haladás közvetlenül vezetett az aktuális és potenciális végtelen közötti különbségtételre és az irracionális arány fogalmára, mint amely nem képes (racionális) arányt adni."[58]

A XVII. század — WHITESIDE szerint — inkább az alkalmazások területén jelent haladást, a sorelmélet elvi gondolati tisztázása szempontjából legfeljebb BROUNCKER és JAMES GREGORY munkái jelentősek. A sorelmélet túlnehéz a XVII. századnak. Azért olyan büszkék egy-egy könnyű kis sorbafejtésre is, és azért hagyják el ezt az utat a könnyebb és algoritmizálásra alkalmasabbnak bizonyuló kalkulus kedvéért.

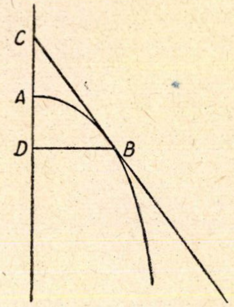
Az infinitézimális számítás — a kalkulus — kialakulását WHITESIDE ugyanazokban a lépésekben tárgyalja, mint TOEPLITZ. 1. Az intuitív eszközökkel dolgozó indivizibilia elmélet, amely a későbbi kalkulus alapötleteit és jelölési módját inspirálja, 2. visszatérés a szigorú arkhimédészi módszerekhez, 3. az érintőszerkesztés algoritmizálása, 4. végül az integrálás és differenciálás inverz műveletként való felismerése jelentik a fejlődés fő szakaszait. Nála is az integrálás-differenciálás inverz voltának a felismerése a döntő: ettől kezdve lehet infinitézimális számításról beszélni. De WHITESIDE már nem szűkíti le BARROWra az inverz jelleg felismerését, mint ZEUTHEN és J. M. CHILD nyomán TOEPLITZ tette volt. WHITESIDE óriási forrásismerete „feloldja" a felfedezést a századközép hatalmas matematikai irodalmában. Voltaképpen miután DESCARTES a DE BEAUNE-feladatot megoldotta, a felismerés a levegőben volt,[59] és implicite alapul szolgált az indivizibilia-exhausziós módszereknek. WALLISban is felcsillant a felismerése, JAMES GREGORY pedig sokkal világosabban kimondja, mint BARROW.

NEWTON 1666-ban írta le: „Enyhén modernizálva megoldását — írja WHITESIDE — azt mondhatjuk, hogy NEWTON egy OP görbét egy, az $OX = x$ és $XP = y$

[57] Uo. 252—253.

[58] Uo. 253, 2. lábjegyzet.

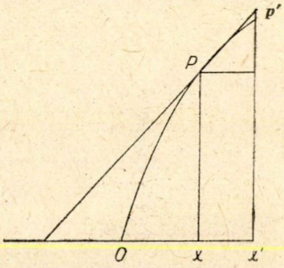
[59] „Voltaképpen" DESCARTES és DE BEAUNE látják, hogy a DE BEAUNE által felvetett második feladatban „kvadraturáról" van szó, anélkül, hogy területmeghatározás lenne, s hogy ez az érintőszerkesztés megfordítottja. PAUL TANNERY a DESCARTES-féle megoldás utáni klasszikus jegyzetében ezt írja: Le problème est donc bien raméné à une quadrature, et la possibilité d'obtenir en tous cas celles-ci par une sommation de termes, avec une approximation indéfinie, est démonstré. *Oeuvres de Descartes. Publ. par* CH. ADAM & P. TANNERY, II, 522. — DE BEAUNE pedig világosan rámutat ROBERVAL véleményével szemben, hogy nem érintőszerkesztésről, hanem annak a megfordítottjáról van szó: Je demande au contraire la methode, ayant vne equation qui explique le rapport d'entre *CD* et *DB*, de pouvoir trouver la ligne *AD*. — *F. Debeaune à Mersenne*, 5 *Mars* 1639. *Oeuvres de Descartes*, V, 535. — DESCARTES és DEBEAUNE legalább annyi joggal tartható az érintőszerkesztés és a kvadratura megfordíthatóságának a felfedezőjének, mint WALLIS.



mennyiségeket összekötő $y=f(x)$ függvény által definiáltnak tekint, és vesz egy másik z függvényt, (az ő «$(OXPO)$ területe») ahol legyen $z=\int_0^x y\,dx=g(x)$; akkor a $g(x)$ deriváltja $\lim_{x'\to x}\left(\frac{z'-z}{x'-x}\right)$, ahol $OX'=x, X'P'=y'$ és $z'=(OX'P'O)$ terület. De, amint $P'X'\to PX$, $(XX'P'P)$ *terület* $\to PX\times XX'(=y(x'-x))$, és így

$$\lim_{x'\to x}\left[\frac{g(x')-g(x)}{x'-x}\right]=\lim_{x'\to x}\left[\frac{(XX'P'P)\text{ terület}}{XX'}\right]=PX(=y)\text{''}^{60}.$$

Ez természetesen ugyanaz a bizonyítás, ami a *De analysi* 5. és 10. fejezetében szerepel, s amiről HOFMANN számolt be részletesen. WHITESIDE „pattern"-analízise azonban világosabban kidolgozza a $g(x)$ „primitív függvény" és $g'(x)=y$ „deriváltja" közötti összefüggést. Ugyanúgy, mint TOEPLITZ BARROWnál tette volt



7. ábra

Magának a differenciálásnak a keresztülvitele szempontjából döntő hatással volt NEWTONra a SLUSIUS—HUDDE-féle szabály. WHITESIDE kimutatja, hogy NEWTON—HUDDE nyomán — már az 1660-as évek közepén eljut a mai parciális differenciál operátoroknak teljesen megfelelő műveleti szabályokhoz, s ami talán még fontosabb, jelölésekhez is. Azonban ez az 1665-ös módszer még csak algebrai függvényekre volt alkalmazható, a nem algebrai, DESCARTES által „mechanikus görbéknek", LEIBNIZ által „transzcendens egyenleteknek" nevezett függvényekre a módszer nem terjedt ki. A haladás ezen a területen lassú volt. Ugyanis nem volt meg a „bármely görbe" geometriai modelljének megfelelő „analitikus függvény" fogalmuk.[61]

NEWTON is csak akkor mozog biztos területen, ha a „geometriai modell"-ben dolgozhat. Valóban, fluxió számításának a gondolatai itt születnek, innen általánosít.

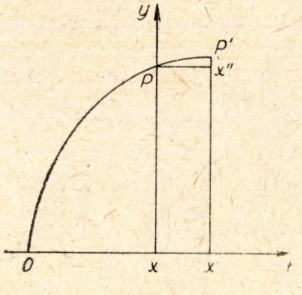
„Ha az OP hosszúságot x analitikus mértékkel reprezentáljuk, akkor a PP' limes-vonalszakasz $P'\to P$ esetén $\lim_{0\to\text{zero}}(o\dot{x})$-el reprezentálható, ahol $\dot{x}$ a pont pillanatnyi sebessége P-ben. Ebből az $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ fluxióhányados definíciója, ha x, y-t valamely $y=f(x)$ reláció fűzi össze, azonnal adódik: mivel $y+o\dot{y}=f(x+o\dot{x})$, tehát

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=\frac{o\dot{y}}{o\dot{x}}=\lim_{0\to\text{zero}}\frac{f(x+o\dot{x})-f(x)}{(x+o\dot{x})-x}\left[=\frac{dy}{dx}\right].$$

Gyakran bevezet egy olyan egyszerűsítést, amelyben x-et az időkontinuumnak tekinti (és így $\dot{x}$ állandó és egységnek vehető, mivel az idő egyenletesen „folyik") tehát $\dot{y}\left(=\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)$ reprezentálja az y növekvésének a fluxionális mértékét (fluxional

[60] Uo. 370—371.
[61] Uo. 362.

rate). A geometriai modellre való lefordítás ugyanolyan közvetlen, mint az előbb. A t méri az alapul vett időskálát (ahol t a mértékegység), definiáljuk $g(y)$-t mint az $f(y)$ reláció fluxióját, vagy megfordítva, $f(y)$-t mint a $g(y)$ «fluensét»; és akkor ábrázolhatók «bármely mennyiség fluensei görbék alatti területekkel, a fluxiók az ordinátákkal, az idő-intervallum az abszcisszával, az idő limes-momentuma az abszcissza limes-momentumával, a többi fluensek limes-momentumai az abszcissza limes-momentumainak megfelelő ordinátákkal» azaz, ha $OX=t$, $PX=y=\varphi(t)$ és $XX'=\dot{t}o=o$ (mivel t-t 1-nek vettük) és $P'X''(=P'X'-=PX)=\dot{y}o$, akkor a fluens az $y=\varphi(t)$ alatti OPX *terület* $=z=\square y$ és a *fluens* fluxiója a $PX=y=\dot{z}\left(=\frac{\dot{z}o}{\dot{t}o}\right)$ abszcissza."[62]



8. ábra

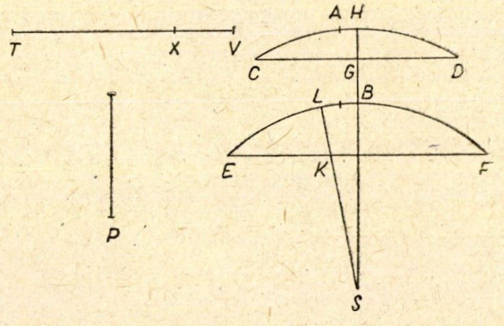
A következőkben WHITESIDE a NEWTON-féle elmélet differenciálgeometriai alkalmazásait ismerteti. Ez a dolgozata egyik legjelentősebb része. FLECKENSTEIN kivételével NEWTONnak ide vonatkozó vizsgálatait a matematikatörténészek alig méltányolják. NEWTON különösen a görbületi viszonyok analízisében jutott nagyon messze, de követői nem voltak, mert ez a terület a leibnizi analízis folytatásaként fejlődött tovább.

A pattern-analízis végeredményben ugyanoda vezetett, ahová HOFMANN ideatörténeti és TOEPLITZ szellemtörténeti vizsgálatai. De WHITESIDE analízise számtalan finom részlettel gazdagította a képet, elviszi az olvasót a forrásokig.

A matematikatörténeti pattern-analízis azoknak a történetírói áramlatoknak a megfelelője, amelyek az irodalomtörténetet irodalomtudománnyá, a zenetörténetet zenetudománnyá, a művészettörténetet struktur-analízissé alakították.

A folyamat lényegében a historizmusra való reakciónak fogható fel, s nagy hatással van kialakulására az egzisztencializmus. Az egzisztencializmus roppant

[62] Uo. 374—375. A modern limes-jelölés ebben az esetben nagyon zavaró. Vö. pl. SAMUEL HORSLEYnek a *Principia* Prop. VI. Theor. V.-jéhez adott fluxió-elméleti magyarázatával: — si exponatur recta quaedam, *TV*, quae ad datam *P* rationem habet eam, quam sagitta *KL* ad sagittam *GH*; tum, arcubus *CAD*, *EBF* infinite decrescentibus, si recta *TV* eâ lege fluat, ut semper sit ad datam *P* sicut sagitta *KL* ad sagittam *GH* (illas utrique sagittarum, *GH*, *KL* rectaeque *TV* magnitudines conferendo quae simul fiunt), & si *TX* sit ultima rectae *TV* longitudo, quam, arcubus *CAD*, *EBF* jamjam in nihilum abituris, proprius illa accesserit quam pro data quavis differentia, ... — ISAACI NEWTONI *Opera quae exstant omnia. Commentariis illustrabat* SAMUEL HORSLEY. Tomus II, London, 1879, jegyzet a Prop. VI, Theor. V-höz. A „minden adott különbségnél jobban" való megközelítés valóban azt a látszatot kelti, mintha a limes-fogalom alkalmazható lenne. De ez nem áll, mert a limes-fogalomban a megközelítés a természetes számok során át történik, a newtoni „limes"-ben pedig folytonos mennyiségek — DESCARTES általános mennyiségei — „folyásán" át. A XVII. század matematikája kontinuum-matematika, a XIX. századé az arithmetikai számfogalomra épül fel.



heterogén filozófia. Számtalan válfaja van, de egyben mind megegyezik: mind ahistorikus. A megelőző kor vezető nyugati filozófiája, a pozitivizmus történelemkedvelő volt, ha nem is történelemtisztelő. A pozitivista történész lelkesedett a korhű kosztümökért, de saját gondolatait öltöztette beléjük. Így lett már MACHnál a tudományok története gondolkozásökonómiai példatárrá.

Az egzisztencialista történészt a történelem strukturája érdekli, az eseményeké vagy a gondolkozásé. És ez a struktura, ez a pattern modern eszközökkel közelítendő meg, mert lényegében változatlan.

Ahol az „embert" kell megismerni, belső gondolkozási formáival, ott ez a módszer néha nagyon mély interpretációkat tesz lehetővé. Ilyen volt JEAN LAPORTE nagy DESCARTES-átértékelése.[63]

Egy ilyen interpretáció lehetősége fonódik WHITESIDE munkájában WALLIS gondolkozása köré. WALLISt WHITESIDE interpretációja az angol matematika centrális alakjává teszi. Ő benne, az indivizibilia-elmélet csúcsát jelentő WALLISban fonódnak össze, s belőle ágaznak szét a szálak. Az ő korlátai egy gondolkozási módszer belső korlátai, a többiek korlátai — ez áll még JAMES GREGORYra és még inkább NEWTONra is — a saját gondolkozásuk korlátai. WALLIS az adott gondolkozási-pattern határáig megy, s néhol meglepő intuicióval még ezeket a határokat is szétfeszíti: WALLIS megsejti a RIEMANN-integrált.[64]

A többiek elhalványodnak mellette: NEWTON is. Itt vannak az egzisztencialista jellegű történetírás korlátai. A modern módszerek alkalmazása csak addig jó, amíg egyetlen ember gondolkozását kell megismerni. Egyetlen ember gondolati strukturája lefordítható modern nyelvre. Ebben a lefordításban nem vész el a lényeg, sőt: sokszor talán a fölösleges járulékoktól megfosztva, még jobban kidomborodik. De mihelyt gondolatok kölcsönhatásáról van szó, ez a lényeg-analízis felmondja a szolgálatot. Mert az emberek mihelyt többesszámban vannak, rögtön felveszik a cselekvési és gondolkozási „illemszabályokat", különösen olyan szemérmes emberek, mint NEWTON. És ezek a gondolkozási sablonok — az outilage mentale, ahogy LUCIEN FEBVRE nevezte — korhoz kötöttek. Egyetlen modern formula alkalmazásával meghamisíthatjuk őket. Ezeknek a gondolkozási sablonoknak is van patternje, de ezt a patternt nem olyan élvezetes dolog leírni, mint a gondolatok patternjét. Mert ebben semmi „modern" nincs. Poros és elavult, olyan, mint egy régi, nagy barokk paróka. A borotva-hajvágáshoz szokott egzisztencialista fej megizzad alatta, annyira, hogy elmegy a kedve a „gondolkozástól".

[63] LAPORTE, JEAN: *Le rationalisme de Descartes*, Paris, [1]1945, [2]1950. — LAPORTE ismeri fel, hogy DESCARTES algebrájának éppen a folytonos mennyiségekkel való munka bevezetése egyik jellegzetessége. I. m. 9.

[64] WHITESIDE, i. m. 326—327. — WALLIS jelentőségének az eltúlzását lásd már 1927-ben: J. M. CHILD, „Newton and the art of discovery", ISAAC NEWTON 1642—1727. *A memorial vol. Ed. by* W. J. GREENSTREET, London, 1927, 117—129, 119. Szerinte nemcsak a binomiális együtthatókat és a $\int_0^x \sqrt{1-x^2}\,dx$ integrál sorbafejtését, hanem a *De analysi* alaptételét is WALLIStól „vette" NEWTON. és az elismerése WALLIS felé, frank as it is, hardly conveys the true measure of what he owed to his study of WALLIS.

II.

Az első fejezetben ismertetett NEWTON-interpretációk mind a MORITZ CANTOR-féle felfogásból nőttek ki, s lényegében azonos tendenciát követnek. Ez az irány NEWTONt elsősorban elméleti (matematikai) fizikusnak érzi, s ezért is fűzi előszeretettel GALILEI iskolájához. A matematikus LEIBNIZ volt, ő teremti meg az új módszer algoritmusát.

Ez az egyetlen lehetőség a newtoni kalkulus interpretálására? Csupa óriás előd, akiknek a vállán NEWTON már alig látszik? — Nem egészen.

JACQUES HADAMARD a háromszázéves évfordulón éppen azt emeli ki, hogy NEWTONnak nem volt igazi elődje. Egyedül FERMAT volt az, „aki, ha nevet és jelölést ad $\frac{f(a+e)-f(a)}{e}$, $e=0$ mennyiségeinek (quantitás), kétségkívül sokkal messzebb jut alkalmazásukban, mint így, talán olyan messze, mint maga NEWTON. Ezzel szemben annak a hozzájárulásnak az értékéről, amit LEIBNIZ hozott a differenciális jelölésével a tudományba, egyáltalán nem vagyok meggyőződve, kiváltképpen ha a magasabbrendű differenciálokról hallok beszélni."[65]

A háromszázéves évfordulók persze nem a legjobb alkalmak kritikai értékelésekre, de — HADAMARD nem áll egyedül ezzel a véleményével. Ugyanezt írja a két nagy összehasonlításáról JEAN ITARD: „NEWTON ideái alapjában véve elég közel állanak a LEIBNIZéihoz. Ám tárgyalásmódja, anélkül, hogy a mai szigorúságot elérné, sokkal óvatosabb, mint vetélytársáé."[66]

De ITARD az óvatosságot nem tartja föltétlenül szükséges tulajdonságnak, mert szerinte az algoritmusok fokozott kiterjesztése, a bennük való egyre nagyobb bizalom, „ez a jog egy homályos és bizonyos értelemben mechanikus gondolkozásmódhoz, amit LEIBNIZ hirdetett, ez — azt hiszem — a lényeges a matematika történetében".[67]

Már ZEUTHEN, s újabban RENÉ TATON[68] felhívták rá a figyelmet, hogy NEWTON fluxiós módszere épp úgy alkalmazható lett volna az infinitézimális geometria és a differenciálegyenletek elméletének a kiépítésére, mint a LEIBNIZ módszere.

A. S. RAMSEY[69] pedig arra emlékeztet, milyen nagymértékben fellendítette a newtoni gravitációs-elmélet a tiszta matematikát. És épp a XVIII. században, amelynek matematikáját teljesen a leibnizi módszerek fejlődésének tulajdonítják.

OSKAR BECKER, aki a „Grundlagenforschung" felől közeledett a matematikatörténethez, az első fejezetben ismertetett iránnyal szemben semmiféle „ellentétet" nem lát a *Principia* elején bevezetett új módszer és a klasszikus öltözék között. Hiszen ez a bevezetés is épp olyan szigorúan klasszikus formába van öltöztetve, mint a továbbiak, — írja. S a bevezető rész scholiumában, ami szándékosan amennyire

[65] Idézi JEAN ITARD: „A propos du tricentenaire de la naissance de Newton", *Revue d'Histoire des Sciences*, 1. 254—257, 1947—48.

[66] *Histoire générale des sciences, publ. sous la direction de* RENÉ TATON. *Tome II. La science moderne*, Paris 1958, 233.

[67] *Archives Internationales d'Histoire des Sciences*, 5, 389—390, 1952.

[68] TATON. R. „La préhistoire de l'analyse géométrique." *Archives Internationales d'Histoire des Sciences*, 3, 89—102, 1950.

[69] RAMSEY, A. S.: *An introduction to the theory of Newtonian attraction*, Cambridge, 1940, V.

csak lehet „a klasszikus geométerek eljárását közelíti meg", kora indivizibilia módszerével száll szembe elvi síkon, s egyféle határérték-módszert vezet be.[70]

NEWTON éppen azáltal „modern", hogy kortársainál szorosabban ragaszkodik a klasszikus deduktív görög módszerekhez? S épp azzal az indivizibilia-módszerrel száll szembe, aminek — FLECKENSTEIN szerint — csúcsát jelenti?

A BECKER véleményének a megértéséhez tudni kell, hogy számára voltaképpen csak két matematika létezik: a görög és a XIX—XX. századi. Csak ebben a két periódusban „szabad" tudomány a matematika: sem a dolgok metafizikai lényegének a megismerésére, sem a természet megismerésére nem törekszik. A matematika — BECKER szerint — ott végződik, ahol nem-matematikai kérdésekre alkalmazzák.[71]

Ha ezt a két elvét következetesen végigvinné, se NEWTONt, se LEIBNIZot nem lenne szabad matematikusnak tartania, mert ők a matematikát a természet, ill. a metafizika elveinek a megismerésére használták.

Nem voltak „matematikusok", — mégis az egész modern matematika belőlük nőtt ki.

K. A. RYBNIKOV cikke ad kulcsot az „ellentét" megoldásához. Eszerint NEWTON a természeti jelenségek lehető legszélesebb körének a leírására alkalmas matematikai módszert akart teremteni, s ezt vélte megtalálni a fluxiós számításban. „Gondolata a következő volt. Épp úgy, mint ahogy bármely valós szám elképzelhető véges vagy végtelen tizedestört formájában, bármely valós változójú függvény is elképzelhető a változó hatványai szerint rendezett véges vagy végtelen hatványsorban." Azért teremti meg NEWTON a hatványsorok differenciál- és integrálszámítását, s aztán már „csak" egy tetszőleges függvénynek a sorbafejtését kell megoldania. Ez természetesen nem sikerül, s RYBNIKOV szerint azért tér vissza a *Principiá*-ban az euklidészi—arkhimédészi módszerekhez. Ezért nem alkalmazza a fluxiós módszert.[72]

Lényegében ugyanez a véleménye P. SERGESCUnak, aki az inflnitézimális számítás kialakulástörténetének egyik legnagyobb szaktekintélye. SERGESCU felismeri DESCARTES központi jelentőségét az infinitézimális-számítás történetében: DESCARTES teremtette meg a „geometriai" és „mechanikus" görbék elkülönítésével az infinitézimális számítás és a sorelmélet alapjait. Ugyanis a „geometriai" görbék érintő- és területszámítási feladataihoz elegendő volt az algebrai vagy az indivizibilia-módszer valamilyen formája.

A „mechanikai" görbéket azonban sorbafejtéssel kellett megoldani.

A görbék elméletének, az érintőszerkesztésnek, az indivizibilia-vizsgálatoknak, a sorbafejtésnek értelmes egésszé való összefogására volt szükség ahhoz, hogy később a függvényfogalom megszülethessen. Ez az összefogás a newtoni infinitézimális kalkulus.[73]

70 BECKER, O.: *Grundlagen der Mathematik in geschichtlicher Entwicklung*, Freiburg—München, 1954, 150.

71 BECKER, O.: *Grösse und Grenze der mathematischen Denkweise*, Freiburg—München, 1959.

72 RYBNIKOV, K. A.: „On the role of algorythmus in the history of mathematical analysis", *Actes du VIII^e Congrès International d'Histoire des Sciences*, Florence—Milan 3—9 Septembre 1956, Paris 1958, 142—145.

73 SERGESCU, P.: *Coup d'oeil sur les origines de la science exacte moderne*, Paris, 1951, 76—77.

III.

A „NEWTON-párti" észrevételek — amikből egynéhány példát idéztünk — nem sűrűsödtek olyan imponáló interpretációkká, mint az első részben ismertetett CANTOR—ZEUTHEN—TOEPLITZ—WHITESIDE vonal. A XX. századi matematikatörténetírás főáramlata érintőlegesen halad el a newtoni infinitézimális analízis mellett. Kétségkívül WHITESIDE jutott legmesszebb a newtoni matematika gondolatstrukturális előzményeinek a feltárásában, de épp ezek az előzmények a kelleténél jobban háttérbe szorítják NEWTON tettét.

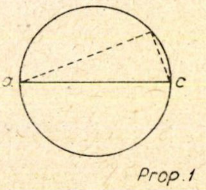
De a XX. század matematikatörténetírása még egy nagy „NEWTON-interpretációt" hozott létre, amelynek az ismertetése nélkül a kép nagyon hiányos lenne: a NEWTON-levelezés folyamatban levő kiadását. Az első kötet 1959-ben jelent meg, a harmadik 1961-ben, és 1694-ig öleli fel a NEWTON-levelezés anyagát.

H. W. TURNBULL, a kitűnő matematikatörténész irányította a kiadást, H. W. ROBINSON és J. F. SCOTT segítségével.

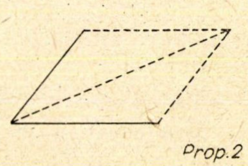
Az ADAM—TANNERY-féle DESCARTES kiadás mutatta legszebben, hogy egy ilyen nagy levelezés-kiadás egyben milyen hatásos interpretációt is jelent: a levelek összeállítási módja, a jegyzetek, az egyes részletek hangsúlyozása a századfordulón egészen új DESCARTES-képet teremtett, amelyik lényegében változatlan maradt JEAN LAPORTE nagy reinterpretációjáig.

Ugyanígy a NEWTON-levelezésből a newtoni infinitézimális analízis új képe bontakozik ki, ami meglehetősen eltér az első részben ismertetett interpretációs fővonaltól. Érthetően a WHITESIDE hatalmas kéziratismerettel megírt NEWTON-interpretációja jár legközelebb a *Levelezés* NEWTONához. De a *Levelezés*-ben előtérbe kerül az, amit WHITESIDE modern jelölési módja elhagyott: a newtoni matematika formavilága. S a newtoni formákban a WHITESIDÉnél modern ruhában megismert gondolatok is más jelentést nyernek.

A newtoni infinitézimálkalkulus genezise szempontjából döntő fontosságúnak kell tekinteni azt az 1666. máj. 16. keltezésű kéziratot, amit a levelezés kiadói 348. szám alatt közölnek. A címe: „Problémák mozgás általi megoldásához az alábbi hat propozíció szükséges és elegendő."[74]



9. ábra



10. ábra

Az első és második propozíció „mozgások" adott irányba eső komponensének a meghatározása, ill. mozgások összetevésének a törvénye. Már ez világosan mutatja a newtoni matematikai gondolkozás kapcsolatát BARROW-on keresztül a TORRICELLI-iskolához.

„Prop. 3. Egy önmagával párhuzamosan mozgó test minden pontja azonos (equall) mozgásban van.

Prop. 4. Ha egy test csak körmozgást végez valamely tengely körül, pontjainak mozgása úgy aránylik, mint tengelytől való távolságuk.

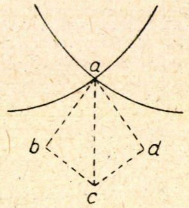
Nevezzük ezt a kétféle mozgást egyszerű mozgásnak."

[74] *The Correspondence of Isaac Newton* (továbbiakban Corr.) *Vol. III.* 1688—1694, *Ed. by* H. W. TURNBULL, Cambridge 1961, 348, A manuscript by Newton 16 May 1666.

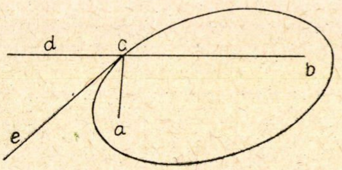
Az 5. propozíció azt mondja ki, hogy minden bonyolultabb „mozgást" ebből a két „mozgásból" kell felépíteni.

A 6. propozíció két egymást metsző görbe vonal „mozgását" analizálja ebben az értelemben: az *a* metszéspont által leírt harmadik görbevonal mozgásgeometriai adatait adja meg a két görbét *a* metszéspontjukban érintő *abcd* síkban.

A 7. propozíció a 6. propozíció algebrai megfelelőjét adja meg: hogyan kell kiszámítani két test *p* és *q* „mozgásai" közötti viszonyt, ha a két test által leírt *x* és *y* vonal közötti reláció egyenlete van megadva.



11. ábra



12. ábra

„Mozgás" alatt NEWTON a sebességgel arányos mennyiséget ért, s így a „mozgás"-meghatározások érintőmeghatározást jelentenek. Két példát hoz fel a fenti propozíciók illusztrálására. Az első: „Húzzunk érintőt az ellipszishez. Tegyük fel, hogy az ellipszist az *abc* zsinór (thred) írja le, és hogy *ce* az érintője. Mivel az *ac* szár ugyanakkora sebességgel csökken, mint amekkorával a *bc* nő, azaz a *c* pont egyforma mozgással mozog *a* és *d* felé, a *dce* és *ace* szögeknek egyenlőeknek kell lenni az első propozíció miatt: és ugyanígy a többi kúpszeletnél is."

A második példa, a nikodémészi spirális érintőjének a meghatározása, jóval bonyolultabb. Ez a példa megadja a geometriai és algebrai módszert is. A latin verzióban azonban hozzáfűzi, hogy a mechanikai görbék esetében az algebrai számítás cserbenhagy, csak a másik módszer használható.

Ez a kis írás a korabeli TORRICELLI—ROBERVAL—BARROW-féle mozgás geometria és a DESCARTES—HUDDE—SLUSE-féle algebraizált geometria egymás mellé helyezése, összeolvasztási kísérlete.

Meg kell figyelni, már most milyen következetesen kidolgozza a vonal és a vonal mentén történő „mozgás", más szóval a pálya és a sebesség — még más szóval: a görbe és az érintője közötti összefüggést. És ez az új, a jövő csírája: a görbét az érintője segítségével definiálja, erre való a hat propozíció. Már úgy adja meg a görbét, hogy legyen érintője, s ez a felfogás törli el a cartesiánus különbséget „geometriai" és „mechanikus" görbék között. Közös csoportba foglalhatókká lesznek „geometriai" és „mechanikus" görbék; az érintővel rendelkező görbék — a „differenciálható függvények "— csoportjába.

A matematikus olyan, mint a bűvész: csak azt tudja elővarázsolni a kalapból, amit előre beletett.

A matematikus is annál jobb bűvész, minél „kevesebből" minél többet elő tud varázsolni. S sajnos, NEWTON azt hitte, abban is követni kell a bűvészt, hogy az elővarázsolás módját a lehető legnagyobb titokban kell tartani.

A bűvészrecept adva volt; ha érintőt akarsz szerkeszteni, gondoskodjál róla, hogy görbéidnek legyen érintője. Csírájában már ebben az írásban meg van adva, mi biztosítja majd ennek a feltételnek (szükséges és elegendő — mondja a cím) a teljesülését: a folytonos mozgás. De explicite csak a *De analysi*-ben jelentkezik a feltétel, ahol a sebességet egy görbe alatti terület változásának a sebességére konkretizálja.

Ezáltal megad két mennyiséget, amelyek mindig kiszámíthatók egymásból. A két mennyiség: a görbe alatti *változó terület* s a terület változásának a *sebessége*. Mivel a görbét két mozgásból származtatja: egy abszcissza-irányú és egy ordináta-irányú mozgásból, a mozgás — területváltozás — sebessége éppen a két mozgásból összetevődő érintő abszcissza-tengelyhez való hajlását adja meg.

A két mennyiséget: változó területet és a területváltozás sebességét névvel látja el: „fluens" és „fluxió", s ezzel az új kalkulus megszületett. Többé nem szükséges a terület-képhez ragaszkodni, aminek a segítségével a *De analysi*-ben bizonyított, a nyert új mennyiségek egészen általánosak, s definiálási módjuk biztosítja, hogy — legalábbis elvben — egyik a másikból mindig számítható.

Az új módszert nagyon részletesen és logikusan ismertető *Methodus Fluxionum et Serierum Infinitarum* csak 1736-ban jelent meg nyomtatásban, jóllehet már 1671-ben készen volt, s barátai tudtak róla.

Egy 1692-ből származó feljegyzés mutatja, hogy NEWTON eljárása közismert volt Angliában, de nem közkedvelt. „A kitűnő Mr. NEWTON — írja a névtelen jegyzetkészítő — a fluxiók tanát két propozícióra redukálta: 1. megtalálni bármely fluens mennyiségeket tartalmazó adott egyenlet fluxióit és 2. a megfordítottja. Fluens mennyiségek alatt meghatározatlan mennyiségeket (indeterminate quantities) ért, azaz olyanokat, amelyek egy görbe (curve) mozgás (local motion) általi előállításában folytonosan nőnek vagy csökkennek (perpetually increase or decrease), fluxió alatt pedig a növekvésüknek vagy csökkenésüknek a sebességét (celerity) érti.

Jóllehet a fluens mennyiségek és fluxióik (flowing quantities & their fluxion[s]) első látásra nehezen felfoghatónak tűnnek (új dolgok felfogása mindig jelent bizonyos nehézséget), mégis ő úgy véli, hogy a fogalmuk (Notion of them) csakhamar könnyebb lesz, mint a momentumok vagy végtelen kis részeké, vagy végtelen kicsi differenciáké; mivel az alakzatoknak és mennyiségeknek folytonos mozgás (continued motion) által való előállítása sokkal természetesebb és könnyebben felfogható, és ennek a módszernek a sémái sokkal egyszerűbbek, mint a részekéi...

Minden görbe vagy bármely más fluens mennyiség abszcisszáját egyenletesen növekvőnek tekinti, és fluxióját egynek veszi; a többi fluens mennyiségek fluxióit maguk a mennyiségek felé írt ponttal jelzi következőképp: Tegyük fel, hogy v, y, x, z a fluens mennyiségek, akkor megfelelő fluxióik $\dot{v}, \dot{y}, \dot{x}, \dot{z}$-al jelölendők. És mivel ezek a fluxiók is meghatározatlan mennyiségek (indeterminate quantities) és folyamatos változással (perpetual mutation) nőnek vagy csökkennek, azokat a sebességeket, amelyekkel nőnek vagy csökkennek, ezek fluxióinak tekinti ..."[75]

Ez a mennyiségfogalom az új a newtoni kalkulusban. A módszer, ahogy fluensek között fennálló egyenleteknek a fluxióját meghatározza — az érintőszerkesztés módszere — 1670 körül már nem új, de nem is olyan régi és magától értetődő, amilyennek a matematikatörténészek szeretnék beállítani. A *Levelezés*-ből jól kitűnik, mennyire izgató kérdés a fiatal NEWTON kortársainak az érintőszerkesztés. Az a megoldás, amit NEWTON ad, egy messzeágazó nemzetközi fejlődés csúcsa.

[75] Corr. III, *394*, Newton's method of fluxions, 17 September 1692, 222–223.

Az olasz és a francia iskola eredményeit ötvöző MICHEL ANGELO RICCI tartja talán kezében a módszer kulcsát. Mikor magas egyházi funkciói miatt le kell mondania a matematikáról, RENÉ FRANCOIS WALTHER DE SLUSE, liège-i kanonok veszi át örökségét, és talál „váratlanul" egy módszert az érintő egyetlen aránnyal való kifejezésére. S ennek a segítségével — írja 1671 decemberében OLDENBURGnak — röviden és igen könnyen kapja meg ugyanazt az eredményt, amit régen nagy kerülőutakkal nyert. Ha „Isten életet és időt ad", reméli, hogy rövidesen elküldheti a megoldást. „De ami a jövőt illeti, Isten térdein nyugszik az; én még pyrrhoszi módra semmit sem szögezek le."[76]

1672-ben közli SLUSE „rövid és könnyű" módszerét a *Philosophical Transactions*-ban a geometriai görbékhez való érintő szerkesztésére. A következő évben módszert közöl mindenféle görbéhez való érintőszerkesztésre.

Az ő módszere éppúgy nem vált közkedveltté, mint a NEWTONÉ.

És mint a JAMES GREGORYé, aki SLUSE geometriai görbékhez való érintőmódszeréről megírja COLLINSnak, hogy az semmi egyéb, mint amit ő, GREGORY „FERMAT-módszernek" nevez, s ami voltaképpen az a módszer, amit NEWTON használ a *De analysi*-ban.

A kortársak se rendelkeztek sokkal biztosabb elképzelésekkel a kalkulus születéséről, mint mi.

Még COLLINS sem, akinek a kezében az erre vonatkozó levelezés jórésze összefut, s akivel NEWTON is szabadon közli felfedezéseit. Legalábbis ami az eredményeket illeti. A módszer tekintetében tartózkodóbb.

JAMES GREGORY sem ismerte NEWTON „Univerzális módszerét", aminek a segítségével a legkülönfélébb geometriai és mechanikai görbék problémái: érintőszerkesztés, ívhosszmeghatározás, görbék alatti terület meghatározása, adott érintőirányokhoz görbeszerkesztés stb. megoldhatók. De sejtette, hogy NEWTON módszere, éppúgy mint az övé, „tetszőleges" egyenletnek végtelen sorbafejtéséből áll. „Nagyon szeretném megismerni Mr. NEWTON módszerét, amellyel kéttagú egyenleteket végtelen-sorrá alakít... Én bármely egyenletet végtelen-sorrá tudok alakítani... Van egy módszerem, amivel a geometrikus problémákat (legalábbis amiket eddig tárgyaltam) végtelen-sorba tudok átvinni", s közöl COLLINSsal számos fontos példát.[77]

GREGORY példái mutatják: körülbelül ugyanott tart, ahol NEWTON a *De analysi*-ben. Tudja, hogyan kell hatványokból összetett, többtagú kifejezéseken könnyen elvégezni azokat a műveleteket, amik érintőszerkesztéshez, maximum-minimum meghatározáshoz, ívhosszszámításhoz, területszámításhoz, érintőből való görbemegszerkesztéshez és kvadraturához szükségesek. Másrészt tudja azt, hogyan kell egy „tetszőleges" görbét megadó összefüggést végtelen hatványsorban kifejezni.

Harmadszor: tudja, hogy — a kor legnagyobb matematikusa Dr. BARROW, akinek a műveit tanulmányozni, módszereit követni kell. Így pl. teljesen a BARROW klasszikus geometriai modorában, a *Lectiones geometricae* egy területmeghatározásra vonatkozó próblémájának a megfordításán töri a fejét.[78] „Ez a probléma

[76] Corr. I, *27*, Sluse to Oldenburg 17 December 1671, 71.

[77] Corr. I. *20*, Gregory to Collins 23 November 1670, 46—47.

[78] Corr. I. *18*, Gregory to Collins 5 September 1670, 41—42, 4. jegyz.: hogyan kell egy *KL* görbe alatti *AKLD* terület segítségével meghatározni egy *ANMB* görbét úgy, hogy a görbe érintője bizonyos előre megadott feltételeknek tegyen eleget. Mai nyelven keresendő az $y^2[1+(dy/dx)^2]=X$ differenciálegyenlet megoldása, ahol X az x adott függvénye.

— írja COLLINSnak 1670-ben — (ha megoldható) úgy képzelem, hogy túlvinné a geometriát jelen állapotán; de oly sok nehézséget látok benne, hogy én magam reménytelenül állok vele szemben, s ezért szerényen kérdem, nem tudná-é másvalaki megoldani. Szeretném látni Mr. NEWTONnak azt a munkáját, amelyik minden görbére, általánosan alkalmazható. Valóban azt hiszem, hogy Mr. BARROW XIII-ik felolvasása annyira tökéletesítette az analitikát (analytics), hogy kevés adható általánosságban hozzá."[79]

BARROW felveszi a kesztyűt; GREGORY „szerénységét" se kell egészen komolyan venni, s mind a ketten adnak a problémára egy-egy klasszikus geometriai stílusban tartott, nehéz megoldást.

A jövő fejlődés szempontjából épp az ilyesféle fordított érintőfeladatok és a terület változásából a görbe menetére vonatkozó kérdések a legfontosabbak. De nem a BARROW nyomán.

A BARROW-féle geometriai módszer ebben a tekintetben különösen nehézkes, a végtelen sorokba való fejtést még szülőhazájában, Angliában sem nagyon értik.

Kétségkívül COLLINS az egyik legjobban tájékozott matematikus a kialakulóban levő sorelmélet és infinitézimális számítás területén. NEWTON munkáját is ő ismeri talán legjobban: „...Dr. BARROW révén sikerült azóta pár új sort szereznem NEWTON általános módszeréből, s vele való megbeszélésből tudom, hogy azok bármely alakzat (figure) adott tulajdonságaiból analitikusan (ti. algebrai úton) származtathatók, és hogy minden figurára sok sor alkalmazható, és hogy egyaránt képes kvadrálni azokat a görbéket, amelyeket DESCARTES geometriaiaknak tart, és azokat, amelyeket mechanikusaknak, ezért ezzel a módszerrel minden olyan figurának, amelyek közös tulajdonsággal bírnak, a görbe vonalai kiegyenesíthetők, érintőjük és súlypontjuk meghatározható, forgástestjük is és annak második szegmentuma mérhető és minden görbénél megadható a görbe vonal egy ívhosszához tartozó ordináta és megfordítva."[80]

Ekkor COLLINSnak már birtokában volt a *De analysi*, s a *Levelezés* kiadói szerint épp ezt beszélte volna meg BARROWval.[81]

NEWTON új módszeréről mindenki a legnagyobb elismeréssel nyilatkozik, ő maga mégis a *Principiá*-ban, amint azt minden tudománytörténész illőnek tartja szemére vetni, nem a saját fluxiós módszerét, hanem az „elavult" geometriai módszereket alkalmazza.

Valóban egyedülálló szituáció. Felfedezi a „természet" leírására szolgáló kitűnő módszert, s amikor a „természet" addig páratlan tökéletességű matematikai leírását adja, nem alkalmazza ezt a módszert.

Azonban ő maga és kortársai nem érezték ezt az „anakronizmust". Sőt: egyik legnagyobb angol matematikus — ha ugyan nem a legnagyobb — JAMES GREGORY zavartalanul alkalmazza egymás mellett a „haladó" sorelméleti matematikáját, s az „elavult" BARROW-féle geometriai módszereket. EDMUND HALLEY, aki szintén nem mindennapi matematikai tehetség volt, kizárólag az „elavult" módszereket alkalmazza, s amikor NEWTON nagy és tisztelt barátjának, LOCKEnak a *Principia* lényegét meg akarja magyarázni, nem a fluxiós módszert, hanem az „elavult" geometriai módszert alkalmazza, ugyanazt, amit a *Principiá*-ban.

[79] Uo. 41.
[80] Corr. I, *22*, Collins to Gregory 24 December 1670, 54.
[81] Corr. I, 59, 14. jegyz.

S ugyanakkor ő is, kortársai is nagyon nagyra becsülték a fluxiós módszert, egyébként nem vívtak volna késhegyig menő harcot a leibniziánusokkal a prioritásért.

Nem látunk *mi* kiengesztelhetetlen ellentétet ott, ahol a korabeli Anglia és maga NEWTON semmi ellentétet nem látott? A „haladó" és „elavult" megkülönböztetését kérjük számon egy olyan koron, amelyik számára ennek a megkülönböztetésnek semmi értelme sem lehetett?

HUYGENS végig az „elavult" matematikai módszerekkel dolgozva lett kora legnagyobb matematikusa, JAMES GREORY nem szünt meg BARROWot csodálni, BARROW nem szűnt meg EUKLIDÉSZT és APOLLÓNIÓSZT csodálni, DAVID GREGORY, aki egész fiatalon kerül az öreg NEWTON mellé, ezt az „elavult" módszert tanulja meg és viszi tökélyre, ebben dolgozik ROGER COTES, a *Principia* második kiadásának készítője...

S amikor JOHANN BERNOULLI meggyanúsította NEWTONt, hogy a *Principia* egy hibáját saját fluxiós elméletének hibája miatt követte el, az öreg NEWTON fölényesen utasítja vissza az ifjú óriást: a hiba közönséges számolási hiba, a tétel bizonyításának semmi köze a fluxiós számításhoz, s rögtön megadja a helyes bizonyítást — „elavult" geometriai módszerekkel.[82]

Láttuk, hogy már egy egészen korai NEWTON-kéziratban fel lehet ismerni a fluxiós elmélet csíráit.

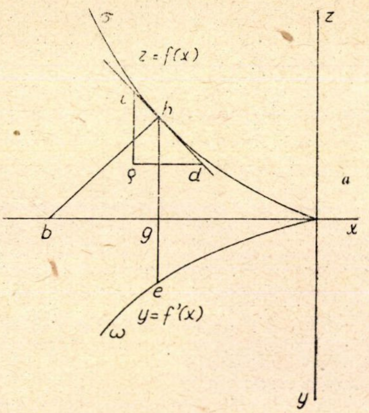
Egy még korábbi, valószínűleg még 1664-ből származó kézirat viszont a „régi" geometriához csatlakozva vezet a *De analysi*... „új" analitikája felé.

A kézirat a cambridge-i egyetemi könyvtárban őrzött ún. *Commonplace Book*-ból származik, már BREWSTER beszámolt róla, SCHOOTENból és WALLISból készített jegyzetek között helyezkedik el. Címe: „Kvadrálható görbe vonalak kvadrálására szolgáló módszer."[83]

A következőt állítja: Legyen adva egy σha görbe. Szerkesszünk egy másik $ae\omega$ görbét úgy, hogy minden ge ordinátája az előbbi görbe érintőinek $\frac{i\varrho}{\varrho d}$ gradienseivel legyen arányos. Akkor az ae görbe alatti aeg terület a ha görbe megfelelő gh ordinátájával lesz arányos.

Vagy modern nyelven elmondva: Ha adva van egy $z=f(x)$ görbe és a hozzátartozó $y=f'(x)=\frac{dz}{dx}$ derivált görbe, akkor $\int f'(x)dx=z$.

A bizonyítás egyszerű: Az $ae\omega$ alatti görbét beosztja az $\frac{i\varrho}{\varrho d}$ gradiensekhez tartozó téglalapokra,



13. ábra

a beosztás számát végtelenül növeli, s közben — implicite — felhasználja az $i\varrho d$ háromszögnek azt a tulajdonságát, hogy oldalainak aránya a háromszög bármeddig való kisebbítésében sem változik, mert a hb normális által megadott hgb háromszögből (egymásra merőleges oldalak) számítható.

[82] HALL, A. R.: „Correcting the Principia;", *Osiris*, *13*, 291—326, 1958.
[83] Corr. II, *190*, A manuscript by Newton? 1644, 144—167.

A „karakterisztikus háromszög" — legalább 10 évvel LEIBNIZ előtt. S a „BARROW-féle" fundamentális tétel 6 évvel BARROW előtt.

Mint a *Levelezés* kiadói megjegyzik, „valószínűleg" ez a fundamentális tétel legelső kimondása és bizonyítása. Utána GREGORY (*Geometriae pars universalis* 1668, prop. 6.) és BARROW (*Geometricae lectiones* 1670, Lecture 10) mondják ki, s maga NEWTON újra, a *De analysi*-ben (1669) kevésbé frappánsan.[84]

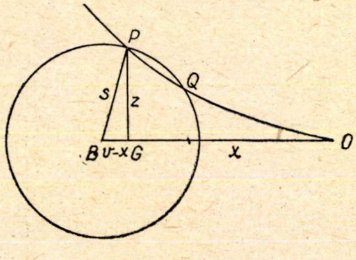
NEWTON két példát ad a módszerre: Legyen egy vonal alatt levő terület egyenlete $\frac{x^3}{a}$, ill. $\frac{a^3}{x}$. Mik a megfelelő görbevonalak? — NEWTON felállít két, az érintési feltételeknek eleget tevő egyenletet, az egyenleteket HUDDE módszerével „differenciálja", s a nyert egyenlet adja meg a fenti tétel értelmében a keresett görbét, ami az egyik esetben egy parabola, a másik esetben hiperbola.

Később a HUDDE-féle módszer helyett a FERMAT-módszert használja, míg a *De analysi*-ben ki nem alakítja a saját, binomiális-tételen és fluxiós felfogáson alapuló „differenciálási" módszerét. A példákkal kapcsolatban a *Levelezés* kiadói megjegyzik, hogy részben még a jelöléseket is DESCARTES *Géométrie*-jének (1637) második könyvéből, ill. a SCHOOTEN-féle *Geometria a Renato Descartes* (Leyden 1649) 46. lapjáról vette.

Ugyancsak DESCARTES érintőmeghatározásából származik az a hatodfokú egyenlet, amit a példákban felhasznál. „DESCARTES egy $B(v, 0)$ pontból úgy találja meg a normálist, hogy egy B középpontú, s sugarú kört húz, aztán s-et úgy választja, hogy P és Q, a két metszéspont, egybeessen; úgy, hogy az x-ek megfelelő értékei is egybeessenek.

Ha $z = \frac{x^3}{a^2}$, akkor a BPG háromszögből $s^2-(v-x)^2 = z^2$, ahol s és v konstansok. Innen NEWTON x-ben hatodfokú egyenletei"[85]

Csak a hatodfokú, ill. négyzetes, az érintési feltételt biztosító egyenlet származik a *Géométrie*-ből? Nyilvánvalóan nem. A módszer egész „szelleme", „stílusa" mélységesen cartesiánus: DESCARTES módjára tesz át egy geometriai problémát algebria egyenletekbe; az érintési feltételt mint az egyenlet két gyökének az egybeesését — nem mint a szelő „határhelyzetét"! — adja meg. Ezért is használja a HUDDE-féle cartesiánus módszert. Cartesiánus abban is, hogy a tétel bizonyításában az érintőket kezdettől fogva a normálisokkal határozza meg, a szerkesztés a normálisok (és a rájuk merőleges érintők) változatlanságára van felépítve, ezek rögzítettek az indeterminált területbeosztás mellett is.



14. ábra

Modern és régi, newtoni és cartesiánus között a választóvíz nem az infinitézimális kalkulus. DESCARTES „infinitézimális-fóbiája" — már TANNERY felismerte — épp olyan mese, mint a görögöké. S bizonyos tekintetben DESCARTES „differenciálási" módszere modernebb, mint a NEWTONÉ és főleg a LEIBNIZÉ, és szigorúbb, mint utána CAUCHYig bármi.

[84] Corr. II, 167, 2. jegyz. (A jegyzet jelzései a kiadók és NEWTON ábráihoz képest z-t és y-t felcserélik.)

[85] Corr. II, 167, 4. jegyz.

És DESCARTES módszerei jobbak, pontosabbak, matematikusabbak, mint előtte és két évszázadig utána bármi. DESCARTES olyan tökéletes, mint ARKHIMÉDÉSZ és EUKLIDÉSZ. Egyetlen dolog hiányzik DESCARTESból: a folytonos változás, a mechanikus mozgás matematikai elismerése. Nem a felismerése. DESCARTES felismeri, s éppen ezért tiltja a „mechanikus" görbéket. Felismeri — és eltiltja, miután ő maga ad kezelhetőségükre néhány ragyogó példát.

NEWTON, JAMES GREGORY és LEIBNIZ nem az infinitézimális számítást teremtik meg, hanem bemerészkednek a tiltott területre a fizika, a matematika és a metafizika nevében.

Ezért lesz háromféle infinitézimális kalkulus: egy fizikai, egy matematikai és egy metafizikai.

Ez a prioritásvita „stílustörténeti" háttere: ha feldobom, differenciál, ha leesik, fluxió, de voltaképpen végtelen-sorbafejtés.

És ha nagyon-nagyon szigorú akar lenni az ember, olyan, mint a hollandiai francia kóborlovag, akkor az egész tojásbűvészetből nem marad semmi, csupán egy egyenletrendszer determinánsának a zérussal való egyenlővé tevése... Nem egy modern algebrában járatos differenciálgeométer fedezte fel, hogy a differenciálhányados voltaképpen egy sajátos „leképezés"? — Nem. Monsieur DESCARTES.

Nagy Mesterét — az egész XVII. század nagy mesterét — követte itt is ISAAC NEWTON. — Egyben nem követi: a tényleges számolással szembeni ellenszenvben. NEWTON szabadon dolgozik a számokkal és a számokat jelentő betűkkel.

Ugyanannak a *Commonplace book*-nak egy következő helyén, ahonnan az előbbi kézirat származik, egy valószínűleg 1664 végéről vagy 1665 elejéről származó bejegyzésben többek közt megtalálható a *De analysi* fő, kezdő propozíciója:

„Legyen $ab=x$ és $y=be$, akkor: ... Prop.: 3 ... Ha $a^n x^m = b^n y^n$, vagy $\frac{ax^{\frac{m}{n}}}{b} = y$, akkor $\frac{nxy}{n+m} = \frac{n\times a\times x^{\frac{m+n}{n}}}{nb+mb} = abef$, azaz az aef vonal alatt levő terület ..."

A bizonyítás teljesen a CARTESIUS—HUDDE-féle módszerekkel történik, mint a fenti példában. A nagy újság a törtkitevő megjelenése.

Igen fontos a következő propozíció, ami a kvadratura tagonkénti elvégzésének a lehetőségét mondja ki:

„Prop: 4. Ha $y=ax^m+bx^n$, akkor $\frac{ax^{m+1}}{m+1}+\frac{bx^{n+1}}{n+1}=abcf$..."[86]

Egyre inkább haladunk a módszer számolási szabályainak a rögzítése és egységesítése, algoritmizálása felé.

A következő propozíciók (Prop. 5.—Prop. 8.) a binomiális tételt mondják ki $(a+b)^{\frac{m}{n}}$ és $(a+b)^{-\frac{m}{n}}$-re, a binomiális koefficiensek megadásával.

NEWTON a LEIBNIZhoz intézett híres *Második levelé*ben mondotta volt el a binomiális sor felfedezésének a részleteit, s azóta számtalanszor idézték, hogyan jött rá WALLIS eredményeinek az interkalálásával a binomiális tételre: ...Sub initio studiorum meorum Mathematicorum ubi incideram in opera Celeberrimi Wallisij nostri...[87]

[86] Corr. II, *191*, A manuscript by Newton ?1665, 168.

A *Levelezés* kiadói szerint többek között a N° 191 alatt közölt[88] kézirat lehetett az, amire NEWTON a LEIBNIZhoz írt *Epistola Posterior*-ban mint a binomiális tétel felfedezésére hivatkozik.[89] Ugyanott röviden megadják, milyen interkalációs táblákat adott meg NEWTON az $(1-x^2)^n$ egész n kitevőjű görbék alatti területek formuláinak a segítségével az $(1-x^2)^{\frac{m}{n}}$ törtkitevőjű görbék alatti területekre.

A binomiális tételhez természetesen nem elegendő a WALLIS-féle kvadraturák „induktív" általánosítása, hanem elengedhetetlen az ugyanezen kéziratban közölt 4. és 3. propozíciók, valamint a fundamentális tétel alkalmazása is.

A binomiális tétel komplex és sok forrásból táplálkozó matematikai fejlődés eredménye: a cartesiánus geometriának legalább annyi része van benne, mint „Celeberrimi Wallisij nostri"... S még valaminek. NEWTON így fejezi be az $(a+b)^{\frac{m}{n}}$ és $(a+b)^{-\frac{m}{n}}$ sorbafejtésének az ismertetését: „Ennek a két propozíciónak az igazsága így is bizonyítható. Ha $(a+b)^{-\frac{1}{1}}=\frac{1}{a+b}$, akkor 1-et elosztom $(a+b)$-vel, mint a tizedestörteknél és az $\frac{1}{a}-\frac{b}{aa}+\frac{bb}{a^3}-\frac{b^3}{a^4}+\frac{b^4}{a^5}$ &c hányadost kapom, amint mindkét oldalt $(a+b)$-vel szorozva kitűnik. Ugyanígy (a^2+b)-ből úgy vonok gyököt, mintha tizedesszámok lennének, & $\sqrt{a^2+b}=a+\frac{b}{2a}-\frac{bb}{8a^3}+\frac{b^3}{16a^5}$ &c-ra jutok, ami szintén igazolható a két oldal négyzetre emelésével."[90]

Nyilvánvaló, hogy ugyanazzal a számolási készséggel, ugyanazzal az algoritmusokba vetett bizalommal állunk itt szemben, amit CANTOR a MERCATOR nagy újításának tartott.

Amit megtalálunk OUGHTREDben, COLLINSban, GREGORYban, MERCATORban; az angol matematikusok nagy részében. És ami nincs meg a cartesiánusokban. NEWTONban valóságos számolási dühhé fokozódik a hatvanas években. Mindent ki akar számolni: azt a hatást, ami a Föld egyenlítőjén a Föld forgása következtében emeli a testeket, azt a *conatust*, amivel a Föld a Holdat mozgatja maga körül és a Földet a Nap maga körül, az eső test pályáját, ha az parabolikus, az inga „mozgását". — GALILEIből a számpéldákat veszi ki, és végigszámolja, amit az csak elgondolt... Meghagyja az itáliai mértékegységeket, majd áttér angolra — nem a mértékegység, hanem a szám fontos, a tetszőleges pontosságig kiszámítható tizedestört...[91]

A betűkben kijelölt műveletek éppúgy elvégezhetők, mintha közönséges számok lennének, közönséges véges vagy végtelen tizedestörtek. És ha így tekintjük őket, akkor megszűnik a descartesi tilalom a „mechanikus" problémák iránt. Éppúgy tetszőleges pontosságig elvégezhetők lesznek azok is, mint pl. egy osztás, amelyik végtelen tizedestörtre vezet.

A „szám" nem egész és nem racionális tört, a „szám": végtelen tizedestört. A XVII. század közepi Angliában a „levegőben van" ez a nagy fontosságú tétel. Szá-

[87] Corr. II, 111.
[88] Corr. II, *191*, 168–171.
[89] Corr. II, *191*, 170, 1. jegyz; *188*, 150, 10. jegyz.
[90] Corr. II, 170.
[91] Corr. III. *347*, A manuscript by Newton ?1665 or 1666, 46–54.

moló mesterek és kereskedők, pénzváltók és hajóskapitányok egyaránt használják a tizedestörteket, a számolás könnyű velük, elterjed, bizalmat ébreszt maga iránt, minden kiszámíthatóvá válik: nyereség, halálozás, szaporodás, kamat.

Minden kiszámítható: a végtelen tizedestörtek varázsának a formulák sem állhatnak ellen, a végtelen tizedestörtek mintájára gyerekjáték lesz egy csak kijelölt osztást végtelen sorba törni. Egyszerre, mintegy varázsütésre születnek NEWTON, MERCATOR, JAMES GREGORY, LORD BROUNCKER, JOHN COLLINS kezén a 60-as évek végén, 70-es évek elején a szebbnél-szebb sorbafejtések: körterületre és körívre megadott sorok, a hiperbola alatti területre megadott sorok, a logaritmikus sor, a sinus sor, a cosinus sor és így tovább...

És a sorokkal megadott összefüggések azonnal elvesztik titokzatos „mechanikus" tulajdonságaikat, a sorokkal megadott görbék azonnal kvadrálhatók, rektifikálhatók, tanulmányozhatók érintő-tulajdonságaik, szembetűnnek olyan hasonlatosságok, amelyekre a „mechanikus" definícióban gyanakodni se lehetett.

Érthető, ha JOHN COLLINS olyan szenvedélyes végtelen sor gyűjtővé, és JAMES GREGORY olyan szenvedélyes végtelen sor előállítóvá válik.

A végtelen sor, speciálisan a binomiális tétel, ad lehetőséget az érintőszerkesztés és kvadratura minden „geometriai" és „mechanikus" megkülönböztetéstől független megalapozására. Ezt végzi el NEWTON a 60-as és 70-es évek fordulóján, ezzel nyit utat egy új világba: a „mechanikus" görbék vizsgálatának a tiltott paradicsomába.

Érthető, ha öreg korában a binomiális tételt vágyott a sírkövére vésetni.

A végtelen sorban való kifejezés adta meg a lehetőségét annak, hogy a „mechanikusan", mozgás által létrehozott görbékkel ugyanúgy bánjon, mint a „geometriai" görbékkel. De ehhez a területet folytonos folyás útján keletkezőnek kell tekinteni, s a folytonos folyást reprezentáló kis o momentummal megnövelt mennyiségeket sorbafejteni.

A 60-as évek végén, 70-es évek elején a sorok látszanak a királyi útnak a matematikához. S talán csak JAMES GREGORYban és ISAAC NEWTONban, a sorelmélet két nagy elindítójában ébred fel a kétely: milyen pontosan írja le, közelíti meg egy sor a szavakban és geometriai jelekkel vagy mechanikai módon definiált összefüggést?

NEWTON egy 1670 elejéről származó levelében egy speciális sorbafejtési probléma során kísérletet tesz a megközelítés következtében előálló hiba megbecsülésére. A becslés nem általános érvényű, azonban arra mutat, hogy NEWTON milyen nagy súlyt helyez az „igazság"-hoz leginkább „konvergáló" sor megtalálására.

Ezek az ő szavai: a probléma kétféle megoldását adva, a második sorbafejtés után megjegyzi: „A haladványban minden második tag hiányzik, és így sokkal inkább konvergál az igazsághoz, mint az előbbi." Majd újra, a hiperbola alatti területre egy új sort előállítva, amely sorban „minden második tag hiányzik, és x felével kisebb mint egyébként lenne, ami a sort konvergálóbbá teszi az igazság felé". (Wich makes ye series more converging toward ye truth.)[92] Könnyű ma megállapítani, hogy a sorok nem az „igazság", hanem a limesük felé konvergálnak. Egyébként az, hogy becslést végez, mutatja: NEWTON is ilyesmire gondolhatott...

Mégis a határérték matematikai megfogalmazása előtt a sorelmélet bizonytalan marad, s nem alkalmas arra, hogy az infinitézimális számítást — mint majd a XIX.

[92] Corr. I, 9, Newton to Collins January 1669/70, 18.

század teszi — reá alapozzák. A sorelméletnek éppúgy csak a prehistóriája kezdődik a XVII. században, mint a „korpuszkuláris filozófiának". Mind a kettő jellegzetesen XIX. századi eredmény, egzakt sorelmélet és statisztikus mechanika.

De az infinitézimális kalkulus a maga módján a XVII. században sem primitívebb, mint a XIX. vagy XX. században. Mint ahogy EUKLIDÉSZ vagy ARKHIMÉDÉSZ se lesz „primitívvé" soha. A sorokról a XIX. század sokkal többet tud, mint a XVII. század. Az infinitézimális számítás alapfogalmairól csak mást. Megváltozik a matematikai kifejezésmód, a stílus, de a lényeg: az integrálás- és differenciálásnak, mint inverz műveleteknek a felfogása, a „folytonosság" és a „szakaszonkénti monotónia" biztosítása megvan a XVII. században is.

Nem naívság folytonosságról beszélni a függvény és a határérték fogalma nélkül? Hogy lehet a határérték nélkül definiálni a folytonosságot? Nos, a differenciálhatósággal. A differenciálható függvények feltétlenül folytonosak. S hogyan lehet biztosítani, hogy csak ilyen „függvények" forduljanak elő a matematikában? A fluenseket kell matematikai mennyiségeknek tekinteni, amelyekhez definíciószerűen hozzátartoznak fluxióik, az „idő szerint vett parciális differenciálhányadosaik".

S így eltűnik a nagy ellentét a klasszikus geometriai és modern analitikus módszer között. A fluens-fluxió definíciója biztosítja, hogy akár a fluxiós módszerrel, akár a geometriai módszerekkel nyert eredmények — legalábbis elvben — mindig kiszámíthatók, úgynevezett „mechanikus" problémák esetében is. Legfeljebb a kiszámítás nem lesz egészen pontos. Meg kell elégedni bizonyos pontossági határral, mint a végtelen tizedestörtekre vezető számítások esetében.

„Ellentét" a *Principia* elején bevezetett fluens-fluxió definíciók és a későbbiekben alkalmazott „elavult klasszikus geometriai" módszerek között? Ezt az „ellentétet" a XIX. század érzi, nem a XVII. NEWTON nyugodtan alkalmazza a korabeli Anglia számára megszokott és így egyszerűbb módszereket, annál is inkább, mert a *Principiá*-ban elsősorban kúpszeletekről van szó, ahol ezek a módszerek egyébként is helyénvalóak. S a *Principa* bevezetésében nemcsak az új fluxiós módszerének a körvonalait fejti ki, hanem röviden utal arra is, miként alkalmazhatók az új módszer lényegét jelentő határátmenet-eljárások a klasszikus geometria formuláiban is. Így a *Principia* klasszikus geometriai megfogalmazásai át vannak itatva az új infinitézimális számítás fogalmaival, s mi sem lesz könnyebb, mint a következő században átírni őket a kalkulus megfelelő analitikus formanyelvére. A *Principia* nem az infinitézimális módszereket kerüli, hanem a cartesianus algebrai jelölési módot. Ez annál feltűnőbb, mert NEWTON a fluxiós módszer kialakításakor, mint láttuk, teljesen szabadon bánt az algebrai jelölésmóddal. Miért nem alkalmazta hát a *Principiá*-ban?

A kérdés ilyen formában feltéve semmivel sem lesz könnyebben megválaszolható, mint a megszokott alakjában. Ha választ akarunk kapni a kérdésre, először is pontosan meg kell vizsgálnunk a *Levelezés* alapján a *Principia* keletkezési körülményeit. Ezt kísérli meg egy következő dolgozatunk.

(Beérkezett: 1963. XII. 15.)

A KÜLFÖLDI SZAKIRODALOMBÓL

AZ AUTOMATÁK ABSZTRAKT ELMÉLETE (II)*

Írta: V. M. GLUSKOV

3. §. Az események előállítása a véges automatákban. Az eseményeken értelmezett műveletek

Az előző paragrafusban az eseményeknek a kimenő jelekkel való előállítását vizsgáltuk. A *Moore*-féle automaták esetében (amelyeknél a kimenő jel egybeesik az állapotnak a jelével) azonban sokkal kényelmesebbnek mutatkozik néhány más eljárás az események előállítására, elsősorban az eseményeknek az automaták állapothalmazaival történő előállítása.

Legyen A tetszőleges automata, és p tetszőleges nem üres szó A bemenő ábécéjéből. A továbbiakban azt mondjuk, hogy az A automata a p bemenő szó hatására valamilyen a állapotból a b állapotba kerül át, ha b annak az állapot szónak utolsó betűje, amelyet az a állapot rendel hozzá a p bemenő szóhoz (lásd 1. §). Azt az állapotot, amelybe az automata az a állapotból a p bemenő jel hatására átkerül, ap-vel fogjuk jelölni. Ha $p=x_1x_2...x_k$, akkor az $a_k=ap$ állapotot az $a_1=\delta(a, x_1)$, $a_2=\delta(a_1, x_2), ..., a_k=\delta(a_{k-1}, x_k)$ állapotok segítségével lehet definiálni, ahol $\delta(a, x)$ az A automata átmeneti függvénye. Az e üres szó esetén természetesen az automata tetszőleges a állapotból ugyanabba az a állapotba kerül.

Ebben és a következő paragrafusban kizárólag csak iniciális automatákat tekintünk, azaz rögzített kezdő állapottal rendelkező automatákat. Megállapodásszerűen azt mondjuk, hogy az iniciális automata a p bemenő szó hatására az a_0p állapotba kerül át, ahol a_0 a tekintett automata kezdő állapotát jelöli.

12. DEFINÍCIÓ: Azt mondjuk, hogy az $\mathfrak{X}$ ábécéjű S esemény az A iniciális automatában elő van állítva állapotainak M halmaza által, ha az A automata bemenő ábácéje azonos $\mathfrak{X}$-szel, az S esemény pedig azokból és csak azokból a szavakból áll, amelyek az automatát a kezdő állapotból azokba az állapotokba viszik át, amelyek az M halmazhoz tartoznak.

Ez a definíció egybeesik az események előállításának JU. T. MEDVEGYEV [17] dolgozatában levő definíciójával. A *Moore*-féle automaták esetére ez a definíció ténylegesen az események előállításának ugyanahhoz a fogalmához vezet, mint a 11. definíció.

Legyen ugyanis az S esemény valamilyen A *Moore*-féle iniciális automatában az y kimenő jel által előállítva. Jelöljük M-mel az A automata összes olyan állapotának a halmazát, amelyek az y jellel vannak megjelölve. Ha $p=x_1x_2...x_k$ tetszőleges szó az automata bemenő ábécéjében, $a_1a_2...a_k$ állapot-szó és $y_1y_2...y_k$ olyan kimenő szó, amelyet az A automata a p szó révén a kezdő állapothoz rendel hozzá, akkor

* Абстрактная теория автоматов, *Успехи Математических Наук*, *16* (1961) 1—62. A fordítás első része, mely a cikk 1—2. §-át és a teljes irodalomjegyzéket tartalmazza a III. Oszt. Közl. XIII. kötet 3. számában (287—309. old.) jelent meg.

az automata $\mu(a)$ jel-függvénye definíciója szerint nyilván $\mu(a_k)=y_k$ érvényes. Következésképpen egy p nem üres bemenő szó akkor és csak akkor tartozik az S eseményhez, ha az automatát a kezdő állapotból az M halmazban levő állapotok egyikébe viszi át. Ha az M halmaz tartalmazza az automatának a kezdő állapotát, akkor az általa előállított S' eseményben benne van az üres szó is, amely nyilván nem lehet benne az S eseményben. Ilyen módon az S és S' események, eltekintve az üres szótól, egybeesnek.

Fordítva, az S esemény legyen előállítva az A kezdő automatában az állapotok M halmaza segítségével. Az A automata jel-függvényét az M halmaz összes állapotain y_1-nek, az összes többi állapoton pedig y_2-nek véve, tekintsük az A automatában az y_1 kimenő jel által előállított S' eseményt. Miként korábban is, azt kapjuk, hogy a p nem üres bemenő szó akkor és csak akkor tartozik az S' eseményhez, ha az S eseményhez is hozzátartozik. Ha az M halmazban benne van a kezdő állapot, akkor az S esemény tartalmazza az üres szót, amely nem lehet benne, magától értetődően, az S' eseményben. Ilyen módon az S és S' események, eltekintve az üres szótól, egybeesnek.

Ezzel bebizonyítottuk a következő

13. TÉTELT: *Ha az S esemény az A Moore-féle iniciális automatában az y kimenő jel által elő van állítva, akkor ez az esemény, (esetleg az üres szóval kiegészítve) előállítható ugyanabban az automatában az összes olyan állapotnak a halmazával, amelyek az y kimenő jellel vannak megjelölve. Ha az S esemény az A iniciális automatában az állapotok M halmazával elő van állítva, és az A automata jel-függvényét úgy definiáljuk, hogy az az y értéket az M halmaz összes állapotain és csakis ezeken az állapotokon vegye fel, akkor olyan Moore-féle iniciális automatát kapunk, amelyben az S esemény az y kimenő jel által elő van állítva (eltekintve esetleg az üres szótól, ha az S-ben előfordul).*

A bebizonyított tétel lehetővé teszi azt, hogy az események előállítása vizsgálatánál csupán az állapotok halmazaira korlátozódjunk. Ekkor az automata kimeneti függvényei semmiféle szerepet nem játszanak. Ezzel kapcsolatban, ebben a paragrafusban „automata" elnevezésen kimenő jelek nélküli iniciális automatákat értünk, amelyek csak átmeneti függvényekkel vannak megadva.

A megelőző paragrafusban bebizonyítottuk, hogy a végtelen (speciálisan a szabad) automatákban tetszőleges események előállíthatók. A véges automaták esetére, amelyeket a jelen paragrafusban vizsgálunk, másképpen áll a dolog. Már egészen egyszerű halmazelméleti megfontolásokból is világos, hogy kell olyan eseményeknek létezniök, amelyek nem állíthatók elő véges automatákban.

Valóban, tetszőleges, rögzített, véges, nem üres $\mathfrak{X}$ ábécéhez a páronként nem izomorf és az állapotokra nézve véges $\mathfrak{X}$ bemenő ábécéjű halmaza megszámlálható. Az ilyen automaták bármelyikében az eseményeknek csak véges halmaza állítható elő. Ezért az $\mathfrak{X}$ ábécéjű eseményeknek az a halmaza, amely véges automatákban előállítható, megszámlálható halmaz. Ugyanakkor az $\mathfrak{X}$ ábécéjű összes eseménynek a halmaza nyilvánvalóan kontinuum számosságú. Következésképpen léteznek olyan $\mathfrak{X}$ ábécéjű események, amelyek nem állíthatók elő véges automatákban, sőt kontinuum számosságú ilyen esemény létezik.

Elsőnek S. C. KLEENE [14] adott egy konstruktív példát olyan eseményre, amely semmiféle véges automatában sem állítható elő: tetszőleges nem üres ábécéjű esemény, amely az összes olyan szóból áll, amelyeknek a hossza négyzetszám. Céljainkra hasznosabb más véges automatában elő nem állítható esemény példáját vizsgálni.

14. TÉTEL: *Az* $\mathfrak{X}=(x, y)$ *két betűből álló ábécében tekintsük azt az S eseményt, amely azokból a szavakból áll, amelyek egymással egyenlő számú x és y betűt tartalmaznak; ez semmiféle véges automatában sem állítható elő.*

BIZONYÍTÁS: Tegyük fel, hogy az a_0 kezdő állapotú A kezdő automatában az S esemény elő van állítva az M halmaz által. Tekintsük az $a_1=a_0x$, $a_2=a_1x$, ..., $a_n=$ $=a_{n-1}x$ eseményeket. Könnyű belátni, hogy tetszőleges $n=1, 2, 3$ ... esetére ezek az állapotok különbözőek. Valóban, ellenkező esetben nyilván volna olyan p_n és $p_m \neq p_k$) szó, amelyeknek a hosszuk különböző (k, ill. m), nem tartalmazzák az y betűt, és olyanok, hogy az a_0p_k és a_0p_m állapotok egymással egybeesnek. Jelöljük q_k-val azt a k hosszúságú szót, amely csak az y betűből áll. Akkor az érvényben levő feltevésünk alapján az $a_0p_kq_k$ állapotnak benne kell lenni az M halmazban, az $a_0p_mq_k$ állapot pedig nem lehet ebben a halmazban. Másfelől az a_0p_k és a_0p_m állapotoknak az egybeesése alapján az $a_0p_kq_k$ és $a_0p_mq_k$ állapotoknak egymással egyenlőeknek kell lenniök. A kapott ellentmondás bizonyítja a tételt.

Az automaták absztrakt elméletében az egyik legfontosabb feladat nyelvek megadása olyan eseményeknek a leírása érdekében, amelyek előállíthatók ilyen vagy olyan speciális automaták osztályaiban. Az ilyen nyelvek első változatát a fentebb már idézett [14] dolgozatában S. C. KLEENE indítványozta. Ezt a nyelvet, amelyet mi a reguláris kifejezések nyelvének fogunk nevezni, később COPY, ELGOT és WRIGHT [15], valamint a jelen dolgozat szerzője tökéletesítették (lásd [9]).

Az olyan eseményeknek a leírására, amelyek véges automatákban előállíthatók, másik nyelvet JU. T. MEDVEGYEV [17] indítványozott. Az automaták bemenő ábécéinek a „kódolásá"-val kapcsolatos speciális rendszereknek a felhasználásánál megadható a nyelvek egy harmadik lehetséges változata is, amely az úgynevezett speciális vagy korlátozott ítéletekre (a természetes számoknak a véges halmazaira) vonatkozó másodfokú ítélet-kalkulus nyelvének a felhasználásán alapul. Ezt a változatot egymástól valamennyire különböző módosításokban B. A. TRACHTENBROT [28] és J. R. BÜCHI [5] fejlesztette tovább.

Ebben a dolgozatban a reguláris kifejezések nyelvét fogjuk használni, amely algebraibb és ezzel egyidejűleg az alkalmazások céljaira megfelelőbb is. Ennek a nyelvnek az alapján a szerző [9] és [12] dolgozataiban fejtette ki az automaták szintézisének a gyakorlati módszereit. Mármost célunk a kérdést elméleti szempontból tekinteni.

A reguláris kifejezések nyelve három, az eseményeken végzett műveletet használ fel, amelyeket *diszjunkciónak*, *szorzásnak* és *iterációnak* nevezünk. E műveletek közül az első kettő kétváltozós művelet, a harmadik pedig egyváltozós.

Az összes bevezetett műveleteket egy és ugyanazon ábécéjű eseményeken értelmezzük. Szükség esetén azonban az ábécé kibővítése is szóbajöhet, minthogy kisebb ábécéjű eseményt nyilvánvalóan mindig beágyazhatunk tetszőleges nagyobb ábécébe.

13. DEFINÍCIÓ: Az S_1 és S_2 események $S_1 \cup S_2$ *diszjunkciójának* nevezzük ezeknek az eseményeknek a halmazelméleti egyesítését. Az S_1 és S_2 események $S_1 \cdot S_2$ *szorzatának* nevezzük azt az eseményt, amely az összes $p_1 \cdot p_2$ alakú szóból

áll, ahol $p_1 \in S_1, p_2 \in S_2$. Az S esemény $\{S\}$ *iteráltjának* nevezzük azt az eseményt, amely az üres szóból és az összes $p_1 p_2 \ldots p_k$ alakú szóból áll, ahol $p_1, p_2, \ldots, p_k$ az S esemény szavai, és $k=1, 2, 3, \ldots$

14. DEFINÍCIÓ: $\mathfrak{X}$ ábécéjű *események algebrájának* nevezzük az $\mathfrak{X}$ ábécéjű összes eseménynek a halmazát, amelyet a diszjunkció, szorzás és iteráció műveleteivel együtt tekintünk. Azt az eseményt, amely az $\mathfrak{X}$ ábécéjű összes szóból áll (beleértve az üres szót is), *általános (vagy bizonyos) eseménynek* nevezzük; azt az eseményt pedig, amely a szavak üres halmazából áll, *lehetetlen eseménynek*. Végül azokat az eseményeket, amelyek közül bármelyik egyetlen $x \in \mathfrak{X}$ egybetűs szóból áll, és a csak az e üres szóból álló eseményt is, $\mathfrak{X}$ ábécéjű *elemi eseményeknek* nevezzük.

Végül bevezetjük a reguláris eseménynek a fogalmát, amely a *véges* automaták elmélete számára központi jelentőségű fogalom. Miként fentebb már megjegyeztük, ez a fogalom benne van abban a fogalomban, amelyet S. C. KLEENE [14] dolgozatában bevezetett, bár tőle formailag erősen különbözik.

15. DEFINÍCIÓ: *Reguláris eseménynek* nevezünk egy véges ábécéjű tetszőleges olyan eseményt, amelyet ilyen ábécéjű elemi eseményekből véges számú diszjunkció, szorzás és iteráció segítségével lehet kapni. A lehetetlen esemény ugyancsak reguláris esemény. Reguláris eseménynek az $\mathfrak{X}$ ábécéjű eseményalgebra műveletei segítségével, az elemi eseményekből kiinduló tetszőleges előállítását eme esemény *reguláris kifejezésének* nevezzük. A lehetetlen eseménynek a jelölésére bevezetjük a $\varnothing$ speciális jelet, amely ennek az eseménynek a szimbolikus jele.

Egy és ugyanazon reguláris eseménynek sok különböző reguláris kifejezése lehet annak következtében, hogy az eseményalgebrában létezik egy sor olyan reláció, amelyek a reguláris események azonos átalakítását teszik lehetővé. Ezek olyan átalakítások, amelyek nem változtatják meg az ezekkel a kifejezésekkel előállított eseményeket.

Az eseményalgebrában érvényes azonos összefüggések rendszeréhez olyan összefüggések tartoznak, amelyek megállapítják a diszjunkció asszociativitását és kommutativitását, valamint a szorzás asszociativitását. Ugyancsak nem nehéz belátni, hogy érvényes a szorzás disztributivitása a diszjunkcióval kapcsolatban.

Az események algebrájában a különböző kifejezéseknek a leírásánál és speciálisan a reguláris kifejezésekénél meg kell állapodnunk az eseményalgebrai műveletek végrehajtásának természetes sorrendjében. Az eseményalgebra kifejezéseiben, egyébként hasonló feltételek mellett, elsőnek az iteráció művelete, aztán a szorzás és végül a diszjunkció művelete végzendő el. Minden eltérést ettől a természetes sorrendtől szokás szerint (gömbölyű) zárójelekkel fejezünk ki, amelyeket közönségeseknek fogunk nevezni, eltérőleg a hullámos (kapcsos) zárójelektől, amelyeket csak az iterációknak a jelölésére alkalmazunk, és amelyeket ezért iterációs zárójeleknek nevezünk.

Ugyancsak megjegyezzük, hogy a diszjunkciónak és a szorzásnak az asszociativitása következtében zárójelek igénybe vétele nélkül felírható tetszőleges véges sok eseménynek a diszjunkciója és szorzata. Az elemi (egyelemű) eseményeket megegyezésszerűen azonosítjuk a bennük levő elemekkel. Mindig a $\varnothing$ jelet használjuk az üres szó jelölésére.

Felhasználva a bevezetett jelöléseket és rövidítéseket felírunk néhány összefüggést, amelyek az eseményalgebrában tetszőleges R és S eseményekre, valamint a $\varnothing$ lehetetlen eseményre vonatkozólag érvényesek:

$$\{\{S\}\}=\{S\} \tag{1}$$

$$\{S\}=e\cup S\cdot\{S\} \tag{2}$$

$$S\cdot\{S\}=\{S\}\cdot S \tag{3}$$

$$\{\{S\}\{R\}\}=\{S\cup R\} \tag{4}$$

$$\{e\}=e \tag{5}$$

$$S\cdot e=e\cdot S=S \tag{6}$$

$$S\cdot\varnothing=\varnothing\cdot S=\varnothing \tag{7}$$

$$S\cup\varnothing=S \tag{8}$$

$$\{\varnothing\}=e \tag{9}$$

Ezekhez az összefüggésekhez még a fentebb említett asszociativitási, kommutativitási és disztributivitási összefüggéseket hozzá kell venni. Érdekes az a probléma, hogy megtaláljuk az eseményalgebrában az összefüggéseknek egy olyan teljes rendszerét, amelynek az ábécéje egynél több betűből áll, azaz olyan rendszert, amely lehetővé teszi az eseményalgebrájában két tetszőleges kifejezés azonos egybeesésének a megállapítását. Később megmutatjuk, hogy algoritmikusan meg van oldva a reguláris kifejezések azonossága megállapításának a problémája.

Mindenekelőtt azt mutatjuk meg, hogy reguláris az összes olyan esemény, amely előállítható véges automatában, és megszerkesztjük azt az algoritmust, amely lehetővé teszi megtalálni a reguláris kifejezést az olyan esemény részére, amely tetszőleges véges iniciális automatában az automata állapotainak tetszőleges halmazával előállítható. A véges automatákban előállított eseményeknek a regularitásáról szóló állítást elsőnek S. C. KLEENE [14] bizonyította be, bár az általa használt módszerek gyakorlati szempontból nem hatékonyak. Gyakorlatilag alkalmas algoritmust az olyan események reguláris kifejezéseinek a megtalálására, amelyek véges automatákban előállíthatók (ezt a véges automaták analízise algoritmusának nevezik), a jelen cikk szerzője indítványozott (lásd [10] és [12]). Most azonban nem ezt az algoritmust fogalmazzuk meg, hanem azt, amelyet MCNAUGHTON és H. YAMADA [16] ajánlott. Bár ez az utóbbi algoritmus gyakorlati vonatkozásban kevésbé alkalmazható, a megalapozása sokkal egyszerűbben végezhető el, mint annak az algoritmusnak a megalapozása, amelyet a szerző javasolt. Megjegyezzük, hogy a [16] dolgozattól eltérőleg, amely csak két betűből álló bemenő ábécét használt fel, mi tetszőleges véges ábécé esetére szóló algoritmust fogunk szerkeszteni.

15. TÉTEL: *A véges automatákban előállított összes esemény reguláris. Létezik olyan algoritmus, amely lehetővé teszi azt, hogy szerkesszünk az olyan esemény részére reguláris kifejezést, amely tetszőleges véges kezdő automatában az állapotainak tetszőleges halmaza által előállítható. (Itt az automata átmenetek és kimenetek táblázataival van megállapodásszerűen megadva.)*

BIZONYÍTÁS: Nyilván elegendő olyan algoritmust szerkeszteni, amely lehetővé teszi, hogy olyan eseménynek találjuk meg egy reguláris kifejezését, amely elő van állítva tetszőleges véges kezdő automatában állapotoknak egy tetszőleges halmaza által. Ugyanis egy véges automata állapotainak halmaza által előállított esemény egybeesik azoknak az eseményeknek a diszjunkciójával, amelyek az ezt a halmazt alkotó különböző állapotokkal vannak előállítva. Tekintsünk most egy olyan A tetszőleges véges automatát, amelynek az állapotait az $1, 2, \ldots, n$ egymásra következő természetes számokkal jelöltük meg. Legyen most i és j két tetszőleges állapot az előzőekből, továbbá $p = x_1 x_2 \ldots x_k$ olyan bemenő szó, amely átviszi az A automatát az i állapotból a j állapotba. Azt mondjuk, hogy a p szó átviszi az automatát az i állapotból a $j = ip$ állapotba a közbeeső $ix_1, ix_1x_2, \ldots, ix_1x_2\ldots x_{k-1}$ állapotokon keresztül.

Jelöljük S_{ij}^k-val $(i, j = 1, 2, \ldots, n;\ k = 0, 1, 2, \ldots, n)$ azt az eseményt, amely azokból és csak azokból a nem üres szavakból áll, amelyek az automatát az i állapotból átviszik a j állapotba, és amelyek az $1, 2, \ldots, k$ állapotokon kívül nem használnak fel közbeeső események gyanánt semmiféle más állapotot. Speciálisan S_{ij}^0-vel jelöljük azt az eseményt, amely közvetlenül átviszi az A automatát az i állapotból (mellőzve bármiféle közbeeső állapotokat) a j állapotba.

Az automata értelmezésének alapján az S_{ij}^0 események közül mindegyik tulajdonképpen vagy a lehetetlen esemény, vagy a bemenő ábécének egy betűje, vagy pedig ezeknek a betűknek (az A automata végessége miatt véges alakú) diszjunkciója. Ilyen módon bármelyik S_{ij}^0 esemény reguláris, és ugyanakkor az összes ilyen eseményhez tartozó reguláris kifejezések közvetlenül megtalálhatók az A automatának az átmeneti függvényei révén.

Tegyük fel, hogy már az összes $S_{ij}^0, S_{ij}^1, \ldots, S_{ij}^{k-1}$ eseménynek a regularitását, valamint az őket előállító reguláris kifejezések megszerkesztésére szolgáló algoritmusnak a létezését is bebizonyítottuk. Könnyű látni azt, hogy tetszőleges i és j állapotokra nézve érvényes a következő rekurzív formula:

$$S_{ij}^k = S_{ij}^{k-1} \cup S_{ik}^{k-1} \cdot \{S_{kk}^{k-1}\} \cdot S_{kj}^{k-1} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n). \tag{10}$$

Valóban a (10) formula alapján közvetlenül azt következtethetjük, hogy az az R esemény, amely a jobboldalból áll, csak azokat a nem üres szavakat tartalmazza, amelyek az automatát átviszik az i állapotból a j állapotba, miközben közbeeső állapot gyanánt csak az $1, 2, \ldots, k$ állapotokat használják fel. Ilyen módon $R \subseteq S_{ij}^k$. Fordítva, legyen p tetszőleges olyan nem üres bemenő szó, amely az A automatát átviszi az i állapotból a j állapotba, és amely közbeeső állapotok gyanánt csak az $1, 2, \ldots, k$ állapotokat használja fel, más szóval, tetszőleges szó az S_{ij}^k eseményből. Hogyha hiányzik a közbeeső állapotok közül a k állapot, akkor a p szó nyilván az S_{ij}^{k-1} eseményhez tartozik, következésképpen az R eseményhez is. Hogyha azonban a k állapot a közbeeső állapotok közt előfordul, akkor — nem nehéz belátni — a p szót elő lehet állítani $p = p_1 p_2 \ldots p_m$ $(m \geqq 2)$ alakban, ahol a p_1 szó átviszi az A automatát az i állapotból a k állapotba, miközben közbeeső állapotok gyanánt csupán az $1, 2, \ldots, k-1$ állapotokat használja fel, továbbá a $p_2, \ldots, p_{m-1}$ szavak közül bármelyik átviszi az automatát a k állapotból a k állapotba, közbeeső állapotok gyanánt csak az $1, 2, \ldots, k-1$ állapotokat felhasználva, végül a p_m szó átviszi az automatát a k állapotból a j állapotba, ugyancsak csupán az $1, 2, \ldots, k-1$ állapotokat használva fel közbeeső állapotok gyanánt. Más szavakkal megfogalmazva: $p_1 \in S_{ik}^{k-1}, p_2 \in S_{kk}^{k-1}, \ldots, p_{m-1} \in S_{kk}^{k-1}, p_m \in S_{kj}^{k-1}$. Az iteráció értelmezése alapján a $p \in S_{ik}^{k-1} \cdot \{S_{kk}^{k-1}\} \cdot S_{kj}^{k-1} \subseteq R$ relációt kapjuk. (Az $m = 2$ esetben az iterációs zárójel értékeképpen e választandó.)

Minthogy p tetszőleges szó S_{ij}^k-ból, azt kapjuk, hogy $S_{ij}^k \subseteq R$. Az ellentett relációval együtt, amelyet korábban igazoltunk, ez azt jelenti, hogy $S_{ij}^k = R$, amellyel bebizonyítottuk a (10) rekurziós formulát. Bebizonyítottuk, k szerint végzett indukciót alkalmazva azt, hogy az összes S_{ij}^k $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ esemény reguláris, miközben ezek reguláris kifejezéseit egységes konstruktív módszerrel kaptuk meg (éspedig a (10) formulának az egymásutáni felhasználásával). Megjegyezzük, hogy ha a (10) formula jobboldalán levő események valamelyike a lehetetlen esemény, akkor a keresett reguláris kifejezésekre a (7)—(9) formulákat kell alkalmazni.

Az S_{ij}^n esemény az összes olyan szóból áll, amely az A automatát átviszi az i állapotból a j állapotba. Hogyha $j \neq i$, akkor olyan eseményről van szó, amely elő van állítva az A automatában a j állapot által az i kezdő állapot mellett. Ha pedig $j = i$, akkor ez az esemény nyilván az $S_{ii}^n \cup e$ esemény lesz. Ennek a ténynek a megállapításával a 15. tételnek a bizonyítása befejeződik.

Megjegyzés. A 15. tétel bizonyításával (az üres szó bevezetésének a jóvoltából) igazoltuk — a 13. tétel alapján — mindazoknak az eseményeknek a regularitását is, amelyek előállíthatók tetszőleges véges *Moore*-féle automatában kimenő jellel, és amelyek a 4. tétel következtében tetszőleges véges *Mealy*-féle automatában is előállíthatók.

Megállapítva a véges automaták *analízise olyan algoritmusának* a létezését, amely lehetővé teszi, hogy megtaláljuk az ezekben az automatákban előállított események reguláris kifejezéseit, áttérhetünk annak a megfordított algoritmusnak a megszerkesztésére, amelyet természetes módon nevezhetünk a véges automaták *szintézise algoritmusának*.

Itt most leírjuk a szintézis olyan általános algoritmusát, amelyet a jelen cikknek a szerzője a [9] dolgozatban indítványozott. Ez az algoritmus egyesíti a nagyfokú általánosságot a gyakorlati alkalmazási lehetőségekkel. Más javasolt módszerektől (lásd [14]—[17], [23], [28]) eltérőleg a leírandó módszer nem egy eseménnyel operál, hanem (reguláris) eseményeknek a tetszőleges véges rendszerével, nem használja fel a bemenő ábécé betűi „kódolás"-ának speciális szisztémáit, és lehetőséget ad arra, hogy a kapott automaták állapotai számára vonatkozólag viszonylag nem magas értéket kapjunk. Bizonyos kiegészítő tökéletesítések mellett ez a módszer a gyakorlatban olyan automaták megszerkesztéséhez vezet, amelyek hűek és minimálisak. Itt azonban nem fogjuk leírni ezeket a tökéletesítéseket, de a velük megismerkedni kívánóknak javasoljuk a szerző [12] dolgozatát.

16. TÉTEL: *Tetszőleges reguláris esemény előállítható véges iniciális automatában az állapotoknak valamilyen halmaza által. Létezik olyan algoritmus, amely lehetővé teszi, hogy a reguláris kifejezésekkel megadott, $\mathfrak{X}$ ábécéjű reguláris eseményeknek a tetszőleges véges M rendszerére vonatkozólag szerkesszünk olyan véges iniciális automatát, amely az M rendszerből mindegyik eseményt előállítja állapotainak valamilyen halmaza által. Ebben az automatában az állapotoknak a száma nem haladja meg a (2^n+1)-et, ahol n az $\mathfrak{X}$ ábécé különböző bemenő betűinek a száma az M halmaz kifejezéseiben.*

BIZONYÍTÁS: Nyilván elegendő bebizonyítani a tételnek csupán a második részét, amennyiben az első része nyilvánvaló következménye a másodiknak. Tekintsük az olyan reguláris kifejezéseknek a K együttesét, amelyek az adott M rendszernek az eseményeit előállítják, és számozzuk meg az $\mathfrak{X}$ ábécének az ezekben a kifejezésekben előforduló összes betűjét (amelyek különböznek az üres szó e szimbólumától). Itt egy és ugyanazon betűnek minden előfordulása saját külön számot kap. A számozás sorrendje közömbös. Például a betűknek a következő számozása lehetséges a reguláris $R=x\{y\}x$ és $S=xx\cup\{y\}\cdot x\cdot\{y\}$ kifejezésből álló K_1 együttesben: $R=x_1\cdot\{y_2\}\cdot x_3$; $S=x_4\cdot x_5\cup\{y_6\}\cdot x_7\cdot\{y_8\}$.

Az események algebrájában érvényes, fentebb definiált rendezés feltételezi a szóban forgó ilyen vagy olyan reguláris kifejezésnek a szétbontásánál a *betűk meghatározott felvonulási rendjét.* Például a fentebb felírt R kifejezésben az x_1 betű mögött következhetik akár az y_2 betű, akár az x_3 betű, az y_2 betű mögött pedig vagy az x_3 betű, vagy újra az y_2 betű. Természetes módon lehet definiálni a *kezdő* betűket is, azaz olyan betűket, amelyekkel el lehet kezdeni a szóban forgó reguláris kifejezéseknek a felbontását. A fentebb felírt R és S kifejezésekben a kezdő betűk nyilván az x_1, x_4, y_6 és x_7 betűk.

Még értelmezzük a reguláris kifejezéseknek a *végző* betűit, azaz olyan betűket, amelyeknek a felírása a reguláris kifejezésnek a felbontásánál (kezdő betűkkel kezdve) befejezi az ezzel a kifejezéssel előállított eseményt. Az R reguláris kifejezésre nézve nyilván csak az x_3 betű lesz végző, az S kifejezésre nézve pedig az x_5, x_7 és y_8 betűk lesznek végzőek.

Meg fogjuk szerkeszteni azt az A iniciális automatát, amelynek az összes állapota az a_0 kezdő szónak a kizárása után olyan számozott betűknek valamilyen halmaza lesz (általánosságban beszélve ezekhez hozzátartozik az üres halmaz is), amelyek a K adott együttesnek a reguláris kifejezéseiben benne vannak. Ennek az automatának a $\delta(a, x)=ax$ átmeneti függvényét a következő módon definiáljuk: az $\mathfrak{X}$ alapul vett ábécének tetszőleges x szavára nézve a_0x állapot gyanánt vesszük az összes olyan x számozott betűnek a halmazát, amelyek a K együttesnek kezdő betűi.

A K együttes számozott betűinek tetszőleges olyan M halmazára nézve, amely az A automatának az állapotául lett véve, az Mx állapotot egyenlőnek vesszük az összes olyan (számozott) x betűnek a halmazával, amelyek (a fentebb megállapított értelemben) az M halmaz betűi közül legalább az egyik után következnek. Ennél a betűknek csupán azok a halmazai kerülnek felírásra, amelyek ténylegesen adódnak a leírt szabálynak az egymásutáni alkalmazása során, kiindulva az a_0x alakú halmazokból.

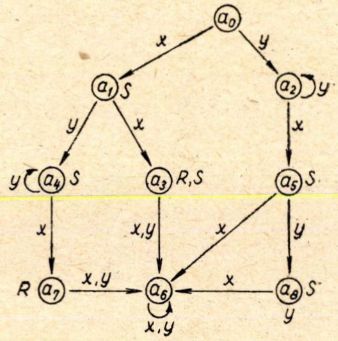
A reguláris kifejezéseknek a definíciójából és az A automata átmeneti függvénye megszerkesztésének a módjából közvetlenül következik, hogy egy $\mathfrak{X}$ ábécéjű nem üres p szó akkor és csak akkor tartozik az olyan Q' eseményhez, amely a K együttesnek valamilyen Q reguláris kifejezésével elő van állítva, ha az a_0p halmaz a Q kifejezésének legalább egy végző betűjét tartalmazza. Az elvégzett szerkesztésnek az alapján csupán akkor van érvényben az $a_0p=a_0$ egyenlőség, amikor p üres szó. Ilyen módon a Q' esemény előállíthatónak bizonyul a megszerkesztett automatában az összes olyan állapotnak a halmaza által, amelyek állományukban a Q kifejezésnek legalább egy végző betűjét tartalmazzák; abban az esetben, amikor a Q' esemény tartalmazza az e üres szót, Q' előállítható az a_0 kezdő állapot által is. Nyilvánvaló, hogy a megszerkesztett automata állapotainak a száma véges.

Ezzel a keresett algoritmust megszerkesztettük, és a 16. tételt teljesen bebizonyítottuk. A tétel állításában szereplő korlát az állapotok számára vonatkozólag könnyen adódik abból, ha felidézzük, hogy az összes olyan különböző halmaznak a száma, amelyeket n (számozott) betűből lehet szerkeszteni, egyenlő 2^n-nel.

Annak érdekében, hogy jobban megvilágítsuk a leírt algoritmusnak a lényegét, minimális olyan automatát szerkesztünk, amely egy olyan K_1 együttesnek az eseményeit állítja elő, amilyent a 16. tételnek a bizonyításánál említettünk. A tekintett esetben az alapul vett $\mathfrak{X}$ ábécé az x és y betűkből áll. A 16. tétel bizonyításában leírt eljárásokat alkalmazva és megjelölve az A automatának a kezdő állapotát, eljutunk a következő összefüggésekhez: $a_0x=a_1$, $a_0y=a_2$, ahol a_1 az a halmaz, amely az x_1, x_4, x_7 betűkből áll, a_2 pedig az a halmaz, amely az y_6 egyetlen betűből áll. Továbbá érvényes $a_1x=a_3$, $a_1y=a_4$, $a_2x=a_5$, $a_2y=a_2$, ahol $a_3=(x_3, x_5)$, $a_4=$ $=(y_2, y_8)$, $a_5=(x_7)$; $a_3x=a_5$, $a_3y=a_6$, $a_4x=a_7$, $a_4y=a_4$, $a_5x_6=a_6$, $a_5y=a_8$, ahol a_6 a betűk üres halmaza, és $a_7=(x_3)$, $a_8=(y_8)$; $a_6x=a_6$, $a_6y=a_6$, $a_7y=a_6$, $a_7x=a_6$, $a_8x=a_6$, $a_8y=a_8$.

A keresett A automatának az átmeneti függvényét az említett összefüggések teljesen meghatározzák. Az A automatának kilenc állapota van, és az A automata az R eseményt az a_3 és a_7 állapotoknak a halmazával, az S eseményt pedig az a_1, a_3, a_4, a_5 és a_8 állapotoknak a halmazával állítja elő. A szemléletesség kedvéért a 3. ábrán fel van tüntetve a megszerkesztett automatának a rajza.

A köröcskék mellett, amelyek az olyan állapotokat jelölik, amelyek előállítanak egyet vagy kettőt az R és S események közül, a megfelelő eseményeknek a szimbólumai is fel lettek tüntetve.



1. ábra

Megjegyezzük, hogy a tekintett példában természetes módon olyan jel-függvényt lehet bevezetni, amely az a_0, a_2, a_6 állapotokat megjelöli egy kimenő jellel, az a_3 állapotot egy másikkal, az a_7 állapotot egy harmadikkal, az a_1, a_4, a_5 és a_8 állapotokat pedig egy negyedik kimenő jellel. Ezután a tekintett automata átváltozik olyan (kezdő) *Moore*-féle automatává, amely az R eseményt a második és harmadik, az S eseményt pedig a harmadik és negyedik kimenő jellel állítja elő. Az említett *Moore*-féle automata lévén *Moore*-féle módon ekvivalens az adott automatával, el tudjuk végezni az automata állapotai számának a *minimalizálását*, miközben az események vizsgált együttesének előállíthatósági tulajdonsága megőrződik. Magától értetődően ezek a megfontolások szerfelett általános jellegűek, és nem korlátozódnak a vizsgált példára; ami pedig a vizsgált példára vonatkozik, alkalmazva itt a minimalizálásnak a fentebb leírt eljárását, le tudjuk csökkenteni kilencről nyolcra az állapotainak a számát.

A 16. tétel lehetővé teszi, hogy megállapítsunk egy sor olyan új állítást, amelyeknek lényeges jelentőségük van a véges automaták és az eseményalgebra elméletében.

17. TÉTEL: *Létezik olyan algoritmus, amely lehetővé teszi a reguláris kifejezéseknek tetszőleges párjára nézve annak a megállapítását, hogy az ezekkel a kifejezésekkel előállított események egybeesnek-e, vagy sem.*

BIZONYÍTÁS: A keresett algoritmus ténylegesen egybeesik a szintézisnek az algoritmusával, amelyet a 16. tételnek a bizonyításában írtunk le. Megszerkesztve ugyanis egy olyan véges iniciális automatát, amely azokat az R és S eseményeket, amelyek megfelelnek a megadott kifejezéseknek, előállítja állapotoknak az M és N halmazai által, visszavezetjük az R és S eseményeknek az egybeeséséről vagy nem egybeeséséről szóló kérdést a véges M és N halmazoknak az egybeeséséről vagy különbözőségéről szóló kérdésre.

Bevezetjük most az eseményeken vett új műveleteknek egy sorát. Mindenekelőtt, természetesen, az eseményeknek a metszetét tekintjük, amely elnevezésen a közönséges, halmazelméleti metszetet értjük. Az $\mathfrak{X}$ ábécéjű S esemény $\bar{S}$ *komplementumának* nevezzük az $\mathfrak{X}$ ábécéjű összes olyan szónak a halmazát (nem kizárva az üres szót sem), amelyek nincsenek benne az S eseményben. Az S esemény *kiegészítésének* fogjuk nevezni az S esemény összes szava összes kezdő szakaszának a halmazát, amelyhez ezek a szavak maguk is és az e üres szó is hozzátartoznak.

Az automaták szintézise ama algoritmusának az alkalmazásánál, amelyet a 16. tételnek a bizonyításában írtunk le, az összes olyan eseménnyel együtt, amelyek a reguláris eseményeknek az eredeti K együttesét alkotják, automatikusan előállíthatónak bizonyulnak ezeknek az eseményeknek az összes egyesítései (diszjunkciói) és összes metszetei, továbbá közülük akármelyiknek a komplementuma és kiegészítése is.

Valóban, az előállító halmazoknak az egyesítése és metszete nyilván előállítja a megfelelő eseményeknek az egyesítését és metszetét. Az állapotok egy olyan halmazának a komplementuma (az automata összes állapotának a halmazában), amely a K együttesnek egy tetszőleges eseményét állítja elő, egyszersmind előállítja ennek az eseménynek a komplementumát. Valamivel bonyolultabban áll a dolog az események kiegészítésével. Elemezve azt az algoritmust, amelyet a 16. tételnek a bizonyításában írtunk le, nem nehéz eljutni ahhoz az előíráshoz, hogy olyan eseménynek a kiegészítése, amely a K eredeti együttesnek egy tetszőleges S reguláris kifejezésével van megadva, azzal a halmazzal állítható elő, amely a kezdő állapotból és az összes olyan állapotból (számozott betűk halmazából) áll, amelyek legalább egy olyan (számozott) betűt tartalmaznak, amely az S kifejezéshez tartozik.

Egybekapcsolva a 15. tételben megállapított eredménnyel a most kapott eredményeket, a következő állításhoz jutunk.

18. TÉTEL: *Tetszőleges reguláris eseménynek a komplementuma és kiegészítése, továbbá reguláris események tetszőleges véges halmazának a metszete is reguláris esemény. Létezik olyan algoritmus, amely lehetővé teszi azt, hogy reguláris kifejezéssel megadott tetszőleges eseményhez találjunk reguláris kifejezéseket ennek az eseménynek a komplementumára és kiegészítésére vonatkozólag. Létezik olyan algoritmus is, amely tetszőleges véges sok számú eseményre nézve lehetővé teszi azt, hogy találjunk az összes ilyen eseménynek a metszetére vonatkozólag reguláris kifejezést.*

Az események komplementumának és kiegészítésének a műveleteit dolgozatoknak egész sorában vizsgálták (lásd például [9], [14], [16], [17]). Az eseményeken még két érdekes művelet került bevezetésre S. C. KLEENE [14] és JU. T. MEDVEGYEV [17] dolgozatában.

Az első művelet, amelyet mi az *esemény bővítésének* nevezünk, azt jelenti, hogy az $\mathfrak{X}$ ábécéjű S eseményt, amely legalább egy nem üres szót tartalmaz, átalakítjuk az $S' \cdot F \cup e$ eseménnyé, ahol F az $\mathfrak{X}$ ábécéjű általános (=bizonyos) esemény, S' pedig az S esemény az e üres szó nélkül. Az olyan eseménynek a bővítése, amely egyetlen, üres szóból áll, egyenlőnek veendő ezzel az eseménnyel. Mivel a bizonyos esemény tartalmazza az üres szót, tetszőleges eseménynek a bővítése magában foglalja ezt az eseményt. JU. T. MEDVEGYEV [17] megmutatta, hogy olyan eseménynek a bővítése, amely előállítható véges automatában, ugyancsak előállítható véges automatában. Ennek az eredménynek, amelyet MEDVEGYEV állapított meg, nem fogjuk elvégezni a bizonyítását, csupán azt jegyezzük meg, hogy 16. tételünknek a jóvoltából ez nyilvánvaló következménye a könnyen bebizonyítható következő állításnak:

19. TÉTEL: *A véges ábécéjű általános (= bizonyos) esemény, valamint tetszőleges reguláris eseménynek a bővítése mindig reguláris esemény. Létezik olyan egyszerű algoritmus, amely lehetővé teszi az eseménynek a reguláris felírása révén azt, hogy megtaláljuk az esemény bővítésének a reguláris felírását.*

Ha ugyanis az $\mathfrak{X}$ ábécé a véges számú $x_1, x_2, \ldots, x_4$ betűből áll, akkor az $\mathfrak{X}$ ábécéjű általános (= bizonyos) esemény a reguláris $\{x_1 \cup x_2 \cup \ldots \cup x_4\}$ kifejezés által állítható elő. Hogyha az S esemény reguláris, akkor ennek az eseménynek az ábécéje véges, és következésképpen az S eseménynek az $S' \cdot F \cup e$ bővítése lehetővé teszi a felírást reguláris kifejezésnek a segítségével. (A 18. tételből következik, hogy reguláris eseményből az üres szónak a kizárása reguláris eseményhez vezet.)

A második művelet, amelyet mi az *esemény egyszerűsítésének* fogunk nevezni, a megszokott értelemben duálisa az esemény bővítése műveletének. Az S eseménynek a bővítésében benne van az összes olyan szó, amely az S eseménynek a szavait kezdő szakasz gyanánt tartalmazza. Az S esemény egyszerűsítése azokból és csak azokból a nem üres szavakból áll, amelyek maguk is S-hez tartoznak és ugyanakkor amelyeknek az összes nem üres kezdő szakasza szintén benne van az S eseményben.

$C(S)$-sel jelölve egy tetszőleges S esemény egyszerűsítését és $R(S)$-sel jelölve a bővítését, könnyű belátni a következő formulának az érvényességét (lásd [17]):

$$C(S) = \overline{R(\bar{S})}. \tag{11}$$

Felülvonással jelöljük, miként fentebb is, az eseménynek a komplementumát (az adott esetben az S eseménynek az ábécéjében).

Könnyű látni, hogy a (11) formula lényegében nem egyéb, mint a szűkebb értelemben vett ítélet kalkulusnak valamennyire szokatlan formában való egyik ismert olyan összefüggése, amely összekapcsolja az „összes"-ségnek és a létezésnek a kvantorait. A különbség csupán abban áll, hogy szükségképpen különös szerepe van az üres szónak.

A (11) formula, összekapcsolva a 18. és 19. tételekkel, a következő eredményhez vezet.

20. TÉTEL: *Tetszőleges reguláris eseménynek a rövidítése ugyancsak reguláris esemény. Létezik olyan algoritmus, amely lehetővé teszi azt, hogy reguláris kifejezéssel megadott tetszőleges reguláris eseményre vonatkozólag találjunk reguláris kifejezést ennek az eseménynek az egyszerűsítéséhez.*

JU. T. MEDVEGYEV [17] vizsgált még egy műveletet az eseményeken (a behelyettesítésnek a műveletét). Mi azonban nemcsak magát ezt a műveletet vizsgáljuk, hanem egy általánosabb műveletet, amelyet V. G BODNÁRCSUK, a szerző aspiránsa indítványozott, és amelyet természetes dolog az események *szuperpozíciójának* nevezni.

Tekintsünk egy véges $\mathfrak{Y}$ ábécéjű tetszőleges olyan $S = S(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ eseményt, amely az $y_1, y_2, \ldots, y_n$ betűkből áll, továbbá m számú tetszőleges véges $\mathfrak{X}$ ábécéjű eseményt $R_1, R_2, \ldots, R_m$-et, amelyek az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ betűkből állnak. Az $R_1, R_2, \ldots, R_m$ eseményeknek és az S eseménynek a *szuperpozíciója* $\mathfrak{X}$ ábécéjű olyan esemény, amely az összes olyan szóból áll, amelyek annak a behelyettesítésnek az eredményeképpen nyerhetők, hogy az S eseménynek egy tetszőleges $y_{i_1}y_{i_2}...y_{i_n}$ szavában az y_{i_1} betűt az R_{i_1} eseménynek egy tetszőleges szavával, az y_{i_2} betűt az R_{i_2} eseménynek egy tetszőleges szavával helyettesítjük stb.

Könnyű belátni, hogy érvényes a következő

21. TÉTEL: *A reguláris $R_1, R_2, ..., R_m$ eseményeknek és az $\mathfrak{Y}=\mathfrak{Y}(y_1, y_2, ..., y_m)$ ábécéjű reguláris S eseménynek a szuperpozíciója ugyancsak reguláris esemény. Ilyen szuperpozícióhoz reguláris kifejezést annak az eredményeképpen lehet nyerni, hogy az olyan reguláris kifejezésben, amely az S eseményt megadja, behelyettesítjük az $y_1, y_2, ..., y_m$ betűknek a helyébe azokat a reguláris kifejezéseket, amelyek megadják az $R_1, R_2, ..., R_m$ eseményeket: az R_i eseményhez tartozó reguláris kifejezés megjelöli az S eseményhez tartozó reguláris kifejezésben az y_i betűnek az összes előfordulását.*

V. G. BODNARCSUK olyan közvetlen módszert indítványozott, amely lehetővé teszi, hogy építsünk olyan véges iniciális automatát, amely közvetlenül előállítja az $R_1, R_2, ..., R_m$ eseményeknek és az S eseménynek a szuperpozícióját azzal az automatával, amely ezeket az (eredeti) eseményeket előállítja. Könnyű látni, hogy ezen az alapon meg lehet szerkeszteni az automaták szintézisének egy olyan új algoritmusát, amely az adott reguláris eseményeket előállítja, kiindulva azokból az automatákból, amelyek az elemi eseményeket és a reguláris eseményeket előállítják.

JU. T. MEDVEGYEV a már idézett [17] dolgozatában olyan módszert dolgozott ki, amely olyan nyelven írja le a véges automatákban előállított eseményeket, amely különbözik a reguláris felírásoknak a nyelvétől.

A következőkben áttérve a fenti nyelvnek a kifejtésére, ez a módszer a következő alakban fogalmazható meg: Vizsgáljuk a tetszőleges, adott, véges $\mathfrak{X}=\mathfrak{X}(x_1, x_2, ..., x_n)$ ábécéjű következő elemi eseményeket: $E_1=x_1 \cup x_2 \cup ... \cup x_n$, $E_2=x_1x_1 \cup x_1x_2 \cup ... \cup x_ix_j \cup ... \cup x_nx_n$, majd az $E_{xi}=\{E_1\}\cdot x_i$ eseményeket és az $E'_{xi}=E_1 \cup \{E_1\}\cdot x_i \cdot E_1$ eseményeket $(i=1, 2, ..., n)$.

Bebizonyítható, hogy véges automatákban azok és csak azok az események lesznek előállíthatók, amelyek vagy egybeesnek a felsorolt elemi eseményekkel, vagy pedig ezekből annak a segítségével kaphatók, hogy az ilyen módon kapott eseményekkel és az $x_1, x_2, ..., x_n$ elemi eseményekkel véges sokszor képezzük a diszjunkció, metszet, bővítés, egyszerűsítés és szuperpozíció műveletét. Az utóbbi műveletnek a neve behelyettesítés, és ennek értelme abban a (nem feltétlenül kölcsönösen egyértelmű) behelyettesítésben van, hogy az $x_1, x_2, ..., x_n$ betűknek a helyébe ugyanezeket a betűket (vagy pedig ezeknek egy részét) elhelyezzük valamilyen más sorrendben.

Egyébként ez az eredmény a fentebb kifejtett eredményeknek (18—21. tételek) közvetlen következménye.

Az események véges automatákban való előállításának kérdése érdekes módon közelíthető meg a BURKS és HAO WANG [3] dolgozatában bevezetett fogalom, a véges automata *közvetlen átmenetei mátrixainak* felhasználásával.

Egy véges A automata közvetlen átmeneteinek a mátrixa olyan négyzetes mátrix, amelynek az oszlopai és sorai az automatának a különböző állapotaival vannak megjelölve. Ilyen módon ennek a mátrixnak a rangja egyenlő az A automata állapotainak az n számával. Egyszerűség kedvéért egyezzünk meg abban, hogy az automatának az állapotait az $1, 2, ..., n$ egymásután következő számokkal jelöljük.

A mátrixnak az az a_{ij} eleme, amelyik az i-edik sornak és a j-edik oszlopnak a találkozásában van, az összes olyan 1-hosszúságú szónak (azaz betűnek) a diszjunkciója, amely az automatát az i állapotból átviszi a j állapotba, vagy pedig a_{ij} a $\emptyset$ lehetetlen esemény, hogyha a megkövetelt tulajdonságú szavak hiányoznak.

Például az 1. ábrán (lásd 1. §.) feltüntetett rajzú automatára vonatkozólag, ahol megállapodásszerűen a az első, b pedig a második állapot, a közvetlen átmeneteknek a C mátrixaképpen ezt kapjuk:

$$C = \begin{pmatrix} \emptyset, & xuy \\ \emptyset, & xuy \end{pmatrix}.$$

Az eseményalgebrai szorzásnak és diszjunkciónak a műveletét felhasználva, definiálni lehet két olyan négyzetes $A = (\alpha_{ij})$ és $B = (\beta_{km})$ mátrixnak a D szorzatát, amelyeknek a rendje egy és ugyanazon n szám, és amelyeknek az elemei egy és ugyanazon ábécéjű események. A D szorzatot olyan n-edrendű négyzetes mátrixként definiáljuk, amelyben az i-edik sornak és a j-edik oszlopnak a találkozásánál a $\gamma_{ij} = \alpha_{i1}\beta_{1j} \cup \alpha_{i2}\beta_{2j} \cup \ldots \cup \alpha_{in}\beta_{nj}$ esemény áll.

Amennyiben az automata közvetlen átmenetei C mátrixának az elemei ennek az automatának a bemenő ábécéjéből való események, akkor nyilvánvaló módon lehet ennek a mátrixnak az egymásutáni hatványait definiálni:

$$C^1 = C, C^2 = C \cdot C, C^3 = C^2 \cdot C, \ldots, C^k = C^{k-1} \cdot C.$$

Érvényes a következő

22. TÉTEL: *Tetszőleges k természetes szám mellett az A véges automata közvetlen átmenetei C mátrixának a k-adik hatványa olyan* C^k *mátrix, amelyben az i-edik sornak és a j-edik oszlopnak a találkozásánál az az esemény áll, amely egyenlő az összes olyan k-hosszúságú szónak a diszjunkciójával, amelyeknek ábécéje az A automatának a bemenő ábécéje, és amelyek az A automatát az i állapotból átviszik a j állapotba.*

Ennek a tételnek a bizonyítása közvetlenül elintézhető k szerinti teljes indukcióval és az események algebrájára vonatkozó (7) és (8) összefüggéseknek a felhasználásával.

Az egy és ugyanazon rendű C_1 és C_2 mátrixok diszjunkcióját úgy definiáljuk, hogy ez olyan mátrix, amelynek minden eleme a C_1 és C_2 mátrixok megfelelő elemeinek a diszjunkciója. Az egységmátrixot úgy definiáljuk, hogy ez olyan négyzetes mátrix, amelynek a főátlójában olyan események szerepelnek, amelyek csak az e üres szóból állanak, az összes többi helyen pedig a lehetetlen esemény szerepel. Természetes dolog abban megállapodni, hogy a közvetlen átmenetek C mátrixának a C^0 nulladik hatványa azzal az egységmátrixszal esik egybe, amelynek a rendje egyenlő a C mátrixnak a rendjével.

Egy A véges automata *teljes átmenetei mátrixának* nevezzük az A automata közvetlen átmenetei mátrixa összes nemnegatív egész kitevőjű hatványának a végtelen $C^0 \cup C^1 \cup C^2 \cup \ldots \cup C^k \cup \ldots$ diszjunkcióját. A 22. tételből mármost közvetlenül folyik a következő állításnak az érvényessége.

23. TÉTEL: *Az A véges automata teljes átmenetei mátrixa i-edik sorának és j-edik oszlopának a találkozásánál olyan esemény áll, amely az A automata bemenő*

ábécéjének az összes olyan és csakis olyan szavából áll, amelyek átviszik az automatát az i állapotból a j állapotba.

Magától értetődően, a 22. és 23. tételek érvényesek a végtelen automatákra nézve is, de a hatásos alkalmazásuk rendesen csak a véges automatákra korlátozódik (az automatával előállított események tényleges leírásának a szempontjából).

Egyébként a 23. tételnek a hatékony alkalmazhatóságáról, sőt még a véges automatákra való alkalmazhatóságáról is csak szerfelett feltételesen lehet beszélni, amennyiben távolról sem mindig lehetséges a teljes átmenetek mátrixa elemeihez tartozó reguláris kifejezéseknek a közvetlen megtalálása.

A teljes átmenetek mátrixának az elemei olyan események, amelyek elő vannak állítva az automatának egyetlen állapotával. Az olyan eseményeket pedig, amelyek az állapotoknak halmazaival vannak előállítva, az előbbi elemek diszjunkciójának alakjában kell felírni.

Ezzel kapcsolatban felmerül az a természetes kérdés, hogy léteznek-e olyan események, amelyek nem állíthatók elő egyetlen állapot által, és az ilyen események belsőleg hogyan jellemezhetők.

Az erre a kérdésre adandó válaszképpen olyan eljárást alkalmazunk, amelyet V. G. BODNARCSUK indítványozott: hogyha valamilyen S eseményhez létezik olyan p és $r \neq e$ szó, hogy mind a p szó, mind pedig a pr szó hozzátartozik ehhez az eseményhez, akkor az r szót az S esemény *kötegének* nevezzük. Az S esemény *ciklusának* nevezzük a q szót, hogyha az S eseményből vett *tetszőleges* l szóra nézve az lq szó ugyancsak hozzátartozik ehhez az eseményhez.

Érvényes a következő állítás, amely V. G. BODNARCSUK-tól származik.

24. TÉTEL: *Az az esemény, amely olyan köteggel rendelkezik, amely nem ciklus, semmiféle automatában sem állítható elő egyetlen állapot által.*

BIZONYÍTÁS: Tegyük fel azt, hogy az S esemény elő van állítva valamilyen automatában egyetlen állapot által. Ennél az A automatát iniciálisnak lehet tekinteni, és kezdő állapot gyanánt azt az a_0 állapotot választjuk, amely az S eseménynek az összes szava által az a állapotba megy át. Legyen r az S eseménynek tetszőleges kötege. Található olyan $p \in S$ szó a kötegnek a definíciója szerint, hogy $pr \in S$. Ámde akkor $a_0 p = a$, továbbá $a_0 pr = a$. Más szóval $ar = a$. Hogyha q tetszőleges szó S-ből, akkor $a_0 q = a$, továbbá $a_0 qr = ar = a$, más szóval $qr \in S$, és következésképpen az r szó ciklus. Ezzel pedig nyilván bebizonyítottuk a tételt.

Felhasználva a 24. tételt, könnyű bebizonyítani például azt, hogy az $S = x \cup xy$ esemény semmiféle automatában sem állítható elő egyetlen állapot által. Az y szó ugyanis ennek az eseménynek nyilvánvalóan olyan kötege, amely egyidejűleg nem ciklus, amennyiben S nem tartalmazza az xyy szót.

Végezetül megemlítjük azt a feladatot, hogy meghatározzuk az összes olyan nem izomorf véges automatának a számát, amelyeknek a bemenő és kimenő ábécéjük adott és az állapotoknak a száma is adott. Ezt a feladatot F. D. MURRAY [18] dolgozatában megoldotta a kimenő jelek nélküli olyan automatákra nézve, amelyeknek a bemenő ábécéjük egyetlen betűből áll.

4. §. Az automaták és a félcsoportok

Ebben a paragrafusban olyan összefüggéseket állapítunk meg, amelyek egyfelől az automatáknak az elmélete, másfelől pedig a félcsoportoknak az elmélete közt állnak fenn. Speciálisan már állapítottunk meg ilyen összefüggést az előző paragrafusokban, ez az összefüggés azonban inkább tisztán csak terminológiai jellegű volt és csak a szabad félcsoportokra korlátozódott. A szerzőnek a [11] dolgozata sokkal szorosabb kapcsolatnak vetette meg az alapját a félcsoportok elmélete és az automaták elmélete közt. Ennek a paragrafusnak a tartalma az említett dolgozat alapgondolatainak további fejlődését mutatja be.

Tekintsünk egy $\mathfrak{X}$ bemenő ábécéjű tetszőleges A automatát. Az $\mathfrak{X}$ ábécének minden betűje (azaz az A automatának bármely bemenő jele) előidézi az A automata állapotainak egy (általánosságban nem feltétlenül kölcsönösen egyértelmű) transzformációját. Ez a transzformáció az A automatának a tetszőleges a állapotához hozzárendeli ugyanennek az automatának az $ax=\delta(a, x)$ állapotát (itt $\delta(a, x)$ az A automatának az átmeneti függvénye) és ezt *az x bemenő jel által indukált transzformációnak* nevezzük.

Az A automata összes különböző bemenő jele által indukált transzformációkkal generált félcsoportot *az automata félcsoportjának* nevezik, az automatát magát pedig *az adott félcsoporthoz tartozó automatának* nevezik. Az automaták félcsoportjait általában mint absztrakt félcsoportokat vizsgáljuk, nem pedig mint transzformációkból álló félcsoportokat (hacsak nem beszélünk ennek az ellenkezőjéről).

Könnyű belátni, hogy érvényes a következő

25. TÉTEL: *Izomorf automatáknak a félcsoportjai is izomorfok.*

Legyen ugyanis A és B két, egymással izomorf automata. Jelöljük φ-vel azt az izomorfizmust, amely az A automatát leképezi a B automatájára. Az A automatának tetszőleges a állapotára nézve és az $\mathfrak{X}$ bemenő ábécének tetszőleges x betűjére nézve $\varphi(a)$-val, illetve $\varphi(x)$-szel jelöljük a nekik a φ izomorfizmusnál megfelelő állapotot és a B automata $\mathfrak{X}_1$ bemenő ábécéjének a megfelelő betűjét. Hogyha $p=x_1x_2...x_k$ tetszőleges, $\mathfrak{X}$ ábécéjű szó, akkor megállapodás szerint az $\mathfrak{X}_1$ ábécéjű $\varphi(x_1)\varphi(x_2)...$ $...\varphi(x_k)$ szót $\varphi(p)$-vel jelöljük.

Az automatáknak az izomorfizmusa alapján $\varphi(ax)=\varphi(a)\cdot\varphi(x)$.

A szó hossz szerinti indukcióval innen azonnal adódik, hogy $\varphi(ap)=\varphi(a)\varphi(p)$.

A p bemenő szó az A automata állapotainak valamilyen $a\to ap$ transzformációját indukálja. Miként könnyen látható, ez a transzformáció egybeesik azoknak a transzformációknak a szorzatával, amelyeket az $x_1, x_2, ..., x_k$ bemenő jelek (azaz a p szót alkotó betűk) indukálnak. Az A automata félcsoportjának tetszőleges definiáló relációját fel lehet írni $ap=aq$ alakban, ahol p és q valamilyen, $\mathfrak{X}$ ábécéjű szavak, az a állapot pedig befutja az A automata összes állapotának az $\mathfrak{A}$ halmazát. A fentebb bebizonyítottak alapján ennek a relációnak megfelel a B automatában egy $\varphi(a)\varphi(p)=\varphi(a)\varphi(q)$ összefüggés. Felhasználva a φ leképezésen kívül a φ^{-1} inverz leképezést is, kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést állapíthatunk meg az A és B automatákhoz tartozó félcsoportok generátorelemei, illetve definiáló relációi közt, amely maga után vonja ezeknek a félcsoportoknak az izomorfizmusát. Ezzel a 25. tételt bebizonyítottuk.

Tekintsük most az A automatának a B automatába való tetszőleges φ homomorfizmusát. Az A automatának minden egyes bemenő jele által indukált transzformációjához hozzárendelve a B automatának azt a transzformációját, amelyet a B automatának a $\varphi(x)$ bemenő jele indukál, továbbá hozzárendelve az előbbi alakú transzformációk szorzatához a nekik megfelelő, második alakú transzformációknak a szorzatát, meghatározzuk az A automata félcsoportjának a B automata félcsoportjába való valamilyen leképezését. Ezt a leképezést *a φ homomorfizmus által indukált leképezésnek* nevezzük.

Ugyanazokkal a módszerekkel, amelyeket a 25. tételnek a bizonyításánál felhasználtunk, könnyen bebizonyítható a következő állítás.

26. TÉTEL: *Az A automatának a B automatába való φ homomorfizmusa által indukált ψ leképezés egyszersmind az A automata G félcsoportjának a B automata H félcsoportjába való egyik homomorfizmusa is. Ha a φ homomorfizmus az A automatát az egész B automatára képezi le, akkor a ψ homomorfizmus a G félcsoportnak az egész H félcsoportra történő homomorf leképezése. Ha pedig a φ homomorfizmus izomorfizmus, akkor a ψ homomorfizmus szintén izomorfizmus.*

Az automata félcsoportjának a fogalmához más oldalról is lehet közeledni, mégpedig felhasználva a szabad félcsoportoknak bizonyos speciális felbontásait.

Miként szokásos, egy tetszőleges M halmaz *felbontásának* fogjuk nevezni a nem üres, egymást páronként nem metsző olyan részhalmazoknak bármely $\{M_\alpha\}$ családját, amelyeknek az egyesítése egybeesik az egész M halmazzal. Azt mondják, hogy az M halmaznak az $\{N_\beta\}$ felbontása *bele van írva* ugyanannak a halmaznak az $\{M_\alpha\}$ felbontásába, hogyha az első felbontás mindegyik N_β halmaza teljesen benne van a második felbontásnak valamilyen M_α halmazában. Ebben az esetben, bevett szokás szerint, azt is mondjuk, hogy az $\{N_\beta\}$ felbontás az $\{M_\alpha\}$ felbontásnak a részfelbontása.

Az M halmaz felbontásai *növekvő láncának* nevezzük eme halmaz felbontásainak jól rendezett halmazát, ha a tekintett láncot alkotó felbontások közül bármelyik az utána következő felbontásoknak részfelbontása. Az M halmaz R_γ felbontásai *növekvő lánca egyesítésének* nevezzük ennek a halmaznak azt a felbontását, amelyet a következő szabály szerint szerkesztünk meg: két elem M-ből akkor és csakis akkor tartozik az R felbontásnak egy és ugyanazon részhalmazához (osztályához), hogyha azok a tekintett láncot alkotó R_γ felbontások közül legalább az egyiknek egy és ugyanazon részhalmazában benne vannak.

A tetszőleges M halmaznak a felbontásaira nézve természetes dolog két műveletet definiálni, mégpedig a felbontások *metszetének* és *egyesítésének* a műveletét.

Hogyha $G=\{G_\alpha; \alpha\in A\}$, valamint $H=\{H_\beta; \beta\in B\}$ az M halmaznak két tetszőleges felbontása, akkor a G és H felbontások *metszetének* nevezzük azt a felbontást, amely az első és második felbontás részhalmazainak az összes nem üres $G_\alpha\cap H_\beta$ $(\alpha\in A, \beta\in B)$ metszetéből áll.

Az M halmaz $G=\{G_\alpha; \alpha\in A\}$ valamint $H=\{H_\beta; \beta\in B\}$ felbontásai egyesítésének értelmezéséhez előzőleg bevezetjük a GH-láncnak a fogalmát. Az M halmaz p és q elemeit összekötő *GH-láncnak* nevezzük az M halmaz elemeinek egy olyan $p=m_0, m_1, m_2, \ldots, m_{k-1}, m_k=q$ tetszőleges, véges sorozatát, hogy az m_{i-1} és m_i elemek tetszőleges $i=1, 2, \ldots, k$ esetén vagy a G felbontásnak egy és ugyanazon (nyilván i-től függő) G_α részhalmazában, vagy pedig a H felbontásnak egy és ugyanazon H_β részhalmazában vannak benne.

Az M halmaznak az N részhalmazát *GH-összefüggő részhalmaznak* nevezzük, ha tetszőleges két elemét össze lehet kötni GH-lánccal, és *maximális GH-összefüggő részhalmaznak* nevezzük, ha ezenkívül teljesül még az is, hogy N nincs benne az M halmaznak semmiféle bővebb, GH-összefüggő részhalmazában.

Az M halmaznak tetszőleges m eleme benne van valamilyen maximális GH-összefüggő részhalmazban, mégpedig abban a részhalmazban, amely az összes olyan elemből áll, amelyeket az m elemmel GH-lánc által össze lehet kötni. Közvetlenül következik a GH-összefüggőségnek a definíciójából, hogy egy közös elemet tartalmazó, GH-összefüggő részhalmazoknak az egyesítése ugyancsak GH-összefüggő részhalmaz lesz. Ebből következik, hogy a maximális GH-összefüggő részhalmazok páronként idegenek.

Ilyen módon bebizonyítottuk, hogy az M halmaz összes maximális GH-összefüggő részhalmazának összessége ennek a halmaznak valamilyen felbontását szolgáltatja. Ezt a felbontást a G és H felbontások *egyesítésének* nevezzük.

A felbontások egyesítésének a definíciójából közvetlenül következik, hogy a G és H felbontások mindegyike egyesítésüknek részfelbontása.

Bevezetjük most a következő definíciót.

16. DEFINÍCIÓ: Az $\mathfrak{X}$ ábécéjű F szabad félcsoportnak a $K=\{K_\alpha; \alpha\in A\}$ felbontását *automata-felbontásnak* nevezzük, hogyha az $\mathfrak{X}$ ábécének egy tetszőleges x betűjére nézve és a K felbontásnak egy tetszőleges K_α részhalmazára nézve a $K_\alpha\cdot x$ részhalmaz teljesen benne van ennek a felbontásnak valamelyik részhalmazában. A K felbontást *félcsoport-felbontásnak* nevezzük, hogyha ez a felbontás az F félcsoportnak valamilyen kongruencia-relációja által van meghatározva, más szavakkal: hogyha a K felbontás tetszőleges két részhalmazának $K_\alpha\cdot K_\beta$ szorzata teljesen benne van ennek a felbontásnak valamelyik harmadik (α-tól és β-tól függő) részhalmazában.

Könnyű belátni, hogy egy szabad félcsoportnak bármely félcsoport-felbontása egyszersmind automata-felbontás is, de a megfordított általánosságban nem érvényes. Az automata-felbontás bevezetett definíciójának analógiájára, amelyet természetes dolog automata-jobbfelbontásnak nevezni, szintén lehet vizsgálni az olyan $\{K_\alpha; \alpha\in A\}$ automata-balfelbontásokat is, amelyekre nézve az $x\cdot K_\alpha\subseteq K_\beta$ tartalmazás érvényes. Világos, hogy bármely félcsoport-felbontás nemcsak automata-jobbfelbontás, hanem automata-balfelbontás is. A továbbiakban azonban csak automata-jobbfelbontásokat fogunk használni.

Megjegyezzük még, hogy ebben a paragrafusban a „szabad félcsoport" elnevezésen értjük mind a közönséges szabad félcsoportot (egységelem nélkül), mind pedig az egységelemes (üres szóval rendelkező) szabad félcsoportot. Abban az esetben, amikor csupán az egyik típusú szabad félcsoportokra érvényes valamely állítás, ezt mindannyiszor külön megmondjuk. Ha pedig ezt nem mondjuk meg, akkor az azt jelenti, hogy a megfelelő állítás, vagy definíció mindkét (azaz egységelemes és egységelem nélküli) típusra egyaránt meg van fogalmazva.

27. TÉTEL: *Az F szabad félcsoport G és H felbontásainak a metszete és az egyesítése automata-felbontás, hogyha mindkét G és H felbontás automata-felbontás; továbbá a metszet és az egyesítés félcsoport-felbontás, hogyha mindkét G és H felbontás félcsoport-felbontás.*

BIZONYÍTÁS. A tétel állításának a helyessége a felbontások metszetének az esetére nyilvánvaló. Vizsgáljuk az egyesítésüknek az esetét, amelyet $Q=\{Q_\gamma;\ \gamma\in P\}$ által jelölünk. Feltesszük, hogy mindkét

$$G=\{G_\alpha;\ \alpha\in M\} \text{ és } H=\{H_\beta;\ \beta\in N\}$$

felbontás automata-felbontás. Legyen a és b két tetszőleges elem a Q felbontásnak egy tetszőleges Q_γ halmazából, $a_0=a, a_1, a_2, \ldots, a_n=b$ pedig legyen egy őket összekötő GH-lánc, valamint x legyen az F félcsoportnak az ábécéjéből tetszőleges betű (azaz ennek a félcsoportnak tetszőleges generátor-eleme). Minthogy G és H automata-felbontások, közvetlenül következik, hogy $a_0x, a_1x, \ldots, a_nx$ egy olyan GH-lánc, amely az $a_0x=ax$ és az $a_nx=bx$ elemeket összeköti. Minthogy pedig ax és bx a $Q_\gamma x$ halmaznak tetszőleges elemei, ezért ez a halmaz GH-összefüggő. Ámde ebben az esetben, miként könnyen belátható, ezt a halmazt tartalmazza valamilyen maximális GH-összefüggő részhalmaz, más szavakkal tartalmazza ezt az egyik részhalmaz a Q felbontásnak a halmazaiból. Ezzel bebizonyítottuk, hogy a Q felbontás tényleg automata-felbontás.

Tegyük most fel azt, hogy a G és H felbontások félcsoport-felbontások. Legyen most a, b tetszőleges elempár a Q felbontás két tetszőleges halmazának $Q_{\gamma_1}\cdot Q_{\gamma_2}$ szorzatából. Ekkor $a=cp$ és $b=dq$, ahol $c, d\in Q_{\gamma_1}$ és $p, q\in Q_{\gamma_2}$. Megszerkesztjük a $c_0=c, c_1, c_2, \ldots, c_n=d$ és $p_0=p, p_1, p_2, \ldots, p_n=q$ olyan GH-láncokat, amelyek összekötik a c és d elemeket, illetve a p és q elemeket. Ekkor $c_0p_0=cp, c_1p, c_2p, \ldots,$ $\ldots, c_mp=dp, dp_1, dp_2, \ldots, dp_n=dq$ olyan GH-lánc, amely összeköti a cp és dq elemeket.

Valóban, a c_{i-1} és c_i elemek tetszőleges $i=1, 2, \ldots, m$ mellett benne vannak egy és ugyanazon G_{α_i} vagy H_{β_i} halmazban. Minthogy azonban a G és H felbontások kongruencia-reláció által vannak meghatározva, ezért a $G_{\alpha_i}p$ halmaz teljesen benne van a G felbontás egyik halmazában, a $H_{\beta_i}p$ halmaz pedig a H felbontás valamelyik halmazában. Következésképpen a $c_{i-1}p, c_ip$ elemek egyidejűleg benne vannak a két utóbbi halmaznak az egyikében. Hasonló megfontolásokat elvégezve a tetszőleges dp_{j-1}, dp_j elempárra $(j=1, 2, \ldots, n)$ bebizonyíthatjuk, hogy a fentebb megszerkesztett lánc GH-lánc.

Ezzel pedig be lett bizonyítva, hogy a $Q_{\gamma_1}\cdot Q_{\gamma_2}$ halmaz GH-összefüggő, és következésképpen teljesen benne van a maximális GH-összefüggő halmazok egyikében. Minthogy pedig az összes ilyen halmaz benne van a Q felbontásban, ezért a tétel be lett bizonyítva.

Állapodjunk meg abban, hogy azt mondjuk, hogy az F szabad félcsoportnak valamilyen K automata-felbontása (vagy félcsoport-felbontása) az F félcsoport R_α felbontásának adott halmazába beleírt maximális automata-felbontás (illetve maximális félcsoport-felbontás), hogyha a K felbontás bele van írva az összes R_α felbontásba, és ha az semmiféle bővebb automata-felbontásnak (illetőleg félcsoport-felbontásnak) nem részfelbontása. (A maximalitásnak a fogalma itt a felbontást alkotó halmazokra vonatkozik, nem magára a felbontásra.)

A 27. tételből könnyen levezethető a következő

28. TÉTEL: *Létezik az F szabad félcsoport felbontásainak a tetszőleges halmazához egy és csakis egy olyan maximális automata-felbontás (illetve maximális félcsoport-felbontás), amely bele van írva ennek a halmaznak az összes felbontásába.*

BIZONYÍTÁS: A F félcsoportnak a felbontása különálló elemekre (szavakra) nyilvánvalóan olyan félcsoport-felbontás, és következésképpen olyan automata-felbontás is, amely bele van írva ennek a félcsoportnak tetszőleges felbontásába, és ezáltal persze az M halmazból az összes felbontásba is. Az pedig szintén nyilvánvaló, hogy automata-felbontások (ill. félcsoport-felbontások) tetszőleges, növekvő láncának az egyesítése ugyancsak automata-felbontás (ill. félcsoport-felbontás). Ezért szükségképpen létezik maximális olyan automata-felbontás (ill. félcsoport-felbontás), amely bele van írva az M halmazból az összes felbontásba. Jelöljük ezt G-vel.

Ha a G-n kívül még léteznék egy másik olyan maximális felbontás, amely az M-ből az összes felbontásba bele van írva, akkor a 27. tétel alapján a Q egyesítésük szintén automata-felbontás vagy pedig félcsoport-felbontás volna, annak megfelelően, hogy a G és H felbontások egyidejűleg vagy automata-felbontások, vagy pedig félcsoport-felbontások. Könnyű belátni azt, hogy a Q felbontás bele van írva az M halmazból egy tetszőleges R felbontásba. Valóban, tetszőleges két olyan a és b elemet, amelyek olyan különböző R_α és R_β részhalmazokban vannak benne, amelyek az R felbontásba beletartoznak, nem lehet összekötni GH-lánccal, minthogy a G és H felbontásból egy tetszőleges részhalmaz vagy teljesen benne van, vagy pedig teljesen nincs benne az R_α halmazban (vagy ami egyre megy, az R_β halmazban). Ezért egy tetszőleges GH-összefüggő részhalmaz, és egyszersmind a Q felbontásnak tetszőleges részhalmaza is teljesen benne van az R felbontás egyik részhalmazában. Végül pedig azt sem nehéz megérteni, hogy a G és H felbontások a Q felbontásnak egyszersmind részfelbontásai, miközben a Q felbontás szigorúan nagyobb, mint a G és H felbontás abban az esetben, amikor az utóbbi felbontások különbözők. Minthogy pedig ez lehetetlen, ezért a G és H felbontás egy és ugyanaz, amelyet éppen bizonyítani kellett.

Egy szabad félcsoportnak az automata-felbontásai igen kényelmes apparátust szolgáltatnak az úgynevezett összefüggő, iniciális automatáknak a tanulmányozásához.

17. DEFINÍCIÓ: Azt mondják, hogy az A automatának valamilyen a_2 *állapotát ugyanannak az automatának az* a_1 *állapota generálja*, hogyha található az A automata bemenő ábécéjében olyan p szó, amely átviszi az automatát az a_1 állapotból az a_2 állapotba. Egy iniciális automatát *összefüggőnek* nevezünk, hogyha összes állapotát generálja a kezdő állapot.

Ebben a paragrafusban olyan automatákat fogunk vizsgálni, amelyek csak az állapotoknak és a bemenő jeleknek az olyan halmazai által vannak megadva, amelyek az átmeneti függvények révén állanak egymással összefüggésben. Ennél az automaták kimenő jelei és a kimeneti függvényei figyelmen kívül maradnak. Az ilyen automatákat *kimenő jelek nélküli automatáknak* fogjuk nevezni. A kimenő jelek nélküli automatákat kívánság szerint lehet olyan *Moore*-féle automaták gyanánt is tekinteni, amelyeknél egy tetszőleges állapotnak a jeléül szolgál maga ez az állapot, következésképpen a kimenő jeleknek a halmaza egybeesik az automata állapothalmazával. Állapodjunk meg abban, hogy az ilyen automatákat *Medvegyev-féle automatáknak* nevezzük.

Tetszőleges olyan A összefüggő, iniciális automatának a megadása, amelynek $\mathfrak{X}$ a bemenő ábécéje, meghatározza az $\mathfrak{X}$ ábécéjű, egységelemes szabad F félcsoportnak valamilyen K *automata*-felbontását, éspedig egy felbontást az olyan eseményeknek a halmazán, amelyek az A automatának a különböző állapotai által vannak előállítva. Valóban, hogyha F_α a K felbontásnak tetszőleges olyan halmaza, amely az $\mathfrak{X}$ ábécéjű összes olyan szóból áll, amelyek az A automatát átviszik az a_0 kezdő állapotból valamelyik a_α állapotba, x pedig az $\mathfrak{X}$ bemenő ábécének tetszőleges betűje, akkor az $F_\alpha \cdot x$ halmaz teljesen benne van a K felbontás halmazainak az egyikében (éspedig azoknak a szavaknak a halmazában, amelyek az automatát átviszik az a_0 állapotból az $a_\alpha x$ állapotba). A leírt módon kapott K automata-felbontást az adott A automatának *megfelelő* felbontásnak nevezzük.

Megfordítva, lehet $\mathfrak{A}$-izomorfizmus erejéig egyértelműen definiálni egy $\mathfrak{X}$ ábécéjű (egységelemes) F szabad félcsoport bármely K automata-felbontásának az alapján olyan összefüggő A, iniciális (kimenő jelek nélküli) automatát, amelyre nézve éppen a K felbontás lesz a neki megfelelő felbontás. Valóban, vegyük az A automata állapotai gyanánt magukat az F_α halmazokat, amelyek a K felbontást alkotják. Az automatának az átmeneti függvénye egyértelműen definiálható a következő feltétel által: a bemenő ábécének tetszőleges x betűjére nézve és az A automatának tetszőleges F_α állapotára nézve $F_\alpha x$ állapot gyanánt a K felbontásnak a halmazai közül éppen azt választjuk, amelyik tartalmazza az $F_\alpha x$ halmazt.

Az automata kezdő állapota gyanánt választva azt az F_0 halmazt, amely tartalmazza az e üres szót, A-t mint kimenő jelek nélküli iniciális automatát definiáljuk. Hogyha p tetszőleges szó a K felbontás valamelyik F_α halmazából, akkor ez a szó a megszerkesztett A automatában átviszi az automatát az F_0 állapotból az F_α állapotba. Valóban, minthogy $e \in F_0$, valamint $ep = p \in F_\alpha$, ezért az automata-felbontásnak a definíciója szerint $F_0 p \subseteq F_\alpha$. Ezzel pedig be lett bizonyítva, hogy az A automata összefüggő és az eredeti K felbontás a neki megfelelő felbontás gyanánt szolgál.

Legyen B tetszőleges, másik, összefüggő iniciális automata kimenő jelek nélkül, amelyre nézve a K felbontás éppen a neki megfelelő felbontás. Megfeleltetve a B automata mindegyik b állapotának az A automatának azt az a állapotát, amely ugyanazt az eseményt állítja elő, mint a b állapot, akkor a B automatának nyilván az A automatára való $\mathfrak{A}$-izomorfizmusát kapjuk.

Ilyen módon bizonyítást nyert a következő

29. TÉTEL: *Létezik egyfelől az állapotra nézve páronként nem izomorf, tetszőlegesen adott $\mathfrak{X}$ bemenő ábécével rendelkező, összefüggő, kimenő jelek nélküli, összes iniciális automatának a halmaza, másfelől pedig az $\mathfrak{X}$ ábécéjű, egységelemes szabad félcsoport összes automata-felbontásának a halmaza közt egy természetes módon meghatározott, kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés.*

Felhasználva a 25. tételt, azonosítani fogjuk a kimenő jelek nélküli, összefüggő, iniciális automatákat a szabad félcsoportoknak a nekik megfelelő felbontásaival.

Az ilyen vagy olyan $\mathfrak{X}$ ábécéjű S eseménynek a megadása meghatározza az $\mathfrak{X}$ ábécéjű F szabad félcsoportnak az S és $\bar{S}$ halmazra való felbontását. Az olyan iniciális automata szintézisének a feladatát, amely előállítja az $\{S_\alpha; \alpha \in M\}$ események adott halmazát saját állapotainak a halmazai által, meg lehet fogalmazni a felbontásoknak a nyelvén is, mint olyan feladatot, hogy írjuk bele az automata-felbontást azoknak a felbontásoknak a halmazába, amelyek az S_α $(\alpha \in M)$ események által meg vannak határozva.

Ezt a feladatot könnyű redukálni az automata-felbontás egy olyan R felbontásba való beleírásának a feladatára, amely az összes olyan $\bigcap_{\alpha \in M} \tilde{S}_\alpha$ alakú nem üres metszetből áll, ahol $\tilde{S}_\alpha$ vagy az S_α-nak vagy pedig $\overline{S}_\alpha$-nak a jele. Ugyanez a beleírás úgy is megvalósítható (lásd LETICSEVSZKIJ [36]), hogy megszerkesztjük az $R=\{R_\beta;\ \beta\in N\}$ felbontás egymás után következő részfelbontásainak a sorozatát. Ebből a célból az R_β részhalmazok közül mindegyiket szétbontjuk páronként egymást nem metsző olyan R_{β_ν} részhalmazokra, hogy az $\mathfrak{X}$ bemenő ábécé tetszőleges x betűje mellett az $R_{\beta_\gamma}\cdot x$ szorzat teljesen benne legyen az R_β $(\beta\in N)$ halmazok közül valamelyikben. Az R_{β_γ} halmazok maguk is ugyancsak alá vannak vetve egy pontosan ugyanilyen szabály szerint elvégzendő szétbontásnak. Ezt hasonló módon folytatva eljutunk a keresett automata-felbontáshoz.

A reguláris események véges rendszerének az esetében a leírt módszer elvezetne egy hatékony szintézis-algoritmushoz, hogyha volna eléggé egyszerű módszer a reguláris események metszete és komplementuma reguláris kifejezéseinek a megtalálására vonatkozólag.

Mindmáig azonban nem ismeretesek, sajnos, olyan módszerek ennek a feladatnak a megoldására, amelyek lényegesen egyszerűbbek, mint az a módszer, amely az automatának az előzetes szintézisén alapul (lásd a 18. tételt).

Most pedig rátérünk a félcsoport-felbontásoknak a tanulmányozására.

Mindegyik $A(\mathfrak{A},\mathfrak{X},\mathfrak{Y},\delta,\lambda)$ automata meghatározza az $\mathfrak{X}$ ábécéjű F szabad félcsoportnak valamilyen félcsoport-felbontását. Valóban, F-ből minden egyes p szó az A automata $\mathfrak{A}$ állapothalmazának önmagába való valamilyen $a\to ap(a\in\mathfrak{A})$ leképezését indukálja. Minden egyes ilyen φ leképezésre nézve jelöljük $S\varphi$-vel az $\mathfrak{X}$ ábécéjű összes olyan szónak a halmazát, amelyek a φ leképezést létesítik.

Az összes nem üres $S\varphi$ halmaznak a rendszere nyilván megadja az F félcsoportnak valamilyen R felbontását. Könnyen belátható az is, hogy $S\varphi\cdot S\psi\subseteq S\varphi\cdot\psi$. Ilyen módon az R felbontás valóban félcsoport-felbontás lesz. Ezt *az A automata által meghatározott félcsoport-felbontásnak* nevezzük.

Az R felbontás az F szabad félcsoportnak meghatározza valamilyen kongruencia-relációját, amelyet *az adott A automata által indukált kongruencia-relációnak* fogunk nevezni.

Az $S\varphi\cdot S\psi\subseteq S\varphi\cdot\psi$ relációból és az R felbontás értelmezéséből közvetlenül adódik a következő

30. TÉTEL: *A tetszőleges A automata által indukált kongruencia-reláció olyan, hogy F-nek a szerinte vett faktor-félcsoportja izomorf az automatának a félcsoportjával.*

Tekintsünk egy A tetszőleges, összefüggő iniciális automatát, amelynek $\mathfrak{X}$ a bemenő ábécéje, és tekintsük az $\mathfrak{X}$ ábécéjű F szabad félcsoportnak az A automatának megfelelő felbontását, más szavakkal, olyan $\{R_\alpha\}$ eseményeknek a halmazát, amelyek az A különböző a_α állapotai által vannak előállítva. (Itten a_α befutja az A automata összes állapotának $\mathfrak{A}$ halmazát.) Jelöljük $P=\{P_\beta\}$-val azt a félcsoport-felbontást, amelyet az A automata határoz meg, továbbá $Q=\{Q_\gamma\}$-val pedig tetszőleges olyan félcsoport-felbontást, amely bele van írva az R automata-felbontásba.

Megmutatjuk, hogy a Q felbontás a P felbontásnak részfelbontása. Valóban, legyen Q_γ a Q felbontásnak tetszőleges részhalmaza. Válasszunk ki tetszőleges olyan q szót, amely benne van Q_γ-ban, és tekintsük a P felbontásnak azt a P_β részhalmazát, amely tartalmazza a q szót. Az R felbontásnak tetszőleges R_α részhalmazára nézve jelöljük $R_{\alpha(q)}$-val ennek a felbontásnak a részhalmazai közül azt, amelyikbe az R_α részhalmaz átkerül a q szónak a hatása alatt, azaz: $R_\alpha\cdot q\subseteq R_{\alpha(q)}$. A P felbontásnak a definíciójából közvetlenül következik, hogy a P_β részhalmaz az összes olyan p szóból áll, amelyekre $R_\alpha \cdot p \subseteq R_{\alpha(q)}$ teljesül, az R felbontásnak tetszőleges R_α részhalmazára nézve.

Minthogy pedig a Q felbontás bele van írva az R felbontásba, ezért az R_α halmazok közül mindegyik a Q felbontás részhalmazai valamilyen halmazának az egyesítése. Az ilyen $Q_{\gamma(\alpha)}$ részhalmazok közül egy tetszőleges a p szó által átmegy az $R_{\alpha(q)}$ halmazba, azaz $Q_{\gamma(\alpha)} \cdot p \subseteq R_{\alpha(q)}$. Egyszersmind, minthogy a Q felbontás félcsoport-felbontás, a $Q_{\gamma(\alpha)} \cdot Q_\gamma$ szorzat teljesen benne van a Q felbontásnak a részhalmazai közül az egyikben, ami azonban azt jelenti, hogy az R felbontásnak a részhalmazai közül az egyikben is benne van. Minthogy $p \in Q_\gamma$ és $Q_{\gamma(\alpha)} p \subseteq R_{\alpha(q)}$, ezért $Q_{\gamma(\alpha)} \cdot Q_\gamma \subseteq R_{\alpha(q)}$. Ilyen tartalmazás érvényes tetszőleges olyan $Q_{\gamma(\alpha)}$ részhalmazra nézve is, amely benne van R_α-ban. Következésképpen $R_\alpha \cdot Q_\gamma \subseteq R_{\alpha(q)}$.

Meggondolva azt, hogy P_β az összes olyan p szóból áll, amelyekre nézve $R_\alpha \cdot p \subseteq R_{\alpha(q)}$ érvényes, azt kapjuk, hogy $Q_\gamma \subseteq P_\beta$. Ezzel pedig be lett bizonyítva a Q_γ részhalmaznak Q-ból való tetszőleges megválasztása alapján az, hogy a Q felbontás bele van írva a P felbontásba. A kapott eredményt össze lehet foglalni a következő állításnak az alakjában:

31. TÉTEL: *Az a félcsoport-felbontás, amelyet egy tetszőleges A összefüggő, iniciális automata határoz meg, egybeesik egy olyan maximális félcsoport-felbontással, amely abba az automata-felbontásba van beleírva, amelyet az összes olyan eseménynek a rendszere határoz meg, amelyek az A automatának a különböző állapotai által vannak előállítva.*

Tekintsük az egy és ugyanazon $\mathfrak{X}$ ábécéjű $\{S_\alpha\}$ eseményeknek egy tetszőleges M rendszerét, valamint az $\mathfrak{X}$ ábécéjű egységelemes F szabad félcsoport- $\{S_\alpha, \bar{S}_\alpha\}$ felbontásainak a neki megfelelő K rendszerét. Azt a maximális automata-felbontást, amely a 28. tétel alapján egyértelműen meg van határozva, és amely bele van írva a K rendszernek az összes felbontásába, az *M eseményrendszer által meghatározott automata-felbontásnak* nevezzük. Hasonló módon, azt az (egyértelmű) P maximális félcsoport-felbontást, amely a K rendszernek az összes felbontásába bele van írva, az eseményeknek az M rendszere által meghatározott félcsoport-felbontásnak nevezzük.

A P félcsoport-felbontást meghatározza az F szabad félcsoportnak valamilyen kongruencia-relációja, amelyet az adott M eseményrendszer *által meghatározott kongruencia-relációnak* nevezünk. Végül pedig, az F félcsoportnak eme kongruencia-relációja szerint vett, és absztrakt félcsoportként tekintett faktorfélcsoportját az adott M eseményrendszer *által meghatározott félcsoportnak* nevezzük, magát az M rendszert pedig az *ehhez a félcsoporthoz tartozó eseményrendszernek* nevezzük.

Legyen M tetszőleges olyan eseményrendszer, amelynek az ábécéje $\mathfrak{X}$. Az F egységelemes szabad félcsoportnak az ezzel a rendszerrel meghatározott $R = \{R_\alpha\}$ automata-felbontása egyértelműen megad (a 29. tétel alapján) valamilyen összefüggő, iniciális automatát, amelynek az állapotai gyanánt lehet venni az R felbontásnak az R_α halmazait, az átmeneteit pedig az $x \in \mathfrak{X}$ betűnek a hatása alatt olyan módon lehet definiálni, hogy az $R_\alpha \cdot x$ állapot gyanánt azt kell az R felbontásnak a halmazai közül választani, amelyik tartalmazza az $R_\alpha \cdot x$ halmazt. Továbbá kezdő állapot gyanánt az R halmazok közül azt kell választani, amelyik tartalmazza az e üres szót.

Könnyű belátni, hogy az ilyen módon megszerkesztett összefüggő, iniciális, kimenő jelek nélküli A automatában az M rendszer összes eseménye előállítható az állapotoknak bizonyos halmazai által. Ezt az automatát az *eredeti M eseményrendszer által meghatározott automatának* nevezzük.

Legyen B tetszőleges másik, összefüggő, kimenő jelek nélküli, $\mathfrak{X}$ ábécéjű olyan iniciális automata, amely előállítja az M rendszer összes eseményét a saját állapotainak a halmazai által. Miként az A automatának az esetében is, úgy a B automatának az állapotait is lehet azonosítani azokkal a Q_γ eseményekkel, amelyek a különböző eseményei által elő vannak állítva. Az összes Q_γ részhalmaznak a halmaza olyan automata-felbontást alkot, amely bele van írva az összes olyan $\{S_\alpha, \bar{S}_\alpha\}$ felbontásba, amelyek az M rendszernek az S_α eseményei által vannak meghatározva. Az R felbontásnak a maximalitása alapján azt kapjuk, hogy a Q felbontás bele van írva az R felbontásba.

Mármost könnyű belátni azt is, hogy hozzárendelve minden egyes Q_γ halmazhoz egy olyan R_α halmazt, amely Q_γ-t tartalmazza, a B automatáknak egy, állapotok szerint való homomorfizmusát ($\mathfrak{A}$-homomorfizmusát) kapjuk az A automatára. Ilyen módon be lett bizonyítva a következő

32. TÉTEL: *Tetszőleges, összefüggő (kimenő jelek nélküli) olyan iniciális automata, amely az események egy adott rendszerének az eseményeit előállítja a saját állapotai által, $\mathfrak{A}$-homomorf módon leképezhető egy olyan automatára, amelyet ez az eseményrendszer határoz meg.*

A 32. tétel azt mutatja, hogy olyan automatának a megszerkesztésére, amelyet az eseményeknek egy adott M rendszere határoz meg, elegendő megszerkeszteni egy olyan, tetszőleges, iniciális, összefüggő, kimenő jelek nélküli A automatát, amely előállítja az M rendszernek az összes eseményét állapotainak a halmazai által, és úgy tekintve az A automatát, mint *Medvegyev*-féle automatát, azaz mint a *Moore*-féle automatának olyan speciális esetét, amelynél az állapotoknak a jelei gyanánt maguk ezek az állapotok szolgálnak, elegendő ezt az automatát minimalizálni a 6. tétellel összefüggésben.

Ez az előírás megadja annak a lehetőségét, hogy találjunk olyan konstruktív módszert, amely azt eredményezi, hogy ténylegesen megkeressük (legalábbis a reguláris események véges rendszereinek az esetében) azokat az automatákat és félcsoportokat, amelyek az események adott rendszere által vannak meghatározva. Ebből a célból elegendő venni az automaták szintézisének és minimalizációjának azokat a módszereit, amelyeket az előző paragrafusban fejtettünk ki.

Azt, hogy ilyen módon mármost olyan automatát kapunk, amelyet az eseményeknek az adott rendszere határoz meg, a 32. tétel biztosítja. Ami pedig azt a félcsoportot illeti, amelyet ez a rendszer határoz meg, az megadható a következő állításnak a segítségével.

33. TÉTEL: *Bármely adott eseményrendszer által meghatározott félcsoport izomorf ugyanazon rendszer által meghatározott automata félcsoportjával.*

A megfogalmazott tétel a 30. és 31. tételeknek a közvetlen következménye, minthogy az olyan maximális félcsoport-felbontás, amely bele van írva az események tetszőleges rendszerének egy automata-felbontásába, nyilvánvalóan egybeesik az eme rendszer által meghatározott félcsoport-felbontással.

A kapott eredmények természetes feladatként vetik fel az olyan események rendszerének a tanulmányozását, amelyek a félcsoportok ilyen vagy olyan speciális (véges, kommutatív, nilpotens stb.) fajtáihoz tartoznak.

Az előző paragrafus eredményeiből kapható a következő

34. TÉTEL: *A reguláris eseményeknek a véges rendszerei és csakis ezek olyan eseményrendszerek, amelyek véges félcsoportokhoz tartoznak.*

18. DEFINÍCIÓ: Valamilyen eseményt *kommutatívnak* nevezünk, hogyha tetszőlegesen adott p szóval együtt ez az esemény tartalmazza az összes olyan szót is, amelyek annak az eredményeképpen kaphatók a p szóból, hogy permutáljuk tetszőleges módon a betűit.

Érvényes a következő

35. TÉTEL: *Kommutatív eseményeknek a tetszőleges rendszerei és csakis ezek olyan eseményrendszerek, amelyek kommutatív félcsoportokhoz tartoznak.*

BIZONYÍTÁS: Legyen M az $\mathfrak{X}$ ábécéjű kommutatív $\{S_\alpha\}$ eseményeknek egy tetszőleges rendszere.

Az $\mathfrak{X}$ ábécéjű és egységelemes F szabad félcsoportnak az olyan halmazokra való R felbontása, amelyeket úgy lehet kapni, hogy adott tetszőleges szóhoz hozzávesszük a szó betűinek az összes permutációját, nyilván olyan félcsoport-felbontás lesz, amely bele van írva az összes $\{S_\alpha, \bar{S}_\alpha\}$ felbontásba. Az ennek a felbontásnak megfelelő kongruencia-reláció pedig (amelyet az $xy=yx$ azonosan teljesülő definiáló reláció által adunk meg), egy G faktorfélcsoportot határoz meg, amely szabad kommutatív félcsoport.

Világos, hogy az R felbontás bele van írva abba a P félcsoport-felbontásba, amelyet az események M rendszere határoz meg. Az a kongruencia-reláció, amely megfelel a P felbontásnak, egy olyan H faktorfélcsoportot határoz meg, amely az ismert homomorfia-tétel alapján izomorf a G félcsoportnak valamilyen faktorfélcsoportjával. Minthogy pedig ez az utóbbi félcsoport kommutatív, ezért kommutatív a H félcsoport is, amely egyik irányban bebizonyítja a tételt.

Megfordítva, hogyha az események M rendszere kommutatív félcsoporthoz tartozik, akkor ennek a félcsoportnak a szabad félcsoport kongruencia-relációja szerint vett alakban való megadásánál azok az ekvivalencia-osztályok, amelyek ezzel a kongruencia-relációval vannak meghatározva, kommutatív eseményeket alkotnak. Minthogy pedig kommutatív eseményeknek a tetszőleges egyesítései ugyancsak kommutatívak, ezért az M halmaznak az összes eseménye is kommutatív lesz. Ezzel a 35. tételt teljesen bebizonyítottuk.

A 34. és 35. tételek elegendő megvilágítást adnak annak a kérdéscsoportnak a lényegéről, amely az események és a félcsoportok tanulmányozásához való leírt közeledésnél vetődik fel. Ennél a legnagyobb jelentőségű azoknak az ekvivalencia-osztályoknak a megszerkesztése, amelyek egy szabad félcsoport tetszőleges kongruencia-relációjának felelnek meg, és amelyek meghatározzák azokat a faktorfélcsoportokat, amelyek az adott (absztrakt) G félcsoporttal izomorfok.

Világos például az, hogy egy olyan ekvivalencia-osztálynak a jelenléte, amely nem reguláris esemény, elegendő ahhoz, hogy bebizonyítottnak vegyük a G félcsoportnak a végtelenségét. Könnyű azt is belátni, hogy hasonló meggondolások lényeges szerepet játszanak az olyan problémáknak a megoldásánál, amelyek olyan típusúak, mint az ismert *Burnside*-féle (nagy) probléma.

Eme paragrafus eredményeinek a felhasználása elvezet az eseményekre vonatkozó reguláris felírások nyelve kibővítésének a lehetőségéhez, és lehetővé teszi, hogy megvalósítsuk az olyan események nagyobb osztályának eléggé tényleges leírását, amelyek nem állíthatók elő véges automatákban. Egy ilyen bővítés a reguláris kifejezéseknek a felhasználásán kívül még a szabad félcsoportban levő ilyen vagy olyan definiáló relációknak a felhasználásán alapul, amelyek lehetnek mind közönséges, mind pedig identikus relációk.

19. DEFINÍCIÓ: Legyen S egy $\mathfrak{X}$ ábécéjű tetszőleges esemény, M az $\mathfrak{X}$ ábécéjű F szabad félcsoportban definiáló relációknak tetszőleges rendszere. Az S eseménynek a definiáló relációk M rendszere szerint vett *lezárásának* nevezzük azt az eseményt, amely az S eseménynek az összes szavából és még az összes olyan szóból áll, amelyek az M rendszer definiáló relációinak az alapján ekvivalensek az S eseménynek a szavaival. Valamilyen esemény *kommutatív lezárásának* nevezzük az eseménynek a lezárását a definiáló relációknak olyan rendszere szerint, amely az $xy=yx$ egyetlen, identikus definiáló relációból áll.

A kommutatív lezárás segítségével tetszőleges esemény átalakítható kommutatív eseménnyé, ha azt kiegészítjük olyan szavakkal, amelyet a hozzátartozó szavakból úgy kapunk, hogy az őt alkotó betűknek az összes lehetséges permutációját vesszük.

Könnyű belátni, hogy valamilyen reguláris eseménynek a kommutatív lezárása nem feltétlenül reguláris. Valóban, az $R=\{xy\}$ reguláris eseményre alkalmazva a kommutatív lezárásnak a műveletét, nyilván olyan S eseményhez jutunk, amely az (x, y) ábécéjű összes olyan szóból áll, amelynek egyenlő számú x és y betűt tartalmaznak. Ámde a 14. tétel alapján az S esemény nem állítható elő véges automatában, és következésképpen nem is reguláris (lásd a 16. tételt).

Ilyen módon már a kommutatív lezárás művelete is kilép a reguláris események osztályának a határain. Felhasználva az olyan események lezárásának a műveletét egy véges definiáló reláció-rendszer szerint véve, amelyek reguláris kifejezésekkel vannak megadva, az események olyan osztályának a leírására kapunk nyelvet, amely magába zárja valódi részosztály gyanánt a reguláris eseményeknek az osztályát.

Ennek a paragrafusnak a befejezéseképpen megemlítjük, hogy JU. J. SZORKINnak az előzőleg már említett [38] dolgozatában az a kérdés van vizsgálva, hogy (a kimenő jelek nélküli) automaták hogyan adhatók meg generátorelemeknek és definiáló relációknak a segítségével. Egy tetszőleges, kimenő jelek nélküli $A(\mathfrak{A}, \mathfrak{X}, \delta)$ automatában ebből a célból kitüntetjük az állapotoknak a $\mathfrak{B}=\mathfrak{A}$ halmazát, úgy, hogy az A automatának egy tetszőleges a állapotát generálja legalább egy $b\in\mathfrak{B}$ állapot. Más szóval, létezik olyan p bemenő szó, hogy $bp=a$.

A $\mathfrak{B}$ halmazt természetes dolog az A automata generáló állapotai halmazának nevezni. Ha kizárjuk a szabad automatáknak azt az esetét, amelyet a fentiekben vizsgáltunk (lásd a 9. definíciót), akkor az A automatában szükségképpen lehet találni legalább egy olyan a állapotot, amelyet a generáló állapotokból egymástól különböző módokon lehet kapni, pl. $a=b_1\cdot p_1$ és $a=b_2p_2$. Hogy ezt a körülményt természetes módon megjelöljük, bevezetjük a $b_1p_1=b_2p_2$ definiáló relációt.

Az ilyen módon kapott definiáló relációból leszármaztatott definiáló relációkat lehet kapni, például ennek a relációnak mindkét oldalán jobbról szorozva a tetszőleges q bemenő szóval; ez adódik $b_1p_1q=b_2p_2q$. Felhasználva ezt a körülményt, az A automatának a megadásánál nem kell felírni az összes definiáló relációt, csupán a definiáló relációknak egy olyan R halmazát, hogy az A automatának egy tetszőleges definiáló relációja vagy maga is R-be beletartozik, vagy pedig ez az R-ből valamilyen definiáló relációnak a leszármaztatott relációja.

Minden ilyen R halmazt az A automata *definiáló relációi rendszerének* nevezünk (a generáló állapotoknak a $\mathfrak{B}$ rendszerére vonatkozólag). Az algebrában jól ismert módszerek segítségével végezhető el egy tetszőleges automatának a generáló elemek és definiáló relációk útján történő megadása.

Könnyű belátni azt is, hogy a kimenő jelek nélküli tetszőleges $A(\mathfrak{A}, \mathfrak{X}, \delta)$ automatát meg lehet adni a generátoroknak a rendszere és az $ax=\delta(a, x)$ alakú definiáló relációknak a rendszere által, ahol a befutja az automata összes állapotának a halmazát, x pedig az $\mathfrak{X}$ bemenő ábécének egy eleme. Az $ax=b$ alakú definiáló relációkat, ahol x a bemenő ábécének egy (tetszőleges) betűje, *kanonikus* relációknak nevezzük.

Hogyha az A automata a generátoroknak tetszőleges $\mathfrak{B}$ rendszerével és a definiáló relációknak az R rendszerével van megadva, akkor — követve JU. J. SZORKIN-t — nem nehéz megadni ezt az automatát csupán egyes kanonikus definiáló relációknak a segítségével, miközben új generáló állapotokat vezetünk be. Így például, ha az $ap=bq$ relációval van dolgunk, ahol $p=p_1x$, be lehet vezetni az $a_1=ap$ és $b_1=bq$ új állapotokat és át lehet alakítani ezt a relációt a kanonikus $a_1x=b_1$ relációvá. Felhasználva ezt a fogást, JU. J. SZORKIN megoldja az olyan automatákra vonatkozólag a szavak azonosságának és az izomorfizmusnak a problémáját, amelyek a definiáló relációknak véges rendszerei által vannak megadva. Az olyan algoritmusok megszerkesztésének az alapötlete, amelyek megoldják ezeket a problémákat, abban áll, hogy a definiáló relációknak a rendszereit átalakítják kanonikus alakba, továbbá, hogy figyelmen kívül hagyják az állapotoknak azokat a halmazait, amelyek szabad részautomatákhoz tartoznak, és hogy az ezek után megmaradó véges részleges automatákat tanulmányozzák. A megfelelő eljárásoknak a részleteibe nem megyünk bele.

5. §. Az automaták összetétele

Az automaták elméletének szisztematikus felépítésében nagy szerepet játszanak az automaták *összetételének* különféle módjai, amelyek lehetővé teszik, hogy az egyszerűbb automatákból bonyolultabb automatákat szerkesszünk. Mindenekelőtt az automatáknak az úgynevezett *direkt összegét* vizsgáljuk.

20. DEFINÍCIÓ: A közös bemenő és közös kimenő ábécéjű $A_\alpha(\mathfrak{A}_\alpha, \mathfrak{X}, \mathfrak{Y}), \delta_\alpha, \lambda_\alpha)$ *automaták halmaza direkt összegének* azt a $B(\mathfrak{B}, \mathfrak{X}, \mathfrak{Y}), \delta, \lambda)$ automatát nevezzük, amelynek állapothalmaza egybeesik az összes A_α $(\alpha \in M)$ automata állapothalmazainak az egyesítésével, a $\delta(a, x)$ átmeneti függvénynek és a $\lambda(a, x)$ kimeneti függvénynek pedig az értékei egybeesnek az olyan A_α automata $\delta_\alpha(a, x)$ átmeneti függvényének és $\lambda_\alpha(a, x)$ kimeneti függvényének az értékeivel, amelynek az állapothalmaza tartalmazza az a állapotot. (Megjegyezzük, hogy megállapodunk az egyértelműség kedvéért abban, hogy ha $\mathfrak{A}_\alpha \cap \mathfrak{A}_\beta$ nem üres, és ha a ennek a metszetnek egy eleme, akkor legyen $\delta_\alpha(a, x)=\delta_\beta(a, x)$ és $\lambda_\alpha(a, x)=\lambda_\beta(a, x)$. Egyébként „indexezés"-sel mindig elérhető, hogy $\mathfrak{A}_\alpha \cap \mathfrak{A}_\beta$ üres legyen, ha α különbözik β-tól.)

A bevezetett definíciót természetes módon meg lehet világítani arra az esetre nézve, amikor egy *adott* automata felbomlik a saját $\mathfrak{A}$-részautomatáinak direkt összegére. Ilyen felbontás lényeges szerepet játszik az olyan automaták egy fontos osztályának a tanulmányozásánál, amelyeket *féligegyszerű automatáknak* nevezünk.

A féligegyszerű automaták definiálásának az érdekében bevezetjük az automata *magvának* a fogalmát. Legyen $A(\mathfrak{A}, \mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \delta, \lambda)$ tetszőleges automata. Tekintsük az A automata összes olyan állapotának $\mathfrak{A}_1$ halmazát, amelyek ezen automata átmeneti függvényének az értékei. Továbbá $\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{X}$-szel jelölve az összes $a\cdot x$ $(a\in\mathfrak{A}, x\in\mathfrak{X})$ szorzatnak a halmazát, nyilvánvalóan azt kapjuk, hogy $\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{X}=\mathfrak{A}_1$. Most megszerkesztjük az A automatának az $A_1(\mathfrak{A}, \mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \delta_1, \lambda_1)$ alakú $\mathfrak{A}$-részautomatáját, amelynek állapothalmazául tehát az $\mathfrak{A}_1$ halmaz szolgál, az átmeneti függvény és kimeneti függvény pedig egybeesik az A automata átmeneti függvényével, illetve a kimeneti függvényével az $\mathfrak{A}_1\times\mathfrak{X}$ halmazon. Az A_1 automatát az A automata *magvának*, vagy pontosabban az *első magvának* nevezzük.

21. DEFINÍCIÓ: Az olyan automatát, amelyik egybeesik a saját magvával, *féligegyszerű automatának* nevezzük. Az automatát akkor hívják egyszerűnek, hogyha (a nem feltétlenül különböző) állapotainak tetszőleges (a, b) párjához található olyan nem üres bemenő szó, amely átviszi az automatát az a állapotból a b állapotba.

Az egyszerű automaták, az „erősen összefüggő automaták" elnevezés mellett először MOORE [20] dolgozatában voltak definiálva. Az eme automatákra vonatkozó „erősen összefüggő" elnevezés feltételezi a rokonságot azokkal az összefüggő automatákkal, amelyeket az előző paragrafusban vizsgáltunk: egy összefüggő (iniciális) automatában az összes állapot generálható egy bizonyos (rögzített) állapot által, míg az erősen összefüggő automatában tetszőleges állapot generálja az automatának az összes állapotát.

Nyilvánvaló, hogy az erősen összefüggő automatákat lehet olyan automaták gyanánt is jellemezni, amelyeknek nincsen valódi $\mathfrak{A}$-részautomatájuk.

A 21. definícióból közvetlenül kapható a következő

36. TÉTEL: *Mind valamilyen tetszőleges egyszerű (erősen összefüggő) automata, mind pedig egyszerű automaták tetszőleges halmazának a direkt összege féligegyszerű automata.*

A féligegyszerű automatáknak speciális esetei az úgynevezett inverz automaták, amelyeket S. HUZINO a [30] dolgozatában vizsgált. Állapodjunk meg abban, hogy az A automatát *inverz* automatának nevezzük, hogyha tetszőleges a állapotához és tetszőleges p bemenő szavához található olyan q bemenő szó, amely átviszi az automatát az ap állapotból az a állapotba. Feltétel szerint itt a q szó függ mind a p szótól, mind pedig az a állapottól. A mi utóbbi definíciónk valamennyire különbözik HUZINO definíciójától, amely azt tételezte fel, hogy a q szó csak a p szótól függ, de nem függ az a állapottól. Nyilvánvaló az, hogy minden egyes olyan automata, amely *Huzino*-féle értelemben inverz automata, egyszersmind inverz automata lesz a mi definíciónk szerint is. A megfordított azonban, magától értetődően, nem érvényes: ugyanis könnyű szerkeszteni példákat olyan automatára, amelynek két állapota van, és amely inverz automata a mi definíciónk szerint, de *Huzino*-féle értelemben nem az.

Könnyű belátni, hogy ha az automatának a félcsoportja csoport, akkor az automata *Huzino*-féle értelemben is inverz automata lesz. Ezzel kapcsolatban megállapodunk abban, hogy ezeket az automatákat *csoport-automatáknak* nevezzük, megkülönböztetve ezektől az inverz automatákat, amelyeket fentebb vezettünk be, és amelyek az automatáknak szélesebb osztályát alkotják.

Érvényes a következő állítás, amely általánosítja azt az eredményt, amelyet HUZINO a [30] dolgozatában kapott.

37. TÉTEL: *Bármely inverz automata felbontható egyszerű (erősen összefüggő) automatáknak a direkt összegére.*

BIZONYÍTÁS: Legyen $A = A(\mathfrak{A}, \mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \delta, \lambda)$ tetszőleges inverz automata. Tekintsük ennek valamilyen a_1 állapotát és az összes olyan állapotnak az $\mathfrak{A}_1$ halmazát, amelyek generálhatók az a_1 állapot által. Jelöljük δ_1-gyel és λ_1-gyel a δ, illetve λ függvényeknek az $\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{X}$ halmazra való megszorítását, és vegyük az A automatának az $A_1 = A_1(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \delta_1, \lambda_1)$ alakú $\mathfrak{A}$-részautomatáját. Ez a részautomata erősen összefüggő. Valóban, tetszőleges két állapotát elő lehet állítani a_1p és a_1q alakban, ahol p és q az A automatának valamilyen bemenő szavai. Minthogy A inverz automata, található olyan r bemenő szó, hogy $a_1pr = a_1$. Ámde ekkor az rq szó átviszi az automatát az a_1p állapotból az a_1q állapotba. Hogyha az a_1 állapotból legalább az egyik különbözik az a_1p és a_1q állapotok közül, akkor az $r \cdot q$ szó szükségképpen nem üres. Hogyha pedig $a_1p = a_1q = a_1$, akkor tetszőleges $x \in \mathfrak{X}$ betűre nézve vagy $a_1x = a_1$, vagy pedig $a_1xl = a_1$ érvényes valamilyen l nem üres szóval (ti. ha $a_1x \neq a_1$). Ezért az összes esetben át lehet jutni egy nem üres szónak a hatására az a_1p állapotból az a_1q állapotba. Következésképpen az A_1 automata erősen összefüggő.

Ha $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}$, akkor persze $A = A_1$, és ekkor a tétel be van bizonyítva. Hogyha pedig $\mathfrak{A}_1 \neq \mathfrak{A}$, akkor választunk egy olyan tetszőleges a_2 állapotot, amely nincs benne az $\mathfrak{A}_1$ halmazban, és megszerkesztjük az $A_2(\mathfrak{A}_2, \mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \delta_2, \lambda_2)$ részautomatát, amelynek az állapothalmaza gyanánt szolgál az összes olyan állapotnak a halmaza, amelyek generálhatók (az A automatában) az a_2 állapot által. A fentiekhez hasonlóan bebizonyíthatjuk, hogy az A_2 automata erősen összefüggő. Hogyha az $\mathfrak{A}_1$ és $\mathfrak{A}_2$ halmazok egymást metszenék, akkor a metszetükből tetszőleges b elem rendelkeznék $b = a_1p$ és $b = a_2p$ alakú előállításokkal, ahonnan könnyen levezethető volna az, minthogy A inverz automata, hogy valamilyen r_1 bemenő szó mellett $a_2 = a_1p_1r_1$ teljesülne. Ez azonban azt jelentené, hogy $a_2 \in \mathfrak{A}_1$, amely ellentmond az a_2 állapot megválasztásának. Következésképpen az $\mathfrak{A}_1$ és $\mathfrak{A}_2$ állapotok idegenek.

Hasonló módon folytatva az eljárást, megszerkesztjük az erősen összefüggő olyan A_α részautomatáknak a rendszerét, amelyek állapotainak a halmazai páronként idegenek, és összegük az egész $\mathfrak{A}$ halmaz. A definíció értelmében az A automata felbomlik az A_α automaták direkt összegére, amelyet éppen bizonyítani kellett.

Nem nehéz megmutatni egy példán azt, hogy a 37. tételnek tetszőleges féligegyszerű automatára vonatkozó általánosítása nem lehetséges.

Megjegyezzük továbbá, hogy az automata magvának imént bevezetett fogalmát felhasználva, az automaták elméletét a gyűrűk elméletének az analógiájára fel lehet építeni. Ebből a célból tetszőleges A automatára nézve meg lehet szerkeszteni az A_α magvaknak a csökkenő sorát, ahol α befutja a rendszámoknak valamilyen halmazát, kezdve az $\alpha = 0$ értékkel. Ennek a sornak az első tagjául vesszük magát az A automatát, és tetszőleges α rendszámra nézve $A_{\alpha+1}$-et úgy definiáljuk, hogy ez legyen az A_α automatának a magva. Valamilyen β limesz rendszámra vonatkozólag pedig az A_β automatát úgy definiáljuk, hogy ez legyen az A automatának olyan részautomatája, amely állapotainak a halmaza egybeesik az összes $\alpha < \beta$ rendszámra az A_α részautomaták állapotai halmazainak a metszetével. Ez a sor befejeződik egy legkisebb olyan γ rendszámnál, amelyre $A_{\gamma+1} = A_\gamma$ teljesül.

Az A_γ automata, amelyet az A automata alsó magvának nevezünk, nyilván féligegyszerű. Ez az ismert értelemben a gyűrűelméleti radikálnak felel meg, azonban, eltérőleg az automatáktól, a gyűrűknek az elméletében nem maga a radikál félig-egyszerű, hanem a gyűrűnek a radikál szerint vett faktorgyűrűje.

Most pedig áttérünk az automaták összetétele olyan másik típusának a tanulmányozására, amelyet természetes dolog *az automaták szorzatának* nevezni. Ténylegesen nem is egy összetétellel lesz ennek során dolgunk, hanem összetételeknek egész osztályával. Egyszerűség kedvéért csak véges számú automatának a szorzatára korlátozzuk magunkat, ámbár a bevezetett fogalmakat könnyen lehet általánosítani az automaták tetszőleges halmazának az esetére is.

22. DEFINÍCIÓ: Az $A_i = A_i(\mathfrak{A}_i, \mathfrak{X}_i, \mathfrak{Y}_i, \delta_i, \lambda_i)$ $(i=1, 2, ..., k)$ automaták *direkt szorzatának* nevezzük azt az $A = A(\mathfrak{A}, \mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \delta, \lambda)$ automatát, amely állapotainak a halmaza, valamint a bemenő és kimenő jeleinek a halmaza éppen az A_i automaták megfelelő halmazainak a szorzata, azaz: $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2 \times ... \times \mathfrak{A}_k$; $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_1 \times \mathfrak{X}_2 \times ... \times \mathfrak{X}_k$; $\mathfrak{Y} = \mathfrak{Y}_1 \times \mathfrak{Y}_2 \times ... \times \mathfrak{Y}_k$. Az A automatának az $a' = \delta(a, x)$ átmeneti függvényét, valamint az $y = \lambda(a, x)$ kimeneti függvényét ezekkel az összefüggésekkel adjuk meg: $a_i' = \delta(a_i, x_i)$ és $y_i = \lambda_i(a_i, x_i)$ $(i = 1, 2, ..., k)$, ahol $a' = (a_1', a_2', ..., a_k')$, $a = (a_1', a_2', ..., a_k')$; $x = (x_1, x_2, ..., x_k)$ és $y = (y_1, y_2, ..., y_k)$.

