A MAGYAR
TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK
OSZTÁLYÁNAK

KÖZLEMÉNYEI

XI. KÖTET

AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST
1961

TARTALOMJEGYZÉK

A KÜLFÖLDI SZAKIRODALOMBÓL

KÖNYVISMERTETÉSEK

A TUDOMÁNYOS MINŐSÍTŐ BIZOTTSÁG HÍREI

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK

KÖZLEMÉNYEI

XI. KÖTET 1. SZÁM

AKADÉMIAI KIADÓ BUDAPEST

1961

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK
KÖZLEMÉNYEI

XI. kötet 1. szám

Szerkesztőség: Budapest, V., Nádor utca 7.
Kiadóhivatal: Budapest, V., Alkotmány utca 21.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei változó terjedelmű füzetekben jelennek meg, és az Akadémia III. osztályának felolvasóülésein bemutatott matematikai dolgozatokat, valamint egyéb dolgozatokat, referátumokat, továbbá az osztály munkájára vonatkozó közleményeket, könyvismertetéseket stb. közölnek. Évenként egy kötet jelenik meg (négy szám alkot egy kötetet).

Kéziratok a következő címre küldendők:

A Magyar Tudományos Akadémia
III. Osztályának Közleményei.
Budapest, V., Nádor u. 7.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi levelezés.

Minden szerzőt 100 különlenyomat illet meg megjelent munkájáért.

Közlésre el nem fogadott kéziratokat a szerkesztőség lehetőleg visszajuttat a szerzőhöz, de felelősséget a beküldött kéziratok megőrzéséért vagy továbbításáért nem vállal.

A Közlemények előfizetési ára kötetenként belföldi címre 40 forint, külföldi címre 60 forint. Belföldi megrendelések az Akadémiai Kiadó, Budapest, V., Alkotmány u. 21. (Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 05-915-111-46), külföldi megrendelések a „Kultúra" Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalat, Budapest, I., Fő utca 32. (Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 43-790-057-181) útján eszközölhetők.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztálya a következő idegen nyelvű folyóiratokat adja ki:

1. Acta Mathematica Hungarica
2. Acta Physica Hungarica.

Technikai szerkesztő: L. Ziermann Margit

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója Műszaki szerkesztő: Farkas Sándor
A kézirat beérkezett: 1960. XII. 15. — Terjedelem: 10,75 (A/5) ív, 11 ábra

Szegedi Nyomda Vállalat, Szeged 60-5723

A MATEMATIKA ALAPJAINAK EUKLIDÉSZI TERMINUSAI, II.*

Írta: SZABÓ ÁRPÁD

III. A posztulátumok és axiómák

E dolgozat egyik legfontosabb célja, hogy megállapítsuk: mi az értelme a matematikai princípiumok hármas felosztásának az euklidészi „Elemek" legelején, hogyan került egyáltalán sor a princípiumoknak erre az osztályozására? Ezt a kérdést az eddigiekben még éppen csak hogy megközelítettük. Nagyjából tisztáztuk már a „hypothesisek"-nek mint „kiindulásul választott feltevéseknek" a problémáját. Sikerült azt is megvilágítanunk, hogy ezek a „hypothesisek" — a dialektika természetének megfelelően — túlnyomórészt *definíciók* voltak; éppen ezért jelenthetett a „hypothesis" szó nemcsak általában matematikai *alapelvet*, hanem speciálisan *definíciót* is. — A következőkben az euklidészi *posztulátumok* és *axiómák* kérdését kell tisztáznunk. Ezekről eddig csak annyit állapítottunk meg, hogy az a görög terminus, amelyet Euklidés-szövegünk az axiómák megjelölésére használ, „koinai ennoiai", kimutathatóan későbbi eredetű átírás; e princípium-csoport eredeti görög neve „*axiómata*" volt.

Mindenekelőtt e két görög nevet, az „aitémata" (*αἰτήματα*, posztulátum) és „axiómata" (*ἀξιώματα*) szavak pontos jelentését akarjuk megérteni, anélkül, hogy már most behatóbban vizsgálnánk az EUKLIDÉS-nél felsorolt posztulátumokat és axiómákat.

1. AZ „AITÉMA" SZÓ JELENTÉSE

A *posztulátum* neve EUKLIDÉSnél „aitéma". A szójelentés ebben az esetben nem kétséges, minthogy az „aiteó" (*αἰτέω*) ige jelentése görögül: „kérni, kívánni, követelni", s ennek megfelelően „*aitéma*" a „követelést" vagy „követelményt" jelenti. A fontos csak az: egy pillanatra se feledkezzünk meg arról, hogy ez a terminus, éppenúgy mint a megelőző fejezetben vizsgált „hypothesis", a *dialektikából* származik. Ha meg akarjuk érteni a matematikában használt „aitéma" terminus pontos jelentését, abból kell kiindulnunk: miféle „követelést" vagy „követelményt" jelölt ugyanez a szó a dialektikában.

* A dolgozat I. része a MTA III. Osztályának Közleményei X/4 (1960) számában (441—468. old.) jelent meg. Ennek megfelelően a fejezetek számozása folytatólagos.

Gondoljunk két beszélgető dialektikus vitájára. Az egyik résztvevő feladata, hogy e vita során meggyőzze a másikat egy általa választott tétel (állítás) helyességéről. Ezért olyan premisszákat kell keresnie, amelyeket a másik is elfogad és helyesnek tart; ezekből a premisszákból vezeti aztán le az egyik partner logikus szükségszerűséggel azt a végső tételét (állítását), amelyet kezdetben a másik nem akart elfogadni.[79] Ebből áll a vita során a meggyőzés. Hogy tehát a vita elindulhasson, olyan premisszákat kell találniok a beszélgetőknek, amelyekben mind a ketten megegyeznek, amelyeket mind a ketten bizonyítás nélkül igazaknak tartanak. Ezért *kéri* a beszélgetés egyik résztvevője, hogy valamilyen kezdőtételt a másik is elfogadjon. Figyelemre méltó egyébként, milyen gyakran találkozunk az V. és IV. századi görögök dialektikus vitáiban olyan kifejezésekkel, mint *kérni, kívánni, követelni* vagy *venni (λαμβάνειν)* az egyik oldalról, és *adni, megadni* vagy *nem-adni* a másik oldalról.[80] SÓKRATÉS pl. a „Menón" c. platóni dialógusban — mint már a megelőző fejezetben is láttuk — így szól partneréhez egy vizsgálódás elején:[81] „*engedd meg*, hogy a kérdést egy feltevés alapján vizsgáljam" *(συγχώρησον ἐξ ὑποθέσεως αὐτὸ σκοπεῖσθαι)*; ez más szóval azt jelenti: arra *kéri* partnerét, hogy valamilyen közösen elfogadott állításból indulhasson ki beszélgetésük. Ha ez a *kérés* teljesül, ez azt is jelenti, hogy a kiinduló pontban a vitatkozók megegyeztek. Az ily módon választott kiinduló tétel lesz a „feltevésük" *(ὑπόθεσις)*. Néha azt a körülményt, hogy a vitatkozók — az egyik kérésére — valamilyen kiinduló tételben csakugyan megegyeztek, még azzal is kifejezésre juttatják, hogy az ily módon választott kezdőtételt *ὁμολόγημα*-nak nevezik;[82] „homologéma" az, amiben mind a ketten megegyeztek.

Az „aitéma" tehát olyan kiinduló tétele valamely dialektikus vitának, amelynek elfogadását az egyik partner a másiktól *kérte, követelte*. Ebben a vonatkozásban az „aitéma" szó szinonímája olyan dialektikus kifejezéseknek, mint „hypothesis" vagy „homologéma".

Ha azonban közelebbről vizsgáljuk a görög dialektika terminológiáját, mindjárt figyelmesek leszünk egy lényeges különbségre is: mintha az „aitéma" terminus mégsem pontosan azt jelentené, mint két megnevezett szinonímája, különösen pedig a „homologéma" szó! Az a körülmény ugyanis, hogy az „aitéma" esetében *csak* azt hangsúlyozzák: az egyik fél „követeléséről" van szó, de nem emelik ki egyszersmind azt is: vajon a másik fél *hozzájárult-e* ehhez a „követeléshez"? — mintha arra mutatna: talán az „aitéma" terminus éppen az ilyen *egyoldalú* dialektikus „követelésnek" volt a neve? Hiszen —

79 K. v. FRITZ, i. m. 20.

80 Vö. „Phaidón" 100 B vagy ARISTOT. Phys. Z 9. 239 b 30.

81 „Menón" 86 E 3.

82 Vö. PLATÓN, „Theaitétos" 155 A—B vagy Resp. IV 437 A.

mint már említettem — a másik terminus, a „homologéma" szó éppen azt hangsúlyozza, hogy az ilyen esetben „megegyezésre" jutottak, azaz a másik fél is hozzájárult az egyiknek a „kéréséhez", „követeléséhez". — Ez az „aitéma" szóra vonatkozó sejtésem önként adódik már a két terminusnak — „homologéma" és „aitéma" — egyszerű összehasonlításából is. Szerencsére azonban ebben az esetben nem kell megállnunk a puszta sejtésnél. Forrásunk, PROKLOS félreérthetetlenül meg is mondja, hogy csakugyan így kell értenünk az „aitémát". Ő ugyanis ARISTOTELÉSre (vö. Anal. post. I 10, 76 b 27—34) hivatkozva ezt írja: „Ha pedig az állítás — amelyből ti. valamely dialektikus vita alkalmával ki akarunk indulni — valamilyen ismeretlen tétel, de a feltevés mégis megtörténik *jóllehet a tanuló* (azaz a beszélgetés másik résztvevője) *nem járul hozzá, akkor „aitéma"-ról beszélünk.*[83]

Az „aitéma" tehát a vitának olyan kiinduló tételét jelöli, amelynek elfogadását az egyik fél ugyan „kéri" vagy „követeli", de amelyhez a másik fél *nem okvetlenül járul hozzá.* — Látni fogjuk majd később, hogy az „aitéma" szónak mint a dialektika terminus technicusának ez a jelentése menynyiben alkalmazható az euklidészi posztulátumokra. Egyelőre azonban beérhetjük azzal a megállapítással, hogy az euklidész-*utáni* görög matematika terminológiájában mind az „aiteó" *(αἰτέω)* ige, mind pedig az „aitéma" főnév egyszerűen csak szinonímája volt a „hypotithesthai" *(ὑποτίθεσθαι),* illetőleg „hypothesis" kifejezéseknek.[84]

2. AZ „AXIÓMA" SZÓ JELENTÉSE

Ha meg akarjuk állapítani az „axióma" *(ἀξίωμα)* szónak mint matematikai terminusnak eredeti pontos jelentését, akkor mindenekelőtt a következő fontos körülményt kell figyelembe vennünk:

Azok az ismert ókori kísérletek, amelyek a matematikai „axióma" lényegét vagy nevét akarják megvilágítani, kétségtelenül mind ARISTOTELÉS hatása alatt állanak.

Bőségesen igazolható ez az utóbbi állítás akár PROKLOS Euklidés-kommentárjából is. Egy alkalommal pl. azt olvassuk nála: „Egyesek pontosabban elhatárolják az *axiómát* a kijelentő állítástól, és ezzel a szóval a közvetlenül, önmagában is meggyőző és világos tételt *(τὴν ἄμεσον καὶ αὐτόπιστον δ' ἐνάργειαν πρότασιν)* jelölik; így értik ezt a kifejezést ARISTOTELÉS *és a matematikusok,* mert szerintük *axióma* és *közös képzet* („ennoia koiné", ἔννοια κοινή) egy és ugyanaz."[85] — Egy másik alkalommal viszont — ugyancsak ARISTO-

[83] Proclus 76, 17 kk.
[84] Vö. pl. Archimedis Opera (J. L. HEIBERG) II 124; K. v. FRITZ, i. m. 57.
[85] Proclus 194, 4 kk.

TELÉSre hivatkozva — ezt írja PROKLOS: az *„axióma* nem bizonyítható, de mindenki elfogadja az ilyen állítást lelki alkatánál fogva, mégha egyesek vitatkozó kedvükben kétségbe is vonják az ilyent."[86]

Az a gondolat tehát, hogy a matematikai „axióma" közvetlenül, önmagában is meggyőző és világos tétel — *és hogy az ilyesmit csak az öncélú vita kedvéért szokták egyesek kétségbevonni* — ARISTOTELÉStől származik. Ez az utóbbi, két gondolatjel között kiemelt állítás — amely egyébként távolról sem állja meg a helyét — messzemenően befolyásolta mágának a terminusnak, az „axióma" szónak a megértését is. Világosan kitűnik ez azokból a szavakból, amelyekkel PROKLOS elkezdi az euklidészi axiómákra vonatkozó magyarázatát; ő ugyanis előbb szó szerint idézi azt az öt euklidészi axiómát, amelyet ő is hitelesnek tart, majd így folytatja: *ταῦτ' ἐστὶ τὰ κατὰ πάντας ἀναπόδεικτα καλούμενα ἀξιώματα, καθόσον ὑπὸ πάντων οὕτως ἔχειν ἀξιοῦται καὶ διαμφισβητεῖ καὶ πρὸς ταῦτα οὐδείς.*[87] Magyarra ezt az idézetet valahogy így fordíthatnánk: „Ezek az ún. bizonyíthatatlan axiómák; *axiómák* pedig azért, mert mindenki *igaznak tartja* őket, és nem is kételkedik bennük érvényességüket illetően senki."[88] — Ez a fordítási kísérlet, persze, jóval bőbeszédűbb mint az eredeti, és távolról sem érzékelteti PROKLOS magyarázatának szójátékszerű tömörségét. PROKLOS ugyanis magát az „axióma" szót is meg akarja magyarázni azzal, hogy utal a név etymonjára, az *ἀξιόω* igére, illetőleg ennek az igének egyik jelentésére: „igaznak tart" *(οὕτως ἔχειν ἀξιόω).*

Nem kétséges, hogy PROKLOS magyarázata — legalább elvben — helyes. Az „axióma" főnév csakugyan az *ἀξιόω* ige származéka; ha tehát meg akarjuk érteni a főnév pontos jelentését, az ige jelentéséből kell kiindulnunk. — De vajon ezt tette-e PROKLOS? — Nyilvánvaló, hogy *nem,* mint ahogy ez éppen az előbbi idézetből kétségtelenül megállapitható. Ahelyett ugyanis, hogy elfogulatlanul *kereste* volna a vizsgált szó eredeti jelentését, ragaszkodott előre megfogalmazott naiv és téves elképzeléséhez, és csak ezt akarta igazolni, amikor az „axióma" szó állítólagos etymonjára, az *ἀξιόω* ige idézett jelentésére („igaznak tart") hivatkozott.[89] Az a naiv és téves elképzelés pedig, amelyhez PROKLOS ezúttal is ragaszkodott, nem egyéb, mint a már előbb is említett arisztotelészi gondolat: a matematikai „axióma" érvényességét senki komolyan kétségbe nem vonhatja; ha egyesek mégis kétségbevonják az ilyen matematikai axiómákat, akkor ez csak az értelmetlen és öncélú vitatkozás kedvéért történik. Ezt a gondolatot képviselte PROKLOS etymológiája, ezért származtatta az „axióma" főnevet az *ἀξιόω* = „igaznak tart" igéből.

[86] Uo. 182, 17 kk.
[87] Uo. 193, 15—17.
[88] Vö. P. L. SCHÖNBERGER fordításával: „Proklus Diadochus, Euklid-Kommentar" (herausg. von M. STECK, Halle-Saale 1945) 302.
[89] Az igének ehhez a jelentéséhez lásd a Pape-szótárban (1849) felsorolt helyeket.

De ARISTOTELÉSnek a matematikai axiómákról alkotott *téves* elgondolása nemcsak az antik theorétikusokat vezette félre; ugyanilyen károsan befolyásolja ez még ma is a matematika történetiróit. A közelmúltban pl. az egyik jól ismert kutató, K. v. FRITZ[90] lényegében ugyanúgy magyarázta az „axióma" terminust, mint PROKLOS az i. sz. V. században. A különbség szinte csak annyi, hogy a modern kutató az ἀξιόω igének egy valamivel régebbi jelentésére hivatkozott („einschätzen", „für würdig halten"), s ebből akarta levezetni az „axióma" terminusnak azt a matematikai értelmét, amelyet hallgatólagosan ő is éppen olyan „közismertnek", „természetesnek" vett, mint annak idején PROKLOS.

Ezzel az ARISTOTELÉS óta hagyományossá és általánossá lett szómagyarázattal szemben a következő súlyos kifogások támaszthatók:

1. Mint könnyen kimutatható, az „axióma" szó mint terminus technicus éppenúgy a *dialektikából* került át a matematikusok szaknyelvébe, mint a „hypothesis", „horos", „aitéma" stb. kifejezések. Ezért *félrevezető* olyan etymológiai „magyarázatot" keresni e szó jelentésére, amely a legjobb esetben is csak e terminus állítólagos matematikai értelmét világíthatná meg. Ha e terminus eredeti matematikai értelmét keressük, abból kell kiindulnunk: milyen értelemben használták ugyanezt a kifejezést a *dialektikában,* mert valószínű, hogy eredetileg a matematikában is ugyanaz lehetett az értelme. Márpedig bizonyos, hogy ennek a terminusnak *a dialektikában sohasem volt az az értelme, amelyet* ARISTOTELÉS *óta is csak a matematikában tulajdonítottak neki.*

2. Megvannak a nyomai annak is, hogy e szónak eredetileg a matematikán *belül* sem volt az az értelme, amelyet PROKLOS tulajdonít neki. Kimutatható, hogy az „axióma" terminusnak PROKLOSnál is olvasható *új értelmezése* csak ARISTOTELÉS nyomán lett általánossá.

E fejezetben — éppenúgy, mint az előbb az „aitéma" esetében — egyelőre csak a szó jelentését magyarázzuk meg. Az euklidészi „axiómák" részletesebb tárgyalására később térünk majd vissza.

Valójában egyáltalán nem nehéz megállapitani: mit jelentett az „axióma" szó a *dialektika* terminológiájában? K. v. FRITZ pl. legutóbb ezt írta erről már előbb is említett dolgozatában: „ARISTOTELÉS gyakran használja az „axióma" szót egyszerűen *feltevés, vélemény* vagy *tantétel (Annahme, Meinung, Lehrstück)* értelemben is. A szónak ez a jelentése könnyen érthető az ige aristotelés-előtti jelentésfejlődéséből."[91] — Ezt a megállapitást minden további nélkül magunkévá tehetjük. De még tovább vezet bennünket K. v. FRITZnek

[90] K. v. FRITZ, i. m. 29 kk.
[91] Uo. 35.

egy másik, ugyancsak helyes megjegyzése: „ARISTOTELÉS a Topikában a dialektikus kérdés-felelet játék jellemzése során az ἀξιοῦν igét gyakran arra a tételre vonatkoztatva használja, amelyről a kérdező azt reméli, hogy ezt a felelő is elfogadja. Ha az elfogadás bekövetkezik, akkor ezt a τιθέναι igével jelölik (vö. pl. 155 b 30 kk.; 159 a 14 kk et passim). Ha az ἀξιοῦν-ra a τιθέναι következik, mehet tovább a dialektikus következtetés."[92] Nagy egészében még ezzel a jellemzéssel is egyetérthetünk.

A baj inkább ott van, hogy K. v. FRITZ nem érti magát az ἀξιοῦν igét abban az összefüggésben, amelyet e legutóbbi két idézetben nagyjából helyesen jellemzett. Ahelyett ugyanis, hogy ennek az igének „eredeti" jelentésére hivatkoznánk („einschätzen, für würdig halten"), okosabb lesz elővennünk bármelyik megbízhatóbb görög szótárt (pl. Papet), s mindjárt kiderül belőle, hogy van ennek a szónak olyan közismert jelentése is, mint: „kérni, kívánni, követelni" *(bitten, verlangen, fordern).*[93] Az ἀξιόω igének ez az utóbbi jelentése az V. és IV. században annyira általános volt, hogy ezt igazában még bizonyítani sem kell. Inkább csak példaképpen idézem a következő két Platón-helyet: Resp. III 406 D: παρὰ τοῦ ἰατροῦ φάρμακον ἀξιοῦν „az orvostól orvosságot *kérni*"; Apol. 19 D: ἀξιόω ὑμᾶς ἀλλήλους διδάσκειν „*kérlek* benneteket, világosítsátok föl egymást". — Nyilvánvaló, hogy éppen ezt jelenti az ἀξιόω ige azokon az Aristotelés-helyeken is, amelyekre K. v. FRITZ az előbbi idézetben hivatkozott: a beszélgetés egyik résztvevője (a „kérdező") azt *kéri* a másiktól (a „felelőtől"), hogy valamilyen tételt közösen elfogadjanak. Ha pedig a másik hozzájárul ehhez a kéréshez, akkor ezt éppen azért jelölhetik a τιθέναι igével, mert ettől kezdve a *kért (követelt)* tétel lesz a beszélgetés „hypothesise".

Kézenfekvő, hogy eredetileg az „axióma" főnév sem jelentett egyebet a dialektika terminológiájában, mint éppen „*követelést*" vagy „*követelményt*". Megvolt ennek a szónak ugyanez a jelentése a dialektikán kívül is. SOPHOKLÉS pl. „axiómá"-nak mondta az istenek *követelését.*[94] Sőt az „axióma" vagy „axiósis" *(ἀξίωσις)* szó jelentett *kérvényt*, írásbeli *folyamodványt* is.[95] — A szónak *ebből* az alapjelentéséből könnyen levezethető ennek a terminusnak egyéb értelmi árnyalata is a dialektika terminológiájában: „*axióma*" az az állítás,

[92] Uo. 32. lap 32. jegyzet.

[93] Nem óhajtom kétségbevonni, hogy ennek az igének „kérni, követelni" jelentése csakugyan kifejlődhetett a K. v. FRITZ által hangsúlyozott „ősjelentésből" („für würdig halten"). De mégis félreértésre adhat alkalmat, ha ezt a *pozitív* értelmű „ősjelentést" a szó további jelentésfejlődésében is hangsúlyozzuk. Mert ez az ige kimutathatóan nagyon sokszor éppen a „*hamis* követelést", ill. „*hamis* feltevést" jelölte, pl. Her. 6, 87; Plat., „Menexenos" 239 stb.

[94] Oidipus Col. 1451.

[95] Lásd a Pape-szótárban felsorolt helyeket.

amelynek elfogadását az egyik beszélgető *kéri, követeli* — éppen úgy, mint az előbb tárgyalt „aitéma" —, ezért *„axióma"* az *állítás feltevés, vélemény, tantétel* is.

Nyomatékosan hangsúlyozom, hogy a régebbi, aristotelés-előtti szóhasználat szerint *nem volt* ennek a kifejezésnek olyan jelentésárnyalata, mintha az „axiómá"-nak nevezett „követelés" vagy „követelmény" *könnyen teljesíthető* lett volna, mintha „axióma" a „hitelt érdemlő" vagy a „természetszerűen igaznak tartott" feltevés volna. Nem, éppen ellenkezőleg! Az a benyomásunk, mintha „axióma" a dialektikában — éppenúgy mint az „aitéma" is — éppen az a „követelés" lett volna, amelyhez a másik partner *nem okvetlenül járult hozzá.* Ezt látjuk pl. a következő Platón-idézetből:[96]

„Hiszen tudod, hogy a matematikusok kinevetnék azt, aki az *egyet* fel akarná osztani, és semmiképpen sem járulnának hozzá kísérletéhez. Mert ha te az *egyet* osztani akarnád, ők inkább megsokszoroznák ugyanazt, mert mindenképpen el akarnák kerülni, hogy az, ami *egy*, ne egy, hanem sok legyen. — S ha aztán valaki megkérdezné tőlük: Ugyan miféle számokról beszéltek, ti különös emberek? Hát hol van olyan *egy*, amilyennek ti *követelitek (περὶ ποίων ἀριθμῶν διαλέγεσθε, ἐν οἷς τὸ ἓν οἷον ὑμεῖς ἀξιοῦτε ἐστι)?* Valami önmagában teljesen egyforma, különbség nélküli, amelynek részei sincsenek? — Vajon mit felelnének erre a kérdésre? — Nemde azt, hogy ők a *csak* gondolatban létező számokról beszélnek, azokról, amelyek másképp, mint gondolati úton meg se közelíthetők."

Látjuk tehát, hogy a matematikusok által *„követelt"* (posztulált) „egy" fogalom valami olyasmi, amit a köznapi gondolkozás nem egykönnyen tesz magáévá. Az *ἀξιόω* szónak ez az itt idézett platóni használata is arra mutat, hogy az „axióma" eredetileg aligha volt valami „önmagában is evidens", „mindenki által természetesnek tartott követelés, állítás".

Az „axióma" szó tehát, mint a görög dialektika terminusa, pontosan ugyanazt jelentette, mint szinonímája, az „aitéma" kifejezés. A dialektika terminológiája szerint egyáltalán semmi különbség sincs olyan kifejezések között, mint *αἰτέω, αἴτημα* egyfelől és *ἀξιόω, ἀξίωμα* másfelől.

Ugyanez a megállapítás érvényes az antik matematikára is — feltéve, hogy egyelőre nem vesszük figyelembe magát EUKLIDÉSt és a hozzá kapcsolódó antik tudományos irodalmat. Az „axióma" szó a matematikusoknál is pontos szinonímája az „aitéma" kifejezésnek. Ezt nemcsak az egyes matematikusok szóhasználatából állapíthatjuk meg — különösen pl. ARCHIMÉDÉSéből, akinél a „hypothesis", „hypokeimenon" *(ὑποκείμενον)*, „aitéma", „axióma", „lambanomenon" *(λαμβανόμενον)* stb. szavak *azonos jelentésű szinonímák*[97]

[96] Resp. VII 526.
[97] Vö. K. v. FRITZ, i. m. 57.

—, hanem ugyanezt hangsúlyozza maga PROKLOS is. PROKLOS ugyanis egy alkalommal — miután idézett egy példát arra, hogy ARCHIMÉDÉS az *αἰτέω* terminust egy olyan esetben is használja, amikor ő, PROKLOS maga, inkább „axiómát" mondana — félreérthetetlenül leszögezi: „Mások ugyan a matematika minden kiinduló tételét *axiómának* nevezik, mint ahogy a levezetett tételekre is egységesen a *theóréma* nevet alkalmazzák."[98]

Összefoglalva két legutóbbi fejezetünket, megállapíthatjuk tehát:

1. Az „axióma" szó a dialektika terminológiájában ugyanazt jelentette, mint az „aitéma" kifejezés; mind a két terminus a dialógus egyik résztvevőjének olyan *követelését (feltevését, állítását)* jelölte, amelyhez a másik fél nem okvetlenül járult hozzá.

2. Amiképpen a dialektikában, ugyanúgy a matematikában is szinonímája volt az „axióma" szó az „aitéma" terminusnak. Ez az utóbbi állításunk természetesen csak akkor érvényes, ha eltekintünk magának EUKLIDÉSnek a művétől és az ehhez kapcsolódó antik tudományos irodalomtól. (Hiszen EUKLIDÉSnél ez a két terminus két különálló princípium-csoportot jelöl, amely két csoportot nemcsak egymáshoz viszonyítva különböztettek meg, hanem ugyanakkor elválasztották őket a *definícióktól* is!) Azonkívül úgy látszik, ez a két terminus — „aitéma" és „axióma" — az euklidész-*utáni* matematikában *már nem is volt olyan korlátozó értelmű,* mint a dialektikában. Nincs nyoma annak, hogy az „aitéma" vagy „axióma" terminus még az euklidész-*utáni* matematikában is olyan be-nem-bizonyított állítást jelölt volna, amelyet megkülönböztettek a „homologémá"-tól, vagy „hypothesis"-től. A későbbi matematika nem tett már különbséget „hypothesis" és „aitéma" vagy „axióma" között.

Az eddigiekben természetesen a két összehasonlított terminusnak — az „aitémá"-nak és „axiómá"-nak — még csak a *szójelentését* magyaráztuk meg. A továbbiakban meg kell majd vizsgálnunk azt is: mennyiben érvényes mindaz, amit e két szóról elmondtunk, az euklidészi posztulátumokra és axiómákra. Előbb azonban áttekintjük még a következő fejezetben azokat a legfontosabb ókori magyarázó kísérleteket, amelyek megpróbáltak fényt deríteni az euklidészi posztulátumok és axiómák különbségére.

3. ANTIK MAGYARÁZÓ KÍSÉRLETEK

Bocsássuk előre, hogy a kitűnő ókori kommentátor, PROKLOS, bár több ízben megpróbál fényt deríteni arra a kérdésre, hogy valójában mi is hát a különbség az euklidészi posztulátumok („aitémata") és axiómák között, mégsem ad igazán megnyugtató, történeti jellegű magyarázatot erre a problé-

[98] Proclus 181, 20 kk.

mára, jóllehet kísérletei — több szempontból — figyelemre méltóak és tanulságosak. Az alábbiakban röviden ismertetem PROKLOS három magyarázó kísérletét.

1. PROKLOS egyik, látszólag nagyon találó megkülönböztetése azt állítja, hogy az euklidészi *posztulátumok* csak a geometriára vonatkoznak, az *axiómák* viszont minden mennyiséggel foglalkozó tudományban érvényesek.[99] — Nyilvánvaló, hogy e megkülönböztetés egyik része feltétlenül helytálló: EUKLIDÉS posztulátumai mind geometriai jellegűek. Viszont az előbbi állítás másik része — hogy ti. az euklidészi *axiómák* minden mennyiséggel foglalkozó tudományban érvényesek — már több szempontból kifogásolható. Először is: van az euklidészi *axiómák* között *két* olyan tétel, amelyekről azonnal megállapítható, hogy ezek tisztára geometriai jellegűek; a 7. „koiné ennoia" ti. így hangzik: *„az egymásra illők* (azaz: a kongruens idomok) *egyenlők egymás között"*; a 9. viszont: *„két egyenes nem zár be felületet"*. Ennek a két tételnek csak a geometriában van értelme. Ha tehát mégis el akarnánk fogadni az előbbi magyarázatot az euklidészi *posztulátumok* és *axiómák* különbségéről, kénytelenek volnánk figyelmen kívül hagyni ezt a két idézett „koiné ennoiá"-t; ebben az esetben ugyanis a többi euklidészi „axióma" mind olyan tétel, hogy csakugyan elmondható róla: nemcsak a geometriában, hanem minden mennyiséggel foglalkozó tudományban egyformán érvényes.

Van azonban az előbbi magyarázatnak egy másik gyöngéje is. Feltéve ugyanis, hogy hajlandók volnánk figyelmen kívül hagyni azt a két idézett axiómát, amelyre az előbbi megkülönböztetés sehogy se alkalmazható, és feltéve, hogy valóban abban látnánk az EUKLIDÉSnél olvasható „aitémák" és „axiómák" különbségét, hogy az előbbiek csak a geometriára vonatkoznak, az utóbbiak, az „axiómák" viszont — mint egyenlőségi tételek — jóval általánosabb jellegűek, minden mennyiséggel foglalkozó tudományban egyformán érvényesek, azonnal fölmerül bennünk egy másik, még súlyosabb kétely. Kérdés ti.: miért sorolja fel EUKLIDÉS előbb a speciálisan geometriai jellegű „aitéma"-kat és csak ezek *után* a jóval általánosabb jellegű „axióma"-kat, ha csakugyan ő is abban látja e két princípium-műfaj különbségét, amiben PROKLOS előbb idézett magyarázata? Az euklidészi sorrend aligha támogatja az ismertetett magyarázatot. — Kérdés az is: vajon csakugyan figyelemmel voltak-e már akkor is, amikor az euklidészi „axióma"-kat először megfogalmazták, arra, hogy e tételek nagy része nemcsak a geometriára, hanem pl. az aritmetikára is érvényes: Az EUKLIDÉSnél olvasható aritmetikai tételek ugyanis bizonyítási részükben *sohasem* hivatkoznak egyenlőségi axiómára. Természetesen nagyon jól tudjuk, hogy ma már elképzelhetetlen az aritme-

[99] Uo. 182, 6 kk., vö. 58, 7 kk.

tika egyenlőségi tételek nélkül; sőt a modern tudománynak olyan egyenlőségi tételeket is ki kellett mondania, amelyeket EUKLIDÉS maga sohasem fogalmazott meg, pl. az egyenlőség *reflexivitását* és *szimmetriáját*. De semmi bizonyítékunk sincs arra, hogy EUKLIDÉS egyenlőségi tételeit az aritmetikában is használni akarta volna. Inkább az lehet a benyomásunk, mintha EUKLIDÉS „axiómá"-it *csak* a geometriára értené.[100]

Úgy látszik tehát, PROKLOSnak ez az elsőként említett magyarázó kísérlete olyan időkből származhatik, amikor már az ókoriak maguk sem voltak egészen tisztában azzal: voltaképpen miért is különbözteti meg EUKLIDÉS az „aitéma"-t az „axióma"-tól?

2. Egy másik alkalommal PROKLOS azt állítja, hogy tulajdonképpen háromféle *„axióma"* van: 1. aritmetikai, 2. geometriai és 3. olyan „axióma", amely egyformán érvényes mind a két tudományágban.[101] Mind a három féle axiómát azonnal illusztrálja is egy-egy példával; az „aritmetikai axiómára" példája a következő tétel: „az egység osztója minden számnak". — Nem szükséges részletesebben foglalkoznunk ezzel a Proklos-hellyel, mert amúgyis megállapitható már az első pillantásra, hogy ennek az eszmefuttatásnak egyáltalán semmi köze sincs EUKLIDÉS szövegének történeti interpretációjához. PROKLOS példája az „aritmetikai axiómára" olyan tétel, amely EUKLIDÉSnél egyáltalán sehol sem szerepel. (Magától értetődő aritmetikai állítás ez, amely eo ipso következik a *„szám"*-nak euklidészi meghatározásából: „Elemek" VII def. 2.: „a szám egységekből összetett halmaz".) „Axióma"-nak PROKLOS ezt csak azért nevezte el, hogy egyáltalán legyen valami értelme hármas beosztású „rendszerének". Pár sorral alább bemutatja, hogy ugyanez a „hármas beosztás" alkalmazható az „aitémák"-ra is. Ezzel azonban teljesen föl is forgatja azt a rendszert, amely szerint EUKLIDÉS műve csoportosítja a princípiumokat; a prokloszi hármas beosztású axiómák között lesznek bőségesen euklidészi „aitémák" is, és megfordítva ugyanúgy. Ennek az „ad hoc" megkísérelt rendszerezésnek éppoly kevés köze van magának EUKLIDÉSnek a szövegéhez, mintahogy ARISTOTELÉSnek a matematikai princípiumokról adott magyarázatai is csak *részben* alkalmazhatók az „Elemek"-re.[102]

3. Több figyelmet érdemel az utóbbinál PROKLOSnak egy harmadik magyarázó kisérlete. Két alkalommal ugyanis[103] az euklidészi „aitémák" és „axió-

[100] O. BECKER írja (Grundlagen der Math. 90): „Diese Sätze (az euklidészi axiómák) sind ganz allgemein ausgesprochen, beziehen sich aber wohl zunächst nur auf Raumgrössen, wie Strecken, Winkel, Flächen und dgl. Darauf scheint wenigstens Axiom 7 hinzuweisen."

[101] Proclus 184, 11 kk.

[102] Lásd a Függeléket.

[103] Proclus 178, 12 kk., részletesebben: 181, 5 kk. Vö. A. FRENKIAN, Le postulat chez Euclide etc. 19, 1.

mák" különbségét összehasonlítja a *tételek* („theorémák", *θεωρήματα*) és *feladatok* („problémák", *προβλήματα)* különbségével oly módon, hogy az „aitéma"-kat a *feladatok*kal, az „axióma"-kat pedig a *tételek*kel állítja párhuzamba. E két hely közül a részletesebb magyar fordításban így hangzik: „az *aitéma* az elé a feladat elé állít bennünket, hogy valamely accidens bemutatásához szerkesszünk, konstruáljunk valamit, ami könnyen és egyszerűen szerkeszthető; az *axióma* viszont [az elé a feladat elé állít bennünket], hogy nevezzünk meg valamely lényeges accidenst, amely a hallgató számára minden további nélkül ismeretes, mint pl. az, hogy a tűz meleg, vagy valamilyen más nagyon világos igazság, amely igazságot ha valaki kétségbevon, vagy azt mondjuk rá, hogy nincs józan esze, vagy azt, hogy fenyítést érdemelne." Mindenekelőtt állapítsuk meg, hogy a posztulátumoknak a feladatokkal és az axiómáknak a tételekkel való párhuzamba állítása *csak* bizonyos megszorításokkal találó. Mint idézetünkből is látható, PROKLOS az „aitéma"-t nem általában a *feladat*tal *(πρόβλημα),* hanem csak a *konstrukciós* feladattal akarja összehasonlítani. (Érdemes lesz egyszersmind leszögeznünk azt is, hogy a görög matematikai terminológia nemcsak a konstrukciós feladatot, hanem a bizonyítási feladatot is *πρόβλημα*-nak nevezte. Vannak ilyen bizonyítási feladatok EUKLIDÉS szövegében is, pl. Elem. X. App. 27. ed. H., és természetesen bármely tétel is megfogalmazható bizonyítási feladat formájában.) — Ahhoz azonban, hogy PROKLOS összehasonlítása érvényes legyen, nem elég a „feladat" terminust „*konstrukciós* feladat"-nak értenünk; a posztulátumok közül is csak az első háromra szabad gondolnunk, mert csak ezek igazi *konstrukciós* posztulátumok. — Látni fogjuk majd később, hogy az „aitéma" princípium-műfajnak a *konstrukciós* feladatokkal való összehasonlítása csakugyan olyan szempont, amely a történeti kutatást is helyes nyomra vezetheti. Ennek ellenére azonban PROKLOSnak ez a harmadik magyarázata sem helytálló teljes egészében. Hiszen az „axióma" szóról kiderítettük már, hogy ez a terminus eredetileg semmi esetre sem jelölhetett „magától értetődő, természetes igazságot", márpedig PROKLOS legutóbbi idézete éppen azt hangsúlyozza, hogy EUKLIDÉS axiómáit épeszű ember nem vonhatja kétségbe, az ilyesmit csak az értelmetlen, öncélú vita kedvéért szokták egyesek kétségbevonni.

Ha mármost áttekintjük a felsorolt magyarázó kísérleteket, be kell látnunk, hogy ezek közül egyik sem megnyugtató. Nyilvánvaló, hogy ezek a kísérletek olyan időben keletkeztek, amikor már *nem értették* EUKLIDÉS princípium-felsorolási rendszerét. Ezért aztán hol olyan rendszerekkel kísérleteztek, amelyeknek egyáltalán semmi közük sincs EUKLIDÉShez — ilyen pl. a 2. pontban említett magyarázó kísérlet —, hol meg gondos megfigyeléssel igyekeztek megállapítani: mi lehet a különbség „aitéma" és „axióma" között; erre az utóbbira példa az említett 1. és 3. „magyarázat". Csakugyan, ez az alapos megfigyelés részben lényeges különbségeket is észrevett, illetőleg tett egy-egy találó megállapítást különösen az „aitéma"-kra; ilyen pl. az, hogy az 1. magyarázat megállapítja: az „aitémák" mind geometriai jellegű tételek; ugyanígy nyomravezető a 3. kísérletből is az az állítás, hogy a posztulátumoknak — legalábbis egy része valamiképpen a geometriai konstrukcióval függ össze. — Teljes egészében azonban egyik magyarázat sem fogadható el. A történeti kutatás nem állhat meg ezeknél a kísérleteknél, más eszközökkel kell tisztáznia az euklidészi „aitémák" és „axiómák" problémáját.

4. Az euklidészi „aitémák" problémája

A következőkben arra a kérdésre keresek választ: mennyiben világítja meg az „aitéma" terminus szójelentésére adott magyarázatunk („aitéma" = = „olyan követelés, feltevés, állítás, amelyhez a másik fél nem okvetlenül járul hozzá") az euklidészi posztulátumok eredetét? — Hogy e kérdésre felelhessünk, meg kell előbb ismerkednünk az öt euklidészi posztulátum történeti problémájával. E posztulátumok így hangzanak:

„Követeltessék,

1. hogy bármely pontból bármely más ponthoz egyenest húzhassunk,
2. hogy bármely egyenes szakaszt folytatólagosan meghosszabbíthassunk,
3. hogy bármilyen középpontból bármilyen sugárral kört rajzolhassunk,
4. hogy minden derékszög egyenlő legyen egymással,
5. és hogy, ha valamely egyenessel metszünk két másik egyenest oly módon, hogy a belül és a metsző egyenesnek ugyanazon az oldalán fekvő szögek összege kisebb, mint két derékszög, akkor a két egyenes végtelen meghosszabbításának metszéspontja a harmadik metsző egyenesnek azon az oldalán legyen, amelyen a két derékszögnél kisebb összegű szögek fekszenek.

A történeti irodalom ezeknek a posztulátumoknak az értelmét és jelentőségét — legalábbis H. G. Zeuthen egyik alapvető munkája óta[104] — elég egységesen ítéli meg. O. Becker pl. legutóbb ezt írta róluk: „A posztulátumok feladata az, hogy biztosítsák olyan geometriai alapformák matematikai egzisztenciáját, amely alapformákból a további létező geometriai idomok konstruktív úton felépíthetők; ilyen geometriai alapformák az egyenesek, körök és metszéspontjaik. A híres 5. posztulátum pl. a konvergáló egyenesek metszéspontjának létezését biztosítja."[105]

[104] H. G. Zeuthen, Die geom. Konstruktion als Existenzbeweis, *Math. Ann.* 47, 1896, 225—228; *Geschichte der Math. im Altertum und Mittelalter*, Kopenhagen 1896.

[105] O. Becker, *Das math. Denken der Antike*, Göttingen 1957, 19.

De korántsem ilyen egységes már a szakirodalom annak a másik kérdésnek a megítélésében, hogy vajon milyen korból származnak ezek a posztulátumok? P. TANNERY pl. — kiindulva abból a megfigyelésből, hogy ARISTOTELÉS a matematikai posztulátumokat egyáltalán nem említi, és hogy a szerint a meghatározás szerint, amelyet ARISTOTELÉS ad, az „aitéma" még inkább csak a dialektika terminus technicusa lehet — úgy gondolta, hogy legalábbis az első három posztulátum magától EUKLIDÉStől származhatik.[106] Ugyanakkor TANNERY azt a másik elgondolását, hogy a 4. és 5. posztulátum *nem származhatik* EUKLIDÉStől, elég meglepően azzal okolta meg, hogy ezek az utóbbi tételek „nem is méltóak EUKLIDÉShez".[107] — TH. HEATH viszont éppen a 4. és 5. posztulátumot tulajdonította EUKLIDÉSnek, bár elképzelhetőnek tartotta azt is, hogy mind az öt posztulátum magától EUKLIDÉStől származik.[108] — Úgy látszik tehát — bár az egyes posztulátumok eredetét különbözőképpen ítélik meg — TANNERY óta alakult ki az a „communis opinio", hogy a geometriai posztulátumok, vagy legalábbis egy részük, magának EUKLIDÉSnek köszönhetők. Ebben az értelemben írta J. E. HOFMANN is kis összefoglaló munkájában: a posztulátumok magának EUKLIDÉSnek lényeges metodikai kiegészítései lehetnek.[109] — Csak a legutóbbi időkben jelentkeztek olyan törekvések, amelyek megpróbálták a posztulátumokat is az euklidész-*előtti* időkre datálni. K. v. FRITZ pl. azt állította — hivatkozván PROKLOS egyik megjegyzésére (Procl. p. 179) —, hogy EUKLIDÉS első három konstrukciós posztulátuma PLATÓN tanítványától, SPEUSIPPOStól származnék.[110] Bár e gondolat — mint mások is megjegyezték már[111] — elhamarkodott, semmivel sem igazolható feltevés, mégis figyelemre méltó a tendencia maga.

Az utóbbi időben ugyanis egyre több olyan kísérlettel találkozunk, amely az euklidészi posztulátumok előzményeit kutatja. O. BECKERnek sikerült is legutóbb — rendkívül plauzibilis formában — rekonstruálnia az euklidészi 5. és ezzel együtt a 4. posztulátumnak is feltehető „eredeti formáját".[112] Ez a rekonstrukció ugyan önmagában még egyáltalán nem bizonyíték arra, hogy csakugyan voltak posztulátumok már az EUKLIDÉSt megelőző korban is; de természetesen egy ilyen kísérletnek csak akkor van értelme, ha feltesszük, hogy *nem* EUKLIDÉS teremtette meg az „aitéma" nevű princípium-műfajt. —

106 P. TANNERY, *Mém. Scient.* II 48—63.

107 Vö: A. FRENKIAN, i. m. 15 és C. THAER, Antike Mathematik 1906—1930 (*Jahresber, über die Fortschr. der klass. Altertumswiss.* begr. von C. BURSIAN, herausg. von A. THIERFELDER, Jahrg. 1943 II Bd. 283—284) 22.

108 TH. HEATH, *A History of Greek Mathematics*, Vol. I Oxford 1921 375.

109 J. E. HOFMANN, *Gesch. d. Math.*, I. Teil, Samml. Göschen, Bd. 226, Berlin 1953 32.

110 K. v. FRITZ, i. m. 97.

111 Vö. O. BECKER, Archiv f. Begriffsgesch. IV 213.

112 Uo. 212—218.

Éppen ezen a ponton akarok belekapcsolódni az eddigi kutatásokba. A következőkben mindenekelőtt tisztázni akarom az „aitéma" princípium-műfaj eredetét. E most kezdődő vizsgálat során *nem tárgyalom* az 5. és 4. posztulátum kérdését, minthogy ez — mint már mások is észrevették — külön probléma. Figyelmünket tehát az első három konstrukciós posztulátumra összpontosítjuk. Kérdés: melyik korból származhatnak e posztulátumok?

5. OINOPIDÉS KONSTRUKCIÓI

A történeti kutatás valójában már régen megközelítette a helyes választ legutóbbi kérdésünkre. Tulajdonképpen nem is kell ezúttal egyebet tennem, mint összeállítanom a régebbi kutatóknak néhány erre vonatkozó megállapítását, s aztán levonom belőlük a magától adódó következtetést.

O. BECKER ugyanis, miután — amint szavait föntebb idéztük is — jellemezte az euklidészi posztulátumokat, hogy ti. ezek olyan geometriai alapformák létezését mondják ki, amely alapformákból konstruktív úton fölépíthetők a további létező idomok, ezt írja még:

„A matematikai exisztenciának ez a konstrukciós felfogása még az V. századból, OINOPIDÉStől származik; ő volt az, aki először hajtott végre olyan elemi konstrukciókat, mint pl. adott pontból merőleges lebocsátását valamely adott egyenesre, *csak* körzővel és vonalzóval. Úgy látszik, a platóni iskolában mindenütt, ahol csak tehették, ragaszkodtak ezeknek a geometriai segédeszközöknek, a körzőnek és a vonalzónak a kizárólagosságához."[113]

Rendkívül fontos ez az utalás OINOPIDÉSre, ha az euklidészi posztulátumok előzményeit kutatjuk. PROKLOS ugyanis Euklidés-kommentárjában kétszer is hivatkozik OINOPIDÉSre egy-egy geometriai konstrukcióval kapcsolatban. E hivatkozások annyira lényegesek számunkra, hogy mind a két hely fordítását idézem.

EUKLIDÉS „Elemeiben" az I. könyv 12. tétele (feladata) így hangzik: „*Bocsássunk valamely adott végtelen egyenesre valamely adott rajta kívül eső pontból merőlegest.*" — Ehhez a tételhez fűzi PROKLOS a következő megjegyzést:[114] „Ezt a problémát először OINOPIDÉS kutatta, mivel hasznát látta az asztronómiában. A merőlegest ő még régiesen *gnómón szerinti vonalnak* hívja, mivel a „*gnómón*" (a napóra mutatója) derékszöget zár be a *horizónnal*." — PROKLOS másik OINOPIDÉSre vonatkozó megjegyzése az „Elemek" I. könyve 23. tételéhez (feladatához) kapcsolódik; e másik tétel így hangzik: „*Szerkesszünk valamely adott egyenes adott pontjába egy megadott egyenesvonalú szöggel egyenlő szöget.*" PROKLOS ehhez a következő megjegyzést

113 O. BECKER, *Das math. Denken der Antike* 19 k.

114 Proclus 283, 7 kk.

fűzi: „Ez is olyan probléma, amelyre, EUDÉMOS tanúsága szerint, először OINOPIDÉS bukkant rá."[115]

Amint látjuk, mind a két probléma (feladat) annyira meglepően egyszerű, hogy az első pillantásra nem is értjük, miért volt egyáltalán érdemes ezekkel kapcsolatban megemlíteni OINOPIDÉS nevét? Csakugyan olyan kezdetleges lett volna még OINOPIDÉS korában is, tehát i. e. 440 körül, a geometria, hogy még ilyen egyszerű szerkesztéseket se ismertek volna?[116] Ez bizony egyáltalán nem valószínű. Hiszen OINOPIDÉS csak alig valamivel idősebb kortársa lehetett annak a chiosi HIPPOKRATÉSnek, akinek rendkívül magasfokú és fejlett geometriai tudását már jól ismerjük.[117] Úgy látszik, másképp kell értenünk PROKLOSnak OINOPIDÉSre vonatkozó megjegyzését is.

TH. HEATHnek erre vonatkozó feltevéseit „három" pontban foglalhatjuk össze. Bár tulajdonképpen mind a három pont csak egyetlenegy állítást tartalmaz három különböző megfogalmazásban, mégis idézem őket mind szerzőjük szavai szerint:[118]

1. OINOPIDÉS lehetett az első, aki az említett feladatokat csak vonalzóval és körzővel oldotta meg;
2. bizonyára ő volt az első, aki ezekre a feladatokra inkább *elméleti*, mintsem gyakorlati megoldást talált;
3. OINOPIDÉS jelentősége abban állhatott, hogy *a módszert elméleti szempontból* tökéletesítette.