Az automaták elméletének gyakorlati alkalmazásainál a direkt szorzat műveletének egyszerűen az automaták adott halmazának együttes vizsgálata felel meg, a köztük levő bármiféle összefüggések nélkül. A gyakorlatban azonban sokkal gyakrabban valósulnak meg az automatáknak az egyesítései az úgynevezett logikai vagy kombinatív vázlatoknak a segítségével. Az absztrakt vizsgálatnál az automaták szorzatának egy általánosabb fogalma felel meg az ilyen egyesítésnek.

23. DEFINÍCIÓ: Az $A_i = A_i(\mathfrak{A}_i, \mathfrak{X}_i, \mathfrak{Y}_i, \delta_i, \lambda_i)$ $(i=1, 2, ..., k)$ automatáknak *a szorzata* az az $A = A(\mathfrak{A}, \mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \delta, \lambda)$ automata, amely az $\mathfrak{X}$ és $\mathfrak{Y}$ két halmaznak és két leképezésnek a megadása által van meghatározva. Ez a két leképezés: az $\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2 \times ... \times \mathfrak{A}_k \times \mathfrak{X}$ halmaznak az $\mathfrak{X}_1 \times \mathfrak{X}_2 \times ... \times \mathfrak{X}_k$ halmazba való φ leképezése, és az $\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2 \times ... \times \mathfrak{A}_k \times \mathfrak{X}$ halmaznak az $\mathfrak{Y}$ halmazba való ψ leképezése. Az A automata állapotainak $\mathfrak{A}$ halmaza egybeesik az A_i $(i=1, 2, ..., k)$ automaták állapotai $\mathfrak{A}_i$ halmazainak $\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2 \times ... \times \mathfrak{A}_k$ szorzatával. Hogyha $a = (a_1, a_2, ..., a_k)$ az A automatának tetszőleges állapota, $x \in \mathfrak{X}$ pedig tetszőleges bemenő jele, az A automata átmeneti és kimeneti függvényeinek az értékeit a következő összefüggések segítségével definiáljuk az (a, x) páron: $\delta(a, x) = (a_1 x_1, ..., a_k x_k)$ és $\lambda(a, x) = a$, ahol $(x_1, x_2, ..., x_k)$ az $(a_1, a_2, ..., a_k, x)$ elemnek a képe a φ leképezésnél, y pedig ugyanannak az elemnek a képe a ψ leképezésnél. Hogyha az összes A_i kezdő automata, akkor az A automatát is kezdő automatának vesszük és kezdő állapota gyanánt az $(a_1^0, a_2^0, ..., a_k^0)$ állapotot választjuk, ahol a_i az A_i automatának a kezdő állapota.

Megjegyezzük, hogy a 23. definícióban a φ leképezés tulajdonképpen az inverz összefüggés szkémájának absztrakt kifejezése, a ψ leképezés pedig az olyan kimenő szkémáknak az absztrakt kifejezése, amelyeket az automaták összetétele gyakorlati megvalósításánál szerkesztenek meg.

Az automaták elméletével kapcsolatos gyakorlati alkalmazások számára fontos jelentősége van a véges automata rendszerek *teljességi feltételeinek*. Az automaták rendszerének a teljességi problémáját a két legfontosabb esetre vonatkozólag fogalmazzuk meg, ezeket az automaták izomorf és homomorf előállítása eseteinek nevezzük.

24. DEFINÍCIÓ: Véges automatáknak valamely M rendszerét *izomorf módon teljesnek* nevezzük, hogyha bármely előre megadott A véges automatához létezik

az M rendszerhez tartozó automatákkal izomorf automatáknak egy véges szorzata, úgy, hogy ez a szorzat tartalmaz egy az A automatával izomorf $\mathfrak{A}$-részautomatát. Az M rendszert *homomorf módon teljesnek* nevezzük, hogyha bármilyen A véges automatához létezik az M rendszerhez tartozó automatákkal izomorf automatáknak egy véges szorzata, s ez a szorzat tartalmaz egy olyan $\mathfrak{A}$-részautomatát, amely $\mathfrak{A}$-homomorf módon leképezhető az A automatára.

Állapodjunk meg abban, hogy a Q esemény rendszert az A automatában előállíthatónak nevezzük, hogyha lehetséges az automata kezdő állapotának olyan megválasztása, amelynél a Q rendszer valamennyi eseménye az A automatában előállítható az állapotainak valamilyen halmaza segítségével. Könnyű belátni, hogy az eseményeknek olyan rendszere, amely elő van állítva az A automatában, elő lesz állítva egy tetszőleges olyan B automatában is, amelyiket homomorf módon le lehet képezni az A automatára. Ennek a ténynek a megállapítása érdekében elegendő a B automatának a kezdő állapota gyanánt egy olyan állapotot megválasztani, amely a B-nek az A-ra történő valamilyen φ homomorfizmusánál az A automatának a kezdő állapotára képeződik le, és a B automatában az állapotok halmazának a reprezentánsai gyanánt pedig elegendő választani az A automata állapothalmaza reprezentánsainak a φ homomorfizmusra vonatkozó teljes inverz képeit.

Az elvégzett megfontolásokból következik az alábbi eredmény, amely A. A. LETICSEVSZKIJ [37] dolgozatából a 2. tétel átfogalmazása.

38. TÉTEL: *Véges automatáknak egy M rendszere akkor és csakis akkor izomorf módon teljes, hogyha a reguláris eseményeknek tetszőleges véges rendszerei elő vannak állítva az olyan automatáknak a véges szorzataiban, amelyek izomorfok az M rendszernek az automatáival.*

Mármost nem nehéz belátni, hogy a véges automaták M rendszerének a homomorf módon (vagy még inkább az izomorf módon) való teljessége megadja annak a lehetőségét (ama feltétel mellett, hogy felhasználjuk az automatáknak az egyesítésére a tetszőleges kombinatív szkémákat), hogy olyan automatákat szerkesszünk meg az automatáknak egy adott rendszeréből, amelyek tetszőleges olyan automataleképezéseket indukálnak, amelyeket általánosságban véges automatákkal is lehet indukálni. (Ennek során feltesszük azt, hogy az M rendszerből minden egyes automata korlátlan számú példányban fordul elő.)

A. A. LETICSEVSZKIJ [37] megtalálta annak szükséges és elégséges feltételét, hogy a véges automatáknak egy rendszere homomorf módon teljes legyen. Ez a feltétel abban áll, hogy a rendszer tartalmaz legalább egy olyan automatát, amelynél létezik olyan a állapot, valamint léteznek olyan x_1 és x_2 bemenő jelek, hogy az $a_1=ax_1$ és $a_2=ax_2$ állapotok különbözőek, és léteznek olyan p_1 és p_2 bemenő szavak, amelyek átviszik ezeket az állapotokat az a állapotba.

LETICSEVSZKIJ eme állítására vonatkozólag a bizonyítást nem fogjuk elvégezni, hanem megmutatjuk a vele rokon, de a bizonyítására nézve egyszerűbb következő állításnak az érvényességét.

39. TÉTEL: *Ahhoz, hogy a véges automatáknak az M rendszere izomorf módon teljes legyen, szükséges és elegendő az, hogy a rendszernek az állományában létezzék legalább egy olyan A automata, amelynél van két olyan a és b állapot, továbbá vannak olyan x_1, x_2, x_3 és x_4 egymástól nem feltétlenül különböző bemenő jelek, amelyekre $ax_1=a$, $ax_2=b$, $bx_3=a$ és $bx_4=b$ teljesülnek.*

BIZONYÍTÁS: A feltétel szükségességének a bizonyítására az M rendszer $A_1, A_2, \ldots, A_k$ automatái véges szorzatának a részautomatája gyanánt vesszük a B automatát az a és b két állapottal, valamint az x és y két bemenő jellel. Az átmeneti függvényt az $ax=b$, $bx=a$, $ay=a$ és $by=b$ összefüggésekkel adjuk meg. A 23. definíció értelmében az a és b állapotok az A_i automaták a_i és b_i állapotainak a véges szorzatai: $a=(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ és $b=(b_1, b_2, \ldots, b_k)$. Ugyanannak a definíciónak az értelmében az $ax=b$, $bx=a$, $ay=a$, $by=b$ összefüggések azt jelentik, hogy létezik az A_i automaták bemenő jeleinek négy olyan sorozata: $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$; $(x_1', x_2', \ldots, x_k')$; $(y_1, y_2, \ldots, y_k)$ és $(y_1', y_2', \ldots, y_k')$, hogy tetszőleges $i=1, 2, \ldots, k$ esetén érvényesek az $a_ix_i=b_i$, $b_ix_i'=a_i$ $a_iy=a_i$ és $b_iy_i'=b_i$ összefüggések. Amennyiben $a \neq b$, létezik olyan i, hogy $a_i \neq b_i$. De ekkor az M rendszerből az A_i automatának az a_i és b_i állapotai eleget tesznek a tételben megfogalmazott feltételnek. Ezzel be lett bizonyítva eme feltételnek a szükségessége.

Az elegendőségnek a bizonyítására tekintsünk egy A automatát n állapottal, továbbá k számú példányt olyan $A_1, A_2, \ldots, A_k$ automatákból, amelyek közül mindegyiknek az a_i és b_i két különböző állapota és olyan x_i, y_i, z_i, u_i négy bemenő jele van, hogy

$$a_ix_i=a_i,\ a_iy_i=b_i,\ b_iz_i=a_i,\ b_iu_i=b_i \tag{12}$$

$(i=1, 2, \ldots, k)$. Hogyha $2^k > n$, akkor azonosítani lehet az A automatának minden egyes a állapotát az A_i $(i=1, 2, \ldots, k)$ automaták a_i vagy b_i állapotainak a véges sorozataival, minthogy különböző állapotoknak különböző sorozatok felelnek meg. Ezeket a sorozatokat az állapotok *kódjainak* nevezzük. Minthogy a (12) összefüggések biztosítják az a_i és b_i állapotok közt a tetszőleges átmeneteket, a 23. definícióban levő φ leképezést lehet úgy megválasztani, hogy az A automata kódjainak a halmazán tetszőleges átmeneti függvényt valósítsunk meg. Alkalmas módon megszerkesztve a φ leképezést, ezen a halmazon a kimeneti függvényt is meg lehet valósítani.

Az $A_1, A_2, \ldots, A_k$ automatáknak a szorzata, amelyet a leképezéseknek a megválasztásával definiálunk, nyilván tartalmaz egy olyan részautomatát, amely $\mathfrak{A}$-izomorf az A automatával (és amely állapotainak a halmaza éppen az A automatához tartozó állapotok kódjainak a halmaza). Ezzel a tételt teljesen bebizonyítottuk.

Az automaták szorzatának az általános fogalmával együtt célszerű az automaták szorzatainak még néhány speciális fajtáját vizsgálni. Egyszerűség kedvéért csupán a kimenő jelek nélküli és közös bemenő ábécékkel rendelkező automatákra korlátozódunk.

Hogyha $A_i(\mathfrak{A}_i, \mathfrak{X}, \delta_i)$ $(i=1, 2, \ldots, k)$ ilyen automatáknak tetszőleges véges halmaza, akkor természetes dolog az $A(\mathfrak{A}, \mathfrak{X}, \delta)$ automatát kimenő jelek nélkül tekinteni, amelynek az állapothalmaza egybeesik az $\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2 \times \ldots \times \mathfrak{A}_k$ halmazzal, az átmeneti függvényét pedig az $(a_1, a_2, \ldots, a_k)x=(a_1x, a_2x, \ldots, a_kx)$ összefüggés által adjuk meg. Az ilyen módon megszerkesztett A automatát az $A_1, A_3, \ldots, A_k$ automaták *$\mathfrak{A}$-direkt szorzatának* nevezzük. Hogyha az összes A_i automata kezdő automata, akkor az A automatát szintén vehetjük kezdő automatának, kezdő állapota gyanánt pedig az A_i $(i=1, 2, \ldots, k)$ automaták kezdő állapotainak a sorozatát vesszük.

Könnyű belátni, hogy érvényes a következő

40. TÉTEL: *A kimenő jelek nélküli* $A_1, A_2, \ldots, A_k$ *kezdő automaták* $\mathfrak{A}$*-direkt szorzatában (az állapotoknak a halmazai által) elő lehet állítani az összes olyan eseményt, amelyeket azokból az eseményekből lehet kapni az egyesítés, a közös rész és komplementumképzés műveleteinek a segítségével, amelyek előállíthatók az* $A_1, A_2, \ldots, A_k$ *automatákban.*

A direkt szorzatnak a fogalmával együtt, egyes esetekben célszerűnek mutatkozik az automatáknak a *féligdirekt* szorzatát és a *kereszt*szorzatát tanulmányozni. Ezeket a fogalmakat olyan kimenő jelek nélküli két $A(\mathfrak{A}, \mathfrak{X}, \delta)$ és $B(\mathfrak{B}, \mathfrak{X}, \delta_1)$ automatának az esetére definiáljuk, amelyeknek közös az $\mathfrak{X}$ bemenő ábécéjük. Az A és B automaták *féligdirekt szorzatának* természetes dolog azt a $C(\mathfrak{C}, \mathfrak{X}, \delta_2)$ automatát nevezni, amelynek az állapothalmaza az A és B automaták állapotai összes rendezett $c=(a, b)$ párjának a halmaza ($a \in \mathfrak{A}$, $b \in \mathfrak{B}$), míg a bemenő ábécé egybeesik az A és B automatáknak a bemenő ábécéivel. A C automata átmeneti függvényét az

$$(a, b)x = \big(a\varphi(b, x), bx\big) \tag{13}$$

összefüggéssel definiáljuk, ahol x tetszőleges elem $\mathfrak{X}$-ből, továbbá $\varphi(b, x)$ olyan függvényt jelent a $\mathfrak{B} \times \mathfrak{X}$ halmazon, amelynek értéke az $\mathfrak{X}$ halmazból való. Hogyha a (13) összefüggést kicseréljük az

$$(a, b)x = \big(a\varphi(b, x), b\psi(a, x)\big) \tag{14}$$

összefüggéssel, akkor eljutunk az A és B automaták *keresztszorzatának* általánosabb fogalmához. Miként fentebb is, itt $\varphi(b, x)$ és $\psi(a, x)$ a $\mathfrak{B} \times \mathfrak{X}$, illetve az $\mathfrak{A} \times \mathfrak{X}$ halmazokon értelmezett és az $\mathfrak{X}$ halmazból vett értékű függvények.

Könnyű belátni, hogy a $\varphi(b, x)$ és a $\psi(a, x)$ függvényeket úgy lehet tekinteni, mint bizonyos olyan automaták átmeneti függvényeit, amelyeknek állapothalmaza éppen az $\mathfrak{X}$ halmaz, míg a bemenő ábécék egybeesnek a $\mathfrak{B}$, illetve az $\mathfrak{A}$ halmazzal. Ilyen módon, az A és B automatáknak a keresztszorzatát két olyan automatával lehet definiálni, amelyek duálisak az A és B automatákkal abban az értelemben, hogy az állapotok halmazainak szerepét az A és B automaták bemenő ábécéje játssza, a kimenő ábécéknek a szerepét pedig eme automatáknak az állapothalmazai játsszák.

Az automatáknak mind a féligdirekt szorzata, mind pedig a keresztszorzata teljesen meghatározott módszernek felel meg a tényleges automatáknak az összetételénél, amelyek a gyakorlatban használatosak. Ezzel kapcsolatban (véges automaták esetére nézve) nem érdektelen az olyan eseményeknek a tanulmányozása, amelyek ilyen szorzatokban előállíthatók.

HUZINO [32] dolgozatában az automatáknak olyan szorzatát vizsgálta, amely az ebben a paragrafusban vizsgált összes szorzattól különbözik. Ezt a műveletet két olyan A és B automatára lehet alkalmazni, amelyeknél egybeesnek egymással mind az állapotoknak a halmazai, mind pedig a bemenő ábécék. Ennek az összetételnek az eredménye az ugyanazon $\mathfrak{A}$ állapothalmazzal és ugyanazon $\mathfrak{X}$ bemenő ábécével rendelkező C automata, mint amilyenekkel az A és B automaták rendelkeznek. Hogyha $\delta_1(a, x)$ és $\delta_2(a, x)$ az A és B automaták átmeneti függvényei, akkor a C automata $\delta(a, x)$ átmeneti függvényét a $\delta(a, x) = \delta_2\big(\delta_1(a, x), x\big)$ összefüggésnek a segítségével definiáljuk. Az így bevezetett összetételnek a segítségével megoldható a teljességnek a problémája, amely analóg a teljességnek a közönséges szorzatra vonatkozó, fentebb vizsgált problémájával.

A következőkben azt említjük meg, hogy a szorzatnak az általunk bevezetett fogalmától eltérőleg az automatáknak a *Huzino*-féle értelemben vett szorzata nem egy absztrakt kifejezése a tényleges automaták összetételei olyan módszereinek, amelyek előfordulnak a gyakorlatban.

S. Huzino a [31] és [33] dolgozataiban az automatákkal kapcsolatban néhány még speciálisabb műveletet is vizsgált.

Az automaták összetételének a gyakorlati felhasználások szempontjából kívánatos módszerei közül fontos jelentőséggel rendelkeznek az automaták ún. *szuperpozíciói*. Gyakorlati szempontból az automatáknak a szuperpozíciója azt jelenti, hogy az egyik automatának a kimenő jeleit a másik automatának a bemenő jelei gyanánt használjuk fel. Ennek az eljárásnak az absztrakt kifejezésénél eljutunk a következő definícióhoz.

25. DEFINÍCIÓ: Legyen adva két olyan $A_1(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \delta_1, \lambda_1)$ és $A_2(\mathfrak{A}_2, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}, \delta_2, \lambda_2)$ automata, hogy eme automaták közül a másodiknak a bemenő ábécéje egybeesik az elsőnek a kimenő ábécéjével. Az A_1 és A_2 automaták $A_2(A_1)$ *szuperpozíciójának* azt a $B(\mathfrak{B}, \mathfrak{X}, \mathfrak{Z}, \delta, \lambda)$ automatát nevezzük, amelynek az állapothalmaza egybeesik az A_1 és A_2 automaták állapothalmazainak $\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2$ szorzatával. A B automatának tetszőleges $b=(a_1, a_2)$ állapotára nézve és tetszőleges bemenő jelre nézve a B automata átmeneti és kimeneti függvényének értékeit az alábbi összefüggésekkel határozzuk meg:

$$\delta(b, x) = \big(\delta_2(a_2, \lambda_1(a, x)), \delta_1(a_1, x)\big)$$

$$\lambda(b, x) = \lambda_2(a, \lambda_1(a_2, x)).$$

Könnyű belátni, hogy az automaták szuperpozíciója a 23. definíció értelmében az automaták szorzatának egyik speciális esete. Továbbá, ha kimenő jelek nélküli automatákat tekintünk, akkor az automaták szuperpozíciója az automaták féligdirekt szorzatának egy speciális esetébe megy át. Ezzel még egyszer ki lett hangsúlyozva az automaták féligdirekt szorzatai tanulmányozásának a fontossága.

Az automaták szuperpozíciójának a fogalma természetes általánosításokat tesz lehetővé. Megtörténhetik nevezetesen az, hogy az A automatának az $\mathfrak{X}$ bemenő ábécéje egybeesik az $A_1, A_2, \dots, A_k$ automaták kimenő ábécéinek az $\mathfrak{Y}_1 \times \mathfrak{Y}_2 \times \dots$ $\dots \times \mathfrak{Y}_k$ szorzatával. Ebben az esetben a 25. definíció analógiájára nem nehéz definiálni az $A_1, A_2, \dots, A_k$ automatáknak és az A automatának a szuperpozícióját. Felhasználva többszörösen a hasonló, *általánosított szuperpozíciót*, meg lehet szerkeszteni *az automaták hálózatait.*

Az ilyen hálózatoknak a megszerkesztésénél rendszerint az ún. *elemi automatáknak* egy teljesen meghatározott rendszeréből indulnak ki, miközben az elemi automaták hálózatainak a segítségével bonyolultabb automatákat készítenek. A hálózatoknak az általános elmélete a közönséges és általánosított szuperpozícióval együtt megadja a megfordított összefüggés zárt láncainak azt a lehetőséget, hogy a hálózatnak a kimenő jelei közül némelyeket fel lehet használni bemenő jelek gyanánt azokban az elemi automatákban, amelyek ezeknek a kimenő jeleknek a megalkotásában részt vesznek.

Az elemi automaták hálózatainak az elmélete az automaták általános elméletének olyan részét alkotja, amelyet természetes dolog *az automaták struktura-elméleté-*

nek nevezni. Ez az elmélet, amely főleg alkalmazási szempontból fejlődött ki, jelenleg már olyan kiterjedt irodalommal rendelkezik, amelyben sok száz cikk található. Ezeknek a többsége az ún. *kombinatív hálózatoknak* van szentelve, amelyek olyan automatákból állanak, amelyek közül bármelyiknek (amely azonban azt jelenti, hogy az egész hálózatnak is) csupán egyetlen állapota van.

Az utóbbi időben kialakult az a tendencia, hogy absztrakt algebrai módszerekkel tanulmányozzák az automatáknak a hálózatait, éspedig mindenekelőtt az ún. *ideg-hálózatokat*. A leginkább befejezett formában L. A. SZKORNYAKOV [26] és [27] dolgozataiban mutatkozott meg ez a törekvés. Ennek a törekvésnek csírái megtalálhatók azonban korábbi dolgozatoknak egész sorában, mindenekelőtt S. C. KLEENE [14] dolgozatában (lásd [15]-öt is). A jelen cikknek a korlátozott terjedelme nem engedi meg, hogy megadjuk ennek az irányzatnak a részletes jellemzését, annál is inkább, mert ez az irányzat formailag igen absztrakt lenne, és a mi terminológiánk szerint ez az irányzat az automatáknak nem az absztrakt elméletéhez, hanem a struktura-elméletéhez tartozik.

6. §. Kísérletek az automatákkal

Az 1. §-ban definiálva lett az $a_1 \cdot a_2 \ldots a_k$ állapot-szó, és a $q = y_1 \cdot y_2 \ldots y_k$ kimenő szó, amelyek megfelelnek a $p = x_1 \cdot x_2 \ldots x_k$ bemenő szónak az A automata tetszőleges a állapotában. A szavak ilyen módon kapott (p, q) párját célszerű *az A automatával az a állapotban végzett k hosszúságú kísérletnek* nevezni. A p szót a kísérlet bemenő szavának, a q szót pedig a kísérlet kimenő szavának, vagy a kísérlet eredményének nevezzük.

A *Moore*-féle automatákra vonatkozólag szokásos a kísérletnek valamennyire más definícióját venni, amelyet *Moore-féle kísérletnek* fogunk nevezni (lásd [20]). Miként a közönséges kísérletet, úgy a *Moore*-féle automatával valamilyen a állapotban való *Moore*-féle kísérletet is olyan (p, q) párral adunk meg, amely a $p = x_1 \cdot x_2 \ldots x_k$ bemenő szóból és a neki megfelelő q kimenő szóból áll. Eltérőleg azonban a közönséges kísérlettől, a *Moore*-féle kísérletben a q kimenő szó nem esik egybe azzal az $r = y_1 \cdot y_2 \ldots y_k$ kimenő szóval, amely az a állapotban megfelel a p szónak, hanem az $y_0, y_1 \ldots y_{k-1}$ szóval egyenlő, ahol y_0 az a állapotnak a jele. Az ilyen módon kapott q szót *elmozdított kimenő szónak* nevezzük, amely az a állapotban megfelel a p bemenő szónak.

Az automatákkal való kísérleteknek a tanulmányozása az automaták absztrakt elméletének sajátos fejezetét alkotja, amelynek a különböző szerzők a dolgozatoknak egész sorát szentelték (lásd [4], [6], [7], [13], [20], [30]). Ennek az irányzatnak alapvető dolgozata E. MOORE [20] cikke, amelyben a kísérletek elméletének sok fontos problémája lett elsőnek megfogalmazva és megoldva. Ezeknek a feladatoknak az értelme abban áll, hogy a kísérletnek az eredményeképpen ilyen vagy olyan tájékoztatást kapunk az automatának a belső szerkezetére vonatkozólag, más szóval az automatának az átmeneti és kimeneti függvényeire vonatkozólag.

Ebben a paragrafusban a kísérletek elméletének csupán a legfontosabb néhány olyan eredményét összegezzük, amelyek ennek a cikknek az anyagával tartalmilag összefüggenek. Ennek során eltérünk a kialakult hagyományoktól, és nem fogjuk magunkat csak a *Moore*-féle kísérletekre korlátozni.

Két egymásközt ekvivalens (ill. *Moore*-féle módon ekvivalens) állapot nyilván nem különböztethető meg egymástól semmiféle kísérletnél (ill. semmiféle *Moore*-féle kísérletnél) sem. Más szóval, ez a két állapot tetszőleges bemenő szóhoz a kísérletnek (*Moore*-féle kísérletnek) egy és ugyanazon eredményét rendeli hozzá. Magától értetődően érvényes a megfordított állítás is: az egymástól (a mondott értelemben) nem megkülönböztethető állapotok mindenképpen ekvivalenseknek (illetőleg *Moore*-féle módon ekvivalenseknek) mutatkoznak.

Az automaták megkülönböztethetetlenségének az esetére valamennyire más lesz a helyzet. Követve MOORE [20] dolgozatát, mindenekelőtt megadjuk a megfelelő fogalmaknak a pontos definícióját.

26. DEFINÍCIÓ: Az A automatát a B automatától *megkülönböztethetetlennek* (illetve *Moore-féle módon megkülönböztethetetlennek*) nevezzük akkor, hogyha létezik az első automatának a tetszőleges a állapotához és tetszőleges p bemenő szóhoz a második automatának olyan b állapota, hogy a p bemenő szóval végzett kísérletek (ill. *Moore*-féle kísérletek) az a és b állapotokban egy és ugyanazon eredményt adják.

Világos, hogy az ekvivalens (*Moore*-féle módon ekvivalens) automaták egyszersmind megkülönböztethetetlenek (ill. *Moore*-féle módon megkülönböztethetetlenek) is lesznek. A megfordított állítás azonban nem érvényes. Megemlítjük azt az ellenpéldát, amelyet E. MOORE [20] készített. Ebből a célból vizsgáljuk az A és B két *Moore*-féle automatát, amelyeknek (x, y) a bemenő ábécéjük és (u, v) a kimenő ábécéjük, és amelyek az átmeneteknek a következő megjelölt táblázataival vannak megadva:

	u	v	u	u
	1	2	3	4
x	2	1	1	2
y	3	3	2	2

	u	v	u
	1	2	3
x	2	1	1
y	3	3	2

Könnyű belátni azt, hogy az első automata (az A automata) *Moore*-féle módon megkülönböztethetetlen a második automatától (a B automatától). Valóban, $i = 1, 2, 3$ esetén az A automatának az i állapota *Moore*-féle módon megkülönböztethetetlen a B automatának az i állapotától. Ami pedig az A automatának a „4-es" állapotát illeti, nem nehéz igazolni azt, hogy ebben az állapotban a p bemenő szóval való tetszőleges *Moore*-féle kísérlet ugyanazt az eredményt adja, mint az „1" állapotban ez a *Moore*-féle kísérlet ugyanezzel a bemenő szóval (ha a p szó x betűvel kezdődik), vagy pedig mint a kísérlet a „3" állapotban ugyanazzal a bemenő szóval (hogyha a p szó y betűvel kezdődik). Ennek következtében az A és B automaták egymással nem ekvivalensek.

Az automatáknak a megkülönböztethetetlensége (ill. *Moore*-féle módon való megkülönböztethetetlensége) ilyen módon gyengébb feltétel, mint az ekvivalenciájuk (ill. *Moore*-féle ekvivalenciájuk). Ezért természetesen nevezhetjük azokat az automatákat, amelyek egymástól megkülönböztethetetlenek (ill. *Moore*-féle módon megkülönböztethetetlenek) *gyengén ekvivalenseknek* (ill. *Moore-féle módon gyengén ekvivalenseknek*). A gyenge ekvivalencia maga után vonja az erősen összefüggő, véges automatáknak az esetében a közönséges ekvivalenciát. Ez a tény folyik a következő állításból, amelyet (a *Moore*-féle megkülönböztethetetlenségnek az esetére vonatkozólag) E. MOORE bizonyított be a [20] dolgozatában.

41. TÉTEL: *Hogyha az erősen összefüggő A véges automata a B véges automatától megkülönböztethetetlen (ill. Moore-féle módon megkülönböztethetetlen), akkor az A automatának minden egyes a állapotához létezik a B automatának egy vele ekvivalens (ill. Moore-féle módon ekvivalens) b állapota.*

BIZONYÍTÁS: Elegendő a bizonyítást csupán a közönséges megkülönböztethetetlenségnek az esetére elvégezni, minthogy a bizonyítás pontosan ugyanúgy végezhető el a *Moore*-féle módon való megkülönböztethetetlenségnek az esetére vonatkozólag is. Tekintsük az A automatának egy tetszőleges a állapotát, és egy tetszőleges p bemenő szót. A tételben levő feltétel alapján találhatók a B automatának olyan állapotai, amelyekre nézve a p szóval való kísérlet ugyanazt az eredményt adja, mint az a állapotra vonatkozólag. Legyen $b_1, b_2, \ldots, b_k$ az összes ilyen állapot. Jelöljük $M = M(a, p)$-vel az összes $b_1 p, b_2 p, \ldots, b_k p$ állapotok halmazát. Az a és p tetszőleges megválasztásánál az $M(a, p)$ halmaz nem üres. Könnyű belátni azt, hogy az $M(a, p)$ halmaz elemeinek a száma nem növekszik, ha a p szóhoz (jobbról) új betűket írunk mellé. Ennek a halmaznak a végessége alapján meg lehet úgy is választani a p szót, hogy tetszőleges r szó mellett az $M(a, pr)$ halmaz elemeinek a száma éppen egyenlő az $M(a, p)$ halmaz elemeinek a számával.

Minthogy az A automata erősen összefüggő, az r szót meg lehet úgy választani, hogy $apr = a$ legyen. Mármost könnyű belátni, hogy az $M(a, pr)$ halmazból egy tetszőleges b állapot az a állapottól megkülönböztethetetlen. Valóban, ellenkező esetben léteznék olyan q bemenő szó, amelyre nézve a kísérleteknek az eredményei az a és b állapotokban egymástól különbözőek volnának. Ámde akkor a kísérlet eredményei különbözőek volnának a prq szóra vonatkozólag elvégezve az a állapotban és az összes olyan b_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ állapotokban, amelyekre nézve $b_i pr = b$ teljesül. Ez viszont nyilvánvalóan azt jelentené, hogy az $M(a, prq)$ halmaz elemeinek a száma kevesebb volna, mint az $M(a, pr)$ és $M(a, p)$ halmazok elemeinek a száma, ellentmondásban a p szónak a megválasztásával.

Ilyen módon a b állapot megkülönböztethetetlen, következésképpen ekvivalens az a állapottal. Minthogy pedig az a állapotot tetszőlegesen választottuk, ezért a tétel be lett bizonyítva.

A bebizonyított tételnek közvetlen következménye az alábbi

42. TÉTEL: *Ha két véges, erősen összefüggő automata egymással gyengén ekvivalens (Moore-féle módon gyengén ekvivalens), akkor azok ekvivalensek (Moore-féle módon ekvivalensek) is egymással.*

Most vizsgáljuk a kérdést a kísérlet maximális hosszára vonatkozólag, amely szükséges ahhoz, hogy a véges automatában két tetszőleges megkülönböztethető állapotot egymástól megkülönböztessünk. Nem nehéz belátni azt, hogy az automatának az 1. §-ban tekintett i-osztályai rendelkeznek a következő tulajdonsággal: két állapot akkor és csakis akkor tartozik egy és ugyanazon i-osztályhoz, hogyha azok egymástól semmiféle i-hosszúságú kísérlet által sem különböztethetők meg. Ezenkívül közvetlenül következik az 1. §-ban elvégzett vizsgálatokból még az is, hogy ha áttérünk i-ről $(i+1)$-re, akkor az i-osztályoknak a száma legalább eggyel növekszik mindaddig, amíg az $(i+1)$-osztályok egybe nem esnek az i-osztályokkal valamilyen i mellett, amely után a további felbontásnak az i-osztályait nem vizsgáljuk, és ezek az osztályok fogják magukba foglalni az egymással ekvivalens (megkülönböztethetetlen) összes állapotot.

Az ugyancsak nyilvánvaló, hogy ha létezik két, egymástól megkülönböztethető állapot, akkor a különböző 1-osztályok számának legalább kettőnek kell lenni. Egyszersmind az n állapottal rendelkező automatában a különböző i-osztályoknak a száma nem lehet az i semmilyen értékére sem nagyobb, mint n.

Egybefoglalva az elmondottakat, azt találjuk, hogy az $(n-1)$-osztályokba egyesítve vannak az egymástól megkülönböztethetetlen állapotok, és az automata két megkülönböztethető állapotának a megkülönböztetésére elegendőek $n-1$ hosszúságú kísérletek.

A *Moore*-féle kísérleteknek az esetében, az összes olyan állapot, amelyek i hosszúságú kísérletekkel egymástól megkülönböztethetetlenek, $(i-1)$-osztályokba vannak összefoglalva. Könnyű belátni azt, hogy ha léteznek *Moore*-féle módon megkülönböztethető (ill. *Moore*-féle módon nem ekvivalens) állapotok, akkor a *Moore*-féle 0-osztályoknak a száma nem lehet kevesebb, mint kettő. Ezért a 0-osztályok nem engedhetnek meg több mint $n-2$ felbontást, minthogy az $(n-2)$-osztályokba csak az egymástól megkülönböztethetetlen állapotok vannak összefoglalva. Ilyen módon ez esetben is elegendő $n-1$ hosszúságú kísérlet ahhoz, hogy a megkülönböztethető állapotokat egymástól megkülönböztessük.

Végül eljutunk a következő állításhoz, amely a [20] dolgozatból a 6. tételnek kisebb mértékben való élesítése.

43. TÉTEL: *Az n állapottal rendelkező automatában két, egymástól megkülönböztethető (ill. Moore-féle módon megkülönböztethető) állapot $n-1$ hosszúságú kísérlettel (ill. Moore-féle kísérlettel) megkülönböztethető.*

E. MOORE [20] megmutatta azt is, hogy a 43. tételben megfogalmazott $n-1$ határt nem lehet leszállítani. Ennek a ténynek a megállapítására elegendő tekinteni egy olyan *Moore*-féle, n állapottal rendelkező automatát, amely az átmeneteknek a következő táblázatával van megadva:

	V	U	U	$\dots$	U	$\dots$	U	U
	1	2	3	$\dots$	i		$n-1$	n
x	2	3	4	$\dots$	$i+1$	$\dots$	n	n
y	2	1	2	$\dots$	$i-1$	$\dots$	$n-2$	$n-1$

Ebben az automatában tetszőleges két állapot megkülönböztethető *Moore*-féle módon, de a legrövidebb olyan *Moore*-féle kísérletnek, amely az n és $n-1$ állapotoknak a *Moore*-féle módon való megkülönböztethetőségét megállapítja, éppen $n-1$ a hosszúsága.

Felhasználva az automaták direkt összegének a fogalmát és a 43. tételt, nem nehéz bebizonyítani azt, hogy két, egymástól megkülönböztethető (*Moore*-féle módon megkülönböztethető) állapotnak m és n állapottal rendelkező két automatában való megkülönböztetésére elegendőek $m+n-1$ hosszúságú kísérletek.

Miként E. MOORE [20] megmutatta (az $m=n$ esetben), ez a határ nem csökkenthető.

E. MOORE bebizonyította azt is, hogy tetszőleges, *Moore*-féle módon redukált olyan A automatának, amelynek n állapota, m bemenő jele és p kimenő jele van, az összes többi, páronként nem izomorf, *Moore*-féle módon redukált olyan automatától való megkülönböztetésére, amelyeknek ugyanaz a bemenő és a kimenő ábécéjük, mint az A automatának, és amelyek szintén n állapottal rendelkeznek, elegendőek $\frac{n^{nm+2} \cdot p^n}{n!}$ hosszúságú *Moore*-féle kísérletek. Más meggondolásokból, és valamennyire általánosabb esetben S. GINSBURG [6] is hasonló becslést kapott.

Az állapotoknak a megkülönböztethetőségével együtt az automaták tanulmányozásánál hasznosnak bizonyul az, hogy a bemenő szavak megkülönböztethetőségének a fogalmát bevezessük (lásd S. GRINSBURG [7]). Két bemenő p és q szót az A automatában *megkülönböztethetetlennek* nevezünk, hogyha tetszőleges a állapotra nézve és tetszőleges r bemenő szóra nézve az a állapotban a pr és qr bemenő szavakkal végzett kísérletek ugyanazt az eredményt adják. Abban az esetben pedig, amikor a kísérletnek az eredményei nem ugyanazok, a megfelelő szavakat az A automatában *megkülönböztethetőknek* nevezzük. Az automatát *a bemenetre vonatkozólag megkülönböztethetőnek* nevezzük, hogyha bármely két különböző bemenő szava ebben az automatában egymástól megkülönböztethető.

S. GINSBURG [7] dolgozatában megállapítást nyert a következő

44. TÉTEL: *Legyen A olyan véges automata, r állapottal, amelynél bármely két különböző állapot nem ekvivalens. Jelöljük* n_i*-vel azoknak az állapotoknak a számát, amelyek az A automatának i számú állapota által vannak generálva. Mármost, ha az A automatában bármely két,* $(n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots n_r)^2$ *hosszúságú bemenő szó megkülönböztethető egymástól, akkor az A automata a bemenetre vonatkozólag megkülönböztethető.*

Az esetek egész sorában célszerű végtelen kísérleteket is vizsgálni, amelynél véges bemenő szó helyett a bemenő jeleknek végtelen sorozatát használjuk (bemenő sorozatot használunk). Magától értetődően az ilyen végtelen kísérletnek az eredménye nemcsak egy véges szó lehet, hanem a kimenő jeleknek végtelen sorozata (kimenő sorozat) is.

Állapodjunk meg abban, hogy az olyan sorozatot, amelyik bizonyos helytől kezdve ismétlődő, a szokásnak megfelelően *majdnem periodikusnak* nevezzük. S. GINSBURG [7] nyomán az automatának az állapotát *racionálisnak* nevezzük, hogyha ebben az állapotban tetszőleges, majdnem periodikus bemenő sorozathoz a végtelen kísérlet majdnem periodikus kimenő sorozatot rendel hozzá.

Könnyű belátni, hogy érvényes a következő állítás (lásd [7]).

45. TÉTEL: *Ha az A automatában tetszőleges állapot az állapotoknak véges halmazát generálja, akkor az A automatának az összes állapota racionális.*

Azokat az automatákat, amelyeket a 45. tételben tekintettünk, természetes dolog *periodikus automatáknak* nevezni. Ezekhez tartozik, magától értetődően, az összes véges automata is.

Befejezés

Az ebben a dolgozatban kifejtett elmélet az automatának olyan felfogásán alapul, amelyben majdnem teljesen ismeretlenek az automata belső szerkezetének a részletei, az állapotok számának és az egyik állapot másikba való átmenete törvényének a kivételével. Hasonló közeledés az automatának a fogalmához a mi szempontunkból pontosan meg is különbözteti az automatáknak az *absztrakt* elméletét az automaták *általános* elméletének egyéb ágazataitól, így speciálisan az automatáknak a *struktura*-elméletétől, amely annak a módszereit tanulmányozza, hogy az *elemi* automatáknak valamilyen rögzített rendszeréből bonyolultabb automatákat szerkesszünk meg.

Az automaták absztrakt elmélete tárgyának ilyen értelmezésénél figyelembe lehet venni azt, hogy ebben a cikkben ilyen vagy olyan mértékben felöleltük eme elmélet fejlődése modern korszakának (1961) az összes legfontosabb irányzatát. Hátra van még az a feladat, hogy megemlékezzünk néhány, a legutóbbi időben megnyilvánult fejlődési tendenciáról.

Az első ilyen tendencia az absztrakt automata fogalmának további általánosításában áll. Ez a törekvés nyilvánul meg S. GINSBURG [7] dolgozatában, amelyben bevezetésre került az általánosított automatának, vagy *kvázimasinának* a fogalma. Kvázimasinán GINSBURG öt objektumnak az együttesét érti, éspedig ezek: a kvázimasina állapotainak nem üres $\mathfrak{A}$ halmaza, a $\mathfrak{B}$ és $\mathfrak{C}$ két tetszőleges, absztrakt félcsoport, amelyeket természetes dolog a kvázimasina bemenő és kimenő félcsoportjainak nevezni, továbbá a $\delta(a, b)$ és $\lambda(a, b)$ függvény, amelyeket az adott A kvázimasina átmeneti függvényének, illetve kimeneti függvényének neveznek.

A δ és λ függvények egyértelmű leképezést létesítenek az $\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}$ halmazról az $\mathfrak{A}$, ill. a $\mathfrak{C}$ halmazba. Ennek során tetszőleges $a\in\mathfrak{A}$ állapotra és $\mathfrak{B}$-ből tetszőleges két b_1 és b_2 elemre nézve érvényesek a következő összefüggések: $\delta(a, b_1\cdot b_2)= =\delta(\delta(a, b_1), b_2)$, valamint $\lambda(a, b_1\cdot b_2)=\lambda(a, b_1)\cdot\lambda(\delta(a, b), b_2)$.

Könnyű belátni, hogy a közönséges automaták átmeneti, ill. kimeneti függvényének a *természetes kiterjesztésénél* (lásd az 1. §-t) ezek az automaták átváltoznak olyan kvázimasinákká, amelyeknél mind a bemenő félcsoport, mind pedig a kimenő félcsoport szabad félcsoport. Ilyen módon az automata fogalma GINSBURG által indítványozott általánosításának az értelme abban áll, hogy a *szabad* bemenő és kimenő félcsoportot kicseréljük tetszőleges félcsoportokkal.

Annak érdekében, hogy a kvázimasinákra vonatkozólag megkapjuk a legegyszerűbb, de tartalmas eredményeket, GINSBURG ennek a fogalomnak a szűkítéséhez folyamodik, éspedig olyan kvázimasinákra szorítkozik, amelyeknél a kimenő félcsoport olyan félcsoport, amelyben érvényes a baloldali egyszerűsítési szabály. A hasonló korlátozású kvázimasinákra (az ún. *masinákra*) természetes módon át lehet vinni az állapotok megkülönböztethetőségének, valamint a masinák ekvivalenciájának és homomorfizmusának, ill. a redukált masinának a fogalmát stb. Könnyen bebizonyítható, hogy az egymás között ekvivalens összes masinának az osztályában (izomorfizmus pontosságáig) pontosan egy redukált masina létezik. Ez az eredmény nem egyéb, mint a 3. tételünknek (pontosabban csak egyik részének) az általánosítása.

A másik tendencia pedig, amely feltűnik az automatáknak az absztrakt elméletében, abban áll, hogy topológiát, elrendezést és egyéb olyan strukturákat vezetnek be az automata állapotainak a halmazába, továbbá a bemenő és kimenő félcsoportjaiba, amelyek lehetővé teszik azt, hogy speciális típusú (folytonos, differenciálható stb.) átmeneti és kimeneti függvényeket vizsgáljunk. Ilyen törekvés mutatkozott meg például M. P. SCHÜTZENBERGER [35] dolgozatában, amelyben az automatának az állapothalmaza gyanánt vizsgáljuk egy véges halmaznak és az egész számok gyűrűjének a szorzatát. Az állapotoknak a halmazában az algebrai strukturának a jelenléte lehetővé teszi azt is, hogy az automatáknak az átmeneti függvényeit úgy tekintsük, mint sajátságos „algebrai" függvényeket.

Végezetül megemlítünk még egy olyan törekvést, amelynek lényege felhasználni az automaták absztrakt elméletét a nyelvek absztrakt elméletének a megalkotására. Ennek során a nyelvet úgy tekintjük, mint többértékű átmeneti függvénnyel rendelkező automatát.

Fordította: Szász Ferenc

Ára: 21,— Ft

TARTALOMJEGYZÉK

A KÜLFÖLDI SZAKIRODALOMBÓL

Index: 26 498

A MAGYAR
TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK
OSZTÁLYÁNAK

KÖZLEMÉNYEI

XIV. KÖTET 2. SZÁM

AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST
1964

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK
KÖZLEMÉNYEI

XIV. kötet 2. szám

Szerkesztőség: Budapest, V., Nádor utca 7.

Kiadóhivatal: Budapest, V., Alkotmány utca 21.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleménye, változó terjedelmű füzetekben jelennek meg, és az Akadémia III. Osztályának felolvasóülésén bemutatott matematikai dolgozatokat, valamint egyéb dolgozatokat, referátumokat, továbbá az Osztály munkájára vonatkozó közleményeket, könyvismeretetéseket stb. közölnek. Évenként egy kötet jelenik meg (négy szám alkot egy kötetet).

Kéziratok a következő címre küldendők:

A Magyar Tudományos Akadémia
III. Osztályának Közleményei.
Budapest, V., Nádor u. 7.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi levelezés.

Minden szerzőt 100 különlenyomat illet meg megjelent munkájáért.

Közlésre el nem fogadott kéziratokat a szerkesztőség lehetőleg visszajuttat a szerzőhöz, de felelősséget a beküldött kéziratok megőrzéséért vagy továbbításáért nem vállal.

A Közlemények előfizetési ára kötetenként belföldi címre 40 forint, külföldi címre 60 forint. Belföldi megrendelések az Akadémiai Kiadó, Budapest, V., Alkotmány u. 21. (Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 05-915-111-46), külföldi megrendelések a „Kultúra" Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalat, Budapest, I., Fő utca 32. (Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 43-790-057-181) útján eszközölhetők.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztálya a következő idegen nyelvű folyóiratokat adja ki:

1. Acta Mathematica Hungarica
2. Acta Physica Hungarica.

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYA AZ OSZTÁLY FELOLVASÓ ÜLÉSEIRŐL A KÖVETKEZŐ HATÁROZATOKAT HOZTA:

1. Az Osztály Actáiban megjelenő dolgozatok akadémiai bemutatásának jelenlegi formája szűnjék meg. Szükségesnek tartja azonban az Osztály, hogy a dolgozatok közlésre való elfogadása továbbra is akadémikusi ajánláshoz legyen kötve. Az Acták főszerkesztői által közlésre így elfogadott dolgozatok szerzőinek nevét, a dolgozatok címét és az ajánló akadémikus nevét a felolvasó üléseken az osztálytitkár, vagy távollétében a felolvasó ülés elnöke ismertesse a résztvevők előtt. Ez mint program azonban ne szerepeljen a felolvasó ülések meghívóján.

2. Az Osztályhoz tartozó szakterületek tudósainak, kutatóinak kölcsönös tudományos tájékoztatása és a felolvasó ülések iránti érdeklődés fokozása érdekében szükséges, hogy a felolvasó ülések programja az eddigieknél szélesebb legyen. Ennek érdekében a székfoglaló előadásokon és az Osztály tagjai által bejelentett előadásokon kívül többek között az alábbi programok is szerepeljenek a felolvasó üléseken:

a) Az Osztály tudományterületein dolgozó, vagy ahhoz kapcsolódó kutatók jelentős önálló eredményeket tartalmazó előadásai, vagy kutatási területükről összefoglaló előadás tartása akadémiai tag ajánlása alapján (pl. az akadémiai díjban részesültek előadás keretében számoljanak be munkásságukról).

b) Az Osztályhoz tartozó intézetekben elért kutatási eredményekről összefoglaló előadás.

c) Külföldi tudósok (elsősorban az Akadémia által meghívottak) előadásai.

d) Emlék-előadások.

3. A felolvasó ülések konkrét programjára vonatkozó javaslatokat az osztálytitkár 3 havonként kérje meg az Osztály tagjaitól és a végleges programról az Osztályvezetőség döntsön 3 havonként előre. A *c)* pont alatt jelzett program elfogadásáról az osztálytitkár dönt.

Törekedni kell arra, hogy a felolvasó ülés olyan fórum legyen, amely a matematikusokat és a fizikusokat közelebb hozza egymáshoz.

Felolvasó ülést általában 2 havonként kell rendezni.

TÉRIGÉNYES KÖRELHELYEZÉSEKRŐL[1]

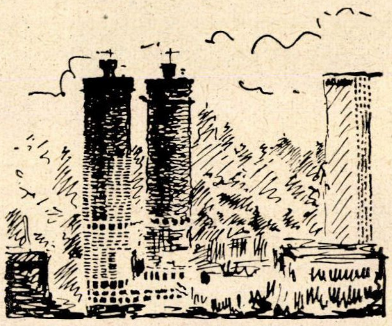
Írta: MOLNÁR JÓZSEF

Bevezetés

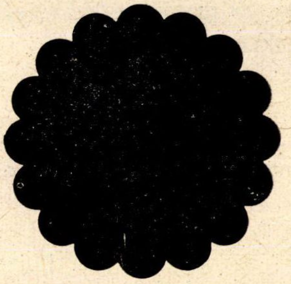
Dolgozatomban bizonyos mellékfeltételeknek eleget tevő ún. térigényes körrendszerek sűrűségével foglalkozom.[2] Vizsgálataim illusztrálására a következő egyszerű problémát említem meg:[3]

Egy bolygón várost akarunk építeni a következő feltételek mellett. A házak alaprajzai legyenek egybevágó körök. Minden házhoz tartozzék egy köralakú szabadtér, röviden térigény (pl. helikopterek fel- és leszállására), mely a házhoz érintőlegesen csatlakozzék. A térigények legyenek szintén egybevágóak. Két ház, ill. ház és térigény nyilván nem nyúlhat egymásba. A térigények viszont fedhetik egymást részben, vagy egészben. Vajon hogyan lehet a házakat a legsűrűbben elhelyezni?

E probléma különböző variánsaihoz jutunk, ha pl. egy házhoz két vagy több köralakú szabadtér (térigény) tartozik.[4] Ha egy kör térigénye több komponensből áll, akkor ezeknek mozgása újabb problémákat vet fel.



1. ábra



2. ábra

[1] A dolgozatban szereplő eredményekről a Matematikai Kutató Intézet geometriai szemináriumában számoltam be 1963. március 13-, 20- és 27-én.

[2] Mellékfeltételeknek eleget tevő körrendszerek (pl. tágas körrendszerek) sűrűségével korábbi dolgozataimban is foglalkoztam (ld. MOLNÁR [7], [11], [14]).

[3] ld. MOLNÁR [14], [15].

[4] További általánosításokhoz jutunk pl., ha a ház, ill. a térigény alaprajzai több kör egyesítése, röviden körhalmaz. Első ábránk a chicagói iker-felhőkarcolókat illusztrálja. Ezek keresztmetszetei körhalmazok (2. ábra). A chicagóiak ezeket a felhőkarcolókat holdtornyoknak nevezik, arra célozva, hogy a világürbe hatoló ember a meghódított égitesteken hasonló épületeket alkot. (Vö. Chicagó „Hold-tornyai", *Ország Világ* VII/3, (1963), 12–13. o.)

A dolgozatban szereplő három tétel kapcsán azt tapasztaljuk, hogy ilyenszerű szélsőértékproblémák megoldásaként igen változatos extremális körelhelyezések adódnak. Ezek között megtaláljuk az összes NIGGLI-féle [16], [17], (3—33. ábra),[5] ill. a SINOGOWITZ-féle [18] homogén körelhelyezéseket.[6]

1. §. Körrendszerek sűrűsége[7]

Dolgozatomban a mellékfeltételeknek eleget tevő körrendszerek elhelyezését állandó görbületű felületen, pontosabban a gömbön, az euklideszi-, ill. hiperbolikus síkon vizsgálom.

Egy megszámlálható sok körből álló $\{K_i\}$ körrendszernek egy állandó görbületű felület T tartományára vonatkozó sűrűségén a $\frac{\Sigma K_i \cap T}{T}$ hányadost értjük. Hasonlóan értelmezzük egy körrendszernek a gömbfelületre vonatkozó sűrűségét is. Dolgozatunkban csupán olyan $\{K_i\}$ körrendszerek szerepelnek, amelyeknél a T „tartomány" minden pontja legfeljebb egy kör belső pontja és ebben az esetben kitöltési sűrűségről beszélünk.

Értelmezhető egy megszámlálható sok körből álló $\{K_i\}$ körrendszernek az egész euklideszi síkra vonatkozó δ kitöltési sűrűsége

$$\delta = \overline{\lim_{R \to \infty}} \frac{\sum K_i \cap K(R)}{K(R)},$$

ahol $K(R)$ egy R sugarú kör, amelynek középpontja a sík egy rögzített O pontja. Hasonlóan értelmezhető általánosabb tartományok valamilyen rendszerének sűrűsége is.[8] Bizonyítható, hogy δ független az O megválasztásától. Ez egyszerűen következik abból, hogy

$$\frac{K(R+c)-K(R)}{K(R)} = \frac{2Rc+c^2}{R^2}$$

hányados konstans c érték mellett nullához tart, ha $R \to \infty$.

Egy $\varkappa$ görbületű hiperbolikus síkon

$$\lim_{R \to \infty} \frac{K(R+c)-K(R)}{K(R)} = e^{\sqrt{\varkappa}c} - 1 \neq 0.$$

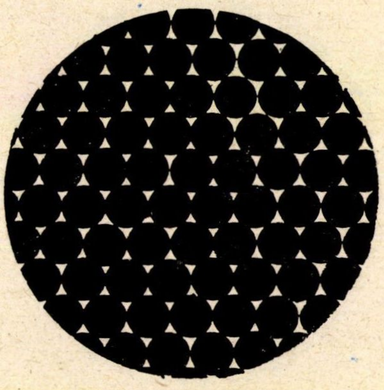
Ezért egy körrendszernek az egész hiperbolikus síkra vonatkozó sűrűsége analóg módon nem definiálható, sőt definíciója nehezebbnek látszik. Erre mutat BÖRÖCZKY

[5] A 34—58 ábra további extremális körelhelyezéseket illusztrálnak gömbfelületen (34—50. ábra), ill. hiperbolikus síkon (51—58. ábra) a POINCARÉ körmodellen.

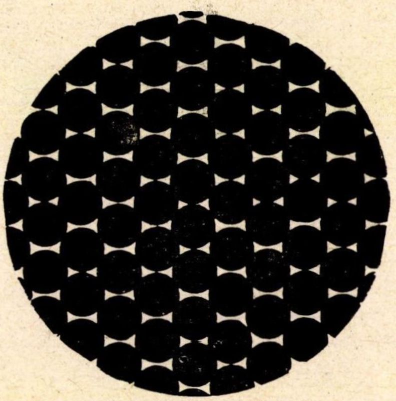
[6] Egybevágó körökből álló körrendszert homogénnek (szabályosnak) nevezünk, ha bármely két kör esetén létezik olyan egybevágóság, mely az egyik kört a másikba viszi át úgy, hogy ezalatt a körrendszer önmagába megy át. A NIGGLI-féle, ill. SINOGOWITZ-féle homogén körelhelyezések kristálytani vizsgálatok során vetődtek fel.

[7] Vö. MOLNÁR [11], 224—225. o.

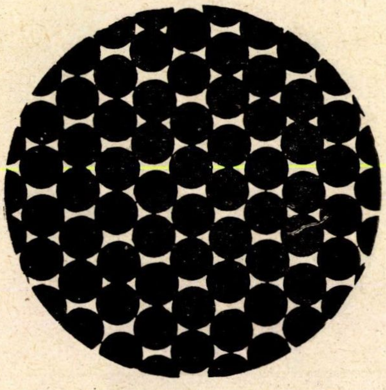
[8] ld. FEJES TÓTH [3], 55—57. o.



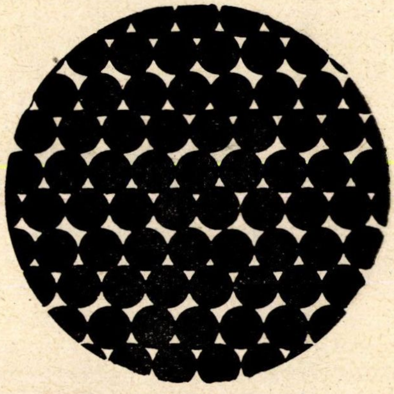
3. *ábra*



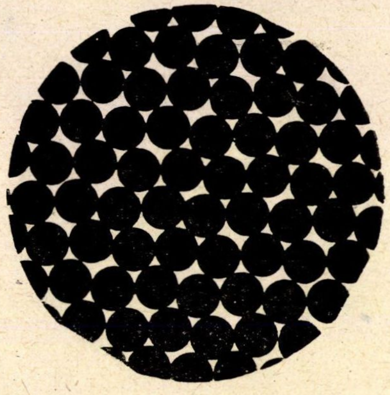
4. *ábra*



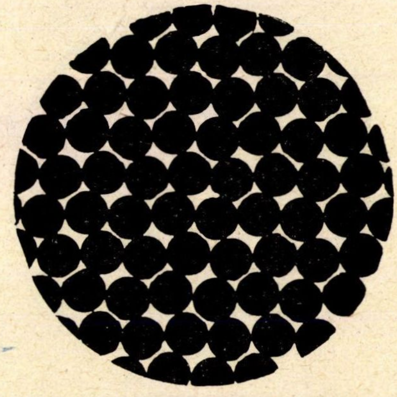
5. *ábra*



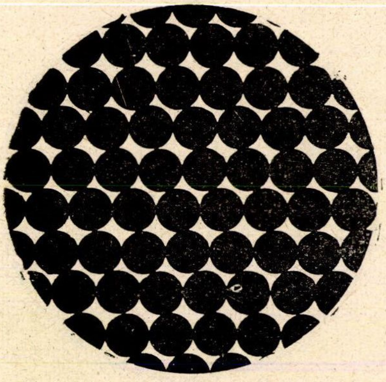
6. *ábra*



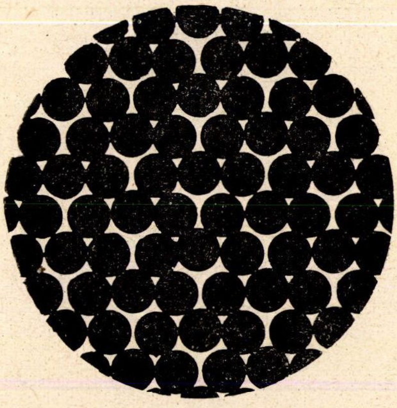
7. *ábra*



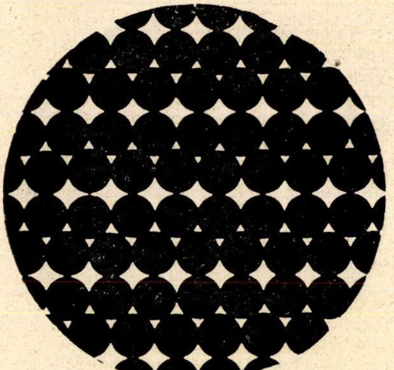
8. *ábra*



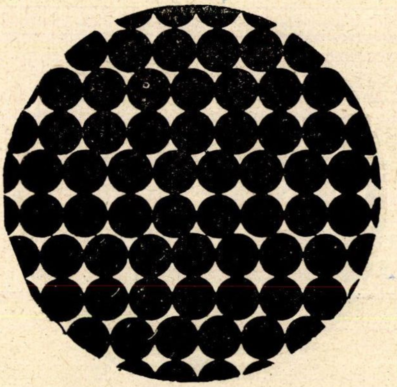
9. ábra



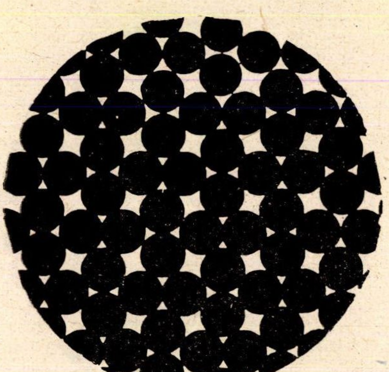
10. ábra



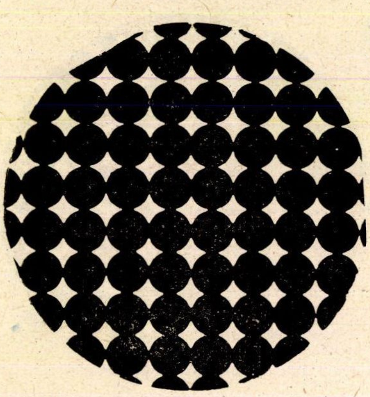
11. ábra



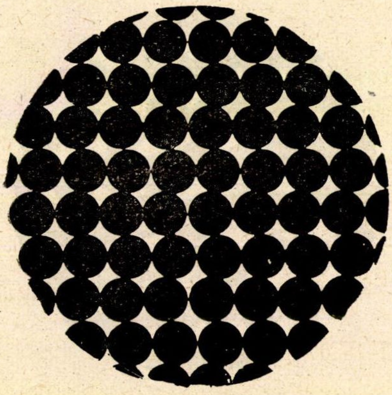
12. ábra



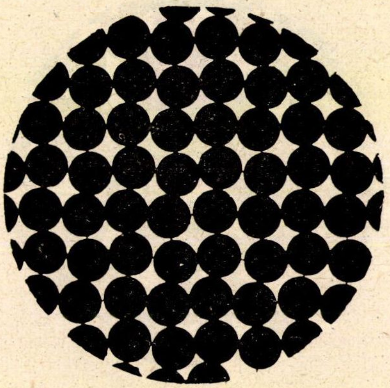
13. ábra



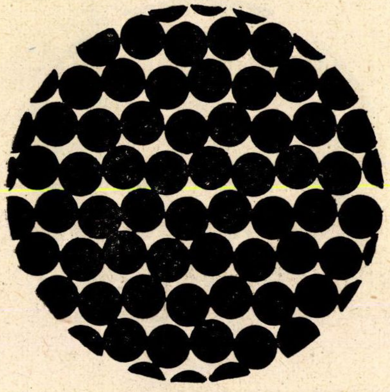
14. ábra



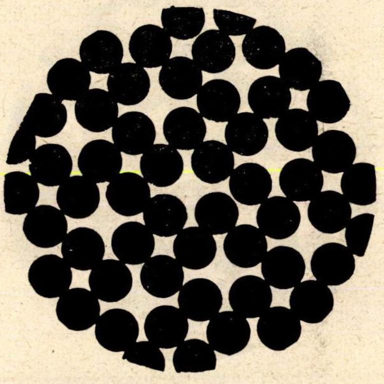
15. ábra



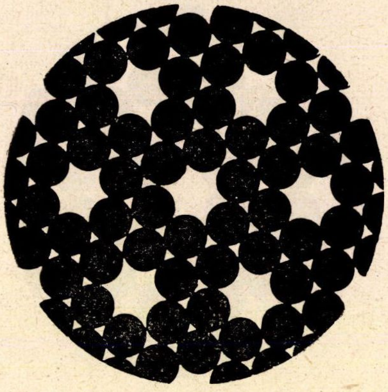
16. ábra



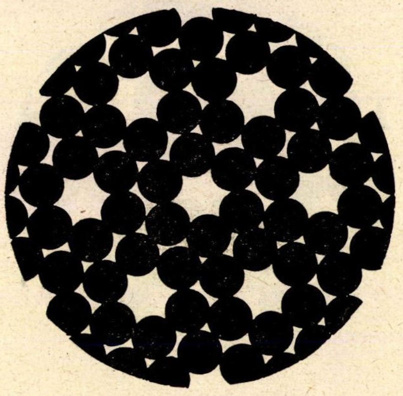
17. ábra



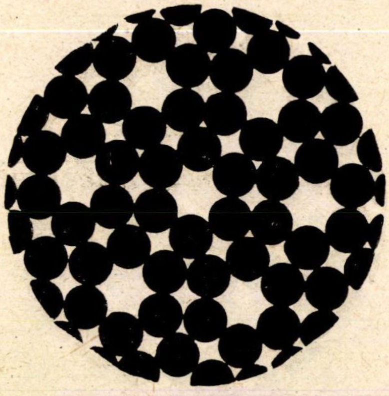
18. ábra



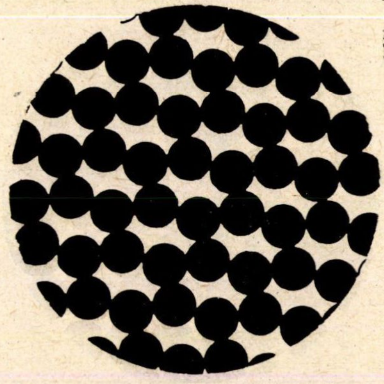
19. ábra



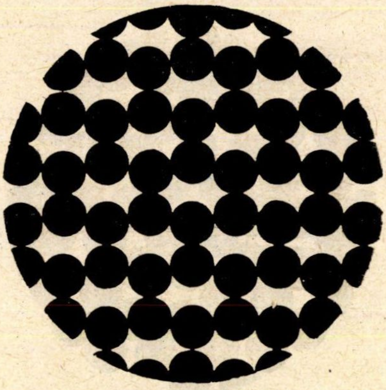
20. ábra



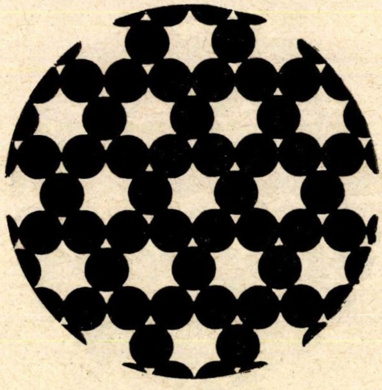
21. ábra



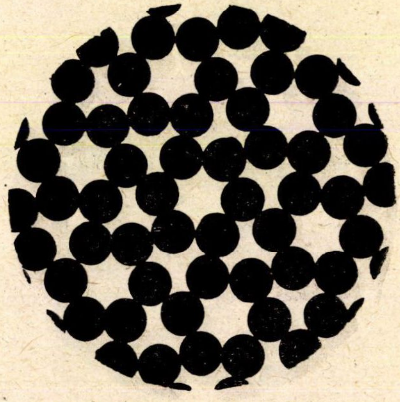
22. ábra



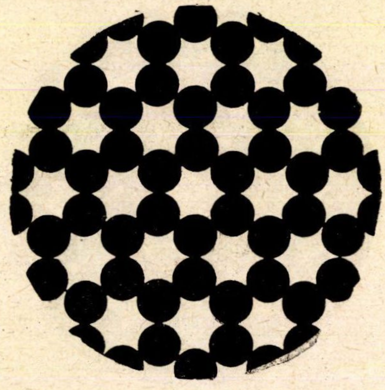
23. ábra



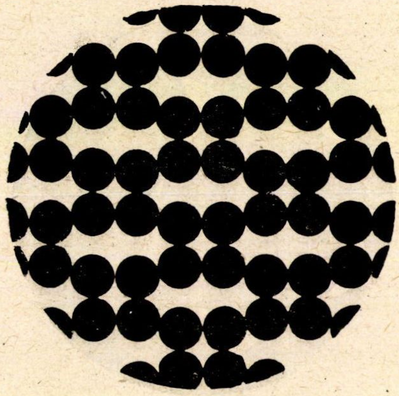
24. ábra



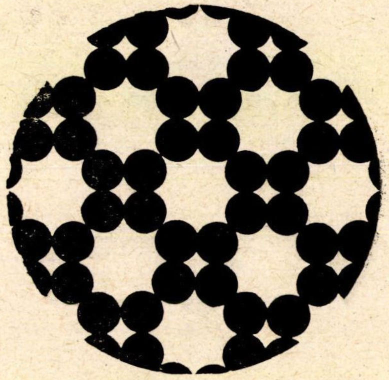
25. ábra



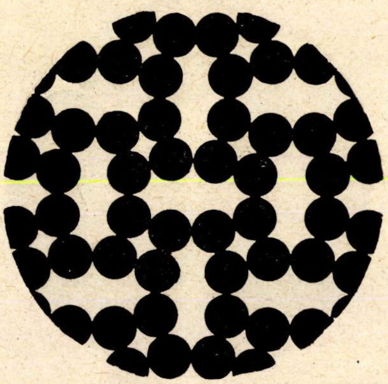
26. ábra



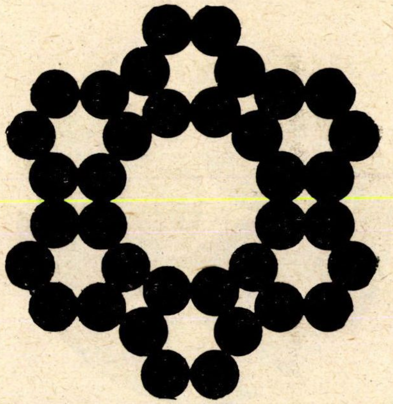
27. ábra



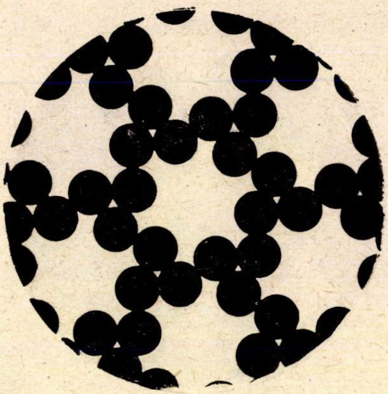
28. ábra



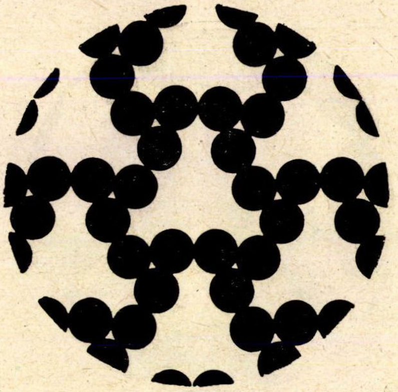
29. ábra



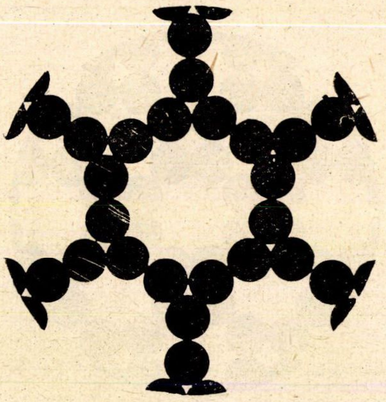
30. ábra



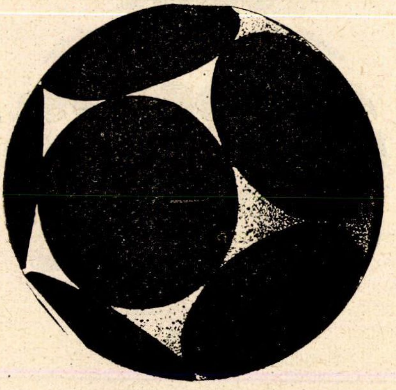
31. ábra



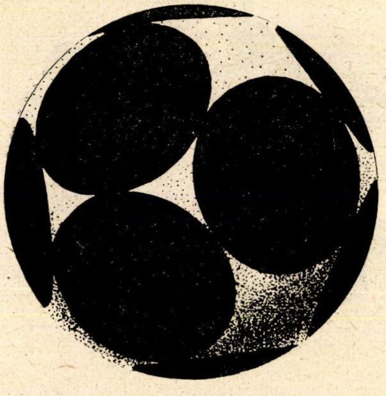
32. ábra



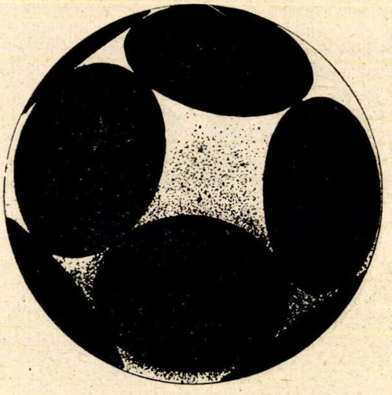
33. ábra



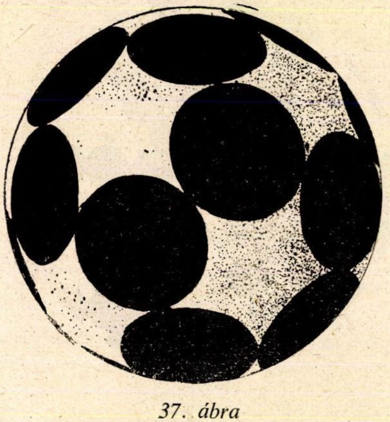
34. ábra



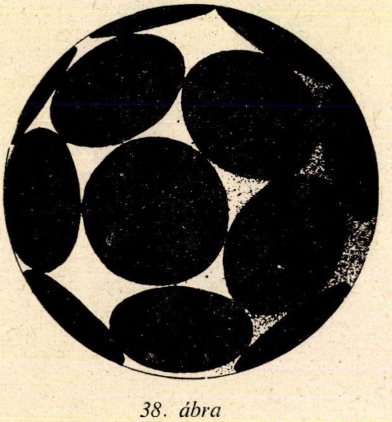
35. ábra



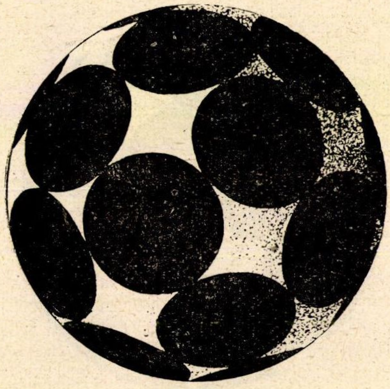
36. ábra



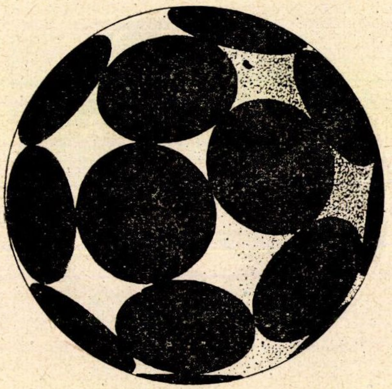
37. ábra



38. ábra



39. ábra

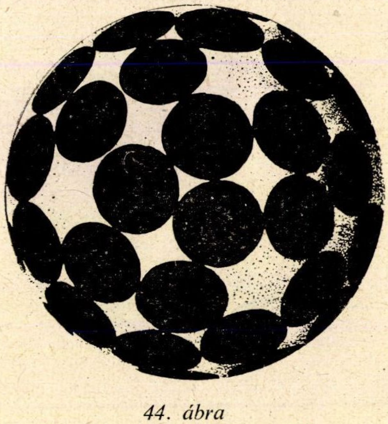


40. ábra

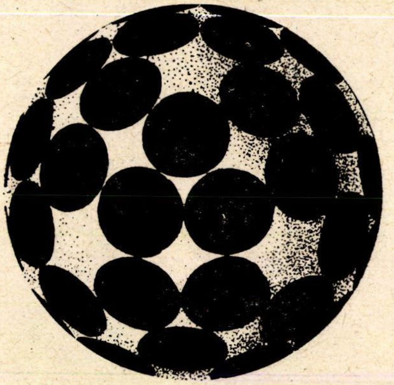
41. ábra

42. ábra

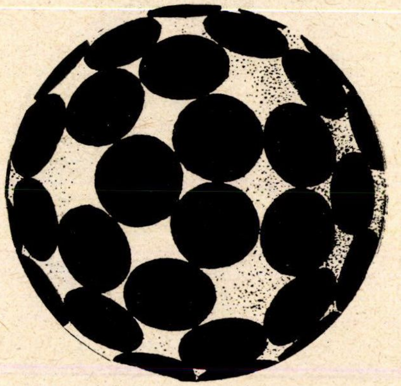
43. ábra



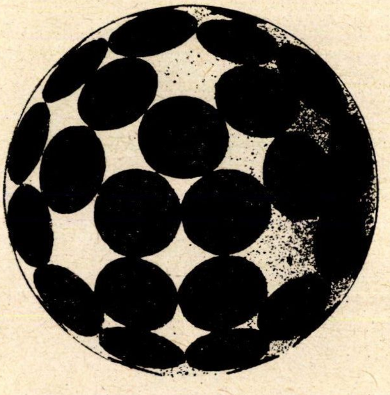
44. ábra



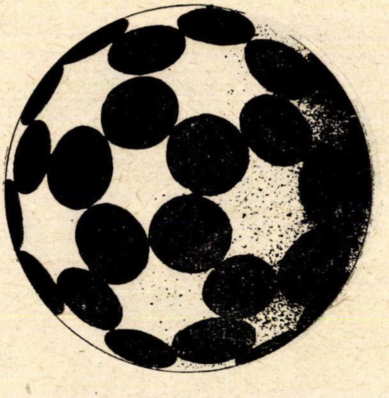
45. ábra



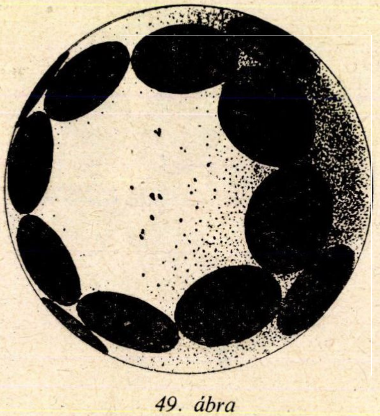
46. ábra



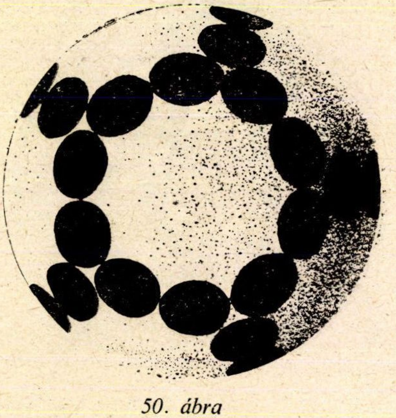
47. ábra



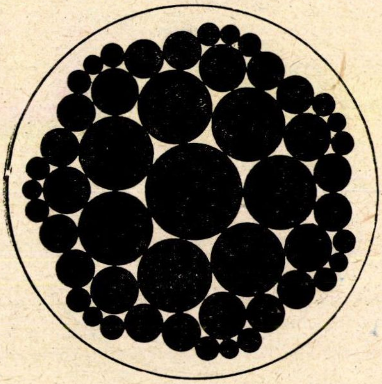
48. ábra



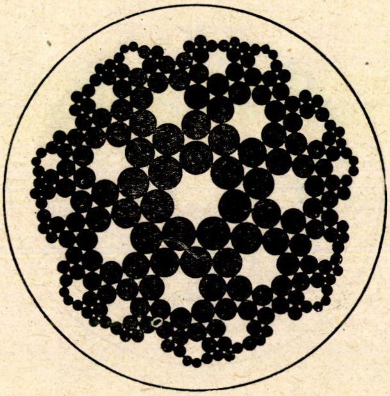
49. ábra



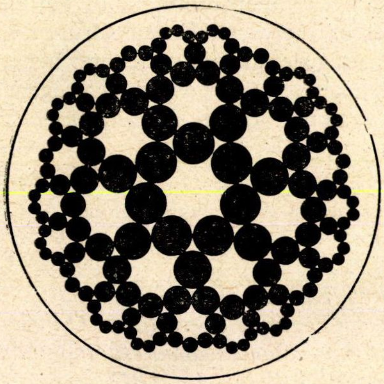
50. ábra



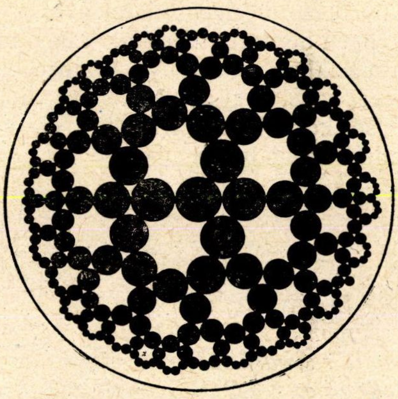
51. ábra



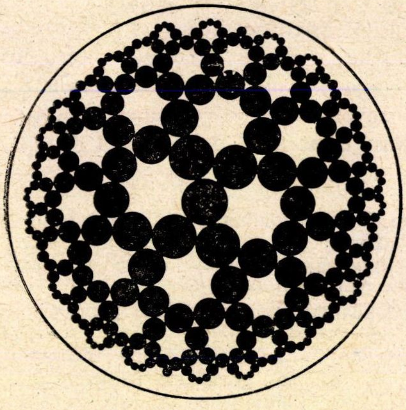
52. ábra



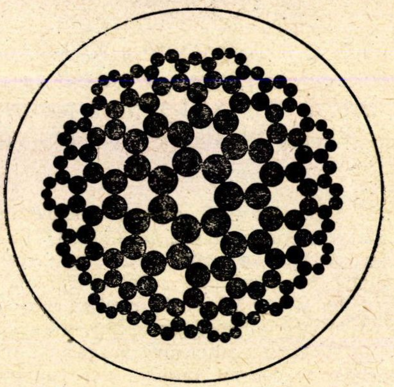
53. ábra



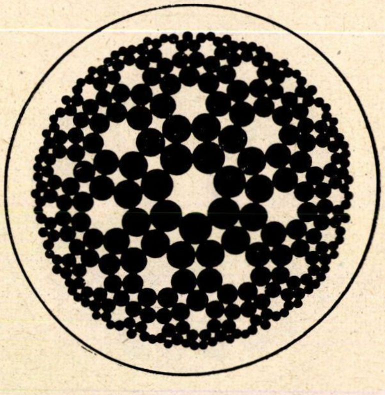
54. ábra



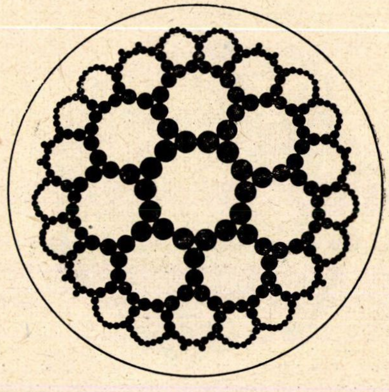
55. ábra



56. ábra



57. ábra



58. ábra

következő meglepő eredménye is:[9] Adott $\{K_i\}$ esetén a hiperbolikus síkot kétféleképpen bontotta fel cellákra úgy, hogy az egyiknél bármely cellában a sűrűség d_1, a másikban $d_2 (d_1 \neq d_2)$. A hiperbolikus síkon a sűrűség definíciójával fellépő nehézséget azzal fogjuk megkerülni, hogy egy $d \leqq 1$ értéket a körrendszer sűrűségének felső korlátjaként fogadjuk el, ha megadható a síknak olyan felbontása, hogy minden cellában a sűrűség $\leqq d$.

2. §. Segédtételek

SEGÉDTÉTEL: *Legyen $ABC\Delta$ az állandó görbületű felületen olyan — rögzített A, B csúcspontokkal rendelkező — háromszög, melynek van közös belső pontja az O középpontú r sugarú K körrel, viszont az AC és BC oldalának nincs, továbbá csúcspontjaira teljesül az $r < OC = c \leqq OB \leqq OA (\leqq \pi/2)$ összefüggés.*[10] *Állítás: Az $ABC\triangle$ területe minimális értéket vesz fel, ha AC érintője a K körnek.*

BIZONYÍTÁS. Jelöljük a K körrel koncentrikus OA, OB, $OC = c$ sugarú köröket K_A-, K_B-, K_C-vel. Kimutatom, hogy amennyiben AC nem érintője a K körnek, akkor C elmozgatható a K_C körön a B csúcspont felé úgy, hogy az $ABC\triangle$ területe csökkenjen. Legyen A^* a CB egyenes[11] CB irányába eső első metszéspontja a K_A körrel és C' a K_C kör azon pontja, mely az AA^* egyenestől — az egyenes C pontot tartalmazó oldalán — ugyanolyan távolságra van mint a C pont.[12] Ha $C' \equiv C$,

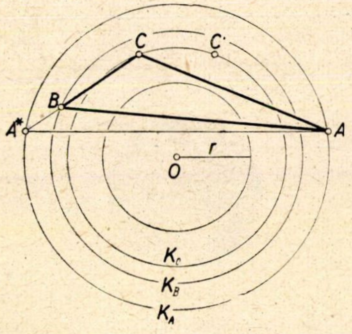
[9] BÖRÖCZKY K. ezen eredményét még nem publikálta. Ellenpéldájában két különböző típusú cellát szerepeltetett (ld. MOLNÁR [14]). A hiperbolikus síkon fellépő sűrűség „rendellenességet" HEPPES ALADÁR azonos szerkezetű cellák segítségével illusztrálta. Ezekről az eredményekről BÖRÖCZKY beszámolt a Bolyai Társulatban tartott április 24-i előadásában.

[10] A $\leqq \pi/2$ kikötés arra az esetre vonatkozik, ha az állandó görbületű felület gömbfelület.

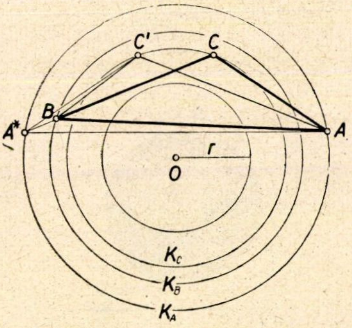
[11] A gömbfelületen az egyenes szerepét a főkör tölti be.

[12] Azon pontok mértani helyét, melyek egy adott egyenestől — az egyenes azonos oldalán — egyenlő távolságra vannak, távolságvonalnak nevezzük. Az állandó görbületű felületen mint ismeretes egy távolságvonalnak és egy körnek legfeljebb két közös pontja lehet. A mi esetünkben ez annyit jelent, hogy a K_c körön legfeljebb egy $C' \neq C$ pont létezhet.

akkor a C pontnak a K_C körön B pont felé történő mozgatásával az ABC területe csökken. A C pontot a K körön addig mozgatjuk a pont felé, míg AC érintője lesz a K körnek. $C' \neq C$ esetén tekintsük az A, C, C', A^* pontok által kifeszített szimmetrikus N négyszöget. E négyszög csúcspontjainak ciklikus sorrendjére nézve két eset lehetséges, mégpedig $N \equiv AC'CA^*$ (59. ábra), ill. $N \equiv ACC'A^*$ (60. ábra).



59. ábra



60. ábra

Ha $N \equiv AC'CA^*$, akkor a C pontnak a K_C körön B pont felé történő mozgatása az $ABC\triangle$ terület csökkenését eredményezi. Most pedig vizsgáljuk meg az $N \equiv ACC'A^*$ esetet. Mivel az A^*C átlónak nincsen közös belső pontja a K körrel, ezért ugyanilyen tulajdonsággal rendelkezik a szimmetrikus N négyszög AC' átlója is, hiszen a négyszög a K körrel együtt szimmetrikus alakzatot alkot. Másrészt $ACA^*\triangle = AC'A^*\triangle$, ezért nyilván $ABC\triangle = ABC'\triangle + A^*BC'\triangle$, vagyis $ABC'\triangle < ABC\triangle$[13]. Így tehát, ha a C pont a C' helyébe kerül, akkor az $ABC\triangle$ területe csökken és ha AC' nem érintője a K körnek, akkor a C' pontot a B pont felé mozgatva az $ABC'\triangle$ területe tovább csökken. Ezzel a segédtételt bebizonyítottam.

E segédtétel birtokában könnyen bizonyítható az

1. SEGÉDTÉTEL:[14] *Legyen K_1, K_2, K_3 egy állandó görbületű felület három r_1, r_2, r_3, $(r_1 < r_2 \leqq r_3)$ sugarú koncentrikus köre, S pedig olyan konvex sokszög, melynek van közös belső pontja a K_1 körrel, egyik rögzített AB oldala húrja a K_3 körnek, a további csúcspontok a K_2 körön vannak és — az AB oldaltól eltekintve — a többi oldalnak nincs közös belső pontja a K_1 körrel. Állítás: Az S sokszög területe akkor minimális, ha oldalai — az AB oldaltól eltekintve — legfeljebb egy kivételével a K_1 kört érintik.*[15]

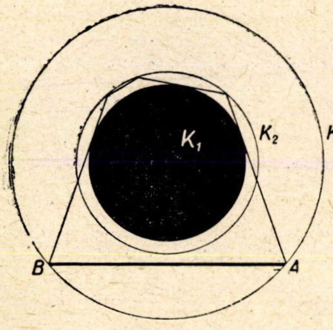
BIZONYÍTÁS. Legyen $S \equiv ABP_1 \ldots P_n$ a segédtétel feltételeinek eleget tevő sokszög, ahol $P_1, P_2, \ldots, P_n$ jelöli a konvex S sokszög K_2 körön fekvő csúcspontjait. A segédtétel értelmében könnyen adódik, hogy amennyiben S minimális területű, akkor

[13] Dolgozatomban egy tartományt és területét azonos szimbólummal jelölöm.

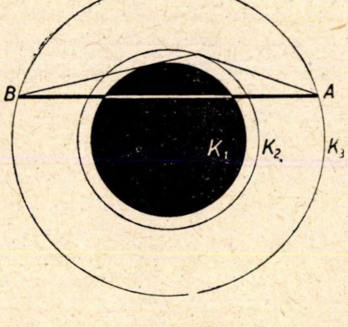
[14] Ez a segédtétel egy korábbi segédtétel (ld. MOLNÁR [7], [11]) általánosítása és tovább általánosítható pl. olyan S konvex sokszögre, melynek AB oldala a K_1, K_2 koncentrikus körökkel aszimmetrikus alakzatot alkot.

[15] A minimális területű S sokszög kivételt képező oldala, húrja lehet a K_2 körnek (61. ábra), vagy nem (62. ábra).

az AP_1, BP_n oldalak közül legalább az egyik érinti a K_1 kört. A továbbiakban szorítkozhatunk tehát olyan $S \equiv BAP_1 ... P_n$ konvex sokszögre, melynek BP_n oldala érinti a K_1 kört. A segédtételt tovább alkalmazva az $AP_1P_2\triangle$-re, majd a $P_1P_2P_3\triangle$-re, ..., és végül a $P_{n-2}P_{n-1}P_n\triangle$-re — ügyelve arra, hogy egyes $P_iP_{i+1}P_{i+2}\triangle$ esetén esetleg a P_iP_{i+1}, $P_{i+1}P_{i+2}$ oldalak sorrend cseréje is szükséges —[16] könnyen adódik az 1. segédtétel bizonyítása.



61. ábra



62. ábra

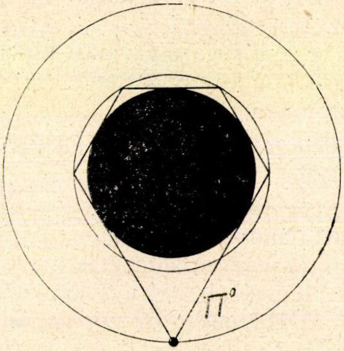
Jelölések. Legyen $\Pi(r_1, r_2, r_3) = \Pi$ az r_1, r_2, r_3 sugarú koncentrikus körökhöz tartozó minimális területű S sokszög. Ennek a sokszögnek a következő speciális eseteit tüntetjük ki: 1. $\Pi^\circ(r_1, r_2, r_3) = \Pi^\circ$, ha $A = B$ (63. ábra), 2. $\Pi^t(r_1, r_2, r_3) = \Pi^t$, ha AB érintője az r_1 sugarú körnek (64. ábra), 3. $\Pi^d(r_1, r_2, r_3) = \Pi^d$, ha AB átmérője az r_3 sugarú körnek (65. ábra).

2. SEGÉDTÉTEL:[17] *Egy r sugarú C középpontú K kört érintsen két egymásba nem nyúló kongruens C_1, C_2 középpontú kör úgy, hogy a C_1C_2 centrálisnak ne legyen közös belső pontja a K körrel. Jelölje ω_m, ill. ω_M a $C_1CC_2\sphericalangle$ minimális, ill. maximális értékét. Állítás: $\omega_M - \omega_m \leqq \alpha(r)$, ahol $\alpha(r)$ jelöli azt a szöget, mely alatt az r sugarú kör r távolságból látható.*

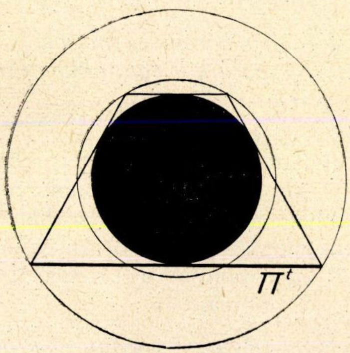
BIZONYÍTÁS. A segédtételben használt jelöléseket használjuk. Ha $C_1CC_2\sphericalangle = \omega_M$, akkor a C_1C_2 centrális érintője a K körnek (66. ábra). Legyen K^* a K kör C_1C_2 centrálisra való tükörképe és jelöljük a C középpontból a K körhöz húzott érintőket e_1-, e_2-vel, a C_1, C_2 középpontú körökhöz a $C_1CC_2\sphericalangle$-ben levő érintőket f_1-, f_2-vel. A $C_1CC_2\sphericalangle$ ingadozása azonos az f_1, f_2 által bezárt szög ingadozásával. Mivel pedig ω_m esetén $f_1 \equiv f_2$ és f_1, f_2 mindig benne vannak az e_1, e_2 által alkotott $\alpha(r)$ szögtartományban, ezért nyilvánvaló, hogy a $C_1CC_2\sphericalangle$ ingadozása nem nagyobb az $\alpha(r)$ szögnél, azaz $\omega_M - \omega_m \leqq \alpha(r)$.

[16] Az oldalak cseréjével azt kívánjuk elérni, hogy az S sokszög K kört nem érintő oldalai szomszédosak legyenek és ezzel S területe tovább csökkenthető (vö. MOLNÁR [9]). A P_iP_{i+1}, $P_{i+1}P_{i+2}$ oldalak cseréjével a $P_iP_{i+1}P_{i+2}\triangle$ területe nyilván nem változik.

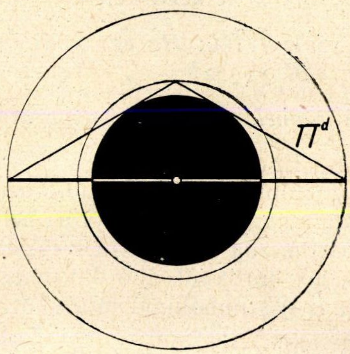
[17] Ez a segédtétel bizonyos értelemben általánosítható olyan esetre is, amikor a C_1, C_2 középpontú K_1, K_2 körök inkongruensek. Ui. könnyen belátható, hogy 2. segédtételem abban az esetben is érvényes, ha $K_1, K_2 \leqq K$, ill. $K_1, K_2 \geqq K$, ha viszont $K_1 < K < K_2$, akkor a segédtétel állítása általában nem igaz.



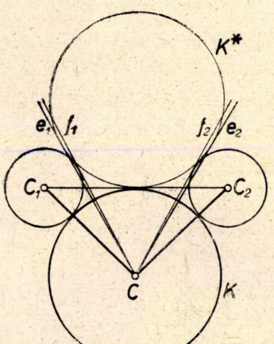
63. ábra



64. ábra



65. ábra



66. ábra

3. §. Tételek

Legyen h_{r-p-q} három, r, p, q sugarú egymást kívülről érintő kör hatványpontjának távolsága az r sugarú kör középpontjától.

Egy korábbi dolgozatomban [11] a következő tételt bizonyítottam be:[18]

Ha egy konstans görbületű felületen legalább három egymásba nem nyúló r sugarú kör van, akkor ezeknek a felületre vonatkozó sűrűsége $\leqq \dfrac{K(r)}{\Pi^\circ(r, h_{r-r-r}, h_{r-r-r})}$.

DEFINÍCIÓ. Egy T_i tartományrendszer T_i tartományának T_i^* térigénye alatt, olyan a T_i tartományhoz csatolt ponthalmazt értünk, melynek nincs közös belső pontja a tartományrendszer egyik tartományával sem.

Egy $\{K_i\}$ körrendszer K_i körének $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_n$ sugarú térigénye alatt olyan a K_i körhöz érintőlegesen csatlakozó $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_n$ sugarú körök egyesítését értjük, melynek nincsen közös belső pontja a $\{K_i\}$ rendszer egyik körével sem.

A következő két tétel az előbbi tételnek általánosításai.

I. TÉTEL: *Ha egy konstans görbületű felületen legalább három egymásba nem nyúló,* ϱ ($\varrho \geqq h_{r-r-r} - r$) *sugarú térigénnyel rendelkező r sugarú kör van, akkor ezen köröknek a felületre vonatkozó sűrűsége* $\leqq \dfrac{K(r)}{\Pi^\circ(r, h_{r-r-r}, r+\varrho)}$.

Ez a tétel pontos felső korlátot ad a sűrűségre azokban az esetekben, amelyekben az előbbi tétel is pontos, azaz midőn egy r sugarú kör köré érintőlegesen egész számú egymást érintő kört helyezhetünk el, pontosabban, ha a $2r$ oldalú szabályos háromszög szöge 2π-nek egész számú osztója. Pontos még a tétel pl. olyan egybevágó körökből álló körrendszerek esetén, melyek középpontjai a $(3, 3, 3, 3, n)$ $(n \geqq 4)$ szimbólumú mozaikot alkotják (19., 38., 43., 52. ábra).

BIZONYÍTÁS. Legyen $\{K_i\}$ az állandó görbületű felületen levő, legalább három körből álló ϱ sugarú térigénnyel rendelkező, egymásba nem nyúló r sugarú köröknek egy telített rendszere.[19] Jelentse D_i a felület azon pontjainak halmazát, melyek a K_i középpontjától nincsenek távolabb mint a többi K_i kör középpontjától. Könnyen belátható, hogy a K_i körhöz ilyen módon hozzárendelt D_i ún. DIRICHLET cella (VORONOI-féle poligon)[20] konvex sokszög. Ezek $\{D_i\}$ összessége a felületet — a sokszög határától eltekintve — egyrétűen és hézagmentesen lefedi (67. ábra). A tétel bizonyításához elegendő kimutatni, hogy a K_i körrendszer sűrűsége bármely D_i cellában $\leqq K/\Pi^\circ$. Nyilván a D_i cella tartalmazza a K_i kör térigényének C_i^* közép-

[18] Ld. MOLNÁR [11]. Ez a tétel FEJES TÓTH egy tételének [4] általánosítása. Érdekessége, hogy a körök sűrűségére egy nem monoton felső korlátot ad, mely sok esetben pontos. Egy $\varkappa$ görbületű felületen

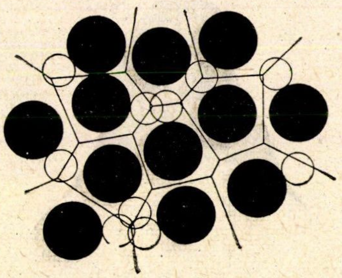
$$\frac{K(r)}{\Pi^\circ(r, h_{r-r-r}, h_{r-r-r})} = \frac{3 \operatorname{cosec} \dfrac{\pi}{a} - 6}{[a] - 3 - \dfrac{6}{\pi} \operatorname{arc\,tg} \left\{ \sqrt{3} \operatorname{tg} \dfrac{\pi}{a} \operatorname{cotg} \left(1 - \dfrac{[a]}{a}\right) \pi \right\}},$$

ahol $\operatorname{cosec} \dfrac{\pi}{a} = 2 \cos \sqrt{\varkappa}\, r$.

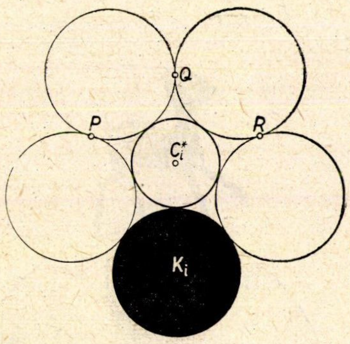
[19] A bizonyítás alapgondolata megtalálható előbbi dolgozataimban is, ld. pl. MOLNÁR [11].

[20] Ld. COXETER [1].

pontját, hiszen C_i^* a K_i kör középpontjától nincsen távolabb mint más K_i kör középponttól. Jelölje B a C_i^* pontnak és a $D_i\, K_i(h_{r-r-r})$ metszetnek konvex burkát. Nyilván $D_i \supseteq B_i$. Másrészt az 1. segédtétel értelmében $B_i \geqq \Pi^\circ(r, h_{r-r-r}, r+\varrho)$. Ezzel az I. tételt bebizonyítottuk.



67. ábra



68. ábra

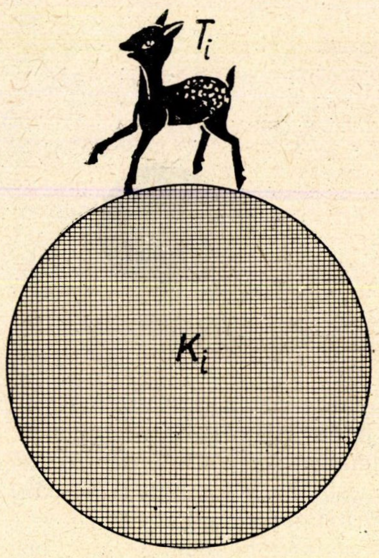
Megjegyzések. 1. Az I. tétel bizonyításában a térigényt szolgáltató C_i^* középpontú K_i^* körnek csupán az a tulajdonsága jutott kifejezésre, mely biztosította $C_i^* \in D_i$ teljesülését, azaz, hogy a D_i cella tartalmazza a K_i körhöz tartozó térigény C_i^* középpontját. A $C_i^* \in D_i$ nyilván akkor is teljesül, ha K_i^* helyett a K_i^* kört tartalmazó ponthalmazt tekintünk. Kevésbé triviális viszont, hogy a $C_i^* \in D_i$ teljesülését nulldimenziós ponthalmazzal, pontosabban diszkrét ponthalmazzal is biztosíthatjuk. Így pl. euklideszi síkon, ha a C_i^* középpontú K_i^* kör olyan, hogy kívülről öt egymást érintő r sugarú kör érinti, ekkor a $C_i^* \in D_i$ teljesüléséhez négy pont elégséges (68. ábra). A négy pont közül egyik pl. a C_i^*, a másik három P, Q, R — nem a K_i körön fekvő — érintkezési pontjai az r sugarú köröknek. E négy pont r-konvex burka tartalmazza a K_i^* kört. Ezen utóbbi észrevételt felhasználhatjuk arra, hogy az előbbi tételünket általánosítsuk arra az esetre, ha a K_i kör térigény szerepét egy tetszőleges T_i ponthalmaz veszi át (69. ábra). A C_i^* pont meghatározásához tekintsük a K_i és T_i r-konvex B burkát.[21] A C_i^* pont a $B_i^* = B_i - K_i$ tartományban levő, K_i kört érintő maximális sugarú kör középpontja (70. ábra). Nyilván azonos felső korlát adódik a $\{K_i\}$ körrendszer sűrűségére, ha $\{T_i\}$ inkongruens ponthalmazokból tevődik össze, viszont a $\{B_i^* = B_i - K_i\}$ tartományokban levő maximális sugarú körök kongruensek.

2. Legyen a K_i kör térigénye T_i, továbbá legyen B_i a K_i és T_i r-konvex burka. Jelölje ϱ a $B_i - K$ tartományban levő és a K_i kört érintő maximális kör sugarát. E dolgozatban és a már említett dolgozatomban lényegében kész apparátus áll rendelkezésünkre ahhoz, hogy az I. tételt a következő esetekre is általánosítsuk: 1. $r_i = r$, $\varrho \in (c, d)$, 2. $r_i \in (a, b)$, $\varrho_i = \varrho$, 3. $r_i \in (a, b)$, $\varrho_i \in (c, d)$.

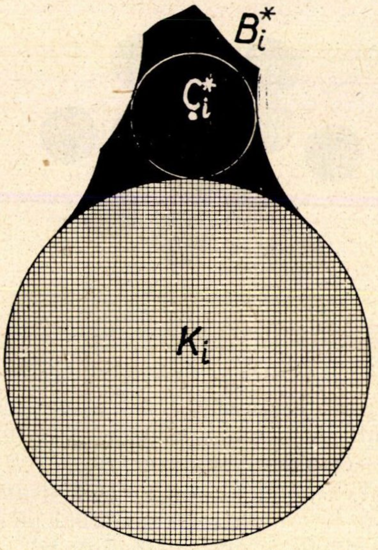
[21] Egy zárt ponthalmaz r-sugarú körkonvex, röviden r-konvex, ha minden határpontjában van r sugarú támaszköre. Az r-konvexitás általánosabban is értelmezhető ui. körök mellett para- és hiperciklusok is szerepelhetnek (ld. MOLNÁR [11]).

II. TÉTEL: *Ha egy konstans görbületű felületen legalább három egymásba nem nyúló r sugarú kör van és minden körnek két diszjunkt* ϱ $(\varrho \geqq h_{r-r-r}-r)$ *sugarú térigénye van, akkor az r sugarú köröknek a felületre vonatkozó sűrűsége*

$$\leqq \frac{K(r)}{\Pi'(r, h_{r-r-r}, r+\varrho)}.$$



69. *ábra*

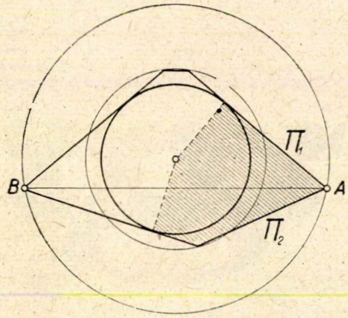


70. *ábra*

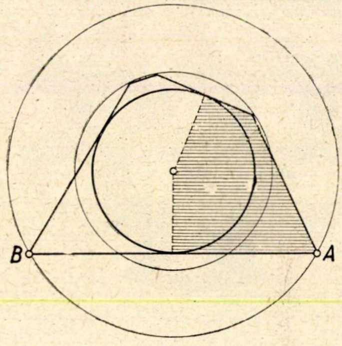
E tételben szereplő sűrűség korlát pontos pl., ha az egybevágó r sugarú körök középpontjai a $(3, n, 3, n)$ mozaik csúcspontjai szolgáltatják (24., 42., 53. ábra).

BIZONYÍTÁS. Ugyanolyan okoskodással mint amilyet az előbbi tétel bizonyításánál alkalmaztam könnyen belátható, hogy $D_i > \Pi$, ill. $D_i \geqq \Pi_1 + \Pi_2$. Az utóbbi eset megfelelő területátdarabolással és az 1. segédtétel esetleg alkalmazásával visszavezethető az elsőre (71., 72. ábra). Tehát elegendő az első esettel foglalkozni és bebizonyítani, hogy $\Pi \geqq \Pi'$, ahol Π' tartalmazza a K kört. Ha a térigényeket szolgáltató egybevágó körök A, B középpontjaihoz tartozó AB centrális nem érintője a K körnek, akkor a Π sokszögnek van olyan MN oldala, mely érintője a K körnek (73. ábra). A 2. segédtétel értelmében, mivel $\alpha(r) = MCN\sphericalangle$ ezért az MN oldalon kijelölhető P_1, P_2 pontpár úgy, hogy a P_1CP_2 egyenlőszárú háromszög P_1CP_2 szöge éppen az $ACB\sphericalangle$-höz szükséges növekedést adja, mely következtében az új helyzetbe az AB érintője lesz a K körnek, azaz $ACB\sphericalangle = \omega_M$. Messük fel a Π sokszöget CF félegyenes mentén, ahol F az AB oldal felezőpontja és messük ki a sokszögből a P_1CP_2 háromszöget. A $P_1CP_2\,\triangle$-et beékelve a CF felmetszésbe egy $\Pi^* \equiv AMPN\ldots BF_1P_1P_2F_2$ nem konvex sokszöget kapunk (74. ábra). Tekintsük a $\Pi' \equiv AMN\ldots B$ konvex sokszöget. Mivel AB érintője a K körnek továbbá $CF_1B\sphericalangle = \pi/2$, $AF_2C\sphericalangle = \pi/2$ és $CPM\sphericalangle = CPN\sphericalangle > \pi/2$, ezért F_1, F_2 a Π' sokszögön kívül van, a P pont pedig a Π' sokszögön belül van. Könnyen belátható, hogy $BF_1P_1\triangle + AF_2P_2\triangle \geqq MPN\triangle$, s így $\Pi' < \Pi^*$. Az 1. segédtétel értelmében viszont $\Pi' \geqq \Pi^t$. Ezzel a II. tételt bebizonyítottam.

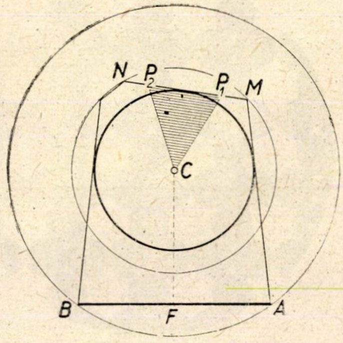
Megjegyzések. 1. A II. tétel általánosítása egy korábbi tételemnek. Ui. könnyen belátható, hogy $\varrho = h_{r-r-r} - r$ esetén az említett tételemhez [11] jutunk, hiszen a síknak D cellákra való felbontásában, bármely kör esetén található két pont, mely a körhöz csatolt A, B körközéppontok szerepét töltheti be.



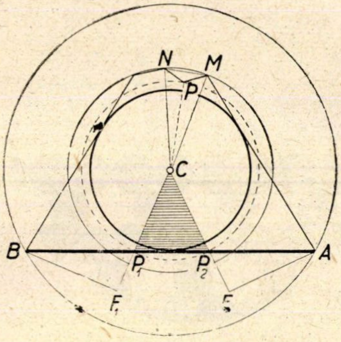
71. ábra



72. ábra



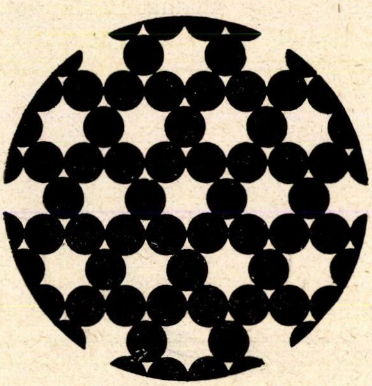
73. ábra



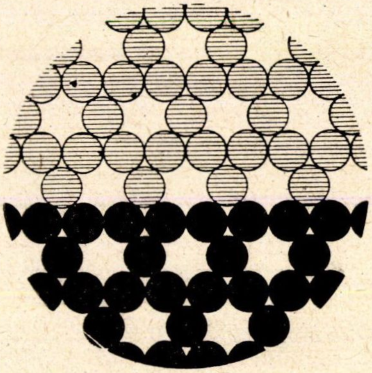
74. ábra

2. A pontos korláthoz adott r, ϱ értékpár esetén, nem mindig egyértelmű szélsőérték alakzat tartozik. Így pl. euklideszi síkon $\varrho = (\sqrt{2}-1)r$ esetén két szélsőérték alakzat adódik, mégpedig az egyiknél a körközéppontok a (3, 3, 3, 4, 4) (11. ábra), a másiknál pedig a (3, 3, 4, 3, 4) (13. ábra) mozaik csúcspontjait képezik. $\varrho = r$ esetén a körközéppontok a 75. ábrán a (3, 6, 3, 6) mozaik csúcspontjaiba esnek és ebből igen könnyen végtelen sok további szélsőérték alakzat nyerhető (76—78. ábra). A pontos korláthoz tartozó szélsőérték alakzat többértelműségét mind a gömbön (35., 36., 51., 52. ábra), mind pedig a hiperbolikus síkon (54., 55. ábra) is tapasztaljuk.

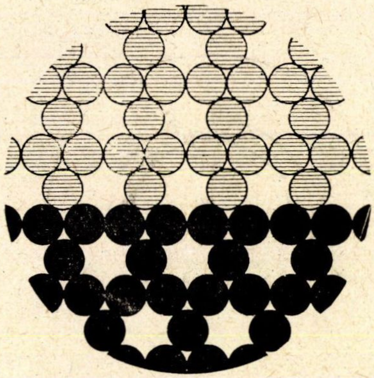
3. A II. tételben feltételeztem, hogy a ϱ sugarú térigények diszjunktak és ez $\omega_M - \omega_m \leqq \alpha(r)$ teljesülését biztosította. $\varrho \neq r$ esetén, mivel $\omega_M - \omega_m \leqq \alpha(r)$,[22] a II. tétel élesíthető olyan értelemben, hogy a ϱ sugarú körök középpontjai olyan közel kerülhetnek egymáshoz, hogy teljesüljön $\omega_M - \omega_m^* \leqq \alpha(r)$.[23] Ez azt jelenti, hogy $\varrho \neq r$ esetén a ϱ sugarú térigények bizonyos mértékben egy-



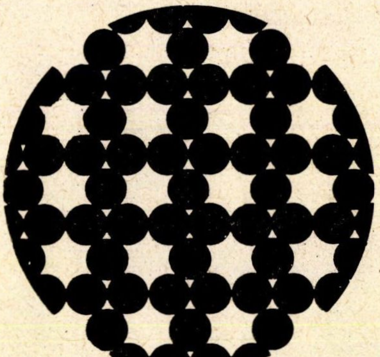
75. ábra



76. ábra



77. ábra



78. ábra

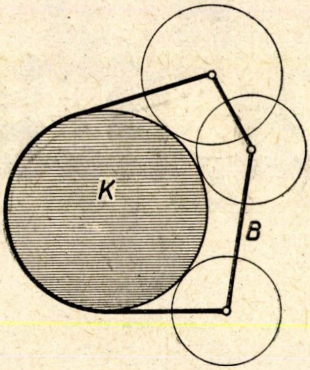
másba is nyúlhatnak, anélkül, hogy az adódó felső korlát csökkenjen. Így pl. euklideszi síkon $\varrho = (\sqrt{2}-1)r$ esetén a ϱ sugarú körök diszjunktsága azt jelenti, hogy $\omega_m = 2 \arcsin \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \approx 34°3'40'$. Előbbi megjegyzésem értelmében viszont ugyanazon korlát adódik, ha $\omega_m^* \geqq 30°$.

[22] Ld. 2. segédtételhez fűzött megjegyzés.

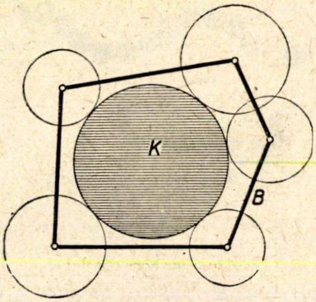
[23] ω_m szerepét egy kisebb ω_m^* veszi át, ahol ω_m^* azt a minimális megengedhető szöget jelenti, mely alatt látható a ϱ sugarú körök középpontjai az r sugarú kör középpontjából. Itt említjük még, hogy tételünk tetszőleges ω_m^*-ra is általánosítható, mely esetben a felső korlát ω_m^*-nak is függvénye.

4. A II. tétel tovább általánosítható arra az esetre, ha kettőnél több egybevágó, ill. nem egybevágó diszjunkt köralakú térigényről van szó, vagy — az I. tételhez fűzött megjegyzéshez hasonlóan — olyan esetre is, mikor a térigény komponensei tetszőleges zárt ponthalmazok.

III. TÉTEL: *Egy állandó görbületű felületen legyen adva egymásba nem nyúló egybevágó körökből álló* $\{K\}$ *körrendszer és minden kör térigényét — a K körhöz viszonyítva rögzített —* $C_1, C_2, \ldots$ *középpontú és a K kört érintő körök szolgáltassák. Állítás: Az* $\{K\}$ *körrendszernek az állandó görbületű térre vonatkozó sűrűsége* $\leqq K/B$, *ahol B jelenti a K körnek és a térigényét szolgáltató körök* $C_1, C_2, \ldots$ *középpontjainak konvex burkát* (79—80. ábra).



79. ábra



80. ábra

BIZONYÍTÁS. Ennek a tételnek a bizonyításához csupán azt kell belátni, hogy a K körhöz tartozó D DIRICHLET cella (VORONOI-féle poligon) tartalmazza a tételben szerepeltetett B konvex burkot. Ez viszont egyszerű következménye a D értelmezésének, mely folytán egyrészt D konvex, másrészt tartalmazza a K körhöz tartozó érintő körök $C_1, C_2, \ldots$ középpontjait.

Megjegyzések. 1. Könnyen belátható, hogy az előbbi tétel megfelelője igaz tetszőleges n-dimenziós ($n \geqq 3$) állandó görbületű térre is.

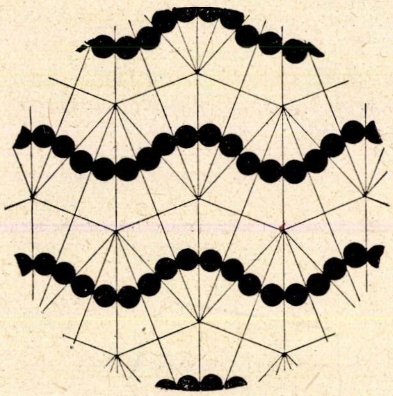
2. A III. tétel sok esetben pontos. Ui. pontos mindazokban az esetekben, mikor a B konvex tartománnyal a tér hézagmentesen és lefedés nélkül kirakható. Így pl. az euklideszi síkon pontos felső korlátot ad a SINOGOWITZ-féle 121 homogén körelhelyezés esetén.[24] A 81. és 82. ábra inhomogén szélsőértékű körrendszert illusztrál.[25]

[24] Egy SINOGOWITZ-féle homogén körrendszer DIRICHLET cellái egybevágóak és azonos LAVES-féle szimbólummal rendelkeznek. A Laves-féle szimbólum megadja, hogy a csúcspontok ciklikus sorrendjét véve egy-egy csúcspont köré hány cella tartozik (ld. LAVES [8]). Megemlítem még, hogy a NIGGLI-féle 31 homogén körelhelyezések speciális SINOGOWITZ-féle körelhelyezések, ui. a körök összefüggő ponthalmazt alkotnak.

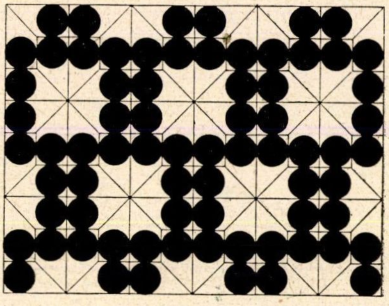
[25] Az első körrendszer cellái azonos (8, 8, 4) LAVES-féle szimbólummal rendelkeznek, a második körrendszerben a cellák kétféle ((8, 4, 3, 3), ill. (8, 4, 4, 3)) szimbólumot képviselnek.

A III. tétel térbeli analogonja is sok esetben pontos felső korlátot ad. Így pl. pontos a korlát a térbeli SINOGOWITZ-féle homogén gömbelhelyezések esetén.[26]

3. A III. tételben a térigény tetszőleges rögzített zárt ponthalmaz is lehet. Legyen a $\{K\}$ körrendszer K körének térigénye T és jelölje $(K, T)_r$ a K kör és T térigényének r-konvex burkát, továbbá jelölje $C_1, C_2 \dots$ a $(K, T)-K$ tartományban levő és a K



81. ábra



82. ábra

kört érintő körök középpontjait. Ekkor a K körrendszer sűrűsége az állandó görbületű térre $\leqq K/B$, ahol B jelenti a K körnek és a hozzátartozó $C_1, C_2, \dots$ pontok konvex burkát.

4. A szélsőértékalakzatokban előfordulhat olyan eset is, amelyben egyidejűleg feltüntetve a K és a hozzátartozó K^* körrendszert, a két körrendszer egymáshoz viszonyítva nincs kitüntetve (83—87. ábra).[27]

5. A III. tétel tovább általánosítható konvex tartományban elhelyezett térigényes $\{K\}$ körrendszerekre is.

6. Itt említem meg, hogy mindhárom tétel általánosítható olyan értelemben is, amikor a $\{K_i\}$ körrendszer szerepét olyan $\{K_i\}$ rendszer veszi át, amelyben K_i véges sok kör egyesítése.[28]

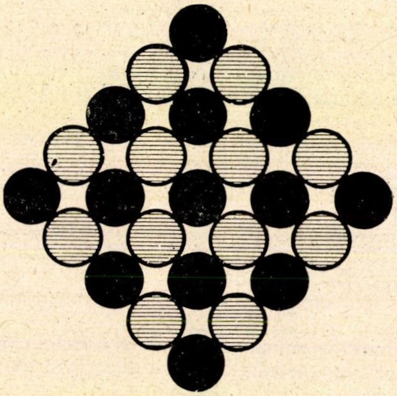
Befejezésül megemlítem, hogy a tárgyalt problémakör vizsgálataimat természetesen terelte egy rokon kutatási sávra, mégpedig bizonyos pontrendszerek elhelyezési problémáira.[29]

[26] SINOGOWITZ dolgozatában [19] a monoklin, triklin és rombos homogén gömbrendszerekkel foglalkozott. A 2862 homogén gömbelhelyezésből (729 monoklin, 46 triklin, 2087 rombos) 681-et NIGGLI-félének, azaz összefüggőnek talált. Ennek a dolgozatnak jelzett folytatása — valószínű SINOGOWITZ halála miatt — nem jelent meg.

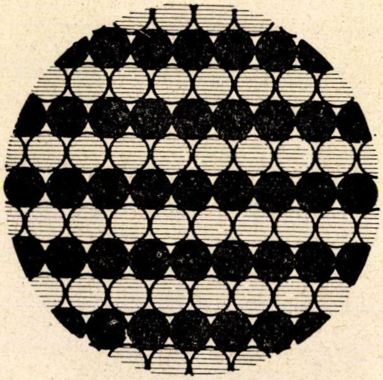
[27] A 84—87. ábra többértelmű szélsőértékkonstrukciókat illusztrál.

[28] Vö. MOLNÁR [11].

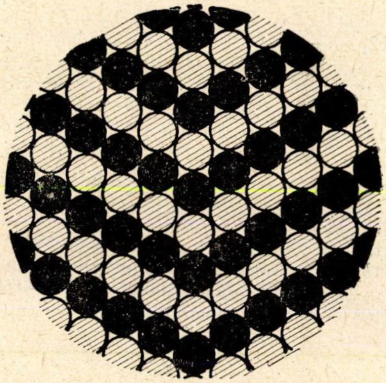
[29] Ld. MOLNÁR [14].



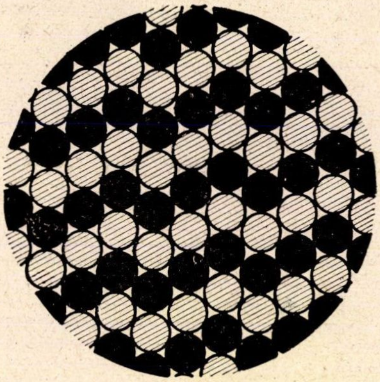
83. ábra



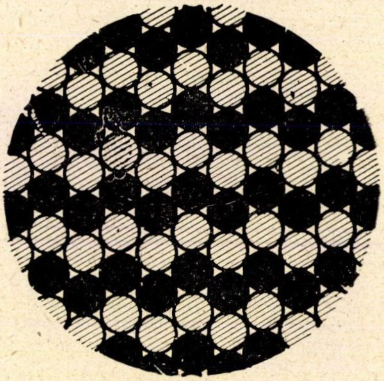
84. ábra



85. ábra



86. ábra



87. ábra

IRODALOMJEGYZÉK

[1] H. S. M. COXETER: *Introduction to geometry*, New-York—London, 1961.

[2] G. L. DIRICHLET: Über die Reduktion der positiven quadratischen Formen mit drei unbestimmten Zahlen, *J. für die reine und angew. Math.* **40** (1850) 209—227.

[3] L. FEJES TÓTH: 1. *Lagerungen in der Ebene auf der Kugel und im Raum*, Berlin—Heidelberg—Göttingen, 1953.

[4] ——— 2. Kreisausfüllungen der hyperbolischen Ebene, *Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae* **4** (1953) 103—110.

[5] ——— 3. Újabb eredmények a diszkrét geometriában, *Magyar Tud. Akad. Oszt. Közl.* **13** (1963) 341—354.

[6] ——— 4. *Regular figures*, Oxford—London—New York—Paris, 1964.

[7] HEPPES A.—MOLNÁR J.: Újabb eredmények a diszkrét geometriában II, *Mat. Lapok*, **13** (1962) 39—72.

[8] F. LAVES: Ebenenteilung und Koordinationszahl, Z. Kristallogr. **78** (1931) 208—241.

[9] J. MOLNÁR: 1. Collocazioni di cerchi sulla superficie di curvatura costante, *Atti delle celebrazioni archimedee del secolo XX, Vol. I* (1962) 61—72.

[10] ——— 2. Alcune generalizzazioni del teorema di Segre-Mahler, *Rend. Accad. Naz. dei Lincei,* **30/5** (1961) 700—705.

[11] ——— 3. Körelhelyezések állandó görbületű felületeken, *Magyar Tud. Akad. Oszt. Közl.* **12** (1962) 224—263.

[12] ——— 4. Estensione del teorema di Segre-Mahler allo spazio, *Rend. Accad. Naz. dei Lincei,* **35/3—4** (1963) 166—168.

[13] ——— 5. Sui sistemi di punti con esigenza di spazio, *Rend. Accad. Naz. dei Lincei* (nyomás alatt).

[14] ——— 6. Alcuni risultati di geometria discreta, Conferenze del Sem. di Mat. dell' Università di Bari (nyomás alatt).

[15] ——— 7. Kreislagerungen auf Flächen konstanter Krümmung, *Math., Annalen* (nyomás alatt).

[16] P. NIGGLI: 1. Die topologische Strukturanalyse I. *Z. Kristallogr.* **65** (1927) 391—415.

[17] ——— 2. Die topologische Strukturanalyse II. *Z. Kristallogr.* **68** (1928) 404—466.

[18] U. SINOGOWITZ: 1. Die Kreislagen und Packungen kongruenter Kreise in der Ebene, *Z. Kristallogr.* **100** (1939) 461—508.

[19] ——— 2. Herleitung aller homogenen nicht kubischen Kugelpackungen, *Z. Kristallogr.* **105** (1943) 23—52.

FOLYTONOS ÁLLAPOTÚ MARKOV-FOLYAMATOK STATISZTIKAI VIZSGÁLATÁRÓL, II

Írta: ARATÓ MÁTYÁS

BEVEZETÉS

Dolgozatom első részében [2] időben folytonos egydimenziós stacionárius *Gauss—Markov*-folyamatról volt szó, a megfigyelések azonban rendszerint diszkrét időpontokban történnek s így a statisztikus szempontjából fontos ennek az esetnek a megvizsgálása is. Az időben folytonos esettel ellentétben az ismeretlen paraméterek száma már három m, ϱ, σ_ξ^2, (vagy $m, \varrho, \sigma_\zeta^2$), ahol

$$(1) \qquad m = \mathbf{M}\xi(n), \quad \sigma_\xi^2 = \mathbf{D}^2\xi(n), \quad \varrho = \frac{\mathbf{M}\{\xi(n)-m\}\{\xi(n-1)-m\}}{\sigma_\xi^2},$$

$$\sigma_\zeta^2 = (1-\varrho^2)\delta_\xi^2, \qquad (n=1, 2, \ldots)$$

Az időben folytonos eset eredményeire jelen dolgozatban szükség van s így arra állandóan történik majd hivatkozás.

Megemlítem, hogy az ismert ϱ és σ_ξ^2 esettel LUVSZANCEREN [8], [9], ismert σ_ξ^2 és m esettel LINNIK [7], míg az ismert σ_ξ^2 esettel LUVSZANCEREN [8], [9] foglalkozott. Jelen dolgozatban feltesszük, hogy mindhárom paraméter ismeretlen s megvizsgáljuk különböző becslések viselkedését.

Megemlítem, hogy sok cikk (lásd pl. T. W. ANDERSON [1] s az ott szereplő irodalmat) foglalkozott ϱ becslésének a kérdésével, elsősorban a széria-korrelációs együtthatóval, ezeknek az eredményeknek az összefoglalása szerepelni fog a dolgozatban. Előljáróban még annyit említenék meg, hogy a probléma felvetésének sok esetben hibás volta vezetett korábban nem mindig megnyugtató részeredményekre. A dolgozat egyes eredményei szerepeltek disszertációmban [3], azonban a tételek és bizonyítások itt jelennek meg először. A disszertáció megírása óta eltelt időben szükségessé vált bizonyos eredmények kiegészítése és más idevonatkozó eredmények ismertetése is (lásd pl. 6 §).

IDŐBEN DISZKRÉT, STACIONÁRIUS, NORMÁLIS, EGYDIMENZIÓS ESET

1. §. A megfigyelések eloszlása s a lehetséges becslések

Az előző dolgozat [2] 1. tételéből következik, hogy a stacionárius, *Gauss—Markov*-folyamat $R(n)$ korrelációs függvénye ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$)

$$R(n) = \varrho^{(n)}$$

alakú, ahol $\varrho = \frac{\mathbf{M}(\xi(k)-m\}\{\xi(k-1)-m\}}{\mathbf{D}^2\xi(k)}$. Másrészt ismeretes (lásd pl. ROSENBLATT [11]), hogy ugyanakkor $\xi(n)$ eleget tesz a

$$\xi(n+1)-\varrho\xi(n) = \zeta(n+1) \quad (\text{feltéve, hogy } \mathbf{M}\xi(n)=0) \tag{1. 1}$$

differencia egyenletnek, ahol $\zeta(n)$ egy független normális eloszlású valószínűségi változó sorozat (ún. fehér zaj) és $\zeta(n)$ független $\xi(n-1)$-től. Ha $\mathbf{D}^2\zeta(n)=\sigma_\zeta^2$, nyilván fennáll a

$$\sigma_\zeta^2 = (1-\sigma^2)\delta_\xi^2 \tag{1. 2}$$

összefüggés.

Az (1. 1) összefüggésből következik, hogy a $\xi(1), \ldots, \xi(n)$ valószínűségi változók együttes sűrűségfüggvénye, ha $\mathbf{M}\xi(k)=m$, a következő alakú

$$p_{\xi(1),\ldots,\xi(n)}(x_1, \ldots, x_n) = (2\pi)^{-n}\sigma_\xi^{-n}(1-\varrho^2)^{-\frac{n-1}{2}} \tag{1. 3}$$

$$\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_\xi^2(1-\varrho^2)}\left[(x_1-m)^2(1-\varrho^2)+\sum_{i=2}^{n}(x_i-\varrho x_{i-1}-m(1-\varrho))^2\right]\right\} =$$

$$=(2\pi)^{-n}\sigma_\zeta^{-n}(1-\varrho^2)^{1/2}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_\zeta^2}\left[(x_1-m)^2(1-\varrho^2)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sum_{i=2}^{n}(x_i-\varrho x_{i-1}-m(1-\varrho^2))^2\right]\right\},$$

vagy matrix alakban

$$p_{\xi(1),\ldots,\xi(n)}(x_1, \ldots, x_n) = (2\pi)^{-n}\sigma_\xi^{-n}(1-\varrho^2)^{-\frac{n-1}{2}}$$

$$\exp\left\{-\frac{1}{2\varrho_\xi^2(1-\varrho^2)}(X-m)R_n^{-1}(X-m)^*\right\}$$

ahol

$$R_n^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\varrho & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ -\varrho & 1+\varrho^2 & -\varrho & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & -\varrho & 1+\varrho^2 & -\varrho & \ldots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \\ \vdots & & & & \ddots & \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 1+\varrho^2 & -\varrho \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & -\varrho & 1 \end{pmatrix}$$

$$X-m = (x_1-m, \ldots, x_n-m), \; (X-m)^* = \begin{pmatrix} x_1-m \\ \vdots \\ x_n-m \end{pmatrix}.$$

A $\xi(2), \ldots, \xi(n)$ valószínűségi változók feltételes sűrűségfüggvénye a $\xi(1)=x_1$ feltétel mellett

$$p(x_2, \ldots, x_n|\xi(1) = x_1) = \tag{1. 4}$$

$$= (2\pi)^{-\frac{n-1}{2}} \sigma_\zeta^{-(n-1)} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_\zeta^2} \sum_2^n (x_i - \varrho x_{i-1} - m(1-\varrho))^2\right\}$$

lesz.

A maximum likelihood becslések vizsgálata előtt nézzük meg a sűrűségfüggvény logaritmusa differenciálhányadosának a viselkedését. Legyenek az ismeretlen paraméterek m, σ_ξ^2, ϱ és vezessük be a következő jelöléseket:

$$R_n^{(1)} = \frac{\partial \log p}{\partial m} = \frac{1}{\sigma_\xi^2}\left\{(x_1 - m) + \frac{1}{1+\varrho} \sum_{i=2}^n (x_i - m - \varrho(x_{i-1} - m))\right\},$$

$$R_n^{(2)} = \frac{\partial \log p}{\partial \sigma_\xi^2} = -\frac{n}{2\sigma_\xi^2} + \tag{1. 5}$$

$$+\frac{1}{2\sigma_\xi^4}\left\{(x_1 - m)^2 + \frac{1}{1-\varrho^2} \sum_2^n (x_i - m - \varrho(x_{i-1} - m))^2\right\},$$

$$R_n^{(3)} = \frac{\partial \log p}{\partial \varrho} = \frac{(n-1)\varrho}{1-\varrho^2} - \frac{\varrho}{\sigma_\xi^2(1-\varrho^2)} \sum_2^n [x_i - m - \varrho(x_{i-1} - m)]^2 +$$

$$+\frac{1}{\sigma_\xi^2(1-\varrho^2)} \sum_2^n [x_i - m - \varrho(x_{i-1} - m)](x_{i-1} - m).$$

Ha viszont az ismeretlen paramétereknek az $m, \sigma_\zeta^2, \varrho$ mennyiségeket vesszük, a megfelelő deriváltak alakja a következő lesz:

$$H_n^{(1)} = \frac{\partial \log p}{\partial m} = \frac{1-\varrho}{\sigma_\zeta^2}\left\{(1+\varrho)(x_1 - m) + \sum_2^n (x_i - m - \varrho(x_{i-1} - m))\right\},$$

$$H_n^{(2)} = \frac{\partial \log p}{\partial \sigma_\xi^2} = -\frac{n}{2\sigma_\zeta^2} + \tag{1. 6}$$

$$+\frac{1}{2\sigma_\zeta^4}\left\{(1-\varrho^2)(x_1 - m)^2 + \sum_2^n (x_i - m - \varrho(x_{i-1} - m))^2\right\},$$

$$H_n^{(3)} = \frac{\partial \log p}{\partial \varrho} = -\frac{\varrho}{1-\varrho^2} + \frac{1}{\sigma_\zeta^2}\left\{\varrho(x_1 - m)^2 + \sum_2^n (x_i - m - \varrho(x_{i-1} - m))(x_{i-1} - m)\right\}.$$

Felhasználva a már említett $\mathbf{M}(\xi(i) - m)(\zeta(i+k) - m) = 0$ (ha $k \geqq 1$) és a *Gauss* eloszlású változókra jellemző (feltéve, hogy $\mathbf{M}\xi_i = 0$)

$$\mathbf{M}\xi_1\xi_2\xi_3\xi_4 = \mathbf{M}\xi_1\xi_2\mathbf{M}\xi_3\xi_4 + \mathbf{M}\xi_1\xi_3\mathbf{M}\xi_2\xi_4 + \mathbf{M}\xi_1\xi_4\mathbf{M}\xi_2\xi_3$$

összefüggést, könnyen kiszámítható (bár hosszadalmas számolást igényel), hogy

$$\mathbf{D}^2 R_n^{(1)} = \mathbf{M} R_n^{(1)} R_n^{(1)} = \frac{2+(n-2)(1-\varrho)}{(1+\varrho)\sigma_\xi^2},$$

$$\mathbf{D}^2 R_n^{(2)} = \mathbf{M} R_n^{(2)} R_n^{(2)} = \frac{n}{2\sigma_\xi^4}$$

$$\mathbf{D}^2 R_n^{(3)} = \mathbf{M} R_n^{(3)} R_n^{(3)} = \frac{(n-1)(1+\varrho^2)}{(1-\varrho^2)^2}, \tag{1. 7}$$

$$\mathbf{M} R_n^{(1)} R_n^{(2)} = \mathbf{M} R_n^{(1)} R_n^{(3)} = 0,$$

$$\mathbf{M} R_n^{(2)} R_n^{(3)} = -\frac{(n-1)\varrho}{\sigma_\xi^2(1-\varrho^2)}$$

és hasonló módon

$$\mathbf{D}^2 H_n^{(1)} = \frac{(1-\varrho)[2+(n-2)(1-\varrho)]}{\sigma_\zeta^2},$$

$$\mathbf{D}^2 H_n^{(2)} = \frac{n}{2\sigma_\zeta^4},$$

$$\mathbf{D}^2 H_n^{(3)} = \frac{n-1}{1-\varrho^2} + \frac{2\varrho^2}{(1-\varrho^2)^2}, \tag{1. 8}$$

$$\mathbf{M} H_n^{(1)} H_n^{(2)} = \mathbf{M} H_n^{(1)} H_n^{(3)} = 0,$$

$$\mathbf{M} H_n^{(2)} H_n^{(3)} = \frac{\varrho}{\sigma_\zeta^2(1-\varrho^2)}, \quad \frac{\mathbf{M} H_n^{(2)} H_n^{(3)}}{\mathbf{D} H_n^{(2)} \mathbf{D} H_n^{(3)}} = \frac{\varrho\sqrt{2}}{\sqrt{n[(n-1)(1-\varrho^2)+2\varrho^2]}}.$$

Mint látható, ha mindhárom paraméter m, σ_ξ^2, ϱ (vagy m, σ_ζ^2, ϱ) ismeretlen (1.5) (vagy (1.6))-ból a maximum likelihood becslések meghatározása igen fáradságos s a kapott eredmények aszimptotikus viselkedésének vizsgálata nem remélhető. Ehelyett inkább egy WALDtól származó ötlet alapján előbb az $R_n^{(1)}$, $R_n^{(2)}$, $R_n^{(3)}$ (vagy $H_n^{(1)}$, $H_n^{(2)}$, $H_n^{(3)}$) mennyiségeknek az aszimptotikus viselkedését vizsgáljuk, majd megmutatjuk, hogy az egyenletrendszer megoldása (normálva a megfelelő szórásokkal) az ismeretlen paraméterekben egyenletesen ugyanazzal az eloszlással bír mint $R_n^{(1)}/\mathbf{D}R_n^{(1)}$, $R_n^{(2)}/\mathbf{D}R_n^{(2)}$, $R_n^{(3)}/\mathbf{D}R_n^{(3)}$. A normáló tényező, mellyel szorozni kell éppen $\mathbf{D}R_n^{(1)}$, $\mathbf{D}R_n^{(2)}$, $\mathbf{D}R_n^{(3)}$ lesz.

Az (1. 7) és (1. 8) szórások összevetéséből azonnal látható pl., hogy ha ϱ közel van 1-hez m maximum likelihood becslése nem konzisztens az (1. 7) esetben, míg az (1. 8) esetben a szórás nem is marad véges.

Mivel bennünket a becslések aszimptotikus viselkedése érdekel elsősorban, elégséges az (1. 4) feltételes sűrűségfüggvény alapján adódó becsléseket tekinteni. Ekkor ugyanis pl.

$$\bar{H}_n^{(1)} = \frac{\partial \log p(\ldots|.)}{\partial m} = \frac{1-\varrho}{\sigma_\zeta^2} \sum_2^n (x_i - m - \varrho(x_{i-1}-m)),$$

$$(1.9)\qquad \bar{H}_n^{(2)} = \frac{\partial \log p(\ldots|.)}{\partial \sigma_\zeta^2} = -\frac{n-1}{2\sigma_\zeta^2} + \frac{1}{2\sigma_\zeta^4} \sum_2^n (x_i - m - \varrho(x_{i-1}-m))^2,$$

$$\bar{H}_n^{(3)} = \frac{\partial \log p(\ldots|.)}{\partial \varrho} = \frac{1}{\sigma_\zeta^2} \sum_2^n (x_i - m - \varrho(x_{i-1}-m))(x_{i-1}-m),$$

és a megfelelő maximum likelihood egyenletek megoldása egyszerűbbé válik. Az $\hat{m}$, $\hat{\sigma}_\zeta^2$, $\hat{\varrho}$ becslések között a $\bar{H}_n^{(1)}=0$, $\bar{H}_n^{(2)}=0$, $\bar{H}_n^{(3)}=0$ egyenletekből a következő összefüggések adódnak:

$$\hat{m} = \frac{x_n - \hat{\varrho} x_1 + (1-\hat{\varrho}) \sum_2^n x_i}{(n-1)(1-\hat{\varrho})},$$

$$\hat{\sigma}_\zeta^2 = \frac{1}{n-1} \sum_2^n (x_i - \hat{m} - \hat{\varrho}(x_{i-1} - \hat{m}))^2,$$

$$\hat{\varrho} = \frac{\sum_2^n (x_i - \hat{m})(x_{i-1} - \hat{m})}{\sum_2^n (x_{i-1} - \hat{m})^2}.$$

Innen látható, ha feltesszük, hogy megfigyelési sorozatunk ciklikus (azaz $x_n = x_1$) m a számtani középpel becsülhető, míg ϱ becslésére az ún. széria korrelációs együtthatót kapjuk. Ezek az egyszerűsítések azonban nem mindig megengedhetők,[1] gondoljunk csak arra, hogy $\varrho \to 1$ esetén m legjobb becslése $\frac{x_1 + x_n}{2}$ lesz, amint azt alább látni fogjuk.

Az (1. 3) sűrűségfüggvény alakjából leolvasható a paraméterekhez tartozó elégséges statisztikarendszer $\left\{x_1 + x_n,\ \sum_2^{r-1} x_i,\ x_1^2 + x_n^2,\ \sum_2^{n-1} x_i^2,\ \sum_2^n x_i x_{i-1}\right\}$.

2. §. Az egyes paraméterekre vonatkozó becslések s azok eloszlásai

1. Abban az esetben, amikor egyetlen ismeretlen paraméterünk van, a következő becsléseket kapjuk.

[1] A folyamatok statisztikájával foglalkozó irodalomban azonban igen gyakran lehet találkozni ilyen egyszerűsítésekkel (lásd pl. T. W. ANDERSON [1] cikkét s az ott szereplő irodalmat) s ezért szükséges a jelen dolgozattal való kapcsolatuk megmutatása.

Legyen m ismeretlen, akkor m maximum likelihood becslése (vö. az I. rész (2. 6) összefüggésével)

$$\hat{m} = \frac{x_1 + x_n + (1-\varrho)\sum_{2}^{n} x_i}{2 + (1-\varrho)(n-2)} \tag{2. 1}$$

lesz, ahol $\hat{m}$ *Gauss*-eloszlású $\left(m, \sigma_\xi \sqrt{\frac{1+\varrho}{2+(n-2)(1-\varrho)}}\right)$ paraméterekkel. Legyen $m=0$, akkor σ_ξ^2 maximum likelihood becslése

$$\hat{\sigma}_\xi^2 = \frac{1}{n(1-\varrho^2)}\left\{(1-\varrho^2)x_1^2 + \sum_{2}^{n}(x_i - \varrho x_{i-1})^2\right\} \tag{2. 2}$$

lesz. A $\hat{\sigma}_\xi^2$ becslés χ^2 eloszlású változó σ_ξ^2 várható értékkel és

$$f(\alpha) = \left(1 - \frac{2\sigma_\zeta^2 i\alpha}{n(1-\varrho^2)}\right)^{-\frac{n}{2}} = \left(1 - \frac{2\sigma_\xi^2 i\alpha}{n}\right)^{-\frac{n}{2}} \tag{2. 3}$$

alakú karakterisztikus függvénnyel.

Legyen ismét $m=0$, σ_ξ^2 (vagy σ_ζ^2) ismert és ϱ ismeretlen. A maximum likelihood becsléshez harmadfokú egyenlet megoldására van szükség, viszont a feltételes valószínűségeloszlás alapján (1. 9)-ből a

$$\hat{\varrho} = \frac{\sum_{2}^{n} x_i x_{i-1}}{\sum_{1}^{n-1} x_i^2}. \tag{2. 4}$$

becslést kapjuk.

Az ergod-tétel alapján

$$\frac{1}{n-1}\sum_{1}^{n-1} \xi^2(i) \to \sigma_\xi^2 \tag{2. 5}$$

négyzetes középben és 1 valószínűséggel, míg a

$$\sum_{2}^{n} \xi(i)\xi(i-1) - \varrho \sum_{1}^{n-1} \xi^2(i) = \sum_{2}^{n} \xi(i-1)(\xi(i) - \varrho\xi(i-1)) = \sum_{2}^{n} \xi(i-1)\zeta(i) \tag{2. 6}$$

változó szórásnégyzete $(n-1)(1-\varrho^2)\sigma_\xi^2 = (n-1)\sigma_\zeta^2$. Innen adódik, hogy a

$$\sqrt{n-1}(\hat{\varrho} - \varrho) = \sqrt{n-1}\,\frac{\sum_{2}^{n} \xi(i)\xi(i-1) - \varrho\sum_{1}^{n-1}\xi^2(i)}{\sum_{1}^{n-1}\xi^2(i)} =$$

$$= \frac{\sum_{2}^{n} \xi(i)\xi(i-1) - \varrho\sum_{1}^{n-1}\xi^2(i)}{\sum_{1}^{n-1}\frac{\xi^2(i)}{n-1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n-1}}$$

mennyiség szórásnégyzete aszimptotikusan $(1-\varrho^2)$-el lesz egyenlő.

A $\hat{\varrho}$ becslés aszimptotikusan normális eloszlású minden fix ϱ értékre, ez következik pl. VOLKONSZKIJ és ROZANOV [13] eredményeiből, azonban az aszimptotikusan egyenletes normalitás csak a $-1+\varepsilon<\varrho<1-\varepsilon$ (ahol $\varepsilon>0$ tetszőleges) intervallumban áll fenn. Ebből következik, hogy konfidencia intervallumok (alsó és felső becslések) ϱ-ra csak a $(-1, 1)$ intervallum belsejében szerkeszthetők. ϱ becslésének problémájával foglalkozik LINNIK [7] cikkében.

2. Két ismeretlen paraméter esetén csak azt az esetet említjük meg, amikor az ismeretlen paraméterek m és ϱ. Azzal az esettel, amikor $\sigma_\zeta^2=1$ LUVSZANCEREN foglalkozott [8], [9] és megmutatta, hogy m és ϱ maximum likelihood becslései $-\infty<m<\infty$ és $-1<\varrho<1$ intervallumban egyenletesen aszimptotikusan normális eloszlásúak

$$\begin{pmatrix} \sigma_\xi \sqrt{\dfrac{1+\varrho}{2+(n-2)(1-\varrho)}} & 0 \\ 0 & \dfrac{1-\varrho^2}{\sqrt{(n-1)(1+\varrho^2)}} \end{pmatrix}$$

kovariancia matrixszal. Bizonyítása azon alapul, hogy az $R_n^{(1)}$ és $R_n^{(2)}$ mennyiségek a megfelelő intervallumban egyenletesen aszimptotikusan normális eloszlásúak. Abban az esetben azonban, ha $\sigma_\xi^2=1$ (és ez felel meg inkább a fizikai valóságnak és egyben az időben folytonos esetnek is) az aszimptotikusan egyenletes normalitás a becslések eloszlására már nem áll fenn a kérdéses $-\infty<m<\infty$, $-1<\varrho<1$ intervallumban. (Lásd majd az 5. §-ban). Megemlítjük még, hogy egy szűkebb intervallumban $-\infty<m<\infty$, $-1+\varepsilon<\varrho<1-\varepsilon$ az aszimptotikusan egyenletes normalitás fennállása következik általános eredményekből (lásd pl. VOLKONSZKIJ—ROZANOV [13]).

A $\sigma_\zeta^2=1$ és $\sigma_\xi^2=1$ megkötések esetén adódó különbség érzékelhető a (1. 7) és (1. 8) összefüggések megfelelő szórásainak összehasonlításából is.

3. §. A likelihood függvény deriváltjainak együttes eloszlása

A maximum likelihood becslések aszimptotikus viselkedésének vizsgálatához első lépésként megnézzük az $R_n^{(1)}$, $R_n^{(2)}$, $R_n^{(3)}$ változók együttes eloszlásának viselkedését $n\to\infty$ esetén. Vezessük be a következő jelöléseket:

$$\tilde{R}_n^{(1)}=\frac{R_n^{(1)}}{\mathbf{D}R_n^{(1)}},\quad \tilde{R}_n^{(2)}=\frac{R_n^{(2)}}{\mathbf{D}R_n^{(2)}},\quad \tilde{R}_n^{(3)}=\frac{R_n^{(3)}}{\mathbf{D}R_n^{(3)}}.$$

Igaz a következő

3. 1. TÉTEL: *Az $\tilde{R}_n^{(1)}$, $\tilde{R}_n^{(2)}$, $\tilde{R}_n^{(3)}$ valószínűségi változók $f_n(t_1, t_2, t_3)$ karakterisztikus függvénye $n\to\infty$ esetén a t_1, t_2, t_3 változók bármely véges intervallumában egyenletesen konvergál a* $(0, 0, 0)$ *várható értékű és*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\varrho\sqrt{\dfrac{2}{1+\varrho^2}} \\ 0 & -\varrho\sqrt{\dfrac{2}{1+\varrho^2}} & 1 \end{pmatrix}$$

korrelációs matrixú normális eloszlás karakterisztikus függvényéhez. A konvergencia egyenletes a $-\infty < m < \infty$, $0 < \sigma_\xi^2 \leqq K < \infty$, $-1 < \varrho < 1$ *tartományban, ahol K tetszőleges fix konstans.*

Bizonyítás. Az (1. 3) matrix alakjából és az (1. 5), (1. 7) kifejezésekből azt kapjuk, hogy $\tilde{R}_n^{(1)}$, $\tilde{R}_n^{(2)}$, $\tilde{R}_n^{(3)}$ karakterisztikus függvénye

$$f_n(t_1, t_2, t_3) = \mathbf{M} \exp\{it_1 \tilde{R}_n^{(1)} + it_2 \tilde{R}_n^{(2)} + it_3 \tilde{R}_n^{(3)}\} = \tag{3. 1}$$

$$= c_n \int \dots \int \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_\xi^2(1-\varrho^2)}(X-m)R_n^{-1}(X-m)^* + \right.$$

$$\left. + it_1 \tilde{R}_n^{(1)} + it_2 \tilde{R}_n^{(2)} + it_3 \tilde{R}_n^{(3)}\right\} dx_1 \dots dx_n =$$

$$= c_n \exp\left\{-it_2 \sqrt{\frac{n}{2}} + it_3 \varrho \sqrt{\frac{n-1}{1+\varrho^2}}\right\} \int \dots \int \exp\left\{-\frac{1}{2}[YA_nY^* - YA^*]\right\} dy_1 \dots dy_n$$

alakú, ahol

$$c_n = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \sigma_\xi^{-n} (1-\varrho^2)^{-\frac{n-1}{2}}, \tag{3. 2}$$

$$Y = X - m,$$

$$A_n = \begin{pmatrix} a_1 & b & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b & a & b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b & a & b & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \\ 0 & & & & a & b \\ 0 & & & & b & a_1 \end{pmatrix} \tag{3. 3}$$

és

$$a_1 = \frac{1}{\sigma_\xi^2(1-\varrho^2)}\left[1 - \frac{2it_2}{\sqrt{2n}} + \frac{2it_3\varrho}{\sqrt{(n-1)(1+\varrho^2)}}\right],$$

$$a = \frac{1}{\sigma_\xi^2(1-\varrho^2)}\left[(1+\varrho^2)\left(1 - \frac{2it_2}{\sqrt{2n}}\right) + \frac{4it_3\varrho}{\sqrt{(n-1)(1+\varrho^2)}}\right],$$

$$b = \frac{-1}{\sigma_\xi^2(1-\varrho^2)}\left[\varrho\left(1 - \frac{2it_2}{\sqrt{2n}}\right) + \frac{it_3(1+\varrho^2)}{\sqrt{(n-1)(1+\varrho^2)}}\right], \tag{3. 4}$$

$$A^* = \begin{pmatrix} c \\ (1-\varrho)c \\ \vdots \\ (1-\varrho)c \\ c \end{pmatrix}, \quad c = \frac{2it_1}{\sigma_\xi \sqrt{(1+\varrho)[2+(n-2)(1-\varrho)]}}.$$

Válasszuk meg a d_i $(i=1, 2, \dots, n)$ számokat úgy, hogy kielégítsék a következő egyenletrendszert

$$
\begin{aligned}
a_1 d_1 + b d_2 &= \frac{c}{2} \\
b d_3 + a d_2 + b d_1 &= (1-\varrho)\frac{c}{2} \\
&\vdots \\
b d_{n-1} + a d_{n-2} + b d_{n-3} &= (1-\varrho)\frac{c}{2} \\
b d_{n-1} + a_1 d_n &= \frac{c}{2}.
\end{aligned} \tag{3.5}
$$

Az $y_i = z_i - d_i$ leképezéssel $YA_nY^* - YA^*$ a következő alakba megy át:

$$(z_1-d_1, \dots, z_n-d_n)A_n \begin{pmatrix} z_1-d_1 \\ \vdots \\ z_n-d_n \end{pmatrix} - D_n, \tag{3.6}$$

ahol

$$
\begin{aligned}
D_n &= a_1 d_1^2 + a(d_2^2 + \dots + d_{n-1}^2) + a_1 d_n^2 + 2b(d_1 d_2 + \dots + d_{n-1} d_n) = \\
&= \frac{c}{2}(d_1+d_n) + \frac{(1-\varrho)c}{2} \sum_{2}^{n-1} d_i.
\end{aligned} \tag{3.7}
$$

A (3.5) egyenletrendszer általános megoldása

$$d_i = d + \theta_1 u_1^i + \theta_2 u_2^i, \qquad (i=1, \dots, n), \tag{3.8}$$

ahol

$$d = \frac{(1-\varrho)c}{2(a+2b)}, \tag{3.9}$$

és u_1, u_2 a

$$bu^2 + au + b = 0$$

egyenlet gyökei. θ_1 és θ_2 meghatározása a (3.5) egyenletrendszer első és utolsó egyenlete segítségével történik:

$$
\begin{aligned}
\theta_1 &= \left(\frac{c}{2} - d(a_1+b)\right) \frac{a_1 u_2^n + b u_2^{n-1} - (a_1 u_2 + b u_2^2)}{(a_1 u_1 + b u_1^2)(a_1 u_2^n + b u_2^{n-1}) - (a_1 u_2 + b u_2^2)(a_1 u_1^n + b u_1^{n-1})}, \\
\theta_2 &= \left(\frac{c}{2} - d(a_1+b)\right) \frac{a_1 u_1 + b u_1^2 - (a_1 u_1^n + b u_1^{n-1})}{(a_1 u_1 + b u_1^2)(a_1 u_2^n + b u_2^{n-1}) - (a_1 u_2 + b u_2^2)(a_1 u_1^n + b u_1^{n-1})}.
\end{aligned} \tag{3.10}
$$

Újabb helyettesítéssel, legyen most $z_i - d_i = x_i$ a (3. 1) karakterisztikus függvény a következő alakú lesz:

(3. 11)
$$f_n(t_1, t_2, t_3) = c_n \exp\left\{-it_2\sqrt{\frac{n}{2}} + it_3\varrho\sqrt{\frac{n-1}{1+\varrho^2}} + \frac{D_n}{2}\right\}\cdot$$
$$\cdot\int\ldots\int \exp\left\{-\frac{1}{2} X A_n X^*\right\} dx_1 \ldots dx_n.$$

Mivel (lásd pl. CRAMER [5] 136 o.)
$$\int\ldots\int \exp\left\{-\frac{1}{2} X A_n X^*\right\} dx_1 \ldots dx_n = (2\pi)^{n/2}|A_n|^{-1/2},$$
és így

(3. 12)
$$f_n(t_1, t_2, t_3) = (2\pi)^{n/2} c_n |A_n|^{-1/2} \exp\left\{-it_2\sqrt{\frac{n}{2}} + it_3\varrho\sqrt{\frac{n-1}{1+\varrho^2}} + \frac{D_n}{2}\right\}.$$

(3. 3)-ból látható, hogy

(3. 13)
$$|A_n| = a_1|\tilde{A}_{n-2}| - 2b^2 a_1|\tilde{A}_{n-3}| + b^4|\tilde{A}_{n-4}|,$$

ahol $|\tilde{A}_n|$ a következő differenciaegyenletnek tesz eleget:

(3. 14)
$$|\tilde{A}_n| = a|\tilde{A}_{n-1}| - b^2|\tilde{A}_{n-2}|.$$

Ily módon könnyű megmutatni, hogy

(3. 15)
$$|\tilde{A}_n| = \alpha_1 v_1^n + \alpha_2 v_2^n,$$
ahol v_1, v_2 a
$$v^2 - av + b^2 = 0$$
egyenlet gyökei, míg az
$$|\tilde{A}_1| = a, \quad |\tilde{A}_2| = a^2 - b^2$$
feltételekből adódik, hogy

(3. 16)
$$\alpha_1 = \frac{v_1}{v_1 - v_2}, \quad \alpha_2 = -\frac{v_2}{v_1 - v_2}.$$

A (3. 15) és (3. 13) kifejezésekbe behelyettesítve kapjuk az alábbi két összefüggést:

(3. 17)
$$|\tilde{A}_n| = \frac{v_1^{n+1} - v_2^{n+1}}{v_1 - v_2},$$

(3. 18)
$$|A_n| = \frac{1}{v_1 - v_2}\left[v_1^{n-3}(a_1 v_1 - b^2)^2 - v_2^{n-3}(a_1 v_2 - b^2)^2\right] =$$
$$= \frac{v_1^{n-3}(a_1 v_2 - b^2)^2}{v_1 - v_2}\left[1 - \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^{n-3}\frac{(a_1 v_2 - b^2)^2}{(a_1 v_2 - b^2)^2}\right].$$

A számítások egyszerűsítésére legyen

$$f_n^{(1)}(t_1, t_2, t_3) = \exp\left\{\frac{D_n}{2}\right\},$$

$$f_n^{(2)}(t_1, t_2, t_3) = |A_n|^{-\frac{1}{2}} \sigma_\xi^{-n}(1-\varrho^2)^{-\frac{n-1}{2}} \exp\left\{-it_2\sqrt{\frac{n}{2}} + it_3\varrho\sqrt{\frac{n-1}{1+\varrho^2}}\right\}$$

és vizsgáljuk meg külön mindkét függvény aszimptotikus viselkedését. A továbbiakban az $M_i, \overline{M}_i$ konstansok a t_1, t_2, t_3 változók tetszőleges véges $T_1 \times T_2 \times T_3$ intervallumában és a $\varrho \in (-1, 1)$, $\sigma_\xi^2 \in (0, K]$ tartományban egyenletesen korlátos mennyiségeket jelölnek.

(3. 4) alapján

$$(3.19) \qquad v_1 = \frac{1}{\sigma_\xi^2(1-\varrho^2)}\left[(1+\varrho^2)\left(1-\frac{2it_2}{\sqrt{2n}}\right) + \frac{4it_3\varrho}{\sqrt{(n-1)(1+\varrho^2)}} + \right.$$

$$\left. + (1-\varrho^2)\sqrt{\left(1-\frac{2it_2}{\sqrt{2n}}\right)^2 + \frac{4t_3^2}{(n-1)(1+\varrho^2)}}\right],$$

$$v_2 = \frac{1}{\sigma_\xi^2(1-\varrho^2)}\left[(1+\varrho^2)\left(1-\frac{2it_2}{\sqrt{2n}}\right) + \frac{4it_2\varrho}{\sqrt{(n-1)(1+\varrho^2)}} - \right.$$

$$\left. - (1-\varrho^2)\sqrt{\left(1-\frac{2it_2}{\sqrt{2n}}\right)^2 + \frac{4t_3^2}{(n-1)(1+\varrho^2)}}\right].$$

Elegendően nagy n esetén

$$\left(1-\frac{2it_2}{\sqrt{2n}}\right)^{-2} = 1 + \frac{4it_2}{\sqrt{2n}} + \frac{M_1}{n},$$

és

$$\left[1 + \frac{4t_3^2}{(n-1)(1+\varrho^2)}\left(1+\frac{4it_2}{\sqrt{2n}} + \frac{M_1}{n}\right)\right]^{1/2} = 1 + \frac{2t_3^2}{(n-1)(1+\varrho^2)} + \frac{M_2}{n^{3/2}},$$

ezért (3. 19) a következő alakba írható:

$$(3.19') \qquad \begin{aligned} v_1 &= \frac{1}{\sigma_\xi^2(1-\varrho^2)}\left[1-\frac{2it_2}{\sqrt{2n}} + \frac{2it_3\varrho}{\sqrt{(n-1)(1+\varrho^2)}} + \frac{t_3^2(1-\varrho^2)}{(n-1)(1+\varrho^2)} + \frac{M_2}{n^{3/2}}\right], \\ v_2 &= \frac{1}{\sigma_\xi^2(1-\sigma^2)}\left[1-\frac{2it_2}{\sqrt{2n}} + \frac{2it_3\varrho}{\sqrt{(n-1)(1+\varrho^2)}} - \frac{t_3^2(1-\varrho^2)}{(n-1)(1+\varrho^2)} + \frac{M_2}{n^{3/2}}\right]. \end{aligned}$$

A $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \theta\frac{x^3}{3}$ (ahol $|\theta| < 1$ ha $|x| < \frac{1}{2}$) sorfejtés segítségével (3. 19') alapján

$$v_1^{-\frac{n-1}{2}} = \sigma_\xi^{-(n-1)}(1-\varrho^2)^{-\frac{n-1}{2}} \exp\left\{-\frac{n-1}{2}\left[-\frac{2it_2}{\sqrt{2n}}+\frac{2\varrho i t_3}{\sqrt{(n-1)(1+\varrho^2)}}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{t_3^2(1-\varrho^2)}{(n-1)(1+\varrho^2)}-\frac{4\varrho t_2 t_3}{\sqrt{2n(n-1)(1+\varrho^2)}}+\frac{1}{2}\left(\frac{2t_2^2}{n}+\frac{4\varrho^2 t_3^2}{(n-1)(1+\varrho^2)}\right)+\frac{M_3'}{n^{3/2}}\right]\right\}$$

és ily módon

$$v_1^{-\frac{n-1}{2}} = \sigma_\xi^{-(n-1)}(1-\varrho^2)^{-\frac{n-1}{2}} \exp\left\{it_2\frac{n-1}{\sqrt{2n}}-it_3\varrho\sqrt{\frac{n-1}{1+\varrho^2}}-\frac{t_3^2(1-\varrho^2)}{2(1+\varrho^2)}+\right. \tag{3.20}$$

$$\left.+\frac{2\varrho t_2 t_3}{\sqrt{\frac{2n}{n-1}(1+\varrho^2)}}-\frac{t_2^2}{2}\frac{n-1}{n}-\frac{\varrho^2 t_3^2}{1+\varrho^2}\right\}\left(1+\frac{M_3}{\sqrt{n}}\right).$$

Könnyű kiszámolni, hogy

$$a_1 v_1^2 - b^2 = \frac{1}{\sigma_\xi^4(1-\varrho^2)}\left[\left(1-\frac{2it_2}{\sqrt{2n}}\right)^2+2it_3\left(1-\frac{2it_2}{\sqrt{2n}}\right)\frac{\varrho}{\sqrt{(n-1)(1+\varrho^2)}}+\frac{M_4}{n}\right],$$

$$v_1 - v_2 = \frac{1}{\sigma_\xi^2}\left[1-\frac{2it_2}{\sqrt{2n}}+\frac{M_5}{n}\right], \tag{3.21}$$

$$v_1(v_1-v_2)^{1/2} = \frac{1}{\sigma_\xi^3(1-\varrho^2)}\left[1+\frac{M_6}{\sqrt{n}}\right],$$

$$a_1 v_2^2 - b^2 = \frac{1}{\sigma_\xi^4(1-\varrho^2)}\cdot\frac{M_7}{n}.$$

(3.21), (3.20) és (3.18) alapján nyerjük az

$$f_n^{(2)}(t_1, t_2, t_3) = \exp\left\{-it_2\sqrt{\frac{1}{2n}}-\frac{t_2^2}{2}\frac{n-1}{n}-\frac{t_3^2}{2}+\frac{2\varrho t_2 t_3}{\sqrt{2\frac{n}{n-1}(1+\varrho^2)}}\right\}\left(1+\frac{M_8}{\sqrt{n}}\right) \tag{3.22}$$

összefüggést.

Az $f_n^{(1)}(t_1, t_2, t_3)$ függvény aszimptotikus viselkedése a következőképpen vizsgálható. (3.7)—(3.10) alapján

$$D_n = \frac{c}{2}(2d+\theta_1 u_1+\theta_2 u_2+\theta_1 u_1^n+\theta_2 u_2^n)+\frac{(1-\varrho)c}{2}\left[(n-2)d+\right.$$

$$\left.+\theta_1 u_1^2\frac{1-u_1^{n-2}}{1-u_1}+\theta_2 u_2^2\frac{1-u_2^{n-2}}{1-u_2}\right] = \frac{c^2(1-\varrho)}{4(a+2b)}[2+(n-2)(1-\varrho)]+$$

$$+\frac{c^2}{4(a+2b)}[a+2b-(1-\varrho)(a_1+b)]\cdot g_n(t_1, t_2, t_3),$$

ahol

$$g_n(t_1, t_2, t_3) = \left\{\left[1+u_1^{n-1}+(1-\varrho)\frac{1-u_1^{n-2}}{1-u_1}\right]\frac{\theta_1}{\frac{c}{2}-d(a_1+b)}+\right.$$

$$\left.+\left[1+u_2^{-(n-1)}+(1-\varrho)u_2^{-n+2}\frac{1-u_2^{n-2}}{1-u_2}\right]\frac{\theta_2}{\frac{c}{2}-d(a_1+b)}\right\}.$$

Ily módon

$$D_n = -t_1^2\left(1+\frac{\overline{M}_1}{\sqrt{n}}\right)-\frac{t_1^2}{2+(1-\varrho)(n-2)}\left(1+\frac{\overline{M}_1}{\sqrt{n}}\right)\frac{2it_3}{\sqrt{(n-1)(1+\varrho^2)}}\cdot \tag{3.23}$$

$$\cdot\frac{1}{\sigma_\xi^2(1+\varrho)}\cdot g_n(t_1, t_2, t_3).$$

Mivel u_1 és u_2 eleget tesznek a

$$u_1 = -\frac{v_2}{b}, \quad u_2 = -\frac{v_1}{b}, \quad u_1, u_2 = 1, \quad |u_1| \leqq 1, \quad |u_2| \geqq 1 \tag{3.24}$$

összefüggéseknek, azért egyszerű megmutatni, hogy

$$a_1u_2+b = \frac{1}{b}\frac{1}{\sigma_\xi^2(1-\varrho^2)}\left[\left(1-\frac{2it_2}{\sqrt{2n}}\right)^2+2it_3\left(1-\frac{2it_2}{\sqrt{2n}}\right)\frac{\varrho}{\sqrt{(n-1)(1+\varrho^2)}}+\frac{\overline{M}_2}{n}\right],$$

$$a_1u_1+b = \frac{1}{b}\frac{1}{\sigma_\xi^4(1-\varrho^2)}\cdot\frac{\overline{M}_3}{n}, \tag{3.25}$$

$$a_1+bu_2 = a_1-v_1 = \frac{\overline{M}_4}{\sigma_\xi^2\cdot n},$$

$$a_1+bu_1 = a_1-v_2 = \frac{1}{\sigma_\xi^2}\left[1-\frac{2it_2}{\sqrt{2n}}+\frac{\overline{M}_5}{n}\right],$$

$$\frac{v_2}{v_1} = \left[\varrho-\frac{\overline{M}_6}{\sqrt{n}}\right],$$

$$b = \frac{1}{\sigma_\xi^2(1-\varrho^2)}\left(-\varrho+\frac{\overline{M}_7}{\sqrt{n}}\right), \quad \text{ahol} \quad \overline{M}_7 \neq 0 \quad \text{ha} \quad \varrho = 0.$$

Jelölje az egyenletesen korlátos $1/\sigma_\xi^4(1-\varrho^2)(b^2-v_1a_1)$ mennyiséget $\overline{M}_8$ és

$n\sigma_\xi^4(1-\varrho^2)(b^2-v_2a_1)$ mennyiséget $\overline{M}_3$, akkor

(3.26)
$$\frac{(a_1u_2+b)-(a_1+bu_2)u_2^{-(n-1)}}{(a_1+bu_1)(a_1u_2+b)-\dfrac{u_1^{n-2}}{u_2^{n-2}}(a_1+bu_2)(a_1u_1+b)}=$$

$$=\sigma_\xi^2\frac{1-\overline{M}_{10}\left(-\varrho+\dfrac{\overline{M}_7}{\sqrt{n}}\right)\left(\dfrac{\overline{M}_4}{n}\right)\overline{M}_8}{1-\dfrac{\overline{M}_5}{\sqrt{n}}-\overline{M}_9\dfrac{\overline{M}_4}{n}\cdot\dfrac{\overline{M}_3}{n}\cdot\overline{M}_8}=\sigma_\xi^2\cdot\overline{M}_{11},$$

ahol

$$\left|\frac{u_1}{u_2}\right|^{n-1}=\overline{M}_9\leqq 1,\quad |u_2|^{-(n-1)}=\overline{M}_{10}\leqq 1.$$

Ugyanígy

$$u_2\frac{a_1+bu_1-(a_1u_1+b)u_1^{n-2}}{(a_1+bu_1)(a_1u_2+b)-\dfrac{u_1^{n-2}}{u_2^{n-2}}(a_1+bu_2)(a_1u_1+b)}=\sigma_\xi^2\cdot\overline{M}_{14},$$

ami az

$$|u_1|=\overline{M}_{13}\leqq 1,\quad v_1=\frac{1}{\sigma_\xi^2(1-\varrho^2)}\left[1+\frac{\overline{M}_{12}}{\sqrt{n}}\right]$$

összefüggésekből adódik. Az u_1 és u_2-re vonatkozó (3.24) összefüggésekből azt kapjuk, hogy az

(3.27)
$$\frac{1}{1+\varrho}\,\frac{1+u_1^{n-1}+(1-\varrho)u_1\dfrac{1-u_1^{n-2}}{1-u_1}}{2+(n-2)(1-\varrho)}=\overline{M}_{15},$$

$$\frac{1}{1+\varrho}\,\frac{1+u_2^{-(n-1)}+(1-\varrho)u_2^{-n-2}\dfrac{1-u_2^{n-2}}{1-u_2}}{2+(n-2)(1-\varrho)}=\overline{M}_{16}$$

mennyiségek egyenletesen korlátosak. Ily módon a (3.27), (3.26) és (3.23) összefüggések alapján

(3.28)
$$D_n=-t_1^2\left(1+\frac{\overline{M}_1}{\sqrt{n}}\right)-$$

$$-t_1^2\left(1+\frac{\overline{M}_1}{\sqrt{n}}\right)\frac{2it_3}{\sqrt{(n-1)(1+\varrho^2)}}[\overline{M}_{15}\cdot\overline{M}_{11}+\overline{M}_{16}\cdot\overline{M}_{14}],$$

és végül

(3.29)
$$f_n^{(1)}(t_1,t_2,t_3)=\exp\left\{\frac{D_n}{2}\right\}=\exp\left\{-\frac{t_1^2}{2}\right\}\left(1+\frac{\overline{M}_{17}}{\sqrt{n}}\right).$$

A (3. 12), (3. 22) és (3. 29) összefüggésekből $\tilde{R}_n^{(1)}, \tilde{R}_n^{(2)}, \tilde{R}_n^{(3)}$ karakterisztikus függvényére az

$$f_n(t_1, t_2, t_3) = f_n^{(1)}(t_1, t_2, t_3) \cdot f_n^{(2)}(t_1, t_2, t_3) = \tag{3.30}$$

$$= \exp\left\{-\frac{t_1^2}{2} - \frac{t_2^2}{2} - \frac{t_3^2}{2} + \frac{2\varrho t_2 t_3}{\sqrt{2(1+\varrho^2)}}\right\}\left(1 + \frac{M}{\sqrt{n}}\right)$$

kifejezést kapjuk. Ebből viszont következik, hogy $f_n(t_1, t_2, t_3)$, ha $n \to \infty$ a paraméterek tetszőleges véges $T_1 \times T_2 \times T_3$ tartományában a normális eloszlás karakterisztikus függvényéhez tart, mégpedig a $-\infty < m < \infty$, $-1 < \varrho < 1$, $0 < \sigma_\xi^2 \leqq K < \infty$ tartományban egyenletesen. Ezzel a 3. 1 tételt bebizonyítottuk. A megfelelő formulák átalakításával meghatározható a konvergencia gyorsasága is.

4. §. A maximum likelihood becslések aszimptotikus eloszlása

A 3. 1 tétel alapján most már megvizsgálhatjuk az

$$R_n^{(1)} = 0, \quad R_n^{(2)} = 0, \quad R_n^{(3)} = 0 \tag{4.1}$$

egyenletek megoldásából adódó maximum likelihood becslések aszimptotikus viselkedését. Eloszlások konvergenciáján továbbra is a gyenge konvergenciát értjük (lásd GNYEGYENKO—KOLMOGOROV [6]). Bebizonyítjuk a következő tételt:

4. 1. TÉTEL: *A* (4. 1) *egyenletrendszernek* $n \to \infty$ *esetén* 1-*hez tartó valószínűséggel van olyan* $\hat{m}(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, $\hat{\sigma}_\xi^2(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, $\hat{\varrho}(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ *megoldása, hogy az*

$$(\hat{m}_n - m)\sqrt{\frac{2+(n-2)(1-\varrho)}{\sigma_\xi^2(1+\varrho)}}, \quad (\hat{\sigma}_{\xi,n}^2 - \sigma_\xi^2)\frac{1}{\sigma_\xi^2}\sqrt{\frac{n}{2}}, \quad (\hat{\varrho}_n - \varrho)\frac{\sqrt{(n-1)(1+\varrho^2)}}{1-\varrho^2}$$

változók együttes eloszlása $n \to \infty$ *esetén tart az* $\tilde{R}_n^{(1)}, \tilde{R}_n^{(2)}, \tilde{R}_n^{(3)}$ *változók határeloszlásához, mégpedig a valódi paraméter értékek* $-\infty < m < \infty$, $0 < \sigma_\xi^2 \leqq k < \infty$, $-1 < \varrho < 1$ *tartományában egyenletesen.*

Bizonyítás. A (4. 1) egyenletrendszer helyett tekintsük a vele ekvivalens

$$\begin{aligned} L_n^{(1)} &= (1+\varrho)\sigma_\xi^2 R_n^{(1)} = 0 \\ L_n^{(2)} &= 2(1-\varrho)\sigma_\xi^4 R_n^{(2)} = 0 \\ L_n^{(3)} &= (1-\varrho^2)\sigma_\xi^2 R_n^{(3)} = 0 \end{aligned} \tag{4.2}$$

egyenletrendszert. (4. 2) baloldalai m, σ_ξ^2, ϱ-ban polinomok, ezért *Taylor*-sorba fejtve őket az $m_0, \sigma_{\xi,0}^2, \varrho_0$ valódi értékek körül a következő egyenletrendszerre jutunk:

$$\begin{aligned} &L_n^{(1)}(m_0, \sigma_0^2, \varrho_0) + \left.\frac{\partial L_n^{(1)}}{\partial m}\right|_{m_0, \sigma_0^2, \varrho_0}(m - m_0) + \left.\frac{\partial L_n^{(1)}}{\partial \varrho}\right|_{m_0, \sigma_0^2, \varrho_0}(\varrho - \varrho_0) + \ldots = 0 \\ &L_n^{(2)}(m_0, \sigma_0^2, \varrho_0) + \left.\frac{\partial L_n^{(2)}}{\partial m}\right|_{m_0, \sigma_0^2, \varrho_0}(m - m_0) + \ldots = 0 \\ &L_n^{(3)}(m_0, \sigma_0^2, \varrho_0) + \left.\frac{\partial L_n^{(3)}}{\partial m}\right|_{m_0, \sigma_0^2, \varrho_0}(m - m_0) + \ldots = 0. \end{aligned} \tag{4.3}$$

A (4. 3) egyenletrendszerben szereplő deriváltak kiszámítása nem okoz nehézséget, azonban a pontos képletek kiírását mellőzzük. Az

$$m-m_0 = x\sqrt{\frac{\sigma_0^2(1+\varrho_0)}{2+(n-2)(1-\varrho_0)}},$$

$$\sigma_\xi^2-\sigma_0^2 = y\sigma_0^2\sqrt{\frac{2}{n}},$$

$$\varrho-\varrho_0 = z\frac{1-\varrho_0^2}{\sqrt{(n-1)(1+\varrho_0^2)}},$$

helyettesítéssel és (4. 3)-ban az első egyenletnek a $\sigma_0\sqrt{1+\varrho_0}\sqrt{2+(n-2)(1-\varrho_0)}$ mennyiséggel, a másodiknak az $(1-\varrho_0^2)\sigma_0^2\sqrt{2n}$ mennyiséggel, míg a harmadiknak a $(1-\varrho_0^2)\sigma_0^2\sqrt{(n-1)(1+\varrho_0^2)}$ mennyiséggel való osztásával a következő egyenletrendszerre jutunk:

$$\tilde{R}_n^{(1)}+x\frac{\partial L_n^{(1)}}{\partial m}\bigg|_0\frac{1}{2+(n-2)(1-\varrho_0)}+\ldots=0$$

(4. 4)
$$\tilde{R}_n^{(2)}+y\frac{\partial L_n^{(2)}}{\partial \sigma_\xi^2}\bigg|_0\frac{1}{n(1-\varrho_0^2)}+\ldots=0$$

$$\tilde{R}_n^{(3)}+z\frac{\partial L_n^{(3)}}{\partial \varrho}\bigg|_0\frac{1}{\sigma_0^2(n-1)(1+\varrho_0^2)}+\ldots=0.$$

Könnyű megmutatni, hogy

$$\frac{\partial L_n^{(1)}}{\partial m}\bigg|_0\cdot\frac{1}{2+(n-2)(1-\varrho_0)}=-1,$$

$$\frac{\partial L_n^{(2)}}{\partial \sigma_\xi^2}\bigg|_0\cdot\frac{1}{n(1-\varrho_0^2)}=-1,$$

$$\frac{\partial L_n^{(3)}}{\partial \varrho}\bigg|_0\cdot\frac{1}{\sigma_0^2(n-1)(1+\varrho_0^2)}\to-1,$$

ahol a konvergencia valószínűségben értendő és egyenletes a $-\infty<m_0<\infty$, $0<\sigma_0^2\leqq \leqq K<\infty$, $-1<\varrho_0<1$ tartományban. A (4. 4) egyenletrendszerben szereplő további tagok nullához tartanak valószínűségben, mégpedig egyenletesen a valódi paraméterértékek fenti tartományában. Elég nagy n értékekre, a 3. 1 tétel alapján, az $|R_n^{(i)}|$ és $|\tilde{R}_n^{(i)}|/|R_n^{(j)}|$ $(i,j=\overline{1,3})$ mennyiségek valószínűségben korlátosak, egyenletesen ugyanabban a tartományban. Ezért az

$$\begin{aligned} 1-\varepsilon_1+\ldots &= 0 \\ 1-\varepsilon_2+\ldots &= 0 \\ 1-\varepsilon_3+\ldots &= 0 \end{aligned} \tag{4. 5}$$

egyenletrendszernek, ahol

$$\varepsilon_1=\frac{x}{\tilde{R}_n^{(1)}},\quad \varepsilon_2=\frac{y}{\tilde{R}_n^{(2)}},\quad \varepsilon_3=\frac{z}{\tilde{R}_n^{(3)}}$$

elég nagy n-re 1-hez tetszőleges közeli valószínűséggel van olyan $\varepsilon_1^{(n)}, \varepsilon_2^{(n)}, \varepsilon_3^{(n)}$ megoldása, mely $1-\delta$ és $1+\delta$ közé esik (ahol $\delta>0$ tetszőleges) a $-\infty<m_0<\infty$, $0<\sigma_0^2\leqq K$, $-1<\varrho_0<1$ tartományban egyenletesen. Ebből következik, hogy az

$$x_n=\varepsilon_1^{(n)}\cdot\tilde{R}_n^{(1)},\quad y_n=\varepsilon_2^{(n)}\cdot\tilde{R}_n^{(2)},\quad z=\varepsilon_3^{(n)}\cdot\tilde{R}_n^{(3)}$$

változók határeloszlása $n\to\infty$ esetén megegyezik az $\tilde{R}_n^{(1)}, \tilde{R}_n^{(2)}, \tilde{R}_n^{(3)}$ változók határeloszlásával, mivel $\varepsilon_i^{(n)}=1$ $(i=1,2,3)$ ha $n\to\infty$ egyenletesen a $-\infty<m_0<\infty$, $0<\sigma_0^2\leqq K<\infty$, $-1<\varrho_0<1$ tartományban.

Ezzel a 4. 1 tételt bebizonyítottuk.

Az

$$x_n=(\hat{m}_n-m_0)\sqrt{\frac{2+(n-2)(1-\varrho_0)}{\sigma_0^2(1-\varrho_0)}},$$

$$y_n=(\hat{\sigma}_n^2-\sigma_0^2)\frac{1}{\sigma_0^2}\sqrt{\frac{n}{2}},$$

$$z_n=(\hat{\varrho}_n-\varrho_0)\frac{\sqrt{(n-1)(1+\varrho_0^2)}}{1-\varrho_0^2}$$

összefüggésekből látható, hogy $\hat{\varrho}_n$ és $\hat{\sigma}_n^2$ becslések egyenletesen konzisztensek, míg az $\hat{m}_n$ becslésre ez nem áll fenn.

A 4. 1 tétel segítségével, valamint CRAMER ismert tétele ([5] 281 o.) alapján az m, σ_ξ^2, ϱ paraméterekre megfelelő konfidencia tartományok szerkeszthetők.

5. §. Az időben folytonos folyamatra vonatkozó eredmények diszkrét megfelelői

Az előbbiekben már szerepelt, hogy az időben folytonos esetnek az felel meg, amikor az ismeretlen paramétereknek az m, σ_ξ^2, ϱ paramétereket tekintjük. Ekkor $n\to\infty$ esetén nem lesz igaz a $H_n^{(i)}$ (lásd (1. 6)) mennyiségek aszimptotikusan egyenletes normalitása. Igaz lesz viszont a $H_n^{(i)}$ mennyiségekre is 3. 1 tétel megfelelője s a 4. 1 tétel megfelelője, ha $\varkappa=(1-\varrho^2)n\to\infty$.

5. 1. TÉTEL: *$\varkappa\to\infty$ esetén a $\tilde{H}_n^{(i)}=H_n^{(i)}/\mathrm{D}H_n^{(i)}$ $(i=1,2,3)$ valószínűségi változók eloszlása tart a* $\left(0,0,0;\ \begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{vmatrix}\right)$ *paraméterű normális eloszláshoz.*

Bizonyítás. A bizonyítás pontosan ugyanúgy történik, mint a 3. §-ban. A (3. 19) képletben szereplő v_1 és v_2 mennyiségek azonban a következő alakúak lesznek:

$$v_1 = \frac{1}{2\sigma_\zeta^2}\left[(1+\varrho^2)\left(1-\frac{2it_2}{\sqrt{2(n-1)}}\right)+\frac{it_3 2\varrho\sqrt{1-\varrho^2}}{\sqrt{n-1}}+\right.\tag{5. 1}$$

$$\left.+(1-\varrho^2)\left\{\left(1-\frac{2it_2}{\sqrt{2(n-1)}}\right)^2-\frac{4i\varrho t_3}{\sqrt{(n-1)(1-\varrho^2)}}\left(1-\frac{2it_2}{\sqrt{2(n-1)}}\right)+\frac{4(1-\varrho^2)t_3^2}{n-1}\right\}^{1/2}\right],$$

$$v_2 = \frac{1}{2\sigma_\zeta^2}\left[(1+\varrho^2)\left(1-\frac{2it_2}{\sqrt{2(n-1)}}\right)+\frac{it_3 2\varrho\sqrt{1-\varrho^2}}{\sqrt{n-1}}-\right.$$

$$\left.-(1-\varrho^2)\left\{\left(1-\frac{2it_2}{\sqrt{2(n-1)}}\right)^2-\frac{4i\varrho t_3}{\sqrt{(n-1)(1-\varrho^2)}}\left(1-\frac{2it_2}{\sqrt{2(n-1)}}\right)+\frac{4(1-\varrho^2)t_3^2}{n-1}\right\}^{1/2}\right].$$

(5. 1)-ből látható (3. 20) alapján, hogy aszimptotikusan normális eloszlás csak $\varkappa\to\infty$ esetén áll fenn.

$\varkappa\to\infty$ esetén a maximum likelihood becslésekkel ekvivalens becsléseket kapunk, ha a következő becsléseket tekintjük

$$\hat m = \frac{1}{n}\sum_1^n \xi(k),\quad \hat\sigma_\zeta^2 = (1-\hat\varrho^2)\hat s_\xi^2$$
$$\hat\varrho = \frac{1}{(n-1)\hat s_\xi^2}\sum_2^n \eta(k)\eta(k-1),\tag{5. 2}$$

ahol

$$\eta(k) = \xi(k)-\hat m,\quad \hat s_\xi^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \eta^2(k).\tag{5. 3}$$

Egyszerű számítások mutatják, hogy

$$\mathbf{M}\hat m = m,\quad \mathbf{D}^2\hat m = \frac{\sigma_\xi^2}{n}+\frac{2\varrho}{1-\varrho}\frac{\sigma_\xi^2}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right),$$
$$\mathbf{M}(\hat\varrho-\varrho) = O\left(\frac{1}{n}\right),\quad \mathbf{D}^2\hat\varrho = \frac{1-\varrho^2}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right),\tag{5. 4}$$
$$\mathbf{M}(\hat\sigma_\zeta^2-\sigma_\zeta^2) = O\left(\frac{1}{n}\right),\quad \mathbf{D}^2\sigma_\zeta^2 = \frac{2(1-\varrho^2)^2}{n}\sigma_\xi^4+o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Az előbbihez hasonló módon bizonyítható az

5. 2. TÉTEL: *$\varkappa\to\infty$ esetén az*

$$\hat m\sim m,\quad \hat\sigma_\zeta^2\sim\sigma_\zeta^2,\quad \hat\varrho\sim\varrho$$

becslések aszimptotikusan effektívek és az

$$\frac{\hat{m}-m}{\sqrt{\frac{1+\varrho}{1-\varrho}\frac{\sigma_\xi^2}{n}}}, \quad \frac{\hat{\sigma}_\zeta^2-\sigma_\zeta^2}{\sqrt{\frac{2(1-\varrho^2)^2\sigma_\xi^2}{n}}}, \quad \frac{\hat{\varrho}-\varrho}{\sqrt{\frac{1-\varrho^2}{n}}} \tag{5. 5}$$

hányadosok eloszlása tart a $\left(0, 0, 0, \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}\right)$ *normális eloszláshoz.*

Egyszerűbben bizonyítható a következő

5. 3. TÉTEL: $n \to \infty$ *esetén az* (5. 2)*-ből adódó*

$$\hat{\sigma}_\xi^2 \sim \sigma_\xi^2$$

becslés aszimptotikusan effektív és a

$$\frac{\hat{\sigma}_\zeta^2 - \sigma_\zeta^2}{\sigma_\zeta^2\sqrt{\frac{2}{n}}} \tag{5. 6}$$

hányados eloszlása a (0. 1) *paraméterű normális eloszláshoz tart.*

Bizonyítás. Mint már a 2. §-ban láttuk (2. 3), a

$$\zeta_n = -\sqrt{\frac{n}{2}} + \frac{1}{2\sigma_\zeta^2}\sqrt{\frac{2}{n}}\Big\{(1-\varrho^2)(\xi(1)-m)^2 + \tag{5. 7}$$

$$+ \sum_2^n [\xi(i)-m-\varrho(\xi(i-1)-m)]^2\Big\}$$

változó karakterisztikus függvénye a következő alakú lesz:

$$\left(1-\frac{2it}{\sqrt{2n}}\right)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-it\sqrt{\frac{n}{2}}\right).$$

Ebből azonnal adódik, hogy ζ_n aszimptotikusan normális eloszlású, ha $n \to \infty$. Másrészt $\hat{\varrho} \to \varrho$, $\hat{m} \to m$ valószínűségben és így CRAMER ismert tétele alapján ([5] 281. o.) a

$$\zeta_n^* = -\sqrt{\frac{n}{2}} + \frac{1}{2\sigma_\zeta^2}\sqrt{\frac{2}{n}}\Big\{(1-\hat{\varrho}^2)(\xi(1)-\hat{m}) + \frac{1}{2\sigma_\zeta^2}\sqrt{\frac{2}{n}}\sum_2^n[\xi(i)-\hat{m}-$$

$$-(\xi(i-1)-\hat{m})\hat{\varrho}]^2\Big\} = -\sqrt{\frac{n}{2}} + \frac{1}{2\sigma_\zeta^2}\sqrt{\frac{2}{n}}(1-\hat{\varrho}^2)\hat{s}_\xi^2 + \frac{(\xi(n)-\hat{m})^2+(\xi(1)-\hat{m})^2}{\sqrt{2n}\cdot\sigma_\zeta^2}$$

változó határeloszlása megegyezik ζ_n határeloszlásával $n \to \infty$ esetén. A $\zeta_n^* = 0$ egyenlet megoldása adja a $\hat{\sigma}_\xi^2$ becslést, egy $O(1/\sqrt{n})$-s tagtól eltekintve, amiből adódik a tétel állítása.

Az előző dolgozatban [2] szereplő 3. 3 és 3. 4 tételek érvényesek maradnak a diszkrét esetben is, ha ismeretleneknek az m, σ_ζ^2, ϱ paramétereket tekintjük. Ehhez azt kell bizonyítani, hogy a diszkrét stacionárius *Gauss—Markov*-folyamat trajektóriáinak folytonos funkcionáljai valószínűségben konvergálnak a megfelelő időben folytonos folyamat funkcionáljaihoz, mégpedig a paraméterekben egyenletesen.

Legyen $\xi_n(t)$ $(0 \leqq t \leqq T)$ a $\xi(t)$ folyamathoz tartozó véletlen törtvonal, azaz

$$\xi_n(t) = \xi\left(\frac{kT}{n}\right) + \frac{n}{kT}\left(t - \frac{kT}{n}\right)\left[\xi\left(\frac{k+1}{n}T\right) - \xi\left(\frac{kT}{n}\right)\right], \tag{5. 8}$$

ha

$$\frac{kT}{n} \leqq t \leqq \frac{k+1}{n}T, \qquad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Igaz a következő lemma

5. 1. LEMMA. *A $\xi(t)$ stacionárius Gauss—Markov-folyamatra a $-\infty < m < \infty$, $0 < \lambda \leqq \lambda_0$ (és $2\lambda\sigma_\xi^2 = \sigma_\zeta^2$ állandó) tartományban egyenletesen teljesül a*

$$P\{\sup_{|t'-t''|<\delta} |\xi(t') - \xi(t'')| > \varepsilon\} \leqq \frac{2\sigma_\zeta^2\delta + \sigma_\zeta^2 \cdot \lambda_0 \delta^2}{\varepsilon^2} \tag{5. 9}$$

egyenlőtlenség.

Bizonyítás. A [2] dolgozat (1. 1′) összefüggése

$$\xi(t') - \xi(t'') = -\lambda \int_{t''}^{t'} \xi(s)\,ds + \int_{t''}^{t'} d\zeta(s)$$

alapján

$$\mathbf{M}\{\sup_{|t'-t''|<\delta} |\xi(t') - \xi(t'')|^2\} \leqq 2\mathbf{M}\left\{\sup_{|t'-t''|<\delta} \left|\lambda \int_{t''}^{t'} \xi(s)\,ds\right|^2\right\} + \tag{5. 10}$$

$$+ 2\mathbf{M}\left\{\sup_{|t'-t''|<\delta} \left|\int_{t''}^{t'} d\zeta(s)\right|^2\right\} \leqq$$

$$\leqq 2\delta \int_{t''}^{t'} \mathbf{M}(\lambda\xi(s))^2\,ds + 2\sigma_\zeta^2 \cdot \delta \leqq \sigma_\zeta^2 \cdot \lambda \cdot \delta^2 + 2\sigma_\zeta^2 \cdot \delta.$$

(5. 10)-ből (5. 9) a *Csebisev* egyenlőtlenség alapján adódik. A $\lambda \to \infty$ esetet külön kellene vizsgálni, azonban ebben az esetben mint a [2] dolgozat eredményei mutatják konfidencia intervallumok szerkeszthetők s így ez az eset nem érdekel bennünket.

Az 5. 1 lemma biztosítja, hogy teljesülnek MARUYAMA [10] dolgozatában szereplő tétel feltételei, azaz igaz a következő

5. 4. TÉTEL: *Legyen $\xi(t)$ stacionárius Gauss—Markov-folyamat és $\xi_n(t)$ a megfelelő* (5. 8) *véletlen törtvonal, legyenek továbbá az $f(t), g(t)$ folytonos függvények $(0 \leqq t \leqq T)$ olyanok, hogy $f(0) < \xi(0) < g(0)$ akkor*

$$\lim_{n\to\infty} P\{f(t) \leqq \xi_n(t) \leqq g(t), 0 \leqq t \leqq T\} = P\{f(t) \leqq \xi(t) \leqq g(t), 0 \leqq t \leqq T\} \tag{5. 11}$$

egyenletesen a $-\infty < m < \infty$, $0 < \lambda \leqq \lambda_0$ tartományban.

Az 5. 4 tétel közvetlen következménye a következő állítás

COROLLÁRIUM: *Ha* $\bar{h}(\xi(t))$ *és* $\underline{h}(\xi(t))$ $(0 \leqq t \leqq T)$ *folytonos funkcionálok, ahol* $\xi(t)$ *stacionárius Gauss—Markov-folyamat, és* $\varepsilon > 0$ *tetszőleges olyan szám, amelyre*

$$P\{\underline{h}(\xi(t)) < m < \bar{h}(\xi(t))\} > 1 - \varepsilon, \tag{5. 12}$$

akkor tetszőleges $\varepsilon_1 > 0$*-hoz található csak* ε*-tól és* ε_1*-től függő olyan* n *(a* $-\infty < m < \infty$, $0 < \lambda \leqq \lambda_0$ *tartományban egyenletesen), hogy*

$$P\{\underline{h}(\xi_n(t)) < m < \bar{h}(\xi_n(t))\} > 1 - \varepsilon - \varepsilon_1 . \tag{5. 13}$$

(5. 13) éppen azt jelenti az előző dolgozat 3. 3 tételével egybevetve, hogy diszkrét esetben sem szerkeszthető m-re véges konfidenciaintervallum.

6. §. A megfigyelési pontok sűrítésének kérdése

Mint a 2. §-ban láttuk m maximum likelihood becslése a $\xi(1)+\xi(n)$ és $\sum_{2}^{n-1} \xi(i)$ statisztikák súlyozott számtani közepe. Ennek alapján várható, hogy a $[0, T]$ intervallumban megfigyelt $\xi(t)$ folyamat középértékét a

$$\bar{m}_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \xi\left(\frac{Tk}{n}\right) \tag{6. 1}$$

összeggel becsülve található olyan n érték, melyre $\bar{m}_n$ szórása minimális lesz. Ez pedig azt jelenti, hogy a beosztás sűrítését nem érdemes minden határon túl növelni. Hogy ez valóban így van, azt szemléletesen a következőképpen lehet belátni, legyen $T=1, \sigma_\xi^2=1$ és m becslésére szolgáljon egyrészt $m_1 = \frac{\xi(0)+\xi(1)}{2}$, másrészt $m_2 = \int_0^2 \xi(t)\,dt$. Könnyen belátható (lásd pl. az előző [2] dolgozat (2. 15) képletét), hogy

$$\mathbf{D}^2 m_1 = \frac{1+e^{-\lambda}}{4\lambda}, \quad \mathbf{D}^2 m_2 = \frac{\lambda + e^{-\lambda} - 1}{\lambda^3} \tag{6. 2}$$

és innen könnyen adódik, hogy $0 < \lambda < 2$ esetén $\mathbf{D}^2 m_1 < \mathbf{D}^2 m_2$, míg $\lambda > 2$ esetén $\mathbf{D}^2 m_2 < \mathbf{D}^2 m_1$. Ez pedig azt jelenti, hogy a fenti feltételek esetén $(T=1, \sigma_\xi^2 = 1)$ a $\lambda < 2$ tartományban jobb az m_1 becslés, mint az m_2 (egyenlőség a $\lambda = 2$ esetben áll fenn).

Hasonló módon vethető fel a folyamat szórása becslésének a kérdése. Tegyük fel, hogy $m=0$ és a szórásnégyzetet az

$$s_n^2 = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \xi^2\left(\frac{kT}{n}\right) \tag{6. 3}$$

mennyiséggel becsüljük. Kérdés, milyen n érték esetén lesz minimális szórású?

Ismét vizsgáljuk meg a $T=1, \sigma_\xi^2=1$ feltevés esetén az

$$(6.4) \qquad s_1^2 = \frac{\xi^2(0)+\xi^2(1)}{2}, \quad s^2 = \int_0^1 \xi^2(t)\,dt$$

becslések szórásának viszonyát. Könnyű belátni, hogy

$$(6.5) \qquad \mathbf{D}^2 s_1^2 = \sigma^4(1+e^{-2\lambda}) = \sigma^4\left(1+e^{-\frac{1}{\sigma^2}}\right)$$

$$\mathbf{D}^2 s^2 = \frac{\sigma^4}{\lambda^2}(e^{-2\lambda}+2\lambda-1) = 4\sigma^8\left(e^{-\frac{1}{\sigma^2}}+\frac{1}{\sigma^2}-1\right).$$

Ismét egyszerű számolással adódik, hogy $\mathbf{D}^2 s_1^2 < \mathbf{D}^2 s^2$ a $0<\lambda<1$ tartományban (vagy a $\sigma^2 > \frac{1}{2}$ tartományban). Itt azonban nehézséget jelent, hogy σ^2 maga az ismeretlen paraméter, továbbá, hogy az s_1^2 és s^2 változók már nem normális eloszlásúak, ezért a fenti becslések, csak közelítésként használhatók.

Annak eldöntése, hogy adott λ esetén milyen hosszúságú intervallumon jobb az

$$\overline{m}_1 = \frac{\xi(0)+\xi(T)}{2}$$

becslés, mint az

$$\overline{m}_2 = \frac{\xi(0)+\xi\left(\frac{T}{2}\right)+\xi(T)}{3}$$

becslés, a megfelelő szórások

$$\mathbf{D}^2\overline{m}_1 = \frac{\sigma^2}{2}(1+e^{-\lambda T})$$

$$\mathbf{D}^2\overline{m}_2 = \frac{\sigma^2}{3}\left(1+\frac{2}{3}e^{-\lambda T}+\frac{4}{3}e^{-\lambda T/2}\right)$$

összehasonlításával a következő egyenlőtlenséget adja T-re

$$(6.6) \qquad 3+5e^{-\lambda T} \leqq 8e^{-\frac{\lambda T}{2}}.$$

Általában legyen a $\xi(t)$ folyamat $R(\tau)$ korrelációs függvénye kétszer differenciálható és második deriváltja legyen korlátos $(0, T)$-ben, akkor igaz a következő tétel (Sz. J. VILENKIN [12]):

6. 1. TÉTEL: *Ha a $\xi(t)$ folyamat $R(\tau)$ korrelációs függvénye eleget tesz még a*

$$\int_0^T R(\tau)\left(1-\frac{2\tau}{T}\right)d\tau > 0$$

feltételnek, akkor az (6. 1) *becslések közül van olyan* (véges n-re), *mely minimális szórású.*

Hasonló feltételek keresése a szórás becsléseire szintén kívánatos lenne.

IRODALOM

[1] ANDERSON, T. W.: On the asymptotic distributions of estimates of parameters of stochastic difference equations, *Annals of Math. Stat.* **30** (1959), 676–687.

[2] ARATÓ, M.: Folytonos állapotú Markov folyamatok statisztikai vizsgálatáról, I., *MTA III. Oszt. Közleményei*, **14** (1964), 13–34.

[3] ——— Некоторые статистические вопросы стационарных гауссовских марковских процессов, Disszertáció, Москва, 1962. М. Г. У.

[4] ——— Оценка параметров стационарного гауссовского марковского процесса, Д. А. Н. **145** (1962) № I, 13—16.

[5] CRAMER, H.: *Mathematical Methods of Statistics*, Princeton, 1945.

[6] GNYEGYENKO, B. V.–KOLMOGOROV, A. N.: *Független valószínűségi változók összegeinek határeloszlásai*, Budapest, 1949.

[7] Линник, Ю. В.: Об одном вопросе статистики зависимых наблюдений. Изв. А. Н. СССР **14** (1950) 501—522.

[8] Лувсанцерен, Ш.: *Disszertáció*, Moszkva, 1954. М. Г. У.

[9] ——— Оценки наибольшего правдоподобия и говерительные множества для неизвестных параметров стационарного гауссовского процесса марковского типа, Д. А. Н. **98** (1954) № 5, 723—726.

[10] MARUYAMA, G.: Continuous Markov processes and stochastic equations, *Rend. Circ. Math. Palermo* 4 (1955) 1–43.

[11] ROSENBLATT, M.: *Random Processes*, New York, 1962.

[12] Виленкин, С. Я.: Об оценке среднего в стационарных процессах, Теория вероятностей и ее прим. 4 (1959), 186—207.

[13] Волконский, В. А.—Розанов, Ю. А. Некоторые предельные теоремы для случайных функций, I. Теория вероятностей и ее прим. 4 (1959) 186—207.

(Beérkezett 1964. II. 1.)

A PRINCIPIA SZÜLETÉSE

Írta: VEKERDI LÁSZLÓ

„Már COPERNICUS és KEPLER sejtették az általános gravitációt; BOULLIAN és BORELLI pedig határozottan úgy tartották, hogy lennie kell egy, a három KEPLER-törvényt összefogó elvnek, — sőt, a zseniális PASCAL — ha ugyan a CHASLES által közölt kéziratok nem eleitől-végig csalás termékei — már formulába is öntötte volna, egy 1652 körül BOYLE-hez írt levelében: *Dans les mouvements célestes la force, agissant de la distance, suffit à tout et fournit des raisons pour expliquer toutes ces grandes révolutions qui animent l'univers;* de még akkor is hiányzott az elv bizonyítása és részletes következményeinek a kifejtése és ezt mindenképp a hasonlíthatatlan NEWTON végezte el először.... Úgy tűnik, GAUSS kételyei ellenére is hinni kell unokahuga, M[me] CONDUIT és barátja, Henry PEMBERTON elbeszélésének, hogy mikor az 1665-ös pestisjárvány elől NEWTON Cambridge-ből hazaüzetvén, kedvenc szokása szerint egy fa árnyékában gondolkozott, egy leeső alma arra a kérdésre vezette, vajon ugyanaz az erő tartja-e a holdat is föld körüli pályáján, amelyik az almát esni kényszeríti."[1]

Rudolf WOLF, a múlt század egyik legtekintélyesebb asztronómiatörténésze kérdezte ezt NEWTON nevében. Azonnal válaszol: a holdat is ugyanaz a gravitációs erő vonzza a föld felé, mint a földön szabadon eső tárgyakat, a hold azért nem esik a földre, mert a vonzással éppen egyenlő centrifugális erő nem engedi. A kettő éppen egyenlő, s így a centrifugális erő méri a vonzást. Ennek a centrifugális erőnek és a harmadik KEPLER-törvénynek a segítségével kiszámítja, mekkora a nehézségi gyorsulás a földön, a hold mozgásából számítva.

De a hold távolságára hibás, a valóságosnál kisebb adatok állnak rendelkezésére, s így a számított nehézségi erőt a tényleges földi gyorsulás kb. 86%-ának találta csupán.

Ez elveszi a kedvét, „Cambridge-ba visszatérve ismét optikai vizsgálatokkal foglalkozott. Csak 1678-ban tért vissza mechanikai vizsgálataihoz. HOOKE-nak egy matematikai fejtegetése, mely a mozgó földön eső test pályájára vonatkozott, NEWTONT egy fontos tétel felismerésére vezette, hogy ti. a távolság négyzetével fordítva arányos erő hatása alatt álló bolygó ellipszisen mozog, melynek egyik gyújtópontjában áll a Nap. NEWTON ennek dacára nem gondolt rá, hogy elméletét közzé tegye, míg 1682-ben az új PICARD-féle fokmérés megbízható adatairól tudomást szerzett, mire egész számítását ismételte. Most az eredmény a valóságnak elég jól megfelelt. Vizsgálatai közben még más, a bolygók keringésére vonatkozó tételeket fedezett fel. Barátjának HALLEY-nak unszolására NEWTON a maga elméletét kidolgozta, és a

[1] WOLF, R.: *Geschichte der Astronomie* München 1877, 446—447.

»Royal Society«-nak beküldte, mely azt 1687-ben »Philosophiae naturalis principia mathematica« cím alatt kiadta."[2]

A jólértesült WOLF még azt is hozzáteszi, hogy a *Principia* kéziratának a Royal Society-ben való bemutatásakor „*hatte Hooke die unglaubliche Unverschämtheit, sich zu stellen, wie wenn ihm das Meiste in den Werke Enthaltene schon lange bekannt wäre.*"[3]

Elavult, a tudománytörténetírás „praekritikus" korszakából származó vélemények?

Nézzük meg, a második világháború utáni kor egyik legnagyobb közönségsikert elért tudománytörténete, Stephen F. MASON könyve mit tart a kérdésről. Szerinte is, GALILEI és DESCARTES tehetetlenségi törvénye, KEPLER és BORELLI spekulációi után nyitva állott az út az általános gravitáció felfedezésére, s az 1660-as években az angol iskola, Robert HOOKE, Christopher WREN, Edmund HALLEY sejtette, hogy a bolygók mozgása a távolság négyzetével fordított arányban csökkenő vonzás és a centrifugális erő kombinálásával magyarázandó. „Ezekkel a kérdésekkel foglalkozott NEWTON is, amikor az 1665—66-os nagy pestis alatt Cambridge-től távol, a Grantham melletti Woolsthorpe-i birtokán tartózkodott." — S most következik a már ismertek ismertetése — „Jóllehet NEWTON ezeket a számításokat Woolsthorpe-i tartózkodása alatt végezte, az eredményeit nem tette közzé. NEWTON 1666-os munkájának a közzé nem tételére a legkülönbözőbb magyarázatokat próbálták adni..." Mindenesetre 1679 körül „*Waren auch andere Wissenschaftler bis zum Gesetz für die Zentripetalkraft und zum reziprok quadratischen Gesetz für die Gravitationskraft vorgedrungen*".[4]

Apró javításokat nem tekintve, a leírás lényegében azonos az előzőkkel. Az „almát" kihagyta, a centrifugális erő helyett a történelmileg igazolható „*Zentripetalkraft*"-ot vette be és a „szemtelen" HOOKE-ot az új törvény egyik előkészítőjévé léptette elő.

A „szemtelen" HOOKE ugyanis azóta különös karriert futott be. A két világháború közötti kor egyik legélesebb szemű tudománytörténésze, Jean PELSENEER hívta fel a figyelmet 1929-ben egy addig kiadatlan, HOOKE-hoz írt NEWTON-levéllel kapcsolatban, hogy NEWTON gravitációra vonatkozó nézetei távolról sem lehettek 1680 körül olyan fejlettek, mint az 1666-os hagyomány tartja.[5] — Ez a levél egy rövid HOOKE—NEWTON levélváltás egyik darabja, 1679 dec. 13-án írta NEWTON.

HOOKE, aki OLDENBURG halála után a Royal Society titkára lett, 1679 nov. 24-én egy kedves hangú levelet írt NEWTONhoz, közreműködését kérve. És a végén saját kéréssel is fordul hozzá: „Nagy kegynek tekinteném, ha szíveskednék kifogásait közölni bármely hipotézisemről vagy véleményemről, kiváltképpen ha megismertetné velem gondolatait a bolygók mozgásának egy egyenes, (direct) érintő irányában történő és egy központi test felé történő vonzó mozgásból való összetevésére vonatkozólag."[6] S aztán közli, hogy nagyon érdekelné az is, mi a véleménye NEWTON-

[2] HELLER ÁGOST: *A Physika története. Első kötet.* Budapest 1891, 181—182.

[3] WOLF, R.: i. m. 466.

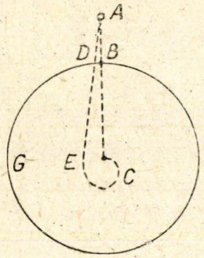
[4] MASON, S. F.: *Geschichte der Naturwissenschaft* Stuttgart 1961, 236—240.

[5] PELSENEER, J.: „Une lettre inédite de Newton" *Isis* 12, 1929, 237—239.

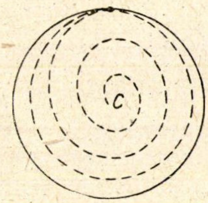
[6] *The Correspondence of Isaac Newton* Edited by H. W. TURNBULL Cambridge 1959—1961. II 235 Hooke to Newton 24 Nov. 1679, 297. (A továbbiakban *Corr.*, kötet- és levélszám által idézzük.) Ez a kiadás számos eddig kiadatlan NEWTON kéziratot tartalmaz, NEWTON hatalmas levelezésének első mintaszerű kritikai kiadása. Hatása a NEWTON-kutatásra előreláthatóan ugyan olyan nagy lesz, mint az ADAM—TANNERY-féle DESCARTES kiadásé volt a DESCARTES-filológiára.

nak FLAMSTEED parallaxis kísérleteiről. A kiadó itt megjegyzi, hogy HOOKE évekkel azelőtt kiadott egy kis könyvet, *An Attempt to Prove the Motion of the Earth from Observations* London 1674, amelynek a végén „Hooke nagy általánosságban leírja az univerzális gravitációt".[7]

NEWTON meglehetősen kelletlenül válaszol 1679 nov. 28-án.[8] Nagyon elfoglalt, most más kérdések érdeklik. Nem tudta, hogy HOOKE-nak ilyesféle hipotézise van a gravitációra vonatkozólag, mindenesetre ehhez hasonló hipotézisek igen elterjedtek a „*physical World*"-ban. Mégis, hogy ne adjon teljesen kosarat, küld egy kis idevonatkozó fejtőrőt. Mi lesz egy magas toronyból leejtett test pályája a földvonzás hatása alatt, feltéve, hogy az esés a föld felszíne alá is folytatódna? Azt állítja, hogy az eső test az ellenkező véleményekkel szemben nem nyugatra, hanem keletre fog eltérni, s a föld alatt egy csigavonalat leírva jut el a föld centrumába.



1. ábra



2. ábra

HOOKE 1679 dec. 9-én megköszöni, ő javít NEWTON állításán: a mi szélességünkön nem keletre, hanem délkeletre fog eltérni az eső test, s a pályája nem csigavonal, hanem ellipszis — lenne, legalábbis ha ellenállásmentesen mozoghatna. Így azonban az ellipszisek egyre kisebbek lesznek, s végül a test az excentrikusan elhelyezett, egyre kisebb ellipsziseken a földcentrumba zuhan.[9]

NEWTON már dec. 13-án válaszol: Való igaz, hogy a test a mi szélességünkön délkeletre esne, de a pálya nem olyan, mint HOOKE gondolja. S ez az a levél, amit PELSENEER közölt s amiből világosan kitetszik, hogy NEWTON még nincs az általános tömegvonzás ismeretének birtokában. NEWTON beismeri, hogy első levelében tévedett: ha feltesszük, hogy a gravitás uniformis, az eső test „nem spirálisan fog leszállani a föld centrumába, hanem váltakozó fel- és leszállásban fog keringeni a *vis centrifuga* és a gravitás egymást váltakozva legyőző *(alternately overballancing)* hatása alatt," s végül is Lissajoue-görbe-szerű pályát ír le.[10]

Ez a levél több szempontból, nem utolsó sorban NEWTON matematikai módszerének a genezise szempontjából is figyelemre méltó. Most azonban csak annyit jegyzünk meg, hogy felmerül benne az a gondolat, hogy egy érintőleges mozgás és egy gravitációs vonzás hatása alatt mozgó test megkerülheti a vonzó centrumot, s a pálya, amit leír, kiszámítható. S ez óriási gondolat, mind a kettő.

[7] Uo. 300, 15. jegyzet.
[8] *Corr.* II 236 Newton to Hooke 28 Nov. 1679, 300—304.
[9] *Corr.* II 237 Hooke to Newton 9 Dec. 1679, 304—307.
[10] *Corr.* II 238 Newton to Hooke 13 Dec. 1679, 307—308.

HOOKE-ot láthatóan nem elégíti ki a válasz. Őt más kérdés izgatja. „Sir — írja 1679/80 jan. 6-án[11] — az Ön számítása a középponttól minden távolságban egyenlő erővel vonzott test pályájára helyes, így mozog egy megfordított konkáv kúpban görgő golyó ... De az én feltevésem az, hogy a vonzás mindig fordított arányban áll a távolság négyzetével, következésképpen a sebesség a vonzás négyzetgyökével lesz arányos *(the Velocity will be in a subduplicate proportion to the Attraction)* és következésképpen fordított arányban áll a távolsággal, amint Keppler felteszi."

A föld belsejében természetesen nem nő egyre jobban a centrum felé a vonzás, ellenkezőleg, csökken. „De az égi mozgásokban a nap, föld, vagy központi test az oka a vonzásoknak, és bár azok nem tekinthetők matematikai pontoknak, mégis fizikai pontoknak tekinthetők és nagy távolságban a vonzásuk a fenti arány szerint mint centrumtól tőlük számítható. *This Curve truly Calculated will shew the error of those many lame shifts made use of by astronomers to approach the true motions of the planets with their tables.*"

A levelezés itt megszakad, NEWTON többé nem válaszol érdemileg. Más köti le újból a figyelmét.

A továbbiak mindenesetre már jól ismertek; NEWTON múlt század közepi hagiografusa, BREWSTER óta számtalanszor leírták. Hogyan beszélgetnek 1684 tavaszán HOOKE, WREN és a fiatal HALLEY a bolygómozgás törvényéről, WREN 40 shillinget érő könyvet ígér a megfejtőnek, hogyan vallja be a szerény HALLEY, hogy neki nem sikerült megtalálni, s hogyan henceg HOOKE, hogy ő tudja; hogy megy el HALLEY augusztusban NEWTONhoz, s hogy ad az azonnali választ, aminek a részletes igazolását később, az év végén pártfogoltjával PAGETtel elküldi HALLEY-nak, amit 1685 elején a Royal Society regisztrál, hogyan dolgozik étlen-szomjan 18 hónapot a *Principián*, s az első könyv kéziratának a Royal Society-ban 1686 áprilisában történő bemutatásakor hogyan pattan fel a „szemtelen" HOOKE, hogy a távolság négyzetével fordított arányban csökkenő vonzás világmindenségre való alkalmazásának a gondolatát tőle vette.

A hűséges HALLEY természetesen azonnal értesíti NEWTONt: „Azt mondja, Ön tőle vette az ötletet, bár az így keletkező görbék bizonyítását teljesen Önének ismeri el."[12]

NEWTON már május 27-én válaszol; rövid levélben magyarázza el HOOKE-al lezajlott levélváltásának lényegét. Ő egyébként már egy évvel a HOOKE-levelezés előtt beszélt a dologról Christopher WRENnel és DONE-al. „Ön ismeri Sir Christophert. Kérem, tudja meg, honnan és honnan *(whence & whence)* hallott először az erőnek a centrumtól számított távolság négyzetével arányos csökkenéséről."[13]

HALLEY küldi a *Principia* kefelenyomatait, nem is említi HOOKE-ot,[14] NEWTON válaszában[15] (1686 jún. 20) egyenesen HOOKE-al kezdi. Bizonyos benne, hogy mikor 9 évvel ezelőtt meglátogatta WRENt, az már ismerte a reciprok négyzetes törvényt, HOOKE viszont csak 1678-ban megjelent, üstökösökről írt könyvében közli. Így kiderül, hogy HOOKE volt „az utolsó hármunk közül, aki rájött". Ő, NEWTON, azonban a földi mozgások leírásában sohasem alkalmazta ezt a törvényt, és így

[11] *Corr.* II 239 Hooke to Newton 6 Jan. 1679/80, 309—312.
[12] *Corr.* II 285 Halley to Newton 22 May 1686, 431.
[13] *Corr.* II 286 Newton to Halley 27 May 1686, 433—434.
[14] *Corr.* II 287 Halley to Newton 7 June 1686, 434—435.
[15] *Corr.* II 288 Newton to Halley 20 June 1686, 435—441.

HOOKE az eső test pályájáról történt levélváltásukból nem következtethet arra, hogy nem ismerte.

Egyébként is 1673-ban, mikor megköszönte HUYGENS-nek a *Horologium oscillatorium* elküldését, már célzott erre a hipotézisre. „S remélem, nem fognak arra kényszeríteni, hogy nyomtatásban jelentsem ki: nem értem saját hipotézisem nyilvánvaló matematikai alapjait. De tegyük fel, hogy később értesültem róla HOOKE-tól, akkor is épp olyan jogom van hozzá, mint az ellipszishez." KEPLER is, HOOKE is csak sejtették, amit ő bizonyít. A *Principiát* három könyvre tervezte, a másodikat a múlt nyáron fejezte be, „a harmadikból még hiányzik az üstökösök elmélete. A múlt őszön két hónapot töltöttem eredménytelen számításokban jó módszer híján, ami később visszatérített az első könyvhöz és kibővítettem azt különféle propozíciókkal, amik részben az üstökösökre, részben más, a múlt télen talált dolgokra vonatkoznak. A harmadikat (ti. könyvet) mostmár vissza fogom tartani. A filozófia olyan szemtelenül veszekedő Hölgy, hogy az ember akár törvényszéki ügyekbe keveredjen, ha vele kezd. *(The third I now designe to suppress. Philosophy is such an impertinently litigious Lady that a man had as good be engaged in Law suits as have to do with her.)* Ezelőtt is annak találtam, s mostmár nem közeledek felé többé, amég nem hív. Az első két könyvet a harmadik nélkül nem nagyon illeti meg a *Philosophiae naturalis Principia Mathematica* cím, és azért megváltoztattam így: *De motu corporum libri duo:* de ismét megfontolva megtartottam az eredeti címet. Segíteni fog a könyv eladásában, amit most már, hogy az Önöké, nem akarok csökkenteni".[16]

S még el se küldi a levelet, már június 20-án folytatja: „Mióta ezt a levelet írtam, hallottam valakitől, aki olyasvalakitől hallotta, aki ott volt az Önök ülésén..." Eddig nem akarta kiteregetni, hogy ki is ez a HOOKE, de most már megmondja, az igazság kedvéért, „hogy BORELLI hipotézisét közölte saját neve alatt, és hogy ezt magának tulajdonítsa, és hogy sajátjaként egészítse ki, ez az alapja, úgy hiszem, az egész nagy hűhónak, amit csap". *(That he has published Borell's Hypothesis in his own name & the asserting of this to himself & completing it as his own, seems to me the ground of all ye stir he makes.)*[17]

Egyébként is, HOOKE hozzájuthatott az ő, NEWTON, 1673-ban HUYGENS-hez írt leveléhez, s onnan szedhette a két erő hatására történő bolygómozgás gondolatát, „és így mindaz, amit később nekem a nehézségről írt, lehet, hogy semmi más, mint saját kertem gyümölcse. Akárhogyan is áll, nem tudta (amint könyveiből kiveszem) csak öt évvel azután, hogy bármelyik matematikus megmondhatta neki. Ugyanis mikor HUYGENS megmutatta, hogyan kell megtalálni az erőt a körmozgás minden esetében, megmondta nekik, hogyan kell eljárniuk ebben éppen úgy, mint bármely más esetben".[18]

Különben is ő már az 1675-ben beküldött, fény természetéről írott dolgozatában kimondta volt az általános gravitáció gondolatát. És hosszan idéz az 1675-ös dolgozatából: „«És amint a föld, úgy talán a nap is bőven beszívja ezt a spiritust *(Spirit)*, hogy megőrizze a ragyogását és hogy visszatartsa a bolygókat a tőle való eltávolodástól, és akik akarják, azt is feltehetik, hogy ez a spiritus szolgáltatja vagy hordozza a nap hevét és a fény anyagi principiumát: és hogy a hatalmas aether-terek közöttünk

[16] Uo. 437.
[17] Uo. 437.
[18] Uo. 438.

és a csillagok között elegendő raktárai a nap és bolygók eme eleségének.» Ezekben és az ezt megelőző szavakban le van írva a föld, nap és minden bolygók felé irányuló gravitás közös oka *(common cause of gravity)* és hogy ez az ok tartja a bolygókat nap körüli pályájukon. És ez az egész filozófia, amiről Mr. HOOKE azt állítja, hogy az ő pár évvel későbbi leveleiből vettem, kivéve a négyzetes arányt."[19]

A kiadók megjegyzik, hogy természetesen mindebben nincs semmi *precise formulation of the law of the inverse square.*[20]

NEWTONnak azonban más volt a véleménye. Szerinte, aki elgondolkozik a fenti hipotézisen, láthatja, „hogy a gravitás felfelé csökken és a bolygó felületétől felfelé számítva nem is lehet más, mint a centrumától vett távolság négyzetével fordítottan arányos, de lefelé ez az arány nem áll. Ez akkor csak hipotézis volt, és csak mint sejtéseim egyikét tekintettem, amiben nem nagyon bíztam: de elegendően megmagyarázza Önnek, miért nem használtam a centrumba eső test tárgyalásában a négyzetes arányt. A földön hajított testek kis fel- és leszállásaiban a gravitáció változása annyira jelentéktelen, hogy a matematikusok elhanyagolják. Ezért szerepel náluk az uniformis gravitás egyszerű hipotézise. És mint matematikus, miért ne használhatnám én is gyakran, anélkül, hogy az egek filozófiájára gondolnék vagy filozófiailag igaznak tekinteném?"[21]

A kiadók a levéllel kapcsolatban idézik HOOKE Naplójának 1688/9 február 15-i bejegyzését: „HALLEY-nál találkoztam Newtonnal — hiába követeltem jogaimat, mégis információmat elismerte. Érdek nem ismer lelkiismeretet: *a posse ad esse non valet consequentia.*"[22]

HALLEY válaszában[23] biztosítja NEWTONt, hogy HOOKE viselkedését eltúlozva adták át neki, részletezi 1684-es, WRENnel és HOOKE-al való beszélgetésüket, s kéri NEWTONt, nehogy visszatartsa a harmadik könyvet, „amelyben az Ön matematikai tanának az üstökösök elméletére és számos érdekes kísérletre való alkalmazása, amik, ha abból amit írt, jól sejtem, tárgyát teszik, kétségkívül befogadhatóbbá fogja tenni azt azok számára, akik matematika-mentes filozófusoknak hívják magukat, és akik sokkal többen vannak".[24]

NEWTON engedékenyebb hangon válaszol.[25] Ezeket tudva, elengedte volna az utóiratot múltkori leveléből. De a felfedezést még előbbre teszi. Azokat a propozíciókat — írja, — amiket 1684 végén PAGETtel HALLEY-nek küldött volt, még 20 évvel ezelőtt nyerte a Kepler-törvények alkalmazásával.

A PAGET-levél ugyan nincsen meg, vagy legalábbis a legutóbbi időkig nem volt meg, de már a múlt század közepe óta általában feltételezik, hogy azonos NEWTON *De motu* c. értekezésével, ami a *Principia* első két könyve magjának tekinthető.[26]

[19] Uo. 439.

[20] „. . .nincs semmi pontos megfogalmazása a távolság négyzetével fordított arányban csökkenő vonzás törvényének." Uo. 141, 16 és 17 jegyzet.

[21] Uo. 440.

[22] Uo. 441, 18 jegyzet.

[23] *Corr.* II 289 Halley to Newton 29 June 1686, 441—444.

[24] Uo. 443.

[25] *Corr.* II 290 Newton to Halley 14 July 1686, 444—445.

[26] A *De Motu* beküldését 1685 februárjában regisztrálta a Royal Society. L. pl. BREWSTER, D.: *Memoirs of the Life, Writings, and Discoveries of Sir Isaac Newton I—II* Edinburgh 1855, I 299. EDLESTON feltevését a PAGET-levél és a *De Motu* azonosságáról l. BREWSTER i. m. 299, 1. lábjegyzet. A feltevést általában elvetették, de újabban beigazolódott Edleston feltevésének a helyessége. L. HERIVEL, J. W.: „Suggested identification of the missing original of a celebrated communication of Newton's to the Royal Society" *Archives Internationales d'Historie des Sciences* 13, 1963, 71—78.

S most NEWTON újra támad. Felhívja HALLEY figyelmét, hogy HOOKE egyik levelében célzott HALLEY Szent Heléna szigetén tett megfigyelésére: az inga a hegy csúcsán lassabban járt, mint a tövében, s ezt HOOKE a távolsággal való csökkenés igazolására alkalmas kísérletnek vélte. S figyelmeztet rá, hogy ő, NEWTON, már 14—15, vagy talán 18—19 évvel ezelőtt kiszámította „a föld napi mozgásából az egyenlítőn keletkező felemelő erőt *(force of ascent)*, hogy megtudja, mennyivel fog ott csökkenni a gravitás".[27]

Ez a levél nagy gondot okozott a történészeknek. Egyrészt az 1666-os legenda, most pedig 14—15 év. — Nem hazudott talán csak? Egy NEWTON! — Nincs más mit tenni, mint feltételezni, hogy a *Principia* írása előtt már két ízben foglalkozott intenzíven az általános tömegvonzás és a reciprok négyzetes törvény problémájával. De miért? — A választ Florian CAJORI adta meg egy hosszú fejtegetésében:[28] Az első alkalommal még nem ismerte a földsugár pontos értékét, másodszor már tudta, s helyes eredményhez jutott. Eszerint legkésőbb 1672—73-ban az általános gravitáció elméletének birtokában volt. Erre utal a HUYGENS-hez 1673-ban írt levél is. Valóban, annak NEWTON is nagy fontosságot tulajdonított. Már július 27-én újra ír:[29] megtalálta a HUYGENSnek 1673-ban küldött levél hiteles másolatát, amire hivatkozott volt és idézi.

Ezt az idézetet, amely a HUYGENS értelmében vett *conatus* alkalmazása a hold föld körüli, és a föld nap körüli mozgására, részletesen analizálta DUGAS,[30] s arra a következtetésre jutott, hogy a levél éppen azt bizonyítja, hogy az 1670-es évek elején NEWTON még nincs mechanikája teljes birtokában. ... *Il semble* — írja DUGAS — *qu'en la circonstance la mémoire de Newton soit quelque peu complaissante...*[31] Sőt, ez a HUYGENS levél azt a gyanút kelti, mintha a centrifugális erőt — HUYGENS-től vette volna. S érdekes módon erre fent idézett leveleiben mintha maga NEWTON is célozna.

DUGAS történész-intuiciójának egyik legszebb tette, hogy itt, a látszat és a tudománytörténészek általános véleménye ellenére NEWTON mellé áll. Szerinte NEWTON indivisibilia-geometriai módszerekkel, már HUYGENS *Horologium Oscillatorium*ának az olvasása előtt, önállóan is számítani tudta a körmozgásban fellépő, befelé húzó, centrifugális erőt, lehet, hogy már 1666-ban. Lehet, hogy éppen ez volt az 1666-os nagy felfedezése? Annyi kétségtelen DUGAS szerint, hogy NEWTONnak a centrum körüli pályán történő mozgás befelé húzó erejének a számítására nem volt szüksége a centripetális erő fogalmára, ami HUYGENS találmánya, s így a hold földkörüli mozgásából eredő befelé húzó erőt számíthatta a centrifugális erő nélkül is.

NEWTON ugyanis úgy járt el, hogy a görbevonalú pályát sokszögekből állónak tekintette, ahol a mozgó test minden sarokban egy-egy „lökést" kap, ami kiszámítható. A sokszög oldalszámát minden határon túl növelve, a pálya görbe vonalba, a végtelen sok kis lökés összege a centripetális erőbe megy át.[32]

[27] *Corr.* II 290 Newton to Halley 14 July 1686, 445.
[28] Cit. HALL, A. R.: „Newton on the calculation of central forces" *Annals of Science* 13, 1957, 62—71.
[29] *Corr.* II 291 Newton to Halley 27 July 1686, 446—448.
[30] DUGAS, R.: *La mécanique au XVII^e siècle* Neuchatel 1954. Chapitre XII. 7b: *Lettre de Newton à Huygens* (1673).
[31] Uo. 373.
[32] Uo. 360—361.

S bár ez nyilvánvalóan egészen más valami, mint a tömegvonzás $1/r^2$ törvénye, DUGAS a HOOKE—NEWTON-levelezés részletes (de nem teljesen megbízható) ismertetése után arra a végkövetkeztetésre jut, hogy HOOKE zavaros gondolkozású, kapkodó ember, akinek nincsenek a HUYGENS-éihez és NEWTONéihoz fogható tiszta mechanikai fogalmai.[33] HOOKE legfeljebb ha megsejtett valamit, de a vita hevében NEWTON is olyasmikre hivatkozik, amik nagyon messze esnek a *Principia* nívójától, pl. az 1673-as HUYGENS-hez írt levélre, és az 1675-ös fény természetéről írt dolgozatára — vonja le analízise végkövetkeztetését DUGAS.[34]


3. ábra

Nos, DUGAS sejtése, hogy NEWTON valóban HUYGENS-től függetlenül jött rá a centrális erő számítására, fényesen igazolódott. A. R. HALL közölt egy „*Portsmouth Collection*"-ban talált NEWTON-kéziratból kivonatokat,[35] amelyekről kétségtelennek tartja, hogy azonosak azzal a számítással, amire NEWTON a HALLEY-nek írt 1686. jún. 20. és júl 14. levelében célzott; aminek a létezését DUGAS sejtette.

A kéziratban azonban sehol sincs szó centrális erőről, csak *conatusról*, vagyis egy mozgási centrum felé- vagy attól elirányuló tendenciáról, az erő szót csak a gravitással kapcsolatban használja. Számításai gyorsulásokra korlátozódnak, nem a létrehozott erőkre. És a földsugár itt használt értékével sem kap a hold conatusából számított földi gyorsulásra semmivel se jobb értéket, mint a „legendás" 1666-os.

CAJORI hosszú spekulációi a probléma kétszeri megközelítéséről összeomlanak — írja HALL. NEWTON az 1670-es évek elején sem ismerte jobban a földsugár helyes értékét, mint 1666-ban. A dokumentum semmi bizonyítékot se hoz arra, hogy írása idejében birtokában lett volna az $1/r^2$ törvénynek vagy az általános gravitációnak — bár olyasmi sincs benne, ami inkompatibilis lenne ezzel a feltevéssel, és NEWTON esetében *the argument from silence is never strong*.[36]

Sajnos, a kéziratot nem lehet pontosan időzíteni — fejezi be közleményét HALL — de feltehetően a 70-es évek elejéről származik, s épp ezért rombolja le a CAJORI-hipotézist.

A NEWTON-levelezés tudós kiadója, TURNBULL professzor, már időzíthetőnek ítéli a kéziratot: 1665 vagy 1666-ra.[37] Azért tartja különösen fontosnak a kéziratot, mert „egy idáig nem is sejtett láncszemet jelent NEWTON és GALILEI munkája között".[38] Ezek a feljegyzések egyenesen GALILEI első olvasásának a hatására keletkezhettek. Talán Thomas SALUSBURY *Dialogo*-fordítását[39] olvashatta NEWTON, a számításokat mindenesetre az ott talált numerikus példákra alapozza, s a nehézségi gyorsulás ingalengésből való meghatározását is onnan veszi.[40] I. W. HERIVEL pontosan meg is mondja: a számpéldákat SALUSBURY *Dialogo*-fordításának a 200. oldaláról vette.[41] A kézirat HERIVEL és a levelezés kiadói szerint három mozgásféleség gyorsulásának

[33] Uo. 365.
[34] Uo. 377.
[35] HALL, A. R.: i. m.
[36] „NEWTON esetében egy adat hiánya nem bizonyít semmit." HALL, A. R.: i. m. 71.
[37] *Corr.* III 347 A Manuscript by Newton? 1665 or 1666, 46—54.
[38] *Corr.* III, XIV.
[39] SALUSBURY, Th.: *The System of the World in four Dialogues... By Galileus Linceus* London 1661.
[40] *Corr.* III 347, 52.
[41] HERIVEL, J. W.: „Interpretation of an Early Newton Manuscript" *Isis* 52, 1961, 410—416.

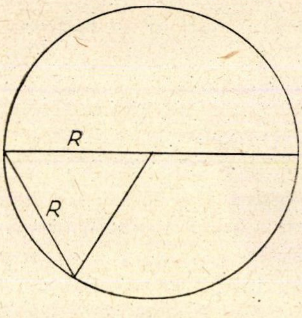
a számítását tartalmazza: 1., a köringáét, 2., a köralakú pályán nap körül mozgó földét, és 3., az egyenlítő egy pontjáét.

Az utóbbi különösen érdekes. NEWTON erre vonatkozó számításait összefoglalva leszögezi, hogy „a gravitációs erő 159,5-ször nagyobb, mint a föld forgásából az egyenlítőn keletkező erő". *(Ye force from gravity is 159,5 times greater yn ye force from ye Earth's motion at ye Equator.)*[42]

Jogosan háborodott fel NEWTON: ő ne ismerte volna, hogy az egyenlítőn — a Szent Ilona szigetén — csökken a gravitáció? Jogosan? HOOKE ugyanis nem ezt állította rekriminált levelében. HOOKE nem azt emelte ki, hogy Szent Ilona szigete az egyenlítőn van, hanem azt, hogy történetesen Szent Ilona-sziget egy magas hegycsúcsán HALLEY lassabbnak találta az inga mozgását, mint a hegy lábában. S felveti, nem lehetne-e ezt a tényt felhasználni annak a kísérleti eldöntésére, „vajon a gravitás tényleg csökken-e a centrumtól nagyobb távolságra. Ennek a vizsgálatára régebben számos kísérletet végeztem a Szt. Pál tetejéről és a Westminster Apátságéról, de egy se volt meggyőző".[43]

A HOOKE—NEWTON-levelezést és a vitát követve, ugyanez a tendencia ötlik mindenütt szembe: HOOKE mindig a centrális *vonzáshoz* ragaszkodik makacsul, NEWTON mindig ügyesen kitér a centrális *mozgás* felé. A kitérés egyik oka most már nyilvánvaló: a centrális mozgás törvényeit valóban sokkal előbb ismerte, mint HOOKE, már 1666-ban, közvetlenül GALILEIhez csatlakozva. Amikor tehát 19—20 évvel azelőtti felfedezéséről beszél, nem hazudik, formálisan legalábbis nem hazudik: amit állít, a centrális mozgás gyorsulását valóban kiszámította.

Ez természetesen semmit sem mond arra a kérdésre vonatkozóan, ismerte-e a tömegvonzás $1/r^2$ törvényét is. Számunkra a dolog olyan egyszerűnek látszik. De HUYGENS is nagyon jól ismerte — sokkal jobban, mint az 1666-os NEWTON — a körmozgás törvényeit, mégsem jut el soha belőlük az általános tömegvonzás gondolatáig. HERIVELnek az interpretációja szerint a fenti NEWTON-kézirat „A centrifugális erő valamilyen világosabb megértését megelőző két primitív számítással kezdődik, s azután kiszámítja a két arányt (ti. a gravitációs erőnek a föld napi és évi mozgásából eredő centrifugális erőkhöz való arányát) az alábbi eredmény implicit felhasználásával: Ha egy test egy R sugarú körön történő mozgás centrifugális erejével egyenlő erő hatása alatt mozog egyenes vonalon a középpont felé, akkor ugyanannyi idő alatt, ami alatt a körön mozogva R távolságot tett meg, az egyenes vonalban $R/2$-t".[44] — Ezt az implicit eredményt egy 1666 május 16-os keltezésű kézirata — amit szintén a *Correspondence* ad ki először — explicite is kimondja.[45]



4. ábra

A kézirat jelentősége óriási: a körmozgás egyszerű analízisén túl tartalmazza NEWTON infinitézimális elképzeléseinek a csíráit. Szinte kézzelfoghatóvá teszi a newtoni mozgásgeometria genezisét.

[42] *Corr.* III 347, 46.
[43] *Corr.* II 239 Hooke to Newton 6 Jan. 1679/80, 309.
[44] HERIVEL, J. W.: i. m. 415.
[45] *Corr.* III 348 A Manuscript by Newton 16 May 1666, 54.

A kézirat egy 1670-es évek elejéről, valószínűleg 1672-ből származó bővítése és javítása: *The lawes of Motion. How solitary bodyes are moved,*[46] pedig már valóságos „ős-principia", legalábbis az első két könyv bizonyos propozícióit illetőleg. Nagyon figyelemreméltó, hogy már itt megvan az abszolút tér gondolatának a csírája, de még nem mint absztrakt, matematikai entitás, mégkevésbé, mint „Isten sensoriuma", hanem egyszerűen mint „*uniform extension*". De már benne vannak a testek, már nem az *extensio* jelenti a testek *substantiáját*, mint DESCARTES-nál. A tér még csak a testek és a mozgás — elsősorban a körmozgás — színpada, nyoma sincs még benne annak a fenséges, abszolút jellegnek, amit a *Principia* második kiadásának *Scholium Generale*-jában kap meg.

Hiányzik ehhez egy óriási, központi jelentőségű, mindent elrendező törvény: az általános tömegvonzás törvénye.

Hiányzik még csírájában is a *Principia* harmadik könyve. Az a harmadik könyv, amely ennek a törvénynek a diadalútja, az új világmindenség kodifikációja és bibliája. A Harmadik könyv, amit NEWTON legkésőbb írt meg saját levelei szerint is, aminek a tükrében az első könyvön is változtat, amelyiket inkább visszatart, de amelyikben nem enged egy talpalatnyi-jogot se senkinek. Amelyiknek a keletkezését egyre előrébb teszi: 8—9 év, 14—15 év, 18—19 év, — végül öregkorában visszaemlékezve: 1665—66. A Harmadik könyv, amelyik az alma-mese vulgárisabb vagy tudományosabb megfogalmazásával NEWTONt az Új Világ Prófétájává avatta.

NEWTON nem tévedett. Nagyon jól tudta, mihez kell körömszakadtáig ragaszkodnia.

Akkor is, ha nem az ő szellemi tulajdona? Vagy nem csak az övé? Pontosabban: nem teljesen magától jött rá?

Mert hogy HOOKE az alaptörvényre — nem többre, de nem is kevesebbre — magától jött rá, az biztosnak látszik. — Miért nem Robert HOOKE lett a „Próféta"?

Ezt kérdezte Louise D. PATTERSON, HOOKE egyik késői védelmezője. Két nagy feltűnést keltő cikkben analizálta HOOKE gravitációs törvényét és NEWTONra való hatását.[47] Kimutatja HOOKE levelei és munkái alapján, mennyire tisztában van már az 1670-es évek végén HOOKE az általános gravitáció lényegével és jelentőségével, milyen nyíltan közli felfedezését NEWTONnal, aki egyszerűen felhasználja a tálcán nyújtott $1/r^2$ törvényt; éppen ez hiányzott a rendszeréből. Azért igyekezik később befeketíteni HOOKE-ot, hogy ezzel elfedje, hogy tőle vette az általános gravitáció eszméjét és az $1/r^2$ törvényt. Ezért datálja egyre előrébb a törvény „felfedezését", míg 1665—66-nál áll meg: a bölcsőig mégsem mehet vissza.

NEWTON nyomán feketíti máig HOOKE-ot az utókor. Mint intuitív experimentátort szokás beállítani, — NEWTON nyomán — aki matematikához semmit se értett. Pedig inga és rugó vizsgálatai is arra utalnak, hogy kellett matematikai ismereteinek lennie. Csak hallatlan ötletgazdagsága miatt egyik ötletét se tudta kidolgozni, s nagyrészt felkapkodták a többiek, — NEWTON is. A Royal Society valósággal az ő ötleteiből élt.

HOOKE ne értett volna a matematikához? S itt — a hagiográfusok szokása szerint — L. D. PATTERSON is túllő a célon: Szerinte meg lehet találni HOOKE-nak az ingamozgásról szóló írásában a „mozgás második törvényét az alábbi formában:

[46] *Corr.* III 349 A Manuscript by Newton ?1672, 60—65.

[47] PATTERSON, L. D.: „Hooke's Gravitation Theory and its Influence on Newton" *Isis* 40, 1949, 329—341 és 41, 1950, 32—45.

«a vibratio sebességének a meghatározása a *strength* mennyisége és a mozgatandó test nagysága *(bulk)* közötti aránytól függ» vagy modern nyelven, «a sebesség meghatározása az erőnek *(force)* a tömeghez *(mass)* való arányától függ». Kétségkívül ez volt a későbbi mozgásdifferenciálegyenletek őseinek az egyike".[48] És még T. L. MORE — a világhírű NEWTON biográfus — azt meri állítani, hogy a NEWTON ellen felhozott plagizálási vádak hamisak! — „NEWTONnak az volt a szerencséje, hogy túlélte riválisait, és hosszú ideig uralkodó befolyása volt azokat követő, náluk kisebb tudósok társaságában."[49]

Nos, kétségtelen, hogy volt egyéb „szerencséje" is, többek között az, hogy az erő és a tömeg fogalmát csak ő fogalmazza meg olyan tisztán, hogy PATTERSON kisasszony HOOKE bizonytalan megsejtését játszi könnyedséggel fogalmazhassa át velük — differenciálegyenletté. HOOKE kétségkívül rendelkezett bizonyos matematikai érzékkel, de matematikus, s éppen olyan, aki a differenciálegyenleteket megsejtse, amiktől felfedezőjük, NEWTON is úgy megijedt, hogy egy életen át elrejtette őket, nos, ilyen matematikus kétségkívül nem volt.

KOYRÉ professzornak nem volt nehéz kimutatni, mennyire nem reális túlzásba csapott HOOKE védelmében PATTERSON.

HOOKE — KOYRÉ szerint — először is téved az ingamozgás kiszámításában, amit L. D. PATTERSON olyan dicsőséggel idéz. S ha rá is jön — HUYGENS nyomán! — 1679 körül a fordított négyzetes törvényre, nem tud vele mit kezdeni: nem tudja levezetni segítségével a bolygók ellipszis-pályáját. A gravitáció holdra való kiterjesztésével pedig KEPLER *Astronomia Nova*-jában (1609) és W. GILBERT *De Magnete*-jában (1600) találkozunk. HOOKE ebben nem anticipálta NEWTONt. S nem anticipálta főleg abban, ami nem volt neki: matematikai gondolatokban. HOOKE-nak nem volt meg a szükséges matematikai ismerete, „ami csak azzal magyarázható, hogy hiányzott belőle a kísérlethez való matematikai közeledés alapvető értékének a megértése. Optikában éppúgy mint fizikában, HOOKE mindig csak egy baconiánus volt és maradt".[50]

Láttuk, hogy lényegében KOYRÉ véleményét vette át ebben a kérdésben René DUGAS is.

HOOKE ügyét ismét egy nő — Margaret ESPINASSE — karolta fel. *Robert Hooke*-ja (London, 1956) valóságos „Hookeiada".

Gerd BUCHDALL szerint azért mégse volt Hooke mártír, mint ahogy Espinasse rajzolja. Inkább egyfajta „mindent kipróbálni" optimizmus volt benne, ami egybevágott a Royal Society kezdő éveinek progresszív, felfelé ívelő, „protestáns" prakticista tendenciáival.[51]

Valójában Hooke se szent nem volt, se mártír, se optimista, se „protestáns".

Milyen volt Robert HOOKE? A világirodalom egyik legérdekesebb könyve, a híres *Diary*[52]-ja, amit 1935-ben adtak ki először, felel a kérdésre.

HOOKE apja szegény curator volt a Wight-szigeti Freshwaterban, s 13 éves volt HOOKE, mikor apja meghalt. Örökségét arra fordítja, hogy a londoni Westminster

[48] Uo. 37.
[49] Uo. 43.
[50] KOYRÉ, A.: „A note on Robert Hooke" *Isis* 41, 1950, 195—196.
[51] BUCHDALL, G. : „Robert Hooke" *Scripta Mathematica* 23, 1957, 77—82.
[52] *The Diary of Robert Hooke, M. A., M. D., F. R. S.* 1672—1680. *Transcribed from the Original in the Possession of the Corporation of London.* Edited by H. W. ROBINSON and W. ADAMS London 1935.

School-ba iratkozzék be, ahol EUKLIDÉSZ első 6 könyvének egy hét alatt való megtanulásával tűnik ki. 1653-ban kerül kóristaként — kisebb fajta ösztöndíj — az oxfordi Christ Church-be. WILKINS tiszteletes úr felismeri a tehetségét, s ad egy példányt páratlan *Mathematicall Magick*-jából a fiúnak. Szerencsére hathatósabb segítségben is részesíti: bejuttatja Dr. Thomas WILLIS mellé kémiai kísérleteket, Seth WARD mellé asztronómiát tanulni. WILLIS ajánlja BOYLE-nak, aki asszisztensekkel dolgoztat. De HOOKE nemcsak egyszerű asszisztens: EUKLIDÉSZT és DESCARTES-ot is magyarázza főnökének. BOYLE-al végig jó barátságban marad: BOYLE ráhagyja mikroszkópját, mágnesét és egyéb „experimentális" apróságait.

1662-ben „Curator of experiments" a Royal Society-ban. Hetenként két új kísérletet kell kigondolnia és bemutatnia az „experimental philosophers" kísérletéhségének a kielégítésére. Szerencsére az akkori kísérleteket kigondolni és elvégezni egyaránt könnyebb volt, mint a maiakat, de még így is pokoli elfoglaltság. — Biográfusa és kiadója, H. W. ROBINSON szerint „Alig túlzás azt állítani, hogy ő volt a Royal Society történelmi megteremtője".[53]

1664/5 márciusában geometria professzornak választják a *Gresham College*-ba. Egyike azon kevés korabeli professzoroknak, akik pontosan ellátták előadásaikat.

1665-ben jelenik meg *Micrographiá*-ja. Akiknek módjukban volt látni ezt a könyvet, s nem elfogultak HOOKE-al szemben, egyöntetűen azt állítják, hogy a kor egyik legjelentősebb műve, talán még a *Principiá*val is vetekszik.

„...HOOKE csaknem a legtermékenyebb feltaláló géniusz volt, ha ugyan nem a legtermékenyebb, aki valaha élt, és legalább egy könyvei közül, a *Micrographia*, a tudományok történetében a legfontosabb valaha is publikált könyvek között van." — írja bibliográfusa, G. KEYNES.[54]

Az a rövid ismertetés és a pár gyönyörű ábra is, amit KEYNES közöl, meggyőzhet bárkit arról, hogy nem túloz. A mikroszkópot éppúgy HOOKE fedezte fel a tudomány számára, mint ahogy a távcsövet GALILEI.

De a *Micrographia* sokkal több mikroszkopikus ismeretek leírásánál és rendszerezésénél. Számos kémiai kísérlet leírását is tartalmazza és többek között korának legjobb égéselméletét adja, ami sokak szerint közel jár az Oxygén felfedezéséhez,[55] először ajánlja a fagyáspontot hőmérők standardizálására, modern módon tárgyalja a kristálystruktúrákat, gömbökből készült modellek segítségével; a thermikus expansiót az anyag általános tulajdonságaként ismeri fel, s a hőt a corpusculák mozgására vezeti vissza. Leírja a vékony lemezek színeit és felismeri, hogy azok a két felületről visszavert fény keveredésére vezethetők vissza.

Foglalkozik a könyv számos, HOOKE által feltalált meteorológiai műszer leírásával is, s a kísérleti meteorológia megalapításának tekinthető.

S ha mindehhez hozzávesszük, hogy a légszivattyút is HOOKE tette tudományos kísérletekre alkalmas műszerré, s hogy állítólag a BOYLE-féle gáztörvényt is ő fedezte fel,[56] valóban nem túlzás azt állítani, hogy az „Experimental Philosophy" igazi megalapozója HOOKE.

S ezen túl egy egészen újfajta tudós-típus megszemélyesítője.

[53] *Diary...* XX.

[54] KEYNES, G.: *A Bibliography of Robert Hooke* Oxford 1960, XI.

[55] *Diary...* XXVI—XXVII. L. továbbá ANDRADE, E. N. DA C.: „Robert Hooke F. R. S. (1635—1703)" *Notes and Records of the Royal Society* 15, 1960, 137—145.

[56] ANDRADE, E. N. DA G.: i. m. 138.

Az 1666-os londoni nagy tűzvész után a három *City Surveyor* egyike, működése messze a felmérésen túl a város rendezésére, köz- és magánépületek építésére is kiterjed. Ő és WREN adták meg a mai London városképének az alapját. HOOKE építette a Bedlam Hospital-t, a Montague House-t, a Merchant Taylors Hall-t, a College of Physicians-t, Lady RANALAGH (BOYLE nénje) és sok városi tanácsos házát.

Van az épületeiben minden racionalitásuk mellett valami kiszámíthatatlan, szinte azt mondhatnánk, „kamaszos" báj. Nem „szépek" — abban az értelemben, ahogy a kontinens korabeli épületei, a nagy francia Louis XIV vagy az itáliai barokk szép. A WRENnel kapcsolatban hangoztatni szokott „Latinity" HOOKE-nál még inkább angol — nem, londoni — jelleget ölt, mint WRENnél. A Principatus Rómája — mint egykor Firenzében a Leonardo BRUNI nemzedékének a Köztársaságé — politikai, gazdasági, művészeti és „életstílus" eszmény lesz. A 17. század második felének a Londonja közelebb van az antik Rómához, mint bármely más európai város. Egy nagy birodalom szíve kezd itt is egyre erősebben verni, de ezt a szívet a nagy szárazföldi utak helyett a végtelen tengerek sós lehelete táplálja.

Fantasztikus karrierek: London egyik legjelentősebb polgára, John COLLINS (1624/5—83) NEWTON, J. GREGORY, WALLIS barátja, F. R. S., a Royal Society annyi értékes tudományos levelezésének a lebonyolítója, könyvkereskedő-tanoncként kezdi, aztán évekig harcol velencei hajókon a törökök ellen, visszatérve matematika tanár lesz, majd állami hivatalnok, a *Council of Plantations* (Gyarmatügyi Tanács) titkára — s emellett állandóan talál időt nemcsak arra, hogy ő maga komolyan, alkotó módon foglalkozzon matematikával, hanem arra is, hogy szünet nélkül bátorítsa és segítse kevesebb életenergiával megáldott tudóstársait.

A Restauráció Londonja számára életszükséglet volt a természettudomány. Száznál több kávéházának mindegyikében állandó téma az új „Experimental Philosophy", s mindegyikében megfordul, néha egy nap többen is, a fáradhatatlan Dr. HOOKE, hogy megigya a maga csokoládéját vagy „rövidebb" italait, s pontosan bejegyezze naplójába:

„1675 november 4. Felolvasás a gyertyáról és a súllyal állandósított lámpáról és bemutattam a kísérletet a csillámüveggel és a lánggal. A *Garavay*-kávéházban, HOSKINS, a fiatal cambridge-i tudós, TOMPION, ADAMSON. Csokoládét ittam. Jaláp-gyantát tettem borszeszbe, hogy reggel bevegyem, de nem vettem be, mert egész éjszaka nagyon rosszul voltam, de sok sört ittam és a műhelyben dolgoztam, ami szörnyen jót tett."[57]

Rengeteg könyvet vesz magának is, a Royal Society-nek is. Érdeklődése igen széleskörű. Matematikától és mechanikától alkimiáig és művészettörténeti könyvekig mindent vesz. Sokszor fordul elő a naplóban VITRUVIUS, HERON, GALILEI, SCHOOTEN, HARRIOT. De megveszi PARACELSUS *Philosophiá*-ját és GLAUBER *De mercurio philosophorum*-át is. Feltűnő, milyen sok francia könyvet olvas, s főleg milyen nagy gondja van a *Journall de Scavans*, a rivális-lap rendszeres beszerzésére, olvasására és kölcsönzésére.

Sok — különösen télen — az időjárásra vonatkozó bejegyzés. Tulajdonképpen az egész *Napló* rendszeres időjárás-feljegyzésként indul. Később már az ebédeit és szeretkezéseit is beírja. Nell, Dol, Mary — szolgálói — és a 70-es évek közepétől unokahúga, Grace HOOKE (1659?—87) ...Grace-nak könyvre £ 6 2½ sh.[58]... Grace-t

[57] *Diary*... 191.

Nell látta valakivel. Grace tagad. ... *Things not right.*[59] — De aztán rendbejön minden és Grace — úgy látszik — haláláig hűségesen szereti.

Rugók, órák, távcsövek, legkülönfélébb műszerek, gyűlések, kávéház, akadémiai tisztségek és elismerés után való törtetés, egyetemi előadások, hajsza a Pénz után, könyvek, építés, nők: a nagyváros életének lármája, izgalma, boldogsága és gyötrődése kerül HOOKE naplójában kézzelfogható közelségbe. Egy új életforma: az újkori nagyváros természettudósának az életformája tükröződik HOOKE naplójából.

Ebben a forgatagban születik meg az általános tömegvonzás gondolata HOOKE fejében, erről beszél már 1674-ben egyetemi előadásain, erről beszélget WRENnel a Szent Pál székesegyház építése közben, a kávéházakban. ... „1677 szeptember 20. Sir Chr. WRENhez, a Szt. Pálba, találkoztam vele a Greshamben, Jonathans-hez (híres kávéház). Beszélgettem vele a hold-elméletről. Azt állította, hogy, ha a mozgás fordított arányban állana a távolsággal, a sebesség mindig úgy aránylana, mint a területek, bármi legyen is a görbe ..."[60]

HOOKE ekkor ennél már sokkal többet tudott. De azt nem Sir Christophernek mondotta el, hanem — Isaac NEWTONnak.

Isaac NEWTONt nem lehetett nagyon elfoglalt embernek nevezni. Csak az évvégi trimeszterben kellett előadnia, heti egy órában. Mindig saját vizsgálatairól beszélt, és előadásai a 80-as évek elején, 70-es évek végén optikáról szóltak.

Már negyven felé járó, nagy-nagy köztiszteletben álló, a matematikában világhírre szert tett tudós volt. Mögötte van a színekről folytatott nagy vitája és híres levélváltása LEIBNIZcal, a tudományos diplomáciának ez az iskolapéldája, ahol mindketten úgy akarták kicsalni a másikból a sejtett tudását, hogy a magukéból semmit ne áruljanak el. ...Matematikusok és matematikatörténészek generációit vezették félre ezek a levelek. De LEIBNIZ — legalábbis NEWTON attól félt — többet értett meg belőle a kelleténél. Ez a félelme talán nem is volt olyan alaptalan.

S akkor ez a folyton nyüzsgő HOOKE, gyanúsan őszinte leveleivel ...

A Royal Society új titkára. A „Nagy Experimentátor". A NEWTON által is nagyon tisztelt BOYLE barátja. A király is többször, személyesen megdícsérte óráját. De a matematikához, az igazi „Experimental Phylosophy" kulcsához nem ért. Legokosabb az ilyet udvarias formasággal lerázni. Bolygók mozgása egy központ felé mutató vonzóerő és egy tangentiális erő együttes hatása esetén ... Hányan próbálkoztak már ezzel a „Philosophical World"-ban, még ő is, réges-régen, amikor a körmozgás kérdése izgatta ...

De felad egy kis matematikai példát a londoniaknak. — Mennyit dobálták a század közepén tornyok tetejéből a köveket annak az eldöntésére, forog-e a föld. Az artistoeliánusok ugyanis azt állították, hogyha forogna, akkor, amíg a kő esik, a föld nyugat—kelet irányban mozogva „kifarolna" alóla, s a kő nem a torony aljába, hanem attól nyugatra esne le. A galileisták viszont állították, hogy a mozgó földön is a torony tövébe kell esnie, mert átveszi a föld mozgását. Mint ahogy a sebesen száguldó hajó árbócáról leejtett kő is az árboc tövébe esik.

De NEWTON már régen tudta, hogy a körmozgást nem lehet az egyenesvonalú, egyenletes mozgással azonos módon tárgyalni. A körmozgás másféle mozgás.

[58] Uo. 162.
[59] Uo. 166.
[60] Uo. 314.

„Igazibb" mint az egyenesvonalú egyenletes mozgás. Abszolút. A torony tetejéről leejtett kő nem eshet a torony tövébe, mert a nyugat—kelet irányba forgó föld „meglökte" érintője irányában kelet felé. A kő kelet felé fog eltérni, s ha a pályája a föld alatt is folytatódna, csigavonalon a föld centrumába esne.

HOOKE lelkesedik, de korrigál. Nem keletre, hanem délkeletre tér el, és a föld belsejében sem olyan a pálya, mint NEWTON írta. Egy centrum felé vonzódó érintőleges mozgással is bíró testnek nem kell a centrumba esni: ha nincs közegellenállás, ellipszisen fog mozogni a centrum körül.

NEWTON most számol: valóban van ilyen lehetőség. De nem ellipszis, hanem egy bonyolultabb vonal. De HOOKE más feltevésből indul ki, abból, hogy a centrális vonzás a távolság négyzetével fordított arányban csökken, s szerinte ez az egyszerű feltevés magyarázza meg valahogy az egész bolygórendszer mozgását, csak éppen azt nem tudja, hogy hogyan.

Jellemző ez a londoni „philosophusokra". Hipotéziseket állítanak fel „a jelenségek megmentésére", s nem tudják igazolni azokat. Legjobb ezektől elszakadni, NEWTON tudta előre. ...

FLAMSTEED, a greenwichi csillagász egészen más jellegű tudós, mint a „zavaros", kapkodó HOOKE. Pontos, türelmes, lelkiismeretes, megbízható megfigyelő és amellett milyen tiszteletteljes ...

A megilletődés, a tisztelet és a nagy felfedezés feletti öröm keveredik a levelében, amit 1680 dec. 15-én ír NEWTONnak.[61] A november elején itt járt nagy üstökös újramegjelenéséről számol be. A novemberi üstökös szokatlanul nagy sebességgel haladt a nap felé. FLAMSTEED a novemberit nem látta, de azonnal gondolta, hogy miután elhaladt a nap közelében, újra meg fog jelenni. „...eszerint várva rá, —írja— múlt pénteken az Aquila alatt megpillantottam egy igen kis farkat."[62]

A kis farok azonban szokatlanul gyorsan kezdett növekedni, dec. 29-én az üstökös már újra a föld közelébe ért, 1681 januárjában már távolodni kezdett. Az üstökös szokatlanul nagy sebességgel mozgott a naptól a föld felé.

Senki nem kételkedett benne, hogy két üstökösről van szó. Az akkor uralkodó kepleri felfogás szerint az üstökösök ugyanis egyenes vagy alig hajlott pályákon haladtak el a nap mellett, s elképzelhetetlen volt, hogy az 1680 novemberében oly nagy sebességgel a nap felé száguldó üstökös azonos lenne a decemberben megjelent, föld felé tartó üstökössel. Ehhez olyan mértékben hajlott pályát kellett volna feltételezni, amit elképzelhetetlennek tartottak.

Igaz ugyan, hogy a koppenhágai csillagász, HEVELIUS, 1668-ban megjelent *Cometographia, cometarum omnium motu, generatione variisque phaenomenis* c. művében már feltette a kérdést, nem mozognak-e az üstökösök a nap közelében hajlított, esetleg parabolikus pályán, de a tudományos közvélemény ezt nem vette komolyan. Különösen nem Angliában, ahol HEVELIUSról egyébként se tartottak sokat. HEVELIUS (1611—87) ugyanis régivágású csillagász volt, s kardoskodott a puszta szemmel való helymegfigyelés előnyei mellett. Angliában pedig éppen HOOKE, NEWTON, FLAMSTEED munkája nyomán óriási lendületet vett a műszeres csillagászat és a teleszkópos helymegfigyelés.

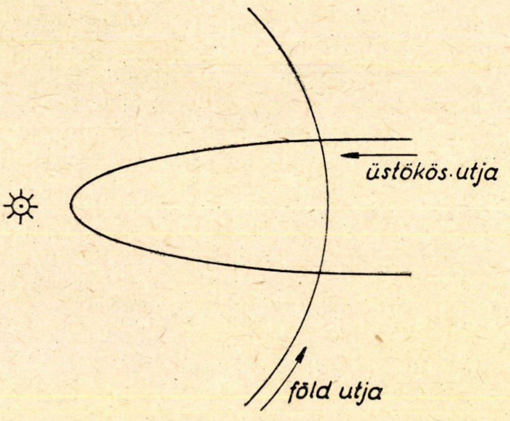
Senki se hitte komolyan, hogy a novemberi és a decemberi üstökös azonos lehet. Csak FLAMSTEED. Ő ugyanis elmulasztotta a novemberi üstökös észlelését,

[61] *Corr.* II 242 Flamsteed to Crompton for Newton 15 Dec. 1680, 315—317.
[62] Uo. 315.

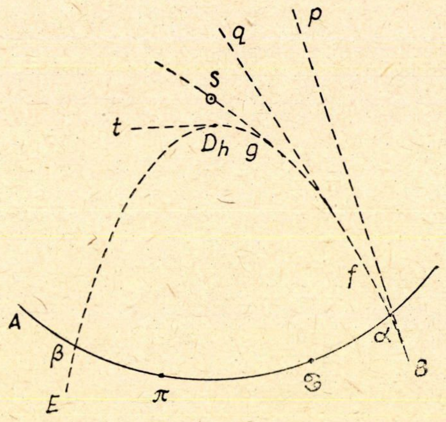
s most alig várta, hogy újra megjelenjen. S mikor megjelent, elsőnek értesítette róla a nagy NEWTONT. Tévedett volna? — De miért ne lehetne az üstökös pályája ennyire hajlott? Ha a nap óriás-mágnes, amelyiknek az örvénye (vortex) mozgatja a bolygókat, s ha feltesszük, hogy az üstökös egy kis mágnes, s még hozzávesszük azt a régi „tapasztalatot", hogy az ágyúgolyó röpülés közben magától sohasem fordul meg, akkor az egész dolog könnyen érthető. Az üstökös, ez a kis mágnes bekerül a nap vortex-ébe, ami megfordítja, a másik pólusát fordítja a nap felé, s ha az előbb a nap vonzotta, most taszítani fogja.

Akárhogyan is van, írja FLAMSTEED, a nap vonza a bolygókat, *and all like bodys that come within our Vortex.*[63]

Az üstökös egyre jobban izgatja NEWTONT. Hosszú levélben válaszol FLAMSTEEDnek.[64] Megköszöni és FLAMSTEEDre hárítja vissza a kapott bókokat, dícséri pontos munkáját. Ami azonban a hipotézisét illeti ... az üstökös semmiképpen sem mehet el a nap alatt, amint FLAMSTEED hiszi. „Az eset ugyanaz, mintha egy ágyúgolyót lőnének ki nyugat—kelet irányba. A föld vonzása gravitásánál fogva *(The attraction of ye earth by its gravity)* az ágyúgolyót egyre inkább lefelé irányítja, de sohasem teszi egyenesen lefelé tartóvá, még kevésbé fogja megfordítani keletről nyugatra. Az örvény mozgása sem segít a nehézségen, még inkább növeli." Az örvény ugyanis ellenkező irányba, a naptól elfelé terelné az üstököst.



5. ábra



6. ábra

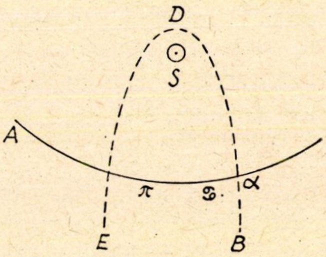
„Az egyetlen út, amely véleményem szerint segít ezen a nehézségen, az a feltevés, hogy az üstökös nem a ☉ és a föld között ment el, hanem megkerülte a napot *(to have fetched a compass)*, mint ezen az ábrán.

Másodszor, bár azt könnyen feltehetőnek tartom *(I can easily allow)*, hogy a napban egy vonzó erősség *(attractive power)* van, ami által a bolygókat körülötte történő járásukban megóvja az érintő egyenesekben való elmenéstől, de azt, hogy

[63] „...és minden hasonló testet, ami bejön a mi örvényünkbe", ti. a DESCARTES által feltételezett, nap körül forgó örvénybe. *Corr.* II 250 Flamsteed to Halley 17 Febr. 1680/81, 337.

[64] *Corr.* II 251 Newton to Crompton for Flamsteed 28 Febr. 1680/81, 340—347.

ez a vonzás mágneses természetű lenne, kevésbé vagyok hajlandó elhinni..."[65] A tapasztalat ugyanis egyértelműen arra mutat, hogy a mágneses testek felhevítve elvesztik mágnesességüket, márpedig a nap nagyon forró ... S ami még sokkal lényegesebb: a mágnes előbb mindig irányít, s csak aztán vonz, s ha egyszer magához vonzotta a kisebb mágnest, azt többé nem taszítja, el se engedi. A mágnesség elsősorban irányítást jelent, hangoztatja NEWTON. S különben is, ha a nap mágnességgel tartaná magához a bolygókat, azok tengelyének mind egyirányba kellene mutatni, mint a földön a mágnestűknek.



7. ábra

Egyébként is NEWTON arra gyanakszik, „hogy a novemberi & decemberi üstökös, amiket Mr. FLAMSTEED egy és ugyanazon üstökösnek tart, két különböző üstökös."[66] Ugyanis túl szabálytalan a mozgása ahhoz, hogy egy pályába lehetne összefogni. Itt vannak például GALLET atya római észlelései ... Azokkal mit csinál FLAMSTEED?.[67]

Végül kéri, küldjön továbbra is pontos jelentéseket az üstökös helyzetéről, s ne vegye zokon, amiket a hipotéziséről írt. — Egyébként a FLAMSTEED elméletében van egy csomó elfogadható tétel is, pl. hogy a farok híg gőzből áll *(thin vapour)*, hogy a farok a fej körüli atmoszférából ered, hogy a nap fénye okozza a felemelkedését, hogy a nap fényét visszaverve világít, s nem sajátmagától.[68]

FLAMSTEEDet azonban ez nem vigasztalja: őt az üstökös útja érdekli, nem a farok. Nagyon tiszteletteljesen, de nagyon határozottan szembeszáll NEWTON véleményével.[69]

„Mr. NEWTON nagyon lekötelezett geniális és világos észrevételeivel, amiket a most elvonult üstökös jelenségeinek a megmentésére felállított propozícióimra tett. Be kell vallanom neki, hogy rövidesen közölni szeretném megfigyeléseimet, de ugyanakkor, ami ezeket a fizikai dolgokat illeti, azok egyikével se tudok szembeszállani, mert szeretem a békességet, és nagyon jól tudom, milyen bajt hozhatna rám egy ilyen, saját területemen kívül eső publikáció. Csak az igazság szeretete és ezen jelenségekkel szemben általánosan elfoglalt vélemény nem tetszése késztetett arra, hogy üres óráimban gondolkozzam, mi lehet ezeknek a valódi természete. És mikor úgy véltem, hogy felfedeztem valamit, ez arra késztetett, hogy elküldjem Önnek és hogy megtudjam Mr. NEWTON érzéseit *(sentiments)*, akinek az enyémtől eltérő véleménye, be kell ismernem, nem kis előnyömre szolgált, mert számos további argumentumot juttatott eszembe véleményem *(opinion)* védelmére, amikre egyébként aligha gondoltam volna."[70]

FLAMSTEED 1646-ban született, ugyanabba a generációba tartozik, mint NEWTON. HOOKE a megelőzőbe. HOOKE udvarias hangján is érződik az egyenrangú. FLAMSTEED tudja, hogyan kell Mr. NEWTONnal beszélni.

[65] Uo. 341.
[66] Uo. 342.
[67] Uo. 342—343.
[68] Uo. 345—346.
[69] *Corr.* II 252 Flamsteed to Crompton for Newton 7 March 1680/81, 348—356.
[70] Uo. 348.

Ami az üstökös mozgásának a „szabálytalanságát" illeti — írja FLAMSTEED — NEWTON téved. Elnézte, hogy GALLET, akinek a megfigyeléseire NEWTON hivatkozik, a régi naptár szerint adta meg azokat, s azért látszanak a többi közül kiugrani.[71]

Abban viszont igaza van NEWTONnak, hogy a pálya valóban a napon túl hajlik vissza, az adatok egyértelműen erre mutatnak. És FLAMSTEED csatol egy merész szerkesztést — pár megfigyelése alapján![72] — az üstökös valódi, térbeli pályájáról.

Ami a nagy mágnest illeti, valóban irányít mielőtt vonzana, igaza van NEWTONnak. De ez is csak akkor szólna ellene, ha NEWTON be tudja bizonyítani, „hogy egy nagy álló mágnes ugyanígy hatna egy mellette vagy körülötte hevesen eldobott kis mágnesre is".[73]

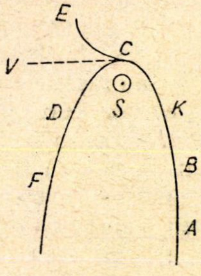
NEWTONt egyre jobban izgatja a „két" üstökös. Maga is pontosan követi a decemberit, amíg csak látni lehet, fonalkeresztes teleszkópjával, s gyűjt minden rávonatkozó megfigyelést.[74]

A pontos megfigyelésre helyezi a hangsúlyt. A lehető legpontosabban rekonstruálni kell a két üstökös térbeli, valódi, „abszolút" mozgását, az üstökösöknek az ekliptikához való hajlása látszólagos sebességüket nagyon megváltoztathatja. Amíg nem ismerjük a két üstökös igazi pályáját, nem lehet semmit mondani.

Az pedig, hogy a nagy mágnesnek a kis mágnesre való irányító hatása erősebb, mint a vonzó, kísérleti tény, itt nincs mit teoretizálni. Az elhajított mágnes? — a mágnestű a leggyorsabban száguldó vitorláson is ugyanarra mutat, mint az állón.

Lám, NEWTON, az „empirista". Vagy mégse? — „Az, hogy az ágyúból kilőtt golyó mindig ugyanazt az oldalát fordítja előre, régi tűzér-tradició lehet, de nem tudom belátni, hogy egyeztethető össze a mozgás törvényeivel *(laws of motion)* és azért merem állítani, hogy megfelelő kipróbálás esetén nem így fog történni, kivéve néha, véletlenül."[75]

Tapasztalat ide, kísérlet oda, csak az a mozgás „valóságos", ami összeegyeztethető a „mozgás törvényeivel". Vajon a FLAMSTEED hipotézise — hogy ti. a két üstökös egy — összeegyeztethető-e a mozgás törvényeivel? És egyelőre csupa kifogásokat hoz fel. Mert ha a nap vonzaná feléhaladtában, és taszítaná távoztában az üstököst, akkor a taszítás alatt is egyre gyorsabban kellene mozognia, márpedig a megfigyelés azt mutatja, hogy a decemberi üstökös egyre lassabban jár.



8. ábra

Másik kifogás: Mikor az üstökös *C*-be ér, itt se vonzás, se taszítás nem lehet, ez a vonzás és taszítás határa. Ha bármily kicsit túlmegy *D* felé, ott már taszítás érvényesülne, s akkor nemhogy *D* felé haladna, hanem elrepülne *E* felé.

„De mindezek a nehézségek elkerülhetők, ha feltesszük, hogy a nap mágnessége irányítja és vonzza az üstököst, és ezáltal épp annyira késlelteti távozásában, mint amennyire gyorsította közeledésében. És ez a folyamatos vonzás egy kerülőt tétet vele a nap körül *ABKDF* vonalban,

[71] Uo. 348—349.
[72] Uo. 352.
[73] Uo.
[74] *Corr.* II 254 Newton to (? Crompton) ? April 1681, 358—362.
[75] Uo. 360.

C-ben a *vis centrifuga* túlsúlyba jut a vonzás felett és arra kényszeríti az üstököst, hogy a vonzás ellenére is távolodni kezdjen a naptól.

Az üstökös pályájára vonatkozólag még nem végeztem számításokat, bár azt hiszem, van erre egy közvetlen módszerem, bármi legyen is a mozgás pályája."[76]

1681. ápr. ? — Az új világrendszer „qualitativ" születésnapja? A „mozgás törvényei" 1666 óta érnek NEWTONban. Pontosabban egy speciális mozgás, a forgó mozgás törvényei, amiben HUYGENS is olyan nagy eredményeket ért el. A hold és a bolygók mozgásához, az eső kő mozgás-anomáliáihoz ezek a törvények elegendőek voltak. A „gravitás" mindig érdekelte NEWTONt, de másként, nem a „törvények", hanem a képzelet, az ötlet, a *fancy* síkján — ahogy az 1675-ös hipotézisben leírta.[77] Vagy ahogy alig egy éve, a HOOKE-kal való levelezés során kiszámította egy „egyenletes gravitás" és egy érintőleges mozgás összetevődéséből kialakuló mozgás pályáját. Ott is egy centrumot kerül meg a két mozgás összetevődésének a hatására a mozgó test. — De nem ilyen bolond-hirtelen, mint FLAMSTEED kívánja. Lehet az üstökös pályáját számítani, neki van is erre módszere, s a számítások azt mutatják, hogy az üstökösnek — a decemberi üstököst érti alatta — dec. 3-án kellett metszeni az ekliptikát. Hogy milyen távolságban, azt megfigyelések hiányában nem tudja pontosan megmondani. Mindenesetre jóval túl lehetett a napon.[78] — De ha a decemberi üstökös dec. elején túl volt a napon, akkor a decemberi és novemberi üstökösök aligha lehetnek azonosak.[79]

Ha ugyanis a második, a decemberi üstökös pályájából extrapoláljuk az első, a novemberi üstökös pályáját, ez semmiképpen sem vág a novemberi üstökös megfigyelt adataival. Számításai szerint a decemberi üstökös dec. 3-án metszette az ekliptikát, s ekkor a föld — nap távolság felével volt a napon túl, s nem mozgott lényegesen sebesebben, mint később, már megfigyelhető szakaszában. FLAMSTEED hipotéziséből azonban az üstökös napközelére túlságosan nagy sebesség következne.

Ez pontatlan, rövid parafrázisa a meglehetősen bonyolult stereoastronomiai fejtegetéseknek, de gondos tanulmányozásukból is csak ez derül ki: akármilyen módszere volt is akkor NEWTONnak az üstököspálya számítására, az a módszer nem az inverz négyzetestörvény és a centrifugális erőtörvény kombinációján alapult. Akkor ugyanis nem akadt volna fenn a FLAMSTEED hipotézise által megkövetelt nagy napközelbeni sebességen.

NEWTON nem lehetett túlságosan elégedetlen az üstökös pályájára végzett számításaival. Ugyanis a levél kéziratából a következő, el nem küldött részt közlik a kiadók:

„Hogy az üstökös a napon túl járt, a magam részéről meglehetősen biztosnak látom, nemcsak azért, mert úgy tűnik, hogy a dolgok természete ellen van az az üstökösöknél, hogy úgy megforduljanak, mint az Ön hipotézise megkívánja, hanem azért is, mert úgy gondolom, hogy van egy módszerem az üstökös útjának (bármilyen vonal legyen az) a meghatározására, amely csaknem olyan pontos, mint amivel a bolygók pályáit határozzák meg, feltéve, hogy nagyon pontosan végzett, megfelelő megfigyelések állanak rendelkezésre. Ezért érdekelt az üstökös helyének a megfigyelése február végén és március elején..."[80]

[76] Uo. 361.
[77] *Corr.* II 146 Newton to Oldenburg 7 Dec. 1675, 362—392.
[78] *Corr.* II 254 Newton to (? Crompton) ? April 1681, 362.
[79] *Corr.* II 255 Newton to Flamsteed 16 April 1681, 363—367.
[80] Uo. 366.

Valóban, márc. 9-ig követi nagy érdeklődéssel és pontossággal. De mikor évekkel később megtalálja az üstökös mozgásának törvényét, akkor már nem lesz szüksége a sok pontos megfigyelésre: FLAMSTEED pár adatából meghatározza a pályát.

Az 1680—81-es üstökös kétségkívül felkeltette NEWTON érdeklődését az égi mozgások iránt. Az 1682 augusztusában megjelent üstököst is gondosan követte, s FLAMSTEEDdel és más tisztelőivel is figyeltette.

A 80-as évek elejére esik Thomas BURNETtel, a londoni Charterhouse főnökével való teológiai levélváltása is a világ szerkezetéről és természetéről.

BURNET többek között megkérdezte, mi a véleménye NEWTONnak a föld alakjáról: gömb-e az, vagy ovális? A válasz — indoklása miatt — meglehetősen érdekes: „Nagyon hajlom afelé a föltevés felé — írja NEWTON —, hogy gömb alakú vagy enyhén ovális. És legfőbb érvem e vélemény mellett a bolygókról vett analógia. Amennyire teleszkóppal megítélhetők, mind kereknek látszanak. Ha napi mozgásuk oválissá tenné őket, a Jupitert sokkal oválisabbá tenné a maga mozgása, lévén egyenlítőjén a napi mozgása által okozott vis centrifuga 20 vagy 30-szor nagyobb, mint a föld napi mozgása által okozott vis centrifuga a mi egyenlítőnkön."[81]

NEWTON figyelme a 80-as évek elején, úgy látszik, több oldalról is a centrifugális erő felé fordul.

A levél további része hosszú teológiai fejtegetés a Genezis értelmezéséről. „Ami Mózest illeti, nem hiszem, hogy teremtés-leírása philosophicus vagy kitalált lenne (philosophical or feigned), hanem hogy a valóságokat írja le mesterségesen a köznép értelméhez adaptált nyelven."[82] — foglalja össze több oldalra terjedő egzegézisét.

Sajnos, a *Levelezés* kiadói NEWTON óriási teológiai munkásságából csak nagyon keveset közölnek — a kiadás láthatóan a „pozitivista" NEWTONt szeretné feltámasztani — annyi azonban valószínűnek tűnik, hogy NEWTON kozmológiai érdeklődése nem teljesen „philosophicus" indítású. És nem is új: a 70-es évek nagy éterhipotézisei is ennek a szolgálatában állottak. Most azonban ez a kozmológiai érdeklődés egyre inkább mozgások és erők játékára koncentrálódik, mozgásokra és erőkre, amiket matematikai törvények uralnak.

A 70-es évek bontakoztatták ki NEWTONban a nagy experimentátort, a spekulatív experimentális művészet egyik nagy megalapozóját. A 80-as évek NEWTONa szabja meg a természet matematikai törvényeit. Próféta lesz, egy egész elkövetkező kor prófétája, akit csak azért nem imádtak, mert a 18. és 19. században ez már nem divat. A 80-as évek NEWTONa lesz az új civilizáció „Mózes"-e, s „tíz parancsolat"-a: a *Principia* három könyve. Leginkább a harmadik.

Ezt a könyvet fejezi be legkésőbb. 1684-től kezdve özönlenek a bolygórendszerre és az állócsillagok helyére vonatkozó kérdések FLAMSTEEDhez. Alig győzi a megválaszolásukat.

Különösen a Jupiter-rendszer és a Szaturnusz érdekli NEWTONt. 1684. dec. 30-án izgatott hangú levél a Jupiter és Szaturnusz pályájáról:

„A Szaturnusz pályáját KEPLER túlkicsinek definiálja a *sesquialteratus* arányhoz. Ez a bolygó, ahányszor csak conjunctióban van a Jupiterrel (a Jupiter reá való

[81] *Corr.* II 247 Newton to Burnet Jan. 1680/81, 329.
[82] Uo. 331.

hatása miatt) túl kell fusson a pályáján egy vagy két fél-napátmérővel, vagy még többel is, és mozgása csaknem egész többi részén ennyivel vagy még többel rajta belül kell legyen. Talán ez lehet az oka, hogy KEPLER túlkicsinek definiálja. De én szeretném tudni, nem figyelte-é Ön meg, hogy a Szaturnusz Jupiterrel való conjunctiója idején jelentősen eltér KEPLER tábláitól?"[83]

FLAMSTEED már január 5-én küldi a kért adatokat. Figyelemre méltó, hogy a korabeli Anglia legnagyobb asztronómusa, aki hallotta a Royal Societyben HALLEY beszámolóját NEWTONnál tett látogatásáról, s talán már a PAGET-levelet is látta — ha ugyan, mint előző levelében írta, „közös barátunk, Mr. HOOKE és a többi városi"[84] kielégítette már kíváncsiságát — FLAMSTEED, aki az elmúlt években NEWTON egyik legközelebbi munkatársa volt, milyen kevéssé él a Mester új gondolatvilágában.

„Hogy őszinte legyek — írja — alig hiszem, hogy valami befolyásuk lenne egymásra, mert a két bolygónak ebben a helyzetben az egymástól való távola csaknem négyszerese a földpályának *(orbis annuus)*, úgyhogy ilyen képlékeny *(yeilding)* anyagban, mint a mi éterünk, nem tudom elképzelni, hogy egyik bolygó másikra való bármilyen impressziója is zavarhatná a másik mozgását."[85]

Egyáltalán nem valószínű, hogy a bolygóknak valami hatása is lenne egymásra ilyen nagy távolból a Naphoz képest, amelyik „a legnagyobb és leghatékonyabb mágnese rendszerünknek". S most ő is tapasztalatra hivatkozik, mint pár évvel ezelőtti mágnes-vitájukban NEWTON: a legnagyobb eddig talált mágnes sem hatott 100 yardnál messzebb...[86]

De NEWTONt már nem érdeklik a „mágneses" tapasztalatok. Már jan. 12-én újra kérdez, a Szaturnusz-rendszer méretei érdeklik. — És nagy megkönnyebbüléssel veszi a Jupiter—Szaturnusz conjunctiójáról szóló értesítést:

„KEPLER Jupiter és Szaturnusz tábláinak a hibáira vonatkozó információi számos gondtól szabadítottak meg. Már azt hittem, valami előttem ismeretlen ok lehet, ami megzavarhatja a Sesquialternatus proportiót... A legutóbbi levelemben végeztem egy becslést *(allowance)* a Jupiter és Szaturnusz egymástól való távolságára azon az alapon, hogy a távolság négyzetével fordított arányban csökken a virtusuk *(virtue)*. De ott csak találomra beszéltem, nem ismerve virtusukat addig, amíg meg nem kaptam az Ön Jupiterre vonatkozó adatait, amikből megértettem, hogy virtusa kisebb, mint gondoltam..."[87]

A továbbiakban megköszöni, hogy átszámolja számára a francia üstökösmegfigyeléseket: „Szándékomban van az 1664 & 1680-as üstökösök által leírt vonalakat (lines) a bolygók mozgásánál megfigyelt elvek szerint leírni ..."[88]

Ez sem lesz könnyű munka. Láttuk már, hogy azt mondja róla, pár hónap kemény számolást jelentett 1685 őszén... De amikor sikerült, akkor a nyert eredmények alapján az előző könyvek propozícióin is végzett némi javítást...

Amikor készen lett az üstökös-pálya bolygómozgás-törvényei szerint történő számolásával, akkor —

[83] *Corr.* II 274 Newton to Flamsteed 30 Dec. 1684, 407.
[84] *Corr.* II 273 Flamsteed to Newton 27 Dec. 1684. 405.
[85] *Corr.* II 275 Flamsteed to Newton 5 Jan 1684/5, 408.
[86] Uo. 409.
[87] *Corr.* II 276 Newton to Flamsteed 12 Jan 1684/5, 413.
[88] Uo.

„... aláindula Mózes az hegyről, és az bizonyság tételének két táblái valának az ő kezében, mely tábláknak mind a két része megíratott vala, mind egyfelől, mind másfelől.

Az táblák penig Isten kezének csinálmányai valának, az írás is Isten írása vala, mellyet kimetszett vala."[89]

Nem volt-e valóban „bálványimádás" ezzel a művel szemben mindenféle prioritás-követelés? Isaac NEWTONnak volt igaza, még akkor is, ha az inverz négyzetes törvény és az általános gravitáció ötlete a Robert HOOKE állandóan matató agyában született is meg először.

S talán éppen az háborította fel annyira NEWTONt, hogy HOOKE, akit ő semmiképpen sem tartott méltó ellenfélnek, lép fel ilyen követelésekkel.

NEWTON szeme előtt más, nagyobb, méltóságteljesebb ellenfél lebegett. Olyan, aki törvényt adott annak a világnak, amiben NEWTON felnőtt, s akinek nagyobb hatása volt NEWTON fejlődésére, mint hisztoriográfusai, s talán ő maga is, gondolták. Egy „igazi" ellenfél, s nem egy londoni „experimental" filozófus. Aki teremtett egy matematikai világmindenséget, aminél most NEWTON biztosabbat és „matematikaibbat" hozott létre.

Akit ő a matematikában szinte még gyermekkorában túlszárnyalt, akinek az optikáját egy évtized kemény küzdelmei árán egy mérhetetlenül „szinesebbel" váltotta fel, s akinek a „világát" egy fél évtized hatalmas munkájával, a HOOKE, HALLEY, FLAMSTEED, HUYGENS, az 1860-as üstökös és „az Isten" segítségével egy pontosabb világgal váltotta fel.

Nem HOOKE volt a *Principia*-vitában NEWTON igazi ellenfele, hanem DESCARTES.

[89] Mózes Második könyve, XXXII, 15–16, Károli Gáspár fordítása.

A KÜLFÖLDI SZAKIRODALOMBÓL

ÚJABB EREDMÉNYEK A GALOIS-GEOMETRIÁKBAN*

Írta: G. TALLINI (Róma)

Bevezetés

Ismeretes, hogyan teremt az analitikus geometria a koordináták használatával szoros kapcsolatot a geometria és az algebra között, geometriai alakzatoknak és tulajdonságoknak algebrai fogalmakat feleltetve meg. A használt koordináták előbb valós, majd a nagyobb általánosság és egyszerűség végett, komplex számok.

A modern geometriában további lépés történt előre: egy absztrakt tér pontjainak a koordinátái a valós és komplex számrendszereknél általánosabb (például axiomatikusan bevezetett) számrendszerekben változhatnak. A számrendszer algebrai tulajdonságai tükröződnek természetesen a rajta felépített tér geometriai tulajdonságaiban, és így van ez megfordítva is. Szorosabb kapcsolat létesül így az algebra és a geometria között, amely, többek között, lehetővé teszi a geometriában maguknak az alapoknak a mélyebb vizsgálatát is.

A geometria ilyen irányú nagyfokú általánosítása azt a tévhitet kelthetné, hogy ez a tudományág egyre jobban távolodik az alkalmazásoktól. De ez nem így van. A különféle terek közül az utóbbi időben különös jelentőségre tettek szert például a GALOIS-féle terek, vagyis a véges, vagy GALOIS-testeken értelmezett terek, mégpedig egyrészt a különböző területeken (a statisztikától az információ elméletig) való jelentős alkalmazhatóságuk, másrészt elméleti hasznosságuk miatt. Jelen előadásomban éppen a Galois-geometria néhány újabb eredményét szeretném kifejteni.

1. §. Galois-terek és algebrai varietásaik

Ismeretes, mit értünk a p (p egész) *modulusra vonatkozó maradékok osztályán*, s az is, hogy e p számú $\{0\}, \{1\}, \ldots, \{p-1\}$-gyel jelölt osztályok között nyilvánvaló módon lehet értelmezni az összeadás és szorzás műveleteit. Igaz az is, hogy ezek az osztályok a rajtuk értelmezett műveletekre vonatkozóan akkor és csak akkor képeznek Γ_p *testet* (vagyis olyan algebrai struktúrát, amelyen az összeadás és a szorzás rendelkezik azokkal a szokásos tulajdonságokkal, mint pl. a valós számok esetében), ha p prímszám ([30], § 2, [48], 2. fejezet).

Ha az n-edfokú $g(x)$ polinom ($n > 1$), amelynek együtthatói Γ_p-hez tartoznak, Γ_p fölött irreducibilis (azaz nem bontható fel olyan valódi tényezők szorzatára, ahol az együtthatók Γ_p-hez tartoznak), akkor vizsgálható Γ_p-nek $g(x)$-re vonatkozó algebrai bővítése: ez elemi úton elérhető, bevezetve az i szimbólumot (GALOIS-féle imaginárius szám) a $g(i) = 0$ feltétellel, és a Γ_p és i között racionális műveleteket

* A Bolyai János Matematikai Társulatban 1963. szeptember 10-én tartott előadás.

végezve. Ez az eljárás pontosan olyan, mint ahogy valós számokról komplex számokra szokás áttérni, feltéve, hogy $g(x) \equiv x^2+1$.

A bővített test változó eleme $a_1 i^{h-1}+\ldots+a_h$ típusú, $a_l \in \gamma_p$ $(l=1, \ldots, h)$, s az ebben az alakban csak egyféleképpen írható. Az így keletkezett testet, amelynek rendje (elemeinek száma) $q=p^h$, Γ_p-vel jelöljük. A testet GALOIS-testnek, p-t a test *karakterisztikájának* nevezzük. A karakterisztika a legkisebb olyan pozitív egész, amelyre $pa=0$ $(a \in \gamma_p)$.

Bebizonyítható, hogy minden véges test — izomorfizmus erejéig — GALOIS-test, ahol, szélesebb szóhasználattal, ugyanúgy nevezik a p modulusra vonatkozó maradékok testeit is (amiket a $p=1$ esetben kapunk), — továbbá, rögzítve egy $q=p^h$ egészet, létezik és — izomorfizmus erejéig — egyértelmű a megfelelő rendű GALOIS-test. ([30], § 12; [48], 12. fej.)

Ezek után vizsgálhatunk egy $r \geqq 2$ dimenziós, a Γ_p GALOIS-testen értelmezett projektív teret, amelyet $S_{r,q}$-val jelölünk és GALOIS-*térnek* nevezünk (jegyezzük meg, hogy r és q magát a teret határozzák meg). ([30], § 17, [48], 17 fej.). A megfelelő geometriát GALOIS-*geometriának* nevezzük.

Ilyen térben egy egyenesnek $q+1$ pontja van, vagyis annyi, ahány elemből az a halmaz áll, amelyet akkor kapunk, ha a test q számú elemének ∞ értéket adunk. Következésképpen egy sík pontjainak száma q^2+q+1, S_k-nak $q^k+q^{k-1}+\ldots+q+1$ számú pontja van ([30], n. 157. [48], n. 165).

A dualitás miatt adódik, hogy $S_{r,q}$-nak egy S_k-ra vonatkozó hipersíkjainak (annyi van, ahány pontja S_{r-k-1}-nek) a száma $q^{r-k+1}+\ldots+q+1$, s ez a formula $k=-1$-re is érvényes. Analóg formulák határozhatók meg adott S_p-t metsző S_k-kra.

Az így felépített $S_{r,q}$-ban minden algebrai varietás véges sok pontból áll, mivel véges az egész tér pontjainak a száma is. Fordítva is: $S_{r,q}$ minden véges sok elemből álló halmaza algebrai varietás (ismeretes, hogy egyetlen pont — algebrai varietás, s így véges sok is az). Ebből következik, hogy a GALOIS-geometriákban felvetődő problémák lényegében algebrai természetűek.

Egyik elsőként megvizsgálandó kérdés pl. a következő: meghatározandó $S_{r,q}$ valamely irreducibilis algebrai varietása pontjainak a száma. Ez a probléma elsőrendű varietások esetén könnyen megoldható: így a legegyszerűbb esetre, amikor $S_{r,q}$ altereiről van szó, már az előzőek választ adnak. $S_{r,q}$ kvadratikus hiperfelületei esetében is az általuk tartalmazott pontok száma könnyen meghatározható ([24], [50], [41], $n \cdot 1$), lényegében a sztereografikus vetítést használva fel. Bebizonyítható pl., hogy $S_{2,q}$ nem degenerált kúpszeletei mindig $q+1$ pontból állnak, amelyek közül 3—3 nem esik egy egyenesbe; $S_{3,q}$ elliptikus kvadratikus alakzatai q^2+1, míg a hiperbolikusok q^2+2q+1 számú pontból állnak. Analóg formulák érvényesek magasabb dimenziójú terek kvadratikus alakzataira is. Pontosan: be lehet bizonyítani, hogy $S_{r,q}$-ban páros r esetén csak egyetlen nem elfajuló (az együtthatók determinánsa nem 0) kvadratikus alakzat létezik és az $q^{r-1}+\ldots+q+1$ számú pontból áll; ha viszont r páratlan, a nem elfajuló kvadratikus alakzatok két típusa létezik: az elliptikus ($S_{3,q}$ elliptikus kvadratikus alakzatainak általánosítása) kvadratikus alakzatok pontjainak száma $\sum_{i=0}^{r-1} q^i - q^{\frac{r-1}{2}}$, a hiperbolikusok — ($S_{r,q}$ hiperbolikus kvadratikus alakzatainak általánosításai) pontjainak száma pedig $\sum_{i=0}^{r-1} q^i + q^{\frac{r-1}{2}}$.

A speciális kvadratikus alakzatok — kúpok — az előzőekből vetítéssel kaphatók, és innen pontjaik száma könnyen meghatározható.

Emlékezetünkbe idézve, hogy $S_{3,q}$ egyenesei kölcsönösen egyértelműen állíthatók elő $S_{3,q}$ egy hiperbolikus kvadratikus alakzata segítségével (KLEIN-féle kvadratikus alakzat), azt kapjuk, hogy $S_{3,q}$ egyeneseinek száma $q^4+q^3+2q^2+q+1$. Ugyanezekhez az eredményekhez eljuthatunk közvetlenül az $S_{3,q}$ egyeneseire vonatkozó megfontolásokkal: elég $S_{3,q}$ különböző pontpárjainak a számát — $\binom{q^3+q^2+q+1}{2}$ — elosztani egy egyenes különböző pontpárjainak a számával — $\binom{q+1}{2}$ —. Ez utóbbihoz hasonló gondolatmenettel meg lehet határozni egy $S_{r,q}$-hoz tartozó S_k-k, vagyis $S_{r,q}$ S_k-hoz tartozó GRASSMAN-féle varietása pontjainak a számát ([30] n. 159, [48] n. 167). $S_{r,q}$ tetszőleges algebrai varietása pontjai számának a meghatározása azonban lényegesen nehezebb. Ezzel kapcsolatban érvényes a következő fontos becslés $S_{r,q}$ egy irreducibilis, nem szinguláris algebrai görbéje pontjainak N számára vonatkozóan: $|q+1-N| \leqq 2g\sqrt{q}$, ahol g a görbe fajszáma ([61], [62]). Ezt a relációt aztán általánosítani lehet a varietásra, s ekkor olyan egyenlőtlenséget kapunk, amelyben szerepelnek az irreducibilisnek feltételezett varietás invariáns jellemzői ([61], [62]).

Az előbbivel kapcsolatos annak a vizsgálata, hogy léteznek-e olyan hiperfelületek, vagy általánosabban: varietások, amelyek $S_{r,q}$ minden pontját tartalmazzák. Reducibilisek nyilván vannak, ebből a célból elég egy olyan hiperfelületre gondolni, mely egy hipersíksor elemeire, $q+1$ hipersíkra hasad szét. Megvizsgáljuk, hogy amennyiben léteznek a fenti tulajdonsággal rendelkező irreducibilis hiperfelületek is, melyek közülük a minimális rendűek, és tanulmányozzuk őket. Ezek a hiperfelületek, márcsak azért is, mivel $S_{r,q}$ valamennyi pontját tartalmazzák, érdekes geometriai tulajdonságokkal rendelkeznek, amelyeket érdemes megvilágítani. Így, be lehet bizonyítani ([57], [58]), hogy $S_{r,q}(x_0, x_1, \ldots, x_r)$ tetszőleges F^n hiperfelületének, amely $S_{r,q}$ minden pontját tartalmazza, $n \geqq q+1$-edrendűnek kell lennie, egyenlete pedig az alábbi:

$$\sum_{i<j}^{0,\ldots,r} A_{ij}(x_i^q x_j - x_i x_j^q) = 0, \tag{1}$$

ahol az A_{ij}-k $n-q-1$-edfokú formák.

Az a probléma, hogy az (1) hiperfelületek között vannak-e irreducibilisek, más az $r=2$ esetben (síkbeli eset), mint akkor, ha $r>2$. Bebizonyítható ui., hogy $r=2$ esetén minden F^{q+1} szétesik egy sugársor $q+1$ egyenesére, de az F^{q+2}-k között vannak irreducibilisek is; ez utóbbiak részére teljes projektív klasszifikáció adható, amely bizonyos tulajdonságaikra támaszkodik. Az $r \geqq 3$ esetben kimutatható, hogy léteznek F^{q+1} irreducibilis hiperfelületek, ezek projektív szempontból ekvivalensek és érdekes geometriai tulajdonságokkal rendelkeznek ([57], [58], [60]).

2. §. Ívek és süvegek

Ahogy a matematikában gyakran előfordul, a GALOIS-geometriák iránti érdeklődés is az alkalmazott matematika problémáiból fakad. 1940 körül az indiai R. C. BOSE és iskolája rájött arra, hogy a statisztika számos problémája előnyösen tanulmányozható a GALOIS-terek felhasználásával. ([5], [6], [7]). Éppen ezek a kutatások irányították BOSE érdeklődését az $S_{r,q}$ ponthalmaz bizonyos halmazai felé, amelyeket *s-fajtájú k-süvegeknek* nevezünk, $k^s_{r,q}$-val jelölünk ($2 \leqq s \leqq r$); e halmazok $S_{r,q}$ olyan k számú pontjából állanak, *amelyek közül bármely* $s+1$ *pont független, de van közöttük olyan* $s+2$ *számú pont, amelyek összefüggnek.* Ugyanezeknek a halmazoknak a tanulmányozásához jutott 1950 körül két finn csillagász, JÄRNEFELT és KUSTAANHEIMO, amikor olyan modellt akartak konstruálni, amely megfelelőbbben reprezentálná a mikrokozmoszt ([11], [12], [13], [14], [15], [16], [17], [18], [25]). E halmazok mélyebb tanulmányozása B. SEGRE-hez és iskolájához fűződik. ([1], [2], [4], [10], [20], [21], [22], [28], [29], [32], [33], [35], [41], [42], [53], [56].) Előadom a megfelelő eredményeket.

$S_{r,q}$ r fajtájú süvegét *ívnek* is nevezik. $S_{r,q}$ *k íve tehát* $S_{r,q}$ *k számú olyan pontját tartalmazza, amelyek közül bármely* $r+1$ *független.* Az $r=2$ esetben a sík k-íveit kapjuk, vagyis $S_{r,q}$ k pontból álló olyan halmazait, amelyek közül 3—3 nem esik egy egyenesbe. Térjünk rá ez utóbbiak vizsgálatára.

Egy síkbeli k-ívre vonatkozólag a sík egyenesei szelőkre, érintőkre és külső egyenesekre oszlanak, aszerint, hogy a k-ívvel két vagy egy közös pontjuk van, illetőleg nincs közös pontjuk. Ezzel kapcsolatban tüstént felvetődik a következő probléma: meghatározandó az a maximális k, amelyre létezhetnek k-ívek. Azonnal megmutatható, hogy páratlan q esetén $k = q+1$, páros q-ra pedig $k = q+2$. Valóban, egy k-ív minden pontján $k-1$ szelő halad át, az érintők száma innen $q+1-k+1$, amiből $k \leqq q+2$. A $k = q+2$ eset páratlan q-ra nem állhat fenn (különben az ilyen halmaz nem tartalmazna érintőket, holott páratlan q esetén külső pontból legalább egy mindig húzható). $(q+1)$-ívre példaként (q akár páros, akár páratlan) egy kúpszelet pontjai szolgálhatnak. Páros q esetén $(q+2)$-ívre példaként szintén kúpszeletek szolgálhatnak, hozzávéve a magpontjukat (páros q esetén igazolható, hogy a kúpszelet minden érintője átmegy ugyanazon a — magpontnak nevezett — ponton) ([34], 100. o.).

Bebizonyítható továbbá, hogy — *páratlan q esetén — minden* $(q+1)$*-ív valamely kúpszelet pontjaiból áll* ([32], [48] n. 174). Ehhez jutunk, ha bebizonyítjuk, hogy amennyiben A, B, C a $(q+1)$-ív három tetszőleges pontja, akkor az ABC háromszög és az ezekben a pontokban az ívhez húzott érintők által alkotott háromszög perspektív háromszögpár; ez utóbbi annak a ténynek a felhasználásával adódik, hogy GALOIS-test összes nem nulla elemeinek szorzata (-1)-gyel egyenlő. Páros q esetén az előbbi állítás nem érvényes, amennyiben egy kúpszelet q pontja és a magpont $(q+1)$-ívet alkotnak, amely — ha $q \geqq 5$ — nem kúpszelet. Ekkor az a kérdés, hogy vajon minden $(q+2)$-ív kúpszeletből nyerhető-e, hozzávéve a magpontot. A válasz negatív: megadhatók olyan $(q+2)$-ívek, amelyek a fenti módon nem származtathatók ([35]). Páros q esetén nyílt probléma egy $S_{2,q}$ $(q+2)$-íveinek az osztályozása.

Valamely k-ívet *teljesnek* nevezünk, ha nem létezik olyan $(k+1)$-ív, amely tartalmazza. Bebizonyítható ([41], n. 13, 14), hogy minden $(q-t+2)$-ívet ($t \geqq 1$, ha q páros; $t \geqq 2$, ha q páratlan) q-hoz viszonyítva kicsiny t mellett (pontosan: $q \geqq t^2 - t - \frac{t-1}{2}$, ha q páros; $q \geqq 16t^2 + t - 37$, ha q páratlan) páros q esetén egy $(q+2)$-ív, páratlan q esetén pedig egy kúpszelet tartalmazza, a k-ív tehát nem teljes. Vannak azonban példák — ahol a k értékek q-hoz viszonyítva kicsik — teljes, páros q esetén $(q+2)$-ívhez, páratlan q esetén pedig kúpszelethez nem tartozó k-ívekre.

([41] n. 15, [20], [21], [22], [28]). E k-ívek tanulmányozása felvet több ezideig meg nem oldott problémát.

Valamely $S_{r,q}(r \geqq 3)$ k-íveinek a tanulmányozása könnyen visszavezethető (S_{r-3} k-ívének, amely összeköti az ív $r-2$ pontját, S_{r-3}-hoz kitérő síkra való vetítésével) síkbeli ívek vizsgálatára ([33], [41] n. 18). Az előző eredmények alapján érvényes pl. az alábbi állítás: *Ha q páratlan és r-hez viszonyítva elég nagy, akkor $(q+1)$-gyel egyenlő azoknak a k értékeknek a maximuma, amelyekre $S_{r,q}$ k-ívei léteznek, s ezt a maximumot csupán a síkbeli normál görbék érik el* ([33], [41] n. 18).

A $K^s_{r,q}$ $(2 \leqq s \leqq r)$ süvegeket illetően, ahogy az előzőekben már jeleztük, elsősorban az alkalmazások szempontjából érdekes annak a problémának a megvizsgálása, hogy k mely maximális értékére létezhetnek az előbbi tulajdonságú halmazok. Ezt a maximumot $[M]^s_{r,q}$-val jelölve, az előzőekből következik, hogy

$$(2) \qquad [M]^2_{2,q} = q+1, \text{ ha } q \text{ páratlan}; \quad [M]^2_{2,q} = q+2, \text{ ha } q \text{ páros}.$$

Igazolható továbbá ([5], [51] 124. o.; [25], § 2.), hogy

$$(3) \qquad [M]^2_{r,q} \leqq q^{r-1}+1, \quad r \geqq 3 \text{ és } q>2,$$

az egyenlőség akkor és csak akkor érvényes, ha $r=3$, ezen túlmenően az is igaz ([5], [51] 124. o.), hogy

$$(4) \qquad [M]^2_{r,2} = 2^r.$$

Az előző relációkból az alábbi egyenlőtlenségek adódnak:

$$(5) \qquad [M]^r_{r,q} \leqq q+r-1, \text{ ha } q \text{ páratlan}; \quad [M]^r_{r,q} \leqq q+r, \text{ ha } q \text{ páros}.$$

$$(6) \qquad [M]^s_{r,q} \leqq q^{r-s+1}+s-1, \quad q>2, \quad s \leqq r-1.$$

$$(7) \qquad [M]^s_{r,2} \leqq 2^{r-s+2}+s-2.$$

Valóban, ha egy $k^s_{r,q}$-t vetítünk egy $s-2$ pontját összekötő S_{s-3}-ból az S_{s-3}-hoz kitérő S_{r-s+2}-re, könnyen belátható módon S_{r-s+2} másodfajú $(k-s+2)$ süvegét kapjuk, ha a fenti $s-2$ számú pont $k^s_{r,q}$ egy független pontokból álló $(s+2)$-séhez tartozik. Tehát, ha $s=2$, (2)-ből páratlan q-ra $k-r+2 \leqq q+1$ adódik, páros q esetére pedig $k-r+2 \leqq q+2$, s innen az (5) formulák azonnal következnek. Ha $s<r$, $q>2$, (3) szerint $k-s+2 \leqq q^{r-s+1}+1$, s ebből (6) már következik. A $q=2$ esetben (4)-ből $k-s+2 \leqq 2^{r-s+2}$ adódik, ebből pedig (7) azonnal kapható.

$[M]^s_{r,q}$-t pontosan meg lehet határozni, ha s q-hoz képest nagy. Pontosan, igazolni lehet ([59] n. 9), hogy

$$(8) \qquad [M]^r_{r,q} = r+2, \quad q-1 \leqq r,$$

és általánosabban ([59] n. 9):

$$(9) \qquad [M]^s_{r,q} = r+2, \quad [q(r+1)-1]/(q+1) \leqq s \leqq r.$$

$[M]^2_{r,q}$-ra ismeretesek (3)-nál jobb becslések is. ([41], § IV), s azokból $[M]^s_{r,q}$-ra más becslések is levezethetők (az előbbi gondolat menettel); az $[M]^s_{r,q}$ függvények tanulmányozása azonban általában nem egyszerű; komoly nehézségek merülnek fel s a kérdés még nincs lezárva.

Egy másik $k_{r,q}^s$-ra vonatkozó probléma annak a megvizsgálása, hogy vajon minden $k_{r,q}^s$ része-e egy másodfajú süvegnek, s ha ez így lenne, hogyan lehetne visszavezetni a $k_{r,q}^s$-k tanulmányozását másodfajú süvegek vizsgálatára. E kérdésre (hacsak nem teszünk r-re és q-ra bizonyos kikötéseket) a válasz negatív, mivel kimutatható, hogy r és q speciális értékeire léteznek másodfajú süveghez nem tartozó $k_{r,q}^3$-k, sőt ez utóbbiak olyan nevezetes aritmetikai-geometriai tulajdonságokkal rendelkeznek, amelyek érdekessé teszik tanulmányozásukat. Mindazonáltal igazolható, hogy minden $k_{r,q}^s$-t ($s \geqq 3$) tartalmaz vagy egy másodfajú, vagy egy harmadfajú süveg. Igazolható továbbá az is, hogy *ha q r-hez viszonyítva elég nagy*, nem léteznek a fent említett típusú $k_{r,q}^3$-k, *s innen minden $k_{r,q}^s$ része valamely másodfajú süvegnek;* részletesebben, az $s \geqq 4$ esetben a $k_{r,q}^s$ süvegek bizonyos számú másodfajú süveg teljes metszetei ([56]).

3. §. Algebrai varietások grafikus jellemzése

Az előzőekben már szóltunk arról, hogy $S_{r,q}$ bármely k pontból álló halmaza algebrai varietás: felvetődik tehát az a kérdés, hogy milyen grafikus természetű feltételek esetén esik egybe ez a halmaz $S_{r,q}$ egyes legegyszerűbb algebrai varietásai ponthalmazával. Ez egyértelmű azzal, hogy az algebrai varietásokat — esetleg k-ra vonatkozó algebrai tulajdonságaikon túl — csupán grafikus tulajdonságaikkal jellemezzük.

A 2. §. eredményei, — amelyek kimondják, hogy

I. Állítás: $S_{2,q}$ *minden $(q+1)$-íve páratlan q esetén kúpszelet;*

és

II. Állítás: $S_{r,q}$ *minden $(q+1)$ íve, ha q páratlan és r-hez viszonyítva elég nagy, racionális normál görbe* — választ adnak a fent jelzett problémára, amennyiben grafikusan jellemzik a kúpszeleteket és a racionális görbéket. Egyéb eredmények is születtek ebben az irányban, amelyeket most röviden összefoglalunk.

A kúpszeletek és a racionális normál görbék után nehézségi sorrendben $S_{r,q}$ ($r \geqq 3$) kvadratikus alakzatai következnek. A legegyszerűbb grafikus tulajdonságuk nyilvánvalóan az, hogy minden olyan egyenest tartalmaznak, amellyel legalább két közös pontjuk van. Igazolható, hogy minden q (>2, páros vagy páratlan) esetén ez az egyetlen tulajdonság alkalmas a jellemzésükre. Erre vonatkoznak az alábbi állítások, amelyek közül az első megoldja a problémát az elliptikuson kívül a kvadratikus alakzatok összes típusaira nézve, akár alfajuló, akár nem, míg a második az elliptikus típusra vonatkozik.

III. Állítás: *Legyen az $S_{r,q}$ ($r \geqq 3, q > 2$) ponttérnek egy k számú pontból álló olyan részhalmazáról szó, amely tartalmaz minden olyan egyenest, amelynek vele kettőnél több közös pontja van és nem tartalmaz mint részt egy hipersíkot sem. Ebben az esetben a halmaz a $k \geqq \sum_{i=0}^{r-1} q^i$ pótlólagos feltétel mellett szükségképpen az alábbi típusú algebrai varietások egyike:*

ha q páratlan, vagy egy páros dimenziójú tér nem elfajuló kvadratikus alakzata, vagy egy a csúcsteréből egy fenti típusú kvadratikus alakzatot vetítő kúp, vagy egy nem elfajuló hiperbolikus típusú kvadratikus alakzat, vagy egy hiperbolikus típusú kvadratikus kúp;

ha q páros, vagy egy előbbi típusú kvadratikus alakzat, vagy egy fenti kvadratikus alakzat és egy alkalmas lineráis tér összege, vagy egy $(q+1)$-ívet, avagy egy $(q+2)$-ívet az ív síkjához képest kitérő S_{r-3}-ból vetítő kúp ([50], [51]).

IV. Állítás: *Egy $S_{3,q}$-ban (q páratlan) minden (q^2+1)-süveg elliptikus kvadratikus alakzat. Valamely $S_{r,q}$-ban ($r \geqq 4$; $q \geqq 4$, páros vagy páratlan) egy $\left(\sum_{i=0}^{r-1} q^i - q^{d+1}\right)$-halmaz, amelynek az S_d-k a maximális terei (a priori csupán a $0 \leqq < d \leqq r-2$ relációt tesszük fel), és amely tartalmaz minden vele több mint két közös ponttal rendelkező egyenest, szükségképpen olyan, hogy d kielégíti az $(r-3)/2 \leqq d \leqq r-2$ becslést. Továbbá, ha $d = (r-3)/2$ (r innen páratlan), a halmaz egy nem elfajuló elliptikus típusú kvadratikus alakzat pontjaiból áll ha $(r-3)/2 < d \leqq r-4$ (innen $r > 5$), a halmaz egy S_{2d-r+2}-beli csúcspontú elliptikus kvadratikus kúp; ha $d = r-3$, akkor páratlan q esetén S_{r-4}-beli csúcspontú elliptikus kvadratikus kúpot kapunk, vagy, ha q páros, egy S_3 tér egy (q^2+1)-süvegét S_3-hoz képest kitérő S_{r-4}-ből vetítő kúpot; végül, ha $d = r-2$, akkor a halmaz egyenlő S_{r-2}-vel* ([1], [23], [52]).

Megkísérelhető $S_{r,q}$ harmadrendű hiperfelületeinek ahhoz hasonló jellemzése, amelyet megadtunk a legegyszerűbb $r=3$, q (>3) páratlan esetben, s amelyet most kifejtünk. Szükségesnek tűnik mindenekelőtt a figyelmet egy $S_{3,q}$-nak k pontból álló olyan halmazaira irányítani, amelyek *tartalmaznak minden, velük kettőnél több közös ponttal rendelkező egyenest;* továbbá a banális esetek kizárása végett hasznos olyan halmazokra szorítkozni, amelyek *részként nem tartalmaznak síkokat, kvadratikus alakzatokat* (akár elfajulókról van szó, akár nem), és amelyek *nem redukálódnak kúpokká* (vagyis nem egy ponton átmenő egyenesekből állnak). Egy ilyen k-halmaz *„kettős pont"-jának nevezzük a halmaz minden olyan pontját, amelyre igaz, hogy minden rajta átmenő és a halmazhoz nem tartozó egyenesnek a halmazzal legfeljebb egy további közös pontja lehet;* végül tegyük fel még pótlólag, hogy a k-halmaz bármelyik két „kettős pont"-ját összekötő egyenest tartalmazza. $S_{3,q}$ olyan k-halmazát, amely eleget tesz a fenti feltételeknek, $F(k)$-val jelöljük. $F(k)$ vizsgálata mindjárt elvezet az általános harmadrendű vonalfelülethez és a három vagy négy független kettős pontot tartalmazó harmadrendű vonalfelületek grafikus jellemzéséhez az alábbi eredményekkel ([55]):

V. Állítás: *Olyan $S_{3,q}$-hoz ($q>3$ és páratlan) tartozó $F(k)$, amelyre $k \geqq q^2+2q+1$ és amelynek három egy egyenesbe eső „kettős pont"-ja van, csak akkor létezhet, ha $k = q^2+2q+1$, ekkor $F(k)$ egy harmadrendű általános vonalfelület (vagyis különböző egyenes vonalú direktrixei vannak).*

VI. Állítás: *Olyan $S_{3,q}$-hoz ($q>3$ és páratlan) tartozó $F(k)$, amelyre $k \geqq q^2+3q+1$ és amely négy független „kettős pont"-ot tartalmaz, csak akkor létezhet, ha $k = q^2+3q+1$; ebben az esetben $F(k)$ négy kettős ponttal rendelkező harmadrendű felület.*

VII. Állítás: *Olyan $S_{3,q}$-hoz ($q>3$ és páratlan) tartozó $F(k)$, amelyre $k \geqq q^2+4q+1$ és amelynek három független „kettős pont"-ja van, csak akkor létezhet, ha $k = q^2+4q+1$; ebben az esetben $F(k)$ három kettősponttal rendelkező harmadrendű felület.*

Elképzelhető, hogy az $F(k)$-k vizsgálata tovább folytatható, s így el lehet jutni $S_{3,q}$ harmadrendű felületeinek pontos jellemzéséhez.

A kezdetben megjelölt problémával kapcsolatban hátra van még $S_{5,q}$ VERONESE-felületével kapcsolatos kérdés. Az $X_{ij}=X_{ji}$ $(i,j=0,1,2)$ homogén koordinátájú

$S_{5,q}$-ban az $X_{ij}=x_ix_j$ parametrikus egyenletek az (x_0, x_1, x_2) koordinátájú $S_{2,q}$ kúpszeleteiből származtatott Veronese-felületet definiálják. Ez a felület — amely negyedrendű és ezért F_2^4-gyel jelöljük — kölcsönösen egyértelműen megfeleltethető $S_{2,q}$-nak, s így q^2+q+1 pontból áll; továbbá $S_{2,q}$ q^2+q+1 egyenesének ugyanannyi kúpszelet felel meg, ezek különböző síkokban helyezkednek el és közülük bármely kettő F_2^4 egy és csak egy pontjában találkozik. F_2^4 egy P' pontján a felület $q+1$ kúpszelete halad keresztül (P'-nek az $S_{2,q}$-ban megfelelő ponton keresztülmenő $q+1$ egyenesből adódóan); e kúpszeletek $q+1$ érintője mind ugyanabban, F_2^4 P'-beli érintősíkjával egybeeső síkban helyezkedik el.

Ha q páratlan, a VERONESE-felület — így definiált — q^2+q+1 érintősíkja olyan, hogy *páronként egy pontban találkoznak, és közülük kettőnél több soha nem illeszkedik ugyanarra a pontra.* Az érintő síkok ily módon képzett összességének jellemzésére önként kínálkozik egy *$S_{r,q}$-hoz ($r\geqq 5$, q páratlan) tartozó k síkok olyan halmazainak a vizsgálata, ahol a síkok páronként metszik egymást és kettőnél több közülük soha nem illeszkedik ugyanarra a pontra.* Igazolták ([54]) — a kívánt jellemzésnek megfelelően —, hogy *mihelyt teljesül a $k\geqq q^2+q+1$ feltétel, a fenti halmaz előállítja egy* VERONESE-*felület összes érintő síkját*, és így szükségképpen fennállnak rá az $r=5$ és a $k = q^2+q+1$ összefüggések.

A fenti állítás DEL PEZZO egy ismert tételének analógián alapuló kiterjesztését adja véges terekre. E tétel a következőket állítja: Valamely komplex $S_{r,5}$ ($r\geqq 5$) egyetlen olyan irreducibilis — nem kúpszelet — felülete, amelynek érintősíkjai páronként metszik egymást, S_5 VERONESE-felülete. Ez utóbbiban két feltétel szerepel: az egyik grafikus (érintősíkok metszése, a másik differenciál-topológiai természetű) (olyan felület létezése, amelynek a fenti síkok érintő síkjai, többek közt azt is magában foglalja, hogy a síkok összessége folytonos rendszert alkosson). Véges terekre térve át, a második feltétel — a probléma természetének megfelelően — egy numerikus egyenlőtlenség ($k \geqq q^2+q+1$) helyettesíti.

Végül megjegyezzük, hogy páros q esetén a VERONESE-felület érintő síkjainak a rendszere duálisan átmegy ugyane felületet kúpszeletekben metsző síkok rendszerébe; továbbá bármelyik rendszer síkjai — miként az köztudomású — leírnak egy harmadrendű M_4^3 hiperfelületet. Az előző állításból a dualitás miatt egy újabb adódik, amely a VERONESE-felületet egy kúpszelet mentén metsző síkok összességére vonatkozik; így tehát M_4^3-at kétféle módon lehet — mint síkok mértani helyét — pusztán grafikus tulajdonságokkal jellemezni.

Fordította: Kósa András,
a matematikai tudományok kandidátusa

IRODALOMJEGYZÉK

[1] A. BARLOTTI, Un'estensione del teorema di Segre—Kustaanheimo, *Boll. U. M. I.*, (3) **10** (1955) 4, 498—506.

[2] A. BARLOTTI, Un'osservazione sulle k-calotte degli spazi lineari finiti di dimensione tre, *Boll. U. M. I.*, (3) **11** (1956), 248—252.

[3] A. BARLOTTI, Sui $\{k, n\}$-archi di un piano lineare finito, *Boll. U. M. I.* (3) **11** (1956), 553—556.

[4] A. BARLOTTI, Una limitazione superiore per il numero di punti appartenent i a una k-calotta $C(k, 0)$ di uno spazio lineare finito, *Boll. U. M. I.* (3) **12** (1957), 67—70.

[5] R. C. BOSE, Mathematical theory of the symmetrical factorial factorial desing, *Sankhya*, VIII, **11**, (1947), 107—166.

[6] R. C. Bose—K. Kishen, On the problem of confouding in the general symmetrical factorial desing, *Sankhya*, V (1940), 21—36.
[7] R. C. Bose—D. K. Ray—Chandhuri, *On a class of error correcting binary group codes*, Institut of Statistics of North Carolina, Mimeograph. Series No. 240, Sept. 1959.
[8] M. Cicchese, Sulle cubiche di un piano di Galois, *Rend. Acc. Naz. Lincei*, (8) **32** (1962), 38—42.
[9] A. Cossu, Su alcune proprieta dei k, n-archi di un piano proiettivo sopra un corpo finito, *Rend. di Mat.*, (3—4) **20** (1961), 263—269.
[10] C. di Comite, Su k-archi deducibili da cubiche piane, *Rend. Acc. Naz. Lincei*, (8) **33** (1962), 429—435.
[11] G. Järnefelt, A plane geometry with a finite number of elements, *Veröf. des Finnischen Geodätischen Inst.*, **36** (1949).
[12] G. Järnefelt—P. Kustaanheimo, An observation on finite geometries, *Acta XI. Congr. Mat. Scand.* (Trondheim 1949), 166—182.
[13] G. Järnefelt, Reflection on a finite approximation to Euclidean geometry, Physical and Astronomical prospects, *Ann. Acc. Sci. Fennicae, Ser. A.*, I, n. 96.
[14] P. Kustaanheimo, A note on a finite approximation of the Euclidean plane geometry, *Soc. Sc. Fenn. Comm. Phys. Mat.*, XV, **19** (1950).
[15] P. Kustaanheimo, On the fundamental prime of a finite world, *Ann. Acc. Sc. Fenn. Ser. A*, I, n. **129** (1952).
[16] P. Kustaanheimo—B. Qvist, On a differentiation in Galois fields, *Ann. Acc. Sc. Fenn., Ser. A*, I, n. **137** (1952).
[17] P. Kustaanheimo, On the relation of congruence in finite geometries, *Rend. Mat. Roma*, (5) **16** (1957), 286—291.
[18] P. Kustaanheimo, On the relation of order in finite geometries, *Rend. Mat. Roma*, (5) 3—4 (1957), 292—296.
[19] A. Lee, Über einige Extremalaufgaben bezüglich endlicher Körper, *Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae*, **13** (1962), 237—243.
[20] L. Lombardo—Radice, Sul problema dei k-archi completi di $S_{2,q}$, *Boll. U. M. I.*, (3) **11** (1956), 178—181.
[21] L. Lunelli—M. Sce, Sulla ricerca dei k-archi completi mediante calcolatrice elettronica, *Rend. Convegno Reticoli, Palermo*, (1957), 81—86.
[22] L. Lunelli—M. Sce, k-archi completi nei piani proiettivi desarguesiani di rango 8 e 16, *Politecnico di Milano, Centro di calcoli numerici*, (1958), 1—11.
[23] G. Panella, Caratterizzazione delle quadriche di uno spazio (tridimensionale) lineare sopra un corpo finito, *Boll. U. M. I.*, (3) **10** (1955), 507—512.
[24] E. J. F. Primrose, Quadrics in finite geometries, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, **47** (1951), 299—304.
[25] B. Qvist, Some remarks concerning curves of the second degree in a finite plane, *Ann. Ac. Sc. Fennicae, Ser.* A. I. n. 134 (1954).
[26] L. A. Rosati, Sul numero dei punti di una superficie cubica in uno spazio lineare finito, *Boll. U. M. I.* (3) **11** (1956) 3, 412—418.
[27] L. A. Rosati, L'equazione delle 27 rette della superficie cubica generale in un corpo finito, *Boll. U. M. I.*, Note I, II, (3) **12** (1957) 4, 612—625; (3) **13** (1958) 1, 84—99.
[28] M. Scafati, Sui 6-archi completi di un piano lineare $S_{2,8}$, *Rend. Convegno Reticoli, Palermo* (1957), 128—132.
[29] M. Sce, Sui k_h-archi di indice h, *Rend. Convegno Reticoli, Palermo* (1957), 133—135.
[30] B. Segre, *Lezioni di geometria moderna*, vol. I (Bologna, 1948).
[31] B. Segre, Sulle ovali dei piani lineari finiti, *Rend. Acc. Naz. Lincei* (8) **17** (1954), 141—142.
[32] B. Segre, Ovals in a finite projective plane, *Canadian Journ. of Math.* **7** (1955), 414—416.
[33] B. Segre, Curve razionali normali e k-archi negli spazi finiti, *Ann. di Mat.* (4) **39** (1955), 357—379.
[34] B. Segre, Intorno alla geometria sopra un campo di caratteristica 2, *Revue Fac. S. Univ. Istanbul*, (A) **21** (1956), 97—123.
[35] B. Segre, Sui k-archi nei piani finiti di caratteristica 2, *Revue de Math. Pures et appl.* **2** (1957), 289—300.
[36] B. Segre, Sulle geometrie proitteive finite, *Rend. Convegno Reticoli, Palermo* (1957), 46—61.
[37] B. Segre, Intorno alla geometria sopra un campo di caratteristica $p \neq 0$, con particolare riguardo al caso $p=2$. *Corso C. I. M. E.* (*Roma Istit. Mat. Univ.* 1957).
[38] B. Segre, Sulla geometria sopra un campo a caratteristica, *Archimede*, **10** (1958), 53—60.
[39] B. Segre, On Galois geometries, *Proc. Internat. Congress of Math.*, (1958) 3; 488—499.

[40] B. SEGRE, Intorno alla geometrie di certi spazi aventi un numero finito di punti, *Archimede*, **11** (1959), 1–15.

[41] B. SEGRE, Le geometrie di Galois, *Ann. di Mat.* (6) **48** (1959), 1–96.

[42] B. SEGRE, On complete caps and ovaloids in three-dimensional Galois spaces of characteristic two, *Acta Arithmetica*, **5** (1959), 303–311; 313–330.

[43] B. SEGRE, Le geometrie di Galois- Archi ed ovaloidi-Calotte ed ovaloidi, *Conf. Sem. Mat. Bari* 43–44 (1959), 1–29.

[44] B. SEGRE, Sulla teoria delle equazioni e delle congruenze algebriche, Note I, II. *Rend. Acc. Naz. Lincei* (8) **27** (1959), 155–161; 303–311.

[45] B. SEGRE, Sul numero delle soluzioni di un qualsiasi sistema di equazioni algebriche sopra un campo finito, *Rend. Acc. Naz. Lincei* (8) **28** (1960), 271–277.

[46] B. SEGRE, Sistemi di equazioni nei campi di Galois, *Atti Convegno Firenze sulla teoria dei gruppi* (1960), 66–80.

[47] B. SEGRE, Gli spazi grafici, *Rend. Sem. Mat. Milano*, **30** (1960).

[48] B. SEGRE, *Lectures on modern geometry*, (Roma, 1961).

[49] E. SEIDEM, A theorem in finite projective geometry and an application to statistics, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **1** (1950), 282.

[50] G. TALLINI, Sulle k-calotte degli spazi lineari finiti, Note I, II, *Rend. Acc. Naz. Lincei* (8) **20** (1956), 311–317; 442–446.

[51] G. TALLINI, Sulle k-calotte di uno spazio lineare finito, *Ann. di Mat.* (4) **42** (1956), 119–164.

[52] G. TALLINI, Caratterizzazione grafica delle quadriche ellittiche negli spazi finiti, *Rend. Mat. Univ. Roma*, (5) **16** (1957) 3–4, 328–351.

[53] G. TALLINI, Sui q-archi di un piano lineare finito di caratteristica $p=2$, *Rend. Acc. Naz. Lincei*, (8) **23** (1957), 242–245.

[54] G. TALLINI, Una proprieta grafica caratteristica della superficie di Veronese, negli spazi finiti, Note I, II, *Rend. Acc. Naz. Lincei*, (8) **24** (1958), 19–23; 133–138.

[55] G. TALLINI, Caratterizzazione grafica di certe superficie cubiche di $S_{3,q}$, *Rend. Acc. Naz. Lincei*, Note I, II, (8) **26** (1959), 484–489; 644–648.

[56] G. TALLINI, On caps of kind s in a Galois r-dimensional space, *Acta Arithmetica*, **7** (1961), 19–28.

[57] G. TALLINI, Le ipersuperficie irriducibili d'ordine minimo che invadono uno spazio di Galois, *Rend. Acc. Naz. Lincei* (8) **30** (1961), 706–712.

[58] G. TALLINI, Sulle ipersuperficie irriducibili d'ordine minimo che contengono tutti i punti di uno spazio di Galois $S_{r,q}$. *Rend. Mat. Univ. Roma*, **20** (1961), 431–479.

[59] G. TALLINI, Le geometrie di Galois e le loro applicazioni alla statistica e alla teoria dell'informazione, *Rend. Mat. Univ. Roma*, **19** (1960), 380–400.

[60] G. TALLINI, Intorno alle forme di uno spazio di Galois ed agli sapzi subordinati giacenti su esse, *Rend. Acc. Naz. Lincei* (8) **33** (1962), 421–428.

[61] A. WEIL, Number of solutions of equations in finite fields, *Bull. Amer. Math. Soc.* **55** (1949), 497–508.

[62] A. WEIL–S. LANG, Number of points of varieties in finite fields, *Amer. J. Math.* **76** (1954), 818–827.

VÉGES DIRICHLET-INTEGRÁLLAL RENDELKEZŐ FÜGGVÉNYEKRŐL, (I)*

Írta: LUCIANO DE VITO

Bevezetés

A jelen dolgozat célja olyan feltételek kidolgozása, amelyeket az S_n n-dimenziós euklideszi tér valamely A tartományának Σ határán értelmezett f függvénynek ki kell elégítenie ahhoz, hogy A-ban értelmezett, és ott négyzetesen integrálható elsőrendű deriváltakkal, azaz véges

$$\int_A |\mathrm{grad}\, u|^2\, dx \qquad (dx \equiv dx_1 \dots dx_n).$$

DIRICHLET-integrállal rendelkező u függvény nyoma** legyen.

Egy A-ban értelmezett, $A+\Sigma$-ban nem folytonos, de A-ban alkalmas differenciálhatósági feltételeknek eleget tevő függvény Σ-n értelmezett nyomát különböző módokon lehet definiálni; ezek a definíciók egymással ekvivalensek, amint azt ezen dolgozat első paragrafusában meg fogjuk mutatni. Például lehetséges az u Σ-n értelmezett nyomát definiáló $\gamma(u)$ nyom-operációt a véges DIRICHLET-integrállal rendelkező függvények terében ($A+\Sigma$-ban folytonos függvényekre már előzőleg) definiált ilyen operáció funkcionál-folytatásaként megadni. Ezt a szemléleti módot fogadták el DENY és LIONS az 1955-ben megjelent [6] memoárjukban, majd ezt követte PRODI is (lásd [40]).

Mindazonáltal a jelen dolgozatban inkább azt a nyom-fogalmat fogadtuk el, melyet FICHERA használt 1949-től kezdődően (lásd [11] 44. oldal és [12] 208. oldal), s amelyet azután más szerzők is elfogadtak (lásd [45], [43] a 217. oldaltól, [44] a 236. oldaltól, [22] és [39]). Ezen értelmezés szerint azt mondjuk, hogy az $u(x) \equiv \equiv u(x_1, \dots, x_n)$ függvény nyommal rendelkezik Σ-n (mely elég reguláris hiperfelületdarabokból áll), ha minden, Σ-n definiált, A belseje felé mutató és a következőkben részletezendő alkalmas regularitási feltételeknek eleget tevő $\lambda(\xi)$ irányra, továbbá Σ csaknem minden ξ pontjára

$$\lim_{x \to \xi \ \lambda(\xi) \text{ mentén}} u(x) = f(\xi),$$

ahol az $f(\xi)$ függvény nem függ $\lambda(\xi)$ speciális választásától. Ebben az értelemben minden, A-ban integrálható elsőrendű deriváltakkal bíró függvénynek van nyoma. A nyom-fogalomnak ez a kiterjesztése mutatkozik a legtermészetesebbnek, főként az alkalmazási problémák tekintetében. Valóban, ez az az értelmezés, mely szerint a csupán integrálható sűrűségből, ill. momentumból származó egyszerű ill. kettősréteg-potenciálokról azt lehet mondani, hogy nyommal rendelkeznek Σ-n (lásd [31] II. fej. 14. és 15. §).

* Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa; Serie III. Vol. XII. Fasc. I—II (1958), 55—127. A fordítás itt közölt része az eredeti cikk 1—2. §-át, és a teljes irodalomjegyzéket tartalmazza.

** A fordításban átvesszük az igen szemléletes, de a magyar szakirodalomban ebben az értelemben eddig még nem használt „nyom" kifejezést. Ezen egy függvény peremértékeit értjük. (*A fordító.*)

Az u parciális deriváltjait a FRIEDRICHS- és SZOBOLJEV-féle *gyenge-derivált* értelemben is felfoghatnók, azonban ez az általánosítás minden további nélkül elkerülhető egy olyan tétel értelmében, mely szerint a Σ-n adott f függvény akkor és csakis akkor nyoma valamely, a fenti feltételeknek eleget tevő függvénynek, ha nyoma egy A-ban harmonikus és ott a szóban forgó feltételt kielégítő függvénynek.

Azért, hogy a jelen dolgozatot, amennyire lehet, teljessé és más cikkektől függetlenné tegyük, e jól ismert tételnek az 1. paragrafusban egy új és egyszerű bizonyítását fogjuk adni.

Így, anélkül, hogy a probléma általánosságát megszorítanók, a jelen dolgozatban olyan feltételek kutatására szorítkozunk csupán, amelyeknek valamely, a Σ-n definiált f függvénynek eleget kell tennie ahhoz, hogy A-ban folytonos és ott folytonos és négyzetesen integrálható elsőrendű deriváltakkal rendelkező függvény nyoma legyen.

Legyen $\mathfrak{T}(\Sigma)$ a Σ-n definiált azon valós f függvények összessége, melyek az imént említett tulajdonságokkal rendelkező valós u függvények nyomai, és legyen $\mathfrak{H}(A)$ ezen u függvények osztálya.

Egy szükséges és elégséges feltétel arra, hogy valamely, Σ-n definiált f függvény $\mathfrak{T}(\Sigma)$-hoz tartozzon, lényegében FICHERA munkáiban található. Ez a feltétel a következőképpen fogalmazható meg:

Legyen $\{\omega_k\}$ az 1-nél nem alacsonyabb fokú valós harmonikus polinomok azon sorozata, mely a homogén harmonikus polinomok sorozatából áll elő a következő ortonormalizálással:

$$\int_A \operatorname{grad} \omega_h \times \operatorname{grad} \omega_k \, dx = \delta_h^k.$$

Az $\mathfrak{L}^{(2)}(\Sigma)$ osztálybeli[1] *f függvény akkor és csak akkor tartozik $\mathfrak{T}(\Sigma)$-hoz, ha a $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2$ sor, ahol $c_k = \int_\Sigma f \frac{\partial \omega_k}{\partial \nu} d\sigma$* [2], *konvergens* (lásd [17]).[3]

[1] $\mathfrak{L}^{(2)}(\Sigma)$ az (eléggé regulárisnak feltételezett) Σ-n definiált és ott négyzetesen integrálható valós függvények osztályát jelöli. Szem előtt kell tartani, hogy $\mathfrak{L}^{(2)}(\Sigma)$ tartalmazza a $\mathfrak{T}(\Sigma)$ osztályt (lásd a jelen dolgozat 1. paragrafusát).

[2] $\partial/\partial \nu$ a Σ belső normálisa szerinti deriváltat jelenti Σ valamely pontjában.

[3] Legyen Σ egy HÖLDER-folytonos érintő-hipersíkkal bíró zárt hiperfelület; a feltétel szükségessége azonnal következik az alábbi relációból:

$$c_k = \int_\Sigma f \frac{\partial \omega_k}{\partial \nu} d\sigma = - \int_A \operatorname{grad} u \times \operatorname{grad} \omega_k \, dx.$$

($d\sigma$=elemi hiperfelület-darab mértéke Σ-n).

Ahhoz, hogy az elégségességet bebizonyítsuk, elég tekinteni a következő feltételeknek eleget tevő, véges DIRICHLET-integrállal rendelkező, harmonikus u függvényt:

$$(*) \qquad \int_A \operatorname{grad} u \times \operatorname{grad} \omega_k \, dx = -c_k, \quad \int_\Sigma \gamma(u) \, d\sigma = \int_\Sigma f \, d\sigma.$$

A (*) összefüggésből következik, hogy

$$\int_\Sigma (f - \gamma(u)) \frac{\partial \omega_k}{\partial \nu} d\sigma = 0.$$

Egy, a $\left\{\frac{\partial \omega_k}{\partial \nu}\right\}$ rendszerre vonatkozó teljességi tételből (lásd [13], 27. old., XIX. tétel) következik, hogy $\gamma(u) = f$.

Könnyű belátni, hogy abban az esetben, midőn a tér dimenziószáma 2 és Σ egy egységsugarú kör $\mathcal{C}$ kerülete, a_m-mel és b_m-mel jelölve f FOURIER-együtthatóit, érvényes a következő: $\sum_m c_m^2 = \sum_m m(a_m^2+b_m^2)$, és ily módon ismét a $\mathcal{T}(\mathcal{C})$ függvényeinek HADAMARDtól származó jellemzését (lásd [23]) kapjuk:

$$\sum_{m=1}^{\infty} m(a_m^2 + b_m^2) < +\infty.$$

A Σ-n definiált és $\mathcal{T}(\Sigma)$-hoz tartozó f függvények jellemzésének problémáját újabban PRODI kezdte el ismét vizsgálni (lásd [40]). Mindenekelőtt megmutatta, hogy ez a probléma lokális jellegű; pontosabban, kimutatta, hogy ha $\{U_k\}$ Σ egy lefedése (ahol U_k Σ egy pontjának környezete S_n-ben), és ha a Σ-n adott f függvény minden $\Sigma \cap U_k$ metszetben egy $\mathcal{H}(U_k)$-beli függvény nyoma, akkor $f \in \mathcal{T}(\Sigma)$ (lásd [40], 41. old. 7. tétel).

Felhasználva ezt az észrevételt, PRODI arra az esetre szorítkozik, midőn a hiperfelület, melyen a nyom adva van, egy X hipersík, melynek egyenlete, az általánosság megszorítása nélkül, legyen $x_n = 0$; jelölje továbbá ξ ezen X hipersík pontjait, E_+ pedig az $x_n > 0$ félteret. Ezen feltételek mellett bebizonyítja, hogy *annak szükséges és elegendő feltétele, hogy egy, az X halmazon értelmezett és e halmaz legfeljebb korlátos részhalmazán 0-tól különböző $f \in \mathcal{L}^{(2)}(X)$ függvény valamely, az E_+ féltérben definiált és minden E_+-ban levő korlátos és nyílt A halmaz esetén $\mathcal{H}(A)$-hoz tartozó függvény nyoma legyen, az, hogy $f * |\xi|^{-n+3/2}$ * elsőrendű parciális deriváltjai X-en négyzetesen integrálhatók legyenek.* PRODI ugyanebben a munkájában egy másik jellemzést is adott a $\mathcal{T}(\Sigma)$ halmaz függvényeire, felhasználva a RIEMANN—LIOUVILLE-féle törtrendű derivált fogalmát.

A jelen dolgozat első része a PRODI által adott első, fent idézett feltétel típusába tartozó, legáltalánosabb feltétel előállításával foglalkozik. Pontosabban, felhasználva $\Sigma \cap U_k$-nak egy Ω hipergömb-felületre való leképezését (hipersíkra való leképezés helyett), azt a célt tűzzük ki, hogy meghatározzuk annak szükséges és elegendő feltételeit, hogy a K függvény olyan legyen, hogy f-nek $\mathcal{T}(\Sigma)$-hoz való tartozása ekvivalens legyen az $f * K$ függvény Σ-ban négyzetesen integrálható elsőrendű deriváltjainak létezésével.

Az imént említett, K-ra vonatkozó s a későbbiek során kimondandó tétel alkalmazása gyanánt ezen szerző fentemlített tételével analóg tételeket fogunk levezetni, és nyilvánvaló, hogy a kutatás ilyen alapon történő megindítása után annyi további, ilyen típusú tételt lehet kapni, amennyi csak tetszik.

Analóg szempontból lehet megindítani a $\mathcal{T}(\Sigma)$ PRODI adta második jellemzésének típusába tartozó feltételek kutatását. Ennek ellenére a jelen dolgozatban ezzel nem foglalkozunk.

Ezután igyekeztünk az f-re vonatkozóan olyan szükséges és elegendő feltételeket kapni, melyek — a fentemlített típusúakhoz hasonlóan — az f alkalmas integrál-

* A $*$ a függvények „kompozíció-szorzatát" jelöli, és itt a következő jelentése van:

$$f * |\xi|^{-n+\frac{3}{2}} = \int_X f(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) \left[\sum_{k=1}^{n-1} (x_k - \xi_k)^2\right]^{-\frac{n}{2}+\frac{3}{4}} dx_1, \dots, dx_n \equiv \varphi(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}).$$

(*A fordító.*)

transzformáltjának első deriváltjaira vonatkoznak, de amelyek amazokkal ellentétben, lehetővé teszik ezen deriváltak kiszámítását az integráljel alatti differenciálással. E célból a 3. paragrafusban bebizonyítottunk egy LJAPUNOV-típusú tételt a $\mathcal{T}(\Sigma)$ függvényeinek jellemzésére, mely szerint annak szükséges és elegendő feltétele, hogy egy Σ-n integrálható függvény $\mathcal{T}(\Sigma)$-hoz tartozzék, az, hogy a Σ hiperfelületre vonatkozó f-momentumú kettősréteg-potenciál $\mathcal{H}(A)$-ba tartozzék.

Legyen szabad megjegyeznünk, hogy a FICHERA és PRODI által levezetett szükséges és elegendő feltételek lényegében csak szigorúan elméleti szempontból bírnak jelentőséggel, mivel gyakorlatilag elég nehéz megállapítani, adott f függvényre vonatkozóan, hogy az ezen szerzők adta feltételek teljesülnek-e.

Hasonló kritikát lehet mondani az ebben a dolgozatban bizonyított LJAPUNOV-típusú feltételről is, még akkor is, ha — mint mondottuk — gyakorlatilag lehetséges az első deriváltak kiszámítása, melyeknek négyzetes integrálhatóságára szükség van.

Minthogy a probléma, melynek a jelen dolgozatot szenteltük, mint jól ismeretes, a differenciálegyenletek variációszámítási elméletére való alkalmazásai tekintetében is jelentőséggel bír, igyekeztünk az f függvényre olyan feltételeket felkutatni, melyeknek — bár legyenek csupán elegendő feltételek — az előbbiekkel szemben megvan az az előnyük, hogy teljesülésük vagy nem teljesülésük gyakorlatilag is igazolható.

Amennyire ezt meg tudtam állapítani, az egyetlen ilyen értelmű eredmény MIRANDA-nak köszönhető (lásd [32]). Ő bebizonyította, hogy egy Σ-n definiált f függvény $\mathcal{T}(\Sigma)$-hoz való tartozásának elegendő feltétele az, hogy egyenletesen eleget tegyen egy α-kitevőjű Hölder-feltételnek, ahol $\frac{1}{2}<\alpha\leqq 1$.

Ilyen értelmű feltételt szolgáltat a jelen dolgozat 6. §-ának II. tétele, mely szerint annak elegendő feltétele, hogy a Σ-n értelmezett f függvény $\mathcal{T}(\Sigma)$-hoz tartozzék, az, hogy tetszés szerinti kitevőjű HÖLDER-feltételnek tegyen eleget egyenletesen és hogy — a továbbiakban részletezendő értelemben — korlátos variációjú legyen; sőt, a HÖLDER-feltétel egyenletes DINI-feltétellel is helyettesíthető.

Azt a megszorítást, hogy f korlátos variációjú legyen, abban az esetben, midőn f $\alpha>\frac{1}{2}$ kitevőjű HÖLDER-feltételnek tesz eleget, MIRANDA eredménye alapján el lehet hagyni, azonban általában nem hagyható el akkor, midőn $\alpha\leqq\frac{1}{2}$, amint azt egy példán láthatjuk. Másrészről egy további példa azt mutatja, hogy az a feltétel, hogy f korlátos variációjú, egymagában nem elegendő annak biztosítására, hogy f $\mathcal{T}(\Sigma)$-hoz tartozzék.

MIRANDA feltétele levezethető SZLOBODECKIJ és BABICS [41] egy újkeletű szükséges és elegendő feltételéből,[4] melyet GAGLIARDO [21] terjesztett ki azon függvények osztályára, melyek A-ban p-edik hatványon integrálható elsőrendű deriváltakkal

[4] A kör esetén ($n=2$ esetén lényegében erre szorítkoznak az idézett szerzők) a feltétel a következő:

$$\int_0^1 dt \int_0^{2\pi} \frac{|f(x+t)-f(x)|^2}{t^2}\, dx < +\infty.$$

Ennek bebizonyításához elég arra emlékeztetni, hogy ha f 2π szerint periodikus és $(0, 2\pi)$-ben négyzetesen integrálható, akkor, a_m-mel és b_m-mel jelölve FOURIER-együtthatóit, érvényes a következő reláció:

$$f(x+t)-f(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{m=1}^{\infty}\left\{b_m\cos\left[m\left(x+\frac{t}{2}\right)\right]-a_m\sin\left[m\left(x+\frac{t}{2}\right)\right]\right\}\sin m\frac{t}{2}$$

rendelkező függvények Σ-ra vonatkozó nyomai; mindazonáltal meg kell jegyezni, hogy ha f nem tesz eleget a MIRANDA-féle feltételnek, akkor a SZLOBODECKIJ és BABICS-féle feltétel verifikálása nehezen hajtható végre, ezért azt lehet mondani, hogy ez a feltétel is főként elméleti szempontból érdekes.

A célból, hogy megmutassuk a jelen dolgozat 6. paragrafusában elért eredmények érdekességét az alkalmazásokat illetően, rá akartunk világítani — egy, körben harmonikus függvényre vonatkozó általánosított NEUMANN-probléma kapcsán — egy DE GIORGI által észrevett, félkörben harmonikus függvényekre vonatkozó vegyes problémával kapcsolatos jelenség analogonjára [7], mely szerint a DIRICHLET-integrál végessége egymagában nem biztosítja a probléma megoldásának unicitását. Az itt felhozott példa használható a félkörre vonatkozó vegyes probléma esetében is.

Az imént említett NEUMANN-probléma egy sajátmegoldásának konstrukciója a 6. § II. tételének felhasználásával és egy egyváltozós, adott intervallumban nem csökkenő, majdnem mindenütt eltűnő deriválttal rendelkező, 1-nél kisebb, egyébként tetszés szerint előre megadott α-kitevőjű HÖLDER-feltételnek eleget tevő függvény megszerkesztésével vált lehetségessé.

1. §. A nyom fogalmáról

Ebben a paragrafusban mindenekelőtt megemlítjük a *nyom* néhány definícióját és összehasonlítjuk azokat egymással; ezután megmutatjuk olyan, valamely A tartományban (tartományon nyílt halmazt értünk*) harmonikus függvény létezését,

---

(melyet másodrendű középkonvergencia értelemben kell érteni). Ebből következik, ε-nal jelölve egy tetszés szerinti, 1-nél kisebb pozitív számot, hogy

$$\int_{\varepsilon}^{1} dt \int_{0}^{2\pi} \frac{|f(x+t)-f(x)|^2}{t^2}\, dx = 2 \sum_{m=1}^{\infty} (a_m^2+b_m^2) \int_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\sin mt}{t}\right)^2 dt.$$

Érvényes a következő:

$$\int_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\sin mt}{t}\right)^2 dt = m \int_{m\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{m}{2}} \left(\frac{\sin \tau}{\tau}\right)^2 d\tau;$$

ennélfogva létezik két olyan pozitív A és B szám, hogy $m \leqq r$ $(r \geqq 2)$ esetén

$$Am \leqq \int_{\frac{1}{2r}}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\sin mt}{t}\right)^2 dt \leqq Bm.$$

Teljesül a következő:

$$2A \sum_{m=1}^{r} m(a_m^2+b_m^2) \leqq \int_{\frac{1}{r}}^{1} dt \int_{0}^{2\pi} \frac{|f(x+t)-f(x)|^2}{t^2}\, dx \leqq 2B \sum_{m=1}^{\infty} m(a_m^2+b_m^2)$$

és innen, a HADAMARD-féle jellemzés révén (lásd a 2. paragrafus I. tételét), következik az állítás.

* Felhívjuk a figyelmet arra, hogy a dolgozatban, a szokástól eltérően, nem követeljük meg a tartomány összefüggő voltát. *(A ford.)*

mely véges DIRICHLET-integrállal és az A tartomány Σ határán előre megadott nyommal rendelkezik.

Valamennyi, ezen paragrafusban szereplő eredmény lényegében ismert; némi érdekessége néhány különösen egyszerűnek tűnő bizonyításnak azért talán lesz.

Előrebocsátunk néhány definíciót és megállapodást.

Ha A-val jelöljük az S_n n-dimenziós euklideszi tér egy tartományát és Σ-val az A határát, akkor $\mathfrak{L}^{(p)}(A)$-val az A-ban mérhető, és p-edik hatványon integrálható abszolút értékű valós függvények osztályát[5], $\mathcal{H}(A)$-val az A-ban mérhető és a FRIEDRICHS—SZOBOLJEV-értelemben elsőrendű gyenge deriválttal bíró, A-ban négyzetesen integrálható valós függvények osztályát fogjuk jelölni, és végül $\mathcal{A}(A)$-val azon valós függvények osztályát jelöljük majd, melyek minden egyes változójuk szerint abszolút folytonosak a többi $(n-1)$ változó majdnem minden rögzített értéke mellett, és amelyek azonkívül olyanok, hogy elsőrendű deriváltjaik, amelyek A-ban majdnem mindenütt léteznek és ott mérhetők, A-ban négyzetesen integrálhatók.

Azt fogjuk mondani, hogy valamely függvény egy nyílt vagy zárt tartományban (zárt tartományon a határával kiegészített nyílt halmazt értünk) a C_m osztályhoz tartozik, ha ott folytonos valamennyi deriváltjával együtt az m-edrendűekig bezárólag; viszont azt fogjuk mondani, hogy a C_m^α osztályhoz tartozik, ha eleme a C_m osztálynak és ha az m-edrendű deriváltjai α-kitevőjű $(0<\alpha\leqq 1)$ HÖLDER-feltételnek tesznek eleget egyenletesen.[6]

Ezen kívül azt fogjuk mondani, hogy az S_n tér összefüggő és korlátos A tartománya *m-osztálybeli,* ha Σ határa véges számú folytonos és zárt hiperfelületből áll, s továbbá, ha tetszés szerint kiválasztva a Σ egy x pontját, ebben az x pontban létezik a Σ érintő-hipersíkja és létezik az x pont olyan környezete a Σ hiperfelületen[7], mely *m-osztálybeli reguláris előállítással* adható meg ezen hipersíkra vonatkozóan; ezen azt értjük, hogy felvéve egy $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ derékszögű koordinátarendszert, melynek origója az x pontban van és amelynek ξ_n tengelye a Σ x-pontbeli belső normálisával esik egybe, létezik az x pont egy olyan környezete a Σ-n, amely a következő módon állítható elő:

$$\xi_n = \chi(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}),$$

ahol $\chi(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$ a Σ x-pontbeli érintőhipersíkjának egy nyílt H halmazán értelmezett függvény (a H halmazt az x szóban forgó, Σ-n levő környezete *bázis-halmazának* fogjuk nevezni), mely a $\bar{H}$ halmazon egy C_m-osztálybeli függvénnyel azonos. Ennélfogva minden m-osztálybeli tartomány olyan, hogy Σ határa véges számú $\{U_k\}$ környezettel lefedhető, mely környezetek mindegyike m-osztálybeli reguláris előállítással adható meg, ezen környezetnek egy alkalmasan választott pontjához tartozó érintősíkjára vonatkozóan.

[5] Valamely függvény mérhető és integrálható voltát mindvégig LEBESGUE-értelemben értjük, kivéve azt az esetet, midőn erre külön felhívjuk a figyelmet. Ugyanígy a „majdnem mindenütt", „majdnem minden pontra" kifejezéseket is mindig LEBESGUE-értelemben fogjuk használni.

[6] Egy D halmazon definiált $f(x)$ függvényről azt mondjuk, hogy D-ben α kitevőjű HÖLDER-feltételnek tesz eleget egyenletesen, ha az $|f(x)-f(y)|/|x-y|^\alpha$ hányados (ahol az $|x-y|$ jel az x és az y pontok távolságát jelenti) felső határa véges, midőn az x, y pontpárt tetszés szerint változtatjuk D-ben. Ezt a felső határt f *Hölder-együtthatójának* nevezzük.

[7] Egy x pont valamely D halmazon levő környezetén a D-nek és S_n egy x-et tartalmazó összefüggő tartományának metszetét értjük.

Könnyű belátni, hogy ha A m-osztálybeli ($m \geqq 1$) tartomány, Σ minden x-pontjához hozzá lehet rendelni olyan $\lambda(x)$ egységvektort, mely x-ből indul ki, A belseje felé mutat, s amely ezenkívül a következő feltételeknek tesz eleget:

1°. $\lambda(x)$ komponensei az x pontnak C_1-osztálybeli függvényei az $\{U_k\}$ halmazok mindegyikében,[8]

2°. létezik olyan pozitív ϱ_0 szám, hogy az $y = x + \varrho\lambda(x)$ pont, ahol $0 < \varrho \leqq \varrho_0$ és az x Σ-n változik, A-ban van és Σ-val kölcsönösen egy-egyértelmű megfeleltetésben áll.

A_ϱ-val fogjuk jelölni azt a tartományt, mely az A tartományból az $y = x + r\lambda(x)$ $(x \in \Sigma, 0 < r \leqq \varrho)$ pontok elhagyásával keletkezik; az A_ϱ tartomány nyilvánvalóan 1-osztálybeli tartomány. Ha A 1-osztálybeli tartomány és Σ a határa, akkor $\mathfrak{L}^{(p)}(\Sigma)$-val a Σ-n mérhető és ott p-edik hatványon integrálható abszolút értékű függvények osztályát fogjuk jelölni.

Ezek után azt fogjuk mondani, hogy az 1-osztálybeli A tartományban értelmezett $u(x)$ függvény Σ-n vett (vagy Σ-ra vonatkozó) nyoma a Σ-n definiált $f(x)$ függvény, ha választván egy tetszés szerinti, a fentemlített feltételeknek eleget tevő $\lambda(x)$ egységvektort, Σ majdnem minden ξ pontjára fennáll:

$$\lim_{x \to \xi\ \lambda(\xi)\ \text{mentén}} u(x) = f(\xi)\,^{9}.$$

Nyilvánvaló, hogy ha f és φ Σ-n definiált függvények, melyek egy A-ban definiált u függvény nyomai, akkor ezek a függvények Σ-n majdnem mindenütt egybeesnek.

Evvel kapcsolatban érvényesek a következő tételek:

I. *Ha A 1-osztálybeli tartomány és Σ a határa, akkor minden, $\mathcal{A}(A)$-hoz tartozó $u(x)$ függvénynek létezik a Σ-n vett nyoma, és ez $\mathfrak{L}^{(2)}(\Sigma)$-hoz tartozó függvény* (lásd [43], 217. oldal).

II. *Ha A 1-osztálybeli tartomány és Σ a határa, akkor minden, $\mathcal{H}(A)$-hoz tartozó $u(x)$ függvénynek (esetleg nullmértékű halmazon megváltoztatva az értelmezését) létezik a Σ-n vett nyoma, és ez $\mathfrak{L}^{(2)}(\Sigma)$-hoz tartozó függvény.*

Ez a tétel az előzőből következik egy olyan tétel értelmében, mely szerint $\mathcal{H}(A)$ minden u függvényéhez létezik az $\mathcal{A}(A)$ egy olyan v függvénye, mely A-ban majdnem mindenütt azonos u-val (lásd [33], 195. oldal).

Most idézzük DENY és LIONS definícióját, mely a $\mathcal{H}(A)$ függvényeinek egy 1-osztálybeli A tartomány Σ határára vonatkozó nyomát határozza meg[10].

[8] Azon, hogy $f(x)$ az $\{U_k\}$ sorozat U_k halmazán változó x pontnak C_l-osztálybeli $(0 \leqq l \leqq m)$ függvénye, azt értjük, hogy $x_i = x_i(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$-vel $(i = 1, \ldots, n)$ jelölve az U_k reguláris előállítását szolgáltató egyenleteket, az $f[x_1(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}), \ldots, x_n(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})]$ függvény C_l-osztálybeli az U_k-hoz tartozó bázis-halmazon. Továbbá, ha ez utóbbi függvény mérhető (integrálható) ezen a bázis-halmazon, akkor azt fogjuk mondani, hogy $f(x)$ mérhető (integrálható) U_k-n; végezetül azt fogjuk mondani, hogy $f(x)$ C_l-osztálybeli, mérhető, illetve integrálható Σ-n, ha C_l osztálybeli, mérhető, illetve integrálható az $\{U_k\}$ halmazok mindegyikén.

[9] A nyomnak ezt a definícióját FICHERA adta meg (lásd [11], 44. oldal és [12], 208. oldal) az A tartományra itt kirótt feltételeknél általánosabb feltételek mellett.

[10] Lásd a bevezetésben már említett [45], [43], [44], [22], és [39] műveket. Ezt a definíciót DENY és LIONS az A tartományra általunk kirótt feltételeknél általánosabb feltételek mellett adták meg.

Tekintsük $\mathcal{H}(A)$-t HILBERT-térnek, az ezen osztályhoz tartozó u és v függvények[11] skaláris szorzatát a következő módon definiálva:

$$(u, v) = \int_A [\operatorname{grad} u \times \operatorname{grad} v]\, dx + \int_A uv\, dx.\ ^{12*}$$

Tekintsük továbbá $\mathfrak{L}^{(2)}(\Sigma)$-t HILBERT-térnek, a következő skaláris szorzattal (lásd [23]):

$$(u, v) = \int_\Sigma uv\, d\sigma.$$

Jelöljük V-vel az összes, $A+\Sigma$-ban C_1-osztálybeli függvények sokaságát. Ez a sokaság a $\mathcal{H}(A)$ HILBERT-tér egy bázisa[13].

Jelöljük $\gamma(u)$-val azt a lineáris transzformációt, mely a V sokaság minden egyes függvényéhez azt a Σ-n értelmezett függvényt rendeli hozzá, melyet az u Σ-n felvett értékei definiálnak[14].

A $\mathcal{H}(A)$ V sokaságán ily módon definiált $\gamma(u)$ transzformáció, melynek értékkészletét $\mathfrak{L}^{(2)}(\Sigma)$ tartalmazza, folytonos, tekintettel arra, hogy az A tartományra kirótt jelen feltételeink mellett V minden u függvényére teljesül az

$$\int_\Sigma u^2\, d\sigma \leqq L\left[\int_A u^2\, dx + \left(\int_A u^2\, dx \cdot \int_A |\operatorname{grad} u|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

egyenlőtlenség (lásd [6], 334. oldal). Ekkor, mint ismeretes, létezik egy és csak egy olyan lineáris és folytonos, $\mathcal{H}(A)$-ban definiált transzformáció, melynek értékkészlete $\mathfrak{L}^{(2)}(\Sigma)$-ba esik, s amely V-ben $\gamma(u)$-val azonos. Az így kapott transzformáció, melyet továbbra is γ-val fogunk jelölni, alkotja a $\mathcal{H}(A)$ függvényeire vonatkozó nyomoperációt Σ-n.

Nyilvánvaló, hogy ha az $\mathfrak{L}^{(2)}(\Sigma)$ f és φ függvényei ugyanazon $\mathcal{H}(A)$-beli u függvény nyomai a most részletezett értelemben, akkor azok az $\mathfrak{L}^{(2)}(\Sigma)$ HILBERT-tér

[11] Itt természetesen a tér egyetlen elemének tekintjük mindazokat a $\mathcal{H}(A)$-osztálybeli függvényeket, melyek egymástól nullmértékű halmazon különböznek. Mindazonáltal, az egyszerűség kedvéért, ezen tér elemeit továbbra is a függvény névvel fogjuk jelölni.

[12] Emlékeztetünk rá, hogy $\mathcal{H}(A)$ valamennyi függvénye $\mathfrak{L}^{(2)}(A)$-hoz tartozik.

* A „$\times$" szorzókereszt itt és a következőkben a vektorok skaláris szorzatának jelölésére szolgál. *(A fordító.)*

[13] Lásd [19]. Mint ismeretes, egy topologikus tér bázisának nevezzük a tér minden olyan sokaságát, melynek lezártja egybeesik magával a térrel.

[14] Azon, hogy $\gamma(u)$ lineáris, azt értjük, hogy minden valós a, b számpárra és minden u, v elempárra $\gamma(au+bv) = a\gamma(u)+b\gamma(v)$. $\gamma(u)$ folytonosságán azt értjük, hogy minden olyan $\{u_m\}$ sorozatra, melyre

$$\lim_{m\to\infty} \int_A \left(|\operatorname{grad}(u-u_m)|^2 + |u-u_m|^2\right) dx = 0,$$

teljesül a következő reláció:

$$\lim_{m\to\infty} \int_\Sigma |u-u_m|^2\, d\sigma = 0.$$

Azt a halmazt, melyet $\gamma(u)$ ír le, midőn u befutja a V sokaságot, a γ transzformáció értékkészletének nevezzük.

ugyanazon elemét definiálják, s ennélfogva csak nullmértékű halmaz pontjaiban különböznek egymástól.

Végezetül még egy nyom-fogalmat szeretnénk megemlíteni. Legyen A 2-osztálybeli tartomány, Σ a határa, $u(x)$ egy $\mathfrak{L}^{(2)}(A)$-hoz tartozó függvény, $f(x)$ egy $\mathfrak{L}^{(2)}(\Sigma)$-beli függvény; azt mondjuk, hogy $u(x)$-nek a nyoma a Σ-n az $f(x)$, vagy azt, hogy $u(x)$ *másodrendű középben az* $f(x)$ értékeit veszi fel Σ-n, ha

$$\lim_{\varrho \to 0} \int_{\mathcal{F} A_\varrho} [u(x+\varrho\nu(x))-f(x)]^2 \, d\sigma = 0,$$

ahol $\nu(x)$ a Σ x-pontbeli belső normálisának egységvektora és A_ϱ-nak az előzőekben elmondott jelentése van a $\nu(x)$ egységvektorra vonatkozóan, továbbá $\mathcal{F} A_\varrho$ az A_ϱ tartomány határát jelöli.

Ezen különböző nyom-definíciók közötti viszonyt illetően a következő tételek állnak fenn:

III. *A most idézett első két nyom-definíció ekvivalens, azaz, megtartva a már bevezetett jelöléseket, ha A 1-osztálybeli tartomány és Σ annak határa, akkor* $\mathcal{H}(A)$ *minden rögzített u függvényére, esetleg nullmértékű halmazon megváltoztatva ennek értékeit, és Σ csaknem minden x pontjára teljesül a következő:*

$$\lim_{\varrho \to 0} [u(x)+\varrho\lambda(x)] = \gamma[u(x)].\ ^{15}$$

IV. *Ha A 2-osztálybeli tartomány, Σ a határa,* $u(x)$ *az* $\mathcal{A}(A)$ *egy függvénye és* $f(x)$ *az u nyoma Σ-n*[16], *akkor u Σ-n 2-odrendű középben felveszi az* $f(x)$ *értékeit.*

Megtartva ϱ, ϱ_0, A_ϱ, $\lambda(x)$ előzőleg részletezett jelentését, láthatjuk, hogy az x Σ-n és a ϱ $(0, \varrho_0)$-ban történő változtatásával keletkező $u[x+\varrho\lambda(x)]$ függvény, Σ-nak majdnem valamennyi rögzített x pontjára, ϱ-nak abszolút folytonos függvénye $(0, \varrho_0)$-ban (lásd [33], 195. oldal, 6.3 tétel). Ebből következik $|u[x+\varrho\lambda(x)]|^2$ ϱ-ra vonatkozó egyenletes integrálhatósága az A_ϱ tartomány $\mathcal{F} A_\varrho$ határán[17]. Innen következik, hogy

$$\lim_{\varrho \to 0} \int_{\mathcal{F} A_\varrho} |u[x+\varrho\lambda(x)]-f(x)|^2 \, d\sigma = 0.$$

Minthogy A 2-osztálybeli, $\lambda(x)$ gyanánt felvehetjük $\nu(x)$-t, s innen következik az állítás.

A IV. tételből nyilvánvaló módon következik az alábbi tétel:

V. *Ha A 2-osztálybeli tartomány, Σ a határa,* $u(x)$ *egy* $\mathcal{H}(A)$*-beli függvény,* $f(x)$ *az u nyoma Σ-n (u értékeit ismét legfeljebb nullmértékű halmaz pontjaiban változtatva meg), akkor* $u(x)$ *az* $f(x)$ *értékeit Σ-n másodrendű középben felveszi.*

[15] Nyilvánvaló, hogy ezt az egyenlőséget abban az értelemben kell tekinteni, hogy annak bal oldala a $\gamma(u)$ elemet definiáló függvények egyike. Ezen tétel bizonyítását illetően lásd: [33], 201. oldal, 7.3 tétel.

[16] Mostantól fogva, ha nyomról beszélünk, azt azon két definíció bármelyike szerint értjük, melyeknek ekvivalenciájáról most volt szó.

[17] A szóban forgó egyenletes integrálhatóság bizonyítása megtalálható FICHERA-nál (lásd [12], 212. oldal) abban az esetben, mikor u, azonkívül, hogy eleget tesz az itt kirótt feltételeknek, A-ban C_1-osztálybeli függvény; ez a bizonyítás csaknem változatlanul érvényes marad a jelenlegi feltételek mellett is.

Evvel szemben általában nem igaz, hogy ha egy 2-osztálybeli A tartományban definiált u függvény az A határán másodrendű középben felveszi egy $f(x)$ függvény értékeit, akkor annak $f(x)$ nyoma kell hogy legyen Σ-n.