Véleményem szerint e feltevések nagyon valószínűek. Tulajdonképpen csak az első ponthoz kell megjegyzést fűznöm. Hogyan értsük azt az állítást, hogy OINOPIDÉS lehetett az első, aki az említett feladatokat csak körzővel és vonalzóval oldotta meg? Forrásunk, PROKLOS egy szóval sem beszél vonalzóról és körzőről! De HEATH feltevése mégsem alaptalan, csak kifejezésmódját kell egy kissé jobban megvilágítanunk. — Nem kétséges, hogy EUKLIDÉSnek az a két konstrukciós feladata (Elem. I. 12 és 23), amely alkalmat adott PROKLOSnak arra, hogy OINOPIDÉSt megemlítse, *csak elméleti szempontból érdekes*. Bizonyos, hogy ugyanennek a két feladatnak *gyakorlati* megoldását már nagyon régen ismerték a görögök előtti időkben is, ugyanúgy, ahogy a vonalzót és a körzőt is nagyon régen használták már a kézművesek az elméleti matematika keletkezése előtt is. Az euklidészi feladatok inkább azt akarják megmutatni: hogyan oldhatók meg ezek a konstrukciós

115 Uo. 333, 5—6.

116 A. D. STEELE, Über die Rolle von Zirkel und Lineal in der griech. Mathematik Quell. u. Studien etc. B 3 (1936) 287 kk.; 304.

117 B. L. V. D. WAERDEN, *Erwachende Wiss.* 213—214.

118 TH. HEATH, i. m. I 175.

problémák az *első három posztulátum alapján.* Gyakorlati szempontból ugyanis az első három posztulátum nem egyéb, mint a vonalzó és körző használatának szentesítése a geometriai konstrukciókban.[119] Bármely pontból húzhatunk bármely más ponthoz egyenest (1. posztulátum), és bármely egyenes szakaszt folytatólagosan meghosszabbíthatunk (2. posztulátum), mert használhatjuk a vonalzót; ugyanígy bármely középpontból bármilyen sugárral kört is rajzolhatunk (3. posztulátum), mert meg van engedve a körző használata is. — Az az állítás tehát, hogy OINOPIDÉS az említett geometriai feladatokat „csak vonalzóval és körzővel oldotta meg", egyértelmű azzal, hogy: OINOPIDÉS *ismerte és tudatosan alkalmazta* EUKLIDÉS *három első posztulátumát.* Sőt valószínű, hogy ezeket a posztulátumokat éppen OINOPIDÉS állította fel, mert különben ugyan mi értelme volna HEATH azon állításának, hogy „bizonyára ő volt az első, aki ezekre a feladatokra inkább *elméleti* mintsem gyakorlati megoldást talált"? És miben állhatott volna különben „a módszer elméleti szempontból való tökéletesítése", ha nem éppen abban, hogy OINOPIDÉS felállította a három első euklidészi posztulátumot? — Ha mégis kétségbevonnánk ezt a magyarázatot és a három első euklidészi posztulátumot későbbi időre datálnánk, akkor kénytelenek volnánk egyszersmind PROKLOSnak OINOPIDÉSre vonatkozó szavait is tévedésnek minősíteni, mert másképp ez a hagyomány megnyugtatóan alig magyarázható.

6. EUKLIDÉS HÁROM ELSŐ POSZTULÁTUMA

De mi értelme volt egyáltalán a posztulátumok felállításának? — Azt hiszem, az a válasz, amelyet erre a kérdésre a történeti irodalom eddig adott, nem egészen megnyugtató. Nagyjából ugyanis a következő gondolatmenettel szokták magyarázni a konstrukciós posztulátumok eredetét.[120] Az antik geometria valóban létezőknek csak azokat az idomokat tartja, amelyek megkonstruálhatók. Ezért kell mindenekelőtt posztulátumokban kimondani azoknak a legegyszerűbb geometriai alapformáknak a létezését — tehát az egyenesekét, körökét és metszéspontokét —, amelyekből a további létező geometriai idomok konstrukciós úton előállíthatók. — Még abban az esetben is, ha ezt a magyarázatot minden fenntartás nélkül magunkévá tennénk, felmerülne a kérdés: mi lehetett a történeti oka annak, hogy a „matematikai exisztenciát" éppen ebben a formában fogalmazták meg? És miért nevezik azokat a tételeket, amelyek a legegyszerűbb geometriai alapformák létezését kimondják, posztulátumoknak, görögül „aitémata"-nak? Hiszen ez a terminus a dialektikában — mint már

[119] Vö. J. E. HOFMANN, i. m. 32.

[120] A következőkhöz lásd O. BECKER, *Mathematische Existenz,* Halle a. d. S. 1927. 130 kk.

láttuk — olyan „követelményt", „állítást" jelölt, amelyhez a másik fél *nem okvetlenül járult hozzá.* Mennyiben érvényes a szó jelentésének magyarázata az euklidészi posztulátumokra?

A három első euklidészi posztulátum olyan egyszerű, könnyen elgondolható követelményt mond ki, hogy kezdetben talán csakugyan hajlandók volnánk kétségbevonni: valóban úgy kell-e érteni ezúttal is az „aitéma" terminust, mint ahogy azt egyik korábbi fejezetünkben magyaráztuk? Ugyan mi oka lehetett volna a dialektikus vita másik partnerének arra, hogy ezekhez a követelményekhez ne járuljon hozzá? — Azt hiszem, ezekre a kérdésekre nagyonis egyértelmű választ adhatunk, ha figyelembe vesszük PROKLOS Euklidés-kommentárjának néhány, éppen a posztulátumokra vonatkozó paszszusát. A következőkben PROKLOS szövegét idézem:

„Az a lehetőség, hogy bármely pontból bármely más ponthoz egyenest húzhatunk, következik abból, hogy a vonal a pont *folyása,* az egyenes pedig egyenletes, irányát-nem-változtató *folyás.* Képzeljük el tehát, hogy a pont egyenletes és legrövidebb *mozgást* végez és így jutunk el a másik ponthoz, s ezzel már teljesült is az első követelmény (= aitéma) minden különösebb gondolati nehézség nélkül. Képzeljük el hasonlóképpen, hogy valamely pont által határolt egyenes szakasz végpontja legrövidebb egyenletes *mozgást* végez, s így teljesül a második aitéma könnyű és egyszerű úton. Ha viszont azt gondoljuk el, hogy valamely egyenes szakasz egyik végpontja nyugalomban marad, míg másik végpontjával *mozgást* végez nyugalomban maradt végpontja körül, akkor teljesült a harmadik követelmény (= aitéma)." [121]

Nem volna érdemes most fennakadnunk azon, hogy ez a Proklos-idézet két olyan definícióra is utal, amelyeket EUKLIDÉS szövege egyáltalán nem őrzött meg számunkra; az egyik definíció ti.: „a vonal a pont *folyása*", a másik pedig: „az egyenes vonal a pontnak egyenletes, irányát-nem-változtató *folyása*". Sokkal érdekesebb ennél most az, hogy PROKLOS az első három euklidészi posztulátum állítólagos „egyszerűségét" bizonyos *mozgásformák* egyszerűségével magyarázza. Csakugyan, az említett posztulátumok „követelménye" mozgás nélkül megvalósíthatatlan. — Dehát valóban olyan egyszerű, problémátlan valami-e a *mozgás,* mint amilyennek azt PROKLOS idézete feltüntetni szeretné? — Igazában még a késői kommentátor, PROKLOS is nagyon jól tudja, hogy az említett mozgásformák korántsem olyan könnyen elgondolhatók. Ez derül ki következő szavaiból: [122]

„Ha meg valaki nehézséget támasztana azzal a kérdéssel: hogyan viszszük be mi a mozgást a geometria mozdulatlan világába, és hogyan állíthatjuk, hogy az, aminek egyáltalán nincs része (ti. a pont) mozog, hiszen

[121] Proclus 185, 8 kk.
[122] Uo. 185, 25 kk.

ez teljességgel lehetetlen, akkor megkérjük az illetőt, ne nehezteljen ránk túlságosan... A mozgás ti., amelyről mi beszélünk, nem anyagi, hanem képzeletbeli (görögül: „fantasztikus”). Csakugyan nem járulhatunk hozzá ahhoz, hogy az, aminek nincs része (a pont) anyagi mozgást végezzen, de képzeletbeli mozgást végezhet. Hiszen ez osztható̇tlan *Nus* (= az Értelem) is mozog, ha nem is éppen a térben stb., stb.”

Szerencsére nem kell interpretálnunk PROKLOS „megnyugtató szavait”, amelyek az idézet vége felé egyre obskurusabbakká lesznek. Számunkra sokkal fontosabb most az a tény, hogy ez a legutóbbi idézet — legalább részben — egy olyan dialektikus vitát reprodukál, amelyben szóhoz jutnak azok a beszélgető partnerek is, akik a posztulált mozgást „elgondolhatatlannak” tartják. PROKLOS ugyan a partnerek kifogását úgy értelmezi, mintha ezek csak a pontnak, a nem-anyagi valaminek a mozgása ellen tiltakoznának, és mintha ez a tiltakozás leszerelhető lenne azzal, hogy van az anyagi mozgáson kívül „képzeletbeli” mozgás is. — De vajon abban az időben, amikor OINOPIDÉS feltehetően megfogalmazta a három első euklidészi posztulátumot — az i. e. V. század közepe táján —, nem valami más meggondolás alapján vonták-e kétségbe egyesek *minden* mozgás elméleti lehetőségét? — Közismert, hogy a dialektika megteremtői, az eleaták ki tudták mutatni a „mozgás” fogalmában az ellentmondást, s ezért minden érzéki tapasztalás ellenére tagadták a mozgás elméleti lehetőségét; éppen azt állították, hogy a mozgás *elgondolhatatlan*, mint ZÉNÓN az V. század első felében tömören megfogalmazta: „a mozgó test sem ott nem mozog, ahol van, sem pedig ott nem mozog, ahol nincs”.

Ha tehát arra gondolunk, hogy az eleai tanítás szerint a „mozgás” ellentmondásos valami, és mint ilyen *elgondolhatatlan*, egyszerre megértjük azt is: miért kellett felállítania OINOPIDÉSnek az első három posztulátumot Mozgás nélkül egyáltalán nem lehetséges geometriai konstrukció. Vagyis, ha *elméletileg* lehetővé akarjuk tenni a konstrukciót, akkor meg kell engednünk legalább azokat a legegyszerűbb mozgásformákat, amelyek feltétlenül szükségesek a legelemibb geometriai formák (egyenesek, körök stb.) létrehozásához. Az első három posztulátum („aitéma”) éppen ezeknek a legegyszerűbb geometriai konstrukcióhoz is múlhatatlanul szükséges mozgásformáknak a megengedését „követeli”. Érthető az is, hogy ezt a „követelményt” nem nevezik „hypothesis”-nek vagy „homologémá”-nak, mert *mozgásról*, azaz ellentmondásos valamiről lévén szó, ezúttal függőben marad a dialektikus vitában résztvevő másik partnernek a hozzájárulása a felállított követelményhez. Csakugyan arról van tehát szó — legalábbis az első három euklidészi posztulátum esetében —, amit PROKLOS ARISTOTELÉSre hivatkozva így fogalmazott meg: „Ha

[123] DIELS–KRANZ, Vorsokratiker, I 29 B 4.

pedig az állítás — amelyből ti. valamely dialektikus vita alkalmával ki akarunk indulni — valamilyen ismeretlen tétel, de a feltevés mégis megtörténik, *jóllehet a tanuló* (azaz a beszélgetés másik résztvevője) *nem járul hozzá, akkor ,aitéma'-ról beszélünk.*"[124]

Ezzel, úgy gondolom, sikerült legalább nagy vonalakban tisztáznunk az euklidészi „aitéma" nevű princípium-műfajnak az eredetét, bár ebben az összefüggésben a feltehetően *későbbi* 5. és 4. posztulátum kérdésével nem foglalkozhattunk. — A következő fejezetben az euklidészi „axiómák" történeti problémáját vizsgálom.

7. AZ EUKLIDÉSZI AXIÓMÁK

A szójelentés magyarázata során megállapítottuk: az „axióma" szó, mint a görög dialektika terminusa, pontosan ugyanazt jelentette, mint szinonímája, az „aitéma" kifejezés. A dialektika terminológiája szerint egyáltalán semmi különbség sincs olyan kifejezések között, mint *αἰτέω, αἴτημα* egyfelől és *ἀξιόω, ἀξίωμα* másfelől. — Kérdés: alkalmazható-e a szónak ez a jelentése az euklidészi axiómákra is, amelyek fentebbi megállapításaink szerint csak később, az EUKLIDÉS utáni korokban kapták a „koinai ennoiai" megjelölést?

Ha az „axióma" terminus eredetileg az euklidészi „koinai ennoiai" esetében is olyan „követelményt" („feltételes érvényű állítást") jelölt, amelyhez a theóretikus vita másik résztvevője nem okvetlenül járult hozzá, akkor ez más szóval azt jelenti, hogy az euklidészi axiómák olyan állításokat tartalmaznak, amelyeknek helyessége bizonyos szempontból kétségbevonható. Dehát mennyiben kételkedhetik valaki az euklidészi axiómák helyességét illetően? Hiszen ARISTOTELÉS szerint — amint erre már utaltunk — csak az értelmetlen, öncélú vitatkozás kedvéért szokták egyesek kétségbevonni a matematikai axiómák állításait. — Nézzük meg közelebbről EUKLIDÉS axiómáit.

EUKLIDÉS mai szövegében összesen kilenc axiómát találunk. A princípiumoknak ez a csoportja feltűnően egységes. Eltekintve ugyanis a legutolsótól, a kilencediktől, a többi nyolc mind az *egyenlőségről* állít valamit. Éppen ez a feltűnő egyöntetűség volt az oka annak, hogy a legtöbb kutató a 9. axiómát ki is rekesztette a princípiumoknak ebből a csoportjából;[125] ezzel valószínűleg csak később egészítették ki az euklidészi axiómákat. (A 9. axiómával nem foglalkozom e dolgozat keretében.) A többi euklidészi axióma tehát mind *egyenlőségi tétel.* Mint más összefüggésben rámutattam már, egyenlőségi tétel a 8. axióma is, bár formájában némileg különbözik a többitől: „az egész

[124] Lásd a 83. jegyzetet.

[125] Vö. J. L. HEIBERG, *Euclides, Elementa* I. 1883 p. 10 és O. BECKER, *Die Grundlagen der Math.* 90.

nagyobb, mint a rész".[126] Ez az állítás ti. „negatív egyenlőségi tétel" azért, mert a teljes gondolat, amit ki akar fejezni, tulajdonképpen ez: „a rész *nem egyenlő* az egésszel, az egész nagyobb, mint a rész".

Azt hiszem, könnyű lesz megértenünk, miért nevezték az EUKLIDÉSnél olvasható egyenlőségi tételeket „axiómáknak", ha összehasonlítjuk őket olyan másfajta egyenlőségi tételekkel, amelyeknek az antik dialektika terminológiája szerint „homologémata" volt a nevük. PLATÓN „Theaitétos" c. dialógusában ugyanis „homologémata" néven szerepel a következő két egyenlőségi tétel:[127]

1. „egy dolog sem nagyobbá sem kisebbé nem lesz, sem tömegében sem szám szerint, amíg *egyenlő önmagával*",

2. „amihez semmi nem járul hozzá, és amiből semmi el nem vétetik, az nem növekedhet és nem is csökkenhet, hanem *önmagával egyenlő* marad".

Ha alaposabban megvizsgáljuk ezeket az állításokat, mindjárt látjuk, hogy ezek tulajdonképpen az „önmagával egyenlő" fogalmára adnak kettős definíciót. Az első tétel kimondja, hogy az „önmagával egyenlő" fogalma kizárja annak a dolognak a nagyobbá vagy kisebbé válását, amelyre ezt a megjelölést alkalmazzák. A második tétel megfordítja ezt az állítást és azt mondja ki, hogy éppen az a dolog „egyenlő önmagával", amely sem nagyobbá, sem kisebbé nem lesz.

Nem csoda, hogy ezeknek a tételeknek az antik dialektikában „homologémata" volt a nevük, mert az ilyen esetekben a dialektikus vita résztvevőinek a megegyezése *(ὁμολογεῖν)* csakugyan kézenfekvő volt. Ezek az állítások ugyanis pusztán *formális tételek*. Az első közülük csak más szavakkal fogalmazza meg azt, hogy mit értsünk az „önmagával egyenlő" fogalmán, a második tétel pedig egyszerűen megfordítja ugyanezt a definíciót, felcserélvén a szubjektumot és predikátumot. — Nyilvánvaló, hogy az antik dialektikusok éppen az ilyen formális tételeket tarthatták „különösen erős állításoknak" (vö. PLATÓN, „Phaidón" 100 A), mert ezek nem valamilyen praktikus-empirikus tapasztalat általánosításai, hanem *puszta gondolati konstrukciók*, amelyek éppen olyan ellentmondásmentesek, mint ősképük, PARMENIDÉS híres tétele: *τὸ ὂν ἔστιν,* „a létező van".

Ezzel szemben vizsgáljuk meg most az euklidészi egyenlőségi axiómákat! Ezek magyar fordításban így hangzanak:

„1. Azok, amelyek ugyanazzal a mennyiséggel egyenlők, egymás között is egyenlők.

2. Ha egyenlőkhöz egyenlőket adunk hozzá, az összegek is egyenlők lesznek.

[126] *Matematikai Lapok* X. (1959) 72—121.
[127] „Theaitétos" 155 A.

3. Ha egyenlőkből egyenlőket vonunk ki, a maradékok is egyenlők.

[4. Ha nem-egyenlőkhöz egyenlőket adunk hozzá, az összegek nem-egyenlők lesznek.

5. Ugyanannak a mennyiségnek a duplái egyenlők egymás között.

6. Ugyanannak a mennyiségnek a felerészei egyenlők egymás között.]

7. Az egymásra-illők (azaz: a kongruens idomok) egyenlők egymás között.

8. Az egész nagyobb mint a rész."

Nincs ezek között a tételek között egyetlenegy olyan *csak formális állítás* sem, mint amilyenek az előbb tárgyalt platóni „homologémák". Ellenkezőleg! Ezek a tételek mind olyan viszonyt írnak le két dolog között („egyenlő"), ami bizonyos értelemben már szinte önmagában is *ellentmondásos.* Mert egyáltalán nem magától értetődő az, hogy két különböző dolog — ami tehát távolról sem ugyanaz, hiszen azért „két" dolog és nem *egy*! — mégis *egyenlő* egymás között. Magától értetődő a spekulatív gondolkozás számára csak az, hogy valamely dolog *önmagával* egyenlő, de nem az, hogy ez a dolog még egy *másikkal* is egyenlő legyen![128] — Azonkívül ezek az euklidészi egyenlőségi tételek még olyan állítások is, amelyeknek helyességét csak *empirikus tapasztalattal, érzéki észrevevéssel* ellenőrizhetjük. A 7. axióma pl. azért igaz, mert látásunk, szemünk győz meg arról, hogy az egymásra illeszthető (kongruens) idomok egyenlők. Ugyanez érvényes a 8. axiómára is. Azt, hogy „az egész nagyobb mint a rész", a geometriai idomok esetében[129] ugyancsak érzékszerveinkkel állapíthatjuk meg.

Gondoljunk mármost arra, hogyan ítélték meg az antik dialektika megteremtői, az eleai filozófusok az *érzékszervek útján nyert tudást,* az *empirikus tapasztalást?* Maga PARMENIDÉS erről a kérdésről így nyilatkozott: „Ne hagyd, hogy a sokat tapasztalt megszokás erre az útra kényszerítsen! Ne bízd magad céltalan látásodra, zúgó füledre és nyelvedre! Ne ezekkel, hanem értelmeddel döntsd el a sokat vitatott kérdést, amelyet eléd tárok!"[130] Az eleaták minden érzéki megismerést, empirikus tapasztalatot elutasítottak, mert ki tudták mutatni minden ilyen eredetű „tudásban" az ellentmondást. Szerintük igazi megismerés csak az lehet, amely függetleníteni tudja magát minden érzéki tapasztalástól, s amelyhez csak gondolati úton juthatunk el. — Úgy látszik, ennek az eleai elgondolásnak a jegyében érthetővé lesz az is, miért nevezhették az

[128] Természetesen más a helyzet akkor, ha az „egyenlő" fogalmát így határozzuk meg: „*egyenlő* két véges halmaz akkor, ha elemeik kölcsönösen és egyértelműen leképezhetők egymásra". Ebben az esetben viszont éppen az „önmagával egyenlő" fogalma nem magától értetődő, mert ehhez még azt is ki kell mondanunk, hogy *minden halmaz elemei önmagukra is kölcsönösen és egyértelműen leképezhetők.*

[129] Az euklidészi axiómák eredetileg *geometriai* tételek; lásd fentebb a 100. jegyzetet.

[130] Lásd a 67. jegyzetet.

előbb tárgyalt platóni egyenlőségi tételeket „homologémata"-nak (mert ezek csak *formális gondolati konstrukciók*, amelyekhez — legalábbis *látszólag* — minden empirikus tapasztalat *nélkül* jutunk el), és miért kapták az euklidészi egyenlőségi tételek az „axiómata" nevet? — Mert ezek az utóbbiak egészen nyilvánvalóan érzéki észrevevéseinkből származnak, empirikus tapasztalataink általánosításai. Csakugyan megtörténhetett tehát az, hogy a dialógus egyik résztvevője „kérte", „követelte" ezeknek az egyenlőségi tételeknek az elfogadását, alapulvételét, mert ezeket az állításokat minden empirikus tapasztalat igazolni látszott. De egyáltalán nem volt bizonyos az, hogy a dialógus másik résztvevője — ha magáévá tette PARMENIDÉS tanítását — hozzájárul-e ezekhez az euklidészi egyenlőségi tételekhez? — Ezért volt ezeknek a princípiumoknak régi nevük: „axiómata" — „követelmények", azaz ugyanolyan kiindulásul választott és be-nem-bizonyított állítások, mint a *posztulátumok*.

*

Az előbbiekben arra a következtetésre jutottunk, hogy az euklidészi „koinai ennoiai" régi és eredeti neve az „axiómata" terminus nagyon jól értelmezhető az eleai filozófia jegyében. Felmerül mármost a kérdés: vajon nem éppen az eleaták voltak-e azok, akik — mint ARISTOTELÉS és PROKLOS gondolták — „az értelmetlen és öncélú vita kedvéért kétségbevonták ezeknek az axiómáknak a helyességét"? — Vagy meg is fordíthatjuk ugyanezt a kérdést: vajon nem éppen az eleai tanítással szemben kellett-e a legrégibb görög matematikusoknak ilyen „egyenlőségi követeléseket" (axiómákat) felállítaniok.

Úgy látszik, erre az utóbbi kérdésre könnyen felelhetünk. Csakugyan tudjuk, hogy éppen az eleaták egészen más értelemben tárgyalták az „egyenlőség" problémáját, mint az előbb idézett euklidészi axiómák. Legutóbb — több mint negyedszázaddal ezelőtt — O. BECKER így írt erről a kérdésről:[131]

„ZÉNÓN paradoxona Achillésről és a teknősbékáról megfogalmazható mint halmazelméleti probléma. E szerint a felfogás szerint a paradoxon értelme a következő: ha Achillés utoléri a teknősbékát, akkor az általa megtett út — jóllehet ez sokszorosa a teknősbéka által ugyanezen idő alatt megtett útnak — minden egyes pontjában egyértelműen és megfordíthatóan leképezhető a teknősbéka által megtett út pontjaira. A két futó által ugyanazon időben elfoglalt pontok kölcsönösen és egyértelműen megfelelnek egymásnak. Ez pedig nem más, mint az ismert halmazelméleti tény: *két aktuálisan végtelen halmaz ekvivalens (gleichmächtig) lehet akkor is, ha közülök az egyik valódi része a másiknak.*"

[131] Math. Existenz 144. Ez a történeti felismerés azonban még ennél is jóval régibb keletű; vö. P. TANNERY, Revue Philosophique XX p. 385, *1885* és B. RUSSEL, The Principles of Mathematics, Vol. I § 331 p. 350 és §§ 340—341 p. 358 360, Cambridge *1903*.

Bizonyosak lehetünk afelől, hogy ZÉNÓN paradoxonának ez a halmazelméleti interpretációja a legkevésbé sem „anakronizmus". Más összefüggésben rámutattam legutóbb már arra is, hogy ZÉNÓN antik formában csakugyan meg is fogalmazta azt a tényt: „két aktuálisan végtelen halmaz ekvivalens még akkor is, ha közülök az egyik valódi része a másiknak."[132] Csak ebben az értelemben adható ugyanis megnyugtató magyarázat arra az arisztotelészi híradásra, hogy ZÉNÓN *bebizonyította:* a fele idő egyenlő (= ekvivalens) a duplájával".[133] — Sőt, ezzel a zénóni tétellel kapcsolatban utaltam már arra is: a 8. euklidészi axiómát — „az egész nagyobb, mint a rész" — bizonyára éppen ez ellen a zénóni paradoxon ellen kellett felállítaniok az antik matematikusoknak. Nem akarom ezúttal megismételni régebbi érveimet, amelyek ezt az elgondolásomat támogatják, inkább csak kiegészítem őket a következőkkel.

Mint ismeretes, EUKLIDÉS nyolc egyenlőségi axiómájából a modern kiadó, J. L. HEIBERG kirekesztette a 4., 5. és 6.-at. Az 5. és 6. esetében hivatkozott PROKLOSra (196, 25), aki éppen úgy, mint ő, ezeket az axiómákat fölöslegeseknek tartotta;[134] sőt HEIBERG ugyanezzel a megokolással interpolációkat is vélt fölfedezni EUKLIDÉS két tételében (Elem. I. 37 és 38), minthogy ezek a tételek — a bizonyítási részben — majdnem szó szerint idézik a két kirekesztett axiómát. — Nem kétséges, hogy ebben az esetben mind PROKLOSnak, mind HEIBERGnek feltétlenül igaza van abban: a két kirekesztett axióma (az 5. és 6.) fölösleges EUKLIDÉS szövegében; az egész euklidészi geometria fölépíthető ezek nélkül is. A kérdés csak az: hogyan került mégis ez a két fölösleges axióma EUKLIDÉS szövegébe? P. TANNERYnek az az elgondolása, hogy mind ezt a két axiómát, mind pedig EUKLIDÉS többi princípiumát csak később, *utólag* absztrahálták volna az „Elemek" szövegéből,[135] aligha helyes. Hiszen közismert — amint ezt más összefüggésben maga P. TANNERY is hangsúlyozta —, hogy éppen ellenkezőleg: az euklidészi princípiumok között sok olyan akad, amely régebbi korok hagyománya, s amelyeket EUKLIDÉS szinte csak a hagyomány iránti tiszteletből vett be művébe.

Ez lehet az eset az 5. és 6. axiómával is: „ugyanannak a mennyiségnek a duplái egyenlők egymás között" és „ugyanannak a mennyiségnek a felerészei egyenlők egymás között". Mi adhatott mármost alkalmat — egyszer valamikor — arra, hogy ilyen tételeket állítsanak fel valamely mennyiség *dupláinak* és *felerészeinek* egymás közötti egyenlőségéről? — Csak *egy* olyan eset ismeretes az antik irodalomból, amely alkalmat adhatott e tételek felállítására. ZÉNÓN előbb is említett paradoxona ti. — ARISTOTELÉS híradása szerint

[132] Lásd a 126. jegyzetet.

[133] DIELS–KRANZ, I 29 A 29 (= ARISTOT., Phys. Z. 9.239b 33).

[134] Vö. J. L. HEIBERG, i. m. p. 91.

[135] Mém. Scient. II 53.

— így hangzott: „a *fele* idő egyenlő a *duplájával*". Ez a paradoxon tehát éppen valamely mennyiség *duplájának* és *felerészének* „egyenlőségét" mondja ki. Utaltam legutóbb már arra is, hogy ZÉNÓN ezt a paradoxont tulajdonképpen vonalszakaszokkal szemléltette, vonalszakaszokon mutatta meg, hogyan lehet valamely szakasz felerésze „egyenlő" a duplájával, az egész szakasszal.

Gondoljunk mármost arra: hogyan próbálták cáfolni az antik theóretikusok ZÉNÓNnak ezt az abszurd állítását? Pusztán *elméleti* úton a paradoxon állítása *cáfolhatatlan*. ARISTOTELÉSnek és tanítványainak „cáfolatai" csak azt mutatják, mennyire *nem értették már* e cáfolatok szerzői az eleai dialektika lényegét. Valódi cáfolat ZÉNÓN paradoxonára csak az lehetett, hogy empirikus, tapasztalati tényekből indultak ki, s ezek alapján fogalmazták meg *bizonyíthatatlan* és *csak* véges halmazok esetére érvényes tételeiket a zénóni paradoxon mindenegyes részletével szemben.

Ha erre a feltevésre gondolva vizsgáljuk EUKLIDÉS axiómáit, lehetetlen észre nem vennünk, hogy nem kevesebb, mint *négy* egymást követő axióma valójában nem is egyéb, mint ZÉNÓN említett paradoxonának empirikus cáfolata. Ez a *négy* axióma, amely tulajdonképpen csak ZÉNÓN paradoxonára vonatkoztatva lesz érthetővé, a következő:

5. Ugyanannak a mennyiségnek a *duplái* egyenlők egymás között.

6. Ugyanannak a mennyiségnek a *felerészei* egyenlők egymás között.

7. Az *egymásra-illők* (= a kongruensek) egyenlők egymás között. — ZÉNÓN ábráján ti. *nem illettek egymásra* azok a vonalszakaszok, amelyeket ő mégis „egyenlőknek", azaz *ekvivalenseknek* állított.

8. Az egész *nagyobb*, mint a rész. — ZÉNÓN paradoxona szerint ti. az *egész* és a *rész* „egyenlők" (= ekvivalensek) voltak.

Nyilvánvaló, hogy ebből a négy tételből igazában csak a 8. nélkülözhetetlen az euklidészi geometria felépítéséhez. Ha nagyon szigorúak akarnánk lenni, kirekeszthetnénk nemcsak az 5. és 6.-at, hanem ugyanígy a 7.-et is, hiszen EUKLIDÉS maga ezt az utóbbit is mindössze csak *kétszer* használja,[136] s még ezekben az esetekben is elkerülhette volna a használatát. — Mégis, *történeti* szempontból aligha volna helyes kirekeszteni ezt a legutóbb felsorolt axiómacsoportot. Ezeket a princípiumokat valószínűleg még az i. e. V. században akkor állították föl ugyanebben a sorrendben, amikor a görögök először tettek kísérletet a geometria axiómatikus megalapozására éppen ZÉNÓN elméletileg cáfolhatatlan paradoxonaival szemben. EUKLIDÉS pedig ezeket a tételeket éppen olyan meggondolatlanul, csak tradíciótiszteletből vette föl művébe, mint az „egyenes vonal" és a „sík felület" definícióját, vagy a *ἑτερόμηκες, ῥόμβος, ῥομβοειδές, τρίπλευρα, πολύπλευρα* stb. terminusokat.[137]

136 K. v. FRITZ, i. m. 76 k.

137 Vö. P. TANNERY, Mém. Scient. II 540—544 és 48—63.

Összefoglalva az eddigieket, a következőket állapíthatjuk meg EUKLIDÉS axiómáiról:

EUKLIDÉS egyenlőségi tételei empirikus eredetű állítások, amelyeknek helyessége csak érzéki észrevevéssel ellenőrizhető. Ezért ezek a tételek nem is elégítik ki az eleaták igényeit, s ezért nevezték őket a dialektikus-theóretikus vita terminológiája szerint „követelményeknek": *axiómata*. Minthogy azonban a PLATÓN utáni időkben egyre kevésbé értették már az eleai dialektika lényegét, megpróbáltak új értelmet adni a matematikában is az „axióma" terminusnak. Arra hivatkoztak ugyanis, hogy ezeknek az axiómáknak a helyességét éppen úgy nem lehet kétségbevonnia józaneszű embernek, mint ahogy kétségbevonhatatlan tény a tűz melegsége.[138] Így lett az „axióma" a kétségbevonhatatlan, a természetes igazság neve. A régi terminusnak ez az átértékelése szorosan összefüggött azzal, hogy ARISTOTELÉS ZÉNÓN geniális paradoxonait is „szofizmáknak" minősítette. Mivel azonban a többértelmű „axióma" szó még így is kényelmetlen volt EUKLIDÉS szövegében, nemsokára kicserélték ezt az új terminussal: „koinai ennoiai" = „minden ember számára közös képzetek". Ezzel viszont sikerült elleplezniök nemcsak magának a kifejezésnek, hanem ennek az egész princípium-műfajnak is a dialektikus eredetét.

IV. Az euklidészi princípiumok hármas beosztása

Eddigi vizsgálataink előkészítették a választ arra a kérdésre: mi az értelme a matematikai princípiumok hármas felosztásának az euklidészi „Elemek" legelején, és hogyan került egyáltalán sor a princípiumoknak erre az osztályozására? — Annyit máris megállapíthatunk, hogy e hármas beosztás — úgy látszik — még abból az időből származik, amikor először kísérelték meg a geometria elméleti megalapozását. A következőkben éppen a *geometriának* ezt az elméleti megalapozását kell közelebbről megvizsgálnunk. — Mindenekelőtt emlékeztetnem kell azonban arra, amit legutóbb az *aritmetika* elméleti megalapozásáról mondtam.

1. AZ ANTIK ARITMETIKA HIÁNYOS MEGALAPOZÁSA

Az euklidészi „Elemek" VII. könyve előtt olvasható aritmetikai definíciókkal kapcsolatban legutóbb a következőket írtam:[139] „Az euklidészi aritmetika első két definíciója — az *egy* és a *szám* — minden jel szerint az eleai filozófia hatására vall. E definíciók megfogalmazását döntő mértékben befolyásolta az osztás problémája, illetőleg az eleai filozófia oszthatatlansági dog-

[138] Proclus 181, 8 kk.
[139] *Matematikai Lapok* X (1959) 91 k. és 97 k.

mája. — Hasonlóképpen az eleai filozófia szerves továbbfejlesztései más fontos aritmetikai definíciók is, mint pl. *páros szám, páratlan szám, része valamely számnak* (μέρος, def. 3), *részei valamely számnak* (μέρη, def. 4), *törzsszám* és *összetett szám.* A döntő probléma, amely egyáltalán szükségessé tette ezeknek a definícióknak a felállítását, minden egyes esetben az „oszthatóság" filozófiai kérdése volt. Az első görög matematikusok ugyanis ragaszkodtak a legfontosabb eleai tanítás értelmében az ellentmondásmentesség elvéhez. Ezért előbb a *szám* definíciójával — az *egy* megsokszorozásával — megteremtették az *absztrakt sok* fogalmát, majd pedig, hogy az oszthatóságnak ezáltal újra felmerülő problémáját ellentmondásmentesen megoldják, az eleaták példájára dichotomikus definíciókat vezettek be. — Úgy látszik, ez volt a kezdete a görög aritmetika definíciós megalapozásának még az i. e. V. század első felében."

E megállapításokat kiegészíthetjük most a következőkkel. Az antik matematikusok azt a „hypothesis-alkalmazást", amelyet e dolgozat második részében behatóbban vizsgáltunk, tulajdonképpen csak az aritmetika területén használhatták nagyobb nehézségek nélkül.[140] Láttuk már, hogy a dialektikus vita legelső hypothesise mindig a *definíció,* az „elhatárolás" volt, minthogy éppen ez biztosította a szóban forgó fogalom ellentmondásmentességét. Érthető az is, hogy az eleai dialektika örökösei az „elhatárolás"-ban (a definiálásban) előnyben részesítették az *absztrakt* fogalmakat, mert természetszerűleg úgy látták, hogy ezeknél érhetik el legkönnyebben a gondolat ellentmondásmentességét. Könnyen beláthatta pl. akárki, hogy az olyan absztrakt fogalmak, mint a „szép" vagy az „egyenlő" sohasem lehetnek azonosak önmaguk ellentéteivel. De minél konkrétebb volt valamely fogalom — azaz minél inkább érezték közelségét a tapasztalati világhoz — annál inkább fenyegetett az ellentmondásosság veszélye. (Az eleai filozófia felismerése szerint a tapasztalati világ dolgai mind ellentmondásosak.) — Érthető viszont az is, hogy a *számokat* „absztraktabb" valaminek tartották, mint a *geometriai idomokat.* Ami a számokat illeti, hívatkozhattak arra, hogy az aritmetika nem ismer *látható* és *tapintható testű* számokat;[141] a számok csak gondolati elemek, amelyek másképp mint gondolati úton nem is közelíthetők meg.[142] De ugyanezt nem mondhatták el a geometriai idomokról, mert ezeket csak *szemléletesen* tudták elképzelni.

Ez a lényeges különbség a nem-látható számok és a szemléletes geometriai idomok között volt az oka annak is, hogy az ókorban *nem* alakulha-

[140] A geometria elméleti megalapozásának nehézségeire utaltam már legutóbbi dolgozatomban is; lásd a megelőző jegyzetet.

[141] PLATÓN, Resp. VII 525 D.

[142] Uo. 526.

tott ki az aritmetika axiómatikája. Az ókoriak *nem* tudatosították magukban azt, hogy az aritmetika is felhasznál olyan alapelveket, amelyek nem következnek aritmetikai definícióikból. Az aritmetikának az a felépítése, amelyet EUKLIDÉS „Elemeiből" ismerünk, arra vall, hogy az ókoriak azt hitték magukról: az aritmetikában egyáltalán nem is használnak empírikus eredetű alapelveket. Sőt, úgy látszik, még azt is, hogy az euklidészi egyenlőségi axiómák nemcsak a geometriában, hanem pl. az aritmetikában is érvényesek, csak utólag ismerték fel. Mindenesetre ezeknek az axiómáknak a felállítására nem az aritmetika, hanem a geometria megalapozása adott alkalmat.

2. A TÉR TUDOMÁNYA

Kezdetben úgy látszott, mintha a geometriára egyáltalán nem is lehetne alkalmazni az eleaták alapelveit. Az eleai ZÉNÓN számos érvet tudott felsorolni annak a bizonyítására, hogy a *tér* fogalma ellentmondásos.[143] Ebből viszont az következett, hogy az eleatáknak tagadniok kellett a tér létezését.[144] Ha pedig tagadjuk a teret magát, akkor nem is lehetséges a tér tudománya, a geometria. Mert ha a „tér" ellentmondásos fogalom, akkor azok közé a dolgok közé tartozik ez is, amelyek eleai felfogás szerint érzékszerveink útján tapasztalhatók ugyan, de amelyek az ellentmondásmentes gondolkozás számára felfoghatatlanok, azaz megismerhetetlenek. Ilyennek tartották az eleai filozófusok pl. a „mozgást". Nyilvánvaló, hogy tudták ők is: a mozgás a *gyakorlatban* lehetséges, lépten-nyomon bizonyítja ezt érzéki észrevevésünk. Az, hogy mégis *tagadták* a mozgást, csak annyit jelenthet, hogy úgy gondolták: a mozgás az érzékszervek útján tapasztalható, de a logikus, ellentmondásmentes gondolkozás számára felfoghatatlan, elgondolhatatlan. (Ezt jelenti az az eleai tétel, hogy a mozgás csak „hamis látszat", olyasvalami, amiről nem lehet igazi tudásunk.) Minden jel szerint így kell értenünk azt a másik eleai tételt is, hogy „nincs tér". A térre vonatkozó tudásunk ugyanúgy ellentmondásos, mint a mozgásra vonatkozó tapasztalatunk. Más szóval: eleai felfogás szerint úgy kellene megítélnünk a térre vonatkozó tudást is, mint a mozgásra vonatkozó tapasztalatot: ezek csak érzékeléseink eredményei.

Úgy látszik, a görög matematika legrégibb theóretikusai eredetileg átvették az eleatáktól a „térre vonatkozó tudásnak", a geometriának ilyenfajta megítélését is. Legalábbis erre mutat az a tény, hogy JAMBLICHOS egyik híradása szerint PYTHAGORAS a geometriát *ἱστορίη*-nek tartotta.[145] Mert ha meg-

[143] Vö. W. CAPELLE, *Die Vorsokratiker*, Leipzig 1935, 172 k.

[144] PLATÓN, „Theaitétos" 180 E.

[145] JAMBLICHOS, De vita Pythagorica 89. A hely magyarázatához lásd Á. SZABÓ. Deiknymi als math. Terminus für *beweisen*, MAIA X (1958) 106—131 és A. FRENKIAN, uo. XI (1959) 243—245.

gondoljuk, hogy egyrészt a pythagoreusok tudományukat, különösen pedig a számokról szóló tanítást a μαθήματα névvel jelölték,[146] másrészt pedig, hogy a ἱστορίη csak látásból származó empírikus tudást jelenthet,[147] akkor nyilvánvaló, hogy mi az értelme JAMBLICHOS megjegyzésének: abban az időben, amikor a geometria még nem μάθημα, csak ἱστορίη volt, nem is tartották ezt még elméleti jellegű tudománynak, csak empírikus, főként látásból származó (szemléletes) ismeretnek. Csakugyan, még PROKLOS, az euklidészi „Elemek" késői kommentátora is tudott arról, hogy a geometriát nem mindjárt kezdetben, csak valamikor később ismerhették el igazi matematikai diszciplinának, de még akkor is csak az aritmetikát követő második helyre tették. Erre mutatnak PROKLOS következő szavai: „Hogy a geometria is része az egész matematikának, és hogy *második helyen áll az aritmetika után*..., ezt kimutatták már a régiek is, nem szükséges itt részleteznünk."[148] Ugyanez volt az aritmetika és geometria rangsorolása PLATÓNnál is.[149] Sőt, kimutathatjuk PLATÓN műveiből azt is, hogy mind a „tér" problémájának, mind pedig a „térről szóló tudománynak", a geometriának ez a megítélése kétségtelenül az eleai filozófia öröksége volt.

3. PLATÓN A TÉRRŐL ÉS A GEOMETRIÁRÓL

Ha meg akarjuk érteni, hogyan ítélte meg PLATÓN a geometriát mint tudományt, vázlatosan ismertetnünk kell ebben az összefüggésben előbb PLATÓNnak a *tudásra* vonatkozó elgondolásait általában.[150]

Mint ismeretes, PLATÓN megkülönbözteti a változó, érzékelhető világot, a „láthatót" *(ὁρατόν)* az igazi létezőtől, amely utóbbi csak „elgondolható" *(νοητόν)* E kettéosztás értelmében a következő érdekes elméletet mutatja be az „Állam" c. dialógusban[151] a *tudásról*, a *nem-tudásról* és a *vélekedésről*. Minthogy a megismerő mindig *valamit* (valamilyen létezőt, *ὄν*) ismer meg, a *tudás* csak a *létezőre* vagy más szóval az *elgondolhatóra*, a νοητόν-ra vonatkozhatik, a *nem-tudás* pedig a *nem-létezőre*. A *vélekedés (δόξα)* viszont, minthogy ez a *tudás* és *nem-tudás* közé esik, éppen azokra a dolgokra vonatkozik, amelyek a *létezés* és *nem-létezés* között vannak; a létezés és nem-létezés között van egész érzékelhető világunk, amely keletkezik és elmúlik, vagyis

[146] ARISTOTELÉS, Met. 5 cap. 5. Vö. B. L. v. d. WAERDEN, Math. Ann. 120 1947—49 127 és K. REIDEMEISTER, *Das exakte Denken der Griechen* 52.

[147] Vö. B. SNELL, *Die Ausdrücke für den Begriff des Wissens in der vorplat. Philosophie*, Berlin 1924 59—71; A. FRENKIAN, *Revue des Études Indo-européennes*, Bucarest—Paris 1938, 468—474.

[148] Proclus 48, 9 kk.

[149] „Epinomis" 990 C—D.

[150] Vö. Á. SZABÓ, „Eleatica", *Acta Ant. Acad. Scient. Hung.* III (1955) 98 kk.

[151] Resp. V 476 E—477 B.

mindaz, amit PLATÓN *láthatónak (ὁρατόν)* nevez. — PLATÓN szerint tehát az érzékszerveinkkel megismerhető világról nincs igazi tudásunk, csak *vélekedésünk (δόξα).* — Nem kétséges, hogy ezek a „platóni" gondolatok tulajdonképpen *teljes egészükben* még magától az eleai PARMENIDÉStől származnak. (Bőségesen igazolható ez az állításom egyszerűen PARMENIDÉS tanítókölteményének ránk maradt töredékeiből is; csak a rövidség kedvéért tekintek el ezúttal a részletesebb interpretációtól.)

PLATÓN azonban nemcsak átvette, hanem részben tovább is fejlesztette PARMENIDÉS rendszerét. Különösen érdekes ebből a szempontból a „Timaios" c. dialógusnak egyik részlete,[152] amely nemcsak gondolatmenetében, hanem szinte még terminológiájában is szó szerint egyezik PARMENIDÉSszel. Ezúttal is hangsúlyozza PLATÓN, hogy a valóban létezőt, amely nem keletkezett és nem múlik el, és amely nem is változik soha (azaz: önmagával mindig azonos marad), csak értelmünkkel *(νόησις)* ismerhetjük meg, mert ez nem látható és az érzékszervek számára egyáltalán nem hozzáférhető; a láthatót és a folyton változót viszont csak érzékeléssel és vélekedéssel tudjuk megragadni *(δόξῃ μετ' αἰσθήσεως περιληπτόν).* — Amint látjuk: a gondolatmenet eddig még ugyanaz, mint az a másik, amelyiket az előbb az „Állam" c. dialógus nyomán foglaltunk össze. — Lényeges különbség azonban, hogy a „Timaios" dialógus nem elégszik meg a világ *kettéosztásával* láthatóra *(ὁρατόν)* és csak elgondolhatóra *(νοητόν).* E kettő közé ékelődik ezúttal, mint harmadik valami: a „tér", amely éppen olyan változatlan és örök ugyan, mint a platóni igazi létező, a *νοητόν*, de amelyben mégis minden mozgás, keletkezés és elmúlás végbemegy.[153] Sőt azt is kiemeli ezúttal PLATÓN, hogy az a fajta megismerés, amely erre a közbülső harmadik valamire, a „tér"-re vonatkozik, nem azonos sem azzal a tiszta gondolkozással, amellyel az igazi létezőt megismerjük, sem pedig azzal a vélekedéssel, amellyel az érzékelhető világ dolgait ragadjuk meg; a teret PLATÓN szerint érzékszerveink igénybevétele *nélkül* ugyan, de mégis „fattyú-gondolkozással" ismerjük meg *(μετ' ἀναισθησίας ἁπτὸν λογισμῷ τινι νόθῳ).*[154] Hogy pedig PLATÓN e „fattyú-tudáson" csakugyan a geometriát értette, arról meggyőzhet bennünket e „Timaios"-részlet összehasonlítása az „Állam" c. dialógus egyik passzusával.[155] Itt ugyanis PLATÓN a geometriai megismerést a „dianoia" *(διάνοια)* szóval jelöli, hangsúlyozván, hogy ez a „dianoia" magasabbfokú ugyan mint a puszta vélekedés *(δόξα)*, de alacsonyabbfokú, mint a tiszta intellektuális megismerés *(νοῦς).*

[152] A következőkhöz lásd PLATÓN „Timaios" 52 A—B és 50 C—D.

[153] A „tér" platóni körülírásaihoz lásd A. FRENKIAN, Le postulat chez Euclide etc. 25 és E. ZELLER, Die Philosophie der Griechen II 1, 4. Ausg. 1889 722, jegyzet.

[154] „Timaios" 52 B.

[155] Resp. VI 511 D—E és VII 533 E—534 A.

PLATÓNnak ezeket a fejtegetéseit a geometriáról, mint „fattyú-tudásról" a következőképpen magyarázhatjuk. Az eleaták kezdetben egyszerűen tagadták a tér létezését. Miután felismerték az ellentmondást az érzékelhető világ jelenségeiben — tehát mindenekelőtt az olyan fogalmakban, mint „mozgás", „változás", „keletkezés", „elmúlás" stb. — rá kellett jönniök arra is, hogy ellentmondásos az a két fogalom is, amely az előbbiektől elválaszthatatlan, ti. a „tér" és az „idő" fogalma. Minthogy viszont az, ami ellentmondásos, egyszersmind *elgondolhatatlan* is, tagadniok kellett a tér valóságos létezését.

Ezzel a felfogással szemben PLATÓN előbb ismertetett gondolatai *későbbi, differenciáltabb* fejlődési fokra vallanak. A „tér" fogalmát most már nem sorozzák ugyanabba a kategóriába, mint az érzéki világ jelenségeit, amelyek keletkeznek és elmúlnak. Éppen ellenkezőleg, most már azt hangsúlyozzák, hogy a tér éppen olyan örökkévaló és változatlan, mint a „csak elgondolható" *(νοητόν)*, egyszersmind azonban „befogadója" és „dajkája" is a keletkezésnek,[156] mert az érzéki világ jelenségei mind benne játszódnak le. A térnek ebből a kettős természetéből — hogy ti. egyfelől változatlan és örökkévaló, mint a νοητόν, másfelől pedig, mint „befogadó tartály" szorosan összefügg az érzéki világ jelenségeivel — következik a geometria „fattyú-tudás" jellege. Ezt a „fattyú" jelleget PLATÓN a geometria művelőinek beszédmódján is felismerni vélte. Mint az egyik alkalommal írta:[157] a geometerek nevetséges és kényszeredett kifejezéseket használnak; úgy tesznek, mintha kutatásuk célja valami cselekvés, „szerkesztés" volna; arról beszélnek, hogy „négyszögesítenek", vonalat „húznak" és felületeket „illesztenek egymásra", holott e tudomány igazi célja: örökkévaló és változatlan dolgoknak, nem pedig olyasmiknek a megismerése, amik keletkeznek és elmúlnak.

4. A GEOMETRIA ELMÉLETI MEGALAPOZÁSA

Azt hiszem, PLATÓNnak a térre és a geometriára vonatkozó gondolatai megvilágíthatják részben azt a folyamatot is, amely már a PLATÓNt megelőző időkben a geometria elméleti megalapozásához vezetett. A geometria elméleti megalapozása azzal kezdődhetett, hogy revízió alá vették az eleaták véleményét a *térről.* Amíg a teret ugyanolyan ellentmondásos valaminek tartották, mint az érzékelhető világ jelenségeit — amíg tehát „tagadták" a tér létezését — egyáltalán nem volt lehetséges a geometria mint tudomány. Ebben az időben a geometria csak *ἱστορίη*, empírikus, látásból származó (szemléletes) ismeret lehetett.