Ez utóbbi körülmény csak néhány esetben áll fenn; például abban az esetben, amikor u harmonikus A-ban. Sőt, általánosabban az igaz, hogy ha φ egy Σ-n definiált és ott mérhető függvény, s abszolút értékének p-edik hatványa ($p>1$) integrálható Σ-n, továbbá, ha u egy A-ban harmonikus függvény, mely Σ-n p-edrendű középben felveszi φ értékeit, akkor φ az u nyoma Σ-n (lásd [30]).

Most bebizonyítjuk a következő tételt:

VI. *Ha A 1-osztálybeli tartomány és Σ a határa, akkor annak szükséges és elegendő feltétele, hogy egy $\mathfrak{L}^{(2)}(\Sigma)$-hoz tartozó f függvény egy $\mathcal{H}(A)$-beli u függvény nyoma legyen Σ-n, az, hogy létezzék egy $\mathcal{H}(A)$-hoz tartozó, A-ban harmonikus függvény, melynek az f függvény nyoma a Σ-n.*

Nyilvánvalóan elegendő bebizonyítani a szükségességet. Jelöljük $\mathcal{H}$-val azt a HILBERT-teret, melynek minden egyes eleme olyan halmaz, mely $\mathcal{H}(A)$ egy függvényéből és az összes, ezen függvény értékeinek nullmértékű halmazon történő megváltoztatásával és A-ban konstans függvény hozzáadásával keletkező függvényből áll, s amelyben a skaláris szorzat a következő módon van definiálva:

$$(u, v) = \int_A [\operatorname{grad} u \times \operatorname{grad} v]\, dx.$$

Jelöljük U-val a $\mathcal{H}$ azon sokaságát, melynek minden egyes elemét egy, az $A+\Sigma$-ban C_1-osztálybeli és Σ-n eltűnő függvény definiálja. Jelöljük továbbá $\bar{U}$-val ezen sokaság lezártját[18]. Megmutatjuk, hogy $\bar{U}$ teljes sokaság[19], és hogy $\bar{U}$ valamennyi elemét $\mathcal{H}(A)$ egy olyan függvényével lehet megadni, melynek nyoma a Σ-n azonosan eltűnő függvény.

Egyszerűség kedvéért most ugyanavval a jellel fogjuk jelölni az U valamely elemét és az őt definiáló függvények közül azt, amely $A+\Sigma$-ban C_1-osztálybeli és Σ-n eltűnik. Legyen $\{u_m\}$ az U elemeinek egy, a CAUCHY-féle konvergencia-feltételt kielégítő sorozata, azaz olyan, hogy minden pozitív ε számhoz létezik olyan m_ε index, hogy $r, m > m_\varepsilon$ esetén

$$\int_A |\operatorname{grad}(u_r - u_m)|^2\, dx < \varepsilon.$$

Mivel, mint ismeretes, minden $A+\Sigma$-ban C_1-osztálybeli és Σ-n eltűnő u függvényre

$$\int_A u^2\, dx \leqq c \int_A |\operatorname{grad} u|^2\, dx,$$

(ahol c az u választásától független, csak A-tól függő állandó), $r, m > m_\varepsilon$ esetén következik, hogy

$$\int_A |\operatorname{grad}(u_r - u_m)|^2\, dx + \int_A |u_r - u_m|^2\, dx < (1+c)\varepsilon.$$

[18] Egy halmaz *lezártján* az attól zérus távolságra levő pontok összességét értjük.

[19] Egy metrikus tér ($\mathcal{H}$ ilyen) valamely sokaságát *teljesnek* mondjuk, ha minden, ezen sokaság elemeiből álló és a CAUCHY-féle konvergencia-feltételt kielégítő sorozatnak van magához a sokasághoz tartozó határ-eleme.

Innen következik egy olyan $\mathcal{H}(A)$-hoz tartozó u függvény létezése, melyre (lásd [19])

$$\lim_{m\to\infty}\Big[\int_A |u-u_m|^2\,dx+\int_A |\operatorname{grad}(u-u_m)|^2\,dx\Big]=0,$$

vagy

$$\lim_{m\to\infty}\int_A |\operatorname{grad}(u-u_m)|^2\,dx=0.$$

Ezenkívül fennáll a következő:

$$\int_\Sigma [\gamma(u)]^2\,d\sigma=\int_\Sigma [\gamma(u)-u_m]^2\,d\sigma\leqq L\Big[\int_A |u-u_m|^2\,dx+$$

$$+\Big(\int_A |u-u_m|^2\,dx\cdot\int_A |\operatorname{grad}(u-u_m)|^2\,dx\Big)^{\frac{1}{2}}\Big].$$

Ebből következik, hogy

$$\int_\Sigma [\gamma(u)]^2\,d\sigma=0,$$

s innen következik az állítás.

Legyen v a $\mathcal{H}$ egy eleme; jelöljük v_0-lal v-nek az $\bar{U}$ sokaságra vonatkozó vetületelemét[20]. A szokásos megállapodás szerint v-vel fogjuk jelölni a v elemet meghatározó függvények bármelyikét is, és v_0-lal jelöljük a v_0 elemet meghatározó függvények közül azt is, mely Σ-n eltűnik.

Legyen $v_1=v-v_0$. Akkor $\gamma(v_1)=\gamma(v)$.

Most már csak azt kell bebizonyítani, hogy v_1 harmonikus A-ban. Ezért emlékeztetünk arra, hogy

$$\int_A [\operatorname{grad} v_1\times\operatorname{grad} u]\,dx=0,$$

minden $A+\Sigma$-ban C_1-osztálybeli és Σ-n eltűnő u függvényre. Legyen mármost C egy A-ban levő hipergömb és w egy $A+\Sigma$-ban C_1-osztálybeli, $A-C$-ben eltűnő, A-ban szakaszonként folytonos[21] másodrendű deriváltakkal rendelkező függvény. Ekkor a GREEN-tétel értelmében

$$\int_A [\operatorname{grad} v_1\times\operatorname{grad} w]\,dx=-\int_A v_1\Delta_2 w\,dx,$$

s ennek folytán

(1) $$\int_A v_1\Delta_2 w\,dx=0.$$

[20] Mint ismeretes, egy u elem valamely V sokaságra vonatkozó vetületének a V azon v elemét nevezzük, melynek u-tól való távolsága minimális. Ha a V sokaság teljes, ez a vetület-elem létezik és egyértelműen meg van határozva. Emlékeztetünk ezenkívül arra, hogy $(v-u,w)=0$, ha $w\subset V$.

[21] Egy v függvényt valamely A tartományban *szakaszonként folytonosnak* mondunk, ha $A+\mathcal{F}A$ (ahol $\mathcal{F}A$ az A tartomány határa) véges számú, páronként közös belső pontokkal nem bíró $A_1,\ldots,A_m$ zárt tartományra bontható fel oly módon, hogy A_i belsejében a v függvény egy $A_i+\mathcal{F}A_i$-ben folytonos függvénnyel azonos.

φ-vel jelölve egy $A+\Sigma$-ban egyenletes HÖLDER-feltételnek eleget tevő függvényt, tekintsük a következő peremérték-problémát:

$$\begin{cases} \Delta_4 w = \varphi & C\text{-ben}, \\ w = \dfrac{\partial w}{\partial \nu} = 0 & \mathscr{F}C\text{-n } (\mathscr{F}C = C \text{ határa}). \end{cases} \tag{2}$$

Mint ismeretes, ezen probléma megoldása létezik és $C+\mathscr{F}C$-ben C_1-osztálybeli. Tekintsük $\mathfrak{L}^{(2)}(C)$-t HILBERT-térnek, a skaláris szorzatot a következő módon értelmezve:

$$(u, v) = \int_C uv\, dx,$$

és jelöljük $P(u)$-val az $\mathfrak{L}^{(2)}(C)$ u elemének az $\mathfrak{L}^{(2)}(C)$-hez tartozó és C-ben harmonikus függvények sokaságára vonatkozó vetületét. Ha most $s(x, y)$-nal jelöljük a $\Delta_2 v = 0$ egyenletre vonatkozó fundamentális megoldást, és minden $\varphi \in \mathfrak{L}^{(2)}(C)$ függvényre bevezetjük a $T(\varphi) = \int_C \varphi(y) s(x, y)\, dy$[22] jelölést, akkor a (2) probléma w megoldása a következő (lásd [14]):

$$w = T^2(\varphi) - TPT(\varphi). \tag{3}$$

Az $\mathfrak{L}^{(2)}(C)$-ben definiált és $\mathfrak{L}^{(2)}(C)$-beli értékkészlettel rendelkező $T(u)$ és $P(u)$ transzformációk önadjungáltak; ekkor, ha w-vel jelöljük a C-ben a (3) által adottal azonos és $A-C$-ben eltűnő függvényt, az (1)-ből következik:

$$\int_A v_1 \Delta_2 w\, dx = \int_C v_1 [T(\varphi) - PT(\varphi)]\, dx = \int_C \varphi [T(v_1) - TP(v_1)]\, dx = 0.$$

Mivel φ tetszés szerint választható, az adódik, hogy $T(v_1) = TP(v_1)$, s innen $v_1 = P(v_1)$. Innen következik, hogy v_1 harmonikus minden A-ban elhelyezkedő gömbben.

Így a tételt teljesen bebizonyítottuk.

2. §. A K függvényre vonatkozó szükséges és elegendő feltételek

Idézünk néhány, numerikus sorokra vonatkozó fogalmat.

Azt fogjuk mondani, hogy két, valós és nem-negatív tagokból álló sor *c-ekvivalens*, ha egyikük konvergenciájából következik a másik konvergenciája. Ha $\{\alpha_m\}$ és $\{\beta_m\}$ valós számokból álló sorozatok, akkor azt fogjuk mondani, hogy α_m aszimptotikus β_m-mel, ha

$$0 < \liminf_{m\to\infty} \left|\frac{\alpha_m}{\beta_m}\right| \leqq \limsup_{m\to\infty} \left|\frac{\alpha_m}{\beta_m}\right| < +\infty.$$

A következőkben az alábbi lemmát fogjuk felhasználni:

[22] A $T(\varphi)$ függvény, mint ismeretes, $\mathfrak{L}^{(2)}(C)$-hez tartozik.

1. LEMMA. *Legyen* $\{\beta_m\}$ *valós, nem-negatív számokból álló sorozat. Annak szükséges és elegendő feltétele, hogy tetszés szerinti, valós és nem-negatív számokból álló* $\{\gamma_m\}$ *sorozatot megadva, melyre* $\sum_{m=1}^{\infty} \gamma_m < +\infty$, *a* $\sum_{m=1}^{\infty} m\gamma_m$ *és a* $\sum_{m=1}^{\infty} \beta_m \gamma_m$ *sorok c-ekvivalensek legyenek, az, hogy* β_m *m-mel aszimptotikus legyen, vagyis létezzék két olyan pozitív* A_0 *és* B_0 *szám,* $A_0 < B_0$, *hogy elég nagy m-re teljesüljön az* $mA_0 \leqq \beta_m \leqq mB_0$ *egyenlőtlenség.*

Tegyük fel először, hogy nem létezik olyan pozitív A_0 szám, melyre $A_0 \leqq \beta_m/m$ elég nagy m esetén; ebből $\liminf_{m\to\infty} \beta_m/m = 0$ következik. Ekkor létezik olyan, természetes számokból álló és növekvő $\{m_k\}$ sorozat, melyre $\beta_{m_k} < m_k/k$.

Legyen

$$\gamma_m = \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad m \neq m_k, \\ \dfrac{1}{m_k k} & \text{ha} \quad m = m_k. \end{cases}$$

Ekkor azonnal látható, hogy a $\sum_{m=1}^{\infty} \gamma_m$ és a $\sum_{m=1}^{\infty} \beta_m \gamma_m$ sorok konvergensek, míg a $\sum_{m=1}^{\infty} m\gamma_m$ sor divergens; azonban ebben az esetben a $\sum_{m=1}^{\infty} \beta_m \gamma_m$ sor konvergenciájából nem következik a $\sum_{m=1}^{\infty} m\gamma_m$ sor konvergenciája.

Most tegyük fel, hogy nem létezik olyan pozitív B_0 szám, hogy $\beta_m/m \leqq B_0$ elég nagy m esetén; ebből következik, hogy $\limsup_{m\to\infty} \beta_m/m = +\infty$. Akkor létezik olyan, természetes számokból álló növekvő $\{m_h\}$ sorozat, melyre $\beta_{m_h} > h m_h$.

Legyen

$$\gamma_m = \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad m \neq m_h, \\ \dfrac{1}{h^2 m_h} & \text{ha} \quad m = m_h. \end{cases}$$

Ekkor könnyen látható, hogy a $\sum_{m=1}^{\infty} \gamma_m$ és a $\sum_{m=1}^{\infty} m\gamma_m$ sorok konvergensek, míg a $\sum_{m=1}^{\infty} \beta_m \gamma_m$ sor divergens; ezért, ebben az esetben, a $\sum_{m=1}^{\infty} m\gamma_m$ sor konvergenciájából nem következik a $\sum_{m=1}^{\infty} \beta_m \gamma_m$ sor konvergenciája. Ily módon bebizonyítottuk a feltétel szükségességét. Az elégségesség teljesen nyilvánvaló.

Így a lemmát teljesen bebizonyítottuk.

Tekintsük most, bevezetésképpen, az S_2 kétdimenziós euklideszi teret; S_2 általános pontját z-vel fogjuk jelölni; z-nek az origótól mért távolságát ϱ-val, argumentumát pedig ϑ-val jelöljük.

Mindenekelőtt idézzük a HADAMARD-feltételt, arra az esetre vonatkozóan, midőn Σ egy kör határa.

I. *Legyen* Σ *egy z síkbeli, origó középpontú, R sugarú kör kerülete, s a* Σ *ívhosszparamétere és* $f(s)$ *egy* Σ*-n integrálható függvény. Annak szükséges és elegendő fel-*

tétele, hogy $f(s)$ $\mathfrak{F}(\Sigma)$-hoz tartozzék, az, hogy — bevezetve a $\tau = s/R$ jelölést, továbbá a_m-mel és b_m-mel jelölve az $f(R\tau)$ függvénynek a $0 \leqq \tau \leqq 2\pi$ intervallumra vonatkozó Fourier-koordinátáit[23]. — *fennálljon az*

$$(1) \qquad \sum_{m=1}^{\infty} m(a_m^2 + b_m^2) < +\infty.$$

feltétel.

Jelölje D azt a körlemezt, melynek határa Σ. Az $u(z)$ függvényre, mely D-ben harmonikus és a $\mathfrak{H}(D)$ osztályhoz tartozik, továbbá melynek Σ-n vett nyoma az f függvény, fennáll a következő, D-ben egyenletesen konvergens sorfejtés:

$$u(z) = \frac{a_0}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{m=1}^{\infty} (\varrho/R)^m (a_m \cos m\vartheta + b_m \sin m\vartheta)\ ^{24}$$

Innen, ha f $\mathfrak{F}(\Sigma)$-hoz tartozik, következik, hogy $\sum_{m=1}^{k} m(a_m^2 + b_m^2) \leqq \int_D |\text{grad } u^2| \, dx$, bármekkora legyen is k, és így a feltétel szükségességét bebizonyítottuk.

Ellenben, ha $\sum_{m=1}^{\infty} m(a_m^2 + b_m^2) < +\infty$, akkor, u_n-nel jelölve az előbb leírt sor n-edik részletösszegét, a következő áll fenn:

$$\int_D |\text{grad}\,(u_{n+p} - u_n)|^2 \, dx = \sum_{m=n+1}^{n+p} m(a_m^2 + b_m^2),$$

és innen könnyen következik a feltétel elegendő volta.

Legyen Σ egy 1-osztálybeli korlátos tartomány határa, s a Σ ívhosszparamétere, L pedig Σ hossza; azt fogjuk mondani, hogy a Σ-n definiált és ott integrálható $w(s)$ függvény Σ-n *négyzetesen integrálható gyenge deriválttal* rendelkezik, ha létezik olyan, Σ-n négyzetesen integrálható $\varphi(s)$ függvény, hogy minden, Σ-n C_2-osztálybeli $v(s)$ függvényre teljesül a következő:

$$\int_\Sigma w(s) \frac{dv(s)}{ds} \, ds = -\int_\Sigma \varphi(s) v(s) \, ds.$$

[23] Az integrálható $\varphi(\tau)$ függvény $0 \leqq \tau \leqq 2\pi$ intervallumra vonatkozó *Fourier-koordinátáin* a következő számokat értjük:

$$a_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} \varphi(\tau) \, d\tau,$$

$$a_m = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} \varphi(\tau) \cos m\tau \, d\tau, \qquad b_m = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} \varphi(\tau) \sin m\tau \, d\tau \qquad (m > 0).$$

[24] Ahhoz, hogy igazoljuk ezt a sorfejtést, elég arra emlékeztetni, hogy

$$\lim_{\varrho \to R} \int_0^{2\pi} u(\varrho, \vartheta) e^{im\vartheta} \, d\vartheta = \int_0^{2\pi} f(R\tau) e^{im\tau} \, d\tau.$$

A Σ-n definiált azon $w(s)$ függvények osztályát, melyek Σ-n integrálhatóak és amelyek Σ-n négyzetesen integrálható gyenge deriválttal rendelkeznek, $\mathfrak{B}(\Sigma)$-val fogjuk jelölni.

Mármost bebizonyíthatjuk a következő tételt:

II. *Legyen R egy pozitív szám és $K(t)$ egy $2\pi R$ periódusú, a $(0, 2\pi R)$ intervallumban integrálható periódikus függvény. Legyen $\vartheta = t/R$, s jelöljük a_m-mel és b_m-mel $(m=0, 1, \ldots)$ a $K(R\vartheta)$ függvény $0 \leqq \vartheta \leqq 2\pi$ intervallumra vonatkozó Fourier-koordinátáit. Ha C egy R sugarú kör kerülete, s a C ívhosszparamétere, $f(s)$ egy C-n definiált és ott integrálható függvény, akkor annak szükséges és elegendő feltétele, hogy $f(s)$ $\mathfrak{F}(C)$ osztályhoz való tartozása ekvivalens legyen a*

$$\Phi(t) = f * K = \int_C f(s) K(t-s)\, ds^{25}$$

függvény $\mathfrak{B}(C)$ osztályhoz való tartozásával, az, hogy $a_m^2 + b_m^2$ $1/m$-mel legyen aszimptotikus.

A $\Phi(t)$ függvény $\mathfrak{B}(C)$ osztályhoz való tartozása, mint az előbb mondottuk, azt jelenti, hogy létezik olyan, C-n definiált és ott négyzetesen integrálható $\varphi(t)$ függvény, melyre

$$\int_C \Phi(t) \frac{dv(t)}{dt}\, dt = -\int_C \varphi(t) v(t)\, dt \tag{2}$$

valamennyi, C-n C_2-osztálybeli $v(t)$ függvényre.

Azonnal látható, hogy a (2) rendszer a következővel azonos:

$$\frac{im}{R} \int_C \Phi(t) e^{im\frac{t}{R}}\, dt = -\int_C \varphi(t) e^{im\frac{t}{R}}\, dt \qquad (m=0, 1, \ldots). \tag{3}$$

Legyen

$$\frac{1}{R} \int_C K(t) e^{im\frac{t}{R}}\, dt = c_m, \quad \frac{1}{R} \int_C f(s) e^{im\frac{s}{R}}\, ds = \tau_m.$$

Az integrálás sorrendjének felcserélésével a következőt kapjuk:

$$\int_C e^{im\frac{t}{R}}\, dt \int_C f(s) K(t-s)\, ds = R^2 c_m \tau_m,$$

és így

$$\left| \frac{im}{R} \int_C e^{im\frac{t}{R}}\, dt \int_C f(s) K(t-s)\, ds \right|^2 = R^2 m^2 |c_m|^2 |\tau_m|^2 =$$

$$= \pi m^2 R^2 |\tau_m|^2 (a_m^2 + b_m^2).^{26}$$

[25] Azonnal látható, hogy $f(s)K(t-s)$, mint s függvénye, a $(0, 2\pi R)$ intervallumban integrálható majdnem minden, ezen intervallumban rögzített t-re, és hogy $\int_C f(s)K(t-s)ds$ t-nek a $(0, 2\pi R)$ intervallumban integrálható függvénye.

[26] Valóban, $m \geqq 1$ esetén $|c_m|^2 = \pi(a_m^2 + b_m^2)$.

Ekkor annak szükséges és elegendő feltétele, hogy a (3) rendszer egy $\varphi(t)$ megoldása létezzék, az, hogy $\sum_{m=1}^{\infty} m^2|\tau_m|^2(a_m^2+b_m^2) < +\infty$ legyen. Másrészről az I. tételből következik, hogy az f függvény $\mathcal{T}(C)$ osztályhoz való tartozásának szükséges és elegendő feltétele a következő: $\sum_{m=1}^{\infty} m|\tau_m|^2 < +\infty$. Ezen két feltétel összehasonlításából azt kapjuk, hogy ha $a_m^2+b_m^2$ aszimptotikus $1/m$-mel, akkor az egyik sor konvergenciája maga után vonja a másik sor konvergenciáját, és viszont. Ily módon bebizonyítottuk a feltétel elegendő voltát.

Ha másrészről a $\sum_{m=1}^{\infty} m^2|\tau_m|^2(a_m^2+b_m^2)$ és a $\sum_{m=1}^{\infty} m|\tau_m|^2$ sorok c-ekvivalensek minden, C-n integrálható f függvényre vonatkozóan, akkor speciálisan ilyenek lesznek minden, C-n négyzetesen integrálható függvényre vonatkozóan, vagyis minden olyan $\{|\tau_m|^2\}$ sorozatra vonatkozóan is, melyre $\sum_{m=1}^{\infty} |\tau_m|^2 < +\infty$, és akkor az 1. lemma alapján azt kapjuk, hogy $a_m^2+b_m^2$ $1/m$-mel aszimptotikus. Ily módon bebizonyítottuk a feltétel szükségességét.

E tétel tetszés szerinti, nem köralakú sík-tartományra való kiterjesztését a következő tétel szolgáltatja:

III. *Legyen A az (x, y) sík egy* 1*-osztálybeli tartománya, L az A határát képező Σ görbe hossza, s a Σ ívhosszparamétere, f egy Σ-n integrálható függvény, $K(t)$ egy L periódusú, a* $(0, L)$ *intervallumban integrálható periodikus függvény.*

Bevezetve a $\vartheta = \frac{2\pi t}{L}$ jelölést, jelöljük a_m-mel és b_m-mel a $K\left(\frac{L\vartheta}{2\pi}\right)$ függvény Fourier-koordinátáit a $(0, L)$ *intervallumra vonatkozóan. Akkor annak szükséges és elegendő feltétele, hogy $f(s)$ $\mathcal{T}(\Sigma)$-hoz való tartozása $\Phi(t) = f * K = \int_{\Sigma} f(s)K(t-s)\,ds$ $\mathcal{B}(\Sigma)$-hoz való tartozásával legyen ekvivalens, az, hogy $a_m^2+b_m^2$ $1/m$-mel legyen aszimptotikus.*

Minthogy A 1-osztálybeli tartomány, létezik olyan $\lambda(\zeta)$ egységvektor, melynek kezdőpontja a Σ ζ pontja, mely A belseje felé mutat, és amelynek komponensei Σ-n C_1-osztálybeli függvények, továbbá létezik olyan pozitív ϱ_0 szám, hogy a $\zeta+\varrho\lambda(\zeta)$ ponthalmaz, minden $(0, \varrho_0)$-ban rögzített ϱ-ra, midőn ζ befutja a Σ-t, A-ban helyezkedik el és Σ-val kölcsönösen egyértelmű megfeleltetésben van. Feltesszük, hogy $\varrho_0 < L/4\pi$. Jelölje $\zeta(s)$ a Σ azon pontját, melynek ívhosszparamétere s, és legyen A' a $\zeta(s)+\varrho\lambda[\zeta(s)]$ pont által leírt halmaz, midőn s a $0 \leqq s < L$ intervallumban és ϱ a $0 \leqq \varrho < \varrho_0$ intervallumban változik.

Ezenkívül jelöljük C-vel az origóval mint középponttal rendelkező $L/2\pi$ sugarú kör kerületét, s-sel a C ívhosszparaméterét, $z(s)$-sel a C s paraméterű pontját, $\nu(z)$-vel a C z-beli belső normálisának egységvektorát, D-vel azt a körlemezt, melynek C a határa és D'-vel azt a halmazt, melyet a $z(s)+\varrho\nu[z(s)]$ pont ír le, midőn s a $0 \leqq s < L$ intervallumban és ϱ a $0 \leqq \varrho < \varrho_0$ intervallumban változik. Legyenek $x(\varrho, s), y(\varrho, s)$ a $z(s)+\varrho\nu[z(s)]$ pont, és $\zeta(\varrho, s), \eta(\varrho, s)$ a $\zeta(s)+\varrho\lambda[\zeta(s)]$ pont koordinátái.

Az $x=x(\varrho, s)$, $y=y(\varrho, s)$ egyenletek kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést létesítenek a D' pontjai és a $0 \leqq \varrho < \varrho_0$, $0 \leqq s < L$ feltételekkel definiált téglalap pontjai között.

Jelöljük $s=s(x, y)$-nal és $\varrho=\varrho(x, y)$-nal az inverz megfeleltetés egyenleteit; ekkor nyilvánvaló, hogy $\zeta=\zeta[\varrho(x, y), s(x, y)]$, $\eta=\eta[\varrho(x, y), s(x, y)]$ egy A' és D' között fennálló 1-osztálybeli homeomorfizmus egyenletei[27]. Ezen egyenleteket röviden a következő módon fogjuk írni: $\xi=\xi(x, y)$, $\eta=\eta(x, y)$, míg az inverz transzformáció egyenletei a következők lesznek: $x=x(\xi, \eta)$, $y=y(\xi, \eta)$.

Ezek előrebocsátása után áttérünk a tétel bizonyítására.

Tegyük fel, hogy az $f(s)$ függvény, a C körvonalon definiált függvényként tekintve, a $\mathfrak{T}(C)$ osztályhoz tartozik. Jelöljük $u(z)$-vel azt a D körben definiált függvényt, mely $\mathfrak{H}(D)$-hez tartozik, D-ben harmonikus és C-re vonatkozó nyoma az $f(s)$ függvény. Az $(A'-\Sigma)$-ban definiált $v(\zeta)=u[x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)]$ függvény $\mathfrak{H}(A'-\Sigma)$-hoz tartozik, és Σ-n vett nyoma az $f(s)$ függvény. Legyen $w(\zeta)$ egy A-ban C_1-osztálybeli függvény, mely $(A'-\Sigma)$-ban $v(\zeta)$-val azonos (ilyen függvény egzisztenciáját könnyű igazolni). A $w(\zeta)$ függvény nyilvánvalóan $\mathfrak{H}(A)$-hoz tartozik és Σ-n vett nyoma az f függvény.

Megfordítva, tegyük fel, hogy $f(s)$ $\mathfrak{T}(\Sigma)$-hoz tartozik, és jelöljük $w(\zeta)$-val azt az A-ban harmonikus függvényt, mely $\mathfrak{H}(A)$-hoz tartozik és amelynek Σ-n vett nyoma az f függvény. Ekkor a $(D'-C)$-ben definiált $\omega(\zeta)=w[\xi(x, y), \eta(x, y)]$ függvény $\mathfrak{H}(D'-C)$-hez tartozik és C-n vett nyoma az $f(s)$ függvény. Legyen $u(z)$ egy D-ben C_1-osztálybeli függvény, mely $(D'-C)$-ben $\omega(z)$-vel azonos. Ez a függvény $\mathfrak{H}(D)$-hez tartozik és C-n vett nyoma az $f(s)$ függvény.

Ily módon bebizonyítottuk, hogy $f(s)$ $\mathfrak{T}(\Sigma)$-hoz való tartozása ekvivalens ezen függvény $\mathfrak{T}(C)$-hez való tartozásával. Így, az előző tétel értelmében, az állítást igazoltuk.

Most példaként megadunk néhány olyan $K(t)$ függvényt, mely eleget tesz az előző tételben kirótt feltételnek.

Az első példát az a függvény szolgáltatja, mely a $(-L/2, L/2)$ intervallumban az $|t|^{-\frac{1}{2}}$ függvénnyel azonos, s amelyet ezen intervallumon kívül úgy definiálunk, hogy periodikus legyen.

Mivel $|t|^{-\frac{1}{2}}$ páros függvény, fennáll a következő: $\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{L\vartheta}{2\pi}\right|^{-\frac{1}{2}} \sin m\vartheta\, d\vartheta = 0;$

továbbá

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{L\vartheta}{2\pi}\right|^{-1/2} \cos m\vartheta\, d\vartheta = 2\int\limits_{0}^{\pi}\left|\frac{L\vartheta}{2\pi}\right|^{-1/2} \cos m\vartheta\, d\vartheta = 2\left(\frac{2\pi}{L}\right)^{1/2}\int\limits_{0}^{\pi} \vartheta^{-1/2} \cos m\vartheta\, d\vartheta.$$

Legyen $m\vartheta=\sigma^2$, akkor

$$\int\limits_{0}^{\pi} \vartheta^{-1/2} \cos m\vartheta\, d\vartheta = \frac{2}{\sqrt{m}}\int\limits_{0}^{\sqrt{m\pi}} \cos \sigma^2\, d\sigma.$$

[27] Azon, hogy $x=x(\xi, \eta)$, $y=y(\xi, \eta)$ a (ξ, η) sík A halmaza és az (x, y) sík D halmaza közötti 1-osztálybeli homeomorfizmus egyenletei, azt értjük, hogy ezen egyenletek kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést hoznak létre az A és a B pontjai között, továbbá, hogy az $x(\xi, \eta)$, $y(\xi, \eta)$ függvények A-ban C_1-osztálybeliek, és ezen függvények JACOBI-determinánsa sehol sem tűnik el.

Figyelembe véve a

$$\lim_{m\to\infty}\int_0^{\sqrt{m\pi}}\cos\sigma^2\,d\sigma=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

határérték-relációt, azt kapjuk, hogy a $0<\varepsilon<\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ korlátozásnak eleget tevő rögzített ε-hoz létezik olyan m_ε természetes szám, hogy $m>m_\varepsilon$ esetén

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}-\varepsilon\leqq\int_0^{\sqrt{m\pi}}\cos\sigma^2\,d\sigma\leqq\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}+\varepsilon,$$

és így, ha $m>m_\varepsilon$, akkor

$$\frac{2}{\sqrt{m}}\sqrt{\frac{2\pi}{L}}\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}-2\varepsilon\right)\leqq\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{L\vartheta}{2\pi}\right|^{-1/2}\cos m\vartheta\,d\vartheta\leqq\frac{2}{\sqrt{m}}\sqrt{\frac{2\pi}{L}}\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}+2\varepsilon\right).$$

Evvel igazoltuk az állítást.

Második példaként tekintsük a $K(t)=\left(1-\cos\frac{2\pi t}{L}\right)^{-\frac{1}{4}}$ függvényt. Ahhoz, hogy bebizonyítsuk, hogy ez a függvény eleget tesz az előző tételben kirótt feltételeknek, elegendő megjegyezni, hogy a

$$\sqrt{\frac{2\pi}{L}}\left(1-\cos\frac{2\pi t}{L}\right)^{-1/4}-2^{1/4}|t|^{-1/2}=\sqrt{\frac{2\pi}{L}}[(1-\cos\vartheta)^{-1/4}-2^{1/4}|\vartheta|^{-1/2}]$$

különbség első deriváltjával együtt folytonos a $(-\pi,\pi)$ intervallumban.

Ebből következik olyan pozitív $B>0$ szám létezése (lásd [37], 263. oldal), melyre

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi}[(1-\cos\vartheta)^{-1/4}-2^{1/4}|\vartheta|^{-1/2}]\cos m\vartheta\,d\vartheta\right|\leqq B\frac{1}{m}.$$

Másrészről, mint előbb láttuk, létezik két olyan pozitív A' és A'' szám, melyekre

$$A'\frac{1}{\sqrt{m}}\leqq 2^{1/4}\int_{-\pi}^{\pi}|\vartheta|^{-1/2}\cos m\vartheta\,d\vartheta\leqq A''\frac{1}{\sqrt{m}}.$$

Innen következik két olyan pozitív B' és B'' szám létezése, hogy

$$B'\frac{1}{\sqrt{m}}\leqq\int_{-\pi}^{\pi}(1-\cos\vartheta)^{-1/4}\cos m\vartheta\,d\vartheta\leqq B''\frac{1}{\sqrt{m}}.$$

Ezenkívül szem előtt tartva, hogy $\int_{-\pi}^{\pi}(1-\cos\vartheta)^{-\frac{1}{4}}\sin m\vartheta\,d\vartheta=0$, kapjuk az állítást.

Bebizonyítjuk a következő tételt is:

IV. *Legyen A a z sík egy 2-osztálybeli tartománya, L az A határát képező Σ görbe hossza, s a Σ ívhosszparamétere, $z=z(s)$ a Σ paraméteres egyenlete az s változóra vonatkozóan, és végül legyen $f(s)$ egy $\mathfrak{L}^{(3)}(\Sigma)$ osztályhoz tartozó függvény. Ekkor annak szükséges és elegendő feltétele, hogy f $\mathfrak{T}(\Sigma)$-hoz tartozzék, az, hogy a $\Phi^*(t) = \int\limits_{\Sigma} f(s)\,|z(s)-z(t)|^{-\frac{1}{2}}ds$ függvény Σ-n négyzetesen integrálható gyenge deriválttal rendelkezzék*[28].

Figyelembe véve, hogy a $K_0(t)$ függvény, melyet úgy definiálunk, hogy $(-L/2, L/2)$-ben a $|t|^{-\frac{1}{2}}$ függvénnyel azonos és egyébként pedig periodikus legyen, eleget tesz a III. tétel feltételének, állításunk bebizonyításához nyilvánvalóan elegendő megmutatni, hogy $\Phi^*(t)$ $\mathfrak{B}(\Sigma)$ osztályhoz való tartozása ekvivalens a $\Phi(t) = \int\limits_{\Sigma} f(s)\cdot K_0(s-t)\,ds$ függvény ugyanezen osztályhoz való tartozásával. Ezért elegendő igazolni, hogy a $\Phi^*(t)-\Phi(t)$ függvény a $\mathfrak{B}(\Sigma)$ osztályhoz tartozik, minthogy ez az osztály lineáris, ami azonnal látható.

Felhasználva azt a feltételt, hogy Σ 2-osztálybeli, könnyű bebizonyítani két olyan pozitív A_0 és B_0 szám létezését, hogy bevezetve a $|z(s)-z(t)|^{-\frac{1}{2}}-K_0(s-t) = H(s,t)$ jelölést, $|s-t| \neq kL/2$ esetén

$$\left|\frac{\partial}{\partial t} H(s,t)\right| \leqq A_0 K_0(s-t)+B_0$$

teljesüljön; ezenkívül könnyű belátni, hogy minden rögzített s-re teljesül a következő: $\lim\limits_{t\to s} H(s,t)=0.$

Ezen relációk felhasználásával azt kapjuk, hogy ha $v(t)$ tetszésszerinti, C_2-osztálybeli függvény Σ-n, akkor

$$\int\limits_{\Sigma} f(s)\,ds \int\limits_{\Sigma} H(s,t)\frac{dv(t)}{dt}\,dt = -\int\limits_{\Sigma} f(s)\,ds \int\limits_{\Sigma} \frac{\partial H(s,t)}{\partial t}\,v(t)\,dt.$$

A kettős integrálokra vonatkozó FUBINI-tétel (lásd [18], 375., 377. oldal) értelmében a következő teljesül:

$$\int\limits_{\Sigma\times\Sigma} f(s)\,H(s,t)\frac{dv}{dt}\,ds\,dt = -\int\limits_{\Sigma\times\Sigma} f(s)\frac{\partial H(s,t)}{\partial t}\,v(t)\,ds\,dt,$$

és így

$$\int\limits_{\Sigma}\frac{dv}{dt}\,dt\int\limits_{\Sigma} f(s)\,H(s,t)\,ds = -\int\limits_{\Sigma} v(t)\,dt\int\limits_{\Sigma} f(s)\frac{\partial H(s,t)}{\partial t}\,ds,$$

vagyis

$$\int\limits_{\Sigma}[\Phi^*(t)-\Phi(t)]\frac{dv}{dt}\,dt = -\int\limits_{\Sigma} v(t)\,dt\int\limits_{\Sigma} f(s)\frac{\partial H(s,t)}{\partial t}\,ds.$$

[28] Az a feltétel, hogy f $\mathfrak{L}^{(3)}(\Sigma)$-hoz tartozzék, szükséges f $\mathfrak{T}(\Sigma)$-hoz való tartozásához; sőt, az is igaz, hogy ha $f\in\mathfrak{T}(\Sigma)$, akkor tetszés szerinti p-re f $\mathfrak{L}^{(p)}(\Sigma)$-hoz tartozik, mint az S. L. SZOBOLJEV egy eredményéből következik (lásd [42]).

Tekintettel arra, hogy $f(s)$ $\mathfrak{L}^{(3)}(\Sigma)$-hoz és $K_0(s-t)$ $\mathfrak{L}^{(3/2)}(\Sigma)$-hoz tartozik, a SCHWARZ—HÖLDER egyenlőtlenség felhasználásával a következőt kapjuk:

$$\left|\int_\Sigma f(s)\frac{\partial H(s,t)}{\partial t}\,ds\right| \leqq A_0\int_\Sigma |f(s)K_0(s-t)|\,ds + B_0\int_\Sigma |f(s)|\,ds \leqq$$

$$\leqq A_0\Big(\int_\Sigma |f(s)|^3\,ds\Big)^{1/3}\Big(\int_\Sigma |K_0(s-t)|^{3/2}\,ds\Big)^{2/3} + B_0\int_\Sigma |f(s)|\,ds.$$

Innen következik, hogy $\int_\Sigma f(s)\frac{\partial H(s,t)}{\partial t}ds$ t-nek korlátos függvénye Σ-n és így négyzetesen integrálható. Ez mutatja, hogy $\Phi^*(t)-\Phi(t)$ $\mathfrak{B}(\Sigma)$-hoz tartozik.

Mielőtt eredményeinket kiterjesztenők az S_n n-dimenziós euklideszi tér esetére, idéznünk kell a hiperszférikus függvények néhány tulajdonságát.

Vezessük be az S_n térben a $(\varrho, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-2}, \vartheta)$ polárkoordinátákat, a következő helyettesítéssel[29]:

$$\begin{array}{lll}
x_1 &= \varrho\cos\varphi_1 & \\
x_2 &= \varrho\sin\varphi_1\cos\varphi_2 & \varrho\geqq 0\\
\multicolumn{3}{l}{\ldots\ldots\ldots\ldots} \\
x_{n-2} &= \varrho\sin\varphi_1\sin\varphi_2\ldots\cos\varphi_{n-2} & 0\leqq\varphi_i\leqq\pi\\
x_{n-1} &= \varrho\sin\varphi_1\sin\varphi_2\ldots\sin\varphi_{n-2}\cos\vartheta & 0\leqq\vartheta<2\pi\\
x_n &= \varrho\sin\varphi_1\sin\varphi_2\ldots\sin\varphi_{n-2}\sin\vartheta &
\end{array}$$

Jelöljünk $Q_m(x_1, \ldots, x_n)$-nel egy m-edfokú homogén harmonikus polinomot; m-edrendű hiperszférikus függvényeknek nevezzük mindazokat az $Y_m(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-2}, \vartheta)$ függvényeket, melyeket az Ω egység-hipergömbfelületen a

$$Q_m(x_1, \ldots, x_n) = \varrho^m Y_m(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-2}, \vartheta) \qquad (\varrho>0,\ m=0, 1, \ldots)$$

reláció definiál (lásd [2], 204. oldal).

Ezek a függvények az $n=3$ esetben azonosak a gömb-, vagy másnéven LAPLACE-függvényekkel (lásd [37], 180. oldal); $n>3$ esetén pedig hasonló tulajdonságokkal rendelkeznek, mint a LAPLACE-függvények. Az Y_m függvények a

$$(4)\qquad m(m+n-2)Y_m + \frac{1}{\sin^2\varphi_1\ldots\sin^2\varphi_{n-2}}\frac{\partial^2 Y_m}{\partial\vartheta^2} +$$

$$+\sum_{h=1}^{n-2}\frac{1}{\sin^2\varphi_1\ldots\sin^2\varphi_{h-1}}\,\frac{1}{\sin^{(n-1-h)}\varphi_h}\cdot\frac{\partial}{\partial\varphi_h}\left(\sin^{(n-1-h)}\varphi_h\frac{\partial Y_m}{\partial\varphi_h}\right) = 0 \quad (m=0, 1, \ldots)$$

parciális differenciálegyenlet megoldásai.

[29] Ebben a görbe vonalú koordinátarendszerben az Ω egység-hipergömbfelület hiperfelületi mértékeleme a következő: $d\sigma = \sin^{n-2}\varphi_1\sin^{n-3}\varphi_2\ldots\sin\varphi_{n-2}d\varphi_1\ldots d\varphi_{n-2}d\vartheta$. Ezért, R-rel jelölve a $0\leqq\varphi_k\leqq\pi$ $(k=1, \ldots, n-2)$, $0\leqq\vartheta<2\pi$ egyenlőtlenségekkel definiált halmazt, azon, hogy f integrálható (négyzetesen integrálható, stb.) Ω-n, azt értjük, hogy az

$$f[\cos\varphi_1, \sin\varphi_1\cos\varphi_2, \ldots, \sin\varphi_1\ldots\sin\varphi_{n-2}\sin\vartheta]$$

függvény integrálható (négyzetesen integrálható, stb.) R-en arra a mértékre vonatkozóan, melyet az R-ben elhelyezkedő B BOREL-halmazokon az $\int_B \sin^{n-2}\varphi_1\ldots\sin\varphi_{n-2}d\varphi_1\ldots d\varphi_{n-2}d\vartheta$ LEBESGUE-integrál definiál.

A hiperszférikus függvények további tulajdonságai, melyeket fel fogunk használni, az alábbiak:

1°. az m-edrendű hiperszférikus függvények halmaza lineáris és véges dimenziójú, s ezen dimenziót μ_m-mel fogjuk jelölni; vagyis a nem-negatív m egész számra vonatkozóan csak μ_m darab lineárisan független m-edrendű hiperszférikus függvényt lehet megadni, valamennyi többi ezek lineáris kombinációja;

2°. két különböző rendű hiperszférikus függvény ortogonális Ω-n, vagyis

$$\int_{\Omega} Y_m Y_r \, d\sigma = 0 \qquad (m \neq r); \tag{5}$$

3°. minden, Ω-n definiált s ott négyzetesen integrálható $f(x)$ függvény előállítható az $f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} Y_m(x)$ alakban, ahol a jobb oldalon álló sor Ω-n az $\mathfrak{L}^{(2)}$ tér metrikájában konvergál, és egyenletesen konvergál Ω-n, ha f C_1-osztálybeli;

4°. ha P_m^s-mel ($m = 0, 1, \ldots; s = 1, 2, \ldots$) jelöljük az

$$(1 - 2at + a^2)^{-s/2} = \sum_{m=0}^{\infty} a^m P_m^s(t)$$

relációval (ahol $|2at| + |a|^2 < 1$) definiált GEGENBAUER-polinomokat, és ha Ω minden (x, y) pontpárjára bevezetjük a $C(x,y) = \dfrac{\sum_{k=1}^{n} x_k y_k}{|x|\,|y|}$[30] jelölést, akkor minden, Ω-n definiált és ott folytonos $f(x)$ függvény esetén $\int_{\Omega} f(x) P_m^{n-2}[C(x,y)]\, d_x\sigma$, mint y függvénye, m-edrendű hiperszférikus függvény;

5°. ha f az Ω-n definiált és ott integrálható függvény, akkor az az egységhipergömb belsejében harmonikus függvény, melynek Ω-n vett nyoma az f, a következőképp fejezhető ki:

$$u = \alpha_n \sum_{m=0}^{\infty} (2m + n - 2) \varrho^m \int_{\Omega} f(y) P_m^{n-2}[C(x,y)]\, d_y\sigma,$$

ahol

$$\alpha_n = \Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right) \Big/ 4\pi^{n/2}.$$ [31]

Innen, figyelembe véve, hogy

$$\int_D |\mathrm{grad}\, u|^2 \, dx = - \int_{\mathscr{F}D} u \frac{\partial u}{\partial \nu} \, d\sigma,$$

ahol ν az $\mathscr{F}D$ belső normálisát jelöli, f $\mathfrak{T}(\Omega)$-hoz való tartozására a következő

[30] $|x|$ x-nek az origótól való távolságát jelenti.

[31] A $\Gamma(z)$ jel az EULER-féle Γ-függvényt jelöli (lásd [38], 706. oldal).

szükséges és elegendő feltételt kapjuk[32]:

$$(6) \qquad \sum_{m=1}^{\infty} m(2m+n-2)^2 \int_{\Omega} d_x\sigma \left[\int_{\Omega} f(y) P_m^{n-2} [C(x,y)] \, d_y\sigma \right]^2 < +\infty.$$

A 3° tulajdonságból speciálisan következik, hogy ha $f(t)$ a $(-1, 1)$ intervallumban definiált függvény, mely négyzetesen integrálható a τ_s mértékre vonatkozóan, melyet a $(-1, 1)$ intervallumban elhelyezkedő B BOREL-halmazokon a

$$\tau_s(B) = \int_B (1-t^2)^{\frac{s-1}{2}} \, dt$$

reláció definiál, akkor, bevezetve a

$$c_m^{(s)} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{(2m+s)(s-1)!\, m!}{(s+m-1)} \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)} \int_{(-1,1)} f(t) P_m^s(t) \, d\tau_s$$

jelölést, $f(t) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m^{(s)} P_m^s(t)$, ahol a jobb oldalon álló sor a τ_s mértékre vonatkozóan másodrendű középben konvergál f-hez, és a konvergencia egyenletes, ha f C_1-osztálybeli[33].

Ha f a $(-1, 1)$ intervallumban a τ_s-re vonatkozóan integrálható függvény, akkor az f függvénnyel kapcsolatban definiált $c_m^{(s)}$ számokat az *f függvény $\{P_m^s\}$* $(m=0, 1, \ldots; s=1, 2, \ldots)$ *rendszerre vonatkozó koordinátáinak* nevezzük.

Azonnal látható, hogy $s=1$ esetén a P_m^s polinomok a LEGENDRE-polinomokkal és a $c_m^{(s)}$ számok az f függvény $\frac{2m+1}{2} \int_{-1}^{1} f(t) P_m^1(t) \, dt$ LEGENDRE-koordinátáival azonosak (lásd [37], 356. oldal).

Ha $g(x)$ az Ω egység-hipergömbfelületen értelmezett, ott C_1-osztálybeli függvény, akkor *g Ω-n vett gradiense* gyanánt a következő $(n-1)$-komponensű vektort vesszük:

$$\operatorname{grad} g \equiv \left(\frac{\partial g}{\partial \varphi_1}, \frac{\partial g}{\partial \varphi_2} \frac{1}{\sin \varphi_1}, \right.$$

$$\left. \frac{\partial g}{\partial \varphi_3} \frac{1}{\sin \varphi_1 \sin \varphi_2}, \ldots, \frac{\partial g}{\partial \varphi_{n-2}} \frac{1}{\sin \varphi_1 \ldots \sin \varphi_{n-3}}, \frac{\partial g}{\partial \vartheta} \frac{1}{\sin \varphi_1 \ldots \sin \varphi_{n-2}} \right).$$ [34]

Ezenkívül azt fogjuk mondani, hogy az Ω-n definiált és ott integrálható $g(x)$ függvény Ω-n *négyzetesen integrálható gyenge gradienssel* bír, ha létezik olyan, Ω-n

[32] Ezen eredmény bizonyítása analóg a jelen paragrafus I. tételének bizonyításával.

[33] A hiperszférikus függvényekre és a P_m^s polinomokra vonatkozó fentebb idézett eredményeket illetően lásd: [2] 204. és az azt követő oldalakat.

[34] Az Ω tartomány φ_k=állandó, ϑ=állandó koordinátavonalai mentén képezett parciális deriváltakra vonatkozó ezen kifejezések azonnal megkaphatók, ha figyelembe vesszük hogy

$$(ds)^2 = (d\varrho)^2 + \varrho^2 (d\varphi_1)^2 + \varrho^2 \sin^2 \varphi_1 (d\varphi_2)^2 + \ldots + \varrho^2 \sin^2 \varphi_1 \ldots \sin^2 \varphi_{n-2} (d\vartheta)^2.$$

négyzetesen integrálható $(n-1)$-komponensű $\Psi(x)$ vektor, hogy minden, Ω-n C_2-osztálybeli $(n-1)$ komponensű (a komponensek: $v_1, \ldots, v_{n-1}$) $V(x)$ vektorra

$$\int_\Omega gE(V)\,d\sigma = -\int_\Omega \Psi \times V\,d\sigma,$$

ahol

$$E[V(x)] = \sum_{h=1}^{n-2} \frac{1}{\sin\varphi_1 \ldots \sin\varphi_{h-1}} \frac{1}{\sin^{(n-1-h)}\varphi_h} \frac{\partial}{\partial\varphi_h}[(\sin\varphi_h)^{n-1-h} v_h] +$$

$$+\frac{1}{\sin\varphi_1 \ldots \sin\varphi_{n-2}} \frac{\partial v_{n-1}}{\partial\vartheta}.$$

Parciális integrálással azonnal belátható, hogy ha g Ω-n C_1-osztálybeli, akkor a $\Psi = \operatorname{grad} g$ vektor eleget tesz ennek az egyenletrendszernek.

Jelölje $\mathfrak{B}(\Omega)$ az Ω-n értelmezett, ott integrálható és négyzetesen integrálható gyenge gradienssel rendelkező függvények osztályát.

Bevezetve ezt a jelölést, bebizonyíthatjuk a következő tételt:

V. *Legyen $K(t)$ a $(-1, 1)$ intervallumban értelmezett, és ott a τ_{n-2}-re vonatkozóan integrálható függvény; legyenek a c_m számok a $K(t)$-nek a $\{P_m^{n-2}\}$ polinomrendszerre vonatkozó koordinátái.*

Akkor, ha $f(y)$ az Ω-n definiált és ott integrálható függvény, annak szükséges és elegendő feltétele, hogy $f(y)$ $\mathfrak{F}(\Omega)$-hoz való tartozása a

$$\Phi(x) = \int_\Omega f(y) K[C(x, y)]\,d_y\sigma \text{ [35]}$$

függvény $\mathfrak{B}(\Omega)$-hoz való tartozásával ekvivalens legyen, az, hogy $c_m \sqrt{m}$-mel aszimptotikus legyen.

Mint előbb mondottuk, $\Phi(x)$ $\mathfrak{B}(\Omega)$-hoz való tartozása azt jelenti, hogy létezik olyan, Ω-n négyzetesen integrálható $(n-1)$-komponensű Ψ vektor, hogy minden, Ω-n C_2-osztálybeli $(n-1)$ komponensű V vektorra teljesül a következő:

$$\int_\Omega \Phi E(V)\,d\sigma = -\int_\Omega \Psi \times V\,d\sigma. \tag{7}$$

Jelöljünk Y_m^k-val $(k=1, \ldots, \mu_m)$ olyan, μ_m darab m-edrendű $(m>0)$ hiperszférikus függvényből álló rendszert, melyre

$$\int_\Omega Y_m^k Y_m^h\,d\sigma = \begin{cases} \dfrac{1}{m(m+n-2)}, & k=h \\ 0, & k \neq h. \end{cases} \tag{8}$$

Legyen $U_m^k = \operatorname{grad} Y_m^k$.

[35] Azonnal látható, hogy $f(y)K[C(x, y)]$ az Ω-n y-ra vonatkozóan integrálható, az x pontot majdnem bárhol rögzítve Ω-n, és hogy $\Phi(x)$ integrálható Ω-n.

(4) és (8) felhasználásával könnyű belátni, hogy az $\{U_m^k\}$ rendszer ortonormált azon $(n-1)$ komponensű vektorok S HILBERT-terében, mely vektorok minden egyes komponense Ω-n négyzetesen integrálható függvény[36].

Megmutatjuk, hogy annak szükséges és elegendő feltétele, hogy adott Φ esetén létezzék a (7) rendszer egy Ψ megoldása, az, hogy létezzék az

$$(9)\qquad m(m+n-2)\int_\Omega \Phi Y_m^k\,d\sigma = \int_\Omega \Psi^* \times U_m^k\,d\sigma \qquad (k=1,\dots,\mu_m;\ m=1,2,\dots)$$

rendszer egy S-hez tartozó Ψ^* megoldása; a (9) rendszert úgy kaptuk, hogy a (7) rendszerben V vektorok gyanánt az $\{U_m^k\}$ rendszer vektorait vettük fel.

Elegendő bebizonyítani a feltétel elegendő voltát. Avval a megjegyzéssel kezdjük, hogy a

$$\{\sqrt{m(m+n-2)}\,Y_m^k\} \qquad (k=1,\dots,\mu_m;\ m=1,2,\dots)$$

függvényrendszer, melyhez hozzávesszük az azonosan 1 függvényt, a fent idézett 3° tulajdonság és az (5) és (8) integrál-relációk értelmében, az Ω-n négyzetesen integrálható függvények S' HILBERT-terében ortonormált és teljes[37]. Legyen V egy Ω-n C_2-osztálybeli vektor és legyenek az $a_m^{(k)}$ számok az $E(V)$ függvény $\{\sqrt{m(m+n-2)}\,Y_m^k\}$ rendszerre vonatkozó FOURIER-koordinátái; S'-ben fennáll a következő: $E(V)=\sum_{m=1}^{\infty}\sqrt{m(m+n-2)}\sum_{k=1}^{\mu_m} a_m^{(k)}Y_m^k$. Minthogy $\int_\Omega Y_m^k E(V)\,d\sigma = -\int_\Omega U_m^k \times V\,d\sigma$, ezért a V vektor $\{U_m^k\}$ rendszerre vonatkozó FOURIER-koordinátáira a következőt kapjuk:

$$\int_\Omega V\times U_m^k\,d\sigma = -a_m^{(k)}/\sqrt{m(m+n-2)}.$$

Ekkor létezik a S következő W vektora:

$$W=\sum_{m=1}^{\infty} 1/\sqrt{m(m+n-2)}\sum_{k=1}^{\mu_m} a_m^{(k)}U_m^k.$$

Most tegyük fel, hogy valamely Φ függvényhez, mely Ω-n integrálható, létezik az S-nek egy Ψ^* vektora, mely megoldása (9)-nek.

[36] Azon $(n-1)$-komponensű vektorok lineáris halmaza, mely vektorok minden egyes komponense Ω-n négyzetesen integrálható függvény, HILBERT-térnek tekinthető a következő skaláris szorzat bevezetésével: $(U,V)=\int_\Omega U\times V\,d\sigma$. Ennek megfelelően a $\{V_k\}$ vektorok rendszerét ortonormálisnak mondjuk, ha $\int_\Omega V_h\times V_k\,d\sigma=\delta_h^k$.

[37] Az $\{u_k\}$ ortonormált vektorrendszert valamely HILBERT-térben *teljesnek* nevezzük, ha ezen tér valamennyi u vektora az $u=\sum_k a_k u_k$ alakban állítható elő; ebben az esetben az a_k számokat az u $\{u_k\}$-ra vonatkozó FOURIER-koordinátáinak nevezzük, és ezek az $a_k=(u,u_k)$ alakban fejezhetők ki; ezenkívül $\sum_k |a_k|^2=(u,u)$. Ha $\{v_k\}$ ortonormált rendszer, a $\sum_k (u,v_k)v_k$ sor egy v vektorhoz konvergál, és fennáll a következő BESSEL-egyenlőtlenség: $(v,v)\leq(u,u)$ (lásd [18], V. fejezet).

Megszorozva $a_m^{(k)}/\sqrt{m(m+n-2)}$-vel a (9) mindkét oldalát, összegezve az m és a k indexekre vonatkozóan és a határátmenetet az integráljel alatt végezve el, a következőt kapjuk:

$$\int_\Omega \Phi E(V)\, d\sigma = -\int_\Omega \Psi^* \times W\, d\sigma.$$ [38]

A CAUCHY—SCHWARZ-egyenlőtlenség (lásd [18] 462. oldal) és a BESSEL-egyenlőtlenség[39] alapján következik, hogy

$$\left|\int_\Omega \Phi E(V)\, d\sigma\right| \leqq \left(\int_\Omega |\Psi^*|^2\, d\sigma\right)^{1/2} \left(\int_\Omega |V|^2\, d\sigma\right)^{1/2}.$$

Ebből az következik, hogy az Ω-n C_2-osztálybeli függvények alkotta sokaságban $\int_\Omega \Phi E(V) d\sigma$ V-nek lineáris és folytonos funkcionálja[40]. Ekkor, a funkcionálanalízis két ismert tétele, nevezetesen a HAHN—BANACH-féle kiterjesztési tétel (lásd [18], 135. oldal) és a HILBERT-térbeli lineáris és folytonos funkcionálok előállítási tétele (lásd [18], 205. oldal) értelmében létezik az S egy olyan Ψ vektora, hogy

$$\int_\Omega \Phi E(V)\, d\sigma = -\int_\Omega \Psi \times V\, d\sigma.$$

Ily módon bebizonyítottuk, hogy ha a (9) rendszer megoldható, akkor a (7) rendszer is az.

Tehát bizonyításunkat annak igazolására vezettük vissza, hogy f $\mathfrak{F}(\Omega)$-hoz való tartozásának szükséges és elegendő feltétele az, hogy létezzék az S-nek olyan Ψ vektora, mely megoldása a (9) rendszernek a

$$\Phi(x) = \int_\Omega f(y) K[C(x, y)]\, d_y\sigma$$

függvényre vonatkozóan. Mivel $K(t)$ feltétel szerint integrálható $(-1, 1)$-ben a τ_{n-2} mértékre vonatkozóan, lehetséges olyan, $(-1, 1)$-ben C_1-osztálybeli függvényekből álló $\{K_r(t)\}$ sorozatot megadni, mely a τ_{n-2} függvényre vonatkozóan 1-rendű középben a $K(t)$ függvényhez tart.

[38] A

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sqrt{m(m+n-2)} \sum_{k=1}^{\mu_m} a_m^{(k)} \int_\Omega \Phi Y_m^k\, d\sigma = \int_\Omega \Phi E(V)\, d\sigma$$

határátmenetet szabad az integráljel alatt elvégezni, mivel $E(V)$ C_1-osztálybeli függvény, és ennélfogva a $\sum_{m=1}^{\infty} \sqrt{m(m+n-2)} \sum_{k=1}^{\mu_m} a_m^{(k)} Y_m^k$ sor Ω-n egyenletesen konvergál, ami a hiperszférikus függvények 3° alatt idézett tulajdonságából következik. Az integráljel alatti

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{m(m+n-2)}} \sum_{k=1}^{\mu_m} a_m^{(k)} \int_\Omega \Psi^* \times U_m^k\, d\sigma = \int_\Omega \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{m(m+n-2)}} \sum_{k=1}^{\mu_m} a_m^{(k)} U_m^k \times \Psi^*\, d\sigma$$

határátmenet megengedett, mert Ψ^* S-hez tartozik.

[39] Lásd a 37. lábjegyzetet.

[40] Mint ismeretes, egy HILBERT térben valamely $F(u)$ lineáris funkcionál akkor és csak akkor folytonos, ha létezik olyan pozitív M szám, melyre $|F(u)|^2 \leqq M(u, u)$.

Ekkor, ha $v(t)$ $(-1, 1)$-ben folytonos függvény, azt kapjuk, hogy

$$(10) \qquad \lim_{r\to\infty} \int_{(-1,1)} K_r(t)v(t)\,d\tau_{n-2} = \int_{(-1,1)} K(t)v(t)\,d\tau_{n-2}.$$

Ezenkívül, bevezetve a $\Phi_r(x) = \int_\Omega f(y)K_r[C(x,y)]\,d_y\sigma$ jelölést,

$$(11) \qquad \lim_{r\to\infty} \int_\Omega \Phi_r(x)v(x)\,d\sigma = \int_\Omega \Phi(x)v(x)\,d\sigma;$$

valóban, a kettős integrálokra vonatkozó FUBINI-tétel felhasználásával, az $M = \max_{x\in\Omega} |v(x)|$ jelöléssel, a következőt kapjuk:

$$\left|\int_\Omega [\Phi_r(x) - \Phi(x)]v(x)\,d\sigma\right| \leqq M\int_\Omega |f(y)|\,d\sigma \int_\Omega |K_r[C(x,y)] - K[C(x,y)]|\,d_x\sigma,$$

s ebből az egyenlőtlenségből következik az állítás, mivel, mint az nyilvánvaló, y-ra vonatkozóan egyenletesen teljesül a következő:

$$\lim_{r\to\infty} \int_\Omega |K_r[C(x,y)] - K[C(x,y)]|\,d_x\sigma = 0.$$

$c_{r,m}$-mel jelölve a $K_r(t)$-nek a $\{P_m^{n-2}(t)\}$ polinomokra vonatkozó koordinátáit, $(-1, 1)$-ben egyenletesen fennáll a következő: $K_r(t) = \sum_{m=0}^{\infty} c_{r,m}P_m^{n-2}(t)$, minthogy ebben az intervallumban $K_r(t)$ C_1-osztálybeli. Ekkor Ω-n egyenletesen fennáll a következő: $\Phi_r(x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_{r,m}\int_\Omega f(y)P_m^{n-2}[C(x,y)]\,d_y\sigma$. A hiperszférikus függvények fentebb említett 1° és 4° tulajdonságából, figyelembevéve, hogy minden rögzített $m>0$ számra az $\{Y_m^k\}$ $(k = 1, \ldots, \mu_m)$ függvények ortogonális rendszert alkotnak s így egymástól lineárisan függetlenek, látható, hogy minden $m>0$ számhoz léteznek és egyértelműen meg vannak határozva olyan μ_m és $\alpha_{m,k}$ állandók, melyekre

$$\int_\Omega f(y)P_m^{n-2}[C(x,y)]\,d_y\sigma = \sum_{k=1}^{\mu_m} \alpha_{m,k}Y_m^k(x).$$

Ily módon

$$\Phi_r(x) = c_{r,0}\int_\Omega f(y)\,d\sigma + \sum_{m=1}^{\infty} c_{r,m} \sum_{k=1}^{\mu_m} \alpha_{m,k}Y_m^k(x).$$

A jobb oldalon álló sor egyenletes konvergenciájából következik, figyelembe véve (8)-at, hogy

$$\int_\Omega \Phi_r Y_m^k\,d\sigma = c_{r,m}\alpha_{m,k}\frac{1}{m(m+n-2)}.$$

Innen, a (10) és a (11) alapján a következőt kapjuk:

$$\int_{\Omega} \Phi Y_m^k \, d\sigma = c_m \alpha_{m,k} \frac{1}{m(m+n-2)}.$$

Ekkor a RIESZ—FISCHER-tétel értelmében a következő szükséges és elegendő feltételt kapjuk arra, hogy (9)-nek legyen megoldása S-ben:

$$\sum_{m=1}^{\infty} c_m^2 \sum_{k=1}^{\mu_m} \alpha_{m,k}^2 < +\infty. \tag{12}$$

Másrészről, mivel

$$\int_{\Omega} f(y) P_m^{n-2}[C(x,y)]\, d_y\sigma = \sum_{k=1}^{\mu_m} \alpha_{m,k} Y_m^k(x) \qquad (m>0),$$

figyelembe véve (8)-at, f $\mathfrak{T}(\Omega)$-hoz való tartozásának (6) által kifejezett szükséges és elégséges feltétele a következőképp módosul: $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(2m+n-2)^2}{m+n-2} \sum_{k=1}^{\mu_m} a_{m,k}^2 < +\infty$. Rögtön látható, hogy ez a feltétel a következővel ekvivalens:

$$\sum_{m=1}^{\infty} m \sum_{k=1}^{\mu_m} \alpha_{m,k}^2 < +\infty.$$

Ennek a feltételnek a (12) feltétellel való összehasonlításából nyilvánvalóan adódik, hogy ha c_m^2 aszimptotikus m-mel, a $\sum_{m=1}^{\infty} c_m^2 \sum_{k=1}^{\mu_m} \alpha_{m,k}^2$ sor konvergenciája maga után vonja a $\sum_{m=1}^{\infty} m \sum_{k=1}^{\mu_m} \alpha_{m,k}^2$ sor konvergenciáját, és fordítva. Ily módon a feltétel elegendő volta be van bizonyítva.

Másrészről, ha a $\sum_{m=1}^{\infty} c_m^2 \sum_{k=1}^{\mu_m} \alpha_{m,k}^2$ és a $\sum_{m=1}^{\infty} m \sum_{k=1}^{\mu_m} \alpha_{m,k}^2$ sorok c-ekvivalensek minden olyan f függvényre, mely Ω-n integrálható, akkor speciálisan ilyenek lesznek minden, Ω-n négyzetesen integrálható függvényre, vagyis minden olyan $\{\alpha_{m,k}\}$ sorozatra is, melyre $\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\mu_m} \alpha_{m,k}^2 < +\infty$, és akkor, az 1. lemma értelmében, c^2 aszimptotikus m-mel.

Ily módon a tételt teljesen bebizonyítottuk.

Példa az V. tétel állításában kimondott feltételeknek eleget tevő $K(t)$ magra a következő: $K(t) = (2-2t)^{-\frac{n}{2}+\frac{3}{4}}$ [41]. Először is ez a függvény $(-1, 1)$-ben integrálható a τ_{n-2} mértékre vonatkozóan.

Megmutatjuk, hogy a $K(t)$-nek a $P_m^{n-2}(t)$ polinomokra vonatkozó c_m koordinátája $\sqrt{m}$-mel aszimptotikus.

[41] Vegyük észre, hogy Ω minden x, y pontpárjára:

$$[2-2C(x,y)]^{-\frac{n}{2}+\frac{3}{4}} = |x-y|^{-n+\frac{3}{2}}.$$

Tegyük fel, hogy $n > 3$. Legyen $n-2 = s$. Felhasználva a $P_m^s(t)$ polinomok MEHLER—DIRICHLET-féle integrál-előállítását, a következőt kapjuk:

$$P_m^s(\cos\varphi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{s(s+1)\dots(s+m-1)}{m!} \frac{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \frac{2}{\sin^{s-1}\varphi}.$$

$$\cdot \int_0^{\varphi} \cos\left[\left(m+\frac{s}{2}\right)t\right] [2(\cos t - \cos\varphi)]^{\frac{s}{2}-1}\, dt \qquad (0 < \varphi < \pi).^{42}$$

Érvényes az alábbi:

$$c_m^{(s)} = \frac{2m+s}{2^{5/4}\pi} \int_0^{\pi} \cos\left[\left(m+\frac{s}{2}\right)t\right] dt \int_t^{\pi} \frac{(\cos t - \cos\varphi)^{s/2-1}}{(1-\cos\varphi)^{s/2+1/4}} \sin\varphi\, d\varphi,$$

ahonnan

$$(13) \qquad c_m^{(s)} = \frac{2m+s}{2^{5/4}\pi} \int_0^{\pi} [a(1-\cos t)^{-1/4} + \alpha(t)] \cos\left[\left(m+\frac{s}{2}\right)t\right] dt,$$

ahol

$$a = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\frac{s}{2}-1}{k} \frac{(-1)^k}{k+\frac{1}{4}} \quad \text{és} \quad \alpha(t) = 2^{1/4} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\frac{s}{2}-1}{k} \frac{1}{k+\frac{1}{4}} \left(\frac{\cos t - 1}{2}\right)^k.$$

Mivel az $s \geqq 2$ feltétel folytán $\sum_{k=0}^{\infty} \left|\binom{s/2-1}{k}\right| < \infty$, az $\alpha(t)$ függvény C_1-osztálybeli $(0, \pi)$-ben; ekkor létezik olyan $A_0 > 0$ szám, hogy

$$\left| \int_0^{\pi} \alpha(t) \cos\left[\left(m+\frac{s}{2}\right)t\right] dt \right| \leqq \frac{A_0}{m}.$$

Másrészről már előbb bebizonyítottuk két olyan A' és A'' $(0 < A' < A'')$ szám létezését, melyekre

$$\frac{A'}{\sqrt{m}} \leqq \left| \int_0^{\pi} a(1-\cos t)^{-1/4} \cos\left[\left(m+\frac{s}{2}\right)t\right] dt \right| \leqq \frac{A''}{\sqrt{m}}.$$

Innen következik két olyan pozitív B' és B'' $(0 < B' < B'')$ szám létezése, hogy

$$(14) \qquad \frac{B'}{\sqrt{m}} \leqq \left| \int_0^{\pi} [a(1-\cos t)^{-1/4} + \alpha(t)] \cos\left[\left(m+\frac{s}{2}\right)t\right] dt \right| \leqq \frac{B''}{\sqrt{m}}.$$

(13)-ból és (14)-ből következik, hogy $c_m^{(s)}$ $\sqrt{m}$-mel aszimptotikus.

[42] Ez az előállítás a LAPLACE-féle előállításból (lásd [2], 391. oldal) vezethető le, ugyanavval az eljárással, mely a LEGENDRE-polinomok esetében használatos (lásd [46], 219. oldal).

Az $n=3$ azaz $s=1$ esetben a bizonyítás csaknem analóg módon történik. Ebben az esetben

$$c_m^{(1)} = (2m+1)\int_0^\pi (2-2\cos\varphi)^{-3/4} P_m^{(1)}(\cos\varphi)\sin\varphi\, d\varphi;$$

felhasználva a

$$P_m^1(\cos\varphi) = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_\varphi^\pi \frac{\sin\left[\left(m+\frac{1}{2}\right)t\right]}{(\cos\varphi-\cos t)^{1/2}}\, dt$$ [43]

integrál-előállítást, következik, hogy

$$c_m^{(1)} = (2m+1)\frac{1}{2^{1/4}\pi}\int_0^\pi \sin\left[\left(m+\frac{1}{2}\right)t\right] dt \int_0^t \frac{\sin\varphi\, d\varphi}{(1-\cos\varphi)^{3/4}(\cos\varphi-\cos t)^{1/2}},$$

ahonnan

$$c_m^{(1)} = (2m+1)\frac{1}{2^{1/4}\pi}\, b\int_0^\pi (1-\cos t)^{-1/4}\sin\left[\left(m+\frac{1}{2}\right)t\right] dt,$$

ahol

$$b = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{k}\frac{(-1)^k}{k+\frac{1}{4}}.$$

Innen következik az állítás.

IRODALOM

[1] L. Amerio: „Teoremi di esistenza per i problemi di Dirichlet e di Neumann per l'equazione $\Delta_2 u - ku = 0$", *Ricerche di Matematica* **5** (1956) 58—95.

[2] P. Appel—J. Kampé de Fériet: *Fonctions hypergéométriques et hypersphériques*, Párizs, Gautier-Villars, 1926.

[3] N. Aronszajn: *Boundary values of functions with finite Dirichlet integrals*, Conference on Partial Differential Equations. Studies in eigenvalue problems. No. 14, University of Kansas, 1955.

[4] G. Bouligand—G. Giraud: „Le problème de la dérivée oblique en théorie du potentiel", *Actualités scientifiques et industrielles*, 219. sz.

[5] G. Cimmino: „Nuovo tipo di condizioni al contorno e nuovo metodo di trattazione del problema generalizzato di Dirichlet", *Rend. Circ. Mat. di Palermo*, **61** (1937) 177—221.

[6] J. Deny—J. L. Lions: „Les espaces du type de Beppo Levi", *Annales de l'Institut Fourier*, **5** (1955) 305—370.

[7] E. de Giorgi: „Osservazioni relative ai teoremi di unicità per le equazioni differenziali a derivate parziali di tipo ellittico, con condizioni al contorno del tipo misto", *Ricerche di Matematica* 1953.

[8] E. de Giorgi: „Su una teoria generale della misura $(r-1)$-dimensionale in uno spazio ad r dimensioni". *Annali di Matematica Pura e Applicata*, IV. **36** (1954) 195.

[43] Ez az integrál-előállítás a Mehler—Dirichlet-féle előállításból vezethető le (lásd [46], 220. oldal).

[9] J. DIEUDONNÉ: „Sur les fonctions continues numériques définies dans un produit de deux espaces compacts", *Compt. Rendus, Acad. Sci. Paris*, **205** (1937) 563.

[10] G. C. EVANS—E. R. MILES: „Potential of general masses in single and double layers. The relative boundary value problems", *Amer. Journ. of Math.* **53** (1931) 493—516.

[11] G. FICHERA: „Sull'esistenza e sul calcolo delle soluzioni dei problemi al contorno relativi all'equilibrio di un corpo elastico", *Ann. Scuola Norm. Sup. di Pisa*, III. **4** (1950) 35—100. és *Pubblicazioni dell' I. N. A. C.* (1949), 248. sz.

[12] G. FICHERA: *Alcuni recenti sviluppi della teoria dei problemi al contorno per le equazioni alle derivate parziali lineari*, Atti del Convegno di Trieste sulle equazioni alle derivate parziale. Ed. Cremonese, 1955.

[13] G. FICHERA: „Teoremi di completezza sulla frontiera di un dominio per taluni sistemi di funzioni", *Ann. Mat. Pura e Appl.* IV. **27** (1948) 1—28.

[14] G. FICHERA: „Sull'esistenza delle forme differenziali armoniche", *Rendiconti del Seminario Matematico di Padova*, **24** (1955) 533. és köv. old.

[15] G. FICHERA: „Sui teoremi d'esistenza della teoria del potenziale e della rappresentazione conforme", *Rend. Acc. Naz. Lincei* **10** (1951).

[16] G. FICHERA: „Teoremi di completezza connessi all'integrazione dell'equazione $\Delta_4 u=f$", *Giornale di Matematiche di Battaglini*, (1948).

[17] G. FICHERA: „Teorema d'esistenza per il problema biiperarmonico", *Rend. Acc. Naz. Lincei*, **5** (1948) 319—324.

[18] G. FICHERA: *Lezioni sulle trasformazioni lineari*, vol. I., Istituto Mat. Univ. Trieste, 1954.

[19] K. O. FRIEDRICHS: „The identity of weak and strong extensions of differential operators", *Transactions of the American Mathematical Society*, **55** (1944) 132—151.

[20] K. O. FRIEDRICHS: „A Theorem of Lichtenstein", *Duke Math. Journal*, **14** (1947) 67—82.

[21] E. GAGLIARDO: „Caratterizzazioni delle tracce sulla frontiera relative ad alcune classi di funzioni in n variabili", *Rend. Seminaro Matem. Padova*, **27** (1957) 284—305.

[22] D. GRECO: „Un'osservazione sul problema di Dirichlet", *Rend. dell'Acc. di Sc. Fisiche e Matematiche della Soc. Naz. di Sc. Lett. ed Arti in Napoli*, IV, **23** (1956).

[23] M. HADAMARD: „Sur le principe de Dirichlet", *Bull. Soc. Math. France*, **34** (1906) 135—138.

[24] G. H. HARDY—J. E. LITTLEWOOD: „Some problems of Diophantine approximation: A remarkable trigonometrical series", *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **2** (1916) 583—586.

[25] W. V. D. HODGE: „A Dirichlet Problem for harmonic functionals, with applications to analytic varieties", *Proc. London Math. Soc.*. **36** (1933) 257—303.

[26] O. D. KELLOGG: *Foundations of Potential Theory*, Springer, Berlin, 1929.

[27] A. KOLMOGOROV: „Sur l'ordre de grandeur des coefficients de la série de Fourier—Lebesgue", *Bull. Internaz. de l'Acad. Polonaise, Cl. de Sc. Math. et Nat.*, Krakkó, 1923, 83—86.

[28] A. LJAPUNOV: „Sur certaines questions qui se rattachent au problème de Dirichlet", *Journal de Math.*, **4** (1898) 241—311.

[29] L. LICHTENSTEIN: „Über das Poissonsche Integral etc.", *Journal für die reine und angewandte Mathem.*, **141** (1912) 12—42.

[30] E. MAGENES: „Problema generalizzato di Dirichlet e teoria del potenziale", *Rend. Sem. Matem. Padova*, **24** (1955) 220—229.

[31] C. MIRANDA: *Equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico*, Springer Verlag, 1955.

[32] C. MIRANDA: „Sulla sommabilità delle derivate di una funzione armonica hölderiana", *Rend. Acc. Sc. Fis. e Matem. di Napoli*, IV. **18** (1948) 96—98.

[33] C. B. MORREY: „Functions of several variables and absolute continuity, II." *Duke Math. Journal*, **6** (1940) 187—215.

[34] C. PAUC: „Considérations sur les gradients généralisés de G. Fichera et E. de Giorgi", *Annali di Mat. Pura ed Applicata*, IV. **40** (1955) 183—192.

[35] С. М. Никольский: „К задаче Дирихле для круга и полупространства", Мат. Сборник, **35** (77) (1954) 247—266.

[36] С. М. Никольский: „Граничные свойства функций, определенных на области с угловыми точками, I. Мат. Сборник, **40** (82) (1956) 303—318.

[37] M. PICONE: *Appunti di Analisi superiore*, Rondinella, Napoli, 1940.

[38] M. PICONE—G. FICHERA: *Trattato di Analisi Matematica*, vol. II, Tumminelli, Roma, 1956.

[39] M. L. PRINCIVALLI: „Sul sistema di equazioni lineari alle derivate parziali, relativo all'equilibrio delle volte cilindriche", *Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa*, (1955).

[40] G. PRODI: „Tracce sulla frontiera delle funzioni di Beppo Levi," *Rend. Sem. Mat. Padova*, **26** (1956) 36—60.

[41] Л. Н. Слободецкий—В. М. Бабич: „Об ограниченности интеграла Дирихле", Докл. Акад. наук СССР, **106** (1956) 604—606.
[42] С. Л. Соболев: „Об одной теореме функционального анализа", Мат. Сборник, **4** (46) (1938) 461–497.
[43] G. Stampacchia: „Problemi al contorno per equazioni di tipo ellittico a derivate parziali e questioni di calcolo delle variazioni connesse", *Ann. di Matem. Pura e Applicata,* IV. **33** (1952).
[44] G. Stampacchia: „Problema di Dirichlet e proprietà qualitative della soluzione", *Giornale di Matematiche di Battaglini,* IV. **80** (1950–51).
[45] T. Viola: „Sull'esistenza del minimo assoluto di taluni integrali multipli connessi con i problemi al contorno per le funzioni armoniche", *Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa,* III, **6** (1952) 121. és köv. old.
[46] E. S. Whittaker: *Modern Analysis,* Cambridge Univ. Press, 1902.
[47] W. H. Young: „On the Fourier series of bounded functions", *Proc. London Math. Soc.,* **12** (1913) 41–70.
[48] A. Zygmund: „Sur la convergence absolue des séries de Fourier", *Proc. London Math. Soc.* **3** (1928) 194–196.

Fordította: Adler György
a matematikai tudományok kandidátusa

Technikai szerkesztő: L. Ziermann Margit

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója Műszaki szerkesztő: Farkas Sándor
A kézirat nyomdába érkezett: 1964. március 31. — Terjedelem: 10 (A/5) ív, 95 ábra

Szegedi Nyomda Vállalat, Szeged 64-1083

Ára: 21,— Ft

TARTALOMJEGYZÉK

A KÜLFÖLDI SZAKIRODALOMBÓL

Index: 26 498

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK

KÖZLEMÉNYEI

XIV. KÖTET 3. SZÁM

AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST
1964

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK

KÖZLEMÉNYEI

XIV. kötet 3. szám

Szerkesztőség: Budapest, V., Nádor utca 7.

Kiadóhivatal: Budapest, V., Alkotmány utca 21.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei változó terjedelmű füzetekben jelennek meg, és az Akadémia III. Osztályának felolvasóülésén bemutatott matematikai dolgozatokat, valamint egyéb dolgozatokat, referátumokat, továbbá az Osztály munkájára vonatkozó közleményeket, könyvismertetéseket stb. közölnek. Évenként egy kötet jelenik meg (négy szám alkot egy kötetet).

Kéziratok a következő címre küldendők:

A Magyar Tudományos Akadémia
III. Osztályának Közleményei.
Budapest, V., Nádor u. 7.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi levelezés.

Minden szerzőt 100 különlenyomat illet meg megjelent munkájáért.

Közlésre el nem fogadott kéziratokat a szerkesztőség lehetőleg visszajuttat a szerzőhöz, de felelősséget a beküldött kéziratok megőrzéséért vagy továbbításáért nem vállal.

A Közlemények előfizetési ára kötetenként belföldi címre 40 forint, külföldi címre 60 forint. Belföldi megrendelések az Akadémiai Kiadó, Budapest, V., Alkotmány u. 21. (Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 05-915-111-46), külföldi megrendelések a „Kultúra" Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalat, Budapest, I., Fő utca 32. (Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 43-790-057-181) útján eszközölhetők.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztálya a következő idegen nyelvű folyóiratokat adja ki:

1. Acta Mathematica Hungarica
2. Acta Physica Hungarica.

AZ OSZTÁLYVEZETŐSÉG 1964. ÉVI BESZÁMOLÓJA*

I.

Az Akadémia Közgyűlésének és ennek keretében az Osztályvezetőség beszámolójának szerepe kettős. Egyrészt visszapillantunk az elmúlt évre és megvizsgáljuk munkánk eredményeit, hibáit, másrészt meghatározzuk, melyek a legsürgősebb feladataink s melyek azok, amelyek megoldására csak később érnek meg a feltételek.

Az Osztály működési területe a matematikát, a fizikát, a csillagászatot és a kibernetika egy részét öleli fel, ezeken kívül kapcsolatban van több más tudományterülettel. A szaktudományi kutatások részleteredményei, ha azokat önmagukban nézzük, csak a szorosan vett szakembereket érdeklik. Ha azonban ezen eredmények együttes hatását tekintjük, megállapíthatjuk, hogy e kutatások következményei és felhasználásuk az egész társadalmat érintik. A kutatómunka jelentős közügy és ez az elvi megállapítás az Osztályunkban képviselt tudományok mindegyikére érvényes.

Ilyen helyzetben kell tehát megítélnünk az Osztály és intézeteink múlt évi tevékenységét és ebből kiindulva kell kitűznünk további feladatainkat.

II.

Az Akadémia és ezen belül az Osztály legfőbb hivatása a tudományok művelése. Egész tevékenységünknek az a legfőbb mércéje, hogy milyen tudományos eredményekkel járulunk hozzá a matematika, fizika, csillagászat és a matematikai kibernetika fejlesztéséhez. Az Osztály részéről messzemenően résztvettünk a távlati kutatási főfeladatok kialakításában és az 1962-ben történt jóváhagyásuk előtt is a távlati kutatási tervet tettük már kutatási programunk alapjává. Az Akadémiához tartozó 32 főfeladat közül 2 tartozik a III. Osztályhoz, ezeken kívül szakembereink további 4 olyan főfeladat megvalósításában vesznek részt, amelyek szervezetileg más osztályokhoz tartoznak.

Eddig még nem sikerült az Akadémia vezető testületének megbírkóznia azzal a feladattal, hogy a 32 főfeladat közül kiemelje azt a néhányat, amelyekre a kapacitást különösen koncentrálni kellene. Az ez évi Közgyűlésen az elnökségi beszámoló tartalmazott ilyen javaslatot. Az Osztályvezetőség különösen két témakör kiemelését tartja szükségesnek, melyek közvetlenül érintik az Osztály tevékenységi körét:

a) *A szilárd testek fizikája* (e tekintetben a III. és a VI. Osztály intézetei és egyéb kutatóhelyei már eddig is széleskörű kutatásokat folytattak). Itt az együttműködés új tartalmi és szervezeti formáinak kialakítása a feladat.

* Felolvasta Kónya Albert osztálytitkár, az 1964. április 23-án megtartott nyilvános osztályülésen.

b) *A kibernetika és az automatika fejlesztése.* (Ilyen jellegű vizsgálatok a kutatások és a gazdasági élet minden területén növekvő fontosságúak, s hazánkban e téren nagy lemaradást kell behozni. A III. Osztálynak van némi kutatóbázisa e téren, amit a VI. Osztály köréből és Akadémián kívüli kutatóhelyek bevonásával lehetne kiegészíteni, s együttesen jelentősen fejleszteni.)

Az intézetek tudományos munkájának irányításában leghasznosabb formának az intézetek által készített éves munkáról szóló beszámolók és az éves kutatási tervek megvitatása bizonyult. Annak érdekében, hogy a szakbizottságok és az Osztályvezetőség konkrét segítséget tudjon nyújtani az intézeteknek, hogy a beszámolók és az éves kutatási tervek tárgyalása során megfelelő állásfoglalásokra kerüljön sor, az Osztályvezetőség a beszámoló jelentéseket és tudományos terveket úgy készíttette el, hogy azok világosan érzékeltessék egy-egy intézet munkájának fejlődését, a tevékenységükben jelentkező hiányosságokat, a tudományos munka fő irányait.

Intézeteink munkája szorosan a távlati kutatási tervekhez igazodott. A kutatott témák természetesen nem egyformán jelentősek és a távlati kutatási tervben sem szerepelnek egyforma súllyal. A szellemi és anyagi erőket általában sikerült koncentrálni a legfontosabb kutatási területekre. Intézeteink tovább szélesítették az együttműködést belföldi és külföldi viszonylatban egyaránt.

Az Osztály tudományterületein elért főbb eredményeket a beszámoló melléklete tartalmazza. Ez a vázlatos melléklet is azt bizonyítja, hogy az elmúlt évi munka eredményesnek ítélhető. Munkánk tartalmát illetően ez a melléklet képezi beszámolónk legfontosabb részét. Szóban ismertetni lehetetlen volna — rövid összefoglalását pedig az Elnökségi beszámoló tartalmazta, amit itt megismételni nem kívánunk.

Emellett meg kívánjuk említeni a tudományos terv teljesítését gátló néhány tényezőt is. Ezek főként a következők:

a) A helyiséghiány mindegyik intézet munkáját nehezíti. Különösen nehéz a helyzet a KRISTÁLYNÖVEKEDÉSI KUTATÓ CSOPORTBAN, a KRISTÁLYFIZIKAI LABORATÓRIUMban, a LUMINESZCENCIA és FÉLVEZETŐ KUTATÓ CSOPORTban, valamint a MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZETben. A SZÁMÍTÁSTECHNIKAI KÖZPONT ilyen problémája remélhetőleg rövidesen megoldódik.

b) Az elmúlt években többször felhívtuk a figyelmet arra, hogy a kibernetikai kutatások és az elektronikus számológépek alkalmazása tekintetében hazánkban rendkívüli veszélyeket rejtő elmaradás következett be. Megjelöltük, hogy a lemaradás részleges behozására milyen legsürgősebb feladatokat kell megoldani. Eddig azonban még az Akadémián belül sem sikerült megoldást találni, mindössze annyi történt, hogy meghatároztuk a SZÁMÍTÁSTECHNIKAI KÖZPONT feladatkörét és a KÖZPONT kapott egy URAL-2 gépet, amely legkorábban ez év második felében üzemeltethető a KÖZPONT új, budai helyiségeiben. Feltétlenül fontos, hogy a KÖZPONT mielőbb egy nagy teljesítményű, gyorsműködésű gépet is kapjon. (Bizonyos előrehaladás már történt e téren, ugyanis az Elnökség a III. és a VI. Osztály együttes osztályvezetőségi ülésének javaslata alapján elvi határozatot hozott arra, hogy a harmadik 5 éves terv beruházásai között kiemelt helyen szerepeljen egy modern gyorsműködésű elektronikus számológép beszerzése a KÖZPONT számára.)

c) Feltétlenül fontos a MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZETBEN a *Numerikus, grafikus és gépi módszerek osztályá*nak megerősítése. A kérdés rendezését nehezíti, hogy az intézet még mindig nem kapott elektronikus számológépet, sőt, arra az

1959 óta minden évben megismételt kérdésre sem kapott választ, hogy mikor számíthat arra, hogy géphez jusson.

d) Az ATOMKI-ban,* s általában a magyar magfizikai kutatások területén fékezi a munkát a jelenleginél nagyobb feszültségű, modern felépítésű, üzembiztos gyorsítók hiánya. Ez év elején több bizottsági és osztályvezetőségi vita során tisztázódott, hogy a hazai építésre objektív okok miatt nem kerülhet sor, hanem azt a III. ötéves terv keretében külföldről kell behozni. Tekintettel arra, hogy drága berendezés beszerzéséről van szó, nem indokolt a KFKI-nak és az ATOMKI-nak külön-külön ilyen gyorsítót vásárolni, hanem elegendő egyetlen berendezés beszerzése, amit Debrecenben kell felállítani, s amelyen mindkét kutatóintézmény magfizikusai végzik majd vizsgálataikat.

e) A kísérleti fizikai kutatások minden területén komoly nehézséget jelent a korszerű, különösen a csak külföldön beszerezhető műszerek hiánya.

III.

A kutatóhelyek éves kutatási tervezése és beszámolása

Szükségessé vált a kutatóintézeti tervezés egységes rendezése, ezért az Országos Tervhivatal 1963-ban országosan egységes tervezési módszert írt elő. Ennek alapján az Akadémia körében is módosítani kellett a már korábban kialakult tervezési gyakorlaton, bár gyökeres változtatásra nem volt szükség.

Mivel a tervezés jelenlegi rendszere nem tekinthető eléggé egyszerűnek, intézeteink ezzel kapcsolatban néhány kifogást emeltek, ill. javaslatot tettek. A kifogások és javaslatok egy része orvosolható, más része egyenlőre nem. Egy-két észrevétel mintha még mindig azt mutatná, hogy a tervezés egésze ellen van egyeseknek aggályuk. Be kell látni a kutatóknak, hogy bizonyos előirányzatokra szükség van a munka irányítása és gazdasági ellátása miatt, és meg kell szokni, hogy kalkuláljanak a kutatói kapacitással, s a várható eredménnyel.

Nem valósítható meg a tervezés jelen rendszerében, hogy a következő évi terveket az előző évi munka értékelése alapján tűzzük ki, mert a következő évi tervvel már szeptemberben kell foglalkozni, az évi munka értékelését pedig csak a következő év januárjában lehet elkészíteni.

Nem lehet elkészíteni együttesen a tematikai terveket és a költségvetést, ill. a beruházási terveket sem. A kutatások tervezésének kialakult rendje azonban nem tekinthető megoldottnak, keresni kell az egyszerűbb megoldásokat, nem riadva vissza olyan kérdések felvetésétől sem, hogy célszerű-e a kutatásokat egyéves keretekben tervezni.

IV.

Intézetfejlesztés

Törekednünk kell arra, hogy a Kormány által jóváhagyott országos távlati tervből az Osztályra háruló feladatok megoldásához szükséges feltételek biztosíthatók legyenek. Ki kell tehát építeni az Osztályra háruló feladatok megoldásához

* ATOMMAG KUTATÓ INTÉZET, Debrecen.

szükséges intézeti hálózatot. Ennek megfelelően az Osztályvezetőség múlt évi tudománypolitikai jellegű tevékenysége középpontjában továbbra is a kutatóhálózat további szélesítésére vonatkozó tervek álltak. Többször átdolgoztuk a távlati intézetfejlesztési tervet, melyet a matematikai, fizikai és csillagászati tudományok jelenlegi helyzetének beható elemzése előzött meg. A fejlesztési javaslatunk tekintetében azonban mindmáig nem tudott az Elnökség elhatározásra jutni, bár ismételten tárgyalta a kérdést.

Egyik oka ennek az, hogy a fizikai és a műszaki kutatóintézeti javaslatokat sem egymással egybevetve, sem a műszaki alkalmazott kutatási intézetekkel való kapcsolatukat tekintve nem lehetett megnyugtatóan megítélni, azokban sok átfedés van. Megállapítást nyert, hogy a javaslatok nem kielégítő koordináltságának — az elkerülhetetlen szubjektív megítéléseken túl — objektív okai is vannak. A fizikai és műszaki kutatóintézetek fejlesztése csak e tudományok ésszerűbben kialakítandó akadémiai osztálykeretei alapján határozható meg. Nyilvánvaló, hogy a célszerű elvi és gyakorlati megoldás kialakítása érdekében hosszabb időt igénybevevő vizsgálódásokra van szükség. Helyes volna, ha az Osztály ennek figyelembevételével egy külön erre a célra alakított munkabizottságot bízna meg a helyzet tisztázásával, megfelelő javaslat kidolgozásával.

Az új matematikai intézetekre vonatkozó javaslatokat a Matematikai Bizottság a Debrecenben alakítandó intézmény kivételével elfogadható formában még nem állította össze. Feltétlenül szükséges, hogy a Bizottság ilyen jellegű tevékenységét gyorsítsa meg.

A tanszéki akadémiai kutatásoknak az Akadémia most is kiemelkedő jelentőséget tulajdonít abból a felismerésből kiindulva, hogy egy kis országban talán nem is célszerű, de minden esetre nincs lehetőség belátható időn belül minden tudományágra kiterjedő intézeti hálózatot létrehozni. Arra törekedtünk, hogy az akadémiai tanszéki kutató helyeket olyan intézetszerű egységekké fejlesszük, amelyek az Akadémia önálló intézeteihez hasonlóak, s a bennük folyó kutatómunkát is hasonlóan lehet tervezni, irányítani, s személyi és dologi szükségleteikről is ugyanúgy lehet gondoskodni. Annak azonban, hogy az egyes tanszékekhez koncentrált akadémiai támogatásokat teljesen intézeteinkhez hasonlóan szervezzük meg, több olyan akadálya van, amit eddig nem sikerült elhárítani.

V.

A tudományos utánpótlás

Szeretnénk érinteni az aspiránsképzéssel és a tudományos minősítéssel kapcsolatos új helyzetet. Az elmúlt év augusztusában az Elnöki Tanács új rendeletet adott ki az aspiránsképzésre és tudományos minősítésre vonatkozóan, amelynek lényege, hogy e tevékenységet a TUDOMÁNYOS MINŐSÍTŐ BIZOTTSÁG központilag irányítja és végzi saját szakbizottságai és apparátusa útján, továbbá, hogy az önálló aspiranturát megszünteti.

Az új intézkedések célja az, hogy az aspiránsképzés és a tudományos minősítés tervszerűségét fokozzák, színvonalát emeljék és hogy a magasabb követelmények minden szakterületen egységesen érvényesüljenek.

Az új TUDOMÁNYOS MINŐSÍTŐ BIZOTTSÁG és szakbizottságai még csak néhány hónapja működnek, így korai lenne tevékenységüket értékelni, azonban reméljük, hogy a helyesen kialakított elveket sikerül maradéktalanul érvényesíteni és így a tudományos fokozatoknak még nagyobb becsük lesz.

Az önálló aspirantúra megszüntetésének célja, hogy a szervezett aspiránsképzésben részt nem vevő kutatók és egyetemi oktatók minden bürokratikus megkötöttség nélkül bármikor benyújthassák kandidátusi értekezésüket és kérhessék a vizsgák letételének és disszertációjuk megvédésének az engedélyezését.

Annak ellenére, hogy az akadémiai osztályok az új rendelet szerint közvetlenül nem felelősek az aspiránsképzésért és tudományos minősítésért, ténylegesen mégis komoly felelősség hárul az Osztály akadémikusaira és a szakterületeinkhez tartozó tudományos fokozattal rendelkező kutatókra, mert az aspiránsok képzése, a disszertációk elbírálása természetesen továbbra is rájuk hárul. Úgy gondoljuk, hogy felelősségük ilyen értelmű hangsúlyozása fontos.

A TUDOMÁNYOS MINŐSÍTŐ BIZOTTSÁG az Osztályhoz tartozó szakterületeken két szakbizottságot alakított, a *Matematikai*, valamint a *Fizikai és Csillagászati Szakbizottságot*, amelyekben az Osztály akadémikusai, doktorai és kandidátusai közül 30-an vesznek részt, közülük szép számmal olyan fiatalok is, akiket eddig tudományszervezői, tudománypolitikai tevékenységbe még nem vontak be.

A TUDOMÁNYOS MINŐSÍTŐ BIZOTTSÁG és az Osztály kapcsolata biztosítva van azzal, hogy az előbbi testületében és az említett két szakbizottságban az Osztályvezetőség és az Osztály bizottságainak több tagja vesz részt és így a rendelet adta lehetőségeken belül érvényesíteni tudják az osztály elképzeléseit, főleg az aspiránsképzés terén. De ezen túlmenően a TUDOMÁNYOS MINŐSÍTŐ BIZOTTSÁG lényeges kérdésekben továbbra is kikéri az Osztályvezetőség véleményét, így pl. a doktori disszertációt benyújtók tudományos munkásságát az Osztályvezetőség fogja értékelni és véleményezni.

Az 1963. évi osztályvezetőségi beszámoló óta a tudományos minősítések terén elért számszerű fejlődésről néhány adatot említek:

A beszámolási időszak alatt még az osztály rendezésében két matematikai doktori és 1 kandidátusi, 1 fizikus doktori és 8 kandidátusi vita megrendezésére került sor. Ennél többen nyújtottak be disszertációt ezen idő alatt, azonban ezeket további eljárásra már a TUDOMÁNYOS MINŐSÍTŐ BIZOTTSÁGnak adtuk át. Jelenleg 17 matematikai tudományok doktora, 14 fizikai tudományok doktora, 59 matematikai tudományok kandidátusa és 60 fizikai tudományok kandidátusa fokozattal rendelkező kutató dolgozik az Osztályhoz tartozó tudományterületeken. A jövőben az eddigieknél fokozottabban arra kell törekednünk, a TUDOMÁNYOS MINŐSÍTŐ BIZOTTSÁGgal együttműködve, hogy főleg az aspiránsképzés olyan szakterületeken történjék, amelyek távlati terveinkben is kiemelkedő jelentőségűek.

A káderutánpótlás mindig nagy gondot jelentő problémájának elősegítésére — ha egyelőre még szerény keretek között is — új lehetőséget kaptunk azáltal, hogy módunk nyílt néhány egyetemi hallgatóval társadalmi ösztöndíj-szerződést kötni. Ezzel lehetőségünk van arra, hogy jóképességű, tehetségesnek mutatkozó fiatalokat már egyetemi tanulmányaik alatt olyan kutatási területekre irányítsunk, amelyek a távlati kutatási tervekben kiemelt fontosságúak. Ez a lehetőség évről évre adva lesz és reméljük, hogy egyre bővülő keretek között.

VI.

Az Osztály testületi munkája

Az Akadémia átszervezését követő években az Akadémia *bizottságai* alkották azt a szervezetet, amely a tudományos élet országos tudományos fórumaként működött. A fejlődés során azonban új tudományos irányító szervek (TFT, OMFB, OAB, stb.)* jöttek létre, s ezek keretében, valamint más országos szervek kötelékében is új bizottságok, sőt bizottsági hálózatok alakultak, amelyek kihatnak az akadémiai bizottságokra is. E többféle jellegű bizottsági hálózat nem illeszkedik egységes rendszerbe, hanem többé-kevésbé keresztezi egymást, sok esetben azonos feladatokat lát el, és egy-egy szakterületen nagyrészt ugyanazok a személyek vesznek részt a különféle testületekben. A jelenlegi helyzetet olyannak ítélte az Elnökség, hogy mielőbb ésszerű rendezésre van szükség: az országosan rendezendő problémákat is, az Akadémián belüli bizottsági kérdéseket is meg kell oldani. Az országosan rendezendő problémák megoldása csak hosszabb idő alatt és igen sok szerv közreműködésével lehetséges, azonban addig is az Akadémia körében bizonyos ésszerű rendezés végrehajtása kívánatos és lehetséges.

Ebből kiindulva az Osztályvezetőség megvizsgálta a III. Osztály bizottságait és javaslatot tett a testületi rendszer megváltoztatására.

Az Osztályvezetőség javaslata a következő:

Állandó szakbizottságok működjenek továbbra is az Osztály keretében azon tudományterületeken, amelyeken saját kutatási bázisuk van, vagyis amelyeken saját irányítás alatt levő intézetek, kutatócsoportok, laboratóriumok, ill. tanszékek működnek.

Ennek megfelelően az Osztály keretében a következő állandó szakbizottságok legyenek:

Matematikai Bizottság,

Fizikai Bizottság,

Csillagász Bizottság.

Ma már a fizikai alapkutatások annyira széleskörűen és specializáltan folynak, hogy ezen területek részletes szakmai irányításával egy komplex bizottság nem tud behatóan foglalkozni. Ezért szükség van arra, hogy a hazánkban folyó fizikai alapkutatások fő irányainak megfelelően a *Fizikai Bizottság* öt állandó jellegű albizottságot hozzon létre. A javasolt öt albizottság a következő:

Nagyenergiájú és elemi részecskék fizikájának albizottsága.

Az albizottság feladata az e területeken az Osztályhoz tartozó intézetekben, a KFKI[1]-ban és az egyetemeken folyó kutatómunka koordinálása, irányítása.

Atomhéj fizikai albizottság.

Az albizottság feladata az Osztályhoz tartozó intézetekben, a KFKI-ban és az egyetemeken folyó atomok statisztikus vizsgálatára, kvantumkémiai, a fény természetére, atomok gerjesztett állapotára és magnetohigrodinamikai vizsgálatokra vonatkozó kutatások koordinálása, irányítása.

* Tudományos és Felsőoktatási Tanács, Országos Műszaki Fejlesztési Bizottság, Országos Atomenergia Bizottság.

[1] Központi Fizikai Kutató Intézet.

Magfizikai albizottság.

Az albizottság elsősorban az Osztályhoz tartozó intézetekben folyó elméleti és kísérleti magfizikai kutatások irányításával és koordinálásával foglalkozna, amellett tájékozódna a KFKI-ban folyó ilyen jellegű kutatásokról is.

Szilárdtest fizikai albizottság.

Ez az albizottság foglalkozna az Osztályhoz tartozó intézetekben folyó szilárdtest fizikai kutatásokkal és véleményezné a VI. Osztályhoz tartozó, MÜFI-ben[2] folyó szilárdtest fizikai kutatásokat a VI. Osztály Osztályvezetősége részére. Ez az albizottság szakmai kapcsolatot tartana a KFKI-val és a Művelődésügyi Minisztérium felügyelete alá tartozó ELTE[3] Kísérleti Fizikai Intézettel, ahol ugyancsak folynak szilárdtest fizikai kutatások.

Spektroszkópiai albizottság.

Az albizottság feladata, hogy a különböző főhatóságokhoz tartozó intézményekben folyó spektroszkópiai kutatásokat koordinálja és a tudományterülettel kapcsolatos kérdésekben javaslatokat dolgozzon ki a III., a VI. és a VII. Osztály Osztályvezetősége részére.

A *Csillagász Szakbizottság*hoz tartozó albizottság:

Szputnyikmegfigyelési albizottság.

Az albizottság feladata, hogy a hazai négy megfigyelő állomás munkáját koordinálja és irányítsa.

A fenti albizottságok állandó jelleggel működnének, azonban a szakbizottságok szükség szerint meghatározott feladatok elvégzésére további *ad hoc* albizottságokat, ill. munkabizottságokat hozhatnak létre.

Az *Országos Távlati Tudományos Kutatási Terv* azon főfeladatának koordináló bizottsága, amelynek szakterülete beleilleszkedik valamelyik szakbizottság, vagy albizottság területébe, utóbbi keretében folytatná működését oly módon, hogy az illető koordináló bizottság teljes mértékben azonos legyen a megfelelő szakbizottsággal, ill. albizottsággal.

A *nemzetközi tudományos szervezetek* nemzeti bizottságai — hacsak ez ellen különösebb érv nem szól — ugyancsak azonosak legyenek a megfelelő szakbizottságokkal, ill. albizottságokkal. (Célszerűnek látszik, hogy a Nemzetközi Matematikai Unió nemzeti bizottsága a jövőben is a Bolyai János Matematikai Társulat keretében működjék.)

Az Osztályvezetőség javasolta az intézetek tudományos tanácsának megszüntetését oly módon, hogy ezen testületek feladatát a jövőben az *intézeti kollégiumok* vegyék át. Ennek a kollégiumnak a tagjai lennének az intézet igazgatója, igazgatóhelyettese, osztályvezetői és önálló csoportvezetői, továbbá 3—4 kiemelkedő, az intézetben dolgozó szakember. Külső szakemberek bevonását ajánlatosnak tartjuk, de kötelezően nem írnánk elő.

Az Osztály *folyóiratai*nak szerkesztőbizottságai továbbra is a jelenlegi szervezeti formában működjenek.

A kialakított javaslatnak megfelelően a Közgyűlés után kerül sor a testületek újjáválasztására.

[2] Műszaki Fizikai Kutató Intézet.
[3] Eötvös Loránd Tudományegyetem.

A *szakbizottságok* általában elismert fórumai voltak az illető tudományterületeknek. Egyik testület sem foglalkozott közvetlenül tudományos tevékenységgel, ez azonban nem is volt szükséges, mivel az Osztály megfelelő matematikai, fizikai és csillagászati kutatóintézeti, ill. kutatócsoport hálózattal rendelkezik és ezért a testületek csak elvi irányító és tudományszervező, tudományigazgatási feladatokkal foglalkoztak. A testületek kapcsolatai a távlati tervek koordináló bizottságai közül azokkal jók, amelyek a III. Osztályhoz tartoznak. Az elmúlt időszakban a szakbizottságok több alkalommal közösen tanácskoztak ezen koordináló bizottságokkal, ill. azok vezetőivel az illető távlati kutatási főfeladatokkal kapcsolatos problémákról. Több alkalommal a szakbizottságok képviseltették magukat olyan koordinációs bizottságok ülésein is, amelyek szervezetileg nem tartoznak a III. Osztályhoz, de amely koordináló bizottsághoz az Osztályhoz tartozó kutatási területek is tartoznak.

A szakbizottságok kapcsolata az Osztályvezetőséggel jónak mondható és figyelembe véve azt, hogy az egyes testületek több tagja egyúttal az Osztályvezetőség tagja is, részben megkönnyítette az Osztályvezetőség munkáját. Vigyázni kell azonban, hogy a kapcsolatnak e formája ne vezessen formalizmusra.

A bizottságok munkájában az elért eredmények és fejlődés ellenére több fogyatékosság tapasztalható, amely teljes egészében még sem csak a testületek hibája. Az egyik ilyen hiányosság pl., hogy meglehetősen sokat foglalkoznak a bizottságok kisebb jelentőségű szervezési kérdésekkel és viszonylag kevés idejük marad egy-egy kutatási terület közös kérdéseinek alapos megvitatására. Másik fogyatékosság, hogy több esetben nem sikerült a hozott helyes határozatokat, intézkedéseket és állásfoglalásokat megfelelő magas szinten érvényre juttatni. (Pl. a 3. sz. távlati főfeladat célkitűzéseinek megváltoztatása, intézmények megfelelő és korszerű elhelyezése, felszerelése stb.)

Hibaként róható fel az egyes testületek munkájában az, hogy néhányan a tagok közül meglehetősen passzívak, de vannak olyan bizottsági tagok, is akik egyes kérdésekben szubjektív álláspontot foglalva el, nem képviselik a hozzájuk tartozó tudományterületek országos érdekeit, nem törekszenek objektív állásfoglalás kialakítására.

VII.

Nemzetközi kapcsolatok

Az Osztály nemzetközi kapcsolatait illetően minden vonatkozásban fejlődésről számolhatunk be. A számszerű adatoknál többet mondanak az érdemi fejlődés elemei.

Az elmúlt évek során kezdetét vette a szocialista országok akadémiáinak eddiginél magasabb fokú többoldalú együttműködése, majd a KGST keretében is megindult a tudományos kutatások koordinálása.

A szocialista akadémiák többoldalú együttműködése keretében az Osztályt közvetlenül 4 témakör érinti, amelyek kapcsolatban vannak az Osztályhoz tartozó tudományágakkal. Ezenkívül a MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIÁnak a többoldalú együttműködés keretében van olyan témája, amelyben bár a III. Osztály érdekelt, másik osztály látja el a koordinációs feladatot. Az együttműködés lehetőségeinek és eredményeinek fokozottabb kihasználása érdekében kívánatos, hogy megjavuljon az érintett magyar tudományos szervek közötti együttműködés, miután az elmúlt évek folyamán ennek voltak bizonyos hiányosságai.

A szocialista országok tudományos akadémiái többoldalú együttműködése keretében a megkezdett kapcsolatokat az eddiginél intenzívebben és tervszerűbben kell művelni, anélkül azonban, hogy kötelezettségeinket általunk nehezen teljesíthető új feladatokkal bővítenénk. A többoldalú témák felelősei csak előzetes osztályvezetőségi jóváhagyással vállaljanak a jövőben kötelezettségeket.

Az elmúlt napokban zajlott le a *szocialista akadémiák* szokásos *évi értekezlete* Szófiában, amely megfelelő határozatokat hozott arra, hogy az akadémiák közötti többoldalú együttműködést eredményesen tovább lehessen fejleszteni.

Az egyes baráti országok akadémiái egyezményeiben rögzített kétoldalú témákban 17 matematikai, 3 fizikai és 3 csillagászati téma szerepel. Mint a számok is mutatják a matematika terén igen nagyszámú egyezményben rögzített együttműködés van, azonban ezek nem mindegyike takar valóban eredményes együttműködést.

Az Osztály az elmúlt évben megvizsgálta az Osztályhoz tartozó tudományterületek kétoldalú közös kutatásának helyzetét és ennek eredményeképpen több tényleges együttműködést nem tartalmazó témát törlésre javasolt. Az Osztályhoz tartozó közös kutatási témák közül mint igen eredményes együttműködést szeretnénk kiemelni a MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZETnek az analitikai számelmélet témában a LENGYEL MATEMATIKAI INTÉZETtel, továbbá ugyancsak a Matematikai Kutató Intézetnek az automatikus vezérlés témában a szovjet féllel, ill. a román féllel a funkcionálanalízis és valós függvénytan terén létesített eredményes kutatásait. Gyümölcsöző együttműködés folyik fizikai téren a BOLGÁR TUDOMÁNYOS AKADÉMIÁval a kozmikus sugárzás terén a KFKI részéről, továbbá az ORVOSI FIZIKAI INTÉZET és a megfelelő csehszlovák és román partnerintézetek között az ion-kristályok, ill. a színcentrumok spektroszkópiai vizsgálata terén. Igen eredményes és mindkét fél részére egyaránt hasznos a CSILLAGVIZSGÁLÓ INTÉZET és a megfelelő szovjet és NDK felek között a változócsillagok témában folytatott együttműködés.

Fokozatosan fel kell számolni a kétoldalú akadémiai közös kutatási témák terén még fellelhető formalizmust. Bár e téren az elmúlt évben történt felmérés során javulás történt, még mindig szükség van arra, hogy a nem eléggé meggondoltan vállalt közös feladatok törlésével, a helyesen kiválasztott feladatoknak pedig kölcsönös kiküldések útján történő művelésével a tényleges kutatásokat előbbre vigyük és erőinket ezekre összpontosítsuk.

Fejlődés mutatkozik a kiutazások terén is mind számszerűségben, mind a kiutazás hasznosságát, ill. célszerűségét illetően. A baráti országokkal kötött egyezményekben történő kiutazások elsősorban a fiatal kutatók számára nyújtanak fejlődési lehetőségeket. Beigazolódott, hogy leginkább eredményesek a fiatalok számára a hosszabb tanulmányutak. Az elmúlt évben az egyezményekben rögzített tanulmányutakon kívül baráti országokba már lehetőség nyílt devizás hosszabb tanulmányutak lebonyolítására is.

Jelentős fejlődés van a tőkés országokkal folytatott kapcsolatokban is. Ezek a kapcsolatok egyre inkább szervezett formát öltenek, így az elkövetkező év folyamán szervezett kiutazásokat fog az Akadémia megvalósítani Finnországgal, a Royal Society-vel, Görögországgal. Az Akadémián keresztül új ösztöndíjlehetőségek felhasználása történhet meg, így pl. a kanadai NATIONAL RESEARCH COUNCIL, az INTER-UNIVERSITY COMMITTEE, a FORD-alapítvány és *olasz állami ösztöndíjak* révén. Természetesen tovább folyik az együttműködés a CNRS-el, ennek keretében az elmúlt év folyamán egy tudományos dolgozó utazott Franciaországba, továbbá a *Római Akadémiával*, ahol több az Osztályhoz tartozó kutató részére volt tanulmányút biztosítva. Jelentősen megnövekedett az Egyesült Államokba történő kiutazások száma is.

Ezek a kétségtelenül lényeges eredmények azonban új problémákat is támasztottak, amelyek igénylik a határozott irányelvek kialakítását a további fejlődésre vonatkozóan.

Küzdeni kell az ellen a felfogás ellen, hogy a viszonosság nélküli, kizárólag a meghívó intézmény költségére történő kiutazások mindenképpen előnyösek. Fel kell figyelni arra, hogy a fejlett tőkésországok, elsősorban az USA és az NSZK bizonyos körei erőteljes tudománypolitikai offenzívát is folytatnak és erre jelentékeny költséget áldoznak.

Közös elveket kell kialakítani először az Akadémián belül és ezt követően a többi magyar főhatósággal együtt a nyugati meghívások elbírálására. A kormány rendelkezése szerint magánkezdeményezésű tanulmányút engedélyezhető olyan személyeknek, akik egyébként a kiutazási feltételeknek megfelelnek és tanulmányuk az állam érdekeit szolgálja. Csak akinek az útja ilyennek minősül, az tarthat számot az Akadémia erkölcsi támogatására, fizetéses szabadságra, útiokmányok beszerzésére.

Az Osztály nemzetközi szervezetekben 5 kollektív és 4 egyéni tudományos tagsággal rendelkezik. Az elmúlt beszámoló óta elsősorban az IUPAP-al fennálló kapcsolatainkban számolhatunk be jelentős fejlődésről. Az IUPAP legutóbbi közgyűlésén 3 albizottságába választottak be magyar tagot, elsősorban a szocialista akadémiák IUPAP bizottságainak magyar kezdeményezésre létrejött együttműködése, ill. a szervezet ülésén kifejtett tevékenységünk eredményeként.

A NEMZETKÖZI MATEMATIKAI UNIÓ több ízben kért fel központi előadókat tudományos rendezvényeire. Az elmúlt év folyamán a Magyar Tudományos Akadémia a BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULATtal együttműködésben az Unió támogatásával *Abel-csoportok* témával foglalkozó nemzetközi kollokviumot rendezett.

A magyar csillagászok aktívan részt vesznek a NEMZETKÖZI CSILLAGÁSZATI UNIÓ tevékenységében. A magyar csillagászok közül öten általános tagjai az UNIÓnak, ketten pedig tagjai a változócsillag szekciónak is. A hazánkban folyó csillagászati kutatások elismerését jelenti az UNIÓ részéről, hogy a CSILLAGVIZSGÁLÓ INTÉZETet bízták meg az *Information Bulletin on Variable Stars* című nemzetközi kiadvány elkészítésével és az érdekelt intézményeknek való szétküldésével.

Megfelelő kapcsolat alakult ki a kiküldetések terén az ORSZÁGOS ATOMENERGIA BIZOTTSÁGgal, ennek többek között az volt az eredménye, hogy a Magyar Tudományos Akadémia, ill. a III. Osztály kiküldöttei résztvettek csaknem minden számukra jelentős dubnai tudományos rendezvényen. Az Osztályhoz tartozó kutatók közül többen dolgoznak jelenleg is Dubnában és több tudományos munkatárs kiküldetése folyamatban van.

Az Osztály rendezvényei közül elsősorban a MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZET UNESCO *matematikai tanfolyamá*ról kell megemlékezni, amelyet az intézet az UNESCO felkérésére fejlődő ázsiai, afrikai és délamerikai országok szakembereinek továbbképzésére tart. A tanfolyam eddig eltelt ideje azt mutatja, hogy a MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZET, ill. a tanfolyammal foglalkozó munkatársai igen eredményes és sikeres munkát végeztek, annak ellenére, hogy ez a tanfolyam a maga nemében első ilyen típusú tanfolyam volt, másrészt pedig a jegyzetek írása, előadások tartása angol nyelven igen nagy elfoglaltságot jelentett és óriási követelményeket támasztott az intézet tudományos kutatóival szemben.

A múlt évre esett az Akadémia eddigi legnagyobb méretű tudományos rendezvénye, a *Spektroszkópiai Kongresszus* is, amelynek szervezési munkáját az Osztály végezte. Közel 500 külföldi résztvevő volt az IUPAC EURÓPAI MOLEKULA SPEKTROSZKÓPIAI CSOPORTjának 2 évenként rendszeresen megrendezett kongresszusán, amelyet a múlt nyáron, júliusban tartottunk meg. Ez volt az első eset, hogy a szervezet kongresszusát szocialista országban tartotta meg.

További rendezvényei voltak az Osztálynak az EÖTVÖS LORÁND FIZIKAI TÁRSULATtal közösen megrendezett *magfizikai kollokvium*, amelynek célja volt, hogy összegezve beszámolót adjon a hazai magfizikai kutatások jelenlegi helyzetéről és ezt a feladatát sikeresen teljesítette.

Fentebb beszéltem az *Abel-csoportok kollokvium*ról, amely mind szervezésileg, mind tudományosan a viszonylag nagyszámban résztvevő külföldiek körében teljes sikert aratott.

VIII.

Könyvkiadás

A könyv- és folyóiratkiadás az Osztály tudományos, tudománypolitikai és tudományszervezői tevékenységének jelentős részét képezi. E téren a beszámolási időszak alatt bizonyos vonatkozásokban sikerült előre lépni, azonban számos probléma még megoldásra vár.

Előre léptünk bizonyos mértékig a megjelent művek számát illetően és a könyvkiadás tervszerűségének fokozásában is, noha a legtöbb probléma még ez utóbbi téren vár megoldásra. Erre a kérdésre a következőkben még visszatérünk.

Megjelent könyveink tudományos színvonalát és kiállítását tekintve meg lehetünk elégedve, szinte kivétel nélkül igen pozitív bírálatot kaptak mind a hazai, mind a külföldi szakfolyóiratokban. E vonatkozásban különösen kiemelkedőek a matematikai monográfiák. Magyar nyelven megjelent matematikai könyveinket az AKADÉMIAI KIADÓ kivétel nélkül megjelenteti legalább egy, de többnyire két idegen nyelven is és ezek jelentős sikert aratnak. Ez a tény nagy erkölcsi sikere tudományos életünknek, de dicséret illeti az AKADÉMIAI KIADÓt is gondos munkájáért.

A beszámolási időszakban megjelent könyvek jegyzékét a beszámoló melléklete tartalmazza.

Könyveink tudományos színvonalával — ahogy előbb már említettük — meg lehetünk elégedve, de sokkal kevésbé atekintetben, hogy a matematika és fizika számos fontos területéről egyáltalán nem, vagy csak alig jelentek meg monográfiák.

Ez a tény még az előző évek nem eléggé tervszerű könyvkiadását tükrözi. Eddig ugyanis a tervek úgy készültek, hogy a szerzők vagy maguk jelentkeztek könyv írására, vagy nagy számú kutatót kértünk fel minden tervszerűség nélkül monográfiák írására. Természetesen az önkéntes jelentkezést továbbra sem kívánjuk megszüntetni, de szükséges, hogy a könyvkiadási munkába is nagyobb tervszerűséget vigyünk, figyelembe véve itt is a távlati kutatási terveket. A tervszerűség fokozásában az utóbbi évben főleg a MATEMATIKAI BIZOTTSÁG jutott előre. Fel-mérték, hogy 1950-től a matematika területein milyen művek jelentek meg és ennek alapján megjelölték a matematika azon fejezeteit, ahol könyv megjelentetése szükséges. (E fejezetek a következők: információelmélet, sztochasztikus folyamatok elmélete, operációkutatás, matematikai programozás, gráfelmélet és alkalmazásai, differenciálgeometria, automaták elmélete, általános topológia, algebrai topológia, topológikus vektorterek, funkcionálanalízis.) Ezt követően a kijelölt fejezetek 2—3 művelőjétől kértek be konkrét javaslatokat és ezek alapján alakították ki alapos vita után végleges javaslataikat. Azon természetesen lehet vitatkozni, hogy a bizottság által kijelölt fejezetek mindegyikében szükséges-e monográfiát írni, vagy egyes fejezetek kihagyása helyes volt-e, jók-e a kialakított arányok, de a módszer, ahogyan a MATEMATIKAI BIZOTTSÁG ezt a fontos feladatát végezte, az igen jó és nagy fejlődést jelent az előző évek módszereihez képest. Említésre méltó és követendő példa, hogy fiatal matematikusok is többen szerepelnek a jóváhagyott művek szerzői között. További kutatók felkérése, hogy vállalkozzanak könyv írására, még folyamatban van.

A fizikai könyvkiadással kapcsolatban ilyen vonatkozásban még nem számolhatunk be eredményekről. Mind a könyvkiadási tervben levő művek száma, mind a tervszerűség tekintetében bőven van pótolni való. Helyes lenne és javasoljuk a FIZIKAI BIZOTTSÁGnak, hogy a könyvkiadás ügyét még e naptári év folyamán tűzze ismét napirendjére és hasonló módszer alapján alakítsa ki javaslatait, mint a MATEMATIKAI BIZOTTSÁG.

A folyóiratkiadással e beszámolóban nem kívánunk részletesen foglalkozni, mert e problémával az Osztályvezetőség a közeljövőben külön is foglalkozik majd és részletesen értékelni fogja az eredményeket és problémákat egyaránt. Ennek az értékelésnek most nem kívánunk elébe vágni. Annyit minden esetre megállapíthatunk, hogy folyóirataink tudományos színvonala változatlanul igen jó és actáink külföldi szakkörökben ma már elismert folyóiratok, amit mutat az is, hogy nagyszámban publikálnak benne külföldi kutatók is. Az *Acta Mathematica* több évfolyamát a Kiadó újra nyomatta külföldi megrendelésre.

A két actánk merőben eltérő problémákkal küzd. Az *Acta Mathematica* szerkesztősége ma már sok külföldi publikációt kénytelen visszautasítani, aminek részben az az oka, hogy a hazai és külföldi publikációk olyan nagy számban érkeznek, hogy a folyóirat már nem tud vállalkozni közlésükre. A hazai szerzők gyakran hosszú ideig kénytelenek várakozni a publikálási lehetőségre. Itt azt kell majd az Osztályvezetőségnek megvizsgálni, hogy milyen további hazai kiadású, idegen nyelvű publikációs lehetőséget kell teremteni matematikusaink számára. Az *Acta Physica* ellenkező problémákkal küzd. Az előző évekkel szemben csökkent a folyóiratnak beküldött publikációk száma. Ebben az esetben ennek okát kell majd az Osztályvezetőségnek feltárni és megfelelő intézkedéseket tenni a probléma megszüntetésére. Magyar nyelvű folyóirataink problémájával is foglalkozni kell, meg kell vizsgálni pl. az *Osztályközlemények* problémáját.

IX.

A kutatási eredmények gyakorlati alkalmazása

Sokáig nem volt egyértelmű álláspont kutatóink körében azzal kapcsolatban, hogy az alapkutatásokat folytató intézményeinknek mi a hivatása és a kötelessége kutatási eredményeik sorsát illetően. Ezért határozta el a múlt évi Közgyűlés azt, hogy az Intézetek vezetőinek kötelességévé kell tenni az olyan eredmények számon tartását, amelyek felhasználásra alkalmasak és hogy azok alkalmazása érdekében tegyék meg a szükséges lépéseket. A szocialista építés általános érdeke, hogy e tekintetben még tovább menjünk. Nem olyan irányba, hogy az alapkutatásokat elhanyagolva valamilyen prakticista kutatási programot állítsunk össze, hanem afelé kell haladnunk, hogy általában tekintsük akadémiai feladatnak alapkutatásaink szervezett kapcsolatának fejlesztését az alkalmazott és fejlesztési kutatásokkal és magával a gyakorlattal. A kibernetikai, fizikai és matematikai tudományterületeken külön felelősséget is kell vállalnunk azért, hogy alapkutatásainkkal, azok eredményeinek hasznosításával hozzájáruljunk egyes gazdasági problémáknak a megoldásához.

X.

A kutatások anyagi feltételei

Az anyagi feltételek bővítése együttjárt egész tudománypolitikánk előre haladásával. Érthető az is, hogy az igények a rendelkezésre álló kereteket meghaladták, s állandóan a helyes elosztás gondjaival kellett küzdenünk. Meg kell azonban mondanunk, hogy műszerellátottságunk, különösen pedig import műszerekben, aggasztóan szűkös, ami már a súlyos lemaradás veszélyét idézi fel.

Az Osztály irányító tevékenységének sokoldalúsága, a hozzá tartozó tudományterületek, tudományágak sokrétűsége nagy terheket rótt az Osztályvezetőségre. Az Osztály olyan széles tudományterületet fog át, hogy az Osztályvezetőség egymástól eléggé távolálló szakmák képviselőiből tevődik össze. Igazgatási funkcióját így is kielégítően tudta ellátni, azonban amikor érdemi tudományos kérdésben kellett állást foglalnia, néha nehéz helyzetbe került, ezért vagy csak általános tudománypolitikai szempontok szerint döntött, vagy szaktekintély alapján fogadta el a javasolt álláspontot. Ez nem csak a III. Osztály problémája volt.

Minden lényeges osztályügy az Osztályvezetőség elé került, és az ügyek egy részében komoly érdemi vita alakult ki. Aránytalanság volt azonban abban, hogy szinte kizárólag tudományszervezési-igazgatási kérdésekkel foglalkozott, s érdemi tudományos kérdéseket alig tárgyalt. Nagy kérdés az, hogy fenntartható-e az a gyakorlat, hogy az osztályvezetőségek egyben tudományos testületek is és igazgatási vezetőtestületek is legyenek, amikor a tapasztalat szerint a kettőt együtt általában nem képesek ellátni. A kérdés eldöntése azonban összefügg az akadémiai szervezet más problémáival is. Mindezekkel a kérdésekkel is az Akadémia ez évi Közgyűlése is foglalkozik.

Az Osztályvezetőség ebben az évben sem kívánta hosszú szóbeli beszámolóval igénybevenni az Osztályülés idejét, ezért az Osztály és intézetek működéséről, a kutatómunka eredményeiről, a számszerű adatokat tartalmazó részletes jelentést mellékletként írásban juttatta el a jelenlévőknek. Az idei osztályülést főleg arra kívánta felhasználni az Osztályvezetőség, hogy a figyelmet a tudománypolitikai és tudományszervezési kérdésekre irányítsa.

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYA 1964. ÉVI OSZTÁLYÜLÉSE ELÉ TERJESZTETT OSZTÁLYVEZETŐSÉGI BESZÁMOLÓ MELLÉKLETE

A KUTATÁSOK JELENTŐSEBB EREDMÉNYEI

Az Osztályhoz tartozó, vagy az Osztály által anyagilag támogatott és a Művelődésügyi Minisztériumhoz tartozó matematikai, fizikai és csillagászati intézmények kutatási eredményei:

MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZET

Az Intézet létszáma 96 fő, ebből 69 kutató, akik közül 15 félállású. A megalakult Geometriai Osztállyal a tudományos osztályok száma 11-re emelkedett. Az osztályokon belül 5 önálló csoport működik.

A kollektív tudományos munka fő formáját 1963-ban is a szemináriumok képezték: összesen 262 szemináriumi ülés megtartására került sor.

Az Intézet osztályai az 1963 évre 41 terv-témalapot töltöttek ki, amelyen a távlati tudományos kutatási terv 97 témáját tüntették fel, mint amelyekkel az év során foglalkozni kívánnak. Ezek közül 62 témával kapcsolatban új eredmények jöttek létre, míg a 35 témára vonatkozólag a kutatás eredményeinek beérése a jövő évben várható. A kutatók 140 dolgozatot és emellett 54 egyéb munkát is írtak (jegyzetek, népszerűsítő művek, könyvismertetések stb.). Az Intézet munkatársai öszszesen 123 referátumot írtak 5 nemzetközi referáló folyóirat részére, továbbá 250 könyvet, dolgozatot lektoráltak. A kutatók az intézeten kívül 235 tudományos előadást tartottak, amelyből 136 külföldre esik. Az UNESCO tanfolyamon 1963 december 31-ig 120 óra tartamú előadássorozatot tartottak.

Az UNESCO felkérésére az Intézet által rendezett 6 hónapos tanfolyam kiemelkedő helyet foglal el az Intézet 1963. évi tevékenységében. A tanfolyam keretében az Intézet munkatársai 9 tengerentúli országból jött 14 fiatalt vezetnek be a valószínűségszámításba, a matematikai statisztikába és annak alkalmazásaiba.

A matematika gyakorlati alkalmazásai terén az Intézet 1963-ban is jelentős eredményeket ért el. A publikációk közül 44 közöl a gyakorlati alkalmazásra vonatkozó új eredményeket. Az elintézett külső megbízások száma 161 volt, míg az érkezett megbízások száma 180. Ezzel az Intézet alapítása óta megválaszolt megbízások száma 1772.

1963-ban az Intézet 39 munkatársa 79 alkalommal járt külföldön. A munkatársak közül többen tartottak tanfolyamot, szemináriumot külföldön. Külföldi intézetekkel kooperálva 9 egyezményben szereplő közös kutatási témán dolgoznak az Intézetben. A múlt év során számos külföldi (amerikai, ausztriai, csehszlovák, ghanai, indus, jugoszláv, kanadai, lengyel, német, román, szovjet) tudós tett látogatást az Intézetben, közülük sokan előadásokat is tartottak.

1963-ban az Intézet Közleményeinek 4 füzete jelent meg és leadásra került 1 füzet, 2 további füzet pedig leadás előtt áll. Közleményeikért 204 folyóiratot kaptak cserébe (78-at szocialista, 126-ot kapitalista országból).

Az Intézet 11 munkatársa vett részt mint külső előadó az egyetemi oktatásban összesen 14 kollégium tartásával. Az év során a munkatársak 10 tanfolyamot tartottak, amelyek közül 6 külföldön került megrendezésre. Egy kutató védte meg kandidátusi, egy pedig a tudományok doktora értekezését.

Tovább folytatódtak az 1962-ben megkezdett rendszeres filozófiai szemináriumok 15 résztvevővel. A munkatársak közül hárman a Marxizmus—Leninizmus Esti Egyetem hallgatói.

A könyvtár fejlesztése: 1257 kötet, ebből vétel 996 kötet, csere 45 kötet és ajándék 216 kötet. A folyóiratállomány szaporodása több mint 300 kötet. A könyvtárat rendszeresen használó nem-intézeti tagok száma 350.

Költségvetésük (4 millió Ft) biztosította a kutatómunka anyagi feltételeit.

Témabeszámoló

41 témával foglalkoztak.

1. *A valószínűségszámítás alkalmazása a matematika más ágaiban.*
(Témafelelős: RÉNYI ALFRÉD.)
Eredmények születtek a valószínűségszámítás számelméleti, gráfelméleti, diszkrét geometriai alkalmazásával kapcsolatban (9 dolgozat).
2. *Sztochasztikus folyamatok elmélete és alkalmazásai.*
(Témafelelős: RÉNYI ALFRÉD.)
Timföldgyártás gépparkja gazdaságos kihasználása problémájának két részletkérdése megoldódott (2 dolgozat).
3. *Nem-független valószínűségi változó-sorozatokra vonatkozó határeloszlástételek.*
(Témafelelős: BÉKÉSSY ANDRÁS.)
Kidolgozták a klasszikus betöltési problémákra vonatkozó határeloszlástételeket (6 dolgozat).
4. *A valószínűségszámítás alapjaira; a valószínűségszámítás határeloszlástételeire vonatkozó kutatások.*
(Témafelelős: RÉNYI ALFRÉD.)
Foglalkoztak a keverék-felbontásokkal kapcsolatos sűrűségfüggvény alakjellemzésével, a karakterisztikus függvénnyel és a stabilis eredménysorozatokkal kapcsolatos problémákkal. Eredményeket értek el a feltételes valószínűségekkel és a valószínűségelmélet alapjaival kapcsolatban (6 dolgozat).
5. *Információelméleti kutatások.*
(Témafelelős: RÉNYI ALFRÉD.)
Az információelmélet alapjaira vonatkozóan értek el eredményeket (4 dolgozat).
6. *Matematikai programozás.*
(Témafelelős: PRÉKOPA ANDRÁS.)
Egy raktározási problémával és a sztochasztikus programozás kérdéseivel foglalkoztak. Eredményeket értek el a kvázikonkáv programozás és a lineáris optimalizálás kérdéseiben (5 dolgozat).
7. *Készletezési problémák.*
(Témafelelős: PRÉKOPA ANDRÁS.)
Egy raktározási problémával értek el eredményt (1 dolgozat).
8. *Valószínűségszámítási vizsgálatok.*
(Témafelelős: PRÉKOPA ANDRÁS.)
Vizsgálták a véletlen fluktuációkat, a véletlen mátrixokat és determinánsokat. Foglalkoztak a sztochasztikus folyamatok statisztikai analízisével.

9. *A statisztikai mintavétel problémái. A rendezett minták elmélete. A minőségellenőrzés matematikai statisztikai módszerei.*
(Témafelelős: VINCZE ISTVÁN.)
Foglalkoztak a népesség szaporulati mutatóinak kérdéseivel, a selejtarány *Liebermann—Resnikov*-féle becslésének, eloszlásának és szórásának meghatározásával (1 dolgozat).

9a *A matematikai statisztika elvi kérdései. A statisztikai becslések elmélete. A statisztikai hipotézisek vizsgálata.*
(Témafelelős: SARKADI KÁROLY.)
Újabb frakcionális faktoriális kísérlet tervét dolgozták ki. Foglalkoztak megbízhatósági vizsgálatokkal kapcsolatos becslési és regressziós problémákkal, elektromos kísérletek kiértékelésének metodikájával (5 dolgozat).

10. *A matematikai statisztika mezőgazdasági, orvosi, biológiai alkalmazásai.*
(Témafelelős: JUVANCZ IRÉNEUSZ.)
Résztvettek a klinikai pharmakologia feltételeinek megteremtésében, egyes szerek irányított klinikai kipróbálásában, stb.

11. *Nomográfia.*
(Témafelelős: TÓTH KÁROLY.)
Különféle nomogramokat határoztak meg (2 dolgozat.)

12. *A matematikai fizika differenciálegyenletei.*
(Témafelelős: ADLER GYÖRGY.)
Eredményeket értek el a parabolikus és elliptikus lineáris parciális differenciálegyenletek megoldásainak és a megoldások gradienseinek a becslésére vonatkozó kutatásokban ismert peremfeltételek esetében (4 dolgozat).

13. *Parciális differenciálegyenletek exisztencia- és unicitásvizsgálata a klasszikus analízis módszereivel.*
(Témafelelős: SZILÁRD KÁROLY.)
Kimutatták, hogy egy elsőrendű kvázilineáris elliptikus parciális differenciálegyenletrendszer megoldásai az analitikus függvények egyes tulajdonságaival bírnak (1 dolgozat).

14. *Az általánosított függvények alkalmazásai a differenciálegyenletek elméletében.*
(Témafelelős: FÉNYES TAMÁS.)
Tisztázták az algebrai integrál egyes tulajdonságait a *Mikusinszki*-féle operátorszámítás kérdéskörben. Módszert dolgoztak ki a lineáris konstans együtthatójú parciális differenciálegyenletek megoldására (3 dolgozat).

15. *Differenciálegyenletek kvalitatív vizsgálata, különös tekintettel a geometriai módszerekre.*
(Témafelelős: BIHARI IMRE.)
Foglalkoztak nem-lineáris közönséges differenciálegyenletek aszimptotikus tulajdonságaival. Eredményeket értek el nem-lineáris másodrendű közönséges differenciálegyenletek megoldásainak oszcillációs tulajdonságaira nézve (5 dolgozat).

16. *A variációszámítás módszereinek felhasználása a differenciálegyenletek elméletében.*
(Témafelelős: MAKAI ENDRE.)
Új becsléseket találtak két és három dimenziós membránok alaphangjaira (1 dolgozat).

17. *Differenciálegyenletek elmélete, mértékelmélet és ergodelmélet, funkcionálanalízis és alkalmazásai.*
(Témafelelős: SZŐKEFALVI-NAGY BÉLA.)
Kiterjesztették a *Mikusinszki*-féle operátorszámítást algebrai szingularitású függvényekre. Új eredményeket értek el a *Hilbert*-tér kontrakcióinak vizsgálatában. Tisztázták a *Hilbert-tér* izometrikus áramlásainak szerkezetét (10 dolgozat).
18. *Valós függvénytan, általános topológia és alkalmazásaik.*
(Témafelelős: ALEXITS GYÖRGY.)
Megadták annak szükséges és elégséges feltételét, hogy egy szinguláris integrál egy pontban megadott sebességgel konvergáljon egy e pontban adott folytonossági modulussal bíró függvényhez.
Bebizonyították, hogy bármely egydimenziós intervallumfüggvény szélső határértékei *Borel*-mérhető függvények. Foglalkoztak lineáris approximációs eljárással kompakt topológikus terekben (15 dolgozat).
19. *Interpoláció-elméleti vizsgálatok.*
(Témafelelős: KIS OTTÓ.)
Vizsgálták a kollokációs differenciálegyenlet-megoldó módszer konvergencia viszonyait (1 dolgozat).
20. *Hézagos interpoláció és annak alkalmazása másodrendű differenciálegyenletek közelítő megoldására.*
(Témafelelős: TURÁN PÁL.)
Az elért eredmények segítségével fizikai differenciálegyenletek közelítő megoldása lehetséges. (3 dolgozat).
21. *Gráfelméleti vizsgálatok.*
(Témafelelős: GALLAI TIBOR.)
Foglalkoztak előírt tulajdonságú részgráfok létezését biztosító feltételekkel. A faktorizációs tételek új bizonyítását adták. *Menger* tételére új, az eddigieknél egyszerűbb bizonyítást dolgoztak ki (6 dolgozat).
22. *Algebrai vizsgálatok.*
(Témafelelős: RÉDEI LÁSZLÓ.)
Az absztrakt algebrai és a véges *Abel*-csoportok elméletében értek el eredményeket. Teljes leírását adták a kommutatív főideálfélcsoportok struktúrájának (2 dolgozat).
23. *Félcsoportelméleti kutatások.*
(Témafelelős: STEINFELD OTTÓ.)
Eredményeket értek el félcsoportok bizonyos osztályaira vonatkozólag; részben rendezett félcsoportokra vonatkozó felbontási tételeket bizonyítottak be (2 dolgozat).
24. *Artin-gyűrűk elmélete. További speciális gyűrűosztályok vizsgálata.*
(Témafelelős: SZÁSZ FERENC.)
Az elért eredmény alapján egy direkt felbontás bizonyítható (2 dolgozat).
25. *Hálóelméleti kutatások.*
(Témafelelős: SCHMIDT E. TAMÁS.)
Újabb eredményeket értek el a véges partícióhálókra (1 dolgozat).
26. *Univerzális algebrai kutatások.*
(Témafelelős: SCHMIDT E. TAMÁS.)

A szabad univerzális algebrák vizsgálatát matematikai logikai módszerek alkalmazásával végezték. (1 dolgozat).

27. *Irreducibilitási vizsgálatok. Elemi számelmélet.*
(Témafelelős: SERES IVÁN.)
Sikerült egy korábbi eredményt polinomok irreducibilitására jelentősen általánosítani.

28. *Differenciálgeometriai terek elméletére vonatkozó vizsgálatok.*
(Témafelelős: VARGA OTTÓ.)
A *Finsler*-féle terek megalapozásában alapvető fontosságú *Cartan*-féle invariáns differenciáloperátor új származtatását adták. A *Finsler*-féle fibrált terek megalapozását adták kiépítve azok görbületelméletét (3 dolgozat).

29. *A diszkrét geometria és annak alkalmazásai.*
(Témafelelős: FEJES TÓTH LÁSZLÓ.)
Az affin-szabályos sokszögek egy extremális tulajdonságára eltérő bizonyításokat adtak. Foglalkoztak stabilis testrendszerekkel. Eredményt értek el a cellarendszerek izoperimetrikus vizsgálata terén (6 dolgozat).

30. *Általános geometriai vizsgálatok.*
(Témafelelős: HAJÓS GYÖRGY.)
A tetraéder és az *n*-dimenziós szimplex síkmetszeteivel kapcsolatban értek el eredményeket. Bebizonyították a szabályos tetraéder hiperbolikustérbeli izoperimetrikus tulajdonságát (1 dolgozat).

31. *Komplex függvénytan és alkalmazásai.*
(Témafelelős: ALPÁR LÁSZLÓ.)
Eredményeket értek el a konform leképezés kerületi problémáival kapcsolatban, továbbá a kvázi-konform leképezések terén (3 dolgozat).

32. *Analitikus számelméleti vizsgálatok.*
(Témafelelős: TURÁN PÁL.)
Bizonyos egész függvények értékeloszlásával foglalkoztak retardált differenciálegyenletekkel kapcsolatban. Folytatták a vizsgálatot az összehasonlító prímszámelmélet kérdéskörében (6 dolgozat.)

33. *Diofantikus approximáció.*
(Témafelelős: SZÜSZ PÉTER.)
A lánctörtek metrikus elméletével foglalkoztak (2 dolgozat).

34. *Matematikai logikai kutatások és alkalmazásaik.*
(Témafelelős: KALMÁR LÁSZLÓ.)
Foglalkoztak az axiomarendszerek modellosztályaival kapcsolatos struktúravizsgálatokkal, továbbá azon minimális logikai feltételek szabatos megfogalmazásával, amelyeket egy fizikai elméletnek ki kell elégítenie (2 dolgozat).

35. *Programozáselméleti kutatások.*
(Témafelelős: KALMÁR LÁSZLÓ.)
Foglalkoztak a *Boole*-féle függvények zárójeles minimális előállításának hosszát szolgáltató táblázat rekurzív algoritmusainak egyszerűsítésével és megfogalmazásával az ALGOL 60 nyelven, továbbá a *Boole*-függvények realizálhatóságának problémájával (2 dolgozat).

36. *A matematikai kibernetika elvi kérdései.*
(Témafelelős: KALMÁR LÁSZLÓ.)
Kidolgozták a többütemű automata olyan fogalmát, amely a szokásos auto-

mata elméleti eszközökkel tárgyalható és amelynek az automatikus számológépek speciális esetei (3 dolgozat).

37. *A kibernetikával kapcsolatos filozófiai kérdések vizsgálata.*
(Témafelelős: KALMÁR LÁSZLÓ.)
Vizsgálatokat folytattak a gyakorlat kritériumának a matematika alkalmazásaira való érvényességére vonatkozóan, a kibernetikára vonatkozó burkolt idealista nézetekkel, az alkotó munka dialektikus jellegével, az elektronikus számológépekkel, a szabatos dialektikus logikával kapcsolatban (1 dolgozat).
38. *A kibernetikai és matematikai logikai módszerek alkalmazása a nyelvészetben.*
(Témafelelős: KALMÁR LÁSZLÓ.)
Az algebrai nyelvmodell javításával foglalkoztak.
39. *Digitális elven működő berendezések.*
(Témafelelős: KALMÁR LÁSZLÓ.)
Elkészült az elektronikus adapter kísérleti példánya, amely 5 ki- és bemenő pont közötti vezetési állapotot képes a megadott logikai program szerint automatikusan megvizsgálni.
40. *A közlekedés automatizálására vonatkozó kutatások.*
(Témafelelős: KALMÁR LÁSZLÓ.)
Közlekedésautomatikai rendszer megalkotásával kapcsolatos kísérleteket végeztek és foglalkoztak elektroncsöves kísérleti berendezések megépítésével (1 dolgozat).
41. *Az Euklidesz előtti görög matematika kutatása.*
(Témafelelős: SZABÓ ÁRPÁD.)
A kutatásokról 5 dolgozatban számoltak be.

SZÁMÍTÁSTECHNIKAI KÖZPONT

Létszám 1963-ban 61 fő, ebből kutató 24 fő.

A Központ tevékenysége 1963-ban is kétirányú volt; egyfelől mint kiszolgáló intézmény működött, másfelől saját kutatási feladatai is voltak.

A számítások elvégzésében elért eredmények a munkaráfordítással nem voltak arányban. Ennek oka, hogy a Központ egyetlen M-3 gépe korszerűtlen, nem üzembiztos. A külső megbízások egy részét programozói kapacitás hiánya és a gép kis teljesítménye miatt nem tudták elvégezni. 1963-ban megérkezett az URAL-2 gép, azonban felállítása a Központ leendő új helyiségeiben Budán csak 1964 végén lehetséges. Ez utóbbi gép üzembiztonsága ugyan lényegesen nem haladja meg az M-3 gépét, de sebessége cca 50-szer nagyobb.

A külső megbízások egy része kutatói munkát is igényelt. Kutatómunkára a teljes munkakapacitásnak mintegy 30%-át fordították.

A Központ profilját megszabó múlt évi elnökségi határozat értelmében a Központ feladata az elektronikus számológépek felhasználásával kapcsolatos matematikai, logikai, programozáselméleti és általában matematikai-kibernetikai kutatások folytatása, továbbá elsősorban akadémiai kutatóintézetek munkája során felmerülő és elektronikus számológépet igénylő matematikai problémák megoldása. A Számológépkutatási Osztály keretében folyt műszaki kutatásokat a Központban meg kellett szüntetni és e témákat szakemberekkel együtt át kellett volna adni a VI. Osztályhoz tartozó Automatikai Kutató Laboratóriumnak. Ez az átadás különböző — főleg személyi okok miatt — nem valósult meg. Időközben a szóbanforgó témákon dolgozó mérnökök kiléptek a Központból és más, ipari számítástechnikai centrumban, ill. üzemben helyezkedtek el. Ugyancsak időközben az említett műszaki témákkal más intézetekben kezdtek el foglalkozni. Gyakorlatilag tehát — ha formailag nem is az elnökségi határozatnak megfelelően — megszűnt a kutatómunka a Számológépkutatási Osztályon. Ennek megfelelően az Osztályvezetőség javaslatot tett a Számológépkutatási Osztály megszüntetésére és bizonyos személyi problémák rendezésére.

A Központ tevékeny kapcsolatot tart fenn sok hazai intézménnyel, igazgatási és társadalmi szervvel. Igen szoros a kapcsolat az Országos Tervhivatallal, az Országos Árhivatallal és a NIM Számítástechnikai Központjával. Tevékenyen részt vesznek az Országos Tervhivatal tervezési módszereinek kidolgozásában és az ezzel kapcsolatos konkrét gépi számítások elvégzésében. Az Árhivatalnak az ármodellek képzésében, az ezzel kapcsolatos előkészítő munkában, valamint a gépi számításban nyújtanak segítséget. 1963-ban is a Központ koordinálta a NIM Számítástechnikai Központjában levő Elliot-803 gépre a nem NIM-hez tartozó feladatokat. A NIM jelentős mennyiségű térítésmentes időt is biztosított a Központnak az Elliot-803 gépen, amit megoldási módszerek kipróbálására, továbbá akadémiai intézetek feladatainak megoldására használtak fel. A Közgazdasági és a Műszaki Egyetemeken a Központ munkatársai oktatják a programozást. Az ELTE Bölcsészettudományi Karán a Központ munkatársainak kezdeményezésére és közreműködésével gépi nyelvészeti szemináriumok folynak; ennek eredményeként ebben az évben az egyetemen gépi nyelvészeti szak létrehozására kerül sor.

Több külföldi intézettel eredményes együttműködési kapcsolata van a Központnak. 1963-ban 13 munkatárs járt külföldön és 25 külföldi kutató (amerikai, bolgár, csehszlovák, jugoszláv, német, román, szovjet) látogatta meg a Központot.

Sokan keresik fel a Központot különféle gazdasági modellekkel, ill. olyan kérdésekkel, hogy hogyan lehet megszervezni az adott üzemben az üzemszervezés gépesítését. E megbeszélések természetesen nem mindig járnak konkrét eredményekkel és igen időigényesek, de perspektivikusan mindenképpen hasznosak.

A kutatók szakmai továbbképzése nem kielégítő; ennek oka, hogy meglehetősen sok a konkrét feladat és az eléggé instabilan üzemelő gép túlzottan leköti a kutatókat.

Költségvetés 1963-ban 3,443.000,— Ft, beruházás nem volt.

Témabeszámoló

a) *Elméleti jellegű feladatok.*

Külső megbízások alapján programokat készítettek az M-3 és az Elliot-803 gépre. A gépre vitt feladatok nagy része nem volt rutinfeladat. Tovább folytatták a formális gépi nyelvek tanulmányozását és foglalkoztak programhibák gépi ellenőrzésének lehetőségeivel. Bekapcsolódtak a GAMSZ nevű, a szocialista országok középgépeire készülő formális gépinyelv kidolgozásába. A sajátértékekkel kapcsolatos kutatások keretében néhány új módszert dolgoztak ki. Vizsgálatokat folytattak azzal kapcsolatban, hogy nagyméretű lineáris problémák megoldására hogyan lehet gazdaságosan kihasználni a külső memóriákat. Megindultak a kutatások a diszkrét automaták elméletével kapcsolatban és folytatódtak a gépi nyelvészeti, gépi fordítási kísérletek. Az orosz nyelv morfológiai elemzésének gépi kipróbálása részben az M-3-on, részben pedig az Elliot-803-on majdnem teljes egészében befejeződött. A morfológiai analízisre két program készült el.

b) *Gazdaságtervezési és gazdaságigazgatási feladatok.*
Megtörtént a nagyvolumenű lineáris programozási feladatok megoldására szolgáló módszer elméleti kidolgozása és a módszer gépi programja is. E módszerrel számításokat végeznek majd a III. ötéves terv egyes előirányzatainak meghatározására. Befejeződött a műszálipar beruházási modelljével kapcsolatos kutatás. Tovább folyik az Árhivatal megbízásából az ártípusszámításokkal kapcsolatos kutatómunka. Befejeződtek a papíripari termelési modellel kapcsolatos vizsgálatok; a számítások 1,5 millió dollár megtakarításának lehetőségét mutatták ki. Ugyancsak befejeződött a bauxit-alumínium ipar fejlesztési programjának meghatározása.
Elkészült a vertikális termékeket gyártó vállalatok teljes szerelvényszükségleti mátrixának meghatározására szolgáló modell és egy termelésprogramozási modell. Tovább folyt a gazdaságossági rendszerek információrendszerének kutatása; a munka a különböző szintű irányítás részére szükséges információk meghatározása irányában folyik.

c) *Üzemeltetési feladatok.*
Nagy feladatot jelentett a már elavult M-3 gép üzemben tartása. A gép a múlt évben 2568 hasznos órában működött; ez azonban nem tükrözi a tényleges helyzetet, ugyanis kétszeres számítást kell végezni a kontroll biztosítása miatt; hiba esetén harmadszor is meg kell ismételni a számítást. Tovább folytatták az M-3 fejlesztését is. Ez a gép a közeljövőben előreláthatólag Szegedre kerül a Bolyai Intézetbe.
Az év során megjelent, vagy közlésre benyújtott dolgozatok száma: 54.

Szegedi József Attila Tudományegyetem Bolyai Intézete

Az Intézet három tanszék adminisztratív egysége, a kutatómunka azonban differenciáltan, a tanszékvezetők irányításával folyik. Szoros kapcsolatban végzi munkáját az Intézet a Matematikai Kutató Intézettel, a Számítástechnikai Központtal és a Nyelvtudományi Intézettel.

Az Intézet tagjai számos külföldi matematikussal tartanak fenn tudományos kapcsolatot. Az egyetem által kiadott *Acta Scientiarum Mathematicarum* igen magas nemzetközi színvonalú folyóirat; a lap nagymértékben hozzájárult a nemzetközi kapcsolatok fenntartásához, illetőleg fejlesztéséhez.

Az Intézetben 17 egész állású és 4 félállású oktató dolgozott. Az Akadémiától 90 000,— Ft támogatásban részesült a kutatómunka.

Témabeszámoló

8 témával foglalkoztak.

a) *Differenciálegyenletek elmélete.*
(Témafelelős: Pintér Lajos.)
Néhány új becslést adtak meg faktorizálható másodrendű nem-lineáris differenciálegyenletek megoldásai zéróhelyeinek eloszlására, továbbá néhány új eredményt értek el nemlineáris *n*-edrendű differenciálegyenletek monoton megoldásaira vonatkozóan (1 dolgozat).

b) *Ortogonális sorfejtések konvergenciaproblémái; konstruktív függvénytani kérdések.*
(Témafelelős: Tandori Károly.)

Elemi és viszonylag egyszerű példát adtak olyan négyzetesen integrálható függvényekre, amelyeknek Fourier-sora alkalmas átrendezésben mindenütt divergál. Más eredményeikből új koefficiensfeltételek adódnak ortogonális sorok konvergenciájára és szummálhatóságára (7 dolgozat).

c) *Funkcionálanalízis és alkalmazásai.*
(Témafelelős: SZŐKEFALVI-NAGY BÉLA.)
A klasszikus mértékelmélet néhány eredményét sikerült átvinni operátorgyűrűk esetére (1 dolgozat).

d) *Algebrai vizsgálatok.*
(Témafelelős: RÉDEI LÁSZLÓ.)
Az *Abel*-csoportokhoz közelálló univerzális algebrák bizonyos primitív osztályainak jellemzését adták. Foglalkoztak azzal a kérdéssel, hogy milyen kapcsolat van az automaták és a hozzájuk tartozó félcsoportok között az automaták bizonyos kompozícióinál (3 dolgozat).

e) *Geometriai vizsgálatok.*
(Témafelelős: MOÓR ARTHUR.)
További részeredményeket értek el a speciális folytonos transzformációs csoportokra, ill. 2-, 3- és 4-dimenziós *Finsler*-terekre vonatkozóan (3 dolgozat).

f) *Halmazelméleti vizsgálatok.*
(Témafelelős: FODOR GÉZA.)
Újabb eredményeket értek el a halmazleképezések elméletében (1 dolgozat).

g) *A matematika különböző fejezetei axiómatikus felépítésére és az így kapott axiómarendszerek vizsgálatára vonatkozó kutatások.*
(Témafelelős: KALMÁR LÁSZLÓ.)
Eredményeket értek el a fizikai elmélet általános fogalmának a matematikai elmélet fogalmához hasonló megfogalmazásában, és a fizikai elméletekre vonatkozó néhány kritérium megfogalmazásában.

h) *Kibernetikai vizsgálatok.*
(Témafelelős: KALMÁR LÁSZLÓ.)
Automatikus számológépekkel és programozásukkal kapcsolatos néhány fogalom szabatos definícióját adták számológép fogalmának algebrai modellje alapján.

A kutatómunkáról az Intézet dolgozói 16 dolgozatban számoltak be.

EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM MATEMATIKAI INTÉZET

Örvendetes, hogy a kutatómunka eredményeiről szóló publikációk mintegy negyedrésze fiatal kutatóktól származik. Az egyes tanszékek keretében működő kutató csoportoknak széleskörű külföldi kapcsolataik vannak, ez kölcsönös látogatások, tanulmányutak, folyóiratcsere és levélváltások formájában fejeződik ki. A munkatársak szakmai képzését biztosítják az egyes tanszékek által szervezett szakszemináriumok, valamint a MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZETtel közösen rendezett szemináriumok. Az elmúlt évben 2 kutató védte meg kandidátusi disszertációját és 3 munkatárs pedig jelenleg dolgozik a kandidátusi disszertáción.

A munkaszervezéssel kapcsolatos, a tudományos kutatómunkát hátráltató tényező: számos kutató—elsősorban a fiatalabbak—túlterhelt oktatási és szervezési adminisztratív munkával, egyes esetekben társadalmi munkával is. Kívánatos volna ezen sürgősen segíteni.

Az egyes tanszékek elhelyezése zsúfolt, elemi felszerelési cikkekben is hiány van. Általában az elhelyezés és a berendezés a nyugodt kutatómunka feltételeit nem biztosítja.

Témabeszámoló

1. *Algebra.*
(Témafelelős: FUCHS LÁSZLÓ.)
Az *Abel*-csoportokkal kapcsolatban részeredmények születtek a nyitott kérdések tisztázásában, különösen a strukturális jellegű problémákban és általánosítási lehetőségek kutatásában operátor modulusokra (10 dolgozat).
2. *Analitikus számelmélet, geometriai számelmélet.*
(Témafelelős: TURÁN PÁL.)
A hatványösszegek becslésével kapcsolatos módszer sokrétű problémáinak tisztázásában újabb eredmények születtek, és előkészületben van a módszerről és alkalmazásairól szóló könyv teljesen átdolgozott új (angol nyelvű) kiadása. A módszer alkalmazása területén legjelentősebbek az összehasonlító primszámelméleti eredmények, amelyek egy korábbi módszerekkel szinte megtámadhatatlan kérdéskör, az azonos differenciájú számtani sorozatokban levő prímszámok eloszlása összehasonlítását adják. Újabb típusú alkalmazások bizonyos eddig is sokat tárgyalt típusú transzcendens egyenletek gyökeloszlásaira vonatkoznak, amelyek rögtön alkalmazhatók a szervomechanizmusok elméletében fellépő retardeált differenciálegyenletek vizsgálatára. (Publikációk száma: 12)
3. *Geometria.*
(Témafelelős: HAJÓS GYÖRGY.)
Eredményesen tovább folytatódtak a geometria megalapozására, algebrai geometriára, hiperbolikus geometriára vonatkozó, valamint a gráfelmélet tárgykörébe eső vizsgálatok. Eredmények születtek a diszkrét geometria, a kombinatórikus topológia és a halmazelméleti módszerekkel való gráfok vizsgálatában. (Publikációk száma: 28)
4. *Klasszikus analízis és általános topológia.*
(Témafelelős: CSÁSZÁR ÁKOS.)
A következő vizsgálatokkal foglalkoztak: a leíró függvénytan, interpoláció, általános sorelmélet, általánosított, differenciál- és integráloperátorok, egész függvények elmélete, több komplex változós függvények elmélete, általános topológia. (Publikációk száma: 19.)
5. *Variációszámítás, differenciálegyenletek, funkcionálanalízis, végtelen sorok.*
(Témafelelős: KÓSA ANDRÁS.)
A következő eredmények születtek:
Abszolút minimumra vonatkozó elégséges feltételek a variációszámítás egy dimenziós magasabbrendű problémája esetén.
A variációszámítás egydimenziós másodrendű problémájának invariáns függvényeiről.
Közönséges differenciálegyenletek geometriai vizsgálatai.
Elliptikus differenciálegyenletek megoldásának simasági vizsgálata egy variációs módszer alapján.
Ortogonális sorok részösszegezésének konvergenciájáról.
6. *A valószínűségszámítás elméleti kérdései.*
(Témafelelős: RÉVÉSZ PÁL.)

Eredmények születtek a feltételes mezők, sztochasztikus folyamatok, határeloszlástételek és az ergodelmélet terén. Alkalmazták a valószínűségszámítást a számelméletben, gráfelméletben, analízisben, stb. (Publikációk száma: 30.)

7. *A matematika alapjai, halmazelmélet.*
(Témafelelős: PÉTER RÓZSA és SURÁNYI JÁNOS.)
A rekurzív függvényeknek a számológépek elméletére és a nyelvészetre való alkalmazásában értek el új eredményeket. Az eldöntésprobléma területén régóta nyitott kérdéseknek adták megoldását. A halmazelmélet területén tovább folytatták a kutatásokat részben partició problémák és egyéb végtelen gráfokra, továbbá véges gráfokra vonatkozó kérdésekben, részben modellelméleti vizsgálatokkal foglalkoztak és értek el számos szép eredményt. (Publikációk száma: 9.)

8. *A matematika oktatása.*
(Témafelelős: KÁRTESZI FERENC.)
Foglalkoztak az általános és középiskolai matematika-oktatás kísérleti tantervével és a középiskolai geometria-oktatásban használható axiomarendszer kidolgozásával. (Publikációk száma: 4.)

KÖZPONTI FIZIKAI KUTATÓ INTÉZET

Alapkutatással foglalkozó főtémák

A nagyenergiájú magkölcsönhatások vizsgálata területén a 7 és 17 GeV energiájú π-p kölcsönhatások vizsgálata során megállapítást nyert, hogy az egy-pion keltéssel járó kölcsönhatás kvázi-elasztikus jellegű és a kvázi-elasztikusan mért π-mezon az esetek $>70\%$-ában megtartja eredeti töltését. Megállapítást nyert továbbá, hogy a kozmikus sugárzás extrém nagy sűrűségű (>1000 rész/m^2) kiterjedt légizáporainak sűrűségspektruma nem különbözik szignifikánsan a kisebb sűrűségek esetén mért spektrumtól.

A fény mikrostruktúrájával kapcsolatos kutatások során elkészült a gerjesztett atomok élettartamának mérésére szolgáló berendezés, amely a világon a második időanalizátorral működő élettartammérő. A He atom gerjesztett állapotai élettartamának meghatározására folytatott mérések adatai az irodalmi — számított, illetve indirekt úton mért — adatokkal jól egyeznek. Sikerült a deuterium *Balmer*-sorozat első hét vonalát vákuuminterferométerrel fotografikus regisztrálással felbontani. A beszámolási időszak után pár hónappal sikeresen üzembehelyeztek egy He-Ne gázlázert, ami hazánkban az első ilyen berendezés.

A kisenergiájú magfizikai kutatások főtéma keretében, a korrelációs jelenségek vizsgálata során a B^{10} (d, p, gamma) B^{11} magreakcióban keletkező gamma-sugárzás cirkuláris polarizációjának kísérleti meghatározása és a kapott kísérleti eredmények elméleti kiértékelése megmutatta, hogy a magreakció az alacsony deuteron energia ellenére direkt módon megy végbe és a reakció lefolyásában jelentős szerepe van a neutron-proton kölcsönhatás végességének. — A maghasadási vizsgálatok folyamán megmérték a hasadási gammasugarak intenzitását. Megmérték a hasadási neutronok energiaeloszlását, mint a kibocsátási szög függvényét. A hármas hasadás jelenségének vizsgálatához előmérésként megmérték az U-233, U-235 és Pu-239 izotópok nehéz hasadási termékeinek energiaeloszlását és az irodalommal megegyező eredményt kaptak.

A szilárdtestfizikai kutatások a fázisátalakulási jelenségek tanulmányozására irányultak. A Fe-Rh ötvözetek antiferromágneses-ferromágneses fázisátalakulásának vizsgálata során értékes adatokat nyertek ennek a speciális mágneses átalakulásnak megértéséhez. — A Cu_3Au összetételű ötvözetben tovább tanulmányozták az atomi rendeződés kinetikáját. Az elektromos ellenállás és a termofeszültség méréséből a domén szerkezet stabilitására, a domén-fal mozgásra és a nukleációs folyamatokra vonatkozóan vontak le új következtetéseket. — Az elméleti vizsgálatok alapján sikerült az Fe_3Al ötvözet fizikai jellemzőit egy egyszerű modell alapján értelmezni. A transzport jelenségeket leíró Boltzmann-egyenlettel kapcsolatos vizsgálatok pedig tisztázták a relaxációs idő közelítés érvényességi határait.

A matematikai kutatások során új eljárást dolgoztak ki a síkbeli *Poisson-* és biharmonikus egyenlet numerikus integrálására. Elkészítették a kidolgozott eljárás programját Elliott 803 típusú számológépre, valamint ALGOL 60 formula-nyelven. Folytatták a transzformáció-invariáns mátrixok tulajdonságainak vizsgálatát és ennek során meghatározták a permutáló mátrixok spektrálfelbontását. Az eredményeket differenciálegyenlet-rendszerek redukciójára alkalmazták.

Alkalmazott kutatással foglalkozó főtémák

A részecskegyorsító berendezések fejlesztése terén a kívánt specifikációnak megfelelően üzembehelyezték a 2 MV-os EG-2 gyorsítóberendezést. A beszámolási időszak lezárása után, viszonylag rövid idő alatt elkészült a hordozható, aktivációs analízis céljait szolgáló NA-1 neutrongenerátor, amely alapja lehet egy gyártásra alkalmas prototípus kidolgozásának.

A reaktorok tervezésével és építésével kapcsolatos fizikai-technikai kutatások főtéma keretében a ZR-2 kritikus rendszereken tovább folytatták a rács-vizsgálatokat. — Meghatározták több szerves folyadékban a termikus neutronok diffúziós paramétereit és igazolták, hogy ezek az adatok a totális hatáskeresztmetszet energiafüggéséből közelítően számíthatók. — Meghatározták szerves anyagokban a felületi forrásos hőátadás több jellemzőjét és hőimpulzusos módszert dolgoztak ki a hőaktivitási tényező mérésére. — Az organikus kísérleti zónahurok segítségével megvizsgálták a difenilmetán sugárbomlási tulajdonságait a hőmérséklet és a dózis függvényében. — A tervidőszakban két jelentősebb berendezés — a ZR-2 kritikus rendszer és az organikus kísérleti zónahurok valósult meg. Befejezték a Budapesti Műszaki Egyetem részére tervezett oktató- és kutató-reaktor előterveit. — Elkészítették egy 1,2 kW teljesítményű elektronhegesztő berendezés prototípusát, amely kísérleti fűtőelemek fokozásának lezárásán kívül sokféle laboratóriumi munkára alkalmas. A még szükségesnek látszó módosítások és tökéletesítések után a berendezés továbbfejlesztett változata ipari felhasználásra is alkalmas lehet.

A reaktorok tervezésével és építésével kapcsolatos kémiai kutatások területén a következő fontosabb eredményeket érték el. — Befejezték a szerves moderátoranyagok vizsgálata terén a difenil-difenilmetán (D-DM) eutektikus elegyének statikus besugárzási körülmények között végzett vizsgálatát. Ezen elegy reaktorhűtőanyagként való alkalmazására vonatkozó szabadalmi bejelentést a Szabadalmi Hivatal elfogadta. — A reaktorba épített kísérleti hurok segítségével megvizsgálták a D-DM eutektikus elegy sugárbomlási folyamatait három különböző hőmérsékleten. A magasabb hőmérsékleten végzendő további vizsgálatokhoz a hurok rekonstrukciója vált szükségessé. — A Pécsi Uránércbánya Vállalat kérésére szulfát- és kloridion tartalmú oldatok extrahálását tanulmányozva a laboratóriumi vizsgálatokat eredményesen lezárták. — Az uránoxid kerámiai vizsgálatokhoz szükséges reaktortisztaságú uránvegyületeket állítottak elő és befejezték az uránoxid kerámiák laboratóriumi méretű előállítási technológiájának kidolgozását.

Az izotópkémiai kutatások keretében folytatták a J-131 izotóp hazai és export célokra történő termelését. A megnövekedett igényeknek megfelelően technikai és sugárvédelmi szempontból egyaránt korszerű manipulációs fülkerendszer elkészítésével biztosították a zavartalan jódtermelést.

A jódtermelés adatai:

a)	szállítmányok száma:	58
b)	szállított összmennyiség:	49 824 mC
	ebből export:	10 000 mC
c)	a szállított összmennyiség értéke: (szállítási költség nélkül)	558 000,— Ft.

A Szájsebészeti Klinikával az F^{18} hordozómentes izotóp gyártása terén vállalt szállítások befejezése egyben a KGST együttműködésben vállalt téma lezárását is jelentette. A F^{18} előállítás technológiai leírását átadták a KGST országok illetékes képviselőinek.

Az alkalmazott analitikai kémiai kutatások során a kívánságoknak megfelelően több mint 300 rutinvizsgálatot végeztek el. — A neutronaktivációs analitikai módszert a félvezető gyártás számára fontos nagytisztaságú szilícium szennyezéseinek meghatározására alkalmazták.

A nukleáris mérőműszerek kutatása és fejlesztése terén a sokcsatornás analizátor-rendszer fejlesztési programjának keretében a közepes csatornaszámú tranzisztoros analizátor-család tároló rendszerének valamennyi áramköre megépítésre és bemérésre került. — Elkészült egy impulzus-amplitudó mérésre alkalmas, világszínvonalon is élenjárónak mondható specifikációjú mérőegység deszkamodellje.

A nanoszekundumos mérőrendszer tervezése során a hármas impulzus generátor gyártmánycsalád és az elektroncsöves idő-amplitudó konverter gyártásba adása megtörtént.

A nukleáris mérőrendszer fejlesztése főtéma keretében négy új alegység kifejlesztését és négy új, valamint nyolc korábbi mérési összeállítás kipróbálását, rendszertechnikai vizsgálatát végezték el. — Tizenkét alegységtípust átadtak a Gamma Optikai Műveknek. — 1963 őszén a KGST tagállamok moszkvai nukleáris műszerkiállításán 11 magyar nukleáris műszer, ill. alkatrész nyert első helyezést, ami jelentős eredménynek tekinthető, figyelembevéve a Szovjetunió és a Német Demokratikus Köztársaság 7—7, a Csehszlovák Szocialista Köztársaság 3, a Lengyel-, a Román és a Bolgár Népköztársaság által elért 1—1 első helyezést. A 11 magyar nukleáris műszer közül 5 különböző subrack összeállítás, 1 aktivitás aránymérő műszer, valamint neutron szcintillátorok a KFKI-ben lettek kifejlesztve. — Az új áramköri elemek és méréstechnikai módszerek fejlesztése terén jelentősebb eredmény a saját készítésű plasztik szcintillátor minőségjavítása, a jelalak-diszkriminációs elven működő nedvességmérő szonda megépítése, valamint a Hornyak és Emmerich típusú gyorsneutron detektor világszínvonalnál jobb hatásfokú és egyszerűbb technológiájú változatának kidolgozása.

A kísérleti gyártáshoz szükséges ellenőrző és válogató berendezése, valamint speciális konstrukciók kidolgozása során az Intézet Elektronikus Kísérleti Műszer-gyártó Üzeme felállította a fotomaratásos módszerrel dolgozó nyomtatott áramkörű műhelyt és kidolgozta a szükséges technológiai eljárást. — Megkezdődött egy kézi kártyavizsgáló berendezés fejlesztése. Elkészült az ellenállás-kondenzátor válogató célműszer tanulmányterve, tervcélja és egyes áramköreinek laboratóriumi modellje.

A beszámolási időszakban megjelent 127 tudományos és 13 ismeretterjesztő publikáció. Az intézet munkatársai 1963-ban nemzetközi, hazai és külföldi tudományos rendezvényen 68 előadást tartottak. 1963-ban az intézet dolgozói 10 szabadalmi bejelentést tettek. Az elfogadott újítások száma 1963-ban: 45.

ATOMMAG KUTATÓ INTÉZET

Az igazgató egyszemélyi felelősségének megtartásával az Intézet vezetésével együttjáró sokirányú feladat ellátását decentralizálták és így a vezetést az igazgató, a tudományos igazgató helyettes, a főmérnök, a gazdasági és személyzeti vezetők látják el. A korábbi években kialakult szervezeti forma — három tudományos osztály (magreakciók és alkalmazásaik, magspektroszkópiai és neutronfizikai), valamint az ezeket kiszolgáló műszaki és adminisztrációs egységek — jelentősen elősegíti a vezetés egyszerűsítését, a kutatók fejlődését és a kutatói munka előrehaladását.

Az Intézet külső kapcsolatai tovább bővültek. A KFKI Magfizikai Főosztálya és az ATOMKI Neutronfizikai Osztálya között konkrét téma-kooperáció valósult meg. Jó kapcsolata van az Intézetnek az ELTE Elméleti Fizikai Intézetével; az utóbbi intézet munkatársai rendszeresen előadásokat tartottak az aktuális elméleti kérdésekről és segítséget nyújtanak elméleti problémák megoldásában. A Kossuth Lajos Tudományegyetem Kísérleti Fizikai Intézetével a kapcsolat változatlanul jó. A két intézet kooperációs témákon együtt dolgozott. 1963-ban az egyetemi intézet három tanársegédje vendégkutatóként az ATOMKI-ban dolgozott. Jelentős segítséget adott az Intézet az Optikai Kutató Laboratórium Vákuumtechnikai Osztályának, melynek egyik részlege az 1963. év folyamán még az ATOMKI helyiségeiben dolgozott. Ez a csoport, miután az Intézet vákuumtechnikai tapasztalatait átvette — iparszervezési okokból — teljesen más feladatot kapott. Az intézet segítséget nyújtott a pécsi Orvostudományi Egyetem Biofizikai Intézetének mérések elvégzésével béta-spektroszkópiával megoldható feladataikhoz. Együttműködés alakult ki a debreceni Izotóp Laboratóriummal gyorsneutron-besugárzások és béta-spektrometriai mérések terén. Segítséget nyújtottak a Központi Kémiai Kutató Intézetnek tömegspektrométerük üzembehelyezésénél.

Javult az Intézet nemzetközi kapcsolata az elmúlt évben. Szoros kapcsolat alakult ki a rossendorfi Atommag Kutató Intézettel és a múlt év őszén megkezdődtek a közösen végzendő magfizikai vizsgálatok is. Az Intézet alfa-spektroszkópiai Csoportjának dubnai szereplése szintén hozzájárult a két intézet kapcsolatának elmélyüléséhez. Az Intézet egy munkatársa állandó bírálója a Nuclear Data Sheetsnek. Mindkét fél számára igen előnyös kapcsolat alakult ki a wolfeni (NDK) Agfa Gyár kutató laboratóriumával. Az Intézet munkatársai közül 1963-ban 20-an vettek részt külföldi konferencián és tanulmányúton. Az Intézetet a múlt évben NDK, csehszlovák, holland, japán, lengyel, román és szovjet fizikusok látogatták meg. Az ATOMKI KÖZLEMÉNYEK révén 200 személlyel, ill. intézménnyel állnak kapcsolatban és a KÖZLEMÉNYEK-ért 10 idegen nyelvű folyóiratot kapnak cserébe.

Az Intézet dolgozói jelentős munkát fejtettek ki a szakpropaganda területén is; 31 ilyen tárgyú cikket írtak és 7 előadást tartottak. Az ATOMKI rendszeresen képez ki ipari tanulókat az ipar számára.

A szakmai továbbképzés egyrészt a referáló délutánok keretében, másrészt az egyes osztályokon bevezetett szemináriumokon történik. 1963-ban 14 referáló délutánt tartottak és több esetben külső előadókat kértek fel szemináriumi előadások megtartására. Az orosz nyelvvizsgára kötelezett kutatók valamennyien időben sikeresen levizsgáztak. Az Intézet dolgozóinak 70%-a szervezett ideológiai képzésben vesz részt. A Marxista Esti Egyetem Intézetbe kihelyezett osztályán 16 munkatárs tanul.

Létszám 1963-ban: 22 kutató és 51 segéderő. A kutatómunka létszámhiány miatt hátrányt nem szenvedett. Költségvetés 1963-ban 6 757 000 Ft. Az anyag és fogyóeszközök készletértéke az elmúlt évben 150 000 Ft-tal emelkedett. Az 1963-ra engedélyezett beruházási keret (2 475 000,— Ft) nagyobb része műszerek és gépek beszerzésére lett felhasználva. Egyetlen nagyobb beruházás az elmúlt év folyamán egy 100 csatornás szovjet gyártmányú amplitudó analizátor beszerzése volt. Az Intézet munkájában nehézséget okoz az a körülmény, hogy nem áll rendelkezésre megfelelő deviza-fedezet főleg tőkés relációból beszerzendő műszerekre, ezért ilyen műszereket kénytelenek házilag kifejleszteni és elkészíteni.

Témabeszámoló

5 témával foglalkoztak.

a) *Töltött részecskékkel létrehozott magreakciók vizsgálata.*
(Témafelelős: Szalay Sándor)
Eredményesen vizsgálták a könnyű magokon létrehozott magfolyamatokat és előzetes munkálatokat végeztek egy elektrosztatikus generátor építéséhez.

b) *Gyorsneutronokkal létrehozott magreakciók vizsgálata.*
(Témafelelős: Csikai Gyula.)
Alkalmazták a magvisszalökési technikát a gyorsneutron reakciók kimutatásánál, az (n, alfa) reakciók szögeloszlásának mérésénél. Mérték az izomer hatáskeresztmetszet viszony energia függését a nívósűrűség spinfüggésének meghatározásához.

c) *Rádióaktív bomlás során emittált könnyű részecskék (béta- és gamma-sugárzás) spektroszkópiai vizsgálata.*
(Témafelelős: Berényi Dénes.)
Mérték a magnívók élettartamát (Ba-133 bomlásban), vizsgálták a Nd-147 konverziós vonalait és kidolgozták a proporcionális számláló technikáját.

d) *Rádióaktív bomlásból származó alfa-részek spektroszkópiája.*
(Témafelelős: Fényes Tibor.)
Számításokat végeztek a ritka földek tartományában fellépő alfa-spr. és alfagamma koincidencia és szögkorreláció berendezés építésére; kimutatták az alfasugárzást a terbium frakcióban a számításoknak megfelelően.

e) *Magfizikai és rádióaktív módszerek alkalmazása más tudományokban (geológiai alapvizsgálatok, hazai földtani vizsgálati módszerek továbbfejlesztése, hasadási termékek visszatartása humuszon).*
(Témafelelős: Szalay Sándor.)
Befejeződtek a hazai kőzetanyagon a vizsgálatok, a hazai ólomércek vizsgálata keretében egy ércelőfordulás vizsgálatát kivéve a kutatások befejeződtek. A ha-

sadási termékek visszatartására vonatkozó kutatások keretében megállapították, hogy az anionkarakterű és átmeneti jellemű elemek, ionok nem kötődnek. Az Intézet munkatársaitól 1963-ban 59 tudományos közlemény jelent meg, vendégkutatóktól 3. A megjelenés alatt lévő dolgozatok száma: 13. Kandidátusi értekezést az elmúlt évben három kutató védett meg, két kutató egyetemi doktori disszertációt adott be. Hazai és külföldi rendezvényeken 30 tudományos előadást tartottak.

ELMÉLETI FIZIKAI KUTATÓ CSOPORT

Élénk szakmai kapcsolatot tartanak fenn a budapesti Műszaki Egyetem Fizikai Tanszékével, a Debreceni Kossuth Lajos Tudományegyetem Elméleti Fizikai Intézetével, az Eötvös Loránd Tudományegyetem Elméleti Fizikai Intézetével és a Központi Fizikai Kutató Intézettel.

Leningrádban, Moszkvában és Okayamában szovjet és japán fizikusok a Csoport kutatásaival sok tekintetben rokonvizsgálatokat végeznek. A munkatársak közül az elmúlt évben 5-en vettek részt külföldön tartott rendezvényen, ill. külföldi tanulmányúton.

A szakmai továbbképzés a heti rendszeres szemináriumokon történik, amelyen előadásokat tartanak saját témákról és újabb eredményekről. A Csoport dolgozói résztvesznek a Műszaki Egyetem oktatói részére tartott ideológiai oktatásban, de ezen kívül külön is tartanak ideológiai szemináriumokat aktuális kérdésekről.

Létszám: 13 kutató és 1 segéderő. A tudományos terv végrehajtásának pénzügyi akadálya nem volt. Költségvetés 1963-ban 909 000 Ft, beruházás 173 000 Ft.

Témabeszámoló

8 témával foglalkoztak.

a) *Atomok statisztikus elméletének vizsgálata.*
(Témafelelős: GOMBÁS PÁL.)
Sikerült a *Pauli*-elvet helyettesítő taszítópotenciál továbbfejlesztése és e potenciált sikerrel lehetett alkalmazni a neon, argon és rubidium$^+$ elektronsűrűségének meghatározására. Megvalósult a főkvantumszám értelmezése és annak alkalmazása a héjszerkezet néhány sajátságának értelmezésénél. Meghatározták az Na_2 molekula korrelációs energiáját.

b) *Atommagok statisztikus elméletének vizsgálata.*
(Témafelelős: GOMBÁS PÁL.)
Továbbfolytatták a statisztikus magmodell kiépítését, kiszámították az ekvivalens magsugarakat és a felületi vastagságot.

c) *Többvalenciás fémek és félvezetők elektronszerkezetének vizsgálata.*
(Témafelelős: GÁSPÁR REZSŐ.)
Sikerült a szelén-atom egy-elektron hullámfüggvényeinek és energiáinak meghatározása az univerzális potenciáltérben.

d) *Kristályok hibahelyei és az ezzel kapcsolatos jelenségek vizsgálata.*
(Témafelelős: KÓNYA ALBERT.)
Sikerült az átfedési integrál figyelembevétele első rendben és elkészült a síkmodell nulladik közelítése.

e) *Kovalens molekulák vizsgálata.*
(Témafelelős: KAPUY EDE.)

Alkalmazták az erősen orthogonális két-részecske függvényeket homogén fermion gázra. Egydimenziós végtelen homogén gázra delta-függvény kölcsönhatása esetén numerikus számítások készültek.

f) *Vizsgálatok elemi részecskék nem-lineáris elmélete terén.*
(Témafelelős: LADÁNYI KÁROLY.)
Meghatározták az egyrészecske propagátor aszimptótikus viselkedését a fénykónusz közelében és a végtelenben.

g) *A kvantummechanikai többtestprobléma közelítő módszereinek fejlesztése.*
(Témafelelős: KISDI DÁVID.)
Alkalmazták a kanonikus transzformációk módszereit a végtelen maganyag vizsgálatára és a korrelációs függvények számítására. Szempontokat dolgoztak ki a hullámfüggvény variációs paramétereinek megválasztásához.

h) *Gravitációs terek vizsgálata.*
(Témafelelős: SÜVEGES MÁTÉ.)
Sikerült megadni a relativisztikus idő definícióját biológiai rendszerek esetén.

A témák keretében a munkatársak 11 publikációt jelentettek meg és hazai intézetekben 13 tudományos előadást tartottak.

JÓZSEF ATTILA TUDOMÁNYEGYETEM KÍSÉRLETI FIZIKAI INTÉZETE

Az Intézetben *Lumineszcencia és Félvezető Akadémiai Kutató Csoport* működik. Akadémiai státuszon dolgozók létszáma: 3 kutató és 9 segéderő.

Az Intézet munkája két fő területre, a lumineszcencia és a félvezető kutatásra irányul.

A hazai tudományos intézetek közül a MÜFI-vel főleg személyes jellegű kapcsolat révén állnak összeköttetésben, amelynek során részben szakmai konzultációkra, részben pedig technikai segítségnyújtásra is sor kerül.