Egy idő múlva azonban észre kellett venniök, hogy a „tér" esetében egy rendkívül érdekes absztrakció is lehetséges. Hogyan jön ugyanis létre

156 Lásd a 153. jegyzetet.
157 Resp. VII 527 A—B.

„térélményünk"? Természetesen mindig az érzékelhető világ jelenségeivel kapcsolatban, tehát olyan dolgokkal összefüggésben, amelyek a térben foglalnak helyet, benne mozognak, változnak, keletkeznek és elmúlnak. De vajon gondolatban nem abszrahálható-e a *tér* a benne levő dolgoktól? És vajon az így elképzelt *tér* nem hasonlít-e már a „csak elgondolhatóhoz", a *νοητόν*-hoz?

Úgy látszik, a geometriának, mint a térről szóló tudománynak az elméleti megalapozása éppen úgy kezdődött, hogy megpróbáltak kialakítani valamiféle absztrakt „tér-szemléletet" az érzéki észrevevések igénybevétele *nélkül*. (Említettük már, hogy PLATÓN is azt állította: a teret érzéki észrevevés nélkül, *μετ ἀναισθησίας*, fattyú-tudással, *λογισμῷ νόθῳ*, ismerjük meg.)[158] Régebben tehát azt hangsúlyozták, hogy a geometria *ἱστορίῃ*, azaz látásból származó (szemléletes) és empírikus ismeret; most viszont, amikor az absztrakt teret magát — a bennük levő dolgok nélkül — akarták megismerni, le akartak mondani a tér megismerésében minden érzéki észrevevésről, még a látásról is. Nemcsak egyszerűen a *mozgást* akarták teljesen száműzni a geometriából — amint ez látható pl. az euklidészi „Elemek" I. könyvének definícióiból[159] —, hanem ugyanígy lehetőleg a *szemléletességet* is. TH. HEATH pl. utalt már arra, hogy az „egyenes vonal" euklidészi definíciója tulajdonképpen kísérlet a fogalom körülírására *minden szemléletesség megkerülésével.*[160]

Érthető viszont, hogy azok a kísérletek, amelyek a „tér" fogalmát a „csak elgondolható", a *νοητόν* közelébe akarták hozni, többé-kevésbé mind kudarcra voltak kárhoztatva. A térrel együtt adva voltak olyan ellentmondásos tények is, amelyek az eleaták módszerével megoldhatatlanoknak bizonyultak. Az egyik ilyen nehézségre más összefüggésben utaltam már.[161]

Rendkívüli nehézséget okozott ti. már egyszerűen a térnek *végtelen oszthatósága* is, amely gondolatban mindenesetre lehetséges. Ebből ugyanis arra a következtetésre kellett jutniok az antik theóretikusoknak, hogy nemcsak az anyagban, hanem még a térben — tehát a geometriában sincs valami olyasmi, amit *legkisebbnek* lehetne nevezni.[162] Viszonylag könnyű volt — mindaddig, amíg csak számokról beszéltek — a pusztán gondolatban létező *egy*re hivatkozni, amely osztatlan és legkisebb; de nem találtak ilyen legkisebb egységet a geometriában. Mint PROKLOS írja: „a geometriában egyáltalán nincs olyasmi, ami a *legkisebb* volna, és ott, ahol az osztás végtelenül folytatható, ott megvan az irracionális (az ésszerűtlen, *τὸ ἄλογον*) is."[163] Semmi akadálya sem

158 Lásd a 154. jegyzetet.
159 J. E. HOFMANN, i. m. 32 és A. D. STEELE, i. m. 308.
160 TH. HEATH, i. m. I 373.
161 *Matematikai Lapok* X (1959) 101 kk.
162 Proclus 60, 11 kk.
163 Uo. 60, 15.

volt annak, hogy az aritmetikában az *egy*ből és a *számok*ból induljanak ki, mert ezeknek nem volt anyaguk, és mint pusztán gondolati elemek ellentmondásmentesek lehettek, de a geometriában természetesen nem találtak ilyen egyszerű elemeket, amelyekből kiindulhattak volna. „Világos, hogy a számok anyagtalanabbak és tisztábbak, mint a geometriai mennyiségek, és hogy ezért a számok alapja (principiuma, *ἀρχή*-ja) is egyszerűbb, mint a geometriai mennyiségeké" — írja PROKLOS.[164] — Ezek a nehézségek okozták azt, hogy az euklidészi geometriának már a legelső definíciói — a „pont" és a „vonal" meghatározásai — sem sikerülhettek. Mint éppen ezzel a kettővel kapcsolatban K. REIDEMEISTER írta:[165] „A pont és a vonal sem a szemlélet sem a gondolkozás számára nincs adva. Egynémely geometriai fogalom evidens; evidens az is, hogy ezeket a fogalmakat ellentmondásmentes rendszerbe akarják foglalni. De azokat a kezdeteket, amelyekből levezethető volna a tervezett elmélet, csak keresik mint ellentmondásmentes kiegészítését annak, ami evidens." — Tulajdonképpen csak azzal kellene még kiegészítenünk ezt a jellemzést, hogy a görög theóretikusok legfeljebb *részben* találták meg azokat az egyszerű és ellentmondásmentes alapokat, amelyekre felépíthették a geometriát, mint elméleti tudományt. Hiszen a *pont* euklidészi definíciója értelmében — „pont az, aminek nincs része" — tulajdonképpen tagadniok kellett volna a teret is.[166]

Pedig a tér végtelen oszthatósága igazában nem is volt az egyetlen és legsúlyosabb olyan nehézség, amellyel a görögöknek a geometria elméleti megalapozása során meg kellett küzdeniök. A „tér" fogalmával ugyanis — bármennyire absztraktnak gondolták is ezt — adva volt egy másik ugyanilyen ellentmondásos fogalom is: a „mozgás". A geometria legkisebb mennyiségéhez, a *pont*hoz csak a „végtelenül folytatható osztás" gondolatán keresztül juthattak el, márpedig ezt az utóbbit ésszerűtlennek, irracionálisnak érezték. Amikor viszont a *pont*ból akartak kiindulni, hogy ebből vezessék le az összetett geometriai mennyiségeket, egyszerre elkerülhetetlenné lett a *mozgás*. Amellett a térrel együtt adva voltak olyan empírikus tények is, amelyekre vonatkozó állításaikat csak az érzékszervek által nyújtott tapasztalatokból kiindulva fogalmazhatták meg; lásd az euklidészi egyenlőségi axiómák problémáját.

Azt hiszem, éppen ezek a nehézségek ösztönözték a görög matematikusokat arra, hogy megteremtsék — egyelőre csak magának a geometriának *axiómatikus megalapozását*. Össze kellett ugyanis mindenekelőtt állítaniok azokat a pusztán empírikus tényeket, amelyek ugyan távolról sem elégítették

[164] Uo. 95, 23 k.
[165] Das exakte Denken der Griechen 12.
[166] Vö. ezzel *Matematikai Lapok* X (1959) 98 kk.

ki az eleatáknak tisztán intellektuális megismerésre törekvő igényeit, de amelyek nélkül a térről szóló tudomány, a geometria mégis elképzelhetetlen volt. Hangsúlyozták tehát, hogy a geometria tényei — a „vonalak", „szakaszok", „metszéspontok", „szögek", „idomok" stb. — egyáltalán *nem* azonosak azokkal az alakzatokkal, amelyeket érzékszerveinkkel is tapasztalhatunk, pl. láthatunk,[167] hanem ezek igazában csak *gondolati elemek,* ugyanúgy mint a számok. Majd megpróbálták ezeknek az alakzatoknak a definícióiban elkerülni lehetőleg még a szemléletességet is.

Hogy viszont a geometriai konstrukciót lehetővé tegyék, felállították az első három euklidészi *posztulátumot.* Ezekkel engedélyezték legalább azt a minimális *mozgást,* amely nélkül a geometriát egyáltalán nem tudták volna felépíteni. — A *vonalzó* és *körző* kizárólagosságához való ragaszkodás, úgy látszik, nem is egyéb, mint arra irányuló törekvés, hogy a geometriában megengedett mozgásformákat a minimumra korlátozzák. — A posztulátum görög neve, az „aitéma" szó egyszersmind utalt is azonban arra, hogy ezekkel a „követelményekkel" tulajdonképpen már át is törték azokat a korlátokat, amelyeket az ellentmondásmentesség elvéhez való szigorú ragaszkodás — legalábbis az eleaták számára még — jelentett. A konstrukcióval, illetőleg a *mozgással* már valami „ellentmondásos elem" is került a geometriába.

A következményeknek egy másik — az „axiómata" nevű — csoportjával viszont olyan empírikus állításokat tettek meg egyelőre csak a geometria alapjává, amelyek csak véges halmazok esetében érvényesek. Úgy látszik, mindaddig, amíg e princípium csoport régi nevét, az „axiómata" szót *nem* cserélték fel az újabb keletű elnevezéssel („koinai ennoiai"), tudhatták azt is, hogy ezek a princípiumok nemcsak bizonyíthatatlanok, hanem az eleaták módszerével még cáfolhatók is. Hiszen ezeket a tételeket — minden valószínűség szerint — éppen ZÉNÓN paradoxonai *ellen* kellett felállítaniok.

Ez lehetett a matematikai princípiumok euklidészi hármas beosztásának az eredete.

5. A KRONOLÓGIA KÉRDÉSÉHEZ

Még egy történeti kérdést kell ebben az összefüggésben legalább röviden érintenünk. — Említettük, hogy az euklidész-*utáni* görög matematikai terminológia *nem tett* már különbséget „hypothesisek", „aitémák" és „axiómák" között. Ebben az időben mind e három kifejezés, mind pedig a matematikai princípiumok egyéb még lehetséges megjelölése már csak tetszőlegesen felcserélhető szinoníma volt. (Különösen tanulságos ebben a viszonylatban ARCHIMÉDÉS szóhasználata.) Úgy látszik tehát, a matematikai princípiumoknak

[167] PLATÓN, Resp. VI 510 D.

tárgyalt hármas beosztása *csak* EUKLIDÉSre érvényes. Mi lehet ennek a ténynek történeti magyarázata?

Induljunk ki PLATÓNnak egyik már említett megjegyzéséből.[168] PLATÓN nemcsak azt állítja egy alkalommal, hogy a matematikusok bizonyos feltevéseket („hypothesis") tesznek meg kutatásuk alapjává, hanem egyszersmind megjegyzi azt is, hogy „nem is adnak ezekről aztán számot sem maguknak, sem másnak, minthogy ezeket — véleményük szerint — úgyis mindenki tudja már". — Az a PLATÓN tehát, aki egyébként a matematikát olyan nagyra tartotta, észrevette azt is, hogy maguk a matematikusok a princípiumok, a „hypothesisek" további problémájával szemben szinte közömbösek. Ezért gondolta PLATÓN, hogy ezeknek a matematikai „hypothesisek"-nek a mélyebb vizsgálata már nem is a matematika, hanem egy szerinte magasabbrendű tudománynak, a dialektikának a feladata volna. Így gondolkozott egyébként erről a kérdésről ARISTOTELÉS is.[169]

Ez a matematikus közömbösség a princípiumok filozófiai problémájával szemben megfigyelhető már az EUKLIDÉSszel egykorú pitanéi AUTOLYKOSnál is. P. TANNERY hívta fel először a figyelmet arra, hogy AUTOLYKOS művében („De sphaera quae movetur") egyáltalán nem tesz különbséget *definíció* és *posztulátum* között.[170] Kiegészítettem legutóbb ezt a megfigyelést azzal, hogy AUTOLYKOS *nem is adott nevet* bizonyítás nélkül előrebocsátott princípiumainak.[171] Úgy látszik tehát, nem tartotta szükségesnek, hogy *osztályozza* azokat a benem-bizonyított alapelveket, amelyeket munkája előtt felsorolt. Jól összevág ezzel a ténnyel az is, hogy a görög matematikusok az euklidész-utáni korokban sem törekedtek az egyes princípium-műfajok pontos terminológiai megkülönböztetésére. A matematika szempontjából szinte csak *egy* megkülönböztetés volt lényeges, az ti., hogy a princípiumok bizonyítás *nélkül* is igaznak tartott tételek, s ezért előrebocsátandók; a theóremák viszont bizonyítandók, azaz olyan állítások, amelyeket a princípiumokból kell levezetniök. Az egyes princípium-műfajok gondosabb megkülönböztetésére irányuló vitát a matematikusok, úgy látszik, átengedték a filozófusoknak.

Látjuk tehát, hogy a görög matematikusok — legalábbis azok, akiknek műveit ismerjük — EUKLIDÉS kivételével soha nem törekedtek az egyes princípium-műfajok szigorú és következetes megkülönböztetésére. Kérdés: vajon éppen ezért nem magától EUKLIDÉStől származik-e a princípiumok tárgyalt hármas beosztása? — Úgy gondolom, e feltevés *ellen* szólnak a következők:

168 Resp. VI 510 C—D.

169 Lásd PLATÓN, Resp. 510 C — 517 D és ARISTOT. Met. Γ 3 1005 a 19 kk.

170 P. TANNERY, *Mém. Scient.* II 58. Vö. Autolyci, De sphaera quae movetur liber. De ortibus et occasibus libri duo, ed. Fr. HULTSCH, Lipsiae 1885, Index s. v. „horoi".

171 Studi it. di fil. class. XXX 1958 10 k.

1. ARISTOTELÉS többször tárgyalja műveiben az ún. bizonyító tudományok, közöttük a matematika alapelveit is, sőt megpróbálja osztályozni is ezeket az alapelveket. Ez tehát arra mutat, hogy az euklidész-*előtti* korokban csakugyan az egyes princípium-műfajok gondosabb megkülönböztetésére törekedhettek.

2. Láttuk fentebb, hogy már az i. e. V. században ismerte és tudatosan alkalmazta OINOPIDÉS az első három euklidészi posztulátumot, sőt e posztulátumok valószínűleg magától OINOPIDÉStől származnak. Valószínű tehát, hogy azok a görög matematikusok, akik OINOPIDÉS óta „Elemeket" állítottak össze, legalább e három posztulátumot mindig mint külön csoportot bocsátották munkájuk elé.

Úgy gondolom tehát, a princípiumok hármas beosztása EUKLIDÉS művében valójában csak *tradició.* A „hypothesisek", „aitémák" és „axiómák" megkülönböztetése nem is annyira a matematika, mint inkább a *filozófia* szempontjából volt lényeges. Fontosnak e megkülönböztetést igazán csak akkor érezhették, amikor előbb az aritmetika, majd később még inkább a geometria elméleti megalapozása során a matematikusok elhatárolták tudományukat az eleai filozófiától. Ebben az időben csakugyan nem volt lényegtelen az, hogy vajon a „mozgás" eleai tagadásával szemben foglalnak-e állást a matematikusok a *posztulátumok*ban, vagy a végtelen halmazok vizsgálatából levont eleai következtetések ellen a *nyolc első axiómában.* Később azonban, ahogy a matematika egyre inkább függetlenedett a filozófiától, a princípiumok megkülönböztetésének a kérdése is mindinkább veszített a jelentőségéből. Most már nem annyira a matematikusok, mint inkább a filozófusok foglalkoztak ezzel a kérdéssel. (Lásd pl. ARISTOTELÉSt!)

EUKLIDÉS tehát a princípiumok hármas beosztását olyan régebbi matematikusoktól vehette át, akik már előtte is állítottak össze „Elemeket". Mint ismeretes, ilyenek voltak: a chiosi HIPPOKRATÉS, LEÓN és a magnesiai THEUDIOS.[172]

A geometria elméleti megalapozása a matematikának az eleai dialektikából való kiszakadása, függetlenné válása során alakult ki. Ezért tud olyan kevés, *történetileg is felhasználható* lényeges gondolatot mondani a matematikai princípiumok mibenlétéről az az ARISTOTELÉS, aki az eleai dialektikát is oly kevéssé értette meg, hogy ZÉNÓN paradoxonait puszta szofizmáknak minősítette.

[172] Proclus 66, 7—8; 66, 20—23; 67, 12—16.

V. A korai görög matematika néhány problémája új megvilágításban

A megelőző fejezetekben olyan magyarázatot kíséreltem meg a görög matematika axiómatikájának kialakulására, amely magyarázat új megvilágításba helyezheti a korai görög tudomány egyéb történeti problémáit is. Anélkül, hogy ezeket a kérdéseket már itt részletesebben tárgyalni akarnám, csak röviden utalok ezúttal néhány ilyen problémára.

1. Konstrukció és matematikai exisztencia

Az antik matematikatörténet egyik fontos kérdése pl.: hogyan merült fel egyáltalán az ókorban a *matematikai exisztencia* problémája? — Úgy látom, ezt a kérdést a történeti irodalom eddig még soha nem is vetette fel elég pregnáns formában. Ehelyett olyan *féligazságokból* indultak ki, amelyek nem megoldották, inkább csak elkendőzték az igazi történeti problémát.

Mint ismeretes, általában H. G. Zeuthen maradandó érdemének tartják, hogy megvilágította az ókoriak exisztencia-bizonyításának elveit.[173] O. Becker pl. így írt erről a kérdésről:[174] „Zeuthen kutatásai szerint az ókoriak exisztencia-bizonyításának egyetlen és állandóan használt eszköze a *konstrukció* volt. Minthogy pedig az antik matematika csak geometria volt (az aritmetikát és algebrát is geometriai formába öltöztették), ez a konstrukció *idomok szerkesztését* jelentette. Mindig két alapvető konstrukcióból indultak ki: két adott pont összekötése egy egyenessel és körszerkesztés adott pont körül adott rádiusszal. Két euklidészi posztulátum mondja ki, hogy ezek a szerkesztések *lehetségesek*, vagyis ami egyértelmű ezzel: hogy az így szerkesztett alakzatok *léteznek* stb."

Bármennyire plauzibilisek is ennek az idézetnek egyes állításai, rá kell itt mutassak e koncepció gyöngéjére. Mert igaz ugyan, hogy a görög matematika túlyomórészt geometria volt, és valóban a görögök az aritmetikát, algebrát is — legalábbis utólag — „geometrizálták."[175] De vajon az aritmetikában is *mindig szerkesztésből* állott-e az exisztencia-bizonyítás? — Nyilvánvaló, hogy *nem*! Zeuthen *téved,* amikor azt állítja, hogy az antik exisztencia-bizonyítás egyetlen és mindig alkalmazott eszköze a konstrukció, azaz a geometriai szerkesztés volt. Vegyük pl. az euklidészi aritmetika következő két érdekes tételét: VII 31. *Minden összetett számnak osztója valamely prímszám,* és IX 20. *Több prímszám van, mint a prímszámok bármely adott (= véges) halmaza.* — Nem kétséges, hogy e tételek bizonyítása exisztencia-bizonyítás. Mert az első esetben abból áll a bizonyítás, hogy megmutatjuk, bármely tet-

173 H. G. Zeuthen, *Math. Ann.* 47 (1896) 222—228.

174 O. Becker, *Math. Existenz* 1927, 130.

175 Vö. O. Neugebauer, Quell. u. Studien etc. B 3 (1936) 245—259.

szöleges összetett szám, pl. *a* esetében *van* egy olyan prímszám (pl. *f* vagy *g*), amely osztója *a*-nak. — Hasonlóképpen a másik tétel esetében a bizonyítás abból áll, hogy megmutatjuk, a prímszámok bármely adott (= véges) halmaza esetében *van* még legalább egy olyan prímszám, amely nem eleme a prímszámok vizsgált halmazának.

EUKLIDÉS e tételek esetében a keresett szám exisztenciáját *nem* geometriai konstrukcióval bizonyítja. Sőt kérdéses: vajon nem a mi gondolkozásunkat magyarázzuk-e bele az antik szövegbe, ha e tételekkel kapcsolatban a szó bármiféle értelmében „konstrukcióról" beszélünk?

ZEUTHEN elméletének egy másik gyöngéjére A. FRAJESE hívta fel a figyelmet.[176] Emlékeztetett ugyanis arra: EUKLIDÉS az ókori hagyomány szerint a platóni filozófia követője volt.[177] De hogyan lehetséges, hogy a platóni filozófia híve a konstrukciót az exisztencia bizonyítékának tartsa? — kérdezi FRAJESE. Hiszen a geometriai szerkesztés csak *láthatóvá* — szinte megfoghatóvá — tesz valamit, PLATÓN pedig éppen a „láthatótól" tagadta meg az igazi létezést! — nem kétséges, hogy FRAJESE kifogása nagyonis indokolt.

Úgy gondolom azonban, a megelőző fejezetek értelmében a matematikai exisztencia problémáját is egészen új oldalról világíthatjuk meg. — Beszéltünk már arról, hogyan értették az exisztenciát (a valódi létezést) az eleai és a platóni filozófia hívei. A létező *(τὸ ὄν)* — vagy más néven az egy *(τὸ ἕν)* — exisztenciája az eleaták számára egyáltalán nem volt problematikus. PARMENIDÉS ezt a tételt indirekt úton bizonyította: kimutatta ugyanis az ellentmondást a másik két tételben: „a létező nincs" és „a létező van is meg nincs is".

Hasonló volt az exisztencia-bizonyítás az aritmetikában is — azzal a különbséggel, hogy itt még előbb az „absztrakt soknak", a „számnak" a fogalmát kellett megteremteni oly módon, hogy az *egyet* gondolatban megsokszorozták.[178] (Az eleaták kezdetben tagadták a „sok" létezését is; amíg pedig nem volt „sok" — azaz „szám" —, nem volt lehetséges természetesen az aritmetika sem.) Felállították tehát a következő aritmetikai definíciót: „a szám egységekből összetett halmaz." E definíció alapján pedig most már az aritmetikában is indirekt úton bizonyíthatták az exisztenciát.

A görög aritmetikában tehát valamely szám exisztenciáját *nem* szerkesztéssel (konstrukcióval) bizonyították be, hanem oly módon, hogy kimutatták az ellentmondást abban az állításban, amely kétségbevonja a kérdéses szám létezését. Az elemek VII. 31 tétel értelmében pl. *van* minden összetett számra olyan prímszám, amely osztója ennek az összetett számnak, mert az az állítás,

176 A. FRAJESE, *La matematica nel mondo antico,* Roma 1951 p. 92.
177 Proclus 68, 20 kk.
178 Vö. *Matematikai Lapok* X (1959) 81—98.

hogy „nincs ilyen szám", ellentmond a szám definíciójának. — Hasonlóképpen a prímszámok bármely adott (= véges) halmaza esetében *van* még legalább egy olyan prímszám, amely nem eleme a vizsgált halmaznak, mert az az állítás is, amely tagadja ezt a tételt, ellentmondásra vezet.

Az az állítás tehát, hogy a görög aritmetikában az exisztencia-bizonyítás egyetlen és mindig alkalmazott eszköze a szerkesztés (konstrukció) lett volna, nem állja meg a helyét. A görög aritmetika jelentős részében az exisztenciát logikai úton, indirekt bizonyítással mutatták ki.

Kétségtelenül igaz viszont az, hogy a „matematikai exisztencia" fogalma új értelmet kapott a geometriában, a térről szóló tudományban. Mert a létezés kritériuma az eleai filozófia szerint az *ellentmondásmentesség* volt; ezt a kritériumot pedig a geometriában már kevésbé lehetett alkalmazni, mint az aritmetikában. Hiszen láttuk már, hogy a „pont", a „vonal", sőt még maga a „tér" fogalma is ellentmondásos. A geometriában tehát praktikus-empírikus tényekből kellett kiindulniok a matematikusoknak. Ezért épül a geometriai exisztencia-bizonyítás legtöbbször csakugyan konstrukcióra. Minden szerkesztést pedig igyekeznek visszavezetni két *alapvető* szerkesztésre, az egyenes és a kör szerkesztésére, azaz a három első euklidészi posztulátumra, amelyek valójában *exisztencia-posztulátumok.*

Bár a görögök ily módon a geometriai exisztenciát csakugyan a szerkeszthetőség — pontosabban az euklidészi posztulátumok alapján való szerkeszthetőség kérdésévé tették, az eleai és platóni filozófia szempontjából ez a fajta exisztencia továbbra is problematikus maradt. Ezért panaszkodott PLATÓN — mint fentebb egy idézetben láttuk már —, hogy a geometerek kifejezésmódja, amely mindig a szerkeszthetőségről beszél, félrevezető látszat, hiszen a geometriai alakzatok a szerkesztéstől függetlenül léteznek. Mást jelentett tehát a matematikai exisztencia már PLATÓN korában is pusztán csak a matematika, és mást a filozófia szempontjából.

2. AZ ÚN. PLATÓNI REFORM

Egy másik érdekes probléma, amely — úgy gondolom — az elmondottak alapján új megvilágításba kerül: a platóni filozófiának és a matematikának egymáshoz való viszonya. Érdemes lesz röviden visszapillantanunk arra, hogyan ítélték meg ezt a kérdést régebben.

Még 1913-ban publikálta H. G. ZEUTHEN egyik fontos cikkét, amely bennünket ezúttal inkább csak a címe miatt érdekel: „Sur les conaissances géométriques des Grecs *avant la réforme platonicienne.*"[179] Mint a címből is

179 Oveısigt det kgl. Danske Videnskabernes Selskabs Forhandlinger, 1913 No. 6. 431—473.

kiderül, ZEUTHEN úgy gondolta, hogy volt a görög geometria története során egyszer egy „platóni reform"; sőt a cikk ezt a bizonyos reformot egyenesen magának PLATÓNnak tulajdonította. ZEUTHEN véleménye szerint ugyanis PLATÓN, bár nem közvetlenül csak tanítványain keresztül, de mégis lényeges befolyást gyakorolt a geometria fejlődésére. Tizenkét évvel később így foglalta össze O. TOEPLITZ azoknak a történészeknek a véleményét erről a kérdésről, akik ZEUTHEN „reform-theóriáját" vallották:[180]

„PLATÓNnak természetesen nem voltak matematikai felfedezései; az az ókori hagyomány, amely neki tulajdonítja a dódekaéder felfedezését, tévedés. PLATÓN *azonban általános irányelveket adott a matematikának; az „Elemek" axiómatikus felépítése; a szerkesztésben a vonalzó és körző kizárólagosságához való ragaszkodás, és az analytikus módszer:* PLATÓN *műve.* PLATÓN *körének nagy matematikusai,* THEAITÉTOS *és* EUDOXOS, *az ő hatására teremtették meg az ún. euklidészi geometriát.*"

Mint az idézet kiemelt szavaiból látjuk, a történészek ebben az időben hajlandók lettek volna szinte az egész rendszeres görög matematikát annak a „platóni reformnak" a számlájára írni, amelyet ZEUTHEN valósággal mérföldkőnek tartott a tudomány történetében. 1927-ben még O. BECKER is annyira ZEUTHEN elképzelésének a hatása alatt állott, hogy úgy gondolta: PLATÓN működésével új korszak kezdődött a matematika történetében. Akkoriban így írt erről:[181]

„Nagy egészében a matematika PLATÓN előtt szemléletes és formához kötött (mint ZEUTHEN mondta: „érzékletes geometria") volt. A feltűnő (szimmetrikus és ehhez hasonló) alakzatok tulajdonságait vizsgálták, anélkül, hogy e vizsgálatok rendszeresek lettek volna. A szerkesztések is önkényesek és szabályozatlanok voltak („becsúsztatás", mindenféle kinematikus konstrukciók, pl. az élisi HIPPIAS quadratrixa). PLATÓN *vezette be azt az általános reformot, amelynek az axiómatikus módszert és a matematikai exisztenciának a szerkeszthetőséggel való definícióját köszönhetjük.*"

ZEUTHEN elmélete a „platóni reformról" az elmúlt évtizedek során általánossá, sőt csaknem kizárólagossá lett. Jó példa lehet erre O. TOEPLITZ esete, aki a következő gondolatmenet alapján próbálta kisebb mértékben revideálni ZEUTHEN elméletét:

Ha csakugyan volt a tudomány történetében egy olyan gyökeres „platóni reform", mint ZEUTHEN gondolta, akkor a görög geometria fejlődésében két nagy korszak különböztethető meg: egy empírikus korszak a reform *előtt,* és egy theóretikus a reform *után.* „Elképzelhető volna azonban — írta továbbá TOEPLITZ —, hogy e két korszak közé egy átmeneti fokot iktassunk; ti. egy

[180] „Mathematik und Antike" az „Antike" c. folyóiratban 1925 I 175—203.
[181] „Mathematische Existenz" 250.

olyan fokot, amelyen ugyan bizonyítanak már, de még nem teszik fel rendszeresen a kérdést: mennyi az a bebizonyíthatatlan minimum (axióma), amely elégséges minden bizonyításhoz. Hogy egy ilyen fokozat a tudomány történetében is elképzelhető, arra többször példát ad iskoláink matematika-tanítása,"[182]

Természetesen, ha TOEPLITZ nyomán ilyen átmeneti fokot iktatunk a matematika két nagy korszaka közé, akkor ezáltal erősen csökken már a feltételezett „platóni reform" jelentősége. Ennek a harmadik fokozatnak a megkísérelt közbeiktatása azonban TOEPLITZ részéről valójában nem volt több, mint lélektani előkészítés a „ZEUTHEN-theória" következő revíziójához:

„Elképzelhető volna az is, hogy a nagy matematikusok, még azok is, akik PLATÓN akadémiájához tartoztak, *nem* PLATÓN *ösztönzésére hajtották volna végre a reformot, hanem a matematika belső lényegének engedelmeskedve, és hogy* PLATÓN *lett volna az, aki tőlük tanult, amikor módszerüket az általános ismeretelméletre alkalmazta.*"[183]

A ZEUTHEN-theóriának ez a revíziója meglehetősen hűvös fogadtatásra talált. O. BECKER pl. csak a következőt jegyezte meg TOEPLITZ idézett gondolatára:[184]

„E hipotézist se bizonyítani, se cáfolni nem lehet, mivel olyan kevés hiteles egykorú forrás áll a rendelkezésünkre. Annyit azonban mégis bizonyosra vehetünk, hogy PLATÓN *volt az első, aki világosan felismerte: a matematika elemi felépítéséhez szigorú módszeresség kell*; *ezzel pedig a pozitív matematikai kutatás fejlődését is döntő mértékben elősegítette.*"

Nem csodálkozhatunk azon, hogy O. BECKER 1927-ben még annyira hangsúlyozta az egykorú hiteles források hiányát s ebben látta a platón-előtti matematika megismerésének nagy akadályát. A páros és páratlan elméletét, ezt az V. századból származó tételsorozatot csak 1936 óta ismerjük, éppen O. BECKER egyik kitűnő dolgozata nyomán.[185] Annál különösebb viszont, hogy O. BECKER ZEUTHEN theoriáját az állítólagos „platóni reformról" még később sem akarta feladni. 1951-ben pl. egyik recenziójában bírálta B. L. van der WAERDENnek azt a feltevését, hogy az euklidészi „Elemek" VII. könyve még az i. e. V. századból származik, megjegyezvén, hogy: „a VII. könyv mai tökéletes formája talán későbbi átdolgozás eredménye, egy olyan átdolgozásé, amelyet talán az Akadémia matematikusainak köszönhetünk."[186] Nem kétséges,

[182] I. m. 201.

[183] Uo. 201—202.

[184] „Mathematische Existenz" 250, 2. jegyzet.

[185] Quell. u. Studien etc. B 3 (1936) 533—553. Vö. O. BECKER, Grundlagen der Mathematik 1954, 38 kk.

[186] Gnomon 23 (1951) 38 kk.

hogy BECKER maga is tisztában volt azzal: mennyire indokolatlan ez a szkepszise. Éppen azért rögtön hozzá is fűzte előbbi megjegyzéséhez: „Persze, B. L. van der WAERDEN joggal hivatkozhatnék arra, hogy egy olyan szigorú logikával felépített rendszernél, mint EUKLIDÉS VII. könyve, aligha szabad különbséget tennünk tartalom és forma között." — Az előbbi megjegyzés tehát, amely szerint EUKLIDÉS VII. könyvét az Akadémia matematikusai „átdolgozták volna", csak arról tanúskodik, hogy BECKER még 1951-ben sem akarta feladni ZEUTHEN régi elméletet: PLATÓN kortársai gyökeres reformot hajtottak végre az egykorú matematikában.

Azt hiszem, e dolgozat utolsó fejezetében nem szükséges még egyszer összefoglalnom véleményemet a „platóni reform" kérdéséről. Fontosabb lesz talán ehelyett rámutatnom e túlhaladott elméletnek az eredetére.

Az antik hagyomány csakugyan többször hangsúlyozza PLATÓN szoros kapcsolatát korának matematikájához. PROKLOS pl. ezt írja:[187] „PLATÓN buzgó tanulmányainak köszönhető a matematikai diszciplinák, különösen pedig a geometria fellendülése. Írásai telis-tele vannak matematikai gondolatokkal, és ő maga mindig arra törekszik, hogy a filozófia híveiben felébressze a csodálatot ezek iránt a dolgok iránt." Ha ehhez hozzászámítjuk még, hogy e kor nagy matematikusai, THEAITÉTOS, EUDOXOS és még sokan mások, akiket PROKLOS felsorol, PLATÓN barátai, illetőleg a matematikában mesterei, vagy a filozófiában tanítványai voltak, csakugyan elképzelhetőnek tartjuk majd, hogy PLATÓN működése talán a matematika szempontjából is lényeges lehetett. (Hiszen ez a dolgozat is a rendszeres matematika eredetére vonatkozó elméletet úgy építette fel, hogy közben állandóan figyelemmel volt PLATÓN műveire is.)

Arról azonban sehol sem beszél az antik hagyomány, hogy PLATÓN reformot vagy pláne fordulatot hozott volna a matematika fejlődésében. Úgy látszik tehát, az az állítás, hogy „PLATÓN lett volna az első, aki felismerte: a matematika elemi felépítéséhez szigorú módszeresség kell, és hogy PLATÓN ezzel a pozitív matematikai kutatás fejlődését is döntő mértékben elősegítette volna", indokolatlan túlzás a modern történeti kutatás részéről. — Még abban az esetben is, ha PLATÓNnak a matematikához való viszonyát *nem* úgy ítélnénk meg, ahogy e dolgozatban kifejtett elméletemből következik — hogy ti. mind PLATÓN filozófiája, mind pedig a vele egykorú matematika *közös gyökerekből,* eleai dialektikából sarjadtak ki —, még akkor is kézenfekvőbb volna REIDEMEISTER elmélete,[188] hogy ti. PLATÓN vette volna át az indirekt bizonyítás módszerét a matematikából.[189]

De mi adhatott akkor mégis okot arra, hogy kialakuljon ZEUTHEN külö-

[187] Proclus 66, 8 kk.
[188] K. REIDEMEISTER, i. m. 44—65.
[189] Lásd ehhez még B. L. v. d. WAERDEN, Erwachende Wissenschaft 247.

nös elmélete a „platóni reformról", és arra, hogy ez az elmélet ilyen nagy mértékben el is terjedjen? — Azt hiszem, hozzájárulhatott ehhez az az indokolatlan bizalmatlanság is, amelyet a történeti kutatás — legalábbis régebben — az i. e. V. század egyik kiváló görög matematikusával, a chiosi HIPPOKRATÉSszel szemben tanúsított. Bár ezúttal nem térhetek ki részletesebben HIPPOKRATÉSnek a holdacskák quadraturájáról írt munkájára, mégis emlékeztetnem kell itt néhány olyan véleményre erről a munkáról, amely egyszersmind azt is illusztrálhatja, hogyan támogatta a HIPPOKRATÉSszel szemben tanúsított bizalmatlanság a „platóni reform" elméletét.

Mindenekelőtt érdemes lesz felhívnom a figyelmet arra, hogy régebben még azt sem tartották valószínűnek: már HIPPOKRATÉS is alkalmazhatta volna az indirekt bizonyítást matematikai levezetéseiben?[190] HIPPOKRATÉS tudásának és képességeinek ez a megítélése éreztette hatását a szövegkritikában is. Különböző megokolásokkal ugyan, de mégiscsak kirekesztették SIMPLICIUS szövegéből mindazokat a részeket, amelyek indirekt bizonyításokat tartalmaztak, mondván, hogy ezek nem magától HIPPOKRATÉStől származnak, inkább csak EUDEMOS kiegészítései lehetnek.[191] A „megtisztított" szöveg interpretálásában még tovább mentek; mindent elkövettek, hogy HIPPOKRATÉSt mint igazi *szofistát* mutassák be.

SIMPLICIUS szövege pl. azt állítja: HIPPOKRATÉS bebizonyította, hogy „körök területei úgy aránylanak egymáshoz, mint az átmérőikre emelt négyzetek". Minthogy azonban SIMPLICIUS szövege e tétel bizonyítását *nem* közli, feltették a kérdést: vajon HIPPOKRATÉS csakugyan hibátlanul be tudta-e bizonyítani ezt a tételt? Az a bizonyítás ugyanis, amelyet erre a tételre EUKLIDÉSnél olvasunk (Elem. XII 2), PLATÓN kortársától, EUDOXOStól származik, vagyis ezt HIPPOKRATÉS aligha ismerte. Ezért aztán O. TOEPLITZ megkísérelte már előbb is említett cikkében egy olyan „kevésbé tökéletes bizonyítás" rekonstruálását, amelyet — véleménye szerint — már HIPPOKRATÉS is adhatott tételére. TOEPLITZ tehát *feltette*, hogy HIPPOKRATÉS bizonyítása szabályos sokszögekből (4, 8. 16, 32, ..., n) indult ki. Ezekre hibátlanul ki tudta mutatni HIPPOKRATÉS, hogy két szabályos sokszög területe (A és a), csakugyan úgy aránylik egymáshoz, mint a megfelelő körök rádiuszaira (R és r) emelt négyzetek; tehát: $A:a = R^2:r^2$. Ebből viszont — TOEPLITZ szerint — arra következtetett volna HIPPOKRATÉS, hogy ugyanez érvényes a két kör területére (K és k) is: $K:k = R^2:r^2$, minthogy a körbeírt sokszögek területei az oldalszám növelésével *láthatóan* közelednek a kör területéhez.

Miután TOEPLITZ rekonstruálta ezt a naív „bizonyítást" HIPPOKRATÉS

190 Lásd a 179. jegyzetet.

191 Lásd uo. 452. lap.

számára — anélkül, hogy erre bármilyen adatot talált volna az antik hagyományban, egyszerűen csak fantáziából —, mindjárt le is szűrte belőle a tanulságot:[192]

„EUDOXOS genialitása kellett ahhoz, hogy felismerjék: végtelen folyamatról van itt szó, amely áttöri a tiszta bizonyítás kereteit. Az *n* oldalú sokszög alapján a két kör, *K* és *k*, területére való következtetés logikai ugrás, amelynek nincs axiómatikus igazolása. *És ez nem volt az egyetlen eset, ahol ilyen ugrást követtek el. Megismétlődött ez egy egész sor más tételnél is, úgy ahogy a szofista tanítómesterek előadták őket.*"

Ezután következik TOEPLITZnél az eudoxosi axióma jellemzése, amely véleménye szerint nélkülözhetetlen HIPPOKRATÉS tételének a bizonyításához,[193] majd pedig hatásos kontrasztban hasonlítja össze a „szofistát" és az „igazi platóni tudóst":[194]

„az egyik oldalon áll tehát a *szofista iskolamesterek álláspontja,* akik elegánsan megteszik a titokzatos ugrást a végtelenbe, a másik oldalon viszont *a platóni akadémiára jellemző művészi módszer:* elkerülni minden gondolati ugrást, szigorúan megmaradni a véges geometria keretei között, és mindent more geometrico levezetni EUDOXOS egyetlen új axiómájából."

Világosan bizonyítja e két legutóbbi idézet, hogy tulajdonképpen *kettős* történeti konstrukcióval van dolgunk. — Ahhoz, hogy kimutathassák a matematika „platóni reformját", előbb rekonstruálniok kellett azt a „szofista matematikát", amely a reform *előtt* lett volna érvényben.[195] Nem szükséges talán hangsúlyoznom, hogy a józan kritika ezt a kettős konstrukciót egyáltalán nem fogadja el. Ami a „szofista matematikát" illeti, erről ma már senki sem beszél, vagy legalábbis nem abban az értelemben, mint ahogy TOEPLITZ beszélt róla. Azok a szofisták, akik egyben matematikusok is voltak, egyáltalán nem váltak szégyenére a matematikának. — Ami viszont a matematika „platóni reformját" illeti, bár ezt a gondolatot — tudomásom szerint — előttem még senki sem cáfolta érvekkel, valójában ma már ennek az elgondolásnak is csak az emléke él.

Azt hiszem azonban e dolgozat befejezéseként válaszolhatok egy olyan kérdésre is, amelyet legutóbb TOEPLITZ fogalmazott meg éppen a „platóni reform" problémájával kapcsolatban. TOEPLITZ ugyanis említett cikkében feltette a kérdést:

192 „Antike" (folyóirat) I 1925 182—183.

193 O. BECKER legutóbb (Archiv f. Begriffsgesch. IV 218 kk.) megmutatta, hogy HIPPOKRATÉS tételét egyszerűbb eszközökkel is hibátlanul bizonyíthatta.

194 „Antike" (folyóirat) I 1925 192.

195 Az újabb kutatás HIPPOKRATÉSszel kapcsolatban már nem „szofista" matematikáról beszél, hanem éppen bizonyításainak feltűnő *szigorúságát* emeli ki; vö. pl. B. L. v. d. WAERDEN, Math. Ann. 120, 139 - 140 és „Erwachende Wissenschaft" 214.

„Vajon a matematika története során volt-e idő, amikor a filozófia döntő módon szólt bele a matematikába, és a filozófia alakította-e ki ennek a tudománynak igazi, végleges formáját, vagy talán mindezt önmagából teremtette-e meg a matematika?"

Az itt összefoglalt kutatások értelmében a rendszeres és deduktív matematika történetének legelső szakaszában nem volt egyéb, mint a filozófiának, közelebbről az eleai dialektikának egyik speciális ága. A görög matematika tulajdonképpen a *geometria* elméleti megalapozásával szakadt ki a filozófiából és lett tőle függetlenné.

Függelék

ARISTOTELÉS *és az euklidészi princípiumok*

A történeti kutatás már többször megkísérelte, hogy a görög matematika axiómarendszerének kialakulását ARISTOTELÉSből kiindulva magyarázza (lásd pl. TH. HEATH művét, „The Elements, Euclid, Cambridge 1908" a Bevezetésben; K. v. FRITZ többször idézett dolgozatát 1955-ből és O. BECKERnek ehhez kapcsolódó megjegyzéseit: Archiv f. Begriffsgesch. IV 210 kk.). Nemcsak azért érthető ez, mert ARISTOTELÉS műveiben gyakran hívatkozik az egykorú matematikára, saját gondolatait többször matematikai példákkal illusztrálja, sőt néha vitatkozik is a matematikusokkal, hanem még inkább azért, mert az egész ránk maradt ókori irodalomban ARISTOTELÉS a legrégibb olyan szerző, aki egyik művében — az „Analytica posteriora"-ban — a matematikai axiómatika kérdéseit összefüggően tárgyalja. Nyilvánvaló, hogy a modern matematikatörténeti kutatás *nem hagyhatja figyelmen* kívül ARISTOTELÉSnek gyakran nagyon értékes adatait. A görög matematika axiómarendszerének sok történeti problémáját egyáltalán nem is tudnánk megoldani, ha nem állna rendelkezésünkre ARISTOTELÉS mint forrás.

Mégis, ha az euklidészi axiómarendszer történeti magyarázatát tűzzük ki célul, vigyáznunk kell: nehogy túlértékeljük ARISTOTELÉS magyarázatait. Nyilvánvaló ugyanis, hogy ARISTOTELÉS magyarázatai nagyon sok esetben *egyáltalán nem alkalmazhatók* EUKLIDÉS-re. tekintsük át pl. röviden, hogyan különbözteti meg ARISTOTELÉS az Analytica posteriora első könyvének második fejezetében az egyes matematikai pricípiumokat (a következőkhöz lásd K. v. FRITZ, i. m. 25 kk.).

ARISTOTELÉS mindenekelőtt megkülönbözteti a θέσις-t az ἀξίωμα-tól. A „thesis"-ről azt állítja, hogy ez — éppenúgy mint minden princípium — bizonyíthatatlan, és hogy erre (a „thesis"-re) nincs is okvetlenül szüksége mindenkinek, aki valamit a szó tudományos értelmében tanulni akar.

Az „axióma” szerinte éppen abban különbözik a „thesis”-től, hogy mindenki, aki a szó tudományos értelmében fel akar fogni valamit, az „axióma” birtokában kell hogy legyen. A „thesis”-t a továbbiakban felosztja aztán „hypothesis”-re és „horismos”-ra; az utóbbi *(ὁρισμός)* nála a „definíció” neve. — Rendkívül érdekes az is, miben különbözik — szerinte — a „hypothesis” a „horismos”-tól. A „hypothesis” ugyanis azt mondja ki, hogy valami *van* vagy *nincs*. A „horismos” (a definíció) kevesebb ennél. Mert a definíció pl. az egység esetében csak annyit mond ki, hogy az egység a mennyiség szerint oszthatatlan valami; de a definíció önmagában még nem állapítja meg az egységnek a *létezését* is; a létezés megállapítása egy olyan „hypothesis”-nek a feladata, amely párhuzamos a megfelelő „horismos”-szal. A princípiumok felosztásának arisztotelészi schémája tehát a következő:

ἀρχαὶ

θέσις *ἀξίωμα*

ὑπόθεσις *ὁρισμός*

Hogyan lehetne mármost ezt az arisztotelészi schémát összhangba hozni Euklidésszel? — Aristotelés axiómáit minden további nélkül azonosíthatjuk az euklidészi axiómákkal, és ugyanígy talán a definíciókat is (Euklidésnél „horoi”) a „horismos”-szal. De már a következő lépésben megakadunk. Megpróbálhatnánk ugyan az euklidészi *posztulátumot* („aitéma”) azonosítani az arisztotelészi „hypothesis”-szel, minthogy mind a kettő az exisztenciára vonatkozik, de egyáltalán nem értjük — Euklidés szempontjából — a „hypothesis” és „horismos”-nak arisztotelészi összefoglalását a „thesis”-ben. Ha Euklidés szövegéből indulunk ki, semmi értelme sincs annak az állításnak, hogy a posztulátumok közelebbi rokonságban állnak a definíciókkal, mint az axiómákkal!

De igazában nem is azonosíthatjuk az arisztotelészi „hypothesis”-t az euklidészi „aitéma”-val. Euklidés „aitéma”-i lényegükben mások mint Aristotelés „hypothesis”-ei. Hiszen Aristotelés a következőket is állítja még (An. post. I 10, 76 b 7 kk. vö. K. v. Fritz, i. m. 54—55): a matematikusok bebizonyítják az aritmetikában a párosnak és a páratlannak, a geometriában pedig az inkommenzurábilisnek és a háromszögnek a létezését. — Ennek az állításnak az első fele — Euklidés szempontjából — egyszerűen tévedés. Euklidés sehol sem bizonyítja be a páros és a páratlan létezését abban az értelemben, ahogy ezt Aristotelés kívánná. Euklidés ezeket a fogalmakat egyszerűen csak definiálja. — Aristotelést olvasva az a benyomásunk, mintha Aristotelés valami egészen mást értene exisztencián, mint amit mi az eleatákból és Platónból kiindulva Euklidésnél is fölismertünk.

Le kell tehát szögeznünk — anélkül hogy kísérletet tennénk ezúttal az Aristotelés-interpretációra —, ARISTOTELÉSnek nemhogy az axiómatikáról adott magyarázatai, de még csak a terminológiája sem alkalmazható az euklidészi „Elemekre". Úgy látszik, minden olyan kísérlet, amely megpróbálja összhangba hozni egymással ezt a két különböző — arisztotelészi és euklidészi — terminológiát, erőszakosan meghamisítja közülök legalább az egyiket.

Azt viszont, hogy ARISTOTELÉS terminológiája az ókor többi, euklidész-utáni matematikusára *nem* alkalmazható, megállapította már K. v. FRITZ is; bár ő ezt a tényt — ARISTOTELÉSből kiindulva — inkább úgy fogalmazta meg, hogy „a matematikusoknál a princípiumok elnevezését illetően teljes a terminológiai zűrzavar és összevisszaság".

(Beérkezett: 1960. VI. 5.)

A Magyar Tudományos Akadémia
Matematikai Kutató Intézete

VIZSGÁLATOK EGYES URÁN-HASADÁSI TERMÉKEK ADSZORPCIÓJÁRA HUMUSZPREPARÁTUMON

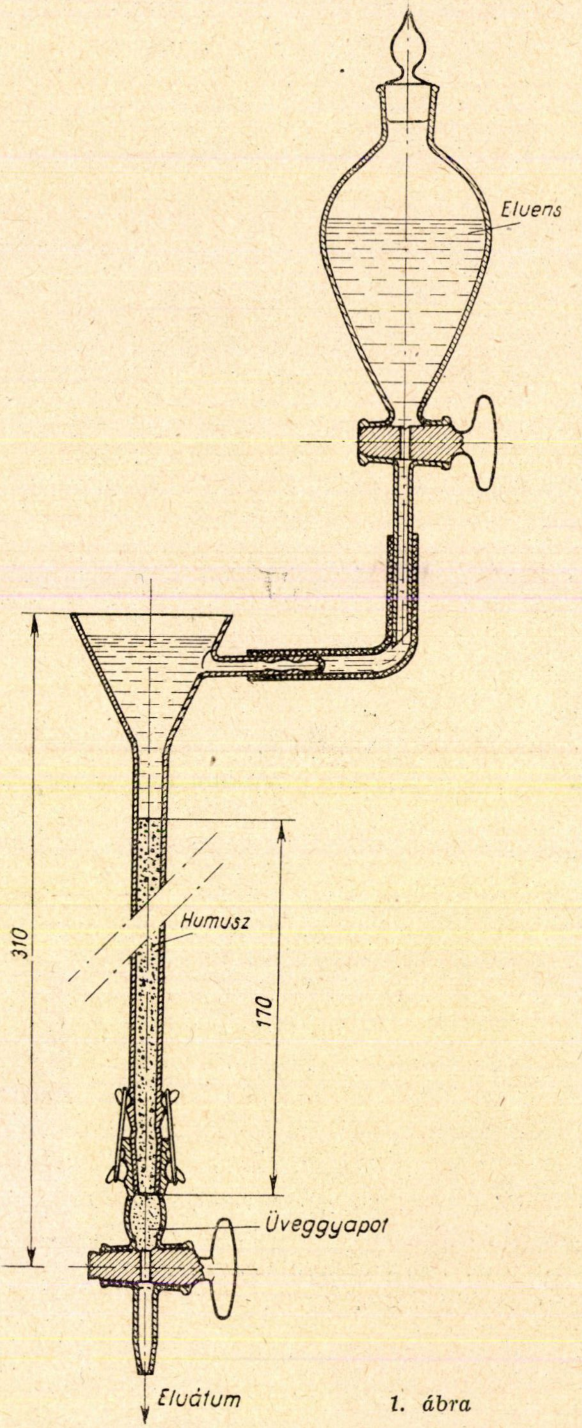
Írta: SZALAY SÁNDOR és SZILÁGYI MÁRIA

Megvizsgáltuk a Cs—137, J—131, Sr—90, Y—90, Ba—140 és La—140 izotópok adszorpcióját humuszsavban dúsított tőzegkészítményen. Megállapítottuk, hogy a J—131 anion kivételével valamennyi erősen adszorbeálódik rendkívül híg, vizes oldatból. Az adszorpció erősségére vonatkozólag végzett eluciós kísérleteink megerősítették SZALAY és munkatársai eredményeit uranyl és más kationok adszorpciójával kapcsolatban. Az adszorpció erőssége nagymértékben nő a kationok vegyértékével és az atomsúllyal. A vizsgálatok alapján feltehető, hogy a termő talaj humusztartalma erősen adszorbeálja az atombomba robbantások útján az esővel a talajba jutó hasadási termékek nagy részét, és visszatartja azokat attól, hogy az ivóvízbe jussanak.

Az atomipar fejlődésével egyre nagyobb mértékben kerülhetnek uránhasadási termékek a bioszférába, különösen a természetes vizekbe. Az atom- és hidrogénbomba robbantási kísérletek útján is nagy mennyiségű hasadási termék jut le a föld felületére a légköri csapadékkal.

SZALAY és munkatársainak ([1], [2], [3], [4], [5], [6], [7]) az elmúlt évtized folyamán végzett vizsgálatai megállapították, hogy a természetben mindenütt nagy mennyiségben fellelhető humuszsavak az UO_2^{++} kationt, valamint más több vegyértékű és nagy atomsúlyú kationokat igen erősen adszorbeálnak. Az adszorpciós dúsítási tényező többnyire tízezerszeres. Az adszorpció maga tulajdonképpen egy kationkicserélő folyamat, amely két számadattal, egy dúsítási tényezővel és egy adszorpciós kapacitással jellemezhető.

Minthogy a hasadási termékek jelentős része kationtermészetű és egynél több vegyértékű, továbbá aránylag magas atomsúlyú, feltehető volt, hogy ezek a természetből a talaj humuszsav tartalmán erősen adszorbeálódnak, és így nem jutnak be a talajon keresztül a talajvízbe, valamint esetleg a növények gyökerein nem szívódnak fel a növényekbe. Minthogy a hasadási termékek száma igen nagy, és közöttük a periódusos rendszer nagyszámú eleme megtalálható, itt közölt vizsgálataink csak bevezető vizsgálatok néhány hasadási termékre vonatkozóan. Eluciós kísérletekkel vizsgáltuk meg, hogy a humuszon erősen adszorbeálódott hasadási termékek bizonyos körülmények között milyen sorrendben szabadulnak fel a kationkicseréléses kötésből.

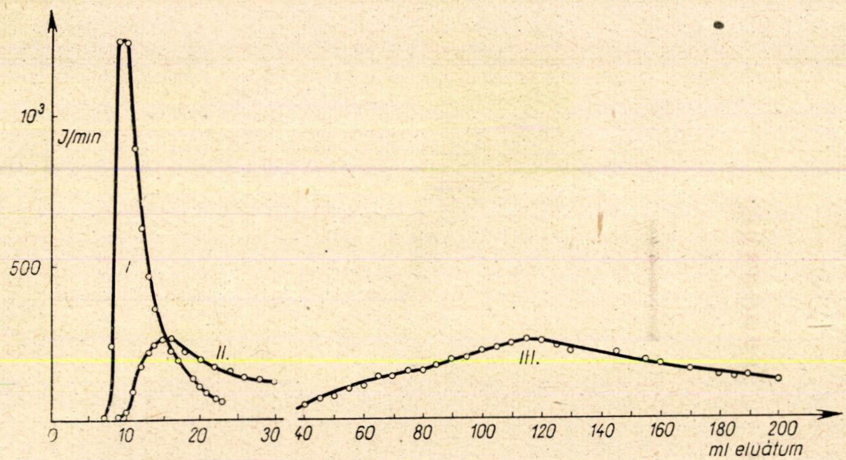


1. ábra

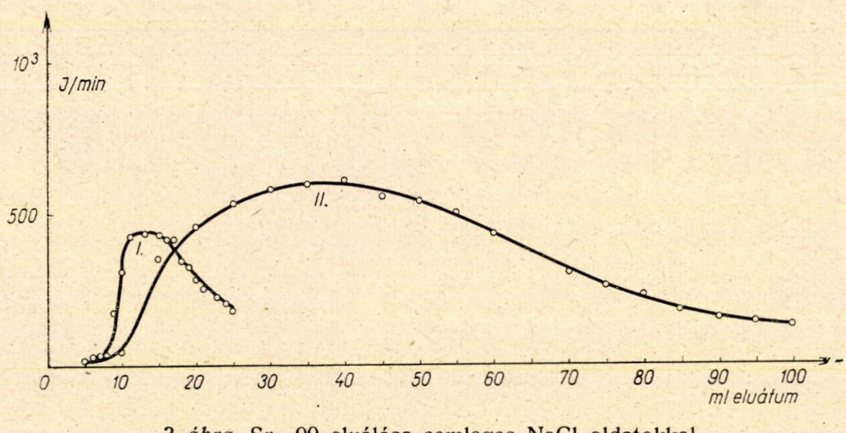
Humuszpreparátum készítése és felhasználásának módja

A tőzeg a humuszsavak legdúsabb és aránylag legtisztább forrása, többnyire körülbelül felerészben humuszsavakból áll. A keceli tőzegfejtő telepről származó, igen fiatal tőzeget durva szitán bő vízzel kimostuk az agyagtól és homoktól. Ezután 250 μ lyukméretű szitán vizesen átmostuk és vízben úsztattuk néhány órán át, hogy a fölöződő cellulózban gazdag kisebb fajsúlyú frakciótól elválasszuk. A száraz anyagot néhány órán át mostuk benzollal a kátrányos, bitumenes anyagok eltávolítására, majd szárítás után néhány órán át ráztuk 96 %-os alkohollal, hogy a benzolt eltávolítsuk, és ezáltal hidrofil sajátságát viszszanyerje, továbbá, hogy az alkoholban oldódó, alacsonyabb molekulasúlyú növényi savakat kioldjuk belőle. A száraz preparátummal nagyobb méretű üvegcsövet töltöttünk meg, és 0,1 n HCl-at engedtünk át rajta, míg összes kationkicserélésre alkalmas csoportjai H^+-alakra cserélődtek ki, a fölösleges savat pedig deszt. vizes mosással távolítottuk el. E folyamatot p_H mérővel ellenőriztük.

Az így előkészített tőzegpreparátum adszorpciós vizsgálatok elvégzésére alkalmas. A kísérletekhez esetenként 0,75 g-ot használtunk fel. Deszt. vízben megáztatva, buborékmentesen megtöltöttük vele az 1. ábrán látható 8 mm átmérőjű üvegcsövet, amelyet ilyen súlyú preparátum 17 cm magasra tölt meg. Az alsó csap nyitásával szabályozható az eluátum csepegési sebessége, míg a felső csap az eluens szintjének állandósítását és így a preparátum oszlopon levő nyomás állandóságát biztosítja. Nagyobb aktivitások alkalmazása esetén a kicsepegőhöz csillámablakos átáramoltató betét [8] csatlakozik, amelyet végablakos GM-cső ablaka alá helyezve GM-csöves

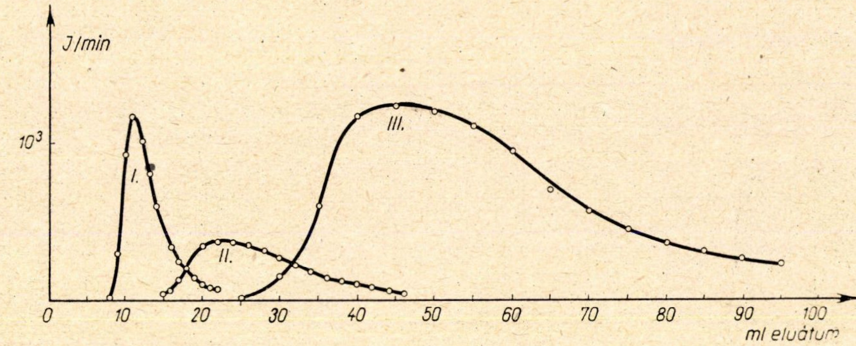


2. ábra. Sr—90 eluálása HCl oldatokkal. Abszcissza: az összes átfolyt eluáló folyadék térfogata; ordináta: az eluáló folyadék specifikus aktivitása. I. eluens 0,1 n HCl $p_H = 1$ I/min/ml egységben, II. eluens 0,019 n HCl $p_H = 1,9$ I/min/ml egységben, III. eluens 0,004 n HCl $p_H = 2,4$ I/min/5 ml egységben

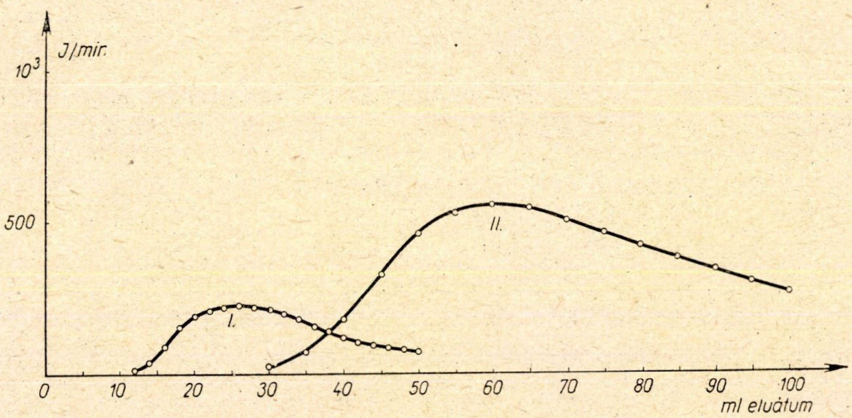


3. ábra. Sr—90 eluálása semleges NaCl oldatokkal.
. eluens 0,1 n NaCl I/min/ml egységben, II. eluens 0,05n NaCl I/min/5 ml egységben

berendezésünkkel folyamatosan mérhetjük az eluátum aktivitás változását. Ellenkező esetben az eluátumot cseppenként, ml-ként, vagy nagyobb térfogatokban kell szedőbe gyűjteni és aktivitását bepárlás után meghatározni.



4. ábra. Sr—90 eluálása semleges $CaCl_2$ oldatokkal. I. eluens 0,05n $CaCl_2$ I/min/ml egységben, II. eluens 0,01 n $CaCl_2$ I/min/ml egységben, III. eluens 0,005n $CaCl_2$ I/min/5ml egységben

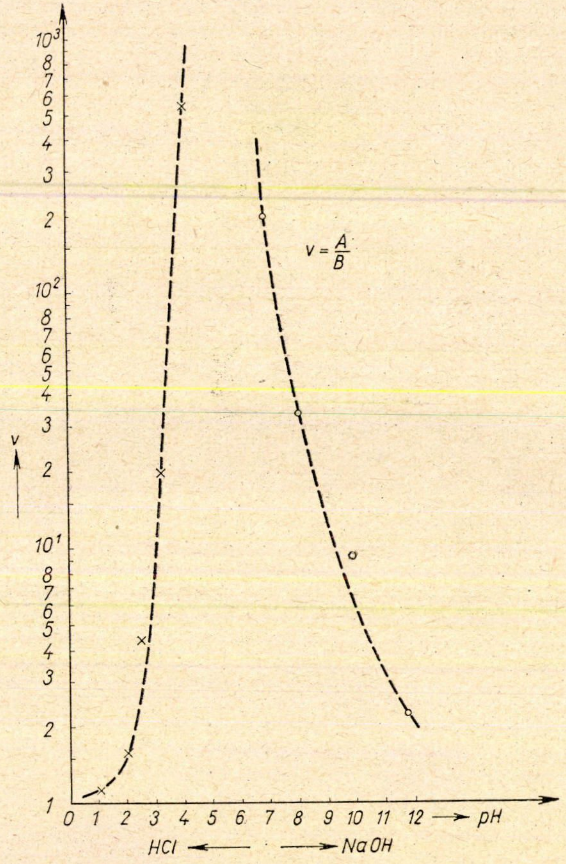


5. ábra. Sr—90 eluálása $FeCl_3 \cdot 6H_2O$ oldatokkal (vízben!) I. eluens 0,01 n $FeCl_3 \cdot 6H_2O$ $p_H = 2{,}4$, I/min/ml egységben, II. eluens 0,005n $FeCl_3 \cdot 6H_2O$, $p_H = 2{,}65$, I/min/5ml egységben

Eluensekül pontosan ismert p_H-jú és különböző koncentrációjú HCl, NaCl, $CaCl_2$ és $FeCl_3 \cdot 6H_2O$ vizes oldatait használtuk. Az eluensek kiválasztásánál a HCl oldatoktól eltekintve az vezetett bennünket, hogy ioncserét végezhessünk egy, két- és háromvegyértékű olyan kationokkal, amelyek előfordulása a természetes vizekben, pl. ivóvízben viszonylag gyakori.

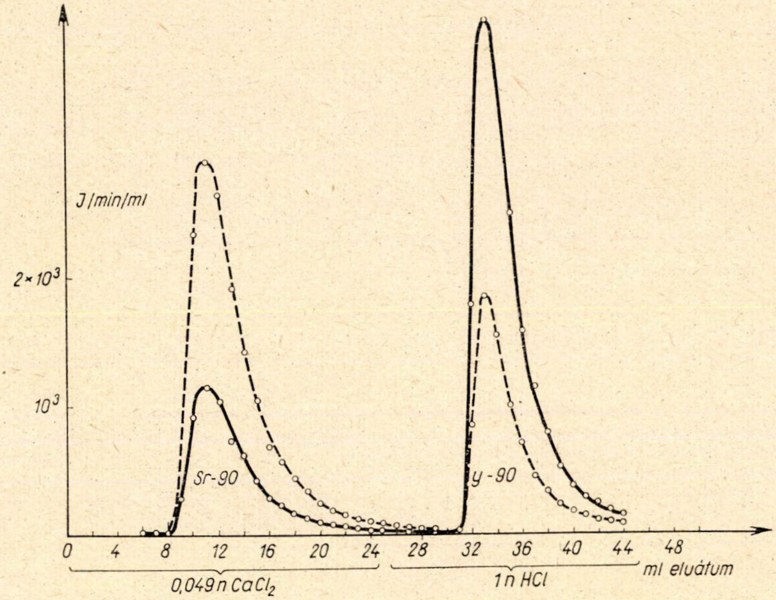
Adszorpció, elució

A szokásos módon előkészített preparátumoszlopra (egyensúlyi p_H vízben 4,15), 0,1 μC Sr—90-et adszorbeáltattunk $p_H = 6$ oldatból, és a fent említett eluensek különböző koncentrációjú oldataival eluálást végeztünk. Megjegyezzük, hogy az adszorbeáltatott aktív oldatban a Sr—90 és Y—90 rádióaktív egyensúlyban volt, továbbá még azt, hogy adszorbeáltatás után közvetlenül 40—50 ml deszt. vízzel öblítettük át az oszlopot, és a lecsepegő folyadék aktivitását ellenőrizve, megállapítottuk, hogy az aktív anyag teljes egészében adszorbeálódott az oszlopon. Egy hordozható sugárzásmérő blendézetlen GM csövét mozgatva az oszlop mellett, kikerestük az aktivitásmaximum helyét, amely az oszlop felső részében jelentkezett. Ilyen előzmények után kezdtük meg az eluálást.



6. ábra. Ba—140 izotóp áttörési kapacitásgörbéje az eluens-p_H függvényében

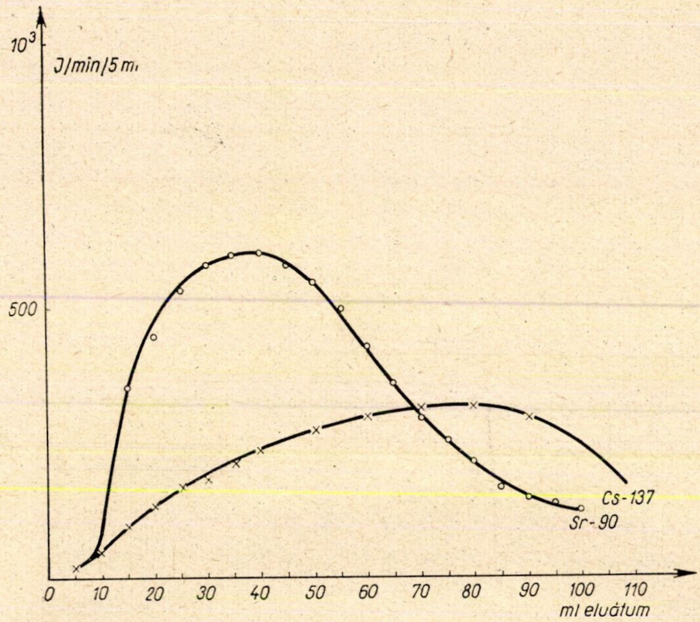
A 2—5. ábrák alapján látható, hogy az eluálás kezdete eltolódik az eluensek hígításával. Ebből arra lehet következtetni, hogy az eluens kationjai először a preparátum H^+ alakban levő kationcserélő aktív helyeire lépnek be, és csak a H^+ ionok lecserélése után kezdik meg más anyagok ioncseréjét. Úgy is mondhatnánk, hogy az oszlopon belül először létre kell jönnie a lecserélő ionok egy olyan koncentrációjának, amely mellett az ioncsere egyáltalán megindulhat. Ilyen módon az eluálás megindulásának kezdetét az eluenskoncentráció, ill. p_H függvényeként tekinthetjük és az ún. „Breakthrough" kapacitás adattal jellemezzük. Ez az érték (V) egy hányadosból adódik, amelynek nevezőjében az oszlop térfogata (B), számlálójában pedig a kérdéses anyag eluálását éppen megindító eluenstérfogat (A) szerepel. Egy ilyen p_H-áttörési kapacitás függvénygörbe felvételét az említett preparátumoszlopon Ba—140 izotóppal végeztük el, különböző koncentrációjú HCl és NaOH oldatokkal végezve az eluálást. Az így nyert eredményt a 6. ábra szemlélteti.



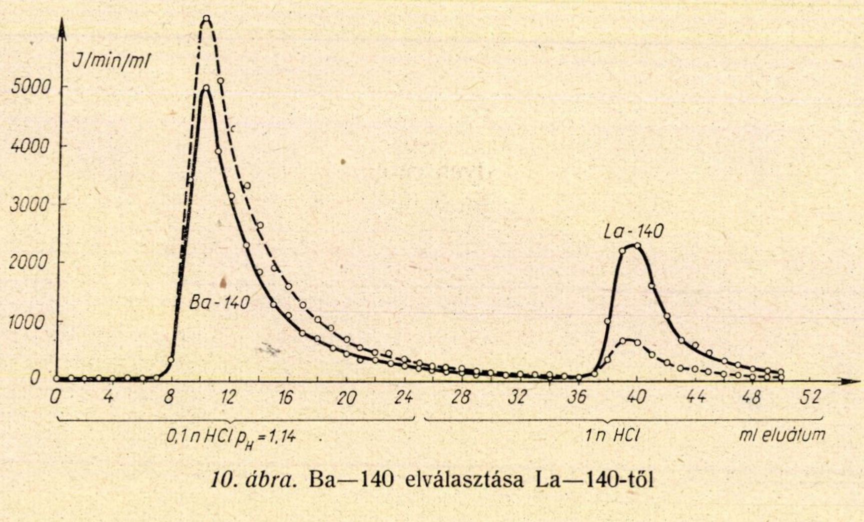
7. ábra. Sr^{++}—90 elválasztása Y^{+++}—90-től

8. ábra. Cs^+—137 eluálása HCl oldatokkal. I. eluens 0,1 n HCl $p_H = 1$, I/min/ml egységben, II. eluens 0,019 n HCl $p_H = 1,9$ I/min/ml egységben, III. eluens 0,004 n HCl $p_H = 2,4$, I/min/5ml egységben. A bal oldali függőleges tengely az I. görbére, a jobb oldali pedig a II. és III. görbékre vonatkozik

Az ábrából jól látható, hogy $p_H = 4$—6,5 között az áttörési kapacitás úgyszólván végtelenhez tart, tehát rendkívül nagy átöblítő folyadéktérfogatok sem képesek a megkötött Ba-ot a humuszról leoldani. Alacsonyabb p_H-értéknél a hidrogénionok kicseréléssel felszabadítják a Ba ionokat, viszont 6,5-nél

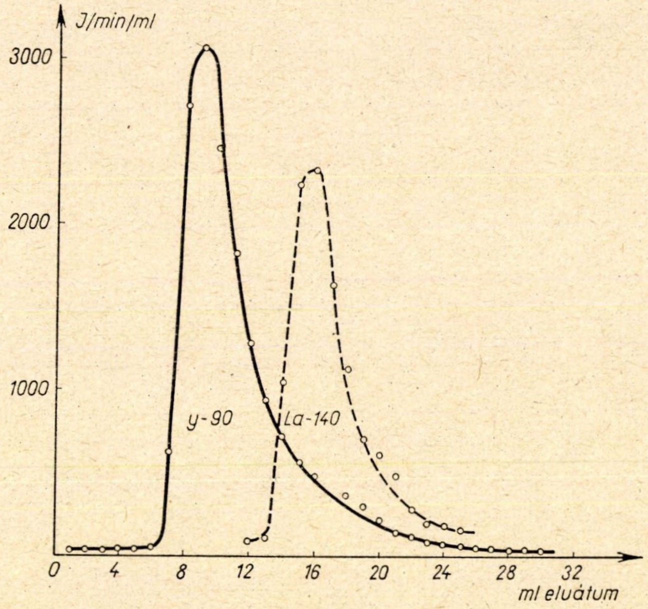


9. ábra. Sr—90 és Cs—137 eluálása 0,05 n NaCl oldattal. A két görbe két egymástól függetlenül végzett kísérlet eredménye, összehasonlításként együtt ábrázolva



10. ábra. Ba—140 elválasztása La—140-től magasabb p_H-érték esetén a humusz Na-humát alakjában sárgaszínű oldatba megy és így a megkötött Ba is felszabadul.

A következő kísérletben Y^{3+}—90-et választottunk el eluálással Sr^{++}—90-től (7. ábra). Az eluálási görbe mutatja, hogy nagyobb vegyértékű kationok jobban adszorbeálódnak alacsonyabb vegyértékűeknél, azonos atomsúly esetén. Ezt úgy állapítottuk meg, hogy Sr—90 teljes eluálása után az oszlop felső részére helyezett sugárzásmérő GM csövével ellenőriztük az Y—90 jelenlétét, sőt több ízben elvégeztük az Y—90 eluálását is 1 n HCl oldattal.



11. ábra. Y—90 és La—140 leoldása 1 n HCl eluenssel. A két görbe két egymástól független kísérlet eredménye, összehasonlításként együtt ábrázolva

Az ábrán a szaggatott görbe a preparátum készítésétől számított 3 nap elteltével készült mérés eredménye, amelyből jól látható a Sr—90 felaktiválódása és a tiszta Y—90 bomlása. Ilyen módon a Sr—90 és Y—90 különböző erősségű kötődését vegyértékeik különbözőségeinek tulajdonítjuk, minthogy atomsúlyuk megegyező érték.

Ebből a tényből következik, hogy közel azonos atomsúly esetén valamely egyvegyértékű elem izotópja könnyebben, ill. hígabb oldatokkal is leoldható a preparátum-oszlopról, mint a magasabb vegyértékűek. A 8. ábrán a Cs^+—137 eluálási kísérlet eredményét mutatjuk be. A humusz az egyvegyértékű Cs-t is adszorbeálja, ami a Na-al ellentétben a nagy atomsúlynak tulajdonítható.

A 2. és 8. ábrák összehasonlításakor látható, hogy HCl eluensekkel szemben a Cs—137 és Sr—90 nagyon hasonlóan viselkednek. A 9. ábrán a Sr—90 és Cs—137 azonos körülmények között történt eluciós görbéit látjuk összehasonlíthatóan. Az összehasonlításból látszik, hogy az egyvegyértékű Cs^{+}—137 erősebben adszorbeálódik a kétvegyértékű Sr^{++}—90-nél, amelynél atomsúlya lényegesen nagyobb. Y—90-nél azonban egyetlen esetben sem mutatott erősebb adszorpciós sajátságot. Ez a tapasztalat is azt mutatja, hogy az egyes kationok humuszpreparátumon történő adszorpciójára egyrészt a vegyérték gyakorol hatást, és másrészt az atomsúly. Az egyes adszorpciós folyamatok lejátszódásakor mindkét tényező befolyása egyidejűleg érvényesül, de különböző mértékben.

Megjegyezzük még, hogy Ba—140 és La—140-nel végzett eluciós kísérletek fentebb tett megállapításainkat szintén igazolták (10. ábra). Hasonlóan, a 11. ábrán együtt ábrázoltuk az Y—90 és La—140 eluciós görbéit 1 n HCl-al eluálva. Ez esetben azonos (III) vegyértékű, de különböző atomsúlyú kationok eluálásáról van szó.

KJ oldatban J—131 izotóppal ugyancsak hasonló kísérletet végeztünk, melynek során megállapítottuk, hogy a J—131 tőzegpreparátumunkon nem adszorbeálódott, mert az izotóp felöntése után alkalmazott deszt. vizes mosással teljesen eltávozott az oszlopról, tehát anionokkal szemben preparátumunk nem viselkedik adszorbensként.

Minthogy a ritkaföldfémek háromvegyértékű alakban kémiailag rendkívül egyformán viselkednek, joggal feltételezhető, hogy a humuszsavak a hasadási termékek közt olyan nagy számban szereplő ritkaföldfémeket mind megkötik, bár a többiekre nézve kísérleteket még nem végeztünk.

IRODALOM

[1] Szalay S.: A Magy. Tud. Akadémia III. Oszt. Közleményei, 4 (1954), 327—342.
[2] Szabó I.: A Magy. Tud. Akadémia III. Oszt. Közleményei, 8 (1958), 393—402.
[3] Szalay A.: Proceedings of the Second United Nations International Conference on the Peaceful Uses of Atomic Energy, Geneva, 2 (1958), 182—186. Geneva.
[4] Szalay A.: Acta Phys. Acad. Sci. Hung., 8 (1957), 25—37.
[5] Szalay S.—Földváry A.: A Magy. Tud. Akadémia III. Oszt. Közleményei, 1 (1950), 60—72.
[6] Szalay S.: A Magy. Tud. Akadémia VI. Oszt. Közleményei, 5 (1952), 167—185.
[7] Szalay A.: Acta Geologica Hungarica, 2 (1954), 299—311.
[8] Szalay S.—Szilágyi M.: Magy. Fiz. Folyóirat, 7 (1959), 419—420.

(Beérkezett: 1960. VI. 23.)

A Magyar Tudományos Akadémia
Atommag Kutató Intézete, Debrecen

A FÉLCSOPORTOK IDEÁLELMÉLETÉHEZ[1]

Írta: LAJOS SÁNDOR

Bevezetés

Egy nemüres S halmazt *félcsoportnak* nevezünk, ha értelmezve van benne egy asszociatív művelet, amely S bármely két meghatározott sorrendben vett eleméhez egy S-beli elemet rendel, amit ezen elemek szorzatának nevezünk. Ha még az $ab = ba$ feltétel is teljesül az S halmaz bármely két a, b elemére, akkor az S félcsoportot *kommutatív* félcsoportnak nevezzük.

Legyenek A és B az S félcsoport nemüres részhalmazai. Az AB szorzaton az ab alakú elemek összességét értjük, ahol a befutja A, b pedig B elemeit. Az S félcsoport nemüres T részhalmazát S *részfélcsoportjának* nevezzük, ha T is félcsoportot alkot ugyanarra a műveletre nézve, mint S. Ahhoz, hogy valamely T részhalmaz részfélcsoport legyen, nyilván szükséges és elégséges, hogy a $TT \subseteq T$ feltétel teljesüljön. Az S félcsoport L nemüres részhalmazát *baloldali ideálnak*, vagy röviden *balideálnak* nevezzük, ha $SL \subseteq L$. Az R nemüres részhalmazt *jobboldali ideálnak*, vagy *jobbideálnak* nevezzük, ha $RS \subseteq R$. Ha az S félcsoport I részhalmaza egyszerre baloldali és jobboldali ideál, akkor *kétoldali ideálnak*, vagy röviden *ideálnak* nevezzük.

Ebben a dolgozatban az imént definiált ideálfogalmak általánosításával foglalkozunk. Bevezetjük az (m, n)-ideál és az (m, n)-kváziideál fogalmát. Ezek közül az (m, n)-ideál speciálisan magában foglalja a baloldali és a jobboldali ideál, továbbá a biideál (l. [2]) fogalmát, az (m, n)-kváziideál pedig a kváziideál (l. [10]) fogalmának általánosítása. Az 1. §-ban szemléletes képet adunk az (m, n)-ideálokról (l. 1.6. tétel), majd megmutatjuk, hogy bármely félcsoport összes $(1, 1)$-ideáljai a komplexus szorzásra nézve félcsoportot alkotnak. A 2. §-ban az (m, n)-kváziideálok előállítását adjuk (m, n)-ideálok segítségével. A 3. §-ban a Neumann-reguláris félcsoportok esetét vizsgáljuk, s bebizonyítjuk, hogy Neumann-reguláris félcsoportban minden (m, n)-ideál (m, n)-kváziideál és megfordítva, vagyis a két fogalom egybeesik. Élesítjük a Neumann-regularitásra vonatkozó *Kovács—Iséki*-féle kritériumot, továbbá megmutatjuk, hogy Neumann-reguláris félcsoport összes $(1, 1)$-ideáljainak félcsoportja ismét Neumann-reguláris.

[1] A dolgozat főbb eredményeit ismertettem a *„Csoportok és általánosításaik"* kollokviumon, Lajos-forráson, 1959. szept. 4-én.

1. §. (m, n)-ideálok

1. 1. definíció. Az S félcsoport A részfélcsoportját *(m, n)-ideálnak* nevezzük, ha kielégíti az

$$A^m S A^n \subseteq A \tag{1}$$

összefüggést, ahol m, n nemnegatív egészek. (A^0 legyen az S félcsoporthoz nem tartozó olyan elem, amely az S félcsoporton egységelemként operál.)

Speciális esetek: a $(0, 1)$-ideál a balideál, az $(1, 0)$-ideál a jobbideál és az $(1, 1)$-ideál a biideál. Könnyű bizonyítani, hogy érvényes a következő állítás:

1. 2. lemma. *Egy S félcsoport bármely két (m, n)-ideáljának közös része S-nek (m, n)-ideálja.*

1. 3. definíció. Az S félcsoport valamely S_n részfélcsoportját *elérhető részfélcsoportnak* nevezzük, ha léteznek olyan $S_1, S_2, \ldots, S_{n-1}$ részfélcsoportjai S-nek, hogy az

$$S = S_0 \supseteq S_1 \supseteq S_2 \supseteq \cdots S_{n-1} \supseteq S_n$$

összefüggés érvényes, ahol S_i vagy baloldali, vagy jobboldali ideálja S_{i-1}-nek $(i = 1, 2, \ldots, n)$. A fenti részfélcsoportláncban a szomszédos tagok között fennálló egyoldali ideál kapcsolatok sorrendjét az r és l betűk egy ismétléses variációjával adhatjuk meg. Jelölje π az r, l szimbólumok egy rögzített ismétléses variációját. Az S félcsoport *π-ideáljának* nevezzük mindazokat az elérhető részfélcsoportokat, amelyekhez az r, l szimbólumok π ismétléses variációja tartozik. $\underset{1}{r} \cdots \underset{m}{r}\, \underset{1}{l} \cdots \underset{n}{l}$-ideál helyett rövidség kedvéért $r^m l^n$-ideált írunk.

Bebizonyítjuk, hogy az r és l szimbólumok felcserélhetők.

1. 4. tétel. *Egy tetszőleges S félcsoport A részhalmazára az alábbi állítások egymással ekvivalensek:*

(i) *A az S-nek rl-ideálja;*

(ii) *A az S-nek lr-ideálja;*

(iii) *A az S-nek $(1, 1)$-ideálja.*

Bizonyítás. Azt mutatjuk meg, hogy az S félcsoport A részhalmaza akkor és csak akkor $(1, 1)$-ideálja S-nek, ha A rl-ideál (lr-ideál). Legyen A rl-ideálja a tetszőleges S félcsoportnak. Akkor S-nek van olyan R jobbideálja, amelyben A balideál, azaz $A \subseteq R$, $RA \subseteq A$ és $RS \subseteq R$. Innen következik, hogy

$$ASA \subseteq RSA \subseteq RA \subseteq A,$$

vagyis A $(1, 1)$-ideál az S félcsoportban.

Fordítva, legyen A $(1, 1)$-ideál az S félcsoportban, azaz $ASA \subseteq A$. Akkor A balideál az S félcsoportnak az A részhalmazt tartalmazó legszűkebb jobbideáljában (ezt a továbbiakban az A részhalmaz által generált jobbideálnak fogjuk nevezni), mivel az A által generált jobbideál nyilván $A \cup AS$ és

$$(A \cup AS)A = AA \cup ASA \subseteq A \cup A = A,$$

tehát A valóban rl-ideál. Ezzel kimutattuk, hogy az (i) és a (iii) feltételek egymással ekvivalensek. Hasonlóan bizonyítható a (ii) és a (iii) feltételek ekvivalenciája, amivel a tétel bizonyítását befejeztük.

1.5. korollárium. *Egy tetszőleges S félcsoport A részhalmaza akkor és csak akkor π-ideálja S-nek, ahol π m számú r és n számú l szimbólum bármely ismétléses permutációját jelenti, ha A $r^m l^n$-ideálja S-nek.*

Ez az állítás azonnal következik az r és l szimbólumok felcserélhetőségéből. Most bebizonyítjuk az (m, n)-ideálokat szemléltető alábbi tételt:

1.6. tétel. *Egy S félcsoport A részhalmaza akkor és csak akkor π-ideálja S-nek, ahol π m számú r és n számú l szimbólum bármely ismétléses permutációját jelöli, ha A (m, n)-ideálja az S félcsoportnak.*

Bizonyítás. Az 1.5. korollárium szerint elegendő a tételt $r^m l^n$-ideálokra bizonyítani. Legyen tehát A egy $r^m l^n$-ideálja az S félcsoportnak. Akkor — A elérhető részfélcsoport lévén — az S félcsoportnak vannak olyan $R_1, R_2, \dots, R_m$ és $L_1, L_2, \dots, L_n$ részfélcsoportjai, amelyekre fennállnak a következő összefüggések:

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{l} R_1 S \subseteq R_1 \\ R_2 R_1 \subseteq R_2 \\ \dots \\ R_m L_1 \subseteq L_1 \\ L_1 L_2 \subseteq L_2 \\ \dots \\ L_{n-1} L_n \subseteq L_n \end{array}\right. \qquad (A = L_n \subseteq L_{n-1} \subseteq \dots \subseteq L_1 \subseteq R_m \subseteq \dots \subseteq R_1 \subseteq S).$$

Innen következik, hogy

$$A^m S A^n = L_n^m S L_n^n \subseteq L_n^{m-1}(R_1 S) L_n^n \subseteq L_n^{m-1} R_1 L_n^n \subseteq \dots \subseteq (L_n R_{m-1}) L_n^n \subseteq$$

$$\subseteq (R_m R_{m-1}) L_n^n \subseteq R_m L_n^n \subseteq (R_m L_1) L_n^{n-1} \subseteq L_1 (L_2 L_n^{n-2}) \subseteq \dots \subseteq L_n = A,$$

vagyis A valóban (m, n)-ideálja az S félcsoportnak.

Megfordítva, tegyük fel, hogy A (m, n)-ideál egy S félcsoportban. S-nek az A részfélcsoport által generált (m, n)-ideálja (vagyis az S félcsoport A-t tartalmazó legszűkebb (m, n)-ideálja) nyilván $A \cup A^m S A^n = \{A\}_{(m,n)}$. Az triviális, hogy $\{A\}_{(m,k)}$ balideál $\{A\}_{(m,k-1)}$-ben, $(k = 1, 2, \dots, n)$ és $\{A\}_{(i,n)}$ jobbideálja $\{A\}_{(i-1,n)}$-nek $(i=1,2,\ldots,m)$. Ebből következik, hogy az

$$L_n=A,\ L_{n-1}=\{A\}_{(m,n-1)},\ \ldots,\ L_1=\{A\}_{(m,1)},$$

$$R_m=\{A\}_{(m,0)},\ R_{m-1}=\{A\}_{(m-1,0)},\ \ldots,\ R_1=\{A\}_{(1,0)}$$

részfélcsoportok kielégítik a (2) feltételeket. Ezzel beláttuk, hogy A $r^m l^n$-ideálja az S félcsoportnak. Tekintettel az 1.5. korolláriumra, az 1.6. tétel bizonyítását befejeztük.

Ahhoz, hogy e tételnek a kommutatív félcsoportokra vonatkozó következményét levonjuk, definiálnunk kell két fogalmat.

1.7. definíció. Egy S félcsoport valamely kétoldali ideáljának kétoldali ideálját i^2-ideálnak fogjuk nevezni. *i^k-ideálnak* nevezzük az S félcsoport bármely i^{k-1}-ideáljának kétoldali ideálját. (k pozitív egész szám.)

1.8. definíció. Egy S félcsoport A részhalmazát *k-ideálnak* nevezzük, ha A (m,n)-ideálja S-nek minden olyan nemnegatív egész számokból álló m,n számpárra, amelyekre $m+n=k$. (k pozitív egész szám.)

Egy kommutatív félcsoport A részhalmaza nyilván akkor és csak akkor k-ideál, ha kielégíti az $A^k S\subseteq A$ feltételt.

Megjegyezzük még, hogy a k-ideál fogalma a kétoldali ideál fogalmának általánosítása, ugyanis a $k=1$ esetben a kétoldali ideál definícióját kapjuk.

1.9. korollárium. *Egy kommutatív félcsoport A részhalmaza akkor és csak akkor i^k-ideál, ha k-ideál.* (k pozitív egész szám.)

Ez az állítás azonnal következik az 1.6. tételből.

1.10. megjegyzés. Általánosabban az 1.9. korollárium kétoldali félcsoportokra is érvényes. *Kétoldali* (vagy *duo*) félcsoportnak nevezünk egy félcsoportot, ha mindegyik balideálja egyszersmind jobbideál is, és mindegyik jobbideálja balideál is, tehát csak kétoldali ideáljai vannak (l. [9]).

1.11. tétel. *Egy tetszőleges S félcsoport bármely nemüres részhalmazának és bármely $(1,1)$-ideáljának a szorzata ismét $(1,1)$-ideálja az S félcsoportnak.*

Bizonyítás. Legyen A $(1,1)$-ideálja, B pedig nemüres részhalmaza az S félcsoportnak. Minthogy $ABA\subseteq ASA\subseteq A$, innen következik, hogy

$$(AB)(AB)=(ABA)B\subseteq AB,$$

vagyis AB részfélcsoportja S-nek, s mivel $BS\subseteq S$, nyerjük, hogy

$$(AB)S(AB)=A(BS)A\cdot B\subseteq(ASA)B\subseteq AB.$$

Tehát az AB szorzat valóban $(1,1)$-ideálja az S félcsoportnak.

Hasonlóan igazolható, hogy BA is $(1,1)$-ideál S-ben.

1. 12. korollárium. *Egy S félcsoport bármely két* $(1,1)$*-ideáljának a szorzata ismét* $(1,1)$*-ideálja az S félcsoportnak.*

Mivel egy félcsoport részhalmazainak szorzása asszociatív művelet, az 1. 12. korolláriumból folyik az

1. 13. korollárium. *Bármely félcsoport összes* $(1,1)$*-ideáljainak halmazá ismét félcsoport a részhalmazok szorzására nézve.*

1. 14. megjegyzés. Minthogy egy félcsoport összes nemüres részhalmazai is félcsoportot alkotnak a nemüres részhalmazoknak a bevezetésben definiált szorzására nézve, azt kaptuk, hogy egy félcsoport $(1,1)$-ideáljainak a félcsoportja kétoldali ideálja az összes nemüres részhalmazok félcsoportjának.

Világos, hogy kommutatív félcsoport $(1,1)$-ideáljainak félcsoportja kommutatív, továbbá idempotens[2] félcsoport $(1,1)$-ideáljainak félcsoportja idempotens, tehát egy félháló[3] $(1,1)$-ideáljainak félcsoportja maga is félháló. Megjegyezzük még, hogy homocsoport[4] $(1,1)$-ideáljainak félcsoportja ismét homocsoport.

2. §. (m, n)-kváziideálok

2. 1. definíció. Egy S félcsoport A részfélcsoportját (m,n)*-kváziideálnak* nevezzük, ha kielégíti az

$$A^m S \cap S A^n \subseteq A \tag{3}$$

összefüggést, ahol m, n nemnegatív egészek. (A^0 legyen a félcsoporthoz nem tartozó olyan elem, amely a félcsoporton egységelemként operál.)

Könnyű igazolni a következő állítást:

2. 2. lemma. *Egy S félcsoport bármely két* (m,n)*-kváziideáljának a közös része S-nek* (m,n)*-kváziideálja.*

Az $(1,1)$-kváziideál fogalmát Steinfeld Ottó vezette be (l. [10]), „kváziideál" elnevezéssel és megmutatta, hogy egy félcsoport bármely kváziideálja előállítható egy baloldali és egy jobboldali ideál közös részeként. Ezt az eredményt általánosítja a

2. 3. tétel. *Egy tetszőleges S félcsoportnak valamely részhalmaza akkor és csak akkor* (m,n)*-kváziideálja S-nek, ha egy* $(m,0)$*-ideálnak és egy* $(0,n)$*-ideálnak a közös része.*

[2] Az S félcsoport e elemét *idempotens elemnek* nevezzük, ha $e^2 = e$. Egy félcsoportot *idempotens félcsoportnak* nevezünk, ha mindegyik eleme idempotens.

[3] *Félhálónak* nevezünk egy kommutatív idempotens félcsoportot (l. [11]).

[4] *Homocsoportnak* nevezünk egy S félcsoportot, ha van olyan e idempotens eleme, amely a félcsoport mindegyik elemével felcserélhető, továbbá a félcsoport minden a eleméhez van olyan $a' \in S$, amelyre $aa' = e$. (l. [12]).

Bizonyítás. Legyen S tetszőleges félcsoport, A legyen $(m, 0)$-ideál, B pedig $(0, n)$-ideál az S félcsoportban. Akkor

$$A^m S \subseteq A \quad \text{és} \quad SB^n \subseteq B,$$

ahonnan

$$(A \cap B)^m S \cap S(A \cap B)^n \subseteq A \cap B$$

következik, tehát $A \cap B$ is (m, n)-kváziideál az S félcsoportban.

Fordítva, legyen A (m, n)-kváziideál az S félcsoportban, azaz $A^m S \cap \cap SA^n \subseteq A$. Kimutatjuk, hogy akkor A az A által generált $(m, 0)$-ideálnak és az A által generált $(0, n)$-ideálnak a közös része:

$$A = \{A\}_{(m, 0)} \cap \{A\}_{(0, n)} = (A \cup A^m S) \cap (A \cup SA^n).$$

Felhasználva a közös rész képzés és egyesítés disztributivitását és azt, hogy A (m, n)-kváziideálja S-nek, nyerjük, hogy

$$(A \cup A^m S) \cap (A \cup SA^n) = A \cup (A^m S \cap SA^n) = A,$$

amint állítottuk.

2.3. tétel. *Egy tetszőleges S félcsoport bármely (m, n)-kváziideálja (m, n)-ideálja S-nek.*

Bizonyítás. Legyen S tetszőleges félcsoport, A (m, n)-kváziideálja az S félcsoportnak. Mivel $A^m SA^n \subseteq A^m S$ és $A^m SA^n \subseteq SA^n$, kapjuk, hogy

$$A^m SA^n \subseteq A^m S \cap SA^n \subseteq A,$$

vagyis A (m, n)-ideál.

2.4. korollárium. *Bármely kváziideál $(1, 1)$-ideál.*

Az 1.11. tételből és a 2.4. korolláriumból adódik a

2.5. tétel. *Egy tetszőleges S félcsoport bármely két kváziideáljának szorzata S-nek $(1, 1)$-ideálja.*

Ezzel kapcsolatban lásd a [10] 265. oldalán feltett kérdést.

3. §. Neumann-reguláris félcsoportok

3.1. definíció. Egy S félcsoport a elemét (m, n)-*regulárisnak* nevezzük, ha létezik olyan x eleme S-nek, hogy

$$a^m x a^n = a \tag{4}$$

teljesül, ahol m, n nemnegatív egészek. (a^0 legyen ismét egységelemként ható operátor-elem.) Egy S félcsoportot (m, n)-*regulárisnak* nevezünk, ha mindegyik eleme (m, n)-reguláris (l. [1]). Az $(1, 1)$-reguláris félcsoportokat *Neumann-reguláris*[5] félcsoportoknak nevezzük.

Ezt a fogalmat NEUMANN JÁNOS [6] gyűrűkre definiálta, s az $(1, 1)$-reguláris gyűrűt nevezte reguláris gyűrűnek. KOVÁCS LÁSZLÓ [4] jellemezte a reguláris gyűrűket úgy, hogy bennük az

$$R \cap L = RL \tag{5}$$

összefüggés érvényes minden R jobboldali és minden L baloldali ideálra. KIYOSHI ISÉKI [3] vitte át félcsoportokra ezt a jellemzést. Ezzel kapcsolatban bebizonyítjuk a következő tételt:

3. 2. tétel. *Bármely S félcsoportra vonatkozólag az alábbi feltételek egymással ekvivalensek:*

(i) *S Neumann-reguláris;*

(ii) *$R \cap L = RL$ S-nek mindegyik R jobb- és L balideáljára;*

(iii) *$(a)_r \cap (b)_l = (a)_r (b)_l$ S-nek mindegyik a, b elempárjára;*[6]

(iv) *$(a)_r \cap (a)_l = (a)_r (a)_l$ S-nek minden a elemére.*

Bizonyítás. (i)-ből következik (ii). Legyen S Neumann-reguláris félcsoport, és legyen $a \in R \cap L$. Akkor S-nek van olyan x eleme, hogy $axa = a$. Mivel L balideál, $xa \in L$. Tehát $a = a(xa) \in RL$. Ezzel igazoltuk, hogy $R \cap L \subseteq RL$. Az $R \cap L \supseteq RL$ reláció mindig fennáll, tehát $R \cap L = RL$. Az, hogy (ii)-ből (iii) és (iii)-ból (iv) következik, evidens. Megmutatjuk, hogy (iv)-ből következik (i). Legyen $a \in S$. Világos, hogy $a \in (a)_r \cap (a)_l = (a)_r (a)_l$, mivel $(a)_r = a \cup aS$ és $(a)_l = a \cup Sa$. Innen folyik, hogy $a \in (a)_r (a)_l = a^2 \cup aSa \cup aS^2a \subseteq a^2 \cup aSa$. Így $a = a^2$, vagy $a \in aSa$. Azt nyertük, hogy az $axa = a$ egyenlet mindkét esetben megoldható, tehát az S félcsoport Neumann-reguláris. Ezzel a 3. 2. tételt bebizonyítottuk.

3. 3. korollárium. *Egy kommutatív félcsoport akkor és csak akkor Neumann-reguláris, ha mindegyik főideálja idempotens.*

Most bebizonyítjuk, hogy Neumann-reguláris félcsoportban a 2. 3. tétel megfordítása is igaz.

3. 4. tétel. *Neumann-reguláris félcsoportban mindegyik (m, n)-ideál (m, n)-kváziideál és megfordítva.*

[5] Az angol és az orosz nyelvű irodalomban ezeket a félcsoportokat reguláris félcsoportoknak nevezik. A magyar nyelvű irodalomban reguláris félcsoporton olyan félcsoportot szokás érteni, amelyben mind a baloldali, mind a jobboldali egyszerűsítési szabály érvényes (l. [8]).

[6] Legyen $a \in S$. $(a)_r$ az S félcsoport a-t tartalmazó legszűkebb jobbideálját jelöli. Nyilvánvaló, hogy $(a)_r = a \cup aS$.

Bizonyítás. Legyen S Neumann-reguláris félcsoport. Azt mutatjuk meg, hogy

$$A^m S A^n = A^m S \cap S A^n \tag{6}$$

S-nek minden A nemüres részhalmazára. A 2. 3. tétel bizonyításában láttuk, hogy $A^m S A^n \subseteq A^m S \cap S A^n$. A fordított irányú tartalmazást a 3. 2. tétel (ii) feltételéből kapjuk:

$$A^m S \cap S A^n = (A^m S)(S A^n) \subseteq A^m S A^n,$$

vagyis fennáll (6), amiből a tétel következik.