A nemzetközi kapcsolatok, annak ellenére, hogy szerződések nem rögzítik, kiterjedtek és több vonatkozásban eredményesnek mondhatók. Ezek közül kiemelendők a lengyel, a szovjet és a német tudósokkal kialakult kapcsolatok. Förster német fizikus monográfiájának második kiadásához az Intézet jelentős elméleti és kísérleti anyagot szolgáltat. A munkatársak közül az elmúlt évben 12-en vettek részt külföldi tudományos rendezvényen, illetőleg tanulmányúton.

Az Intézet tagjai széleskörű szakpropaganda tevékenységet is folytattak az Eötvös Loránd Fizikai Társulat és a TIT keretében előadások tartásával és cikkek írásával.

A munkatársak szervezett szakmai és ideológiai képzése részint az aspiránsképzés keretében, részben pedig az egyetemi ideológiai konferenciákon, valamint a Marxizmus—Leninizmus Esti Egyetemen folyik.

A kutatómunkában összesen 20 egyetemi oktató és 3 akadémiai álláson levő kutató, valamint 11 tudományos segédmunkaerő vett részt.

Az Akadémiától 1963-ban az Intézet 215 000,— Ft összegű támogatást kapott.

Témabeszámoló

4 témával foglalkoztak.

a) *A molekuláris lumineszcenciával kapcsolatos energiaátadási folyamatok vizsgálata.*
(Témafelelős: BUDÓ ÁGOSTON.)

Nagyszámú kísérleti anyag alapján, sugárzásnélküli energiaátadás figyelembevételével sikerült a fluoreszcencia-kioltás és a depolarizáció folyamatainak finomabb értelmezéséhez, valamint az energiaátadás gyakoriságának a közeg egyes jellemzőitől való függésére adatokat nyerni.

b) *A molekuláris fluoreszcenciajellemzők meghatározása és ezek értelmezése.* (Témafelelős: Budó Ágoston.)
A hőmérsékleti háttér figyelembevételével megnyugtató magyarázatot adtak a hatásfok felső határára és az antistokesi tartományban észlelt esésére. Az oldatok hősugárzási, fluoreszcencia és abszorpciós spektrumai, valamint a hatásfok-függvény közti kapcsolat természetének újabb vonásait ismerték fel.

c) *CdS és CdSe fotoellenállások elektromos és fotoelektromos vizsgálata.* (Témafelelős: Gombay Lajos.)
Megvizsgálták a CdS mikrokristály fotovezető viselkedését nagyvákuumban, nedves és száraz levegőben. A vezetés az egykristályoknál megismert törvényszerűségekkel és a vizsgált minták struktúrájával értelmezhető.

d) *Ge és Si fotoelektromos tulajdonságainak kutatása a mozgó fényfolt módszerének segítségével.*
(Témafelelős: Gombay Lajos.)
Folynak a felületi rekombinációs sebességének a felületek különböző maratása miatti változásainak meghatározását célzó mérések.

A kutatásokról 9 tudományos közlemény számol be. Az elmúlt évben az Intézet egyik munkatársa megvédte kandidátusi értekezését, egy másik munkatárs doktori értekezést nyújtott be és további két munkatárs egyetemi doktori címet szerzett.

Budapesti Orvostudományi Egyetem Orvosi Fizikai Intézete

Az Intézet kutató munkája két csoportra oszlik: a szilárdtestek fizikája és orvosi vonatkozású fizikai, ill. biofizikai vizsgálatok.

Szilárdtestek fizikájával foglalkozik az Intézetben működő *Akadémiai Kristályfizikai Laboratórium* keretében 3 akadémiai álláson levő kutató és 7 egyetemi oktató, a másik területen 8 egyetemi oktató dolgozik. (Az Intézetben akadémiai álláson 3 kutató és 7 segéderő dolgozik.) Az akadémiák közötti kétoldalú együttműködés keretében a Csehszlovák Tudományos Akadémia Szilárdtest-Fizikai Intézetével és a Román Tudományos Akadémia Fizikai Intézetével 1963-ban is kollaboráció folyt. A munkatársak közül 1963-ban 10-en vettek részt külföldi rendezvényeken, ill. tanulmányúton.

A KFKI Sugárvédelmi Osztálya és az Intézet között szerződéses megállapodás jött létre termolumineszcens dózismérő kifejlesztésére. Ezzel kapcsolatban az Intézet feladata megfelelő termolumineszcens anyagok előállítása. Kollaborációs tevékenységet folytattak orvosegyetemi klinikákkal is izotópok, ill. ultrahang alkalmazása területén.

Az Intézet munkatársai az oktatómunka mellett tevékenyen részt vettek a szakpropagandában; előadásokat tartottak a szegedi Tudományegyetemen rendezett izotóptanfolyamon, a BOTE gyógyszerészkara által szervezett előadássorozat keretében stb.

A kutatási költségkeret összesen 619 000 Ft volt.

Témabeszámoló

5 témával foglalkoztak.

a) *Alkalihalogenid kristályok előéletének befolyása a szincentrumok tulajdonságaira.* (Témafelelős: TARJÁN IMRE.)
Összehasonlították az F—F′ átmenet kvantumhatásfokát additív módszerrel színezett és röntgenezett természetes NaCl kristályoknál. Vizsgálták az F—Z átmeneteket a Ca^{++}-al és Sr^{++}-al szennyezett, röntgenezett NaCl kristályokon. Kutatásokat végeztek ezüsttel szennyezett elektrolitikus módszerrel színezett NaCl kristályokon.

b) *Oxigéntartalmú szennyeződések hatása, alkalihalogenid kristályok tulajdonságaira.* (Témafelelős: VOSZKA RUDOLF.)
Megállapították, hogy az OH^- centrumokat tartalmazó NaCl kristályokban röntgensugárzás hatására O^{--} és O^- ionok jönnek létre. Az ilyen kristályok tulajdonságaiban beálló bizonyos változások érzékenyen jelentkeznek a fotovezetésben. A tervbevett NaCl tisztításával kapcsolatban bizonyos részeredményeket értek el.

c) *Felületi növekedési jelenségek vizsgálata hidrodinamikai módszerekkel.* (Témafelelős: TURCHÁNYI GYÖRGY.)
Kimutatták a túlhűtött cseppek jelenségének a felléptét NaCl kristályok hőkezelésekor.

d) *Különböző dózisokkal terhelt biológiai objektumokban keletkezett sugársérülések vizsgálata.*
(Témafelelős: NAGY JÁNOS.)
Elvégezték a vörösvértestek K^{42} és Rb^{86} felvétele dózisfüggésének meghatározását.

e) *Túlélő békabőr áteresztőképességének befolyásolási módjai.* (Témafelelős: TAMÁS GYULA.)
Vizsgálták a hőmérséklet és különféle anyagcserét gátló, ill. fokozó szerek hatását a békabőrön keresztül fellépő nátrium transzportra vonatkozóan.

A kutatómunkáról 15 dolgozatban számoltak be. Az elmúlt évben két kutató védte meg kandidátusi értekezését. A munkatársak különféle hazai és külföldi rendezvényen 13 tudományos előadást tartottak.

ÉPÍTŐIPARI ÉS KÖZLEKEDÉSI MŰSZAKI EGYETEM KÍSÉRLETI FIZIKAI INTÉZETE

Az Intézetben *Kristálynövekedési Akadémiai Kutatócsoport* működik. Akadémiai státuszon dolgozók létszáma: 4 kutató és 13 segéderő.

Jó szakmai kapcsolatuk van a budapesti Orvosi Fizikai Intézettel és a Kémiai Szerkezeti Kutató Laboratóriummal.

A nemzetközi kapcsolatok igen széles körre terjednek ki. A munkatársak közül az elmúlt évben 14-en jártak külföldön, konferenciákon és tanulmányúton.

Kapcsolatuk a gyakorlattal sokoldalú, így pl. többféle ipari megbízás teljesítésére került sor az elmúlt évben.

Az Akadémiától 215 000 Ft céltámogatást kapott az Intézet és ugyancsak az Akadémia 1 200 000 Ft-ért vásárolt az Intézet részére egy NDK gyártmányú elektronmikroszkópot.

A kutatómunkában összesen 10 egyetemi oktató és 4 akadémiai álláson levő kutató, valamint 13 segéderő vett részt.

Témabeszámoló

5 témával foglalkoztak.

a) *A kristálymag képződésének és a kristálynövekedés mechanizmusának kutatása ionkristályoknál.*
(Témafelelős: GYULAI ZOLTÁN.)
Újabb adatokat gyűjtöttek az oldatokból való magképződés megindítására vonatkozólag. A vizsgálatok több új felismeréshez vezettek.

b) *Ionkristályok hibahelyeinek vizsgálata.*
(Témafelelős: JESZENSZKY BÉLA.)
Méréseket végeztek színezett kristályokon a Gyulai-féle nyomóberendezéssel. Folytatták a Gyulai-effektus vizsgálatát különböző eredetű NaCl kristályokon, továbbá az elektrolitikusan színezett kristályok vizsgálatát. Újabb eredményeket értek el a diszlokáció és a kristálynövekedés kutatásában.

c) *Elméleti vizsgálatok ionkristályokon.*
(Témafelelős: BODÓ ZALÁN.)
Segítséget nyújtottak a kísérleti jellegű kutatások során felmerült problémák megoldásában és előtanulmányokat folytattak a szilárdtest-fizika elméleti vizsgálatokhoz.

d) *A magyarországi fizika története a XIX. században. Általános fizika-történet.*
(Témafelelős: M. ZEMPLÉN JOLÁN.)
36 ívnyi anyag elkészült és foglalkoztak az entrópia fogalom kialakulásának történetével is.

e) *A betonszilárdulás-kristályfizikai és fizikokémiai vizsgálata.*
(Témafelelős: ZIMONYI GYULA.)
Sikerült megállapítani a kristálynövekedés sebessége és a beton szilárdulása közötti törvényszerűséget.
A kutatómunkáról 6 publikációban számoltak be.

EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM ELMÉLETI FIZIKAI INTÉZET

Az Intézetben *Elméleti Fizikai Alapkutató Csoport* elnevezéssel akadémiai tanszéki kutatócsoport működik. Akadémiai státuszon dolgozók létszáma: 7 kutató.

Az Intézet tudományos életében továbbra is fontos szerepet játszottak a ma már hagyományos intézeti szemináriumok (kvantumtérelmélet, elemi részek, plazmafizikai, soktestprobléma és matematikai szemináriumok). Ezeken sok intézeten kívüli és külföldi (szovjet, cseh, olasz, német, osztrák) fizikus tartott előadást. Állandóan voltak hallgatók más intézetekből is.

Sok külföldi fizikus látogatta meg az Intézetet, akikkel hasznos diszkussziókat folytattak a munkatársak. 1963-ban az Intézet tagjai közül 15-en jártak külföldön. A külföldi tanulmányúton résztvevők kivétel nélkül tartottak előadásokat.

A külföldi kapcsolatok közül kiemelendők az 1963-ban megindult együttműködés Graz-cal és Stanforddal, valamint a tovább ápolt kapcsolat Jénával, Leningráddal és Béccsel. Élénk kapcsolat alakult ki a hazai intézetek közül az ATOMKI-val, a Csillagvizsgáló Intézettel, a Hőtechnikai Kutató Intézettel, a Miskolci Műszaki Egyetem Fizikai Tanszékével, az Elméleti Fizikai Kutató Csoporttal és a KFKI-val. E kapcsolatok közös publikációkban és közös kutatási témákban tükröződnek.

Az Intézet rendelkezésére az Akadémia 1963-ban 75 000 Ft-ot bocsátott; ez az összeg a szükségleteket fedezte.

A kutatómunkában 8 egyetemi oktató és 7 akadémiai álláson levő kutató vett részt.

Témabeszámoló

6 témával foglalkoztak.

a) *Az elméleti fizika alapkérdéseinek kritikai elemzése.*
(Témafelelős: Novobátzky Károly.)
Foglalkoztak a *Mach*-elv és az általános relativitáselmélet kapcsolatának kérdésével, a fizika filozófiai kérdéseivel.

b) *Plazmafizikai kutatások.*
(Témafelelős: Abonyi Iván.)
Tökéletesítették az ideális közegben kialakuló magnetohidrodinamikai lökéshullámok fenomenológiai tárgyalását és megkezdték a nemideális közeg esetének vizsgálatát. Általánosították a magnetohidrodinamika alapegyenleteit anizotróp közegekre. Megkezdték a magnetohidrodinamikai hullámok keletkezésének vizsgálatát. Lezárultak a plazmabeli *Ohm*-törvénnyel kapcsolatos vizsgálatok, ezek keretében sikerült megadni a tetszőleges térerősség esetére az áram időbeli lefolyását.

c) *A kvantumtérelmélet konzisztencia-kérdésének vizsgálata.*
(Témafelelős: Nagy Kázmér.)
A kvantummechanikai állapottér szerkezetének kutatása keretében értékes eredményeket értek el. Az eredmények különös érdekességgel bírnak az elemi részek Hamilton-féle elméletének kiépítése szempontjából.

d) *Elemi részecskék kölcsönhatásai és szerkezete.*
(Témafelelős: Marx György.)
Az elemi részek és gyenge kölcsönhatásaik megismerése céljából a neutrinóval (müon-neutrinóval) foglalkoztak. Rámutattak arra, hogy a müon-neutrinó nyugalmi tömegének empirikus meghatározására a müon- és pionbomlás a legalkalmasabb. Az analízis a zérustól különböző nyugalmi tömeg létére utal. Rámutattak a müon-neutrinó-fluxus kozmogóniai vonatkozásaira és foglalkoztak annak észlelésével. Tanulmányozták a termonukleáris eredetű kozmikus neutrinó-fluxust és a kozmikus neutrinók indirekt (gravitációs) hatását.

e) *A kvantummechanikai soktestprobléma vizsgálata zérus igen alacsony hőmérsékleteken, elsősorban térelméleti módszerekkel.*
(Témafelelős: Szépfalusy Péter.)
Eredményesen vizsgálták a sokfermion-rendszer által mutatott szupravezetőjelleget.

f) *Molekulák elektronszerkezetének vizsgálata.*
(Témafelelős: Neugebauer Tibor.)
Befejezték a kétszeres frekvenciával történő fényszórás elméletének kidolgozását. Foglalkoztak a *Van der Wals* erők számításával.
A kutatók munkájukról 22 publikációban számoltak be.

Csillagvizsgáló Intézet

Az Intézethez két obszervatórium tartozik: a szabadsághegyi és a piszkéstetői. Ezenkívül az Intézet fenntart egy szputnyik-megfigyelő állomást és ellátja az ország három vidéki állomásának (Baja, Szombathely, Miskolc) tudományos ellenőrzését. Az Intézet személyzete látja el a szabadsághegyi és az 1963-ban létesített piszkéstetői meteorológiai állomás szolgálatát. Az Eötvös Loránd Tudományegyetemen az Intézet gondoskodik a megfigyelő csillagászati képzésről.

A kutatási témáknak megfelelően 1963-ban a tudományos dolgozókat négy csoportra osztották és a csoportok vezetésével az eddigi témafelelősöket bízták meg. A csoportbeosztás a következő: *változócsillag csoport* (vezető: Balázs Julia), *stellárstatisztikai csoport* (vezető: Balázs Béla), *mesterséges égitestek csoport* (vezető: Almár Iván), *elméleti asztrofizikai csoport* (vezető: Csada Imre).

Az Intézet nemzetközi kapcsolatai a mátrai obszervatórium létesítésével, amint ez várható volt, erősen kiszélesedtek. A Csehszlovák és a Szlovák Akadémia kérésére kooperációt létesítettek a változócsillagok területén. A Szovjetunió Tudományos Akadémiája felkérte a mátrai obszervatóriumot a szupernova-kutatásban való részvételre. A Kínai Népköztársaság Akadémiája szélesebb kooperációt kíván az Intézettel kiépíteni a Schmidt-teleszkóppal végzendő kutatásokban. A Berlini Német Tudományos Akadémia is szélesíteni akarja az eddigi kooperációt. A változócsillag-kutatás területén multilaterális kooperáció van kifejlődőben. A mesterséges égitestek megfigyelésére magyar részről proponált ún. INTEROBS programhoz több külföldi csillagvizsgáló intézet csatlakozott.

A Nemzetközi Csillagászati Unió megbízásából az Intézetben szerkesztik az „*Information Bulletin on Variable Stars*" c. nemzetközi kiadványt, amelyet az Intézet saját költségén ad ki. 1963-ban a kiadvány 23 számát küldték szét. Ezzel és az Intézet „*Mitteilungen der Sternwarte der Ungarischen Akademie der Wissenschaften*" c. kiadványával az Intézet 430 külföldi intézménnyel áll csereviszonyban.

A munkatársak közül 1963-ban 15-en külföldön rendezett konferencián, illetőleg tanulmányúton vettek részt. A szabadsághegyi és a piszkéstetői obszervatóriumot 1963-ban szovjet, amerikai, csehszlovák, jugoszláv, lengyel és román csillagászok látogatták meg.

Az Intézet személyzete közül 1963-ban nyolcan tartottak tudományos előadást az MTA, az Eötvös Loránd Tudományegyetem és az Eötvös Loránd Fizikai Társulat rendezésében. A munkatársak tevékenyen részt vettek a szakpropagandában is, különösen a TIT keretében ismeretterjesztő cikkek írásával és előadások tartásával.

Az Intézet pártszervezete az elmúlt évben ideológiai tanfolyamot rendezett, amelyen minden kutató részt vett.

Létszáma: 11 kutató és 8 segéderő.

A készletállomány 1963-ban 7%-kal emelkedett, ami elsősorban a piszkéstetői obszervatórium munkájával kapcsolatos többletigényből ered. 1963-ban beruházásokra 632 000 Ft-ot fordítottak.

Témabeszámoló

4 témával foglalkoztak.

a) *Változócsillagok vizsgálata.*
(Témafelelős: Balázs Júlia.)

Megállapították az M3 kb. 100 RR-Lyrae-csillagának periódusváltozását, megfigyeléseket végeztek a 6RR Lyrae-csillagról, 1 fedési változóról és 1 nováról az (U, B, U) színképtartományban.

b) *A Tejútrendszer szerkezetének kutatása.*
(Témafelelős: BALÁZS BÉLA.)
Felvételi anyagot gyűjtöttek a fotoelektromos standardokról a mezőhibák megállapítása céljából és előkészítették a többszínfotometriai és spektrálklasszifikációs munkákat.

c) *Mesterséges holdak megfigyelése.*
(Témafelelős: ALMÁR IVÁN.)
Rendszeresen végezték a mesterséges holdak átvonulásainak vizuális megfigyelését, fotografikus állomást létesítettek Baján, részt vettek az „INTEROBS" nemzetközi megfigyelési programban.

d) *Elméleti asztrofizikai vizsgálatok.*
(Témafelelős: CSADA IMRE.)
Elkészült a Nap mágneses terének levezetése az észlelésekből. Befejeződtek a dinamó-elmélet számolásai.
Az Intézet a Schmidt-teleszkóppal múlt év decemberében bekapcsolódott az internacionális szupernóvaprogramba és néhány héttel ezelőtt sikerült egy fényes szupernovát felfedezni az Ursa Maior galaxishalmazban.
Az 1963. év során megjelent, vagy közlésre benyújtott, az intézeti munka eredményeit tartalmazó dolgozatok száma: 23. Ezenkívül a kutatóktól sok referátum, beszámoló, évi jelentés és népszerű cikk jelent meg a hazai és külföldi folyóiratokban.

NAPFIZIKAI OBSZERVATÓRIUM

Az Obszervatórium létszáma: 4 kutató és 2 segéderő. A munkaszervezés a kis létszám miatt gondot okoz az Obszervatórium vezetőjének. Az észlelési munkát számottevően akadályozta az elmúlt évben a fotoanyag hiánya. Bekapcsolódtak a Nemzetközi Geofizikai Együttműködés keretében megszervezett Nemzetközi Nyugodt Nap Év munkálataiba; az ebből adódott feladat számottevő többletmunkát jelentett az Obszervatórium számára.

A nemzetközi kapcsolatok 1963-ban megnövekedtek. A napfizikai kutatások c. témakörben együttműködés kezdődött a pulkovói és krími csillagvizsgálókkal, továbbá a Csehszlovák Tudományos Akadémia Csillagászati Intézetével. Az elmúlt évben az Obszervatóriumot meglátogatta egy csehszlovák napfizikus. Az Obszervatórium vezetője a múlt évben részt vett a Nemzetközi Csillagászati Unió utrechti „A Nap spektruma" tárgykörű szimpóziumon.

A munkatársak 1963-ban tevékenyen részt vettek a TIT helyi (debreceni) és országos munkájában; számos ismeretterjesztő előadást és több távcsöves bemutatást tartottak. Az egyetemen az Obszervatórium vezetője tartotta a fizika szakos tanárjelöltek részére a csillagászati előadásokat.

Az Obszervatórium munkatársai rendszeresen részt vettek a Kossuth Lajos Tudományegyetem fizikus oktatói részére rendezett szakmai-ideológiai vitakör munkájában.

Az Atommag Kutató Intézet műhelymunkákkal 1963-ban is segítette az Obszervatóriumot. A költségvetési előirányzat elegendőnek bizonyult (318 000,— Ft).

Beruházás 1963-ban: egy Zeiss-féle interferencia-szűrősorozat. Jelentős kiadás volt 1963-ban a műszerházak karbantartása és a földalatti kábelek lefektetése.

Témabeszámoló

Két témával foglalkoztak.

a) *Napfoltokra (és a foltokkal kapcsolatos napfáklyákra) vonatkozó vizsgálatok.* (Témafelelős: DEZSŐ LÓRÁNT.)
Sikerült a kék-ibolya fényben történő napfáklya észlelések rutin-munkává való kifejlesztése. Folytatták az 1886. évtől kezdve homogénnek tekinthető greenwichi észlelési anyag alapján több mint 6 teljes napciklusra kiterjedő mérések felhasználásával az E-W effektus kutatását.

b) *Napprotuberenciákra vonatkozó vizsgálatok.*
(Témafelelős: DEZSŐ LÓRÁNT.)
A programot megfelelő fotoanyag hiányában nem sikerült megvalósítani.
A kutatómunkáról a beszámolási időszakban az Obszervatórium munkatársai 2 dolgozatot adtak le közlésre.

A továbbiakban olyan matematikai és fizikai egyetemi intézetek és tanszékek múlt évi munkájának ismertetése következik, amelyek a kutatómunkára a Művelődésügyi Minisztériumtól kapnak anyagi támogatást.

DEBRECENI KOSSUTH LAJOS TUDOMÁNYEGYETEM MATEMATIKAI INTÉZETE

A mátrixelmélet és alkalmazásai témakörben olyan vizsgálatokkal foglalkoztak, amelyek megadták egy pozitív definit kvadratikus mátrix bizonyos feltételeknek alávetett kongruens transzformáltja spurjainak alsó határát.

A valószínűségszámítás határeloszlás tételeire vonatkozó kutatások elsősorban eloszlás- és karakterisztikus függvénymátrixok legnagyobb abszolútértékű sajátértékeinek vizsgálatára irányultak. Az információelméleti vizsgálatokban elsősorban az információ általánosításait vették vizsgálat alá a függvényegyenletekkel kapcsolatos módszerekkel.

A matematikai statisztika elvi kérdéseivel kapcsolatban a rendstatisztika körébe vágó statisztikai becslések elmélete szolgál további vizsgálatok tárgyául.

A differenciálegyenletek elmélete területén a differenciálgeometriában nagy szerepet játszó parciális differenciálegyenletek bizonyos típusainak továbbfejlesztése volt a cél.

A matematika különböző fejezetei axiómatikus felépítésére vonatkozó vizsgálatoknak keretében a projektív geometria általánosítására vonatkozó axiómatikus megalapozással foglalkoztak.

Megjelent dolgozatok száma: 13.

ÉPÍTŐIPARI ÉS KÖZLEKEDÉSI MŰSZAKI EGYETEM MATEMATIKAI TANSZÉKE

A klasszikus affin differenciálgeometriában tovább folyik a felülethez kapcsolt affin differenciálinvariánsok geometriai jellemzését célzó vizsgálat.

A differenciálgeometriai terek, speciálisan a Finsler-féle terek elméletében, az alapvető fontosságú Cartan-féle invariáns derivált új származtatása történt meg. Emellett kimutatták, hogy az a *Riemann* geometriából ismeretes tény, miszerint az állandó normál-görbületű tereknek meg van az a tulajdonságuk, hogy *Riemann* metrikájuk állandó görbületű, a *Minkowski* térben is igaz.

Foglalkoztak a *Finsler*-féle fibrált terek elméletének globális megalapozásával, görbületelméletének kidolgozásával, valamint a kovariáns deriváltakhoz tartozó endomorf leképezések struktúrájának vizsgálatával.

A kutatásokkal kapcsolatban 5 dolgozatot jelentettek meg.

Budapesti Műszaki Egyetem III. Matematikai Tanszéke

Foglalkoztak a *Fourier*-sorok erős szummációjával. Más bizonyítást adtak a *Hilbert*-tér bizonyos vektorsorozataira vonatkozó alaptételekre és finomították korábbi becsléseiket. Megoldottak továbbá e vektorsorozatokkal kapcsolatban bizonyos alapfeladatokat.

Budapesti Műszaki Egyetem IV. Matematikai Tanszéke

Sikerült a *Mikusinszki*-féle operátorszámítás egy kiterjesztését megkonstruálni, mely a *Mikusinszki*-féle operátortestbe ágyazza az algebrai szingularitásokkal bíró függvényeket. Kritériumot sikerült felállítani arra vonatkozóan, hogy mikor létezik egy *Fantappie*-féle vegyes analitikus funkcionál inverze. Új, egyszerű bizonyítását adták a disztribució-elmélet alaptételének. Kritériumot sikerült megállapitani arra, hogy bizonyos típusú differenciálegyenletet egy sík egyeneseinek differenciálegyenletévé lehessen transzformálni (2 dolgozat).

Eötvös Loránd Tudományegyetem Kísérleti Fizikai Intézet

Továbbfejlesztették a röntgen-diffrakciós felvételek kiértékelési módszerét. Új, eddig nem alkalmazott módszert próbáltak ki egy szerves anyagon. A röntgendiffrakciós módszereket kifejlesztették a kristályhibák vizsgálatára. Vizsgálták a ponthibák keletkezését és mozgását fémekben és ötvözetekben. Foglalkoztak a plasztikus deformáció vizsgálatával fémekben. Egyszerű módszert dolgoztak ki az alakítási keményedés görbéjének meghatározására csavarási deformáció során (6 dolgozat).

Eötvös Loránd Tudományegyetem Atomfizikai Tanszéke

A Mössbauer-effektus vizsgálata és alkalmazása keretében első lépésként irodalmilag már közölt mérések reprodukcióját végezték. Megkezdték különböző összetételű vasaluminium ötvözetek belső mágneses terének mérését. A mérések kiterjesztése nagyobb hőmérsékletre, egészen a *Curie*-pontig folyamatban van.

Az alacsonyhőmérsékletek fizikai vizsgálata során foglalkoztak galvanomágneses effektusok hőmérséklet függésének kutatásával. Vizsgálták a pion-nukleon ütközéseket fotoemulzió segítségével (1 dolgozat).

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM
ATOMFIZIKAI TANSZÉK

A multiplett Σ termek kísérletileg tapasztalt anomális multiplett felbontásának sikerült megadni az elméleti értelmezését $^2\Sigma$-termtől $^7\Sigma$-termig.

Az NO molekula vizsgálata során különleges pertubációs jelenségre bukkantak külföldön, amelyek pontos elméleti értelmezését adni nem tudták. A probléma megoldására a Tanszéken került sor, melynek során kiderült, hogy az említett esetben egy $^2\Sigma - {}^2\pi$ perturbációról van szó, amikor is az említett termek egymáshoz olyan közel kerülnek, hogy a $^2\pi$ term komponensei egymást keresztezik és egymást is perturbálják. A jelenséget nemcsak kvalitatíve, de kvantitatíve is sikerült értelmezni és az elméletileg számított kölcsönhatási mátrixelem számértéke megegyezést mutatott a kísérletileg talált értékkel.

1962-ben a bombayi egyetem egyik kutatója felkérte a Tanszéket egy még eddig nem számított átmenet, nevezetesen a $^3\Delta - {}^3\pi$ átmenet ágai intenzitás-eloszlásának elméleti számítására. Ez szintén elkészült. Időközben egy amerikai kutató a CO molekulában talált is ilyen átmenetet. Az elméleti és kísérleti eredmények összevetése most van folyamatban.

A fenti munkákról 5 dolgozat jelent meg.

JÓZSEF ATTILA TUDOMÁNYEGYETEM
ELMÉLETI FIZIKAI INTÉZETE

Folytatták az izotranszformációk mozgás integráljainak meghatározására vonatkozó vizsgálatokat, foglalkoztak a téridőkontinuum és a kollektív rendszerek elméletével kapcsolatos filozófiai problémák elemzésével. Folytatva korábbi statisztikai mechanikai kutatásaikat, főleg a Matsubara által megalapozott statisztikai perturbációszámítást, ennek kapcsán elektron-fenon kölcsönhatást, általában az elmélet megalapozását tanulmányozták. Az oktaéderes komplex molekulákra vonatkozó konzekvens LCAO-módszernél fellépő háromcentrum integrálokra dolgoztak ki numerikus számításokra alkalmas formulákat (12 dolgozat).

DEBRECENI KOSSUTH LAJOS TUDOMÁNYEGYETEM
ELMÉLETI FIZIKAI INTÉZETE

Folytatták a kvantumkémiai és szilárdtest elméleti vizsgálatokat. Az előbbiek az egyesített atommodellel voltak kapcsolatosak; megvizsgálták, hogy a homonukleáris H_2^+ és a heteronukleáris HeH^{++} molekula alap, illetve néhány gerjesztett állapotú esetében mennyiben befolyásolja az eredményeket a szokásos hullámfüggvényeknél a centrumnak a helyzete. Az ionkristályok tulajdonságainak vizsgálatait, a kötés elméleti értelmezését a statisztikus modell segítségével kísérelték meg. Megtörtént a He-A kölcsönhatási potenciáljának a meghatározása (7 dolgozat).

DEBRECENI KOSSUTH LAJOS TUDOMÁNYEGYETEM
ALKALMAZOTT FIZIKAI INTÉZETE

A röntgensugarak üveglemezen való visszaverődése alkalmával meghatározott kísérleti körülmények között a röntgensugarak hármas visszaverődésének tüneményét sikerült észlelni.

A röntgensugarak polarizációjának vizsgálatakor a primer sugárzás polarizációját nagyobb atomsúlyú elemek szórótestként való alkalmazása esetében is sikerült kimutatni és az észlelt polarizációfok a szórótest anyagi minőségétől függetlennek bizonyult.

A röntgen- és gammasugarak kémiai dózisméréséhez használt Fricke-oldat abszorpciós színképében két új abszorpciós sávot sikerült találni az ultraibolyában, melyek érzékenyebbek és alkalmasabbak a dózismérésre, mint az eddig használt sáv. Megvizsgálták több hazai természetes fluorit termolumineszcens viselkedését és annak geológiai jelentőségét.

Az Osztály testületi működése

Az Osztály munkájában korábban is az az irányelv érvényesült, hogy az osztályvezetés minden elvi jelentőségű, vagy általános kihatású kérdésében — szervezeti, gazdasági és személyi ügyekben is — a vezető testületnek, az Osztályvezetőségnek, vagy a szakbizottságoknak kell állást foglalnia. Ennek az elvnek további érvényesülése, a testületek rendszeres, folyamatos munkája, az Osztály előtt álló feladatok megoldására való törekvés jellemezte az elmúlt év testületi munkáját.

Az előzetesen kialakított munkaprogram alapján az Osztályvezetőség hét, a Matematikai Bizottság nyolc, a Fizikai Bizottság hét, a Csillagász Bizottság négy alkalommal tartott ülést. Az üléseken általában tudományos, tudománypolitikai, ideológiai, tudományszervezési, továbbá nemzetközi kapcsolatok és gazdasági problémaköröket érintő kérdések kerültek megvitatásra.

Az Osztály munkáját a rendszeresség és a folyamatosság jellemzte. A testületek általában eleget tettek az alapszabály szerinti feladatkörük ellátásának, ennek során törekedtek arra, hogy tagjaik és az Osztályhoz tartozó intézmények olyan tudományos munkát végezzenek, hogy az általuk művelt tudományágak színvonala emelkedjék. Jelentős szerepet vállaltak a távlati intézetfejlesztési terv kialakítására irányuló előkészületi munkában, több alkalommal is napirendre tűzték a tervek megvitatását. Rendszeresen megtárgyalták a tudományterületükhöz tartozó intézetek beszámoló jelentéseit s ezzel kapcsolatban iránymutatást adtak a tudományos munka továbbfolytatásához. Figyelemmel kísérték a tudományterületükhöz tartozó tudományos egyesületek munkáját, tevékenységükhöz megfelelő iránymutatást adtak. Emellett foglalkoztak tudományterületük sajátos problémáival.

A bizottságok általában ellátták rendszeresen, vagy esetenkénti felkérés alapján azokat a megbízásokat, amelyeket az Osztályvezetőség feladatul tűzött ki. Egyes kérdésekben kialakított állásfoglalásaikkal és javaslataikkal segítették az Osztályvezetőség tudományos irányító és ellenőrző munkáját.

A továbbiakban a testületek elmúlt évi tevékenységének ismertetése következik:

Osztályvezetőség

Értékelte az Osztályhoz tartozó kutatási főfeladatok koordinációs bizottságainak tevékenységét; a Műszaki Tudományok Osztálya Osztályvezetőségével együttes ülésén megvitatta a hazai kibernetikai és az elektronikus számológép-kutatásokkal kapcsolatos kérdéseket; több alkalommal foglalkozott az Osztály tudományterületeire vonatkozó távlati intézetfejlesztési tervvel; megvitatta és kisebb módosítások után jóváhagyta az Osztályhoz tartozó intézetek és tanszéki kutató csoportok

1964. évi kutatási tervét; foglalkozott a Szegedi Matematikai Kutató Intézet és a Debreceni Matematikai Kutató Intézet alakítására vonatkozó javaslattal; határozatot hozott a felolvasó ülések programjának kiszélesítésére; megvitatta a bizottsági rendszer megváltoztatására vonatkozó javaslatot; állást foglalt az Osztály könyvkiadási tervére vonatkozóan; rendszeresen meghallgatta az Osztályhoz tartozó bizottságok beszámolóit és határozatokat hozott, illetve javaslatokat tett különböző ügyekben.

MATEMATIKAI BIZOTTSÁG

Megtárgyalta az intézetek éves terveit és beszámoló jelentéseit, foglalkozott a távlati intézetfejlesztési tervekkel, értékelte az 1. sz. távlati főfeladatot koordináló bizottság tevékenységét. Értékelte a matematika alkalmazásairól rendezett vitát, előkészítette a matematika közgazdasági alkalmazásaival foglalkozó ankétot, összeállította a tudományos rendezvények tervét. Javaslatokat dolgozott ki a nemzetközi együttműködésre, külföldi kiküldetésekre és külföldiek meghívására. Rendszeresen foglalkozott könyv- és folyóiratkiadási és tudományos minősítési ügyekkel. Értékelte a Bolyai János Matematikai Társulat tevékenységét. Véleményezte az egyetemi tanári és docensi pályázatokat.

FIZIKAI BIZOTTSÁG

Megvitatta az intézetek éves terveit és beszámoló jelentéseit, foglalkozott a 3. sz. távlati főfeladat célkitűzéseivel, összeállította a távlati intézetfejlesztési tervet. Foglalkozott azzal, hogy magyar fizikusok hogyan vehetnének részt eredményesebben az IUPAP munkájában. Kialakította állásfoglalását a fizikai tárgyú akadémiai együttműködési témákkal kapcsolatban. Javaslatot dolgozott ki külföldi kiküldetésekre és meghívásokra, tudományos rendezvényekre. Értékelte az Eötvös Loránd Fizikai Társulat tevékenységét. Rendszeresen foglalkozott könyv- és folyóiratkiadási, tudományos minősítési kérdésekkel. Egyetemi tanári és docensi pályázatokat véleményezett.

CSILLAGÁSZ BIZOTTSÁG

Megtárgyalta az intézetek tudományos terveit és beszámoló-jelentéseit; foglalkozott a hazai szputnyikmegfigyelési hálózat helyzetével és tevékenységével; a csillagászati intézetek munkáját akadályozó fotoanyag-ellátás problémáival; külföldi kiküldetésekkel és különböző személyi ügyekkel.

SPEKTROSZKÓPIAI ALBIZOTTSÁG. (A Fizikai Bizottsághoz tartozik.)

Előkészítette a Budapesten megrendezett VII. Európai Molekulaspektroszkópiai Kongresszust. Javaslatára a baráti országok spektroszkópiai bizottságainak vezetői elhatározták, hogy 1963-tól kezdődően évenként rendszeresen találkoznak és koordinálják az egyes országokban folyó kutatásokat. Az első ilyen megbeszélésre 1963-ban Budapesten került sor. Az Albizottság rendszeresen megtárgyalta a külföldön járt szakemberek tapasztalatait és javaslatokat dolgozott ki azok hasznosítására. 1963-ban 3 előadást rendeztek.

Szputnyikmegfigyelési Albizottság

Rendszeresen foglalkozott a négy hazai megfigyelőállomás munkájával és problémáival. Meglátogatta a miskolci, bajai és szombathelyi állomásokat és a helyszínen igyekezett segítséget nyújtani az egyes problémák megoldásában.

Tudományos káderutánpótlás

Az 1963. évi beszámoló óta a tudományos minősítések terén elért számszerű fejlődésről néhány adat:

A beszámolási időszak alatt még az osztály rendezésében 2 matematikai doktori és 1 kandidátusi, 1 fizikus doktori és 8 kandidátusi vita megrendezésére került sor. Ennél többen nyújtottak be disszertációt ezen idő alatt, azonban ezeket további eljárásra a TMB-nek adtuk át. Jelenleg 17 matematikai tudományok doktora, 14 fizikai tudományok doktora, 59 matematikai tudományok kandidátusa és 60 fizikai tudományok kandidátusa fokozattal rendelkező kutató dolgozik az osztályhoz tartozó tudományterületeken. A jövőben az eddigieknél fokozottabban arra kell törekedni a TMB-vel együttműködve, hogy főleg az aspiránsképzés keretében olyan szakterületeken történjék a képzés, amelyek a távlati tervekben is kiemelkedő jelentőségűek.

A káderutánpótlás mindig nagy gondot jelentő problémájának elősegítésére — ha egyelőre még szerény keretek között is — új lehetőséget kapott az Osztály azáltal, hogy mód nyílt néhány egyetemi hallgatóval társadalmi ösztöndíjszerződést kötni. Ezzel lehetőség nyílt arra, hogy jó képességű, tehetségesnek mutatkozó fiatalokat már egyetemi tanulmányaik alatt olyan kutatási területekre irányítsunk, amelyek a távlati kutatási tervekben kiemelt fontosságúak. Ez a lehetőség évről-évre adva lesz, és reméljük, hogy egyre bővülő keretek között.

Könyv- és folyóiratkiadás

A beszámolási időszak alatt a következő művek jelentek meg az Osztály könyvkiadási terve keretében:

Császár Ákos: *Az általános topológia alapjai* (német nyelven és másodszor angol nyelven);

Rédei László: *A végesen generálható kommutatív félcsoportok elmélete* (német nyelven);

Szász Gábor: *Bevezetés a hálóelméletbe* (angol nyelven);

Fejes Tóth László: *Regular Figures* (angol nyelven);

Tarnóczi Tamás: *Fizikai akusztika* (magyar nyelven);

Láng László szerkesztésében megjelenő *Ultraibolya színképatlasz* IV. kötete angolul, továbbá az I. kötet harmadik kiadása ugyancsak angolul.

Megjelent továbbá az 1962. évben tartott *Elektron- és Vácuumfizikai Szimpózium előadásainak anyaga* is angol nyelvű kiadásban.

A II. Osztály gondozásában megjelent és az Osztály tudományterületéhez tartozó könyv:

Jánossy Lajos—Elek Tibor: *A relativitáselmélet filozófiai problémái* (magyar nyelven).

Nemzetközi kapcsolatok

Az 1963. évi kiutazások megoszlása kiküldési formák szerint:

Kongresszusra, konferenciára, tudományos ülésszakra	70 fő
tanulmányútra akadémiai egyezmény keretében	36 fő
államközi kulturális egyezmény keretében	2 fő
meghívásra	15 fő
ösztöndíjjal	19 fő
egyéb módon	4 fő
aspiráns	4 fő

A baráti országok akadémiáival kötött kétoldalú egyezményekben 17 matematikai, 3 fizikai és 3 csillagászati tárgyú téma szerepel, amelyekben 1963-ban közös kutatások indultak, vagy folytatódtak.

Az Osztály a következő többoldalú akadémiai közös kutatási témákban érdekelt:

A Föld mesterséges bolygóinak megfigyelése (SZUTA).

A számítástechnika tudományos kérdései (LTA).

Kozmikus sugárzás kutatása (BTA).

Csillagvizsgáló Intézet a Bolgár NK-ban (BTA).

1963-ban 6 neves külföldi tudós látogatott el meghívásunkra hazánkba 5—7 napos tapasztalatcserére.

Kapcsolataink a nyugati világ tudósaival részben azoknak a nemzetközi szervezeteknek keretei között is bővültek, amelyekben nemzeti bizottsággal, ill. egyéni tagsággal rendelkezünk (IUPAP, IMU, stb.).

Rendezvények

VII. Európai Molekulaspektroszkópiai Kongresszus

A kongresszust 1963. július 22—27 között rendezte meg az IUPAC támogatásával a Magyar Tudományos Akadémia III. Osztálya, az Eötvös Loránd Fizikai Társulat és a Magyar Kémikusok Egyesülete. (E két utóbbi részvétele a kongresszus megszervezésében névleges volt.)

A rendezvény a Nemzetközi Európai Molekulaspektroszkópiai Csoport 2 évenként hagyományosan megrendezendő kongresszusa volt. Az előző kongresszusokat Bázelben, Párizsban, Oxfordban, Freiburgban, Bolognában és Amszterdamban tartották meg. Ez volt az első eset, amikor szocialista országot kértek fel a Kongresszus megrendezésére. Az előkészítési munkát több mint 1 évvel a kongresszus megkezdése előtt egy magyar szervezőbizottság és az IBUSZ kezdte el. Tekintettel a megfelelő időben megindult szervezési munkára, mind a kongresszus tudományos, mind a szervezési munka kellő időben, zökkenőmentesen lett végrehajtva. Ez annak is köszönhető, hogy a magyar szakemberek és a magyar szervezőbizottság tagjai résztvettek a fenti szervezet korábbi kongresszusain, ezenkívül többízben személyes konzultációt folytattak a nemzetközi szervezet vezetőségével.

A kongresszuson a kapitalista országokból 247 kongresszusi tag és 86 kísérő, a szocialista országokból (Magyarország kivételével) 129 tag és 14 kísérő, összesen 376 tag és 100 kísérő, tehát 476 külföldi vett részt. Ezenkívül 60 magyar résztvevője és 7 kísérő tagja volt a kongresszusnak. A kongresszus összlétszáma tehát 26 országból 543 személy volt. A kongresszus magyarországi megszervezése lehetővé tette azt, hogy a korábbi kongresszusokkal szemben — amelyeken a szocialista országokból résztvevő delegációk száma legtöbb esetben még a 10%-ot sem érte el —, ezen a kongresszuson a nyugat—keleti arány kb. 3:2, illetve a kísérőket nem számítva 4:3 volt.

2 plenáris és 12 bevezető előadáson kívül mintegy 180 szekció előadás hangzott el, ezenkívül még 6 db not read paper is szerepelt a kongresszusi anyagban.

Az előadásokon számos új, illetve az előző kongresszuson még nem szerepelt szakmai kérdések vetődtek fel. Ebbben az értelemben a kongresszus egyrészt a tudományág fejlődését tanúsította, másrészt — miután e tudományág csaknem minden vezető tudósa és szakembere jelen volt, kitűnő lehetőség nyílt az előadások, valamint társadalmi összejövetelek során kölcsönös eredmény-, módszer- és tapasztalatcserére.

A kongresszus zökkenőmentesen zajlott le. Az előadások látogatottsága általában megfelelő volt egyes esetek kivételével, amelynek az oka részben a kongresszus tematikája által felölelt túl nagy terület, részben pedig a nagy hőség volt.

Már a kongresszuson a résztvevőkkel folytatott személyes beszélgetések, de különösen a szervezet vezetőjével folytatott beszélgetések során, a külföldiek a legnagyobb elismeréssel nyilatkoztak a kongresszus sikeréről, amelyet részben a magyaros vendégszeretetnek, de elsősorban a kongresszus szervezésében résztvevők jó munkájának tulajdonítottak. Egyes vezetők a legsikeresebbnek, a többiek pedig kétségkívül egyik legsikeresebb kongresszusnak mondták a budapesti rendezvényt. Hasonló véleményeket tükröztek az utólag nagy számban a kongresszus szervezőbizottságához érkezett köszönő levelek.

Hiányosság volt, hogy a tematika túl nagy területet ölelt fel, ezért volt egyes esetekben olyan kicsi a látogatottság, mivel a szakemberek véleménye szerint a kongresszus résztvevőinek többsége általában 6—8 előadás meghallgatásában volt érdekelt. Egyre inkább bebizonyosodik, hogy tudományos szempontból hasznosabb a kisebb méretű rendezvények szervezése. A kongresszus tematikájának a meghatározását az Európai Molekulaspektroszkópiai Csoport vezetősége végezte és a záró banketten ezt a kongresszussal kapcsolatos problémát ők is felvetették.

Abel-csoportok kollokvium

A kollokviumot a Magyar Tudományos Akadémia III. Osztálya és a Bolyai János Matematikai Társulat a Nemzetközi Matematikai Unió felkérésére és támogatásával rendezte 1963. szeptember 2—8 között Tihanyban. A kollokviumnak az Unió szokása szerint nemzetközi szervezőbizottsága volt, amely jóváhagyta a meghívandók névsorát. Az előkészítési munkák, tekintettel arra, hogy kisebb méretű rendezvény volt, a rendelkezésre álló mintegy 8 hónap alatt zökkenőmentesen, kellő időben zajlottak le.

34 külföldi (ebből 9 szocialista) és 14 magyar résztvevője volt a kollokviumnak. 28 előadás hangzott el. Mind az előkészítő munkában, mind a kollokvium időtartama alatt a szervezési munkák gördülékenyen folytak. Mint ahogy már korábban is beigazolódott, kitűnő megoldás egy kollokvium vidéken való megrendezése. Ez tükröződött elsősorban az előadások látogatottságában, amely ezen a kollokviumon majdnem mindig 100%-os volt. A kollokvium tudományos szempontból igen eredményesnek mondható, mivel részt vett rajta szinte mindenki, aki az Abel-csoportok elméletében ma számottevő.

A rendezvény jelentősége az is, hogy ez volt az első tudományos rendezvény, amelyet Magyarország a Nemzetközi Matematikai Unió felkérésére szervezett. A külföldiek — a kötelező udvariasságot is leszámítva — megállapíthatóan elégedettek voltak mind a kollokvium tudományos, mind pedig szervezési munkáival.

Hiányossága volt a rendezvénynek, hogy lényegében három helyen került megszervezésre; egyrészt szervezte az Akadémia Nemzetközi Kapcsolatok Osztálya, másrészt a III. Osztály és a Bolyai János Matematikai Társulat. E hármas szervezés miatt bizonyos olyan zökkenők merültek fel, amelyek azonban a kollokvium érdemi szervezési munkáját lényegében nem befolyásolták, így a külföldiek nem is szereztek róluk tudomást.

Alacsonyenergiájú Magfizikai Kollokvium

A kollokviumot az Eötvös Loránd Fizikai Társulat az Országos Atomenergia Bizottsággal együtt szervezte a Magyar Tudományos Akadémia III. Osztályának támogatásával, Tihanyban, 1963. szeptember 16—21-ig.

A rendezvényen 33 külföldi, ebből 32 a szocialista országokból, 1 pedig kapitalista országból vett részt, továbbá 55 magyar fizikus. 47 előadás hangzott el a magreakciók és magspektroszkópia témakörből, amelyből 18-at magyar résztvevők tartottak, ezenkívül 4 előadás reprint formájában került szétosztásra. Ez utóbbi előadások a magfizikai kutatások technikai jellegű problémáival foglalkoztak. A kollokvium célja az volt, hogy a magyar fizikusok külföldi szakemberek előtt ismertessék azt, hogy milyen kutatásokkal foglalkoznak, milyen eredményeket értek el munkájuk során és meghallgassák a külföldi szakemberek véleményét és tanácsait további munkájuk irányának kijelölésére, továbbá, hogy információt kapjanak a résztvevő országok hasonló kutatásairól. E téren mindkét irányból élénk érdeklődés volt. Megállapítható, hogy a magyar előadások színvonala az 1960-ban tartott hasonló kollokviumnál lényegesen magasabb volt, elsősorban azért, mert a hangsúly az akkori készülék jellegű problémákról ezen a rendezvényen a fizikai problémákra terelődött át. A külföldi szakértők véleménye szerint, amelyet részben a hozzászólásokban, részben magánbeszélgetések során mondtak el, a magyar résztvevők előadásai megütik a nemzetközi folyóiratokban megjelenő dolgozatok színvonalát.

A kollokviumon elhangzott külföldi előadásokat összevetve a magyar előadásokkal, megállapítható volt, hogy a szovjet, dán és lengyel kutatásokat valamilyen fizikai törvényszerűség keresése irányítja, míg más országok — köztük a magyar kutatásokat is — nagyrészt a magfizikai mérőkészülékek által nyújtott lehetőségek szabják meg és az eredmények csak mások eredményeivel együtt teszik lehetővé a törvényszerűségek megállapítását.

A beszámolási időszak alatt az Osztály 4 felolvasó ülést rendezett, amelyeken a dolgozatok cím szerinti bemutatásán kívül a következő előadások hangzottak el:

NOVOBÁTZKY KÁROLY akadémikus előadása *G. Galilei születésének 400. évfordulója alkalmából;*

W. HEISENBERG professzor előadása: *Az elemi részek egységes térelméletének speciális problémái;*

H. PICK professzor előadása: *Struktur von Störstellen in Alkalihalogenid-Einkristallen;*

ROBERT S. COHEN előadása: *Alternative interpretations of the foundations of quantum mechanics.*

A NÉPGAZDASÁGBAN FELHASZNÁLHATÓ, ILLETŐLEG A KÖZELMÚLTBAN HASZNOSÍTOTT KUTATÁSI EREDMÉNYEK

Az 1963. évi közgyűlés határozatot hozott a kutatási eredmények gyakorlatban való felhasználásának jobb biztosítására. Ezzel kapcsolatban a múlt évben a kutatóhelyek számbavették azokat az eredményeket, amelyek felhasználása lehetséges és hasznos a népgazdaság számára. Ezek az eredmények a következők:

Központi Fizikai Kutató Intézet

Az elmúlt években mintegy 25—30 különböző nukleáris műszert fejlesztettek ki és adtak át a Kohó- és Gépipari Minisztérium által erre a célra kijelölt ipari üzemnek gyártásra. A Gamma Optikai Művek évi termelésének számottevő része a KFKI által kidolgozott műszertípusokból adódik.

1. A hazai félvezető-gyártás alapanyagainak vizsgálatára neutron aktivációs módszer kidolgozására került sor. A módszer segítségével megállapítható a nagytisztaságú szilíciumban a 10 legfontosabb szennyező anyag. Az eredmény felhasználására a Nitrokémia iparvállalatoknál (Balatonfűzfő) kerül sor.
2. Elektronhegesztésre vonatkozólag dolgozott ki az Intézet eljárást és szerkesztett egy berendezést is. Az eredmény a Kohó- és Gépipari Minisztérium területén lenne felhasználható, pl. Adócsőgyár, Remix, TÁKI.
3. Ingás koerciméter és mágneses telítettségmérő.
4. Elektromágnes 45 000 Oe-ig terjedő térerősségek előállítására.
5. Nagy erősítésű fázisérzékeny csővoltmérő.
6. Termopárral vezérelt 0,1 C°-nál pontosabb, 1 kW kimenő teljesítménnyel dolgozó hőmérséklet-szabályozó.
7. Nagyfrekvenciás vákuumolvasztóval kombinált egykristály-növesztő berendezés.
8. Vákuumkocsi és szerelvényei.
9. Hat, ill. tizenkét munkahelyes vegyészeti laboratóriumban használatos keverő (mixer setler).
10. Hordozható levegő-mintavevő készülék.
11. Optikai méréseket végző laboratóriumokban hasznosítható építőkocka elven kialakított automatika elemeket tartalmazó mechanikus mérőrendszer.
12. Szabványprogramok digitális számológépek számára:
    a) n-dimenziós Gauss-kvadratura n-szeres integrálok numerikus kiszámítására ($n = 1,23$);
    b) matrixinvertáló és lineáris egyenletrendszer megoldó program (legfeljebb 20-as rendűig);
    c) algebrai és transzcendens egyenletek gyökeinek meghatározása;
    d) többváltozós függvények lokális szélsőértékeinek meghatározása;
    e) közönséges differenciálegyenletek és egyenletrendszerek kezdeti érték feladatainak numerikus megoldása;
    f) Poisson- és biharmonikus egyenlet megoldása derékszögű paralelogramma tartományon, homogén peremfeltételek mellett.
13. STAR típusú programozó egységek (átadása az EMG-nek előkészületben).

Az itt felsorolt eredmények, ill. műszerek és eszközök elsősorban a KGM területén, a műszeriparban lesznek hasznosíthatók. Az Intézet ilyen irányú tárgyalásokat folytat.

Atommag Kutató Intézet

Hasadási termékek visszatartása humuszon című témában elért kutatási eredmény alkalmazása a közepes aktivitású atomipari szennyvizek tisztításánál. Az eredményeket átadták az Országos Atomenergia Bizottságnak.

Matematikai Kutató Intézet

Az alábbi témákban esztendők óta folyó kutatásokról van szó, amelyekben évről-évre újabb eredmények kerülnek felhasználásra.

1. Mintavételi adatok feldolgozásában, mérési adatok kiértékelésében és a statisztikus összefüggések vizsgálatában elért eredmények felhasználásra kerültek, főként ipari kutatóintézetek munkájában (pl. a Fémipari Kutató Intézetben és a Híradástechnikai Ipari Kutató Intézetben). A kérdéskörben elért eredmények természetesen számos más területen alkalmazhatók, ahol mérési adatok kiértékelésére van szükség.
2. Faktoriális kísérletek tervezésében elért eredmények alkalmazásra kerültek a Nagynyomású Kísérleti Intézet munkájában. Ezek az eredmények természetesen a mezőgazdaságban és különösen a vegyiparban további felhasználásra kerülhetnének.
3. A statisztikai minőségellenőrzés eredményei felhasználásra kerültek üzemekben a minőségellenőrzés megszervezése, gyártásközi ellenőrzések során. Legutóbb ilyen eredmények felhasználására a KGM Tervező Intézete megbízása alapján a csavargyártás minőségellenőrzésének megszervezésénél került sor. Az elért eredmények itt is számos más minőségellenőrzés megszervezésénél volnának felhasználhatók.
4. Elektrotechnikai eszközök és alkatrészek gazdaságos méretezésének meghatározása a tömeggyártás szempontjából c. témában elért eredmények a Híradástechnikai Ipari Kutató Intézetben kerültek felhasználásra transzformátor lemezek méretezésénél és ennek alapján egy szabvány is készült.
5. Az Intézet Szegeden működő Matematikai Logika és Alkalmazásai Osztálya kutatásai során számos olyan eredményt ért el, amelyek felhasználásra kerülhetnének. Ilyen erdmények például: jelfogós áramkör analizáló berendezés az áramkör helyes működésének ellenőrzésére, továbbá mágnesszalagos tárolók célszerű szerkesztése, amelyek gépinformátorok gyártásánál lennének felhasználhatók.

   A felsorolt eredmények a műszeriparban kerülhetnének felhasználásra.
6. Az információelméletben elért eredmények alkalmasak bonyolult berendezések hibáinak megkeresésére. Az eredmények felhasználhatók pl. a műszeriparban, a híradástechnikai iparban, stb.
7. Az optimális készletgazdálkodásra vonatkozó kutatások eredményei valamennyi vállalat és üzem jobb anyaggazdálkodását teszik lehetővé. E kutatások az Országos Tervhivatal megbízásából folynak.
8. A minőségellenőrzésre vonatkozó matematikai statisztikai vizsgálatok eredményei és a kidolgozott módszer felhasználásra kerülhet a kereskedelmi forgalomban és az exportra kerülő termékek minőségvizsgálatánál.
9. Ellenáramú hűtő- és oldótornyok gazdaságos méretezésére vonatkozó eredmények a vegyiparban és az élelmiszeriparban kerülhetnének hasznosan felhasználásra.

Számítástechnikai Központ

1. A Csepeli Szerszámgépgyár részére dolgoztak ki egy praktikusan jól alkalmazható, gazdaságilag jó művelettervet előállító programot, amely egyedi gépgyártás esetén általánosságban alkalmazható.
2. A műszálgyártás 20 éves távlati fejlesztési tervének elkészítésével kapcsolatosan módszert dolgoztak ki a nemlineáris programozás egyes problémáinak megoldására, amelynek segítségével a tervezéseknél a költségek degresszív jellegét figyelembe lehet venni.
3. A bauxit és alumíniumgyártás távlati fejlesztési tervének kidolgozásával kapcsolatosan módszert dolgoztak ki arra, hogy hogyan lehet figyelembe venni a távlati fejlesztési tervek modelljeinek kidolgozásánál a jövőben kialakuló technológiákat és gazdaságossági mutatókat.
4. Elkészítették és megoldották a Csepeli Papírgyár szabástervének matematikai modelljét; ennek során kidolgozták egy, az eddigi gyakorlatot meghaladó méretű geometriai programozási probléma megoldására szolgáló módszert.
   A fentieken kívül részben külső szervek felkérésére, részben a Központ saját kezdeményezésére még több olyan műszaki, ill. gazdasági probléma modelljét készítették el és oldották meg, amely problémák más üzemeknél, ill. gazdasági irányító szerveknél is fellépnek. Ezeknek az eredményeknek a publikálása a Központ „Tájékoztatójában" megtörtént és arról az érdekelt intézmények tudomást szereztek, ill. szerezhetnek.
5. Kísérletek folynak a Központban digitális logikai áramkörök szerkesztésére. Ennek keretében elkészült egy „MAGLOGAL" elnevezésű logikai alegységrendszer, amely ipari-automatikai célokra használható. Megjegyezzük, hogy konkrét alkalmazásukra tapasztalatok még nincsenek, ilyen irányú kísérletek most folynak.
6. A Központban — eredetileg szovjet dokumentáció alapján — elkészült egy mágneses dobmemória. Ennek vezérlő és meghajtó részét már magyar gyártmányú, hosszú élettartamú csövekkel a Központ fejlesztette ki. A memória ipari-automatikai célokra alkalmazható. E dobmemória egy példányát a Román Tudományos Akadémia kérésére a Központ átadta a temesvári Műszaki Egyetemnek 1960-ban, ahol azt 2 éve jó eredménnyel használják.

Kristálynövekedési Akadémiai Kutató Csoport

Kidolgozásra került a műszeripar szempontjából igen fontos egykristályok (NaCl, KBr stb.) előállításának és megmunkálásának technológiája. A technológia alapján készülő kristályokkal a Kutató Csoport kisegíti az ezen kristályok iránt érdeklődő kutató intézeteket és az ipari üzemeket (ezek a kristályok ugyanis sem belföldön, sem külföldön nem szerezhetők be, embargo áru). Így pl. az egykristályokból készült alkatrészeket a Kutató Csoport a Műszeripari Kutató Intézet, a Műanyagipari Kutató Intézet, valamint a Magyar Optikai Művek rendelkezésére bocsátja.

Kristályfizikai Akadémiai Laboratórium

1. Infravörös optikához alkalihalogenid egykristályok gyártása. A hazai infravörös optikai ipar még annyira fejletlen, hogy nem jelentkezik ilyen igénnyel.

A későbbiekben a MOM, ill. a Gamma Optikai Művek fel tudják használni majd az e téren elért eredményeket.

2. Antracén egykristályok és lemezek gyártása. Az antracén lemezek gyártását a Gamma szándékozik átvenni, azonban szervezési problémák akadályozzák a gyártás megindítását.

Az eredményeket az intézetek bejelentették az Országos Műszaki Fejlesztési Bizottságnak.

Az Osztály anyagi ellátottsága

(A felsorolt adatok 1963-ra vonatkoznak.)

Az Osztályhoz tartozó intézetekben (KFKI kivételével):

létszám:	321 fő
költségvetés:	17 759 400 Ft
beruházás:	3 067 000 Ft

Az Osztály által támogatott egyetemi intézetekben:

létszám:	50 fő
költségvetés:	1 021 700 Ft
beruházás:	2 141 000 Ft.

Összevetve az adatokat az 1962. évi adatokkal, a fejlesztés létszámban 11,7%, költségvetésben pedig 12%.

A Társulatok munkája

A) *Bolyai János Matematikai Társulat*

A következő nagyrendezvényekre került sor:

A matematika közgazdasági alkalmazásai (kollokvium),

Abel-csoportok (kollokvium).

A valószínűségszámítás fizikai alkalmazásai (kollokvium az Eötvös Loránd Fizikai Társulattal közösen).

Vándorgyűlés.

A Társulat tisztikar újjáválasztással egybekötött közgyűlést is tartott.

Együttműködési egyezménye van a Társulatnak a Csehszlovák Társulattal.

A következő szakosztályok működtek:

Oktatási Szakosztály. Rendszeres előadásokat szervezett, az Ifjúsági Matematikai Kör háromhetenként előadóülést tartott, kétszer kétnapos ankétot rendezett az ország legjobb középiskolai tanulói részére. Havonta egyszer középiskolai matematikai délutánt tartott. Megszervezte a Nemzetközi Diákolimpián való részvételt.

Tudományos Szakosztály. Kéthetenként előadóüléseket tartott a Társulat központjában. Megvitatta a Tudományegyetemek matematikai tanterv-tervezetét.

Alkalmazott Matematikai Szakosztály. Egy évfolyam találkozót rendezett az alkalmazott matematikus szakot végzettek számára. Bekapcsolódott a műszaki egyetemek tantervének megvitatásába.

A Társulat a következő versenyeket rendezte:

Arany Dániel verseny (a Művelődésügyi Minisztérium támogatásával a középiskolák I—II. osztályos növendékei részére; résztvevők száma mintegy 5000 fő)

Országos Középiskolai Matematikai Tanulmányi Verseny (a Művelődésügyi Minisztériummal közös rendezésben a középiskolák III—IV. osztályos növendékei részére).

Kürschák József tanulóverseny (az 1963-ban érettségizettek versenye).

Schweitzer Miklós emlékverseny (egyetemi hallgatók és az 1963-ban végzettek részére).

A Társulat 1963-ban is kiadta a Beke Manó és a Grünwald Géza díjat.

A Társulat folyóirata a *Matematikai Lapok.* A Társulat és a Művelődésügyi Minisztérium közös folyóirata a *Középiskolai Matematikai Lapok.*

A következő vidéki városokban működik helyi csoport: Miskolc, Debrecen, Győr, Nyíregyháza, Pécs, Sopron, Szeged, Székesfehérvár, Szombathely, Veszprém.

Eötvös Loránd Fizikai Társulat

Nagyrendezvények 1963-ban:
VII. Európai Molekulaspektroszkópiai Kongresszus.
Plazmafizikai kollokvium.
Középiskolai fizikatanári ankét ( ) eszközkiállítással.
Nyári elméleti fizikai iskola
Vándorgyűlés.
Alacsonyenergiájú Magfizikai Kollokvium.
Sugárvédelmi Kollokvium.
Szilárdtestfizikai Kollokvium (NDK Fizikai Társulatával közösen NDK-ban).

A Társulat külföldi kapcsolatai tovább erősödtek; együttműködési egyezményük van az NDK, a Csehszlovák és Lengyel Társulatokkal.

Szakosztályok:

Sugárvédelmi Szakosztály. Feladata a sugárvédelemmel kapcsolatos kérdések figyelemmel kísérése, továbbképzés, stb.

Oktatási Szakosztály. Középiskolai Fizika Délutánokat, Ifjúsági Fizikai Kört és Ankétot, szakmai és módszertani előadásokat rendezett. Foglalkozott a demonstrációs és tanuló-gyakorlati, a technikumi és szakközépiskolai fizikaoktatás, az általános iskolai fizikatanítás kérdéseivel.

A Társulat megrendezte az 1963-ban érettségizettek részére az *Eötvös Loránd tanulóversenyt.* 1963-ban is kiadta a Bródy Imre, a Schmidt Rezső és a Mikola Sándor díjakat.

A Társulat folyóirata a *Fizikai Szemle.* A Társulat és a Művelődésügyi Minisztérium folyóirata a Fizikai Rovattal bővített *Középiskolai Matematikai Lapok.*

A következő vidéki városokban működik helyi csoport: Debrecen, Eger, Miskolc, Szeged, Veszprém, Győr.

A KVANTUMMECHANIKAI MÉRÉSELMÉLET MEGALAPOZÁSÁHOZ

Írta: FÁY GYULA

1. A kvantummechanikai természetleírást két szempontból szokták a klasszikus makroszkopikus leírástól megkülönböztetni:

a) Egyrészt abból, hogy a mérés során a mérőeszköz és a mérendő test kölcsönhatása a mikrofolyamatokban nem elhanyagolható s ezért a mérés során a mérendő test állapota lényegesen megváltozik. Így mindig csak a mérés következtében előállott állapotot ismerhetjük meg, tehát a mérési eredmények objektivitása problematikussá válik.

b) A kvantummechanikai természetleírás másik nehézsége, annak kettőségében rejlik, hogy egy mérendő rendszerről kétféleképpen szerezhetünk ismereteket:

α) először a φ kezdeti állapotú rendszeren egy oly fizikai mennyiséget mérve, melyhez tartozó R operátor sajátfüggvényei: $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ és sajátértékei: $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ tudjuk, hogy a λ_i érték $w_i = |(\varphi, \varphi_i)|^2$ valószínűséggel lép fel s φ_i-ktől különböző állapotok nem lehetségesek.

β) Eljárhatunk azonban úgy is, hogy a mérendő testet a mérőeszközzel energetikailag zárt egésszé egyesítjük s akkor ezen egyesített rendszer állapotának időbeli lefutását a Schrődinger-egyenlettel írjuk le. Az egyesített rendszer állapotáról visszakövetkeztethetünk a részrendszer állapotára, s megállapíthatjuk, milyen valószínűséggel lép fel annak valamely φ_i állapota.

Már NEUMANN [1] hangsúlyozta, hogy a kétféle leírásmódnak azonos végeredményt kell szolgáltatnia s ezt a követelményt ő pszicho-fizikai parallelizmusnak nevezte. Erre vonatkozóan bebizonyította, hogy az matematikailag mindig kielégíthető, azonban az *a)* és *b)* problémák kapcsolatával sem ő, sem mások nem foglalkoztak.

Ami azonban magát az *a)* problémát illeti, azzal az irreverzibilis folyamatok termodinamikájában régóta foglalkoznak. T. CARATHEODORY és I. FÉNYES [2, 3] az I. és II. (mérendő és mérő) test közti termodinamikai egyensúlyt azzal jellemezte, hogy az I + II rendszer egyensúlyi állapotában I. és II bizonyos fizikai mennyiségei (állapothatározói) közt függvénykapcsolat exisztál s ez adott módot az intenzitásparaméter fogalmának bevezetésére. Termodinamikai folyamatok leírásánál kifogástalanul alkalmazható a következő szemlélet: Hozzuk az I és II termodinamikai rendszereket egymással energetikailag kölcsönhatásba. Ekkor az egyesített rendszernek lesz oly állapota, melyben az I és II intenzitásparaméterei megegyeznek. Ez a körülmény (az intenzitásparaméterek kiegyenlítődési tendenciája) módot ad I-nek II által való mérésére. S bár I állapota a mérés során megváltozik, állapotának objektivitásában nincs okunk kételkedni, mivel a mérés előtti állapot is kiszámítható.

NEUMANN 1932-ben hasonló eredményekre jutott a kvantumelméleten belül, amennyiben kimutatta, hogy ha az I+II egyesített kvantummechanikai rendszer tiszta állapotban van (Φ-ben) akkor Φ I és II bizonyos fizikai mennyiségei közt kölcsönösen egyértelmű leképezést létesít. Ez más szóval azt jelenti, hogy a kvantummechanikán belül is értelmezhető egyensúlyi állapot s ily módon az intenzitásparaméterek „morc termodinamico" bevezetésére is mód nyílik.

2. Dolgozatunkban e kérdésnek inkább ismeretelméleti oldalával szeretnénk foglalkozni. Világos, hogy mind az *a)*, mind a *b)* probléma ismeretelméleti kérdést takar: a mérési eredmények objektivitásának kérdését. A *b)* problémában ugyanis arról van szó, hogy mennyit kell hozzászámítanunk a megfigyelő szubjektumából a mérőeszközhöz s attól, hogy hol vonjuk meg a határt megfigyelő és mérőeszköz közt, mennyire függnek a tulajdonképpeni mérendő testről szerzett ismereteink.

Dualisztikus szemléletű kutatók számára az anyagi folyamatok csak egy bizonyos határig léteznek, azon túl lelki folyamatok vannak, melyek fizikai módszerekkel nem írhatók le s így a tárgyalásból valamiképpen kirekesztendők. De ha az I-ről szerzett ismereteink függenének attól: *hol* vonjuk meg a határt, úgy pl. a már nem anyagi világban megvonva az adódnék, hogy az I-beli nyilván anyagi folyamatok valami nemanyagitól függnek. Ezt a kellemetlen helyzetet kirekesztendő igyekezett NEUMANN bebizonyítani a határ tetszőlegességének elvét.

A materialista felfogású kutató szerint csak anyagi folyamatok léteznek és ezek egyértelműen okozzák az agyunkban végbemenő szintén anyagi folyamatokat. Másrészt a jelenségek tudatunktól — agyunk folyamataitól — függetlenek s ezért a NEUMANN-féle tétel magától értetődő.

Ily módon — materialista alapon állva — kiindulhatunk a határ tetszőlegességének elvéből és ezen az alapon próbálhatjuk megvizsgálni, mi a helyzet a másik ismeretelméleti problémával, ti. az *a)* alattival? Ki szeretnénk mutatni, hogy az *a)* és *b)* problémának közös ismeretelméleti gyökerei vannak, amennyiben a méréselmélet alaptételének nevezhető tény, — mely szerint vannak az egyesített I+II rendszernek olyan állapotai, melyekben az I és II bizonyos fizikai mennyiségei kölcsönösen egyértelmű kapcsolatban vannak egymással, — már következik a materialista felfogásból, vagyis abból, hogy a kvantummechanikai természetleírás mindkét fajtája ugyanarra a végeredményre vezet.

3. Ennek a kikötésnek precíz megfogalmazása a következő: Tekintsünk egy φ állapotú kvantummechanikai rendszert. Egy $\{\varphi_i\}$ sajátfüggvényrendszerű mennyiség mérése céljából hozzuk ezt kölcsönhatásba egy ξ állapotú rendszerrel. Ekkor az egyesített rendszer kezdeti állapota:

$$\Phi = \Phi(o) = \varphi\xi.$$

Ha az egyesített rendszer zárt s Hamilton operátora H, akkor a t időpontban az egyesített rendszer állapota

$$\Phi = \Phi(t) = \exp\left(-\frac{i}{h}tH\right)\varphi\xi$$

lesz. Állapítsuk meg, mi annak w_i valószínűsége, hogy az I részrendszerben a t időpontban a φ_i állapot lép fel. Kikötésünk azt jelenti, hogy legyen: $w_i = |(\varphi, \varphi_i)|^2$. Ezen w_i ármost más úton, mint a részrendszer állapotvalószínűsége, meghatározható a következőképpen:

Ismeretes, hogy ha az egyesített rendszer a tiszta Φ állapotban van, akkor az I és II rendszerek kevert állapotban vannak, melyek statisztikus operátorai:

$$U = F^x F, \quad V = FF^x,$$

ahol

$$F\varphi = \int \ddot{\Phi}\varphi \, dq; \quad F^*\xi = \int \Phi\xi dr, \quad (\Phi = \Phi(q,r), \ \varphi = \varphi(q), \ \xi = \xi(r).)$$

Ha mármost tudjuk, hogy az állapotvalószínűség a statisztikus operátor sajátértéke, azaz:

$$U\varphi_i = w_i \varphi_i$$

s így

$$\Phi = \sum_{m,n} f_{mn} \varphi_m \xi_n$$

miatt

$$U\varphi_i = F^* F\varphi_i = F^* \sum_{m,n} \int \bar{f}_{mn} \bar{\varphi}_m \bar{\xi}_n \varphi_i \, dq = F^* \sum_{m,n} \bar{f}_{mn} \bar{\xi}_n \delta_{mn} =$$

$$= \sum_n \bar{f}_{in} F^* \bar{\xi}_n = \sum_n \bar{f}_{in} \int \Phi \bar{\xi}_n \, dr = \sum_n \bar{f}_{in} \sum_{h,l} f_{hl} \int \varphi_n \xi_l \bar{\xi}_n \, dr = \sum_{n,h,l} \bar{f}_{in} f_{hl} \varphi_n \delta_{ln} \qquad (= w_i \varphi_i)$$

Ez viszont csak úgy lehetséges, ha

$$f_{in} = f_{ii} \delta_{in}$$

vagyis, ha

$$w_i = |f_{ii}|^2 \equiv |c_i|^2$$

Ily módon kell, hogy a f_{ik} mátrix diagonális legyen.

4. A legutóbb mondottakból következik, hogy I és II bizonyos fizikai mennyiségei közt a Φ állapot kölcsönösen egyértelmű kapcsolatot létesít a következő értelemben:

Minthogy f_{ik} átlós, azért ilyenkor

$$\Phi = \sum_i c_i \varphi_i \xi_i$$

alakú s ebben az állapotban

$$\Phi = \sum_i c_i \varphi_i \xi_i = \sum_i \tfrac{1}{2}(c_i \varphi_i \xi_i + c_i \varphi_i \xi_i),$$

$$\tfrac{1}{2}(P_{\varphi_n} + P_{\xi_n})\Phi = c_n \varphi_n \xi_n \left(= \frac{c_n \varphi_n \xi_n + c_n \varphi_n \xi_n}{2} \right),$$

és

$$P_{\varphi_n} P_{\xi_n} = c_n \varphi_n \xi_n .$$

Vagyis ebben a Φ állapotban

$$(*) \qquad \left(\tfrac{1}{2}(P_{\varphi_n} + P_{\xi_n})\Phi, \Phi\right) = (P_{\varphi_n} P_{\xi_n} \Phi, \Phi).$$

Ezen megjegyzés figyelembevételével fogalmazzuk meg, mit jelent az, hogy a $\{\varphi_n\}$ és a $\{\xi_n\}$ sajátfüggvényrendszerű operátorokhoz tartozó fizikai mennyiségek kölcsönösen egyértelmű kapcsolatban állnak egymással.

NEUMANN mutatta ki azt, hogy annak valószínűsége, hogy a P_{φ_n} projekciós operátorral jellemzett tulajdonság és a P_{ξ_m}-vel jellemzett egyidejűleg fellépjen egy ψ

állapotban (feltéve, hogy $P_{\varphi_n}P_{\xi_m}-P_{\xi_m}P_{\varphi_m}=0$), $(P_{\varphi_n}P_{\xi_m}\psi, \psi)$-vel egyenlő, vagyis a logikai „és"-nek (&) a projekciós operátorok *szorzása* felel meg. Hasonlóan a De Morgan-féle logikai azonosság felhasználásával mutatta meg NEUMANN, hogy a logikai negációnak (tagadásnak, jele: $^-$) a megfelelő projekciós operátor 1-ből való kivonása felel meg.

Tudva tehát, hogy mi felel meg az ítéletkalkulus konjunkcióműveletének (& -nek) és mi felel meg a negációnak ($^-$-nak), könnyen megállapítható, mi felel meg az „akkor és csakis akkor ha"-t kifejező logikai ekvivalenciának, ($\sim$-nek).

Az ítéletkalkulusból ismeretes, hogy ha A és B két ítélet, akkor $A\sim B$ ítélet a konjunkcióval és a negációval a következőképpen fejezhető ki:

$$A\sim B=\overline{A\,\&\,\overline{B}}\ \&\ \overline{\overline{A}\,\&\,B}$$

Tartozzék ármost A-hoz a P_{φ_n}, B-hez a P_{ξ_n} projekciós operátor, akkor $A\sim B$-hez az

$$(**)\qquad [1-P_{\varphi_n}(1-P_{\xi_n})][1-P_{\xi_n}(1-P_{\varphi_n})]$$

projekciós operátor tartozik s ez annak a tulajdonságnak felel meg, hogy a φ_n állapot akkor és csakis akkor lép fel, ha ξ_n fellép. Vagyis ez az operátor azt a tulajdonságot fejezi ki, hogy a szóbanforgó fizikai mennyiségek egymással kölcsönösen egyértelmű kapcsolatban vannak. Azt fogjuk kimutatni, hogy ez a tulajdonság bármely n-re 1 valószínűséggel lép fel.

Minthogy P_{φ_n} és P_{ξ_n} felcserélhetők (hiszen φ_n csak I, ξ_n pedig csak II koordinátáitól függ), azért (**) átalakításával az adódik, hogy ahhoz az ítélethez, hogy „a λ_n sajátérték (a φ_n állapot) akkor és csakis akkor lép fel, ha μ_n (azaz ξ_n)", az

$$1-(P_{\varphi_n}+P_{\xi_n})+2P_{\varphi_n}P_{\xi_n}$$

projekciós operátor tartozik. Ármost a fentiekre tekintettel *ez* a Φ állapotban

$$P=([1-(P_{\varphi_n}+P_{\xi_n})+2P_{\varphi_n}P_{\xi_n}]\Phi, \Phi)$$

valószínűséggel következik be. Látható, hogy $P=1$, vagyis az $A\sim B$ ekvivalencia akkor igaz, ha

$$(\tfrac{1}{2}[P_{\varphi_n}+P_{\xi_n}]\Phi, \Phi)=(P_{\varphi_n}P_{\xi_n}\Phi, \Phi).$$

A (*) alatti relációban azonban éppen ezt mutattuk ki a fenti speciális Φ állapotra s így bebizonyítottuk, hogy ez az állapot leképezést létesít I és II bizonyos fizikai mennyiségei között.

Befejezésül kiemeljük, hogy eredményünk, vagyis a méréselmélet alaptételének dedukciója annak következménye, hogy a mérési eredmények objektivitását posztuláltuk a $w_i=|(\varphi, \varphi_i)|^2$ alakban.

IRODALOM

[1] NEUMANN, J. von: *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*. Berlin, 1932.
[2] CARATHEODORY, T: *Math. Ann.* **67** (1909) 355.
[3] FÉNYES, I.: *Z. Phys.* **134** (1962) 95.

(Beérkezett: 1963. X. 1.)

ELOSZLÁS- ÉS SŰRŰSÉGFÜGGVÉNY-GRAFIKONOK ALAKJÁNAK JELLEMZÉSÉRŐL. I.[1]

Írta: MEDGYESSY PÁL

1.

Legyen ξ egy sztochasztikus változó, $F(x)$ pedig ennek eloszlásfüggvénye. A valószínűségelmélet elemeiből ismeretes, hogy a $\mathbf{D}^2(\xi)$ szórásnégyzet — amennyiben létezik — bizonyos mértékben jellemzi $F(x)$ grafikonjának alakját: ha $\mathbf{D}^2(\xi)$ közel van zérushoz, $F(x)$ grafikonja közel van az $U[x, \mathbf{E}(\xi)] = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leqq \mathbf{E}(\xi) \\ 1 & \text{ha } x > \mathbf{E}(\xi) \end{cases}$ elfajult eloszlásfüggvény grafikonjához. Ha $F(x)$ egy $f(x)$ sűrűségfüggvényből származtatható, az előbbieknek az felel meg, hogy $f(x)$ grafikonja az $x = \mathbf{E}(\xi)$ egyenes körül „koncentrálódik". — $\mathbf{D}^2(\xi)$ természetesen csak tökéletlen jellemzője $F(x)$ (ill. $f(x)$) grafikonja alakjának.

Ha $\mathbf{D}^2(\xi)$ nem létezik, a helyette használt szórtság (ingadozás) jellemzők adnak $F(x)$ (ill. $f(x)$) görbéjének alakjáról nagyjából ugyanolyan jellegű tájékoztatást, mint $\mathbf{D}^2(\xi)$. Ezek a szórtság-jellemzők — a várható eltérés, az interkvartilis félterjedelem, stb., — korántsem kezelhetők olyan jól, mint a szórásnégyzet; pl. nem fejezhetők ki egyszerűen ξ karakterisztikus függvényével, nem additív funkcionálok, é. i. t.; ha pl. $\mathbf{E}(\xi)$ nem létezik, a várható eltérés már szóba sem jöhet.

Ezeket a tényeket átgondolva, érdemesnek látszik az alábbiakban a következő problémával foglalkozni:

A) Ha sem $\mathbf{D}^2(\xi)$, sem $\mathbf{E}(\xi)$ nem létezik, található-e olyan jellemző ξ-hez, mely mond annyit nagyjából $F(x)$ (ill. $f(x)$) grafikonjának alakjáról, mint — létezése esetén — $\mathbf{D}^2(\xi)$, emellett vannak olyan egyszerű tulajdonságai, mint a szórásnégyzetnek.

A felvetett kérdés megválaszolásának lehetőségeivel foglalkozva, egy másik probléma is felmerül, nevezetesen:

B) Hogyan lehetne $F(x)$ (ill. $f(x)$) grafikonja alakját a mondottaknál alaposabban jellemezni? Közelebbről: hogyan lehetne jellemezni azt a szemléletesen sokszor nyilvánvaló szituációt, hogy két eloszlásfüggvény (ill. sűrűségfüggvény)-grafikon közül egyik eltérése egy elfajult eloszlásfüggvény grafikonjától (ill. egy függőleges egyenestől) kisebb, mint a másiké.

2.

Első problémánkkal kapcsolatban mindjárt bevezetünk egy új jellemzőt $\mathbf{D}^2(\xi)$ helyett. Ennek a $\mathbf{T}_R(\xi)$-vel jelölt jellemzőnek a definíciója a következő:

[1] A dolgozat egy részét a szerző előadta az *Österreichische Mathematische Gesellschaft* által Eisenstadtban rendezett *Valószínűségszámítási és Statisztikai Kollokvium*on (1961. november 15–18).

2.1. Definíció. Tegyük fel, hogy $R_0 < 2$ a szuprémuma azon R számoknak, melyekre $\mathbf{E}(|\xi|^R)$ még létezik. Legyen

$$\mathbf{T}_R(\xi) = \min_{-\infty < m < \infty} \mathbf{E}(|\xi - m|^R) \qquad (0 < R < R_0),$$

feltéve, hogy a jobboldalnak $m = m_0$-nál egyetlen minimuma van.

m_0 függ ξ eloszlásfüggvényétől, $F(x)$-től, ezért bevezetjük az $m_0 = \mathbf{N}_R(\xi)$ jelölést. Látható, hogy $\mathbf{T}_R(\xi)$ és $\mathbf{N}_R(\xi)$ definíciója $\mathbf{D}^2(\xi)$ ill. $\mathbf{E}(\xi)$ definíciójának kínálkozó általánosítása, $\mathbf{T}_1(\xi)$ és $\mathbf{N}_1(\xi)$ pedig ξ várható eltérése ill. mediánja, — amennyiben egyetlen medián van. Szemléletesen nyilvánvaló az is, hogy $\mathbf{T}_R(\xi)$ ugyanolyan értelemben jellemzi $F(x)$ (ill. — létezése esetén — $f(x)$) grafikonjának alakját, mint $\mathbf{D}^2(\xi)$, csak $\mathbf{E}(\xi)$ helyébe $\mathbf{N}_R(\xi)$ lép.

A definíció lényeges pontja az, hogy *egyetlen* minimum legyen. $R > 1$ esetén ez teljesül, mert ekkor $|x - m|^R$ m-nek szigorúan konvex függvénye, és így $\mathbf{E}(|\xi - m|^R)$ is az.[2] $R > 1$ esetében $\mathbf{T}_R(\xi)$-nek számos olyan tulajdonsága is van, mint $\mathbf{D}^2(\xi)$-nek. $R < 1$ esetében a helyzet azonban csak igen speciális esetekben tisztázott.

Az utóbbi két bekezdésben mondottakkal itt részletesebben *nem* foglalkozunk, mert az eredmények külön dolgozatba valók. Nem mulaszthatjuk el azonban az alább következő megjegyzés megtételét:

Ismeretes, hogy egy η sztochasztikus változó szórásnégyzetére — amennyiben $\mathbf{D}^2(\eta)$ létezik, — fennáll, hogy

$$\mathbf{D}^2(\eta) = \left\{-\frac{d^2}{dt^2}[e^{-i\mathbf{E}(\eta)t}\varphi_\eta(t)]\right\}_{t=0} = \min_{-\infty < m < \infty} \left\{-\frac{d^2}{dt^2}[e^{-imt}\varphi_\eta(t)]\right\}_{t=0},$$

ahol $\varphi_\eta(t)$ η karakterisztikus függvénye. Mármost $R < 1$ esetén analóg kifejezés áll fenn valamely ξ sztochasztikus változóhoz tartozó $\mathbf{T}_R(\xi)$ számérték és ξ karakterisztikus függvénye, $\varphi_\xi(t)$ közt. Értelmezze ugyanis — H. WEYL definíciójának megfelelően — $\mathrm{I}^\mu g(t)$ $(0 < \mu < 1)$ egy $g(t)$ függvény általánosított μ-szeres integrálját, azaz legyen

$$\mathrm{I}^\mu g(t) = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_t^\infty (y-t)^{\mu-1} g(y)\, dy$$

(feltéve, hogy a jobboldalon álló integrál létezik). Ekkor $g(t)$ μ-szeres deriváltját, $\mathrm{D}^\mu g(t)$-t a

$$\mathrm{D}^\mu g(t) = \frac{d}{dt}\mathrm{I}^{1-\mu} g(t)$$

összefüggéssel értelmezzük (amennyiben ez a derivált létezik). Ezek után fennáll a következő

2.1. TÉTEL. *Ha a ξ sztochasztikus változónak létezik $f(x)$ sűrűségfüggvénye, továbbá, ha valamilyen R-re* $(0 < R < 1)$ $\mathbf{E}(|\xi|^R)$ *létezik és ξ karakterisztikus függvénye*

[2] $\mathbf{T}_R(\xi)$-hez hasonló új szórtság-jellemző elvileg bevezethető volna úgy is, hogy $\mathbf{T}_R(\xi)$ kifejezésében $|x-m|^R$ helyett valamilyen $g(x-m)$ függvényt veszünk, amely m-nek szigorúan konvex függvénye. Ezzel az általánosítással azonban nem foglalkozhatunk itt.

$\varphi(t)$, *akkor*

$$\mathbf{T}_R(\xi) = \min_{-\infty < m < \infty} \left\{ -\frac{1}{\cos\frac{\pi R}{2}} \left[\mathrm{D}^R\{\mathrm{Re}[e^{-imt}\varphi(t)]\}\right]_{t=0} \right\}.$$

Bizonyítás: Elég bizonyítani azt, hogy

$$\mathrm{E}(|\xi - m|^R) = -\frac{1}{\cos\frac{\pi R}{2}} \left[\mathrm{D}^R\{\mathrm{Re}[e^{-imt}\varphi(t)]\}\right]_{t=0}.$$

A

$$\mathrm{Re}[e^{-imy}\varphi(y)] = \int_{\infty}^{\infty} f(x+m)\cos yx\, dx$$

összefüggés, $\mathrm{D}^\mu g(t)$ fenti definíciója és a tételben szereplő feltételek alapján könnyen levezethető, hogy

$$\mathrm{D}^R\{\mathrm{Re}[e^{-imt}\varphi(t)]\} =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1-R)} \frac{d}{dt} \int_t^\infty (y-z)^{-R} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x+m)\cos yx\, dx \right) dy =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1-R)} \frac{d}{dt} \int_0^\infty y^{-R} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x+m)\cos (y+z)x\, dx \right) dy =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1-R)} \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^\infty f(x+m) \left(\int_0^{\infty} y^{-R}\cos (y+z)x\, dy \right) dx =$$

$$= \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x+m)}{|x|^{1-R}} \sin\left(\frac{\pi R}{2} - t|x| \right) dx.$$

Feltételeink alapján deriválhatunk az integráljel alatt és aztán a $t \to 0$ határátmenetet is elvégezhetjük; végülis

$$\mathrm{D}^R\{\mathrm{Re}[e^{-imt}\varphi(t)]\}_{t=0} = -\cos\frac{\pi R}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |x|^R f(x+m)\, dx$$

amiből a bizonyítandó egyenlőség már következik.

M e g j e g y z é s. Az előzőkből következik, hogy $0 < R < 1$-re ξ R-edik abszolút momentuma,

$$\mathrm{E}(|\xi|^R) = -\frac{1}{\cos\frac{\pi R}{2}} \{\mathrm{D}^R[\mathrm{Re}\,\varphi(t)]\}_{t=0}$$

Ez a képlet a második momentum karakterisztikus függvényre alapozott képletének $\left(\mathbf{E}(\xi^2) = -\left[\frac{d^2}{dt^2}\varphi(t)\right]_{t=0}\right)$ analogonjaként tekinthető.

3.

Tekintsünk két sztochasztikus változót, ξ_1 és ξ_2-t és a hozzájuk tartozó $F_1(x)$ és $F_2(x)$ eloszlásfüggvények (ill. $f_1(x)$ és $f_2(x)$ sűrűségfüggvények) grafikonjait, G_1 és G_2-t. A szórtság-jellemzőkre tett korábbi megállapításainkat mármost a következővel egészíthetjük ki: nagyjából az is igaz, hogy ha bármely, fentebb említett szórtság-jellemző értéke ξ_2 esetében kisebb, mint ξ_1 esetében, akkor eloszlásfüggvények (ill. sűrűségfüggvények) esetén G_2 alakja kevésbé tér el egy elfajult eloszlásfüggvényétől (ill. egy függőleges egyenesétől), mint G_1 alakja. Ezt a viszonylatot megfordítva, bizonyos esetekben újabb szórtság-jellemzőt vezethetünk be, a következő meggondolás alapján.

Legyen értelmezve az a fogalom, hogy G_1 ill. G_2 közül — ha ezek eloszlásfüggvény-grafikonok — „melyik eltérése kisebb egy elfajult eloszlásfüggvény grafikonjától", (ill. — ha G_1 és G_2 sűrűségfüggvény-grafikonok —: „melyik eltérése kisebb egy függőleges egyenestől".) Ha pl. G_2 „eltérése a kisebb", jelöljük ezt $G_2 \prec G_1$-gyel. Vezessük be ezzel ekvivalens jelölésként a $G_1 \succ G_2$ jelölésmódot is.

A rövidség kedvéért $G_2 \prec G_1$-et úgy fejezzük ki, hogy „G_2 keskenyebb, mint G_1".

Sokszor kívánatos egy ilyen rendezést egyetlen számmal jellemezni. — Tegyük fel, hogy egy $\{F(x, \tau)\}$ $(\tau \in H)$ eloszlásfüggvény-családdal (ill. egy $\{f(x, \tau)\}$ sűrűségfüggvény-családdal) van dolgunk, ahol τ egy paraméter és H valamilyen számhalmaz. Legyen $F(x, \tau)$ (ill. $f(x, \tau)$ grafikonja G_τ. Tekintsünk egy $\tau_1, \tau_2, \ldots$ $(\tau_i \in H_i$, $i = 1, 2, \ldots)$ sorozatot, az $F(x, \tau_1)$, $F(x, \tau_2), \ldots$ eloszlásfüggvényeket (ill. az $f_1(x, \tau_1)$, $f_2(x, \tau_2), \ldots$ sűrűségfüggvényeket), és ezek $G_{\tau_1}, G_{\tau_2}, \ldots$ grafikonjait. Ha a G_{τ_i} grafikonokra értelmezve van a $\prec$ (ill. $\succ$) reláció és ez tranzitív is, e grafikonokra megadható pl. egy $G_{i_1} \prec G_{i_2} \prec \ldots$ rendezés $(i_1, i_2, \ldots$ egyes számok a $\{\tau_i\}$ halmazból).

3.1. Definíció. Ha $\{F(x, \tau)\}$ (ill. $f(x, \tau)\}$ egy egyparaméteres eloszlás (ill. sűrűség)-függvénycsalád, melynek tagjai a τ paraméter lehetséges értékeinek felelnek meg, τ-t $F(x, \tau)$ grafikonja formáns paraméterének, röviden *formáns*ának fogjuk nevezni.[3]

3.2. Definíció. Ha $\{F(x, \tau)\}$ (ill. $\{f(x, \tau)\}$) $(\tau \in H)$ az előbbi eloszlás (sűrűség)-függvénycsalád és megadott „keskenyebbség" fogalom mellett egy *monoton* $\tau_1, \tau_2, \ldots$ sorozatnak $(\tau_i \in H,\ i = 1, 2, \ldots)$ a

$$G_{\tau_1} \succ G_{\tau_2} \succ \cdots$$

rendezés felel meg, akkor τ-t $F(x, \tau)$ (ill. $f(x, \tau)$) grafikonja *monoton formánsának* fogjuk nevezni, az adott „keskenyebbség" fogalom mellett.

A monoton formáns tehát a keresett típusú jellemzője egy $G_{\tau_1} \succ G_{\tau_2} \succ \ldots$ elrendezésnek.

A monoton formáns láthatólag bizonyos kapcsolatban van az alkalmazott „keskenyebbség" fogalommal.

[3] A formáns itteni definíciója nem teljesen azonos az [1]-ben használt „formant" fogaloméval.

Ha τ nem monoton formáns, (adott „keskenyebbség" fogalom mellett) bizonyos feltételek mellett bevezethető τ helyett egy $T=T(\tau)$ paraméter, mely már monoton formáns lesz. Ezzel az esettel azonban a továbbiakban nem találkozunk és ezért itt nem térünk ki rá részletesebben.

Ezek után egy ξ sztochasztikus változóhoz, melynek eloszlásfüggvénye $F(x, \tau)$ (ill. sűrűségfüggvénye $f(x, \tau)$), ahol τ (adott „keskenyebbség" fogalom mellett) monoton formáns, új szórtságjellemzőként hozzárendelhetjük τ értékét. Ezzel kapcsolatban persze csak viszonyítás-jellegű kijelentéseket tehetünk. E szórtság-jellemzőnek fontos szerepe van pl. eloszlás (ill. sűrűség) függvény-szuperpozíciók felbontásával kapcsolatos problémákban (lásd [1]).

A tárgyaltakban a szórtság-jellemző mint a monoton formáns egy elfogadható értelmezése jelenik meg; fontos vonása, hogy bevezetése *minden minimalizálási eljárástól független.* Ez a háttér azonban az 1.-ben említett *B)* probléma előtérbe helyezését, illetve alaposabb, nem okvetlenül csak $F(x, \tau)$ típusú eloszlásfüggvényekre (ill. $f(x, \tau)$ típusú sűrűségfüggvényekre) szorítkozó vizsgálatát követeli meg, így most erre térünk rá.

4.

Először keressünk tehát elfogadható definíciókat arra a fogalomra, hogy két eloszlásfüggvény, $F_1(x)$ és $F_2(x)$ (ill. két sűrűségfüggvény, $f_1(x)$ és $f_2(x)$) grafikonjai, G_1 ill. G_2 közül G_2 keskenyebb, mint G_1, azaz $G_2 \prec G_1$.

Vizsgálatainkat *szigorúan egycsúcsú* eloszlásfüggvényekre (ill. sűrűségfüggvényekre) korlátozzuk. Ez a fogalom eloszlásfüggvény esetében azt jelenti, hogy annak grafikonja bizonyos $x=a$ helytől (a *csúcshelytől*) balra alulról konvex, jobbra pedig alulról konkáv, sűrűségfüggvény esetében pedig azt, hogy az utóbbinak $x=a$-ban lesz egyetlen lokális maximuma. — Azt is kikötjük, hogy a továbbiakban csak nem-elfajult eloszlásfüggvények szerepeljenek.

Megjegyezzük, hogy e kikötéseink *kizárják* diszkrét eloszlásokhoz tartozó eloszlásfüggvények vizsgálatát.

Ezek után több definíciót közlünk a $G_2 \prec G_1$-gyel kifejezett relációra; nevezhetjük ezeket a „keskenyebbség" egyes definícióinak.

a) Egyszerű definícióra juthatunk a következőképpen:

4.1. Definíció. Legyenek $F_1(x)$ és $F_2(x)$ nem-elfajult, szigorúan egycsúcsú eloszlásfüggvények (illetve, legyenek $f_1(x)$ és $f_2(x)$ szigorúan egycsúcsú sűrűségfüggvények). Legyen továbbá

$$Q_1(x) = \int_{-\infty}^{x} f_1(y)\, dy, \quad Q_2(x) = \int_{-\infty}^{x} f_2(y)\, dy.$$

Ha

$$F_2^{-1}(x) - F_1^{-1}(x) \qquad (0<x<1)$$

(4.1) (illetve

$$G_2^{-1}(x) - G_1^{-1}(x) \qquad (0<x<1))$$

monoton csökkenő, de nem konstans függvények, akkor azt mondjuk, hogy „G_2 *(a) értelemben keskenyebb, mint* G_1" és a $G_2 \prec G_1$ viszonylatot $G_2 \overset{a}{\prec} G_1$-gyel jelöljük. ($\overset{a}{\succ}$ (és más betűs $\succ$ jelek) értelme (itt és később) világos.)

Az így értelmezett $\overset{a}{\prec}$ rendezési relációra nyilván teljesülnek a $\prec$ relációval kapcsolatos megkötések.

Ezt a definíciót *„(a)-keskenyebbség”* definíciónak fogjuk nevezni.

Ezt az „(a)-keskenyebbség” definíciót eloszlásfüggvények esetében az indokolja, hogy $F_2(x)$ grafikonja $F_1(x)$-éhez viszonyítva abszcisszatengely menti „összenyomással” keletkezik, mikor is jobban megközelíti egy elfajult eloszlásfüggvény grafikonját, mint $F_1(x)$-é; a definíció sűrűségfüggvényeket illető része kevésbé indokolható meg szemléletesen; ez ti. egyszerűen az eloszlásfüggvényekre vonatkozóból van leszármaztatva.

Megjegyzés. Minthogy $G_2 \overset{a}{\prec} G_1$ fennállása (4.1) fennállásával ekvivalens, $G_2 \overset{a}{\prec} G_1$-et nem fejezhetjük ki $F_2(x)$ és $F_1(x)$-re (ill. $f_2(x)$ és $f_1(x)$-re) alkalmazott funkcionál szolgáltatta *számok* (gondoljunk a szórásnégyzetre!) viszonyításával, hanem csak $F_2^{-1}(x)$ és $F_1^{-1}(x)$ (ill. $G_2^{-1}(x)$ és $G_1^{-1}(x)$), vagyis *operátor* szolgáltatta *függvények* (4.1) viszonyításával. Ez várható is.

Bizonyos esetekben, persze, két szám viszonyításának lehetősége is előadódhat, pl. ha $F_1(x)$ és $F_2(x)$ egyetlen paraméter-értékkel jellemezhető.

Fontos ilyen eset, amidőn $F_1(x)$, $F_2(x)$ (ill. $f_1(x), f_2(x)$) egy $F[g(x, \tau)]$ eloszlásfüggvénycsalád (ill. egy $f[g(x, \tau)] \cdot g'(x, \tau)$ sűrűségfüggvénycsalád) két tagja, ahol $g(x, \tau)$ $(-\infty < x < \infty)$ alkalmas, differenciálható, szigorúan monoton növekedő függvény, melyre $\lim\limits_{x \to \infty} g(x, \tau) = \infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x, \tau) = -\infty$ (a τ paraméter H értelmezési tartománya adott) és $g(x, \tau)$-ra fennáll: ha $\tau_1, \tau_2 \in H$ és $\tau_2 < \tau_1$, $g^{-1}(x, \tau_2) - g^{-1}(x, \tau_1)$ x monoton csökkenő, nem konstans függvénye.

Ekkor

$$F_1(x) = F[g(x, \tau_1)], \quad F_2(x) = F[g(x, \tau_2)]$$

(illetve

$$f_1(x) = f[g(x, \tau_1)] \cdot g'(x, \tau_1), \quad f_2(x) = f[g(x, \tau_2)] \cdot g'(x, \tau_2)$$

és τ értékeinek bármely $\tau_1 > \tau_2 > \ldots$ $(\tau_i \in H,\ i = 1, 2, \ldots)$ sorozatára a megfelelő $F[g(x, \tau_1)]$, $F[g(x, \tau_2)], \ldots$ eloszlásfüggvények (ill. $f[g(x, \tau_1)] \cdot g'(x, \tau_1), f[g(x, \tau_2)] \cdot g'(x, \tau_2), \ldots$ sűrűségfüggvények) $G_{\tau_1}, G_{\tau_2}, \ldots$ grafikonjaira fennáll $G_{\tau_1} \overset{a}{\succ} G_{\tau_2} \overset{a}{\succ} \ldots$ azaz τ $F[g(x, \tau)]$ (illetve $f[g(x, \tau)] \cdot g'(x, \tau)$ grafikonjának (az „(a) keskenyebbség” definíció mellett) monoton formánsa.

Egy $F[g(x, \tau)]$ eloszlásfüggvényű (ill. $f[g(x, \tau)] \cdot g'(x, \tau)$ sűrűségfüggvényű) ξ sztochasztikus változó esetében tehát τ az $F(x)$ eloszlásfüggvényhez (ill. az $f(x)$ sűrűségfüggvényhez) és a $g(x, \tau)$ függvényhez tartozó szórtság-jellemzőnek is vehető. Jelöljük e szórtság-jellemzőt $\mathbf{A}(\xi;\ F[g(x, \tau)])$-val — vagy — ha sűrűségfüggvényre támaszkodhat — $\mathbf{A}[\xi; f[g(x, \tau)] \cdot g'(x, \tau)]$-val. Ekkor $\mathbf{A}(\xi;\ F[g(x, \tau)]) = \tau$; ez nyilván kapcsolatos az alkalmazott „(a)-keskenyebbség” definícióval.

$g(x, \tau)$ legegyszerűbb típusa

$$g(x, \tau) = \frac{x - \mu(\tau)}{\tau} \qquad (\tau > 0)$$

ahol $\mu(\tau)$ τ előírt függvénye; ekkor $(\tau_1 > \tau_2 > 0)$ mellett

$$F_1(x) = F\left[\frac{x - \mu(\tau_1)}{\tau_1}\right], \qquad F_2(x) = F\left[\frac{x - \mu(\tau_2)}{\tau_2}\right]$$

(illetve

$$f_1(x) = \frac{1}{\tau_1} f\left[\frac{x-\mu(\tau_1)}{\tau_1}\right], \quad f_2(x) = \frac{1}{\tau_2} f\left[\frac{x-\mu(\tau_2)}{\tau_2}\right]\bigg),$$

vagyis e speciális esetben egy $\left\{F\left[\frac{x-\mu(\tau)}{\tau}\right]\right\}$ eloszlásfüggvénycsalád $\left(\text{ill.} \left\{\frac{1}{\tau} f\left[\frac{x-\mu(\tau)}{\tau}\right]\right\}\right.$ sűrűségfüggvénycsalád$\Big)$ két tagjával van dolgunk. Az is világos, hogy τ $F\left[\frac{x-\mu(\tau)}{\tau}\right]$ $\left(\text{ill. } \frac{1}{\tau} f\left[\frac{x-\mu(\tau)}{\tau}\right]\right)$ grafikonjának (az „(a)-keskenyebbség" definíció mellett) monoton formánsa; ha tehát ξ egy szóban forgó eloszlás(ill. sűrűség)függvényű sztochasztikus változó, akkor τ vehető ξ megfelelő szórtság-jellemzőjének, azaz $\mathbf{A}\left(\xi;\ F\left[\frac{x-\mu(\tau)}{\tau}\right]\right) = \tau$.

$\mathbf{A}\left(\xi;\ F\left[\frac{x-\mu(\tau)}{\tau}\right]\right)$ létezését már ξ karakterisztikus függvényéből is láthatjuk, hisz az $\varphi(t) = e^{i\mu(\tau)t}\psi(\tau t)$ alakú, ahol $\psi(t)$ egy karakterisztikus függvény. Ebből $\mathbf{A}\left(\xi;\ F\left[\frac{x-\mu(\tau)}{\tau}\right]\right)$ is mindjárt megállapítható.

Ezekből következik, hogy egy olyan stabilis eloszlásfüggvénynél (ill. sűrűségfüggvénynél), melynek karakterisztikus függvénye

$$\varphi(t) = e^{imt}e^{-c|t|} \qquad (c>0) \tag{4.2}$$

(*Cauchy*-eloszlás(sűrűség)függvény) vagy

$$\varphi(t) = e^{imt}e^{-c|t|^{\alpha}\{1+i\beta\,\mathrm{sgn}\,t\cdot\mathrm{tg}\,(\pi\alpha/2)\}} \qquad (0<\alpha\leqq 2,\ \alpha\neq 1) \tag{4.3}$$

(ahol $c>0$, $|\beta|\leqq 1$; vö. [2], 171. o.) (4.2) esetén c, (4.3) esetén pedig $c^{1/\alpha}$ a grafikon („(a)-keskenyebbség" definíció melletti) monoton formánsa. Egy η sztochasztikus változóhoz tehát, melynek eloszlásfüggvénye

$$C(x) = \frac{1}{\pi c}\int_{-\infty}^{x}\frac{dy}{1+\frac{(y-m)^2}{c^2}}$$

(*Cauchy*-eloszlásfüggvény), $\mathbf{A}[\eta;\ C(x)] = c$ rendelendő szórtság-jellemzőként, függetlenül attól, hogy $\mathbf{D}^2(\eta) = \infty$, $\mathbf{E}(\eta) = \infty$. Hasonlóan, egy (4.3) karakterisztikus függvényű $S_\alpha(x)$ eloszlásfüggvényű ζ sztochasztikus változó esetében $\mathbf{A}[\zeta;\ S_\alpha(x)] = c^{1/\alpha}$, függetlenül attól, léteznek-e egyáltalán momentumai ζ-nak. Normális eloszlásfüggvényű ζ esetében $(\alpha=2)$ pl. $\mathbf{A}[\zeta;\ S_2(x)] = \sqrt{c}$.

Egy $\left\{F\left[\frac{x-\mu(\tau)}{\tau}\right]\right\}$ eloszlásfüggvénycsalád $\left(\text{ill. egy } \left\{\frac{1}{\tau} f\left[\frac{x-\mu(\tau)}{\tau}\right]\right\}\right.$ sűrűségfüggvénycsalád$\Big)$ tagjai esetében τ-t vagyis a megfelelő ξ sztochasztikus változóra vonatkozó $\mathbf{A}\left(\xi;\ F\left[\frac{x-\mu(\tau)}{\tau}\right]\right)$-t sokszor kiszámíthatjuk — arányossági tényezőtől eltekintve — a vonatkozó eloszlás(sűrűség)függvények felhasználásával is. Ha pl. $\frac{1}{\tau} f\left[\frac{x-\mu(\tau)}{\tau}\right] = h(x)$ van megadva és $\int\limits_{-\infty}^{\infty} [f(x)]^2\, dx < \infty$,

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} [h(x)]^2 dx = \frac{1}{\tau} \int\limits_{-\infty}^{\infty} [f(y)]^2 dy = \frac{\text{const}}{\tau},$$

vagyis a tekintett sűrűségfüggvény négyzetének integrálja τ reciprok értékének konstansszorosát adja. Ez a tény azért is fontos, mert $\int\limits_{-\infty}^{\infty} [h(x)]^2\, dx$ — közismerten — kifejezhető a $h(x)$-hez tartozó karakterisztikus függvény segítségével is.

$\mathbf{A}\left(\xi;\, F\left[\frac{x-\mu(\tau)}{\tau}\right]\right)$ definíciójából következik, hogy ha $A > 0$, B két valós szám, és $\mathbf{A}\left(\xi;\, F\left[\frac{x-\mu(\tau)}{\tau}\right]\right) = \tau$, akkor

$$\mathbf{A}\left(A\xi + B;\, F\left[\frac{x-\mu(\tau)}{\tau}\right]\right) = A \cdot \mathbf{A}\left(\xi;\, F\left[\frac{x-\mu(\tau)}{\tau}\right]\right).$$

$\mathbf{A}\left(\xi;\, F\left[\frac{x-\mu(\tau)}{\tau}\right]\right)$ bizonyos additivitást mutat. Fennáll ui. a

4.1. TÉTEL. *Legyen ξ_1 és ξ_2 két, független sztochasztikus változó, c_1, m_1, ill. c_2, m_2 paraméterű $C_1(x)$ ill. $C_2(x)$ Cauchy-eloszlásfüggvényekkel. Legyen $A_1 > 0$ és $A_2 > 0$ két valós szám. Ha $A_1\xi_1 + A_2\xi_2$ eloszlásfüggvénye, mely szintén Cauchy-eloszlásfüggvény, $C_3(x)$, akkor*

$$\mathbf{A}[A_1\xi_1 + A_2\xi_2;\, C_3(x)] = A_1\mathbf{A}[\xi_1;\, C_1(x)] + A_2\mathbf{A}[\xi_2;\, C_2(x)].$$

Bizonyítás: ξ_j $(j=1,2)$ karakterisztikus függvénye

$$e^{im_j t} e^{-c_j|t|} = e^{im_j t} e^{-|c_j t|}$$

alakú (m_j konstans). $A_j\xi_j$ karakterisztikus függvénye

$$e^{iA_j m_j t}\, e^{-c_j|A_j t|} = e^{iA_j m_j t}\, e^{-|A_j c_j t|},$$

$A_1\xi_1 + A_2\xi_2$-é pedig

$$e^{i(A_1 m_1 + A_2 m_2)t}\, e^{-c_1|A_1 t| + c_2|A_2 t|} = e^{i(A_1 m_1 + A_2 m_2)t}\, e^{-|(A_1 c_1 + A_2 c_2)t|}.$$

Ezekből állításunk leolvasható.

Fennáll továbbá a

4.2. TÉTEL. *Legyen ξ_1 és ξ_2 két, független sztochasztikus változó, melyek karakterisztikus függvényei*

$$\varphi_j(t) = e^{im_j t} e^{-c_j|t|^\alpha \{1 + i\beta\, \mathrm{sgn}\, t \cdot \mathrm{tg}\, (\pi\alpha/2)\}} \qquad (j=1,2)$$

alakú stabilis karakterisztikus függvények ($c_j > 0$), $|\beta| \leq 1$, $0 < \alpha \leq 2$, $\alpha \neq 1$, m_j konstans,

α, β adott). Legyen $A_1 > 0$ és $A_2 > 0$ két pozitív valós szám. Legyen ξ_1 eloszlásfüggvénye $S_{\alpha 1}(x)$, ξ_2-é $S_{\alpha 2}(x)$, $A_1\xi_1 + A_2\xi_2$-é $S_{\alpha 3}(x)$. Akkor

$$(\mathbf{A}[A_1\xi_1 + A_2\xi_2;\, S_{\alpha 3}(x)])^\alpha = (A_1\mathbf{A}[\xi_1;\, S_{\alpha 1}(x)])^\alpha + (A_2\mathbf{A}[\xi_2;\, S_{\alpha 2}(x)])^\alpha.$$

Bizonyítás: $A_j\xi_j$ $(j=1, 2)$ karakterisztikus függvénye

$$e^{iA_j m_j t} e^{-c_j|A_j t|^\alpha \{1 + i\beta \operatorname{sgn} A_j t \cdot \operatorname{tg}(\pi\alpha/2)\}} =$$

$$= e^{iA_j^{1/\alpha} m_j t} e^{-|A_j^{1/\alpha} c_j^{1/\alpha} t|^\alpha \{1 + i\beta \operatorname{sgn} A_j^{1/\alpha} c_j^{1/\alpha} t \cdot \operatorname{tg}(\pi\alpha/2)\}},$$

$A_1\xi_1 + A_2\xi_2$-é pedig

$$e^{i(Am_1 + A_2 m_2)t} e^{-c_1|A_1 t|^\alpha \{1 + i\beta \operatorname{sgn} A_1 t \cdot \operatorname{tg}(\pi\alpha/2)\}} \cdot$$

$$\cdot e^{-c_2|A_2 t|^\alpha \{1 + i\beta \operatorname{sgn} A_2 t \cdot \operatorname{tg} \pi\alpha/2\}} = e^{i(A_1 m_1 + A_2 m_2)t} \cdot$$

$$\cdot e^{-|(A_1^\alpha c_1 + A_2^\alpha c_2)^{1/\alpha} t|^\alpha \{1 + i\beta \operatorname{sgn} (A_1^\alpha c_1 + A_2^\alpha c_2)^{1/\alpha} t \cdot \operatorname{tg}(\pi\alpha/2)\}}.$$

Mindezekből leolvashatók az egyes szórtság-jellemzők, és ezzel állításunk is.

Eldöntetlen, hogy e tételek megfordíthatók-e.

Az itt tárgyalt monoton formáns-típus szerepel *egyes fizikai problémákban* is. Szokás pl. egy spektrumvonal intenzitás-eloszlás görbéjéről (és hasonló típusú, más viszonylatban előforduló görbékről), melyek egy $h(x)$ $(-\infty < x < \infty)$ egycsúcsú, a csúcs körül szimmetrikus (nem feltétlenül normált) „sűrűségfüggvényt" ábrázolnak, azt mondani, hogy ezek „keskenységét" az jellemzi, milyen hosszú az alapja annak a téglalapnak, melynek magassága $h(x)$ grafikonja csúcsa magasságával, területe pedig a $h(x)$ görbéje alatti területtel egyenlő (l. például [3], 238. o.). Ez a kritérium valóban jó (az előbbiek szempontjából) ha $h(x)$

$$h(x) = K\frac{1}{\tau} f\left[\frac{x - \mu(\tau)}{\tau}\right] \qquad (\tau > 0)$$

típusú, ahol K egy állandó, $f(x)$ pedig most egy 0 körül szimmetrikus sűrűségfüggvény. Ekkor ui. az említett téglalap alaphosszúságára, h-ra, melyet

$$h = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} h(x)\,dx}{h(x_m)}$$

ad meg (ahol x_m $h(x)$ maximumhelye) azt kapjuk, hogy

$$h = \frac{K}{\frac{K}{\tau} f\left(\frac{x_m - \mu(\tau)}{\tau}\right)} = \frac{\tau}{f(0)},$$

és így h a szórtság-jellemzőként tekinthető τ paraméterrel arányos, amely a fentebb tárgyalt típusú monoton formáns.

Ha a fentebb szereplő ξ-re (melynek pl. eloszlásfüggvénye $F[g(x, \tau)]$), $\mathbf{D}^2(\xi)$ létezik és $F(x)$ egy η sztochasztikus változó eloszlásfüggvénye, akkor $\mathbf{D}^2(\xi) =$

$=\mathbf{D}^2[g^{-1}(\eta,\tau)]$, vagyis $\mathbf{D}^2(\xi)$ függvénye a τ monoton formánsnak. — $g(x,\tau) = = \frac{x-\eta(\tau)}{\tau}$ $(\tau > 0)$ esetén $\mathbf{D}^2(\xi) = \mathbf{D}^2(\eta)\cdot\tau^2 = \text{const.}\,\tau^2$; ennek folytán τ helyett $\mathbf{D}^2(\xi)$ is bevezethető volna monoton formánsként. — E kapcsolatok általános vizsgálata is érdekesnek látszik, itt azonban nem térhetünk ki rá.

b) Z. W. BIRNBAUM egy általánosabb — ún. „csúcsossági" („peakedness") definíciójából (l. [4]) származtatható le a következő definíció az $F_1(x)$ és $F_2(x)$ nem-elfajult, szigorúan egycsúcsú eloszlásfüggvények (ill. az $f_1(x)$ és $f_2(x)$ szigorúan egycsúcsú sűrűségfüggvények) G_1 ill. G_2 grafikonjainak $G_2 \prec G_1$-gyel kifejezett „keskenyebbség" relációjára.

4.2. Definíció. Legyenek $F_1(x)$ és $F_2(x)$ nem-elfajult, szigorúan egycsúcsú eloszlásfüggvények (ill. $f_1(x)$ és $f_2(x)$ szigorúan egycsúcsú sűrűségfüggvények), melyek grafikonjai G_1 ill. G_2. Legyen G_1 csúcshelye $x=a_1$, G_2-é $x=a_2$. Ha *bármely* $T>0$-ra az eloszlásfüggvények esetében

$$F_2(a_2+T)-F_2(a_2-T) \geqq F_1(a_1+T)-F_1(a_1-T) \tag{4.4}$$

(ill. a sűrűségfüggvények esetében

$$\int_{a_2-T}^{a_2+T} f_2(x)dx \geqq \int_{a_1-T}^{a_1+T} f_1(x)dx\ ) \tag{4.5}$$

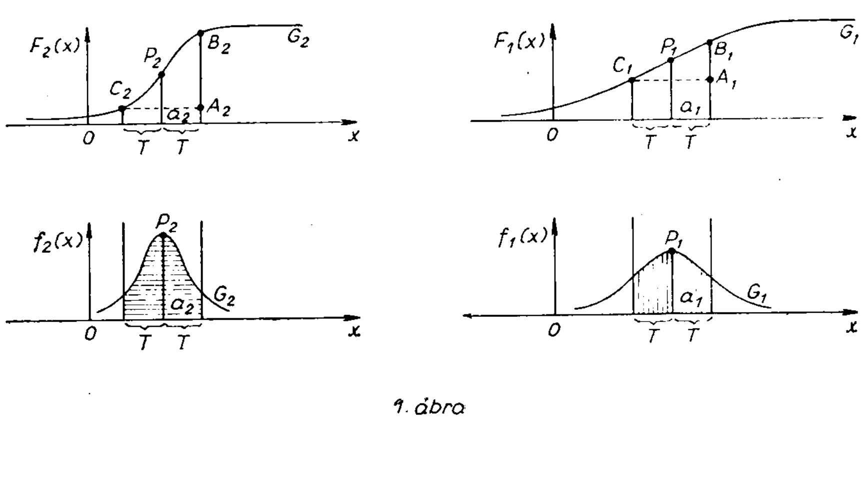
és vannak T értékek, melyekre határozottan $>$ érvényes — akkor azt mondjuk, hogy „G_2 *(b) értelemben keskenyebb, mint* G_1" és a $G_2 \prec G_1$ viszonylatot $G_2 \overset{b}{\precsim} G_1$-gyel jelöljük.

Az így értelmezett $\overset{b}{\precsim}$ rendezési relációra nyilván teljesülnek a $\prec$ relációval kapcsolatos megkötések.

Ezt a definíciót „*(b)-keskenyebbség*" definíciónak fogjuk nevezni.

(4.5) (4.4) értelemszerű alkalmazása.

Szemléletesen (l. az 1. ábrát) $G_2 \overset{b}{\precsim} G_1$ azt jelenti, hogy bármely $T>0$-ra $A_2B_2 \geqq A_1B_1$ (ill. a $\equiv$-val jelölt síkrész területe kisebb, mint a $|||$-val jelöltė), vagyis



1. ábra

G_2 ugyanakkora, a csúcshely körül szimmetrikusan elhelyezkedő abszcisszatengelyszakasz felett legalább ugyanolyan mértékben, de sokszor jobban is „felszalad", mint G_1; G_2 tehát P_2 körül balra-jobbra sokszor „közelebb van" egy függőleges egyenesszakaszhoz, vagyis egy elfajult eloszlásfüggvény-görbéhez, mint G_1 P_1 körül balra-jobbra (illetve, a sűrűségfüggvények esetében, a P_2 csúcs magasságvonala körül szimmetrikusan elhelyezkedő sávba a G_2 alatti területből legalább ugyanannyi, de sokszor több is esik, mint a P_1 csúcs magasságvonala körül szimmetrikusan elhelyezkedő sávba; G_2 tehát sokszor „közelebb van" csúcsa magasságvonalához, vagyis egy függőleges egyenesszakaszhoz, mint G_2; ez lényegében az eloszlásfüggvény-grafikonokról mondottak értelemszerű „lefordítása".[4]

Kiemelkedő előnye a „(b)-keskenyebbség" definíciónak, hogy (4.3) ill. (4.4) az $F_1(x)$ és $F_2(x)$-hez (ill. az $f_1(x)$ és $f_2(x)$-hez) tartozó karakterisztikus függvények segítségével is felírható. A részleteket azonban mellőznünk kell.

Ha $F_1(a_1)=F_2(a_2)$, akkor (4.4) fennállásának elégséges feltétele pl. az, hogy G_2-t G_1-re úgy tolva rá, hogy P_2 egybeessék P_1-gyel, G_2 P_2-től balra (jobbra) G_1 alatt (felett) haladjon.[5]

Látható, hogy (4.4) (ill. (4.5) mindkét oldala egy *operátort* képvisel, mert $F_i(x)$ (ill. $f_i(x)$)-hez $(i=1, 2)$ T egy $\Phi_i(T)$ függvényét rendeli hozzá, ha $T>0$; e függvényt $T\leqq 0$-ra azonosan zérusnak definiáljuk. $G_2 \overset{b}{\prec} G_1$ azzal equivalens, hogy $\Phi_2(T)$ grafikonja sohasem halad $\Phi_1(T)$ grafikonja alatt és helyenként határozottan felette is halad; $G_2 \overset{b}{\prec} G_1$-et tehát nem fejezhetjük ki $F_1(x)$ és $F_2(x)$-re (ill. $f_1(x)$ és $f_2(x)$-re) alkalmazott funkcionál szolgáltatta *számok* (gondoljunk a szórásnégyzetre!) viszonyításával, hanem csak az előbb említett operátor szolgáltatta $\Phi_1(T)$ és $\Phi_2(T)$ *függvények* viszonyításával. Ez várható is.

Egyes speciális esetekben, persze, két szám viszonyításának lehetősége is elő-adódhatik.

Ha $F_1(x)$ és $F_2(x)$ (ill. $f_1(x)$ és $f_2(x)$) valamely $F(x,\tau)$ (ill. $f(x,\tau)$) egyparaméteres eloszlás(ill. sűrűség)függvénycsalád egyes tagjai, azaz $F_1(x)=F(x,\tau_1)$, $F_2(x)=$ $=F(x,\tau_2)$ (ill. $f_1(x)=f(x,\tau_1)$, $f_2(x)=f(x,\tau_2)$), ahol $\tau\in H$, $\tau_1,\tau_2\in H$ és a megfelelő $\Phi_1(T)$ és $\Phi_2(T)$ függvények vizsgálata pótolható a τ_1 és τ_2 mennyiségek viszonyításával, akkor az $F(x,\tau)$ (ill. $f(x,\tau)$) eloszlás(ill. sűrűség)függvényekhez bevezethető új, a „(b)-keskenyebbség" fogalmán alapuló szórtság-jellemzőként τ értéke. Ha $F(x,\tau)$ (ill. $f(x,\tau)$) egy ξ sztochasztikus változó eloszlás (ill. sűrűség) függvénye, az említett szórtság-jellemzőt jelölhetjük $\mathbf{B}[\xi; F(x,\tau)]$ (ill. $\mathbf{B}[\xi; f(x,\tau)]$)-val; esetünkben pl. $\mathbf{B}[\xi; F(x,\tau)]=\tau$.

c) A következő „keskenyebbség" definíció sűrűségfüggvény-grafikonok létezésére támaszkodik. Így aztán hasznosabb ezt közvetlenül sűrűségfüggvényekkel kapcsolatban mondani ki, adott esetben pedig értelemszerűen terjeszteni ki eloszlásfüggvényekre.

4.3. Definíció. Legyenek az $f_1(x)$ ill. $f_2(x)$ szigorúan egycsúcsú sűrűségfüggvények korlátosak; legyenek grafikonjaik G_1 és G_2. Legyen G_1 csúcsának magas-

[4] Az is könnyen belátható, hogy ha G_1 ill. G_2 sűrűségfüggvény-grafikonokat jelentenek, akkor $G_2 \overset{b}{\prec} G_1$-ből már következik, hogy G_2 csúcsa magasabban van, mint G_1-é.

[5] Ez egyszersmind definíciója *lehet* annak is, hogy G_2 P_2-ig terjedő szakasza alulról *konvexebb,* mint G_1 $P_1(=P_2)$-ig terjedő szakasza.

sága h_1, G_2 csúcsának magassága h_2. Ha bármely α-ra, melyre $0 \leqq \alpha \leqq 1$, az

$$f_2(Y_2)=f_2(Y_1)=\alpha h_2, \quad f_1(X_2)=f_1(X)_1=\alpha h_1$$

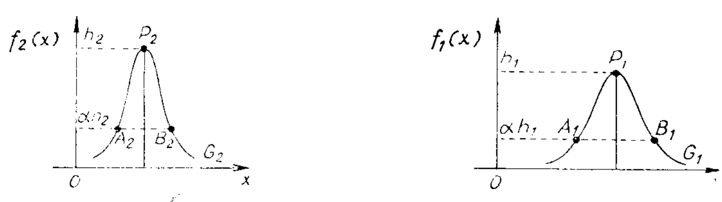
egyenlőségekkel definiált Y_1, Y_2, X_1, X_2 abszcisszaértékekre fennáll

$$Y_2-Y_1 \leqq X_2-X_1$$

és bizonyos α-értékekre határozottan $<$ érvényes, akkor azt mondjuk, hogy „G_2 (c) *értelemben keskenyebb, mint* G_1" és a $G_2 \prec G_1$ viszonylatot $G_2 \overset{c}{\precsim} G_1$-gyel jelöljük, definíciónkat pedig „(c)-*keskenyebbség*" definíciónak fogjuk nevezni.

Az így értelmezett $\overset{c}{\precsim}$ rendezési relációra nyilván teljesülnek a $\prec$ relációval kapcsolatos megkötések.

Szemléletesen (l. a 2. ábrát) $G_2 \overset{c}{\precsim} G_1$ azt jelenti, hogy G_2, ill. G_1 csúcsmagas-



2. ábra

ság-vonalának ugyanazon α hányadában felrajzolva e görbék A_2B_2 ill. A_1B_1 ‚szélességét", G_2-é legfeljebb ugyanakkora, de sokszor kisebb is, mint G_1-é. Így tehát G_2 a P_2 csúcs magasságvonalához — vagyis egy függőleges egyenesszakaszhoz — „általában közelebb" van, mint G_1 a P_1 csúcs magasságvonalához (azaz egy másik függőleges egyenesszakaszhoz).

Ez a definíció általánosítása a fizikából jól ismert „*félszélesség*" (l. pl. [5], 525. o.: „Halbwertsbreite") definíciónak. E szerint ti. pl. két spektrumvonalintenzitás-eloszlás-görbe közül azt tekintik „keskenyebbnek", amelynek „szélessége" a csúcsmagasságvonal felében a kisebb. — A csúcsmagasságok α hányadának bevezetése azzal ekvivalens, hogy a „magasabb" görbe ordinátatengelye pozitív felét összenyomjuk olyan arányban, hogy az összenyomás utáni csúcsmagasság azonos legyen a másik görbe csúcsmagasságával, s ekkor egyazon magasságokban tekintjük a görbe-szélességeket. Ez a lépés talán nem látszik kellően indokoltnak, de csak így lehet összehasonlítani különböző „magas" csúcsú görbék alakját.

A mondottakból következik egy elégséges feltétel $G_2 \overset{c}{\precsim} G_1$ fennállására: Ha az említett összenyomás után a két görbe csúcsmagasságvonalait (és így csúcsait is) egymásra tolva, a G_2-ból (az összenyomás révén) származott görbe nincs felette, sőt helyenként alatta is van G_1-nek, akkor nyilván $G_2 \overset{c}{\precsim} G_1$.

Mivel G_2 ill. G_1 α magasság-hányadokban tekintett „szélességei" nyilván α $(0 \leqq \alpha \leqq 1)$ függvényei, mondjuk $\Psi_2(\alpha)$ ill. $\Psi_1(\alpha)$ (ezek $\alpha < 0$ és $\alpha > 1$-re azonosan zérusoknak veendők!) melyek $f_2(x)$ ill. $f_1(x)$-re alkalmazott *operátor* által szolgáltatottaknak tekinthetők, $G_2 \overset{c}{\prec} G_1$ azzal ekvivalens, hogy $\Psi_2(\alpha)$ grafikonja sohasem halad $\Psi_1(\alpha)$ grafikonja felett és helyenként határozottan alatta is halad. $G_2 \overset{c}{\prec} G_1$-et tehát nem fejezhetjük ki általában $f_2(x)$ és $f_1(x)$-re alkalmazott funkcionál szolgáltatta *számok* (gondoljunk a szórásnégyzetre!) viszonyításával, hanem csak az említett operátor szolgáltatta $\Psi_2(\alpha)$ és $\Psi_1(\alpha)$ *függvények* viszonyításával, ami várható is.

Egyes speciális esetekben két szám viszonyításának lehetősége is előadódhat. Erre az eshetőségre is példát kaphatunk a következő tétel alapján.

4.3. TÉTEL. *Legyen adva egy $f(x)$ szigorúan egycsúcsú, korlátos sűrűségfüggvény és az*

$$f_1(x) = \frac{1}{\tau_1} f\left[\frac{x-\mu(\tau_1)}{\tau_1}\right]$$

és

$$f_2(x) = \frac{1}{\tau_2} f\left[\frac{x-\mu(\tau_2)}{\tau_2}\right] \qquad (\tau_1 > \tau_2 > 0)$$

sűrűségfüggvények (itt $\mu(\tau)$ előírt értékeket felvevő függvény) s ezen sűrűségfüggvények grafikonjai, G_1 ill. G_2. Akkor fennáll $G_2 \overset{a}{\prec} G_1$ és ebből következik $G_2 \overset{c}{\prec} G_1$.

Bizonyítás: $G_2 \overset{a}{\prec} G_1$ fennállását *a)* alatt állapítottuk meg. Legyen $f(x)$ csúcshelye c. Akkor $f(x)$ grafikonjának csúcsmagassága $f(c)$, G_1, ill. G_2-é $\frac{f(c)}{\tau_1}$, ill. $\frac{f(c)}{\tau_2}$. Kicsinyítsük le $\frac{\tau_2}{\tau_1}$-szeresére G_2 ordinátáit; egy G_2^* grafikont kapunk, melynek csúcsmagassága egyenlő lesz G_1-ével. Az abszcisszatengelyeket fedésben tartva toljuk el G_2^*-ot addig, míg csúcsa G_1 csúcsával egybe nem esik; ezzel G_1 koordinátarendszerében egy G_2^{**} grafikont nyerünk. Mivel G_1 csúcshelye $\tau_1 c + \mu(\tau_1)$, G_2-é $\tau_2 c + {}$ ${}+ \mu(\tau_2)$ volt, a mondottak után G_2^{**} egyenlete $\frac{1}{\tau_1} f\left[\frac{x-\mu(\tau_1)+(\tau_2-\tau_1)c}{\tau_2}\right]$. A közös $\tau_1 c + \mu(\tau_1)$ csúcshelybe tolva el az origót, ebben a koordinátarendszerben a két grafikon egyenlete $\frac{1}{\tau_1} f\left[\frac{y+\tau_1 c}{\tau_1}\right]$ ill. $\frac{1}{\tau_2} f\left[\frac{y+\tau_2 c}{\tau_2}\right]$ lesz. Mivel $y=0$-tól jobbra és balra az utóbbi két függvény monoton csökken, $\frac{y+\tau_2 c}{\tau_2} \geqq \frac{y+\tau_1 c}{\tau_1}$ (ha $y > 0$) és $\frac{y+\tau_2 c}{\tau_2} \leqq \frac{y+\tau_1 c}{\tau_1}$ (ha $y < 0$) folytán bármely $y \neq 0$-ra

$$\frac{1}{\tau_1} f\left[\frac{y+\tau_2 c}{\tau_2}\right] < \frac{1}{\tau_1} f\left[\frac{y+\tau_1 c}{\tau_1}\right],$$

ami elégséges feltétele $G_2 \overset{c}{\prec} G_1$ teljesülésének, — s ezzel állításunkat igazoltuk.

Ebből következik, hogy egy ξ sztochasztikus változóhoz tartozó $\frac{1}{\tau} f\left[\frac{x-\mu(\tau)}{\tau}\right]$

sűrűségfüggvény grafikonjának τ nemcsak az „(a)-keskenyebbség" definíció mellett, hanem a „(c)-keskenyebbség" definíció mellett is monoton formánsa. Ez esetben tehát bevezethető valamely $f\left[\frac{x-\mu(\tau)}{\tau}\right]$ sűrűségfüggvényű ξ sztochasztikus változóhoz egy a „(c)-keskenyebbség" fogalmán alapuló szórtság-jellemző,

$$\mathbf{C}\left(\xi;\, f\left[\frac{x-\mu(\tau)}{\tau}\right]\right), \quad \text{a} \quad \mathbf{C}\left(\xi;\, f\left[\frac{x-\mu(\tau)}{\tau}\right]\right) = \tau$$

összefüggéssel és ekkor

$$\mathbf{A}\left(\xi; f\left[\frac{x-\mu(\tau)}{\tau}\right]\right) = \mathbf{C}\left(\xi;\, f\left[\frac{x-\mu(\tau)}{\tau}\right]\right);$$

emellett egy „(c)-keskenyebbség" viszonylat számok viszonyításával fejezhető ki.

IDÉZETT IRODALOM

[1] P. MEDGYESSY: *Decomposition of superpositions of distribution functions.* Akadémiai Kiadó, Budapest, 1961.
[2] B. V. GNYEGYENKO—A. N. KOLMOGOROV: *Független valószínűségi változók összegeinek határeloszlásai.* Akadémiai Kiadó, Budapest, 1951.
[3] S. GOLDMAN: *Frequency analysis, modulation and noise.* McGraw-Hill Book Co., Inc., New York, 1948.
[4] Z. W. BIRNBAUM: On random variables with comparable peakedness. *Ann. Math. Stat.* **19** (1948) 76—81.
[5] *Physikalisches Wörterbuch.* (Herausgegeben von W. H. WESTPHAL.) Springer, Berlin, 1952.

(Beérkezett: 1963. X. 22.)

A FÉLCSOPORTOK IDEÁLELMÉLETÉHEZ, II.

Írta: LAJOS SÁNDOR

Bevezetés

Ez a dolgozat a szerző [4] dolgozatának a folytatása. Az ott bevezetett fogalmakat: (m, n)-ideál, k-ideál, i^k-ideál, stb. és az ezekre vonatkozó eredményeket ismerteknek tekintjük. Ebben a dolgozatban folytatjuk a félcsoportok ideálelméletének egy általánosabb elméletbe, az (m, n)-ideálok elméletébe való beágyazására irányuló kísérletünket. Megmutatjuk, hogy több ideálelméleti tétel kiterjeszthető (m, n)-ideálokra, vagyis az általánosabb elmélet keretei között is érvényben marad. Megadjuk a csoportoknak (m, n)-ideálok segítségével való jellemzését. Bebizonyítjuk, hogy ha egy tetszőleges véges félcsoport tartalmaz valódi (m, n)-ideált, ahol $m > 1$, $n > 1$, akkor tartalmaz valódi $(k, 1)$-ideált, vagy valódi $(1, k)$-ideált is. Megmutatjuk, hogy ez a tétel bármely részfélcsoportjaira nézve minimumkövetelményt kielégítő félcsoportra is érvényes. Bebizonyítjuk, hogy intrareguláris félcsoportban egy kétoldali ideálnak bármely kétoldali ideálja maga is kétoldali ideálja az eredeti félcsoportnak. Hasonló tétel a TAMURA által bevezetett β-félcsoportokra is érvényes. Ideálok segítségével szükséges és elégséges feltételt adunk arra, hogy egy normális félcsoport Neumann-reguláris legyen. A félcsoport részhalmazainak multiplikatív félcsoportjával kapcsolatban egy izomorfizmus-tételt bizonyítunk be.

A dolgozat első részének leadása óta több könyv jelent meg, amelyek a félcsoportok algebrai elméletével foglalkoznak (lásd: LJAPIN [7], CLIFFORD és PRESTON [3], valamint RÉDEI [9]). A félcsoportok algebrai elméletének alapvető fogalmaira és eredményeire vonatkozólag ezekre a könyvekre utalunk.

4. §

4.1. tétel. *Legyen S tetszőleges félcsoport, T az S-nek részfélcsoportja, A pedig legyen az S félcsoportnak (m, n)-ideálja. Akkor az A és T halmazok közös része (m, n)-ideálja a T félcsoportnak.*

Bizonyítás. Az $A \cap T$ közös rész nyilvánvalóan részfélcsoportja a T félcsoportnak. Megmutatjuk, hogy $A \cap T$ kielégíti az

(1) $$(A \cap T)^m T (A \cap T)^n \subseteqq A \cap T$$

összefüggést. Egyrészt látható, hogy

(2) $$(A \cap T)^m T (A \cap T)^n \subseteqq A,$$

mivel a feltevés szerint A (m, n)-ideálja S-nek. Másrészt

(3) $$(A \cap T)^m T (A \cap T)^n \subseteqq T,$$

tehát az (1) reláció valóban érvényes. Ez azt jelenti, hogy $A \cap T$ (m, n)-ideálja a T félcsoportnak.

4.2. korollárium. *Legyen S tetszőleges félcsoport, L az S-nek balideálja, T pedig részfélcsoportja S-nek. Akkor az $L \cap T$ közös rész a T félcsoportnak balideálja.*

4.3. korollárium. *Legyen S tetszőleges félcsoport, T az S-nek részfélcsoportja, A pedig k-ideálja S-nek. Akkor az $A \cap T$ közös rész a T félcsoportnak k-ideálja.*

4.4. korollárium. *A legyen (m, n)-ideálja, B pedig (p, q)-ideálja az S félcsoportnak. Akkor az $A \cap B$ közös rész az A félcsoportnak (p, q)-ideálja, B-nek pedig (m, n)-ideálja.*

4.5. tétel. *Legyen S tetszőleges félcsoport, m, n pozitív egészek, A (m, n)-ideálja, B pedig olyan részhalmaza S-nek, amelyre $AB \subseteqq A$ vagy $BA \subseteqq A$ fennáll. Akkor az AB és BA szorzatok S-nek (m, n)-ideáljai.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy például az

$$AB \subseteqq A \tag{4}$$

feltétel teljesül. Ebből következik, hogy

$$(AB)(AB) \subseteqq A \cdot AB \subseteqq AB,$$

vagyis az AB szorzat részfélcsoport. Másrészt

$$(AB)^m S (AB)^n \subseteqq A^m \cdot SA^{n-1} \cdot (AB) \subseteqq AB,$$

tehát az AB szorzat (m, n)-ideálja az S félcsoportnak.

Megmutatjuk, hogy a BA szorzat is (m, n)-ideálja S-nek. BA részfélcsoport, mivel

$$(BA)(BA) = B(AB)A \subseteqq BA \cdot A \subseteqq BA.$$

A (4) feltételből és abból, hogy A (m, n)-ideálja S-nek, következik, hogy

$$(BA)^m S (BA)^n \subseteqq B \cdot A^m S A^n \subseteqq BA$$

tehát a BA szorzat is (m, n)-ideálja az S félcsoportnak.

Hasonló módon lehet bizonyítani az állítást abban az esetben is, amikor a $BA \subseteqq A$ feltétel teljesül.

4.6. korollárium. *Legyen S tetszőleges félcsoport, A az S-nek (m, n)-ideálja, és $a \in A$. Akkor az aA és Aa szorzatok S-nek (m, n)-ideáljai (m, n pozitív egészek).*

4.7. tétel. *Ahhoz, hogy egy S félcsoport csoport legyen, szükséges és elégséges, hogy valamilyen rögzített pozitív egész m, n számpár esetén ne tartalmazzon valódi (m, n)-ideált.*

Bizonyítás. A feltétel szükségessége nyilvánvaló. Az elégségességet a 4.6 korollárium alapján bizonyíthatjuk. Tegyük fel, hogy az S félcsoport kielégíti a feltételt, vagyis nem tartalmaz valódi (m, n)-ideált. Akkor S-nek bármely a elemére aS és Sa a 4.6 korollárium értelmében S-nek (m, n)-ideáljai, tehát

$$aS = Sa = S,$$

az S félcsoport bármely a elemére. Ez azonban azt jelenti, hogy S csoport. (Lásd: [1] II. Theorem 3.2, vagy [7], III. fejezet, 1.2 tétel.)

4.8. korollárium. *Egy félcsoport akkor és csakis akkor csoport, ha nem tartalmaz valódi bi-ideált.*

4.9. tétel. *Tegyük fel, hogy az S félcsoport részfélcsoportjaira nézve minimumkövetelményt elégít ki. Akkor, ha S tartalmaz valódi (m, n)-ideált, ahol $m>1$, $n>1$, akkor S tartalmaz vagy valódi $(1, k)$-ideált, vagy valódi $(k, 1)$-ideált is.*

Bizonyítás. Jelöljük m_1-gyel azt a legkisebb pozitív egész számot, amelyre S-nek van valódi (m_1, n)-ideálja, n_1-gyel pedig azt a legkisebb pozitív egész számot, amelyre az S félcsoport tartalmaz valódi (m, n_1)-ideált. Megmutatjuk, hogy $m_1 \leqq n$ vagy $n_1 \leqq m$ fennáll. Ha ugyanis $m_1 > n$ és $n_1 > m$ volna, akkor abból, hogy $m_1 < m$ következne, hogy $n < n_1$, ami lehetetlen.

Tegyük fel, hogy $1 < m_1 \leqq n$ és A az S-nek valódi (m_1, n)-ideálja. Definiáljuk az S félcsoport részfélcsoportjainak következő végtelen sorozatát:

$$B_1 = A^{m_1} S A^n, \quad B_{i+1}\, B_i^{m_1} S B_i^n \qquad (i = 1, 2, \ldots). \tag{5}$$

Könnyű belátni, hogy

$$B_i^{m_1} S B_i^n \subseteqq A. \tag{6}$$

A részfélcsoportokra vonatkozó minimumfeltételből következik, hogy valamilyen j pozitív egész számra

$$B_j = B_{j+1} = B.$$

Fennáll tehát a

$$B = B^{m_1} S B^n \tag{7}$$

összefüggés. Innen következik, hogy

$$B^{m_1} S B^{n-m_1} B^{m_1} S B^n = B S B^n, \tag{8}$$

amiből (7) figyelembevételével kapjuk, hogy

$$B^{m_1} S B^{n-m_1+1} = B S B^n, \tag{9}$$

Jobbról szorozva B^{m_1-1}-gyel

$$B^{m_1} S B^{n-m_1+1} \cdot B^{m_1-1} = B S B^n \cdot B^{m_1-1}. \tag{10}$$

Ebből (7) alapján adódik, hogy

$$B S B^{n+m_1-1} = B. \tag{11}$$

Így azt nyertük, hogy a B részfélcsoport S-nek $(1, k)$-ideálja, ahol $k = n + m_1 - 1$.

Hasonló módon lehet bizonyítani az $n_1 \leqq m$ esetben S valódi $(k, 1)$-ideáljának létezését.

4.10. korollárium. *Ha az S véges félcsoport $m>1$, $n>1$ esetén tartalmaz valódi (m, n)-ideált, akkor tartalmaz valódi $(1, k)$-ideált, vagy valódi $(k, 1)$-ideált is.*

4.11. tétel. *Tegyük fel, hogy A $(m, 0)$-ideálja, B pedig $(0, n)$-ideálja az S félcsoportnak, továbbá $AB = BA$. Akkor az AB szorzat az S félcsoportnak (m, n)-ideálja. (m, n pozitív egész számok.)*

Bizonyítás. A tett feltevésből következik, hogy

$$(AB)(AB) = A^2 B^2 \subseteqq AB,$$

tehát AB részfélcsoportja S-nek. Másfelől

$$(AB)^m S(AB)^n = A^m(B^m S A^n)B^n \subseteq (A^m S)B^n \subseteq AB,$$

vagyis az AB szorzat csakugyan (m, n)-ideálja S-nek.

Az $m=n=1$ speciális esetben nincsen szükség az $AB=BA$ kikötésre, azaz érvényes a következő tétel.

4.12. tétel. *Ha S tetszőleges félcsoport, L balideálja, R pedig jobbideálja S-nek, akkor az RL, ill. az LR szorzat S-nek $(1,1)$-ideálja.*

Bizonyítás. Minthogy

$$(RL)(RL) \subseteq RL,$$

azért az RL szorzat részfélcsoport. Másrészt

$$(RL)S(RL) \subseteq RSL \subseteq RL,$$

tehát RL valóban $(1,1)$-ideálja az S félcsoportnak.

Hasonló módon igazolható, hogy az LR szorzat is $(1,1)$-ideálja az S félcsoportnak.

5. §

Áttérünk a k-ideálokkal és az i^k-ideálokkal kapcsolatos újabb eredményeink ismertetésére.

A 3.8 tétel állításához hasonló állítást fejez ki az alábbi tétel.

5.1. tétel. *Intrareguláris félcsoportnak bármely i^k-ideálja kétoldali ideál.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy S intrareguláris félcsoport, vagyis $a \in Sa^2S$, az S félcsoport mindegyik a elemére. Ismeretes, hogy egy félcsoport akkor és csakis akkor intrareguláris, ha valamennyi kétoldali ideálja félprim. Az I kétoldali ideál félprim, ha $a^2 \in I$ $(a \in S)$ maga után vonja, hogy $a \in I$. Megmutatjuk, hogy S-nek bármely I kétoldali ideálja idempotens, azaz $I^2=I$. Csak azt kell igazolni, hogy $I \subseteq I^2$. Legyen $a \in I$, akkor $a^2 \in I^2$. Mivel I^2 is kétoldali ideálja S-nek, azért I^2 félprim. Ennélfogva $a \in I^2$, amiből következik, hogy $I \subseteq I^2$. A 3.7 lemma felhasználásával mármost ugyanúgy fejezhetjük be a bizonyítást, mint a 3.8 tétel esetében.

Az 1.9 korolláriumból és az 5.1 tételből adódik a következő:

5.2. tétel. *Kommutatív intrareguláris félcsoportnak bármely k-ideálja kétoldali ideál.*

Analóg állítás a TAMURA [10] által bevezetett β-félcsoportokra is érvényes. Egy S félcsoportot *β-félcsoportnak* nevezünk, ha S tartalmaz egy rögzített e elemet, amelyre nézve fennáll, hogy

1. S bármely részfélcsoportja tartalmazza az e elemet;
2. S-nek bármely e-t tartalmazó részhalmaza részfélcsoport.

β-félcsoportok például a zérófélcsoportok, amelyekben bármely két elem szorzata zéró. Azonban egy β-félcsoport nem szükségképpen zérófélcsoport, amint azt a következő példa mutatja:

	e	a	b
e	e	a	e
a	a	e	a
b	e	a	e.

A szorzástáblájával itt megadott 3-elemű félcsoport kielégíti az előbbi 1., 2. feltételeket, s nyilván nem zérófélcsoport.

Szükségünk lesz TAMURA következő eredményére: Egy félcsoport akkor és csakis akkor β-félcsoport, ha vagy zérófélcsoport, vagy olyan félcsoport, amely tartalmaz egy e-től különböző a elemet, amelyre

$$ax = xa = a, \quad \text{ha} \quad x \neq a$$

és

$$xy = a^2 = e, \quad \text{ha} \quad x \neq a, \; y \neq a.$$

5.3. tétel. *β-félcsoportnak bármely i^k-ideálja kétoldali ideál.*

Bizonyítás. TAMURA imént említett eredményéből következik, hogy bármely β-félcsoport kommutatív. Így alkalmazhatjuk a kommutatív félcsoportokra kapott korábbi eredményeinket. Az S β-félcsoport A részhalmaza akkor és csak akkor i^k-ideál, ha k-ideál. Továbbá az A részfélcsoport akkor és csak akkor k-ideálja S-nek, ha

$$A^k S \subseteqq A.$$

Az állítást elég $k=2$-re igazolni. Legyen A i^2-ideálja S-nek. Akkor A 2-ideál, vagyis $A^2 S \subseteqq A$. Megmutatjuk, hogy $A^2 S = AS$, amiből már következik, hogy A kétoldali ideálja S-nek. Zérófélcsoportokra nyilván fennáll az egyenlőség, mert mindkét oldalon zéró áll. A másik fajta β-félcsoportokban pedig az xS halmaz mindig két elemből áll:

$$xS = \{e, a\}.$$

Ennélfogva az $A^2 S = AS$ egyenlőség bármely β-félcsoportra érvényes, amiből következik, hogy A kétoldali ideál.

5.4. megjegyzés. Mivel a legalább két elemet tartalmazó β-félcsoportok nem Neumann-regulárisak, azért az 5.2 tételből következik, hogy a 3.5 korollárium nem jellemzi a Neumann-reguláris félcsoportokat, azaz abból, hogy egy félcsoportban a biideál és a kváziideál fogalma egybeesik, még nem következik, hogy az illető félcsoport Neumann-reguláris. Ez azt jelenti, hogy a CLIFFORD és PRESTON [3] könyv 85. oldalán levő 18(d) állítás „only if" része hamis.

6. §

A dolgozat első részében bebizonyított 1.11 tétel és az 1.14 megjegyzés értelmében bármely S félcsoport összes (1, 1)-ideáljainak S_1 halmaza az S félcsoport összes nem üres részhalmazai $\bar{S}$ multiplikatív félcsoportjának kétoldali ideálja. Másrészt REES [8] megmutatta, hogy ha T_1, T_2 egy tetszőleges S félcsoportnak kétoldali ideáljai, akkor $T_2 \subset T_1$ esetén $T_1 - T_2$ kétoldali ideálja az $S - T_2$ félcsoportnak, továbbá

(12) $$(S - T_2) - (T_1 - T_2) \cong S - T_1,$$

ahol például $S - T_1$ az S félcsoportnak modulo T_1 vett Rees-féle faktorfélcsoportját jelöli. A mondottakból következik az alábbi izomorfizmustétel.

6.1. tétel. a) *Legyen S tetszőleges félcsoport, L az S-nek bármely balideálja. Akkor az $S_1 - LS_1$ faktorfélcsoport az $\bar{S} - LS_1$ faktorfélcsoportnak kétoldali ideálja és*

(13) $$(\bar{S} - LS_1) - (S_1 - LS_1) \cong \bar{S} - S_1.$$

b) *Legyen R az S félcsoportnak tetszőleges jobbideálja. Akkor az $S_1 - S_1R$ faktorfélcsoport az $\bar{S} - S_1R$ faktorfélcsoportnak kétoldali ideálja és*

$$(\bar{S} - S_1R) - (S_1 - S_1R) \cong \bar{S} - S_1. \tag{14}$$

c) *Az a) és b) állításból következik, hogy*

$$(\bar{S} - LS_1) - (S_1 - LS_1) \cong (\bar{S} - S_1R) - (S_1 - S_1R). \tag{15}$$

Megmutatjuk most, hogy a kommutatív félcsoportokra vonatkozó 3.3 korollárium általánosabban normális félcsoportok esetén is érvényes. Egy S félcsoportot *normális* félcsoportnak nevezünk, ha az

$$aS = Sa \tag{16}$$

egyenlőség S-nek valamennyi a elemére érvényes.

6.2. tétel. *Egy S normális félcsoportra vonatkozólag a következő állítások egymással ekvivalensek:*

1. *S Neumann-reguláris.*
2. *S-nek mindegyik L balideálja idempotens, azaz $L^2 = L$.*
3. *S-nek mindegyik főbalideálja idempotens.*

Bizonyítás. 1.-ből következik 2. Legyen S Neumann-reguláris és L balideálja S-nek. Akkor $L^2 \subseteq L$. Legyen $a \in L$, akkor van olyan x eleme S-nek, amelyre $axa = a$. Innen következik, hogy

$$a = a(xa) \in L^2,$$

tehát $L \subseteq L^2$. Így az L balideál valóban idempotens, $L^2 = L$. Az az állítás, hogy 2.-ből következik 3. evidens. Végül megmutatjuk, hogy 3.-ból következik 1. Mivel az S félcsoport a eleme által generált főbalideál, $(a)_L = a \cup Sa$, azért a 2. feltétel szerint

$$(a \cup Sa)(a \cup Sa) = a \cup Sa.$$

Innen következik, hogy $a \in (a \cup Sa)(a \cup Sa)$. Minthogy S normális félcsoport, azért

$$(a \cup Sa)(a \cup Sa) = a^2 \cup aSa,$$

tehát $a = a^2$, vagy $a \in aSa$. Ez azt jelenti, hogy az a elemhez mindkét esetben van olyan x elem, amelyre $axa = a$. Ezzel tételünket bebizonyítottuk.

6.3. megjegyzés. A J. Calais [2] dolgozatában megadott példa mutatja, hogy tetszőleges félcsoport összes balideáljának idempotenciájából nem következik, hogy a félcsoport Neumann-reguláris.

Mivel egy normális félcsoport nyilvánvalóan duo félcsoport, azaz mindegyik egyoldali ideálja kétoldali ideál, azért az 1.9 korolláriumban kimondott állítás az 1.10 megjegyzés alapján normális félcsoportokra is érvényes.

6.4. tétel. *Egy normális félcsoport valamely részhalmaza akkor és csak akkor i^k-ideál, ha k-ideál.*

Megjegyezzük még, hogy az 1.9 korolláriumból és a 3.8 tételből azonnal adódik a következő állítás.

6.5. tétel. *Kommutatív Neumann-reguláris félcsoportban bármely k-ideál kétoldali ideál.*

IRODALOMJEGYZÉK

[1] BRUCK, R. H.: *A survey of binary systems*, Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1958.
[2] CALAIS, J.: Demi-groupes quasi-inversifs, *C. R. Acad. Sci., Paris*, **252** (1961), 2357—2359.
[3] CLIFFORD, A. H. and G. B. PRESTON: *The algebraic theory of semigroups*, vol. I, Providence, R. I., 1961.
[4] LAJOS, S.: A félcsoportok ideálelméletéhez, *Magyar Tud. Akad. Mat. Fiz. Oszt. Közl.*, **11** (1961), 57—66.
[5] LAJOS, S.: A note on intra-regular semigroups, *Proc. Japan Acad.*, **39** (1963), 626—627.
[6] LAJOS, S.: Notes on (m, n)-ideals, I. *Proc. Japan Acad.*, **39** (1963), 419—421.
[7] Ляпин, Е. С.: *Полугруппы*, Москва, 1960.
[8] REES, D.: On semi-groups, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, **36** (1940), 387—400.
[9] RÉDEI, L.: *Theorie der endlich erzeugbaren kommutativen Halbgruppen*, Leipzig, 1963.
[10] TAMURA, T.: On semigroup whose subsemigroup semilattice is the Boolean algebra of all subsets of a set, *Journal of Gakugei, Tokushima University, Math.*, **12** (1961), 1—3.

(Beérkezett: 1964. IV. 20.)

A KVÁZIIDEÁLOKRÓL

Írta: STEINFELD OTTÓ

Bevezetés

[19] illetve [21] dolgozatomban szerepel először a gyűrűk illetve félcsoportok kváziideáljainak fogalma. Azóta számos olyan cikk jelent meg, amely részben vagy egészben kváziideálokkal kapcsolatos eredményeket tárgyal. Jelen dolgozatnak az a célja, hogy összefoglalót és rendszerezést adjon az eddigi eredményekről, és felhívja a figyelmet néhány megoldásra váró problémára. Az eredmények bizonyítás nélkül szerepelnek irodalmi utalásokkal. Az a néhány eredmény, melyre vonatkozóan irodalmi adat nem szerepel, a szerző tudomása szerint új.

A 2. §-ban a kváziideálokra és általánosabban az (m, n)-kváziideálokra vonatkozó általános eredmények ismertetése szerepel, melyek nagy része közvetlenül a definíciókból adódik. Míg egy félcsoport kváziideáljai egy-egy jobbideál és balideál metszeteként írhatók fel, addig gyűrű és félgyűrű esetén az analóg eredmény problémaként merül fel. 1961-ben J. CALAIS [2] nemleges irányban oldotta meg azt a problémát, hogy egy félcsoport két kváziideáljának szorzata általában kváziideál-e.

A 3. illetve 4. §-ban a minimális illetve 0-minimális kváziideálokra vonatkozó eredményeket tárgyaljuk 0-elemmentes illetve 0-elemes esetekben. 0-elemmentes esetben érvényes, hogy egy minimális balideál és egy minimális jobbideál metszete egy minimális kváziideál és megfordítva a minimális kváziideálok felírhatók egy-egy minimális bal- és jobbideál metszeteként, sőt egy 0-elemmentes félcsoport minimális kváziideáljai megegyeznek a SZUSKEVICS-mag maximális részcsoportjaival, s így izomorfak, és egyesítésük a SZUSKEVICS-mag. 0-elem létezése mellett általában csak az érvényes, hogy egy 0-minimális balideálnak és egy 0-minimális jobbideálnak a metszete vagy 0 vagy egy 0-minimális kváziideál, a megfordítást csak speciális esetben sikerült kimutatni. Továbbá fennáll, hogy egy gyűrű (0-elemes félcsoport, 0-elemes félgyűrű) 0-minimális kváziideálja vagy zérógyűrű (zérófélcsoport, zérófélgyűrű) vagy ferdetest (0-elemes csoport, 0-elemes divízió-félgyűrű). A 3. és 4. § eredményei ISÉKI [8] és a szerző [20], [21] és [23] dolgozataiban szerepelnek.

Az 5. § eredményei is főként a 0-minimális kváziideálokról szólnak abban az esetben, amikor a gyűrű (0-elemes félcsoport, 0-elemes félgyűrű) nem tartalmaz 0-tól különböző nilpotens balideált, azaz klasszikus radikálmentes. Ebben a speciális esetben igaz, hogy 0-minimális kváziideálok egy-egy 0-minimális bal- és jobbideál metszetei. Az ilyen gyűrűben az is érvényes, hogy (a) létezik 0-minimális kváziideál, (b) létezik 0-minimális balideál (jobbideál) — feltételek ekvivalensek és bármely 0-minimális balideál (jobbideál) 0-minimális kváziideálok halmazelméleti egyesítése.

A 6. § eredményei a klasszikus radikálmentes illetve *Artin*-féle féligegyszerű struktúráknak 0-minimális bal-, jobb-, bi- és kváziideálokra való felbontásairól szólnak. KERTÉSZ—STEINFELD [10] dolgozatában szerepel:

Egy R gyűrűre vonatkozóan az alábbi feltételek ekvivalensek

(A) R jobbegységelemes és 0-minimális balideálok direkt összege,

(B) R olyan kváziideálok összege, amelyek teljes rendszert alkotnak,

(C) R klasszikus radikálmentes és véges sok 0-minimális kváziideál direkt összege,

(D) R *Artin*-féle féligegyszerű. (6.2. tétel).

WIEGANDT [27] kimutatta az (A) és (B) feltételek ekvivalenciáját 0-elemes félgyűrűkre is. A 6.2. tétel félcsoportelméleti analogonjának tekinthető a következő, tudomásunk szerint új eredmény:

Az F 0-elemes félcsoportra vonatkozóan a következő feltételek ekvivalensek:

(1) F reguláris és 0-minimális balideálok egyesítése,

(2) F olyan kváziideálok egyesítése, amelyek végtelen teljes rendszert alkotnak,

(3) F radikálmentes és $\varepsilon F\eta$ ($\varepsilon^2=\varepsilon$, $\eta^2=\eta$) alakú 0-minimális kváziideálok egyesítése,

(4) F olyan kétoldali ideálok egyesítése, melyek F komplett 0-egyszeri részfélcsoportjai (8.6 tétel).

Érdemes lenne a 0-minimális kváziideálokra vonatkozó vizsgálatokat kiterjeszteni arra az esetre is, amikor a struktúrának 0-tól különböző nilpotens balideálja van. — A 6. §-ban F. SZÁSZ [26], [27] bizonyos, kváziideálokkal kapcsolatos eredményei egy részét is közöljük.

A 7. §-ban a *Neumann*-reguláris röviden reguláris struktúrák kváziideáljaira vonatkozó vizsgálatokat tárgyaljuk. L. KOVÁCS [12], LAJOS S. [13], J. CALAIS [2], J. LUH [15] és STEINFELD [24] eredményeit foglalja össze a következő 7.1. tétel:

Az F félcsoport (félgyűrűre, gyűrűre) a következő feltételek ekvivalensek:

(i) F reguláris,

(ii) F mindegyik $\mathfrak{r}$ jobbideáljára és $\mathfrak{l}$ balideáljára $\mathfrak{r}\mathfrak{l}=\mathfrak{r}\cap\mathfrak{l}$,

(iii) F mindegyik $\mathfrak{r}$ jobbideáljára, $\mathfrak{l}$ balideáljára $\mathfrak{r}^2=\mathfrak{r}$, $\mathfrak{l}^2=\mathfrak{l}$ és $\mathfrak{r}\mathfrak{l}$ az F kváziideálja,

(iv) F kváziideáljai egy reguláris, multiplikatív félcsoportot alkotnak.

Megjegyezzük még, hogy az F reguláris félcsoport (félgyűrű, gyűrű) bármelyik $\mathfrak{k}$ kváziideálja $F\mathfrak{k}$ balideálnak és $\mathfrak{k}F$ jobbideálnak a metszete.

L. KOVÁCS [12]-ben jellemzi azokat a (reguláris) gyűrűket, melyeknek mindegyik kváziideálja idempotens. Problémaként merül fel, hogy analóg jellemzés érvényes-e félcsoportokra és félgyűrűkre vonatkozóan.

Végül a 8. §-ban a *Clifford*-féle relatív inverzes és a *Rees*-féle komplett egyszerű félcsoportokra vonatkozó eredményeket tárgyaljuk. A. H. CLIFFORD [3]-ból és [21]-ből származik a következő 8.5 tétel. Az F 0-elemmentes félcsoport M nemüres halmazára a következő feltételek ekvivalensek:

(α) M az F összes minimális kváziideáljainak egyesítése,

(β) M az F-nek olyan ideálja, mely relatív inverzes és egyszerű félcsoport,

(γ) M az F-nek olyan ideálja, mely komplett egyszerű félcsoport.

1. §. Alapfogalmak

E §-ban csupán azon fogalmak definiálására szorítkozunk, amelyek a dolgozatban többször előfordulnak, de nem tekinthetők közismerteknek.

Félcsoport egy olyan (nem üres) halmaz, amelyben egy asszociatív, binér művelet (pl. szorzás vagy összeadás) van értelmezve.

Gyűrűn mindig asszociatív gyűrűt értünk.

Az F (nem üres) halmazt *félgyűrűnek* nevezzük, ha F-ben értelmezve van egy összeadás és egy szorzás, úgyhogy F mind a szorzásra, mind az összeadásra félcsoport és teljesül az

$$\alpha(\beta+\gamma) = \alpha\beta+\alpha\gamma \quad \text{és} \quad (\beta+\gamma)\alpha = \beta\alpha+\gamma\alpha \qquad (\alpha, \beta, \gamma \in F)$$

disztributív szabály.

0 az F félgyűrűnek *zéruseleme,* ha mindegyik $\xi(\in F)$ elemre

$$\xi+0 = 0+\xi = \xi \quad \text{és} \quad 0\cdot\xi = \xi\cdot 0 = 0$$

teljesül. Azt mondjuk, hogy az F félgyűrű *divízió-félgyűrű,* ha F összes 0-tól különböző elemei multiplikatív csoportot alkotnak.

Zérófélgyűrűről akkor beszélünk, ha az F 0-elemes félgyűrű két tetszőleges elemének szorzata 0.

F félgyűrűnek $\mathfrak{l}$ additív részfélcsoportját *balideálnak* nevezzük, ha az összes $\xi\in F$ és $\lambda\in\mathfrak{l}$ elemre $\xi\lambda\in\mathfrak{l}$ érvényes. Ennek megfelelően definiálható egy félgyűrű *jobb-* és *kétoldali ideálja.*

Az F félgyűrű M, N additív részfélcsoportjának MN szorzatán az összes $\sum_i \mu_i\nu_i$ $(\mu_i\in M;\ \nu_i\in N)$ véges összegek halmazát értjük. F félgyűrű H, K nemüres részhalmazainak HK szorzata a $\chi\varkappa(\chi\in H;\ \varkappa\in K)$ elemek összessége.

Az F félcsoport (gyűrű, félgyűrű) *kváziideálja* F-nek olyan $\mathfrak{k}$ nemüres részhalmaza (részmodulusa, additív részfélcsoportja), amelyre

$$F\mathfrak{k}\cap\mathfrak{k}F\subseteqq\mathfrak{k} \tag{1.1}$$

teljesül.[1]

Az F félcsoport (gyűrű, félgyűrű) $\mathfrak{b}$ biideálján F-nek olyan részfélcsoportjá (részgyűrűjét, részfélgyűrűjét) értjük, amelyre

$$\mathfrak{b}F\mathfrak{b}\subseteqq\mathfrak{b} \tag{1.2}$$

teljesül. E fogalmat R. A. GOOD és D. R. HUGHES vezették be.

LAJOS SÁNDOR [13]-ban a következőképpen általánosítja a fenti fogalmakat.

Egy F félcsoport (gyűrű, félgyűrű) $\mathfrak{k}$ részfélcsoportját (részgyűrűjét, részfélgyűrűjét) *(m, n)-kváziideálnak* nevezzük, ha kielégíti az

$$\mathfrak{k}^m F\cap F\mathfrak{k}^n\subseteqq\mathfrak{k} \tag{1.3}$$

összefüggést, ahol m, n nemnegatív egészek. ($\mathfrak{k}^0$ legyen F-hez nem tartozó olyan elem, amely F-en egységelemként operál.)

Látjuk, hogy az (1,1)-kváziideál éppen az (1.1) által definiált kváziideál.

Az F félcsoport (gyűrű, félgyűrű) $\mathfrak{a}$ részfélcsoportját (részgyűrűjét, részfélgyűrűjét) *(m, n)-ideálnak* nevezzük, ha kielégíti az

$$\mathfrak{a}^m F\mathfrak{a}^n\subseteqq\mathfrak{a} \tag{1.4}$$

[1] A kváziideál fogalma átvihető kétoldali operátormodulusokra is. Nem lenne érdektelen a kváziideálokra vonatkozó vizsgálatokat kiterjeszteni erre az esetre is.

összefüggést, ahol m, n nemnegatív egészek. (a^0 legyen az F-hez nem tartozó olyan elem, amely az F-en egységelemként operál.)

Speciálisan a (0,1)-ideál a balideál, az (1,0)-ideál a jobbideál és az (1,1)-ideál a biideál.

Érvényes az

1.1. LEMMA (LAJOS S. [13].) *F félcsoport (gyűrű, félgyűrű) bármely (m, n)-kváziideálja F-nek (m, n)-ideálja. Speciálisan bármely kváziideál biideál.*

2. §. Kváziideálokról általában

A definíciókból könnyen adódnak a következő, félcsoportra, félgyűrűre és gyűrűre egyaránt érvényes eredmények.

2.1. LEMMA. *Félcsoport, (félgyűrű, gyűrű) kváziideáljai részfélcsoportok (részfélgyűrűk, részgyűrűk.)*

2.2. LEMMA. *Csoport (divízió-félgyűrű, ferdetest) nem tartalmaz valódi kváziideált.*

2.3. LEMMA. (LAJOS S. [13].) *F félcsoport (gyűrű, félgyűrű) egy $(m, 0)$-ideáljának és egy $(0, n)$-ideáljának metszete F-nek (m, n)-kváziideálja.*

Korollárium. *F félcsoport (félgyűrű, gyűrű) egy balideáljának és egy jobbideáljának metszete F kváziideálja.*

2.4. LEMMA. *Jelölje ε az F félcsoport (félgyűrű, gyűrű) egy (multiplikatív) idempotens elemét, $\mathfrak{l}$ egy balideálját, $\mathfrak{r}$ egy jobbideálját, akkor $\varepsilon\mathfrak{l}$ és $\mathfrak{r}\varepsilon$ az F kváziideáljai*[2] *és $\varepsilon\mathfrak{l} = \varepsilon F \cap \mathfrak{l}$, $\mathfrak{r}\varepsilon = F\varepsilon \cap \mathfrak{r}$.*

Félcsoport esetén a 2.3 lemma megfordítása is érvényes.

2.5. LEMMA. (LAJOS S. [13].) *Az F félcsoportnak bármely $\mathfrak{k}$ (m, n)-kváziideálja $(\mathfrak{k} \cup F\mathfrak{k}^n)$ $(0, n)$-ideálnak és $(\mathfrak{k} \cup \mathfrak{k}^m F)$ $(m, 0)$-ideálnak a metszete.*

Korollárium. *Az F félcsoport $\mathfrak{k}$ kváziideálja $\mathfrak{k} \cup F\mathfrak{k}$ balideálnak és $\mathfrak{k} \cup \mathfrak{k}F$ jobbideálnak metszete, azaz $\mathfrak{k} = (\mathfrak{k} \cup F\mathfrak{k}) \cap (\mathfrak{k} \cup \mathfrak{k}F)$.*

FUCHS LÁSZLÓ vetette fel azt a *problémát*, hogy létezik-e olyan gyűrű, amelynek valamelyik kváziideálja nem egy jobbideál és egy balideál metszete?

Ezzel kapcsolatban egyelőre csak a következőt sikerült kimutatni.

2.6. LEMMA. *Ha az R gyűrű $\mathfrak{k}$ kváziideáljára $\mathfrak{k} \subseteq \mathfrak{k}R$ vagy $\mathfrak{k} \subseteq R\mathfrak{k}$ teljesül, akkor $\mathfrak{k} = (\mathfrak{k} + R\mathfrak{k}) \cap (\mathfrak{k} + \mathfrak{k}R)$.*

A 2.6. lemmából azonnal adódik a

2.7. korollárium. *Ha az R gyűrűnek van egyoldali egységeleme, akkor R mindegyik kváziideálja felírható egy-egy balideál és jobbideál metszeteként.*

A 2.5 illetve 2.6 lemma következménye a

[2] Számos szerző vizsgálataiban szerepet játszanak az $\varepsilon\mathfrak{l}$ és $\mathfrak{r}\varepsilon$ alakú speciális részgyűrűk. Különösen fontosak e téren az *Artin*-féle gyűrűkre vonatkozó vizsgálatok. Az ezzel kapcsolatos eredmények nagy része a kváziideál fogalmának definiálása előtt jelent meg, és így nem is használja fel azt a tényt, hogy $\varepsilon\mathfrak{l}$ és $\mathfrak{r}\varepsilon$ kváziideálok. Érdemes lenne megvizsgálni, hogy az idevágó bizonyítások és eredmények hogyan módosulnak a kváziideálokra vonatkozó általános eredmények felhasználásakor.

2.8. korollárium. *Ha az F félcsoport (gyűrű) $\mathfrak{k}$ valódi kváziideálja nem egyoldali ideál, akkor $F\mathfrak{k}$ illetve $\mathfrak{k}F$ az F valódi bal- illetve jobbideálja.*

Problémaként merül fel az, hogy a 2.5 és 2.6 lemmával, valamint a 2.7 és 2.8 korolláriummal analóg eredmények érvényesek-e a félgyűrűkre?

Metszetekre a következő eredmények igazak.

2.9. LEMMA. *Gyűrű (0-elemes félcsoport, 0-elemes félgyűrű) kváziideáljainak metszete ismét kváziideál.*

2.10. LEMMA. (LAJOS S. [13].) *Félcsoport (félgyűrű) (m, n)-kváziideáljainak metszete vagy az üres halmaz, vagy (m, n)-kváziideál.*

Korollárium. *Félcsoport (félgyűrű) kváziideáljainak metszete vagy az üres halmaz vagy kváziideál.*

A félcsoportok és gyűrűk kváziideáljaira vonatkozó fenti eredmények a szerző [20], [21], [22] és [23] dolgozataiban szerepelnek, a félgyűrűk esetére pedig ISÉKI [8] dolgozatában.

Egy ferdetest (divízió-félgyűrű) feletti teljes matrixgyűrű (matrixfélgyűrű) azt igazolja, hogy két kváziideál egyesítése, illetve összege általában nem kváziideál (lásd [21]).

J. CALAIS [2] kimutatta, hogy létezik olyan félcsoport, amelyben két kváziideál szorzata általában nem kváziideál és ezzel megoldotta a szerzőnek egy 1956-ban felvetett problémáját.

Ezzel kapcsolatban még megemlítjük LAJOS S. [13] eredményét.

2.11. LEMMA. *Félcsoport (félgyűrű, gyűrű) két kváziideáljának szorzata biideál.*

A kváziideálok szorzásával kapcsolatos kérdésekre a 7. §-ban még visszatérünk.

Az F félcsoportnak α eleme által generált főbalideálja $\alpha \cup F\alpha$ elemekből áll.

KOLIBIAROVA dolgozatában [11] szerepel, hogy F félcsoport α eleme által generált $\langle\alpha\rangle$ főkváziideál az $\alpha \cup F\alpha$ főbalideálnak és $\alpha \cup \alpha F$ főjobbideálnak metszete. Ugyanott példa található olyan félcsoportra, amelyben két főkváziideál szorzata nem főkváziideál és két főkváziideál egyesítése nem kváziideál.

GREEN [7] a főbalideálok és főjobbideálok segítségével egy fontos osztályozást vezetett be félcsoportokban. KOLIBIAROVA [11] GREEN módszerét kiterjesztette főkváziideálok segítségével történő osztályozásra.

3. §. 0-elem nélküli struktúrák minimális kváziideáljairól

E §-ban félcsoporton (félgyűrűn) *0-elem nélküli* félcsoportot (félgyűrűt) értünk.

Az F félcsoport (félgyűrű) $\mathfrak{l}$ balideálja *minimális,* ha F nem tartalmaz olyan $\mathfrak{l}'$ balideált, amelyre $\mathfrak{l}' \subset \mathfrak{l}$. Analóg módon definiálhatók a minimális jobb-, kvázi-, bi- és (kétoldali) ideálok.

3.1. TÉTEL. *Az F félcsoport (félgyűrű) egy minimális balideáljának és egy minimális jobbideáljának metszete F minimális kváziideálja. Fordítva, F mindegyik $\mathfrak{k}$ minimális kváziideálja felírható*

$$\mathfrak{k} = F\varkappa \cap \varkappa F$$

alakban, ahol $\varkappa$ egy tetszőleges eleme $\mathfrak{k}$-nak és $F\varkappa$ illetve $\varkappa F$ az F-nek egy minimális balideálja illetve jobbideálja.

Itt említjük meg, hogy SCHÜTZENBERGER [17] bizonyos híradáselméleti vizsgálatokban szerepet játszó félcsoportok jellemzéséhez felhasználja a minimális kváziideálok fogalmát is. Az eredmények részletezésére itt nem térünk ki, mert ez sok fogalom bevezetését igényelné.

A minimális kváziideálokról közelebbi felvilágosítást ad a

3.2. TÉTEL. *Az F félcsoport (félgyűrű) mindegyik $\mathfrak{l}$ minimális kváziideálja olyan csoport (divízió-félgyűrű), mely*

$$\mathfrak{f} = \varepsilon F \varepsilon$$

alakban írható, ahol ε jelöli $\mathfrak{f}$ egységelemét.

Minthogy a 3.2 tétel megfordítása is érvényes, kimutatható a következő

3.3. korollárium. *Az F félcsoport (félgyűrű) $\mathfrak{f}$ kváziideálja akkor és csak akkor minimális, ha $\mathfrak{f}$ csoport (divízió-félgyűrű).*

Az F félcsoport legfeljebb egy minimális kétoldali ideált tartalmazhat és ezt az F *Szuskevics-magjának* szokták nevezni.

A. H. CLIFFORD [4] eredményeinek felhasználásával könnyen adódik a

3.4. korollárium. (Lásd CLIFFORD—PRESTON [5].) *F félcsoport (félgyűrű) minimális kváziideáljai megegyeznek a Szuskevics-mag maximális részcsoportjaival.*

A minimális kváziideálok izomorfiától eltekintve egyértelműen meghatározottak, pontosabban érvényes a

3.5. TÉTEL. *A F félcsoport (félgyűrű) minimális kváziideáljai izomorfok.*

A fenti eredmények részben a szerző [21] részben ISÉKI [8] dolgozatában szerepelnek.

Hasznos felvilágosítást adnak a minimális kváziideálok konstruálásáról a következő tételek:

3.6. TÉTEL. (Vö. SCHWARZ [18].) *Ha ε az F félcsoport (félgyűrű) $\mathfrak{l}$ minimális balideáljának illetve $\mathfrak{r}$ minimális jobbideáljának egy (multiplikatív) idempotens eleme, akkor $\varepsilon\mathfrak{l}$ illetve $\mathfrak{r}\varepsilon$ az F minimális kváziideáljai.*

3.7. TÉTEL. *Ha $\mathfrak{f}$ az F félcsoport (félgyűrű) minimális kváziideálja, akkor bármely $\varrho(\in F)$ elemre $\varrho\mathfrak{f}$ és $\mathfrak{f}\varrho$ is minimális kváziideálok.*

A 3.1., 3.2. és 3.6. tételekből adódik a

3.8. korollárium. *Az F félcsoportra (félgyűrűre) vonatkozólag a következő feltételek ekvivalensek:*

(A) *F tartalmaz legalább egy minimális kváziideált,*

(B) *F tartalmaz legalább egy-egy minimális bal- és jobbideált,*

(C) *F tartalmaz legalább egy olyan minimális balideált, amelynek van (multiplikatív) idempotens eleme,*

(D) *F tartalmaz legalább egy olyan minimális jobbideált, amelynek van (multiplikatív) idempotens eleme.*

A minimális kváziideálok fontos szerepet játszanak a félcsoportok (félgyűrűk) minimális balideáljainak és jobbideáljainak felbontásában.

3.9. TÉTEL. *Ha az F félcsoportban (félgyűrűben) teljesül az* (A) *feltétel, akkor F-nek mindegyik minimális balideálja (jobbideálja) F bizonyos minimális kváziideáljainak egyesítése.*

A *Szuskevics*-mag szerkezetéről ad felvilágosítást a következő

3.10. TÉTEL. *Ha az F félcsoportban (félgyűrűben) teljesül az* (A) *feltétel, akkor F Szuskevics-magja felírható F összes minimális kváziideáljának egyesítéseként.*

Az utóbbi eredmények félcsoportokra vonatkozóan [21]-ben szerepelnek és bizonyításuk minden nehézség nélkül átvihető félgyűrűkre is.

Érdemes lenne megvizsgálni, hogy a fentiekhez hasonló eredmények érvényesek-e minimális (m, n)-ideálokra és (m, n)-kváziideálokra vonatkozóan.

4. §. A minimális kváziideálokról 0-elem létezése esetén

0-elem létezése esetén a 3. §-ban szereplő fogalmak és eredmények szükségszerűen módosulnak.

Az R gyűrű $\mathfrak{l}$ balideálját 0-*minimálisnak* nevezzük,[3] ha R-nek nincs olyan $\mathfrak{l}'$ balideálja, melyre $0 \subset \mathfrak{l}' \subset \mathfrak{l}$ teljesül. Azonos módon definiálhatók a 0-minimális jobb-, kvázi-, bi- és (kétoldali) ideálok.

0-elemes félcsoportok és félgyűrűk esetén ugyanúgy definiálhatók a 0-minimális ideálok.

Érvényes a 2.3. lemma következő élesítése:

4.1. TÉTEL. *R gyűrű* (0-*elemes félcsoport*, 0-*elemes félgyűrű) egy* 0-*minimális balideáljának és egy* 0-*minimális jobbideáljának metszete vagy* 0 *vagy R* 0-*minimális kváziideálja.*[4]

E tétel megfordítását eddig csak speciális esetben sikerült kimutatnunk (lásd az 5.2. tételt).

Gyűrűk esetén érvényes a szorzatra vonatkozó analóg eredmény is.

4.2. TÉTEL. *R gyűrű $\mathfrak{r}$* 0-*minimális jobbideáljának és $\mathfrak{l}$* 0-*minimális balideáljának $\mathfrak{r}\mathfrak{l}$ szorzata vagy* 0 *vagy az R* 0-*minimális kváziideálja.*

Ezen eredmény helyessége kérdéses 0-elemes félcsoport és félgyűrű esetén.

A 0-minimális kváziideálokról közelebbi felvilágosítást ad a következő

4.3. TÉTEL. *R gyűrű* (0-*elemes félcsoport*, 0-*elemes félgyűrű)* 0-*minimális kváziideálja vagy zérógyűrű (zérófélcsoport, zérófélgyűrű) vagy ferdetest* (0-*elemes csoport*[5]*)* 0-*elemes divízió-félgyűrű). Az utóbbi esetben $\mathfrak{k} = \varepsilon R \varepsilon$ előállítás érvényes, ahol ε jelöli $\mathfrak{k}$ egységelemét.*

A 4.3. tétel részben megfordítható

4.4. TÉTEL. *Ha az R gyűrű* (0-*elemes félcsoport*, 0-*elemes félgyűrű) $\mathfrak{k}$ kváziideálja ferdetest* (0-*elemes csoport*, 0-*elemes divízió-félgyűrű) akkor $\mathfrak{k}$ az R* 0-*minimális kváziideálja.*

Könnyű ellenpéldát adni arra vonatkozólag, hogy a 4.3. tétel teljes egészében nem fordítható meg.

[3] Annak érdekében, hogy a 0-elemes illetve 0-elemmentes struktúrákra vonatkozó eredményeket jobban szétválaszthassuk itt eltérünk a szokásos terminológiától.

[4] Ezen eredményeknek bizonyos részben rendezett félcsoportokra vonatkozó általánosításai szerepelnek a [24] dolgozatban.

[5] 0-*elemes csoporton* olyan 0-elemes (multiplikatív) félcsoportot értünk, melynek 0-tól különböző elemei csoportot alkotnak.

A 3.6. tétellel analóg a következő

4.5. TÉTEL. *Jelölje $\mathfrak{l}$ illetve $\mathfrak{r}$ az R gyűrű (0-elemes félcsoport, 0-elemes félgyűrű) egy 0-minimális bal- illetve jobbideálját és ε az $\mathfrak{l}$ illetve $\mathfrak{r}$ egy (multiplikatív) idempotens elemét, akkor $\varepsilon\mathfrak{l}$ és $\mathfrak{r}\varepsilon$ az R 0-minimális kváziideáljai.*

A fenti eredmények lényegileg megtalálhatók a [22] és [23] dolgozatban.