3. 5. korollárium. *Neumann-reguláris félcsoportban mindegyik kváziideál* $(1, 1)$*-ideál és megfordítva.*

A 2. 3. és a 3. 4. tételekből adódik a

3. 6. tétel. *Legyen S Neumann-reguláris félcsoport, A legyen* $(m, 0)$*-ideálja, B pedig* $(0, n)$*-ideálja S-nek. Akkor $A \cap B$ az S félcsoportnak* (m, n)*-ideálja. Fordítva, S-nek mindegyik* (m, n)*-ideálja előállítható egy* $(m, 0)$*- és egy* $(0, n)$*-ideál közös részeként.*

Szükségünk lesz a következő lemmára:

3. 7. lemma. *Legyen S tetszőleges félcsoport, M az S i^2-ideálja. S-nek az M által generált kétoldali ideálját jelöljük $\bar{M}$-sal. Akkor $\bar{M}^3 \subseteq M$.*

Bizonyítás. Legyen M' az S félcsoportnak M-et kétoldali ideálként tartalmazó kétoldali ideálja. Akkor

$$\bar{M}^3 \subseteq M' \bar{M} M' = M'(M \cup MS \cup SM \cup SMS)M' \subseteq M' M M' \subseteq M,$$

minthogy az M által generált kétoldali ideál nyilván

$$M \cup MS \cup SM \cup SMS.$$

3. 8. tétel. *Neumann-reguláris félcsoportban mindegyik i^k-ideál kétoldali ideál (k pozitív egész szám).*

Bizonyítás. Elég azt bebizonyítani, hogy mindegyik i^2-ideál kétoldali ideál. Legyen M egy i^2-ideálja az S Neumann-reguláris félcsoportnak, és legyen $\bar{M}$ S-nek M által generált kétoldali ideálja. A 3. 2. tételből következik, hogy $\bar{M}^2 = \bar{M}$. Innen és a 3. 7. lemmából $\bar{M} \subseteq M$ adódik, vagyis, minthogy $M \subseteq \bar{M}$, azt kaptuk, hogy $\bar{M} = M$. Tehát M kétoldali ideál az S félcsoportban, amint állítottuk.

3. 9. korollárium. *Inverz félcsoportban mindegyik i^k-ideál kétoldali ideál (k pozitív egész szám).*

Egy Neumann-reguláris félcsoportot *inverz* félcsoportnak (vagy *általánosított csoportnak*) nevezünk, ha bármely két idempotens eleme felcserélhető (l. [5, 7, 13]).

3. 10. megjegyzés. A bizonyításból látható, hogy a 3. 8. tétel általánosabban minden olyan félcsoportra érvényes, amelynek mindegyik kétoldali ideálja idempotens.

Most bebizonyítjuk, hogy Neumann-reguláris félcsoport (1, 1)-ideáljainak félcsoportja ismét Neumann-reguláris.

3. 11. tétel. *Neumann-reguláris félcsoport összes* (1, 1)*-ideáljainak halmaza a komplexus-szorzásra nézve Neumann-reguláris félcsoport.*

Bizonyítás. Jelölje $\bar{S}$ az S Neumann-reguláris félcsoport összes (1, 1)-ideáljainak halmazát. Az 1. 12. korollárium szerint $\bar{S}$ félcsoport. Megmutatjuk, hogy az

$$AXA = A \qquad (A \in \bar{S}) \tag{7}$$

egyenletnek létezik legalább egy X megoldása $\bar{S}$-ban. Legyen $a \in A$ és x olyan eleme S-nek, amelyre fennáll az $axa = a$ reláció. A minden a eleméhez véve ilyen x elemet, a kapott halmazt jelöljük X'-vel. Az S félcsoportnak az X' részhalmaz által generált (1, 1)-ideálja, $X = \{X'\}_{(1,1)} = X' \cup X'SX'$ kielégíti az $AXA \subseteq A$ összefüggést, mert A (1, 1)-ideálja S-nek. Másrészt $a = axa \in AXA$, azaz $A \subseteq AXA$ is fennáll. Így X megoldása a (7) egyenletnek, tehát az $\bar{S}$ félcsoport valóban Neumann-reguláris.

A 3. 11. tétel úgy is megfogalmazható, hogy Neumann-reguláris félcsoport összes kváziideáljainak halmaza a komplexus-szorzásra nézve Neumann-reguláris félcsoport.

3. 12. megjegyzés. A 3. 11. tétel élesíthető a következőképpen: egy (m, n)-reguláris félcsoport összes (1, 1)-ideáljainak halmaza ismét (m, n)-reguláris félcsoport (m és n természetes számok).

A 2. 4. és a 3. 5. korolláriumokból folyik a

3. 13. tétel. *Neumann-reguláris félcsoportban bármely két kváziideál szorzata ismét kváziideál.*

Ez a tétel válaszol egy kváziideálokkal kapcsolatban feltett kérdésre Neumann-reguláris félcsoportok esetén (l. [10] 265. oldal).

A fenti fogalmak és az eredmények többsége félgyűrűkre[7] és gyűrűkre is átvihető. Ezekkel és a félcsoport k-ideáljával másutt foglalkozunk.

[7] *Félgyűrűn* olyan halmazt értünk, amelyben értelmezve van két művelet, a halmaz mindkét műveletre nézve félcsoportot alkot és a két művelet között fennállnak a bal- és jobboldali disztributivitást kifejező összefüggések.

Köszönetemet fejezem ki FUCHS LÁSZLÓ professzor úrnak, volt aspiránsvezetőmnek munkám irányításáért és e dolgozattal kapcsolatban adott értékes tanácsaiért.

IRODALOMJEGYZÉK

[1] R. CROISOT: Demi-groupes inversifs et demi-groupes réunions de demi-groupes simples, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **70** (1953) 361—379.

[2] R. A. GOOD—D. R. HUGHES: Associated groups for a semigroup, *Bull. Amer. Math. Soc.* **58** (1952) *Abstract* 575.

[3] K. ISÉKI: A characterisation of regular semi-group, *Proc. Japan Acad.* **32** (1956) 676—677.

[4] L. KOVÁCS: A note on regular rings, *Publ. Math. Debrecen,* **4** (1956) 465—468.

[5] W. D. MUNN—R. PENROSE: A note on inverse semigroups, *Proc. Cambridge Phil. Soc.* **51** (1955) 396—399.

[6] J. v. NEUMANN: On regular rings, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **22** (1936) 707—713.

[7] G. B. PRESTON: Inverse semi-groups, *J. London Math. Soc.* **29** (1954) 396—403.

[8] RÉDEI L.: *Algebra I,* Budapest 1954.

[9] ŠT. SCHWARZ: О максимальных идеалах в теории полугрупп, *Czechoslovak Math. J.* **3** (**78**), (1953) 139—153.

[10] O. STEINFELD: Über die Quasiideale von Halbgruppen, *Publ. Math. Debrecen,* **4** (1956) 262—275.

[11] SZÁSZ G.: *Bevezetés a hálóelméletbe,* Budapest 1959.

[12] G. THIERRIN: Sur les homogroupes, *C. R. Acad. Sci. Paris* **234** (1952) 1519—1521.

[13] В. В. Вагнер: Обобщенные группы, Доклады Акад. наук, **84** (1952) 1119—1122.

(Beérkezett: 1960. VII. 18)

Az Eötvös Loránd Tudományegyetem
Matematikai Intézete

ÖNCSATOLT SPINOR TÉR EGYRÉSZECSKE GREEN-FÜGGVÉNYE NEMPERTURBÁCIÓS KÖZELÍTÉSBEN

Írta: PÓCSIK GYÖRGY

Öncsatolt spinor tér komplett, egyrészecske *Green*-függvényének folytonos integrái előállítását vezetjük le, amelynek kiértékelésére az *Edwards—Lieb*-féle approximációs módszert használjuk. A fizikai *Green*-függvény első közelítésben a szabad, felöltöztetett részecske *Green*-függvényével azonos.

1. §. Bevezetés

A skalár FERMI öncsatolással — a szokásos térelmélet keretei között maradva — a múltban többen foglalkoztak [1, 2]. Így pl. nyilvánvalóvá vált, hogy a skalár FERMI öncsatolás egy olyan YUKAWA kölcsönhatással ekvivalens, amelyben bozon fermionpárral van csatolva [1]. Eszerint a skalár FERMI öncsatoláson alapuló elméletnek, többek között a *Green*-függvényeknek is, renormálhatónak kell lenni. (Természetesen valamilyen nemperturbációs közelítésben.)

Az öncsatolt spinor tér propagátorainak kiszámítására nemrég egy egzakt módszert, a propagátorok elméletének *Schwinger*-féle formulázását [3] ajánlották [4, 5]. A *Schwinger*-módszer alapgondolata az, hogy a kölcsönhatási Hamilton-operátorba fiktív forrásokat vezetünk be és megnézzük, hogyan változnak a *Green*-függvények ezen segédváltozók szerint. Az említett változásokat általában funkcionál differenciálegyenletek írják le. Maga az a tény, hogy ezek léteznek, olyan érdekes problémák vizsgálatát teszi lehetővé, mint a renormalizáció vizsgálata perturbációs kifejtéstől független formában, vagy a vertex-rész aszimptotikus viselkedése. Ezen túlmenően, rendkívül ielentős, hogy néhány egyszerűbb esetben a *Schwinger*-egyenletek integrálhatók. Pontosabban, a *Schwinger*-egyenletekből kiindulva általában eljuthatunk ugyan a propagátorok ún. folytonos integrál reprezentációjához (pl. [6]), azonban az így levezetett bonyolult integrálokat már csak egyszerűbb esetekben tudjuk kiszámítani (pl. [6, 7]). Ennek oka főleg a folytonos integrálokkal kapcsolatos még megoldatlan elvi és technikai problémákban keresendő.

Jelen dolgozatban megmutatjuk, hogy öncsatolt spinor térre is létezik a a fizikai *Green*-függvények folytonos integrál alakja (3. §). Az önhatást jellemző gráfok járulékai láthatóan az $\exp\left[ig\int_{-\infty}^{\infty} dx\bar{\psi}(\bar{\psi}\psi)\psi\right]$ alakú tagokból adódnak. g szerint kifejtve, visszakapjuk az S-mátrix elmélet alapján álló renormálhatatlan kifejezést (4. §). Innen világos, hogy funkcionál integrálunkat nem szabad g szerint kifejtve számítanunk; az egyetlen módszer, amit alkalmazhatunk, az *Edwards* [8]—*Lieb* [9]-féle közelítés (5. §) (LIEB öncsatolt skalár mezonteret vizsgált. Számításai szerint a térenergia külső tér jelenlétében első approximációban 16%-kal tér el a klasszikus eredménytől.) Első közelítésben, amelynek hibája a legkisebb, a következő eredményt nyerjük: ha a csupasz tömeg nem zérus, a fizikai egytest propagátor egy szabad, felöltöztetett részecske propagátorával egyezik meg. Ha a csupasz tömeg eltűnik, akkor az öncsatolás — lényegében a γ_5-invariancia miatt — nem képes tömeget létrehozni, a szabad neutrinó propagátort nyerjük. Második közelítésben az egytest propagátorra renormálhatatlan egyenletet nyerünk, amely emlékeztet LIEB megfelelő esetére [9].

2. §. Egyenlet a vákuum-funkcionálra

Előző dolgozatunkban [5] az egytest propagátorra egy inhomogén, nemlineáris funkcionál differenciálegyenletet nyertünk. Ennek integrálását azonban a nemlinearitás megnehezíti. Ha lineáris egyenletünk volna, akkor a funkcionál Fourier transzformációval megpróbálkozhatnánk. A következőkben megmutatjuk, hogy a vákuum-funkcionálra (a tér önhatása és fiktív fermion-forrásokkal való kölcsönhatása S-mátrixának vákuum-várhatóértékére) homogén, lineáris funkcionál differenciálegyenlet írható fel.

A ψ-tér önhatását és $\eta, \bar{\eta}$ fiktív fermion-forrásokkal való kölcsönhatását *Heisenberg*-reprezentációban az

$$(2.1)\qquad (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) + 2g(\bar{\psi}(x)\psi(x))\psi(x) + \eta(x) = 0$$

egyenlet írja le [5]. Képezzük (2. 1) várhatóértékét *Heisenberg*-vákuumban és térjünk át kölcsönhatási reprezentációra

$$(2.2)\qquad (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\langle 0|T(\varphi(x)S)|0\rangle + 2g\langle 0|T((\bar{\varphi}(x)\varphi(x))\varphi(x)S))|0\rangle + \\ + \eta(x)\langle 0|S|0\rangle = 0,$$

ahol $|0\rangle$ szabad részecske vákuum, $\varphi(x)$ szabad spinor tér pedig a $\psi(x)$ képe kölcsönhatási reprezentációban és S a probléma S-operátorát jelenti.

Igazak a következő relációk [5]:

$$(2.3)\qquad \frac{\delta S}{\delta \eta(x)} = iT(\bar{\varphi}(x)S), \quad \frac{\delta S}{\delta \bar{\eta}(x)} = iT(\varphi(x)S).$$

(2. 3)-at felhasználva (2. 2) nagyon egyszerűen az $\langle 0|S|0\rangle$ vákuumfunkcionálra

vonatkozó funkcionál differenciálegyenletté alakítható. Ugyanis (2. 3)-ból

$$\langle 0|T(\varphi(x)S)|0\rangle = -i\frac{\delta\langle 0|S|0\rangle}{\delta\bar{\eta}(x)}$$

$$\langle 0|T(\bar{\varphi}(x)\varphi(x)\varphi_\sigma(x)S)|0\rangle = -i\frac{\delta^3\langle 0|S|0\rangle}{\delta\eta(x)\delta\bar{\eta}_\sigma(x)\delta\bar{\eta}(x)}. \tag{2.4}$$

(2. 4)-et (2. 2)-be helyettesítve nyerjük, hogy

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)_{\sigma\alpha}\frac{\delta\langle 0|S|0\rangle}{\delta\bar{\eta}_\alpha(x)} + 2g\frac{\delta^3\langle 0|S|0\rangle}{\delta\eta(x)\delta\bar{\eta}_\sigma(x)\delta\bar{\eta}(x)} + i\eta_\sigma(x)\langle 0|S|0\rangle = 0. \tag{2.5}$$

3. §. Az egyrészecske propagátor funkcionál integrál reprezentációja

A vákuum-funkcionál (2. 5) alatti egyenletének linearitása megengedi, hogy $\langle 0|S|0\rangle$-t funkcionál *Fourier* transzformációval határozzuk meg

$$\langle 0|S|0\rangle = \int \delta\psi\delta\bar{\psi}s(\psi,\bar{\psi})\exp\left[i\int_{-\infty}^{\infty}d\xi(\bar{\eta}(\xi)\psi(\xi)+\bar{\psi}(\xi)\eta(\xi))\right], \tag{3.1}$$

ahol $s(\psi,\bar{\psi})$ az S-mátrix vákuum-várhatóértékének funkcionál *Fourier* transzformáltja. A (3. 1) és hasonló funkcionál integrálokat MATTHEWS és SALAM [10] nyomán a ψ és $\bar{\psi}$ c-szám fermion terek alkalmas ortonormált, teljes rendszer szerinti kifejtésében szereplő kifejtési együtthatók feletti többszörös integrálokként definiáljuk. Továbbá, abból a célból, hogy funkcionál integráljaink helyesen szolgáltassák a téroperátorok kronologikus szorzatai vákuum-várhatóértékeinek szimmetria-tulajdonságait, a funkcionál integrálokban szereplő $\psi,\bar{\psi}$ antikommutációját írjuk elő. Látható, hogy ez a definíció nem elég pontos, azonban lényeges, hogy a matematikailag pontos definícióval vizsgálható esetekben (bilineáris exponenciálisokkal) sem jutottak más eredményekre [11].

Vizsgáljuk meg, milyen egyenletet elégít ki az $s(\psi,\bar{\psi})$ *Fourier* transzformált. (3. 1) segítségével képezzük a (2. 5)-ben szereplő funkcionál deriváltakat

$$\frac{\delta\langle 0|S|0\rangle}{\delta\bar{\eta}_\alpha(x)} = \int\delta\psi\delta\bar{\psi}s(\psi,\bar{\psi})\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}_\alpha(x)}\exp\left[i\int_{-\infty}^{\infty}d\xi(\bar{\eta}(\xi)\psi(\xi)+\bar{\psi}(\xi)\eta(\xi))\right] =$$

$$= i\int\delta\psi\delta\bar{\psi}s(\psi,\bar{\psi})\psi_\alpha(x)\exp\left[i\int_{-\infty}^{\infty}d\xi(\bar{\eta}(\xi)\psi(\xi)+\bar{\psi}(\xi)\eta(\xi))\right] \tag{3.2}$$

és hasonlóan

$$\frac{\delta^3\langle 0|S|0\rangle}{\delta\eta_l(x)\delta\bar{\eta}_{l\sigma}(x)\delta\bar{\eta}_l(x)}=i\int\delta\psi\delta\bar{\psi}s(\psi,\bar{\psi})\bar{\psi}(x)\psi(x)\psi_\sigma(x)\cdot \tag{3.3}$$

$$\cdot\exp\left[i\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\xi(\bar{\eta}(\xi)\psi(\xi)+\bar{\psi}(\xi)\eta(\xi))\right].$$

Most fejezzük ki (2. 5) bal oldalának harmadik tagját $\delta s/\delta\bar{\psi}$-sal

$$i\eta_{l\sigma}(x)\langle 0|S|0\rangle=\int\delta\psi\delta\bar{\psi}s(\psi,\bar{\psi})\frac{\delta}{\delta\bar{\psi}_\sigma(x)}\exp\left[i\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\xi(\bar{\eta}_l(\xi)\psi(\xi)+\bar{\psi}(\xi)\eta(\xi))\right]=$$

$$=-\int\delta\psi\delta\bar{\psi}\frac{\delta s(\psi,\bar{\psi})}{\delta\bar{\psi}_\sigma(x)}\exp\left[i\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\xi(\bar{\eta}(\xi)\psi(\xi)+\bar{\psi}(\xi)\eta(\xi))\right]. \tag{3.4}$$

(3. 2, 3. 4)-et (2. 5)-be téve $s(\psi,\bar{\psi})$-ra az

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu-m+2g\bar{\psi}(x)\psi(x))\psi(x)s(\psi,\bar{\psi})=-i\frac{\delta s(\psi,\bar{\psi})}{\delta\bar{\psi}(x)} \tag{3.5}$$

egyenletet kapjuk.

Azonnal látjuk, hogy (3. 5) megoldása az

$$s(\psi,\bar{\psi})=N^{-1}\exp\left\{i\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\xi\left[\bar{\psi}(\xi)\left(i\gamma^\mu\frac{\partial}{\partial\xi^\mu}-m\right)\psi(\xi)+g\bar{\psi}(\xi)(\bar{\psi}(\xi)\psi(\xi))\psi(\xi)\right]\right\} \tag{3.6}$$

alakba írható, ahol N normálási tényező. Az N normálási tényezőt abból a határfeltételből határozhatjuk meg, hogy ha a fiktív fermion-forrásokkal, valamint a csatolás erősségével zérushoz tartunk, a vákuum-funkcionálnak egyhez kell tartania. Ebből az

$$1=N^{-1}\int\delta\psi\delta\bar{\psi}\exp\left[i\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\xi\bar{\psi}(\xi)(i\gamma^\mu\partial_\mu-m)\psi(\xi)\right]\equiv$$

$$\equiv N^{-1}\int\delta\psi\delta\bar{\psi}\exp\left[-i\iint\limits_{-\infty}^{\infty}d\xi d\xi'\bar{\psi}(\xi)S_F^{-1}(\xi-\xi')\psi(\xi')\right] \tag{3.7}$$

feltétel adódik, $S_F^{-1}(\xi-\xi')$ az $S_F(\xi-\xi')$ egyrészecske propagátor bal-inverzét jelenti

$$S_F^{-1}(\xi-\xi')=-\delta(\xi-\xi')\left(i\gamma^\mu\frac{\partial}{\partial\xi'^\mu}-m\right). \tag{3.8}$$

A (3. 1), (3. 6) és (3. 7) eredményeket összevetve, a vákuum-funkcionál alábbi integrál reprezentációjához jutunk

$$\langle 0|S|0\rangle = \int \delta\psi\delta\overline{\psi} \exp\left[iI + i\int_{-\infty}^{\infty} d\xi(\overline{\eta}(\xi)\psi(\xi) + \overline{\psi}(\xi)\eta(\xi))\right] \cdot \left(\int \delta\psi\delta\overline{\psi} \exp\left[iI_F\right]\right)^{-1} \tag{3.9}$$

ahol $I = I(\psi, \overline{\psi})$ teljes hatásfüggvény a fiktív tereket nem tartalmazza. I_F a szabad ψ-tér hatásfüggvénye. A vákuum-funkcionál (3. 9) előállításából már könnyen eljuthatunk a $G(x, y)$ egytest propagátor funkcionál integrál reprezentációjához, ugyanis [5]

$$G_{\sigma\varrho}(x, y) = \frac{i}{\langle 0|S|0\rangle} \frac{\delta^2\langle 0|S|0\rangle}{\delta\eta_\varrho(y)\delta\overline{\eta}_\sigma(x)}. \tag{3.10}$$

Írjuk be (3. 10)-be (3. 9)-et, nyerjük

$$\begin{aligned} G_{\sigma\varrho}(x, y) = i\int \delta\psi\delta\overline{\psi}\psi_\sigma(x)\overline{\psi}_\varrho(y) \exp\left[iI + i\int_{-\infty}^{\infty} d\xi(\overline{\eta}(\xi)\psi(\xi) + \overline{\psi}(\xi)\eta(\xi))\right] \cdot \\ \cdot\left(\int \delta\psi\delta\overline{\psi} \exp\left[iI + i\int_{-\infty}^{\infty} d\xi(\overline{\eta}(\xi)\psi(\xi) + \overline{\psi}(\xi)\eta(\xi))\right]\right)^{-1}. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Természetesen a vákuum-funkcionál a többtest-propagátorokat is meghatározza, tehát azokra is (3. 11)-hez hasonló szerkezetű előállítás érvényes.

A fizikai S_F' egyrészecske *Green*-függvényhez $G_{\sigma\varrho}$-ból úgy juthatunk, ha (3. 11)-ben elhagyjuk az összes $\eta, \overline{\eta}$-t tartalmazó gráfot:

$$S_F'(x, y) = i\int \delta\psi\delta\overline{\psi}\psi(x)\overline{\psi}(y) \exp(iI)\left(\int \delta\psi\delta\overline{\psi} \exp(iI)\right)^{-1}. \tag{3.12}$$

$S_F'(x, y)$ előbbi előállításának levezetésénél nem szükséges kölcsönhatási reprezentációt használni, sokkal általánosabb alapokból is kiindulhatunk. (3. 12) csupán a *Lagrange*-formalizmus alapján is igazolható. Ugyanis gondoljuk meg a következőket. Tekintsük (2. 1) várhatóértékét *Heisenberg*-vákuumban, térjünk át forrásmentes *Heisenberg*-reprezentációra (ennek vákuuma a fizikai vákuum), akkor (2. 2) teljesül; most azonban $|0\rangle$, ill. $\varphi(x)$ forrásmentes *Heisenberg*-vákuum, ill. téroperátor és S az S-operátor forrásmentes reprezentációban

$$S = T\exp\left[i\int_{-\infty}^{\infty} d\xi(\overline{\eta}(\xi)\varphi(\xi) + \overline{\varphi}(\xi)\eta(\xi))\right]. \tag{3.13}$$

(3. 13) alapján beláthatók a (2. 3, 4) formulák, így (2. 5) is fennáll. Természetesen (2. 5) most a (3. 13) alatti S-operátor forrásmentes *Heisenberg*-vákuumbeli középértékére vonatkozik. A megoldást ismét (3. 1) alakban keressük és

a (3. 6) formulához jutunk. Az N normálási tényezőt abból a feltételből határozzuk meg, hogy $\eta, \bar{\eta} \to 0$-ra $\langle 0|S|0\rangle \to 1$, így a

$$\langle 0|S|0\rangle = \int \delta\psi\delta\bar{\psi} \exp\Big[iI + i\int_{-\infty}^{\infty} d\xi(\bar{\eta}(\xi)\psi(\xi) + \bar{\psi}(\xi)\eta(\xi))\Big] \cdot \Big(\int \delta\psi\delta\bar{\psi} \exp[iI]\Big)^{-1}$$

előállításhoz jutunk. Ebből pedig (3. 10) segítségével (3. 12) valóban következik.

A fizikai *Green*-függvénynek (3. 12)-höz hasonló alakban való előállíthatósága az elemi részecskék kvantumtérelmélete általános törvényszerűségének látszik. Valóban, az eddig tanulmányozott esetekben és jelenleg is, a propagátorok *Schwinger*-egyenleteinek közvetlen vagy közvetett integrálása (3. 12)-vel megegyező szerkezetű összefüggésekre vezet. Ezek az összefüggések azt a feltevést támasztják alá, hogy érvényes a kvantumtérelméleti *Feynman*-elv [10], a kvantumtérelmélet *Green*-függvényei a *Feynman*-féle „történések feletti integrálok" analogonjaiként állíthatók elő.

4. §. A vákuum-funkcionál és egyrészecske Green-függvény perturbációs közelítésben

A (3. 9), ill. (3. 12) képletekkel olyan egyszerű szerkezetű összefüggésekhez jutottunk, melyek a tér visszahatását kifejező gráfokat az

$$\exp\Big(ig\int_{-\infty}^{\infty} d\xi\bar{\psi}(\bar{\psi}\psi)\psi\Big)$$

tagokban tömörítik. Mégis, éppen a negyedrendű exponenciálisok megjelenése miatt, (3. 9), (3. 12) nem számítható ki egzaktul. Természetesen (3. 9), ill. (3. 12)-ből a perturbációszámítás használatával nyert nemrenormálható formulákhoz eljuthatunk, elegendő a csatolási állandó szerint kifejteni. Az S-mátrix vákuum-várhatóértékére kapjuk, hogy

$$(4.1)\quad \langle 0|S|0\rangle_{\eta,\bar{\eta}=0} = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ig)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \dots dx_n \int \delta\psi\delta\bar{\psi}\psi_{\alpha_1}(1)\psi_{\beta_1}(1)\dots$$
$$\dots\psi_{\alpha_n}(n)\psi_{\beta_n}(n)\cdot\bar{\psi}_{\beta_1}(1)\bar{\psi}_{\alpha_1}(1)\dots\bar{\psi}_{\beta_n}(n)\bar{\psi}_{\alpha_n}(n)\exp(iI_F)\Big/\int\delta\psi\delta\bar{\psi}\exp(iI_F) =$$
$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-ig)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \dots dx_n S^{(2n)}_{\alpha_1\beta_1\dots\alpha_n\beta_n,\,\alpha_1\beta_1\dots\alpha_n\beta_n}(11\dots nn,\, 11\dots nn),$$

ahol

$$S^{(m)}_{\alpha_1\ldots\alpha_m,\,\beta_1\ldots\beta_m}(x_1\ldots x_m,\,y_1\ldots y_m)\equiv i^m\langle 0|\,T(\varphi_{\alpha_1}(x_1)\ldots\varphi_{\alpha_m}(x_m)\overline{\varphi}_{\beta_1}(y_1)\ldots$$

$$\ldots\overline{\varphi}_{\beta_m}(y_m))|0\rangle=i^m\int\delta\psi\delta\overline{\psi}\psi_{\alpha_1}(x_1)\ldots\psi_{\alpha_m}(x_m)\overline{\psi}_{\beta_1}(y_1)\ldots\overline{\psi}_{\beta_m}(y_m)\cdot$$

$$\cdot\exp(iI_F)\Big/\int\delta\psi\delta\overline{\psi}\exp(iI_F)=(-1)^{m(m-1)/2}\,\mathrm{Det}\,(S_{F\alpha\beta}(x,\,y))_{m\times m} \tag{4. 2}$$

az m-test *Green*-függvény szabadrészecske rendszerre [10]. (4. 1) éppen az S-mátrix perturbációs alakjának vákuum-várhatóértéke.

Teljesen hasonlóan kaphatjuk meg $S'_F(x, y)$ perturbációszámításból ismert alakját is. A továbbiak kedvéért felírjuk a perturbációs kifejtést első közelítésben

$$S'_{F\varrho\sigma}(x-y)=S_{F\varrho\sigma}(x-y)+ig\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\xi S^{(3)}_{\varrho\alpha\beta,\,\sigma\alpha\beta}(x\xi\xi,\,y\xi\xi)-igS_{F\varrho\sigma}(x-y)\cdot$$

$$\cdot\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\xi S^{(2)}_{\alpha\beta,\,\alpha\beta}(\xi\xi,\,\xi\xi)=S_{F\varrho\sigma}(x-y)+2ig\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\xi[(S_F(x-\xi)S_F(\xi-y))_{\varrho\sigma}Sp\,S_F(0)-$$

$$-(S_F(x-\xi)S_F(0)S_F(\xi-y))_{\varrho\sigma}]. \tag{4. 3}$$

5. §. Egyrészecske Green-függvény nemperturbációs közelítésben

Az S'_F-t megadó funkcionál integrál kiszámítása nagy nehézségbe ütközik. Ebben a §-ban (3. 12) közelítő kiszámítására (az egyetlen ismert nemperturbációs) *Edwards—Lieb*-féle módszert [8, 9] alkalmazzuk. A módszer alapgondolatához a következőképpen jutunk. Az $S_F(x, y)$-ra vonatkozó (4. 2) formulát $S'_F(x, y)$-ra általánosítjuk

$$S'_{F\varrho\sigma}(x,y)=i\int\delta\psi\delta\overline{\psi}\psi_\varrho(x)\overline{\psi}_\sigma(y)\exp\Big[-i\iint\limits_{-\infty}^{\infty}d\xi d\eta\overline{\psi}(\xi)S'^{-1}_F(\xi,\,\eta)\psi(\eta)\Big]\cdot$$

$$\cdot\Big(\int\delta\psi\delta\overline{\psi}\exp\Big[-i\iint\limits_{-\infty}^{\infty}d\xi d\eta\overline{\psi}(\xi)S'^{-1}_F(\xi,\,\eta)\psi(\eta)\Big]\Big)^{-1}, \tag{5. 1}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}S'^{-1}_{F\varrho\sigma}(x,\,y)S'_{F\sigma\tau}(y,\,z)dy=\delta_{\varrho\tau}\delta(x-z).$$

Az *Edwards—Lieb* és perturbációs közelítés összehasonlításából látni fogjuk, hogy (5. 1) legalább elsőrendben teljesül. Bevezetve a

$$\Pi(\xi,\,\eta)=S'^{-1}_F(\xi,\,\eta)-S^{-1}_F(\xi-\eta) \tag{5. 2}$$

mátrixot, (3. 12)-t az

$$S'_{F\varrho\sigma}(x,y)=i\int\delta\psi\,\delta\overline{\psi}\,\psi_\varrho(x)\overline{\psi}_\sigma(y)\,e^{-i\iint\limits_{-\infty}^{\infty}d\xi\,d\eta\,\overline{\psi}(\xi)S'^{-1}_F(\xi,\eta)\psi(\eta)}\,\cdot$$

$$\cdot\exp\Big[i\iint\limits_{-\infty}^{\infty}d\xi\,d\eta\,\overline{\psi}(\xi)\,\Pi(\xi,\eta)\,\psi(\eta)+$$

$$+\,ig\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\xi\,\overline{\psi}(\xi)(\overline{\psi}(\xi)\psi(\xi))\psi(\xi)\Big]\cdot\Big(\int\delta\psi\,\delta\overline{\psi}\,e^{-i\iint\limits_{-\infty}^{\infty}d\xi\,d\eta\,\overline{\psi}(\xi)S'^{-1}_F(\xi,\eta)\psi(\eta)}\,\cdot \tag{5.3}$$

$$\cdot\exp\Big[i\iint\limits_{-\infty}^{\infty}d\xi\,d\eta\,\overline{\psi}(\xi)\,\Pi(\xi,\eta)\psi(\eta)+ig\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\xi\,\overline{\psi}(\xi)(\overline{\psi}(\xi)\psi(\xi))\psi(\xi)\Big]\Big)^{-1}$$

alakba írhatjuk.

A fizikai egyrészecske *Green*-függvénynek ebből az alakjából mindenekelőtt az következik, hogy az exp-ek összhatása annyi, mintha helyettük egy állna, ekkor (5. 3) azonossággá válna (nulladik közelítés). Éppen ezért úgy járhatunk el, hogy az exp-eket kifejtjük és a nulladik közelítésbeli azonosságot kissé elrontjuk az „elsőrendű" tagok figyelembevételével (első közelítés) stb. Egyúttal elértük, hogy funkcionál integráljaink bilineáris exponenciálisokat tartalmaznak, amelyekkel (4. 2) alapján egzaktul számolhatunk. Ily módon S'_F-re közönséges differenciálegyenletet nyerünk. (Az eljárás hibájára vonatkozóan megjegyezzük, hogy az öncsatolt skalár mezontér klasszikus külső forrás esetében, amelyre LIEB [9] a módszert első és második közelítésben részletesen megvizsgálta, a térenergiának a klasszikus energiaképlettel való összehasonlítása első közelítésben 16%-os hibát mutat. A hiba másodrendben tovább nő.)

Első közelítésben (5. 3) helyett (4. 2) felhasználásával az

$$S'_{F\varrho\sigma}(x,y)=\Big(S'_{F\varrho\sigma}(x,y)-\iint\limits_{-\infty}^{\infty}d\xi\,d\eta\,\Pi_{\alpha\beta}(\xi,\eta)D^{(2)}_{\varrho\beta,\sigma\alpha}(x\eta,y\xi)-$$

$$-\,ig\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\xi\,D^{(3)}_{\varrho\alpha\beta,\sigma\alpha\beta}(x\xi\xi,y\xi\xi)\Big)\Big(1-\iint\limits_{-\infty}^{\infty}d\xi\,d\eta\,\Pi_{\alpha\beta}(\xi,\eta)S'_{F\beta\alpha}(\eta,\xi)- \tag{5.4}$$

$$-\,ig\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\xi\,D^{(2)}_{\alpha\beta,\alpha\beta}(\xi\xi,\xi\xi)\Big)^{-1}$$

egyenletet írhatjuk, ahol $D^{(m)}$ az $S^{(m)}$-ben szereplő determináns S'_F elemekkel. (5. 4) számlálójából a nevező leválasztható, ezért az első approximáció a maradék eltűnését követeli meg

$$\iint_{-\infty}^{\infty} d\xi d\eta (S'_F(x,\xi)\Pi(\xi,\eta)S'_F(\eta,y))_{\varrho\sigma} = 2ig\iint_{-\infty}^{\infty} d\xi d\eta \cdot$$

$$(S'_F(x,\xi)[[S'_F(\xi,\xi) - Sp\, S'_F(\xi,\xi)]\delta(\xi-\eta)]S'_F(\eta,y))_{\varrho\sigma}. \tag{5.5}$$

Innen az inverzek különbsége első közelítésben

$$\Pi(\xi,\eta) = 2ig(S'_F(\xi,\xi) - Sp\, S'_F(\xi,\xi))\delta(\xi-\eta). \tag{5.6}$$

Az egytest propagátor egzakt differenciálegyenlete (3. 8) és (5. 2) alapján

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} d\zeta S_F'^{-1}(\xi,\zeta)S'_F(\zeta,\eta) = -\left(i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial\xi^\mu} - m\right)S'_F(\xi,\eta) + \\ + \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta \Pi(\xi,\zeta)S'_F(\zeta,\eta) = \delta(\xi-\eta).\end{aligned} \tag{5.7}$$

Tegyük be ide (5. 6)-ot, az egytest propagátor differenciálegyenletét nyerjük első közelítésben

$$[i\gamma^\mu\partial_\mu - m - 2ig(S'_F(x,x) - Sp\, S'_F(x,x))]S'_F(x,y) = -\delta(x-y). \tag{5.8}$$

Most vizsgáljuk meg részletesen az (5. 8) egyenletet. (5. 8) összhangban van a perturbációszámításos (4. 3) alakkal, a különbség csak az, hogy perturbációs esetben (5. 8)-ban $S'_F(x,x)$ helyett $S_F(0)$ áll. $S'_F(x,x)$ konstansszor egységmátrix. (Feltesszük, hogy $m>0$.) Ez legegyszerűbben a jól ismert *Lehmann*-előállításból [12]

$$\begin{aligned}S'_F(x,y) = -(2\pi)^{-4}\int_0^{\infty} dm^2 \int_{-\infty}^{\infty} d^4p(\varrho_1(m^2)\gamma^\mu p_\mu + \varrho_1(m^2)m + \varrho_2(m^2))\cdot \\ \cdot(p^\mu p_\mu - m^2 + i\varepsilon)^{-1}\exp(-ip^\mu(x_\mu - y_\mu)) \quad \varepsilon>0\end{aligned} \tag{5.9}$$

(ϱ_1 és ϱ_2 valós sűrűségfüggvények) következik

$$S'_F(0) = -(2\pi)^{-4}\int_0^{\infty} dm^2 \int_{-\infty}^{\infty} d^4p(\varrho_1(m^2)m + \varrho_2(m^2))(p^\mu p_\mu - m^2 + i\varepsilon)^{-1}. \tag{5.10}$$

Elvégezve a p_0 szerinti integrálást, látjuk, hogy $S'_F(0)$ imaginárius

$$S'_F(0) = \frac{i}{8\pi^2}\int_0^{\infty} dm^2(\varrho_1 m + \varrho_2)\int_0^{\infty} dp \frac{p^3}{p^2+m^2}. \tag{5.4}$$

Tehát (5. 8) tömegrenormalizációval végessé tehető. Az észlelhető tömeget az

$$m_R = m + \delta m = m + 2ig(S'_F(0) - Sp\, S'_F(0)) > 0 \tag{5.12}$$

mennyiséggel definiáljuk. Ekkor (5. 8) állítása az, hogy ha a részecske csupasz tömege nem tűnik el, akkor komplett *Green*-függvénye megegyezik egy szabad, de felöltöztetett részecske *Green*-függvényével

$$(5.13) \qquad S_F'(x-y) = -(2\pi)^{-4} \int_{-\infty}^{\infty} d^4p \frac{\gamma^\mu p_\mu + m_R}{p^\mu p_\mu - m_R^2 + i\varepsilon} \exp(-ip^\mu(x_\mu - y_\mu)),$$

a sajáttér a részecskét egy járulékos tömeggel látja el. Ez a sajáttömeg (5. 12) és (5. 13) alapján

$$(5.14) \qquad \delta m = -6igS_F'(0) = 6ig(2\pi)^{-4} m_R \int_{-\infty}^{\infty} d^4p (p^\mu p_\mu - m_R^2 + i\varepsilon)^{-1} =$$

$$= \frac{3gm_R}{4\pi^2} \int_0^\infty dp \frac{p^3}{p^2 + m_R^2}$$

kvadratikusan divergál. Véges tömeget úgy nyerhetünk, hogy az önhatást nemlokálissá tesszük. Vágjuk le az (5. 14) integrálban az impulzust Λ-nál, akkor

$$(5.15) \qquad \delta m = \frac{3gm_R}{8\pi^2} \left(\Lambda^2 - m_R^2 \ln \left(\frac{\Lambda^2}{m_R^2} + 1 \right) \right)$$

nagyságú véges sajáttömeget nyerünk.

(5. 13) és (5. 15) két szempontból lényegesen különbözik a perturbációszámítás első közelítéséből elnyert propagátortól: egyrészről nem volt kihasználva a csatolás gyengesége, másrészről fizikai szempontból helyesebb, ha m_R a komplett, és nem a szabad, *Green*-függvénytől függ (vagyis a sajáttömeg a megfigyelhető tömegtől és nem a csupasztól, mint perturbációs esetben).

Ha az m csupasz tömeg eltűnik, a sajáttömeg sem lehet zérustól különböző, ugyanis δm arányos $S_F'(0)$-val és az elmélet γ_5-invarianciája miatt a $(\varrho_1 m + \varrho_2)$ tag (5. 11)-ből eltűnik, azaz $S_F'(0) = 0$. Szemléletesen szólva, a szokásos térelmélet keretei között maradva, egy szigorúan zérus csupasz tömegű fermionnak a sajáttere nem tud tömeget létrehozni. Más lehet a helyzet, ha a részecske bozon, pl. LIEB [9] számításaiból kitűnik, hogy ha a csupasz tömeg zérus is, a sajáttömegnek nem kell eltűnnie (sőt, levágás nélkül divergál).

Az *Edwards—Lieb*-módszer sajáttér problémákra való alkalmazása másodrendben nem vezet véges eredményre. (5. 3) második közelítéséből kiindulva az első közelítésnél ismertetett eljárással S_F'-re egy igen bonyolult nemlineáris differenciálegyenletet vezethetünk le, amely renormálhatatlan, s így további következtetések levonását lehetetlenné teszi.

IRODALOM

[1] Jouvet, B.: Fermi coupling and mass and charge spectra of bosons, *Nuovo Cimento* **5** (1957) 1.

[2] Abrikosov, A. A. és mukatársai: Possibility of formulation of a theory of strongly interacting fermions, *Phys. Rev.* **111** (1958) 321.

Glaser, V.: An explicit solution of the Thirring model, *Nuovo Cimento* **10** (1958) 990.

[3] Umezawa, H.: *Quantum Field Theory,* North-Holland Publ. Co., Amsterdam, 1956, Ch. 18.

[4] Yoshimura, T.: On high energy limit of fermion-fermion interaction, *Progr. Theor. Phys.* **23** (1960) 569.

[5] Pócsik, G.: Schwinger's equation for one-body propagator of a selfcoupled spinor field, *Acta Phys. Hung.* **12** (1960) 181.

Nemlineáris spinor modell Schwinger-féle egyenleteiről, *M. T. A. III. Oszt. Közl.,* **10** (1960) 353.

[6] Edwards, S. F.—Peierls, R. E.: Field equations in functional form, *Proc. Roy. Soc.* (A) **224** (1954) 24.

[7] Edwards, S. F.: The nucleon Green function in charged meson theory, *Proc. Roy. Soc.* (A) **228** (1954) 411.

Arnowitt, R.—Deser, S.: Renormalization of derivative coupling theories, *Phys. Rev.* **100** (1955) 349.

[8] Edwards, S. F.: The nucleon Green function in pseudoscalar meson theory II., *Proc. Roy. Soc.* (A) **232** (1955) 377.

[9] Lieb, E. H.: A non-perturbation method for non-linear field theories, *Proc. Roy. Soc.* (A) **241** (1957) 339.

[10] Matthews, P. T.—Salam, A.: Propagators of quantized field, *Nuovo Cimento* **2** (1955) 130.

[11] Burton, W. L.—Borde, A. H.: Functional integral in quantum field theory, *Nuovo Cimento* **4** (1956) 254.

[12] Bethe, H. A.—Hoffmann, F.—Schweber, S. S.: *Mesons and Fields,* Row, Peterson and Co., Evanston, 1955, V. I, Ch. 25.

(Beérkezett: 1960. IX. 29.)

Az Eötvös Loránd Tudományegyetem
Elméleti Fizikai Intézete

EGY ÁLTALÁNOS MÓDSZER VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁSI TÉTELEK BIZONYÍTÁSÁRA ÉS ANNAK NÉHÁNY ALKALMAZÁSA

Írta: RÉNYI ALFRÉD

Jordan Károly emlékének ajánlva

1. §. Bevezetés

Számos azonosság és egyenlőtlenség ismeretes tetszőleges események valószínűségei között. Olyan egyenlőtlenségekre gondolok, amelyek teljes általánosságban érvényesek, függetlenül attól, hogy a szóban forgó események között milyen függőség áll fenn. Az ilyen tételek gazdag gyűjteményét tartalmazza M. FRÉCHET kétkötetes munkája [1]. A legismertebb a szóban forgó típusba tartozó tétel az ún. *Poincaré-tétel,* amely a következőképpen szól: Legyenek $A_1, A_2, \ldots, A_n$ tetszőleges események, legyen

$$(1.1)\qquad S_0=1 \quad \text{és} \quad S_k=\sum_{1\leqq i_1<i_2<\ldots<i_k\leqq n} \mathbf{P}(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k}) \quad \text{ha} \quad k=1,2,\ldots,n,$$

ahol az összegezés az $1, 2, \ldots, n$ számokból kiválasztható összes lehetséges $\left(\text{tehát } \binom{n}{k} \text{ számú}\right)$ $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ k-adrendű kombinációra terjesztendő ki. Akkor

$$(1.2)\qquad \mathbf{P}(\bar{A}_1\bar{A}_2\cdots\bar{A}_n)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k S_k.$$

(Itt és a következőkben események szorzata azt az eseményt jelöli, hogy a szorzat tényezőit alkotó események együttesen bekövetkeznek, $\bar{A}$ az A esemény ellentétét és $\mathbf{P}(A)$ az A esemény valószínűségét jelöli.)

Az (1.2) képletet szokás „szitaformulának" is nevezni, tekintettel a számelméletben használatos „szitálási" eljárással való összefüggésére. Az (1.2) képlet (ill. a szitaformula) tulajdonképpen kombinatorikai, ill. logikai jellegű (l. pl. [2]). A megfelelő kombinatorikai formula a következőképpen hangzik: legyen H egy tetszőleges véges halmaz és legyenek $A_1, A_2, \ldots, A_n$ tetszőleges tulajdonságok, amelyekkel H elemei bírhatnak. A H halmaz összes elemeinek számát jelölje N_H és a H halmaz azon elemeinek számát, amelyek az A tulajdonsággal bírnak, jelöljük $N_H(A)$-val. Jelölje két vagy több tulajdonság szorzata azt a tulajdonságot, hogy valami a szorzat tényezőiként szereplő tulajdonságok mindegyikével rendelkezik. Jelölje továbbá $\bar{A}$ az A tulajdonsággal ellentétes tulajdonságot. Legyen

$$(1.1a)\qquad \mathbf{S}_0=N_H \quad \text{és} \quad \mathbf{S}_k=\sum_{1\leqq i_1<i_2<\ldots<i_k\leqq n} N_H(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k}),$$

ahol az összegezés megint csak az $1, 2, \ldots, n$ számok közül kiválasztható összes $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ k-adrendű kombinációra terjesztendő ki. Akkor

$$N_H(\overline{A}_1 \overline{A}_2 \cdots \overline{A}_n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \mathbf{S}_k. \tag{1.2a}$$

Szavakban kifejezve: a H halmaz azon elemeinek a számát, amelyek az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ tulajdonságok egyikével sem rendelkeznek, úgy kaphatjuk meg, hogy H összes elemeinek számából rendre levonjuk azon elemek számát, amelyek az A_1, az $A_2, \ldots,$ az A_n tulajdonságokkal bírnak, ezután rendre hozzáadjuk azon elemek számát, amelyek a szóban forgó tulajdonságok közül két tetszőlegesen választott tulajdonsággal rendelkeznek, majd levonjuk azon elemek számát, amelyek a szóban forgó tulajdonságok közül három tetszőlegesen kiválasztott tulajdonsággal bírnak, s. í. t. Az (1. 2a) képlet az (1. 2) képlet speciális esete, amelyet akkor nyerünk, ha a szóban forgó valószínűségi mező véges sok elemi eseményt tartalmaz és ezek mind egyenlő valószínűséggel bírnak (vagyis, ha az (1. 2) képletet, amely tetszőleges valószínűségi mezőben érvényes, az ún. klasszikus valószínűségi mezőkre (l. [3]) alkalmazzuk).

Ismeretesek továbbá a következő egyenlőtlenségek is:

$$\mathbf{P}(\overline{A}_1 \overline{A}_2 \cdots \overline{A}_n) \leqq \sum_{k=0}^{2s} (-1)^k S_k \quad \text{ha} \quad 0 \leqq 2s \leqq n \tag{1.3}$$

és

$$\mathbf{P}(\overline{A}_1 \overline{A}_2 \cdots \overline{A}_n) \geqq \sum_{k=0}^{2s+1} (-1)^k S_k \quad \text{ha} \quad 1 \leqq 2s+1 \leqq n. \tag{1.4}$$

Más szóval, ha (1. 2) jobboldalán az összegezést nem folytatjuk n-ig, hanem előbb megállunk, akkor az összeg értéke nem kisebb, ill. nem nagyobb a baloldalon álló valószínűségnél, aszerint, hogy páros, illetve páratlan indexű tagnál állunk meg. (Hasonló állítás érvényes természetesen (1. 2a)-ra vonatkozólag is, lévén (1. 2a) az (1. 2) azonosság speciális esete.)

JORDAN KÁROLYtól [4] származik a *Poincaré-tétel* következő nevezetes és gyakran használt általánosítása: Jelölje B_r azt az eseményt, hogy az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ események közül pontosan r számú esemény következik be $(r = 0, 1, 2, \ldots, n)$, akkor

$$\mathbf{P}(B_r) = \sum_{k=0}^{n-r} (-1)^k \binom{k+r}{r} S_{k+r}. \tag{1.5}$$

(1. 5) a *Poincaré-tétel* általánosításának tekinthető, mivel az $r=0$ esetben (1. 5) megegyezik (1. 2)-vel. Az (1. 5) formula az irodalomban *Jordan Károly formulája* néven ismeretes.

Ismeretes az (1.5) formula következő inverziója is:

$$S_r = \sum_{k=r}^{n} \mathbf{P}(B_k) \binom{k}{r} \qquad (r = 0, 1, \ldots, n). \tag{1.6}$$

Az (1.6) formula felfogható mint az (1.5) egyenletrendszer megoldása az S_r ismeretlenekre, és megfordítva: (1.5) tekinthető az (1.6) egyenletrendszer megoldásának a $\mathbf{P}(B_r)$ ismeretlenekre.

Érvényesek továbbá a következő egyenlőtlenségek is:

$$\mathbf{P}(B_r) \leqq \sum_{k=0}^{2s} (-1)^k \binom{k+r}{r} S_{k+r} \quad \text{ha} \quad 0 \leqq 2s \leqq n-r \tag{1.7}$$

és

$$\mathbf{P}(B_r) \geqq \sum_{k=0}^{2s+1} (-1)^k \binom{k+r}{r} S_{k+r} \quad \text{ha} \quad 1 \leqq 2s+1 \leqq n-r. \tag{1.8}$$

Az (1.7) és (1.8) egyenlőtlenségek ugyanúgy viszonylanak JORDAN KÁROLY (1.5) formulájához, mint az (1.3) és (1.4) egyenlőtlenségek az (1.2) *Poincaré*-formulához. Meglepő, hogy ennek ellenére a szakkönyvek az (1.7)—(1.8) formulákat nem említik.