A 3. § többi tételével analóg eredményeket 0 elem létezése esetén csak egyéb mellékfeltétel mellett sikerült kimutatni. E vizsgálatok a következő §-ban szerepelnek.

5. §. Klasszikus radikálmentes struktúrák minimális kváziideáljairól

Most is feltételezzük, hogy az e §-ban szereplő struktúrák tartalmaznak 0-elemet. R gyűrű $\mathfrak{l}$ balideálja *nilpotens*, ha valamely k pozitív egész számra $\mathfrak{l}^k=0$ teljesül. Hasonló módon definiálhatók a nilpotens jobb- és kétoldali ideálok is. Ezek a definíciók szószerint átvihetők a 0-elemes félcsoportok és 0-elemes félgyűrűk esetére is.

Az R gyűrűt (0-elemes félcsoportot, 0-elemes félgyűrűt) *klasszikus radiálmentesnek* vagy röviden *k-radikálmentesnek* nevezzük, ha R-nek nincs 0-tól különböző nilpotens balideálja. Könnyen belátható, hogy k-radikálmentes esetben R nem tartalmazhat 0-tól különböző nilpotens jobbideált sem.

k-radikálmentes esetben kimutattuk az 4.1. tétel megfordítását. (Lásd [22] dolgozatot.)

5.1. TÉTEL. *Az R k-radikálmentes gyűrű (0-elemes félcsoport, 0-elemes félgyűrű) $\mathfrak{k}$ 0-minimális kváziideálja egy 0-minimális balideálnak és egy 0-minimális jobbideálnak a metszete.*

Nem tudjuk, hogy a k-radikálmentesség szükséges feltétel-e a tételben szereplő metszetként való előállítás létezéséhez. SZÁSZ FERENCtől származik a következő probléma: Melyek azok az összes gyűrűk, amelyekben mindegyik minimális kváziideál, egy minimális balideál és egy minimális jobbideál metszete.

Ismeretes, hogy R k-radikálmentes gyűrűben mindegyik $\mathfrak{l}(\mathfrak{r})$ 0-minimális balideál (jobbideál) $\mathfrak{l}=R\varepsilon$ ($\mathfrak{r}=\varepsilon R$) alakban írható, ahol ε egy alkalmas (multiplikatív) idempotens elem. Ennélfogva fennáll az

5.2. korollárium. *Az R k-radikálmentes gyűrű mindegyik $\mathfrak{k}$ 0-minimális kváziideálja $\mathfrak{k}=\varepsilon R\eta$ ($\varepsilon^2=\varepsilon$, $\eta^2=\eta$) alakban írható.*

ARTIN—NESBITT—THRALL [1] egyik eredményét egészíti ki és általánosítja a következő

5.3. TÉTEL. *Az R k-radikálmentes gyűrű (0-elemes félcsoport, 0-elemes félgyűrű) $R\varepsilon(\varepsilon^2=\varepsilon)$ balideálja akkor csak akkor 0-minimális, ha $\varepsilon R\varepsilon$ az R 0-minimális kváziideálja.*

Megjegyezzük, hogy *tetszőleges* R gyűrű (félcsoport, félgyűrű) esetén $R\varepsilon$ ($\varepsilon^2=\varepsilon$) balideál 0-minimális volta implikálja $\varepsilon R\varepsilon$ kváziideál 0-minimalitását. $\varepsilon R\varepsilon$ ($\varepsilon^2=\varepsilon$) kváziideál 0-minimalitásából azonban általában nem következik $R\varepsilon$ balideál 0-minimalitása, amint ezt egy K ferdetest fölötti $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}$ háromszög matrixok gyűrűjének példája mutatja. (Lásd STEINFELD [22].)

JACOBSON ([9] II. 7. §) egyik eredményének felhasználásával könnyen kimutatható az

5.4. TÉTEL. *Ha az R gyűrűnek (félgyűrűnek) $R\varepsilon$, $R\eta$ ($\varepsilon^2=\varepsilon$, $\eta^2=\eta$) balideáljai mint baloldali R-modulusok (R-félmodulusok) R-izomorfok, akkor εR és ηR mint jobboldali R-modulusok (R-félmodulusok) R-izomorfok, továbbá az $\varepsilon R\varepsilon$ és az $\eta R\eta$ kváziideálok, mint gyűrűk (félgyűrűk) izomorfok.*

Ez az eredmény általánosítása a [22] dolgozat 9. tételének.

Az előbb említett ferdetest fölötti háromszög matrixgyűrű alkalmas példa annak igazolására is, hogy az $\varepsilon R\varepsilon$ és $\eta R\eta$ ($\varepsilon^2=\varepsilon$, $\eta^2=\eta$) kváziideálok izomorfiájából nem következik $R\varepsilon$, $R\eta$ baloldali R-modulusok R-izomorfiája.

Érvényes a 3.8. korolláriummal analóg

5.5. korollárium. *R k-radikálmentes gyűrűben a következő feltételek ekvivalensek:*

(a) *R tartalmaz legalább egy* 0-*minimális balideált,*

(b) *R tartalmaz legalább egy* 0-*minimális jobbideált,*

(c) *R tartalmaz legalább egy* 0-*minimális kváziideált.*

Az 5.2. és 5.5. korolláriumok 0-elemes, k-radikálmentes félcsoportok és 0-elemes k-radikálmentes félgyűrűk esetén általában nem érvényesek, mert ezek 0-minimális balideáljai (jobbideáljai) nem tartalmaznak feltétlenül (multiplikatív) idempotens elemet. Nem nehéz kimutatni a 3.7., 3.9. és 3.10. tételekkel analóg eredményeket, melyek tudomásom szerint újak.

5.6. TÉTEL. *Ha $\mathfrak{k}$ az R k-radikálmentes gyűrű* 0-*minimális kváziideálja, akkor bármely $\varrho(\in R)$ elemre $\varrho\mathfrak{k}(\mathfrak{k}\varrho)$ vagy* 0 *vagy az R* 0-*minimális kváziideálja.*

5.7. TÉTEL. *Ha az R k-radikálmentes gyűrűre teljesül az* (a) *feltétel, akkor R mindegyik* 0-*minimális balideálja (jobbideálja) R bizonyos* 0-*minimális kváziideáljainak egyesítési halmaza.*

5.8. TÉTEL. *Ha az R k-radikálmentes gyűrű $\mathfrak{a}$* 0-*minimális ideálja tartalmazza R valamelyik* 0-*minimális kváziideálját, akkor $\mathfrak{a}$ az általa tartalmazott* 0-*minimális kváziideálok egyesítése.*

Hasonló eredmények 0-elemes, k-radikálmentes félcsoportokra (félgyűrűkre) csak egyéb mellékfeltételek mellett érvényesek.

6. §. Felbontási tételek k-radikálmentes illetve Artin-féle féligegyszerű struktúrákra

Az R gyűrűt (0-elemes félcsoportot, 0-elemes félgyűrűt) *teljesen bal-reducibilisnek* nevezzük, ha R-et véges vagy végtelen sok $\mathfrak{l}_\alpha$ ($\alpha\in A$) 0-minimális balideálja generálja.

Hasonló módon definiálható a *teljesen reducibilis, jobb-reducibilis, kvázireducibilis és bi-reducibilis R* gyűrű (0-elemes félcsoport, 0-elemes félgyűrű) aszerint, hogy R-et 0-minimális (kétoldali) ideálok, 0-minimális jobbideálok, kváziideálok vagy biideálok generálják.

Érvényes a következő

6.1. TÉTEL. *Az R k-radikálmentes gyűrűre (0-elemes félcsoportra, 0-elemes félgyűrűre) az alábbi feltételek ekvivalensek:*

(α) R teljesen kvázi-reducibilis,
(β) R teljesen bal- és jobb-reducibilis,
(γ) R teljesen bi-reducibilis.[6]

Megjegyezzük, hogy k-radikálmentes gyűrű esetén *(β)* helyettesíthető a *(β') R teljesen bal- vagy jobb-reducibilis* feltétellel.

A továbbiakhoz szükségünk lesz néhány definícióra.

Az R gyűrűt *Artin-félének* nevezzük, ha R balideáljaira teljesül a minimumfeltétel.

Az R gyűrű *Artin-féle féligegyszerű*, ha *Artin*-féle és k-radikálmentes.

Azt mondjuk, hogy az R gyűrű (0-elemes félgyűrű) $\mathfrak{k}_{11}, \mathfrak{k}_{12}, \ldots, \mathfrak{k}_{mm}$ kváziideáljai *teljes rendszert* alkotnak, ha léteznek olyan $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m$ (zérótól különböző) ortogonális idempotens elemek, hogy $\mathfrak{k}_{ij}$ vagy 0 vagy $\mathfrak{k}_{ij} = \varepsilon_i R \varepsilon_j$ $(1 \leqq i, j \leqq m)$ 0-minimális kváziideál és ha $\mathfrak{k}_{ij}$, $\mathfrak{k}_{jk} \neq 0$, akkor $\mathfrak{k}_{ji}\mathfrak{k}_{ij}\mathfrak{k}_{jk} \neq 0$ teljesül.

Az R 0-elemes félgyűrű $R_1, \ldots, R_n$ 0-elemes részfélgyűrűinek *erős direkt összege*, ha R-nek mindegyik ϱ eleme $\varrho = \varrho_1 + \ldots + \varrho_n$ alakban írható, ahol $\varrho_1, \ldots, \varrho_n$ egymástól függetlenül befutják $R_1, \ldots, R_n$ összes elemeit; $\varrho_1, \ldots, \varrho_n$ komponensek ϱ által egyértelműen meghatározottak és additive felcserélhetők.

Az R 0-elemes félgyűrű $(\ldots, \mathfrak{k}_\alpha, \ldots)$ kváziideáljainak rendszere *felcserélhető*, ha $\varkappa_\alpha + \varkappa_\beta = \varkappa_\beta + \varkappa_\alpha$ $(\varkappa_\alpha \in \mathfrak{k}_\alpha;\ \varkappa_\beta \in \mathfrak{k}_\beta)$ egyenletek az összes α, β $(\alpha \neq \beta)$ indexre teljesülnek.

KERTÉSZ—STEINFELD [10]-ben bizonyított tételének egy része a

6.2. TÉTEL. *Egy R gyűrűre vonatkozóan az alábbi feltételek ekvivalensek:*

(A) *R jobbegységelemes és 0-minimális balideálok direkt összege.*
(B) *R olyan kváziideálok összege, amelyek teljes rendszert alkotnak,*
(C) *R k-radikálmentes és véges sok 0-minimális kváziideál direkt összege,*
(D) *R Artin-féle féligegyszerű.*

0-elemes félgyűrűkre csak az (A), (B) feltételek ekvivalenciáját sikerült kimutatni.

6.3. TÉTEL. (Lásd WIEGANDT [27].) *Egy 0- és 1-elemes R félgyűrű akkor és csak akkor véges sok 0-minimális balideáljának erős direkt összege, ha R kváziideáljai egy felcserélhető, teljes rendszerének összege.*

Megemlítjük még a 6.2. tételnek egy önmagában érdekes speciális esetét és annak egy általánosítását. Ezek az eredmények KOVÁCS [12] dolgozatában szerepelnek:

6.4. TÉTEL. *Egy R gyűrű akkor és csak akkor lesz véges sok ferdetest direkt összege, ha R-nek nincs 0-tól különböző nilpotens kváziideálja és R kváziideáljaira teljesül a minimumfeltétel.*

6.5. TÉTEL. *Egy gyűrű akkor és csak akkor lesz ferdetestek diszkrét direkt összege, ha R kétoldali főideáljaira teljesül a minimumfeltétel és R kváziideáljai idempotensek.*

Probléma, hogy 0-elemes félgyűrűre érvényesek-e analóg eredmények.

[6] Ez a tétel STEINFELD [24] egyik eredményének speciális esete.

FUCHS LÁSZLÓ (illetve SZÁSZ FERENC) vetette fel az olyan gyűrűk vizsgálatának problémáját, melyekben a kváziideálokra (illetve főkváziideálokra) teljesül a minimumfeltétel.

1. megjegyzés: Bizonyos hasonlóság fedezhető fel a 6.4. tétel és WIEGANDT [27] nem feltétlenül k-radikálmentes gyűrűkre vonatkozó következő tétele között:

6.6. TÉTEL. *Az R gyűrűre vonatkozóan a következő feltételek ekvivalensek:*

(a) *R két ferdetest direkt összege vagy primrendű zérógyűrű,*

(b) *R tartalmaz zérusosztót és mindegyik valódi kváziideálja (balideálja) zérusosztómentes,*

(c) *R nem ferdetest és mindegyik valódi kváziideálja (balideálja) ferdetest,*

(d) *0 nem primideál R-ben és primideál R mindegyik valódi kváziideáljában (balideáljában).*

Érdekes lenne a 6.4. és 6.6. tételeknek egy közös általánosítását kimutatni.

2. megjegyzés. Itt említjük meg SZÁSZ FERENC azon eredményeit, melyek egy R gyűrű bizonyos $\varepsilon R(\varepsilon^2=\varepsilon)$ főjobbideáljairól szólnak. Előkészületül néhány definícióra van szükségünk.

Legyen R egy gyűrű, és R_1 a *jobbtalpa*, azaz R_1 az R összes minimális jobbideáljainak összege. F. SZÁSZ [26] szerint az R_1-ben fekvő $\varepsilon R(\varepsilon^2=\varepsilon\neq 0)$ jobbideált *szabályosnak* nevezzük, ha R-nek $Q_\varepsilon=(1-\varepsilon)R\varepsilon R(1-\varepsilon)$ alakú kváziideálja nilpotens. (Itt 1 nem feltétlenül egységelem, hanem operátor.)

Érvényes a következő 6.7. tétel, mely F. SZÁSZ [26], [27] idevágó eredményeinek egy része.

6.7. TÉTEL. *Jelölje R_1 az R gyűrű jobbtalpát és $\varepsilon R(\varepsilon^2=\varepsilon)$ az R-nek R_1-ben fekvő szabályos főjobbideálját. Akkor εR egy $\varepsilon R=\varepsilon R\varepsilon$ alakú Artin-féle féligegyszerű gyűrű, és εR-nek mindegyik jobbideálja R-nek is jobbideálja. Továbbá, ha $\varepsilon R=\eta R\subseteq R_1$ $(\varepsilon^2=\varepsilon,\ \eta^2=\eta)$ és εR szabályos főjobbideál, akkor $\varepsilon=\eta$. Végül Q_ε nilpotenciájából $Q_\varepsilon=0$ folyik.*

7. §. Vizsgálatok Neumann-reguláris struktúrákban

Az F félcsoportot (félgyűrűt, gyűrűt) *Neumann-regulárisnak*, röviden *regulárisnak* nevezzük, ha bármely $\alpha(\in F)$ elemhez létezik olyan $\xi(\in F)$, hogy $\alpha=\alpha\xi\alpha$. A regularitás definiálható kváziideálok illetve bal- és jobbideálok segítségével is.

7.1. TÉTEL. *Az F félcsoportra (félgyűrűre, gyűrűre) a következő feltételek ekvivalensek:*

(i) *F reguláris,*

(ii) *F mindegyik $\mathfrak{r}$ jobbideáljára és $\mathfrak{l}$ balideáljára $\mathfrak{r}\mathfrak{l}=\mathfrak{r}\cap\mathfrak{l}$,*

(iii) *F mindegyik $\mathfrak{r}$ jobbideáljára és $\mathfrak{l}$ balideáljára $\mathfrak{r}^2=\mathfrak{r}$, $\mathfrak{l}^2=\mathfrak{l}$ és $\mathfrak{r}\mathfrak{l}$ egy kváziideál F-ben,*

(iv) *F kváziideáljai egy reguláris, multiplikatív félcsoportot alkotnak.*"

A regularitásnak (ii) feltétellel való jellemzése L. KOVÁCS [12] dolgozatában szerepel. Az (i) és (iii) feltételek ekvivalenciáját J. CALAIS [2] igazolta, (i) és (iv) ekvivalenciája pedig S. LAJOS [13], [14], J. LUH [15] és a szerző [24] dolgozataiból adódik.

Az (iii) feltételből látható, hogy a regularitásból következik a k-radikálmentesség, eszerint az előző két § eredményei reguláris esetben is érvényesek.

(iv) miatt F bármely $\mathfrak{k}$ kváziideáljára fennáll $\mathfrak{k}=\mathfrak{k}F\mathfrak{k}$, amiből $\mathfrak{k}\subseteq\mathfrak{k}F\cap F\mathfrak{k}$ folyik. Eszerint fennáll a

7.2. LEMMA. *Az F reguláris félcsoport (félgyűrű, gyűrű) bármely $\mathfrak{k}$ kváziideálja $F\mathfrak{k}$ balideálnak és $\mathfrak{k}F$ jobbideálnak a metszete, azaz $\mathfrak{k} = F\mathfrak{k}\cap\mathfrak{k}F$.*

LAJOS S. [13] dolgozatában szerepelnek a következő eredmények

7.3. TÉTEL. *F reguláris félcsoportban (gyűrűben, félgyűrűben) az (m, n)-kváziideál és (m, n)-ideál fogalma megegyezik.*

Korollárium. *F reguláris félcsoportban (félgyűrűben, gyűrűben) a kváziideál és biideál fogalma megegyezik.*

LAJOS SÁNDOR hívta fel a figyelmet arra, hogy a korolláriumban szereplő tulajdonság nem jellemzi a reguláris struktúrákat.

Könnyen igazolható, hogy F reguláris félcsoport (félgyűrű, gyűrű) $\mathfrak{k}$ kváziideáljaira $\mathfrak{k}^3=\mathfrak{k}^2$ teljesül, viszont $\mathfrak{k}^2=\mathfrak{k}$ általában nem igaz. (Lásd például egy ferdetest fölötti teljes matrixgyűrű minimális kváziideáljait, melyek között zérógyűrűk is vannak.)

KOVÁCS LÁSZLÓ [12]-ben bebizonyítja a következő tételt:

7.4. TÉTEL. *Az R gyűrűre vonatkozólag a következő feltételek ekvivalensek:*

(I) *R reguláris és nem tartalmaz zérótól különböző nilpotens elemet,*

(II) *R mindegyik kváziideálja idempotens,*

(III) *R mindegyik $\mathfrak{r}$ jobbideáljára és $\mathfrak{l}$ balideáljára $\mathfrak{r}\mathfrak{l} = \mathfrak{r}\cap\mathfrak{l} \subseteq \mathfrak{l}\mathfrak{r}$ teljesül,*

(IV) *R reguláris és ferdetestek szubdirekt összegével izomorf.*

Megjegyezzük, hogy a 6.5. tétel az előbbi eredmény speciális esetének is tekinthető.

A (II) és (III) feltételek ekvivalenciája általánosabban is igazolható. (Lásd STEINFELD [24].)

Problémaként merül fel, hogy a 7.4. tétellel analóg eredmények érvényesek-e 0-elemes félcsoportra és félgyűrűre. A 7.3. tétel miatt reguláris esetben a 6.1. tétel (α) és (γ) feltételei egybeesnek. A 6.1. és 7.4. tételek között teremt némi kapcsolatot a következő eredmény, amely bizonyos részben rendezett félcsoportokra is általánosítható [24].

7.5. TÉTEL. *Ha az R gyűrű (0-elemes félcsoport, 0-elemes félgyűrű) teljesen kvázi-reducibilis és R mindegyik kváziideálja idempotens, akkor R-nek nincs 0-tól különböző nilpotens részgyűrűje (részfélcsoportja, részfélgyűrűje) és R mindegyik $\mathfrak{a}$ ideálja R 0-minimális, idempotens kváziideáljaival, vagyis ferdetestekkel (0-elemes csoportokkal, divízió-félgyűrűkkel) generálható.*

Könnyen belátható, hogy az F reguláris félcsoportok (félgyűrűk, gyűrűk) így is jellemezhetők: F akkor és csak akkor reguláris, ha mindegyik $\alpha(\in F)$ elemhez léteznek olyan $\varepsilon, \eta(\in F)$ és $\beta, \gamma(\in F)$ elemek, hogy

$$\varepsilon\alpha=\alpha\eta=\alpha, \quad \alpha\beta=\varepsilon \quad \text{és} \quad \gamma\alpha=\eta. \tag{7.1}$$

Könnyen belátható, hogy ε és η idempotens elemek. A 7.2. lemma és a CLIFFORD—PRESTON [5] 1.13. lemma alapján könnyen belátható a reguláris struktúrák következő, tudomásom szerint új jellemzése:

7.6. korollárium. *Az F félcsoport (félgyűrű, gyűrű), akkor és csak akkor reguláris, ha bármely $\alpha(\in F)$ elem által generált főkváziideál $\varepsilon F \eta$ $(\varepsilon^2=\varepsilon, \eta^2=\eta)$ alakú.*

8. §. A relatív inverzes és komplett egyszerű félcsoportokról

Az F félcsoportot CLIFFORD [3] szerint *relatív inverzesnek* nevezzük, ha F mindegyik α eleméhez léteznek olyan ε és $\beta(\in F)$ elemek, hogy

$$\varepsilon\alpha=\alpha\varepsilon=\alpha \quad \text{és} \quad \alpha\beta=\beta\alpha=\varepsilon \tag{8.1}$$

teljesül.

Eszerint a relatív inverzes félcsoportok speciális reguláris félcsoportoknak tekinthetők. Könnyen kimutatható, hogy ε idempotens elem és α által egyértelműen meghatározott. Az ε elemet az *α-hoz tartozó idempotensnek* szokták nevezni.

Érvényes a 7.6. korollárium következő élesítése

8.1. korollárium. *Az F félcsoport akkor és csak akkor relatív inverzes, ha bármely $\alpha(\in F)$ által generált főkváziideál $\varepsilon F \varepsilon$ $(\varepsilon^2=\varepsilon)$ alakban írható.*

Problémaként vetem fel a 7.1. tételnek relatív inverzes félcsoportokra vonatkozó élesítését.

Nem nehéz kimutatni, hogy egy F relatív inverzes félcsoport azon α elemei, amelyekhez ugyanaz az ε idempotens elem tartozik, F-nek egy részcsoportját alkotják, amit F_ε-nal jelölünk.

A főkváziideálokról bővebb felvilágosítást ad a

8.2. TÉTEL. (Lásd STEINFELD [21].) *Az F relatív inverzes félcsoport mindegyik $\varepsilon F \varepsilon$ $(\varepsilon^2=\varepsilon)$ főkváziideálja F relatív inverzes részfélcsoportja: mégpedig $\varepsilon F \varepsilon=\bigcup_i F_{\eta_i}$, ahol $\eta_i(\in F)$ olyan idempotens elemeket jelöl, amelyekre $\varepsilon\eta_i=\eta_i\varepsilon=\eta_i$.*

REES [16] dolgozatában szerepel a következő fogalom. Az F félcsoport $\varepsilon(\neq 0)$ idempotens elemét *primitívnek* nevezzük, ha $\eta\varepsilon=\varepsilon\eta=\eta$ $(\eta\neq 0, \eta^2=\eta)$ feltételből mindig $\eta=\varepsilon$ folyik.

A primitív idempotens elemek és a minimális kváziideálok kapcsolatát világítja meg a következő

8.3. TÉTEL. (Lásd STEINFELD [21].) *Az F 0-elemmentes, relatív inverzes félcsoport akkor és csak akkor tartalmaz minimális kváziideált, ha legalább egy idempotens eleme primitív mégpedig $\varepsilon F \varepsilon$ $(\varepsilon^2=\varepsilon)$ kváziideál akkor és csak akkor minimális, ha ε primitív. Ebben az esetben $\varepsilon F \varepsilon$ és F_ε csoport megegyezik.*

FUCHS [6] szerint az F relatív inverzes félcsoport $F\alpha(\alpha\in F)$ főbalideál *rangja* 1, ha $F\alpha$ minimális, és $n+1$, ha $F\beta\subset F\alpha$ $(\beta\in F)$ feltételből az folyik, hogy $F\beta$ rangja legfeljebb n és az $F\beta$-k rangjai között n előfordul. Hasonlóan definiálható a főjobbideálok és főkváziideálok rangja.

Érvényes a következő

8.4. TÉTEL. *Az F relatív inverzes félcsoport $\varepsilon F \varepsilon$ $(\varepsilon^2=\varepsilon, \varepsilon\neq 0)$ főkváziideáljának rangja akkor és csak akkor n, ha $F\varepsilon$ főbalideál n-edrangú.*

Az n-edrangú főkváziideálok szerkezetéről további felvilágosítás is adható. (Lásd STEINFELD [21].)

Az F 0-elemmentes félcsoportot *egyszerűnek* nevezzük, ha F-nek nincs *valódi* (F-től különböző) kétoldali ideálja.

Az F 0-elemes félcsoport *0-egyszerű*, ha $F^2 \neq 0$ és F-nek nincs *valódi* (0-tól és F-től különböző) kétoldali ideálja.

REES [16] szerint az F egyszerű (0-egyszerű) félcsoportot *komplett egyszerűnek (komplett 0-egyszerűnek)* nevezzük, ha F tartalmaz primitív idempotens elemet.

A relatív inverzes és komplett egyszerű félcsoportok közötti kapcsolatra mutat rá a következő eredmény, mely részben CLIFFORD [3]-ból származik.

8.5. TÉTEL. (Lásd STEINFELD [21].) *Az F 0-elemmentes félcsoport M nemüres halmazára a következő feltételek ekvivalensek:*

(I) *M az F összes minimális kváziideáljainak egyesítése,*

(II) *M az F-nek olyan ideálja, mely relatív inverzes és egyszerű félcsoport,*

(III) *M az F-nek olyan ideálja, mely komplett egyszerű félcsoport.*

Nem tudom, hogy a 8.5. tételnek 0-elemes félcsoportra vonatkozó analogonja érvényes-e.

A továbbiakhoz szükségünk van a következő fogalmakra. Az F 0-elemes félcsoport α elemét *jobbannullátornak* nevezzük, ha $F\alpha = 0$.

Az F 0-elemes félcsoport $\mathfrak{k}_{\lambda\lambda'}(\lambda, \lambda' \in \Lambda)$ kváziideáljai *végtelen teljes rendszert* alkotnak, ha léteznek olyan $\varepsilon_\lambda, \varepsilon_{\lambda'}$ idempotens elemek, hogy $\mathfrak{k}_{\lambda\lambda'}$ vagy 0 vagy $\mathfrak{k}_{\lambda\lambda'} = \varepsilon_\lambda F \varepsilon_{\lambda'}$ minimális kváziideál és ha $\mathfrak{k}_{\lambda\lambda'}$ és $\mathfrak{k}_{\lambda'\lambda''} \neq 0$, akkor $\mathfrak{k}_{\lambda'\lambda}\mathfrak{k}_{\lambda\lambda'}\mathfrak{k}_{\lambda'\lambda''} = 0$.

(Ez a fogalom a 6. §-ban definiált teljes rendszer analogonjának tekinthető).

A 6.2. tételnek következő analogonja tudomásom szerint új eredmény:

8.6. TÉTEL. *Az F 0-elemes félcsoportra vonatkozóan a következő feltételek ekvivalensek:*

(a) *F reguláris és 0-minimális balideálok egyesítése.*

(b) *F radikálmentes és $F\varepsilon$ ($\varepsilon^2 = \varepsilon$) alakú 0-minimális balideálok egyesítése,*

(c) *F-nek nincs 0-tól különböző jobbannullátora és $F\varepsilon$ ($\varepsilon^2 = \varepsilon$) alakú 0-minimális balideálok egyesítése,*

(d) *F olyan kétoldali ideálok egyesítése, melyek F komplett 0-egyszerű részfélcsoportjai,*

(e) *F reguláris és 0-minimális kváziideálok egyesítése,*

(f) *F radikálmentes és $\varepsilon F \eta$ ($\varepsilon^2 = \varepsilon$, $\eta^2 = \eta$) alakú 0-minimális kváziideálok egyesítése,*

(g) *F olyan kváziideálok egyesítése, melyek végtelen teljes rendszert alkotnak.*

A tétel bizonyítására nézve lásd a szerző [25] dolgozatát.

IRODALOMJEGYZÉK

[1] E. ARTIN—C. J. NESBITT—R. M. THRALL: *Rings with minimum condition*, Ann Arbor, Mich., 1948.

[2] J. CALAIS: Demi-groups quasi inversifs, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences* **252** (1961), 2357—2359.

[3] A. H. CLIFFORD: Semigroups admitting relative inverses, *Ann. of Math.* (II. s.) **42** (1941), 1037—1049.

[4] ——— : Semigroups containing minimal ideals, *Amer. J. Math.* **70** (1948), 521—526.

[5] ——— —G. B. PRESTON: *The algebraic theory of semigroups I.*, Amer. Math. Soc. 1961.

[6] L. FUCHS: On semigroups admitting relative inverses and having minimal ideals, *Publ. Math. Debrecen* **1** (1950), 227—231.

[7] J. A. GREEN: On the structure of semigroups, *Ann. of. Math.* **54** (1951) 163–172.
[8] K. ISÉKI: Quasiideals in semirings without zero, *Proc. Japan Acad.* **34** (1958), 79–81.
[9] N. JACOBSON: *Structure of rings*, Amer. Math. Soc. 1956.
[10] KERTÉSZ A.–STEINFELD O.: A féligegyszerű gyűrűk jellemzéséről, *M. T. A. III. Oszt. Közl.* **9** (1959) 301–314.
[11] B. KOLIBIAROVA: O čiastočne komutativnych periodických pologrupach, *Mat. fiz. čas.* **9** (1959), 160–170.
[12] L. KOVÁCS: A note on regular rings, *Publ. Math. Debrecen* **4** (1956), 465–468.
[13] LAJOS S.: A félcsoportok ideálelméletéhez, *M. T. A. III. Oszt. Közl.* **11** (1961) 57–66.
[14] S. LAJOS: On quasiideals of regular ring, *Proc. Japan Acad.* **38** (1962) 210–211.
[15] J. LUH: A characterization of regular rings, *Proc. Japan Acad.* **39** (1963), 741.
[16] D. REES: On semi-groups, *Proc. Cambridge Phil. Soc.* **36** (1940) 387–400.
[17] M. P. SCHÜTZENBERGER: On a family of submonoids, *M. T. A. Mat. Kut. Int. Közl.* **6** (1961), 381–393.
[18] ŠT. SCHWARZ: On the structure of simple semigroups without zero, *Czechoslovak Math. J.* **1(76)** (1951), 41–53.
[19] O. STEINFELD: On ideal-quotients and prime ideals, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **4** (1953), 289–298.
[20] ——— : Bemerkung zu einer Arbeit von T. Szele, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **6** (1955), 479–484.
[21] ——— : Über die Quasiideale von Halbgruppen, *Publ. Math. Debrecen* **4** (1956), 262–275.
[22] ——— : Über die Quasiideale von Ringen, *Acta Sci. Math.* **17** (1956), 170–180.
[23] ——— : Über die Quasiideale von Halbgruppen mit eigentlichem Suschkewitsch-Kern, *Acta Sci. Math.* **18** (1957), 235–242.
[24] ——— : Über Zerlegungssätze für teilweise geordnete Halbgruppen mit bedingten Distributivitätsregeln, *M. T. A. Mat. Kut. Int. Közl.* (megjelenés alatt).
[25] ——— : On semigroups which are unions of completely 0-simple semigroups. (Megjelenés alatt.)
[26] F. SZÁSZ: Über Ringe mit Minimalbedingung für Hauptrechtsideale, II. *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **12** (1961), 417–439.
[27] ——— : Bemerkungen über Rechtssockel und Nilringe, *Monatshefte für Math.* **67** (1963), 359–362.
[28] R. WIEGANDT: Bemerkung zu einer Arbeit von Herrn Steinfeld, *Acta Sci. Math.* **23** (1962), 74–75.
[29] ——— : Über die Struktursätze der Halbringe, *Annales Univ. Sci. Budapestinensis R. Eötvös*, **5** (1962), 51–68.

(Beérkezett: 1964. VI. 12.)

FOLYTONOS ÁLLAPOTÚ MARKOV-FOLYAMATOK STATISZTIKAI VIZSGÁLATÁRÓL, III.

Írta: ARATÓ MÁTYÁS

Bevezetés

Az előző két részben, [1], [2] az időben folytonos és diszkrét egydimenziós stacionárius *Gauss—Markov* folyamat statisztikai vizsgálatáról volt szó, míg ebben a részben a hasonló típusú kétdimenziós (komplex) folyamattal kapcsolatos problémák tárgyalására kerül sor. Ilyen típusú folyamatok statisztikai vizsgálatának elvégzésének szükségessége a LOMONOSZOV EGYETEM VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁSI TANSZÉKén vetődött fel egy geofizikai probléma vizsgálatának kapcsán. A problémát egy külön pontban ismertetem, ott mutatok rá a fizikai jelenség teljes vizsgálatával kapcsolatos további lehetőségekre is. Az elért eredmények megbeszélése a tanszéken rendszeres volt, jelen dolgozat ezen eredményeket ismerteti, kidolgozásukban a szerző is részt vett. Az eredményekről A. N. KOLMOGOROV, JA. G. SZINAJ és a szerző egy közös dolgozata [4], a számításokról és az ahhoz szükséges apparátusról RIKOVA, SZINAJ és a szerző [5] dolgozata számol be. Részletes bizonyítások a [4] cikkben nem szerepelnek, a jelen dolgozatban szereplő bizonyításokat a szerző dolgozta ki — a 3. § kivételével, mely a SZINAJ-jal közös s a [3] disszertációban szereplő eredményeket tartalmazza.

IDŐBEN FOLYTONOS, STACIONÁRIUS, NORMÁLIS, KOMPLEX ESET

1. § Az időben folytonos folyamat leírása

Tekintsük azt a kétdimenziós stacionárius sztochasztikus folyamatot, melynek $\xi(t)$, $\eta(t)$ komponensei eleget tesznek a

$$\begin{aligned} d\xi &= -\lambda\xi dt + \omega\eta dt + d\varepsilon_1 \\ d\eta &= \omega\xi dt - \lambda\eta dt + d\varepsilon_2 \end{aligned} \tag{1.1}$$

sztochasztikus differenciálegyenleteknek, ahol $\varepsilon_1(t)$ és $\varepsilon_2(t)$ két független *Wiener-folyamat*

$$Md\varepsilon_1 = Md\varepsilon_2 = 0, \quad M(d\varepsilon_1)^2 = M(d\varepsilon_2)^2 = a\cdot dt$$

paraméterekkel. Feltéve, hogy

$$\zeta(t) = \xi(t) + i\eta(t), \quad \chi(t) = \varepsilon_1(t) + i\varepsilon_2(t), \quad \gamma = \lambda - i\omega$$

az (1.1) rendszert egyetlen egyenlet alakjában írhatjuk fel,

$$d\zeta = -\gamma\zeta dt + d\chi. \tag{1.1'}$$

A $\zeta(t)$ folyamat komplex korrelációs függvénye (vö. [1] 1.2. tétel)

$$C(\tau) = A(\tau)+iB(\tau) = M[\zeta(t)\overline{\zeta(t+\tau)}] = \sigma^2 \exp(-\lambda|\tau|-i\omega\tau) \tag{1.2}$$

ahol $\sigma^2 = a/\lambda$ (az (1.1') egyenlet alapján). A $\zeta(t)$ folyamatnak a $[0, T)$ intervallumon való realizációja alapján értelmezhetjük a

$$c(\tau) = a(\tau)+ib(\tau) = \frac{1}{T-\tau}\int_0^{T-\tau} \zeta(t)\overline{\zeta(t+\tau)}\, dt \tag{1.3}$$

empirikus korrelációs függvényét, mely 0-ban jobbról differenciálható 1 valószínűséggel és

$$c'(0) = -a-\frac{1}{T}s_1^2+\frac{1}{T}s_2^2-ir, \tag{1.4}$$

ahol a a fenti $\varepsilon_1'(t)$ és $\varepsilon_2'(t)$ „fehér zaj" folyamatokat jellemző intenzitás paramétere, míg

$$s_1^2 = \frac{1}{2}[|\zeta(0)|^2+|\zeta(T)|^2], \quad s_2^2=\frac{1}{T}\int_0^T |\zeta(t)|^2\, dt, \quad r=\frac{1}{T}\int_0^T |\zeta(t)|^2\, d\theta.$$

Az r integrál kifejezésében szereplő θ argumentum a

$$\zeta(t)=|\zeta(t)|\, e^{i\theta(t)}$$

összefüggés alapján van meghatározva.

Az (1.4) összefüggés igazolása a következőképpen történik. Könnyű megmutatni, hogy

$$\frac{c(\tau+h)-c(\tau)}{h} = \frac{1}{T-\tau}\int_0^{T-\tau} \zeta(t)\, d\overline{\zeta(t)}' + \frac{1}{(T-\tau)^2}\int_0^{T-\tau} \zeta(t)\overline{\zeta(t+h)}\, dt - \tag{1.5}$$

$$-\frac{1}{T-\tau}\zeta(T-\tau)\overline{\zeta(T)}+o(1).$$

Másrészt a komplex folyamatra érvényes (vö. I. rész (1.10))

$$\sum_2^n |\zeta(t_i)-\zeta(t_{i-1})|^2 \to 2aT,$$

(ahol a konvergencia 1 valószínűséggel és négyzetes középben is érvényes) összefüggés alapján könnyű belátni, hogy a

$$\sum_2^n \zeta(t_{i-1})[\zeta(t_i)-\zeta(t_{i-1})]$$

összeg határértékeként értelmezett

$$\int_0^T \zeta(t)\, d\zeta(t)$$

integrál értéke

$$-aT+\frac{|\zeta(T)|^2-|\zeta(0)|^2}{2}-i\int_0^T |\zeta(t)|^2\, d\theta. \tag{1.6}$$

Egyszerű számolással belátható ugyanis, hogy

$$\sum_2^n |\zeta(t_i)-\zeta(t_{i-1})|^2=\sum_2^n [\zeta(t_i)\overline{\zeta(t_i)}-\zeta(t_{i-1})\overline{\zeta(t_i)}-\zeta(t_i)\overline{\zeta(t_{i-1})}-\zeta(t_{i-1})\overline{\zeta(t_{i-1})}]=$$

$$=-2\sum_2^n \zeta(t_{i-1})[\overline{\zeta(t_i)-\zeta(t_{i-1})}]+|\zeta(T)|^2-|\zeta(0)|^2+\sum_2^n [\zeta(t_{i-1})\overline{\zeta(t_i)}-\zeta(t_i)\overline{\zeta(t_{i-1})}]=$$

$$=-2\sum_2^n \zeta(t_{i-1})[\overline{\zeta(t_i)-\zeta(t_{i-1})}]+|\zeta(T)|^2-|\zeta(0)|^2+$$

$$+\sum_2^n |\zeta(t_i)|\,|\zeta(t_{i-1})|\,[e^{i(\theta(t_{i-1})-\theta(t_i))}-e^{i(\theta(t_i)-\theta(t_{i-1}))}].$$

(1.5) és (1.6) összevetéséből adódik (1.4).

2. § A paraméterek becslései s azok eloszlásai

Az előző pontban már szerepelt, hogy ugyanúgy, mint az egydimenziós esetben az a diffúziós paraméter pontosan becsülhető egyetlen realizáció alapján, mivel

$$\sum_1^n |\xi(t_i)-\xi(t_{i-1})|^2\to aT, \quad \text{ha} \quad n\to\infty,\ \max|t_i-t_{i-1}|\to 0$$

és

$$\sum_1^n |\eta(t_i)-\eta(t_{i-1})|^2\to aT, \quad \text{ha} \quad n\to\infty,\ \max|t_i-t_{i-1}|\to 0.$$

Az ismeretlen paraméterek tehát λ és ω. Jelölje a $[0, T]$ intervallum realizációinak terén a $\zeta(t)$ folyamathoz tartozó mértéket P. Ugyanezen a téren vezessük be a

$$V=L\times W$$

standard mértéket, ahol L a közönséges *Lebesgue*-mérték a $\zeta(0)$ síkon, míg W a $\zeta(t)-\zeta(0)$ növekmények terén a kétdimenziós *Wiener*-mérték a $\chi(t)$ (vö. (1.1')) folyamat paramétereivel. Ismeretes (l. [14], vö. az első rész (2.1) képletével), hogy

$$\frac{dP}{dV}=\frac{\lambda}{\pi\cdot a^2}\exp\left[-\frac{\lambda^2+\omega^2}{2a}Ts_2^2-\frac{\lambda}{a}s_1^2+\lambda T+\frac{\omega}{a}Tr\right]^{1} \tag{2.1}$$

A (2.1) összefüggés szerint az s_1^2, s_2^2, r rendszer a feladat elégséges statisztika rendszere. ω és λ szerint differenciálva az

$$L=\log\frac{dP}{dV}=-\log\pi a^2+\log\lambda-\frac{\lambda^2+\omega^2}{2a}Ts_2^2-\frac{\lambda}{a}s_1^2+\lambda T+\frac{\omega}{a}Tr$$

kifejezést a

$$\frac{\partial L}{\omega\omega}=-\frac{\omega}{a}Ts_2^2+\frac{T}{a}r=0 \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial\lambda}=\frac{1}{\lambda}-\frac{\lambda}{a}Ts_2^2-\frac{s_1^2}{a}+T=0 \tag{2.3}$$

egyenleteket kapjuk az $\hat{\omega}$ és $\hat{\lambda}$ maximum likelihood becslések meghatározására. (2.2)-ből

$$\breve{\omega}=\frac{r}{s_2^2} \tag{2.2'}$$

míg (2.3)-ból a $\lambda T=\varkappa$, $\hat{\lambda}\cdot T=\hat{\varkappa}$ jelöléssel $\hat{\varkappa}$-ra a

$$h_2\hat{\varkappa}^2+(h_1-1)\hat{\varkappa}-1=0 \tag{2. 3'}$$

egyenletet kapjuk, ahol $h_1=s_1^2/aT$, $h_2=s_2^2/aT$. (2.3′) egyetlen pozitív megoldásának eloszlására a 3. §-ban visszatérünk.

Legyen $\sigma^2(\hat{\omega})=\frac{2a}{Ts_2^2}$. Bebizonyítjuk a következő tételt.

[1] Ugyanúgy, mint azt az első részben [1] láttuk, a *Radon—Nikodym* derivált levezethető heurisztikusan az $\varepsilon_1(t)$ és $\varepsilon_2(t)$ funkcionáljainak segítségével is. A komplex esetben ugyanis a *Radon—Nikodym* derivált

$$C(\lambda)\exp\left\{-\frac{|\zeta(0)|^2}{a}\lambda-\frac{1}{2a}\int_0^T\frac{(d\xi+\lambda\xi\,dt+\omega\eta\,dt)^2}{dt}-\frac{1}{2a}\int_0^T\frac{(d\eta-\omega\xi\,dt+\lambda\eta\,dt)^2}{dt}\right\}=$$

$$=C(\lambda)\exp\left\{-\frac{|\zeta(0)|^2}{a}\lambda-\frac{\lambda^2+\omega^2}{2a}\int_0^T|\zeta(t)|\,dt-\frac{\lambda}{a}\int_0^T(\xi d\xi+\eta d\eta)-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2a}\int_0^T\left[\frac{(d\xi)^2}{dt}+\frac{(d\eta)^2}{dt}\right]-\frac{\omega}{a}\int_0^T(\eta d\xi-\xi d\eta)\right\}.$$

alakú, melyből (2.1) formálisan könnyen megkapható, amint azt a fenti kifejezésben szereplő integrálokra vonatkozó összefüggések mutatni fogják.

2.1. TÉTEL. *Az $\hat{\omega}$ maximum likelihood becslés esetén a*

$$\frac{\hat{\omega}-\omega}{\sigma(\hat{\omega})}$$

változó (0,1) *paraméterű normális eloszlású.*

Megjegyzés. A tétel érdekessége éppen az, hogy nem aszimptotikus, hanem pontos eloszlást ad az $\hat{\omega}$ becslésre.

Bizonyítás: Egyszerű átalakításokkal belátható, hogy

$$\frac{\hat{\omega}-\omega}{\sigma(\hat{\omega})}=\sqrt{\frac{1}{2aT}}\,\frac{\int_0^T |\zeta(t)|^2(d\Theta-\omega\,dt)}{\left(\int_0^T |\zeta(t)|^2\,dt\right)^{1/2}}$$

és állításunk igazolására elegendő belátni, hogy (T helyett egy dt hosszúságú intervallumon integrálva) a

$$|\zeta(t)|(d\theta-\omega dt)\sqrt{2adt}$$

valószínűségi változó (0,1) normális eloszlású. Az (1.1′) egyenlet alapján

$$|\zeta|(d\theta-\omega dt) = d\varepsilon_2\cdot\cos\theta-d\varepsilon_1\cdot\sin\theta,$$

ahonnan állításunk azonnal következik, mivel $d\varepsilon_2$ és $d\varepsilon_1$ független normális eloszlású változók.

A fenti tétel rámutat a $\zeta(t)$ folyamat által leírt mozgás jellegére: egy ω átlag szögsebességgel mozgó pont, melynek origótól való távolsága $|\zeta|$.[2]

3. § Konfidencia intervallumok szerkesztése a λ paraméterre

Ebben a részben feltesszük, hogy a $\zeta(t)$ komplex stacionárius *Gauss—Markov* folyamat összes paraméterei ismertek λ kivételével. Az egyszerűség kedvéért legyen $M\xi(t)=M\eta(t)=0$ és $M\xi^2(t)=M\eta^2(t)=1/2\lambda$. Ilyen feltételek mellett kiszámítjuk az elégséges statisztika rendszer karakterisztikus függvényét és megmutatjuk a megfelelő konfidencia intervallumok szerkesztésének módját. Mint már említettem, az ismertetendő eredmények, valamint a számítások JA. G. SZINAJ, L. RIKOVA

[2] Az időben diszkrét esetre való áttérés szempontjából igen hasznos a

$$(*)\qquad \int_0^T |\zeta(t)|^2 d\theta = \int_0^T (\xi d\eta-\eta d\xi)$$

összefüggés is, mely egyszerűen igazolható a

$$\sum [\zeta(t_i)\overline{\zeta(t_{i-1})}-\zeta(t_{i-1})\overline{\zeta(t_i)}] = 2i\sum [\eta(t_i)(\xi(t_i)-\xi(t_{i-1}))-\xi(t_i)(\eta(t_i)-\eta(t_{i-1}))]$$

azonosság alapján, melyből (*) éppen úgy megkapható, mint ahogyan azt (1.6) bizonyításánál tettük.

és a szerző nevéhez fűződnek [5]. Mint (2.1)-ből látható, elégséges statisztika rendszert a

(3.1) $$\chi_1(T) = \frac{1}{2}\{\xi^2(0)+\eta^2(0)+\xi^2(T)+\eta^2(T)\},$$

$$\chi_2(T) = \int_0^T (\xi^2(t)+\eta^2(t))\,dt$$

statisztikák alkotnak. Ezen mennyiségek karakterisztikus függvényének meghatározására a következő parciális differenciálegyenletet lehet felírni. (Különböző funkcionálokra vonatkozó differenciálegyenletek létezési és egyértelműségi kérdéseivel foglalkozik DINKIN [7] dolgozata.) Legyen

(3.2) $$u(T, x, y) = M\{e^{i\alpha_1\chi_2(T)+i\alpha_2\chi_2(T)}|_{\substack{\xi(0)=x\\ \eta(0)=y}}\},$$

azaz a χ_1 és χ_2 változók feltételes karakterisztikus függvénye a $\xi(0)=x$, $\eta(0)=y$ feltétel mellett. Nyilván

(3.3) $$u(T+\Delta T, x, y) = \frac{1}{2\pi\Delta T}\iint_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x_1-x+\lambda x\Delta T+\omega y\Delta T)^2}{2\Delta T}-\frac{(y_1-y-\omega x\Delta T+\lambda y\Delta T)^2}{2\Delta T}}\,.$$

$$\cdot u(T, x, y\left\{[1+i\alpha_2\Delta T(x^2+y^2)]\left[1-i\alpha_1\left(\frac{(x_1-x)^2}{2}+\frac{(y_1-y)^2}{2}+\right.\right.\right.$$

$$\left.+x(x_1-x)+y(y_1-y)\right)+\frac{\alpha_1^2}{2}(x^2(x_1-x)^2+y^2(y_1-y)^2+$$

$$\left.\left.\left.+2y(x_1-x)(y_1-y)+\ldots\right)\right]\right\}dx_1\,dy_1$$

ahonnan a $\Delta T\to 0$ határátmenettel a következ őegyenletet kapjuk $u(T, x, y)$-ra:

(3.4) $$\frac{\partial u}{\partial T} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+\frac{\partial u}{\partial x}(-i\alpha_1 x-\lambda x-\omega y)+\frac{\partial u}{\partial y}(-i\alpha_1 y+\omega x-\lambda y)+$$

$$+u\left[-i\alpha_1+i\alpha_1\lambda(x^2+y^2)-\frac{\alpha_1^2}{2}(x^2+y^2)+i\alpha_2(x^2+y^2)\right].$$

Legyen

$$u(T, x, y)=u_1(T, x, y)e^{i\alpha_1\frac{x^2+y^2}{2}}$$

akkor (3.4) alapján

(3.5) $$\frac{\partial u_1}{\partial T} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}\right)+\frac{\partial u_1}{\partial x}(\lambda x+\omega y)+\frac{\partial u_1}{\partial y}(-\omega x+\lambda y)+u_1 i\alpha_2(x^2+y^2),$$

vagy polárkoordinátákban

$$\frac{\partial u_1}{\partial T} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2} + \frac{\partial u_1}{\partial r}\left(\frac{1}{2r} + \lambda r\right) + u_1 i\alpha_2 r^2. \tag{3.5'}$$

Az $u_1(T, r) = v(T, r^2) = v(T, \varrho)$ leképezéssel $v(T, \varrho)$ a

$$\frac{\partial v}{\partial T} = 2\varrho\frac{\partial^2 v}{\partial \varrho^2} + 2\frac{\partial v}{\partial \varrho}(1-\lambda\varrho) + i\alpha_2 \varrho v \tag{3.6}$$

differenciálegyenletnek tesz eleget, mégpedig a nyilvánvaló

$$v(0, \varrho) = e^{\frac{i\alpha_1}{2}\varrho} \tag{3.7}$$

kezdeti feltétellel. Jelölje v *Laplace*-transzformáltját w, azaz

$$w(T, \gamma) = \int_0^\infty e^{-\gamma\varrho} v(T, \varrho)\, d\varrho.$$

A (3.6) és (3.7) összefüggések alapján

$$\frac{\partial w}{\partial T} = \frac{\partial w}{\partial \gamma}(-2\gamma^2 + 2\lambda\gamma - id_2) + w(2\lambda - 2\gamma), \tag{3.8}$$

$$w(0, \gamma) = \frac{1}{\gamma - \frac{i\alpha_1}{2}}. \tag{3.9}$$

A (3.8) egyenlet megoldását ismert módszerek alapján egyszerűen (lásd pl. [13] 339 o.) egyszerűen megkaphatjuk. Legyenek γ_1, γ_2 az

$$\gamma^2 - \lambda\gamma + \frac{i\alpha_1}{2} = 0, \quad \gamma_{1,2} = \frac{\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 2i\alpha_2}}{2} \tag{3.10}$$

egyenlet gyökei. A (3.8) egyenlet első integráljai

$$c_1 = T - \frac{1}{2(\gamma_1 - \gamma_2)} \log\frac{\gamma - \gamma_1}{\gamma - \gamma_2} \tag{3.11}$$

$$c_2 = \log w + \frac{1}{2}\log(\gamma - \gamma_1)(\gamma - \gamma_2) - \frac{\lambda}{2(\gamma_1 - \gamma_2)}\log\frac{\gamma - \gamma_1}{\gamma - \gamma_2}$$

lesznek. $T = 0$ esetén

$$\frac{\gamma - \gamma_1}{\gamma - \gamma_2} = e^{-2(\gamma_1 - \gamma_2)c_1}, \tag{3.12}$$

$$\gamma = \frac{\gamma_1 - \gamma_2 e^{-2(\gamma_1 - \gamma_2)c_1}}{1 - e^{-2(\gamma_1 - \gamma_2)c_1}},$$

és így

$$\log w + \tfrac{1}{2}\log \frac{e^{-2(\gamma_1-\gamma_2)c_1}(\gamma_1-\gamma_2)^2}{(1-e^{-2(\gamma_1-\gamma_2)c_1})^2} + \lambda c_1 = c_2, \tag{3.13}$$

$$w = \frac{(1-e^{-2(\gamma_1-\gamma_2)c_1})}{e^{-c_1(\gamma_1-\gamma_2)}(\gamma_1-\gamma_2)}\, e^{c_2-\lambda c_1}.$$

(3.9) és (3.13) alapján

$$\frac{1-e^{-2c_1(\gamma_1-\gamma_2)}}{e^{-c_1(\gamma_1-\gamma_2)}(\gamma_1-\gamma_2)}\, e^{c_2-\lambda c_1} - \frac{1}{\dfrac{\gamma_1-\gamma_2 e^{-2(\gamma_1-\gamma_1)c_1}}{1-e^{-2(\gamma_1-\gamma_2)c_1}} - \dfrac{i\alpha_1}{2}} = 0.$$

(3.11) behelyettesítésével a következő összefüggést kapjuk

$$\frac{1-\dfrac{\gamma-\gamma_2}{\gamma-\gamma_2}e^{-2T(\gamma_1-\gamma_2)}}{e^{-T(\gamma_1-\gamma_2)}\sqrt{\dfrac{\gamma-\gamma_1}{\gamma-\gamma_2}}(\gamma_1-\gamma_1)}\, e^{\log w + \frac{1}{2}\log(\gamma-\gamma_1)(\gamma-\gamma_2) - \frac{\lambda}{2(\gamma_1-\gamma_2)}\log\frac{\gamma-\gamma_1}{\gamma-\gamma_2} - \lambda T}.$$

$$\cdot e^{\frac{\lambda}{2(\gamma_1-\gamma_2)}\log\frac{\gamma-\gamma_1}{\gamma-\gamma_2}} = \frac{1}{\dfrac{\gamma_1-\gamma_2\dfrac{\gamma-\gamma_1}{\gamma-\gamma_2}e^{-2T(\gamma_1-\gamma_2)}}{1-\dfrac{\gamma-\gamma_1}{\gamma-\gamma_2}e^{-2T(\gamma_1-\gamma_2)}} - \dfrac{i\alpha_1}{2}},$$

ahonnan

$$w = \frac{(\gamma_1-\gamma_2)e^{\lambda T - T(\gamma_1-\gamma_2)}}{(\gamma-\gamma_2)\left(\gamma_1-\dfrac{i\alpha_1}{2}\right)+(\gamma-\gamma_1)\left(\dfrac{i\alpha_1}{2}-\gamma_2\right)e^{-2T(\gamma_1-\gamma_2)}}. \tag{3.14}$$

A $\chi_1(T)$, $\chi_2(T)$ valószínűségi változók karakterisztikus függvényét (feltétel nélküli!) (3.14)-ből a $\gamma = \lambda - \dfrac{i\alpha_1}{2}$, helyettesítéssel kapjuk meg (3.10) felhasználásával:

$$u_{\chi_1,\chi_2}(T) = M(e^{i\alpha_1\chi_1(T)+i\alpha_2\chi_2(T)}) = w\left(T, \lambda-\frac{i\alpha_1}{2}\right) = \tag{3.15}$$

$$= \frac{4\lambda(\lambda^2-2i\alpha_2)^{1/2}e^{\lambda T - T\sqrt{\lambda^2-2i\alpha_2}}}{(\lambda-i\alpha_1+\sqrt{\lambda^2-2i\alpha_2})^2-(\lambda-i\alpha_1-\sqrt{\lambda^2-2i\alpha_2})^2e^{-2T\sqrt{\lambda^2-2i\alpha_2}}}.$$

Legyen $\varkappa = \lambda T$, akkor a $\lambda\chi_1$, $\lambda^2\chi_2$ változók karakterisztikus függvénye

$$\frac{4(1-2i\alpha_2)^{1/2}e^{\varkappa}}{(1-i\alpha_1+\sqrt{1-2i\alpha_2})^2e^{\varkappa\sqrt{1-2i\alpha_2}}-(1-\alpha_1\sqrt{1-2i\alpha_2})^2e^{-\varkappa\sqrt{1-2i\alpha_2}}} \tag{3.16}$$

alakú lesz.

(2.3) alapján az ismeretlen λ paraméterre vonatkozó maximum likelihood egyenlet

$$\frac{1}{\lambda}-(\chi_1-T)-\lambda\chi_2=0$$

alakú lesz, melynek egyetlen pozitív megoldása

$$\hat{\lambda}=\frac{-(\chi_1-T)+\sqrt{(\chi_1-T)^2+4\chi_2}}{2\chi_2}. \tag{3.17}$$

A $\hat{\lambda}$ becslés eloszlásának meghatározására tekintsük a

$$P_\lambda\{\hat{\lambda}<x\}=P_\lambda\left\{\chi_2-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}(T-\chi_1)>0\right\}=P_\lambda\{x^2\chi_2+x\chi_1>Tx+1\} \tag{3.18}$$

összefüggést, ahonnan $x=\lambda y$ és $\zeta_I=\lambda y\chi_1+\lambda^2y^2\chi_2$, $\lambda T=\varkappa$ helyettesítéssel

$$P_\lambda\{\hat{\lambda}<\lambda y\}=P_\varkappa\{\zeta_y>\varkappa y+1\} \tag{3.19}$$

ahol ζ_y karakterisztikus függvénye (3.16) alapján

$$\frac{4(1-2iy^2\alpha)^{1/2}e^{\varkappa}}{(1-iy\alpha+\sqrt{1-2iy^2\alpha})^2e^{\varkappa\sqrt{1-2iy^2\alpha}}-(1-iy\alpha-\sqrt{1-2iy^2\alpha})^2e^{-\varkappa\sqrt{1-2iy^2\alpha}}} \tag{3.20}$$

alakú. Innen adott $\varkappa$ és y esetén a megfelelő valószínűségek kiszámíthatók.

Legyen $p=1-2iy^2\alpha$, akkor ζ_y valószínűségi változó eloszlásának *Laplace*-transzformáltja (3.20) alapján a következő,

$$\frac{8y^4e^{\varkappa}}{(y-1)^2}\frac{\sqrt{p}\,e^{-\varkappa\sqrt{p}}}{(p-1)}\left[\frac{1}{(\sqrt{p}+1)^2}+\frac{1}{(\sqrt{p}+2y-1)^2}-\frac{2}{(\sqrt{p}+1)(\sqrt{p}+2y-1)}\right]\cdot$$

$$\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1-\dfrac{p-1}{2y}-\sqrt{p}}{1-\dfrac{p-1}{2y}+\sqrt{p}}\right)^{2k}\cdot e^{-2k\varkappa\sqrt{p}},$$

vagy az $s^2=p$ és $a=2y-1$ helyettesítéssel

$$\frac{8y^4e^{\varkappa}}{(y-1)^2}\sum_{k=0}^{\infty}e^{-\varkappa(2k+1)s}\frac{s^2}{(s-1)(s+1)(s+a)}\frac{(s-1)^{2k}}{(s+1)^{2k+1}}\frac{(s-a)^{2k}}{(s+a)^{2k+1}}. \tag{3.21}$$

A (3.21) összeg első tagjának, az

$$\frac{8y^4e^{\varkappa}}{(y-1)^2}\frac{p^2e^{-\varkappa p}}{(p-1)(p+a)^2(p+1)^2}$$

kifejezésnek inverz *Laplace*-transzformáltja (felhasználva például DITKIN, KUZNYECOV [6] táblázatait)

$$
\begin{aligned}
(3.22)\qquad & \frac{1}{2}\left[1-\Phi\left(\frac{\varkappa y}{\sqrt{2(\varkappa y+1)}}-\frac{\sqrt{\varkappa y+1}}{y\sqrt{2}}\right)\right]+ \\
&+\left[1-\Phi\left(\frac{ky}{\sqrt{\varkappa y+1}}+\frac{\sqrt{\varkappa y+1}}{y\sqrt{2}}\right)\right]e^{2\varkappa}\left[-\frac{y^2(y^2+4y-2}{2(y-1)^4}+\frac{(6y-2)(\varkappa y^2+\varkappa y+1)}{2(y-1)^3}-\right. \\
&\left.-\frac{\varkappa y+1}{(y-1)^2}-\frac{(\varkappa y^2+\varkappa y+1)^2}{y^2(y-1)^2}\right]+ \\
&+\left[1-\Phi\left(\frac{\varkappa y}{\sqrt{2(\varkappa y+1)}}+\frac{(2y-1)\sqrt{\varkappa y+1}}{y\sqrt{2}}\right)\right]e^{2\varkappa y+\frac{\varkappa y+1}{2y^2}[2y-1)^2-1]}\left[\frac{(2y-1)(4y^2-2y+1)}{2(y-1)^4}-\right. \\
&\left.-\frac{(2y-1)^2}{y(y-1)^3}\left(\varkappa y^2+(2y-1)(\varkappa y+1)\right)\right]+ \\
&+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sqrt{\varkappa y+1}}{y(y-1)^2}e^{\varkappa-\frac{\varkappa y+1}{2y^2}\,\frac{\varkappa^2y^2}{2(\varkappa y+1)}}\left[\frac{7y^2-5y+1}{y(y-1)}\,y^2+\varkappa y^2+\varkappa y+1\right],
\end{aligned}
$$

ahol

$$\Phi(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-u^2}\,du.$$

Ez a közelítés ζ_y eloszlásának meghatározására $\varkappa$ nagy értékeire megfelelő. További közelítés kapható, ha pl. figyelembe vesszük, hogy

$$\frac{(p-a)^{2k}}{(p+a)^{2k+1}}$$

alakú függvények inverz *Laplace*-transzformáltja

$$e^{-ax}\left[\frac{e^{2ax}}{k!}\;\frac{d^k(2ax)^k e^{-2ax}}{dx^k}\right]$$

alakú, tehát a megfelelő *Laguerre*-polinomok fognak szerepelni. $\varkappa$ kis értékeire a megfordítási képlet alapján ζ_y sűrűségfüggvénye

$$f_\zeta(x)=\sum_k e^{s_k x}b(s_k)$$

alakú lesz, ahol s_k a (3.20) függvény pólusait jelöli, $b(s_k)$ pedig az s_k pontban levő reziduumot. A pólusokra vonatkozó egyenlet

$$\frac{(1+ys+\sqrt{1+2y^2s})^2}{(1+ys-\sqrt{1+2y^2s})^2}=e^{-2\varkappa\sqrt{1+2y^2s}}$$

alakú.

A fenti összefüggések alapján lehetséges λ-ra konfidencia intervallumok szerkesztése, a számításokhoz azonban elektronikus számológép igénybevételére volt szükség. A következő pontban szereplő példában $T=60$ év és $\hat{\varkappa}=3{,}6$ esetén a megfelelő felső és alsó becslések (a valószínűségi szinteket az indexbe téve)

$$\begin{aligned} &\varkappa_{0,90}=5{,}5, \quad \varkappa_{0,95}=6{,}2, \quad \varkappa_{0,975}=7{,}8, \\ &\varkappa_{0,10}=1{,}27, \quad \varkappa_{0,05}=0{,}82, \quad \varkappa_{0,025}=0{,}46. \end{aligned} \tag{3.23}$$

A (3.19) és (3.20) összefüggésekből látható, hogy $\varkappa$ kicsiny értékeire

$$P_{\varkappa}\{\hat{\varkappa}<y\varkappa\}=\exp\left\{-\frac{1}{y}\right\}, \tag{3.24}$$

azaz a $\hat{\varkappa}/\varkappa$ hányados χ^2 eloszlású 2 szabadságfokkal, míg $\varkappa$ nagy értékeire

$$P\{\varkappa<\hat{\varkappa}+y\sqrt{\hat{\varkappa}}\}\approx\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{y}e^{-t^2/2}\,dt, \tag{3.25}$$

azaz $\hat{\varkappa}$ normális eloszlású $D^2(\hat{\varkappa})\sim\hat{\varkappa}$ szórásnégyzettel. Mivel $\hat{\varkappa}$ eloszlása folytonos tetszőleges $0<\alpha<1$ és $0<\varkappa<\infty$ értékekre van olyan k, hogy

$$P_{\varkappa}\{\hat{\varkappa}>k\}=\alpha.$$

A

$$k=k_{\alpha}(\varkappa)$$

összefüggésből a

$$\varkappa=\varkappa_{\alpha}(k)$$

összefüggést kapjuk, ahonnan nyilvánvaló, hogy

$$P_{\varkappa}\{\varkappa<\varkappa_{\alpha}(\hat{\varkappa})\}\equiv\alpha$$

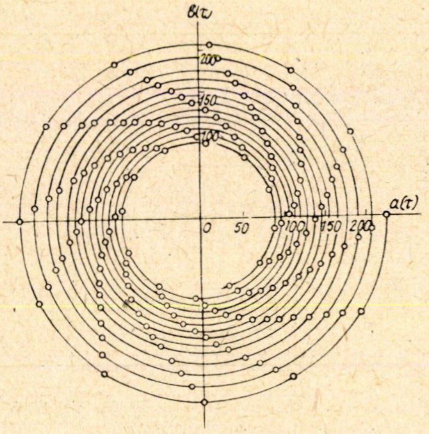
és $\varkappa_{\alpha}(\hat{\varkappa})$ lesz a $\varkappa$-ra vonatkozó konfidencia határ. A számítások azt mutatták, hogy $k_{\alpha}(\varkappa)$ monoton növekvő és így lézetik az inverze, tehát megfelelő konfidencia határok kaphatók.

4. § Egy geofizikai probléma

Földünk pillanatnyi forgástengelye a Föld mint ellipszoid kistengelyéhez viszonyítva állandóan változtatja helyzetét (ez az ún. „szabad mutáció”). Ezen helyváltoztatásnak van egy egyéves periódusa, melynek kiszűrése után megmarad az ún. *Chandler*-féle változás, melynek mintegy 14 hónapos periódusa van. Ez az ingadozás azonban már nem pontosan periodikus mozgás és emellett az amplitúdója is 10—20 éves hullámokban változik. Az 1. ábra, mely a pólus *Chandler*-féle komponenseinek empirikus korrelációs függvényét ábrázolja, jól mutatja, hogy szépen teljesülnek azok a feltételek, melyek az 1. §-ban kerültek ismertetésre (az empirikus korrelációs függvény alakja szabályos spirális, melyet vö. (1.2)-vel).

Az 1. ábra A. JA. ORLOV [11] dolgozatának 6. táblázata alapján készült a MOSZKVAI EGYETEM VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁSI TANSZÉKén. Az említett 6. táblázat

$x(t), y(t)$ koordinátáiból leválasztva azokat a komponenseket, melyeknek periódusa egy év, kapjuk a $\xi(t)$, $\eta(t)$ komponensű stacionárius *Gauss—Markov*-folyamatot. Az ábrán körrel jeleztük az 0,1 év nagyságú τ növekményekhez tartozó értékeket, mivel évente — immár több mint 70 éve — 10 mérést végeznek, s ezeket a méréseket még a Nagy Honvédő Háború idején sem szakították meg. Az ábra alapján szemléletesen is azonnal megállapítható, hogy a $2\pi/\omega$ periódus kb. 14 hónapos. A 2.1 tétel éppen azt mondja ki, hogy ω valóban pontosan becsülhető, tehát a becslésünk megbízható. A kapott spirális alapján azt lehetne várni, hogy a λ paramétert is pontosan lehet becsülni, ez azonban nincs így, mint ahogyan azt a 3. §-ban láttuk.



1. ábra. $\tau = 0{,}1 \cdot n$; $n = 0, 1, 2, \ldots, 156$

A földforgás pólusának nevezzük a forgástengely és a földfelszín metszéspontját P-t, melynek koordinátáit jelölje (x, y, z), ahol a koordináták a Föld tehetetlenségi ellipszoidjának tengelyei irányában mérendők. A földet abszolút szilárd testnek föltételezve az *Euler*-féle egyenletekből

$$x = x_0 \cos(a^2 r_0 t + \tau)$$
$$y = y_0 \sin(a^2 r_0 t + \tau)$$
$$z = z_0$$

mozgást kapnánk: azaz a forgási pólus egy körmozgást ír le a tehetetlenségi pólus (a földfelszín és földtengely metszéspontja) $I(0, 0, z_0)$ körül. Ha az időegység egy csillagászati nap $r_0 = 1$ és $T = \frac{2\pi}{a} \sim 304$ nap.

Az eddigiekben feltettük, hogy a tehetetlenségi pólus időben nem változtatja helyét, azonban a különböző tömegváltozások (pl. levegőáramlások) hatására I szinten változtatja helyét. A függőleges komponens változásait elhanyagolva az egyenlítő síkjával párhuzamos síkban mérve φ és ψ koordinátáit, azok az idő függvényei lesznek, melyek periodikus komponensektől (éves vagy féléves periódussal) és véletlen határoktól is függnek. Azaz

$$\varphi(t) = \sum_k a_k \cos(\lambda_k t + \alpha_k) + \Delta_1(t)$$

$$\psi(t) = \sum_k b_k \cos(\lambda_k t + \beta_k) + \Delta_2(t)$$

ahol a $\Delta_1(t)$ és $\Delta_2(t)$ sztochasztikus folyamatokról fel lehet tételezni — első durva közelítésben —, hogy ún. „fehér zaj"-szerűek.

Mivel az új koordinátarendszerben a forgási pólus ξ, η koordinátái a

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{2\pi}{T}(\eta - \psi)$$

(4.1)

$$\frac{d\eta}{dt} = -\frac{2\pi}{T}(\xi - \varphi)$$

egyenletrendszernek tennének eleget, melynek megoldásai nagy „kilengéseket" is kell hogy mutassanak — amit a valóságban nem tapasztaltak —, még figyelembe kell venni a föld rugalmasságát is, ami a T periódus meghosszabbodását eredményezi ugyan, de nagy „kilengések" nem válnak lehetségessé. A rugalmasság figyelembe vételével a (4.1) rendszer helyett a

$$\begin{aligned} \frac{d\xi(t)}{dt} &= a\eta + b\xi + \sum_k a_{1k}\cos(\lambda_k t + \theta_{1k}) + \Delta_1(t) \\ \frac{d\eta(t)}{dt} &= -a\xi + b\eta + \sum_k a_{2k}\cos(\lambda_k t + \theta_{2k}) + \Delta_2(t) \end{aligned} \tag{4.2}$$

egyenleteket kapjuk, melyeknek viselkedésével éppen az előző pontokban foglalkoztunk.

A (4.2) egyenlettel kapcsolatban elmondottak természetesen mutatják, hogy az (1.1) egyenletben szereplő $\varepsilon_1(t)$, $\varepsilon_2(t)$ folyamatokról feltételezni, hogy azok *Wiener*-folyamatok, a Föld pólusai mozgásának vizsgálatánál csak első közelítés és durva idealizálás. Azonban ORLOV [13] adatai azt mutatják, hogy a

$$\xi' = -\lambda\xi - \omega\eta + f, \quad \eta' = \omega\xi - \lambda\eta + g$$

feltételezéssel élve az $f(t)$ és $g(t)$ távoli értékei függetlenek, így helyettesítésük megfelelő „fehér zajokkal" törvényes. Úgy tűnik, hogy ezen ekvivalens $\varepsilon_i(t)$ $(i=1,2)$ „fehér zajok" intenzitásának meghatározásában levő hiba elég kicsiny ahhoz, hogy ne legyen hatással a λ paraméter becslésére. Egy olyan elmélet kidolgozása azonban, mely ennek az állításnak pontos matematikai megfogalmazását adná, nincs meg, bár igen hasznos lenne.

Hatvan év adatainak feldolgozása alapján a következő eredmények adódtak

$$\hat{\omega} = 5{,}274; \quad \hat{\varkappa} = 3{,}6, \quad 2\pi : \hat{\omega} = 1{,}191, \quad \sigma(2\pi : \hat{\omega}) = 0{,}006$$ [3]

A (3.25) aszimptotikus formula szerint

$$\sigma^2(\hat{\varkappa}) = 3{,}6$$

és $\alpha < 0{,}03$ szint esetén $\varkappa$ negatív alsó becslést kapnánk — ami lehetetlen — tehát a normális eloszlással való közelítés még egyáltalán nem megfelelő.

IRODALOM

[1] ARATÓ, M: Folytonos állapotú Markov-folyamatok statisztikai vizsgálatáról, I., *M. T. A. III. Oszt. Közleményei* **14** (1964) 13—24.

[2] ———, Folytonos állapotú Markov-folyamatok statisztikai vizsgálatáról, II., *M T. A. III. Oszt. Közleményei* **14** (1964) 135—157.

[3] Арато, М.: Некоторые статистические вопросы стационарных гауссовских марковских процессов *Disszertáció*, Moszkva, Állami Egyetem, 1962.

[3] A λ és ω paraméterek becslése megtalálható pl. [10]-ben is, ahol $\lambda = {}^1/_{15}$ és $2\pi{:}\omega = 1{,}193$ értékek adódtak. Ehhez közeli értékeket kapott még 1942-ben JEFFREYS [9], azonban a [12] és [15] dolgozatokban ettől lényegesen eltérő $\lambda = 0{,}3$ és $\lambda = 0{,}01$ értékeket kaptak. Ezen eltérés okaira mutat rá jelen dolgozat 3. pontja (vö. az ott szereplő $\varkappa$ alsó és felső becslésekkel (3.23)).

[4] Арато, М. — Колмогоров, А. Н. — Синай, Я. Т.: Об оценке параметров комплексного стационарного гауссовского процесса, ДАН **146** (1962) 747-750.
[5] Арато, М. — Рыкова, Л. — Синай, Я. Т.: До верительные границы для коэффициента затухания комплексного стационарного гауссовсного марковского процесса. Теория вероятн. и ее прим (sajtó alatt).
[6] Диткин — Кузнецов: Справочник
[7] Дынкин Е. Б.: Функционалы от траекторий марковских случайных процессов, ДАН **104** (1955) 691-693.
[8] Федоров Е. П.: Тр. Полтавск. гравиметрич. общ 2,3 (1948)
[9] Jeffreys, H.: *Monthly Not. Roy. Astr. Soc. Geophys. Suppl.* **100**, 139 (1942)
[10] Munk, W. H.—Macdonald, G. J. P.: *The Rotation of the Earth*, Cambridge Monographs on Mechanics and Applied Math., 1960.
[11] Орлов А. Ч.: Служба широты, Изд. А. Н. СССР, 1958
[12] Панченко: Тр. 14 Астрономич. Конф. СССР, Изд. А. Н. СССР, 1960, 232.
[13] Степанов В. В.: Курс дифференциальных уравнений, Москва, 1959.
[14] Striebel, Ch. T: Densities for Stochastic Processes, *Annals of Math. Stat.* **30** (1959) 559—567.
[15] Walker, A. M.,—Young, A.: The analysis of the observations of the variation of latitude. *Monthly notices. Roy. Astr. Soc. Geophys. Suppl.*. **115** (1955) 443, **114** (1957) 119.

(Beérkezett: 1964. VI. 15.)

A KÜLFÖLDI SZAKIRODALOMBÓL

VÉGES DIRICHLET-INTEGRÁLLAL RENDELKEZŐ FÜGGVÉNYEKRŐL, (II)*

Írta: LUCIANO DE VITO

3. § A $\mathfrak{T}(\Sigma)$ függvényeire vonatkozó szükséges és elegendő feltételek

Idézünk néhány tételt, melyekre ebben a paragrafusban szükségünk lesz. Azokat az eredményeket, melyeket ebben a részben fogunk kimondani — azon feltétel mellett, hogy Σ 2-osztálybeli —, be lehetne bizonyítani akkor is, ha csupán annyit tennénk fel, hogy Σ HÖLDER-folytonos érintő-hipersíkkal rendelkezik.

I. *Legyen A az S_n euklideszi tér egy 2-osztálybeli tartománya, Σ ennek határa és $f(y)$ egy $\mathfrak{T}(\Sigma)$-hoz tartozó függvény.*

Akkor az az A-ban harmonikus és a $\mathfrak{H}(A)$ osztályhoz tartozó $u(x)$ függvény, melynek Σ-n vett nyoma f, a következőképp fejezhető ki:

$$u(x)=\frac{1}{(n-2)\omega_n}\int_{\Sigma} f(y)\frac{\partial}{\partial \nu_y}\frac{1}{|x-y|^{n-2}}\,d_y\sigma+ \tag{1}$$

$$+\frac{1}{(n-2)\omega_n}\int_{A} \operatorname{grad} u(y)\times \operatorname{grad}_y\frac{1}{|x-y|^{n-2}}\,dy,$$

ahol

$$\omega_n=\frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.\ ^{43a}$$

Valóban, megtartva az 1. §-ban bevezetett ϱ_0 és A_ϱ jelöléseket, minden olyan ϱ-ra, melyre $0<\varrho\leqq\varrho_0$, és minden $x\in A_\varrho$ pontra, mint ismeretes, fennáll a következő:

$$u(x)=\frac{1}{(n-2)\omega_n}\int_{\mathcal{F}A_\varrho} u(y)\frac{\partial}{\partial \nu_y}\frac{1}{|x-y|^{n-2}}\,d_y\sigma+$$

$$+\frac{1}{(n-2)\omega_n}\int_{A_\varrho} \operatorname{grad} u(y)\times \operatorname{grad}_y\frac{1}{|x-y|^{n-2}}\,dy.$$

* Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa; Serie III. Vol. XII. Fasc. I—II (1958), 55—127. A fordítás (I) része, amely az eredeti cikk 1—2. §-át, és a teljes irodalomjegyzéket tartalmazza, jelen folyóirat XIV/2. számában jelent meg (193—223. o.).

[43a] Ha $n=2$, akkor az (1)-ben $\frac{1}{(n-2)\omega_n}$ helyett $\frac{1}{2\pi}$ és $\frac{1}{|x-y|^{n-2}}$ helyett $\log\frac{1}{|x-y|}$ írandó. $n=2$ esetén analóg helyettesítéseket kell elvégezni az egész itt következő részben, de rövidség kedvéért ezt mellőzni fogjuk.

Határértékre térve át, midőn ϱ zérushoz tart, és felhasználva $u(y)$-nak ϱ-ra vonatkozó egyenletes integrálhatóságát $\mathcal{F}A_\varrho$-n [43b], az (1)-t kapjuk.

II. *Legyen A 2-osztálybeli tartomány és Σ a határa. Ha $f(y)$ Σ-n definiált és ott integrálható függvény, akkor $f(y)\frac{\partial}{\partial \nu_y}\frac{1}{|y-\xi|^{n-2}}$, mint y függvénye, Σ majdnem minden ξ pontjára integrálható Σ-n. Az $u_1(x)=\int_\Sigma f(y)\frac{\partial}{\partial \nu_y}\frac{1}{|y-x|^{n-2}}d_y\sigma$ függvény integrálható Σ-n, és ha $f(y)$ folytonos, akkor egyenletes Hölder-feltételnek tesz eleget tetszésszerinti 1-nél kisebb kitevővel.*

Továbbá az $u_1(x)$ függvény Σ-n vett $f_1(\xi)$ nyoma létezik, és a következőképpen fejezhető ki (lásd: FICHERA [13] és MIRANDA [31], 33. oldal):

$$f_1(\xi)=\frac{n-2}{2}\omega_n f(\xi)+\int_\Sigma f(y)\frac{\partial}{\partial \nu_y}\frac{1}{|\xi-y|^{n-2}}d_y\sigma. \tag{2}$$

$A(\Sigma)$-val fogjuk jelölni a Σ-n definiált és ott integrálható azon $f(y)$ függvények osztályát, melyekre $u_1(x)=\int_\Sigma f(y)\frac{\partial}{\partial \nu_y}\frac{1}{|x-y|^{n-2}}d_y\sigma$ $\mathcal{K}(A)$-hoz tartozik.

III. *Legyen Σ az S_n valamely 2-osztálybeli A tartományának a határa. Σ minden y pontjára és minden $x\neq y$ pontra legyen $\frac{\partial}{\partial \nu_y}\frac{1}{|x-y|^{n-2}}=H_0(x,y)$,* és

$$H_m(x,y)=H_{m-1}*H_0=\int_\Sigma H_{m-1}(x,\xi)H_0(y,\xi)d_\xi\sigma.$$

Akkor a $H_{n-1}(x,y)$ függvény, midőn x és y Σ-n változik, folytonos.

Valóban, mint az a Σ-ra kirótt feltételek felhasználásával igazolható, Σ minden x, y $(x\neq y)$ pontjára teljesül a következő:

$$\left|\frac{\partial}{\partial \nu_y}\frac{1}{|x-y|^{n-2}}\right|\leqq M_0\frac{1}{|x-y|^{n-2}},$$

ahol M_0 pozitív állandó.

Ekkor, egy iterált magokra vonatkozó ismert tétel értelmében,

$$|H_1(x,y)|\leqq M_1\frac{1}{|x-y|^{n-3}},\quad |H_2(x,y)|\leqq M_2\frac{1}{|x-y|^{n-4}},\ \ldots,$$

$$|H_{n-3}(x,y)|\leqq M_{n-3}\frac{1}{|x-y|},\quad |H_{n-2}(x,y)|\leqq M_{n-2}\log\frac{2\delta}{|x-y|}$$

(ahol δ az A átmérője), és ezenkívül $H_{n-1}(x,y)$ folytonos.

[43b] Lásd az 1. § [7] lábjegyzetét.

Ebből a tételből az alábbi tétel következik:

IV. *Ha Σ egy 2-osztálybeli tartomány határa és $\varphi(x)$ Σ-n integrálható függvény, akkor a*

$$\varphi_{n-1}(x)=\varphi * H_{n-1}=\int_{\Sigma}\varphi(y)H_{n-1}(x,y)d_y\sigma$$

kompozíció-szorzat Σ-n folytonos.

Bebizonyítjuk a következő tételt:

V. *Legyen Σ egy 2-osztálybeli A tartomány határa, és $f(y)$ egy Σ-n definiált függvény. Ha $f(y)$ $A(\Sigma)$-hoz tartozik, akkor az*

$$u_1(y)=\int_{\Sigma}f(\xi)\frac{\partial}{\partial\nu_\xi}\frac{1}{|y-\xi|^{n-2}}d_\xi\sigma$$

*függvény is oda tartozik.**

Az

$$u_1(x)=\int_{\Sigma}f(y)\frac{\partial}{\partial\nu_y}\frac{1}{|x-y|^{n-2}}d_y\sigma$$

függvény harmonikus A-ban és a feltételek szerint $\mathcal{H}(A)$-hoz tartozik. Ekkor, $f_1(y)$-nal jelölve Σ-n vett nyomát, (1) értelmében A minden x pontjában fennáll a következő:

$$u_1(x)=\frac{1}{(n-2)\omega_n}\int_{\Sigma}f_1(y)\frac{\partial}{\partial\nu_y}\frac{1}{|x-y|^{n-2}}d_y\sigma+$$

(3) $$+\frac{1}{(n-2)\omega_n}\int_{A}\operatorname{grad}u_1(y)\times\operatorname{grad}_y\frac{1}{|x-y|^{n-2}}dy.$$

(2) alapján Σ majdnem minden y pontjában

(4) $$f_1(y)=\frac{(n-2)\omega_n}{2}f(y)+u_1(y).$$

Jelöljük u_2-vel az u_1 momentumú kettősréteg-potenciált:

$$u_2(x)=\int_{\Sigma}u_1(y)\frac{\partial}{\partial\nu_y}\frac{1}{|x-y|^{n-2}}d_y\sigma.$$

Legyen

$$\int_{A}\operatorname{grad}u_1(y)\times\operatorname{grad}_y\frac{1}{|x-y|^{n-2}}dy=\psi_1(x);$$

* A jelen dolgozat kefelevonatának javítása közben vettem észre, hogy az V. tételt STAMPACCHIA professzor már explicit alakban kimondta (lásd: G. STAMPACCHIA: „Sistemi di equazioni di tipo ellittico a derivate parziali del primo ordine e proprietà delle estremali degli integrali multipli", *Ricerche di Mathematica*, 1 (1952), 206. oldal). Ezenkívül azokkal a meggondolásokkal analóg gondolatmenetek, melyeket a VI. tétel bizonyításánál használok, megtalálhatók ezen szerző idézett művében, ahol azonban az enyéimtől különböző célokra használja fel őket. *(A szerző.)*

ekkor a (3) és a (4) értelmében A minden x pontjában fennáll a következő:

(5)
$$\frac{1}{2}u_1(x)=\frac{1}{(n-2)\omega_n}[u_2(x)+\psi_1(x)].$$

A

$$\psi_1(x)=-\int_A \operatorname{grad} u_1(y)\times \operatorname{grad}_x \frac{1}{|x-y|^{n-2}}dy$$

függvény a LICHTENSTEIN—FRIEDRICHS-tétel (lásd: FRIEDRICHS [20] és LICHTENSTEIN [29]) értelmében a $\mathcal{H}(A)$ osztályhoz tartozik; ekkor az (5)-ből következik, hogy $u_2(x)$ is a $\mathcal{H}(A)$-hoz tartozik. Ebből adódik, hogy $u_1 \in \Lambda(\Sigma)$.

Most bebizonyíthatjuk a következő tételt, mely a már jelzett szükséges és elegendő feltételek közül az elsőt szolgáltatja:

VI. *Ha A 2-osztálybeli, $(n-1)$-dimenziósan egyszeresen összefüggő* tartomány és Σ a határa, akkor a $\mathcal{F}(\Sigma)$ és a $\Lambda(\Sigma)$ függvényosztályok azonosak.*

Ez annyit jelent, hogy annak szükséges és elegendő feltétele, hogy egy Σ-n definiált és ott integrálható f függvény egy $\mathcal{H}(A)$ osztálybeli függvény Σ-n vett nyoma legyen, az, hogy az f momentumú

$$u_1(x)=\int_\Sigma f(y)\frac{\partial}{\partial \nu_y}\frac{1}{|x-y|^{n-2}}\,d_y\sigma$$

kettősréteg-potenciál a $\mathcal{H}(A)$-hoz tartozzék.[44]

Bebizonyítjuk a feltétel szükségességét.

Ha $f(y)$ $\mathcal{F}(\Sigma)$-hoz tartozik, akkor, mint arra az 1. §-ban emlékeztettünk, létezik egy $\mathcal{H}(A)$-hoz tartozó, A-ban harmonikus $u(x)$ függvény, melynek Σ-n vett nyoma az f függvény. Bevezetve az

$$\int_A \operatorname{grad} u(y)\times \operatorname{grad}_y \frac{1}{|x-y|^{n-2}}dy=\psi(x)$$

jelölést, az (1) értelmében az A minden x pontjára fennáll a következő:

(6)
$$u(x)=\frac{1}{(n-2)\omega_n}[u_1(x)+\psi(x)].$$

* Az n-dimenziós tér valamely A tartományát $(n-1)$-dimenziósan egyszeresen összefüggőnek nevezzük, ha minden olyan korlátos tartomány, melynek határa A-ban van, maga is A-ban helyezkedik el. *(A fordító.)*

[44] Ez a tétel egy LJAPUNOV által felvetett problémakörbe tartozik; LJAPUNOV bebizonyította (lásd [28]), hogy annak szükséges és elegendő feltétele, hogy a LAPLACE-egyenletre vonatkozó DIRICHLET-probléma megoldásának normálismenti deriváltja létezzék és folytonos legyen, az, hogy annak a kettősrétegnek a potenciálja, melynek momentuma az adott (folytonosnak feltételezett) peremérték, folytonos normálismenti deriválttal rendelkezzék. Ugyanebbe a problémakörbe tartozik AMERIO egy eredménye is (lásd [1]), mely szerint annak szükséges és elégséges feltétele, hogy a $\Delta_2 u-ku=0$ egyenletre vonatkozó DIRICHLET-probléma rendelkezzék azon függvények osztályába tartozó megoldással, melyekre érvényes a GREEN-formulák megfordítási tétele (abban az esetben, ha k nem sajátérték), az, hogy az adott peremértékkel, mint momentummal rendelkező kettősréteg-potenciál ezen osztályhoz tartozzék.

A LICHTENSTEIN—FRIEDRICHS-tétel értelmében a

$$\psi(x) = -\int_A \operatorname{grad} u(y) \times \operatorname{grad}_x \frac{1}{|x-y|^{n-2}} dy$$

függvény $\mathcal{H}(A)$-hoz tartozik. Mivel $u(x)$ $\mathcal{H}(A)$-hoz tartozik, (6)-ból következik, hogy $u_1(x)$ is ezen osztályban van. Ebből következik, hogy f $\Lambda(\Sigma)$-hoz tartozik.[45]

Most bebizonyítjuk az elégségességet.

Legyen $f(y)$ a $\Lambda(\Sigma)$ osztály egy függvénye. Minthogy f Σ-n integrálható, létezik olyan, integrálható momentumú kettősréteg pontenciálja alakjában előállított, A-ban harmonikus $u(x)$ függvény, melynek Σ-n vett nyoma $f(x)$.[46] Ha $\mu(y)$-nal jelöljük az u kettősréteg-pontenciál momentumát szolgáltató integrálható függvényt, akkor ahhoz, hogy állításunkat igazoljuk, meg kell mutatnunk, hogy $\mu(y)$ $\Lambda(\Sigma)$-hoz tartozik. (2) értelmében Σ majdnem minden x pontjában fennáll a következő:

$$f(x) = \frac{n-2}{2}\omega_n \mu(x) + \int_\Sigma \mu(y) \frac{\partial}{\partial \nu_y} \frac{1}{|x-y|^{n-2}} dy. \tag{7}$$

Σ minden x, y $(x \neq y)$ pontpárjára bevezetve a

$$\frac{\partial}{\partial \nu_y} \frac{1}{|x-y|^{n-2}} = H(x, y),$$

$$u_1(x) = f * H = \int_\Sigma f(y) H(x, y) d_y\sigma, \quad u_m(x) = u_{m-1} * H = \int_\Sigma u_{m-1}(y) H(x, y) d_y\sigma,$$

$$\mu_1(x) = \mu * H = \int_\Sigma \mu(y) H(x, y) d_y\sigma,$$

$$\mu_m(x) = \mu_{m-1} * H = \int_\Sigma \mu_{m-1}(y) H(x, y) d_y\sigma$$

jelöléseket, (7) az

$$f(x) = \frac{n-2}{2}\omega_n \mu(x) + \mu_1(x)$$

alakban írható fel, és innen, a $H(x, y)$ maggal m egymásutáni kompozíció-szorzatot képezve,

$$u_m(x) = \frac{n-2}{2}\omega_n \mu_m(x) + \mu_{m+1}(x) \tag{7m}$$

adódik, ami majdnem minden x-re teljesül Σ-n.

[45] Figyeljük meg, hogy a feltétel szükségességének bizonyításához nem használtuk ki, hogy A $(n-1)$-dimenziósan egyszeresen összefüggő tartomány.

[46] Lásd: FICHERA [15]. Az A egyszeres összefüggőségére vonatkozó feltétel ezen eredmény felhasználhatóságában jut szerephez.

Mivel az integrálások sorrendjének felcserélésével azt kapjuk, hogy $\mu_m(x) = \mu * H_m$,[47] a IV. tételből következik $\mu_{n-1}(x)$ Σ-n való folytonossága; ekkor a II. tétel értelmében a $\mu_n(x)$ függvény egyenletes HÖLDER-feltételnek tesz eleget, tetszés szerinti 1-nél kisebb kitevővel. Ennélfogva $\mathfrak{T}(\Sigma)$-hoz tartozik,[48] és így, mint azt bebizonyítottuk, beletartozik a $\Lambda(\Sigma)$ osztályba. Másrészről, az előző tétel értelmében, f $\Lambda(\Sigma)$-hoz való tartozásából következik, hogy u_1 is ezen osztályhoz tartozik. Ily módon általánosan adódik, hogy u_m $\Lambda(\Sigma)$-hoz tartozik. Ez lehetővé teszi, felhasználva a $(7_{n-2}), \ldots, (7_1)$, (7) relációkat, hogy levonjuk a végső megállapítást, mely szerint μ $\Lambda(\Sigma)$-ban van.

Így a tételt teljesen bebizonyítottuk.

Most bebizonyítjuk a következőt:

VII. *Legyen A 2-osztálybeli, $(n-1)$-dimenziósan egyszeresen összefüggő tartomány, Σ a határa és $\mu(y)$ egy Σ-n integrálható függvény. Akkor annak szükséges és elegendő feltétele, hogy a μ momentumú*

$$\varphi(x) = \int_{\Sigma} \mu(y) \frac{\partial}{\partial \nu_y} \frac{1}{|x-y|^{n-2}} d_y\sigma$$

kettősréteg-pontenciál $\mathfrak{H}(A)$-hoz tartozzék, az, hogy Σ-n vett nyoma $\mathfrak{T}(\Sigma)$-hoz tartozik.

Csupán az elégségességet kell bebizonyítani. Jelöljük $\varphi^*(y)$-nal φ Σ-n vett nyomát (ennek létezését a II. tétel biztosítja). Mivel feltétel szerint $\varphi^*(y)$ $\mathfrak{T}(\Sigma)$-hoz tartozik, az 1. § VI. tétele értelmében létezik egy $\mathfrak{H}(A)$-hoz tartozó, A-ban harmonikus $u(x)$ függvény, melynek Σ-n vett nyoma a $\varphi^*(y)$ függvény. Az 1. § IV. tétele értelmében

$$\lim_{\varrho \to 0} \int_{\mathfrak{F}A_\varrho} |u[y+\varrho\nu(y)] - \varphi^*(y)|^2 d\sigma = 0. \tag{8}$$

Másrészről csupán egyetlen, (8)-nak eleget tevő és A-ban harmonikus függvény létezik csak (lásd CIMMINO [5]), és ez a φ kettősréteg-pontenciállal azonos (lásd MAGENES [30]). Így bebizonyítottuk, hogy φ $\mathfrak{H}(A)$-hoz tartozik.

A következő tétel egyesíti az f $\mathfrak{T}(\Sigma)$-hoz való tartozására vonatkozó azon szükséges és elegendő feltételeket, melyeket ebben a paragrafusban kaptunk.

VIII. *Legyen A 2-osztálybeli, $n-1$-dimenziósan egyszeresen összefüggő tartomány, Σ a határa, $f(y)$ egy Σ-n integrálható függvény, $f_1(y)$ az f-momentumú*

$$u_1(x) = \int_{\Sigma} f(y) \frac{\partial}{\partial \nu_y} \frac{1}{|x-y|^{n-2}} d_y\sigma$$

kettősréteg-pontenciál Σ-n vett nyoma. Akkor a következő három körülmény bármelyikének fennállása maga után vonja a másik kettő fennállását:

1. $f \in \mathfrak{T}(\Sigma)$, 2. $f \in \Lambda(\Sigma)$, 3. $f_1 \in \mathfrak{T}(\Sigma)$.

[47] Az integrálok sorrendjének ezen felcserélései megengedettek; lásd [31], 23. oldal.

[48] Lásd: MIRANDA [32], I. tétel. Az a feltétel, hogy A 2-osztálybeli, egyebek között ezen tétel alkalmazhatóságában jut szerephez. $\mu_{n-1}(x)$ $\mathfrak{T}(\Sigma)$-hoz való tartozását anélkül is be lehetne bizonyítani, hogy ezen tételhez folyamodnánk; akkor elegendő lenne az a feltétel, hogy Σ HÖLDER-folytonosan változó érintő-hipersíkkal rendelkezik.

4. §. A mértékelméletre és a többváltozós valós függvényekre vonatkozó definíciók és eredmények

Jelölje S_n az n-dimenziós euklideszi teret és $x \equiv (x_1, \ldots, x_n)$ az S_n pontjait; S_n *felülről nyílt intervallumának*, vagy röviden *intervallumának* fogunk nevezni minden, az alábbi módon definiált halmazt:

$$a_k \leqq x_k < b_k \qquad (k = 1, \ldots, n),$$

ahol a_k és b_k az $a_k < b_k$ feltételnek elegettevő valós számok. Egy ilyen halmazt I-vel fogunk jelölni; ha H-val S_n egy tartományát jelöljük, akkor $\{I\}_H$-val fogjuk jelölni azon I intervallumok családját, melyek lezártjukkal együtt H-ban vannak, és $\{B\}_H$ a S_n azon korlátos Borel-halmazainak családját jelöli majd, melyek lezártjukkal együtt H-ban helyezkednek el. Legyen $\{C\}$ a S_n egy tetszés szerinti halmaz-családja és $F(C)$ a C halmaz egy valós, $\{C\}$-ben értelmezett függvénye.

Azt fogjuk mondani, hogy az $F(C)$ függvény *additív* $\{C\}$-n, ha a $\{C\}$ tetszés szerinti C halmazának minden, véges számú és páronként diszjunkt $\{C\}$-beli $C_1, \ldots, C_m$ halmazra történő $C = \bigcup_{h=1}^{m} C_h$ felbontására fennáll a következő: $F(C) = \sum_{h=1}^{m} F(C_h)$; azt mondjuk, hogy $F(C)$ *teljesen additív* $\{C\}$-n, ha a $\{C\}$ tetszés szerinti C halmazának minden, véges számú vagy megszámlálhatóan végtelen sok diszjunkt $\{C\}$-beli $C_1, C_2, \ldots$ halmazra való $C = \bigcup_h C_h$ felbontására $F(C) = \sum_h F(C_h)$. Valamely $F(C)$ függvényt *korlátos variációjúnak* fogunk nevezni $\{C\}$-n, ha tetszés szerint rögzítve $\{C\}$-ben a C halmazt, és δ_c-vel jelölve a C egy tetszés szerinti, véges számú vagy megszámlálhatóan végtelen sok diszjunkt $\{C\}$-beli halmazra történő $C = \bigcup_h C_h$ felbontását, a $\sigma(\delta_c) = \sum_h |F(C_h)|$ mennyiség véges felső határral bír, midőn δ_c szabadon változik. Ezt a felső határt F C-n vett *teljes variációjának* nevezzük és a $V_F(C)$ jellel jelöljük. Ha $F(B)$ egy $\{B\}_H$-n definiált *mérték*, vagyis egy $\{B\}_H$-n teljesen additív és korlátos variációjú függvény, akkor $V_F(B)$ is mérték. Ha $F(I)$ az $\{I\}_H$ családon értelmezett mérték, akkor létezik egy és csak egy olyan, $\{B\}_H$-n definiált, $F(B)$ mérték, mely az $\{I\}_H$ intervallumain $F(I)$-vel azonos; ezenkívül a $V_F(B)$ teljes variáció az $\{I\}_H$ I halmazain $F(I)$ teljes variációjával azonos. Ha φ a $\{B\}_H$ egy B halmazán definiált, ott korlátos és az F mértékre vonatkozóan mérhető pontfüggvény, akkor az $\int_B \varphi dF$ illetve $\int_B \varphi dV_F$ szimbólumokkal a φ B-re kiterjesztett, az F illetve a V_F mértékre vonatkozó Stieltjes- integrálját fogjuk jelölni. Teljesül a következő:

$$\left| \int_B \varphi dF \right| \leqq \int_B |\varphi| dV_F.$$

Legyen $f(x)$ az S_n valamely H tartományában folytonos függvény. $\{I\}_H$ minden I halmazára bevezetjük az $F_k(I) = \int_{\mathscr{F}I} f v_k d\sigma$ $(k = 1, \ldots, n)$ jelölést, ahol $\mathscr{F}I$ az I határát jelöli és v_k az $\mathscr{F}I$ külső normálisa egységvektorának x_k komponense. Az $f(x)$ függvényt *korlátos variációjúnak* nevezzük H-ban, ha az I n darab $F_1(I), \ldots, F_n(I)$

függvénye korlátos variációjú $\{I\}_H$-n (lásd: FICHERA [18], 428. o.); $f(x)$-t korlátos variációjúnak mondjuk az I_0 intervallumban, mely lezártjával együtt H-ban van, ha az említett intervallum-függvények korlátos variációjúak az I_0-ban levő I intervallumok családjában.

Az $F_k(I)$ függvények nyilvánvalóan additívak, de könnyű belátni, hogy teljesen additívak is $\{I\}_H$-n. Ehhez elegendő arra emlékeztetni, hogy ha $F(I)$ $\{I\}_H$-n additív és korlátos variációjú függvény, akkor $\{B\}_H$-n lehet definiálni olyan $\Phi(B)$ mértéket, mely a következő tulajdonsággal bír: ha I egy $\{I\}_H$-beli intervallum lezártja, vagyis egy $a_k \leqq x_k \leqq b_k$ $(a_k < b_k)$ típusú feltétellel definiált halmaz, akkor, I_m-mel jelölve az $a_k - 1/m \leqq x_k < b_k + 1/m$ feltételekkel definiált intervallumot, $\lim_{m\to\infty} F(I_m) = \Phi(\bar{I})$ (lásd: FICHERA, [18], 299. és azt követő oldalak).

Minthogy I'_m-mel jelölve az

$$a_k \leqq x_k \leqq b_k - 1/m \qquad (1/m < b_k - a_k)$$

feltétellel definiált halmazt, teljesül a következő:

$$\lim_{m\to\infty} \Phi(I'_m) = \Phi(I),$$

és minthogy

$$\lim_{m\to\infty} \int_{\mathscr{F} I_m} f v_k d\sigma = \int_{\mathscr{F} \bar{I}} f v_k d\sigma,$$

$$\lim_{m\to\infty} \int_{\mathscr{F} I'_m} f v_k d\sigma = \int_{\mathscr{F} I} f v_k d\sigma = F_k(I)\ [49],$$

ezért $F_k(I)$ az $\{I\}_H$ minden I intervallumán egy $\{B\}_H$-n definiált mértékkel azonos. Ebből következik, hogy $F_k(I)$ teljesen additív és korlátos variációjú $\{I\}_H$-n. $F_k(B)$-vel fogjuk jelölni azt a $\{B\}_H$-n definiált mértéket, mely az $\{I\}_H$ minden I intervallumán $F_k(I)$-vel azonos. Ezeket az $F_1(B), \ldots, F_n(B)$ mértékeket a *folytonos és korlátos variációjú f függvény által generált mértékeknek* fogjuk nevezni.

Az $n=1$ esetben a korlátos variációjú függvény imént adott definíciója nyilvánvalóan azonos az egy valós változójú függvényekre vonatkozó közönséges definícióval; ekkor, ha f folytonos, az f által generált mérték a valós tengely minden intervallumán az f megfelelő növekményének értékét veszi fel. Ebben az esetben egy korlátos és ezen mértékre vonatkozólag mérhető φ függvény STIELTJES-integráljára az $\int_I \varphi df$ jelölést is használni fogjuk.

Most megmutatjuk, hogy $n>1$ esetén a korlátos variációjú függvény ezen definíciója ekvivalens a TONELLI által adott definícióval ($n=2$ esetére lásd: FICHERA [18], 433. o.). Mint ismeretes, egy $a_k \leqq x_k < b_k$ $(k=1, \ldots, n)$ feltétellel definiált I intervallum lezártján folytonos f függvényt TONELLI *szerint korlátos variációjúnak* nevezünk, ha teljesülnek a következő feltételek: rögzítvén majdnem bárhol egy $(x_1, \ldots, x_{h-1}, x_{h+1}, \ldots, x_n)$ pontot az $a_k \leqq x_k < b_k$ $(k=1, \ldots, h-1, h+1, \ldots, n)$ feltétellel definiált I_h intervallumban, $f(x_1, \ldots, x_h, \ldots, x_n)$, mint x_h függvénye, korlátos variációjú az (a_h, b_h) zárt intervallumban, és x_h ezen függvényének teljes variációját

[49] Ezen határérték- relációk fennállása az f folytonosságának közvetlen folyománya.

$V_h(x_1, \ldots, x_{h-1}, x_{h+1}, \ldots, x_n)$-nel jelölve, a $V_h(x_1, \ldots, x_{h-1}, x_{h+1}, \ldots, x_n)$ függvény, mely I_h-ban mérhető,[50] I_h-ban integrálható.

Ezenfelül valamely H tartományban folytonos $f(x)$ függvény H-ban TONELLI szerint korlátos variációjú, ha korlátos variációjú $\{I\}_H$ minden I intervallumában.

Először tegyük fel, hogy a folytonos f függvény TONELLI szerint korlátos variációjú, és bebizonyítjuk, hogy

$$F_h(I) = \int_{\mathcal{F}I} f v_h d\sigma = \int_{+\mathcal{F}I} f dx_1 \ldots dx_{h-1} dx_{h+1} \ldots dx_n$$

korlátos variációjú.

Jelentse δ_I az I intervallumnak tetszés szerinti, véges számú, páronként diszjunkt intervallumokra való $I = \bigcup_{i=1}^{p} I_i$ felbontását; legyen $\sigma_h(\delta_I) = \sum_{i=1}^{p} |F_h(I_i)|$.

Minthogy létezik az I-nek olyan, koordináta-hipersíkok szolgáltatta δ_I' felbontása, melyre $\sigma_h(\delta_I) \leqq \sigma_h(\delta_I')$, ezért szorítkozhatunk csupán ezen utóbbi típusú felbontások vizsgálatára. Egy ilyen δ_I felbontás az I_h-nak $I_{h,r}$ $(r = 1, \ldots, r_h)$ intervallumokra történő felbontását határozza meg. Ekkor, feltéve, hogy az

$$a_k = a_1^{(k)} < a_2^{(k)} < \ldots < a_{i_k}^{(k)} = b_k$$

pontok azok, melyek az (a_k, b_k) felbontását szolgáltatják, teljesül a következő:

$$\sigma_h(\delta_I) = \sum_{r=1}^{r_h} \sum_{i=1}^{i_h-1} \Bigg| \int_{I_{h,r}} [f(x, \ldots, a_{i+1}^{(h)}, \ldots, x_n) -$$

$$- f(x_1, \ldots, a_i^{(h)}, \ldots, x_n)]\, dx_1 \ldots dx_{h-1}\, dx_{h+1} \ldots dx_n \Bigg| \leqq$$

$$\leqq \int_{I_h} \sum_{i=1}^{i_h-1} |f(x_1, \ldots, a_{i+1}^{(h)}, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, a_i^{(h)}, \ldots, x_n)|\, dx_1 \ldots dx_{h-1}\, dx_{h+1} \ldots dx_n \leqq$$

$$\leqq \int_{I_h} V_h(x_1, \ldots, x_{h-1}, x_{h+1}, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_{h-1}\, dx_{h+1} \ldots dx_h.$$

Ily módon bebizonyítottuk, hogy $F_h(I)$ $(h = 1, \ldots, n)$ korlátos variációjú.

Most bebizonyítjuk, hogy ha teljesül az utóbbi körülmény, akkor az f függvény TONELLI szerint korlátos variációjú.

Legyen $\xi \equiv (\xi_1, \ldots, \xi_{h-1}, \xi_{h+1}, \ldots, \xi_n)$ az $a_k \leqq x_k < b_k$ $(k = 1, \ldots, h-1, h+1, \ldots, n)$ feltétellel definiált I_h intervallum egy belső pontja, és legyen τ a ξ $\mathcal{F}I_h$-tól való távol-

[50] Valóban, igaz a következő tétel: Ha $u(x_1, \ldots, x_n)$ folytonos függvény az $a_k \leqq x_k < b_k$ feltétellel definiált I intervallumban, és ha az $a_k \leqq x_k < b_k$ $(k = 1, \ldots, h-1, h+1, \ldots, n)$ feltétellel definiált I_h intervallumban majdnem bárhol rögzítve az $(x_1, \ldots, x_{h-1}, x_{h+1}, \ldots, x_n)$ pontot, $u(x_1, \ldots, x_h, \ldots, x_n)$ mint x_h függvénye (a_h, b_h)-ban korlátos variációjú, akkor $V_h(x_1, \ldots, x_{h-1}, x_{h+1}, \ldots, x_n)$-nel jelölve teljes variációját, és minden olyan pontban, melyre u x_h-nak nem korlátos variációjú függvénye, V_h-t a $V_h(x_1, \ldots, x_{h-1}, x_{h+1}, \ldots, x_n) = 0$ feltétellel definiálva, $V_h(x_1, \ldots, x_{h-1}, x_{h+1}, \ldots, x_n)$ I_h-ban mérhető függvény. Lásd: [18], 430. oldal, ahol ez a tétel az $n=2$ esetre be van bizonyítva; ez a bizonyítás csaknem változatlanul érvényes marad az $n-2$ esetben is.

ságánál kisebb pozitív szám. Jelöljük $I_{\tau,\xi}$-vel a következő feltételekkel definiált intervallumot:

$$\xi_k - \tau \leqq x_k < \xi_k + \tau \quad (k = 1, \ldots, h-1, h+1, \ldots, n), \quad a_h \leqq x_h < b_h,$$

és $I_{\tau,\xi}^{(h)}$-val fogjuk jelölni az ezen feltételrendszer első $n-1$ feltétele által definiált intervallumot. Tekintsük x_h következő függvényét:

$$\varphi(\xi_1, \ldots, \xi_{h-1}, x_h, \xi_{h+1}, \ldots, \xi_n; \tau) = \frac{1}{\tau^{n-1}} \int\limits_{I_{\tau,\xi}^{(h)}} f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_{h-1}\, dx_{h+1} \ldots dx_n.$$

Ez a függvény korlátos variációjú az (a_h, b_h) intervallumban; valóban, ezen intervallum tetszés szerinti, az $a_h = a_1^{(h)} < a_2^{(h)} < \ldots < a_{i_h}^{(h)} = b_h$ pontok által meghatározott felbontása esetén teljesül a következő:

$$\sum_{i=1}^{i_h - 1} \frac{1}{\tau^{n-1}} \left| \int\limits_{I_{\tau,\xi}^{(h)}} [f(x_1, \ldots, x_{h-1}, a_{i+1}^{(h)}, x_{h+1}, \ldots, x_n) - \right.$$

$$\left. - f(x_1, \ldots, x_{h-1}, a_i^{(h)}, x_{h+1}, \ldots, x_n)]\, dx_1 \ldots dx_{h-1}\, dx_{h+1} \ldots dx_n \right| \leqq \frac{V_{F_h}(I_{\tau,\xi})}{\tau^{n-1}}.$$

Mivel $V_{F_h}(I_{\tau,\xi})$ állandó előjelű, additív, és ennélfogva korlátos variációjú függvény, mely az I_h belsejében fekvő négyzetes intervallumokon[51] van definiálva, ezért az I_h majdnem minden $\xi \equiv (\xi_1, \ldots, \xi_{h-1}, \xi_{h+1}, \ldots, \xi_n)$ pontjára létezik és véges a következő határérték:

$$\lim_{\tau \to 0} \frac{V_{F_h}(I_{\tau,\xi})}{\tau^{n-1}} = l_h(\xi_1, \ldots, \xi_{h-1}, \xi_{h+1}, \ldots, \xi_n).$$

Innen következik, hogy ha ξ-t úgy választjuk, hogy ez a határérték véges legyen, akkor adatván egy $\varepsilon > 0$ szám, meg lehet határozni olyan pozitív τ_ε számot, hogy $\tau < \tau_\varepsilon$ esetén $\varphi(\xi_1, \ldots, \xi_{h-1}, x_h, \xi_{h+1}, \ldots, \xi_n; \tau)$-nek, mint x_h függvényének a teljes variációja $l_h(\xi_1, \ldots, \xi_{h-1}, \xi_{h+1}, \ldots, \xi_n) + \varepsilon$-nál kisebb legyen. Ennélfogva x_h következő függvénye:

$$f(\xi_1, \ldots, \xi_{h-1}, x_h, x_{h+1}, \ldots, \xi_n) = \lim_{\tau \to 0} \varphi(\xi_1, \ldots, \xi_{h-1}, x_h, \xi_{h+1}, \ldots, \xi_n; \tau)$$

I_h majdnem minden ξ pontjára korlátos variációjú (a_h, b_h)-ban, és e függvény $V_h(\xi_1, \ldots, \xi_{h-1}, \xi_{h+1}, \ldots, \xi_n)$ teljes variációja nem nagyobb $l_h(\xi_1, \ldots, \xi_{h-1}, \xi_{h+1}, \ldots$ $\ldots, \xi_n) + \varepsilon$-nál.[52]

[51] Az $a_k \leqq x_k < b_k$ $(k = 1, \ldots, n)$ feltételekkel definiált I intervallumot négyzetesnek nevezzük, ha $b_1 - a_1 = b_2 - a_2 = \ldots = b_n - a_n$.

[52] Valóban, fennáll a következő tétel: legyen $g(x, \tau)$ az $a \leqq x \leqq b$, $\tau_0 - \varepsilon < \tau < \tau_0 + \varepsilon$ értékekre definiált függvény, mely minden τ-ra x-nek korlátos variációjú függvénye (a, b)-ben. $V(a, b; \tau)$.-val jelölve (a, b)-beli teljes variációját, minden τ-ra teljesüljön a következő: $V(a, b; \tau) \leqq l$. Ha minden x-re létezik és véges a $\lim\limits_{\tau \to \tau_0} g(x, \tau) = g(x)$ határérték, akkor $g(x)$ korlátos variációjú (a, b)-ben, és teljes variációja nem nagyobb l-nél. Lásd: [18], 431. oldal.

Mivel ε tetszés szerinti, ezért

$$V_h(\xi_1, \ldots, \xi_{h-1}, \xi_{h+1}, \ldots, \xi_n) \leqq l_h(\xi_1, \ldots, \xi_{h-1}, \xi_{h+1}, \ldots, \xi_n).$$

A $V_h(\xi_1, \ldots, \xi_{h-1}, \xi_{h+1}, \ldots, \xi_n)$ függvény mérhető I_h-ban (lásd: [31], II. fejezet, 14. és 15. §), másrészről az $l_h(\xi_1, \ldots, \xi_{h-1}, \xi_{h+1}, \ldots, \xi_n)$ függvény, korlátos variációjú intervallum-függvény deriváltja lévén, I_h-n integrálható; ekkor (1_h)-ból következik, hogy $V_h(\xi_1, \ldots, \xi_{h-1}, \xi_{h+1}, \ldots, \xi_n)$ integrálható I_h-ban. Ebből következik, hogy f TONELLI szerint korlátos variációjú.

Azonnal látható, hogy két, TONELLI szerint korlátos variációjú f és g függvény szorzata ugyancsak TONELLI szerint korlátos variációjú. Valóban, ha $f(x_1, \ldots, x_h, \ldots \ldots, x_n)$ és $g(x_1, \ldots, x_h, \ldots, x_n)$, mint x_h függvénye az I_h $(x_1, \ldots, x_{h-1}, x_{h+1}, \ldots, x_n)$ pontjára korlátos variációjú (a_h, b_h)-ban, akkor ott az $f(x_1, \ldots, x_h, \ldots, x_n) \cdot g(x_1, \ldots, x_h, \ldots, x_n)$ szorzat, mint x_h függvénye is korlátos variációjú. M-mel jelölve egy olyan számot, melynél sem $|f|$, sem pedig $|g|$ nem nagyobb I-ben, a használandó jelek nyilvánvaló jelentése mellett, teljesül a következő:

$$V_{fg}^{(h)}(x_1, \ldots, x_{h-1}, x_{h+1}, \ldots, x_n) \leqq M[V_f^{(h)}(x_1, \ldots, x_{h-1}, x_{h+1}, \ldots, x_n) + \\ + V_g^{(h)}(x_1, \ldots, x_{h-1}, x_{h+1}, \ldots, x_n)];$$

innen nyilvánvalóan következik az állítás.

Ily módon a következő tételt bizonyítottuk be:

I. *Ha $f(x)$ és $g(x)$ folytonos és korlátos variációjú függvények S_n valamely tartományában, akkor szorzatuk, $f(x) \cdot g(x)$, is ilyen.*

A következő tétel mutatja, hogy a korlátos variációjú függvény definíciója független annak a speciális derékszögű koordinátarendszernek választásától, melyre az S_n teret vonatkoztatjuk.

II. *Legyen $f(x)$ folytonos és korlátos variációjú függvény az S_n valamely A tartományában, $\|d_{hk}\|$ egy n-edrangú, egység-determinánsú négyzetes mátrix, $\|a_{hk}\|$ ezen mátrix inverzmátrixa, $y(x)$ az $y_k = \sum_{h=1}^{n} d_{hk} x_h$ és $x(y)$ az $x_k = \sum_{h=1}^{n} a_{hk} y_h$ koordinátájú pont, továbbá legyen A' az $y(x)$ által leírt halmaz, midőn x A-ban változik. Akkor $f[x(y)]$, y függvénye, folytonos és korlátos variációjú A'-ben.*[53]

Ezen tétel bizonyításához célszerű hivatkozni a következő tételre:

III. *Annak szükséges és elegendő feltétele, hogy az S_n valamennyi pontjában definiált korlátos és folytonos $f(x)$ függvény korlátos variációjú legyen, az, hogy létezzék az S_n intervallumainak $\{I\}$ családján értelmezett n számú $F_1(I), \ldots, F_n(I)$ mérték, melyek a következő tulajdonsággal rendelkeznek: bárhogyan tekintsünk is egy olyan, S_n-ben C_1-osztálybeli $g(x)$ függvényt, melyre $|g(x)|$ és $|\mathrm{grad}\, g(x)|$ $|x|^{-(n+1)}$ rendjénél nem alacsonyabb rendben tűnnek el midőn $|x| \to \infty$, teljesüljön a következő:*

$$(2_k) \qquad \int_{S_n} g(x)\, dF_k = -\int_{S_n} f(x) \frac{\partial g}{\partial x_k} dx, \qquad (k=1, \ldots, n).$$

[53] Meg lehetne mutatni általánosabban is, hogy ez a tulajdonság invariáns az S_n 1-osztálybeli homeomorfizmusaival szemben, vagyis, hogy ha $f(x)$ folytonos és korlátos variációjú az S_n valamely A tartományban és $x = x(y)$ egy 1-osztálybeli homeomorfizmus egyenlete, mely az A-t egy A' halmazba viszi át, akkor az $f[x(y)]$ folytonos és korlátos variációjú A'-ben.

Az $F_1(I), \ldots, F_n(I)$ mértékek n-ese, mely mértékekre teljesül (2_k), az egyedüli ilyen, és azonos az f által generált mértékek n-esével.[54]

Bebizonyítjuk a II. tételt. Legyen I_0 egy $\{I\}_A$-beli intervallum, és I_0' az a halmaz, melyet $y(x)$ ír le, midőn x I_0-ban változik; ezenkívül legyen $\varphi(x)$ egy S_n-ben folytonos és korlátos variációjú függvény, mely azonosan nulla egy korlátos halmazon kívül, s amely I_0-ban $f(x)$-szel azonos.[55]

Jelölje $\Phi_1(I), \ldots, \Phi_n(I)$ a φ által generált mértékeket, és legyen $\Phi_k'(I) = \sum_{h=1}^{n} a_{kh} \Phi_k(I')$ $(k = 1, \ldots, n)$. Nyilvánvaló, hogy $\Phi_k'(I)$ az S_n intervallumainak a családján definiált mérték.

Ekkor, ha g egy tetszés szerinti, S_n-ben C_1-osztálybeli függvény, melyre $|g(x)|$ és $|\mathrm{grad}\, g(x)|$ $|x|^{-(n+1)}$-nél nem alacsonyabb rendben tűnnek el, midőn $|x| \to \infty$, teljesül a következő:

$$\int_{S_n} \varphi[x(y)] \frac{\partial g[x(y)]}{\partial y_k} dy = \int_{S_n} \varphi(x) \sum_{h=1}^{n} a_{kh} \frac{\partial g(x)}{\partial x_h} dx =$$

$$= -\sum_{h=1}^{n} a_{kh} \int_{S_n} g(x)\, d\Phi_k = -\int_{S_n} g[x(y)]\, d\Phi_k',$$

és így

$$\int_{S_n} g[x(y)]\, d\Phi_k' = -\int_{S_n} \varphi[x(y)] \frac{\partial g[x(y)]}{\partial y_k} dy.$$

Ekkor az előző tétel értelmében következik, hogy $\varphi[x(y)]$ korlátos variációjú S_n-ben, és speciálisan következik, hogy $f[x(y)]$ korlátos variációjú I_0'-ben. Mivel I_0 tetszés szerinti intervallum, innen következik az állítás.

Azt fogjuk mondani, hogy az S_n valamely H tartományában értelmezett f függvény *egyenletes* DINI-*feltételnek tesz eleget*, vagy másképpen, hogy a $\mathfrak{D}(H)$ osztályhoz tartozik, ha tetszés szerint kiválasztva a H egy x pontját, $\dfrac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^n}$ mint y függvénye, $\{B\}_H$ minden korlátos B Borel-halmazán integrálható, és ha ezenkívül létezik egy csak B-től függő $M(B)$ pozitív szám, melyre

$$\int_B \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^n} dy \leq M(B), \qquad x \in H.$$

Bebizonyítjuk a következő tételt:

IV. *Ha f az S_n egy korlátos H tartományában értelmezett, ott folytonos és korlátos variációjú, $\mathfrak{D}(H)$-hoz tartozó függvény, és ha H' egy lezártjával együtt H-ban*

[54] A folytonos és korlátos variációjú függvények ezen tétel szolgáltatta jellemzését DE GIORGI (lásd [8]) adta meg azon függvényekre, melyek korlátos variációjúak egy olyan definíció értelmében, mely folytonos függvények esetén ekvivalens az itt idézett jellemzéssel, amint azt PAUC bebizonyította (lásd: [34]).

[55] $\varphi(x)$ konstrukcióját a következőképpen lehet elvégezni: jelölje I az $\{I\}_A$ egy intervallumát, mely I_0-t a belsejében tartalmazza, és legyen $\psi(x)$ egy S_n-ben C_1-osztálybeli függvény, mely $\bar{I}_0$-ban azonosan 1 és $\complement\bar{I}$-ben azonosan nulla. Az a függvény, mely $\bar{I}$-ban $f(x)\psi(x)$-szel azonos és $\complement\bar{I}$-ban azonosan nulla, az I. tétel értelmében nyilvánvalóan eleget tesz a ψ-re kirótt feltételeknek.

fekvő tartomány, akkor lehetséges definiálni S_n-ben olyan φ függvényt, mely folytonos és korlátos variációjú, $\mathfrak{D}(S_n)$-hez tartozik, H'-ben f-fel azonos és H külsejében nulla.

Legyen P egy plurintervallum (azaz véges számú intervallum összegéből álló halmaz), mely tartalmazza H'-t, és amely lezártjával együtt H-ban van.[56] Legyen g egy S_n-ben C_1-osztálybeli, H'-ben azonosan 1 és $\complement P$-ben azonosan nulla függvény.[57]

Legyen

$$\varphi(x)=\begin{cases} f(x)g(x), & \text{ha} \quad x\in H \\ 0, & \text{ha} \quad x\in \complement H. \end{cases}$$

Az így definiált $\varphi(x)$ függvény H'-ben f-fel azonos, S_n-ben folytonos és P külsejében nulla. Ezenkívül korlátos variációjú is; valóban, ha I az S_n egy intervalluma, akkor a $P\cdot I$-t alkotó intervallumok mindegyikében korlátos variációjú, mert ott két korlátos variációjú függvény szorzata, és ugyancsak korlátos variációjú az $I\cdot\complement P$-t képező intervallumok mindegyikében is, mert ott azonosan nulla. Most megmutatjuk, hogy φ $\mathfrak{D}(S_n)$-ben van. Jelöljük δ-val a P és a $\complement H$ közötti távolságot (mivel $\bar{P}$ H-ban van, azért $\delta>0$), P_δ-val a P $\delta/2$-sugarú burkát,[58] L_δ-val egy számot, melyet sem $|f|$, sem pedig $|g|$ nem lép túl P_δ-ban. Legyen B az S_n egy korlátos Borel-halmaza; mindig feltehetjük, hogy B tartalmazza P_δ-t. A következő három esetet különböztetjük meg: $x\in P$, $x\in P_\delta-P$, $x\in\complement P_\delta$.

Ha x P-ben van, akkor I_x-szel jelölve az x egyköralakú környezetét, teljesül a következő:

$$\int\limits_{B-I_x}\frac{|\varphi(x)-\varphi(y)|}{|x-y|^n}\,dy\leqq\int\limits_{P_\delta-I_x}\frac{|\varphi(x)-\varphi(y)|}{|x-y|^n}\,dy+\int\limits_{B-P_\delta}\frac{|\varphi(x)-\varphi(y)|}{|x-y|^n}\,dy\leqq$$

$$\leqq\int\limits_{P_\delta-I_x}\left\{|f(x)|\frac{|g(x)-g(y)|}{|x-y|^n}+|g(y)|\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^n}\right\}dy+\int\limits_{B-P_\delta}\frac{|\varphi(x)|}{|x-y|^n}\,dy\leqq$$

$$\leqq L_\delta\left[\int\limits_{P_\delta-I_x}\frac{|g(x)-g(y)|}{|x-y|^n}\,dy+\int\limits_{P_\delta-I_x}\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^n}\,dy+\frac{2^n\operatorname{mis}B}{\delta^n}L_\delta\right];$$

minthogy f $\mathfrak{D}(H)$-hoz tartozik feltétel szerint, és g ugyancsak $\mathfrak{D}(H)$-hoz tartozik, mert C_1-osztálybeli, igaz az állítás.

Ha x $(P_\delta-P)$-ben van, akkor

$$\int\limits_{B-I_x}\frac{|\varphi(x)-\varphi(y)|}{|x-y|^n}\,dy=\int\limits_{P_\delta-I_x}\frac{|\varphi(x)-\varphi(y)|}{|x-y|^n}\,dy\leqq L_\delta\left[\int\limits_{P_\delta-I_x}\frac{g(x)-g(y)|}{|x-y|^n}\,dy+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{P_\delta-I_x}\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^n}\,dy\right],$$

s ezért az állítás ebben az esetben is be van bizonyítva.

[56] Ilyen halmaz létezését azonnal be lehet látni.

[57] Ilyen függvény létezése azonnal belátható.

[58] Egy C halmaz r-sugarú burkán azon pontok halmazát értjük, melyeknek C-től való távolsága r-nél nem nagyobb.

Végül, ha x $\mathcal{C}P_\delta$-ban van, akkor

$$\int_{B-I_x} \frac{|\varphi(x)-\varphi(y)|}{|x-y|^n} dy = \int_{P-I_x} \frac{|\varphi(y)|}{|x-y|^n} dy \leqq (L_\delta)^2 \frac{2^n \operatorname{mis} P}{\delta^n}.$$

Ily módon a tételt teljesen bebizonyítottuk.

Jelöljük most Σ-val az S_n valamely 1-osztálybeli A tartományának a határát. Azt fogjuk mondani, hogy egy Σ-n folytonos f függvény ott korlátos variációjú, ha tetszés szerint rögzítve a Σ egy x_0 pontját és $\xi_1, \ldots, \xi_n$-nel jelölve egy derékszögű Descartes-féle koordináta-rendszert, melynek origója ezen x_0 pontban van és amelynek ξ_n tengelye a Σ x_0 pontbeli belső normálisával esik egybe, létezik az x_0-nak olyan környezete a Σ-n, mely a Σ x_0 pontbeli érintő-hipersíkjára vonatkozóan 1-osztálybeli reguláris $\xi_n = \chi(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$ előállítással adható meg, oly módon, hogy H-val jelölve a megfelelő bázishalmazt, az $f[\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, \chi(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$ függvény korlátos variációjú H-ban.[59]

Ezenkívül azt fogjuk mondani, hogy a Σ-n folytonos f függvény *egyenletes* DINI-*feltételnek tesz eleget Σ-n*, vagy másképpen, hogy $\mathfrak{D}'(\Sigma)$-hoz tartozik, ha tetszés szerint kiválasztva a Σ egy x_0 pontját, létezik az x_0-nak olyan U környezete Σ-n, mely a Σ x_0-pontbeli érintő-hipersíkján 1-osztálybeli reguláris előállítással adható meg, és létezik olyan pozitív M szám, hogy U minden x pontjára $\dfrac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^{n-1}}$, mint y függvénye, integrálható U-n, és

$$\int_U \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^{n-1}} d_y\sigma \leqq M.$$

Az f függvénynek az a tulajdonsága, hogy egyenletes DINI-feltételnek tesz eleget Σ-n, invariáns egy Σ-t tartalmazó tartomány 1-osztálybeli homeomorfizmusaival szemben. Valóban, jelöljük $\xi(x)$-szel és $\eta(y)$-nal az x és y képeit egy most említett típusú C homeomorfizmusnál, $x(\xi)$-vel és $y(\eta)$-val $\xi(x)$ és $\eta(y)$ képeit a C^{-1}, Σ'-vel illetve U'-vel pedig Σ illetve U képeit a C leképezésnél; ezenkívül, ha $d_y\sigma$ illetve $d_\eta\sigma$ a Σ illetve a Σ' hiperfelületi mértékelemei, akkor legyen $J(y)d_y\sigma = d_\eta\sigma$. Továbbá N-nel jelöljünk egy olyan pozitív számot, melyre Σ minden x, y pontpárjára teljesül a következő: $|x-y| \leqq N|\xi(x)-\eta(y)|$. Végül jelöljük M_0-lal $|J(y)|$ Σ-n vett maximumát.

Legyen V' a $\xi(x_0)$ olyan környezete Σ'-n, mely Σ' $\xi(x_0)$ pontbeli érintő-hipersíkjára vonatkozóan 1-osztálybeli reguláris előállítással adható meg, és amelynek Σ-n levő V képe U-ban van; legyen ezenfelül U'_ξ a ξ olyan környezete Σ'-n, mely

[59] Vegyük észre, hogy ezen paragrafus II. tétele értelmében az f függvénynek az a tulajdonsága, hogy Σ-n korlátos variációjú, nem függ a $\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$ tengelyeknek a Σ valamely x pontbeli érintősíkjában történő speciális választásától. Vegyük észre azt is, hogy — amint ezt ezen paragrafus [53] lábjegyzetében mondottuk — az f függvény korlátos variációjú volta Σ-n invariáns egy Σ-t tartalmazó tartomány 1-osztálybeli homeomorfizmusaival szemben.

V'-ben van. U_x-szel jelölve U'_ξ képét a C^{-1} leképezésnél, fennáll a következő:

$$\int\limits_{V'-U'_\xi} \frac{|f[x(\xi)]-f[(\eta)]|}{|\xi-\eta|^{n-1}} d_\eta\sigma = \int\limits_{V-U_x} \frac{|f(x)-f(y)|}{|\xi(x)-\eta(y)|^{n-1}} J(y)\, d_y\sigma \leqq$$

$$\leqq \frac{M_0}{N^{1-n}} \int\limits_{V-U_x} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^{n-1}} d_y\sigma \leqq \frac{M_0}{N^{1-n}} \int\limits_{V} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^{n-1}} d_y\sigma \leqq \frac{MM_0}{N^{1-n}}.$$

Tekintettel a ξ Σ'-n levő U'_ξ környezetének tetszés szerinti voltára, következik az állítás.

V. *Legyen f $\mathfrak{D}'(\Sigma)$-ben. Tetszés szerint rögzítve a Σ x_0 pontját és $t_1, \dots, t_n$-nel jelölve egy derékszögű Descartes-féle koordinátarendszert, melynek origója x_0-ban van, s amelynek t_n tengelye Σ x_0 pontbeli belső normálisával egybeesik, ha U az x_0 olyan környezete Σ-n, mely a Σ x_0-pontbeli érintő-hipersíkjára vonatkozóan* 1*-osztálybeli reguláris $t_n = \chi(t_1, \dots, t_{n-1})$ előállítással adható meg, H-val jelölve az U bázishalmazát, az $f[t_1, \dots, t_{n-1}, \chi(t_1, \dots, t_{n-1})]$ függvény $\mathfrak{D}(H)$-hoz tartozik.*

Jelöljük $t_1, \dots, t_n$-nel illetve $t'_1, \dots, t'_n$-vel az U y illetve x pontjának koordinátáit, $J(t_1, \dots, t_{n-1})dt_1, \dots, dt_{n-1}$-gyel az U $d\sigma$ hiperfelületi mértékelemét, N_0-lal $|J(t_1, \dots, t_{n-1})|$ $(H+\mathcal{F}H)_\alpha$-beli minimumát, L-lel egy olyan pozitív számot, melyre $|x-y| \leqq L\left[\sum_{k=1}^{n}(t_k-t'_k)^2\right]^{1/2}$ az U-beli x és y pontokra, $H_{t'}$-vel a $(t'_1, \dots, t'_{n-1}, 0)$ pont egy olyan környezetét a $t=0$ hipersíkon, mely H-ban van, U_y-nal az U olyan részét, melynek bázishalmaza $H_{t'}$. Akkor

$$\int\limits_{H-H_{t'}} \frac{|f[t'_1, \dots, t'_{n-1}, \chi(t'_1, \dots, t'_{n-1})]-f[t_1, \dots, t_{n-1}, \chi(t_1, \dots, t_{n-1})]|}{\left[\sum_{k=1}^{n-1}(t_k-t'_k)^2\right]^{\frac{n-1}{2}}} dt_1 \dots dt_{n-1} \leqq$$

$$\leqq \frac{L^{n-1}}{N_0} \int\limits_{H-H_{t'}} \frac{|f[t'_1, \dots, t'_{n-1}, \chi(t'_1, \dots, t'_{n-1})]-f[t_1, \dots, t_{n-1}, \chi(t_1, \dots, t_{n-1})]|}{\left[\sum_{k=1}^{n-1}(t_k-t'_k)^2+|\chi(t_1, \dots, t_{n-1})-\chi(t'_1, \dots, t'_{n-1})|^2\right]^{\frac{n-1}{2}}}.$$

$$\cdot \mathfrak{J}(t_1, \dots, t_{n-1})\, dt_1 \dots dt_{n-1} = \frac{L^{n-1}}{N_0} \int\limits_{U-U_y} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^{n-1}} d_y\sigma \leqq$$

$$\leqq \frac{L^{n-1}}{N_0} \int\limits_{U} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^{n-1}} d_y\sigma.$$

Mivel $H_{t'}$ tetszés szerint választható, következik az állítás.

5. § A külső differenciálformák elméletére vonatkozó definíciók

Legyen A az S_n egy tartománya, amelyben definiálva van egy p-edrendű ($p \leqq n$) antiszimmetrikus tenzor, melynek komponensei az $x_1, \ldots, x_n$ derékszögű Descartes-koordinátarendszerben legyenek $u_{i_1 \ldots i_p}(x)$, ahol $i_1, \ldots, i_p$ az 1 és az n közé eső egész számok egy olyan p-ese, melyre $i_1 \leqq i_2 \leqq \ldots \leqq i_p$.

$u_{i_1 \ldots i_p}(x)$-együtthatójú *p-edfokú külső differenciálformának* vagy *p-formának* nevezzük a következő kifejezést:

$$u = \sum_{i_1 \ldots i_p} u_{i_1 \ldots i_p}(x)\, dx_{i_1} \ldots dx_{i_p}.$$

Egy p-forma *nulla*, és 0-val jelöljük, ha valamennyi együtthatója nulla. Két p-formát *egyenlőnek* nevezünk, ha különbségük nulla.

Ezenkívül az u *kovariáns deriváltjának* nevezzük a következő $(p+1)$-formát:

$$u_x = \sum_{i_1 \ldots i_{p+1}} u'_{i_1 \ldots i_{p+1}}\, dx_{i_1} \ldots dx_{i_{p+1}} \qquad (i_1 \leqq \ldots \leqq i_{p+1}),$$

ahol

$$u'_{i_1 \ldots i_{p+1}} = \sum_{k=1}^{p+1} (-1)^{k-1} \frac{\partial u_{i_1 \ldots i_{k-1} i_{k+1} \ldots i_{p+1}}}{\partial x_{ik}},$$

és az u *kontravariáns deriváltjának* nevezzük az

$$u^x = \sum_{i_1 \ldots i_{p+1}} (-1)^{\tau} u'_{i_1 \ldots i_{p+1}}\, dx_{i_{p+2}} \ldots dx_{i_n}$$

$(n-p-1)$-formát, ahol $i_1 \leqq \ldots \leqq i_{p+1}$, $i_{p+2} \leqq \ldots \leqq i_n$ és τ az $i_1 \ldots i_n$ permutáció paritása.

Az u p-formát *zártnak* mondjuk, ha $u_x = 0$, és *zéróval homológnak* nevezzük, ha létezik olyan v $(p-1)$-forma, melyre $v_x = u$. Ismeretes, hogy minden zéróval homológ forma zárt, vagyis $u_x = v_{xx} = 0$, és hogy megfordítva, egy p-dimenziósan egyszeresen összefüggő tartományban minden zárt p-forma zéróval homológ.

Ebben a dolgozatban a *harmonikus forma* definíciója gyanánt a HODGE-féle definíciót (lásd [25]) fogadjuk el, vagyis azt fogjuk mondani, hogy egy forma *harmonikus*, ha kontravariáns deriváltja zárt forma.

Ha u harmonikus p-forma valamely $(n-p)$-dimenziósan egyszeresen összefüggő A tartományban, akkor az elmondottak értelmében létezik olyan v $(n-p-2)$-forma, melyre $v_x = u^x$; ezt a v formát az u forma *konjugáltjának* nevezzük. Az u p-forma és a v q-forma *szorzatának* a következő $(p+q)$-formát nevezzük:

$$uv = \sum_{i_1 \ldots i_{p+q}} w_{i_1 \ldots i_{p+q}}\, d_{x_{i_1}} \ldots dx_{i_{p+q}},$$

ahol $w_{i_1 \ldots i_{p+q}} = \sum_{h_1 \ldots h_p, j_1 \ldots j_q} (-1)^{\tau} u_{h_1 \ldots h_p} v_{j_1 \ldots j_q}$, τ-val jelölve az $i_1, \ldots, i_{p+q}$ számok $h_1, \ldots, h_p, j_1, \ldots, j_q$ permutációjának paritását.

Fennáll a következő könnyen igazolható reláció:

$$u_x u^x = \sum_{i_1 \ldots i_{p+1}} (u'_{i_1 \ldots i_{p+1}})^2\, dx_1 \ldots dx_n.$$

Innen következik, hogy ha u harmonikus és v az u konjugáltja, akkor

$$u_x u^x = v_x v^x.$$

Ezenkívül, ha u harmonikus forma és D egy n-dimenziós cella,[60] akkor

$$\int_D u_x u^x = \int_{+\mathcal{F}D} u u^x \quad {}^{61}$$

6. § A $\mathfrak{F}(\Sigma)$ függvényeire vonatkozó elegendő feltételek

A következő tétel bizonyításával kezdjük:

I. *Legyen L az S_n $\xi_n = 0$ egyenletű hipersíkja, $f(x)$ egy L-en definiált, ott folytonos és korlátos variációjú, $\mathfrak{D}(L)$-hez tartozó függvény, mely az L egy korlátos H tartományának külsejében eltűnik. Akkor a $\xi_n \geqq 0$ feltétellel definiált S_+ féltérben folytonos és korlátos $u(x)$ függvény, mely S_+ belsejében harmonikus és L-en $f(x)$-szel azonos, a $\mathfrak{K}(A)$ osztályhoz tartozik minden olyan korlátos A tartományra vonatkozóan, melyet az S_+ féltér tartalmaz.*

Először tegyük fel, hogy $n > 2$.

Tekintsük a (féltérre vonatkozó) Poisson-integrállal definiált alábbi $u(\xi)$ függvényt:

$$u(\xi) = \frac{2\xi_n}{\omega_n} \int_L \frac{f(x)}{|x-\xi|^n} dx \quad {}^{62} \qquad \xi \in S_+ - L,$$

és a következő $(n-2)$-formát:

$$v(\xi) = \frac{2}{(n-2)\omega_n} \sum_{k=1}^{n-1} \left[(-1)^{k+n-1} \int_L f(x) \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{|x-\xi|^{n-2}} dx\right] \cdot$$

$$\cdot d\xi_1 \dots d\xi_{k-1} d\xi_{k+1} \dots d\xi_{n-1}, \qquad \xi \in S_+ - L.$$

Ez a forma harmonikus és u-nak konjugáltja, amit könnyű igazolni. Ekkor, ha I egy $(S_+ - L)$-ben levő intervallum, az előző paragrafusban idézettek szerint, fennáll a következő:

$$\int_I |\operatorname{grad} u|^2 d\xi = \int_I v_\xi v^\xi = \int_{I+\mathcal{F}} v v^\xi$$

Mivel az u függvény, mint ismeretes, $(S_+ - L)$-ben harmonikus és S_+-ban egy folytonos és korlátos függvénnyel azonos, mely L-en az f értékeit veszi fel, a tétel állítását bebizonyítjuk, ha megmutatjuk, hogy $\left|\int_{+\mathcal{F}I} v v^\xi\right|$ egy csak A-tól függő

[60] Ebben a dolgozatban n-dimenziós cellán olyan halmazt értünk, mely az S_n egy intervallumának 1-osztálybeli homeomorf képe.

[61] Az ebben a paragrafusban idézett fogalmakra vonatkozóan lásd: [25].

[62] Ebben a részben $\xi \equiv (\xi_1, \dots, \xi_n)$-nel az S_n azon pontjait jelöljük, melyek nem tartoznak L-hez; $x = (x_1, \dots, x_{n-1}, 0)$-lal az S_n L hipersíkhoz tartozó pontjait és $dx \equiv dx_1 \dots dx_{n-1}$-gyel az L mértékelemét jelöljük.

állandó alatt marad, midőn I egy $(S_+ - L)$-ben levő, tetszés szerinti korlátos A tartományban változik. Elegendő azon A tartományok vizsgálatára szorítkozni, melyeket olyan nyílt intervallumok alkotnak, melyeknek L-re vonatkozó ortogonális vetülete a H halmazt belsejében tartalmazza. Ekkor jelöljünk I'-vel egy L-ben levő és $\overline{H}$-t tartalmazó nyílt intervallumot, r-rel és R-rel két olyan pozitív számot, melyekre $r<R$, és A-val a következő feltételekkel definiált tartományt: $(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}) \in I'$, $r<\xi_n<R$; ezenkívül jelöljük L_r-rel a $(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}) \in I'$, $\xi_n = r$ feltételekkel definiált halmazt.

Mivel v és v^ξ együtthatói $(S_n - H)$-ban C_1-osztálybeliek, ahhoz, hogy bebizonyítsuk olyan pozitív N szám létezését, melyre minden, $0<r<R$ intervallumbeli r esetén $\left|\int\limits_{+\mathcal{F}A} vv^\xi\right| < N$ teljesül, elegendő megmutatni, hogy $\left|\int\limits_{L_r} vv^\xi\right|$ felülről korlátos marad, midőn r a $(0, R)$ nyílt intervallumban mozog.

Annak bizonyításával kezdjük, hogy létezik olyan pozitív M szám, melyre, tetszés szerint választva az L_r $(0<r<R)$ ξ pontját, teljesül a következő:

$$(1)\qquad \left|\int\limits_L f(x) \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{|x-\xi|^{n-2}}\, dx\right| \leqq M \qquad (k=1, \ldots, n-1).$$

Ha a ξ L-re vonatkozó ortogonális vetületét képező ξ' pont nem tartozik H-hoz, az állítás nyilvánvaló. Valóban, ebben az esetben

$$\int\limits_L f(x) \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{|x-\xi|^{n-2}}\, dx = \int\limits_H [f(x)-f(\xi')] \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{|x-\xi|^{n-2}}\, dx,$$

és mivel $x \neq \xi'$ esetén

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{|x-\xi|^{n-2}}\right| \leqq \frac{n-2}{|x-\xi|^{n-1}} \leqq \frac{n-2}{|x-\xi'|^{n-1}},$$

annak a feltételnek alapján, hogy f $\mathfrak{D}(L)$-hez tartozik, következik olyan pozitív M szám egzisztenciája, melyre

$$\left|\int\limits_H [f(x)-f(\xi')] \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{|x-\xi|^{n-2}}\, dx\right| \leqq (n-2) \int\limits_H \frac{|f(x)-f(\xi')|}{|x-\xi'|^{n-1}}\, dx \leqq M.$$

Most tegyük fel, hogy a ξ' pont H-hoz tartozik. Jelöljük $\delta/2$-vel H átmérőjét, $C(\xi', \varrho)$-val az L azon x pontjainak halmazát, melyekre $|x-\xi'| < \varrho$, és legyen

$$\psi(\xi, x) = \begin{cases} |x-\xi|^{2-n} & x \in C(\xi', \delta), \\ |x-\xi|^{2-n} \dfrac{2\delta - |x-\xi'|}{\delta} & x \in C(\xi', 2\delta) - C(\xi', \delta), \\ 0 & x \in \mathcal{C} C(\xi', 2\delta); \end{cases}$$

$\psi(\xi, x)$, mint x függvénye, folytonos L-ben, a $C(\xi', \delta)$, $C(\xi', 2\delta) - \overline{C(\xi', \delta)}$, $\mathcal{C}\overline{C(\xi', 2\delta)}$

halmazok mindegyikében folytonos és L-ben integrálható elsőrendű deriváltakkal bír; ezenkívül

$$\int_L \frac{\partial}{\partial x_k} \psi(\xi, x)\, dx = 0.$$

$H \in C(\xi', \delta)$ alapján

$$\int_L f(x) \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{|x-\xi|^{n-2}}\, dx = \int_L [f(x)-f(\xi')] \frac{\partial}{\partial x_k} \psi(\xi, x)\, dx.$$

H_δ-val jelölve a H δ-sugarú burkát L-en,[63] fennáll a következő:

$$\left| \int_L [f(x)-f(\xi')] \frac{\partial}{\partial x_k} \psi(\xi, x)\, dx \right| = \left| \int_{C(\xi',\delta)} [f(x)-f(\xi')] \frac{\partial}{\partial x_k} \psi(\xi, x)\, dx + \right.$$

$$\left. + \int_{L-C(\xi',\delta)} [f(x)-f(\xi')] \frac{\partial}{\partial x_k} \psi(\xi, x)\, dx \right| \leqq (n-2) \int_{H_\delta} \frac{|f(x)-f(\xi')|}{|x-\xi'|^{n-1}}\, dx +$$

$$+ |f(\xi')| \int_{C(\xi, 2\delta) - \bar{C}(\xi',\delta)} \left| \frac{\partial}{\partial x_k} \psi(\xi, x) \right| dx.$$

Mivel $\left|\frac{\partial}{\partial x_k} \psi(\xi, x)\right|$ $[C(\xi', 2\delta) - C(\xi', \delta)]$-ban egy csak R-től függő állandóval majorálható, az (1)-t ebben az esetben is bebizonyítottuk.

v kontravariáns deriváltja a következő:

$$v^\xi = (-1)^n \frac{2}{(n-2)\omega_n} \sum_{k=1}^{n-1} \left[\frac{\partial}{\partial \xi_n} \int_L f(x) \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{|x-\xi|^{n-2}}\, dx \right] d\xi_k +$$

$$+ (-1)^n \frac{2}{(n-2)\omega_n} \left[\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial}{\partial \xi_k} \int_L f(x) \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{|x-\xi|^{n-2}}\, dx \right] d\xi_n.$$

Ekkor

$$\int_{L_r} v v^\xi = \frac{-4}{(n-2)^2 \omega_n^2} \sum_{k=1}^{n-1} \int_{L_r} d\xi_1 \ldots d\xi_{n-1} \left[\int_L f(x) \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{|x-\xi|^{n-1}}\, dx \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \frac{\partial}{\partial \xi_n} \int_L f(y) \frac{\partial}{\partial y_k} \frac{1}{|y-\xi|^{n-2}}\, dy \right],$$

ahonnan az (1) értelmében

$$\left| \int_{L_r} v v^\xi \right| \leqq \frac{4M}{(n-2)^2 \omega_n^2} \sum_{k=1}^{n-1} \int_{L_r} d\xi_1 \ldots d\xi_{n-1} \left| \frac{\partial}{\partial \xi_n} \int_L f(y) \frac{\partial}{\partial y_k} \frac{1}{|y-\xi|^{n-2}}\, dy \right|. \tag{2}$$

[63] H δ-sugarú, L-en levő burkán az L azon pontjainak halmazát értjük, melyeknek H-tól való távolsága δ-nál nem nagyobb.

$F_1(B), \ldots, F_n(B)$-vel jelölve a korlátos variációjú $f(y)$ függvény által $\{B\}_L$-en generált mértékeket, parciális integrálással a következőt kapjuk (lásd: DE GIORGI [8]):

$$\int_L f(x) \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{|x-\xi|^{n-2}} dx = -\int_L \frac{1}{|x-\xi|^{n-2}} dF_k.$$

Ebből következik:

$$\int_{L_r} \left| \frac{\partial}{\partial \xi_n} \int_L f(x) \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{|x-\xi|^{n-2}} dx \right| dx_1 \ldots d\xi_{n-1} =$$

$$= \int_{L_r} \left| \int_L \frac{\partial}{\partial \xi_n} \frac{1}{|x-\xi|^{n-2}} d_x F_k \right| d\xi_1 \ldots d\xi_{n-1} \leqq$$

$$\leqq \int_{L_r} d\xi_1 \ldots d\xi_{n-1} \int_L \left| \frac{\partial}{\partial \xi_n} \frac{1}{|x-\xi|^{n-2}} \right| d_x V_{F_k} =$$

$$= \int_L d_x V_{F_k} \int_{L_r} \left| \frac{\partial}{\partial \xi_n} \frac{1}{|x-\xi|^{n-2}} \right| d\xi_1 \ldots d\xi_{n-1}.$$

Mivel

$$\int_{L_r} \left| \frac{\partial}{\partial \xi_n} \frac{1}{|x-\xi|^{n-2}} \right| d\xi_1 \ldots d\xi_{n-1} \leqq \frac{\omega_n}{2},$$

(2)-ből következik, hogy

$$\left| \int_{L_r} v v^{\xi} \right| \leqq \frac{2m}{(n-2)^2 \omega_n} \sum_{k=1}^{n-1} V_{F_k}(H).$$

Ily módon $n>2$ esetére a tételt teljesen bebizonyítottuk.

Az $n=2$ esetben az imént elvégzett bizonyítás csaknem változatlanul érvényes marad; ebben az esetben az u-hoz konjugált harmonikus $(n-2)$-forma szerepét a $v(\xi) = -\frac{1}{\pi} \int_L \log |x-\xi|\, df$ függvény veszi át, mely az L-en kívül fekvő ξ pontban harmonikus és u-hoz konjugált függvény.

Most már be tudjuk bizonyítani a következő tételt:

II. *Ha A 1-osztálybeli tartomány, Σ a határa, $f(x)$ egy Σ-n definiált folytonos függvény, akkor annak elegendő feltétele, hogy $f(x)$ $\mathfrak{T}(\Sigma)$-hoz tartozzék, az, hogy Σ-n korlátos variációjú legyen és $\mathfrak{D}'(\Sigma)$-hoz tartozzék. Ezen kívül, ezen feltételek mellett, a $\mathfrak{H}(A)$-nak azon u függvénye, melynek Σ-n vett nyoma f, A-ban egy olyan függvénnyel azonos, mely $(A+\Sigma)$-ban folytonos.*[64]

Jelöljünk $\{U_k\}$-val $(k=1, \ldots, m)$ egy olyan halmaz-családot, amely a Σ végesszámú halmazából áll, melyek Σ-t lefedik, és amelyek mindegyike a Σ egy alkalma-

[64] Az A tartomány határára itt kirótt feltételek ugyanazok, mint amelyeket L. N. SZLOBODECKI és V. M. BABICS [41] használtak. Az itt következő bizonyítást a C. B. MORREY [33] és a G. PRODI [40] meggondolásaival analóg meggondolásokkal ki lehetne terjeszteni arra az esetre is, midőn az A határa LIPSCHITZ-feltételnek tesz eleget.

san választott $x^{(k)}$ pontbeli érintő-hipersíkján 1-osztálybeli reguláris előállítással adható meg.

Minden, 1 és m közé eső k-ra jelöljük U'_k-val az $x^{(k)}$ egy olyan környezetét Σ-n, mely lezártjával együtt U_k-ban helyezkedik el, és amely olyan, hogy az $\{U'_k\}$ család a Σ határt lefedi.

Jelöljük H_k-val [H'_k-vel] az U_k [az U'_k] bázishalmazát a Σ $x^{(k)}$ pontbeli érintő-hipersíkján, $\xi_n = \chi_k(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$-val az U_k előállítását egy olyan $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ derékszögű Descartes-féle koordinátarendszerben, melynek origója $x^{(k)}$-ban van és amelynek ξ_n tengelye a Σ $x^{(k)}$-beli belső normálisával egybeesik, és jelöljünk ϱ_k-val egy olyan pozitív számot, melyre a $(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}) \in H_k$, $\chi_k(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}) < \xi_n < \chi_k(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}) + 2\varrho_k$ feltételekkel definiált halmaz A-ban helyezkedik el; legyen továbbá T_k ezen halmaz lezártja és D_k a következő feltételekkel definiált zárt tartomány:

$$(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}) \in \overline{H'_k}, \ \chi_k(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}) \leqq \xi_n \leqq \chi(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}) + \varrho_k \qquad (k = 1, \ldots, m).$$

Jelöljünk D_0-lal egy A-ban fekvő zárt tartományt, melyre $A - \bigcup_k D_k \subset D_0$.

Legyen $w_0(x), \ldots, w_m(x)$ $(m+1)$ darab, $(A+\Sigma)$-ban C_1-osztálybeli függvény, melyek ott egy *egység-partíciót* alkotnak. Azaz, legyenek olyanok, hogy w_k csak D_k-ban különbözzék zérustól, és ezenkívül teljesüljön a következő: $\sum_{k=0}^{m} w_k(x) = 1$ (lásd: DIEUDONNÉ, [9]).

A tétel bizonyításához elegendő megmutatni, hogy minden k $(1 \leqq k \leqq m)$ egész számra létezik olyan, T_k-ban folytonos és $\mathfrak{H}(T_k - \mathcal{F} T_k)$-hoz tartozó $u_k(x)$ függvény, mely U'_k-n $f(x)$-szel azonos. Valóban, ha u_k-t az egész $(A+\Sigma)$-ban úgy definiáljuk, hogy T_k külsejében azonosan nulla legyen, és ha ezenkívül feltesszük, hogy $u_0 = 0$, akkor a $\sum_{k=0}^{m} w_k(x) u_k(x)$ függvény eleget tesz a tétel állításának. Ennek igazolása végett megjegyezzük, hogy a 4. § V. tétele értelmében az $f[\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, \chi_k(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})]$ függvény $\mathfrak{D}(H_k)$-hoz tartozik; ekkor, a 4. § IV. tétele értelmében, a Σ $x^{(k)}$ pontbeli L_k érintő-hipersíkján lehet definiálni olyan φ függvényt, mely ott folytonos és korlátos variációjú, $\mathfrak{D}(L_k)$-hoz tartozik, H'_k-ben f-fel azonos és H_k külsejében eltűnik. Az előző tétel értelmében létezik olyan $v_k(x)$ függvény, mely a $\xi_n \geqq 0$ feltétellel, definiált féltérben van értelmezve, ott folytonos, a $\xi_n = 0$ egyenletű L_k hipersíkon φ-vel azonos, és minden olyan A halmazra, mely értelmezési tartományába esik, $\mathfrak{H}(A)$-hoz tartozik. Ekkor a T_k-ban értelmezett $v_k[\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, \xi_n - \chi(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})]$ függvény T_k-ban folytonos, U'_k-n $f(x)$-szel azonos és $\mathfrak{H}(T_k - \mathcal{F} T_k)$-hoz tartozik; ennélfogva írhatjuk, hogy $u_k(\xi) = v_k[\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, \xi_n - \chi_k(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})]$.

Így a tételt teljesen bebizonyítottuk.[65]

Helyénvaló itt megemlíteni a most bebizonyított tétel következő korolláriumait, melyek a FOURIER- és a LAPLACE-sorok elméletében önmagukban is érdekes eredmények.

III. *Legyen C egy egységsugarú kör kerülete és ϑ a C egy pontjának irányszöge. Ha $f(\vartheta)$ egy C-n definiált, ott folytonos és korlátos variációjú, $\mathfrak{D}'(C)$-hoz tartozó*

[65] Az itt alkalmazott eljárás, mely arra szolgált, hogy a problémát a féltér esetére vezessük vissza, lényegében a PRODI által a [40] 2. §-ában követett eljárás megismétlése.

függvény, akkor a_m-mel és b_m-mel jelölve $f(\vartheta)$ $0 \leqq \vartheta \leqq 2\pi$ intervallumra vonatkozó Fourier-koordinátáit, teljesül a következő: $\sum_{m=1}^{\infty} m(a_m^2 + b_m^2) < +\infty$.

Ez a tétel az ezen paragrafus II. tételének és a 2. § I. tételének közvetlen folyománya.

Ilyen típusú tételek könnyen levezethetők FOURIER-sorokra vonatkozó bizonyos abszolút konvergencia kritériumokból, melyeket A. ZYGMUND bizonyított be.[66]

IV. *Legyen Ω az S_n egy egységsugarú hipergömbjének a határa. Ha $f(x)$ Ω-n definiált, ott folytonos és korlátos variációjú, $\mathfrak{D}'(\Omega)$-hoz tartozó függvény, akkor*

$$\sum_{m=1}^{\infty} m(2m+2n-2)^2 \alpha_m \int_{\Omega} d_x\sigma \left[\int_{\Omega} f(y) P_m^{n-2}[C(x,y)]\, d_y\sigma \right]^2 < +\infty,$$

ahol $\alpha_m = \dfrac{1}{\pi^n}\left[\Gamma\left(\dfrac{n-2}{2}\right)\right]^n$.

Speciálisan, ha $n=3$, akkor $a_{m,k}$,-val és $b_{m,k}$-val jelölve f LAPLACE-koordinátáit,[67] *a következő áll fenn:*

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{m}{2m+1}\left[2a_{m0}^2 + \sum_{k=1}^{m} \frac{(m+k)!}{(m-k)!}(a_{m,k}^2 + b_{m,k}^2)\right] < +\infty.$$

Ez a tétel a jelen paragrafus II. tételének és a gömbfüggvényekre vonatkozó, a 2. §-ban idézett eredményeknek közvetlen következménye.

Ezt a paragrafust annak bebizonyításával zárjuk, hogy a II. tétel állításában az f függvényre kirótt két feltétel közül egymagában egyik sem elegendő ahhoz, hogy a tétel állítását biztosítsa.

Valóban, példaként meg fogunk adni egy olyan, C-n folytonos, $\mathfrak{D}'(C)$-hez tartozó, de C-n nem korlátos variációjú $f(\vartheta)$ függvényt, amely nem tartozik $\mathfrak{F}(C)$-hez.

Ezután meg fogjuk mutatni egy másik példán, hogy annak a feltételnek a megtartásával, miszerint f folytonos és korlátos variációjú, de elhagyva a $\mathfrak{D}'(C)$-hez való tartozás feltételét, a tétel állítása nem áll fenn.

Tekintsük a következő sort: $\sum_{m=1}^{\infty} e^{im\log m} \dfrac{e^{im\vartheta}}{m^{1/2+\alpha}}$. Ha $0<\alpha<1$, akkor ez a sor $(0, 2\pi)$-ben egyenletesen konvergál egy $(0, 2\pi)$-ben C_0^α osztálybeli függvényhez (lásd:

[66] Valóban, ez a szerző bebizonyította (lásd [48]), hogy ha $f(\vartheta)$ egyenletes HÖLDER-feltételnek tesz eleget $0<\alpha\leqq 1$ megszorításnak elegettevő α kitevővel és korlátos variációjú, akkor Fourier-együtthatóira teljesül a következő: $\sum_{m=1}^{\infty}(|a_m|+|b_m|)<+\infty$. Mivel $f(\vartheta)$ korlátos variációjú, ezért $|a_m| \leqq \dfrac{k}{m}$, $|b_m| \leqq \dfrac{k}{m}$; ebből következik a $\sum_{m=1}^{\infty} m(a_m^2+b_m^2)$ sor konvergenciája. Az idézett tétel akkor is érvényben marad, ha a HÖLDER-feltételt a következő típusú feltétellel helyettesítjük:

$$\max_{0\leqq h\leqq\delta} \int_0^{2\pi} [f(\delta+h)-f(\vartheta)]\, d\vartheta < \delta^\alpha$$

[67] A LAPLACE-koordináták definícióját illetően lásd: [37], 337. oldal.

HARDY és LITTLEWOOD [24]). Ezért ezen sor összegének a valós része olyan $f(\alpha, \vartheta)$ függvény, mely minden rögzített α esetén a $0 \leqq \vartheta \leqq 2\pi$ intervallumban C_0^α-osztálybeli és ennek folytán $\mathfrak{D}'(C)$-be tartozik. a_m-mel és b_m-mel jelölve Fourier-koordinátáit, teljesül a következő:

$$\sum_{m=1}^{\infty} m(a_m^2 + b_m^2) = \pi \sum_{m=1}^{\infty} m^{-(1+2\alpha)}.$$

Ez a sor $0 < \alpha \leqq \frac{1}{2}$ esetén divergens és $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ esetén konvergens. Ekkor, a 2. § I. tétele értelmében, $f(\alpha, \vartheta)$ mint ϑ függvénye, $0 < \alpha \leqq \frac{1}{2}$ esetén nem tartozik $\mathfrak{F}(C)$-hez.

Ily módon olyan függvényt konstruáltunk, mely C-n folytonos, $\mathfrak{D}'(C)$-hez tartozik, de amely nem tartozik $\mathfrak{F}(C)$-hez.[68] Jegyezzük azonban meg, hogy ha azt a feltételt, hogy f $\mathfrak{D}'(C)$-hez tartozik, azzal a feltétellel helyettesítjük, hogy f a C_0^α $(\frac{1}{2} < \alpha < 1)$ osztályhoz tartozik, akkor az a feltétel, hogy f korlátos variációjú, elhagyható (lásd: MIRANDA [32]).

Tekintsük most a $\sum_{m=2}^{\infty} \frac{\cos m\vartheta}{\sqrt{\lg m}}$ trigonometrikus sort. Mivel ezen sor együtthatóinak a sorozata zérushoz tart és konvex,[69] ezért ez a sor egy $(0, 2\pi)$-ben szummálható függvény FOURIER-sora (lásd: YOUNG [47], KOLMOGOROV [27]). $\varphi(\vartheta)$-val jelölve ezt a függvényt, legyen $f(\vartheta) = \int_0^\vartheta \varphi(\tau) d\tau$. Az $f(\vartheta)$ függvény abszolút folytonos, és ennélfogva korlátos variációjú is $(0, 2\pi)$-ben; ezenkívül, minthogy $\int_0^{2\pi} \varphi(\tau) d\tau = 0$, $f(0) = f(2\pi)$. $f(\vartheta)$ a_m és b_m Fourier-koordinátáira a következőt kapjuk:

$$a_m = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} f(\vartheta) \cos m\vartheta \, d\vartheta = -\frac{1}{\sqrt{\pi} m} \int_0^{2\pi} \varphi(\vartheta) \sin \vartheta \, d\vartheta = 0 \qquad m \geqq 1$$

$$b_m = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} f(\vartheta) \sin m\vartheta \, d\vartheta = \frac{1}{\sqrt{\pi} m} \int_0^{2\pi} \varphi(\vartheta) \cos m\vartheta \, d\vartheta = \frac{1}{\sqrt{\pi} m \sqrt{\lg m}} \qquad m \geqq 2.$$

Ezért, mivel $m(a_m^2 + b_m^2) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\, m \lg m}$ $(m \geqq 2)$, a $\sum_{m=2}^{\infty} m(a_m^2 + b_m^2)$ sor divergens.

[68] Egy másik idevágó példa az, amelyet HADAMARD (lásd [23]) adott meg annak igazolására, hogy a DIRICHLET-elv általában nem igaz. HADAMARD a következő sort tekintette: $\sum_{p=1}^{\infty} 2^{-p} \cos 2^{2p}\vartheta$; ez a sor egyenletesen konvergens $(0, 2\pi)$-ben. Ebben az esetben a $\sum_{p=1}^{\infty} p(a_p^2 + b_p^2)$ sor azonos azzal a sorral, melynek minden tagja 1-gyel egyenlő. Másrészről könnyű belátni, hogy ezen sor összege egyenletes HÖLDER-feltételnek tesz eleget tetszés szerinti α $(0 < \alpha < \frac{1}{2})$ kitevővel.

[69] Egy valós számsorozatot *konvexnek* nevezünk, ha minden m-re

$$c_m - c_{m+1} \geqq c_{m+1} - c_{m+2}.$$

A $\{(\log m)^{-1/2}\}$ sorozat konvex; valóban, a $(\log x)^{-1/2}$ függvény is olyan.

Ekkor a 2. § I. tétele értelmében f nem tartozik $\mathfrak{F}(C)$-hez. Ily módon olyan függvényt konstruáltunk, mely C-n folytonos és korlátos variációjú, de nem tartozik $\mathfrak{F}(C)$-hez.

7. § Példa arra, hogy a Laplace-egyenletre vonatkozó általánosított Neumann-probléma megoldására nem áll fenn unicitási tétel

Felhasználva az előző paragrafus eredményeit, most meg fogjuk mutatni, hogyan lehetséges, hogy a LAPLACE-egyenletre vonatkozó NEUMANN-problémára, melyet azon véges DIRICHLET-integrállal rendelkező megoldások osztályában vizsgálunk, melyek a peremértékeket egy most részletezendő általánosított értelemben veszik fel, nem áll fenn a szokásos unicitási tétel, mely szerint, egy additív állandótól eltekintve, csak egyetlen megoldás létezik.

Legyen A 1-osztálybeli tartomány és Σ a határa. Legyen $V(A)$ az $A+\Sigma$-ban értelmezett azon v függvények családja, melyek a következő feltételeknek tesznek eleget:

a) $v(x)$ folytonos $A+\Sigma$-ban,

b) $v(x)$ A-ban négyzetesen integrálható elsőrendű deriváltakkal rendelkezik.

Tekintsük azt a NEUMANN-problémát, mely a $V(A)$ azon függvényeinek megkereséséből áll, melyek A-ban harmonikusak, és amelyek olyanok, hogy Σ csaknem minden ξ pontjára

$$\lim_{x\to\xi\ \nu(\xi)\text{mentén}} \left[\frac{\partial v(x)}{\partial \nu}\right] = \varphi(\xi), \tag{1}$$

ahol φ a Σ-n megadott függvény.

Megmutatjuk, hogy erre a problémára a fent említett értelemben nem áll fenn unicitási-tétel.

Jelöljük C-vel a $z\equiv(x,y)$ pontok alkotta síknak azt a körvonalát, melynek középpontja az origó, sugara 1, és jelöljük ζ-val C pontjait, s-sel pedig a C ívhosszparaméterét. Legyen $f(\zeta)$ egy C-n definiált, ott korlátos variációjú, C_0^α-osztálybeli $(0<\alpha<1)$ függvény, melyre $\int\limits_C df=0$.

A

$$v(z) = \frac{1}{\pi}\int\limits_C \log|z-\zeta|\, d_\zeta f \tag{2}$$

függvény azon D kör belsejében, melynek határa C, az előbb tekintett NEUMANN-probléma egy megoldásával azonos, ahol az A tartomány gyanánt a D kört és peremfüggvény gyanánt a $\varphi(\zeta)=\dfrac{df}{ds}$ függvényt vesszük fel. Valóban, a (2) által meghatározott függvény harmonikus D-ben. Ezenfelül $\mathfrak{H}(D)$-hoz tartozik, ugyanis $v(z)$ az

$$u(z) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_C f(\zeta)\frac{\partial \log|z-\zeta|}{\partial \nu_\zeta}\, d_\zeta s$$

függvény harmonikus konjugáltja.[70] Mint ismeretes, az $u(z)$ függvény C-n vett nyoma a $-f(\zeta)-\frac{1}{2\pi}\int\limits_C f ds$ függvény; ekkor a 6. § II. tétele értelmében, az $u(z)$ függvény D-ben négyzetesen integrálható első deriváltakkal bír; ebből következik, hogy a $v(z)$ is D-ben négyzetesen integrálható első deriváltakkal rendelkezik, és ennélfogva $\mathcal{H}(D)$-hez tartozik.

Ahhoz, hogy belássuk, hogy v egy $(D+C)$-ben folytonos függvénnyel azonos, elegendő megjegyezni, hogy a v függvény egy HÖLDER-feltételnek elegettevő sűrűségű egyszerű réteg potenciáljának a deriváltja (lásd: BOULIGAND és GIRAUD [4], 29. oldal). Továbbá, mint az EVANS és MILES általánosított egyszerű- és kettősréteg-potenciálokra vonatkozó ismert eredményeiből következik (lásd: EVANS és MILES [10]), C csaknem minden ζ_0 pontjára fennáll a következő:

$$\lim_{\substack{z\to\zeta_0 \\ \nu_{\zeta_0}\text{ mentén}}} \frac{\partial}{\partial \nu_z}\left[\frac{1}{\pi}\int \log|z-\zeta|\, d_\zeta f\right] = \frac{df(\zeta_0)}{ds}.$$

Ezért tehát ahhoz, hogy olyan példát kapjunk, melynél a LAPLACE-egyenletre vonatkozó, körbeli NEUMANN-probléma olyan sajátmegoldásokkal bír a $V(D)$ osztályban, melyek különböznek az állandótól, elegendő f függvény gyanánt olyan függvényt felvenni, amely azonfelül, hogy korlátos variációjú, C-n C_0^α-osztálybeli és olyan, hogy $\int\limits_C df=0$, még C-n majdnem mindenütt nulla $\frac{df}{ds}$ deriválttal is bír (anélkül azonban, hogy $f(\zeta)$ azonosan állandó lenne). A következő paragrafusban éppen olyan $f(\zeta)$ függvényt fogunk megkonstruálni, mely mindezeket a feltételeket kielégíti, és amely azonkívül olyan, hogy $f(\zeta)=f(\bar{\zeta})$, ahol $\bar{\zeta}$-sal a ζ x tengelyre vonatkozó tükörképét jelöljük. Ezen utolsó feltétel alapján, melynek $f(\zeta)$ eleget tesz, a (2) által adott $v(z)$ függvény az x tengely $(-1, 1)$ intervallumában eltűnik.[71] Tekintsük most a LAPLACE-egyenletre vonatkozó vegyesproblémát, mely a $V(A)$

[70] Valóban, parciális integrálással a következőt kapjuk:

$$v(z) = \frac{1}{\pi}\int\limits_C \log|z-\zeta|\, d_\zeta f = -\frac{1}{\pi}\int\limits_C f(\zeta)\frac{\partial \log|z-\zeta|}{\partial s_\zeta} d_\zeta s;$$

ekkor könnyen adódik, hogy

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

[71] Valóban,

$$\int\limits_C f(\zeta)\frac{\partial \log|\bar{z}-\zeta|}{\partial s_\zeta} d_\zeta s = \int\limits_C f(\bar{\zeta})\frac{\partial \log|\bar{z}-\bar{\zeta}|}{\partial s_{\bar{\zeta}}} d_{\bar{\zeta}} s =$$

$$= \int\limits_C f(\zeta)\frac{\partial \log|\bar{z}-\bar{\zeta}|}{\partial s_{\bar{\zeta}}} d_{\bar{\zeta}} s = -\int\limits_C f(\zeta)\frac{\partial \log|z-\zeta|}{\partial s_\zeta} d_\zeta s,$$

ahonnan

$$\int\limits_C f(\zeta)\frac{\partial \log|\bar{z}-\zeta|}{\partial s_\zeta} d_\zeta s = -\int\limits_C f(\zeta)\frac{\partial \log|z-\zeta|}{\partial s_\zeta} d_\zeta s,$$

és innen következik az állítás.

azon v függvényeinek a megkereséséből áll, melyek A-ban harmonikusak, és olyanok, hogy megadván a Σ egy Σ_1 darabján egy folytonos $\varphi_1(\xi)$ függvényt és a Σ fennmaradó Σ_2 részén egy $\varphi_2(\xi)$ függvényt, Σ_2 majdnem minden ξ pontjára teljesül a következő:

$$v(\xi)=\varphi_1(\xi), \text{ ha } \xi\in\Sigma_1,$$

$$\lim_{x\to\xi\, \nu_\xi \text{ mentén}} \left[\frac{\partial v}{\partial \nu}\right] = \varphi_2(\xi), \text{ ha } \xi\in\Sigma_2.$$

Ez a probléma sem rendelkezik unicitási tétellel (lásd: DE GIORGI [7]). Valóban, ha A tartomány gyanánt D $y>0$ félsíkhoz tartozó pontjainak halmazát, Σ_1 gyanánt az x-tengely $(-1, 1)$-intervallumát, Σ_2 gyanánt a C $y>0$ félsíkban levő részét vesszük fel, akkor a (2) által definiált $v(z)$ függvény ezen problémának is egy sajátmegoldását szolgáltatja, mivel az, mint előbb megjegyeztük, az x tengely $(-1, 1)$ intervallumában azonosan nulla.

8. § Hölder-feltételnek eleget tevő, monoton, majdnem mindenütt eltűnő deriválttal bíró függvény konstrukciója

Most olyan függvényt akarunk konstruálni, mely a valós x-tengely (a, b) intervallumában előre rögzített α-kitevőjű $(0<\alpha<1)$ HÖLDER-feltételnek tesz eleget egyenletesen, mely (a, b)-ben nem csökkenő, nem állandó, és amelynek deriváltja csaknem mindenütt eltűnik.

Legyen $\psi(x)$ (a, b)-ben értelmezett, ott folytonos és a következő feltételnek eleget tevő függvény: létezik az (a, b) $2r$ számú egymástól különböző a_i, b_i $(i=1, \dots, r)$ pontja, melyekre $a=a_1<b_1<a_2<\dots<a_r<b_r=b$, és amelyek továbbá olyanok, hogy a (b_i, a_{i+1}) intervallumban a $\psi(x)$ függvény állandó, az (a_i, b_i) intervallumokban pedig a következő teljesül: $\psi(x) = (x-a_i)^\alpha+K_i$, ahol K_i állandó és α egy előre rögzített valós szám, melyre $0<\alpha<1$.

Nyilvánvaló, hogy ez a függvény nem-csökkenő.

Jelöljük $\mathfrak{L}\psi$-vel azt a függvényt, mely mindazokban az intervallumokban, melyekben ψ állandó, ψ-vel azonos, és amely a fennmaradó (a_i, b_i) intervallumok mindegyikében a következő módon van definiálva:

$$\begin{aligned} &\mathfrak{L}\psi(x)=\psi(x) && a_i\leqq x<c_i\\ &\mathfrak{L}\psi(x)=\psi(c_i) && c_i\leqq x<d_i\\ &\mathfrak{L}\psi(x)=(x-d_i)^\alpha+\psi(c_i) && d_i\leqq x\leqq b_i, \end{aligned}$$

ahol $c_i = a_i+2^{-1/\alpha}(b_i-a_i)$, $d_i = b_i-2^{-1/\alpha}(b_i-a_i)$.

Az $\mathfrak{L}\psi$ függvény nyilvánvalóan folytonos és nem-csökkenő az (a_i, b_i) intervallumok mindegyikében; ezenfelül, mivel $\mathfrak{L}\psi(b_i)=\psi(b_i)$,[72] következik, hogy $\mathfrak{L}\psi(x)$ folytonos és nem csökkenő (a, b)-ben. Könnyű belátni azt is, hogy $\mathfrak{L}\psi(x)\leqq\psi(x)$.

[72] Valóban, teljesül a következő:

$$\mathfrak{L}\psi(b_i) = (b_i-d_i)^\alpha+\psi(c_i) = [2^{-\frac{1}{\alpha}}(b_i-a_i)]^\alpha+(c_i-a_i)^\alpha+\psi(a_i) =$$

$$=2^{-1}(b_i-a_i)^\alpha+\psi(a_i)+[2^{-\frac{1}{\alpha}}(b_i-a_i)]^\alpha = \psi(a_i)+(b_i-a_i)^\alpha = \psi(b_i)\,.$$

Legyen $\psi(x) = (x-a)^\alpha$, $\psi_1(x) = \mathfrak{L}\psi(x)$, $\psi_2(x) = \mathfrak{L}\psi_1(x), \ldots$
Az alábbi ábrán bemutatjuk ezen sorozat első három függvényének ábráit.

A $\psi_m(x)$ függvények nem-negatívak; ezenkívül rögzített x esetén a $\{\psi_m(x)\}$ számsorozat monoton nem-növekedő; ezért a $\psi_m(x)$ függvények sorozata konvergens, mégpedig olyan $h(x)$ függvényhez konvergál, mely nem-csökkenő és nem állandó, mert $h(a)=0$ és $h(b) = (b-a)^\alpha$. A $h(x)$ függvény deriváltja majdnem mindenütt eltűnik. Valóban, minden m-re létezik olyan A_m plurintervallum — mindazoknak a nyílt intervallumoknak az összege, melyekben $\psi_m(x)$ állandó, — amelynek mértéke $(b-a)[1-2^{m(1-1/\alpha)}]$, és amelynek minden pontjában $\frac{d\psi_m}{dx}=0$. Mivel $x \in A_m$ esetén $h(x)=\psi_m(x)$, az $\bigcup\limits_m A_m$ valamennyi pontjában $\frac{dh(x)}{dx} = 0$. Másrészről könnyű belátni, hogy $\bigcup\limits_m A_m$ mértéke $b-a$.

Most megmutatjuk, hogy $h(x)$ α-kitevőjű és 1-együtthatójú egyenletes HÖLDER-feltételnek tesz eleget (a, b)-ben; ehhez elegendő megmutatni, hogy minden egyes $\psi_m(x)$ függvény α-kitevőjű és 1-együtthatójú HÖLDER-feltételnek tesz eleget a szóban forgó intervallumban.

Egy megjegyzéssel kezdjük. Legyen $\psi_m(x)$ a $\{\psi_m(x)\}$ sorozat egy függvénye; az $a_i^{(m)}, b_i^{(m)}, c_i^{(m)}, d_i^{(m)}$ szimbólumoknak legyen ugyanaz a jelentése a $\psi_m(x)$ függvényre vonatkozóan, mint ami az a_i, b_i, c_i, d_i szimbólumok előbb részletezett jelentése a $\psi(x)$ függvényre vonatkozóan. Ha $a_i^{(m)} \leqq x \leqq b$ esetén $\psi_m(a_i^{(m)}) + (x-a_i^{(m)})^\alpha \geqq \geqq \psi_m(x)$, akkor

$$\psi_m(c_i^{(m)} + (x-d_i^{(m)})^\alpha \geqq \psi_{m+1}(x) \qquad d_i^{(m)} \leqq x \leqq b. \tag{1}$$

Valóban, $d_i^{(m)} \leqq x \leqq b_i^{(m)}$ esetén (1) fennáll az $=$ jellel, mivel definíció szerint $\mathfrak{L}\psi_m(x) = \psi_m(c_i^{(m)}) + (x-d_i^{(m)})^\alpha$.

Ha $b_i^{(m)} \leqq x \leqq b$, akkor

$$\psi_m(c_i^{(m)}) + (x-d_i^{(m)})^\alpha \geqq \psi_m(a_i^{(m)}) + (x-a_i^{(m)})^\alpha,$$

ami abból az észrevételből következik, hogy ezen egyenlőtlenség két oldala $x=b_i^{(m)}$ esetén egyenlő, és a bal oldal deriváltja nagyobb a jobb oldalénál.

Ekkor a $\psi_m(a_i^{(m)}) + (x-a_i^{(m)})^\alpha \geqq \psi_m(x)$ feltevés értelmében és a $\psi_m(x) \geqq \psi_{m+1}(x)$ egyenlőtlenség alapján következik (1).

Ezenkívül nyilvánvaló, hogy

$$\psi_1(a_i^{(1)}) + (x-a_i^{(1)})^\alpha \geqq \psi_1(x) \qquad b \geqq x \geqq a_i^{(1)}. \tag{2_1}$$

Ekkor

$$\psi_2(a_i^{(2)}) + (x-a_i^{(2)})^\alpha \geqq \psi_2(x) \qquad b \geqq x \geqq a_i^{(2)}; \tag{2_2}$$

valóban, vagy $a_j^{(1)} = a^{(2)}$, és ebben az esetben

$$\psi_2(a_i^{(2)}) + (x-a_i^{(2)})^\alpha = \psi_1(a_j^{(1)}) + (x-a_j^{(1)})^\alpha \geqq \psi_1(x) \geqq \psi_2(x) \qquad b \geqq x \geqq a_j^{(1)},$$

vagy pedig $a_i^{(2)} = d_j^{(1)}$, és akkor (2_2) azonnal következik az előrebocsátott megjegyzésből: valóban, ebben az esetben $\psi_1(c_j^{(1)})=\psi_2(a_i^{(2)})$, és ezért a $\psi_1(c_j^{(1)})+(x-d_j^{(1)}) \geqq \psi_2(x)$ egyenlőtlenség $d_j^{(1)} \leqq x \leqq b$ esetén (2_2)-vel azonos.

Hasonlóan bebizonyítható, hogy

$$(2_3) \qquad \psi_3(a_i^{(3)})+(x-a_i^{(3)})^\alpha \geqq \psi_3(x) \qquad b \geqq x \geqq a_i^{(3)},$$

és általánosan

$$(2_m) \qquad \psi_m(a_i^{(m)})+(x-a_i^{(m)})^\alpha \geqq \psi_m(x) \qquad b \geqq x \geqq a_i^{(m)}.$$

Legyen most x_1 és x_2 két olyan szám, melyekre $a \leqq x_1 \leqq x_2 \leqq b$. Megmutatjuk, hogy

$$\psi_m(x_2)-\psi_m(x_1) \leqq (x_2-x_1)^\alpha.$$

Feltehetjük, hogy x_1 nem belső pontja egyetlen olyan intervallumnak sem, melyben ψ_m állandó; ekkor létezik olyan i index, melyre

$$\psi_m(x_1) = \psi_m(a_i^{(m)})+(x_1-a_i^{(m)})^\alpha.$$

(2_m) folytán

$$\psi_m(x_2)-\psi_m(x_1) \leqq (x_2-a_i^{(m)})^\alpha-(x_1-a_i^{(m)})^\alpha \leqq (x_2-x_1)^\alpha.$$

Ezzel bebizonyítottuk az állítást.