A felsoroltakhoz hasonló jellegűek például a következő, M. FRÉCHET-től származó egyenlőtlenségek:

$$\frac{S_{r+1}}{\binom{n}{r+1}} \leqq \frac{S_r}{\binom{n}{r}} \qquad (r = 0, 1, \ldots, n-1), \tag{1.9}$$

továbbá a következő, GUMBELtől származó egyenlőtlenségek:

$$\frac{\binom{n}{r+1} - S_{r+1}}{\binom{n-1}{r}} \leqq \frac{\binom{n}{r} - S_r}{\binom{n-1}{r-1}} \qquad (r = 1, 2, \ldots, n-1). \tag{1.10}$$

JORDAN KÁROLYtól származik továbbá a következő azonosság is:

$$\mathbf{P}(B_r + B_{r+1} + \cdots + B_n) = \sum_{k=0}^{n-r} (-1)^k \binom{k+r-1}{k} S_{k+r}. \tag{1.11}$$

Itt és a következőkben események összegén azt az eseményt értjük, hogy az összeg tagjaiként szereplő események közül legalább egy bekövetkezik. (1.11) bal oldalán tehát annak a valószínűsége áll, hogy az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ események közül legalább r következik be. Az (1. 11) formulák invertálásával adódik az

$$S_r = \sum_{k=r}^{n} \mathbf{P}(B_k + \cdots + B_n) \binom{k-1}{r-1} \tag{1.12}$$

képlet.

Még sok más, a felsoroltakhoz hasonló azonosság és egyenlőtlenség ismeretes. Ezek felsorolásától itt eltekintek, hiszen az érdeklődő ezeket FRÉCHET említett könyvében megtalálhatja. E dolgozat célja egy általános tétel bebizonyítása, amelynek segítségével a szóban forgó típusú azonosságok és egyenlőtlenségek egységes módszerrel rendkívül egyszerűen igazolhatók. E tételt, amelyet néhány évvel ezelőtt találtam (l. [5]), a 2. § tartalmazza. A 3. § egy gráfelméleti segédtételt tartalmaz, amely önmagában is bizonyos érdeklődésre tarthat számot. A 4. §-ban a 2. §-ban ismertetett módszer és a 3. § gráfelméleti tétele segítségével egy újabb, a vizsgált típusba tartozó egyenlőtlenséget bizonyítunk be, amely a számelméletből jól ismert *Brun*-féle szita-módszerhez hasonló. Végül az 5. §-ban a 4. § tételének egy alkalmazásaként egy ERDŐS PÁL által felvetett, véletlen részhalmazokra vonatkozó probléma megoldását adjuk meg.

Köszönettel tartozom BOGNÁR KATALINnak e dolgozat átnézése során tett megjegyzéseiért.

2. §. Egy általános módszer valószínűségszámítási azonosságok és egyenlőtlenségek bizonyítására

Legyen $\mathfrak{A}$ egy tetszőleges eseményalgebra. Mint ismeretes, egy eseményalgebra kétféleképpen is felfogható: vagy mint egy absztrakt *Boole-algebra*, vagy mint ezen *Boole-algebra* halmaztesttel való realizálása. Az e §-ban tárgyalt kérdéseknél nem jelent előnyt az eseményalgebrák halmaztesttel való realizálása, ezért azt tesszük csak fel, hogy $\mathfrak{A}$ *Boole-algebra*. Ilyen módon tehát $\mathfrak{A}$ elemeire — amelyeket eseményeknek nevezünk, és nagy nyomtatott betűkkel jelölünk — értelmezve van két művelet: a szorzás és összeadás, továbbá minden A eseménnyel együtt $\mathfrak{A}$ tartalmaz egy másik $\bar{A}$ eseményt (amelyet A ellentétének nevezünk), továbbá, hogy $\mathfrak{A}$ tartalmaz két kitüntetett eseményt, amelyeket $\mathbf{O}$-val, ill. $\mathbf{I}$-vel jelölünk (és a lehetetlen, ill. a bizonyos eseményeknek nevezzük) és érvényesek a következő műveleti szabályok:*

* Az alábbi felsorolás azokat az alapvető műveleti szabályokat tartalmazza, amelyekre a *Boole-algebrákban* végzett műveletek során a legtöbbször szükség van. Mint ismeretes, ezen szabályok közül egyesek a többiből levezethetők, pl. a 2. 1., 3. 1., 3. 2., 4. 1., 5. 1. és 6. 1. relációkból az összes többi levezethető; ezek tehát egy lehetséges axiómarendszerét alkotják a *Boole*-féle algebráknak. Lásd pl. [6].

1.1. $A+B=B+A$	2.1. $AB=BA$	3.1. $A+\bar{A}=\mathbf{I}$
1.2. $A+A=A$	2.2. $AA=A$	3.2. $A\bar{A}=\mathbf{0}$
1.3. $A+(B+C)=(A+B)+C$	2.3. $A(BC)=(AB)C$	3.3. $A=A$
4.1. $A+\mathbf{0}=A$	5.1. $A\mathbf{I}=A$	6.1. $A(B+C)=AB+AC$
4.2. $A\mathbf{0}=\mathbf{0}$	5.2. $A+\mathbf{I}=\mathbf{I}$	6.2. $A+BC=(A+B)(A+C)$

7.1. $\overline{A+B}=\bar{A}\cdot\bar{B}$

7.2. $\overline{AB}=\bar{A}+\bar{B}$

(A felsorolt szabályokban A, B, C az $\mathfrak{A}$ *Boole-algebra* tetszőleges elemei.)

Legyenek $A_1, A_2, \ldots, A_n$ az $\mathfrak{A}$ *Boole-algebra* változó elemei; $A_1, A_2, \ldots, A_n$ tehát egymástól függetlenül végigfutnak $\mathfrak{A}$ összes elemein. Az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ események egy $f(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ n-változós *elemi függvényén* egy olyan függvényt értünk, amely az $\mathfrak{A}$-ból tetszőlegesen választott $A_1, A_2, \ldots, A_n$ eseményekhez hozzárendeli $\mathfrak{A}$ egy meghatározott elemét, amely az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ eseményekből kiindulva a *Boole-algebra* véges számú művelete segítségével fejezhető ki. Más szóval, olyan függvényeket nevezünk eleminek, amelyeknek minden változójának értelmezési tartománya az $\mathfrak{A}$ *Boole-algebra,* értékkészlete ugyancsak az $\mathfrak{A}$ *Boole-algebra,* és amely kifejezhető olyan képlettel, amelyben csak a szorzás, az összeadás és a felülvonás műveletek fordulnak elő véges számban.*

Tegyük fel, hogy az $\mathfrak{A}$ *Boole-algebra* elemein értelmezve van egy $\mathbf{P}(A)$ (számértékű) függvény, amely eleget tesz a következő feltevéseknek:

I. $\mathbf{P}(A) \geqq 0$ minden $A \in \mathfrak{A}$-ra,

II. $\mathbf{P}(\mathbf{I})=1$,

III. $\mathbf{P}(A+B)+\mathbf{P}(AB)=\mathbf{P}(A)+\mathbf{P}(B)$ ha $A \in \mathfrak{A}$ és $B \in \mathfrak{A}$.

A $\mathbf{P}(A)$ függvény értékét az A esemény valószínűségének nevezzük. Egy olyan *Boole-algebrát,* amelyen az I., II., III. feltevéseknek eleget tevő $\mathbf{P}(A)$ függvény van megadva, *valószínűségi algebrának* nevezzük. Magát a $\mathbf{P}(A)$ függvényt az $\mathfrak{A}$ *Boole-algebrán* értelmezett valószínűségeloszlásnak nevezzük. Az I., II. és III. feltevésekből könnyen következik, hogy

$$\mathbf{P}(\mathbf{0})=0 \tag{2.1}$$

és

$$\text{ha } AB=\mathbf{0}, \text{ akkor } \mathbf{P}(A+B)=\mathbf{P}(A)+\mathbf{P}(B) \tag{2.2}$$

* Könnyen belátható 7. 1., ill. 7. 2. segítségével, hogy minden ilyen függvény kifejezhető csak az összeadás és a felülvonás, vagy csak a szorzás és a felülvonás segítségével.

és általában,* ha $A_i A_j = 0$ midőn $i \neq j$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$, akkor

$$\mathbf{P}(A_1 + A_2 + \cdots + A_n) = \mathbf{P}(A_1) + \mathbf{P}(A_2) + \cdots + \mathbf{P}(A_n). \tag{2.2a}$$

Mos bebizonyítjuk a következő tételeket:

1. TÉTEL. *Legyen $\mathfrak{A}$ egy valószínűségi algebra, legyenek*

$$F_1 = f_1(A_1, A_2, \ldots, A_n), F_2 = f_2(A_1, A_2, \ldots, A_n), \ldots, F_N = f_N(A_1, A_2, \ldots, A_n)$$

tetszőleges, $\mathfrak{A}$-n értelmezett n-változós elemi függvények, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N$ megadott valós számok. Annak szükséges és elégséges feltétele, hogy akárhogyan is választva $\mathfrak{A}$-ban az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ eseményeket, mindig fennálljon a

$$\sum_{h=1}^{N} \alpha_h \mathbf{P}(F_h) \geqq 0 \tag{2.3}$$

egyenlőtlenség, az, hogy (2.3) teljesüljön azokban az esetekben, amikor az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ események mindegyike vagy **I**-*vel vagy* **O**-*val egyenlő.*

1. Megjegyzés. Az 1. tétel szerint tehát ahhoz, hogy igazoljuk (2.3) fennállását az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ események bármely választására, elegendő verifikálni (2.3)-at abban a 2^n speciális esetben, amikor az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ események közül egyeseket **I**-nek, a többit pedig **O**-nak választjuk. A tétel állításából az is következik, hogy amennyiben a (2.3) egyenlőtlenség egy valószínűségi algebrában igaz, akkor minden más valószínűségi algebrában is igaz; ez abból következik, hogy minden valószínűségi algebrában $\mathbf{P}(\mathbf{I}) = 1$ és $\mathbf{P}(\mathbf{O}) = 0$.

2. Megjegyzés. Nyilvánvalóan nem jelenti az általánosság megszorítását, hogy a (2.3)-ban szereplő $F_1, F_2, \ldots, F_N$ elemi eseményfüggvényekről feltettük, hogy mind n-változósak, hiszen pl. az $A_1, A_2, \ldots, A_k$ $(k < n)$ események egy k-változós függvénye mindig felfogható mint az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ eseményváltozók olyan függvénye, amely az $A_{k+1}, A_{k+2}, \ldots, A_n$ eseményváltozóktól nem függ. Nem jelenti az általánosság megszorítását az sem, hogy csak homogén egyenlőtlenségekre vonatkozik a tétel. Egy $\alpha_0 + \sum_{h=1}^{N} \alpha_h \mathbf{P}(F_h) \geqq 0$ alakú inhomogén egyenlőtlenség is felfogható ugyanis homogén egyenlőtlenségként; ehhez csak az szükséges, hogy egy olyan F_0 elemi függvényét válasszuk meg az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ eseményeknek, amelyre azonosan (azaz az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ események minden választása mellett) $\mathbf{P}(F_0) = 1$; akkor a szóban forgó inhomogén egyenlőtlenség a $\sum_{h=0}^{N} \alpha_h \mathbf{P}(F_h) \geqq 0$ homogén egyenlőt-

* A 1.3. és 1.1., ill. 2.3. és 2.1. szabályok figyelembevételével többtagú összegek és többtényezős szorzatok zárójelek nélkül írhatók fel.

lenség alakjában írható fel. Ilyen F_0 függvényt pedig könnyű találni: ilyen például $F_0 = A_1 + \bar{A}_1$.

Az 1. tétel bizonyítása. Legyen $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ az $1, 2, \ldots, n$ elemekből alkotott tetszőleges k-adrendű kombináció, $(k = 0, 1, 2, \ldots, n)$ és legyenek $j_1, j_2, \ldots, j_{n-k}$ az $1, 2, \ldots, n$ számok közül azok, amelyek nem szerepelnek az $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ kombinációban. Képezzük az

$$A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_k} \bar{A}_{j_1} \bar{A}_{j_2} \cdots \bar{A}_{j_{n-k}} \tag{2.4}$$

szorzatokat. Nyilván összesen 2^n különböző (2.4) alakú szorzat képezhető. Rendezzük ezeket el tetszőleges módon egy sorozatba, és jelöljük $E_1, E_2, \ldots, E_{2^n}$-nel. (Például legyen l előállítása a 2-es számrendszerben $l = \varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 + 2^2\varepsilon_3 + \cdots + 2^{n-1}\varepsilon_n$ $(0 \leq l < 2^n)$, ahol tehát az $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ „jegyek" mindegyike 0 vagy 1 és jelölje E_{l+1} azt a (2.4) alakú szorzatot, amelyben $i_1, i_2, \ldots, i_k$ azokat az i számokat jelölik, amelyekre $\varepsilon_i = 1$, és így $j_1, j_2, \ldots, j_{n-k}$ azok a j számok, amelyekre $\varepsilon_j = 0$.) Nyilvánvaló továbbá, hogy az E_l eseményekre igaz a következő állítás:

$$E_l E_m = \mathbf{0} \quad \text{ha} \quad l \neq m. \tag{2.5}$$

Az E_l eseményeket felfoghatjuk az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ eseményváltozók e em függvényeiként.

Könnyen belátható, hogy az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ eseményváltozók minden $f(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ elemi függvényéhez hozzárendelhető egyértelműen az $1, 2, \ldots, 2^n$ számok egy Φ részhalmaza oly módon, hogy

$$f(A_1, A_2, \ldots, A_n) = \sum_{l \in \Phi} E_l. \tag{2.6}$$

A (2. 6) előállítást a matematikai logikában használatos kifejezéssel élve (lásd pl. [7]) az $f(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ függvény *diszjunktív normálalak*jának nevezhetjük Azt, hogy minden n változós elemi függvény a (2. 6) alakban előállítható, pontosan ugyanúgy lehet belátni, mint ahogy az állításkalkulusban az állítások diszjunktív normálalakban való előállíthatóságát bizonyítják (lásd pl. [7]); a két tétel tulajdonképpen azonos egymással, ezért ezt itt csak vázoljuk.

a) A 6. 1. reláció (disztributív törvény) segítségével az $f(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ elemi függvényt kifejező képletben szereplő zárójelek kiküszöbölhetők.

b) A 7. 1. és 7. 2. relációk segítségével elérhetjük, hogy csak egyes eseményváltozók (nem pedig egész kifejezések) felett áll felülvonás.

c) 3. 2. és 4. 1. szerint egy összeg olyan szorzat-tagjai, amelyekben A_k és $\bar{A}_k$ mindketten előfordulnak, elhagyhatók.

d) 1. 2. miatt egy összeg azonos tagjai összevonhatók.

e) Ha egy tagban sem az A_k sem az $\bar{A}_k$ tényező nem szerepel, 3. 1 és 5. 1 szerint e tagot beszorozva $(A_k + \bar{A}_k)$-sal, az nem változik meg; a szorzást 6. 1 szerint elvégezve az eredeti egy tag helyett kettőt kapunk, amelyek közül az egyikben A_k a másikban $\bar{A}_k$ szerepel tényezőként.

Ilyen módon az összes lehetséges n-változós elemi függvények száma 2^{2^n}-nel egyenlő.

Az 1. tétel állításában szereplő $F_h = f_h(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ elemi függvények mindegyikéhez tehát hozzárendelhető egyértelműen az $1, 2, \ldots, 2^n$ számok egy Φ_h részhalmaza $(h = 1, 2, \ldots, N)$ oly módon, hogy

$$F_h = f_h(A_1, A_2, \ldots, A_n) = \sum_{l \in \Phi_h} E_l. \tag{2. 7}$$

Ennélfogva, figyelembe véve (2. 5)-öt és (2. 2a)-t

$$\sum_{h=1}^{N} \alpha_h \mathbf{P}(F_h) = \sum_{l=1}^{2^n} \mathbf{P}(E_l) \beta_l, \tag{2. 8}$$

ahol

$$\beta_l = \sum_{l \in \Phi_h} \alpha_h. \tag{2. 9}$$

Mármost, ha $A_{i_1} = A_{i_2} = \cdots = A_{i_k} = \mathbf{I}$ és $A_{j_1} = A_{j_2} = \cdots = A_{j_{n-k}} = \mathbf{O}$ és $E_l = A_{i_1} A_{i_2} \ldots A_{i_k} \bar{A}_{j_1} \bar{A}_{j_2} \ldots \bar{A}_{j_{n-k}}$, akkor $E_l = \mathbf{I}$ és minden $m \neq l$-re $E_m = \mathbf{O}$, tehát ebben az esetben

$$\sum_{h=1}^{N} \alpha_h \mathbf{P}(F_h) = \beta_l. \tag{2. 10}$$

Ha tehát (2. 3) fennáll az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ események minden olyan választása mellett, amikor az A_i események mindegyike $\mathbf{I}$ vagy $\mathbf{O}$, akkor szükségképpen $\beta_l \geqq 0$, l minden értékére. De akkor (2. 8) miatt (2. 3) fennáll az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ események *tetszőleges* választása mellett. Ezzel tételünket bebizonyítottuk.

Az 1. tételből könnyen adódik a következő

KOROLLÁRIUM. *Legyen $\mathcal{A}$ egy valószínűségi algebra, $F_1 = f_1(A_1, A_2, \ldots, A_n)$, $F_2 = f_2(A_1, A_2, \ldots, A_n), \ldots, F_n = f_n(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ $\mathcal{A}$-n értelmezett elemi függvények, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N$ valós számok. Annak szükséges és elégséges feltétele, hogy az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ események minden választása mellett fennálljon a*

$$\sum_{h=1}^{N} \alpha_h \mathbf{P}(F_h) = 0 \tag{2. 11}$$

összefüggés, az, hogy (2. 11) *fennálljon az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ események minden olyan választása mellett, amikor mindegyik A_i vagy* $\mathbf{I}$, *vagy* $\mathbf{O}$.

A korollárium bizonyítása. Ha (2.11) fennáll, valahányszor mindegyik A_i vagy **I**, vagy **O**, akkor ezen esetekben egyszerre teljesülnek a

$$\sum_{h=1}^{N} \alpha_h \mathbf{P}(F_h) \geqq 0 \tag{2.12}$$

és a

$$\sum_{h=1}^{N} (-\alpha_h) \mathbf{P}(F_h) \geqq 0 \tag{2.13}$$

egyenlőtlenségek, és így az 1. tétel szerint a (2.12) és (2.13) egyenlőtlenségek az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ események minden választása mellett fennállnak, tehát (2.11) is fennáll az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ események minden választása mellett.

Az 1. tétel, illetve annak korolláriuma alkalmazásaként nézzük meg, hogyan bizonyítható be pl. JORDAN KÁROLY (1.5) formulája. Az 1. tétel korolláriuma szerint elegendő (1.3)-at arra az esetre igazolni, ha mindegyik A_i vagy az **I**, vagy az **O** esemény. Ha az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ események közül m számú **I**-vel, a többi $n-m$ **O**-val egyenlő, akkor $S_k = \binom{m}{k}$ és így (1.3) a következő nyilvánvaló azonosságra redukálódik:

$$\sum_{k=0}^{m-r} (-1)^k \binom{k+r}{r} \binom{m}{k+r} = \binom{m}{r} \sum_{k=0}^{m-r} (-1)^k \binom{m-r}{k} = \begin{cases} 1 & \text{ha } r = m \\ 0 & \text{ha } r \neq m. \end{cases} \tag{2.14}$$

Az (1.3) ill. (1.4) egyenlőtlenségek igazolásához elegendő kimutatni, hogy

$$\sum_{k=0}^{2r} (-1)^k \binom{m}{k} \geqq 0, \tag{2.15a}$$

illetve, hogy

$$\sum_{k=0}^{2r+1} (-1)^k \binom{m}{k} \leqq 0. \tag{2.15b}$$

A (2.15a) és (2.15b) egyenlőtlenségek leolvashatók a

$$\sum_{k=0}^{s} (-1)^k \binom{m}{k} = (-1)^s \binom{m-1}{s} \tag{2.16}$$

azonosságból.

Az (1.7) és (1.8) egyenlőtlenségek igazolására elegendő a következő egyenlőtlenségeket belátni:

$$\sum_{k=0}^{2s} (-1)^k \binom{k+r}{r} \binom{m}{k+r} \geqq \begin{cases} 0, & \text{ha } m \neq r \\ 1, & \text{ha } m = r \end{cases} \tag{2.17}$$

$$\sum_{k=0}^{2s+1} (-1)^k \binom{k+r}{r} \binom{m}{k+r} \leqq \begin{cases} 0, & \text{ha } m \neq r \\ 1, & \text{ha } m = r. \end{cases} \tag{2.18}$$

Ezek az egyenlőtlenségek azonban leolvashatók a következő azonosságból:

$$(2.19) \qquad \sum_{k=0}^{l}(-1)^k\binom{k+r}{r}\binom{m}{k+r}=\begin{cases}0 & \text{, ha } m<r\\ 1 & \text{, ha } m=r\\ (-1)^l\binom{m}{r}\binom{m-r-1}{l}, & \text{ha } m>r.\end{cases}$$

Hasonlóképpen az (1.9) *Fréchet*-féle egyenlőtlenség bebizonyításában elegendő az 1. tétel szerint a

$$(2.20) \qquad \frac{\binom{m}{r+1}}{\binom{n}{r+1}} \leqq \frac{\binom{m}{r}}{\binom{n}{r}} \quad \text{ha} \quad 0 \leqq m \leqq n$$

egyenlőtlenséget verifikálni, ami viszont könnyen elvégezhető. A többi felsorolt és számos más, itt fel nem sorolt azonosság, ill. egyenlőtlenség az 1. tétel, ill. annak korolláriuma segítségével hasonló egyszerűen bizonyítható be.

3. §. Egy gráfelméleti segédtétel

Legyen H egy véges halmaz, H^2 jelölje a H halmaz különböző elemeiből álló összes rendezetlen elempárok halmazát (az (a, b) és (b, a) elempárokat tehát nem különböztetjük meg). Ha A egy tetszőleges halmaz, jelölje N_A az A halmaz elemeinek számát. Ha tehát $N_H=n$, akkor $N_{H^2}=\binom{n}{2}$. Legyen E a H^2 halmaz egy tetszőleges részhalmaza; az E halmaz elemei tehát a H halmaz elemeiből képezett bizonyos elempárok. A $G=(H, E)$ halmazpárt (véges) *gráf*nak nevezzük; a H halmaz elemeit a gráf *szögpont*jainak, az E halmaz elemeit pedig a gráf *él*einek nevezzük. Ha V_i és V_j a G gráf szögpontjai és (V_i, V_j) a G gráf éle, azt mondjuk, hogy a V_i és V_j szögpontokat G-ben él köti össze; a (V_i, V_j) élt egyaránt nevezzük V_i-ből, ill. V_j-ből kiinduló, ill. ezen szögpontokba érkező élnek.

Ha $G=(H, E)$, legyen $N_G=N_H$ és $M_G=N_E$. Vagyis N_G a G gráf szögpontjainak számát és M_G a G gráf éleinek számát jelöli.

Legyen $G=(H, E)$ egy gráf, és h legyen a H halmaz egy részhalmaza. A hG gráfot a következőképpen definiáljuk: $hG=(h, h^2E)$, vagyis a hG gráf a G gráf azon szögpontjaiból áll, amelyek h-hoz tartoznak, és G azon éleiből, melyek két h-hoz tartozó szögpontot kötnek össze. Ha $M_{hG}=j$, azt mondjuk, hogy a h halmaz a G gráfnak j élét tartalmazza. Legyen $G=(H, E$

egy tetszőleges véges gráf. Legyen

$$N_G(j,k)=\sum_{\substack{h\subset H\\ N_h=k\\ M_{hG}\leqq j}} 1, \tag{3.1}$$

vagyis $N_G(j,k)$ jelölje H azon k elemű részhalmazainak a számát, amelyek G-nek legfeljebb j élét tartalmazzák. Az üres halmazt itt 0-elemű (tehát páros elemszámú) részhalmaznak tekintjük, tehát minden G gráfra és minden $j\geqq 0$-ra

$$N_G(j,0)=1.$$

Legyen továbbá

$$N_G^{(1)}(j,2k+1)=\sum_{l=0}^{k} N_G(j,2l+1) \tag{3.2}$$

és

$$N_G^{(0)}(j,2k)=\sum_{l=0}^{k} N_G(j,2l). \tag{3.3}$$

Vagyis $N_G^{(1)}(j,m)$, ill. $N_G^{(0)}(j,m)$ H azon páratlan, ill. páros, de legfeljebb m számú elemből álló részhalmazainak számát jelöli, amelyek G-nek legfeljebb j élét tartalmazzák. Legyen továbbá bármely nemnegatív egész k és l számra

$$\delta_{kl}=\begin{cases}1 & \text{ha } k=l\\ 0 & \text{ha } k\neq l.\end{cases} \tag{3.4}$$

Bebizonyítjuk a következő tételt:

2. TÉTEL. *Legyen $G=(H,E)$ tetszőleges véges gráf, és $n=N_G$, akkor k minden nemnegatív egész értékére fennállnak az*

$$N_G^{(0)}(1,2k+2)-\delta_{n0}\geqq N_G^{(1)}(0,2k+1) \tag{3.5}$$

és az

$$N_G^{(1)}(1,2k+1)\geqq N_G^{(0)}(0,2k)-\delta_{n0} \tag{3.6}$$

egyenlőtlenségek.

Megjegyzés. Abban a speciális esetben, ha G egyetlen egy élt sem tartalmaz, (3. 5) és (3. 6) a (2. 15a), ill. (2. 15b) egyenlőtlenségekre redukálódik; ha emellett $2k\geqq n$, akkor (3. 5) és (3. 6) együtt azt a jól ismert tényt fejezik ki, hogy minden nem üres véges halmaznak ugyanannyi páros elemszámú részhalmaza van mint páratlan elemszámú részhalmaza.

A 2. tétel bizonyítása. A 2. tételt a H halmaz elemeinek számára vonatkozó teljes indukcióval fogjuk bizonyítani, mégpedig mindkét ((3. 5) és (3. 6)) egyenlőtlenséget együtt. Először konstatáljuk, hogy ha $n=N_G=0$, akkor (3. 5) és (3. 6) fennállnak. Valóban, ez esetben (3. 5) és (3. 6) mindkét oldalán 0 áll. Tegyük most fel, hogy (3. 5) és (3. 6) minden n szögpontú gráfra teljesülnek, és legyen G egy tetszőleges $n+1$ szögpontú gráf. A G gráf szögpontjai legyenek $V_1, V_2, \ldots, V_{n+1}$. Legyen H' a $V_1, V_2, \ldots, V_n$ elemekből álló halmaz, és legyen $G'=H'G$. Legyen H'' a H halmaz azon elemeinek halmaza, amelyeket G-ben V_{n+1}-gyel él köt össze, és legyen $G''=H''G$. Legyen továbbá $G'''=H'''G$, ahol H''' H azon elemeiből áll, amelyek G-ben V_{n+1}-gyel nincsenek éllel összekötve.

Vizsgáljuk meg először az $N_G^{(0)}(1, 2k+2)$ mennyiséget. Könnyen belátható, hogy

$$N_G^{(0)}(1, 2k+2) = N_{G'}^{(0)}(1, 2k+2) + N_{G'''}^{(1)}(1, 2k+1) + \Delta^{(1)}, \tag{3. 7}$$

ahol $\Delta^{(1)}$ H' azon részhalmazainak számát jelöli, amelyek H''-nek pontosan egy elemét tartalmazzák, elemszámuk páratlan és legfeljebb $2k+1$, és nem tartalmazzák G egyetlen élét sem, tehát

$$\Delta^{(1)} = \sum_{\substack{h \subset H' \\ N_h = 2l+1,\ 0 \leqq l \leqq k \\ N_{hH''} = 1 \\ M_{hG} = 0}} 1 \tag{3. 8}$$

(3. 7) belátásához elegendő figyelembe venni, hogy H részhalmazai, amelyek G-nek legfeljebb egy élét tartalmazzák, három típusba sorolhatók: *a)* olyanok, amelyek V_{n+1}-et nem tartalmazzák, *b)* olyanok, amelyek V_{n+1}-et tartalmazzák, de H'' egyetlen elemét sem, *c)* olyanok, amelyek tartalmazzák V_{n+1}-et és H''-nek pontosan egy elemét. Mármost nyilvánvaló, hogy ha G''' üres, akkor $\Delta^{(1)} \geqq N_{H''}$, tehát általában

$$\Delta^{(1)} \geqq \delta_{N_{G'''},0} \cdot N_{N''}. \tag{3. 9}$$

Másrészt viszont

$$N_G^{(1)}(0, 2k+1) = N_{G'}^{(1)}(0, 2k+1) + N_{G'''}^{(0)}(0, 2k), \tag{3. 10}$$

ugyanis H azon részhalmazai, amelyek G-nek egyetlen élét sem tartalmazzák, két osztályba sorolhatók aszerint, hogy V_{n+1}-et tartalmazzák-e vagy sem; előbbiek V_{n+1} mellett csak H''' elemeiből állhatnak. (3. 7), (3. 9) és (3. 10) szerint

$$\begin{aligned} N_G^{(0)}(1, 2k+2) - N_G^{(1)}(0, 2k+1) &\geqq (N_{G'}^{(0)}(1, 2k+2) - N_{G'}^{(1)}(0, 2k+1)) + \\ &+ (N_{G'''}^{(1)}(1, 2k+1) - N_{G'''}^{(0)}(0, 2k)) + N_{N''}\delta_{N_{G'''},0}. \end{aligned} \tag{3. 11}$$

Az indukciós feltevés szerint tehát

$$N_G^{(0)}(1, 2k+2) - N_G^{(1)}(0, 2k+1) \geqq \delta_{N_{G'},0} + \delta_{N_{G'''},0}(N_{H''} - 1). \tag{3. 12}$$

Mármost G' vagy üres, akkor $\delta_{N_{G'},0}=1$, $\delta_{N_{G'''},0}=1$ és $N_{H''}=0$, tehát (3. 12) jobb oldalán $1-1=0$ áll; vagy G' nem üres, akkor vagy $N_{G'''}>0$ vagy $N_{G'''}=0$ és $N_{H''}\geqq 1$; az első esetben (3. 12) jobb oldalán 0 áll, a második esetben $N_{H''}-1\geqq 0$, tehát (3. 12) jobb oldala mindenképpen nemnegatív, vagyis (3. 5) teljesül G-re.

Most vizsgáljuk meg (3. 6)-ot. Nyilván

$$N_G^{(1)}(1,2k+1)=N_{G'}^{(1)}(1,2k+1)+N_{G'''}^{(0)}(1,2k)+\Delta^{(0)}, \tag{3.13}$$

ahol

$$\Delta^{(0)}=\sum_{\substack{h\subset H'\\ N_h=2l \quad 0\leqq l\leqq k\\ N_{hH''}=1, \quad M_{hG}=0}} 1 . \tag{3.14}$$

Hasonlóképpen, mint előbb,

$$N_G^{(0)}(0,2k)=N_{G'}^{(0)}(0,2k)+N_{G'''}^{(1)}(0,2k-1), \tag{3.15}$$

tehát

$$N_G^{(1)}(1,2k+1)-N_G^{(0)}(0,2k)\geqq \delta_{N_{G'''},0}-\delta_{N_{G'},0}. \tag{3.16}$$

Mármost (3. 16) jobb oldala mindig 0-val egyenlő (ugyanis, ha H' üres, akkor H''' is üres), tehát (3. 6) is fennáll. Ezzel a 2. tételt bebizonyítottuk.

4. §. Egy új „szitálási" tétel

A 2. tétel, továbbá az 1. tétel segítségével bebizonyítunk most egy „szitálási" tételt.

Legyen $\mathfrak{A}$ egy valószínűségi algebra, $A_1, A_2, \ldots, A_n$ tetszőleges események. Legyen G egy tetszőleges gráf, amelynek n szögpontja van, amelyeket az $1, 2, \ldots, n$ számokkal számozunk meg. A rövidség kedvéért G szögpontjait azonosítjuk az $1, 2, \ldots, n$ számokkal, ha tehát G-ben az i-edik és j-edik szögpont éllel van összekötve, ezt röviden úgy fejezzük ki, hogy G-ben az i és j számokat él köti össze. Jelölje H az $1, 2, \ldots, n$ számok halmazát. Jelölje $H^{(1)}$ H azon részhalmazainak összességét, amelyek vagy páros számú elemből állnak és nem tartalmazzák G egyetlen élét sem (azaz a szóban forgó részhalmazhoz tartozó számokkal megszámozott szögpontok G-ben nincsenek összekötve), vagy páratlan számú elemből állnak és G-nek legfeljebb egy élét tartalmazzák. Jelölje $H^{(0)}$ H azon részhalmazainak összességét, amelyek vagy páratlan számú elemből állnak, és nem tartalmazzák G egyetlen élét sem, vagy páros számú elemből állnak és G-nek legfeljebb egy élét tartalmazzák.

Legyen

$$S_0^{(1)}=1 \quad \text{és} \quad S_k^{(1)}=\sum_{\substack{1\leqq i_1<i_2<\cdots<i_k\leqq n\\ (i_1,i_2,\ldots,i_k)\in H^{(1)}}} \mathbf{P}(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k}) \quad \text{ha} \quad k=1,2,\ldots,n, \tag{4.1}$$

továbbá

$$S_0^{(0)} = 1 \quad \text{és} \quad S_k^{(0)} = \sum_{\substack{1 \leqq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqq n \\ (i_1, i_2, \ldots, i_k) \in H^{(0)}}} \mathbf{P}(A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_k}) \quad \text{ha} \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{4.2}$$

Tehát $S_k^{(1)}$ ill. $S_k^{(0)}$ az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ eseményekből képezett azon k-tényezős eseményszorzatok valószínűségeinek összegét jelöli, amely szorzatokban szereplő események indexeiből álló halmaz $H^{(1)}$-be, ill. $H^{(0)}$-ba tartozik. Fennáll mármost a következő tétel, amely az (1.3) és (1.4) egyenlőtlenségek általánosításainak tekinthető.

3. TÉTEL

$$\sum_{k=0}^{2l+1} (-1)^k S_k^{(1)} \leqq \mathbf{P}(\bar{A}_1 \bar{A}_2 \cdots \bar{A}_n) \leqq \sum_{k=0}^{2l} (-1)^k S_k^{(0)}, \tag{4.3}$$

ha $l = 0, 1, 2, \ldots$.

Bizonyítás. Ahhoz, hogy a 3. tételt bebizonyítsuk, az 1. tétel szerint elegendő megmutatni, hogy a (4.3) alatti egyenlőtlenségek érvényesek abban az esetben, ha az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ események mindegyike vagy **I**, vagy **O**. Nézzük előbb a (4.3) alatti felső egyenlőtlenséget. Az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ események mindegyike legyen azonos **I**-vel vagy **O**-val. Jelölje h azon k számok halmazát, amelyekre $A_k = \mathbf{I}$. Ez esetben

$$\sum_{k=0}^{2l} (-1)^k S_k^{(0)} = N_{hG}^{(0)}(1, 2l) - N_{hG}^{(1)}(0, 2l-1).$$

(3.5)-ből tehát következik, hogy (4.3) felső egyenlőtlensége fennáll. Az alsó egyenlőtlenség hasonlóképpen igazolható, ugyanis ha újból h jelöli azon k számok halmazát, amelyekre $A_k = \mathbf{I}$, akkor

$$\sum_{k=0}^{2l+1} (-1)^k S_k^{(1)} = N_{hG}^{(0)}(0, 2l) - N_{hG}^{(1)}(1, 2l+1).$$

Tehát (3.6) szerint a (4.3) alatti alsó egyenlőtlenség teljesül.

5. §. Erdős Pál egy problémájának megoldása

ERDŐS PÁL nemrégiben számelméleti vizsgálataival kapcsolatban a következő kombinatorikai problémát vetette fel: Egy n elemű $\mathcal{H}$ halmazból válasszunk ki találomra m részhalmazt, oly módon, hogy az egyes részhalmazok választásai egymástól függetlenül történjenek és minden választásnál $\mathcal{H}$ bármely részhalmaza ugyanazzal a valószínűséggel (tehát $\frac{1}{2^n}$ valószínűséggel) kerüljön kiválasztásra. Milyen nagyra kell az m számot választani, hogy 1-hez közeli valószínűséggel legyen a kiválasztott m részhalmaz között legalább két olyan, hogy az egyik részhalmaza a másiknak?

A véletlen részhalmazokkal kapcsolatban számos más érdekes probléma is felvethető; ezekkel egy másik dolgozatban rendszeres tárgyalásban kívánunk foglalkozni. Itt most csak ERDŐS PÁL problémájának megoldására szorítkozunk, az előző §-ban bebizonyított 3. tétel alkalmazásaként.

Először néhány lemmát bizonyítunk be.

1. LEMMA. *Legyen $\mathcal{H}$ egy n-elemű halmaz. $\mathcal{H}$ elemeit jelöljék $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Válasszuk ki találomra $\mathcal{H}$ egy h részhalmazát oly módon, hogy mind a 2^n lehetséges részhalmaz ugyanazzal a valószínűséggel kerüljön kiválasztásra. Legyen $\varepsilon_k(h) = 1$ vagy $\varepsilon_k(h) = 0$ aszerint, hogy a_k benne van-e h-ban vagy nem $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Akkor az $\varepsilon_1(h), \varepsilon_2(h), \ldots, \varepsilon_n(h)$ valószínűségi változók teljesen függetlenek és mindegyik az 1 és 0 értékeket $\frac{1}{2}$ valószínűséggel veszi fel.*

Az 1. lemma bizonyítása. Legyen $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ tetszőleges 0-kból és 1-esekből álló sorozat. Akkor nyilván $\mathcal{H}$-nak egyetlen egy olyan h részhalmaza van, amelyre $\varepsilon_j(h) = \delta_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ és így $\mathbf{P}(\varepsilon_1(h) = \delta_1, \varepsilon_2(h) = \delta_2, \ldots, \varepsilon_n(h) = \delta_n) = \frac{1}{2^n}$, amiből a lemma állítása leolvasható.

2. LEMMA. *Legyen $\mathcal{H}$ egy n-elemű halmaz. Válasszuk ki találomra (úgy, hogy $\mathcal{H}$ minden részhalmaza ugyanolyan valószínűséggel kerül kiválasztásra) és egymástól függetlenül $\mathcal{H}$ két részhalmazát: legyenek ezek h_1 és h_2. Annak a valószínűsége, hogy h_1 részhalmaza h_2-nek vagy h_2 részhalmaza h_1-nek,**

$$\mathbf{P}(h_1 \subseteq h_2 \text{ vagy } h_2 \subseteq h_1) = 2\left(\frac{3}{4}\right)^n - \frac{1}{2^n}.$$

A 2. lemma bizonyítása. Definiáljuk az $\varepsilon_k(h)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ valószínűségi változókat úgy, mint az 1. lemmában. Akkor nyilván az, hogy h_1 részhalmaza h_2-nek, ekvivalens a következő egyenlőtlenségek egyidejű teljesülésével: $\varepsilon_k(h_1) \leqq \varepsilon_k(h_2)$ ha $k = 1, 2, \ldots, n$. Mivel

$$\mathbf{P}(\varepsilon_k(h_1) \leqq \varepsilon_k(h_2)) = \mathbf{P}(\varepsilon_k(h_2) = 1) + \mathbf{P}(\varepsilon_k(h_2) = 0, \varepsilon_k(h_1) = 0) = \frac{3}{4}$$

és az $\varepsilon_k(h_1) \leqq \varepsilon_k(h_2)$ események $(k = 1, 2, \ldots, n)$ az 1. lemma, valamint h_1 és h_2 függetlenségének feltevése miatt függetlenek, következik, hogy

$$\mathbf{P}(h_1 \subseteq h_2) = \left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

* Itt és a következőkben azt, hogy h_1 részhalmaza h_2-nek, úgy jelöljük, hogy $h_1 \subseteq h_2$.

Hasonlóképpen $\left(\frac{3}{4}\right)^n$ a valószínűsége annak, hogy $h_2 \subseteq h_1$ legyen. Ha $h_1 \subseteq h_2$ és $h_2 \subseteq h_1$, akkor $h_1 = h_2$ és ennek valószínűsége nyilván $\frac{1}{2^n}$. Ebből a lemma állítása (1.2) szerint azonnal következik.

3. LEMMA. *Legyen $\mathcal{H}$ egy n-elemű halmaz. Válasszuk ki találomra és egymástól függetlenül $\mathcal{H}$ három részhalmazát; legyenek ezek h_1, h_2 és h_3. Akkor annak a valószínűsége, hogy a h_1 és h_2 halmazok közül az egyik részhalmaza legyen a másiknak és ugyanakkor a h_1 és h_3 halmazok közül is az egyik részhalmaza legyen a másiknak,*

$$\mathbf{P}((h_1 \subseteq h_2 \text{ vagy } h_2 \subseteq h_1) \text{ és } (h_1 \subseteq h_3 \text{ vagy } h_3 \subseteq h_1)) =$$
$$= 2\left(\left(\frac{5}{8}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) - 4\left(\frac{3}{8}\right)^n + \frac{1}{4^n}.$$

A 3. lemma bizonyítása. A szóban forgó esemény a következő módokon következhet be:

a) $h_1 \subseteq h_2$ és $h_1 \subseteq h_3$,
b) $h_1 \subseteq h_2$ és $h_3 \subseteq h_1$,
c) $h_2 \subseteq h_1$ és $h_1 \subseteq h_3$,
d) $h_2 \subseteq h_1$ és $h_3 \subseteq h_1$.

Az a) lehetőség valószínűsége $\left(\frac{5}{8}\right)^n$-nel egyenlő, ugyanis ahhoz, hogy $h_1 \subseteq h_2$ és $h_1 \subseteq h_3$ legyen, az kell, hogy teljesüljenek az $\varepsilon_j(h_1) \leqq \varepsilon_j(h_2)$ és $\varepsilon_j(h_1) \leqq \varepsilon_j(h_3)$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ egyenlőtlenségek. Mármost

$$\mathbf{P}(\varepsilon_j(h_1) \leqq \varepsilon_j(h_2) \text{ és } \varepsilon_j(h_1) \leqq \varepsilon_j(h_3)) = \mathbf{P}(\varepsilon_j(h_1) = 0) +$$
$$+ \mathbf{P}(\varepsilon_j(h_1) = \varepsilon_j(h_2) = \varepsilon_j(h_3) = 1) = \frac{5}{8}.$$

Hasonlóképpen a d) lehetőség valószínűsége is $\left(\frac{5}{8}\right)^n$.

A b) lehetőség valószínűsége $\frac{1}{2^n}$, ugyanis ahhoz, hogy $h_3 \subseteq h_1 \subseteq h_2$ legyen, kell hogy teljesüljenek az $\varepsilon_j(h_3) \leqq \varepsilon_j(h_1) \leqq \varepsilon_j(h_2)$ egyenlőtlenségek és

$$\mathbf{P}(\varepsilon_j(h_3) \leqq \varepsilon_j(h_1) \leqq \varepsilon_j(h_2)) = \mathbf{P}(\varepsilon_j(h_1) = 0, \ \varepsilon_j(h_3) = 0) +$$
$$+ \mathbf{P}(\varepsilon_j(h_1) = 1, \varepsilon_j(h_2) = 1) = \frac{1}{2}.$$

Hasonlóképpen $\frac{1}{2^n}$-nel egyenlő a c) eset valószínűsége is. Mármost az a) és d), valamint a b) és c) lehetőségek egyidejűleg csak akkor következhetnek be, ha $h_1 = h_2 = h_3$, aminek $\frac{1}{4^n}$ a valószínűsége; az a) és b) lehetőségek, valamint az a) és c) lehetőségek egyidejűleg csak akkor következhetnek be, ha $h_1 = h_2 \subseteq h_3$, aminek $\left(\frac{3}{8}\right)^n$ a valószínűsége; hasonlóképpen a b) és d), valamint a c) és d) lehetőségek egyidejű bekövetkezésének a valószínűsége is $\left(\frac{3}{8}\right)^n$, az a), b), c) és d) lehetőségek közül bármely három egyidejűleg csak akkor következhet be, ha $h_1 = h_2 = h_3$; ennélfogva a keresett valószínűség a *Poincaré*-képlet szerint

$$2\left(\frac{5}{8}\right)^n + 2\left(\frac{1}{2}\right)^n - 2\left(\frac{1}{4}\right)^n - 4\left(\frac{3}{8}\right)^n + 4\left(\frac{1}{4}\right)^n - \left(\frac{1}{4}\right)^n =$$

$$= 2\left(\frac{5}{8}\right)^n + 2\left(\frac{1}{2}\right)^n - 4\left(\frac{3}{8}\right)^n + \frac{1}{4^n}.$$

Ezzel a 3. lemmát bebizonyítottuk.

Ezek után rátérhetünk ERDŐS PÁL problémájára. Be fogjuk bizonyítani a következő tételt.

4. TÉTEL: *Legyen $\mathcal{H}$ egy n-elemű halmaz. Válasszuk ki egymástól függetlenül és találomra $\mathcal{H}$-nak $m = m(n)$ darab részhalmazát oly módon, hogy minden választásnál $\mathcal{H}$ minden részhalmaza ugyanakkora $\left(\text{tehát } \frac{1}{2^n}\right)$ valószínűséggel kerüljön kiválasztásra. Jelölje $P_n(m)$ annak a valószínűségét, hogy a kiválasztott részhalmazok között van legalább két olyan halmaz, hogy az egyik részhalmaza a másiknak. Akkor bármely rögzített $c > 0$-ra, ha*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{m(n)}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n} = c, \tag{5.1}$$

akkor

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}_n(m(n)) = 1 - e^{-c^2}. \tag{5.2}$$

Bizonyítás. Legyenek a találomra kiválasztott részhalmazok $h_1, h_2, \ldots, h_m$ és jelölje A_{ij} azt az eseményt, hogy vagy $h_i \subseteq h_j$ vagy $h_j \subseteq h_i$. Nyilván

$$\mathbf{P}_n(m) = 1 - \mathbf{P}\left(\prod_{1 \leq i < j \leq m} \overline{A_{ij}}\right). \tag{5.3}$$

Az (i, j) $(1 \leq i < j \leq m)$ számpárok halmazát jelöljük Q-val. A G gráf szögpontjai legyenek Q összes elemei, és az (i, j) és (k, l) szögpontok legyenek összekötve, ha az i, j, k, l számok nem mind különbözőek (vagyis ha $i = k$, vagy ha $i=l$, vagy ha $j=k$, vagy ha $j=l$). A 3. tétel szerint fennállnak a következő egyenlőtlenségek:

(5.4) $$\mathbf{P}\Big(\prod_{1\leq i<j\leq m}\bar{A}_{ij}\Big)\leqq\sum_{k=0}^{2l+1}(-1)^k S_k^{(0)}\qquad (l=0,1,\ldots)$$

és

(5.5) $$\mathbf{P}\Big(\prod_{1\leq i<j\leq m}\bar{A}_{ij}\Big)\geqq\sum_{k=0}^{2l}(-1)^k S_k^{(1)}\qquad (l=0,1,\ldots)$$

(5.4)-ben az $S_k^{(0)}$ számok a következőképpen vannak definiálva:

$$S_0^{(0)}=1 \quad \text{és} \quad S_k^{(0)}=\sum\nolimits^{(0)}\mathbf{P}(A_{i_1j_1}A_{i_2j_2}\cdots A_{i_kj_k}),\quad \text{ha} \quad k=1,2,\ldots,$$

ahol $\sum^{(0)}$ azt jelöli, hogy az összegezés az (i,j) $(1\leqq i<j\leqq m)$ számpárokból kiválasztható összes olyan k-tagú kombinációra végzendő el, amelyekben az $(i_1,j_1),\ldots,(i_k,j_k)$ számpárok mind idegenek, ha k páratlan, és legfeljebb két számpárnak van egy közös eleme, ha k páros: $S_k^{(1)}$ (5.5)-ben a következőképpen van definiálva:

$$S_0^{(1)}=1 \quad \text{és} \quad S_k^{(1)}=\sum\nolimits^{(1)}\mathbf{P}(A_{i_1j_1}A_{i_2j_2}\cdots A_{i_kj_k}),\quad \text{ha} \quad k=1,2,\ldots,$$

ahol $\sum^{(1)}$ azt jelöli, hogy az összegezés az (i,j) $(1\leqq i<j\leqq m)$ számpárokból kiválasztható összes olyan k tagú kombinációkra végzendő el, amelyekben az $(i_1,j_1),\ldots,(i_k,j_k)$ számpárok mind idegenek, ha k páros és legfeljebb két számpárnak van egy közös eleme, ha k páratlan.

Mármost a 2. lemma szerint

(5.6) $$S_{2r+1}^{(0)}=\frac{\binom{m}{2}\binom{m-2}{2}\cdots\binom{m-2(2r+1)+2}{2}}{(2r+1)!}\left(2\left(\frac{3}{4}\right)^n-\frac{1}{2^n}\right)^{2r+1}$$

és

(5.7) $$S_{2r}^{(1)}=\frac{\binom{m}{2}\binom{m-2}{2}\cdots\binom{m-4r+2}{2}}{(2r)!}\left(2\left(\frac{3}{4}\right)^n-\frac{1}{2^n}\right)^{2r},$$

ha $r=0,1,\ldots$.