Ahhoz, hogy olyan $f(\zeta)$ függvényt szerkesszünk, mely a C körvonalon változó ζ értékekre van definiálva, C-n korlátos variációjú, C_0^α-osztálybeli, melynek deriváltja csaknem mindenütt eltűnik, úgy hogy $\int\limits_C df=0$, és amelyre $f(\zeta)=f(\bar{\xi})$, elegendő a most bevezetett $h(x)$ függvényt tekinteni a $\frac{3}{2}\pi \leqq x \leqq 2\pi$ intervallumra vonatkozóan, és ϑ-val jelölve a ζ komplex szám argumentumát, $f(\zeta)$-t a következőképpen definiálni:

$$f(\zeta)=\begin{cases} h(2\pi-\vartheta), & 0 \leqq \vartheta \leqq \dfrac{\pi}{2} \\ -h(\pi+\vartheta), & \dfrac{\pi}{2} \leqq \vartheta \leqq \pi \\ -h(3\pi-\vartheta), & \pi \leqq \vartheta \leqq \dfrac{3}{2}\pi \\ h(\vartheta), & \dfrac{3}{2}\pi \leqq \vartheta \leqq 2\pi \end{cases}$$

Az így megkonstruált $f(\zeta)$ függvény C-n folytonos, a $(0, \pi)$, $(\pi, 2\pi)$ ívek mindegyikén monoton, s ezért C-n korlátos variációjú, deriváltja majdnem mindenütt eltűnik, és eleget tesz az $\int\limits_C df=0$, $f(\zeta)=f(\bar{\zeta})$ feltételeknek. Az, hogy $f(\zeta)$ HÖLDER-feltételnek tesz eleget C-n, abból következik, mint azt könnyű belátni, hogy $h(\vartheta)$ HÖLDER-feltételnek tesz eleget $(\frac{3}{2}\pi, 2\pi)$-ben.

Szimbólumok

Fordította: Adler György
a matematikai tudományok kandidátusa

Technikai szerkesztő: L. Ziermann Margit

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója Műszaki szerkesztő: Farkas Sándor

A kézirat nyomdába érkezett: 1964. július 9. — Terjedelem: 11,75 (A/5) ív, 3 ábra

Szegedi Nyomda Vállalat 64-1164

Ára: 25,— Ft

TARTALOMJEGYZÉK

A KÜLFÖLDI SZAKIRODALOMBÓL

Index: 26 498

A MAGYAR
TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK
OSZTÁLYÁNAK

KÖZLEMÉNYEI

XIV. KÖTET 4. SZÁM

AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST
1964

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK
KÖZLEMÉNYEI

XIV. kötet 4. szám

Szerkesztőség: Budapest, V., Nádor utca 7.

Kiadóhivatal: Budapest, V., Alkotmány utca 21.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei változó terjedelmű füzetekben jelenik meg, és az Akadémia III. Osztályának felolvasóülésein bemutatott matematikai dolgozatokat, valamint egyéb dolgozatokat, referátumokat, továbbá az Osztály munkájára vonatkozó közleményeket, könyvismertetéseket stb. közölnek. Évenként egy kötet jelenik meg (négy szám alkot egy kötetet).

Kéziratok a következő címre küldendők:

A Magyar Tudományos Akadémia
III. Osztályának Közleményei.
Budapest, V., Nádor u. 7.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi levelezés.

Minden szerzőt 100 különlenyomat illet meg megjelent munkájáért.

Közlésre el nem fogadott kéziratokat a szerkesztőség lehetőleg visszajuttat a szerzőhöz, de felelősséget a beküldött kéziratok megőrzéséért vagy továbbításáért nem vállal.

A Közlemények előfizetési ára kötetenként belföldi címre 40 forint, külföldi címre 60 forint. Belföldi megrendelések az Akadémiai Kiadó, Budapest, V., Alkotmány u. 21. (Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 05-915-111-46), külföldi megrendelések a „Kultúra" Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalat, Budapest, I., Fő utca 32. (Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 43-790-057-181) útján eszközölhetők.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztálya a következő idegen nyelvű folyóiratokat adja ki:

1. Acta Mathematica Hungarica
2. Acta Physica Hungarica.

A LÁNCTÖRTEK METRIKUS ELMÉLETÉRŐL*

Írta: SZÜSZ PÉTER

Bevezetés — Történeti áttekintés

Jelen dolgozatban α 0 és 1 között fekvő irracionális számot jelöl. $a_1, a_2, \ldots$ jelentik α szabályos lánctörtkifejtésének jegyeit, vagyis

$$\alpha = [0; a_1, a_2, \ldots]. \tag{1}$$

Vezessük be továbbá a következő jelöléseket:

$$\frac{A_n}{B_n} = [0; a_1, \ldots, a_n] \qquad ((A_n, B_n) = 1), \tag{2}$$

$$\zeta_n = [a_n, a_{n+1}, \ldots]. \tag{3}$$

Jelentse $m_n(x)$ azon α-k halmazának *Lebesgue*-féle mértékét, amelyekre teljesül, hogy

$$\zeta_{n+1}^{-1} \leqq x, \tag{4}$$

ahol x tetszőleges, 1-nél nem nagyobb pozitív szám.

Még GAUSS vetette fel azt a kérdést, hogy mi lesz $m_n(x)$ határértéke, ha $n \to \infty$. (GAUSS természetesen nem *Lebesgue*-féle mértékről, hanem valószínűségről beszélt.) Egy LAPLACEhoz intézett levélben azt írja, hogy sikerült bebizonyítania az

$$\lim_{n \to \infty} m_n(x) = \frac{\log(1+x)}{\log 2} \tag{5}$$

relációt. GAUSS bizonyítása nem maradt fenn. (5) első ismert bizonyítása R. O. KUZMINtól [1] származik, aki (5) helyett élesebben az

$$m_n(x) = \frac{\log(1+x)}{\log 2} + O(q^{\sqrt{n}}) \tag{6}$$

relációt bizonyította be, ahol q egy 1-nél kisebb pozitív konstans. KUZMIN bizonyításának kiindulópontja a már GAUSS által is ismert

$$m_{n+1}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ m_n\left(\frac{1}{k}\right) - m_n\left(\frac{1}{k+x}\right) \right\} \tag{7}$$

rekurziós formula volt.

* Jelen dolgozat 1962. november 6-án megvédett doktori disszertációm átdolgozott alakja. A változásoknál tekintetbe vettem ERDŐS P., RÉNYI A. és TURÁN P. akadémikusok opponensi véleményét. Munkájukért ez úton is köszönetet mondok.

KUZMIN eredményének ismerete nélkül egy évvel később P. LÉVY [2] is bebizonyította (6)-ot, sőt, a (6)-ban fellépő $O(q^{\sqrt{n}})$ maradéktagot $O(q^n)$-el helyettesítette, vagyis bebizonyította a

$$(8) \qquad m_{n+1}(x) = \frac{\log(1+x)}{\log 2} + O(q^n)$$

relációt. Bizonyítása gyökeresen különbözik KUZMINnak (6)-ra adott bizonyításától. Kiindulópontja kissé más, de csak formálisan különböző alakban a

$$(9) \qquad m_n(x) = \int_0^1 \frac{x(1+y)}{1+xy}\, dG_n(y)$$

integrálelőállítás, ahol $G_n(y)$ azon α-k halmazának mértéke, amelyekre

$$(10) \qquad [0; a_n, a_{n+1}, \ldots, a_1] \leqq y.$$

(5)-re 1951-ben új bizonyítást adott C. RYLL—NARDZEWSKI [3]; nála (5) egy ergodtétel következménye.

Mind KUZMIN bizonyítása (6)-ra, mind P. LÉVY bizonyítása (8)-ra meglehetősen bonyolult. Nemrégen megmutattam [4], hogy KUZMIN (7) kiindulópontja is kiadja P. LÉVY élesebb (8) eredményét. A bizonyítás igen egyszerű; a maradéktagban szereplő q-t, amely P. LÉVYnél egy 0,7 körüli szám, sikerült 0,49 alá szorítanom. Megjegyzem azonban, hogy a P. LÉVY bizonyításából a (9)-ben fellépő $G_n(y)$-ra is kiadódik egy (8)-hoz analóg aszimptotikus formula, amely a következő:

$$(11) \qquad G_n(y) = \frac{\log(1+y)}{\log 2} + O(q^n).$$

(11) a (7) kiindulópontból még nem adódik közvetlenül, azonban (8)-ból és (9)-ből egyszerűen belátható. (11) egy általánosítására a továbbiakban szükségem lesz.

(6)-ból, illetőleg (8)-ból P. LÉVY [2] és A. HINCSIN [5] különböző következtetéseket vontak le, amelyek majdnem minden α lánctörtjegyeinek eloszlására vonatkoznak. Az általános tétel HINCSIN fogalmazásában a következőképpen hangzik: *Legyen $f(l)$ természetes l-ekre definiált nemnegatív függvény, amelyre teljesül, hogy*

$$(12) \qquad f(l) = O(l^{1/2-\varepsilon}) \qquad (l \to \infty).$$

Akkor majdnem minden α-ra fennáll a

$$(13) \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{l=1}^{n} f(a_l) = \frac{1}{\log 2} \sum_{l=1}^{\infty} f(l) \log \frac{(l+1)^2}{l(l+2)}$$

összefüggés: Ha

$$f(l) = f_r(l) = \begin{cases} 1, & \text{ha } l = r \\ 0 & \text{különben,} \end{cases}$$

akkor (13) kiadja a majdnem minden α decimális kifejtésének jegyeire vonatkozó klasszikus *Borel*-tételnek lánctörtjegyekre vonatkozó analogonját. Ha

$$f(l) = \log l,$$

akkor azt az érdekes eredményt kapjuk, hogy majdnem minden α-ra fennáll, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1, \ldots, a_n} = \prod_{l=2}^{\infty} \left(1+\frac{1}{l(l+2)}\right)^{\frac{\log l}{\log 2}}. \tag{14}$$

(13) általánosításával többváltozós függvényekre HINCSIN [6] megmutatta, hogy majdnem minden α-ra a

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{B_n} = \gamma \tag{15}$$

határérték létezik és független α-tól. γ értékét HINCSIN nem határozta meg. P. LÉVY [7] megmutatta, hogy (11) HINCSIN bizonyításánál egyszerűbben kiadja (15)-öt és γ értékét is. Bebizonyította, hogy

$$\gamma = e^{\frac{\pi^2}{12 \log 2}}. \tag{16}$$

Még (15) bebizonyítása előtt megmutatta HINCSIN, hogy majdnem minden α-ra elegendő nagy n_0-tól kezdve

$$B_n < K^n, \tag{17}$$

ahol K egy α-tól független konstans. (Ez az eredmény a $B_{n+1} = B_n a_{n+1} + B_{n-1} < < 2B_n a_{n+1}$ összefüggés miatt (15)-ön kívül triviális következménye (14)-nek is; azonban (17) felfedezése idején (14) sem volt ismert). (17)-ből azután levezette azt az eredményt, amelyet a diofantoszi approximáció metrikus elmélete főtételének nevezett el. Ez a következőképpen hangzik:

Legyen $f(x)$ monoton csökkenő függvény. Akkor az

$$\|\alpha x\| = \frac{f(x)}{x} \tag{18}$$

egyenlőtlenségnek[1] *majdnem minden α-ra végtelen vagy legfeljebb véges sok megoldása van, attól függően, hogy*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{f(k)}{k} = \infty, \tag{19}$$

vagy

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{f(k)}{k} < \infty.$$

(19) fennállásakor kézenfekvő feladat (18) megoldásai számát egy n határ alatt majdnem minden α-ra aszimptotikusan megbecsülni. Ebben az irányban azonban csak az utóbbi néhány évben értek el eredményeket. LEVEQUE [9], [10], ERDŐS [11] és W. SCHMIDT [12] egymástól függetlenül majdnem egy időben megmutatták, hogy ha

$$N_{\alpha,f}(n) = \sum_{\substack{x \leq n \\ \|\alpha x\| \leq \frac{f(x)}{x}}} 1, \tag{20}$$

[1] $\|z\|$ a z valós szám legközelebbi egésztől való távolságát jelenti.

akkor majdnem minden α-ra teljesül, hogy

$$N_{\alpha,f}(n) \sim 2 \sum_{k=1}^{n} \frac{f(k)}{k} \qquad (n \to \infty); \tag{21}$$

továbbá, ha $N^*_{\alpha,f}(n)$ jelenti (18) helyett

$$|\alpha x - y| < \frac{f(x)}{x},\ (x, y) = 1 \tag{22}$$

megoldásainak a számát n alatt, akkor majdnem minden α-ra

$$N^*_{\alpha,f}(n) \sim \frac{12}{\pi^2} \sum_{k=1}^{n} \frac{f(k)}{k} \qquad (n \to \infty). \tag{23}$$

teljesül.

S. HARTMAN bebizonyította, hogy majdnem minden α azzal a tulajdonsággal bír, hogy ha r adott természetes szám, akkor végtelen sok ν-re teljesül $r|B_\nu$, és felvetette a kérdést is, hogy teljesül-e majdnem minden α-ra végtelen sokszor $B_\nu \equiv k \pmod r$, ahol k tetszőlegesen adott egész. Egy HARTMANnal közös dolgozatban [13] megmutattuk, hogy ez valóban fennáll, sőt, (19) fennállása esetén (22) majdnem minden α-ra akkor is végtelen sokszor megoldható, hogyha (22)-n kívül még az

$$x \equiv k \pmod r \tag{24}$$

reláció fennállását is megköveteljük. Ez az állítás élesebb, mint pusztán a válasz S. HARTMAN kérdésére; ugyanis $|\alpha x - y| < 1/2x$ és $(x, y) = 1$ csak akkor lehetséges, ha $x = B_\nu$ valamely ν-re.

Egy ERDŐS PÁLlal való beszélgetés során felmerült az a kérdés, nem lehetne-e a B_ν-k aszimptotikus eloszlását az r differenciájú számtani sorokban meghatározni. Azzal a módszerrel azonban, ahogyan (22) és (24) megoldhatóságát majdnem minden α-ra HARTMANnal igazoltuk, ez reménytelennek látszik, ((22) és (24) megoldhatóságának bizonyítása majdnem minden α-ra DUFFIN és SCHAEFFER egy tételére [14] való visszavezetéssel történt) azonban sikerült találnom egy olyan, még a k_1 és k_2 paraméterektől is függő

$$m_0(k_1, k_2, x), \quad m_1(k_1, k_2, x), \dots$$

függvénysorozatot, amely egy (7)-hez hasonló rekurziós formulának tesz eleget. Ennek segítségével nemcsak az ERDŐssel felvetett problémát tudom megoldani, hanem általánosabb tételeket is be tudok bizonyítani.

Jelölje $m_n(k_1, k_2, x)$ azon α-k halmazának mértékét, amelyre fennáll (4), továbbá

$$B_{n-1} \equiv k_1, \quad B_n \equiv k_2, \tag{25}$$

(Itt és a továbbiakban a kongruencia-jel mindig (mod r) értendő.) Akkor könnyű belátni, hogy az $m_0(k_1, k_2, x), m_1(k_1, k_2, x), \dots$ függvénysorozat eleget tesz a

$$m_{n+1}(k_1 . k_2, x) = \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ m_n\left(S(l), k_1, \frac{1}{l}\right) - m_n\left(S(l), k_1, \frac{1}{l+x}\right) \right\} \tag{26}$$

rekurziós formulának, ahol $S(l)$ a

$$0 \leqq S(l) < r, \quad S(l) \equiv k_2 - lk_1 \tag{27}$$

relációkkal van definiálva. Ennek bizonyítása oly rövid, hogy már ide iktatom. Az $\zeta_n = a_n + \zeta_{n+1}^{-1}$ reláció miatt $\zeta_{n+1}^{-1} \leqq x$ akkor és csakis akkor fordul elő, ha valamely természetes l-re fennáll

$$\frac{1}{l+x} < \zeta_n^{-1} \leqq \frac{1}{l}. \tag{28}$$

(Ez úgy adódik, hogy $a_n = l$-et írunk és l-et változtatjuk.) Ezért $B_n \equiv k_1$, $B_{n+1} \equiv k_2$ a $B_n a_{n+1} + B_{n-1}$ reláció miatt akkor és csakis akkor áll fenn, ha $B_{n-1} \equiv S(l)$, $B_n \equiv k_1$, amivel (26)-ot igazoltuk.

Miután $B_{-1} = 0$, $B_0 = 1$, ezért

$$m_0(k_1, k_2, x) = \begin{cases} x, & \text{ha } k_1 = 0, k_2 = 1 \\ 0 & \text{különben,} \end{cases} \tag{29}$$

innen azonnal adódik, hogy az $m_0(k_1, k_2, x)$ minden k_1, k_2 számpárra az x kétszer folytonosan differenciálható függvénye és

$$|\{(1+x)m_0'(k_1, k_2, x)\}'| \leqq 1.$$ [2]

Jelen dolgozat főeredménye, amelyből többek között a válasz az ERDŐS PÁLlal felvetett kérdésre is adódik, a következőképpen hangzik:

Legyen r adott természetes szám, k_1 és k_2 a $0, 1, \ldots, r-1$ közül vett egészek. Legyen $m_0(k_1, k_2, x), m_1(k_1, k_2, x), \ldots$ egy még a k_1, k_2 paraméterektől is függő függvénysorozat, amely eleget tesz a (26) rekurziós formulának, ahol $S(l)$ a (27) által van definiálva. $m_0(k_1, k_2, x)$-ról azt tesszük fel, hogy minden k_1, k_2 számpárra kétszer folytonosan differenciálható, továbbá, hogy fennállnak a

$$|\{m_0'(k_1, k_2, x)(1+x)\}'| < K, \tag{30}$$

$$m_0(k_1, k_2, x) \equiv 0, \quad \text{ha} \quad (k_1, k_2, r) > 1 \tag{31}$$

és

$$m_0(k_1, k_2, 0), \quad \sum_{k_1, k_2} m_0(k_1, k_2, 1) = 1 \tag{32}$$

relációk.

Akkor

$$\left| m_n'(k_1, k_2, x) - \frac{1}{C(r)\log 2 \cdot (1+x)} \right| < Kq^n \qquad ((k_1, k_2, r) = 1;\ n = 1, 2, \ldots), \tag{33}$$

ahol

$$C(r) = r^2 \prod_{p|r} (1 - p^{-2}); \tag{34}$$

ha $(k_1, k_2, r) > 1$, akkor természetesen

$$m_n'(k_1, k_2, x) \equiv 0.$$

A (34)-ben fellépő q konstans csak r-től függ és kisebb, mint 1. [3]

[2] A vessző x szerinti deriválást jelent.
[3] L. [15].

Ha speciálisan $m_0(k_1, k_2, x)$ a (29) által definiált függvény, akkor az $m_1(k_1, k_2, x), \ldots$ azon $\alpha+k$ halmazának mértékét adják, amelyekre teljesül (4) és (25); a továbbiakban azonban nemcsak erre a speciális esetre lesz szükségem. (33) bizonyítása jelen dolgozat 2. §-ában fog történni. Miután a bizonyítás eléggé bonyolult, az 1. §-ban az $r=1$ speciális esetet tárgyalom; ebben az esetben q számára egy élesebb felső becslést vezetek le, mint az általános esetben. Igazolni fogom, hogy $r=1$ esetén a (33)-ban (vagy a (8)-ban) fellépő q-ra fennáll

$$(35) \qquad q \leqq \sqrt{(2\zeta(3)-\zeta(2))(7+2\zeta(4)-6\zeta(3)-\zeta(2))} = 0{,}48, \ldots \text{ [4]}$$

A tételeket a könnyebb áttekinthetőség kedvéért újból kimondom.

A dolgozat 2. fejezete (33) metrikus lánctörtelméleti alkalmazásait tartalmazza. Itt valószínűségszámítási módszerekre lesz szükségem. E fejezet egyik jellegzetes eredménye a következőképpen hangzik: *Jelölje $N_{\alpha,k}(n)$ azon ν-k számát n alatt, amelyekre fennáll $B_\nu \equiv k$. Akkor majdnem minden α-ra fennáll*

$$(36) \qquad N_{\alpha,k}(n) \sim \frac{r\varphi((k,r))}{C(r)(k,r)}\, n.$$

(36) megadja a választ az ERDŐSsel felvetett kérdésre.

Jelen dolgozat 3. fejezete alkalmazásokat tartalmaz a diofantoszi approximáció metrikus elméletére. (19) esetén (18), illetőleg (22) megoldásainak a számával foglalkozik abban az esetben, ha a megoldó x-ekre még azt is előírjuk, hogy (mod r) egy adott számtani sorba essenek. E fejezet a következő két tétel bizonyítását tartalmazza.

Legyen $f(x)$ pozitív növekvő x-ekre monoton csökkenő függvény, amelyre fennáll $f(x) \leqq \frac{1}{2}$. Jelölje $N^*_{\alpha,f,k}(n)$, illetőleg $N_{\alpha,f,k}(n)$ (22), *illetőleg* (18) *megoldásainak számát a* (24) *feltétellel. Akkor majdnem minden α-ra fennáll*

$$(37) \qquad N^*_{\alpha,f,k}(n) \sim \frac{12}{\pi^2}\,\frac{r\varphi((k,r))}{C(r)(k,r)} \sum_{l=1}^{n} \frac{f(l)}{l},$$

továbbá

$$(38) \qquad N_{\alpha,f,k}(n) \sim \frac{2}{r} \sum_{l=1}^{n} \frac{f(l)}{l}. \text{ [5]}$$

(37), ill. (38) a (21), ill. (22) általánosítása.

[4] L. [4].

[5] A disszertációban és az ezen eredményeket tartalmazó [16] dolgozatban még szükségem volt az $f(x)$-re vonatkozó egy „simasági" megszorításra; ERDŐS és TURÁN akadémikusok opponensi véleménye nyomán vettem észre, hogy ez nélkülözhető. — Mindkét helyen a (38) jobboldalán álló $\frac{2}{r}$ faktor helyett $\frac{12}{\pi^2} \sum_{0 \leqq d < r, (d,r)/k} \frac{r\varphi((d,k))}{(d,k)C(r)} \sum_{md \equiv k} m^{-2}$ áll. W. SCHMIDT levélben volt szíves felhívni a figyelmemet a

$$(39) \qquad \frac{12}{\pi^2} \sum_{\substack{0 \leqq d < r \\ (d,r)/k}} \frac{r\varphi((d,k))}{(d,k)C(r)} \sum_{\substack{dm \equiv k \\ m \geqq 1}} m^{-2} = \frac{2}{r}$$

identitásra, amelynek a bizonyítását a 13. §-ban reprodukálom; az egyszerűség kedvéért a bizonyítást csak négyzetmentes r-ekre végzem el.

I. FEJEZET

Egy rekurziós formula és következményei

1. §

Ebben a paragrafusban (8) egy általánosítását bizonyítom.

1. 1. TÉTEL: *Legyen $m_0(x)$ kétszer folytonosan differenciálható monoton függvény, amelyre teljesül*

$$m_0(0)=0, \quad m_0(1)=1, \tag{1.1}$$

továbbá

$$0 \leqq \{m_0'(x)(1+x)\}' \leqq K \quad \textit{vagy} \quad -K \leqq \{m_0'(x)(1+x)\}' \leqq 0. \tag{1.2}$$

Az $m_1(x), m_2(x), \dots$ függvénysorozat tagjai legyenek definiálva az

$$m_{n+1}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ m_n\left(\frac{1}{k}\right) - m_n\left(\frac{1}{k+x}\right) \right\} \tag{1.3}$$

rekurziós formula által.

Akkor fennáll

$$\left| m_n'(x) - \frac{1}{\log 2} \cdot \frac{1}{1+x} \right| \leqq Kq^n, \tag{1.4}$$

ahol

$$q = \sqrt{(2\zeta(3)-\zeta(2))(7+2\zeta(4)-6\zeta(3)-\zeta(2))}. \tag{1.5}$$

Megjegyzés. Ha (1. 2) helyett a gyengébb

$$|\{m_0'(x)(1+x)\}'| \leqq K \tag{1.6}$$

relációt tételezzük fel, akkor a tétel állítása az (1. 5)-tel definiált q helyett $q'=2\zeta(3)-$ $-\zeta(2)$-vel érvényes.

Bizonyítás. Differenciáljuk (1. 3)-at. A feltevésekből következik, hogy a jobboldalon álló sor tagonkénti differenciálása megengedett. Ezt alkalmazva $n=1, 2, \dots$-re nyerjük, hogy $m_n(x)$ minden n-re differenciálható és fennáll

$$m_{n+1}'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} m_n'\left(\frac{1}{k+x}\right) \frac{1}{(k+x)^2}. \tag{1.7}$$

Vezessük be az

$$m_n'(x) = \frac{g_n(x)}{(1+x)} \tag{1.8}$$

transzformációt. Akkor (1. 7) a következő rekurziós formulába megy át:

$$g_{n+1}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k\left(\frac{1}{k+x}\right) \frac{1+x}{(k+x)(k+1+x)}. \tag{1.9}$$

(1. 4) bizonyítására (1. 8) miatt elegendő megmutatni, hogy $0<x<1$-re

$$\left|g_n(x)-\frac{1}{\log 2}\right|<Kq^n. \tag{1. 10}$$

(1. 10) helyett a

$$|g_n(x)-C_n|<Kq^n$$

reláció már következnék onnan, ha bebizonyítanám, hogy

$$|g_n'(x)|\leqq Kq^n; \tag{1. 11}$$

hogy C_0-nek a $(\log 2)^{-1}$ értéknek kell lennie, következik az (1. 1) „normálási reláció"-ból. Ezért elegendő (1. 11)-et igazolni.

Differenciáljuk (1. 9)-et. A feltevésekből ismét következik, hogy tagonkénti differenciálás megengedett. Így nyerjük, hogy

$$\begin{aligned} g_{n+1}'(x) &= -\sum_{k=1}^{\infty} g_n'\left(\frac{1}{k+x}\right)\frac{1+x}{(k+x)^3(k+1+x)}+ \\ &\quad+\sum_{k=1}^{\infty} g_n\left(\frac{1}{k+x}\right)\frac{k(k-1)-(1+x)^2}{(k+x)^2(k+1+x)}, \end{aligned} \tag{1. 12}$$

vagy ha a jobboldalból levonjuk a $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1+x}{(k+x)(k+1+x)}\equiv 1$ identitás differenciálásával igazolható

$$g_n\left(\frac{1}{1+x}\right)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k(k-1)-(1+x)^2}{(k+x)^2(k+1+x)^2}\equiv 0 \tag{1. 13}$$

azonosságot, akkor kapjuk a következő kifejezést:

$$\begin{aligned} g_{n+1}'(x) &= -\sum_{k=1}^{\infty} g_n'\left(\frac{1}{k+x}\right)\frac{1+x}{(k+x)^3(k+1+x)}- \\ &\quad-\sum_{k=2}^{\infty}\left\{g_n\left(\frac{1}{1+x}\right)-g_n\left(\frac{1}{k+x}\right)\right\}\frac{k(k-1)-(1+x)^2}{(k+x)^2(k+1+x)^2}. \end{aligned} \tag{1. 14}$$

A második összegben a $g_n\left(\frac{1}{1+x}\right)-g_n\left(\frac{1}{k+x}\right)$ kifejezésekre a differenciálszámítás középértéktételét alkalmazva nyerjük, hogy

$$\begin{aligned} g_{n+1}'(x) &= -\sum_{k=1}^{\infty} g_n'\left(\frac{1}{k+x}\right)\frac{1+x}{(k+x)^3(k+1+x)}- \\ &\quad-\sum_{k=2}^{\infty} g_n'\left(\frac{1}{\vartheta_k+x}\right)\frac{(k-1)(k(k-1)-(1+x)^2)}{(1+x)(k+x)^3(k+1+x)^2}, \end{aligned} \tag{1. 15}$$

ahol ϑ_k minden k-ra valamely 1 és k között fekvő valós számot jelent.

Szükségem van a következő segédtételre:

1. 1. SEGÉDTÉTEL: *Legyen* $g_0(x), g_1(x), \ldots$ *egy az* (1. 9) *rekurziós formula által definiált függvénysorozat. Tegyük fel, hogy valamely n-re* $g_n(x)$ $(0, 1)$*-ben monoton csökkenő. Akkor* $g_{n+1}(x)$ $(0, 1)$*-ben monoton növekvő. Ha* $g_n(x)$ *monoton növekedő, akkor* $g_{n+1}(x)$ *monoton csökkenő.*

A segédtétel bizonyítása. Nyilván elegendő a második állítást igazolni. Tegyük fel, hogy $g_n(x)$ $(0, 1)$-ben monoton növekedő. Akkor igazolom, hogy $g'_{n+1}(x)$ $(0, 1)$-ben nem pozitív.

Az (1. 14) jobboldalán álló első összeg az indukciós feltevés miatt nem pozitív. A második összeg a következőképpen becsülhető. Miután $g_n(t)$ monoton növekedő, ezért

$$g_n\left(\frac{1}{1+x}\right)-g_n\left(\frac{1}{k+x}\right)\geqq g_n\left(\frac{1}{1+x}\right)-g_n\left(\frac{1}{2+x}\right).$$

Miután $k(k-1)-(1+x)^2$ a $k \geqq 3$-ra pozitív, ezért

$$\sum_{k=2}^{\infty}\left\{g_n\left(\frac{1}{1+x}\right)-g_n\left(\frac{1}{k+x}\right)\right\}\frac{k(k-1)-(1+x)^2}{(k+x)^2(k+1+x)^2}\geqq\left\{g_n\left(\frac{1}{1+x}\right)-g_n\left(\frac{1}{2+x}\right)\right\}\cdot$$

$$\cdot\sum_{k=2}^{\infty}\frac{k(k-1)-(1+x)^2}{(k+x)^2(k+1+x)^2}=\left\{g_n\left(\frac{1}{1+x}\right)-g_n\left(\frac{1}{2+x}\right)\right\}\frac{1}{(2+x)^2},$$

utóbbi (1. 13) miatt. Innen adódik, hogy monoton növekedő $g_n(t)$ esetén az (1. 14) jobboldalán álló második összeg sem pozitív, amivel a segédtételt igazoltuk.

Jelölje M'_n a

$$\max_{0\leqq x\leqq 1}|g'_n(x)|=M'_n$$

kifejezést. Miután $g'_0(x)=\{m'_0(x)(1+x)\}'$ a feltevés szerint $(0, 1)$-ben nem vált jelet, (1. 15)-ből és az 1. 1 segédtételből következik, hogy

$$(1.16)\quad |g'_{n+1}(x)|\leqq M'_n\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1+x}{(k+x)^3(k+1+x)}+\sum_{k=2}^{\infty}{}'\frac{(k-1)(k(k-1)-(1+x)^2)}{(1+x)(k+x)^3(k+1+x)^2}\right),$$

ahol Σ' azt jelenti, hogy $k(k-1)-(1+x)^2\leqq 0$ esetén, vagyis a $k=2$, $x\geqq\sqrt{2}-1$ esetben a $k=2$-nek megfelelő tag elhagyandó. (1. 16)-ban az első és második összeg tagjait összevonva nyerjük, hogy

$$|g'_{n+1}(x)|\leqq M'_n\sum_{k=1}^{\infty}{}'\frac{k(k-1)^2+(2+x)(1+x)^2}{(1+x)(k+x)^3(k+1+x)^2},$$

ahol most Σ' azt jelenti, hogy $k=2$, $x\geqq\sqrt{2}-1$ esetén a $k(k-1)^2+(2+x)(1+x)^2$ kifejezés $(1+x)^2(3+x)$-el helyettesítendő. Innen adódik, hogy

$$(1.17)\qquad g'_{n+1}(x)\leqq\frac{M'_n}{(1+x)^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k(x)(1+x)}{(k+x)(k+1+x)},$$

ahol

$$
(1.18)\qquad
\begin{cases}
c_1(x) \equiv 1 \\
c_2(x) = \begin{cases} \dfrac{2+(2+x)(1+x)^2}{(2+x)^2(3+x)} & , \text{ ha } \quad x<\sqrt{2}-1, \\ \left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^2 & , \text{ ha } \quad x \geqq \sqrt{2}-1, \end{cases} \\
c_k(x) = \dfrac{k(k-1)^2+(2+x)(1+x)^2}{(k+x)^2(k+1+x)}, \quad \text{ha} \quad k=3,4,\dots .
\end{cases}
$$

Egy kissé körülményes, de elemi diszkusszióval igazolható, hogy $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k(x)(1+x)}{(k+x)(k+1+x)}$ az $x=0$-ra veszi fel maximumát, vagyis

$$
(1.19)\qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k(x)(1+x)}{(k+x)(k+1+x)} \leqq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k(0)}{k(k+1)} = 2\zeta(3)-\zeta(2).
$$

Innen és (1. 17)-ből adódik, hogy

$$
(1.20)\qquad g'_{n+1}(x) \leqq \frac{2\zeta(3)-\zeta(2)}{(1+x)^2} M'_n
$$

(1. 20) $2\zeta(3)-\zeta(2)<1$ miatt már kiadja KUZMIN tételének P. LÉVY által élesített alakját, P. LÉVYénél nagyobb q-val. A konstans leszorítása a következőképpen történik.

(1. 15)-ből és (1. 20)-ból adódik, hogy

$$
|g'_{n+1}(x)| \leqq (2\zeta(3)-\zeta(2)) M'_{n-1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k(k-1)^2+(2+x)(1+x)^2}{\left(1+\dfrac{1}{k+x}\right)^2 (1+x)(k+x)^3(k+1+x)^2} =
$$

$$
= (2\zeta(3)-\zeta(2)) M'_{n-1} \sum_{k=1}^{\infty}{}' \frac{k(k-1)^2+(2+x)(1+x)^2}{(1+x)(k+x)(k+1+x)^4}.
$$

Mármost ismét belátható, hogy a Σ' összeg $x=0$-ra felveszi maximumát. Ezt a maximumot ismét a *Riemann*-féle zetafüggvénnyel kifejezve adódik, hogy

$$
M'_{n+1} \leqq (2\zeta(3)-\zeta(2))(7+2\zeta(4)-6\zeta(3)-\zeta(2)) M'_{n-1},
$$

ahonnan az 1. 1 tétel már következik.

2. §

Legyen r természetes szám, $m_0(k_1, k_2, x)$ $(k_1, k_2 = 0, \ldots, r-1)$ x-nek monoton növekedő, kétszer folytonosan differenciálható nemnegatív függvényei. Teljesüljenek továbbá a következő feltételek:

$$(2.1) \qquad m_0(k_1, k_2, x) \equiv 0, \quad \text{ha} \quad (k_1, k_2, r) > 1,$$

$$(2.2) \qquad m_0(k_1, k_2, 0) = 0, \quad \sum_{k_1, k_2} m_0(k_1, k_2, 1) = 1,$$

$$(2.3) \qquad |\{m_0'(k_1, k_2, x)(1+x)\}'| < K.$$

Az $m_1(k_1, k_2, x), \ldots$ függvényeket definiáljuk a

$$(2.4) \qquad m_{n+1}(k_1, k_2, x) = \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ m_n\left(S(l), k_1, \frac{1}{l}\right) - m_n\left(S(l), k_1, \frac{1}{l+x}\right) \right\}$$

rekurziós formulával, ahol

$$(2.5) \qquad 0 \leqq S(l) < r, \quad S(l) \equiv k_2 - l k_1.$$

Akkor fennáll a következő

2. 1. TÉTEL: $(k_1, k_2, r) = 1$ *esetén*

$$(2.6) \qquad \left| m_n'(k_1, k_2, x) - \frac{2}{c(r) \log 2} \cdot \frac{1}{1+x} \right| < K q^n,$$

ahol q csak r-től függő, 1-nél kisebb konstans, továbbá

$$(2.7) \qquad c(r) = \sum_{(k_1, k_2, r) = 1} 1 = r^2 \prod_{p/r} (1 - p^{-2}),$$

$(k_1, k_2, r) > 1$ *esetén*

$$(2.8) \qquad m_n'(k_1, k_2, r) \equiv 0.$$

Bizonyítás. (2. 8) azonnal következik (2. 1)-ből és (2. 4)-ből. A továbbiakban csak azon k_1, k_2 számpárokkal foglalkozom, amelyekre teljesül

$$(2.9) \qquad (k_1, k_2, r) = 1.$$

Differenciáljuk a (2. 4) relációt. A feltevésekből következik, hogy a tagonkénti differenciálás megengedett. Így nyerjük, hogy

$$(2.10) \qquad m_{n+1}'(k_1, k_2, x) = \sum_{l=1}^{\infty} m_n' \left(\frac{1}{l+x} \right) \frac{1}{(l+x)^2},$$

vagy, ha (1. 8)-hoz analóg módon bevezetjük a

$$(2.11) \qquad m_n'(k_1, k_2, x) = \frac{g_n(k_1, k_2, x)}{1+x}$$

transzformációt, hogy

$$(2.12) \qquad g_{n+1}(k_1, k_2, x) = \sum_{l=1}^{\infty} g_n \left(S(l), k_1, \frac{1}{l+x} \right) \frac{1+x}{(l+x)(l+1+x)}.$$

Az $r=1$ esettel azonos módon elegendő belátni, hogy

$$\left|g_n(k_1, k_2, x) - \frac{1}{c(r)\log 2}\right| < Kq^n. \tag{2.13}$$

A bizonyítás most nem folytatható ugyanúgy, mint az $r=1$ esetben. Ugyanis $r=1$ esetén a (2. 12) rekurziós formulában a fellépő $g_n\left(S(l), k_1, \frac{1}{l+x}\right)$ függvények függetlenek az $S(l)$ és k_1 paraméterektől. Miután továbbá ebben az esetben $g_{n+1}(k_1, k_2, x)$ a $g_n\left(S(l), k_1, \frac{1}{l+x}\right)$-ek $(l=1, 2, \ldots)$ az x helytől is függő súlyokkal vett közepe, ezért elegendő volt megmutatni, hogy

$$|g_n'(k_1, k_2, x)| \leqq Kq^n;$$

innen következett

$$|g_n(k_1, k_2, x) - C_n| < Kq^n$$

és hogy $C_n = (\log 2)^{-1}$, az könnyen adódott (1. 1)-ből. $r>1$ esetén nem elég pusztán a

$$|g_n'(k_1, k_2, x)| \leqq Kq^n \tag{2.14}$$

egyenlőtlenséget igazolni. (2. 14)-en kívül szükséges még

$$\left|g_n(k_1, k_2, 0) - \frac{1}{c(r)\log 2}\right| < Kq^n \tag{2.15}$$

is. Ennek igazolása azonban közvetlenül nem sikerült. Így (2. 14)-et és utána a

$$\max_{k_1, k_2, t} g_n(k_1, k_2, t) - \min_{k_1, k_2, t} g_n(k_1, k_2, t) < Kq^n. \tag{2.16}$$

relációt fogom igazolni. ((2. 16) természetesen önmagában is elég lenne a 2. 1 tétel bizonyításához; azonban bizonyításához (2. 14) nem látszik nélkülözhetőnek.)

Differenciáljuk (2. 12)-t. (A feltevésekből következik, hogy a tagonkénti differenciálás megengedett.) Így nyerjük, hogy

$$g_{n+1}'(k_1, k_2, x) = -\sum_{l=1}^{\infty} g_n'\left(S(l), k_1, \frac{1}{l+x}\right)\frac{1+x}{(l+x)^3(l+1+x)} + \tag{2.17}$$
$$+\sum_{l=1}^{\infty} g_n\left(S(l), k_1, \frac{1}{l+x}\right)\frac{l(l-1)-(1+x)^2}{(l+x)^2(l+1+x)^2}.$$

A jobboldalból kivonva a

$$\sum_{l=1}^{\infty} g_n\left(S(1), k_1, \frac{1}{1+x}\right)\frac{l(l-1)-(1+x)^2}{(l+x)^2(l+1+x)^2} \equiv 0 \tag{2.18}$$

azonosságot, nyerjük, hogy

$$g_{n+1}'(k_1, k_2, x) = -\sum_{l=1}^{\infty} g_n'\left(S(l), k_1, \frac{1}{l+x}\right)\frac{1+x}{(l+x)^3(l+1+x)} - \tag{2.19}$$
$$-\sum_{l=2}^{\infty}\left\{g_n\left(S(1), k_1, \frac{1}{1+x}\right) - g_n\left(S(l), k_1, \frac{1}{l+x}\right)\right\}\frac{l(l-1)-(1+x)^2}{(l+x)^2(l+1+x)^2}.$$

Vezessük be az

$$
(2.20)\qquad \begin{cases} M_n' = \max\limits_{k_1,k_2,t} |g_n'(k_1, k_2, t)|, \\ M_n = \max\limits_{k_1,k_2,t} g_n(k_1, k_2, t), \\ m_n = \min\limits_{k_1,k_2,t} g_n(k_1, k_2, t), \\ \delta_n = M_n - m_n \end{cases}
$$

jelöléseket.

Jegyezzük meg, hogy a

$$
(2.21)\qquad \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1+x}{(l+x)^3(l+1+x)} \quad \text{és} \quad \sum_{l=2}^{\infty} \frac{|l(l-1)-(1+x)^2|}{(l+x)^2(l+1+x)^2}
$$

sorok $x=0$-ra veszik fel maximumokat. Ez a második sorra triviális, mert $l \geqq 2$-re

$$
\frac{l(l-1)^2-(1+x)^2}{(l+x)^2(l+1+x)^2} \leqq \frac{l(l-1)-1}{l^2(l+1)^2}.
$$

Tekintsük most a $\sum\limits_{l=1}^{\infty} \frac{1+x}{(l+x)^3(l+1+x)}$ sort. Mindenesetre

$$
\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1+x}{(l+x)^3(l+1+x)} \leqq \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1+x}{l^2(l+x)(l+1+x)};
$$

innen a $\sum\limits_{l=1}^{\infty} \frac{1+x}{(l+x)(l+1+x)} \equiv 1$ identitás miatt nyerjük, hogy

$$
\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1+x}{(l+x)^3(l+1+x)} \leqq 1 - \sum_{l=2}^{\infty} \left(1-\frac{1}{l^2}\right) \frac{1+x}{(l+x)(l+1+x)}
$$

és egyenlőség csak $x=0$-ra áll fenn. Mármost azonnal belátható, hogy $l \geqq 2$-re

$$
\frac{1+x}{(l+x)(l+1+x)} \leqq \frac{1}{l(l+1)}.
$$

Ezzel bebizonyítottuk, hogy a (2. 21) alatt felírt két sor összege $x=0$-ra maximális. Innen és (2. 19)-ből nyerjük, hogy

$$
(2.22)\qquad M_{n+1}' \leqq M_n' \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^3(l+1)} + \delta_n \sum_{l=2}^{\infty} \frac{l(l-1)-1}{l^2(l+1)^2} = c_1 M_n' + c_2 \delta_n,
$$

ahol

$$
(2.23)\qquad c_1 = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^3(l+1)} = 1+\zeta(3)-\zeta(2), \quad c_2 = 1/4,
$$

utóbbi (2. 18) miatt.

Alkalmazzuk a (2. 22) egyenlőtlenséget egymásután $n, n-1, n-2, n-3$-ra. Tekintetbe véve, hogy (2. 21) miatt triviálisan

$$\delta_{n+1} \leqq \delta_n,$$

ezért

$$M_{n+1} \leqq c_1^4 M'_{n-3} + c_2(1 + c_1 + c_1^2 + c_1^3)\delta_{n-3} = c_3 M'_{n-3} + c_4 \delta_{n-3}. \tag{2. 24}$$

C_1, illetőleg C_2 (2. 23)-ban felírt jelentéséből azonnal következik, hogy

$$c_3 + c_4 < 1. \tag{2. 25}$$

A bizonyítás következő lépése egy

$$\delta_{n+1} \leqq c_5 M'_{n-3} + c_6 \delta_{n-3} \tag{2. 26}$$

alakú egyenlőtlenség bizonyítása lesz, ahol $c_5 + c_6 < 1$. Megjegyzem, hogy azért kellett (2. 22)-ről (2. 24)-re áttérni, mert (2. 26) helyett egy

$$\delta_{n+1} \leqq c'_5 M_n + c'_6 \delta_n \qquad (c'_5 + c'_6 < 1)$$

alakú egyenlőtlenség bizonyítása nem látszik keresztülvihetőnek. (2. 26) bizonyítása a következő §-ban fog megtörténni.

A tétel bizonyítása (2. 24)-ből, (2. 26)-ból és a következő egyszerű segédtételből fog adódni:

2. 1. SEGÉDTÉTEL: *Legyenek $M'_1, M'_2, \ldots$ és $\delta_1, \delta_2, \ldots$ pozitív tagú sorozatok, amelyekre teljesül*

$$M'_{n+1} \leqq c_3 M'_{n-3} + c_4 \delta_{n-3} \qquad (c_3 + c_4 < 1),$$

$$\delta_{n+1} \leqq c_5 M'_{n-3} + c_6 \delta_{n-3} \qquad (c_5 + c_6 < 1),$$

akkor

$$M'_n \leqq \max(c_3 + c_4, c_5 + c_6)^{n/4} \max(M'_1, \delta_1),$$

$$\delta_n \leqq \max(c_3 + c_4, c_5 + c_6)^{n/4} \max(M'_1, \delta_1).$$

A bizonyítás azonnal adódik teljes indukcióval.

3. §

Vezessük be a

$$f_l(t) = \frac{1+t}{(l+t)(l+1+t)}, \tag{3. 1}$$

$$u_l = \frac{1}{l+x}, \quad u_{l,l_1} = \frac{1}{l_1 + u_l}, \quad u_{l,l_1,l_2} = \frac{1}{l_2 + u_{l,l_1}} \tag{3. 2}$$

jelöléseket. Akkor (2. 12) négyszeri iterálásával nyerjük, hogy

$$g_{n+1}(k_1, k_2, x) = \sum_{l,l_1,l_2,l_3=1} g_{n-3}\left(S_{l,l_1,l_2}(l_3), S_{l,l_1}(l_2), \frac{1}{l_3 + u_{l,l_1,l_2}}\right) \cdot \tag{3. 3}$$
$$\cdot f_l(x) f_{l_1}(u_l) f_{l_2}(u_{l,l_1}) f_{l_3}(u_{l,l_1,l_2}),$$

ahol $S_{l,l_1}(l_2)$ és $S_{l,l_1,l_2}(l_3)$ a 0 és $r-1$ között fekvő egészek, amelyeket a

$$(3.4)\qquad \begin{cases} S(l) \equiv k_2 - lk_1 \\ S_l(l_1) \equiv k_1 - l_1 S(l) \\ S_{l,l_1}(l_2) \equiv S(l) - l_2 S_l(l_1) \\ S_{l,l_1,l_2}(l_3) = S_l(l_1) - l_3 S_{l,l_1}(l_2) \end{cases}$$

kongruenciarelációk határoznak meg.

Szükségem van a következő segédtételre:

3. 1. SEGÉDTÉTEL: *Legyenek k_1' és k_2' egészek, amelyekre teljesül*

$$0 \leqq k_1', k_2' \leqq r-1,$$

továbbá

$$(3.5)\qquad (k_1', k_2', r) = 1.$$

Akkor bármely (2. 9)*-nek eleget tevő k_1 és k_2 mellett lehetséges az l, l_1, l_2, l_3 számokat úgy megválasztani, hogy*

$$(3.6)\qquad k_1' = S_{l,l_1,l_2}(l_3), \quad k_2' = S_{l,l_1}(l_2)$$

legyen.

Megjegyzés. (2. 12) háromszori vagy kevesebb iterálásával (3. 6) analogonja nem állana fenn. Ezért kellett (2. 22)-ről (2. 24)-re áttérni.

A 3. 1. segédtétel bizonyítása. Legyen először r prímszámhatvány:

$$(3.7)\qquad r = p^a.$$

Akkor (2. 9) miatt vagy

$$(3.8)\qquad (k_1, r) = 1,$$

vagy

$$(3.9)\qquad (k_2, r) = 1,$$

vagy esetleg mindkettő. Ha (3. 8) áll fenn, akkor, ha l végigfut egy teljes maradéksoron (mod r), akkor ugyanezt teszi $S(l)$ is. Mármost (3. 5) miatt vagy

$$(3.10)\qquad (k_1', r) = 1$$

vagy

$$(3.11)\qquad (k_2', r) = 1$$

(vagy mindkettő). Ha (3. 10) áll fenn, akkor l felett úgy rendelkezem, hogy fennálljon

$$(3.12)\qquad (S(l), r) = 1$$

utána l_1 felett úgy, hogy teljesüljön

$$(3.13)\qquad S_l(l_1) \equiv k_1'$$

l_3 helyébe r-nek egy többszörösét írom, végül l_2 felett úgy rendelkezem, hogy teljesüljön

$$S_{l,l_1}(l_2) \equiv k_2'.$$

Ha (3. 11) áll fenn, akkor l felett úgy rendelkezem, hogy teljesüljön (3. 12), utána l_1 felett úgy, hogy fennálljon

$$(S_l(l_1), r) = 1, \tag{3. 14}$$

utána l_2 felett úgy, hogy fennálljon

$$S_{l,l_1}(l_2) \equiv k_1'$$

majd l_3 felett úgy, hogy fennálljon

$$S_{l,l_1,l_2}(l_3) \equiv k_1'$$

utóbbi lehetséges (3. 4) és (3. 14) miatt. Ezzel elintéztük azt az esetet, amikor (3. 8) áll fenn. Ha (3. 9) áll fenn, akkor ha l helyébe r egy többszörösét írjuk, akkor (2. 9) és (3. 7) miatt

$$(S(l), r) = 1$$

a bizonyítás befejezése ebben az esetben ugyanúgy történhetik, mint (3. 8) esetén.

Ha r nem prímszámhatvány, akkor a segédtétel bizonyítása r különböző prímfaktorainak száma szerinti teljes indukcióval történhetik a következőképpen: Mint láttuk, a segédtétel a (3. 7) alakú r-ekre igaz. Tegyük fel, hogy igaz abban az esetben is, amikor r különböző prímfaktorainak a száma legfeljebb $\varkappa - 1$ és tekintsünk egy $\varkappa$ különböző prímtényezős számot:

$$r = r' p^a,$$

ahol r' $(\varkappa - 1)$ különböző prímtényezős szám és

$$(r', p) = 1.$$

Legyen l', l_1', l_2', l_3' (valamely adott, (3. 5)-nek eleget tevő k_1', k_2' számpár esetén) (3. 6) megoldása abban az esetben, ha (3. 4)-ben az r modulust r'-vel helyettesítjük. Ilyen megoldásrendszer az indukciós feltevés értelmében létezik. Ha most bevezetjük az

$$l = l' + \lambda r', \quad l_1 = l_1' + \lambda_1 r', \quad l_2 = l_2' + \lambda_2 r', \quad l_3 = l_3' + \lambda_3 r'$$

jelöléseket, akkor az így definiált l, l_1, l_2, l_3 rendszer tetszőleges $\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ esetén kielégíti a „módosított" (3. 6) relációt. A (3. 7) esetén keresztülvitt bizonyítás megismétlésével belátható, hogy lehetséges $\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ értékeit úgy megválasztani, hogy (3. 6) most már (3. 4)-ben r modulussal is teljesüljön. Ezzel a 3. 1 segédtételt igazoltuk.

(3. 4)-ből nyilvánvaló, hogy ha $l, l_1, l_2, l_3 \pmod r$ egy-egy számtani soron fut végig, akkor (3. 3)-ban $S_{l,l_1,l_2}(l_3)$ és $S_{l,l_1}(l_2)$ értéke nem változik. A következő segédtétel a

$$\sum_{l \equiv l', l_1 \equiv l_1', l_2 \equiv l_2', l_3 \equiv l_3'} f_l(x) f_{l_1}(u_l) f_{l_2}(u_{l,l_1}) f_{l_3}(u_{l,l_1,l_2}) \tag{3. 15}$$

összegre ad alsó becslést, ahol l', l_1', l_2', l_3' rögzített egészek.

3. 2 SEGÉDTÉTEL: *Legyen l' $(0 \leqq l' < r)$ adott egész. Akkor fennáll*

$$\sum_{\substack{l=1 \\ l \equiv l'}}^{\infty} f_l(t) > r^{-2}. \tag{3. 16}$$

Bizonyítás.

$$\sum_{\substack{l=1\\ l\equiv l'}}^{\infty} f_l(t) = \sum_{\substack{l=1\\ l\equiv l'}}^{\infty} \frac{1+t}{(l+t)(l+1+t)} > \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1+t}{(lr+rt)(lr+r+rt)} = r^{-2},$$

amivel a segédtételt igazoltuk.

A (3. 15) összegre (3. 16)-ból azonnal adódik, hogy

$$(3.\,17)\qquad \sum_{\substack{l,l_1,l_2,l_3=1\\ l\equiv l',\, l_1\equiv l'_1,\, l_2\equiv l'_2,\, l_3\equiv l'_3}} f_l(x) f_{l_1}(u_l) f_{l_2}(u_{l,l_1}) f_{l_3}(u_{l,l_1,l_2}) > r^{-8}.$$

Legyenek mármost k'_1, k'_2, x_0 azon számok, amelyekre $g_{n+1}(k_1, k_2, x)$ felveszi maximumát, vagyis a (2. 20) jelölésekkel

$$(3.\,18)\qquad g_{n+1}(k_1, k_2, x_0) = M_{n+1}.$$

Alkalmazzuk (3. 3)-at a

$$k_1 = k'_1,\ k_2 = k'_2, \quad x = x_0$$

választás mellett. A jobboldalon álló négyszeres összegben a

$$g_{n-3}\left(S_{l,l_1,l_2}(l_3),\ S_{l,l_1}(l_2),\ \frac{1}{l_3+u_{l,l_1,l_2}}\right)$$

függvények $S_{l,l_1,l_2}(l_3)$, $S_{l,l_1}(l_2)$ paramétereiként minden k''_1, k''_2 számpár fellép, amelyre $(k''_1, k''_2, r) = 1$, így az a számpár is, amelyre alkalmas t_0-al

$$(3.\,19)\qquad g_{n-3}(k''_1, k''_2, t_0) = m_{n-3},$$

ahol m_{n-3} (2. 20)-al van definiálva. Azon l, l_1, l_2, l_3-ak, melyekre

$$S_{l,l_1,l_2}(l_3) = k''_1, \quad S_{l,l_1}(l_2) = k''_2,$$

(mod r) egy-egy számtani sorban helyezkednek el. Jelölje egy pillanatra B ezen l, l_1, l_2, l_3 indexű tagok adalékát a

$$\sum_{l,l_1,l_2,l_3=1}^{\infty} f_l(x) f_{l_1}(u_l) f_{l_2}(u_{ll_1}) f_{l_3}(u_{ll_1l_2}) \equiv 1$$

sorban. A 3. 2 segédtétel értelmében

$$(3.\,20)\qquad B > r^{-8}$$

(3. 18)-ból és (3. 19)-ből adódik

$$(3.\,21)\qquad M_{n+1} < M_{n-3}(1-B) + \sum_{\substack{l,l_1,l_2,l_3=1\\ S_{l,l_1l_2}(l_3)=k''_1\\ S_{l,l_1}(l_2)=k''_2}}^{\infty} g_{n-3}\left(k''_1, k''_2, \frac{1}{l_3+u_{l_1,l_1l_2}}\right)\cdot$$

$$\cdot f_l(x) f_{l_1}(u_l) f_{l_2}(u_{ll_1}) f_{l_3}(u_{l,l_1l_2}) = M_{n-3}(1-B) + m_{n-3}B +$$

$$+ \sum_{\substack{l,l_1,l_2,l_3=1\\ S_{l,l_1l_2}(l_3)=k''_1\\ S_{l,l_1}(l_2)=k''_2}}^{\infty} g_{n-3}\left(k''_1, k''_2, \frac{1}{l_3+u_{l,l_1l_2}}\right) - g_{n-3}(k''_1, k''_2, t_0)\cdot$$

$$\cdot f_l(x) f_{l_1}(u_l) f_{l_2}(u_{l,l_1}) f_{l_3}(u_{l,l_1,l_2}).$$

Vonjuk ki mindkét oldalból m_{n+1}-et. (3. 21)-ből adódik, tekintettel a (2. 12) miatt triviális $m_{n+1} \geqq m_{n-3}$ egyenlőtlenségre, hogy

(3. 22)
$$\delta_{n+1} < (1-B)\delta_{n-3} +$$
$$+ \sum_{\substack{l, l_1, l_2, l_3 = 1 \\ s_{l, l_1, l_2}(l_3) = k_1'' \\ s_{l, l_1}(l_2) = k_2''}} \left\{ g_{n-3}\left(k_1'', k_2'', \frac{1}{l_3 + u_{l, l_1, l_2}}\right) - g_{n-3}(k_1'', k_2'', t_0) \right\} \cdot$$
$$\cdot f_l(x) f_{l_1}(u_l) f_{l_2}(u_{l, l_1}) f_{l_3}(u_{l, l_1, l_2}).$$

A kapcsos zárójelben álló különbségre alkalmazva a differenciálszámítás középértéktételét nyerjük, hogy

$$\delta_{n+1} \leqq (1-B)\delta_{n-3} + c_7 B M_{n-3}',$$

ahol $c_7 < 1$. Ezzel (3. 20) miatt (2. 26), vagyis a 2. 1 tétel be van bizonyítva.

4. §

Jelölje

(4. 1)
$$m_n(a_1, \ldots, a_l; k_1, k_2, x)$$

azon α-k halmazainak feltételes mértékét, amelyekre

(4. 2)
$$B_{n-1} \equiv k_1, \quad B_n \equiv k_2,$$

(4. 3)
$$\zeta_{n+1}^{-1} \leqq x$$

azon feltétel mellett, hogy

$$a_1, \ldots, a_l$$

adottak. A lánctörtelmélet ismert formuláiból következik (l. pl. P. LÉVY [7]), hogy

(4. 4)
$$m_n(a_1, \ldots, a_l; k_1, k_2, x) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad B_{l-1} \not\equiv k_1 \text{ vagy } B_l \not\equiv k_2 \\ \dfrac{x(1+y_l)}{1+xy_l}, & \text{ha} \quad B_{l-1} \equiv k_1, \; B_l \equiv k_2, \end{cases}$$

ahol

(4. 5)
$$y_l = \frac{B_{l-1}}{B_l} = [0; a_l, a_{l-1}, \ldots, a_1].$$

(4. 4)-ből következik, hogy $m_l(a_1, \ldots, a_l; k_1, k_2, x)$ x szerint kétszer folytonosan differenciálható, továbbá fennáll

(4. 6)
$$\{m_l'(a_1, \ldots, a_l; k_1, k_2, x)(1+x)\}' =$$
$$= \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad B_{l-1} \not\equiv k_1, \text{ vagy } B_l \not\equiv k_2 \\ \dfrac{(1+y_l)(1+2y_l+xy_l)}{(1+xy_l)^3}, & \text{ha} \quad B_{l-1} \equiv k_1, \; B_l \equiv k_2, \end{cases}$$

ahonnan azonnal következik, hogy

$$|\{m_l'(a_1, ..., a_l; k_1, k_2, x)(1+x)\}'| \leqq 4. \tag{4. 7}$$

$m_l(a_1, ..., a_l; k_1, k_2, x)$-re nyilván teljesül

$$m_l(a_1, ..., a_l; k_1, k_2, 0) = 0; \quad \sum_{k_1, k_2} m_l(a_1, ..., a_l; k_1, k_2, 1) = 1. \tag{4. 8}$$

Az $m_n(a_1, ..., a_l; \quad k_1, k_2, x) \qquad (n=l, \ l+1, ...)$

függvénysorozat eleget tesz (2. 4)-nek. Ezért a 2. 1 tétel értelmében

$$\left| m_n'(a_1, ..., a_l; k_1, k_2, x) - \frac{1}{c(r)\log 2} \frac{1}{1+x} \right| \leqq 4q^{n-l}. \tag{4. 9}$$

Legyen E_1 azon α-k egy halmaza, amelyekre $a_1, ..., a_l$-re valamely megszorítás áll fenn, E_2 azon α-k halmaza, amelyekre B_{n-1} és B_n maradékosztályaira (mod r), továbbá $a_n, a_{n+1}, ..., a_m$-re, $n \geqq l$, valamilyen megszorítás áll fenn. Jelölje most és a továbbiakban $P(...)$ a zárójelben álló halmaz mértékét. Akkor (4. 9) korolláriumaképpen igazolom a következő tételt:

4. 1 TÉTEL:

$$|P(E_1E_2) - P(E_1)P(E_2)| \leqq 6c(r)\log 2 \cdot q^{n-l} P(E_1)P(E_2). \tag{4. 10}$$

Bizonyítás. Minden E_1 előállítható, mint olyan diszjunkt halmazok egyesítése, amelyekre $a_1, ..., a_l$ adottak. Ezért (4. 9)-et azon α-k mértékével szorozva, amelyekre $a_1, ..., a_l$ adott értékeket vesz fel és az összes E_1-gyel „összeférhető" $a_1, ..., a_l$ rendszerekre összegezve nyerjük, ha $E(\alpha: ...)$ azon α-k halmazát jelenti, amelyekre a zárójelben felsorolt tulajdonságok teljesülnek és a vessző x szerinti deriválást jelent, hogy

$$\begin{aligned} &\Big| P'\big(E_1 E(\alpha: B_{n-1} \equiv k_1, B_n \equiv k_2 \zeta_{n+1}^{-1} \leqq x)\big) - \\ &\quad - P(E_1) \frac{1}{c(r)\log 2} \cdot \frac{1}{1+x} \Big| \leqq 4q^{n-l} P(E_1). \end{aligned} \tag{4. 11}$$

Minden $a_{n+1}, ..., a_m$-re vonatkozó megkötés kifejezhető úgy, hogy ζ_{n+1}^{-1} értékét egy legfeljebb megszámlálhatóan végtelen sok intervallumból álló rendszerre korlátozzuk. Jelölje egy pillanatig E_2^* ezt az intervallumrendszert. Akkor (4. 11) integrálásával nyerjük, hogy

$$\left| P(E_1E_2) - P(E_1) \frac{1}{c(r)\log 2} \int_{E_2^*} \frac{dx}{1+x} \right| \leqq 4q^{n-l} \int_{E_2^*} dx \cdot P(E_1), \tag{4. 12}$$

ahonnan a 4. 1. tétel

$$P(E_2) = \frac{1}{c(r)\log 2} \int_{E_2^*} \left(\frac{1}{1+x} + 0(q^n) \right) dx$$

miatt már adódik.

II. FEJEZET

Alkalmazások a lánctörtelméletben

A következő két paragrafusban a továbbiakhoz szükséges valószínűségszámítási tételeket állítom össze. A 7. §-ban megmutatom, hogy az e dolgozatban tárgyalt valószínűségi változók, amelyek a (0, 1)-ben egyenletes eloszlású α valószínűségi változó szabályos lánctörtkifejtése segítségével származtathatók, a bizonyított tételek feltevéseit kielégítik.

5. §

A következőkben ξ, η, ζ valószínűségi változókat, $E, E_1, \ldots$ Borel-halmazokat jelölnek. $P(E)$ jelöli E valószínűségét, $M(\xi)$, illetőleg $D(\xi)$ ξ várható értékét, illetőleg szórását jelenti. ξ^* jelenti a $\xi - M(\xi)$ valószínűségi változót, $F_\xi(x)$ a ξ eloszlásfüggvényét, $F_{\xi_1\xi_2}(x, y)$ a ξ_1 és ξ_2 változók együttes eloszlásfüggvényét, $P(E|A)$ E feltételes valószínűségét jelenti valamely pozitív valószínűségű A halmazra vonatkozólag. $M(\xi|A)$, $D(\xi|A)$, $F_\xi(x|A)$ ξ feltételes várható értékét, ill. szórását, ill. eloszlásfüggvényét jelenti az A feltétel mellett.

5. 1. SEGÉDTÉTEL: *Legyenek $\xi_1, \xi_2, \ldots$ valószínűségi változók, amelyekre minden E_1, E_2 halmazra teljesül*

$$P(\xi_i \in E_1, \xi_j \in E_2) = P(\xi_1 \in E_1)P(\xi_2 \in E_2)(1 - \vartheta_{E_1E_2}(i, j)), \tag{5. 1}$$

ahol

$$\vartheta_{E_1E_2}(i, j) \leqq g(|i-j|), \tag{5. 2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} g(n) < \infty. \tag{5. 3}$$

Akkor

$$D^2(\xi_{k_1} + \ldots + \xi_{k_2}) < c_1 \sum_{k=k_1}^{k_2} D^2(\xi_k).^6 \tag{5. 4}$$

Bizonyítás. Fennáll

$$D^2(\xi_{k_1} + \ldots + \xi_{k_2}) = \sum_{k=k_1}^{k_2} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\, dF_{\xi_k^*}(x) + 2 \sum_{\substack{i,j=k_1 \\ i>j}}^{k_2} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xy\, dF_{\xi_i^*\xi_j^*}(x, y) = \tag{5. 5}$$

$$= \sum_{k=k_1}^{k_2} D^2(\xi_k) + 2 \sum_{\substack{i,j=k_1 \\ i>j}}^{k_2} M(\xi_i^*\xi_j^*).$$

Mármost (5. 1), (5. 2) és a RADON—NIKODYM-tétel alkalmazásával adódik, hogy

$$M(\xi_i^*\xi_j^*) \leqq g(|i-j|) D(\xi_i^*) D(\xi_j^*) \leqq \frac{g(|i-j|)}{2} (D^2(\xi_i) + D^2(\xi_j)),$$

ahonnan (5. 5) miatt (5. 4) már következik.

[6] $c_1, \ldots$ az E-től és a ξ-ktől független konstansokat jelentenek, amelyeknek nem kell megegyezniök az előző fejezet konstansaival.

6. §

A nagy számok erős törvénye

Legyenek $\xi_1, \xi_2 \ldots$ valószínűségi változók, amelyek egymástól való függése oly gyenge, hogy teljesül a következő: Ha η_1 ill. η_2 valószínűségi vektor, amelynek komponensei

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$$

illetőleg

$$\xi_{n+d}, \ldots, \xi_m,$$

E_1, illetőleg E_2 n, illetőleg $m-(n+d+1)$-dimenziós Borel-halmazok, akkor

$$P(\eta_1 \in E_1, \eta_2 \in E_2) = P(\eta_1 \in E_1) P(E_2 \in \eta_2)(1+\vartheta_{E_1 E_2}(d)), \tag{6. 1}$$

ahol

$$|\vartheta_{E_1 E_2}(d)| < g(d), \quad \sum_{d=1}^{\infty} g(d) < \infty, \quad g(d) < \frac{1}{2} \qquad (d=1, 2, \ldots). \tag{6. 2}$$

A $D(\xi_k)$-knak nem kell létezniök; ehelyett a következő, gyengébb megszorításokra van szükségem: Létezzék oly $t_1, t_2, \ldots$ pozitív számokból álló számsorozat, amelyekre teljesül valamely 1-nél kisebb ϑ-val

$$\int_{|x| \leqq t_k} x^2 \, dF_{\xi_k^*}(x) = O(k^{\vartheta}), \tag{6. 3}$$

$$\int_{|x| > t_k} |x| \, dF_{\xi_k^*}(x) = o(1) \qquad (k \to \infty) \tag{6. 4}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(|\xi_k^*| > t_k) < \infty. \tag{6. 5}$$

Ezen feltevések mellett fennáll a következő

6. 1. TÉTEL:

$$P\left(\lim_{n \to \infty} n^{-1} \sum_{k=1}^{n} \xi_k^* = 0\right) = 1. \tag{6. 6}$$

Bizonyítás. Definiáljuk a $\bar{\xi}_k$ $(k_1, k_2, \ldots)$ valószínűségi változókat a

$$\bar{\xi}_k = \begin{cases} \xi_k, & \text{ha } |\xi_k^*| < t_k \\ 0, & \text{különben} \end{cases} \tag{6. 7}$$

formulával

Akkor a BOREL—CANTELLI lemma és (6. 5)-ből adódik, hogy

$$P(\lim_{n \to \infty} (\xi_n - \bar{\xi}_n) = 0) = 1. \tag{6. 8}$$

Továbbá (6. 4) miatt fennáll, hogy

$$M(\bar{\xi}_k) = M(\xi_k) + o(1) \qquad (k \to \infty) \tag{6. 9}$$

(6. 8)-ból és (6. 9)-ből következik, hogy elegendő a tételt a $\bar{\xi}_k$ változókra igazolni.

Vezessük be a

(6. 10) $$\zeta_n = \sum_{k=1}^{n} \bar{\xi}_k$$

jelölést. Miután (6. 3) és (6. 7) miatt a $\bar{\xi}_k$-k szórása létezik és

(6. 11) $$D^2(\bar{\xi}_k) = O(k^{\vartheta}),$$

azért az 5. 1 segédtételből következik, hogy

(6. 12) $$D(\zeta_n) = O(n^{1+\vartheta}),$$

innen a *Csebisev*-egyenlőtlenség alkalmazásával nyerjük, hogy

(6. 13) $$P(|\zeta_n^*| > \varepsilon n) = O(n^{-(1-\vartheta)}).$$

Ha (6. 13)-ban n helyébe $\left[m^{\frac{2}{1-\vartheta}}\right]$-t írunk és m-re összegezünk, akkor konvergens sort kapunk. Ezért a *Borel—Cantelli*-féle lemma értelmében

(6. 14) $$P\left(\lim_{m\to\infty} \left[m^{\frac{2}{1-\vartheta}}\right]^{-1} \xi^*_{\left[m^{\frac{2}{1-\vartheta}}\right]} = 0\right) = 1.$$

A 6. 1. tétel bizonyításának befejezésére most már elegendő megmutatni, hogy

(6. 15) $$P\left(\max_{0 \leqq k < (m+1)^{\frac{2}{1-\vartheta}}} \left(\zeta_k^* - \zeta^*_{\left[m^{\frac{2}{1-\vartheta}}\right]}\right) = o\left(m^{\frac{2}{1-\vartheta}}\right)\right) = 1.$$

Vezessük be a következő jelöléseket:

$A_k^{(m)}$ jelenti azt az eseményt, hogy

(6. 16) $$\begin{cases} \zeta_\varkappa^* \leqq \varepsilon m^{\frac{2}{1-\vartheta}} & (\varkappa = 0; 1, \ldots, k-1) \\ \zeta_k^* > \varepsilon m^{\frac{2}{1-\vartheta}}; \end{cases}$$

$B_k^{(m)}(x)$ jelenti azt az eseményt, hogy

(6. 17) $$\zeta^*_{\left[(m+1)^{\frac{2}{1-\vartheta}}\right]} - \zeta_k^* > -x;$$

$c_m(\varepsilon)$ azt az eseményt, hogy

(6. 18) $$\max_{0 \leqq k \leqq (m+1)^{\frac{2}{1-\vartheta}}} \zeta_k^* > \varepsilon m^{\frac{1}{2-\vartheta}},$$

$D_m(t)$ azt az eseményt, hogy

(6. 19) $$\zeta^*_{\left[m^{\frac{2}{1-\vartheta}}\right]} \geqq t.$$

Miután az $A_0^{(m)}, \ldots$ események egymást páronként kizárják és valamely $A_k^{(m)}$ teljesülése esetén teljesül $c_m(\varepsilon)$ is, ezért

$$C_m(\varepsilon) = \bigcup_{k=0}^{\left[(m+1)^{\frac{2}{1-\vartheta}}\right]} A_k^{(m)}. \tag{6.20}$$

Másrészt $A_k^{(m)}$ és $B_k^{(m)}\left(\frac{\varepsilon}{2} m^{\frac{2}{1-\vartheta}}\right)$ együttes bekövetkezése esetén valamely k-ra következik $D_m\left(\frac{\varepsilon}{2} m^{\frac{2}{1-\vartheta}}\right)$. Ezért

$$P\left(D\left(\frac{\varepsilon}{2} m^{\frac{2}{1-\vartheta}}\right) \geqq \sum_{k=0}^{\left[(m+1)^{\frac{2}{1-\vartheta}}\right]} P(A_k^{(m)} B_k^{(m)})\left(\frac{\varepsilon}{2} m^{\frac{2}{1-\vartheta}}\right)\right) \geqq \tag{6.21}$$

$$\geqq \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\left[(m+1)^{\frac{2}{1-\vartheta}}\right]} P(A_k^{(m)}) P(B_k^{(m)})\left(\frac{\varepsilon}{2} m^{\frac{2}{1-\vartheta}}\right),$$

utóbbi (6. 1) és (6. 2) miatt.

Becsüljük most meg a $P\left(B_k^{(m)}\left(\frac{\varepsilon}{2} m^{\frac{2}{1-\vartheta}}\right)\right)$ valószínűséget alulról. Mindenesetre ((6. 17) miatt)

$$P\left(B_k^{(m)}\left(\frac{\varepsilon}{2} m^{\frac{2}{1-\vartheta}}\right)\right) = 1 - P\left(\zeta^*_{\left[(m+1)^{\frac{2}{1-\vartheta}}\right]} - \zeta_k^* < -\frac{\varepsilon}{2} m^{\frac{2}{1-\vartheta}}\right) \geqq$$

$$\geqq 1 - P\left(\left|\zeta^*_{\left[(m+1)^{\frac{2}{1-\vartheta}}\right]} - \zeta_k^*\right| > \frac{\varepsilon}{2} m^{\frac{2}{1-\vartheta}}\right);$$

ezért az 5. 1 segédtétel és a *Csebisev*-egyenlőtlenség miatt

$$P\left(B_k^{(m)}\left(\frac{\varepsilon}{2} m^{\frac{2}{1-\vartheta}}\right)\right) > 1 - 0\left(\frac{1}{\varepsilon^2} \frac{m^{\frac{2}{1-\vartheta}+\vartheta}}{m^{\frac{u}{1-\vartheta}}}\right),$$

ahonnan következik, hogy ε-től függően elegendő nagy m-re

$$P\left(B_k^{(m)}\left(\frac{\varepsilon}{2} m^{\frac{2}{1-\vartheta}}\right)\right) \geqq \frac{1}{2}. \tag{6.22}$$

(6. 20)-ból, (6. 21)-ből és (6. 22)-ből következik, hogy

$$P(C_m(\varepsilon)) \leqq 4P\left(D_m\left(\frac{\varepsilon}{2} m^{\frac{2}{1-\vartheta}}\right)\right), \tag{6.23}$$

innen (6. 14) miatt (6. 15) következik, amivel a 6. 1. tétel be van bizonyítva.

Legyenek most $\xi_1, \xi_2, \ldots$ valószínűségi változók, amelyekre teljesülnek a következő feltevések: (6. 1), (6. 2), továbbá

$$M(\xi_k) \geqq 0, \quad \lim_{k\to\infty} M(\xi_k) = 0 \tag{6. 24}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} M(\xi_k) = \infty. \tag{6. 25}$$

(6. 24)-ből és (6. 25)-ből következik egy oly

$$k_1, k_2, \ldots$$

indexsorozat létezése, amelyre elegendő nagy l-re teljesül

$$\sum_{k=1}^{k_l} M(\xi_k) \leqq l, \quad \sum_{k=1}^{k_l+1} M(\xi_k) > l. \tag{6. 26}$$

Még megkövetelem egy oly $t_1, t_2, \ldots$ (nem feltétlenül véges) pozitív számokból álló számsorozat létezését, hogy valamely 1-nél kisebb ϑ-val fennálljanak a

$$\int\limits_{|x|\leqq t_l} x^2\, dF_{\xi_k^*}(x) = o\big(M(\xi_k) l^{\vartheta}\big) \qquad (k_l \leqq k < k_{l+1}), \tag{6. 27}$$

$$\int\limits_{|x|>t_l} |x|\, dF_{\xi_k^*}(x) = o\big(M(\xi_k)\big) \qquad (k_l \leqq k < k_{l+1};\ l\to\infty) \tag{6. 28}$$

és

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(|\xi_k^*| > t_l) < \infty \qquad (k_l \leqq k < k_{l+1}) \tag{6. 29}$$

relációk.

Ezen feltevések teljesülése esetén fennáll a következő

6. 2. TÉTEL:

$$P\left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k \sim \sum_{k=1}^{n} M(\xi_k)\right) = 1. \tag{6. 30}$$

Bizonyítás. Definiáljuk az η_l valószínűségi változókat a

$$\eta_l = \sum_{k=k_l+1}^{k_{l+1}} \xi_k \tag{6. 31}$$

összeggel. Először megmutatom, hogy az $\eta_1, \eta_2, \ldots$ sorozatra teljesül (6. 31). (6. 25)-ből és (6. 26)-ból következik, hogy

$$\lim_{l\to\infty} M(\eta_l) = 1. \tag{6. 32}$$

Jelölje most $\bar{\xi}_k$ a

$$\bar{\xi}_k = \begin{cases} \xi_k, & \text{ha} \quad |\xi_k^*| > t_l \qquad (k_l \leqq k < k_{l+1}) \\ 0 & \text{különben} \end{cases} \tag{6. 33}$$

formula által definiált valószínűségi változót, legyen továbbá

(6.34) $$\bar{\eta}_l = \sum_{k=k_l+1}^{k_{l+1}} \bar{\xi}_k .$$

Akkor (6.29) és a *Borel—Cantelli* lemma miatt

(6.35) $$P(\lim_{l\to\infty}(\eta_l - \bar{\eta}_l) = 0)) = 1.$$

(6.24), (6.26), (2.27) és az 5.1 segédtételből következik, hogy $D^2(\bar{\eta}_l)$ létezik és

$$D^2(\bar{\eta}_l) = O(l^{\vartheta});$$

ezért a 6.1 tétel értelmében

(6.36) $$P\left(\lim_{n\to\infty} n^{-1} \sum_{l=1}^{n} \bar{\eta}_l^* = 0\right) = 1;$$

miután (6.26) és (6.24) miatt

(6.37) $$\lim_{l\to\infty} M(\bar{\eta}_l) = 1,$$

ezért (6.36) ekvivalens a

(6.38) $$P\left(\sum_{l=1}^{n} \bar{\eta}_l \sim \sum_{l=1}^{n} M(\bar{\eta}_l)\right) = 1 \qquad (n\to\infty)$$

relációval, vagyis (6.28), (6.29), (6.33) és (6.34) miatt a

(6.39) $$P\left(\sum_{l=1}^{n} \eta_l \sim \sum_{l=1}^{n} M(\eta_l)\right) = 1 \qquad (n\to\infty)$$

relációval is. A tétel bizonyításának befejezése céljából most már elegendő megmutatni, hogy

(6.40) $$P(\max_{k_n+1\leq k<k_{n+1}} |\bar{\xi}_{k_n+1}^* + \dots + \bar{\xi}_k^*| = 0(n)) = 1.$$

(6.40) bizonyítása analóg módon történhetik (6.15) bizonyításával. Ezért részletezésétől eltekintek.

Ezzel a 6.2. tételt bebizonyítottuk.

Alkalmazások a lánctörtelméletben

Legyen $f(k_1, k_2, l)$ egész k_1, k_2-kre és természetes l-ekre definiált k_1-ben és k_2-ben r szerint periodikus függvény, amelyről feltételezzük, hogy

(7.1) $$f(k_1, k_2, l) = O(l^{\varrho}) \qquad (\varrho < 1).$$ [7]

[7] Felhívom a figyelmet arra, hogy az $r=1$ esetben HINCSIN e tételt az erősebb $\varrho<1/2$ megszorítás mellett bizonyította be (l. a (12) formulát). A disszertációban e tétel bizonyítása csak $\varrho<3/4$ esetén volt helyes. RÉNYI és TURÁN akadémikusok opponensi bírálata után vettem észre, hogy a tétel teljes egészében menthető, ha a disszertáció 6. 1. tételét jelen dolgozat 6. 1. tételével helyettesítjük. A két tétel között a különbség az, hogy jelen dolgozat 6. 1. tétele a ξ_k-k közötti függésre, ill. függetlenségre vonatkozó erősebb megszorítás árán a tételt a (6. 3)-ban fellépő „nagyobb" ϑ értékekre is kiterjeszti; a disszertációban ugyanis $\vartheta<1$ helyett az erősebb $\vartheta<1/2$ egyenlőtlenségre volt szükségem. Ezen utóbbi megszorítás a disszertációban és jelen dolgozatban (7. 3) által definiált $\xi_m(\alpha)$ valószínűségi változókra már nem teljesül, míg a gyengébb $\vartheta<1$ még igen.

7. §

Akkor érvényes a következő

7. 1. TÉTEL: *Majdnem minden α-ra fennáll*

(7. 2)
$$\lim_{n\to\infty} n^{-1} \sum_{m=1}^{n} f(B_{m-1}, B_m, a_{m+1}) =$$
$$= \left(c(r)\log 2\right)^{-1} \sum_{\substack{k_1, k_2=0 \\ (k_1, k_2, r)=1}}^{r-1} \sum_{l=1}^{\infty} f(k_1, k_2, l) \log \frac{(l+1)^2}{l(l+2)}.$$

Bizonyítás. Legyenek a ξ_m $(m=1, 2, \ldots)$ valószínűségi változók definiálva a

(7. 3)
$$\xi_m = \xi_m(\alpha) = f(B_{m-1}, B_m, a_{m+1})$$

formulákkal. A 2. 1. tételből következik, hogy

(7. 4)
$$M(\xi_m) = \left(c(r)\log 2\right)^{-1} \sum_{\substack{k_1, k_2=0 \\ (k_1, k_2, r)=1}}^{r-1} \sum_{l=1}^{\infty} f(k_1, k_2, l) \log \frac{(l+1)^2}{l(l+2)} + 0(q^m).$$

(4. 10)-ből következik, hogy a ξ_m $(m=1, 2, \ldots)$ változókra teljesül (6. 1); (7. 1)-ből következik, hogy a

$$t_k = k^2$$

választás mellett teljesül (6. 3), (6. 4) és (6. 5) is. Így a 6. 1. tétel feltevései a $\xi_m(\alpha)$ változókra teljesülnek, ahonnan a 7. 1. tétel (7. 4) miatt már következik.

8. §

Érdekesebb speciális esetek

Legyen

(8. 1)
$$f(k_1, k_2, l) = \begin{cases} 1, & \text{ha } k_2 \equiv k' \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Akkor a 7. 1. tételből következik a

8. 1. TÉTEL: *Majdnem minden α-ra fennáll, hogy*

(8. 2)
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{\substack{\nu \leqq n \\ B_\nu \equiv k'}} 1 = \frac{r\varphi((k', r))}{c(r)(k', r)}.$$

(8. 2.) S. HARTMANnal közös tételünk élesítése, amely választ ad a bevezetőben említett, ERDŐssel felvetett kérdésre is.

Ha

$$f(k_1, k_2, l) = \begin{cases} f(l), & \text{ha } k_1 \equiv k',\ k_2 \equiv k'' \\ 0 & \text{különben,} \end{cases}$$

ahol $f(l)=O(l^{\varrho})$ $(\varrho<1)$, akkor a 7. 1. tétel alkalmazásával nyerjük, hogy majdnem minden α-ra

$$(8.3)\qquad \lim_{n\to\infty} n^{-1}\sum_{\nu=1}^{n} f(B_{\nu-1}, B_{\nu}, a_{\nu+1}) = (c(r)\log 2)^{-1}\sum_{l=1}^{\infty} f(l)\log\frac{(l+1)^2}{l(l+2)}$$

(8. 3), összehasonlítva (13)-mal, úgy is interpretálható, hogy az $a_{\nu+1}$-ek aszimptotikus eloszlását az a feltétel, hogy $B_{\nu-1}$ és B_{ν} maradékosztályát (mod r) megkötjük, majdnem minden α-ra nem befolyásolja. (Természetesen $B_{\nu-1}\equiv k'$, $B_{\nu}\equiv k''$ csak $(k', k'', r)=1$ esetén lehetséges.)

III. FEJEZET

Alkalmazások a diofantoszi approximáció metrikus elméletében

Ebben a fejezetben a bevezetésben említett (37) és (38) formulákat fogom igazolni.

9. §

Legyen

$$(9.1)\qquad N^{*(r)}_{\alpha,f,k'}(n) = \sum_{\substack{|\alpha k-l|\leq\frac{f(k)}{k}\\ (k,l)=1\\ k\equiv k' (\mathrm{mod}\ r)\\ k\leq n}} 1,$$

$$(9.2)\qquad N^{(r)}_{\alpha,f,k'}(n) = \sum_{\substack{k\leq n\\ \|\alpha k\|\leq\frac{f(k)}{k}\\ k\equiv k' (\mathrm{mod}\ r)}} 1.$$

Miután r rögzített, s a továbbiakban N^*, illetőleg N jelöléséből r-et elhagyom. Ha a modulus nincs megadva, akkor kongruenciák mindig az r modulusokra vonatkoznak.

9. 1. TÉTEL: *Legyen $f(k)$ monoton csökkenő pozitív függvény, amelyre teljesülnek a következő feltételek:*

$$(9.3)\qquad f(k)\leq\tfrac{1}{2},$$

$$(9.4)\qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{f(k)}{k}=\infty.$$

Akkor majdnem minden α-ra teljesül

$$(9.5)\qquad N^{*}_{\alpha,f,k'}(n)\sim\frac{12}{\pi^2}\,\frac{r}{c(r)}\,\frac{\varphi((k',r))}{(k',r)}\sum_{k=1}^{n}\frac{f(k)}{k}\qquad (n\to\infty).$$

9. 2. TÉTEL: *A 9. 1. tétel feltételeinek teljesülése esetén majdnem minden α-ra fennáll*

$$(9.6)\qquad N_{\alpha,f,k'}(n)\sim\frac{2}{r}\sum_{k=1}^{n}\frac{f(k)}{k}\qquad (n\to\infty).$$

A következő paragrafusok e két tétel bizonyításával foglalkoznak.

10. §

Lánctörtelméleti segédtételek

Ismeretes, hogy ha $f(k) \leqq \frac{1}{2}$, akkor $|k\alpha - l| \leqq \frac{f(k)}{k}$ és $(k, l) = 1$ csak akkor lehetséges, ha valamely ν-vel

$$k = B_\nu .$$

Miután, mint ismeretes,

$$(10.1) \qquad |B_\nu \alpha - A_\nu| = \frac{1}{B_\nu \zeta_{\nu+1} + B_{\nu-1}} = \frac{1}{B_\nu \varphi_\nu},$$

ahol

$$(10.2) \qquad \varphi_\nu = \zeta_{\nu+}+{}_1 \frac{B_{\nu-1}}{B_\nu},$$

ezért $|B_\nu \alpha - A_\nu| \leqq \frac{f(B_\nu)}{B_\nu}$ ekvivalens a

$$(10.3) \qquad 1 \leqq \varphi_\nu f(B_\nu)$$

relációval. Ezért $N^*_{\alpha,f,k'}(n)$-re a következő azonosság érvényes:

$$(10.4) \qquad N^*_{\alpha,f,k'}(n) = \sum_{\substack{B_\nu \leqq n \\ B_\nu \equiv k' \\ 1 \leqq \varrho_\nu f(B_\nu).}} 1.$$

Hogy $N_{\alpha,f,k'}(n)$-re is nyerjünk egy analóg előállítást, szükségünk van a következő segédtételre.

10. 1. SEGÉDTÉTEL: *Legyen α tetszőleges irracionális szám, oly szám, amelyre teljesül egy egész k-val.*

$$(10.5) \qquad \|k\alpha\| \leqq \frac{1}{2k}.$$

Akkor létezik oly ν, hogy

$$(10.6) \qquad k = c_{\nu+1} B_\nu,$$

ahol

$$(10.7) \qquad 1 \leqq c_{\nu+1} \leqq a_{\nu+1}.$$

Bizonyítás: k szerinti teljes indukcióval belátható, hogy minden k előállítható a

$$(10.8) \qquad k = \sum_{l=0}^{\nu} c_{l+1} B_l$$

alakban, ahol $c_1, \ldots, c_{\nu+1}$ egészek, továbbá $0 \leqq c_1 < a_1$, $0 \leqq c_{l+1} \leqq a_{l+1}$, továbbá $c_{l+1} = a_{l+1}$ csak akkor lehetséges, ha $c_l = 0$. Vezessük be a

$$(10.9) \qquad D_l = B_l \alpha - A_l$$

jelölést. Ismeretes, hogy

(10. 10) $$D_l = \frac{(-1)^l}{B_l\zeta_{l+1}+B_{l-1}} = \frac{(-1)^l}{B_l\varphi_l},$$

(10 .11) $$D_{l+1} = D_l a_{l+1} + D_{l-1},$$

továbbá

(10. 12) $$D_l = -\frac{1}{\zeta_{l+1}} D_{l-1}.$$

Ha $c_1, \ldots, c_{\nu+1}$ jelentik k (10. 8) alakú előállításának „koefficienseit", akkor $c_1 = c_2 = 0$ esetén igazolható, hogy

(10. 13) $$\|k\alpha\| = \left|\sum_{l=0}^{\nu} c_{l+1} D_l\right|.$$

(10. 13) bizonyításához elegendő megmutatni, hogy a jobboldalon álló kifejezés $\frac{1}{2}$-nél nem nagyobb.

$c_1 = c_2 = 0$ esetén (10. 1) miatt

$$\left|\sum_{l=2}^{\nu} c_{l+1} D_l\right| \leqq |a_3 D_2 + a_5 D_4 + \ldots| = |D_1| = \frac{1}{B_1\zeta_2 + B_0} < \frac{1}{2},$$

amivel (10. 13)-at igazoltuk.

Tekintsük most azt az esetet, amikor c_1 és c_2 nem mindkettő zérus. Ha $c_1 \neq 0$, akkor (10. 8) miatt egyrészt[8]

(10. 14) $$\{k\alpha\} = \left\{\sum_{l=0}^{\nu} c_{l+1} D_l\right\} < (a_1 - 1) D_0 + a_3 D_2 + \ldots = 1 - \frac{1}{\zeta_1},$$

másrészt

(10. 15) $$\{k\alpha\} > c_1 D_0 + (a_2 - 1) D_1 + a_4 D_3 + \ldots = (c_1 - 1) D_0 - D_1 \geqq -D_1.$$

Ezért, ha $k \geqq B_2$, akkor (10. 8) előállításában $c_1 \neq 0$ és (10. 5) egyszerre nem lehetséges. Így $c_1 \neq 0$ esetén a (10. 5)-nek eleget tevő k-k csak

$$k = c_1 B_0 + c_2 B_1$$

alakúak lehetnek. $c_1 > 1$ (10. 14) és (10. 15) miatt csak akkor lehetséges, ha $c_2 = 0$. Ebben az esetben (10. 6)-ot igazoltuk. Ha $c_1 = 1$, akkor

(10. 16) $$\{k\alpha\} = \{D_0 + c_2 D_1\} = D_0\left(1 - \frac{c_2}{\zeta_2}\right).$$

Most két esetet különböztetek meg, aszerint, hogy

$$\text{a)} \quad c_2 < \frac{\zeta_2}{2} \quad \text{vagy} \quad \text{b)} \quad c_2 > \frac{\zeta_2}{2}.$$

[8] $\{z\}$ z törtrészét jelenti.

a) (10. 16)-ból következik, hogy

$$\{k\alpha\} > \frac{1}{2} D_0 = \frac{1}{2\zeta_1}; \tag{10. 17}$$

miután $k \geqq 1 + a_1 + \zeta_1$, ezért (10. 14)-ből és (10. 17)-ből következik, hogy $c_1 = 1$, $c_2 \neq 0$, $c_2 \leqq \zeta_2/2$ ellentmond (10. 5)-nek.

b) $c_2 > \zeta_2/2$, akkor

$$\{k\alpha\} > D_0 + (a_2 - 1) D_1 = -D_1 + D_2 \geqq \frac{1}{B_2 + \frac{B_1}{\zeta_3}}. \tag{10. 18}$$

Mármost

$$k = B_0 + C_2 B_1 > B_0 + \frac{\zeta_2}{2} B_1 = \frac{B_0}{2} + \frac{B_0 + \left(a_2 + \frac{1}{\zeta_3}\right) B_1}{2} > \frac{1}{2}\left(B_2 + \frac{B_1}{\zeta_3}\right).$$

Ezért $c_1 = 1$, $c_2 > \zeta_2/2$ is ellentmond (10. 15)-nek. Ezzel igazoltuk a 10.1. segédtételt abban az esetben, amikor k (10. 8) előállításában $c_1 \neq 0$.

Tegyük fel, hogy $c_1 = 0$, $c_2 \neq 0$. Akkor

$$\{k\alpha\} < -(a_2 D_1 + a_4 D_3 + \ldots) = D_0 = \frac{1}{\zeta_1}, \tag{10. 19}$$

továbbá

$$\{k\alpha\} > -(c_2 D_1 + (a_3 - 1) D_2 + a_5 D_4 + \ldots) = (c_2 - 1) D_1 - D_2 \tag{10. 20}$$

(10. 19)-ből és (10. 20)-ból adódik, hogy ha k eleget tesz (10. 5)-nek és (10. 8) előállításában $c_1 = 0$, $c_2 \neq 0$, akkor

$$k = B_1 + c_3 B_2. \tag{10. 21}$$

A tétel ebben az esetben ugyanúgy látható be, mint $c_1 \neq 0$ esetén.

Tekintsük most azt az esetet, amikor k (10. 8) előállításában $c_1 = c_2 = 0$. Ekkor érvényes (10. 13). Legyen l az a legkisebb index, amelyre k (10. 8) alakú előállításában $c_{l+2} \neq 0$ $(l \geqq 2)$. Akkor

$$\begin{aligned} \|k\alpha\| &> |c_{l+1} D_l + (a_{l+2} - 1) D_{l+1} + a_{l+4} D_{l+3} + \ldots) = \\ &= (c_{l+1} - 1) D_l - D_{l+1} \geqq |D_{l+1}| \end{aligned} \tag{10. 22}$$

(10. 10)-ből következik, hogy

$$|D_{l+1}| > \frac{1}{2B_{l+2}}; \tag{10. 23}$$

innen azonnal következik, hogy $l > \nu - 2$, mert

$$l \leqq \nu - 2$$

ellentmond (10. 5)-nek. Mint a $c_1 \neq 0$ esetben, ugyanúgy látható be, hogy a (10. 5)-nek eleget tevő k-k $c_{\nu+1} B_\nu$-n kívül csak olyanok lehetnek, amelyek a

$$k = B_{\nu-1} + c_{\nu+1} B_\nu \tag{10. 24}$$

alakba írhatók. Most a $c_1 \neq 0$ esethez analóg módon megmutatom, hogy a (10. 24) alakú k-k sem elégíthetik ki (10. 5)-öt.

Ismét két esetet különböztetek meg, aszerint, hogy

$$\text{a)} \quad c_{\nu+1} < \frac{\zeta_{\nu+1}}{2} \quad \text{vagy} \quad \text{b)} \quad c_{\nu+1} > \frac{\zeta_{\nu+1}}{2},$$

a) (10. 12) miatt

$$\|k\alpha\| = |D_{\nu-1} + c_{\nu+1} D_\nu| = |D_{\nu-1}| \left(1 - \frac{c_{\nu+1}}{\zeta_{\nu+1}}\right) > \frac{|D_{\nu-1}|}{2}.$$

Miután $k \geqq B_{\nu-1} + B_\nu$, továbbá

$$|D_{\nu-1}| = \frac{1}{B_{\nu-1}\zeta_\nu + B_{\nu-2}} > \frac{1}{B_\nu + B_{\nu-1}},$$

azért e tételt az a) esetben igazoltuk.

b) $$\|k\alpha\| \geqq |D_{\nu-1} + (a_{\nu+1} - 1) D_\nu| > |D_\nu| = \frac{1}{B_{\nu+1} + \frac{B_\nu}{\zeta_{\nu+2}}};$$

másrészt fennáll

$$k = B_{\nu-1} + C_{\nu+1} B_\nu > B_{\nu-1} + \frac{\zeta_{\nu+1}}{2} B_\nu = B_{\nu-1} + \frac{a_{\nu+1} + \frac{1}{\zeta_{\nu+2}}}{2} B_\nu > \frac{B_{\nu+1} + \frac{B_\nu}{\zeta_{\nu+2}}}{2}.$$

Ezzel bebizonyítottuk, hogy a (10. 24) alakú k-k nem tehetnek eleget (10. 5)-nek, amivel a 10. 1. segédtételt igazoltuk.

Most rátérek $N_{\alpha, f, k'}(n)$ explicit előállítására.

Legyen

(10. 25) $$1 \leqq c_{\nu+1} \leqq a_{\nu+1}.$$

Tekintem a

(10. 26) $$k = c_{\nu+1} B_\nu$$

számokat; meg akarom határozni azokat, amelyekre valóban teljesül

(10. 27) $$\|k\alpha\| \leqq \frac{f(k)}{k}.$$

Miután a 10. 1. segédtétel miatt (10. 27)-nek csak a (10.26) alakú k-k tehetnek eleget, ezért elegendő azon $c_{\nu+1}$-eket meghatározni, amelyekre teljesül

(10. 28) $$\|c_{\nu+1} B_\nu \alpha\| \leqq \frac{f(c_{\nu+1} B_\nu)}{c_{\nu+1} B_\nu}.$$

Miután (10. 10) miatt

(10. 29) $$\|c_{\nu+1} B_\nu \alpha\| = \frac{c_{\nu+1}}{B_\nu \varphi_\nu},$$

ezért (10. 28) ekvivalens a

$$\frac{c_{\nu+1}}{\varphi_\nu} \leqq \frac{f(c_{\nu+1} B_\nu)}{c_{\nu+1}},$$

vagyis a

$$c_{\nu+1}^2 \leqq \varphi_\nu f(c_{\nu+1} B_\nu) \tag{10. 30}$$

relációval. Innen azonnal adódik a következő

10. 2. SEGÉDTÉTEL:

$$N_{\alpha,f,k'}(n) = \sum_{B_\nu \leqq n}\!{}_{\nu} \quad \sum_{\substack{c_{\nu+1} B_\nu \leqq n \\ c_{\nu+1} B_\nu \equiv k' \\ c_{\nu+1}^2 \leqq \varphi_\nu f(c_{\nu+1} B_\nu)}}\!{}_{c_{\nu+1}} \quad 1. \tag{10. 31}$$

Miután a $c_{\nu+1}$ változó még $f(k)$ argumentumában is előfordul, ezért $N_{\alpha,f,k'}(n)$ (10. 31) alatti explicit előállítása nehezen kezelhető. Ezért inkább a belőle $f(k)$ monoton csökkenése miatt nyilvánvalóan következő

$$\sum_{B_{\nu+1} \leqq n} \quad \sum_{\substack{c_{\nu+1} B_\nu \equiv k' \\ c_{\nu+1}^2 \leqq \varphi_\nu f(B_{\nu+1})}} 1 \leqq N_{\alpha,f,k'}(n) \leqq \sum_{B_\nu \leqq n} \quad \sum_{\substack{c_{\nu+1} \equiv k' \\ c_{\nu+1}^2 \leqq \varphi_\nu f(B_\nu)}} 1 \tag{10. 32}$$

egyenlőtlenségekkel fogok dolgozni.

11. §

Speciális valószínűségszámítási segédtételek

HINCSIN [6] tétele szerint majdnem minden α-ra

$$\lim_{\nu \to \infty} \sqrt[\nu]{B_\nu} = \gamma, \tag{11. 1}$$

ahol γ független α-tól. γ értékét P. LÉVY határozta meg:

$$\gamma = e^{\frac{\pi^2}{12 \log 2}}. \tag{11. 2}$$

(10. 33)-ból és (11. 1)-ből következik, hogy elegendően nagy n_0-tól kezdve, tetszőlegesen kicsiny pozitív ε-ra, majdnem minden α-ra

$$\sum_{B_{\nu+1} \leqq n} \quad \sum_{\substack{c_{\nu+1} B_\nu \equiv k' \\ c_{\nu+1}^2 \leqq \varphi_\nu f((\gamma+\varepsilon)^\nu)}} 1 + O(1) \leqq N_{\alpha,f,k'}(n) \leqq \sum_{B_\nu \leqq n} \quad \sum_{\substack{c_{\nu+1} B_\nu \equiv k' \\ c_{\nu+1}^2 \leqq \varphi_\nu f((\gamma+\varepsilon)^\nu)}} 1 + O(1), \tag{11. 3}$$

ahol az $O(1)$ hibatag $n \to \infty$-re vonatkozik és függhet mind α-tól, mind ε-től.

Hasonlóképpen nyerjük (10. 4)-ből és (11. 1)-ből, hogy

$$\sum_{\substack{B_{\nu+1} \leqq n \\ B_\nu \equiv k' \\ 1 \leqq \varphi_\nu f((\gamma+\varepsilon)^\nu)}} 1 + O(1) \leqq N^*_{\alpha,f,k'}(n) \leqq \sum_{\substack{B_\nu \leqq n \\ B_\nu \equiv k' \\ 1 \leqq \varphi_\nu f((\gamma-\varepsilon)^\nu)}} 1 + O(1). \tag{11. 4}$$

Tekintsük α-t (0, 1)-ben egyenletes eloszlású valószínűségi változónak. Miután B_ν és φ_ν α függvényei,

$$(11.5)\qquad \underline{\varrho_\nu} = \begin{cases} 1 & \text{ha} \quad B_\nu \equiv k', \ 1 \leqq \varphi_\nu f((\gamma+\varepsilon)^\nu) \\ 0 & \text{különben,} \end{cases}$$

$$(11.6)\qquad \overline{\varrho_\nu} = \begin{cases} 1 & \text{ha} \quad B_\nu \equiv k', \ 1 \leqq \varphi_\nu f((\gamma-\varepsilon)^\nu) \\ 0 & \text{különben,} \end{cases}$$

$$(11.7)\qquad \underline{\varrho_{r,d}} = k, \quad \text{ha} \quad m_{k,d}^2 \leqq f((\gamma+\varepsilon)^\nu) < m_{k+1,d}^2,$$

$$(11.8)\qquad \overline{\varrho_{r,d}} = k, \quad \text{ha} \quad m_{k,d}^2 \leqq f((\gamma-\varepsilon)^\nu) < m_{k+1,d}^2$$

is valószínűségi változók; itt $m_{k,d}$ a

$$(11.9)\qquad md \equiv k'$$

kongruencia k-adik természetes m-el való megoldását jelenti. Miután egyelőre k' is rögzített, $\overline{\varrho_\nu}, \underline{\varrho_\nu}, \overline{\varrho_{\nu,d}}$ és $\underline{\varrho_{\nu,d}}$ és $\varrho_{v,d}$ jelölésében a k'-től való függést nem tüntettem fel.

Most $\nu \to \infty$-re aszimptotikusan meghatározom a (11. 5)—(11. 8)-cal definiált valószínűségi változók várható értékét.

Jelölje $\mu(k_1, k_2, t)$ $(k_1, k_2, r) = 1$, $t \geqq 1$ azon α-k halmazának a mértékét, amelyekre teljesül

$$(11.10)\qquad B_{\nu-1} \equiv k_1, \quad B_\nu \equiv k_2,$$

továbbá

$$(11.11)\qquad \varphi_\nu \geqq t.$$

Akkor fennáll a következő

11. 1. SEGÉDTÉTEL:

$$(11.12)\qquad \mu_\nu(k_1, k_2, t) = \begin{cases} (c(r)\log r)^{-1}\left(\dfrac{t-1}{t} + \log\dfrac{2}{t} + 0(q^\nu)\right), & \text{ha} \quad t \leqq 2, \\ (c(r)\log 2)^{-1}\dfrac{1}{t+0(q^\nu)}, & \text{ha} \quad t > 2. \end{cases}$$

Megjegyzések.

1. A 11. 1. segédtétel bizonyítása P. LÉVY ([7] 301—305. old.) egy gondolatán alapul. A bizonyításban azonban a (11. 10) megszorítások miatt P. LÉVY bizonyításához képest módosítások szükségesek.

2. Ha $f(k)$-ról az eddigi feltevéseken kívül még a

$$(11.13)\qquad \lim_{k\to\infty} f(k) = 0$$

relációt is feltételezem, akkor a 11. 1 segédtételre nincs szükségem; a 9. 1 és 9. 2 tételek bizonyítása ebben az esetben lényegesen egyszerűsödik. LE VEQUE e tételeket az $r=1$ esetben a (11. 13) feltevés mellett bizonyította be.

A 11. 1. segédtétel bizonyítása. Jelölje $m_n(k_1, k_2, x)$ ugyanazt, mint a bevezetésben, vagyis legyen $m_n(k_1, k_2, x)$ azon α-k halmazának mértéke, amelyekre teljesül a (4) és (25); jelölje továbbá $m_n^*(k_1, k_2, y)$ azon α-k halmazának mértékét, amelyekre teljesül (25), továbbá

$$y_n = \frac{B_{n-1}}{B_n} \leqq y, \tag{11.14}$$

$P(\ldots)$ azon α-k halmazának mértékét, amelyekre a zárójelben álló tulajdonságok teljesülnek. Ha $y=l'^{-1}$, ahol l' természetes szám, akkor

$$m_n^*(k_1, k_2, l'^{-1}) = \mathbf{P}(B_{n-1} \equiv k_1, B_n \equiv k_2, a_n \geqq b') = \tag{11.15}$$

$$= \sum_{l=l'}^{\infty} \mathbf{P}(B_{n-1} \equiv k_1, B_n \equiv k_2, a_n = l) = \sum_{l=l'}^{\infty} \mathbf{P}\big(B_{n-2} \equiv S(l), B_{n-1} \equiv k_1, a_n = l\big) =$$

$$= \sum_{l=l'}^{\infty} \int\limits_{(l+1)^{-1}}^{l^{-1}} dm_{n-1}\big(S(l), k_1, x\big),$$

ahol $S(l)$ (2. 5) által van definiálva. Innen a 2. 1 tétel alkalmazásával adódik, hogy

$$m_n^*(k_1, k_2, l'^{-1}) = \frac{\log(1+l'^{-1})}{c(r)\log 2} + O(q^n). \tag{11.16}$$

Legyen most

$$y = \frac{1}{l'+t} \qquad (0<t<1). \tag{11.17}$$

Akkor

$$m_n^*(k_1, k_2, l'^{-1}) - m_n^*(k_1, k_2, y) = \int\limits_y^{l'^{-1}} dm_n^*(k_1, k_2, \eta) =$$

$$= \int\limits_0^t \mathbf{P}(a_n = l' \mid y_{n-1} = \tau)\, dm_{n-1}^*\big(S(l'), k_1, \tau\big) = \tag{11.18}$$

$$= \int\limits_0^t \frac{1+\tau}{(l'+\tau)(l'+1+\tau)}\, dm_{n-1}^*\big(S(l'), k_1, \tau\big).$$

Legyen

$$L_n(k_1, k_2, y) = m_n^*(k_1, k_2, y) - \frac{\log(1+y)}{c(r)\log 2}. \tag{11.19}$$

Akkor (11. 16)-ból és (11. 18)-ból parciális integrálással nyerjük, hogy

$$L_n(k_1, k_2, y) \leqq \frac{3}{4} \max_{k_1, k_2, y} L_{n-1}(k_1, k_2, y) + O(q^n). \tag{11.20}$$

(11. 20)-ból n szerinti teljes indukcióval következik, hogy

$$m_n^*(k_1, k_2, y) = O\left(n \max\left(\left(\frac{3}{4}\right)^n, q^n\right)\right). \tag{11.21}$$

Innen ismét következik, hogy

$$(11.22)\qquad m_n^*(k_1, k_2, y) = \frac{\log(1+y)}{c(r)\log 2} + O(q'^n),$$

ahol q' bármely max $(\frac{3}{4}, q)$-nál nagyobb számot jelenthet.

Miután, mint az a lánctörtelmélet klasszikus formuláiból következik, minden 1-nél nem kisebb v-re

$$\mathbf{P}(\zeta_{n+1} > v \mid y_n = y) = \frac{1+y}{v+y},$$

ezért

$$(11.23)\qquad \mathbf{P}(B_{n-1} \equiv k_1, B_n \equiv k_2, \zeta_n > v) = \int_0^1 \frac{1+y}{v+y}\, dm_n^*(k_1, k_2, y).$$

Írjunk v helyébe $\max(1, t-y)$-t. Akkor nyerjük, hogy

$$(11.24)\qquad \mathbf{P}(B_{n-1} \equiv k_1, B_n \equiv k_2, \varphi_n \geqq t) =$$

$$= \begin{cases} \int\limits_0^t dm_n^*(k_1, k_2, y) + \int\limits_{t-1}^1 \frac{1+y}{t}\, dm_n^*(k_1, k_2, t), & \text{ha} \quad t < 2, \\ \frac{1}{t} \int\limits_0^1 (1+y)\, dm_n^*(k_1, k_2, y) & \text{ha} \quad t > 2, \end{cases}$$

ahonnan (11. 22) miatt (11. 12) már következik. Ezzel a 11. 1 segédtételt igazoltuk.

(11. 12)-ből látható, hogy a (11. 5)—(11. 8)-cal definiált valószínűségi változók várható értékére fennáll

$$(11.25)\qquad \begin{cases} \mathbf{M}(\underline{\varrho_\nu}) = \dfrac{r\varphi((r, k'))}{c(r)(r, k')\log 2} f((\gamma+\varepsilon)^\nu)(1+0(q^\nu)), \\ \mathbf{M}(\overline{\varrho_\nu}) = \dfrac{r\varphi((r, k'))}{c(r)(r, k')\log 2} f((\gamma-\varepsilon)^\nu)(1+0(q^\nu)), \end{cases}$$

továbbá

$$(11.26)\qquad \begin{aligned} \mathbf{M}(\underline{\varrho_{\nu,d}}) &= f((\gamma+\varepsilon)^\nu) \frac{r\varphi((r, d))}{c(r)(r, d)\log 2} \sum_{k=1}^{\infty} m_{k,d}^{-2}(1+0(q^\nu)) \\ \mathbf{M}(\overline{\varrho_{\nu,d}}) &= f((\gamma-\varepsilon)^\nu) \frac{r\varphi((r, d))}{c(r)(r, d)\log 2} \sum_{k=1}^{\infty} m_{k,d}^{-2}(1+0(q^\nu)). \end{aligned}$$

(Emlékeztetek $m_{k,d}$ jelentésére: az

$$md \equiv k'$$

kongruencia k-adik megoldását jelenti rögzített k' mellett természetes m-el. Ez csak akkor létezik, ha $(r, d)/k'$.)

Legyen most

(11.27) $$\eta_\nu = \sum_{\substack{0 \leq d < r \\ (d,r)/k'}} \underline{\varrho}_{r,d},$$

(11.28) $$\overline{\eta}_\nu = \sum_{\substack{0 \leq d < r \\ (d,r)/k'}} \overline{\varrho}_{r,d}.$$

Akkor (11. 3)-ból és (11. 4)-ből adódnak a majdnem minden α-ra érvényes egyenlőtlenségek:

(11.29) $$\sum_{B_{\nu+1} \leq n} \underline{\varrho}_\nu + O(1) \leq N^*_{\alpha,f,k'}(n) \leq \sum_{B_\nu \leq n} \overline{\varrho}_\nu + O(1),$$

továbbá

(11.30) $$\sum_{B_{\nu+1} \leq n} \underline{\eta}_\nu + O(1) \leq N_{\alpha,f,k'}(n) \leq \sum_{B_\nu \leq n} \overline{\eta}_\nu + O(1).$$

Majdnem minden α-ra fennállnak a következő aszimptotikus relációk:

(11.31) $$\begin{cases} \sum_{\nu=1}^{m} \underline{\varrho}_\nu \sim K_1(k') \sum_{\nu=1}^{m} f((\gamma+\varepsilon)^\nu), \\ \sum_{\nu=1}^{m} \overline{\varrho}_\nu \sim K_1(k') \sum_{\nu=1}^{m} f((\gamma-\varepsilon)^\nu); \end{cases}$$

továbbá

(11.32) $$\begin{cases} \sum_{\nu=1}^{m} \underline{\eta}_\nu \sim K_2(k') \sum_{\nu=1}^{m} f((\gamma+\varepsilon)^\nu), \\ \sum_{\nu=1}^{m} \overline{\eta}_\nu \sim K_2(k') \sum_{\nu=1}^{m} f((\gamma-\varepsilon)^\nu), \end{cases}$$

ahol

(11.33) $$K_1(k') = \frac{r\varphi((k',r))}{c(r)(k',r)\log 2},$$
$$K_2(k') = \frac{r}{c(r)\log 2} \sum_{\substack{0 \leq d < r \\ (d,r)/k'}} \frac{\varphi((d,r))}{(d,r)} \sum_{\substack{m \geq 1 \\ md \equiv k'}} m^{-2}.$$

(11. 31), ill. (11. 32) igazolása a következő paragrafusban fog megtörténni.

12. §

(11. 31) és (11. 32) bizonyítása a 6. 1. és 6. 2. tételekre való visszavezetéssel történik. (11. 5)—(11. 8), (11. 27), (11. 28) miatt a $\underline{\varrho}_\nu$, $\overline{\varrho}_\nu$, $\underline{\eta}_\nu$ és $\overline{\eta}_\nu$ változókra a 6. 1., illetőleg 6. 2. tételek feltevései nem teljesülnek. Ha azonban a fenti változókat úgy módosítjuk, hogy a (11. 5)—(11. 8) formulákban a φ_ν kifejezést

(12. 1) $$\varrho_\nu^{(2)} = [a_{\nu+1}, a_{\nu+2}, \ldots, a_{\nu+\lambda}] + [0; a_\nu, a_{\nu-1}, \ldots, a_{\nu-\lambda}]$$

-vel helyettesítjük, akkor az így nyert

$$\underline{\varrho}_\nu^{(\lambda)}, \quad \overline{\varrho_\nu^{(\lambda)}}, \quad \underline{\varrho}_{\nu,d}^{(\lambda)} \quad \text{és} \quad \overline{\varrho_{\nu,d}^{(\lambda)}}$$

változókra elegendő nagy λ esetén

$$(12.2) \qquad \begin{cases} |\underline{\varrho}_\nu^{(\lambda)} - \varrho_\nu| \leqq \varepsilon', & |\overline{\varrho_\nu^{(\lambda)}} - \overline{\varrho_\nu}| \leqq \varepsilon', \\ |\underline{\varrho}_{\nu,d}^{(\lambda)} - \underline{\varrho}_{\nu,d}| \leqq \varepsilon', & |\overline{\varrho_{\nu,d}^{(\lambda)}} - \overline{\varrho_{\nu,d}}| \leqq \varepsilon', \end{cases}$$

innen adódik még az is, hogy a „módosított" változók várható értéke tetszőlegesen kevéssel különbözik az eredeti változókétól, hacsak λ elegendő nagy. Miután a „módosított" változók értéke csak $B_{\nu-1}$ és B_ν maradékosztályaitól és $a_{\nu-\lambda}, a_{\nu-\lambda+1}, \ldots$ $\ldots, a_{\nu+\lambda}$-tól, vagyis triviális módon $B_{\nu-\lambda-2}$ és $B_{\nu-\lambda-1}$ maradékosztályaitól az $a_{\nu-\lambda}, \ldots, a_{\nu+\lambda}$ lánctörtjegyektől függ, azért a 4. 1. tétel miatt a

$$\{\underline{\varrho}_\nu^{(\lambda)}\}, \quad \{\overline{\varrho_\nu^{(\lambda)}}\}, \quad \{\underline{\eta}_\nu^{(\lambda)}\}, \quad \{\overline{\eta_\nu^{(\lambda)}}\} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

sorozatok mindegyike véges sok olyan sorozatra bontható, amelyek külön-külön kielégítik vagy a 6. 1. tétel, vagy a 6. 2. tétel feltevéseit, aszerint, hogy $\lim\limits_{k\to\infty} f(k) > 0$ vagy $\lim\limits_{k\to\infty} f(k) = 0$. Innen (11. 25) és (11. 26) miatt a (11. 31) és (11. 32) relációk már következnek.

(11. 29)-ből és (11. 30)-ból, valamint (11. 31)-ből és (11. 32)-ből nyerjük, hogy majdnem minden α-ra fennállnak a következő relációk:

$$(12.3) \quad K_1(k') \sum_{B_{\nu+1} \leqq n} f((\gamma+\varepsilon)^\nu) + 0(1) \leqq N^*_{\alpha,f,k'}(n) \leqq K_1(k') \sum_{B_\nu \leqq n} f((\gamma-\varepsilon)^\nu) + O(1),$$

$$(12.4) \quad K_2(k') \sum_{B_{\nu+1} \leqq n} f((\gamma+\varepsilon)^\nu) + 0(1) \leqq N_{\alpha,f,k'}(n) \leqq K_2(k') \sum_{B_\nu \leqq n} f((\gamma-\varepsilon)^\nu) + O(1).$$

Tekintsük most a $\sum\limits_{B_{\nu+1} \leqq n} f((\gamma+\varepsilon)^\nu)$, illetőleg a $\sum\limits_{B_\nu \leqq n} f((\gamma-\varepsilon)^\nu)$ összeget. (11. 1) és (11. 2) miatt majdnem minden α-ra fennáll $n_0 = n_0(\varepsilon)$-tól kezdve

$$(12.5) \qquad \sum_{(\gamma+\varepsilon)^{\nu+1} \leqq n} f((\gamma+\varepsilon)^\nu) \leqq \sum_{B_{\nu+1} \leqq n} f((\gamma+\varepsilon)^\nu),$$

továbbá

$$(12.6) \qquad \sum_{(\gamma-\varepsilon)^\nu \leqq n} f((\gamma+\varepsilon)^\nu) \geqq \sum_{B_\nu \leqq n} f((\gamma-\varepsilon)^\nu).$$

Az $f(k)$ monotonitása miatt

$$(12.7) \qquad \sum_{(\gamma+\varepsilon)^{\nu+1} \leqq n} f((\gamma+\varepsilon)^\nu) \geqq \sum_{(\gamma+\varepsilon)^{\nu+1} \leqq n} d_\nu \sum_{(\gamma+\varepsilon)^\nu \leqq k < (\gamma+\varepsilon)^{\nu+1}} \frac{f(k)}{k},$$

ahol

$$(12.8) \qquad d_\nu = \Big(\sum_{(\gamma+\varepsilon)^\nu \leqq k < (\gamma+\varepsilon)^{\nu+1}} k^{-1} \Big)^{-1} = (\gamma + \varepsilon + O(1))^{-1}.$$

Innen, továbbá (11. 1)-ből nyerjük, hogy minden $\varepsilon'>0$-re elegendő nagy n esetén

$$\sum_{(\gamma+\varepsilon)^{\nu+1}\leqq n} f((\gamma+\varepsilon)^{\nu}) \geqq (1-\varepsilon')\frac{1}{\gamma+\varepsilon}\sum_{k=1}^{n}\frac{f(k)}{k}. \tag{12.9}$$

Hasonlóképpen nyerjük minden $\varepsilon'>0$-ra, hogy elegendő nagy n esetén

$$\sum_{(\gamma-\varepsilon)^{\nu}\leqq n} f((\gamma-\varepsilon)^{\nu}) \leqq (1+\varepsilon')\frac{1}{\gamma+\varepsilon}\sum_{k=1}^{n}\frac{f(k)}{k}. \tag{12.10}$$

Miután ε és ε' tetszőlegesen kicsiny lehet, továbbá (11. 1), (12. 3) és (12. 4) miatt adódik, hogy majdnem minden α-ra

$$N^{*}_{\alpha,f,k'}(n) \sim K_1(k')\frac{12\log 2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{f(k)}{k}, \tag{12.11}$$

továbbá

$$N_{\alpha,f,k'}(n) \sim K_2(k')\frac{12\log 2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{f(k)}{k}. \tag{12.12}$$

(12. 11), $K_1(k')$ jelentése miatt (11. 33) ekvivalens a 9. 1. tétellel. A 9. 2. tétel bizonyításának befejezése céljából most már elegendő a (39) relációt igazolni. Ez a következő paragrafusban fog megtörténni.

13. §

A Bevezetésben szereplő (39) relációra W. SCHMIDT levélben volt szíves felhívni a figyelmemet.

Az egyszerűség kedvéért (39) bizonyítását csak négyzetmentes r esetén részletezem, vagyis feltételezem, hogy

$$r = \prod_{k=1}^{m} p_k. \tag{13.1}$$

Tekintsük a

$$\sum_{\substack{0\leqq d<r\\ (d,r)/k'}} \frac{\varphi((d,r))}{(d,r)} \sum_{\substack{m=1\\ md\equiv k'}} m^{-2} = \frac{c(r)\log 2}{r} K_2(k) \tag{13.2}$$

kifejezést, ahol $K_2(k)$ a (11. 33) által van definiálva. Átrendezéssel nyerjük, hogy

$$\frac{c(r)\log 2}{r}K_2(k) = \sum_{m=1}^{\infty} m^{-2} \sum_{\substack{0\leqq d<r\\ md\equiv k}} \frac{\varphi((r,d))}{(r,d)} = \tag{13.3}$$

$$= \sum_{u/(r,k)} \sum_{\substack{m=1\\ (m,r)=u}} m^{-2} \sum_{\substack{md\equiv k\\ 0\leqq d<r}} \frac{\varphi((r,d))}{(r,d)}.$$

Most rögzített u és m mellett meghatározzuk a

$$\sum_{\substack{md\equiv k\\ (m,r)=u}} \frac{\varphi((r,d))}{(r,d)}$$

tényezőt. Vezessük be a

$$\frac{m}{u}=m', \quad \frac{k}{u}=k', \quad \frac{r}{u}=r, \qquad (k,r)=v,\ (k',r')=v' \tag{13.4}$$

jelöléseket. Akkor (13. 3) a

$$\frac{c(r)\log 2}{r}K_2(r) = \sum_{u/v}\sum_{\substack{m=1\\(m,r)=u}} m^{-2}\sum_{\substack{m'd\equiv k'(r')\\0\leqq d<r}}\frac{\varphi((r,d))}{(r,d)} \tag{13.5}$$

alakot ölti. Azon d-k, amelyekre teljesül

$$0\leqq d<r, \quad m'd=k'(r'), \tag{13.6}$$

$$d = d_0+cr' \tag{13.7}$$

alakban írhatók, ahol $c=0, 1, \ldots, n-1$. Miután (13. 1) miatt $(k, r')=1$, ezért a (13. 7) alakú d-k $c=0, 1, \ldots, u-1$-re (mod u) végigfutnak egy teljes maradéksoron. Most bebizonyítom, hogy

$$(d, r')=v'. \tag{13.8}$$

Ugyanis (13. 4) miatt $(m', r')=1$; ezért a

$$m'x\equiv 1\,(r')$$

kongruencia megoldható. Itt mindenesetre $(x, r')=1$. Innen azonnal adódik, hogy a (13. 6)-nak eleget tevő d-kre teljesül

$$d\equiv k'x(r'),$$

vagyis

$$(d, r)=(k', r'),$$

amivel (31. 8)-at igazoltuk. (13. 8) miatt a (13. 7) alakú d-k

$$d = (k', r')\left(\frac{d_0}{(k',r)}+c\frac{r}{(k',r)}\right) = (k',r')y$$

alakba írhatók, ahol $c=0, 1, \ldots, n-1$-re y és végigfut egy teljes maradéksoron (mod u). Így nyerjük, hogy adott u és m esetén $((v_l, t)=1$ miatt, ami 13. 1 következménye)

$$\sum_{\substack{m'd\equiv k'(r')\\0\leqq d<r}}\frac{\varphi((r,d))}{(r,d)} = \sum_{t/u}\frac{\varphi((v',t))}{(v',t)}\varphi\left(\frac{u}{t}\right) =$$

$$= \frac{\varphi(v')}{v'}\sum_{t/u}\frac{\varphi(t)}{t}\varphi\left(\frac{u}{t}\right) = \frac{\varphi(v')}{v'}\prod_{p/u}(1-p^{-1})\cdot \tag{13.9}$$

$$\cdot\sum_{t/u}t^{-1} = \frac{\varphi(v')}{v'}u\prod_{p/u}(1-p^{-2}).$$

A $\frac{\varphi(v')}{v'}u\prod_{p/u}(1-p^{-2})$ kifejezés csak v'-től, vagyis csak u-tól, r-től és k-tól függ, m-től nem.

A $\sum\limits_{\substack{m=1 \\ (m,r)=u}} m^{-2} = \frac{1}{u^2} \sum\limits_{\substack{n=1 \\ (n,r/u)=1}} n^{-2}$ sorról azonnal belátható, hogy

$$\sum_{\substack{m=1 \\ (m,r)=u}} m^{-2} = \frac{1}{u^2} \frac{\pi^2}{6} \prod_{p \mid \frac{v}{u}} (1-p^{-2}). \tag{13.10}$$

(13. 1), (13. 9) és (13. 10)-ből nyerjük, hogy

$$\frac{c(r) \log 2, K_2(k)}{r} = \sum_{u/v} \frac{1}{u} \frac{\varphi(v')}{v'} \prod_{p/r} (1-p^{-2}) \frac{r^2}{6} =$$

$$= \prod_{p/r} (1-p^{-2}) \frac{1}{v} \sum_{u/v} \frac{v}{u} \prod_{p \mid \frac{v}{u}} (1-p^{-1}) \frac{\pi^2}{6} =$$

$$= \prod_{p/r} (1-p^{-2}) \frac{1}{v} \sum_{d/v} \varphi(d) \frac{\pi^2}{6} = \prod_{p/r} (1-p^{-2}) \frac{\pi^2}{6},$$

ahonnan (11. 33) miatt (39) már következik.

IRODALOM

[1] R. O. Kuzmin: Sur une problème de Gauss, *Atti del Congresso Internazionale dei Matematici Bologna*, **6** (1928), 83–89.

[2] P. Lévy: Sur les lois de probabilité dont dépendente les quotients complets et incomplets d'une fraction continue. *Bull. Soc. Math. France* **57** (1929), 178–194.

[3] C. Ryll–Nardzewski: On ergodic theorems II. Ergodic theory of continued fractions. *Studia Math.* **12** (1951), 77–79.

[4] P. Szüsz: Über einen Kusminschen Satz. *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **12** (1961), 447–453.

[5] A. Khintchine: Metrische Kettenbruchprobleme. *Comp. Math.* **1** (1935), 361–382.

[6] A. Khintchine: Zur metrischen Kettenbruchtheorie. *Comp. Math.* **3** (1936), 276–285.

[7] P. Lévy: Théorie de l'addition des variables aléatoires. *Paris, Gauthier–Villars*, 1954.

[8] A. Khintchine: Einige Sätze über Kettenbrüche mit Anwendungen auf die Theorie der diophantischen Approximationen. *Math. Annalen* **92** (1924), 115–124.

[9] W. J. LeVeque: On the frequency of small fractional parts in certain sequences. *Trans. of the Amer. Math. Soc.* **87** (1958), 237–260.

[10] W. J. LeVeque: On the frequency of small fractional parts in certain sequences, II. *Trans. of the Amer. Math. Soc.* **94** (1960), 130–149.

[11] P. Erdős: Some results on diophantine approximation. *Acta Arithmetica* **5** (1959), 359–369.

[12] W. Schmidt: A metrical theorem in diophantine approximation. *Canadian Journ. of Math.* **12** (1960), 619–31.

[13] S. Hartman–P. Szüsz: On convergence classes of denominators of convergents. *Acta Arithmetica* **6** (1960), 179–184.

[14] R. J. Duffin–A. C. Schaeffer: Khintchine's problem in metric diophantine approximation. *Duke Math. Journ.* **8** (1941), 243–255.

[15] P. Szüsz: Verallgemeinerung und Anwendungen eines Kusminschen Satzes. *Acta Arithmetica* **7** (1962), 149–160.

[16] P. Szüsz: Über die metrische Theorie der diophantischen Approximation II. *Acta Arithmetica* **8** (1963), 225–241.

(Beérkezett: 1963. XI. 16.)

STABILIS KÖRRENDSZEREK SŰRŰSÉGÉRŐL

Írta: DOMINYÁK IMRE

Bevezetés

Körelhelyezésnek nevezünk egy olyan körrendszert, amelyben nincsenek közös belső ponttal rendelkező körök.

Tekintsük egy körelhelyezés O középpontú K körét. K ciklikus sorrendben a $P_1, P_2, \ldots, P_m$ pontokban érintkezzék a körelhelyezés más köreivel. A $\lambda' = \max\{P_1OP_2\sphericalangle, P_2OP_3\sphericalangle, \ldots, P_mOP_1\sphericalangle\}$ értéket K labilitásának, a $\sigma = \pi - \lambda'$ értéket pedig K stabilitásának nevezzük. Ha $\sigma > 0$, akkor K rögzítve van, azaz, ha a szomszédos köröket rögzítjük, nem lehet elmozdítani a körelhelyezést definiáló tulajdonság megszűnése nélkül. A körelhelyezés stabilitásán σ alsó határát értjük: $s = \inf \sigma$.

FEJES TÓTH [1] kimutatta, hogy az euklideszi sík bármely $s > 0$ stabilitású körelhelyezésének sűrűsége

$$d \geqq \frac{\pi}{n \operatorname{ctg} \frac{s}{2} - \operatorname{tg} \frac{n(\pi - s)}{2}}, \tag{1}$$

ahol n az a legnagyobb természetes szám, amelyre $n(\pi - s) \leqq 2\pi$. Ugyanott megadott öt körelhelyezést (lásd 1—5. ábra), amelyeknél az (1) korlát pontos. Jelen dolgozat első részében az (1) alatti egyenlőtlenséggel analóg sűrűségbecslést adunk a gömbön és a hiperbolikus síkon. A második részben a körfedésekre vonatkozó duális problémákkal foglalkozunk.

Stabilis körelhelyezések

1. TÉTEL: *Legyen az egységnyi sugarú gömbön egy $s > 0$ stabilitású körelhelyezés minden körének a sugara $\geqq r$; akkor a körelhelyezés sűrűsége*

$$d \geqq \frac{\pi(1 - \cos r)}{\pi - n \arcsin\left(\cos \frac{s}{2} \cos r\right) - \arcsin\left(\sin \frac{n(\pi - s)}{2} \cos r\right)}, \tag{2}$$

ahol n az a legnagyobb természetes szám, amelyre $n(\pi - s) \leqq 2\pi$.

Egy körelhelyezés K körének *Dirichlet*-celláján azon pontok halmazát értjük, amelyek K-ra vonatkozó hatványa nem nagyobb a körelhelyezés többi körére vonatkozó hatványánál. Az 1. tétel bizonyításaként megmutatjuk, hogy a körelhelyezés sűrűsége mindenegyes Dirichlet-cellában legalább akkora, mint a (2)-ben szereplő korlát.

Legyen K a körelhelyezés egyik köre.[1] Legyen továbbá K középpontja O, sugara ϱ és *Dirichlet*-cellája D. Érintse D a K kört ciklikus sorrendben a $P_1, P_2, \ldots$ $\ldots, P_m$ pontokban. Mivel D konvex, területe nem nagyobb, mint a K kört a $P_1, P_2, \ldots$ $\ldots, P_m$ pontban érintő m-szög területe:

(3) $$D \leqq \sum_{i=1}^{m} 2\left[\frac{\alpha_i}{2} - \arcsin\left(\sin\frac{\alpha_i}{2}\cos\varrho\right)\right],$$

ahol $\alpha_1 = P_1OP_2\sphericalangle, \ldots, \alpha_m = P_mOP_1\sphericalangle$.

Felhasználjuk most azt a tényt, hogy ha $f(x)$ az (a, b) intervallumban értelmezett konvex függvény és

$$a \leqq \alpha - \lambda < \alpha \leqq \beta < \beta + \gamma < b,$$

akkor

(4) $$f(\alpha) + f(\beta) < f(\alpha - \gamma) + f(\beta + \gamma).$$

Figyelembe véve, hogy $-\arcsin(\sin z \cos\varrho)$ z-nek konvex függvénye ($0 < z < \pi/2$; $0 < \varrho < \pi/2$), a (4)-es egyenlőtlenség véges számú alkalmazásával nyerjük, hogy

$$D \leqq 2\left[\pi - n\arcsin\left(\sin\frac{\lambda}{2}\cos\varrho\right) - \arcsin\left(\sin\frac{2\pi - n\lambda}{2}\cos\varrho\right)\right],$$

ahol $\lambda = \pi - s$.

Ezért a körsűrűség D-ben:

(5) $$\frac{K}{D} \geqq \frac{\pi(1-\cos\varrho)}{\pi - n\arcsin\left(\sin\frac{\lambda}{2}\cos\varrho\right) - \arcsin\left(\sin\frac{2\pi - n\lambda}{2}\cos\varrho\right)}.$$

(5)-ben egyenlőség csak akkor áll fenn, ha D szabályos, vagy olyan érintő sokszög, amelyben az egy csúcsból induló két legkisebb egyenlő oldal kivételével a többi oldal egyenlő.

(5)-ben a K sugara, ϱ is szerepel. Kimutatjuk, hogy (5) jobboldala

$$G(\varrho) = \frac{\pi(1-\cos\varrho)}{n\left[\frac{\lambda}{2} - \arcsin\left(\sin\frac{\lambda}{2}\cos\varrho\right)\right] + \left[\frac{2\pi - n\lambda}{2} - \arcsin\left(\sin\frac{2\pi - n\lambda}{2}\cos\varrho\right)\right]}$$

ϱ-nak monoton növekvő függvénye. Vezessük be a $\cos\varrho = x$ és $\arcsin(\sin\lambda/2\cdot x) = f(x, \lambda)$ jelöléseket. Mivel $\arcsin(\sin\lambda/2\cdot x)$ x-nek konvex függvénye ($0 \leqq x \leqq 1$, $0 < \lambda < \pi$), geometriai megfontolásokból következik, hogy

$$\frac{\pi}{G(\varrho)} = n\frac{f(1,\lambda) - f(x,\lambda)}{1-x} + \frac{f(1,\mu) - f(x,\mu)}{1-x}, \qquad \mu = 2\pi - n$$

ϱ-nak monoton csökkenő függvénye, vagyis $G(\varrho)$ monoton növekszik.

Ezzel tételünk be van bizonyítva.

[1] A továbbiakban ugyanazzal a szimbólummal jelöljük a tartományt és területét.

Vannak olyan stabilis körelhelyezések a gömbön, amelyekben a (2) alatti korlát pontos. Például ilyenek a szabályos poliéderek csúcspontjai által kijelölt középpontú körelhelyezések, amelyeket sztereografikus projekcióiban ábrázoltunk (6—10. ábra). Sőt az archimedeszi-féligszabályos poliéderek[2] közül a (3, 6, 6), (3, 8, 8), (3, 10, 10), (4, 6, 6), (5, 6, 6) és a (3, 4, 4, 4) szimbólumokkal jelöltek is meghatároznak egy-egy extremális körelhelyezést (11—16. ábra). Elemi számolásokkal belátható, hogy a fenti körelhelyezéseken kívül nincs olyan, amelynél a (2) alatti korlát pontos.

2. TÉTEL: *Legyen a* -1 *görbületű hiperbolikus síkon egy* $s>0$ *stabilitású körelhelyezés minden körének sugara* $\leqq R \leqq \operatorname{arch} \operatorname{cosec} \pi - s/2$, *akkor a körelhelyezés minden körének Dirichlet-cellájában a sűrűség*

$$d \geqq \frac{\pi(1-\operatorname{ch} R)}{\pi - n \arcsin\left(\cos\frac{s}{2}\operatorname{ch} R\right) - \arcsin\left(\sin\frac{n(\pi-s)}{2}\operatorname{ch} R\right)}, \tag{6}$$

ahol n az a legnagyobb természetes szám, amelyre $n(\pi - s) \leqq 2\pi$.

A bizonyításnál ugyanúgy járunk el, mint a gömbön. Minthogy a bizonyítás hasonló az 1. tétel bizonyításához, nem részletezzük azt. Ha az $R \leqq \operatorname{arch} \operatorname{cosec} \pi - s/2$ feltétel nem teljesül, a (6) alatti korlát nincs értelmezve. Az eljárásunk azonban akkor azt a triviális korlátot szolgáltatja, hogy a sűrűség $\geqq 0$. Ilyenkor ugyanis D területének becslésénél nem tudunk véges felső korlátot megadni.

A hiperbolikus síkon végtelen sok olyan stabilis körelhelyezés van, amelynél a (6) alatti korlát pontos. Például ilyenek a szabályos egybevágó sokszögekből álló mozaikok beírt körrendszerei. A 17—19. ábrán a $\{4,5\}$, $\{3, \infty\}$ és $\{4, \infty\}$ szimbólummal jelölhető mozaikokhoz tartozó körrendszereket ábrázoltuk a *Poincare*-modell segítségével. De nemcsak egybevágó szabályos sokszögű mozaik esetén lehet a (6) alatti korlát pontos. A 20. ábrán például olyan egybevágó háromszögek a *Dirichlet*-cellák, amelyek 72°, 36° és 36° nagyságú szögekkel rendelkeznek.

Stabilis körfedések

Körfedésnek nevezzük egy állandó görbületű felület olyan körrendszerét, ha a felület minden pontja legalább egy körnek belsejében vagy határán van.

Legyen K a körfedés egyik köre. Legyen továbbá K középpontja O, sugara ϱ és *Dirichlet*-cellája D. A $P_1, P_2, \ldots, P_m$ pontok ciklikus sorrendben K azon határpontjai, amelyek a körfedés egyetlen körének sem fekszenek a belsejében, s mindegyikhez csatlakozik csak a K kör által fedett tartomány is. Ekkor K stabilitásán a $\sigma = \pi - \lambda' = \pi - \max\{P_1OP_2\sphericalangle, \ldots, P_mOP_1\sphericalangle\}$ értéket értjük, a körrendszer stabilitásának pedig az $s = \inf \sigma$ értéket tekintjük.

3. TÉTEL: *Az euklideszi sík* $s>0$ *stabilitású fedő körrendszerének a sűrűsége*

$$D \leqq \frac{2\pi}{n \sin s + \cos n\pi \sin ns}, \tag{7}$$

ahol n az a legnagyobb természetes szám, amelyre $n(\pi - s) \leqq 2\pi$.

[2] Lásd [3] 17—22. oldal.

A bizonyítást ugyanúgy végezhetjük el, mint a körelhelyezéseknél: megadjuk, hogy milyen *Dirichlet*-celláknál lehet a megadott stabilitású körfedés sűrűsége maximális.

Legyen K a körfedés egyik köre. Legyen továbbá K középpontja O, sugara ϱ és *Dirichlet*-cellája D. A $P_1, P_2, \ldots, P_m$ pontok a K kör olyan egymás után következő pontjai, amelyek egyetlen körnek sem fekszenek a belsejében és amelyek mindegyikének van olyan környezete, amelyet csak a K kör fed. A $P_1, P_2, \ldots, P_m$ pontok a *Dirichlet*-cella csúcspontjai között szerepelnek. Minthogy D konvex, a $P_1P_2\ldots P_m$ m-szög D-ben van, vagyis területe nem nagyobb D területénél

$$D \geqq \sum_{i=1}^{m} \frac{\varrho^2 \sin \alpha_i}{2},$$

ahol $\alpha_1 = P_1OP_2\sphericalangle, \alpha_2 = P_2OP_3\sphericalangle, \ldots, \alpha_m = P_mOP_1\sphericalangle$. Tehát K-nak a D-re vonatkozó sűrűsége

$$\text{(8)} \qquad \frac{K}{D} \leqq \frac{2\pi}{\sum\limits_{i=1}^{m} \sin \alpha_i}.$$

A $\lambda = \pi - s$ jelölést használva és (8) nevezőjére a (4) egyenlőtlenséget alkalmazva kapjuk, hogy

$$\text{(9)} \qquad \frac{K}{D} \leqq \frac{2\pi}{n \sin \lambda - \sin (n\lambda)},$$

ahol n az a legnagyobb természetes szám, amelyre $n\lambda \leqq 2\pi$. Ez pedig tételünk állításával egyezik meg. Az eljárásunkból következik, hogy a $\{4; 4\}$ és $\{3; 6\}$ mozaikokhoz tartozó körfedések (21. és 22. ábra) sűrűsége a (7) alatti korláttal egyenlő.

A konstans görbületű felületek stabilis körfedései analóg módon definiálhatók. Ezek sűrűségére érvényesek a következő tételek:

4. TÉTEL: *Legyen az egységnyi sugarú gömb felületén egy $s > 0$ stabilitású körfedés minden körének sugara $\geqq r$; akkor a körfedés sűrűsége*

$$\text{(10)} \qquad D \leqq \frac{\pi(1-\cos r)}{\pi - n \operatorname{arc\,tg}\left(\cos r \operatorname{ctg} \frac{s}{2}\right) + \operatorname{arc\,tg}\left[\cos r \operatorname{tg} \frac{n(\pi - s)}{2}\right]},$$

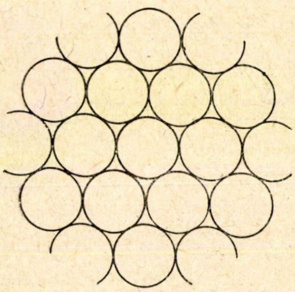
ahol n az a legnagyobb természetes szám, amelyre $n(\pi - s) \leqq 2\pi$.

5. TÉTEL: *Legyen $\alpha - 1$ görbületű hiperbolikus síkon egy $s > 0$ stabilitású körfedés minden körének sugara $\leqq R$, akkor a körfedés minden körének Dirichlet-cellájában a sűrűség*

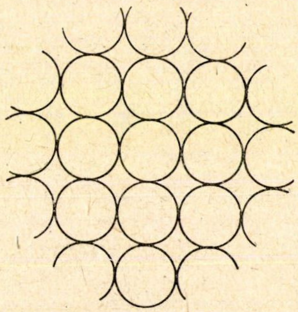
$$\text{(11)} \qquad D \leqq \frac{\pi(1-\operatorname{ch} R)}{\pi - n \operatorname{arc\,tg}\left(\operatorname{ch} R \operatorname{ctg} \frac{s}{2}\right) + \operatorname{arc\,tg}\left[\operatorname{ch} R \operatorname{tg} \frac{n(\pi - s)}{2}\right]},$$

ahol n az a legnagyobb természetes szám, amelyre $n(\pi - s) \leqq 2\pi$.

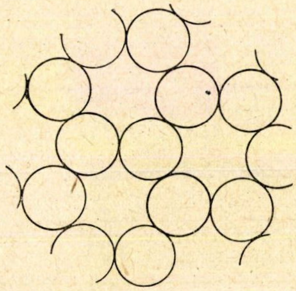
Minthogy a 4—5. tételek bizonyítása hasonló az 1. tétel bizonyításához, nem közöljük azt.



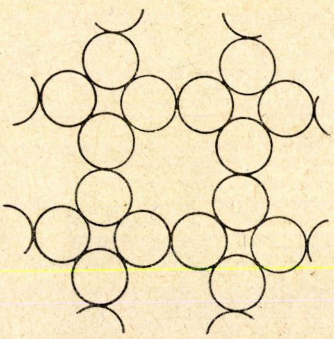
1. ábra



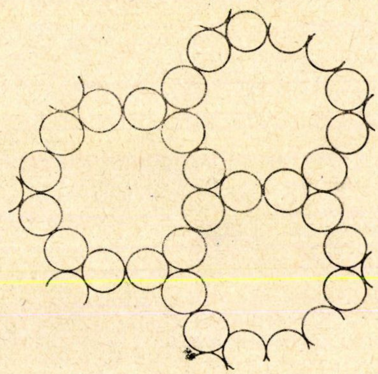
2. ábra



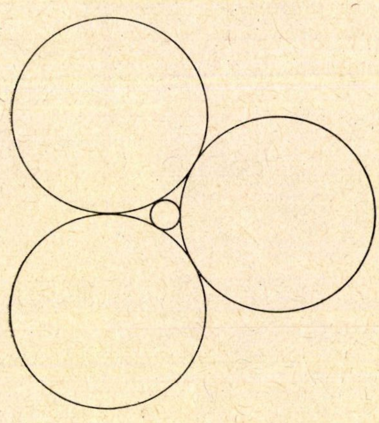
3. ábra



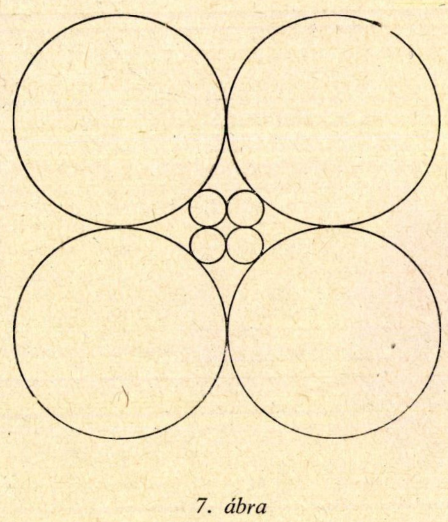
4. ábra



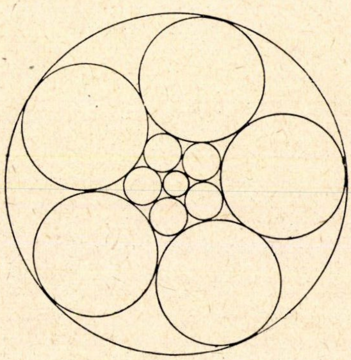
5. ábra



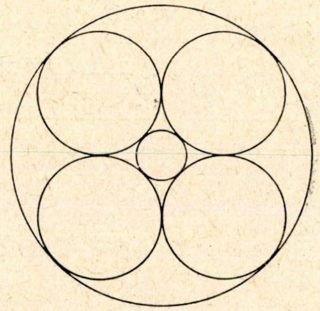
6. ábra



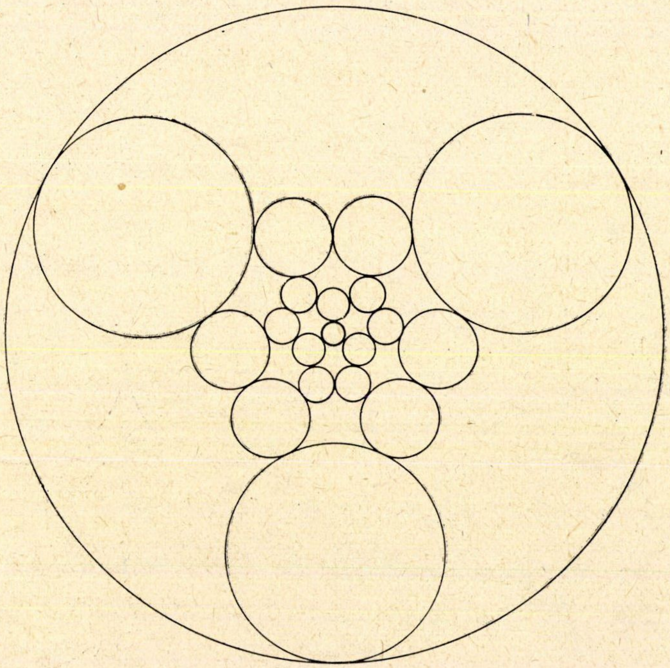
7. ábra



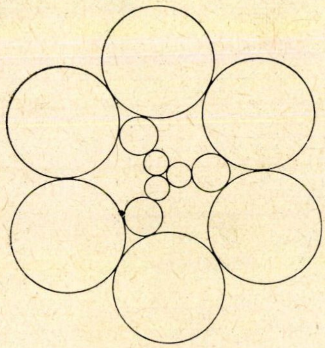
8. ábra



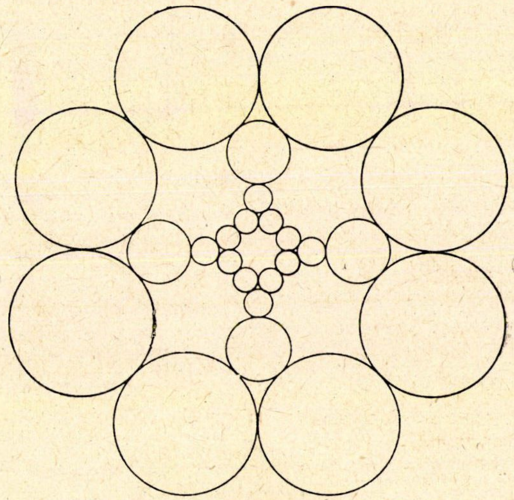
9. ábra



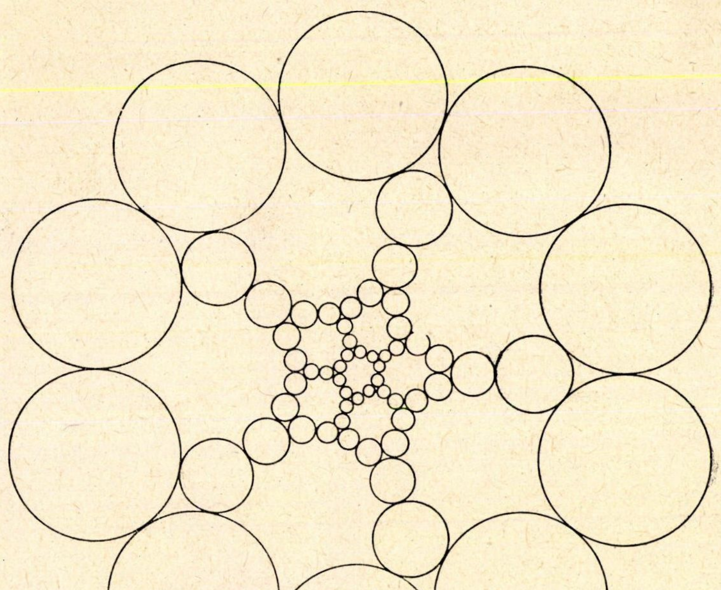
10. ábra



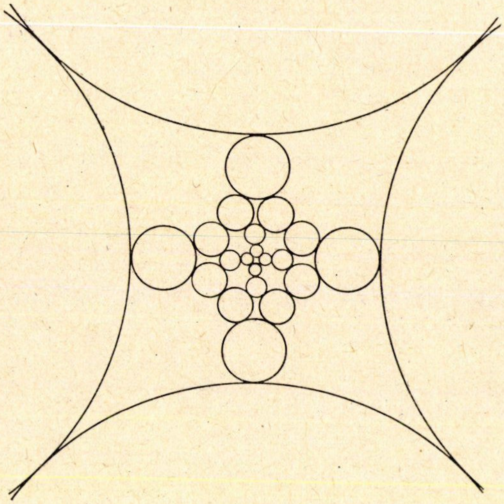
11. ábra



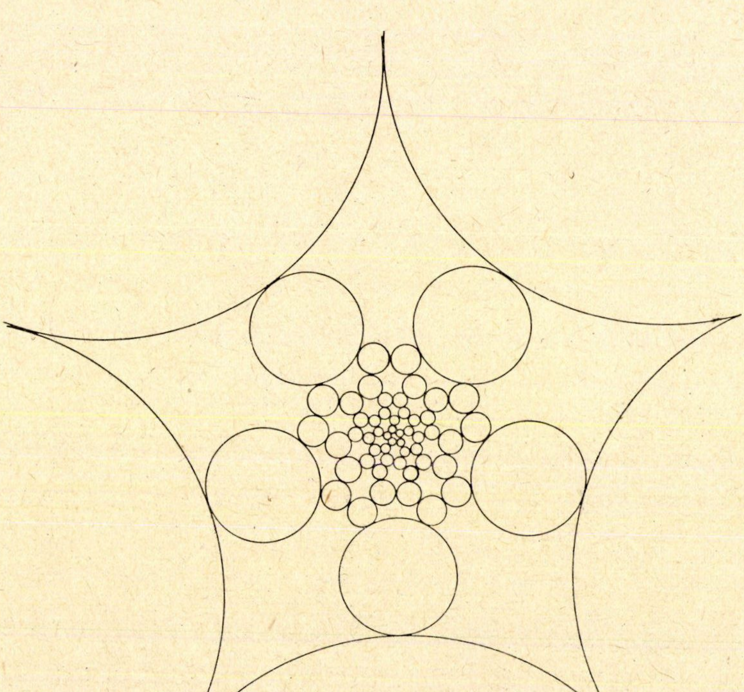
12. ábra



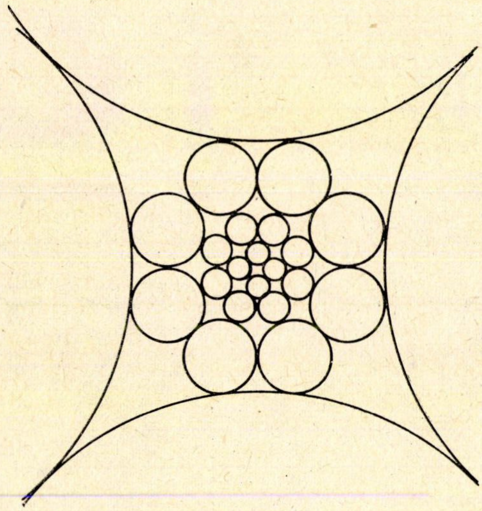
13. ábra



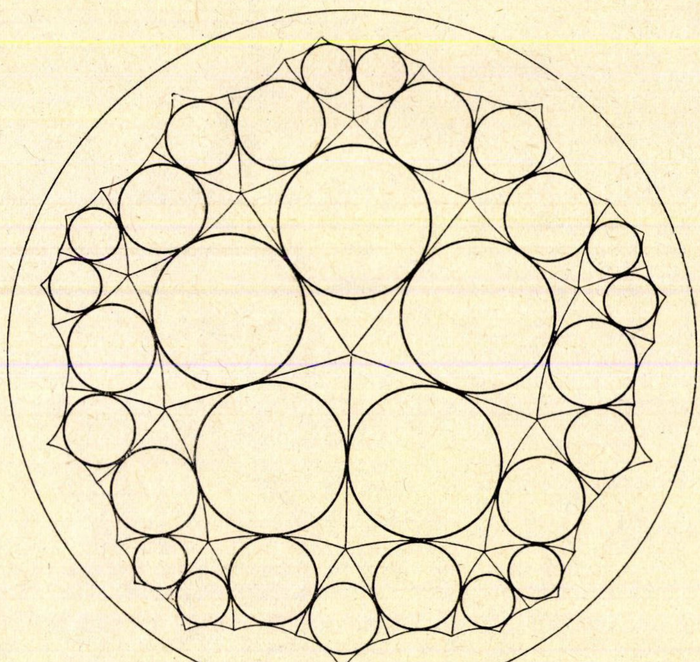
14. ábra



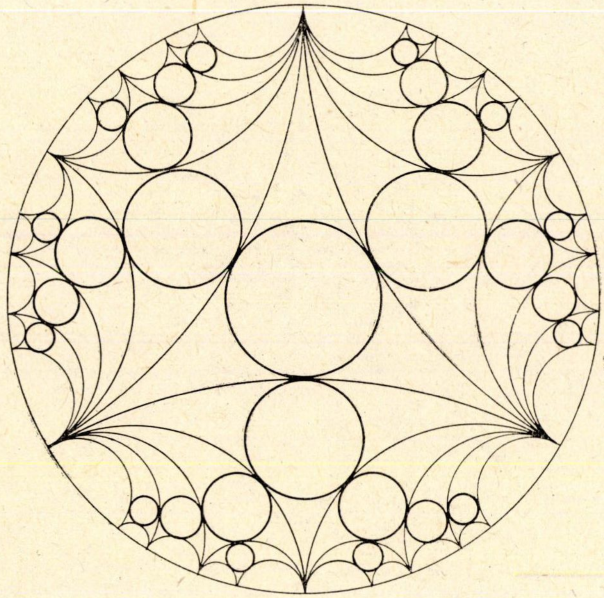
15. ábra



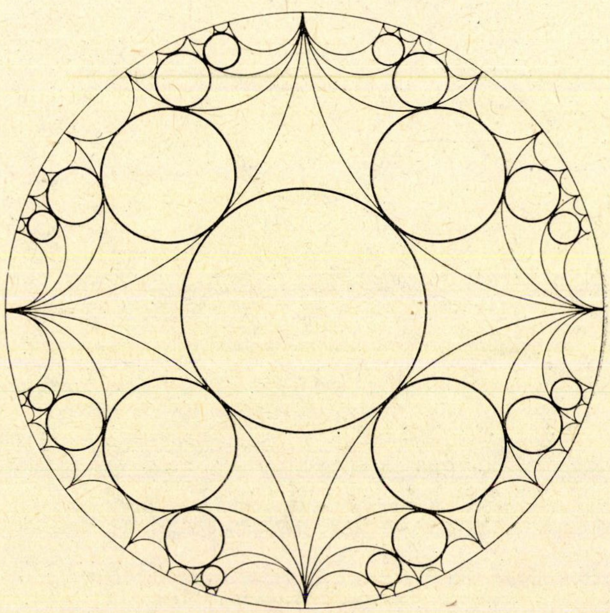
16. ábra



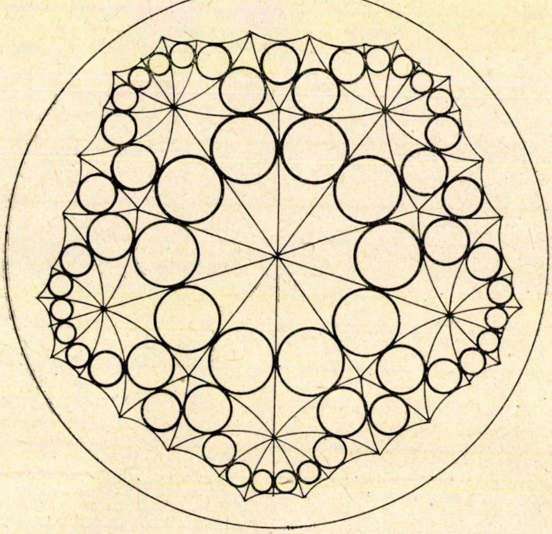
17. ábra



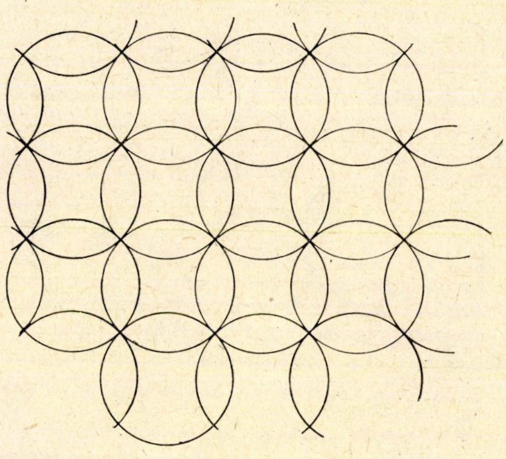
18. ábra



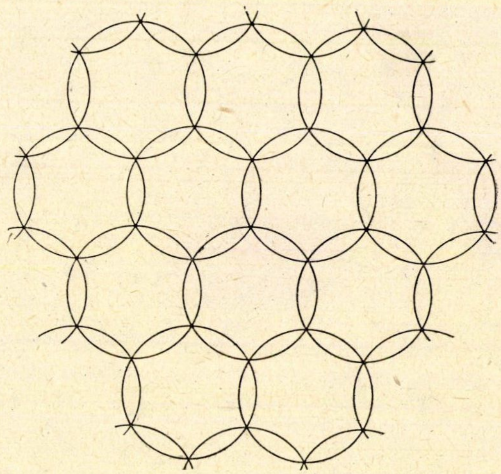
19. ábra



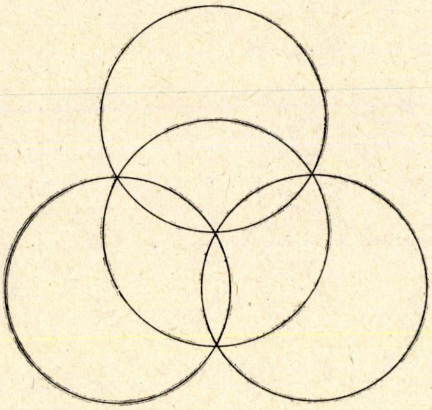
20. ábra



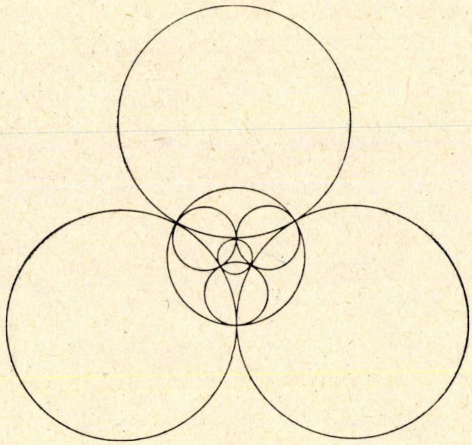
21. ábra



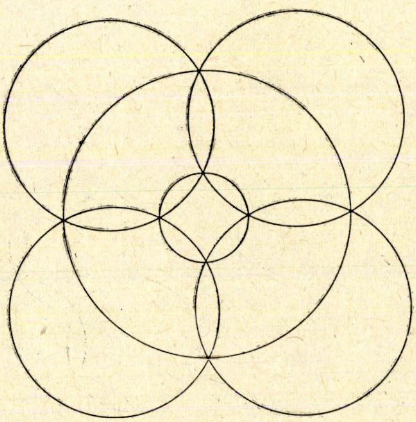
22. ábra



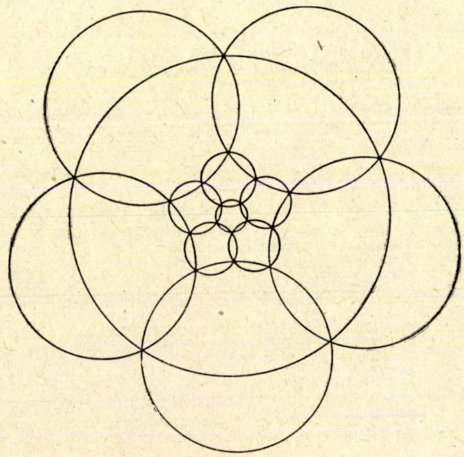
23. ábra



24. ábra

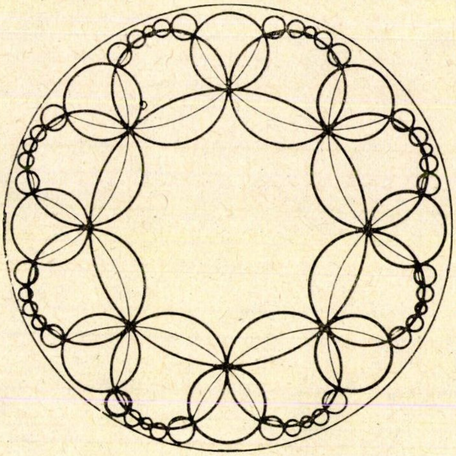


25. ábra

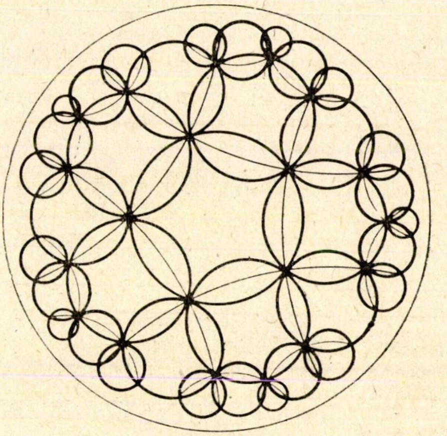


26. ábra

A gömbön négy olyan stabilis körfedés van, amelyeknél a (10) alatti korlát pontos. Ezen körrendszerek köreinek középpontjait a $\{3, 3\}$, $\{3, 4\}$, $\{4; 3\}$ és $\{5; 3\}$ szabályos poliéderek[3] csúcspontjai jelölik ki. A 23—26. ábrán a fenti körfedések sztereografikus projekciói láthatók.



27. ábra



28. ábra

A hiperbolikus síkon számtalan olyan körfedés van, amelyek sűrűsége a (11) alatti korláttal egyenlő. Ilyenek például az olyan egybevágó szabályos sokszögekből álló mozaikokhoz tartozók, amelyeknél a belső szög 90° vagy 120°. Ezek közül látható kettő a 27. és 28. ábrán, ahol a *Poincare*-modellen ábrázoltuk a körfedést.

IRODALOM

[1] FEJES TÓTH LÁSZLÓ: On the stability of a circle packing, *Ann. Univ. Sci. Budapest de R. Eötvös nom.* (1960/61), 63—66.

[2] FEJES TÓTH LÁSZLÓ: Kreisausfüllungen der hyperbolischen Ebene, *Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae* **4** (1953), 111—114.

[3] FEJES TÓTH LÁSZLÓ: *Lagerungen in der Ebene auf der Kugel und im Raum*, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1953.

(Beérkezett: 1963. XI. 8.)

ON THE DENSITY OF STABLE CIRCLE SYSTEMS

I. Dominyák

In the first part of the paper we give a lower bound of the density of the stable circle packing on the sphere and hyperbolic plane. In the second part an upper bound of density of stable circle-covering is given on the sphere, Euclidean and hyperbolic plane.

[3] Lásd [3] 17. oldal.

HATÁRELOSZLÁSTÉTELEK KITERJESZTÉSÉRŐL

Írta: NEMETZ TIBOR és VARGA GYULA

Bevezetés

Legyen $\xi_1, \xi_2, \ldots$ egy **P** mérték szerint független valószínűségi változó sorozat, melyre igaz a centrális határeloszlástétel. RÉNYI ALFRÉD [1] dolgozatában azt a kérdést vetette fel, hogy milyen feltételek mellett lesz érvényes a centrális határeloszlástétel egy $\mathbf{Q} \ll \mathbf{P}$[1] mérték szerint is. A kérdést speciális esetekben megoldotta.

KOLMOGOROV a tételt általánosan bizonyította [2] dolgozatában azon megszorítás mellett, hogy **P** tökéletes mérték. Bizonyítása a

$$\sup_{B \in \mathfrak{M}_n^{\infty}} |\mathbf{P}(B) - \mathbf{Q}(B)| \to 0, \quad \text{ha} \quad n \to +\infty \tag{1}$$

reláció bizonyításán alapult. RÉNYI A. egy későbbi dolgozatában [3] a keverő halmazok fogalmának bevezetésével megmutatta, hogy a tökéletesség feltételezése nem szükséges. RÉNYI A. és RÉVÉSZ P. közös dolgozatukban [4] az eredményeket bizonyos ergodikus *Markov*-láncokra is kiterjesztették.

Ebben a dolgozatban a szerzők KOLMOGOROV eljárása alapján megmutatják, hogy az (1) összefüggés érvényes a tökéletesség feltevése nélkül nemcsak a **P** szerint független sorozatokra, hanem olyan sorozatokra is, melyekre érvényes a *Kolmogorov*-féle null-egy törvény. Ezen törvény a folyamatok elméletében különböző regularitási feltételek alapjául szolgált, melyekkel szintén foglalkozni kívánunk. Mivel pl. stacionárius sorozatok esetén a centrális határeloszlástétel fennállásához ez a legkevesebb, amit meg kell követelnünk, általánosításunk az eredeti tétel természetes általánosítása. A bizonyítás egyben megmutatja e tétel és a null-egy törvény szoros kapcsolatát. Megmutatjuk, hogy a stacionárius sorozatokra vonatkozó centrális határeloszlás tételek legutóbbi eredményei (ROZANOV [5], IBRAHIMOV [6]) milyen kapcsolatban vannak a fenti eredményekkel.

Munkánkban sok segítséget kaptunk ARATÓ MÁTYÁStól, aki problémáink és kérdéseink megoldásában a legjobb információkat és utasításokat adta. Ezért a segítségért köszönetünket fejezzük ki.

1. §. A null-egy törvény és a keverés

Jelölje $\mathfrak{M}_s^t$ $(-\infty < s < t < +\infty)$ az $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ valószínűségi mezőn értelmezett $\xi_s, \xi_{s+1}, \ldots, \xi_t$ valószínűségi változók által generált σ-algebrát. Jelölje továbbá $\mathfrak{M}_s^{+\infty}$ a legszűkebb $\bigcup_{n>s} \mathfrak{M}_s^n$-t tartalmazó σ-algebrát. Definiáljuk ezzel analóg az

[1] Itt és a továbbiakban $\mathbf{Q} \ll \mathbf{P}$ azt jelenti, hogy a Q mérték abszolút folytonos a P mértékre nézve, mégpedig, ha csak külön nem hangsúlyozzuk, mindig az $\mathfrak{M}_{-\infty}^{+\infty}$ σ-algebrán. P és Q mindig valószínűségi mértéket fog jelölni.

$\mathfrak{M}_{-\infty}^{t}$ és az $\mathfrak{M}_{-\infty}^{\infty}$ σ-algebrákat. Ha a $\{\xi_n\}$ valószínűségi változó sorozat teljesen független a $\mathbf{P}$ mértékre nézve, akkor tetszőleges $A \in \mathfrak{M}_{-\infty}^{t}$, $B \in \mathfrak{M}_{t+1}^{\infty}$ halmazokra

$$\mathbf{P}(AB) - \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B) = 0. \tag{1. 1}$$

Ha a $\{\xi_n\}$ sorozat a $\mathbf{P}$ mértékre nézve szigorú értelemben stacionárius sorozatot alkot, akkor az (1. 1) összefüggés nem áll fenn, ellenben azt mondjuk, hogy rendelkezik a keverés tulajdonságával, ha az általa generált $\mathfrak{T}$ mértéktartó transzformáció keverő, azaz ha

$$\lim_{n\to\infty} |\mathbf{P}(A\mathfrak{T}^n B) - \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)| \to 0 \qquad \begin{matrix} A \in \mathfrak{M}_{-\infty}^{0} \\ B \in \mathfrak{M}_{0}^{\infty}. \end{matrix} \tag{1. 2}$$

Az (1. 2) feltétel ekvivalens azzal, hogy tetszőleges B, az $\mathfrak{M}_{-\infty}^{\infty}$ σ-algabrára nézve mérhető halmazra $\mathbf{Q}(\mathfrak{T}^n B) \to \mathbf{P}(B)$, pontosabban igaz a következő

1. 1. TÉTEL: *Annak szükséges és elégséges feltétele, hogy egy stacionárius sorozat rendelkezzen a keverés tulajdonságával az, hogy tetszőleges $\mathbf{Q} \ll \mathbf{P}$ mértékre teljesüljön a*

$$\mathbf{Q}(\mathfrak{T}^n B) \to \mathbf{P}(B) \qquad B \in \mathfrak{M}_{-\infty}^{\infty}, \quad n \to +\infty \tag{1. 3}$$

összefüggés.

Bizonyítás: Ha

$$\mathbf{Q}_M(B) = \frac{1}{\mathbf{P}(M)} \int_B \chi_M \, d\mathbf{P}, \quad \text{ahol} \quad \varkappa_M = \begin{cases} 1, & \text{ha} \quad \omega \in M \\ 0, & \text{ha} \quad \omega \notin M, \end{cases}$$

akkor (1. 2) épp (1. 3) fennállását jelenti a $\mathbf{Q}_M \ll \mathbf{P}$ valószínűségi mértékre.

Ha (1. 3) fennáll a $\mathbf{Q}_1, \ldots, \mathbf{Q}_n$ mértékekre, akkor nyilván bármely konvex lineáris kombinációjukra is, ebből határátmenettel következőleg tetszőleges $\mathbf{Q} \ll \mathbf{P}$ valószínűségi mértékre is, ami e feltétel szükségességét mutatja. Másrészt, ha (1. 3) fennáll minden $\mathbf{Q}_A$, $A \in \mathfrak{M}_{-\infty}^{0}$ mérték esetén, akkor nyilván minden $A \in \mathfrak{M}_{-\infty}^{0}$-ra érvényes lesz az (1. 2) összefüggés is.

Független valószínűségi változók sorozataira érvényes a *Kolmogorov*-féle null-egy törvény, azaz, ha

$$\bigcap_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{M}_n^{\infty} = \mathfrak{N}, \tag{1. 4}$$

akkor $\mathfrak{N}$ triviális σ-algebra. (Ezt úgy értjük, hogy $\mathfrak{N}$ csak null és egy mértékű halmazokból álló σ-algebra.)

Az (1. 4) feltételnek eleget tevő sorozatokat szokás reguláris sorozatoknak nevezni. (A dinamikus rendszerek elméletében — vagy más néven ergodelméletben — az (1. 4) feltételnek eleget tevő rendszereket *Kolmogorov*-féle rendszereknek nevezik [7]). Ismeretes, hogy (1. 4) fennállása többet jelent a keverésnél (lásd pl. ROHLIN [8]), sőt igaz a következő tétel (a tételt stacionárius sorozatokra ROZANOV mondja ki és bizonyítja [5] könyvében, 246. old. Előzőleg VINOKUROV [12] bizonyított hasonló tételt *Markov*-láncokra).

1. 2. TÉTEL: *A* $\{\xi_n\}$ *sorozat* (1. 4) *értelemben vett regularitásának szükséges és elégséges feltétele a*

$$\sup_{B\in\mathfrak{M}_n^\infty} |\mathbf{P}(AB)-\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)|\to 0, \quad \text{ha} \quad n\to\infty,\ A\in\mathfrak{M}_{-\infty}^\infty \tag{1. 5}$$

összefüggés fennállása.

Bizonyítás: A szükségesség bizonyítása. A null-egy törvény fennállása esetén

$$\mathbf{M}(\xi\,|\,\mathfrak{N})=\mathbf{M}(\xi),$$

másrészt az ismert martingál konvergencia tétel szerint (DOOB [9] 298 o.)

$$\mathbf{M}|\mathbf{M}(\xi\,|\,\mathfrak{M}_n^\infty)-\mathbf{M}(\xi\,|\,\mathfrak{N})|\to 0, \qquad n\to+\infty. \tag{1. 6}$$

Mivel a $B\in\mathfrak{M}_n^\infty$ halmaz $\varkappa_B$ karakterisztikus függvénye $\mathfrak{M}_n^\infty$ mérhető, tetszőleges mérhető A halmazra

$$\mathbf{P}(AB)=\mathbf{M}(\chi_A\chi_B)=\mathbf{M}(\mathbf{M}(\chi_A\chi_B\,|\,\mathfrak{M}_n^\infty))=\mathbf{M}(\chi_B\mathbf{M}(\chi_A\,|\,\mathfrak{M}_n^\infty))=\int_B \mathbf{M}(\chi_A\,|\,\mathfrak{M}_n^\infty)\,d\mathbf{P},$$

másrészt

$$\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)=\mathbf{M}(\chi_A)\mathbf{M}(\chi_B)=\int_B \mathbf{M}(\chi_A\,|\,\mathfrak{N})\,d\mathbf{P},$$

így (1. 6) alapján

$$\sup_{B\in\mathfrak{M}_n^\infty}|\mathbf{P}(AB)-\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)|=\sup_{B\in\mathfrak{M}_n^\infty}\left|\int_B(\mathbf{M}(\chi_A\,|\,\mathfrak{M}_n^\infty)-\mathbf{M}(\chi_A\,|\,\mathfrak{N}))\,d\mathbf{P}\right|\leqq$$

$$\leqq\int_\Omega|\mathbf{M}(\chi_A\,|\,\mathfrak{M}_n^\infty)-\mathbf{M}(\chi_A\,|\,\mathfrak{N})|\,d\mathbf{P}=\mathbf{M}|\mathbf{M}(\chi_A\,|\,\mathfrak{M}_n^\infty)-\mathbf{M}(\chi_A\,|\,\mathfrak{N})|\to 0, \quad \text{ha} \quad n\to+\infty.$$

Az elégségesség bizonyítása. Ha $A\in\bigcap_n\mathfrak{M}_n^\infty$ akkor $A\in\mathfrak{M}_n^\infty$ tetszőleges n-re, így az (1. 5) összefüggés alapján (B helyébe A-t téve)

$$|\mathbf{P}(A)-\mathbf{P}^2(A)|=0,$$

amiből $\mathbf{P}(A)$ vagy 0, vagy 1 lehet, amivel a tétel bizonyítását befejeztük.

Az előbbi tételből azonnal következik egy — a mi céljainkra sokkal használhatóbb — tétel, mely a **P**-re nézve abszolút folytonos **Q** mértékek segítségével fejezi ki a regularitást.

1. 3. TÉTEL: *A* $\{\xi_n\}$ *sorozat* (1. 4) *regularitásának szükséges és elégséges feltétele a*

$$\sup_{B\in\mathfrak{M}_n^\infty}|\mathbf{Q}(B)-\mathbf{P}(B)|\to 0, \quad \text{ha} \quad n\to+\infty \tag{1. 7}$$

összefüggés fennállása, tetszőleges $\mathbf{Q}\ll\mathbf{P}$ *mértékre.*

Bizonyítás: A szükségesség bizonyítása. A *Radon—Nikodym*-tételt az $\mathfrak{M}_{-\infty}^\infty$ σ-algebrára alkalmazva,

$$\mathbf{Q}(B)=\int_B\lambda\,d\mathbf{P},$$

ahol tehát $M(\lambda)=1$ és λ mérhető a $\mathfrak{M}_{-\infty}^{+\infty}$ σ-algebrára nézve. Az 1. 1 tétel bizonyításához hasonlóan elég a szükségességet $\lambda=\frac{\chi_A}{\mathbf{P}(A)}$, $\mathbf{P}(A)>0$ alakú függvényekre bizonyítani. Az 1. 2 tétel szerint azonban ilyenkor

$$\sup_{B\in\mathfrak{M}_n^\infty}|\mathbf{Q}(B)-\mathbf{P}(B)| = \sup_{B\in\mathfrak{M}_n^\infty}\frac{|\mathbf{P}(AB)-\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)|}{\mathbf{P}(A)}\to 0, \quad \text{ha} \quad n\to+\infty.$$

Innen az állítás tetszőleges 1 várható értékű lépcsős függvényekre következik, és $\mathbf{M}_{\mathbf{P}}(\lambda)=1$ miatt λ ilyen lépcsős függvényekkel tetszőleges pontossággal megközelíthető.

Az elégségesség bizonyítása nyilvánvalóan következik a $\mathbf{Q}(B)=\mathbf{P}(B|A)\ll\mathbf{P}(B)$ (ha $\mathbf{P}(A)>0$) összefüggésből, mivel ekkor

$$\sup_{B\in\mathfrak{M}_n^\infty}|\mathbf{Q}(B)-\mathbf{P}(B)| = \sup_{B\in\mathfrak{M}_n^\infty}\frac{|\mathbf{P}(AB)-\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)|}{\mathbf{P}(A)}.$$

Ezzel a tételünket bebizonyítottuk.

2. §. Különböző regularitások

Mint az előző pontban láttuk, a null-egy törvény fennállása több, mint az egyszerű keverés. Most megvizsgáljuk a különböző célokra bevezetett regularitások viszonyát. Tekintsük először az egyszerű keverés közvetlen általánosításaként adódó

$$(2.1)\qquad \sup_{B\in\mathfrak{M}_{k+n}^\infty}|\mathbf{P}(AB)-\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)|\to 0, \quad \begin{array}{l}\text{ha} \quad n\to+\infty, A\in\mathfrak{M}_{-\infty}^k\\ k \text{ rögzített}\end{array}$$

összefüggést. Ez az összefüggés ekvivalens az (1. 5) összefüggéssel. Pontosabban igaz a

2. 1. TÉTEL: *A* (2. 1) *összefüggés fennállásából következik az* (1. 5) *összefüggés fennállása.* (A fordított állítás nyilvánvaló.)

Bizonyítás: Először azt kell belátnunk, hogy ekkor igaz a null-egy törvény. Mivel ennek bizonyítása tulajdonképpen a független változó sorozatra vonatkozó null-egy tétel bizonyításának (lásd pl. ITO [10]) megismétlését jelentené csekély módosítással, így ettől eltekintünk. ROSENBLATT [11] dolgozatában a következő fogalmat vezeti be: Egy $\{\xi_n\}$ stacionárius sorozatot erősen keverőnek mondunk, ha

$$(2.2)\qquad \sup_{\substack{A\in\mathfrak{M}_{-\infty}^k\\ B\in\mathfrak{M}_{k+n}^\infty}}|\mathbf{P}(AB)-\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)|\to 0, \quad \text{ha} \quad n\to+\infty.$$

Egy $\{\xi_n\}$ stacionárius sorozatot teljesen regulárisnak szoktak nevezni, ha 1 valószínűséggel

$$(2.3)\qquad \sup_{B\in\mathfrak{M}_{k+n}^\infty}|\mathbf{P}(B|\mathfrak{M}_{-\infty}^k)-\mathbf{P}(B)|\to 0, \quad \text{ha} \quad n\to+\infty.$$

Igazak a következő tételek:

2. 2. TÉTEL: *Ha egy* $\{\xi_n\}$ *sorozat teljesen reguláris, akkor erősen keverő is.*

2. 3. TÉTEL: *A* (2. 2) *regularitásból következik a null-egy törvény fennállása.*

Bizonyítás: Legyen $A\in\mathfrak{M}^k_{-\infty}$ és $B\in\mathfrak{M}^{\infty}_{k+n}$. Akkor

$$|\mathbf{P}(AB)-\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)| = \left|\int_A [\mathbf{P}(B\,|\,\mathfrak{M}^k_{-\infty})-\mathbf{P}(B)]\,d\mathbf{P}\right| \leqq$$

$$\leqq \sup_{B\in\mathfrak{M}^{\infty}_{k+n}} |\mathbf{P}(B\,|\,\mathfrak{M}^k_{-\infty})-\mathbf{P}(B)|\cdot\mathbf{P}(A)\to 0,$$

ezzel a 2. 2 tételt igazoltuk.

A (2. 3) tétel bizonyításához csak azt kell meggondolni, hogy a (2. 2) összefüggés fennállása maga után vonja a (2. 1) összefüggés fennállását.

Más megfogalmazásban a (2. 1) és (2. 2) regularitásokat a következőképpen lehet felírni:

$$\sup_{\eta} |\mathbf{M}\eta\xi-\mathbf{M}\eta\cdot\mathbf{M}\xi|\to 0, \qquad n\to+\infty \tag{2. 1'}$$

$$\sup_{\xi,\eta} |\mathbf{M}\eta\xi-\mathbf{M}\eta\cdot\mathbf{M}\xi|\to 0, \qquad n\to+\infty, \tag{2. 2'}$$

ahol $|\eta|\leqq 1$, $|\xi|\leqq 1$ és ξ mérhető az $\mathfrak{M}^k_{-\infty}$, η pedig az $\mathfrak{M}^{\infty}_{k+n}$ σ algebrára nézve.

Annak belátásához, hogy (2. 1') és (2. 2') fennállásából következik (2. 1) és (2. 2) fennállása, elég tekinteni a $\xi=\varkappa_A$ és $\eta=\varkappa_B$ valószínűségi változókat. A fordított állítást igazolandó tekintsünk valós η és ξ változókat. Akkor fennáll az, hogy

$$\mathbf{M}\xi\eta-\mathbf{M}\xi\mathbf{M}\eta = \mathbf{M}[\mathbf{M}(\xi\eta\,|\,\mathfrak{M}^k_{-\infty})-\xi\mathbf{M}\eta] =$$

$$= \mathbf{M}[\xi\mathbf{M}(\eta\,|\,\mathfrak{M}^k_{-\infty})-\xi\mathbf{M}\eta] = \mathbf{M}\{\xi[\mathbf{M}(\eta\,|\,\mathfrak{M}^k_{-\infty})-\mathbf{M}\eta]\}.$$

Bevezetve az

$$\eta' = \begin{cases} 1 & \text{ha} \quad \mathbf{M}(\eta\,|\,\mathfrak{M}^k_{-\infty})-\mathbf{M}\eta>0 \\ -1 & \text{ha} \quad \mathbf{M}(\eta\,|\,\mathfrak{M}^k_{-\infty})-\mathbf{M}\eta\leqq 0, \end{cases}$$

$$\xi' = \begin{cases} 1 & \text{ha} \quad \mathbf{M}(\eta'\,|\,\mathfrak{M}^{\infty}_{k+n})-\mathbf{M}\eta'>0 \\ -1 & \text{ha} \quad \mathbf{M}(\eta'\,|\,\mathfrak{M}^{\infty}_{k+n})-\mathbf{M}\eta'\leqq 0 \end{cases}$$

jelöléseket, nyerjük, hogy

$$|\mathbf{M}\xi\eta-\mathbf{M}\xi\mathbf{M}\eta| \leqq |\mathbf{M}\{\eta'[\mathbf{M}(\eta\,|\,\mathfrak{M}^k_{-\infty})-\mathbf{M}\eta\}| = |\mathbf{M}\eta\eta'-\mathbf{M}\eta\mathbf{M}\eta'|$$

és ebből teljesen hasonló módon az

$$|\mathbf{M}\eta\xi-\mathbf{M}\eta\mathbf{M}\xi| \leqq \mathbf{M}\eta'\xi'-\mathbf{M}\eta'\mathbf{M}\xi'|$$

összefüggéseket. Ez azt jelenti, hogy η-hoz és ξ-hez létezik olyan $B\in\mathfrak{M}^{\infty}_{k+n}$ és $A\in\mathfrak{M}^k_{-\infty}$, hogy az

$$\eta^* = 2\chi_B-1$$

$$\xi^* = 2\chi_A-1$$

változókra nézve

$$|\mathbf{M}\xi\eta-\mathbf{M}\xi\mathbf{M}\eta| \leqq |\mathbf{M}\eta^*\xi^*-\mathbf{M}\eta^*\mathbf{M}\xi^*| = 4|\mathbf{P}(AB)-\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)|.$$

Ezzel állításunkat igazoltuk.

Következmény. A (2. 1), (2. 2) és (2. 3) regularitás fennállásából (1. 7) következik.

3. §. Határérték-tételek kiterjesztése

A *Kolmogorov*-féle [2] gondolatmenet megismétlésével bebizonyítjuk, hogy azon sorozatokra, melyekre érvényes valamilyen határeloszlástétel, és a határeloszlás nem függ az első m tag (m fix) összegétől, a határeloszlástétel igaz marad minden $\mathbf{Q} \ll \mathbf{P}$ mértékre is. Igaz ugyanis a következő

3. 1. TÉTEL: *Ha a $\{\xi_n\}$ sorozat a* $\mathbf{P}$ *mérték szerint az* (1. 4) *értelemben reguláris, és léteznek olyan valós C_n és D_n számok, hogy a $\zeta_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$ változóra igaz a*

$$\mathbf{P}\left\{\frac{\zeta_n - C_n}{D_n} < x\right\} \Rightarrow F(x),$$

(ahol $F(x)$ nem függ az első m változótól, m rögzített) összefüggés, akkor tetszőleges $\mathbf{Q} \ll \mathbf{P}$ mértékre nézve is

$$\mathbf{Q}\left\{\frac{\zeta_n - C_n}{D_n} < x\right\} \Rightarrow F(x).$$

Megjegyzés. A regularitás megkövetelése lényegében nem jelent megszorítást, mivel $\mathbf{P}$-re nézve csak így képzelhető el a határeloszlástétel fennállása (lásd IBRAHIMOV [6], VOLKONSZKIJ és ROZANOV [13]).

Bizonyítás: Jelölje $A_n(x)$, ill. $A_{mn}(x)$ azon ω-k halmazát, melyekre

$$\frac{\zeta_n - C_n}{D_n} < x,$$

illetve az

$$\eta_{mn} = \frac{\xi_{m+1} + \ldots + \xi_n - C_n}{D_n}$$

valószínűségi változó mellett

$$\eta_{mn} < x.$$

Állításunk igazolásához azt kell belátnunk, hogy ha x $F(x)$-nek folytonossági helye, akkor

$$|\mathbf{P}(A_n(x)) - \mathbf{Q}(A_n(x))| < \varepsilon, \quad \text{ha} \quad n > N_0(\varepsilon), \tag{3. 1}$$

(1. 7) miatt

$$|\mathbf{P}(A_{mn}(x)) - \mathbf{Q}(A_{mn}(x))| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \text{ha} \quad m > N_1(\varepsilon). \tag{3. 2}$$

Minthogy feltettük, hogy a határeloszlás független az első m (rögzített) változó viselkedésétől, így

$$|\mathbf{P}(A_n(x) \circ A_{mn}(x))| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \text{ha} \quad n > N_2(\varepsilon, m), \tag{3. 3}$$

s mivel $\mathbf{Q} \ll \mathbf{P}$,

$$|\mathbf{Q}(A_n(x) \circ A_{mn}(x))| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \text{ha} \quad n > N_3(\varepsilon, m, Q). \tag{3. 4}$$

(3. 2), (3. 3) és (3. 4) együttesen épp (3. 1) fennállását jelentik.

IRODALOM

[1] Rényi, A.: Contributions to the theory of independent random variables, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **1** (1950) 99–108.
[2] Kolmogorov, A. N.: Egy tétel a feltételes várható értékek konvergenciájáról és annak néhány alkalmazása. *Az Első Magyar Matematikai Kongresszus Közleményei* (1950. aug. 28–szept. 2) 1952. 377–86.
[3] Rényi, A.: On mixing sequences of sets, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **9** (1958), 215–227.
[4] Rényi, A.–Révész, P.: On mixing sequences of random variables, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **9** (1958), 338–393.
[5] Розанов, Ю. А. *Стационарные случайные процессы.* Москва, 1963.
[6] Ибрагимов, И. А.: Некоторые предельные теоремы для стационарных процессов, *Теория вероятностей и ее применения,* **7** (1962), 361–392.
[7] Rohlin, V. A.: Új fejlődés a mértéktartó leképezések elméletében, *MTA III. Osztály Közleményei,* **12** (1962), 339–360.
[8] Рохлин, В А.: Точные эндоморфизмы пространства Лебега, *Изв. Акад. Наук, СССР,* **25**, (1961), 499–530.
[9] Doob, J. L.: *Stochastic Processes,* New York, 1953.
[10] Ито, К.: *Вероятностные процессы,* Москва, 1960.
[11] Rosenblatt, M.: A central limit theorem and a strong mixing condition, *Proc. Nat. Acad. Sci, USA,* **42** (1956) 43. o.
[12] Винокуров, В. Г.: Условия регулярности вероятностных процессов, ДАН СССР, **113** (1957), 959–961.
[13] Волконский, В. А. и Ю. А. Розанов: Некоторые предельные теоремы для случайных функций, *Теория вероятностей и ее применения,* **4** (1959), 186–207.

(Beérkezett: 1964. V. 4.)

VÉGTELEN SOROK ÉS FLUXIOK

(A NEWTONI INFINITÉZIMÁLIS ANALÍZIS KIALAKULÁSA, II.)

Írta: VEKERDI LÁSZLÓ

Előző közleményünkben[1] röviden vázoltuk a XX. századi matematika-történetírás állásfoglalását NEWTON infinitézimális analízisével kapcsolatban. Láttuk, hogy többnyire a NEWTON—LEIBNIZ vita és a fizika—matematika ellentétpár felől közelednek a newtoni infinitézimális számítás fogalmainak történeti tisztázásához. Ez annyit jelent, hogy a differenciál- és integrálszámítás, a differenciálgeometria, a limesz-matematika, a sorelmélet és függvényelmélet felől érkeznek NEWTONhoz. Olyan matematikai diszciplinák felől, amelyek a leibnizi jelölési mód és algoritmus kifejlesztéseként és hiányosságainak fokozatos kiküszöbölésével nőttek naggyá. Ezzel párhuzamosan a matematikai gondolkozás fokozódó szigorodása, amelyik egyre pontosabb válaszfalat igyekezett vonni a matematika és annak fizikai alkalmazásai közé, eleve bizalmatlanul tekintett NEWTON fizikai fogalmakkal átszőtt infinitézimális meggondolásaira.

A matematikatörténészek, fordított Antoniusként dicsérni jönnek NEWTONt és eltemetik. Talán Jean PELSENEER fejezte ki legvilágosabban és legőszintébben ennek az interpretációnak a lényegét. Szerinte[2] — és ismételjük, hogy ebben a tudománytörténészek legnagyobb részének ugyanez az álláspontja — NEWTON érdeklődése sohasem volt igazán matematikai. Az infinitézimális módszert csupán új eredmények elérésére alkalmas eljárásnak tekintette. Sohasem tudott áttörni a modern matematikai felfogáshoz, mindvégig a görög matematika fogalmi körében maradt, az egyszerű, szép, harmonikus, ahogyan ő nevezte „simple & elegant" bűvkörében. Nem jutott el, jóllehet abban a korban élt, amit a *synthèse algebrico-logique* korának nevez a matematika-történetírás, a matematika algebrai felfogásáig. Nem tudott csatlakozni ahhoz a vonalhoz, amelyik szakított a görög gondolkozásmóddal: DESCARTES, FERMAT, LEIBNIZ matematikájához. Korszakalkotó nagy műve a *Principia* éppen azért nem hatott a maga korában, mert a nehézkes, elavult görög geometriai módszereket alkalmazta benne. A *Principia* forradalmi fizikai gondolatait retrográd matematikai módszerekbe öltöztette és ez a tény különös kettőségre vezetett az angol tudományos élet fejlődésében. NEWTON fizikai kiválósága miatt szerzett tekintélye bizonyos fokig kötelezővé tette Angliában matematikai módszereinek az alkalmazását is, és ez a tény csaknem egy évszázadra visszavetette az angol matematikát a leibnizi módszereket alkalmazó kontinenshez képest. Csak a XIX. század

[1] VEKERDI LÁSZLÓ: „A newtoni infinitézimális analízis kialakulása a XX. századi matematikatörténetírás tükrében", *A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei*, **14**, 35—70, 1964.

[2] PELSENEER, J.: „Une opinion inedite de Newton sur l'Analyse des Anciens à propos de l'Analysis geometrica de Hugo de Omerique", *Isis*, **14**, 163—165, 1930.

elején kezdik az angol matematikusok *to accept the „de-ism" of Leibniz in place of the „dot-age" of Newton*[3], írja szellemesen Newton matematikai műveinek kitűnő ismerője és kiadója, J. F. SCOTT.

LEIBNIZ szerencsés jelölése — NEWTON szerencsétlen pontjai, LEIBNIZ bátor előretörése az infinitézimális analízis geometriai alkalmazásainak területén — NEWTON régi, steril görög geometriai módszerekhez való ragaszkodása, LEIBNIZ nagyobb érzéke az algebrai algoritmus iránt, LEIBNIZ nagyobb szintetiko-kombinatorikus képessége, ez az állandó és csaknem elkerülhetetlen összehasonlítgatás NEWTON és LEIBNIZ infinitézimális matematikája között szükségszerűen vezetett J. E. HOFMANN kategorikus megállapításához: „A későbarokk matematikai csúcsteljesítménye a kalkulus felfedezése. Ez G. W. LEIBNIZ, egy lipcsei professzor fiának a kizárólagos érdeme."[4]

Másfelől rámutatott a modern matematika-történetírás a newtoni infinitézimális matematika elődeinek a hosszú sorára. NEWTON mestere, Isaac BARROW „fedezte fel" az „integrálás" és „differenciálás" inverz jellegét. MERCATOR és James GREGORY fedezték fel a „transzcendens függvények" sorbafejtését. FERMAT fedezte fel, hogy a „differenciálhányados" a differenciahányados „határértékeként" értelmezendő. GREGORIUS A SANTO VINCENTIO fedezte fel az infinitézimális analízis szempontjából annyira fontos összefüggést a logaritmus és az egyenlő szárú hiperbola területe között, DESCARTES a „differenciálegyenleteket", GALILEI a fizikai problémából adódó „differenciálegyenlet integrálását", és így tovább.[5]

Amit NEWTON matematikai munkájában újnak és meglepőnek tartottak, az a modern matematika-történetírás szerint elődeitől származik s ezt sem ő fejleszti tovább és juttatja diadalra, hanem LEIBNIZ. Mit fedezett fel NEWTON, aki — minden matematika-történetírás ellenére — mégiscsak a modern infinitézimális matematika egyik legnagyobb jelentőségű megteremtője volt? Mit tudott a matematikából NEWTON?

Modern fogalmak és a XVII. századi matematika

Lássuk először mit nem tudott.

1. Nem tudta, hogy mi a függvény. Sem ő, sem kortársai nem ismerték ezt az egyszerű, számunkra oly mindennapos és nélkülözhetetlen fogalmat.[6] Nem tudta,

[3] SCOTT, J. F.: *A history of mathematics*, London, 1958, 162: „...elfogadni LEIBNIZ ‚deizmusát' NEWTON ‚pontozása' helyébe". Lefordíthatatlan szójáték, a diff. LEIBNIZi jelölésére építve.

[4] HOFMANN, J. E.: *Geschichte der Mathematik, 2. Bd.*, Berlin, 1957, 62.

[5] Lényegében már ZEUTHEN így látta ezt (ZEUTHEN, H. G.: *Geschichte der Mathematik im XVI. und XVII. Jahrhundert*, Leipzig, 1903) s a infinitézimális számítás történetének újabb monográfusai, TOEPLITZ (TOEPLITZ, O. *Die Entwicklung der Infinitesimalrechnung*, Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1949) és BOYER (BOYER, C. B.: *The history of the calculus and ist conceptual development*, New York 1949) szintén ezt a felfogást követik. Utóbbi szerint pl. a NEWTON és LEIBNIZ között kitört pritításharc okát elsősorban abban kell keresni, hogy azonos elődök munkáját folytatják, ill. veszik át.

[6] A függvényfogalom XVII. századi előtörténetét jól ismerteti WHITESIDE, D. TH.: „Patterns of Mathematical thought in the later seventeenth century", *Archive for History of Exact Sciences*, **1**, 179—388, 1960. Az infinitézimális számítás fontos szerepét a függvényfogalom kialakulásában BOUTROUX ismerte fel (BOUTROUX, P.: *L'idéal scientifique des mathématiciens*, Paris, [2]1955, 118—119.), szerinte viszont NEWTON semmi egyebet nem tett, mint létrehozta a „végtelen algebráját", a véges algebrának a tetszőleges pontosság figyelembevételével történő folytatását (i. m. 129.). BOUTROUX végeredményben az EULER-féle függvényfogalmat vetíti vissza a XVII. századba, az

mit jelent egy adott számhalmaz minden egyes x eleméhez egy másik halmaz egy vagy több y elemét rendelni. Nem a hozzárendelés fogalma okozta a nehézséget. A NEWTON korabeli matematika kiterjedten dolgozott táblázatokban kifejezett összefüggésekkel. NEWTON maga jelentős helyet foglal el az interpolációs módszerek fejlesztésében. Az interpoláció pedig nem egyéb, mint új számértékek adott számértékekhez bizonyos szabályok szerint történő hozzárendelése. Azt is tudta NEWTON, hogy az algebrai egyenletek adott számokhoz rendelnek hozzá más számokat, de sohasem jutott eszébe *általánosságban* egy adott halmaz minden egyes eleméhez egy másik halmaz egy vagy több elemét rendelni hozzá. NEWTON nem általánosítja a hozzárendelés fogalmát, s így ahol alkalmazza is ott sem szabad ebben „függvényt" látnunk. Nem szabad még az EULER-féle függvényfogalom értelmében sem, mert az EULER-féle függvényfogalom már a modern függvény szűk körben érvényes intuitív megsejtését jelenti.

2. Nem ismerte NEWTON a határérték fogalmát sem.[7] Több helyen beszél ugyan „eltűnő" és „megszülető" mennyiségekről, sőt ír — különösen levelezésében — minden adott értéknél kisebb eltéréssel történő megközelítésről is és kísérletet tesz a végtelen sorral nyert megközelítés esetében az elhanyagolás folytán előálló hiba megbecsülésére, de a határérték fogalmát, ami a konvergencia kritériumokkal körülbástyázottan a modern infinitézimális analízis lelkét jelenti, a határérték fogalmát nem ismeri. Újból nem azt akarjuk ezzel mondani, hogy nem *dolgozik* vele. Hiszen számos olyan feladatot old meg, amit mi a limesz-fogalom segítségével végzünk el. Szinte boszorkányos ügyességgel dolgozik végtelen sorokkal. Nyoma sincs nála CAVALIERI bizonytalanságának vagy WALLIS próbálgatásainak. Magabiztosan jár azon a területen, ahol előtte sötétben tapogatóztak, vagy — sokszor még James GREGORY is — klasszikus módszerekkel megkerülve a problémát, indirekt bizonyítást alkalmaztak. De a határérték és a konvergencia fogalmát, azt, hogy „bármely kicsiny ε számhoz rendelhető egy N küszöbszám úgy ..." — azt *nem ismeri.*

3. Nem ismerte a „folytonosság" fogalmát. Fölöslegesnek tűnik talán külön kiemelni ezt, mert mi a folytonosságot a függvényeknél vezetjük be a limesz-fogalom segítségével, de a folytonosságnak a mi mai felfogásunk szerint centrális jelentősége van a differenciálszámítás elméletében és így nem árt szem előtt tartani, hogy ennek az elméletnek egyik megteremtője, NEWTON nem ismerte azt.

---

algebrai és nem-algebrai *függvények* megkülönböztetését keresi ott, ahol nem erről van szó, hanem végtelen „egyenletekről" és infinitézimális számításról. Vö. SZŐKEFALVI-NAGY BÉLA: *Valós függvények és függvénysorok*, Budapest, 1954, 11.: „A valós változós függvények elmélete a differentiál- és integrálszámításnak NEWTON és LEIBNIZ által a XVII. században történt felfedezésével kezdődött. E számítások tárgyának: a függvénynek a fogalma együtt fejlődött az elmélettel. DESCARTES a század első felében a ‚geometriától' még minden olyan görbét távol kívánt tartani, amely nem definiálható algebrai műveletekkel. A differentiál- és integrálszámításból megszülető matematikai analízisban azonban rendre polgárjogot nyertek az algebraiakon kívül más egyszerű függvények is, mint a logaritmus, exponenciális, trigonometrikus és arcus függvények, s ezekkel együtt minden olyan függvény is, amely belőlük ered akár közvetlenül, akár az infinitézimális számítás eszközeivel: kvadratúrákkal vagy végtelen sorok összegeként. Legalábbis ezeket tekintette pl. EULER igazi függvényeknek".

[7] VEKERDI LÁSZLÓ: „Infinitézimális módszerek Pascal matematikájában", *A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei*, **13**, 269—285, 1963.

4. Ugyanezen okból jegyezzük meg, hogy nem ismerte a monotónia fogalmát sem.

5. Nem ismerte, még sík esetében sem, az analitikus geometriát,[8] helyesebben azt, amit ma ez alatt a kifejezés alatt értünk: a sík pontjaihoz rendelt számpárok közötti kapcsolatok vizsgálatát. Pl. az ellipszis számára nem a sík azon x, y pontjainak a helye, amelyek kielégítenek egy bizonyos — a koordinátarendszertől függő — másodfokú egyenletet. NEWTONnak az ellipszis koordinátarendszertől független geometriai fogalom, kis és nagy átmérővel, fókuszokkal, érintőkkel és azoknak megfelelő átmérőkkel és ezek között a vonalak között fennálló arányokkal. Számára a geometria adekvát matematikai módszerét az arányok jelentették, nem az egyenletek. NEWTON sokat dolgozott egyenletekkel, de azt tartotta, hogy a két tudományt, geometriát és aritmetikát nem szabad összezavarni. Milyen gondosan ügyeltek a görögök ennek a kettőnek az elkülönítésére! S milyen sok bajt okoznak a modernek a kettő összekeverésével: elveszik a geometria „egyszerűségét és eleganciáját".
Számunkra, akik sokszor napokig töprengünk a *Principia* egy-egy „egyszerű" ellipszis-tételén, amit modern analitikus geometriai módszerekkel percek alatt megértünk, különösnek tűnhet NEWTON ízlése. Azonban ha a newtoni matematikát kívánjuk megérteni, alkalmazkodni kell hozzá. A függvény, a határérték, a folytonosság, a monotonia fogalmai és a koordináta geometria nélkül kell közelednünk a newtoni analízishez.

A XVII. századi angol matematika numerikus tradíciói

A XVII. századi matematika egyik legfontosabb tette az algebrai egyenletekkel kifejezhető, DESCARTES által „geometrikus"-nak nevezett (algebrai) és az így ki nem fejezhető „mechanikus"-nak nevezett (transzcendens) problémák közötti különbségtétel s utóbbiak lépésről lépésre történő tisztázása volt. Az angol matematika azonban sohasem tett olyan éles különbséget geometrikus és mechanikus problémák között, mint a Cartesianus. Sőt, eleinte meg sem értik a mély megkülönböztetés lényegét.

William OUGHTRED, I. Károly korának legnagyobb matematikusa írta pl. egy mechanikus segédeszközökkel megoldható problémával kapcsolatban: „Vonalzók és körzők nem mechanikusak-e és mégis nem minden geometrikus problémát ezekkel oldunk meg? És nem használunk-e kúpszeleteket a maguk megfelelő műszereivel és maradunk mégis a nem-mechanikus problémák körében?"[9] A mechanikus problémákat épp úgy meg kell oldani, mint a geometrikusakat, a különbség csak az, hogy előbbiekben általában nem lehet teljes pontossággal számítani, meg kell elégedni megközelítésekkel. Ilyen megközelítő számításokba ütközünk mindenütt, ahol pl. a kör kerületének, ívhosszának vagy szögeinek a mérése szükséges: az egész trigonometriában. A trigonometrikus számítások a XVI. és XVII. század során igen nagy jelentőségűekké váltak a geográfia és a hajózás fejlődése miatt, azért meg-

[8] A matematika-történetírás régen megcáfolta azt a makacsul tovább élő tévhitet, hogy DESCARTES „fedezte fel" az analitikus geometriát. Jól tudjuk, hogy nem ismerte a „Descartes-féle" koordinátarendszert sem. Vö. BOYER, C. B.: *History of analytic geometry*, New York. 1956.

[9] *Correspondence of scientific men of the seventeenth century. Ed. by* STEPHEN PETER RIGAUD, 2 vols., Oxford, 1841. (Továbbiakban *Corr. Rigaud*) I, 22, Oughtred to Price Junii 6°. 1642, 60—63, 61.

könnyítésükre nagy táblázatokat állítottak össze, s a sok számjegyű, megközelítő számokkal oly nehéz szorzás megkerülésére vezették be a logaritmust. OUGHTRED főműve, a *Clavis Mathematica* ezeknek a trigonometriai megközelítő számításoknak az ismertetését tartalmazza. Az angol matematika a gyakorlati számolás felől indulva nem látta olyan nagynak a különbséget geometriai és mechanikai problémák között, mint az elméleti megoldásokra törekvő Cartesianus. Angliában erős számolótradíció él a XVII. század elején, amely a kiszámíthatóságra helyezi a súlyt a matematikai problémákban, nem az elvi különbségekre.

DESCARTES geometriájához képest szinte gyerekesen hat ez a számolós angol matematika. Íme idézet egy egykorú levélből: „*A*, *E*, és *I* így okoskodtak: *A* azt mondotta, hogy ha 480 fonttal több pénzem lenne mint amennyi van, akkor annyi lenne, mint amennyi *E*-nek és *I*-nek van együtt; *E* azt mondotta: 480 fontot adva a pénzemhez, kétszer annyi lenne, mint *A* és *I*-nek; *I* azt mondotta: 480 fontot adva a pénzemhez, háromszor annyim lenne mint *A* és *E*-nek együtt ..." Ezt és két hasonló kérdést OUGHTREDhez, kora legnagyobb angol matematikusához intézte a levélíró és hozzáfűzte: „Uram, tudom, hogy ön meg tud felelni a kérdésekre, vagy ha nem, úgy senki emberfia; mert nincs élő ember, aki többet tudna matematikából, mint ön ..."[10]

Egyenletek felállítása, transzformálása valamilyen ismert alakra, a gyökök — szükség esetén táblázatok segítségével történő — pontos vagy közelítő kiszámítása a XVII. század közepén az angol matematika centrális problémaköre. Egyenletek és sohasem függvények. Ismeretlenekről van bennük szó, nem változókról, ismeretlenekről, amiket ki kell számolni vagy egyszerű aritmetikai műveletek, vagy ha ez nem lehetséges, táblázatok segítségével. Ehhez az egyenleteket különféle ügyeskedésekkel már ismert formára kell hozni, transzformálni kell. Az algebra ebben a felfogásban közönséges számolás, csupán a számok helyett betűkkel dolgozik. Amint NEWTON alapvető algebrai művében, az *Arithmetica universalis*-ban megfogalmazza, csupán annyiban különbözik a számokkal történő számolástól, hogy meghatározatlan jelekkel dolgozik az adott számok helyett.[11] Az egyenletekben az ismeretlen vagy ismeretleneket meghatározott számok helyett ezekkel az indefinit jelekkel kell kapcsolatba hozni. Az egyenletek megoldása az ismeretleneknek ezen meghatározatlan jelek általi kifejezéséből áll s éppen ezért, mert jelekkel dolgozik, a megoldás általános érvényű: az algebra ilyen értelemben véve univerzális tudomány, amelyik tételekre vezet.[12] Ezek a tételek az egyenletek megoldására vonatkoznak. Az algebra NEWTON felfogásában az algebrai egyenletek megoldásának a tudományát jelenti. Olyan problémák oldhatók meg a segítségével, amiket egyenletekbe lehet önteni. De nem minden probléma fordítható le algebrai nyelvre már a geometriában sem, még kevésbé a mechanikában és a csillagászatban. Az algebra NEWTON szemében korlátolt tudomány. Csak előkészítője egy általánosabb, minden — vagy legalábbis minden *fontos* — probléma kezelésére alkalmas tudománynak,

[10] *Corr. Rigaud* I, 35, R. Shuttleworth to Oughtred 22. Jan. 1656, 88—90.

[11] *Arithmetica universalis sive de compositione et resolutione arithmetica auctore* IS. NEWTON, *Eq. Aur. Cum commentario* JOHANNIS CASTILLIONEI... *Amstelodami* 1761, 1. — Az *Arithmetica universalis* orosz fordítását kitűnő jegyzetekkel és kísérő tanulmánnyal adta ki A. P. JUSKEVICS. (*Iszaak N'juton, Vszeobscsaja arifmetika ili i kniga ob arifmeticseszkih szinteze i analize. Perevod, sztat'ja i kommentarii* A. P. JUSKEVICSA. Moszkva 1948.) A következőkben ezt a két kiadást használjuk és *Castill*, ill. *Juskevics* jelzéssel idézzük.

[12] *Juskevics* ... 7.

az analízisnek. A probléma megoldása azonban az analízisben is éppen úgy, mint az algebrában, a *kiszámítás*. NEWTON művei, még a legelvontabb matematikai munkái is, számolási szkémákkal vannak tele. NEWTON matematikájának egyik alapvető vonása a számolási könnyedség, a számolás szkematizálására való törekvés. Ebben teljesen az angol matematikai tradíció folytatója. DESCARTES univerzális módszert keresett a matematikában, NEWTON számolási szkémákat.

Algebra és infinitézimális analízis

Az algebrát NEWTON az infinitézimális analízis bevezetésének tekintette. Ebből a szempontból nagyon fontos az *Arithmetica universalis* egyik fejezete,[13] amelyben NEWTON az egyenletek „határainak" (limites) a kiszámítását tárgyalja. Egy egyenlet határain azt a két számot értették, amelyek közé az egyenlet gyökei esnek. NEWTON úgy jár el a megkeresésükben, hogy lépésenként „redukálja" az egyenletet addig, amíg az az ismeretlent már csak első hatványon tartalmazza. Az egyenletek redukált sorába egymásután az $1, 2, \ldots$, ill. $-1, -2, \ldots$ értékeket helyettesíti be. Az a szám, amelynek a behelyettesítésére a redukált egyenletek mindegyike azonos előjelű eredményt ad a határ, ennél nincs az egyenletnek nagyobb pozitív vagy negatív gyöke.

Az eljárás lelke, a redukció nem NEWTON felfedezése. A holland Cartesianusok, elsősorban J. HUDDE dolgozták ki. Az egyenletek redukciója a XVII. század hatvanas éveiben a matematikai kutatás egyik centrális kérdése volt. „Amit ön az algebra nagy kívánalmának tart — írja 1670-ben James GREGORY COLLINSnak — és SLUSIUStól vagy RICCIOtól várja a megoldását, azt én könnyen megoldom (megbízható módon) általános érvénnyel így: legyen

$$x^5-ax^4-b^2x^3+c^3x^2-d^4x = N^5,$$

szorozzuk meg minden tagját saját kitevőjével, az így előálló egyenlet

$$5x^5-4ax^4-3b^2x^3+2c^3x^2-d^4x = 0,$$

vagy

$$5x^4-4ax^3-3b^2x^2+2c^3x-d^4 = 0,$$

amely második egyenletnek bármely gyökét behelyettesítve az első egyenletbe x helyébe, az eredő mennyiség az az érték, amelyen túl (ha N^5-t nagyobbnak vesszük, mint az eredő mennyiség) az első egyenlet két gyökének lehetséges voltát veszíti el. ..."[14] A bizonyítást nem közli, az „túl fáradságos" — írja —" és felteszem, hogy kipróbálhatja anélkül is",[15] fűzi hozzá.

A XVII. században nagy divat volt formulák közlése azok bizonyítása nélkül. Kézről kézre jártak a nagy matematikusok képletei és eljárásai, számpéldák tömegére alkalmazták matematikus és amateur tisztelőik — a kettő között a XVII. században nem volt olyan nagy szakadék, mint ma — s éppen ezek a példák okozták, hogy a műveltek kis köre lassan szinte átitatódott — ha sokszor csak felületesen is — matematikával.

[13] Caput IV.

[14] *The Correspondence of Isaac Newton* (továbbiakban *Corr.*) Vol. I. 1661—1675. *Ed. by* H. W. TURNBULL, Cambridge, 1959, 20, Gregory to Collins 23 Nov. 1670, 45—49, 45.

[15] Uo. 46.

A XVII. század matematikájában nagyon fontos szerepet játszottak az egyenletek, s a HUDDE-féle módszertől azok néhány fontos tulajdonságának a megismerését várták. Elsősorban pl. azt, hogy milyen szélsőértékekkel rendelkezik egy adott egyenlet? GREGORY 1672-ben hosszú levélben[16] magyarázta meg COLLINSnak, hogyan kell használni a redukciós módszert az egyenletek maximum—minimumának a meghatározására. Az egyenletnek ott van szélsőértéke, ahol azt a redukált egyenlet gyökei mutatják. A maximum, ill. a minimum értékét pedig úgy kapjuk meg, hogy a redukált egyenlet gyökeit behelyettesítjük az eredeti egyenletbe.

Ez az egyszerű szabály, amit ma minden első éves matematikus azonnal helyére tesz, a XVII. század legnagyobb matematikusainak okozott súlyos fejtörőt. Tudták, hogy a szabály valamiképpen összefügg a görbéhez vont érintő meghatározásával. Tudták, hogy a redukált egyenletből a görbe sok más fontos tulajdonságára is lehet következtetni a szélsőértéken kívül. Pl. tudták azt, hogyha adva van két görbe metszését kifejező egyenlet, akkor a két görbe metszéspontjainak megfelelő összeeső gyököket a HUDDE-féle redukcióval lehet meghatározni. Nem hiába nevezte COLLINS az egyenletek redukcióját az „algebra nagy desideratumának”.

Maga NEWTON már 1664-ben kimutatta egy megfelelőképpen felállított egyenlet HUDDE-féle redukciójának a segítségével, hogy a kvadratura és érintőszerkesztés összetartozó műveletek, sőt, ismerte már az összetartozás jellegét is: egy adott görbéhez érintőt szerkeszteni annyit jelent, mint meghatározni egy másik, alkalmasan felvett görbe alatti területet és megfordítva.[17]

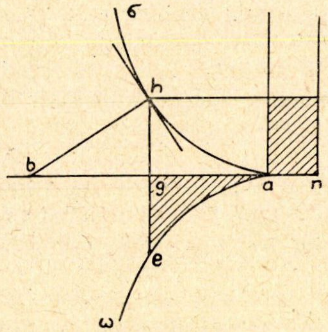
Később ez a tétel lett az infinitézimális számítás ún. „fundamentalis tétele”, s e miatt a tétel miatt lett BARROW — aki hat évvel NEWTON kézirata után feltehetően először közölte azt nyomtatásban — az infinitézimális számítás egyik „felfedezője”.

Azonban a XVII. század közepén, amikor nem ismerték a „primitív függvény” és a „derivált függvény” fogalmát — hiszen nem ismerték még a „függvény” fogalmát sem — akkor ennek a tételnek nem tulajdonítottak olyan nagy jelentőséget, mint ma. Az egyenletek redukciójának, annak igen. *Az* volt a „nagy desideratum” — ahogy COLLINS nevezi — nem a „Fundamentalsatz”. A fundamentális tétel csak azután vált az infinitézimális számítás alaptételévé, miután kezdtek függvényekben gondolkozni a matematikusok, s a tétel csak számukra mondja majd a „primitív függvény” és a „derivált függvény” inverz voltát. A végeredmény ugyanaz, de a sorrend különböző, s történeti szempontból ez nem közömbös. Mi a függvény felől haladunk a differenciálás és integrálás művelete felé, a fejlődés útja azonban fordított volt. Előbb tudtak differenciálni és integrálni, mint azt megmondani, hogy mi a „függvény”. A függvény fogalom megszületéséhez az egyik legfontosabb impulzust éppen az infinitézimális módszer kialakulása és gyors fejlődése szolgáltatta. A XVII. század nem függvényekben, hanem *egyenletekben* gondolkozott. Véges (algebrai) vagy végtelen sok tagú (transzcendens) egyenletekben, s az egyenletek tették a XVII. század matematikusai számára lehetővé a kvadratura és az érintőszerkesztés közötti összefüggés definiálását.

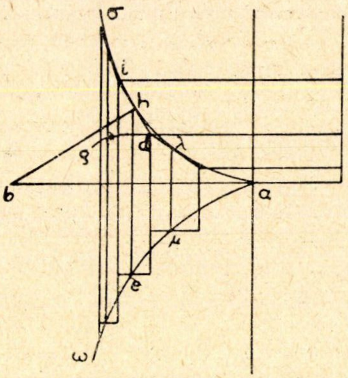
16 *Corr. Rigaud* II, 206, J. Gregory to Collins 14 Febr. 1672, 232—237.
17 *Corr.* II, 190, A mannuscript by Newton (? 1664), 164—167.

„Módszer kvadrálható görbe vonalak kvadrálására"

Az elv egyszerű: ha adva van két görbe úgy, hogy az egyik érintőjének az adatai határozzák meg a másik görbe alatti területet, akkor ez a terület mérhető, kvadrálható. Az érintő adatainak a meghatározása DESCARTES nyomán történt. NEWTON is DESCARTES módszerét alkalmazza 1664-es, az infinitézimális számítás „alaptételét" kimondó kéziratában: egy körrel metszi a görbét, amihez érintőt kell vonni, s azután egybeejti a két metszéspontot. Ekkor a kör és így ebben a pontban vont érintője is érinti a görbét. A metszéspontok egybeesését a kör és a görbe metszését kifejező egyenlet két gyökének az egybeesése adja meg. Ezáltal megkapja az érintőre merőleges egyenesnek, az érintő normálisának az adatait. Így megszerkesztve egy σha görbe minden h pontjában az érintőt, s az érintőt definiáló bgh normális háromszög



1. ábra



2. ábra

$\frac{bg}{gh}$ oldalarányának tetszőleges *an*-szeresét véve egy másik $ae\omega$ görbe $ge = an\frac{bg}{gh}$ ordinátáinak, ez alatt a másik görbe alatti terület egyenlő lesz a tetszőleges *an* távolság és a görbe h pontjához tartozó *gh* ordináta szorzatával.

A bizonyítás nagyon egyszerű: NEWTON az érintősokszöggel helyettesíti a σha görbét és az érintősokszög $d, i, \ldots$ csúcsaiból az *ab* egyenesre bocsátott merőlegesekkel kis téglalapokra osztja be az $ae\omega$ görbe alatti területet, s azután a sokszög oldalait egyre kisebbnek véve, a téglalapbeosztás összege egyre jobban megközelíti az $ae\omega$ görbe alatti terület értékét. A sokszög h pontjában — a σha görbe egy tetszőlegesen felvett pontja — azonban a $d\varrho i$ háromszögből megadott $\frac{i\varrho}{\varrho d}$ érintőarány a beosztás finomítása közben is állandó marad. Ugyanis bármely határon túl csökken is az érintősokszög *di* oldala, a $d\varrho i$ háromszög $d\varrho$ és $i\varrho$ oldalai mindig merőlegesek maradnak a *bgh* háromszög *gh* és *bg* oldalaira s így az érintő hajlását megadó $\frac{i\varrho}{\varrho d}$ arány mindig azonos marad s egyenlő a *bgh* normális háromszög állandó $\frac{bg}{gh}$ oldalarányával.

Mindezt nem mondja el ilyen részletesen NEWTON. Az eljárás, az érintő és a normális háromszögeknek ez a viselkedése, valamint a téglalapbeosztás finomításával történő területmeghatározás a XVII. század közepén már közismert. Közismert a hatvanas években az érintőszerkesztés és a kvadratúra közötti ilyen összefüggés is. A kor matematikusainak a leveleiben nagyon gyakran fordulnak elő ezt az összefüggést jelölő diagramok sokszor minden utalás nélkül. James GREGORY 1668-ban nyomtatásban is közölte. Az elv már egy évtizeddel azelőtt megjelent egyébként nyomtatásban Franciaországban, PASCAL alkalmazta a színuszgörbe alatti terület meghatározására.[18]

Mint ismeretes, utóbbi vezette LEIBNIZet a „karakterisztikus háromszög" fogalmára. Az egész fogalomkör, amiből az infinitézimális számítás algoritmusa konkretizálódik, távolról sem új már a XVII. század közepén. „Karakterisztikus háromszög" és az érintőszerkesztés-kvadratura közötti összefüggés — amiket LEIBNIZ és BARROW nagy felfedezéseiként tart számon a történetírás — pl. már valószínűleg mint közismert anyag kerül egy 21 éves Cambridge-i diák, Isaac NEWTON DESCARTES-ból készített jegyzetei közé.

Nem az infinitézimális számítás geometriai alkalmazása, nem az érintőszerkesztés és kvadratura közötti összefüggés felismerése az új ezekben a jegyzetekben. Még csak nem is az, hogy egyenletekbe önt egy geometriai problémát. Ezt DESCARTES-ból veszi, úgyannyira, hogy átveszi még a betű jelöléseit is. Az az eljárás sem új, ahogyan a probléma egyenletéből megkapja az érintési feltételt s így az *aeω* görbe *ge* ordinátáit. Ez az eljárás nem egyéb, mint a HUDDE-féle redukció. „A kifejezésnek két egyenlő gyöke van és ezért megszorozzuk a HUDDE-féle módszer szerint" írja NEWTON.

Kis túlzással azt lehetne mondani, hogy ebben az 1664-es NEWTON kéziratban egyedül a cím az új: „Módszer kvadrálható görbe vonalak kvadrálására". Nem minden görbe vonal kvadrálására, hanem csak az olyan görbe vonalakéra, amik kvadrálhatók. NEWTON már 21 éves korában is NEWTON: a definíciók, a pontos meghatározás, az axiomatizálás mestere. A többiek, nem csak COLLINS, hanem még az olyan nagyon nagy matematikusok is, mint James GREGORY, egyre-másra használják a „minden", az „általános" az „univerzális", jelzőket módszereikre. NEWTON igyekszik pontosan fogalmazni: „amik kvadrálhatók". Melyek azok a görbék, amelyek kvadrálhatók? Az 1664-es kézirat világosan felel erre: Olyan görbék, amelyeknek a területét egy másik görbe *érintősajátságai* adják meg. A kézirat két példát hoz fel, egy x^3/a egyenletű parabolát és egy a^3/x egyenletű hiperbolát. Ezeket az egyenleteket kombinálva a metsző kör egyenletével, a Hudde-féle redukcióval azonnal megkapjuk az érintési feltételt, az új, kvadrálható görbe egyenletét. Az x^3/a egyenletű parabola esetében $ge = \frac{3xx}{a}$ lesz az új görbe egyenlete, az a^3/x hiperbola esetében pedig $ge = \frac{a^3}{xx}$. A $\frac{3xx}{a}$ görbe alatti területet $\frac{x^3}{a}$, az $\frac{a^3}{xx}$ alatti területet $\frac{a^3}{x}$ adja meg. A görbék kvadrálhatók, mert úgy vettük fel, hogy azok legyenek. A feltétel — ismételjük meg — az volt, hogy a kvadrálható görbe egyenletét egy másik görbe érintőjének az adatai szabják meg.

A megoldás, ha a kvadrálható görbe egyenlete, mint a fenti két példában,

[18] *Traité des sinus du quart de cercle. = Oeuvres completes de Pascal, édition Pléiade. Texte établi et annoté par* JACQUES CHEVALIER. Paris 1954, 275—282, 275—277.

hatvány, nagyon egyszerű. Ha $\frac{3axx}{b}$ a görbe egyenlete, ahol a és b állandók, akkor a görbe alatti terület $\frac{ax^3}{b}$. Ha általánosságban $\frac{ax^m}{b}$ a kvadrálható görbe egyenlete, a terület $\frac{ax^{m+1}}{(m+1)b}$ lesz. Nem szükséges egész számokhoz ragaszkodni a kitevőben, lehet a kitevő bármilyen tört. És ha a kvadrálható görbe egyenlete nem egytagú, hanem hatványok összegéből vagy különbségéből áll, akkor a kvadratura képlete tagonként alkalmazható. Ha pedig a görbe egyenlete nem hatványok összegéből álló kifejezés, akkor meg kell kísérelni ilyenné alakítani. Hogyan? Egyszerűen úgy, hogy elvégezzük a kijelölt műveleteket. *Számolni* kell az algebrai jelekkel, mintha csak közönséges számok lennének. „Ha $a+b = \frac{1}{a+b}$ — írja NEWTON 1665-ben —, elosztom 1-et $(a+b)$-vel úgy, mintha tizedes törtek lennének és az

$$\frac{1}{a}-\frac{b}{aa}+\frac{bb}{a^3}-\frac{b^3}{a^4}+\frac{b^4}{a^5}\ \&\ c.$$

hányadost kapom, ami kitűnik abból is, ha mindkét részt (kifejezést) megszorzom $(a+b)$-vel. Ugyanígy vonom ki a gyököt (a^2+b)-ből, mintha tizedestörtek lennének és azt találom, hogy

$$\sqrt{a^2+b} = a+\frac{b}{2a}-\frac{bb}{8a^3}+\frac{b^3}{16a^5}\ \&\ c,$$

ami kitűnik, ha mindkét részt négyzetre emelem."[19]

Ugyanebben a kéziratában kimutatja azt is, hogyan adható meg m/n tetszőleges értéke esetében hatványok végtelen sorával egy $\overline{a+b}|^{\frac{m}{n}}$ alakú kifejezés:

$$\overline{a+b}|^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}}+\frac{m}{n}\cdot\frac{b}{a}\cdot a^{\frac{m}{n}}+\frac{m}{n}\cdot\frac{m-n}{2n}\cdot\frac{bb}{aa}\cdot a^{\frac{m}{n}}+\frac{m}{n}\cdot\frac{m-n}{2n}\cdot\frac{m-2n}{3n}\cdot\frac{b^3}{a^3}\cdot a^{\frac{m}{n}}\ \&\ c.$$

Az „új" itt sem a tételben van. Már PASCAL használta a binomok kifejtésére az aritmetikai háromszöget és már arab szerzőnél is előfordul a „binomiális tétel". De csak *egész* kitevők esetében. NEWTONnál azonban m/n tetszőleges lehet, pl. 1/2, és akkor a sor éppen $a+b$ négyzetgyökét adja meg. Kifejthető pl. ennek a sornak a segítségével $1-xx$, az egység sugarú kör egyenlete, s az x hatványainak az összegéből álló kifejtett alakban tagonként végezhető el a kvadratura. Közvetlen módszerrel egyszerűen megoldható a kör területének a kiszámítása, a közvetett és körülményes eudoxoszi és a pontatlan és nem egészen megalapozott indivizibilia módszer nélkül.

Így a bonyolultabb kifejezéseket sokszor kvadrálható alakra lehet hozni, ha elvégezzük rajtuk a kijelölt műveleteket, „mintha csak tizedes törtek lennének". S ha az eredmény végtelen sor lesz, attól éppen úgy nem kell megijedni, mint ha pl. egy osztás vagy gyökvonás végtelen tizedes törtre vezet.

Az „infinitézimális számítást" már régen nem kellett felfedezni a XVII. század

[19] *Corr.* II, 191. A mannuscript by Newton (? 1665), 168–171, 170. A négyzetet a Newton korabeli matematika a betű megduplázásával jelöli, a harmadik hatványt már az általunk is használt módon. &c jel a mi +... jelünk megfelelője.

hatvanas éveiben. DESCARTES, PASCAL, FERMAT, CAVALIERI, TORRICELLI, RICCI, HUDDE és SLUSE munkái után már nem volt erre szükség. De azt a tényt, hogy a végtelen hatványsorba fejthető kifejezések állítják elő a „kvadrálható görbéket", azt fel kellett fedezni. Ezt nem tudták a többiek, csak NEWTON és James GREGORY. A két angol a hatvanas évek második felében egymástól függetlenül csaknem ugyanarra a nagy felfedezésre jutott. Függetlenül? Személy szerint kétségkívül igen. De nem szabad figyelmen kívül hagyni, hogy mindketten az angol matematikai tradíciónak megfelelően, konkrét számoláshoz szokott szemmel olvasták — a Cartesianus „geometriai algebrát" (ahogyan DESCARTES módszerét nevezhetnénk valamivel találóbban a mindenképpen anakronisztikus analítikus geometria helyett).

Mindketten kétségkívül jól ismerték a Cartesianus matematikát. James GREGORY nem egyszer nyíltan is kifejezi DESCARTES iránti hódolatát.[20] NEWTON sokkal tartózkodóbb volt ebben a tekintetben. DESCARTES-ból indultak ki, de a végtelen sorok segítségével átlépték a DESCARTES által vont szigorú határvonalat a „geometriai" (algebrai) és „mechanikus" (transzcendens) problémák között. Azt a határvonalat, amit „Levelezése" ragyogó matematikájában maga DESCARTES is nem egyszer átlépett, s ami ellen — ha helytelen alapokon is — az angol matematika már OUGHTRED óta lázadt. De csak GREGORY és NEWTON dolgozták ki, a végtelen sok tagú egyenletekkel való *számolás* segítségével a két nagy területet egységesítő *analízis* alapjait.

„Analízis végtelen sok tagú egyenletekkel..."

A XVII. század hatvanas éveinek végén, hetvenes éveinek elején egymással versengve küldik NEWTON és GREGORY COLLINSnak szebbnél szebb sorbafejtéseiket. Nagy figyelemmel kísérik egymás munkáját. „Nagyon szeretném megismerni — írja GREGORY 1670 nov. 23-án Collinsnak — Mr. NEWTON módszerét a kéttagú egyenletek végtelen sorrá való alakításáról, amely formában logaritmusokkal megoldhatók: én bármely egyenletet át tudok alakítani végtelen sorrá, de nekem a logaritmusok semmit sem segítenek, mert az én soraimban nincs semmi *in ratione continua* (folytonos arányban). Van egy módszerem, amellyel nem-geometrikus problémákat (legalábbis amiket eddig tárgyaltam) végtelen sorba tudok átalakítani. ... Azt hiszem, hogy azok a sorok, amiket mellékelten küldök, némi hasonlóságot mutatnak azokhoz, amikről értesített, hogy Mr. NEWTON és Mr. MERCATOR felfedeztek: ezért volt, hogy oly gyakran kértem Önt, közölje velem az ő felfedéseiket."[21]

GREGORY tudta, hogy egy sorban jár NEWTONnal. Még egy hónap sem telt el, s már újra ír COLLINSnak: „Legutóbbi levelemben — írja — nem vettem észre, hogy Mr. NEWTON sora körcikkre (amit Ön régen küldött volt nekem) hasonló sorok sokaságával együtt következménye annak, amit én a logaritmusokra vonatkozóan küldöttem Önnek, *viz. Dato logarithmo invenire ejus numerum vel radicem potestatis cujuscumque purae in infinitam seriem permutare* (adott logaritmusból megkeresni a numerust vagy hatvány tetszőleges gyökét végtelen sorrá alakítani)".[22]

GREGORY a hatvanas évek legvégén ugyanott tart, ahol NEWTON. Felfedezte, hogy végtelen hatványsorba fejtett kifejezések tagonkénti kvadrálásával vagy redu-

[20] *Corr. Rigaud* II, 220, J. Gregory to Collins 20 Aug. 1675, 269—272, 269.
[21] *Corr.* I, 20, Gregory to Collins 23 Nov. 1670, 45—49, 47.
[22] *Corr.* I, 21, Gregory to Collins 19 Dec. 1670, 49—52, 49—50.

kálásával olyan kifejezések kvadrálhatók vagy redukálhatók, olyan kifejezésekkel megadott görbékhez szerkeszthető érintő, számítható súlypont, olyan egyenletek gyöke kereshető meg, amelyeknek zárt, kifejtetlen formáival szemben tehetetlenül áll a matematika. Amelyekkel szemben eddig legfeljebb egyes kivételes esetekben, fáradságos egyszeri módszerekkel értek el valamilyen eredményt. Általános módszerről eddig szó sem lehetett. Most a végtelen sorba való átalakítás és a hatványok kvadrálásának – redukálásának az összekapcsolásával olyan általános módszerhez jutottak, amely előtt nem állanak többé hozzáférhetetlenként az általános kezeléssel szemben eddig dacoló „mechanikus" problémák.

Azok a kifejezések, amelyeket addig táblázatokban összefoglalva, a gyakorlati számolás segédeszközeinek tekintettek: szögfüggvények és a hozzájuk tartozó körívek, a kamatos kamat táblázatok, a körív hosszát és a körcikk területét megadó táblázatok most mind elméleti megalapozottságot nyertek és sok közülük egymásból levezethetővé vált. A táblázatok adathalmazai mögött GREGORY és NEWTON munkái nyomán kezdett felderengeni az *összefüggés.*

Azok a problémák, amelyeknek a megoldására eddig „mechanikus" eszközöket, ill. körző-vonalzó segítségével meg nem szerkeszthető görbéket kellett igénybe venni és táblázatokat szerkeszteni gyakorlati megoldásukra, mint pl. a szögharmadolás, szögötödelés, szöghetedelés ..., ill. a nekik megfelelő négyzetgyök, negyedik gyök, hatodik gyök... vonás; a különféle spirálisok, conchoid, ciklois íhvossz és szegmentum területmeghatározásai; a kör ívhossza és kvadraturája ... egyszóval mindaz a hatalmas terület, amit DESCARTES mint „mechanikus" problémákat megpróbált távol tartani a geometria „tiszta" épületétől, a zárt algebrai alakban meg nem adható problémák egyre növő világa a végtelen sorok módszerével egyszerre bebocsátást nyert a „törvényes" matematika keretei közé.

NEWTON már hosszú évek óta dolgozott ezen a módszeren, amikor GREGORY értesült róla. A nemes skót azonnal elismeri prioritását: közli COLLINSszal, hogy addig semmit nem publikál ide vonatkozó kutatásaiból, amíg NEWTON műve meg nem jelenik.[23]

Várhatott volna GREGORY, amíg NEWTON infinitézimális módszere napvilágot lát. A módszert előszónak szánta egy holland szerző, KINCKHUYSEN algebrájának tervezett angol kiadásához. A könyv sohasem jelent meg, a módszer rövid összefoglalását NEWTON 1669-ben elküldte COLLINSnak. Ez a híres levél, a *De Analysi per AEquationes Numero Terminorum Infinitas*[24] a kvadratura alaptételenek a szabályokba foglalásával kezdődik. Az I. szabály a tetszőleges kitevőjű hatvány kvadrálási szabályát adja meg, a már ismertetett módon. A II. a „tagonkénti integrálhatóságot" mondja ki, s azután adja meg a számunkra jelen összefüggésben legfontosabb III. Szabályt:

„Ha maga *y* értéke vagy annak valamely tagja a fentieknél összetettebb, egyszerűbb kifejezésekre kell visszavezetni; ugyanúgy dolgozva a betűkkel, mint ahogy az aritmetikában végzik a tizedes törtekkel az osztást, gyökvonást vagy többtagú egyenletek megoldását; és ezekből a kifejezésekből a keresett görbe alatti területet a fenti szabályok alkalmazásával azonnal megkapjuk."[25]

[23] *Cor.* I, 25. Collins to Newton 5 July. 1671, 65–67.

[24] = ISAACI NEWTONI *Equitis aurati opuscula mathematica, philosophica, et philologica. Collegit partimque latine vertit ac recensuit* JOH. CASTILLIONEUS. I–III. Lausannae & Genevae 1744. I, 1–28.

[25] Uo. 7.

Példaként az $\frac{aa}{b+x} = y$ hiperbola és a $\sqrt{aa-xx} = y$ kör esetében végzi el az osztást és gyökvonást, mintha közönséges számok lennének a betűk, s a kapott végtelen sorokra alkalmazva a II és I szabályt, azonnal megkapja — egy másik végtelen sor formájában — a hiperbola, ill. kör területét.

Harmadik példaként[26] egy harmadfokú egyenlet

$$y^3-2y-5 = 0$$

megoldását mutatja be. Ez a példa nagyon jellemző NEWTON matematikai gondolkozására. Úgy jár el, hogy felvesz egy olyan számot, amely saját értékének 1/10-ével kevesebbel tér el a keresett számtól. Jelen esetben ez pl. 2. Azután $2+p$ értéket helyettesít be az egyenletbe y helyébe és az így előálló

$$p^3+6p^2+10p-1 = 0$$

egyenlet p gyökének a kiszámításában elhanyagolja p elsőnél magasabb hatványait. Így a $10p-1 = 0$ egyenletből $p=0{,}1$-et kap első közelítésként p-re. Most $0{,}1+q$ értéket helyettesít a p egyenletében p helyébe s a kapott

$$q^3+6{,}3q^2+11{,}23q+0{,}061 = 0$$

egyenletben a q elsőnél magasabb hatványait újból elhanyagolva kiszámítja $11{,}23q+$ $+0{,}061 = 0$ egyenletből q-t. Az eljárást tetszés szerint folytatva, a részleteredmények összegezésével tetszés szerinti pontossággal megkapja a keresett gyököt: 2,094551....

A számpélda azonban csak arra való NEWTONnak, hogy annak a mintájára járjon el általános esetben is. Áttéve a fenti eljárás lépéseit betűkbe, pl. az

$$y^3+a^2y-2a^3+axy-x^3 = 0$$

egyenlet gyökét

$$y = a-\frac{x}{4}+\frac{x^2}{64a}+\frac{131x^3}{512a^2}+\frac{509x^4}{16384a^3}\ \&\ c$$

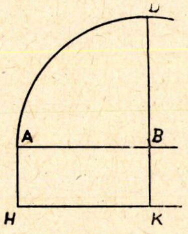
alakban kapja meg, amiből az I és II szabály alkalmazásával azonnal megadja az y görbe alatti területet:

$$ax-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{192a}+\ \&\ c.$$

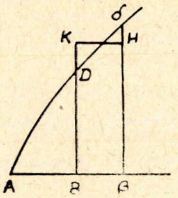
Azután tárgyalja a módszer alkalmazásait „geometrikus", majd „mechanikus" görbék esetében. A két eset semmiféle elvi különbséget nem jelent a módszer alkalmazása szempontjából. „Semmi olyanról nem tudok — írja — amire ez a módszer valamilyen formájában ne lenne kiterjeszthető. Sőt, ennek a segítségével érintők húzhatók mechanikus görbékhez (akkor is, mikor másképpen nem lehet) és amit a közönséges analízis véges, állandó számú tagból álló egyenletekkel elvégez (amikor az lehetséges), ez végtelen egyenletekkel mindig teljesíti: úgyhogy ne kételkedjünk abban, hogy ezt is megilleti az analízis elnevezés (értsd: algebra). A számítások ugyanis ebben semmivel sem kevésbé biztosak, mint amabban, sem az egyenletek nem kevésbé egzaktak; mi, véges értelmű emberek nem tudjuk jelölni minden tagjukat és így felfogni sem, de mint megkövetelt mennyiségeket (quantitates desisera-

[26] Uo. 10–11.

tas) egzakt módon felismerjük: ugyanúgy, mint ahogy véges egyenletek irracionális gyökeit sem vagyunk képesek sem számokkal, sem bármely analitikus módon úgy kifejezni, hogy az maradék nélkül, pontosan állítassék elő valamely mennyiséggel."[27] A dolgozat elején megadott I szabály bizonyítását NEWTON a munka legvégén közli. A matematikatörténetírás elsősorban ezt szokta kiemelni a *De Analysi* ... gazdag gondolatvilágából, mert a kifejlett differenciálszámítás felől nézve a differenciálhányados képzésének primitívebb formáját ismeri fel benne.[28] Valójában pedig ez a mű legkevésbé eredeti része, az itáliai iskola és BARROW mozgásgeometriai megfontolásainak a körében marad. A módszer egy geometrikus eljárás általánosítása. Úgy határozza meg az *AD* görbe alatti *ABD* területet, hogy a görbét a *BD* ordináta „egyenletes mozgásából" származtatja és a változó *BD* „momentummal" történő „növekvést" egy állandó *KB* egységnyi momentummal történő növekvéssel hasonlítja össze. A változó *BD* momentum által kisepert *ABD* terület így az állandó, egységnyi *KB* momentum által leírt *AHKB* területtel mérhető.[29]



3. ábra



4. ábra

Ezt a megfontolást viszi át algebrai formába és bizonyítja segítségével a mű elején megadott hatvány-integrálási szabályt. A *BD* momentumot egy kis *BKHβ* négyszöggel helyettesíti — mintegy „széthúzza" erre a négyszögre — és ezzel a kis négyszöggel megnövelt területet helyettesíti az *ABD* területet kifejező egyenletbe. Ugyanakkor az *AB* helyébe a *Bβ*-val megnövelt értéket teszi be, az egyenletet rendezi, egyszerűsít, azután *Bβ*-t zérussal teszi egyenlővé és minden tagot elhagy, amiben előfordul.[30]

Ez a bizonyítás nem egyéb, mint a mozgásgeometriai területszámítás megfejelve FERMAT érintőszerkesztési módszerével. Ennek megfelelően ugyanazok a kritikák hozhatók fel ellene, amiket a kortárs-matematikusok DESCARTES-tól kezdve oly gyakran s annyi joggal szegeztek szembe az új infinitézimális matematikával. Azokkal a bizonytalanságokkal terhelt ez a bizonyítás, amik miatt a XVII. század egyik legnagyobb matematikusa, HUYGENS, sohasem fogadta el az új módszereket.

A *De Analysi* ...-ben különös fordulattal állunk szemben. Ami addig „érthetetlen" volt, a „mechanikus" problémák megoldása a végtelen egyenletek segítségével fogalmilag tisztázottá, gyakorlatilag tetszőleges pontossággal kiszámíthatóvá vált.

[27] Uo. 24—25.
[28] Pl. CHILD, J. M.: „Newton and the art of discovery". = *Isaac Newton 1642—1727. A memorial volume ed. by* W. J. GREENSTREET. London 1927, 117—129.
[29] *De Analysi* ... 19.
[30] Uo. 27—28.

Ami addig egyszerűnek látszott, a közönséges algebrai egyenletekkel leírható „geometrikus" görbék kvadrálása viszont visszasüllyedt a DESCARTES-i tisztaságból a század jól-rosszul megfogalmazott infinitézimális módszereinek a zürzavarába.

A folytonos folyás matematikája: a fluxioszámítás

A mi számunkra, akik a folytonos függvények ismeretében közeledünk a differenciálhatóság fogalma felé, ez a bizonyítás jobbnak látszik, mint amilyen valójában. Ne unjuk meg ismételni, hogy a XVII. század nem ismerte a függvények és a folytonosság fogalmát, de annál inkább az egyenleteket és a „matematikai" mozgást. Nem ismerte a differenciálhányadost, de tudta, hogy az érintőszámítás, maximum—minimum feladatok, egyenletek redukciója közös módszeren alapulnak. Tudta azt is, hogy ez a módszer speciális összefüggésben áll a kvadraturával. A hatvanas években NEWTON és GREGORY felfedezték, hogy ha az algebrai jelekkel ugyanúgy számolunk, mint a közönséges számokkal és ha a közönséges egyenletek helyett „végtelen egyenleteket" alkalmazunk, akkor semmi elvi különbség nincs az alkalmazott módszerek szempontjából a „geometrikus" és a „mechanikus", nem-algebrai problémák között. A végtelen sorokkal történő analízis egységes nagy módszer, ez *a* módszer a matematikában. Ezért mondotta NEWTON, a nagy algebrista a „véges" algebráról, hogy az „kontárok matematikája."

De hiányzott még az új analízis elméleti megalapozása. Annak a megadása, miféle mennyiségekre érvényesek a használt új módszerek.

A görög matematika az eudoxoszi arányelméletben találta meg a maga módszereinek ilyen jellegű megalapozását, a XIX. századi matematika a valós számok DEDEKIND-féle elméletében és a CANTOR-féle halmazelméletben. A XVII. századi matematika a newtoni fluxioszámításban.

A fluxioszámítás ebből a szempontból az egész XVI—XVII. századi matematikai fejlődés csúcsa. A fluxioelmélet definiálja azt a matematikai mennyiségfogalmat, amelyikre a XVII. század infinitézimális módszerei a legjobban illenek. Ez a fluxioelmélet lényege, nem nehézkes matematikai szimbolisztikája. A „végtelen egyenletekkel" való számolás a newtoni analízis jövőbe mutató oldala, ígéretteljes kezdet, s mutatja a kezdet minden nehézségét és pontatlanságát. A fluxioszámítás teljesen a XVII. század fizikai-matematikai módszereihez alkalmazkodó elmélet, zárt és tökéletes a maga nemében.

A módszert NEWTON a *De Analysi* ... végén közölt pontatlan mozgásgeometriai megfontolás továbbfejlesztésével építi ki. Már a hetvenes évek legelején készen van, s ezt a módszert rejti titkosírásba az 1676-ban LEIBNIZnak írott híres levelében: „... tetszőleges számú fluens mennyiségből megtalálni a fluxiokat és megfordítva."[31]

Nyomtatásban azonban csak 1736-ban jelent meg a módszer, *Methodus Fluxionum et Serierum Infinitarum cum ejusdem applicatione ad curvarum geometriam*[32] címen. A *Methodus*-ban nagyon jól követhető a módszer genezise. A fluxioszámítás két problémára vezethető vissza, írja NEWTON. „I. A mindig (azaz bármely időpillanatban) megadott megtett út hosszúságából meghatározni az adott időben a

[31] *Corr.* II, 188, Newton to Oldenburg 24 Oct. 1676, 110—161, 115. „fluens" a mi terminológiánkban az időparaméter valamely folytonos függvénye, „fuxio" ennek idő szerint vett differenciálhányadosa.

[32] = *Opuscula* ... Castillioneus-féle kiadás I, 29—199.

mozgás sebességét, II. ha mindig adva van a mozgás sebessége, meghatározni egy adott időpillanatban a megtett utat."[33]

A kérdésfeltevés azonnal mutatja a forrást: GALILEI. Már maga ez a tény is arra utal, hogy a fluxioszámítás szerves része a XVII. század nagy élményének, amit a világkép mechanizálódásának szokás nevezni. Ugyanezt mutatják az elnevezések is: „Mármost a következőkben *fluens*eknek nevezem azokat a mennyiségeket, amelyeket mintegy fokozatosan és határozatlanul növekvőknek tekintek ..." Ezeket a mennyiségeket az ABC végéről vett betűkkel jelzi: z, x, y, u, ... „Azokat a sebességeket, amelyekkel az egyes, a mozgás által létrehozott fluensek nőnek (amely sebességeket fluxioknak vagy egyszerűen sebességeknek vagy celeritasnak nevezek) ugyanazon betűk felé tett ponttal fejezzük ki ..."[34]

Ezeknek az elnevezéseknek a segítségével a fenti két fizikai probléma következőképpen fordítható le matematikai nyelvre: „I. probléma. Határozzuk meg fluens mennyiségek között fennálló adott *relációból* azt a *relációt*, amely fluxioik között áll fenn". És ugyanígy a „II. probléma. Fluxiokat tartalmazó adott egyenletből határozzuk meg, milyen *reláció* áll fenn a fluens mennyiségek között."[35]

Az első probléma megoldása és a megoldás bizonyítása egyszerű, lényegében úgy történik, amint azt az 1664—65-ös kéziratban és a *De Analysi*...-ben láttuk. De pontosabban fogalmaz: „Fluens mennyiségek momentumai (azaz meghatározatlanul kicsiny részei, amelyeknek az idő meghatározatlanul kicsiny részeiben való csatlakozásával maguk a fluens mennyiségek folytonosan növekednek) úgy aránylanak, mint a sebességek, amelyekkel folynak vagy nőnek.

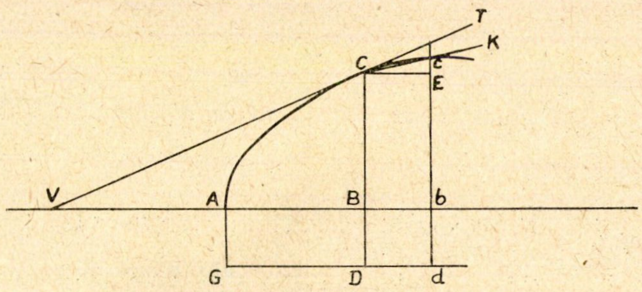
Ezért, ha valamelyik (tegyük fel, x) momentumát sebességének ($\dot{x}$) és a meghatározatlanul kicsiny mennyiségnek a szorzatával (azaz, $\dot{x}o$-val) reprezentáljuk, a többi u, y, z-nek a momentumát $\dot{u}o$, $\dot{y}o$, $\dot{z}o$-val kell reprezentálni, mivel $\dot{u}o$, $\dot{x}o$, $\dot{y}o$ & $\dot{z}o$ között ugyanaz az arány áll fenn, mint $\dot{u}$, $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ között."[36] Ugyanaz az egyenlet, amely egy adott időben kifejezi a fluensek közötti relációt, megadja a fluensek $\dot{x}o$, $\dot{y}o$ stb. értékekkel megnövelt mennyiségei között fennálló relációt is. Behelyettesítve az $x+\dot{x}o$, $y+\dot{y}o$ stb. értékeket az egyenletbe, összevonva és egyszerűsítve, az o-t tartalmazó tagokat elhagyva azonnal megkapjuk az I probléma megoldását.

A II. probléma már sokkal nehezebb, jóllehet elvben igen egyszerű. Az előbbi megfordítottja és így „megfordított műveletekkel kell megoldani."[37] Ez a probléma nem egyéb, mint a kvadratura általánosítása.

A tényleges keresztülvitel azonban csak a legegyszerűbb esetekben könnyű, már valamivel bonyolultabb fluxioegyenletek megoldása is komoly nehézségeket okoz. Mindenesetre mivel egyenletekről van szó, az algebrai egyenletek mintájára kell eljárni. Éppen ezért nevezi Newton a gyökvonás mintájára a fluensek fluxioegyenletből történő meghatározását a fluensek „kivonásának". Az algebrai egyenletekhez hasonlóan, először osztályozni kell a fluxioegyenleteket, azután a normálalakoknak megfelelő, alkalmas egyszerű egyenleteket megoldani, végül gondoskodni olyan átalakításokról, amikkel egy tetszőleges fluxióegyenlet a megoldott alakok egyikére hozható[38].

[33] Uo. 53—54.
[34] Uo. 54—55.
[35] Uo. 63.
[36] Uo. 59—60.
[37] Uo. 63.
[38] Uo. 84—85.

NEWTON világosan felismeri, hogy ez a probléma nem egyéb, mint egy speciális feladat, a kvadratura általánosítása. Egy 1704-ben, az *Opticks* függelékeként megjelent összefoglalásában[39] fejti ki talán ezt legszebben. A probléma címe: „*Megkeresendők azok a görbék, amelyek kvadrálhatók*", mutatja az 1664-es gondolatkörhöz való közvetlen csatlakozást. Legyen *ABC* a megkeresendő terület, *BC* a görbe ordinátája a *C* pontban, *AB* az abszcissza. Hosszabbítsuk meg *CB*-t *D*-ig úgy, hogy $BD=1$ legyen és egészítsük ki az ábrát az *ABDG* parallelogrammával. Legyenek az *ABC* és az *ABDG* területek olyan arányban, mint *BC* és *BD*. Vegyünk fel mármost bármely egyenletet, amely a területek viszonyát definiálja, és ebből az az I propozícióval (ugyanaz, mint a *Methodus* ... első problémája) adódik a *BC* és *BD* ordináták relációja, amit kerestünk."[40]



5. *ábra*

Az ábrán több vonal van, mint ami az itt mondottakhoz szükséges, mert annak a demónstrálására is szolgál, hogyan lesz a *Bb*, ill. *Ec* „születő növekmények" (augmentum nascentium) eltűnésekor „végső arányukból" (ultima ratio) az érintő hajlását megadó *CB*: *VB* arány. Ehhez „a *C* és *c* pontoknak teljesen össze kell esni. Matematikai dolgokban mégoly kis hibák sem megvetendők."[41]

A GALILEI—TORRICELLI-féle mozgásmatematikából kiindulva a fogalmak jelentős tisztázásáig ért el. Eltűntek a vonalakat „végtelen kis területekké" szétmosó mozgásmatematika bizonytalanságai. A számításhoz szükséges „folytonosságot" nem a szétkenés, hanem a fluxiok *definíciószerű* létezése biztosítja. Érintő pl. olyan görbékhez szerkeszthető, amelyeknek az ordinátáit és abszcisszáit kifejező mennyiségeknek fluxioik *vannak*. S ha azt akarjuk, hogy a görbe kvadrálható legyen, akkor a görbét kifejező egyenletnek egy fluens mennyiség fluxiojának *kell* lenni. Definíciószerűen. Mert „matematikai dolgokban még oly kis hibák sem megvetendők".

A fluensek hierarchiája

Most már csupán a kvadrálható görbék általános alakját kell megtalálni. A legalkalmasabbak erre természetesen a végtelen hatványsorokkal előállított görbék, amelyekkel tagonként lehet bánni. Ezek egyben a legáltalánosabbak, mert ezekkel

[39] *De Quadratura Curvarum*. London 1704. = *Opuscula* ... Castillioneus-féle kiadás I, 201—244.
[40] Uo. 212.
[41] Uo. 205.

bármely görbe összehasonlítható megfelelő szabályok szerint. Az összehasonlítás megkönnyítésére NEWTON a legegyszerűbb görbék kvadraturáját két hatalmas táblázatban[42] adja meg, amely így kezdődik:

TÁBLÁZAT a kvadrálható egyszerű görbékről

A görbe alakja	A görbe alatti terület
Első forma $dz^{n-1}=y$	$\frac{d}{n}z^n=t$
Második forma $\frac{dz^{n-1}}{ee+2efz^n+ffz^{2n}}=y$	$\frac{dz^n}{nee+nefz}=t$, vagy $\frac{-d}{nef+nffn^n}=t$
⋮	⋮

Itt z jelenti a görbe abszcisszáját, y a derékszögű ordinátáját, t a területet, d, e, f adott mennyiségek.

Hajlandók lennénk azt hinni, hogy az első nagyszabású integráltáblázatokkal állunk szemben. De figyeljük meg, hogy NEWTON táblázatai „formákat" tartalmaznak, nem formulákat. y és z még nem függő és független változók, hanem ismeretlenek. Még az egyenletek világában vagyunk, nem a függvényekében. Csupán a név hiányzik? A matematikában azonban sokszor éppen a dolgok nevükön nevezése a legnehezebb. És a legjellemzőbb: NEWTON más nevet mondott, nem a függvényét. NEWTON matematikája fluensek és fluxiok egymásra épülő hierarchiáján alapult. Minden fluxio valamely fluens mennyiség fluxioja és egyben egy további fluxio fluense. Ebből azután minden más levezethető, ezt a tényt azonban definíciószerűen posztulálni kell. A matematika NEWTON számára az a tudomány, amelyik a fluens mennyiségekkel dolgozik. A mennyiség nem egyenesdarab, nem egész számokból összetevődő racionális tört, a matematikai mennyiség *fluens*. A növekvésnek, ill. a csökkenésnek, magának a *változásnak* az absztrakciója. A legnagyobb mértékben összetett valami, fluxiok végtelen egymásrakövetkezésének a lehetőségét rejti magába és ő maga más fluensek fluxioja. A fluensek közötti reláció még nem függvény. Ehhez túlságosan igényes. Kevés függvény lesz majd, amelyik kielégíti azokat a feltételeket, amiket a fluensek közötti relációk megkövetelnek. Egyszerűsíteni, kevésbé igényessé kell tenni ezt a túlságosan bonyolult mennyiségfogalmat ahhoz, hogy a XVIII. század nagy matematikusai kezében megszülethessen a függvény fogalma.

A fluens-fluxio mennyiség és a végtelen sorok

Addigra az infinitézimális számítás már több mint egy évszázados múltra tekint vissza. S éppen az infinitézimális számítás gyors fejlődése tette lehetővé és szükségessé a függvényfogalom kialakulását. S ez a fogalom menti majd meg a különböző rendű

[42] Uo. 233.

„végtelen kicsinyek" zavaros rengetegében való elveszéstől, ahová — LEIBNIZ iskolája nyomán — a XVIII. század során került. A XVII. századi infinitézimális analízis azonban a csúcsán — NEWTON és GREGORY kezében — még nem annyira a „végtelen kicsi", mint a „végtelen sok" analízise volt. De, ha szabad így kifejeznünk, egy „nyitott" végtelen soké, soroké, amelyeknek „se vége, se hossza". Meg kellett állani az elejükön, a végük elveszett a végtelenben. A két legnagyobb, NEWTON és GREGORY érezte, hogy ezen a téren tenni kellene valamit. Ők ketten sejtik a sorok konvergenciájának a jelentőségét. NEWTON becslést is próbál adni, mekkora hibát követ el egy adott végtelen sorban egy adott tag után következő végtelen sok tag elhagyásával. De — talán nagyon jellemző módon — NEWTON, aki alig követett el számolási hibát életében, ebben a becslésben téved. Éppen olyan felesleges lenne konvergenciakritériumokra alapító, modern sorelméletet keresni náluk, mint függvényt. A konvergencia elnevezést használja NEWTON is. De számára a sorok nem határértékük felé konvergálnak, hanem az „igazság" felé.[43]

Mégis, sorelméleti alapjainak legnagyobb bizonytalansága mellett is a sorok *alkalmazásában* sohasem téved. Bámulatos biztonsággal jár olyan területeken, ahová a mai sorelmélet birtokában is félve követi a matematikus. De ez nem az alvajáró biztonsága, hanem a matematikusé, akin a határérték biztosító öve helyett a fluens-fluxio hierarchia biztosító kötele van. Ez szolgáltatja — definíciószerűen — a végtelen hatványsorba fejtéshez szükséges „differenciálhányadosok" létezését. A fluensek között felírt relációkat — definíciószerűen — mindig sorba lehet fejteni, s akkor már hozzáférhetők a végtelen soktagú egyenletekkel dolgozó analízis számára.

Éppen ezért, ha biztosítjuk, hogy az egyenleteinkben szereplő mennyiségek fluensek legyenek, a továbbiakban alkalmazott módszer szinte már nem is lényeges. Lehet ez könnyebb érthetőség kedvéért akár a megszokott, antik geometriai módszer is, mint a *Principiá*ban. A *Principia*, mint ismeretes, részletes fluxioelméleti bevezetéssel kezdődik, s később is folyton felbukkannak benne az antik geometriai köntös alatt a direkt infinitézimális módszerek. Láttuk már, hogy nem az infinitézimális módszereket, hanem az algebrai jelölési módot kerüli NEWTON a *Principiá*ban. Azt is láttuk, hogy a *Principiát* a Cartesiánus világrend legyőzésének tekintette.[44] Az algebrai jelölési mód pedig a XVII. század matematikusai és műkedvelői előtt erősen összeforrt DESCARTES nevével. Azonban DESCARTES eleve kizárta algebrájából a végtelen figyelembevételét igénylő „mechanikus" problémákat. Az ilyen „véges algebrára" mondotta NEWTON, hogy „kontárok algebrája".

Kontároké? Lehet, hogy a bölcs dilettáns talán nem is tiltakozott volna nagyon az elnevezés ellen.

(Beérkezett: 1964. V. 30.)

[43] *Corr.* I, 9, Newton to Collins January 1669/70, 18.

[44] VEKERDI LÁSZLÓ: „A Principia születése". *A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei*, 14, 161—182, 1964.

A KÜLFÖLDI SZAKIRODALOMBÓL

A LEBESGUE-TÉR PONTOS ENDOMORFIZMUSAI*

Írta: V. A. ROHLIN

Egy mértéktér T endomorfizmusát pontosnak nevezzük, ha a $\bigcap_{n=0}^{\infty} T^{-n}\mathfrak{M}$ metszet, ahol $\mathfrak{M}$ a tér összes mérhető halmazainak az összessége, csak a nulla mértékű halmazokból és azok kiegészítő halmazaiból áll. A dolgozatban a Lebesgue-tér pontos endomorfizmusainak a tulajdonságait vizsgáljuk. Példaként a számelméleti endomorfizmusok egy tág osztályát vizsgáljuk meg; bebizonyítjuk az endomorfizmusok pontosságát és kiszámítjuk az entrópiájukat.

Egy mértéktér *endomorfizmusának* nevezzük a térnek olyan önmagára való leképezését, melynél tetszőleges mérhető halmaz ősképe mérhető és mértéke megegyezik az eredeti halmaz mértékével. A kölcsönösen egyértelmű endomorfizmust, ha azzal a tulajdonsággal rendelkezik, hogy inverz leképezése is endomorfizmus, *automorfizmusnak* nevezzük. Jelen dolgozatban tárgyalt pontos endomorfizmusok osztálya, meghatározott értelemben szembenáll az automorfizmusok osztályával: A T endomorfizmust *pontosnak* nevezzük, ha a $\bigcap_{n=0}^{\infty} T^{-n}\mathfrak{M}$ metszet, ahol $\mathfrak{M}$ az összes mérhető halmazok összessége, csak a nulla mértékű halmazokból és azok kiegészítő halmazaiból áll. A pontos endomorfizmusok egy csomó kitűnő tulajdonsággal rendelkeznek. Például a folytonos mértékű Lebesgue-terek összes endomorfizmusai azonos végtelen multiplicitású homogén spektrummal rendelkeznek és minden fokon keverések. A pontos endomorfizmusok tulajdonságait jelen dolgozat 2. §-ában vizsgáljuk. Az 1. §-ban a mértékelméleti előismereteket adjuk meg. A 3. §-ban tetszőleges T endomorfizmust előállítunk, mint egy bizonyos T' automorfizmus — a T endomorfizmus ún. természetes kiterjesztése — faktor-endomorfizmusát. A pontos endomorfizmusok természetes kiterjesztéseinek azok az automorfizmusok bizonyulnak, melyeket KOLMOGOROV [1] „kvázireguláris" elnevezéssel vizsgált. Általános tételek a természetes kiterjesztésről lehetővé teszik a pontos endomorfizmusok tulajdonságaiból egy sor tulajdonság levezetését Kolmogorov-féle automorfizmusokra; kiderül például, hogy egy Kolmogorov-féle automorfizmus minden fokon keverés. A 4. §-ban egy RÉNYI [2] által vizsgált számelméleti endomorfizmus osztályt tekintünk. Bebizonyítjuk, hogy ezek az endomorfizmusok pontosak és kiszámítjuk entrópiájukat.

1. § Mértékelméleti előismeretek

Ebben a paragrafusban az olvasó munkájának megkönnyítésére röviden tárgyaljuk a dolgozat megértéséhez szükséges mértékelméleti ismereteket. Az 1. 1—1. 4 pontok anyagának részletes tárgyalása megtalálható a szerző [3] munkájában.

*„Точные эндоморфизмы пространства Лебега", Изв. АН, СССР. **25** (1961), 499—530

1. 1. Általános meghatározások

Mint ismeretes az M halmazt *mértéktérnek* nevezzük, ha ki van jelölve benne a mérhető X halmazoknak — megfelelő $\mu(X)$ mértékkel ellátott — Borel-féle halmazteste. Feltesszük, hogy a μ függvény nemnegatív és megszámlálhatóan additív.

Ha M mérhető és $\mu(M)=1$ a μ mértéket *normáltnak* nevezzük. Ha nulla mértékű halmazok részhalmazai mérhetők (mértékük természetesen nulla), a μ mértéket *teljesnek* nevezzük.

Egy mértéktérnek egy másikra való leképezését *homomorfizmusnak* nevezzük, ha tetszőleges mérhető halmaz őspéje mérhető és mértéke megegyezik az eredeti halmaz mértékével. A homomorfizmust *izomorfizmusnak* nevezzük, ha kölcsönösen egyértelmű és az inverz leképezése szintén homomorfizmus. Ha a teret önmagára képezzük le, az izomorfizmust *automorfizmusnak*, a homomorfizmust *endomorfizmusnak* nevezzük.

Azokat a mértéktereket, melyek között izomorfizmus állapítható meg, *izomorfoknak* nevezzük. Az M tér T endomorfizmusa és az M' tér T' endomorfizmusa izomorfak, ha létezik az M tér olyan S izomorfizmusa M'-re, hogy $T'=STS^{-1}$.

A mértékelmélet legfontosabb elve a nulla mértékű halmazok elhanyagolásában áll. Ennek az elvnek megfelelően a mértéktereket és endomorfizmusaikat nulla mértékű halmazoktól eltekintve, illetve a mi szóhasználatunkkal: „modulo null", vizsgáljuk. Például, nem az a lényeges, hogy az M és M' terek, vagy T és T' endomorfizmusaik izomorfok-e, hanem az, hogy izomorfokká tehetők-e M és M' bizonyos nulla mértékű halmazainak az eltávolításával; és az sem lényeges, hogy az M tér adott T endomorfizmusa automorfizmus-e, hanem az, hogy automorfizmussá tehető-e az M tér bizonyos null mértékű halmazának eltávolítása útján, és í. t. Ha a válasz pozitív, azt mondják, hogy M és M' vagy T és T' modulo null (mod 0) izomorfok; a T modulo null (mod 0) automorfizmus, és í. t.

1. 2. A Lebesgue-terek

A mérhető halmazok egy megszámlálható $\{B_\alpha; \alpha\in A\}$ rendszerét az M tér *bázisának* nevezzük, ha:

(a) tetszőleges mérhető X halmazhoz létezik olyan, a $\{B_\alpha, \alpha\in A\}$ rendszer által generált Borel-féle halmaztesthez tartozó Y, hogy $Y\supset X$ és $\mu(Y-X) = 0$;

(b) tetszőleges $x\in M$, $y\in M$ pontokhoz található olyan $\alpha\in A$, hogy vagy $y\in B_\alpha$, $x\bar{\in} B_\alpha$, vagy $x\in B_\alpha$, $y\bar{\in} B_\alpha$.

A bázissal rendelkező teljes, normált mértékteret *szeparábilisnek* nevezzük.

A szeparábilis M teret *teljesnek* nevezzük a $\{B_\alpha; \alpha\in A\}$ bázisára nézve, ha az összes $\bigcap_{\alpha\in A} E_\alpha$ metszetek, ahol E_α a B_α vagy $M-B_\alpha$ halmazok egyike, nem üresek. Ennek megfelelően az M szeparábilis teret *modulo null teljesnek* nevezzük a $\{B_\alpha; \alpha\in A\}$ bázisára nézve, ha a szeparábilis M' egy olyan 1 mértékű részhalmazának tekinthető, ahol M' teljes egy olyan $\{B'_\alpha, \alpha\in A\}$ bázisára nézve, ahol $B'_\alpha\cap M = B_\alpha$.

Ha egy szeparábilis tér modulo null teljes valamilyen bázisára nézve, akkor modulo null teljes lesz tetszőleges más bázisára nézve is. A bázisaikra nézve modulo null teljes szeparábilis tereket *Lebesgue-tereknek*, a megfelelő mértékeket pedig *Lebesgue-mértékeknek* nevezzük.

Egy Lebesgue-tér legfeljebb megszámlálható sok pozitív mértékű pontot tartalmaz. Ha ilyenek egyáltalán nincsenek a μ mértéket *folytonosnak* nevezzük, ha modulo null az egész teret kimerítik a μ mértékét diszkrétnek nevezzük. Egy folytonos mértékű Lebesgue-tér izomorf, modulo null, a közönséges Lebesgue-mértékű egységnyi intervallummal.

Egy Lebesgue-térben mérhető halmazoknak tetszőleges $\{B_\alpha; \alpha\in A\}$ megszámlálható rendszere, mely rendelkezik a (b) tulajdonsággal egyben bázis, azaz rendelkezik az (a) tulajdonsággal is.

Legyen $\{B_\alpha; \alpha\in A\}$ a μ mértékű M Lebesgue-tér egy bázisa és $\{B'_\alpha; \alpha\in A\}$ a μ' mértékű M' egy bázisa. Ha tetszőleges véges $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ összességre

$$\mu\left(\bigcap_{i=1}^{r} B_{\alpha_i}\right)=\mu'\left(\bigcap_{i=1}^{r} B'_{\alpha_i}\right),$$

akkor létezik az M térnek olyan mod 0 izomorf leképezése az M' térre, mely nulla mértékű halmaztól eltekintve a B_α halmazt B'_α-be, $\alpha\in A$, viszi át, és tetszőleges két ilyen leképezés modulo null azonosan megegyezik.

A továbbiakban M-ről feltesszük, hogy Lebesgue-tér.

1. 3. Mérhető felbontások és mérhető halmazok algebrái

Az M tér *felbontásának* nevezzük nem üres, diszjunkt M-et lefedő halmazok tetszőleges összességét. A ζ felbontás elemeinek összegeiből adódó halmazokat *ζ-halmazoknak* nevezzük.

A mérhető ζ-halmazok egy megszámlálható $\{B_\alpha; \alpha\in A\}$ rendszerét a ζ felbontás *bázisának* nevezzük, ha a ζ felbontásnak tetszőleges C, C' elemeire létezik olyan $\alpha\in A$, hogy vagy $C\subset B_\alpha$, $C'\not\subset B_\alpha$ vagy $C\not\subset B_\alpha$, $C'\subset B_\alpha$. A bázissal bíró felbontást *mérhetőnek* nevezzük.

$\zeta\leqq\zeta'$ jelöli, hogy a ζ' felbontás ζ-nak finomítása. Ennek megfelelően a $\zeta=\zeta'$ mod 0, $\zeta\leqq\zeta'$ mod 0 jelöléseket akkor használjuk, ha a $\zeta=\zeta'$, $\zeta\leqq\zeta'$ összefüggések érvényesek M megfelelő 0 mértékű halmazainak eltávolítása után.

Mérhető ζ_α felbontások tetszőleges rendszerére létezik a $\prod_\alpha \zeta_\alpha$ *szorzat*, mely a következő két tulajdonsággal rendelkező ζ mérhető felbontással van értelmezve:

1. $\zeta_\alpha\leqq\zeta$ mod 0 tetszőleges α-ra
2. ha $\zeta_\alpha\leqq\zeta'$ mod 0 tetszőleges α-ra, akkor $\zeta\leqq\zeta'$ mod 0.

Analóg módon létezik mérhető ζ_α felbontások tetszőleges rendszerére a $\bigcap_\alpha \zeta_\alpha$ *metszet*, mely a következő két tulajdonsággal rendelkező ζ mérhető felbontással van értelmezve:

1. $\zeta_\alpha\geqq\zeta$ mod 0 tetszőleges α-ra
2. ha $\zeta_\alpha\geqq\zeta'$ mod 0 tetszőleges α-ra, akkor $\zeta\geqq\zeta'$ mod 0.

Az M térnek egyes pontjaira való felbontását ε-nal jelöljük. A triviális, csak magát M-et tartalmazó, felbontást ν-vel jelöljük.

A *ζ felbontás mérhető burkának* nevezzük az összes mérhető felbontások szorzatát, melyeknek ζ finomítása. A mérhető halmazok összességét bontsuk egymástól csak nulla mértékű halmazon eltérő halmazok osztályaira és ezen osztályok összességét jelöljük $\mathfrak{M}$-mel. A megszámlálható egyesítés, megszámlálható metszetképzés és a kivonás művelete halmazok osztályaira is átvihető a halmazokról és $\mathfrak{M}$-et *algebrává* alakítja. Az $\mathfrak{M}$ algebra tetszőleges, ezen műveletekre nézve zárt részét, az $\mathfrak{M}$ részalgebrájának nevezzük.

Világos, hogy $\mathfrak{M}$ tetszőleges $\mathfrak{M}_\alpha$ részalgebra rendszerének $\bigcap\limits_\alpha \mathfrak{M}_\alpha$ *metszete* $\mathfrak{M}$ részalgebrája lesz. Kissé nehezebb az $\mathfrak{M}_\alpha$ részalgebrák $\bigvee\limits_\alpha \mathfrak{M}_\alpha$ *összegének* meghatározása: ez azon részalgebrák metszete, melyek mindegyike az összes $\mathfrak{M}_\alpha$ részalgebrát tartalmazza.

$\mathfrak{M}$ részalgebrái között van legnagyobb — maga $\mathfrak{M}$ — és legkisebb — a triviális $\mathfrak{N}$ algebra, mely a nulla mértékű halmazok osztályából és az 1 mértékű halmazok osztályából áll.

Tetszőleges mérhető ζ felbontás esetén jelölje $\mathfrak{M}(\zeta)$ az $\mathfrak{M}$ algebra azon részalgebráját, mely a mérhető ζ-halmazok osztályaiból áll. Kiderül, hogyha $\mathfrak{M}(\zeta) = \mathfrak{M}(\zeta')$, akkor $\zeta = \zeta'$ mod 0 és az $\mathfrak{M}$ algebra tetszőleges részalgebrájához található olyan mérhető ζ, hogy $\mathfrak{M}(\zeta)$ megegyezik az adott részalgebrával. Ily módon az $\mathfrak{M}$ algebra részalgebrái egy természetes kölcsönösen egyértelmű megfeleltetésbe hozhatók a mérhető felbontások mod 0 azonos osztályaival. És ekkor $\mathfrak{M}(\varepsilon) = \mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}(\nu) = \mathfrak{N}$, $\mathfrak{M}(\zeta) \subset \mathfrak{M}(\zeta')$ abban és csak abban az esetben, ha $\zeta \leqq \zeta'$ mod 0, és

$$\mathfrak{M}(\prod_\alpha \zeta_\alpha) = \bigvee_\alpha \mathfrak{M}(\zeta_\alpha), \quad \mathfrak{M}(\bigcap_\alpha \zeta_\alpha) = \bigcap_\alpha \mathfrak{M}(\zeta_\alpha).$$

A mérhető A, B halmazok $\varrho(A, B)$ *távolsága* a

$$\varrho(A, B) = \mu(A + B - AB)$$

összefüggéssel van értelmezve. A ϱ függvény $\mathfrak{M}$-et metrikus térré alakítja.

1.4. Faktortér. Mértékek kanonikus rendszere

Az M tér ζ felbontás szerinti faktorterének nevezzük azt a mértékteret, melynek pontjai a ζ felbontás elemei és a μ_ζ mérték a következő módon van meghatározva: legyen H_ζ az a leképezés, mely minden $x \in M$ ponthoz a ζ felbontás azon elemét rendeli, amelyben van; a faktortér Z halmaza mérhető, ha $H_\zeta^{-1} Z$ mérhető halmaz M-ben és legyen

$$\mu_\zeta(Z) = \mu(H_\zeta^{-1} Z).$$

Az M tér ζ felbontás szerinti faktorterét jelölje M/ζ. Világos, hogy H_ζ az M tér M/ζ térre való homomorfizmusa.

Egy Lebesgue-tér tetszőleges mérhető felbontás szerinti faktortere Lebesgue-tér lesz.

A ζ felbontáshoz tartozó *kanonikus mértékrendszernek* nevezzük a μ_C mértékek, $C \in \zeta$, következő két tulajdonsággal bíró rendszerét:

1. μ_C Lebesgue-mérték C-ben, $C \in \zeta$;

2. tetszőleges $X \subset M$ mérhető halmazra az XC halmaz mérhető a C téren majdnem minden $C \in M/\zeta$ pontra, a $\mu_C(XC)$ függvény mérhető M/ζ téren és

$$\mu(X) = \int_{M/\zeta} \mu_e(XC)\, d\mu_\zeta.$$

Tetszőleges mérhető felbontáshoz tartozik kanonikus mértékrendszer és tetszőleges két $\{\mu_C\}$, $\{\mu_C'\}$ kanonikus mértékrendszer, mely egy és ugyanazon ζ felbontáshoz tartozik mod 0 azonos (azaz $\mu_C' = \mu_C$, mod 0 minden $C \in M/\zeta$ halmazra).

1. 5. Homomorfizmusok

[3]-ban be van bizonyítva, hogy Lebesgue-térnek Lebesgue-térre való homomorfizmusa tetszőleges mérhető halmazt — mely őskép — mérhető halmazba visz át. Speciálisan, kölcsönösen egyértelmű homomorfizmus egyben izomorfizmus. Azonban olyan mérhető halmaz, mely nem őskép, homomorfizmus esetén nem mérhető halmazba is átmehet.

Ebben a pontban mérhető képpel bíró halmazok osztályát vizsgáljuk, mely lényegesen szélesebb, mint a mérhető ősképek osztálya. Ezeket a halmazokat *irreducibiliseknek* nevezzük és a következő módon vannak meghatározva. Legyen T az M térnek egy másik M' Lebesgue-térre való homomorfizmusa, ζ az M tér felbontása a pontok ősképeire a T homomorfizmus esetén és $\{\mu_C\}$ a ζ felbontáshoz tartozó kanonikus mértékrendszer. Tetszőleges mérhető $X\subset M$ halmazra jelölje Z a ζ felbontás azon C elemeinek összegét, melyeknek van közös részük X-szel, jelölje Z_0 azon $C\subset Z$ elemek összegét, melyekre $\mu_C(XC)=0$ és jelölje Z_1 azon C elemek összegét, melyekre $\mu_C(XC)>0$. Világos, hogy a Z, Z_0 és Z_1 halmazok ősképek, és hogy

$$Z_1+Z_0 = Z.$$

Mivel $\mu_C(XC)$ mérhető függvény M/ζ-n a Z_1 és TZ_1 halmazok mindig mérhetők, míg a Z_0, Z és TZ halmazok egyszerre mérhetők vagy nem mérhetők. Az X halmazt *irreducibilisnek* nevezzük a T homomorfizmusra nézve, ha Z_0 null mértékű.

Ha az X halmaz irreducibilis a T homomorfizmusra nézve, akkor képe: TX mérhető. Valóban, $TX=TZ$.

Ha az X halmaz irreducibilis a T homomorfizmusra nézve, akkor tetszőleges $X'\subset X$ halmaz, mely csak null mértékű halmazon tér el X-től szintén irreducibilis T-re nézve.

Bizonyítás. Legyen Z_0' a ζ felbontás azon C elemeinek az összege, melyekre az $X'C$ metszet nem üres, de $\mu_C(X'C)=0$. Mivel $X'\subset X$ a $Z_0'\subset Z$ is teljesül és következésképp $Z_0'\subset Z_1Z_0'+Z_0$. Jobbról az első tag, Z_1Z_0', része azon C halmazok összegének, melyekre $\mu_C(XC)>0$, de $\mu_C(X'C)=0$. Mivel X' csak egy nulla mértékű halmazon tér el X-től, ez az összeg nulla mértékű lesz és $\mu(Z_1Z_0)=0$. A második tag, Z_0, szintén nulla mértékű. Következésképp $\mu(Z_0')=0$.

Tetszőleges mérhető X halmaznak van olyan X-től csak nulla mértékű halmazon eltérő részhalmaza, mely irreducibilis T-re nézve.

Ilyen részhalmaz például az XZ_1 szorzat.

Ha a ζ felbontás majdnem minden C eleme, melyet mértéktérnek tekintünk μ_C mértékkel, csak pozitív mértékű pontokból áll, akkor a T homomorfizmus tetszőleges mérhető halmazt mérhető halmazba visz át.

Valóban, ebben az esetben az összes mérhető halmazok irreducibilisek.

Feltételesen nevezzük a mérhető X halmaz X-től csak nulla mértékű halmazon eltérő irreducibilis részeinek képeit ezen halmaz *redukált képeinek* a T homomorfizmusra nézve és T_rX lesz a jelölésük. Nyilvánvaló, hogy egymástól csak nulla mértékű halmazon térnek el, és hogy ugyanez érvényes tetszőleges két, egymástól nulla mértékű halmazon eltérő, mérhető halmaz redukált képeire. Következésképpen T_r tekinthető az $\mathfrak{M}$ algebrának $\mathfrak{M}'$ algebrára való leképezésének, mely utóbbi az M' tér mérhető halmazainak osztályaiból áll.

Ha T az M tér endomorfizmusa, akkor T_r $\mathfrak{M}$-et $\mathfrak{M}$-re képezi le. Nem nehéz igazolni, hogy ebben az esetben

$$(T_r)^n = (T^n)_r .$$

Ha T az M tér endomorfizmusa, akkor tetszőleges X halmaznak van oly Y részhalmaza, mely X-től csak egy nulla mértékű halmazon tér el és irreducibilis az összes T^n $(n = 1, 2, \dots)$ endomorfizmusra nézve.

Bizonyítás: Legyen X_n az X halmaz olyan részhalmaza, mely csak egy nulla mértékű halmazon tér el X-től és *irreducibilis* T^n-re nézve. Legyen

$$X = \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n .$$

Világos, hogy $\mu(X - Y) = 0$ és $\mu(X_n - Y) = 0$, $n = 1, 2, \dots$. Az utóbbi relációból és az $Y \subset X_n$ tartalmazásból következik, hogy az Y halmaz *irreducibilis* T^n-re nézve.

1. 6. Egy felbontás entrópiája

Legyen ξ az M tér egy mérhető felbontása és legyenek $C_1, C_2, \dots$ a pozitív mértékű elemei M-nek. Legyen

$$H(\xi) = \begin{cases} -\sum\limits_{r} \mu(C_k) \lg \mu(C_k), & \text{ha} \quad \mu(M - \bigcup\limits_{k} C_k) = 0, \\ +\infty, & \text{ha} \quad \mu(M - \bigcup\limits_{k} C_k) > 0, \end{cases}$$

ahol lg a kettes alapú logaritmust jelöli. A fenti formula első sorában szereplő összeg lehet véges vagy végtelen. A $H(\xi)$ függvényt nevezik *a ξ felbontás entrópiájának.*

Ha a ξ felbontás mellett még van egy η felbontás is, akkor az η felbontás majdnem minden C elemén ξ indukál egy ξ_C mérhető felbontást, meghatározott $H(\xi_C)$ entrópiával (az η felbontás elemei Lebesgue-tereknek tekinthetők, lásd 1. 4. pontot). $H(\xi_C)$ az M/η faktortéren egy nem-negatív mérhető függvény. Véges vagy végtelen integrálját M/η-án a *ξ felbontás átlagos entrópiájának* nevezzük *az η felbontásra nézve* és $H(\xi/\eta)$-val jelöljük.

A $H(\xi/\eta)$ függvény következő tulajdonságait fogjuk felhasználni (lásd [4], [5], [1], [6]):

1. $H(\xi/\nu) = H(\xi)$, $H(\xi\eta/\eta) = H(\xi/\eta)$.
2. $H(\xi/\eta) \geqq 0$; $H(\xi/\eta) = 0$ akkor és csak akkor, ha $\xi \leqq \eta$ mod 0.
3. Ha $\xi \leqq \xi'$, akkor $H(\xi/\eta) \leqq H(\xi'/\eta)$.
4. $H(\xi\xi'/\eta) \leqq H(\xi/\eta) + H(\xi'/\eta)$.
5. Ha $\eta \leqq \eta'$, akkor $H(\xi/\eta) \geqq H(\xi/\eta')$.
6. Ha $H(\xi) < \infty$ és $H(\eta) < \infty$, akkor $H(\xi\eta) = H(\xi/\eta) + H(\eta)$.
7. Ha $\xi_1 \leqq \xi_2 \leqq \dots$ és $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \xi_n = \xi$, akkor

$$\lim_{n \to \infty} H(\xi_n/\eta) = H(\xi/\eta).$$

8. Ha $\eta_1 \leqq \eta_2 \leqq \ldots, \prod_{n=1}^{\infty} \eta_n = \eta$ és $H(\xi) < \infty$, akkor

$$\lim_{n\to\infty} H(\xi/\eta_n) = H(\xi/\eta).$$

1. 7. A véges entrópiájú felbontások tere

Jelöljük Z-vel a véges entrópiájú mérhető felbontások halmazát és legyen $\xi \in Z, \eta \in Z$ felbontásokra

$$\varrho(\xi, \eta) = H(\xi/\eta) + H(\eta/\xi).$$

Világos, hogy $\varrho(\xi, \eta) \geqq 0$ és hogy $\varrho(\xi, \eta) = 0$, akkor és csak akkor, ha $\xi = \eta$ mod 0. Nyilvánvaló továbbá, hogy

$$\varrho(\xi, \eta) = \varrho(\eta, \xi).$$

Végül

$$\varrho(\xi; \zeta) \leqq \varrho(\xi, \eta) + \varrho(\eta, \zeta).$$

Valóban,

$$H(\xi/\zeta) = H(\xi\zeta) - H(\zeta) \leqq H(\xi\eta\zeta) - H(\zeta) = H(\xi\eta\zeta) - H(\eta\zeta) +$$
$$+ H(\eta\zeta) - H(\zeta) = H(\xi/\eta\zeta) + H(\eta/\zeta) \leqq H(\xi/\eta) + H(\eta/\zeta),$$

és pontosan ugyanígy

$$H(\zeta/\xi) \leqq H(\zeta/\eta) + H(\eta/\xi).$$

Ily módon ϱ mérték Z-ben, pontosabban azon a halmazon, melyet úgy kapunk Z-ből, hogy a mod 0 azonos felbontásokat azonosítjuk.

A véges felbontások halmaza mindenütt sűrű Z-ben.

Valóban, legyen $\xi \in Z$ és legyenek $C_1, C_2, \ldots$ a ξ felbontás pozitív mértékű elemei.

Tegyük fel, hogy végtelen sok van és jelölje ξ_n az M térnek a $C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}$, $E_n = M - (C_1 + \ldots + C_{n-1})$ halmazokra való felbontását. Mivel $\xi_n \leqq \xi$

$$\varrho(\xi, \xi_n) = H(\xi) - H(\xi_n) = \mu(E_n) \lg \mu(E_n) - \sum_{i=n}^{\infty} \mu(C_i) \lg \mu(C_i).$$

Annak következtében, hogy $\lim_{n\to\infty} \mu(E_n) = 0$ és $\sum_{i=1}^{\infty} \mu(C_i) \lg \mu(C_i)$ konvergens, a jobboldal mindkét tagja nullához tart. Következésképp $\varrho(\xi, \xi_n) \to 0$.

Ha $\zeta_1, \zeta_2, \ldots$ olyan felbontássorozat, hogy

$$\zeta_1 \leqq \zeta_2 \leqq \ldots, \prod_{n=1}^{\infty} \zeta_n = \varepsilon,$$

akkor az olyan $\eta \in Z$ felbontások halmaza, melyekre $\eta \leqq \zeta_n$ legalább egy n-re, mindenütt sűrű Z-ben.

Bizonyítás: Elegendő bebizonyítani, hogy tetszőleges véges $\xi \in Z$ felbontáshoz és tetszőleges pozitív δ-hoz létezik olyan n és $\eta \in Z$, hogy

$$\eta \leqq \varrho_n, \ \varrho(\xi, \eta) < \delta.$$

Legyenek $C_1, \ldots, C_m$ a ξ felbontás elemei. Mivel $\prod_{n=1}^{\infty} \zeta_n = \varepsilon$ azért

$$\bigvee_{n=1}^{\infty} \mathfrak{M}(\zeta_n) = \mathfrak{M},$$

azaz a $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathfrak{M}(\zeta_n)$ algebra (halmaztest) mindenütt sűrű $\mathfrak{M}$-ben. Következésképp tetszőleges pozitív δ'-höz létezik olyan n és olyan $C_1', \ldots, C_{m-1}'$ halmazok, hogy

$$\varrho(C_i, C_i') < \delta', \qquad i = 1, \ldots, m-1.$$

Jelöljük η-val az M tér $D_1, \ldots, D_m$ halmazokra való felbontását, ahol

$$D_1 = C_1', \quad D_i = C_i' - C_i'(C_1' + \ldots + C_{i-1}'), \qquad (i = 2, \ldots, m-1)$$

$$D_m = M - (C_1' + \ldots + C_{m-1}').$$

Nyilvánvaló, hogy $\eta \leqq \zeta_n$ és, hogy

$$\varrho(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{m} \mu(C_i) \lg \mu(C_i) + \sum_{i=1}^{m} \mu(D_i) \lg \mu(D_i) - 2 \sum_{i,j=1}^{m} \mu(C_i D_j) \lg \mu(C_i D_j)$$

($a = 0$ esetén a lg a nullának tekintendő). Ezek az összefüggések azt mutatják, hogy $\varrho(\xi, \eta)$ folytonosan függ $C_1', \ldots, C_{m-1}'$-től és nullával egyenlő, ha $C_1' = C_1, \ldots, C_{m-1}' = C_{m-1}$. Következésképp, ha δ' elég kicsi $\varrho(\xi, \eta) < \delta$.

Ha ζ a $\zeta_1, \zeta_2, \ldots$, monoton növekvő, mérhető felbontások szorzata, akkor az olyan η felbontások halmaza, melyekre $\eta \leqq \zeta_n$ legalább egy n-re, sűrű lesz az $\eta \leqq \zeta$ feltételnek eleget tevő η mérhető felbontások halmazában.

Ezt a tételt az M térnek ζ felbontás szerinti faktorizációjával az előző tételre lehet visszavezetni (melynek általánosítása).

2. §. Pontos endomorfizmusok

2. 1. Mérhető halmazok őseképei

A továbbiakban M-ről feltesszük, hogy Lebesgue-tér folytonos mértékkel és T az M tér egy endomorfizmusát jelöli.

Mivel a mérhető X halmaz $T^{-1}X$ őseképe a T endomorfizmus esetén nulla mértékű halmazon változik csak meg, ha X null mértékű halmazon változik T^{-1} az $\mathfrak{M}$ algebra $\mathfrak{M}$ algebrába való leképezésének tekinthető. Nyilvánvaló, hogy ez a leképezés algebrai izomorfizmus. Ha T automorfizmus vagy mod 0 automorfizmus, $T^{-1}\mathfrak{M} = \mathfrak{M}$, ellenkező esetben $T^{-1}\mathfrak{M}$ az $\mathfrak{M}$ algebrának valódi részalgebrája.

Ismételten alkalmazva a T^{-1} operációt egy egymást tartalmazó

(1) $$\mathfrak{M} \supset T^{-1}\mathfrak{M} \supset T^{-2}\mathfrak{M} \supset \ldots$$

algebrasorozatot kapunk, melynek elemei vagy mind azonosak, vagy mind különbözők. A $T^{-n}\mathfrak{M}$ algebra a következőképpen írható le: az $\mathfrak{M}$ algebra egy eleme abban és csak abban az esetben tartozik a $T^{-n}\mathfrak{M}$ algebrához, ha mint mérhető halmazok egy osztálya tartalmaz legalább egy olyan halmazt, mely őskép a T^n endomorfizmus esetén, azaz legalább egy olyan X halmazt, mely kielégíti az $X = T^{-n}(T^n X)$ összefüggést.

Tekintsük a $\bigcap_{n=0}^{\infty} T^{-n}\mathfrak{M}$ metszetet, mely $\mathfrak{M}$-nek szintén részalgebrája. Világos, hogy az $\mathfrak{M}$ algebra egy eleme akkor és csak akkor tartozik a $\bigcap_{n=0}^{\infty} T^{-n}\mathfrak{M}$ algebrához, ha mint mérhető halmazok egy osztálya tartalmaz egy olyan $X_1, X_2, \ldots$ halmazsorozatot, mely eleget tesz az

$$X_n = T^{-n}(T^n X_n)$$

összefüggésnek.

Bebizonyítjuk, hogy *a* $\bigcap_{n=0}^{\infty} T^{-n}\mathfrak{M}$ *algebrához tartozó bármely mérhető halmazosztály tartalmaz olyan* X *halmazt, mely egyszerre eleget tesz az összes* $X = T^{-n}(T^n X)$ *összefüggésnek.*

Bizonyítás: Vegyünk az említett osztályban valamilyen Y halmazt a mérhető $TY, T^2 Y, \ldots,$ (lásd 1. 5 pont) képekkel és legyen

$$X = \bigcup_{n=0}^{\infty} T^{-k}(T^k Y).$$

Mivel az $Y, T^{-1}(TY), T^{-2}(T^2 Y), \ldots$ sorozat növekvő, tetszőleges n-re

$$X = \bigcup_{k=n}^{\infty} T^{-k}(T^k Y) = T^{-n}(T^n X).$$

Továbbá

$$\mu(T^{-k}(T^k Y) - Y) = 0 \qquad (k = 0, 1, \ldots)$$

és

$$\mu(X - Y) = 0.$$

Az (1) algebrasorozattal együtt tekintjük az

$$\varepsilon \geqq T^{-1}\varepsilon \geqq T^{-2}\varepsilon \geqq \ldots \tag{2}$$

felbontássorozatot. Nyilvánvaló, hogy $\mathfrak{M}(T^{-n}\varepsilon) = T^{-n}\mathfrak{M}$. Következésképp

$$\mathfrak{M}\Big(\bigcap_{n=0}^{\infty} T^{-n}\varepsilon\Big) = \bigcap_{n=0}^{\infty} T^{-n}\mathfrak{M}.$$

Igazak a

$$T^{-1}\Big(\bigcap_{n=0}^{\infty} T^{-n}\varepsilon\Big) = \bigcap_{n=0}^{\infty} T^{-n}\varepsilon, \quad T^{-1}\Big(\bigcap_{n=0}^{\infty} T^{-n}\mathfrak{M}\Big) = \bigcap_{n=0}^{\infty} T^{-n}\mathfrak{M}$$

összefüggések, melyeknek értelmében a T endomorfizmus az $M\Big/\bigcap_{n=0}^{\infty} T^{-n}\varepsilon$ faktortérben egy bizonyos *automorfizmust* indukál.

2. 2. Pontos endomorfizmusok

A T endomorfizmust *pontosnak* nevezzük, ha

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} T^{-n}\mathfrak{M}=\mathfrak{N}, \tag{3}$$

azaz, ha

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} T^{-n}\varepsilon=\nu. \tag{4}$$

Más szavakkal, a T endomorfizmust pontosnak nevezzük, ha tetszőleges, az

$$X=T^{-n}(T^n X)$$

feltételnek eleget tevő mérhető X halmaz (minden n-re) vagy 0, vagy 1 mértékű.

A T endomorfizmus akkor és csak akkor pontos, ha tetszőleges pozitív mértékű X halmazra, melynek $TX, T^2X, \ldots$ képei mérhetők, igaz a

$$\lim_{n\to\infty} \mu(T^n X)=1 \tag{5}$$

összefüggés.

Bizonyítás: Legyen T pontos endomorfizmus és X pozitív mértékű halmaz mérhető $TX, T^2X, \ldots$ képekkel. Mivel az $X, T^{-1}(TX), T^{-2}(T^2X), \ldots$ sorozat növekvő az $S=\bigcup_{k=0}^{\infty} T^{-k}(T^kX)$ összegre tetszőleges n esetén igaz az

$$S=\bigcup_{k=n}^{\infty} T^{-k}(T^kX)=T^{-n}(T^nS)$$

összefüggés, következésképp az S halmazok osztálya a (3) algebrához tartozik. Mivel $\mu(S)\geqq\mu(X)>0$, $\mu(S)=1$ és

$$\lim_{n\to\infty} \mu(T^{-n}(T^nX))=1. \tag{6}$$

De $\mu(T^{-n}(T^nX))=\mu(T^nX)$ és (6)-ból (5) következik.

Legyen most (5) igaz tetszőleges pozitív mértékű X halmazra, melynek TX, $T^2X, \ldots$ képei mérhetők és az X mérhető halmaz tetszőleges n esetén tegyen eleget az

$$X=T^{-n}(T^nX)$$

összefüggésnek. Világos, hogy $\mu(T^nX)=\mu(X)$ és $\lim_{n\to\infty}\mu(T^nX)=\mu(X)$. Következésképp, ha $\mu(X)>0$, akkor $\mu(X)=1$.

Ezt a tételt sokféle ekvivalens formában fogalmazhatjuk meg. Például: *a T endomorfizmus akkor és csak akkor pontos, ha tetszőleges pozitív mértékű X halmazra*

$$\lim_{n\to\infty} \mu(T_r^n X)=1.$$

Vagy: *a T endomorfizmus akkor és csak akkor pontos, ha tetszőleges pozitív $\mu_i(X)$ belső mértékű X halmazra igaz a*

$$\lim_{n\to\infty} \mu_i(T^n X)=1$$

összefüggés.

2. 3. Pontosság és irreducibilitás

Az $A \subset M$ halmazt a T endomorfizmusra nézve *invariánsnak* nevezzük, ha $T^{-1}A = A$. Nyilvánvaló, hogy $\mathfrak{M}$ invariáns mérhető halmazoknak megfelelő elemei az $\mathfrak{M}$ algebrának egy részalgebráját alkotják. Jelöljük ezt a részalgebrát $\mathfrak{M}_T$-vel. A T endomorfizmust *irreducibilisnek* nevezzük, ha $\mathfrak{M}_T = \mathfrak{N}$, azaz ha bármely invariáns mérhető halmaz vagy nulla, vagy 1 mértékű.

Világos, hogy $\mathfrak{M}_T \subset T^{-n}\mathfrak{M}$ tetszőleges n-re. Következésképp

$$\mathfrak{M}_T \subset \bigcap_{n=0}^{\infty} T^{-n}\mathfrak{M},$$

és ha $\bigcap_{n=0}^{\infty} T^{-n}\mathfrak{M} = \mathfrak{N}$, ekkor $\mathfrak{M}_T = \mathfrak{N}$. Ily módon *a pontos endomorfizmusok irreducibilisek.*

Irreducibilis endomorfizmus lehet nem pontos. Példaként szolgálhat bármely automorfizmus. Valóban, irreducibilis automorfizmusra $\mathfrak{M}_T = \mathfrak{N}$ és $\bigcap_{n=0}^{\infty} T^{-n}\mathfrak{M} = \mathfrak{M}$.

Az elmondottakat lefordítjuk a felbontások nyelvére. Tekintsük ezért az M tér következő módon értelmezett ξ és η felbontásait: az x és y pontok a ξ felbontás ugyanazon eleméhez tartoznak, ha léteznek olyan p és q természetes számok, hogy $T^p x = T^q y$, az x és y pontok az η felbontás ugyanazon eleméhez tartoznak, ha létezik olyan n természetes szám, hogy $T^n x = T^n y$. A ξ felbontás elemeit pontjaik *trajektóriáinak* nevezzük a T endomorfizmusra nézve. A ξ és η felbontások, általában, nem összemérhetők; legyenek ξ', η' a mérhető burkolóik. Azt kapjuk, hogy

$$\xi \leqq \eta \bmod 0, \quad \xi' \leqq \eta' \bmod 0, \quad \eta' = \bigcap_{n=0}^{\infty} T^{-n}\varepsilon,$$

$$\mathfrak{M}(\xi') = \mathfrak{M}_T, \quad \mathfrak{M}(\eta') = \bigcap_{n=0}^{\infty} T^{-n}\mathfrak{M}.$$

A T endomorfizmus akkor és csak akkor irreducibilis, ha $\xi' = \nu \bmod 0$, és akkor és csak akkor pontos, ha $\eta' = \nu \bmod 0$. Ha T irreducibilis automorfizmus, akkor $\xi' = \nu \bmod 0$ és $\eta' = \varepsilon \bmod 0$.

2. 4. Semiunitér operátorok

A 2. 5. pontban találkozunk a semiunitér operátorokkal. Itt a rájuk vonatkozó szükséges ismereteket tárgyaljuk.*

Legyen H unitér tér. A H-n értelmezett lineáris izometrikus U operátort *unitérnek* nevezzük, ha $UH = H$ és *semiunitérnek*, ha UH a H térnek szabályos része.

Példaként semiunitér operátorra az

$$Uf^n = f^{n+1}, \qquad n = 0, 1, \ldots$$

összefüggéssel értelmezett operátor szolgál, ahol $f^0, f^1, \ldots$ egy teljes ortonormált függvényrendszer. Az ilyen operátort *elemi semiunitér operátornak* fogjuk nevezni.

* A semiunitér operátorok spektrálelméletét PLESZNER dolgozta ki. [7]

Valamivel komplikáltabb példa egy olyan operátor, mely elemi semiunitér operátorok ortogonális összege, azaz a H tér olyan felbontását teszi lehetővé inveriáns alterek ortogonális összege alakjában, ahol minden altéren az operátor elemi semiunitér lesz. Az invariáns alterek száma (véges vagy végtelen) nem függ az említett felbontás választásától; valóban, ez a szám egyenlő az UH altér $H \ominus UH$ ortogonális komplementerének dimenziójával. a számú elemi semiunitér operátor ortogonális összegét *a multiplicitású homogén spektrumú semiunitér operátornak* fogjuk nevezni.

Tetszőleges U semiunitér operátor esetén igaz a $H \supset UH \supset U^2H \supset \dots$ tartalmazási reláció, amiből a $H^0 = \bigcap_{n=0}^{\infty} U^n H$ metszetre az $UH^0 = H^0$ összefüggés következik. Ily módon a H^0 altér U-ra nézve invariáns és H^0-on *U unitér operátor*. A

$$H^1 = H \ominus H^0$$

ortogonális komplementer szintén invariáns U-ra és nyilvánvaló, hogy

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} U^n H^1 = 0, \tag{7}$$

ahol 0 az üres altér. Belátható, hogy H^1-en az U operátor spektruma homogén.

Valóban, legyen $\{h_\alpha\}$ valamilyen teljes ortonormált függvényrendszer a $H^1 \ominus UH^1$ téren, és legyen H_α a $h_\alpha, Uh_\alpha, U^2h_\alpha, \dots$ sorozat lineáris zárt burka. Világos, hogy az $U^n h_\alpha$ elemek páronként ortogonálisak. Következésképp a H_α alterek páronként ortogonálisak és mindegyikükben U egy elemi semiunitér operátor. A (7) összefüggés szerint az $\{U^n h_\alpha\}$ rendszer teljes, tehát a H_α alterek ortogonális összege az egész H^1.

Vegyük észre, hogy $H^1 \ominus UH^1 = H \ominus UH$, tehát a H_α alterek száma egyenlő a $H \ominus UH$ altér $\dim(H \ominus UH)$ dimenziójával. Ezzel bebizonyítottuk a következő tételt:

Tetszőleges U semiunitér operátorra nézve a H tér a következő invariáns alterek összegére bomlik: $H^0 = \bigcap_{n=0}^{\infty} U^n H$ *és* $H^1 = H \ominus H^0$, *az elsőben U unitér operátor, a másodikban homogén spektrumú* $\dim(H \ominus UH)$ *multiplicitással.*

Az U operátor által a $H^0 = \bigcap_{n=0}^{\infty} U^n H$ és $H^1 = H \ominus H^0$ altereken indukált operátorokat az *U unitér részének*, illetve *homogén részének* fogjuk nevezni.

2. 5. Pontosság és spektrum

Legyen L_2 az M-en abszolút értékben négyzetesen integrálható majdnem mindenütt megegyező mérhető komplex függvények osztályaiból alkotott unitér tér. Amint az szokásos, az L_2 tér elemeit egyszerűen függvényeknek fogjuk nevezni, és ha ez nem vezet félreértésre, általában nem teszünk különbséget sem a terminológiában, sem a jelölésekben függvény és osztálya között. Hasonlóan állapodunk meg az $\mathfrak{M}$ algebra elemeiül szolgáló halmazosztályokra és a mérhető halmazokra vonatkozólag is.

Tetszőleges mérhető ζ felbontásra jelölje $L_2(\zeta)$ az L_2 tér azon alterét, mely a ζ felbontás elemein állandó függvényekből áll. Nyilvánvaló, hogy $L_2(\zeta)$ tartalmazza

$\mathfrak{M}(\zeta)$ (lásd 1. 3) halmazainak karakterisztikus függvényeit és ezekkel a függvényekkel származtatható. Ily módon $L_2(\zeta)=L_2(\zeta')$ akkor és csak akkor, ha $\zeta=\zeta'$ mod 0. Világos továbbá, hogy $L_2(\zeta)\subset L_2(\zeta')$ akkor és csak akkor, ha $\zeta\leqq\zeta'$ mod 0 és hogy

$$L_2(\bigcap_\alpha \zeta_\alpha)=\bigcap_\alpha L_2(\zeta_\alpha),\quad L_2(\prod_\alpha \zeta_\alpha)=\bigvee_\alpha L_2(\zeta_\alpha),$$

ahol $\bigvee_\alpha L_2(\zeta_\alpha)$ az L_2 tér azon legkisebb altere, mely tartalmazza az összes $L_2(\zeta_\alpha)$ tereket. Megjegyezzük, hogy $L_2(\varepsilon)=L_2$ és $L_2(\nu)=C$, ahol C az állandók egydimenziós tere.

Az M tér tetszőleges T endomorfizmusának megfelel egy az

$$U_Tf(x)=f(Tx),\quad f\in L_2,\quad x\in M,$$

összefüggéssel értelmezett U_T operátor, mely L_2-öt L_2-be képezi le. Ha T automorfizmus vagy modulo null automorfizmus, akkor U_T unitér, ellenkező esetben semiunitér operátor.

A konstansok mindig invariáns függvényei lesznek az U_T operátornak. Ha más invariáns függvények nem léteznek, az endomorfizmust *ergodikusnak* nevezzük. Az ergodikusság ekvivalens az irreducibilitással.

Nyilvánvaló, hogy $U_T^nL_2=L_2(T^{-n}\varepsilon)$. Következésképp a $\bigcap_{n=0}^{\infty}U_T^nL_2$ altér, melyen az U_T operátor unitér része van értelmezve, megyegyezik az $L_2\left(\bigcap_{n=0}^{\infty}T^{-n}\varepsilon\right)$ altérrel. Az utóbbi altér tekinthető mint az $M\Big/\bigcap_{n=0}^{\infty}T^{-n}\varepsilon$ faktortéren abszolút értékben négyzetesen integrálható függvények unitér tere, míg az U_T operátor unitér része: az ezen a faktortéren a T endomorfizmus által indukált automorfizmushoz rendelt operátor (vö. 2. 1 pont).

Megvizsgáljuk az U_T operátor homogén részét.

LEMMA. *Ha $\zeta\neq\varepsilon$ mod 0 az $L_2(\zeta)$ altér $L_2\ominus L_2(\zeta)$ ortogonális komplementere végtelen dimenziós.*

Bizonyítás: Ha $\zeta\neq\varepsilon$ mod 0, akkor $L_2(\zeta)\neq L_2$ és L_2-ben található olyan $\varphi\neq0$, mely ortogonális $L_2(\zeta)$-ra. Jelöljük A-val azon $x\in M$ pontok halmazát, melyekben $\varphi(x)\neq0$, χ legyen az A halmaz karakterisztikus függvénye, L_2' az L_2 tér A halmazon kívül nulla függvényekből álló altere, $L_2'(\zeta)$ az A halmazon belül a ζ felbontásain állandó, míg A-n kívül nulla függvények tere. Világos, hogy φ ortogonális $L_2'(\zeta)$-ra. Vizsgáljuk meg a következő két esetet.

1. *Az $L_2'(\zeta)$ altér véges dimenziós.* Mivel L_2' végtelen dimenziós az $L_2'\ominus L_2'(\zeta)$ ortogonális kiegészítés végtelen dimenziós. Ha $f\in L_2'\ominus L_2'(\zeta)$ és g tetszőleges függvény $L_2(\zeta)$-ból, akkor $g\chi\in L_2'(\zeta)$ és $(f,g)=(f,g\chi)=0$. Ily módon, ha $f\in L_2'\ominus L_2'(\zeta)$, akkor $f\in L_2\ominus L_2(\zeta)$, azaz

$$L_2'\ominus L_2'(\zeta)\subset L_2\ominus L_2(\zeta).$$

Következésképpen $L_2\ominus L_2(\zeta)$ végtelen dimenziós.

2. *Az $L_2'(\zeta)$ altér végtelen dimenziós.* Legyen $g_1, g_2, \dots$ lineárisan független, korlátos, valós függvények egy sorozata $L_2'(\zeta)$-ból. Mivel az A halmazon kívül mind

nullával egyenlők, azért A-n lineárisan függetlenek. Mivel φ az A halmazon nem nulla a $g_1\varphi$, $g_2\varphi, \ldots$ függvények szintén lineárisan függetlenek. Ha $g \in L_2(\zeta)$, akkor $gg_n \in L_2'(\zeta)$ $(n=1, 2, \ldots)$ és

$$(g, g_n\varphi) = (gg_n, \varphi) = 0.$$

Következésképp $g_n\varphi \in L_2 \ominus L_2(\zeta)$ és az $L_2 \ominus L_2(\zeta)$ altér végtelen dimenziós.

Ha az U_T operátor semiunitér, akkor homogén része végtelen dimenziós spektrumú.

Valóban, a 2. 4 pont szerint az U_T operátor homogén része spektrumának multiplicitása $\dim(L_2 \ominus U_T L_2)$ lesz. Mivel $U_T L_2 = L_2(T^{-1}\varepsilon)$ a lemma szerint $\dim(L_2 \ominus U_T L_2) = \infty$. A kapott eredményekből következik:

A T endomorfizmus akkor és csak akkor pontos, ha

(8) $$\bigcap_{n=0}^{\infty} U_T^n L_2 = C.$$

Egy pontos endomorfizmushoz tartozó U_T operátor unitér része az egydimenziós C tér identikus leképezése lesz, míg homogén részének spektruma megszámlálható multiplicitású.

Mint ismeretes a H unitér téren értelmezett U és U' operátorokat *izomorfoknak* nevezzük, ha létezik H-nak olyan V unitér operátora, hogy $U' = VUV^{-1}$. A fentiekből speciálisan következik, hogy a *pontos endomorfizmusokhoz tartozó összes U_T operátorok izomorfok.*

2. 6. Pontosság és keverés

A T endomorfizmust *keverésnek* nevezzük, ha tetszőleges mérhető X, Y halmazokra

$$\lim_{n\to\infty} \mu(T^{-n}X \cap Y) = \mu(X)\mu(Y).$$

Ennél a klasszikus meghatározásnál lényegesen erősebb a [8]-ban bevezetett és alább ismertetésre kerülő *többszörös keverés* fogalma. Tekintsük a természetes $k^0, k^1, \ldots, k^r$ számokból álló $\Delta^r = (k^0, k^1, \ldots, k^r)$ összességeket. Legyen

$$I(\Delta^r) = \inf |k^i - k^j|, \qquad 0 \leqq i < j \leqq r.$$

A T endomorfizmust *r-edfokú keverésnek* nevezzük, ha tetszőleges mérhető $X_0, X_1, \ldots X_r$ halmazokra és a

(9) $$\Delta_1^r = (k_1^0, k_1^1, \ldots, k_1^r), \quad \Delta_2^r = (k_2^0, k_2^1, \ldots, k_2^r), \ldots$$

összességek tetszőleges

(10) $$\lim_{n\to\infty} I(\Delta_n^r) = \infty$$

feltételnek eleget tevő sorozatára igaz a

(11) $$\lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcap_{i=0}^{r} T^{-k_n^i} X_i\right) = \prod_{i=0}^{r} \mu(X_i)$$

összefüggés. Nyilvánvaló, hogy ha T r-edfokú keverés, akkor minden $s<r$ fokon is keverés. Speciálisan az elsőfokú keverés a fentebb értelmezett klasszikus keverés.

A T endomorfizmus akkor és csak akkor r-edfokú keverés, ha tetszőleges korlátos mérhető $f_0, f_1, \ldots, f_r$ függvényekre és tetszőleges (10)-nek eleget tevő (9) sorozatra igaz a

$$\lim_{n\to\infty}\left(\prod_{i=0}^{r} U_T^{k_n^i} f_i,\, 1\right) = \prod_{i=1}^{r}(f_i, 1) \tag{12}$$

összefüggés.

Valóban, ha f_i az X_i halmaz karakterisztikus függvénye, akkor (12) a (11) összefüggésnek más felírása. Tetszőleges korlátos mérhető függvényre való áttérés karakterisztikus függvények lineáris kombinációival való egyenletes approximáció útján valósítható meg.

Egy pontos endomorfizmus minden fokon keverés.

Bizonyítás: Elég megmutatni, hogy a (12) összefüggés tetszőleges $f_0, f_1, \ldots, f_r$ korlátos, mérhető függvényekre és tetszőleges a (10) feltételen kívül a

$$k_n^0 < k_n^1 < \ldots < k_n^r \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

feltételeknek eleget tevő (9) sorozatokra igaz. Tegyük fel először, hogy $(f_0, 1) = 0$. Ha g_n a

$$\prod_{i=1}^{r} U^{k_n^i - k_n^0} f_i$$

szorzat komplex konjugáltja, akkor

$$\left(\prod_{i=0}^{r} U_T^{k_n^i} f_i,\, 1\right) = (f_0, g_n).$$

Be kell bizonyítani, hogy

$$\lim_{n\to\infty}(f_0, g_n) = 0. \tag{13}$$

Mivel $k_n^1 - k_n^0 < k_n^2 - k_n^0 < \ldots < k_n^r - k_n^0$ a g_n függvény az

$$U_T^{k_n^1 - k_n^0} L_2$$

altérhez tartozik. Legyen P_n ezen altér vetítő operátora. Nyilvánvaló, hogy

$$|(f_0, g_n)| = |(P_n f_0, g_n)| \leqq \|P_n f_0\| \cdot \|g_n\|. \tag{14}$$

A (8) feltételből és a

$$\lim_{n\to\infty}(k_n^1 - k_n^0) = \infty, \qquad (f_0, 1) = 0$$

összefüggésekből kapjuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty}\|P_n f_0\| = 0. \tag{15}$$

Az $f_1, \ldots, f_r$ függvények korlátos voltából kapjuk, hogy

$$\|g_n\| \leqq l = \text{const.} \tag{16}$$

(14), (15) és (16)-ból következik (13).

Legyen most f_0 tetszőleges korlátos, mérhető függvény. A (12) összefüggés r szerinti indukcióval bizonyítható. Tegyük fel, hogy

$$\lim_{n\to\infty}\left(\prod_{i=1}^{r} U_T^{k_n^i} f_i, 1\right) = \prod_{i=1}^{r}(f_i, 1) \tag{17}$$

fennáll és bebizonyítjuk (12)-t. Mivel $r=0$ esetén (12) triviális, ezzel a tétel be lesz bizonyítva. Igaz a

$$\left(\prod_{i=0}^{r} U_T^{k_n^i} f_i, 1\right) = \left(U_T^{k_n^0} f_0' \cdot \prod_{i=1}^{r} U_{T^n}^{k} f_i, 1\right) + (f_0, 1)\left(\prod_{i=1}^{r} U_T^{k_n^i} f_i, 1\right), \tag{18}$$

összefüggés, ahol $f_0' = f_0 - (f_0, 1)$. Mivel $(f_0', 1) = 0$

$$\lim_{n\to\infty}\left(U_T^{k_n^0} f_0' \cdot \prod_{i=1}^{r} U_T^{k_n^i} f_i, 1\right) = 0. \tag{19}$$

A (18), (19) és (17) összefüggésekből következik (12).

2.7. A $h(T, \xi)$ függvény

A következő két pontot egy fontos új fogalomnak — egy endomorfizmus entrópiájának — szenteljük. Automorfizmusokra az entrópia A. N. KOLMOGOROV [9] és JA. G. SZINAJ [10] nemrégi dolgozataiban van értelmezve. Endomorfizmusokra az entrópia értelmezése és alapvető tulajdonságai minden nehézség nélkül átvihetők. Ezt végezzük el az alábbiakban. A tárgyalás [6] rövid dolgozatom alapján történik.

Legyen $\xi \in Z$ esetén

$$\xi_T = \prod_{k=0}^{\infty} T^{-k}\xi,$$

$$\xi_T^0 = \nu, \quad \xi_T^n = \prod_{k=0}^{n-1} T^{-k}\xi, \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Igaz a következő egyenlőség:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} H(\xi_T^n) = H(\xi_T \mid T^{-1}\xi_T). \tag{20}$$

Bizonyítás: Mivel

$$\xi_T^1 \leqq \xi_T^2 \leqq \ldots, \prod_{n=0}^{\infty} \xi_T^n = \xi_T, \tag{21}$$

tehát

$$T^{-1}\xi_T^1 \leqq T^{-1}\xi_T^2 \leqq \ldots, \prod_{n=1}^{\infty} T^{-1}\xi_T^n = T^{-1}\xi_T,$$

és 1.6 szerint

$$\lim_{n\to\infty} H(\xi \mid T^{-1}\xi_T^n) = H(\xi \mid T^{-1}\xi_T) = H(\xi_T \mid T^{-1}\xi_T). \tag{22}$$

Másrészt

$$\xi_T^k = \xi T^{-1}\xi_T^{k-1} \qquad (k = 1, 2, \ldots),$$

és ezért

$$H(\xi_T^k) = H(T^{-1}\xi_T^{k-1}) + H(\xi \mid T^{-1}\xi_T^{k-1}).$$

Ebben az egyenlőségben $H(T^{-1}\xi_T^{k-1})$ helyett $H(\xi_T^{k-1})$-et téve és mindkét oldal számtani közepét véve $k=1, \dots, n$ esetén, azt kapjuk, hogy

$$(23) \qquad \frac{1}{n} H(\xi_T^n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} H(\xi \mid T^{-1}\xi_T^{k-1}).$$

A számtani közepekre vonatkozó ismert tétel szerint (22) és (23)-ból következik (20).
A (20) számot jelöljük $h(T, \xi)$-vel.

Rögzített T esetén a $h(T, \xi)$ függvény folytonos ξ-ben (a Z halmazon); tetszőleges $\xi \in Z$, $\eta \in Z$ felbontásokra

$$(24) \qquad |h(T, \eta) - h(T, \xi)| \leqq \varrho(\xi, \eta).$$

Bizonyítás: Mivel

$$H(\eta_T^n) - H(\xi_T^n) = H(\eta_T^n \mid \xi_T^n) - H(\xi_T^n \mid \eta_T^n),$$

azért

$$(25) \qquad |H(\eta_T^n) - H(\xi_T^n)| \leqq H(\eta_T^n \mid \xi_T^n) + H(\xi_T^n \mid \eta_T^n).$$

De

$$(26) \qquad H(\xi_T^n \mid \eta_T^n) \leqq \sum_{k=0}^{n-1} H(T^{-k}\xi \mid \eta_T^n) \leqq \sum_{k=0}^{n-1} H(T^{-k}\xi \mid T^{-k}\eta) = nH(\xi \mid \eta)$$

és analóg módon

$$(27) \qquad H(\eta_T^n \mid \xi_T^n) \leqq nH(\eta \mid \xi).$$

A (25), (26) és (27) összefüggésekből következik, hogy

$$|H(\eta_T^n) - H(\xi_T^n)| \leqq n\varrho(\xi, \eta).$$

Ezen egyenlőtlenség mindkét oldalát n-el osztva és az $n \to \infty$ határátmenetet elvégezve kapjuk (24)-et.

Ha $\eta \leqq \xi_T$, akkor $h(T, \eta) \leqq h(T, \xi)$.

Bizonyítás: 1.7 szerint a (21) összefüggésekből következik, hogy az $\eta \leqq \xi_T^m$ (legalább egy m-re) feltételnek eleget tevő η felbontások halmaza sűrű az $\eta \leqq \xi_T$ feltételnek eleget tevő mérhető η felbontások halmazán. Ezért a

$$h(T, \eta) \leqq h(T, \xi)$$

egyenlőtlenséget elég bizonyítani az $\eta \leqq \xi_T^m$ (valamilyen m-re) feltevés esetén. Igazak az

$$\eta_T^n \leqq (\xi_T^m)_T^n = \xi_T^{m+n-1}, \quad H(\eta_T^n) \leqq H(\xi_T^{m+n-1})$$

összefüggések. Az utóbbi egyenlőtlenség mindkét oldalát elosztva n-el és az $n \to \infty$ határátmenetet elvégezve kapjuk, hogy

$$h(T, \eta) \leqq H(T, \xi).$$

Ha T pontos endomorfizmus, akkor $h(T, \xi)>0$, *ha* $\xi \neq \nu \bmod 0$.

Bizonyítás: Mivel $h(T, \xi)=H(\xi_T/T^{-1}\xi_T)$ a

$$h(T, \xi)>0$$

egyenlőtlenség ekvivalens a

$$T^{-1}\xi_T \neq \xi_T \bmod 0$$

egyenlőtlenséggel. Tegyük fel, hogy

$$T^{-1}\xi_T = \xi_T \bmod 0.$$

Akkor

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} T^{-n}\xi_T = \xi_T \bmod 0$$

és

$$\xi \leqq \xi_T = \bigcap_{n=0}^{\infty} T^{-n}\xi_T \leqq \bigcap_{n=0}^{\infty} T^{-n}\varepsilon = \nu \bmod 0,$$

azaz $\xi = \nu \bmod 0$.

2. 8. Endomorfizmus entrópiája

Legyen

$$h(T)=\sup h(T, \xi), \quad \xi \in Z.$$

A $h(T)$ függvényt nevezzük *a T endomorfizmus entrópiájának.*

Igaz a

(28) $$h(T) \geqq H(\varepsilon/T^{-1}\varepsilon)$$

egyenlőtlenség.

Bizonyítás: Legyen a $\xi_1, \xi_2, \ldots$ Z-beli felbontássorozat olyan, hogy

$$\xi_1 \leqq \xi_2 \leqq, \ldots, \prod_{n=1}^{\infty} \xi_n = \varepsilon.$$

Mivel $(\xi_n)_T \leqq \varepsilon$ egyben

$$T^{-1}(\xi_n)_T \leqq T^{-1}\varepsilon$$

és ezért

$$H((\xi_n)_T | T^{-1}(\xi_n)_T) \geqq H(\xi_n | T^{-1}\varepsilon).$$

Az utóbbi egyenlőtlenség jobboldala $h \to \infty$ esetén $H(\varepsilon|T^{-1}\varepsilon)$-hoz tart (vö. 1. 6), míg a baloldal $h(T, \xi_n)$-el egyenlő, így nem nagyobb, mint $h(T)$.

Ha $h(T)=0$, *akkor T automorfizmus vagy modulo null automorfizmus.*

Valóban, ha $h(T)=0$, akkor $H(\varepsilon|T^{-1}\varepsilon)=0$ és $T^{-1}\varepsilon=\varepsilon \bmod 0$.

A (28) összefüggésben lehet egyenlőség és határozott egyenlőtlenség is. Ha pl. T pozitív entrópiájú automorfizmus, akkor szigorú egyenlőtlenség érvényes. Vannak olyan pontos endomorfizmusok is, melyekre szigorú egyenlőtlenség érvényes. Az alább ismertetésre kerülő tétel elégséges feltételt ad arra, hogy az egyenlőség legyen igaz.

A véges vagy megszámlálható, mérhető ξ felbontást *generálónak* nevezzük a T endomorfizmusra nézve, ha

$$\prod_{n=0}^{\infty} T^{-n}\xi = \varepsilon.$$

Ha a ξ generáló Z-hez tartozik, akkor az előző pont eredményei alapján $h(T, \xi) \geqq h(T, \eta)$ tetszőleges $\eta \in Z$ felbontásra, azaz $h(T, \xi) = h(T)$. Másrészt ebben az esetben

$$h(T, \xi) = H(\xi_T | T^{-1}\xi_T) = H(\varepsilon | T^{-1}\varepsilon).$$

Következésképp, *ha a T endomorfizmusnak van $\xi \in Z$ generálója*

$$h(T) = h(T, \xi) = H(\varepsilon | T^{-1}\varepsilon). \tag{29}$$

2. 9. Példák: kompakt kommutatív csoportok endomorfizmusai

Legyen M egy megszámlálható topologikus bázissal rendelkező G kompakt kommutatív csoport és μ legyen invariáns mérték G-n. Az invariáns mérték egyértelműsége értelmében a G topológikus csoport tetszőleges endomorfizmusa az egész G csoportra mértékelméleti értelemben endomorfizmus.

Legyen G^* a G csoport karaktereinek (diszkrét) csoportja és T^* a T konjugált endomorfizmusa G^*-on. Mivel $TG = G$ a T^* endomorfizmus kölcsönösen egyértelmű. Amint azt [8] dolgozatomban megmutattam, a T endomorfizmus akkor és csak akkor ergodikus, ha a T^* endomorfizmus aperiodikus, azaz, ha tetszőleges $x^* \in G^*$ nullától különböző elemre a $(T^*)^n x^*$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ elemek mind különbözők. Világos, hogy T akkor és csak akkor automorfizmus, ha T^* automorfizmus. Nem nehéz megmutatni, hogy a T endomorfizmus akkor és csak akkor pontos, ha a

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} (T^*)^n G^*$$

metszet a G^* csoport üres alcsoportja.

Hogy az entrópia kiszámítására példát mutassunk, legyen G a kétdimenziós torus. Adott G-beli ciklikus koordinátarendszerre nézve a T endomorfizmus előállítható mint egy nem szinguláris egész együtthatós, másodrendű matrix. Legyen δ ezen matrix determinánsa. Ha $\delta = \pm 1$, akkor T automorfizmus, entrópiáját SZINAJ [10] meghatározta. Ha $|\delta| > 1$, akkor T pontos endomorfizmus. Ha a matrix mindkét sajátértéke abszolút értékben nagyobb, mint egy, a T endomorfizmusnak van generálója és

$$h(T) = H(\varepsilon | T^{-1}\varepsilon) = \lg |\delta|.*$$

* *Megjegyzés a korrektúránál.* [14] összefoglaló dolgozatomban, ahol szintén szerepel a $h(T) = \lg |\delta|$ formula, hibásan elmaradt az a megszorítás, hogy a matrix mindkét sajátértéke abszolút értékben legyen nagyobb, mint egy.

3. §. Egy endomorfizmus természetes kiterjesztése

3. 1. A természetes kiterjesztés létezése és egyértelműsége

Az M tér ζ felbontását *invariánsnak* nevezzük a T endomorfizmusra nézve, ha $T^{-1}\zeta \leqq \zeta$. Ha mérhető, T az M/ζ faktortéren indukál egy bizonyos T_ζ endomorfizmust, melyet T-nek ζ-szerinti *faktor-endomorfizmusának* nevezünk.

Nyilvánvaló, hogy irreducibilis endomorfizmus faktor-endomorfizmusa irreducibilis endomorfizmus; r-edfokú keverés faktor-endomorfizmusa r-edfokú keverés; pontos endomorfizmus faktor-endomorfizmusa pontos endomorfizmus; a T_ζ faktor-endomorfizmus $h(T_\zeta)$ entrópiája nem nagyobb mint a T endomorfizmus $h(T)$ entrópiája.

Ha T *automorfizmus*, az invariáns felbontások jellemezhetők a $T\zeta \geqq \zeta$ összefüggéssel. Ebben az esetben

$$\ldots \leqq T^{-2}\zeta \leqq T^{-1}\zeta \leqq \zeta \leqq T\zeta \leqq T^2\zeta \leqq \ldots.$$

A mérhető, invariáns ζ felbontást a T automorfizmusra nézve *kimerítőnek* nevezzük, ha

$$\prod_{n=0}^{\infty} T^n\zeta = \varepsilon \bmod 0$$

(azaz, ha $\bigvee_{n=0}^{\infty} T^n\mathfrak{M}(\zeta) = \mathfrak{M}$). Ebben az esetben a T automorfizmust a T_ζ endomorfizmus *természetes kiterjesztésének* nevezzük. Általánosabban a T automorfizmust tetszőleges olyan endomorfizmus természetes kiterjesztésének nevezzük, mely izomorf a T automorfizmus kimerítő felbontás szerinti faktor-endomorfizmusával.

Tetszőleges endomorfizmusnak van természetes kiterjesztése. Ez a kiterjesztés egy modulo null izomorfizmustól eltekintve egyértelmű.

Az egyértelműség bizonyítása: Legyen T_ζ az M tér T automorfizmusának a ζ kimerítő felbontás szerinti faktor-endomorfizmusa és $\overline{T}_{\overline{\zeta}}$ az $\overline{M}$ tér $\overline{T}$ automorfizmusának a $\overline{\zeta}$ kimerítő felbontás szerinti faktor-endomorfizmusa. Tegyük fel, hogy az M/ζ és $\overline{M}/\overline{\zeta}$ faktor-terek a T_ζ-t $\overline{T}_{\overline{\zeta}}$-ba átvivő izomorfizmussal vannak összekapcsolva és segítségével megszerkesztjük a kiterjesztések izomorfizmusát. Legyen $\{B_\alpha; \alpha \in A\}$ valamilyen bázis M/ζ-ban és $\{\overline{B}_\alpha, \alpha \in A\}$ a megfelelő bázis $\overline{M}/\overline{\zeta}$-ban. Nyilvánvaló, hogy a

$$\{T^n H_\zeta^{-1} B_\alpha; \alpha \in A, n=0, 1, \ldots\}, \quad \{\overline{T}^n H_{\overline{\zeta}}^{-1} \overline{B}_\alpha; \alpha \in A, n=0, 1, \ldots\}$$

halmazrendszerek, ahol H_ζ és $H_{\overline{\zeta}}$ az 1. 4 pontban meghatározott homomorfizmusok az M és $\overline{M}$ terek bázisait alkotják.

Ezen bázisok elemei közötti természetes megfeleltetés az M térnek $\overline{M}$ térre való olyan mod 0 izomorf leképezését értelmezi (vö. 1. 2 pont), mely T-t $\overline{T}$-ba, ζ-át $\overline{\zeta}$-ba viszi át és az M/ζ és $\overline{M}/\overline{\zeta}$ között megadott izomorfizmust indukálja.

A létezés bizonyítása: Az M tér megadott T endomorfizmusához tartozó természetes kiterjesztés megszerkesztése. Legyen M' az olyan

$$(x_0, x_1, \ldots), \quad x_n \in M,$$

sorozatok halmaza, ahol

$$Tx_{n+1} = x_n \quad (n = 0, 1, \ldots).$$

Jelölje adott $X \subset M$ halmazra X'_n azon $(x_0, x_1, \ldots) \in M'$ sorozatok halmazát, melyekre $x_n \in X$ és K_n az összes lehetséges mérhető $X \subset M$ halmazoknak megfelelő X'_n halmazok összességét. Világos, hogy

$$K_0 \subset K_1 \subset K_2 \subset \ldots$$

és, hogy

$$K = \bigcup_{n=0}^{\infty} K_n$$

halmaztest. Értelmezzük K-n a μ függvényt a

$$\mu'(X'_n) = \mu(X)$$

képlettel és terjesszük ki Lebesgue-mértékké. Akkor M' Lebesgue-tér lesz és a

$$T'(x_0, x_1, \ldots) = (Tx_0, x_0, x_1, \ldots),$$

összefüggéssel értelmezett T' leképezés az M' tér automorfizmusa lesz.

Jelölje ζ az M' tér következő feltétellel értelmezett felbontását: az $(x_0, x_1, \ldots)$ és $(\bar{x}_0, \bar{x}_1, \ldots)$ sorozatok a ζ felbontás azonos eleméhez tartoznak, ha $x_0 = \bar{x}_0$. Nem nehéz igazolni, hogy ζ kimerítő felbontás. A megfelelő T'_ζ faktor-endomorfizmus izomorf a T endomorfizmussal — a T'_ζ és T közötti izomorfizmus meghatározása az M'/ζ és M közötti természetes izomorfizmus alapján történik.

3. 2. A természetes kiterjesztés spektruma

Legyen U a H unitér téren értelmezett unitér operátor.

Azt mondjuk, hogy U *egyszerű Lebesgue-spektrummal* rendelkezik, ha H-ban létezik olyan mindkét irányban végtelen teljes ortonormált sorozat

$$\ldots, f^{-2}, f^{-1}, f^0, f^1, f^2, \ldots,$$

hogy

$$Uf^n = f^{n+1} \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

Továbbá, azt mondjuk, hogy U *homogén Lebesgue-spektrumú a multiplicitással*, ha H-t fel lehet bontani a darab invariáns altér ortogonális összegére, melyek mindegyikén U egyszerű Lebesgue-spektrummal bír. Az a szám (véges vagy végtelen) nem függ az említett felbontás választásától.

Legyen $\bar{H}$ az U-ra nézve invariáns altere H-nak, és $\bar{U}$ az U által indukált operátor $\bar{H}$-on. Ha $U\bar{H} = \bar{H}$, akkor $\bar{U}$ unitér operátor, ha $U\bar{H}$ a $\bar{H}$ valódi része, akkor $\bar{U}$ semiunitér operátor. Az utóbbi esetben igazak a következő tartalmazási relációk

$$\bar{H} \subset U^{-1}\bar{H} \subset U^{-2}\bar{H} \subset \ldots.$$

Ha

$$\bigvee_{n=0}^{\infty} U^{-n}\bar{H} = H, \tag{30}$$

az U operátort az $\bar{U}$ *természetes kiterjesztésének* nevezzük.

A 2. 4 pont szerint $\bar{U}$ ortogonális összege a

$$\bar{H}^0 = \bigcap_{n=0}^{\infty} U^n \bar{H}$$

altéren értelmezett unitér részének és a

$$\bar{H}^1 = \bar{H} \ominus \bar{H}^0$$

altéren értelmezett homogén részének. A $\bar{H} = \bar{H}^0 \oplus \bar{H}^1$ egyenlőségre alkalmazva a (30) összefüggést kapjuk, hogy

$$H = \bar{H}^0 \oplus \bigvee_{n=0}^{\infty} U^{-n} \bar{H}^1,$$

azaz az $\bar{U}$ operátor kiterjesztése U-ra az $\bar{U}$ operátor homogén részének kiterjesztésére van visszavezetve. Az utóbbi kiterjesztést a következőképpen lehet leírni. A $\bar{H}^1$ alteret bontsuk fel $\bar{H}^1_\alpha$ invariáns alterek ortogonális összegére, melyek mindegyikén U elemi semiunitér operátor és legyen az $f^0_\alpha, f^1_\alpha, \ldots$ teljes ortonormált sorozat $\bar{H}^1_\alpha$-ben olyan, hogy

$$U f^n_\alpha = f^{n+1}_\alpha, \qquad (n = 0, 1, \ldots).$$

Ha az $f^0_\alpha, f^1_\alpha, \ldots$ sorozatot kiegészítjük az

$$f^{-1}_\alpha = U^{-1} f^0_\alpha, \quad f^{-2}_\alpha = U^{-2} f^0_\alpha, \ldots,$$

sorozattal, akkor kapjuk a mindkét irányban végtelen

$$\ldots, f^{-2}_\alpha, f^{-1}_\alpha, f^0_\alpha, f^1_\alpha, f^2_\alpha, \ldots,$$

sorozatot, mely teljes ortonormált rendszer a

$$\bigvee_{n=0}^{\infty} U^{-n} \bar{H}^1_\alpha$$

altéren és kielégíti az

$$U f^n_\alpha = f^{n+1}_\alpha, \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

összefüggéseket. Következésképp U ezen az altéren egyszerű Lebesgue-spektrummal bír, míg a

$$\bigvee_{n=0}^{\infty} U^{-n} \bar{H}^1,$$

altéren, mely az

$$\bigvee_{n=0}^{\infty} U^{-n} \bar{H}^1_\alpha$$

alterek ortogonális összege, homogén Lebesgue-spektrummal, melynek multiplicitása a $\bar{H}^1_\alpha$ alterek számával egyenlő. Ily módon kapjuk, hogy

az $\bar{U}$ semiunitér operátor U természetes kiterjesztése az $\bar{U}$ operátor unitér részének és egy olyan homogén Lebesgue-spektrumú unitér operátornak az összegére bomlik, melynek multiplicitása az $\bar{U}$ operátor homogén része spektrumának multiplicitásával egyezik meg.

Legyen T_ζ a T automorfizmus (vö. 3. 1) faktor-endomorfizmusa. Nyilvánvaló, hogy az L_2 tér $L_2(\zeta)$ altere az U_T operátorra nézve invariáns.

Ha T a T_ζ endomorfizmus természetes kiterjesztése, akkor

$$\bigvee_{n=0}^{\infty} U_T^{-n} L_2(\zeta) = \bigvee_{n=0}^{\infty} L_2(T^n \zeta) = L_2(\prod_{n=0}^{\infty} T^n \zeta) = L_2(\varepsilon) = L_2 .$$

Másrészt $L_2(\zeta)$ tekinthető az M/ζ-án abszolút értékben négyzetesen integrálható függvények unitér terének, míg az U_T operátor által $L_2(\zeta)$-ban indukált operátor — mint U_{T_ζ} operátor, mely T_ζ-hoz van rendelve. Következésképp, *ha T a T_ζ endomorfizmus természetes kiterjesztése, akkor U_T az U_{T_ζ} operátor természetes kiterjesztése lesz.*

Összehasonlítva ezt a tételt az előzővel azt kapjuk, hogy:

Az U_T operátor, mely a T_ζ endomorfizmus T természetes kiterjesztéséhez tartozik a T_ζ-hoz tartozó U_{T_ζ} operátor unitér részének és egy olyan homogén Lebesgue-spektrumú operátornak az összegére bomlik, melynek multiplicitása az U_{T_ζ} operátor homogén része spektrumának multiplicitásával egyenlő (azaz 0 vagy ∞).

3. 3. A természetes kiterjesztés tulajdonságai

1° *Ergodikus endomorfizmus természetes kiterjesztése ergodikus automorfizmus lesz.*

2° *r-edfokú keverés természetes kiterjesztése r-edfokú keverés lesz.*

3° *Egy endomorfizmus entrópiája megegyezik természetes kiterjesztésének entrópiájával.*

Az 1° állítás a 3. 2 pont eredményeinek közvetlen következménye. Bebizonyítjuk a 2° állítást. Legyen T az M tér automorfizmusa, ζ kimerítő felbontás és T_ζ r-edfokú keverés. Bármilyen legyen a

$$\lim_{n\to\infty} I(\Delta_n^r) = \infty$$

feltételnek eleget tevő

$$\Delta_1^r = (k_1^0, \dots, k_1^r), \quad \Delta_2^r = (k_2^0, \dots, k_2^r), \dots$$

sorozat, tetszőleges $\mathfrak{M}(\zeta)$-beli $X_0, X_1, \dots, X_r$ halmazokra igaz lesz a

$$\lim_{n\to\infty} \mu(\bigcap_{i=0}^{r} T^{-k_n^i} X_i) = \prod_{i=0}^{r} \mu(X_i)$$

összefüggés. Következésképp ez az összefüggés igaz lesz tetszőleges $T^m\mathfrak{M}(\zeta)$-beli, $(m = 1, 2, \dots)$, $X_0, X_1, \dots, X_r$ halmazokra, és mivel

$$\bigvee_{m=0}^{\infty} T^m \mathfrak{M}(\zeta) = \mathfrak{M},$$

igaz lesz tetszőleges $\mathfrak{M}$-beli $X_0, X_1, \dots, X_r$ halmazokra is, azaz T r-edfokú keverés.

Bebizonyítjuk a 3° állítást. Legyen T ismét az M tér automorfizmusa és ζ kimerítő felbontás. Adott pozitív δ-hoz találunk olyan $\xi \in Z$ felbontást, hogy $h(T, \xi) >$

$>h(T)-\delta$ és olyan n és $\eta \leqq T^n\zeta$ felbontást, hogy $\varrho(\xi, \eta)<\delta$ (vö. 1. 7 pont). A 2. 7 pont szerint

$$h(T, \xi)-h(T, \eta)<\delta.$$

Világos, hogy a T automorfizmus $T^n\zeta$ felbontás szerinti $T_n = T_{T^n_\zeta}$ faktor-endomorfizmusa izomorf T_ζ-val. Következésképp

$$h(T_\zeta)=h(T_n)\geqq h(T, \eta)>h(T, \xi)-\delta>h(T)-2\delta.$$

Mivel δ tetszőleges $h(T_\zeta)=h(T)$.

3. 4. Kolmogorov-féle automorfizmusok

Az M tér T automorfizmusát *Kolmogorov-féle automorfizmusnak* nevezzük, ha létezik olyan mérhető, invariáns ζ felbontás, hogy

$$\prod_{n=-\infty}^{\infty} T^n\zeta=\varepsilon, \quad \bigcap_{n=-\infty}^{\infty} T^n\zeta=\nu,$$

azaz

$$\bigvee_{n=-\infty}^{\infty} T^n\mathfrak{M}(\zeta)=\mathfrak{M}, \quad \bigcap_{n=-\infty}^{\infty} T^n\mathfrak{M}(\zeta)=\mathfrak{N}.$$

Ezeket az automorfizmusokat KOLMOGOROV vezette be [1] munkájában. Ott „kváziregulárisaknak” nevezte őket.

Az alábbi állítások közvetlen következményei az előbbi definícióknak és tételeknek.

Egy endomorfizmus természetes kiterjesztése akkor és csak akkor lesz Kolmogorov-féle automorfizmus, ha az endomorfizmus pontos. Tetszőleges Kolmogorov-féle automorfizmus természetes kiterjesztése egy pontos endomorfizmusnak.

Egy Kolmogorov-féle automorfizmus minden fokon keverés. Egy Kolmogorov-féle automorfizmushoz rendelt U_T operátor a konstansok egydimenziós alterének ortogonális kiegészítésén megszámlálható homogén Lebesgue-spektrummal bír. Egy Kolmogorov-féle automorfizmus entrópiája pozitív.

Az utóbbi két tétel KOLMOGOROV nevéhez fűződik.

4. §. Számelméleti endomorfizmusok

4. 1. Rényi tétele

Legyen φ a $0<x<1$ intervallumon értelmezett valós függvény. Legyen

$$Tx=(\varphi(x)),$$

ahol (c) a c szám törtrésze. Ha $Tx\neq 0$ akkor az x pontban értelmezve van a T^2 leképezés, ha még $T^2x\neq 0$, akkor az x pontban értelmezve van a T^3 leképezés, és í. t. Jelölje M a $(0, 1)$ intervallum mindazon pontjait, melyekben a T leképezés összes hatványai értelmezve vannak. Nyilvánvaló, hogy T M-et M-be képezi le. A következő problémát konkrét φ függvényekkel, de φ függvények egész osztályával kapcsolatban is tanulmányozták: létezik-e M-en olyan az m Lebesgue-mértékkel ekvivalens μ mérték, hogy T ergodikus endomorfizmusa lesz a μ mértékű M térnek?

Ezzel a problémával függ össze egy másik, elemibb kérdés. Legyen $x \in M$-re

$$a_n(x) = [\varphi(T^n x)] \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

ahol $[c]$ a c szám egész része; az x szám meg van-e határozva az $a_1(x), a_2(x), \ldots$ egész számok sorozatával?

Világos, hogy $a_n(Tx) = a_{n+1}(x)$. Következésképp, ha mindkét probléma pozitív megoldású a T endomorfizmus olyan eltolásnak tekinthető az $(a_1, a_2, \ldots)$ egész számokból álló számsorozatok terében, mely az $(a_1, a_2, \ldots)$ sorozatot az $(a_2, a_3, \ldots)$ sorozatba viszi át. A μ mértéket természetesen az M térről át kell vinni a sorozatok terére. Ha az egyoldalú $(a_1, a_2, \ldots)$ sorozatokat kétoldalú $(\ldots, a_{-1}, a_0, a_1, \ldots)$ sorozatokkal helyettesítjük a T endomorfizmus a természetes kiterjesztésébe megy át. Klasszikus példaként vizsgáljuk meg a $\varphi(x) = rx$, ahol r egynél nagyobb egész szám, és a $\varphi(x) = 1/x$ függvényeket. Az első példában M a $(0, 1)$ intervallum r szerinti irracionális számainak halmaza és $a_1(x), a_2(x), \ldots$ az x szám r-szerinti kifejtése. A μ mérték létezik és megegyezik m-el. A második példában M a $(0, 1)$ intervallum irracionális számainak halmaza és $a_1(x), a_2(x), \ldots$ az x szám lánctört előállítása. A μ mérték létezik és a

$$\mu(X) = \frac{1}{\ln 2} \int_X \frac{dx}{1+x}$$

képlettel van meghatározva, ahol X tetszőleges mérhető halmaz M-ben (vö. [11]).

Mindkét problémára vonatkozó leginkább teljes eredmények RÉNYI [2] dolgozatában találhatók. RÉNYI felteszi, hogy a φ függvény eleget tesz a következő két feltétel egyikének:

(A) φ folytonos és a $\lim\limits_{x \to 0} \varphi(x)$ értéktől — mely lehet $+\infty$, vagy kettőnél nagyobb egész — szigorúan csökkenő függvény a $\lim\limits_{x \to 1} \varphi(x) = 1$ értékig.

Ha $x_1 < x_2$ igaz a

$$\varphi(x_1) - \varphi(x_2) \geqq x_2 - x_1$$

egyenlőtlenség, és ha $x_1 > x_2 > \varphi^{-1}(1 + \varphi^{-1}(2))$ igaz a

$$\varphi(x_1) - \varphi(x_2) \geqq \lambda(x_2 - x_1), \ \lambda > 1$$

erősebb egyenlőtlenség.

(B) φ folytonos és szigorúan növekvő a $\lim\limits_{x \to 0} \varphi(x) = 0$ értéktől a $\lim\limits_{x \to 1} \varphi(x)$ értékig, mely lehet $+\infty$ vagy 1-nél nagyobb egész. $x_1 < x_2$ esetén fennáll a

$$\varphi(x_2) - \varphi(x_1) > x_2 - x_1$$

egyenlőtlenség.

Jelölje ξ a $(0, 1)$ intervallum részintervallumokra történő felbontását a $\varphi^{-1}(s)$, $s = 1, 2, \ldots$ pontok segítségével, és legyen — mint a 2. 7 pontban —

$$\xi_T^n = \prod_{k=0}^{n-1} T^{-k} \xi.$$

ξ_T^n szintén részintervallumokra való felbontása lesz a (0, 1) intervallumnak. *n-edrangú intervallumoknak* nevezzük őket és úgy jellemezhetők, mint az $a_1(x), \ldots, a_n(x)$ függvények konstans halmazai. A T^n leképezés értelmezve van az $n-1$-edrendű intervallumokon, de nincs értelmezve a végpontokban. Hogy megkapjuk az M halmazt a (0, 1) intervallumból el kell távolítani mindenféle rangú intervallumok végpontjait. Mivel ilyen végpont csak megszámlálható számú van, ezért a metrikus kérdésekben el lehet hanyagolni az M halmaz és a (0, 1) intervallum közötti különbséget.

Világos, hogy T^n folytonosan és szigorúan monoton módon képez le tetszőleges n-edrangú Δ intervallumot a (0, 1) intervallumra. Jelöljük f_Δ-val a fordított leképezését a (0, 1) intervallumnak Δ-ra. Mind az (A) mind a (B) esetben tetszőleges $x_1 \in \Delta$, $x_2 \in \Delta$ pontokra igaz a

$$|T^n x_1 - T^n x_2| \geqq |x_1 - x_2|$$

egyenlőtlenség. Következésképp az f_Δ függvény eleget tesz a Lipschitz-feltételnek. Speciálisan pl. abszolút folytonos. Legyen

$$l(\Delta) = \underset{0<t<1}{\text{vrai min}}\, |f'_\Delta(t)|, \quad L(\Delta) = \underset{0<t<1}{\text{vrai max}}\, |f'_\Delta(t)|.$$

Az (A) és (B) feltételeken kívül RÉNYI a φ függvénytől még a következőt követeli meg:

(C) $L(\Delta) \leqq Cl(\Delta)$, ahol C egy és ugyanazon állandó az összes különböző rangú intervallumokra.

REPREZENTÁCIÓ TÉTEL (vö. [12], [13], [2]). *Ha φ eleget tesz az* (A) *vagy* (B) *feltételnek, akkor az $x \in M$ szám egyértelműen meg van határozva az $a_1(x), a_2(x), \ldots$ egész számokból álló számsorozattal.*

RÉNYI TÉTELE. *Ha teljesülnek az* (A), (C) *vagy* (B), (C) *feltételek a* (0, 1) *intervallumon létezik olyan mérhető p függvény, hogy*

$$\frac{1}{C} \leqq p(x) \leqq C, \quad \int_0^1 p(x)\,dx = 1$$

és T ergodikus endomorfizmus az M téren

$$\mu(X) = \int_X p(x)\,dx$$

mértékkel. A p függvény modulo null egyértelmű.

Nyilvánvaló, hogy a RÉNYI-féle tétel feltételei esetén a reprezentáció-tétel ekvivalens azzal az állítással, hogy ξ *a T-re nézve generáló.* Nyilvánvaló továbbá, hogy az $1/C \leqq p(x) \leqq C$ egyenlőtlenség ekvivalens a

$$\mu(X) \leqq Cm(X), \; m(X) \leqq C\mu(X) \tag{31}$$

egyenlőtlenségekkel, ahol X tetszőleges mérhető halmaz (0, 1)-ben.

4. 2. A pontosság feltétele

Ebben a pontban T-ről nem tesszük fel, hogy számelméleti endomorfizmus, csupán a 2. 1 pont általános feltételeinek tesz eleget.

Legyen $\mathfrak{A}$ az M pozitív mértékű halmazainak olyan megszámlálható rendszere, hogy páronként diszjunkt $A\in\mathfrak{A}$ halmazok összegei alkossanak $\mathfrak{M}$-ben egy mindenütt sűrű halmazt. Ha létezik olyan pozitív egész értékű $n(A)$, $A\in\mathfrak{A}$ függvény és olyan pozitív q szám, hogy $\mu(T^{n(A)}A)=1$ $(A\in\mathfrak{A})$ és tetszőleges mérhető $X\subset A$ halmazra, melynek $T^{(n)A}X$ képe mérhető,

$$\mu(T^{n(A)}X)\leqq q\frac{\mu(X)}{\mu(A)},$$

akkor T pontos endomorfizmus.

Bizonyítás: A 2. 2 pont szerint elegendő bizonyítani, hogy tetszőleges pozitív mértékű mérhető Y halmazra, melynek $TY, T^2Y, \ldots$ képei is pozitívok

$$\lim_{n\to\infty}\mu(T^nY)=1. \tag{33}$$

Legyen δ pozitív szám. A

$$\mu(YA)\leqq\left(1-\frac{\delta}{q}\right)\mu(A)$$

összefüggés nem állhat fenn tetszőleges $A\in\mathfrak{A}$ halmazra, mivel akkor igaz lenne tetszőleges mérhető A halmazra, és $A=Y$ esetén a

$$\mu(Y)\leqq\left(1-\frac{\delta}{q}\right)\mu(Y)$$

teljesen abszurd egyenlőtlenséget kapnánk. Következésképp, létezik olyan $B\in\mathfrak{A}$ halmaz, hogy

$$\mu(YB)>\left(1-\frac{\delta}{q}\right)\mu(B)$$

és $n=n(B)$ esetén azt kapjuk, hogy

$$\mu(T^n(B-YB))\leqq q\frac{\mu(B-YB)}{\mu(B)}=q\frac{\mu(B)-\mu(YB)}{\mu(B)}<\delta,$$

$$\mu(T^nY)\geqq\mu(T^n(YB))\geqq\mu(T^nB)-\mu(T^n(B-YB))>1-\delta.$$

Mivel a $\mu(Y), \mu(TY), \mu(T^2Y), \ldots$ sorozat növekvő, a (33) összefüggés be van bizonyítva.

4. 3. A pontosságra vonatkozó tétel

A Rényi-tétel feltételei esetén T pontos endomorfizmus.

A bizonyítás a 4. 2 pont tételén alapszik. Legyen $\mathfrak{A}$ az összes különböző rangú intervallumok halmaza és $n(\Delta)$ a Δ intervallum rangja. Mivel ξ generáló T-re nézve, diszjunkt $\Delta\in\mathfrak{A}$ intervallumok összegei $\mathfrak{M}$-ben egy mindenütt sűrű halmazt alkotnak. A 4. 1 pont szerint $T^{(n)\Delta}$ Δ-át az egész (0, 1) intervallumra képezi le. Azt kell még bebizonyítani, hogy létezik olyan q szám, mely eleget tesz a (32) egyenlőtlenségnek. Mivel az f_Δ függvény a (0, 1) intervallumot Δ-ra képezi le és abszolút folytonos

$$m(\Delta)=\int_0^1|f'_\Delta(t)|\,dt\leqq L(\Delta) \tag{34}$$

és tetszőleges $X\subset\Delta$ halmazra, melynek mérhető $X'=T^{(n)\Delta}X$ képe van

$$m(X)=m(f_\Delta(X'))=\int_{X'}|f'_\Delta(t)|\,dt\geqq l(\Delta)m(X'). \tag{35}$$

A (C) feltételből és a (34), (35) egyenlőtlenségekből következik, hogy

$$m(X')\leqq C\frac{m(X)}{m(\Delta)}.$$

Ebben az egyenlőtlenségben a (31) egyenlőtlenség alapján az m mértéket μ-vel helyettesítve kapjuk, hogy

$$\mu(T^{n(\Delta)}X)\leqq C^4\frac{\mu(X)}{\mu(\Delta)}.$$

Ily módon $q=C^4$ lehet.

Példa: $\varphi(x)=1/x$. [2]-ben be van bizonyítva, hogy ez a függvény eleget tesz a RÉNYI-féle feltételeknek. Következésképp a megfelelő T endomorfizmus pontos. Speciálisan: T minden fokon keverés — ez olyan tétel, mely magában foglalja a híres GAUSS—KUZMIN-tételt (a maradék tag becslése nélkül) és nagyszámú általánosítását.

4. 4. Egy tétel az entrópiáról

Ebben a pontban feltesszük, hogy φ eleget tesz a RÉNYI-féle feltételeknek. Jelölje $\Delta_n(x)$ az $x\in M$ pontot tartalmazó n-edrangú intervallumot, és legyen

$$m_n(x)=m(\Delta_n(x)),\quad \mu_n(x)=\mu(\Delta_n(x)).$$

A ξ felbontásnak akkor és csak akkor van véges $H(\xi)$ entrópiája, ha

$$\int_0^1 \lg|\varphi'(x)|p(x)\,dx<\infty \tag{36}$$

vagy vele ekvivalens megfogalmazásban, ha

$$\int_0^1 \lg|\varphi'(x)|\,dx<\infty \tag{37}$$

(lásd a (31) egyenlőtlenségeket). *Ezen feltétel esetén*

$$h(T)=h(T,\xi)=\int_0^1 \lg|\varphi'(x)|p(x)\,dx$$

és majdnem mindenütt

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\lg\frac{1}{\mu_n(x)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\lg\frac{1}{m_n(x)}=h(T).$$

Bizonyítás: A (37) összefüggés ekvivalens a

$$\sum_\Delta\int_\Delta \lg|\varphi'(x)|\,dx \tag{38}$$

sor konvergenciájával, ahol az összegezés az *első rangú* Δ intervallumokra van kiterjesztve. A (31) egyenlőtlenségek szerint a

$$H(\xi)=\sum_{\Delta}\mu(\Delta)\lg\frac{1}{\mu(\Delta)}<\infty$$

összefüggés ekvivalens a

$$\sum_{\Delta} m(\Delta)\lg\frac{1}{m(\Delta)}<\infty \tag{39}$$

sor konvergenciájával. Mivel

$$m(\Delta)=\int_0^1 |f'_\Delta(t)|\,dt$$

(vö. 4. 3 pont), ezért

$$l(\Delta)\leqq m(\Delta)\leqq L(\Delta),\quad m(\Delta)\lg\frac{1}{L(\Delta)}\leqq m(\Delta)\lg\frac{1}{m(\Delta)}\leqq m(\Delta)\lg\frac{1}{l(\Delta)}.$$

Mivel egy elsőrangú Δ intervallumra

$$\varphi'(x)=\frac{1}{f'_\Delta(Tx)}\qquad (x\in\Delta),$$

ezért

$$\frac{1}{L(\Delta)}\leqq|\varphi'(x)|\leqq\frac{1}{l(\Delta)}\qquad (x\in\Delta),$$

$$m(\Delta)\lg\frac{1}{L(\Delta)}\leqq\int_{\Delta}\lg|\varphi'(x)|\,dx\leqq m(\Delta)\lg\frac{1}{l(\Delta)}.$$

Azonban

$$m(\Delta)\lg\frac{1}{l(\Delta)}-m(\Delta)\lg\frac{1}{L(\Delta)}=m(\Delta)\lg C$$

és így a

$$\sum_{\Delta} m(\Delta)\lg\frac{1}{l(\Delta)},\quad \sum_{\Delta} m(\Delta)\lg\frac{1}{L(\Delta)}$$

sorok egyszerre konvergensek vagy divergensek. Következésképp a (38), (39) sorok szintén egyszerre konvergensek vagy divergensek és a $H(\xi)<\infty$ feltétel ekvivalens a (36), (37) feltételekkel.

Teljesüljön most a (36) feltétel. A MACMILLAN-tétel [5] szerint az $\frac{1}{n}\lg\frac{1}{\mu_n(x)}$ függvénysorozat mértékben konvergál $h(T,\xi)$-hez. Mivel ξ generáló

$$h(T,\xi)=h(T).$$

Ezért elegendő bizonyítani, hogy majdnem mindenütt

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\lg\frac{1}{\mu_n(x)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\lg\frac{1}{m_n(x)}=\int_0^1\lg|\varphi'(x)|\,p(x)\,dx.$$

Legyen

$$l_n(x) = l(\Delta_n(x)),\ L_n(x) = L(\Delta_n(x)),\ \psi_n(x) = f'_{\Delta_n(x)}(T^n x).$$

Mivel majdnem mindenütt

$$l_n(x) \leqq |\psi_n(x)| \leqq L_n(x),\ l_n(x) \leqq m_n(x) \leqq L_n(x),$$

ezért majdnem mindenütt

$$\left|\frac{1}{n}\lg\frac{1}{m_n(x)} - \frac{1}{n}\lg\frac{1}{|\psi_n(x)|}\right| \leqq \frac{1}{n}\lg\frac{1}{l_n(x)} - \frac{1}{n}\lg\frac{1}{L_n(x)} \leqq \frac{1}{n}\lg C$$

és majdnem mindenütt

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\lg\frac{1}{m_n(x)} - \frac{1}{n}\lg\frac{1}{|\psi_n(x)|}\right] = 0.$$

Azonban $\frac{1}{\psi_n(x)}$ a T^n függvényének a deriváltja az x pontban. Következésképp

$$\frac{1}{\psi_n(x)} = \varphi'(x)\varphi'(Tx)\ldots\varphi'(T^{n-1}x)$$

$$\frac{1}{n}\lg\frac{1}{|\psi_n(x)|} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\lg|\varphi'(T^k x)|.$$

Az ergod-tétel szerint ez a középérték majdnem mindenütt konvergál a (36) integrálhoz. Tehát majdnem mindenütt

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\lg\frac{1}{m_n(x)} = \int_0^1 \lg|\varphi'(x)|\,p(x)\,dx,$$

és csak azt kell észrevenni, hogy a (31) egyenlőtlenségek szerint

$$\left|\frac{1}{n}\lg\frac{1}{\mu_n(x)} - \frac{1}{n}\lg\frac{1}{m_n(x)}\right| \leqq \frac{1}{n}\lg C.$$

Példa. $\varphi(x) = 1/x$. Ekkor

$$p(x) = \frac{1}{\ln 2}\cdot\frac{1}{1+x}$$

(lásd 4. 1 pont). Következésképp

$$h(T) = \int_0^1 \lg\frac{1}{x^2}\cdot\frac{dx}{(1+x)\ln 2} = -\frac{2}{(\ln 2)^2}\int_0^1\frac{\ln x\,dx}{1+x} = \frac{\pi^2}{6}\frac{1}{(\ln 2)^2}$$

úgy, hogy majdnem mindenütt

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\lg\frac{1}{m_n(x)} = \frac{\pi^2}{6}\cdot\frac{1}{(\ln 2)^2}. \tag{40}$$

Ez az összefüggés a lánctörtek metrikus elméletében egy kicsit más alakban ismert, éspedig:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{q_n(x)} = e^{\frac{\pi^2}{12 \ln 2}}, \tag{41}$$

ahol $q_n(x)$ az x szám n-edik közelítésének nevezője. A (40) és (41) összefüggések ekvivalenciája következik az

$$m_n(x) = \frac{1}{q_n(x)[q_n(x)+q_{n-1}(x)]}$$

összefüggésből.

4. 5. A $\varphi(x)=\beta x$, $\beta>1$ függvény

Ez a függvény nem egész β értékekre nem tesz eleget a 4. 1 pont feltételeinek. Ennek ellenére, amint az RÉNYI dolgozatában be van bizonyítva, a 4. 1 pont mindkét tétele érvényes rá, mégpedig a második tétel $C=\frac{\beta}{\beta-1}$ konstanssal.

A $\varphi(x)=\beta x$ függvénynek megfelelő ξ felbontás az $\frac{1}{\beta}, \frac{2}{\beta}, \ldots, \frac{[\beta]}{\beta}$ pontok segítségével történik és generáló. A ξ_T^n, $n>1$ felbontás a ξ_T^{n-1} felbontás minden (x_1, x_2) intervallumának

$$x_1+\frac{k}{\beta^n}, \qquad k=1,2,\ldots$$

pontokkal történő felbontása útján jön létre. A T^n endomorfizmus lineárisan — β^n együtthatóval — képezi le a ξ_T^n felbontás minden intervallumát a (0, 1) intervallumba. Az egész (0, 1) intervallumra természetesen a ξ_T^n felbontásnak csak azok az intervallumai képződnek le, melyek $1/\beta^n$ hosszúságúak. Ezen intervallumok összességét $\mathfrak{A}_n$-el jelöljük.

T pontos endomorfizmus.

A bizonyítás ismét a 4. 2 pont tételén alapszik. Legyen $\mathfrak{A}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathfrak{A}_n$ és $n(\Delta)=n$, ha $\Delta\in\mathfrak{A}_n$. Világos, hogy páronként diszjunkt $\Delta\in\mathfrak{A}$ intervallumok összegei $\mathfrak{M}$-ben egy mindenütt sűrű halmazt alkotnak. Tetszőleges $X\subset\Delta$ mérhető halmazra

$$m(T^{n(\Delta)}X) = \beta^n\cdot m(X) = \frac{m(X)}{m(\Delta)}.$$

Következésképp

$$\mu(T^{n(\Delta)}X)\leq C^3\frac{\mu(X)}{\mu(\Delta)}$$

és $q=C^3$ lehet.

A T endomorfizmus entrópiáját legegyszerűbb a (29) formula alapján kiszámítani. Természetesen előzőleg meg kell találni a p függvényt. Ha például

$$\beta=\frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

akkor

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{5+3\sqrt{5}}{10}, & \text{ha} \quad 0 < x < \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}; \\ \dfrac{5+\sqrt{5}}{10} & \text{ha} \quad \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} < x < 1; \end{cases}$$

(lásd [2]) és a (29) formula alapján

$$h(T) = \frac{5-\sqrt{5}}{2} \lg \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

IRODALOM

[1] Колмогоров, А. Н.: Новый метрический инвариант транзитивных динамических систем и автоморфизмов пространств Лебега, Докл. Акад. наук СССР, **119** (1958), 861—864.

[2] Rényi, A.: Representations for real numbers and their ergodic properties, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **8** (1957), 477—493.

[3] Рохлин, В. А.: Об основных понятиях теории меры, Мат. сборник, **25** **(67)**: 1 (1949), 107—150.

[4] Хинчин, А. Я.: Понятие энтропии в теории вероятностей, Успехи мат. наук, **8** (1953), 3—20.

[5] Хинчин, А. Я.: Об основных теоремах теории информации, Успехи мат. наук, 11 (1956), 17—75.

[6] Рохлин, В. А.: Об энтропии метрического автоморфизма, Докл. Акад. наук СССР, **124** (1959), 980—983.

[7] Плеснер, А. И.: О полуунитарных операторах, Докл. Акад. наук СССР, **25** (1939), 708—710.

[8] Рохлин, В. А.: Об эндоморфизмах компактных коммутативных групп, Изв. Акад, наук СССР, **13** (1949), 329—340.

[9] Колмогоров, А. Н.: Об энтропии на единицу времени, как метрическом инварианте автоморфизма, Докл. Акад. наук СССР, **124** (1959), 754—755.

[10] Синай, Я. Г.: Об энтропии динамической системы, Докл. Акад. наук СССР, **124** (1959), 768—771.

[11] Ryll—Nardzewski, C.: On the ergodic theorems, II. Ergodic theory of continued fractions, *Studia Math.*, **12** (1951), 74—79.

[12] Bissinger, B. H.: A generalisation of continued fractions, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **50** (1944), 868—876.

[13] Everett, C. J.: Representations for real numbers, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **52** (1946), 861—869.

[14] Рохлин, В. А.: Новый прогресс в теории преобразований с инвариантной мерой, Успехи мат. наук, **15** (1960), 3—26.

Fordította: Arató Mátyás,
a matematikai tudományok kandidátusa

Ára: 22,— Ft

TARTALOMJEGYZÉK

A KÜLFÖLDI SZAKIRODALOMBÓL

Index: 26 498