Továbbá

(5.8) $$S_{2r}^{(0)}=\frac{\binom{m}{2}\binom{m-2}{2}\cdots\binom{m-4r+2}{2}}{(2r)!}\left(2\left(\frac{3}{4}\right)^n-\frac{1}{2^n}\right)^{2r}+R_{2r}^{(0)},$$

ahol

(5.9) $$R_{2r}^{(0)}=\sum\nolimits^{*}\mathbf{P}(A_{i_1j_1}\cdots A_{i_{2r}j_{2r}}).$$

Itt $\sum^{*}$ azt jelöli, hogy az összegezés azokra az (i,j) $1\leqq i<j\leqq m$ szám-

párokból képezett $2r$ tagú kombinációkra terjesztendő ki, amelyek között pontosan kettő van, amelyek nem idegenek. Ennélfogva a 2. és 3. lemma szerint

$$R_{2r}^{(0)}=\frac{m\binom{m-1}{2}\binom{m-3}{2}\cdots\binom{m-4r+5}{2}}{(2r-2)!}\cdot \tag{5.10}$$
$$\cdot\left(2\left(\frac{3}{4}\right)^n-\frac{1}{2^n}\right)^{2r-2}\left(2\left(\left(\frac{5}{8}\right)^n+\frac{1}{2^n}\right)-4\left(\frac{3}{8}\right)^n+\frac{1}{4^n}\right).$$

Hasonlóképpen

$$S_{2r+1}^{(1)}=\frac{\binom{m}{2}\binom{m-2}{2}\cdots\binom{m-4r}{2}}{(2r+1)!}\left(2\left(\frac{3}{4}\right)^n-\frac{1}{2^n}\right)^{2r+1}+R_{2r+1}^{(0)}, \tag{5.11}$$

ahol

$$R_{2r+1}^{(0)}=\sum{}^{*}\mathbf{P}(A_{i_1j_1}\cdots A_{i_{2r+1}j_{2r+1}}). \tag{5.12}$$

Itt $\sum^{*}$ megint azt jelenti, hogy az összegezés azokra az (i,j) $1\leqq i<j\leqq m$ számpárokból képezett $2r+1$ tagú kombinációkra terjesztendő ki, amelyek között pontosan kettő van, amelyek nem idegenek. Ilyen módon a 2. és 3. lemma szerint

$$R_{2r+1}^{(1)}=\frac{m\binom{m-1}{2}\cdots\binom{m-4r+3}{2}}{(2r-1)!}\left(2\left(\frac{3}{4}\right)^n-\frac{1}{2^n}\right)^{2r-1}\left(2\left(\left(\frac{5}{8}\right)^n+\frac{1}{2^n}\right)-\right. \tag{5.13}$$
$$\left.-4\left(\frac{3}{8}\right)^n+\frac{1}{4^n}\right).$$

Legyen most

$$m(n)\sim c\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n. \tag{5.14}$$

Egyszerű számolással adódik az (5.6)—(5.13) képletekből, figyelembe véve, hogy $\dfrac{\frac{5}{8}}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^2}=\dfrac{5\sqrt{3}}{12}<1$, hogy ez esetben

$$S_j^{(0)}=\frac{c^{2j}}{j!}+o(1)\qquad (j=0,1,\ldots) \tag{5.15}$$

és

$$S_j^{(1)}=\frac{c^{2j}}{j!}+o(1)\qquad (j=0,1,\ldots), \tag{5.16}$$

ahol $o(1)$ olyan hibatagot jelöl, amely 0-hoz tart, ha $n\to+\infty$.

Ennélfogva az (5. 3)—(5. 5) képletek szerint l minden értékére

$$(5.17) \quad 1-\sum_{j=0}^{2l}(-1)^j\frac{c^{2j}}{j!} \leqq \varliminf_{n\to+\infty} \mathbf{P}_n(m(n)) \leqq \varlimsup_{n\to+\infty} \mathbf{P}_n(m(n)) \leqq 1-\sum_{j=0}^{2l+1}(-1)^j\frac{c^{2j}}{j!}.$$

Így tehát, figyelembe véve azt, hogy l tetszőleges nagynak választható, kapjuk, hogy

$$(5.18) \quad \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}_n(m(n)) = 1-e^{-c^2}.$$

Ezzel a 4. tételt bebizonyítottuk.

Most még csak azt kívánjuk megvilágítani, hogy miért volt szükség a 4. tétel bizonyításához a 2. tételre, vagyis arra az eljárásra, amit „korlátozott szitálás"-nak nevezhetünk, és miért nem alkalmazhattuk egyszerűen a *Poincaré*-féle formulát (pontosabban az (1. 3) és (1. 4) egyenlőtlenségeket), vagyis a közönséges szitálási eljárást. Vizsgáljuk meg e célból az

$$S_k = \sum \mathbf{P}(A_{i_1 j_1} \cdots A_{i_k j_k})$$

összeget, ahol most az összegezés az összes, az (i, j) $(1 \leqq i < j \leqq m)$ számpárokból képezett k-adrendű kombinációkra terjed ki. Az S_k összeg tartalmazza többek között a $\mathbf{P}(A_{i_1 j} A_{i_2 j} \cdots A_{i_k j})$ tagokat is, ahol $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$; az ilyen tagok száma nyilván

$$\binom{m}{k+1} \sim \frac{c^{k+1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{n(k+1)}}{(k+1)!}.$$

Másrészt

$$\mathbf{P}(A_{i_1 j} \cdots A_{i_k j}) \geqq \mathbf{P}(\varepsilon_l(h_j) = 1,\ l = 1, 2, \ldots, n) = \frac{1}{2^n},$$

tehát a szóban forgó tagok összege $\left(\frac{2^k}{3^{\frac{k+1}{2}}}\right)^n$ nagyságrendű, és mivel $\frac{2^k}{3^{\frac{k+1}{2}}} > 1$, ha $k \geqq 4$, tehát a szóban forgó „hibatagok" összege minden határon túl nő. Természetesen a $\sum(-1)^j S_j$ összeg minden tagjában fellépő ilyen hibatagok az összeg váltakozó előjelű lévén, végeredményben kiesnek, azonban ennek közvetlen kimutatása rendkívül bonyolult volna. Ezért kellett azt az utat választanunk, hogy a szóban forgó „hibatagokat" a korlátozott szitálás alkalmazásával eleve kiküszöböljük.

A 4. tételből könnyen következik, hogy ha az $m = m(n)$ pozitív egész értékű függvényt úgy választjuk meg, hogy $\lim_{n\to+\infty} \frac{m(n)}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n} = 0$ legyen, akkor n

növekedésével 0-hoz tart annak a valószínűsége, hogy találomra kiválasztva az n elemű $\mathcal{H}$ halmaznak $m(n)$ számú részhalmazát, azok között legyen két olyan, hogy az egyik részhalmaza a másiknak; míg ha az $m(n)$ függvényt úgy választjuk meg, hogy

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{m(n)}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n} = +\infty$$

legyen, akkor a szóbanforgó valószínűség 1-hez konvergál, ha $n\to+\infty$.

A kérdést, amelyre a 4. tétel választ ad, a következőképpen is megfogalmazhatjuk: Az n elemű $\mathcal{H}$ halmazból válasszunk találomra egymástól függetlenül részhalmazokat addig, míg először fordul elő, hogy a kiválasztott részhalmazok között van két olyan, hogy az egyik részhalmaza a másiknak. Jelölje $\nu(n)$ azt, hogy ez hányadik részhalmaz kiválasztása után következik be; határozzuk meg a $\nu(n)$ valószínűségi változó eloszlását, illetve határeloszlását $n\to+\infty$ esetén. Nyilvánvaló, hogy

$$\mathbf{P}(\nu(n)\leqq m) = \mathbf{P}_n(m) \tag{5.19}$$

és így a 4. tétel szerint

$$\lim \mathbf{P}\left(\nu(n)\leqq c\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n\right) = 1-e^{-c^2}. \tag{5.20}$$

A 4. tétel eredményéből már sejteni lehet, hogy ha az n elemű $\mathcal{H}$ halmazból találomra $m(n)$ részhalmazt választunk, és ha $m(n)=\omega(n)\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n$, ahol $\omega(n)\to+\infty$, akkor, ha n nagy, nemcsak, hogy 1-hez közeli valószínűséggel lesz a kiválasztott részhalmazok között olyan h_1 és h_2 halmaz-pár, hogy h_1 részhalmaza h_2-nek, hanem nagy valószínűséggel nagyszámú ilyen részhalmaz-pár lesz a kiválasztott $m(n)$ részhalmaz között. A következő tétel megmutatja, hogy ez valóban így van, és egyben megadja, hogy körülbelül hány ilyen részhalmaz-pár lesz.

5. TÉTEL. *Az n elemű $\mathcal{H}$ halmaznak válasszuk ki találomra egymástól függetlenül $m(n)$ részhalmazát oly módon, hogy minden választásnál $\mathcal{H}$ minden részhalmaza ugyanakkora $\left(\text{tehát } \frac{1}{2^n}\right)$ valószínűséggel kerüljön kiválasztásra.*

Legyen

$$m(n)=\omega(n)\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n,$$

ahol $\lim_{n\to+\infty}\omega(n)=+\infty$ *és* $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\omega(n)}=1$. *Jelöljék $h_1, h_2, \ldots, h_{m(n)}$ $\mathcal{H}$ talá-*

lomra kiválasztott részhalmazait és legyen γ_n egyenlő a $h_1, h_2, \ldots, h_{m(n)}$ halmazok között található olyan h_i, h_j halmazpárok számával ($i<j$), amelyekre h_i részhalmaza h_j-nak vagy h_j részhalmaza h_i-nak. Akkor, ha $0<\varepsilon<1$ tetszőleges

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(|\gamma_n-\omega^2(n)|<\omega(n)^{1+\varepsilon})=1.$$

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon_{ij}=1$, ha h_i részhalmaza h_j-nek, vagy h_j részhalmaza h_i-nek, egyébként legyen $\varepsilon_{ij}=0$. Akkor

$$\gamma_n=\sum_{1\leq i<j\leq m}\sum \varepsilon_{ij}.$$

Az ε_{ij} mennyiségek és γ_n természetesen mind valószínűségi változók. Jelöljük $\mathbf{M}(\xi)$-vel egy ξ valószínűségi változó várható értékét és $\mathbf{D}(\xi)$-vel a szórását. Akkor, mivel a 2. lemma szerint $\mathbf{M}(\varepsilon_{ij})=\mathbf{P}(\varepsilon_{ij}=1)=2\left(\frac{3}{4}\right)^n-\frac{1}{2^n}$, tehát

$$\mathbf{M}(\gamma_n)=\binom{m}{2}\left(2\left(\frac{3}{4}\right)^n-\frac{1}{2^n}\right)=\omega^2(n)+o(1).$$

Továbbá, mivel ε_{ij} és ε_{kl} függetlenek, ha az i, j, k, l számok mind különbözőek, és a 3. lemma szerint, ha az i, j, k, l számok között van két megegyező, akkor

$$\mathbf{M}(\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl})=O\left(\left(\frac{5}{8}\right)^n\right),$$

tehát

$$\mathbf{M}(\gamma_n^2)=\omega^4(n)+\omega^2(n)+o(\omega^2(n)).$$

Ilyen módon

$$\mathbf{D}^2(\gamma_n)=\omega^2(n)+o(\omega^2(n)).$$

Mármost CSEBISEV jólismert egyenlőtlensége szerint bármely ξ valószínűségi változóra

$$\mathbf{P}(|\xi-\mathbf{M}(\xi)|\geq\lambda\mathbf{D}(\xi))\leq\frac{1}{\lambda^2}.$$

Ilyen módon az 5. tétel a *Csebisev*-féle egyenlőtlenségből közvetlenül következik.

A nyert eredményekhez két megjegyzést fűzünk.

1. MEGJEGYZÉS. Az 5. tétel szerint, ha $\omega(n)\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n$ részhalmazt választunk ki az n elemű $\mathcal{H}$ halmazból találomra és egymástól függetlenül, akkor „majdnem biztosan" (azaz $n\to+\infty$ esetén 1-hez tartó valószínűséggel) lesz e részhalmazok közt két olyan, hogy az egyik részhalmaza a másiknak, ha $\omega(n)$ tetszőlegesen lassan tart végtelenhez. Érdemes ezt az eredményt összehasonlítani E. SPERNER [8] következő ismert tételével: Legyenek $h_1, h_2, \ldots, h_m$ az n elemű $\mathcal{H}$ halmaz olyan részhalmazai, hogy h_i nem részhalmaza h_j-nek, ha

$i \neq j$, $i, j = 1, 2, \ldots, m$. Akkor $m \leq \binom{n}{\left[\frac{n}{2}\right]}$, és ez az egyenlőtlenség nem javítható, tehát $\binom{n}{\left[\frac{n}{2}\right]}$ adott tulajdonságú részhalmaz valóban megadható (ti. ha vesszük $\mathcal{H}$ összes pontosan $\left[\frac{n}{2}\right]$ elemű részhalmazait, ezek közül egyik sem részhalmaza a másiknak). Vegyük észre, hogy $\binom{n}{\left[\frac{n}{2}\right]} \sim \frac{2^n}{\sqrt{n\pi}}$, tehát lényegesen nagyobb, mint $\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n$.

2. MEGJEGYZÉS. Vizsgáljuk most meg a következő kérdést: az n elemű $\mathcal{H}$ halmazból kiválasztva m részhalmazt találomra, jelölje $W_n(m)$ annak a valószínűségét, hogy ezen részhalmazok között legalább kettő idegen. Mit mondhatunk a $W_n(m)$ valószínűségről? A válasz az, hogy $W_n(m)$ hasonlóan viselkedik, mint $\mathbf{P}_n(m)$. Ha ugyanis h_1 és h_2 $\mathcal{H}$ két találomra kiválasztott részhalmaza, akkor

$$\mathbf{P}(h_1 \cap h_2 = 0) = \prod_{j=1}^{n} (1 - \mathbf{P}(\varepsilon_j(h_1) = \varepsilon_j(h_2) = 1)) = \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

és ezért a 4. tétellel teljesen analóg módon bebizonyítható, hogy ha

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{m(n)}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n} = c > 0,$$

akkor

$$\lim_{n \to +\infty} W_n(m) = 1 - e^{-c^2}.$$

Az a módszer, amelyet e dolgozatban ismertettünk, lehetővé teszi még számos más, véletlen halmazokra vonatkozó hasonló tétel bebizonyítását is. Anélkül, hogy a részletekbe belemennénk vagy teljességre törekednénk, megemlítünk itt egy tételt, amely a 4. tétel közvetlen általánosítása.

6. TÉTEL. *Jelölje $\mathbf{P}_n(m, r)$, ahol $r \geq 2$ pozitív egész szám, annak a valószínűségét, hogy az n elemű $\mathcal{H}$ halmazból találomra választva m részhalmazt, amelyeket jelöljenek $h_1, h_2, \ldots, h_m$, ezek közt található r olyan halmaz: $h_{i_1}, h_{i_2}, \ldots, h_{i_r}$, hogy $h_{i_1} \subseteq h_{i_2} \subseteq \cdots \subseteq h_{i_r}$. Ha*

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{m(n)}{\left(\frac{2}{\sqrt[r]{r+1}}\right)^n} = c,$$

akkor

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}_n(m(n), r) = 1 - e^{-c^r}.$$

1. MEGJEGYZÉS. A 6. tétel állítása az $r=2$ speciális esetben a 4. tétel állítására redukálódik.

2. MEGJEGYZÉS. Hasonlóképpen oldható meg a következő, még általánosabb kérdés is: Legyen $\vec{G}$ egy tetszőleges r szögpontú irányított gráf, amely nem tartalmaz (irányított) kört, azaz ne lehessen a G gráfban megadni olyan $V_{i_1}, V_{i_2}, \ldots, V_{i_k}$ szögpontokat, hogy a gráf tartalmazza a $\overrightarrow{V_{i_1}V_{i_2}}, \overrightarrow{V_{i_2}V_{i_3}}, \ldots, \overrightarrow{V_{i_{k-1}}V_{i_k}}$ és $\overrightarrow{V_{i_k}V_{i_1}}$ élek mindegyikét ($k=1,2,\ldots$). (E feltételbe beleértjük azt, hogy ne legyenek a gráfban hurkok, azaz $\overrightarrow{V_iV_i}$ alakú élek és hogy ha $i \neq j$ a $\overrightarrow{V_iV_j}$ és $\overrightarrow{V_jV_i}$ élek közül a gráf legfeljebb az egyiket tartalmazza.) Hány részhalmazt kell találomra kiválasztani az n elemű $\mathcal{H}$ halmazból ahhoz, hogy ezek közül ki lehessen választani r olyan részhalmazt — legyenek ezek $h_1, h_2, \ldots, h_r$ —, amelyeket hozzárendelve a $\vec{G}$ gráf $V_1, V_2, \ldots, V_r$ szögpontjaihoz, h_i legyen részhalmaza h_j-nek, ha $\vec{G}$ tartalmazza a $\overrightarrow{V_iV_j}$ élt.

Az a módszer, amelyet e dolgozatban ismertettünk, alkalmas továbbá a következő, ugyancsak ERDŐS PÁL által felvetett problémák megoldására is: hány részhalmazt kell kiválasztani egy n elemű $\mathcal{H}$ halmazból, hogy a kiválasztott részhalmazok között 1-hez közeli valószínűséggel legyen három olyan halmaz: h_1, h_2 és h_3, hogy a) h_3 legyen egyenlő h_1 és h_2 egyesített halmazával, b) h_3 legyen egyenlő h_1 és h_2 közös részével. Még általánosabban: legyen előírva egy reláció, amely r halmazra vonatkozik, és a halmazalgebra műveleteivel fejezhető ki. A fenti módszerrel elvileg minden ilyen relációra vonatkozólag eldönthető, hogy hány részhalmazt kell az n elemű $\mathcal{H}$ halmazból kiválasztani ahhoz, hogy előírt valószínűséggel legyen a kiválasztott részhalmazok között r olyan, amelyek az előírt relációt kielégítik.

Természetesen minden ilyen probléma megoldásához először ki kell számítani, hogy a szóban forgó reláció (és esetleg néhány más, azzal rokon reláció) milyen valószínűséggel teljesül, ha abba az n elemű $\mathcal{H}$ halmaz találomra és egymástól függetlenül választott r részhalmazát behelyettesítjük. A 4. tétellel kapcsolatban e feladat megoldását a 2. és 3. lemmák tartalmazták.

Például a fent a) alatt említett ERDŐS PÁL által felvetett probléma esetében a következő lemmára van szükség.

4. LEMMA. *Válasszuk ki találomra és egymástól függetlenül az n elemű $\mathcal{H}$ halmaz három részhalmazát: legyenek ezek h_1, h_2 és h_3. Akkor annak a valószínűsége, hogy a h_3 halmaz egyenlő a h_1 és h_2 halmazok egyesítésével, vagy közös részével*

$$\mathbf{P}(h_3 = h_1 \cup h_2) = \mathbf{P}(h_3 = h_1 \cap h_2) = \frac{1}{2^n}.$$

Bizonyítás. A h_3 halmaz akkor és csak akkor egyenlő a h_1 és h_2 halmazok egyesítésével, ill. közös részével, ha

$$\varepsilon_j(h_3) = \max\left(\varepsilon_j(h_1), \varepsilon_j(h_2)\right), \quad \text{ill.} \quad \varepsilon_j(h_3) = \min\left(\varepsilon_j(h_1), \varepsilon_j(h_2)\right)$$

$(j = 1, 2, \ldots, n)$. Mármost

$$\mathbf{P}\left(\varepsilon_j(h_3) = \max\left(\varepsilon_j(h_1), \varepsilon_j(h_2)\right)\right) = \mathbf{P}\left(\varepsilon_j(h_3) = \min\left(\varepsilon_j(h_1), \varepsilon_j(h_2)\right)\right) = \frac{1}{2}.$$

A 4. lemma segítségével bebizonyítható a következő tétel.

8. TÉTEL. *Válasszunk ki az n elemű $\mathcal{H}$ halmazból találomra $m = m(n)$ részhalmazt. Jelölje $Q_n(m)$ ill. $Q_n^*(m)$ annak a valószínűségét, hogy a kiválasztott részhalmazok között legyen három olyan, hogy az egyik egyenlő a másik kettő egyesítésével (ill. közös részével). Akkor $Q_n^*(m) = Q_n(m)$ és ha*

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{m(n)}{(\sqrt[3]{2})^n} = c > 0,$$

akkor

$$\lim_{n \to +\infty} Q_n(m(n)) = 1 - e^{-\frac{c^3}{2}}.$$

MEGJEGYZÉS. Vegyük észre, hogy

$$1{,}154 = \frac{2}{\sqrt{3}} < \sqrt[3]{2} = 1{,}259.$$

Megjegyzés a korrektúránál (1961. febr. 16-án)

A 2. §-ban ismertetett módszer — mint legújabban észrevettem — közeli kapcsolatban áll az M. LOÈVE által megfogalmazott és *indikátor-módszer*nek nevezett módszerrel (lásd *M. Loève, Probability theory,* van Nostrand, New York 1955. 44. o., továbbá *E. Parzen, Modern probability theory and its applications,* Wiley, New York, 1960, 81. o.). E módszer a valószínűségi algebrák halmazalgebrával való realizációján alapszik. Legyen Ω egy tetszőleges nem üres halmaz, amelynek egy tetszőleges elemét jelöljük ω-val. Legyen $\mathcal{A}$ az Ω halmaz bizonyos részhalmazaiból álló és Ω-t is tartalmazó halmazalgebra, és $\mathbf{P}(A)$ egy $\mathcal{A}$-n értelmezett nemnegatív és additív halmazfüggvény, amelyre $\mathbf{P}(\Omega) = 1$. Az $\mathcal{A}$ halmazalgebra elemeit eseményeknek és a $\mathbf{P}(A)$ számot $(A \in \mathcal{A})$ az A esemény valószínűségének nevezzük; az Ω halmaz ω elemeit elemi eseményeknek nevezzük. Minden A eseményhez hozzárendelhetjük az $\mathbf{i}_A = \mathbf{i}_A(\omega)$ $(\omega \in \Omega)$ az Ω halmazon értelmezett függvényt, amely a következőképpen van definiálva:

$$\mathbf{i}_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{ha} \quad \omega \in A \\ 0 & \text{ha} \quad \omega \in \bar{A}. \end{cases}$$

Az $\mathbf{i}_A$ függvényt (valószínűségi változót) az A esemény indikátorának nevezzük. Nyilvánvaló, hogy $\mathbf{M}(\mathbf{i}_A) = \mathbf{P}(A)$ vagyis bármely esemény valószínűsége egyenlő indikátorának várható értékével. Így ha $F_h \in \mathcal{Cl}$ $(h = 1, 2, \ldots, N)$ és $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N$ valós számok, mivel a várható érték lineáris operáció, tehát

$$\sum_{h=1}^{N} \alpha_h \mathbf{P}(F_h) = \mathbf{M}\left(\sum_{h=1}^{N} \alpha_h \mathbf{i}_{F_h}\right).$$

Az indikátor módszer ármost abban áll, hogy a $\sum_{h=1}^{N} \alpha_h \mathbf{P}(F_h)$ összeg nemnegativitását, ill. zérussal való egyenlőségét gyakran úgy lehet bebizonyítani, hogy kimutatjuk, hogy a $\sum_{h=1}^{N} \alpha_h \mathbf{i}_{F_h}(\omega)$ összeg minden $\omega \in \Omega$-ra nemnegatív.

Nyilvánvaló továbbá, hogy a $\sum_{h=1}^{N} \alpha_h \mathbf{P}(F_h) \geqq 0$ egyenlőtlenség (ill. a $\sum_{h=1}^{N} \alpha_h \mathbf{P}(F_h) = 0$ egyenlőség) a $\mathbf{P}$ valószínűségi mérték minden lehetséges választásánál csakis abban az esetben állhat fenn, ha a $\sum_{h=1}^{N} \alpha_h \mathbf{i}_{F_h}(\omega)$ összeg minden $\omega \in \Omega$-ra nemnegatív (ill. azonosan eltűnik). Ez az állítás (amely LOÈVEnél explicite nem szerepel) láthatólag rokon a fenti 1. tétellel. Annak kimutatása, hogy egy $\sum_{h=1}^{N} \alpha_h \mathbf{i}_{F_h}(\omega)$ alakú összeg minden ω-ra nemnegatív (ill. zérussal egyenlő), általában a nyilvánvaló $\mathbf{i}_{AB} = \mathbf{i}_A \cdot \mathbf{i}_B$ és $\mathbf{i}_{\bar{A}} = 1 - \mathbf{i}_A$ relációk felhasználásával történhet. Például *Poincaré* formulája az indikátor-módszerrel a $\prod_{k=1}^{n} (1 - \mathbf{i}_{A_k})$ szorzat kiszorzása és az összes egyenlő számú tényezőből álló tagok összegezése útján bizonyítható.

Nem nehéz belátni, hogy a 2. §-ban ismertetett módszer és az indikátor-módszer láthatólag eltérő jellegük ellenére lényegében azonosak. Ha ugyanis az $F_1, F_2, \ldots, F_N$ események az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ események elemi függvényei, akkor választhatjuk Ω-nak az összes $\omega = A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_k} \bar{A}_{j_1} \bar{A}_{j_2} \cdots \bar{A}_{j_{n-k}}$ események halmazát, és ez esetben az, hogy $\sum_{h=1}^{N} \alpha_h \mathbf{i}_{F_h}(\omega) \geqq 0$ ugyanazt jelenti, mint az, hogy $\sum_{h=1}^{N} \alpha_h \mathbf{P}(F_h) \geqq 0$ abban az esetben, midőn $A_{i_1} = A_{i_2} = \cdots = A_{i_k} = \mathbf{I}$ és $A_{j_1} = A_{j_2} = \cdots = A_{j_{n-k}} = \mathbf{O}$. A két módszer között az a különbség, hogy míg az indikátor-módszer feltételezi a valószínűségi algebrák halmazelméleti interpretációját, addig a 2. §-ban ismertetett módszer ezen interpretációtól függetlenül is megfogalmazható és alkalmazható.

IRODALOMJEGYZÉK

[1] M. FRÉCHET, *Les probabilités associées à un système d'événements compatibles et dépendants*, I—II. Actualités Scientifiques et Industrielles, Hermann et Cie., Paris, 1940.

[2] KÜRSCHÁK JÓZSEF, *Matematikai versenytételek*, Budapest, 1929.

[3] RÉNYI ALFRÉD, *Valószínűségszámítás*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1954.

[4] JORDAN KÁROLY, *Fejezetek a klasszikus valószínűségszámításból*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1956.

[5] A. RÉNYI, Quelques remarques sur les probabilités des événements dépendants, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, 37 (1958) 393—398.

[6] G. BIRKHOFF, *Lattice theory*, American Math. Soc. Colloquium Publ. (revised edition), New York, 1948.

[7] П. С. Новиков, Элементы Математической Логики, Гостехиздат, Москва, 1959.

[8] E. SPERNER, Ein Satz über Untermengen einer endlichen Menge, *Mathematische Zeitschrift* **27** (1928) 544—548.

(Beérkezett: 1960. XII. 5.)

A Magyar Tudományos Akadémia
Matematikai Kutató Intézete

A TUDOMÁNYOS MINŐSÍTŐ BIZOTTSÁG HÍREI

Pál Lénárd doktori értekezésének nyilvános vitája

A *Tudományos Minősítő Bizottság* 1959. október 29-én rendezte meg PÁL LÉNÁRD „*Atomreaktorokban lejátszódó láncreakciók valószínűségszámítási elmélete*” című doktori értekezésének nyilvános vitáját. A disszertáció opponensei GOMBÁS PÁL, JÁNOSSY LAJOS és RÉNYI ALFRÉD akadémikusok voltak, a vitán NOVOBÁTZKY KÁROLY akadémikus elnökölt. Az elnök megnyitó szavai után a bíráló bizottság titkára ismertette PÁL LÉNÁRD életrajzát és eddigi tudományos munkásságát, majd a jelölt előadta értekezésének téziseit.

Az atomreaktorok klasszikus elmélete a *Boltzmann*-féle kinetikai egyenleten alapszik. A neutronsűrűség időbeli és térbeli változását leíró *Boltzmann*-féle egyenletet eddigi legáltalánosabb formájában USSACHOFF irta fel, aki az egyenletben a neutronsokszorozás tényét és a késleltető neutronok szerepét is figyelembe vette. A reaktorokban lejátszódó folyamatok valószínűségszámítási tárgyalásával azonban korábban igen kevesen foglalkoztak, eredményeik is bizonyos speciális problémák leegyszerűsített modell segítségével való tárgyalásában álltak. PÁL LÉNÁRD érdeme, hogy az atomreaktorokban lejátszódó folyamatok átfogó valószínűségszámítási tárgyalását kezdeményezte és több évi eredményes munka után sikerült egy elméletet megfogalmaznia. Lényegében ezt az elméletet foglalja össze ez az értekezés. Amint a szerző disszertációjában említi, egyik célkitűzése az volt, hogy a reaktorok sztochasztikus folyamatait leíró alapegyenleteket a legáltalánosabb formában fogalmazza meg és ezekből a neutronsűrűség várható értékére vonatkozó kinetikai egyenletet, illetve ennek adjungáltját származtassa. A másik célkitűzése pedig az volt, hogy a neutronsűrűség és neutronértékesség fluktuációjának számításához megbizható útmutatást adjon. Az alapegyenletek felírásánál lényegében a sztochasztikus folyamatok elméletében jól ismert *Kolmogorov—Feller* egyenletek felírásának alapgondolatát követi. Minthogy a *Kolmogorov—Feller* egyenletek két egyenlete egymás adjungáltjai, a szerző ezzel érthetővé teszi a reaktorok klasszikus elméletében tárgyalt kinetikai egyenlet adjungáltjának a szerepét. Ezen túlmenően a leírt valószínűségszámítási tárgyalásmód lehetővé teszi sok olyan mennyiség meghatározását, amelyek a klasszikus elmélet keretein belül — a dolog természetéből kifolyólag — nem vizsgálhatók. Ilyenek pl. egy t időpontban regisztrált neutronok számának magasabb momentumai, a különböző térrészekben levő neutronok számai közötti korreláció stb. Az alapos tárgyalás egyes eddig elterjedtnek nevezhető feltételezéseket is megcáfol, ilyen pl. az, hogy a neutronforrással ellátott, szubkritikus rendszer valamely részében található neutronok száma *Poisson*-eloszlást követ.

A disszertáció első részében a szerző alapegyenletének felírásával foglalkozik. Az egy injektált neutron hatására létrejövő folyamat, melynek tárgyalása lényegében elegendő alapot nyújt a továbbiakhoz, egy nem-lineáris integrodifferenciálegyenlettel írható le, ahol az ismeretlen függvény a reaktor egy konvex résztartományában t időpontban található neutronok számának feltételes eloszlásfüggvénye (ill. ennek generátorfüggvénye), a feltétel pedig az injektált neutron pozícióját, energiáját, az injektálás idejét és az injektálás irányát írja elő. Az egyenlet bonyolultsága miatt megoldása csak speciális esetekben remélhető. A következő részben szerző kiterjeszti vizsgálatait és foglalkozik a sokszorozó rendszer egy részében adott idő alatt bekövetkező maghasadások száma eloszlásfüggvényének meghatározásával, az adott idő alatt keletkezett neutronok számának eloszlásfüggvényével és más, fentebb már említett mennyiségekkel. Végül további alkalmazásokat mutat be, melyek közül kiemelkedik az állandó intenzitású neutronforrással ellátott szubkritikus rendszerben található neutronszám relatív szórásának a ($t = \infty$ esetben) kiszámítása, mellyel megmutatja a DE HOFFMANN-féle formula alkalmazhatóságának korlátait és egyben útmutatást ad jobb módszer bevezetésére.

A tézisek ismertetése után az opponensek felolvasták opponensi véleményeiket.

GOMBÁS PÁL akadémikus opponensi véleményében kiemeli a reaktorok elmélete valószínűségszámítási megalapozásának fontosságát, mert ez sok gyakorlati alkalmazást nyújt. Hangsúlyozza a neutronsűrűségben és neutronértékességben bekövetkező fluktuációk számításainak jelentőségét, melyek a szubkritikus rendszereken kívül a szabályozott rendszereknél és a neutronerősítőkkel folytatott kísérleteknél fontos szerepet játszanak. A dolgozatot értékes munkának tartja, melyben a jelölt a kitűzött feladatot részletesen feldolgozza, eredményei nemcsak elméleti szempontból fontosak, de komoly gyakorlati értékkel is bírnak.

JÁNOSSY LAJOS akadémikus opponensi véleményében megemlíti, hogy a jelölt a reaktorokban végbemenő láncfolyamatok szigorú elméletének tárgyalásában a valószínűségszámításban korábban ismert és a kaszkád-folyamatoknál alkalmazott „első ütközési" módszert alkalmazza a reaktorban lejátszódó komplikált folyamat diffúziós egyenletének felírására. Ez az egyenlet minden általánossága mellett elhanyagolásokat tartalmaz, a tárgyalásból azonban kitűnik, hogy bármely további részletet is figyelembe lehet venni. Az egyenleteket általánosan nem lehet megoldani, bizonyos egyszerűsítő feltétel mellett azonban olyan numerikus eredményekre lehet jutni, melyek vagy összhangban vannak a régebbi eredményekkel, vagy kísérletileg ellenőrizhetők. Hangsúlyozza a valószínűségszámítási tárgyalás előnyét, mely mellőzi a pontatlan segédfogalmak felhasználását. Kiemeli a reaktorokban lejátszódó folyamatok fluktuációira vonatkozó számításokat, melyek szükségesek a szubkritikus rendszerek szabályozásánál, neutron-erősítők tervezésénél és új szempontot jelentenek az impulzus reaktorral kapcsolatban. Véleménye szerint a disszertációt a reaktorokban végbemenő folyamatok új elmélete megalapozásának lehet tekinteni. Valószínűnek tartja, hogy a jövőben a disszertáció szerzőjétől és másoktól számos munka jelenik majd meg, melyek az itt megadott elmélet segítségével konkrét problémákat fognak kidolgozni.

RÉNYI ALFRÉD akadémikus opponensi véleményében megjegyzi, hogy a disszertáció a reaktorban lejátszódó jelenségek vizsgálatánál abban tér el a fizikai szakirodalomban szokásos tárgyalásmódtól, hogy konzekvensen valószínűségszámítási alapon áll. A kérdéssel kapcsolatos matematikai munkáktól viszont abban tér el, hogy a neutronsokszorozást kevésbé leegyszerűsített modell alapján vizsgálja. A késő neutronok szerepe következtében a folyamat elveszti *Markov*-jellegét, az egyenletek felírásánál a KOLMOGOROVtól származó alapgondolat mégis alkalmazható. Kiemeli, hogy a jelölt az alapegyenletből származtatható, a várható értékre vonatkozó egyenletekkel is foglalkozik és ezzel igazolja általános egyenletének jelentőségét. Véleménye szerint a disszertáció úttörő munkának tekinthető abból a szempontból is, hogy pontos eloszlások meghatározására törekszik. — Kifogásolja viszont, hogy a szerző a fő hangsúlyt a kérdés nagy általánosságban való tárgyalására helyezte, ahelyett, hogy előbb a gyakorlati jelentőséggel bíró speciális eseteket tárgyalta volna, megjegyezve, hogy ez a tárgyalásmód elvileg általánosabb esetekben is alkalmazható. Véleménye szerint konkrét speciális esetekben legtöbbször kevesebb fáradsággal jár direkt felírni az egyenleteket, mint az általános egyenleteket a konkrét esetre specializálni. Bár az általános egyenletek matematikai diszkusszióját illuzórikusnak tartja, kifogásolja ugyanennek a hiányát az egyszerűbb esetekben. Véleménye szerint a disszertáció eredményei minden jelentőségük mellett csupán első lépései egy átfogó programnak. Ami azonban ez után jön, az elsősorban matematikai jellegű és a disszertáció egyik fő érdekességének éppen azt tekinti, hogy ösztönzést nyújt a reaktorok matematikai elméletének további kidolgozásához. Elsősorban a késő neutronok vizsgálatát tartja matematikai szempontból rendkívül érdekesnek. Érdemesnek tartja az elágazó folyamatok főként KOLMOGOROVtól és SZEVASZTYANOVtól származó elméletét ez irányban továbbfejleszteni. Hiányolja még, hogy a szerző nem említi a *Monte-Carlo* módszert, amely a szerző még gépi úton sem megoldhatónak látszó egyenletei közelítő megoldására felhasználható. A kidolgozást szabatosnak és világosnak, a disszertációt pedig igen értékes, színvonalas, sok tekintetben úttörő és jelentős munkának tartja.

Mindhárom opponens a disszertáció doktori értekezésként való elfogadását javasolja.

Az opponensi véleményekre adott válaszában PÁL LÉNÁRD megjegyezte, hogy disszertációjában azt a célt akarta elérni, hogy lehetőség szerint a legáltalánosabb formában adja meg azokat az alapösszefüggéseket, melyekből a reaktorok viselkedésére jellemző legfontosabb fizikai mennyiségek várható értékei, szórásai és magasabbrendű momentumai számíthatók. RÉNYI ALFRÉD akadémikusnak válaszolva megjegyzi, hogy a várható értékekre vonatkozó egyenleteket valóban könnyebb konkrét esetekben felírni, aligha áll ez azonban a magasabbrendű momentumok egyenleteire is. Megemlíti, hogy az időközben Saclay-ben végzett szubkritikus kísérleteknél — ahol dolgozatának eredményeire nagymértékben támaszkodtak — kapott adatok jól egyeznek a módosított relatív szórásnégyzetekre általa közölt elméleti görbével. Megjegyzi még, hogy a sokszorozó rendszerek fluktuációs analízise új módszer megteremtését teszi lehetővé, mellyel a reaktorok dinamikai paraméterei gyorsabban és kedvező feltételekkel határozhatók meg, mint a régi, klasszikus módszerekkel. GOMBÁS PÁL és JÁNOSSY LAJOS akadémikusok opponensi véleményeivel teljesen egyetért.

Az opponensek elfogadták PÁL LÉNÁRD válaszát.

JÁNOSSY LAJOS akadémikus hozzaszólásában azt a gondolatot vetette fel, hogy ha a szerző az általánosításban még egy lépéssel tovább menne, az elmélet egyszerűbb és áttekinthetőbb volna.

PÁL LÉNÁRD válaszában megemlítette, hogy az első változat sokkal bonyolultabb volt és igen nehéz volt megtalálni azt a jelölési rendszert, amivel ilyen fokú egyszerűsítés keresztül vihetővé vált. További lépés valószínűleg messzemenő egyszerűsítéshez vezethetne.

A vita lezárása után a bíráló bizottság a következő határozatot hozta:

PÁL LÉNÁRD *Atomreaktorokban lejátszódó láncreakciók valószínűségszámítási elmélete* című doktori értekezésének nyilvános vitájára kiküldött bírálóbizottság megállapította, hogy a disszertáció témája a modern kutatás egyik súlyponti kérdésére irányul és hézagpótló jellegűnek bizonyul, jelentős új eredményekkel gyarapítva tudásunkat. A reaktorokban lejátszódó folyamatoknak átfogó, általános, tiszta valószínűségszámítási elméletét adja. A disszertációban sikerül integrodifferenciál-egyenletet felállítani a neutronok száma eloszlásának generátor függvényére. Ez a tárgyalásmód lehetővé teszi magasabb momentumok és korrelációs együtthatók meghatározását is. Általános eredményeit konkrét speciális esetekre alkalmazta és a végeredmények az irodalomban található kísérleti adatokkal jó egyezést mutattak. A disszertáció további kutatások alapjául szolgálhat.

Ennek alapján a bizottság *egyhangúlag javasolja a Tudományos Minősítő Bizottságnak, hogy* PÁL LÉNÁRDot *nyilvánítsa a fizikai tudományok doktorává.*

Prékopa András
a matematikai tudományok kandidátusa

M. Zemplén Jolán kandidátusi értekezésének nyilvános vitája

1960. február 18-án rendezte meg a *Tudományos Minősítő Bizottság* ZEMPLÉN JOLÁN *A magyarországi fizika története 1711-ig* című kandidátusi értekezésének nyilvános vitáját. Az értekezést NOVOBÁTZKY KÁROLY akadémikus, NAGY KÁROLY, a fizikai tudományok kandidátusa, valamint MAKKAI LÁSZLÓ, a történettudományok kandidátusa opponálták. A bíráló bizottság elnöke KOVÁCS ISTVÁN, a Magyar Tudományos Akadémia levelező tagja volt.

Az elnök megnyitó szavai után a bíráló bizottság titkára ismertette M. ZEMPLÉN JOLÁN eddigi tudományos tevékenységét, majd az elnök felkérésére a jelölt előadta kb. 20 ív terjedelemben megírt tudománytörténeti dolgozatának legfőbb eredményeit. Tézisei között elsősorban kiemelte a tudománytörténet ismertetésének jelentőségét egyetlen nemzeten belül. Indokolta az alkalmazott periodizációt. Röviden vázolta a fizika helyzetét főképpen a tizenhatodik és tizenhetedik században megjelent oktatási és fizikai tárgyú művek alapján. Téziseinek végkövetkeztetéseként azt vonta le, hogy hazánkban a fizika általános színvonala nem volt alacsonyabb, mint Európa többi országában.

Ezután NOVOBÁTZKY KÁROLY akadémikus emelkedett szólásra. Bírálatában helyeselte a disszertáció alapgondolatát és szerkezeti felépítését. Elismerően méltatta az egyes fejezeteket, külön kiemelve a dolgozat hetedik és nyolcadik, kimondottan fizikával foglalkozó fejezeteinek fontosságát. Megállapította, hogy a disszertáció szigorúan szakszerű kutatáson alapuló, a tényeket tárgyilagosan tolmácsoló hézagpótló mű. Egyetért a dolgozat történet-szemléletével, csupán a kartezianizmus értékelését ítéli talán túl szigorúnak.

Ezután a bíráló bizottság titkára felolvasta a távollevő NAGY KÁROLY opponensi véleményét, aki ugyancsak kiemelte, hogy a disszertáció komoly, szorgalmas munka örvendetes eredménye. Szerkezeti felépítésével kapcsolatban néhány kifogást hozott fel. A dolgozatot elfogadta, de azt javasolta, hogy a jelölt ne a fizikai tudományok kandidátusa, hanem a „tudománytörténetek" kandidátusa fokozatot nyerje el.

MAKKAI LÁSZLÓ opponens is örömmel üdvözölte e tudománytörténeti tárgyú dolgozatot. Különös értékét abban látja, hogy marxista történetszemlélet alapján dolgozta fel a magyarországi fizika történetének kezdeteit. Ez annál is inkább örvendetes, mert marxista értékelésű magyar kultúrtörténeti munkákban még hiány mutatkozik. Ebből a szempontból mintaszerűnek tartja az egyes kérdések értékelését, nevezetesen azt, hogy a szerző egy-egy tudós munkájának mind a haladó, mind pedig a visszahúzó elemeit megmutatta. Szerinte külön érdeme a szerzőnek, hogy a magyarországi természettudományos gondolkodás kezdeteiről tág európai perspektívába állított, részletes áttekintést adott. Hangsúlyozta, hogy mint történész elsősorban filozófiai és nem fizikai szempontból hasonlította össze a dolgozatban idézett egyes fizikai forrásműveket. Szerinte kifogásra ad okot, hogy a szerző az igazi (kísérleti) fizikát szembeállította a természetfilozófiával. Kívánatos lett volna, hogy a szerző még mélyebben elemezze a tudomány fejlődésének történeti—társadalmi hátterét. E megjegyzések mellett ZEMPLÉN JOLÁN disszertációját mind témaválasztása, gazdag adatanyaga, mind pedig a feldolgozás tudományos módszere miatt a magyar tudománytörténeti irodalom komoly értékének ítélte.

Ezután a bírálóbizottság elnöke abból a célból, hogy a NAGY KÁROLY indítványával kapcsolatban esetleg kialakuló felesleges vitának elébe vágjon, ismertette a Tudományos Minősítő Bizottságnak azt az elvi jelentőségű határozatát, amely szerint tudománytörténeti disszertáció esetén a bírálóbizottság javaslata alapján az illető tudományos szakterület tudományos fokozatát ítéli oda, zárójelben hozzáfüggesztve a „tudománytörténeti" jelzőt.

ZEMPLÉN JOLÁN válaszában kifejtette a túl szigorúnak ítélt *Descartes*-értékelésének indokait. MAKKAI LÁSZLÓ opponensi megjegyzésével kapcsolatban arra hivatkozott, hogy a disszertáció megírását igen nehézzé tette az, hogy a társadalmi háttér megfestésében csak nagyon kevés marxista szemléletű művelődéstörténeti munkára támaszkodhatott. A spekulatív és igazi fizika ellentéte túlzott kiélezésének kifogására a jelölt azt válaszolta, hogy a spekulatív filozófiák haladó elemeiből is csak az bizonyult maradandónak, amit később a kutatás is igazolt. Az atomizmus pl. átmenetileg elvesztette a tizenhetedik század közepén még tartott haladó jellegét LEIBNIZ filozófiájában idealista monadológiává torzulva, mígnem a kémiai kutatás a tizennyolcadik század végén visszatérítette a haladó materialista útra.

NOVOBÁTZKY KÁROLY akadémikus viszontválaszában megjegyezte, hogy közte és a szerző között a *Descartes*-kérdésben fennálló értékelésbeli különbséget lényegtelennek tartja. DESCARTES, aki a természeti törvény fogalmát elsőként ismerte fel, ha spekulatív úton is, igazi fizikát művelt, akár korunkban EINSTEIN. Tiszta fizikának minősül minden olyan elmélet, amelyet a tapasztalat fóruma igaznak ítél. A jelölt érvelését elfogadta, ugyanígy MAKKAI LÁSZLÓ opponens is.

Ezután GYULAI ZOLTÁN akadémikus kért szót és kifejtette, hogy pusztán a tézisek olvasása alapján nem is lehet megállapítani azt, mennyire eleven olvasmány, milyen gazdag az anyaga és milyen érdekes megállapításokat tartalmaz a vitatott dolgozat. Nemzetközi szempontból is méltatta a mű kultúrtörténeti jelentőségét. Szerinte sok érdekeset mondanának számunkra olyan tudománytörténeti művek, amelyek ugyanebben a korban pl. a németországi és az oroszországi fizika fejlődését írnák le.

KOVÁCS ISTVÁN örömét nyilvánította a felett, hogy a már 1949-ben az ő kezdeményezésére felvetett terv a magyarországi fizika történetének megírására ZEMPLÉN JOLÁN kutatásaival megvalósul. Osztotta GYULAI ZOLTÁN akadémikus véleményét, hogy a fizika-történeti művek a kulturális kölcsönhatást meggyőzően képesek igazolni. Felhívta a figyelmet e tekintetben KUDRJAVCEV magyarra is lefordított könyvére, amely behatóan elemzi az orosz fizika történetét is.

Az észrevételekre ZEMPLÉN JOLÁN kifejtette, hogy a vita örvendetesen eloszlatta a véleménykülönbségeket, köszönetét fejezte ki azoknak, akik abban résztvettek.

Ezután a vitát berekesztve a bíráló bizottság határozathozatalra vonult vissza. Az ülés újra megnyitása után az elnök felolvasta a határozat szövegét, mely szerint a bíráló bizottság megállapította, hogy

„A disszertáció hézagpótló mű, melynek hiányát régóta érezzük. Mind a témaválasztása, mind gondosan összegyűjtött gazdag anyaga, mind pedig a feldolgozás tudományos módszere miatt a magyar tudománytörténeti irodalom komoly értéke. Sokoldalúan elemzi a magyarországi természetfilozófiát és európai távlatba állítva is értékeli azt.

Rendkívül helyesnek tartja a bizottság, hogy a jelölt a magyar fizika-történet feldolgozását az annak előtörténetéül vázolt természetfilozófia szélesebb keretébe illeszti be. A bizottság megítélése szerint a jelölt szerencsésen egyesítette munkájában a téma feldolgozásához szükséges kultúrtörténészi és fizikusi ismereteket. Ilyen munka megírása elsősorban fizikusok feladata. A jelölt a fizika tudományának továbbfejlesztése területén is végzett és végez eredményes kutatómunkát.

Tekintettel arra, hogy a munka felülemelkedik a kandidátusi disszertációk szokásos színvonalán, a bizottság kívánatosnak tartja a munka mihamarábbi nyomtatásban való megjelenését annál is inkább, mert ez sok évtized óta érzett szügségletet elégítene ki.

A bizottság titkos szavazás után *egyhangúlag javasolja a Tudományos Minősítő Bizottságnak, hogy* ZEMPLÉN JOLÁNt *nyilvánítsa a fizika (tudománytörténeti) tudományok kandidátusává.*"

A magyar fizikusok várakozással tekintenek Zemplén Jolán további fizikatörténeti kutatásai felé.

Mátrai Tibor
a fizikai tudományok kandidátusa

Morlin Zoltán kandidátusi értekezésének nyilvános vitája

A Tudományos Minősítő Bizottság 1960. február 25-én rendezte meg MORLIN ZOLTÁN *Vizsgálatok nagy nyomáson végbemenő rekrisztallizációs folyamatok köréből* című kandidátusi értekezésének nyilvános vitáját. Az értekezés opponensei: BODÓ ZALÁN, a fizikai tudományok doktora és NAGY ELEMÉR, a fizikai tudományok doktora voltak. A bíráló bizottság tagjai: elnök: SZIGETI GYÖRGY akadémikus, titkár: BOROS JÁNOS, a fizikai tudományok kandidátusa, tagok: HOFFMANN TIBOR, a fizikai tudományok doktora, GERGELY GYÖRGY, PÓCZA JENŐ, a fizikai tudományok kandidátusai voltak.

Az elnök megnyitja a vitaülést, a titkár ismerteti a jelölt életrajzát és eddigi tudományos működését.

Ezután MORLIN ZOLTÁN ismerteti kandidátusi disszertációjának téziseit.

Vizsgálatai során 5—10 μ átmérőjű krisztallitekből álló NaCl és KCl porból indult ki. E porokat 1000—20 000 kg/cm^2 nyomás alatt préselte össze pasztillákká 20—750 C° hőmérsékleti intervallumban. NaCl anyagot használt azért, mert GYULAI és munkatársai ezen az anyagon és más alkálihaloidon nagyon sok kristálynövekedési elektromos vezetési és optikai mérést végeztek s a rekrisztallizációs vizsgálatok így más mérésekhez csatlakoznak és más eredményeket egészítenek ki. Préselés hatására a kiindulási anyag apró krisztallitjai igen nagy mértékben megnőttek. A kezeléstől függően a megnövekedett krisztallitok nagysága 100—500 μ.

A disszertáció három részre oszlik. Az első részben a jelölt ismerteti a rugalmas és képlékeny alakváltozást, összefoglalót ad a rekrisztallizáció elméletéről. A második részben ismerteti a NaCl-on végzett ilyen vizsgálatok irodalmát. A legjelentősebb idevonatkozó vizsgálatokat JOFFÉ és munkatársai, PRZIBRAM, GYULAI és munkatársai, valamint SMEKAL és munkatársai végezték. A harmadik részben saját méréseit ismerteti és ezeket értelmezi.

A felhasznált NaCl anyag részben désaknai eredetű, saját tisztítású, továbbá Chinoin készítésű pro anal minőségű, valamint wieliczkai eredetű, természetes egykristály anyag. A kész pasztillákat többféle szempontból vizsgálta. Mérte a feszülések megszűnésének, a kipihenésnek idő- és hőmérséklet függését. A pasztillák sűrűségét, keménységét és préselés közben a belső súrlódási együtthatóját, a szemcseméretet, a hőmérséklet és hőkezelés függésében.

100 C° hőmérsékleten a 10 000 kg/cm^2 nyomás mellett készült pasztillák teljesen átlátszóak. A transzparencia az időben csökken. A pasztillák elkészítése után végbemenő szerkezeti változásokat a vezetőképesség mérésével is nyomon lehet követni. A vezetőképesség az időben közel exponenciális csökkenést mutat, hasonlatosan a transzparenciával.

Adalék TlCl-dal ún. rekrisztallizációs foszfor állítható elő, ha a pasztilla anyagához kevés TlCl-os vizes oldatot keverünk, majd exsiccátorban megszárítjuk. Az így készített pasztillák szépen foszforeszkálnak, ha UV fénnyel gerjesztjük. Míg a TlCl-al aktivált NaCl foszfor kialvása exponenciális időfüggést mutat, addig a pasztilláké hiperbolikusat. A fényösszegnek a Tl-koncentrációtól való függése ugyanolyan a pasztilláknál, mint az egykristályoknál. A foszforeszcencia tulajdonság struktúraérzékeny. A hőkezelés a pasztilla által kibocsátott fényösszeget befolyásolja. Ezt részletesen vizsgálta.

Részletes táblázatokban ismerteti a sűrűségnek, valamint a keménységnek az alkalmazott nyomástól való függését. A szemcsenövekedésre vonatkozólag szépen sikerült fényképeket közöl a dolgozat. A növekedési formák megfelelnek a GYULAI által megfigyelt alakzatoknak. A kristályszemcsékről jól sikerült elektronmikroszkópos felvétel is van. A *Kossel—Stransky*-féle kristálynövekedési kép a rekrisztallizációra is alkalmazható. A NaCl. Tl és KCl. Tl pasztillák UV besugárzás hatására thermolumineszcenciát mutatnak. A görbék függenek az előzetes hőkezeléstől, ezzel együtt változik a maximumok száma és helye. A mérések azt mutatják, hogy e próbákban sokféle elektronállapot keletkezik.

A disszertáció 183 oldal terjedelmű, számos ábrát, táblázatot, fényképfelvételt tartalmaz és végül összeállítja a kérdés irodalmát.

BODÓ ZALÁN opponensi véleményében a témaválasztást jónak és korszerűnek tartja, valamint szerencsésnek abból a szempontból, hogy GYULAI ZOLTÁN és munkatársainak eredményeit bővíti. Értékesnek tartja azt a felismerést, hogy a szilárd fázisban a kristálynövekedés hasonlít az oldatokból, olvadékból és gőzből való növekedéshez. Megjegyzi azt, hogy a dolgozatban szereplő egyenletek helyenként dimenzionálisan nem helyesek. Fontos a tárgyalásnál, hogy a fomulákban szereplő betűk jelentését pontosan adjuk meg. Kérdést tesz fel, mit ért a jelölt kipihenési idő alatt? Mivel biztosította az UV gerjesztés azonosságát? Tud-e valamit mondani a próbák ultraviola reflexióképességéről? Van-e szerepe a szemcsék között bezárt levegőnek? Mivel lehet értelmezni az exponenciális kialvási görbének az átmenetét a hiperbolikusba? — Az értekezést kandidátusi disszertációként elfogadja.

NAGY ELEMÉR opponensi véleményében az értekezés három részével külön-külön foglalkozik. Az első részt elavultnak tartja, mert nagyrészt BURGERS 1941-es összefoglaló munkája alapján készült. E részben sok a pontatlan fogalom. A második részben a jelölt igen jól foglalja össze az alkálihaloidokon eddig végzett vizsgálatokat és egyes modern munkákat is kritikai vizsgálat alá vesz. A *Przibram* féle besugárzási kísérletekhez, amelyeknél a rácshibáknak döntő szerepük van, hozzá kellett volna venni a modern besugárzási kísérleteket is. A vezetés ionos vagy elektronos voltát illetőleg mi az állásfoglalása? A kristálynövekedésre vonatkozólag három elképzelést ismertet. A *Kossel—Stransky*-félét, a *Gyulai*-félét és a *Frank—Read*-félét. Ezeket egységesen tárgyalja, bár ez a három egészen különböző. Nem helyénvaló az exponenciális függést *van't Hoff* formulának nevezni, úgyszintén a „B érték" kifejezés is elavult. A harmadik rész tartalmazza a saját vizsgálati eredményeket. Mi módon állapítható meg, hogy a transzparencia csökkenése nem a levegőben levő vízgőz hatására jön létre? A kipihenési idő nem pontosan definiált. A foszfor hiperbolikus kialvási idejéből bimolekuláris folyamatra következtet. Ez nem helyes, nem a görbe analízis ad erre felvilágosítást. — Nagyon értékesek azok az eredmények, amelyek a rekrisztallizációs foszforok foszforeszcenciájára és thermolumineszcenciájára vonatkoznak. Kár, hogy itt nem dolgozta fel PRINGSHEIM, valamint LUSCSIK és KAC idevonatkozó modern eredményeit.

Összefoglalóan az a véleménye, hogy a kísérleti rész alapos, igen értékes eredményeket tartalmaz. Ha a második és a harmadik részben felvetett elméleti kérdésekre a vita során kielégítő választ kap a jelölttől, a kandidátusi cím odaítélését javasolja.

MORLIN ZOLTÁN ezután részletesen válaszol az opponensek kérdéseire. Megköszöni a hasznos és tanulságos megjegyzéseket. Elismeri, hogy az egyenletek helyenként dimenzionálisan nem helyesek, s hogy egyes fogalmak nincsenek pontosan definiálva.

Kipihenési idő az az időtartam, amely a préselés befejeztével kezdődik és tart addig, amíg a vizsgált tulajdonság már nem változik. A próbák UV reflexióképességét nem állt módjában mérnie. A krisztallitok közé zárt levegő szerepére vonatkozólag a rendelkezésre álló mérési lehetőségek szerint a levegő nem játszik szerepet. Az egykristály foszforok deformáció hatására hiperbolás kialvást mutatnak. Az eredmények szépen reprodukálhatók.

Az első résszel kapcsolatos kifogásokra megemlíti, hogy a kandidátusi disszertáció elkészítésére vonatkozó rendelkezés szerint ismertetni kell a kérdés történeti hátterét. A rekrisztallizáció jelenségének értelmezése még ma sincs teljesen lezárva, még mindig vannak nyitott kérdések és megoldatlan problémák. A klasszikus elmélet ma sem tekinthető elavultnak. A *Burgers*-féle 1941-es referátum eredményeire még a legutolsó években megjelent monográfiák is hivatkoznak.

PRZIBRAM vizsgálatai nem a radioaktív sugaraknak a rácsszerkezetre való hatására vonatkoznak, hanem a színezésre. A sugárzás befolyása a rácsszerkezetre az értekezés témájával nincs kapcsolatban. Az elektronos vagy ionos vezetés kérdése igen bonyolult. De, hogy az elektronoknak is szerepük van, arra utalnak a POHL intézet, BOROS, TOMKA eredményei. TYLER a *Gyulai—Hartly* effektust elektronokkal értelmezi.

A háromféle kristálynövekedési mechanizmus lényegében egy és nem egymástól különböző. Ez a vélemény az irodalomban is így található. A *van't Hoff* formula, valamint a „A" és „B" érték kifejezés a Gyulai intézetben ma is használatos, sőt ezek a legújabb irodalomban is néhol megtalálhatók. A transzparenciánál a vízgőznek nincs szerepe. Ezt a Gyulai intézet más megfigyelései is igazolják. A foszforeszcencia fény kialvásának hiperbolikus függése úgy adódik, hogy sok exponenciális tag összegeződik, tehát nem bimolekuláris folyamat következménye. Monomolekuláris folyamatra enged következtetni a gerjesztés alatti fotovezetés hiánya. KAC, LUSCSIK és PRINZHEIM munkái rendkívül érdekesek, de a disszertációval laza kapcsolatban vannak. E munkák színcentrumokat tartalmazó kristályokkal foglalkoznak.

Az opponensek az írásban, valamint szóban adott válaszokat elfogadják.

A bizottság tagjai közül GERGELY GYÖRGY különösen értékesnek tartja a thermolumineszcenciára vonatkozó méréseket. Megkérdezi, végzett-e méréseket a gerjesztésre és spektrális eloszlásra vonatkozólag. A jelölt technikai okokból e méréseket nem tudta elvégezni. HOFFMANN TIBOR a kipihenési idővel kapcsolatban tesz megjegyzést; ugyane kérdéshez szól hozzá PÓCZA JENŐ. SZIGETI GYÖRGY is kifogásolja az első részt és kérdést intéz a krisztallitok összetapadásának mechanizmusával kapcsolatban.

A vita lezárása után a bíráló bizottság határozatot hoz, amelyben *javasolja a Tudományos Minősítő Bizottságnak, hogy* MORLIN ZOLTÁNT *nyilvánítsa a fizikai tudományok kandidátusává.*

Boros János
a fizikai tudományok kandidátusa

Nagy Károly doktori értekezésének nyilvános vitája

A Tudományos Minősítő Bizottság 1960. február 26-án rendezte meg NAGY KÁROLY *A gyenge kölcsönhatások elméletéről* című doktori értekezésének nyilvános vitáját. A disszertáció opponensei GOMBÁS PÁL akadémikus, HOFFMANN TIBOR és MARX GYÖRGY, a fizikai tudományok doktorai voltak. A bíráló bizottság elnöke: KÓNYA ALBERT, a Magyar Tudományos Akadémia levelező tagja, tagjai: KOVÁCS ISTVÁN, a Magyar Tudományos Akadémia levelező tagja, FÉNYES IMRE, GÁSPÁR REZSŐ, NAGY ELEMÉR, NEUGEBAUER TIBOR, a fizikai tudományok doktorai, MÁTRAI TIBOR és LADÁNYI KÁROLY, a fizikai tudományok kandidátusai voltak.

A legjobban és legrégebben ismert gyenge kölcsönhatás a béta-kölcsönhatás. A kölcsönhatási törvény meghatározására a legelőnyösebbnek a béta-elektronok polarizációjának mérése bizonyult. Igen fontos feladattá vált tehát a polarizált részecskenyalábok szóráshatáskeresztmetszetének elméleti meghatározása. A számítást a szerző a kovariáns kvantumelektrodinamika S-matrix formalizmusának felhasználásával elvégezte. A kölcsönhatási törvény egyértelmű meghatározása céljából az emittált neutrinók polarizációját is ismernünk kell. A vizsgálatokat az elektronbefogást követő neutrinó-gamma szögkorreláció mérése teszi lehetővé. A szerző kidolgozta az elektronbefogás során emittált neutrinó és gamma-kvantum iránykorrelációjának általános elméletét megengedett, valamint tetszőleges rendben tiltott elektronbefogásra, és megadta a korreláció kifejezését úgy K-, mint L-befogásra. Megjegyzéseket fűz a $V \mp A$ kölcsönhatás előjelét eldöntő *Telegdi*-kísérlethez és egy eltérő metodikájú kontrollkísérletet javasol. Végül a kölcsönhatások tömegtükrözési invarianciájával foglalkozik. A szerző által bevezetett invariancia követelmény gyenge kölcsönhatásoknál $V \mp A$ kölcsönhatáshoz vezet, erős kölcsönhatásoknál a lehetséges csatolás-típusok számát csökkenti.

GOMBÁS PÁL akadémikus opponensi véleményében kifejtette, hogy az elemi részecskék elméletének problémái valószínűleg csak egy egészen új koncepció alapján oldhatók meg, mely módszereiben és alapjaiban jelentősen különbözik az eddigi próbálkozásoktól. E próbálkozások nélkül a problémák természetesen nem oldhatók meg, ezért a disszertáció témaválasztása igen aktuális.

HOFFMANN TIBOR, a fizikai tudományok doktora, mint opponens kiemelte, hogy a disszertáció igen eredeti, önálló munkát tartalmaz. Hiányolja, hogy a szerző nem tárgyalja eléggé egységesen a különböző dolgozatokban publikált eredményeit.

MARX GYÖRGY, a fizikai tudományok doktora megállapította, hogy a jelölt bizonyságát szolgáltatta komoly tudományos felkészültségének, és áttekintőképességének a legmodernebb problémák körében. A közölt eredmények igen értékesek és fáradságos számítások gyümölcsei.

A jelölt válaszait a felvetett kérdésekre mindhárom opponens elfogadta. A vita lezárása után a bíráló bizottság megállapította, hogy „a dolgozat az alapvető fizikai vizsgálatok azon kutatási irányához kapcsolódik, amelynek célja a béta-bomlás kölcsönhatási törvényének tisztázása. Ez az elmúlt években az érdeklődés előterében állt, így a témaválasztás igen időszerű. A jelölt több olyan számítást végzett, amelyek a kölcsönhatás jellegének kísérleti eldöntését segítik elő. Ezenkívül javaslatot tett egy olyan szimmetria elvre, amely a teljes kölcsönhatás kiválasztására alkalmas. A kérdéses problémák kidolgozása során a jelölt tanúbizonyságát adta a kutatások módszertanában való jártasságon kívül önálló gondolatok felvetésére vezető tudományos áttekintőkészségének is. A disszertáció értékes eredményekkel gazdagította a gyenge kölcsönhatások elméletét. Ezek, valamint eddig végzett tudományos munkássága alapján a bíráló bizottság *egyhangúlag javasolta a Tudományos Minősítő Bizottságnak, hogy* NAGY KÁROLYt *nyilvánítsa a fizikai tudományok doktorává.*

Ladányi Károly
a fizikai tudományok kandidátusa

Erdős Jenő kandidátusi értekezésének nyilvános vitája

A *Tudományos Minősítő Bizottság* 1960. március 10-én rendezte meg ERDŐS JENŐ *Három vizsgálat az Abel-féle csoportok elméletében* című kandidátusi értekezésének nyilvános vitáját. Az értekezés opponensei RÉDEI LÁSZLÓ akadémikus és STEINFELD OTTÓ, a matematikai tudományok kandidátusa voltak. A bíráló bizottság elnöki tisztét HAJÓS GYÖRGY akadémikus látta el.

Az elnöki megnyitó után a bíráló bizottság titkára ismertette ERDŐS JENŐ eddigi tudományos munkásságát, majd a jelölt előadta értekezésének téziseit.

Az értekezés három egymástól független fejezetből áll, melyekben a jelölt a torziómentes és a vegyes *Abel*-féle csoportok elméletével foglalkozik. Az I. fejezet a torziómentes *Abel*-féle csoportok osztályozását tárgyalja. Az eddigiekben ezen csoportok osztályozásának elméletét csak megszámlálható rang esetére sikerült kidolgozni. Az értekezés ezen csoportoknak számossági korlátozás nélküli osztályozását adja. Nevezetesen bebizonyítja, hogy kölcsönösen egyértelmű vonatkozás áll fenn a legfeljebb m számosságú torziómentes *Abel*-féle csoportok és bizonyos típusú m sorú és oszlopú mátrixok között.

A II. fejezetben a vegyes *Abel*-féle csoportok széthasíthatóságának problémájával foglalkozik. Itt a p-adikus modulusok segítségével ér el újabb eredményeket, és következményként sikerül megoldania BAER-nek egy 1936 óta fennálló nyitott problémáját.

A III. fejezetben egy újabb dualitási elméletet dolgoz ki. Ezek után a dualitási elméleteknek eléggé általános definícióját adva bebizonyítja, hogy a diszkrét p-adikus modulusokra vonatkozó dualitási elmélet visszavezethető a KAPLANSKYtól, a LEFSCHETZtől származó és az értekezésben definiált dualitási elméletre.

A tézisek ismertetése után FUCHS LÁSZLÓ aspiránsvezető, a matematikai tudományok doktora méltatta az értekezést, kiemelve az általa igen értékesnek tartott III. fejezetet. Megemlítette, hogy az I. fejezet eredményeinek beállítását nem tartja szerencsésnek.

ERDŐS JENŐ válasza után az elnök felkérte az opponenseket opponensi véleményeik ismertetésére.

RÉDEI LÁSZLÓ akadémikus, opponens kifejtette, hogy az értekezés stílusa szép, tömör és világos. Szerinte különösen az első és a harmadik fejezet eredményei viszik a csoportelméletet igen lényeges lépésekkel előre. Ezért az értekezést nemcsak a kandidátusi, hanem a doktori fokozat elérésére is méltónak találja.

STEINFELD OTTÓ kandidátus, opponens méltatta az értekezés eredményeit, majd megjegyezte, hogy az értekezés három különálló részből áll, s ezen fejezetek bármelyike már önmagában is megfelelne egy kandidátusi értekezés kívánalmainak. Hiányolta az értekezésben szereplő ismert fogalmak egy részének definiálását. Nem helyeselte, hogy az értekezésben nem szerepelnek azok az eredmények, melyek a jelöltnek — az értekezés egyes részeit tartalmazó — dolgozatai megjelenése után születtek

Ezek után ERDŐS JENŐ válaszolt az opponensi véleményekre. Válaszában nem fogadta el sem aspiránsvezetőjének, sem STEINFELD OTTÓ opponensnek azon megjegyzéseit, melyek az értekezés hiányosságára hívták fel a figyelmét.

Ezután az elnök megnyitotta a vitát. SZÁSZ GÁBOR, RÉDEI LÁSZLÓ, FUCHS LÁSZLÓ majd KALMÁR LÁSZLÓ felszólalása után az elnök felkéri ERDŐS JENŐt, hogy válaszoljon az elhangzottakra.

A bíráló bizottság a lefolyt vita alapján megállapította, hogy az értekezés jelentős eredményeket tartalmaz a végtelen *Abel*-csoportokra vonatkozóan, színvonal tekintetében az átlagos kandidátusi értekezések fölé emelkedik. Az értekezés sok ötletet és új módszert tartalmaz, amelyek további vizsgálatokat tesznek lehetővé. Kár, hogy a szerző nem említette meg az eredményeivel kapcsolatos újabb vizsgálatokat.

Mindezek alapján a bíráló bizottság *egyhangúlag javasolja a Tudományos Minősítő Bizottságnak, hogy* ERDŐS JENŐ*t nyilvánítsa a matematikai tudományok kandidátusává.*

Fried Ervin
a matematikai tudományok kandidátusa

KÖNYVISMERTETÉSEK

Haar Alfréd összegyűjtött munkái
Alfred Haar: Gesammelte Arbeiten
(Akadémiai Kiadó, Budapest, 1959.)

Mint ismeretes, HAAR ALFRÉDnek (1885—1933), a kolozsvári, majd a szegedi tudományegyetem volt professzorának matematikai munkássága — akárcsak a közelmúltban elhunyt FEJÉR LIPÓT és RIESZ FRIGYES akadémikusoké — a matematika több ágára világszerte elismert nagy hatással volt. Életművének irodalmi befolyása a halála óta eltelt mintegy negyedszázad alatt nem csökkent, hanem inkább növekedett: a klasszikus és funkcionálanalízis, ill. a csoportelmélet körébe vágó több eredménye — mindenekelőtt az 1932-ben felfedezett ún. *Haar-féle mérték* — a további fejlődés szempontjából alapvető jelentőségűnek bizonyult. Figyelembe véve még, hogy HAARt korai halála megakadályozta monográfiák írásában és így eredményei csak folyóiratokban szétszórva voltak hozzáférhetők, elmondhatjuk, hogy műveinek gyűjteményes kiadásával a Magyar Tudományos Akadémia és a kötetet sajtó alá rendező SZŐKEFALVI-NAGY BÉLA akadémikus a bel- és külföldi kutató matematikusokat egyaránt hálára kötelezte.

Minthogy HAAR ALFRÉD dolgozatait majdnem kizárólag magyar és német nyelven publikálta, teljesen indokolt volt ezt a két nyelvet választani a kiadás nyelvéül. A kétnyelvű bevezetés, rövid életrajz és összesítő dolgozatjegyzék után a szerző egyes munkáinak fotografikus úton készített másolatai következnek, mégpedig a következő csoportosításban: *A. Halmazelmélet — B. Ortogonális függvénysorok és szinguláris integrálok — C. Analitikus függvények — D. Parciális differenciálegyenletek — E. Variációszámítás — F. Függvényapproximációk és lineáris egyenlőtlenségek — G. Diszkrét csoportok és függvényalgebrák — H. Folytonos csoportok.*

A *B.* részben találjuk pl. HAAR híres göttingai doktori, ill. habilitációs értekezését: *Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme,* I.—II. (Math. Annalen **69** (1910), 331—371 és **71** (1911), 38—53), melyekben többek között — mélyreható vizsgálat tárgyává téve a *Sturm—Liouville*-féle és *Legendre*-sorokat — először ismertette a róla elnevezett ortogonális függvényrendszert és az idevágó ún. *ekvikonvergencia-tételt.*

A *C.* osztályban van az *Über asymptotische Entwicklungen von Funktionen* (Math. Annalen, **96** (1926), 69—107) című dolgozat, melyben az ún. *Darboux*-módszert sikerült sorozatokról tetszőleges folytonos függvények aszimptotikájára átvinnie — Laplace-transzformált felhasználásával. E módszernek a *Laplace-féle transzformáció* újabb irodalmában jelentős szerep jutott.

A *D.* osztályból egy KÁRMÁN TÓDORral közösen írt dolgozatán kívül kiemelendő HADAMARD által bemutatott és méltatott Comptes Rendus-cikke: *Sur l'unicité des solutions des équations aux dérivées partielles* (C. R. Paris, 187 (1928), 23—26), valamint az 1928-as bolognai matematikai kongresszuson tartott előadása, melyben a néhány hónappal azelőtt talált alapgondolatot tetszőleges elsőrendű parciális differenciálegyenletek megoldásainak vizsgálatára (unicitás-probléma, analiticitás) alkalmazta.

A következő csoportba tartozó *variációszámítási* dolgozatok szinte egytől-egyig nagy irodalmi visszhangot keltettek. Kutatásai főeredményeként sikerült megtalálnia a klasszikus *Du Bois Reymond*-féle lemma („a variációszámítás alaptétele") többdimenziós megfelelőjét, mely többváltozós variációproblémákkal kapcsolatban az előbbihez hasonlóan alapvető jelentőségűnek bizonyult (*Haar-féle lemma*); a lehetőségek kiaknázását részben ő maga is elvégezte reguláris és adjungált variációfeladatokra vonatkozólag. Hadd idézzük *Über die Variation der Doppelintegrale* című cikkét (Journal f. Math., **149** (1919), 1—18), valamint idevágó vizsgálatainak összefoglalását nyújtó három hamburgi előadását (*Zur Variationsrechnung*, Abh. aus dem Math. Seminar der Hamburgischen Universität, **8** (1930), 1—27). — Ugyancsak megemlítendő e helyen, hogy — részben HAAR személyes ösztönzésére — több magyar matematikus (GERGELY, RADÓ, SÓLYI, SZŰCS) is csatlakozott a szóban forgó kutatási irányhoz doktori értekezésével, ill. bel- és külföldön megjelent cikkeivel.

A *G.* részben található, ortogonális rendszerek szorzótáblázataira és végtelen kommutatív csoportok „karaktereire" vonatkozó eredményeket — amelyek egymással szoros kapcsolatban állanak s többek közt NEUMANN JÁNOSnak egy (a Hilbert-térre kiterjesztett) mátrixelméleti tételére támaszkodnak — számos dolgozatban továbbfejlesztette SZŐKEFALVI-NAGY BÉLA, ill. FREUDENTHAL. HAARnak e munkái mintegy átvezetnek az utolsó osztályba sorolt (időrendben is utoljára publikált) két dolgozatához, melyek a *folytonos csoportok* elméletébe vágnak.

Az utóbbiaknak *Lie* által a múlt század végén kiépített, ma már klasszikusnak számító elmélete tudvalevőleg azzal a korlátozással él, hogy a csoportelőállító függvények kétszer differenciálhatók (ún. Lie-csoportok). HILBERTnek a párizsi matematikai kongresszuson (1900) felvetett híres 5. problémája mármost úgy szól, hogy vajon e lényeges premissza elejthető-e, azaz lehet-e a folytonos csoportok elméletét jóval általánosabb keretek között is felépíteni, ami főként a geometriai alkalmazások szempontjából fontos kérdés. Számos jeles matematikus — HURWITZ, WEYL és mások — részeredményei után HAAR akadémiai székfoglaló értekezésében végre megtalálta a megoldás kulcsát (*A folytonos csoportok elméletéről*, Mat. Term. Értesítő, **49** (1932), 287—307; németül: *Der Maßbegriff in der Theorie der kontinuierlichen Gruppen*, Annals of Mathematics, (2) **34** (1933), 147—169); nevezetesen megmutatta, hogy igen általános feltételeknek eleget tevő — lényegében lokálisan kompakt — folytonos csoportokban bevezethető egyoldali csoporttranszlációkkal szemben invariáns mértékfogalom. Ez az ún. *Haar-féle mérték* (melynek természetesen a közönséges Jordan- és Lebesgue-féle mérték speciális esete) lehetővé teszi az integrálfogalom átvitelét és az említett csoporttípus szerkezetének beható tanulmányozását is; így sikerült a fenti Hilbert-problémát NEUMANN JÁNOSnak és PONTRJAGINnak (1933—34), majd különböző, kissé általánosabb feltevések mellett azóta több más matematikusnak is megoldania. — HAAR felfedezése olyan rohamos fejlődést indított meg mind a folytonos csoportok elméletében, mind az ezeket felhasználó diszciplinákban (pl. absztrakt harmonikus analízis, topológia), melynek áttekintése külön tanulmány tárgya lehetne.

A kötetet *három függelék* zárja le. Az *elsőben* három, csak magyarul közölt cikk német fordítása, a *másodikban* HAARnak a hiperbolikus geometria egyetemes tudománytörténeti jelentőségét méltató, a nagy *Bolyai*-féle felfedezés centennáriuma (1923) alkalmából a szegedi egyetemen elhangzott előadása, végül a *harmadikban* két, HAAR ravatalánál felolvasott megemlékezés (RIESZ FRIGYESé, ill. a szegedi Acta szerkesztőségéé) található. Bizonyára mindig megszívlelendők maradnak a kutatók számára RIESZ FRIGYES búcsúbeszédének következő szavai: *„Haar Alfréd egyéniségét és alkotásait nemcsak barát, nemcsak azok értékelik és becsülik, akikkel együtt tanult, együtt dolgozott, hanem becsülik és tisztelettel emlegetik a matematikusok százai, idegen országokban, idegen világrészekben is. Miért? Mert sohasem kerested az olcsó sikert, nem gyártottad a dolgozatokat és könyveket, amihez pedig univerzális tudásod és kitűnő emlékezőtehetséged onthatta volna az anyagot. A nehéz problémákat kerested, a nagy erőfeszítéseket, az átfogó meglátásokat. Első dolgozattól az utolsóig csupa maradandót, értékállót alkottál..."*

Külön ki kell emelnünk SZŐKEFALVI-NAGY BÉLÁnak az egyes dolgozatosztályok elé írt szakavatott megjegyzéseit és irodalmi utalásait, melyek a tárgykörtől távolabb álló olvasó érdeklődésének felkeltésére is alkalmasak. — Mindent egybevetve, megállapítható, hogy e szépkiállítású kötet nemcsak méltó megemlékezést jelent, de hathatósan elősegíti a HAAR életművéhez kapcsolódó további vizsgálatok ügyét is.

Mikolás Miklós
a matematikai tudományok kandidátusa

G. Alexits: Konvergenzprobleme der Orthogonalreihen

(Akadémiai Kiadó, Budapest, 1960)

Az ortogonális sorok általános elmélete egyik friss hajtása a matematikai tudománynak; gondoljuk csak meg, hogy pl. E. SCHMIDT disszertációja, amelyben a függvényrendszerek ortogonalizálására szolgáló alapvető eljárását megadta, alig több ötven évesnél és egyes speciális ortogonális rendszerek felfedezése és vizsgálata sem tekinthet vissza hosszú múltra. Ilyen rövid idő alatt is az ortogonális sorok a matematikai kutatás és a matematikai fizikai alkalmazások alapvető eszközévé váltak. Ezen túlmenően, az ortogonális sorok elmélete fontos próbakő, amelyen be lehet mutatni új matematikai gondolatok hatékonyságát. Már H. Lebesgue is mérték- és integrálelméletét egy speciális ortogonális sor, ti. a trigonometrikus sor vizsgálatára használta fel elsőnek és ez az alkalmazás tette a matematikusok széles köre számára evidenssé az új mérték- és integráldefiníció fontosságát és hatékonyságát. Az ortogonális sorok elméletére való alkalmazás volt a próbaköve a divergens sorok szummációjára vonatkozó vizsgálatoknak is; talán már közhelynek hat, ha ezzel kapcsolatban Fejér tételére utalunk. Kiállták az ortogonális sorokra való alkalmazás tűzpróbáját századunk olyan alapvető matematikai felfedezései, mint a *Baire*-féle kategóriatétel és BANACHnak a lineáris operátorokra vonatkozó tételei. Az approximációelméletet, sőt a valószínűségszámítást is számottevő eredménnyel sikerült ortogonális sorokra alkalmazni. Mindez indokolja, hogy a tárgykör iránt a legkülönbözőbb érdeklődési körhöz tartozó matematikusok nagy érdeklődést mutatnak. Az ismertetett mű KACZMARZ és STEINHAUS 25 éve kinyomtatott könyve után az első, amely a témát könyvalakban feldolgozza. Nagy érdeme a szerzőnek, hogy számos mély, nehezen hozzáférhető tétel bizonyítását ügyes ötletekkel le tudja rövidíteni és az eredetinél áttekinthetőbbé tudja tenni. Különösen figyelemreméltó ez a *Rademacher-Mensov* tétel esetében (ez azt mondja ki, hogy a

$$\sum c_n \varphi_n(x) \tag{1}$$

sor, ahol $\{\varphi_n\}$ egy ortonormált függvényrendszer, majdnem mindenütt konvergens, ha a

$$\sum c_n^2 \log^2 n < \infty \tag{2}$$

feltétel teljesül). Számos eredmény itt kerül először könyvalakban feldolgozásra, így többek közt a szerző több eredménye és TANDORI KÁROLY munkássága. TANDORI KÁROLY a szerző mellett mint aspiráns kezdte meg tudományos tevékenységét és a szerző által felvetett, egyre nehezebb kérdések sikeres megválaszolásával vált ismertté világszerte. Ezek a kérdések főleg az ortogonális sorok divergencia jelenségeire vonatkoznak. Nagyon örvendetes, hogy a könyv nyomán ezek az eredmények, melyek méltán tekinthetők a hazai matematikai tudomány egyik legkiemelkedőbb sikerének az utolsó évtizedben, most a könyv útján még szélesebb kör számára válnak hozzáférhetővé.

Sajnálatos, hogy az általános alapfogalmakat tárgyaló fejezetekbe néhány zavaró hiba csúszott. Így a legelső fejezet elején a μ-mértékben és a *Lebesgue*-mértékben zérusmértékű halmazok azonosságát állítja, ami tévedésen alapul. Javításra szorul a *Fatou*-lemma bizonyítása is, szintén az első fejezetben. Ezek a hibák nem érintik a könyv mondanivalóját, mégis kiküszöbölésük a további kiadásokból nagyon fontos, hiszen a járatlan olvasóban megingathatja a később következő fejezetek tudományos hitelét.

A könyv első fejezete az alapfogalmakkal és néhány speciális ortogonális rendszerrel foglalkozik. Itt szerepel a *Riesz—Fischer*-tétel, a *Fatou*-lemma, definiálja a teljes ortogonális rendszert $\mathfrak{L}_2$-ben. Mint speciális ortogonális rendszereket a *Jacobi*-polinomokat és a *Haar*-féle, *Rademacher*-féle és *Walsh*-féle ortogonális rendszereket mutatja be. A második fejezet elején a sorelmélet néhány fontos tételét találjuk, utána mindjárt a *Rademacher—Mensov*-tétel és különböző kiterjesztései következnek. Ezután *Mensov* tételét bizonyítja be, mely szerint (2) nem helyettesíthető gyengébb

$$\sum c_n^2 w_n < \infty \tag{3}$$

alakú feltétellel. Kritériumot ad meg arra, hogy az ortogonális sor minden átrendezésben majdnem mindenütt konvergáljon. Kimutatja, hogy ha

$$\sum c_n^2 < \infty ,$$

akkor az (1) sor tetszőleges pozitív α-ra akkor és csak akkor majdnem mindenütt (C, α)-szummálható, ha egy (tetszőleges) a részletösszegekből képezett hézagos sorozat, pl. $b_{2^n}(x)$, majdnem mindenütt konvergens. Ennek elégséges feltétele, hogy

$$\sum c_n^2 (\log \log n)^2 < \infty \tag{4}$$

legyen, vagy pedig, hogy $|c_n| \leqq q_n$, ahol q_n olyan monoton fogyó zérussorozat, melyre $\Sigma n^{-1/2} q_n < \infty$. Az első feltétel MENSOVtól és KACZMARZtól, a második a szerzőtől származik; itt is ismerteti MENSOV példáját arra, hogy a (4) kritériumot nem lehet ugyanolyan típusú gyengébb kikötéssel helyettesíteni. Ezután MENSOV egy nagyon érdekes tétele kerül sorra: minden ortogonális rendszert át lehet rendezni úgy, hogy minden $\mathfrak{L}_2$-integrálható függvény sorfejtése majdnem mindenütt (C, α)-szummálható legyen. A fejezet TALALJÁN egy tételével zárul: tetszőleges $\mathfrak{L}_2$-ben teljes ortogonális függvényrendszerből lehet univerzális sort képezni. Egy sorról akkor mondjuk, hogy univerzális sor, ha tetszőleges majdnem mindenütt véges mérhető $f(x)$ függvényhez megadható az univerzális sor részletösszegeinek olyan sorozata, amely majdnem mindenütt $f(x)$-hez konvergál.

A harmadik fejezet az $\mathfrak{L}_n(x) = \int \left| \sum_0^n \varphi_k(t) \varphi_k(x) \right| d\mu(t)$ *Lebesgue*-függvények alkalmazását tárgyalja konvergenciakérdésekre. Mindjárt az elején bebizonyítja *Kolmogorov, Seliverstoff* és *Plessner* tételét: legyen

$$\mathfrak{L}_n(x) \leqq \lambda_n, \quad \text{ha} \quad x \in E,$$

ahol a $\{\lambda_n\}$ sorozat monoton növekedő; akkor

$$\sum c_n^2 \lambda_n < \infty \tag{5}$$

elégséges feltétel arra, hogy (1) E-n majdnem mindenütt konvergáljon. TANDORI bebizonyította, hogy (5)-öt sem lehet (3) alakú gyengébb feltétellel helyettesíteni. Ezután érdekes új definíciót vezet be: egy $\{\varphi_n(x)\}$ ortonormált rendszer polinomszerű, ha

$$K_n(t, x) = \sum_0^n \varphi_k(t) \varphi_k(x)$$

magfüggvényét

$$K_n(t, x) = \sum_{k=1}^{\nu} F_k(t, x) \sum_{i,j=-p}^{+p} \gamma_{i,j,k}^{(n)} \varphi_{n+i}(t) \varphi_{n+j}(x)$$

alakban állíthatjuk elő, ahol a $|\gamma_{i,j,k}^{(n)}|$ számok univerzális korlát alatt maradnak és

$$F_k(t, x) = O\left(\frac{1}{|t-x|}\right) \qquad k = 1, 2, \dots \nu.$$

Polinomszerű például a trigonometrikus rendszer és a tetszőleges súlyfüggvényre ortogonális polinomok rendszere. Bebizonyítja, hogy ha egy $[c, d]$ intervallumban a polinomszerű ortonormált rendszert alkotó $\{\varphi_n(x)\}$ sorozat egyenletesen korlátos, akkor $[c, d]$-ben majdnem mindenütt $\mathfrak{L}_n(x) = O(\log n)$, tehát az (5) feltétel

$$\sum c_n^2 \log n < \infty$$

alakra hozható, ami természetesen élesebb, mint (2).

A továbbiakban analóg tételeket nyer a $(C, 1)$-közép *Lebesgue*-függvénye segítségével. Ennek során a jelen ismertetés írójának egy ortogonális polinomokra kimondott eredményét általánosítva bebizonyítja, hogy ha egy polinomszerű rendszer egy halmazon minden rögzített x-re eleget tesz az

$$\sum_{k=0}^{n} \varphi_k^2(x) = O(n) \tag{6}$$

feltételnek, akkor minden $\mathfrak{L}_2$-beli függvény kifejtése E-n majdnem mindenütt (C, α)-szummálható.

A *Lebesgue*-függvények egy további alkalmazása a 3. 2. 1 tétel: ha az $\mathfrak{L}_{2^n}(x)$ sorozat egy E halmazon korlátos, akkor E-n majdnem mindenütt az (1) ortogonális sor minden pozitív α-ra (C, α)-szummálható. Ez a feltétel a szerző egy eredménye szerint bizonyos multiplikatív ortogonális rendszerekre, így az $\{e^{i3^n x}\}$ sorozattal generált multiplikatív ortogonális rendszerre teljesül. Következmény: a trigonometrikus rendszert kontinuumnyi sokféleképpen lehet úgy sorozatba rendezni, hogy minden $\mathfrak{L}_2$-integrálható függvény kifejtése majdnem mindenütt (C, α) szummálható legyen!

A továbbiakban a könyv a *Lebesgue*-függvények nagyságrendjével foglalkozik. A (6) feltétel mellett $\mathfrak{L}_n(x) = O(n^{1/2})$ és ez a becslés a *Rademacher*-rendszerre pontos. Ha ezt nem kötjük ki, csak annyit állíthatunk, hogy legfeljebb egy nullmértékű halmaz kivételével

$$\mathfrak{L}_n(x) = o(\lambda_n^{1/2}),$$

valahányszor a $\sum \lambda_n^{-1}$ pozitív tagú sor konvergens. TANDORI egy mély tétele szerint $\sum \lambda_n^{-1} = \infty$ esetén szerkeszthető olyan ortogonális függvényrendszer, melynek *Lebesgue*-függvényei majdnem mindenütt pontosan λ_n nagyságrendben növekednek.

Az utolsó, negyedik fejezet címe „klasszikus konvergenciaproblémák". Ezen a szerző azt a kérdést érti, mikor lesz az (1) sor egy adott x_0 pontban konvergens, ill. egy adott intervallumban egyenletesen konvergens. Meglepően egyszerű bizonyítást ad arra, hogy található olyan $\mathfrak{L}$-integrálható függvény, melynek *Legendre*-polinomok szerint haladó sorfejtése majdnem mindenütt divergál. A szinguláris integrálok elméletének ismertetése következik és azok alkalmazása az ortogonális sorfejtésekre, majd néhány alapvető approximációelméleti tétel és alkalmazása. A könyv az ortogonális sor abszolút konvergenciájával foglalkozó rövid fejezettel zárul.

Nem kétséges, hogy ALEXITS akadémikus könyve a tárgykör alapvető műve szerepére hivatott, amelyet a további kutatómunka kiindulási alapnak tekinthet. Az Akadémiai Kiadót dicséret illeti a könyv szép kiállításáért.

Freud Géza
a matematikai tudományok doktora

MAGYAR FIZIKAI FOLYÓIRAT

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
III. OSZTÁLYÁNAK

FIZIKAI KÖZLEMÉNYEI

Ára: 23,— Ft

TARTALOMJEGYZÉK

A TUDOMÁNYOS MINŐSÍTŐ BIZOTTSÁG HÍREI

KÖNYVISMERTETÉSEK

A MAGYAR
TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK
OSZTÁLYÁNAK

KÖZLEMÉNYEI

XI. KÖTET 2. SZÁM

AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST
1961

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK

KÖZLEMÉNYEI

XI. kötet 2. szám

Szerkesztőség: Budapest, V., Nádor utca 7.
Kiadóhivatal: Budapest, V., Alkotmány utca 21.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei változó terjedelmű füzetekben jelennek meg, és az Akadémia III. osztályának felolvasóülésein bemutatott matematikai dolgozatokat, valamint egyéb dolgozatokat, referátumokat, továbbá az osztály munkájára vonatkozó közleményeket, könyvismertetéseket stb. közölnek. Évenként egy kötet jelenik meg (négy szám alkot egy kötetet).

Kéziratok a következő címre küldendők:

A Magyar Tudományos Akadémia
III. Osztályának Közleményei.
Budapest, V., Nádor u. 7.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi levelezés.

Minden szerzőt 100 különlenyomat illet meg megjelent munkájáért.

Közlésre el nem fogadott kéziratokat a szerkesztőség lehetőleg visszajuttat a szerzőhöz, de felelősséget a beküldött kéziratok megőrzéséért vagy továbbításáért nem vállal.

A Közlemények előfizetési ára kötetenként belföldi címre 40 forint, külföldi címre 60 forint. Belföldi megrendelések az Akadémiai Kiadó, Budapest, V., Alkotmány u. 21. (Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 05-915-111-46), külföldi megrendelések a „Kultúra" Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalat, Budapest, I., Fő utca 32. (Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 43-790-057-181) útján eszközölhetők.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztálya a következő idegen nyelvű folyóiratokat adja ki:

1. Acta Mathematica Hungarica
2. Acta Physica Hungarica.

Technikai szerkesztő: L. Ziermann Margit

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója — Műszaki szerkesztő: Farkas Sándor
A kézirat beérkezett: 1961. III. 29. — Terjedelem: 9 (A/5) ív, 2 ábra

Szegedi Nyomda Vállalat, Szeged 61-1378

A KVANTUMMECHANIKA ALAPJAI ÉS A VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS*

Írta: JESZENSZKY FERENC

1. Bevezetés

Noha a valószínűség fogalmának helyes értelmezését KOLMOGOROV már 1933-ban megadta, mégis e kérdésben sokan helytelen álláspontot foglalnak el. Ma is vannak követői a szubjektív értelmezésnek. Szerintük a valószínűség nem objektív érték, hanem csupán „tudásunk mértéke". Egy másik elterjedt helytelen vélemény, hogy egy adott eseménykategóriához tartozó egyetlen eseménynek nincs valószínűsége, s a valószínűség fogalma csak nagyszámú eseményre alkalmazható. (Félreértések elkerülése végett meg kell jegyeznünk, hogy egyes események bekövetkezésének relatív gyakoriságát természetesen csak nagyszámú kísérlet elvégzésével lehet megállapítani. Ez azonban korántsem jelenti azt, hogy az egyes eseményeknek nincs meghatározott valószínűsége [1].)

A kvantummechanika megalapozásában a valószínűségszámítás döntő jelentőségű. Ezért az elmélet matematikai formalizmusának fizikai interpretációjára nagy hatással van a valószínűség fogalmának értelmezése. Feladatunk megmutatni azt, hogy ez az értelmezés hogyan befolyásolhatja a fizikai interpretációt, és hogy a valószínűség fogalmának helyes értelmezése hogyan járulhat hozzá a szóban forgó fizikai problémák tisztázásához.

A kitűzött feladat megoldását egy körülmény bonyolítja. A kvantummechanika egzakt megalapozását NEUMANN JÁNOS [2] végezte el. NEUMANN J. a valószínűség *Mises*-féle fogalmát használta. MISES a valószínűséget a relatív gyakoriság határértékeként értelmezi. Ez a felfogás teljesen hibás, hiszen ez a határérték nem létezik. MISES szemléletében egyetlen eseménynek nincs valószínűsége, csak nagyszámú eseménynek. Ezt a felfogást NEUMANN feltehetőleg nem találta teljesen kielégítőnek. Legalábbis erre mutat az a világosan megnyilvánuló törekvése, hogy a kvantummechanikának valami olyan megalapozását teremtse meg, amely a szükséges valószínűségszámítási fogalmakat már eleve magában foglalja.

* Ez a dolgozat lényegében a *A valószínűségszámítás és a matematikai statisztika módszereinek alkalmazása a fizikában* kollokviumon, Dobogókő, 1960. január 29-én elhangzott előadás anyagát tartalmazza.

Ez a törekvése sikerrel jár. Sőt, talán túlságosan nagy sikerrel, mert fejtegetéseiben a valószínűségszámítási és a valóban kvantummechanikai gondolatok annyira összefonódnak, hogy szétválasztásuk elég bonyolult feladat. Ez félreértésekre adhat és adott is alkalmat. Ilyen félreértések bukkannak fel FEYERABEND [3], valamint BOCCHIERI és LOINGER [4] munkáiban.

Sem helye, sem célja nincs annak, hogy NEUMANN gondolatmenetét lépésről lépésre ismertessük. De azt nem mulaszthatjuk el, hogy gondolatmenetének vázlatát át ne tekintsük, és a valószínűségszámítási elemeket a kvantummechanikai gondolatoktól el ne válasszuk. Ha ezt megtettük, kitűzött feladatunkat is megoldhatjuk.

2. Kvantummechanikai alapfogalmak

A kvantummechanikában egy S fizikai rendszer minden állapotának a Hilbert-tér egy eleme, és minden fizikai mennyiségnek a Hilbert-tér egy hipermaximális operátora felel meg. Egy mennyiség lehetséges értékei operátorának sajátértékei. Ha S-en az A mennyiség értéke a_k, akkor S állapotát az a_k sajátértékhez tartozó φ_k sajátelem jellemzi. (1. *posztulátum*)

A kanonikusan konjugált mennyiségek operátorai kielégítik a *Heisenberg*-féle csererelációt:[1]

$$\mathbf{pq}-\mathbf{qp}=\frac{h}{i}\mathbf{1}$$

(2. *posztulátum*)

E két posztulátumból levezethető az úgynevezett valószínűségi kijelentés. A *Hilbert*-tér operátorainak általános elmélete szerint minden $\mathbf{R}$ hipermaximális operátornak megfeleltethető egy paraméteres operátorsereg, az $\mathbf{R}$ operátor egységfelbontása:

$$\mathbf{R}\sim\mathbf{E}_{\mathbf{R}}(\lambda).$$

$\mathbf{E}(\lambda)$ tulajdonságai a következők:

1. $\mathbf{E}(\lambda')\,\mathbf{E}(\lambda'')=\mathbf{E}(\min(\lambda',\lambda''))$
2. $\lim\limits_{\lambda\to-\infty}\mathbf{E}(\lambda)=0, \qquad \lim\limits_{\lambda\to+\infty}\mathbf{E}(\lambda)=1$
3. $\mathbf{E}(\lambda)\psi$ mint λ függvénye balról folytonos.

A valószínűségi kijelentés általános alakja:

$$P(A<\lambda|\psi)=F(\lambda|\psi)=(\psi,\mathbf{E}_{\mathbf{A}}(\lambda)\psi).$$

(Ha a *Hilbert*-teret a $(-\infty,+\infty)$ intervallumban négyzetesen integrálható függvények terével reprezentáljuk:

$$(f,g)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\bar{f}g\,d\tau)$$

[1] Az operátorokat fett betűvel jelöljük.

Két mennyiség esetén

$$P(A<\lambda, B<\mu|\psi)=F(\lambda,\mu|\psi)=(\psi, \mathbf{E}_A(\lambda)\,\mathbf{E}_B(\mu)\psi).$$

Ha **A** és **B** felcserélhető operátorok, akkor mindig található egy olyan **C** operátor, hogy $\mathbf{A}=\mathbf{f}(\mathbf{C})$ és $\mathbf{B}=\mathbf{g}(\mathbf{C})$. Ebben az esetben az **A** és **B** operátorokat a **C** operátorral, az $\mathbf{E}_A(\lambda)\,\mathbf{E}_B(\mu)$ kifejezést pedig az $\mathbf{E}_C(\nu)$ kifejezéssel helyettesíthetjük, és a többváltozós problémát egyváltozósra vezethetjük vissza. Ha **A** és **B** nem cserélhetők fel, akkor $\mathbf{E}_A(\lambda)$ és $\mathbf{E}_B(\mu)$ sem, így az $F(\lambda,\mu|\psi)$ kifejezés nem egyértelmű, a valószínűségi kijelentés nem értelmezhető.

A kvantummechanikában gyakori az az eset, hogy nagyszámú azonos fizikai rendszer viselkedését kell tanulmányoznunk. Ekkor általában nem tudjuk, hogy az egyes rendszerek milyen állapotban vannak, hanem csak azt, hogy milyen valószínűséggel vannak bizonyos állapotokban. Ilyenkor, ha a rendszer w_i valószínűséggel van a φ_i állapotban, a valószínűségi kijelentés a következő alakot ölti:

$$P(A<\lambda|P(\varphi_i)=w_i)=Sp(\mathbf{E}_A(\lambda)\mathbf{U});\ \sum_i w_i=1 \qquad w_i\geqq 0,$$

ahol $\mathbf{U}f=\sum_i w_i(\varphi_i,f)\varphi_i$. ($f$ a Hilbert-tér bármely eleme.) Ha $w_k=1$, akkor a rendszerek mind ugyanabban a φ_k állapotban vannak. Ilyenkor tiszta sokaságról beszélünk, egyébként keverékről.

Könnyen kimutatható, hogy az **U** statisztikus operátorral jellemzett sokaságon az A fizikai mennyiség várható értéke

$$M(A)=Sp(\mathbf{U}\mathbf{A}).$$

3. Neumann gondolatmenete

NEUMANN négy *axiómát* ír fel. Ezek, hagyományos jelöléssel, a következők:

A′. Ha az R mennyiség értéke nem lehet negatív, akkor várható értéke sem az, azaz $M(R)\geqq 0$.

B′. Ha R és S tetszőleges fizikai mennyiségek, a és b pedig valós számok, akkor

$$M(aR+bS)=aM(R)+bM(S).$$

I. Ha R operátora **R**, $f(R)$ operátora $\mathbf{f}(\mathbf{R})$.

II. Ha R és S operátora **R** és **S**, akkor $R+S$-é $\mathbf{R}+\mathbf{S}$, még akkor is, ha $\mathbf{RS}\neq\mathbf{SR}$.

Ezek az axiómák tisztán a valószínűségszámítás körébe tartozó megállapítások, voltaképpen egy szűkebb valószínűségszámítás axiómái, amelyek elegendőek a kvantummechanika megalapozásánál szükséges valószínűségszámítási tételek levezetéséhez. NEUMANN ezeket az axiómákat kvantummechanikai axiómáknak tekinti. Ezeken kívül felhasználja az 1. és 2. posztulátumot is, de csak hallgatólagosan, viszont valódi fizikai tartalma éppen ezeknek a megállapításoknak van. Belőlük következik a kvantáltság és a kanonikusan konjugált mennyiségek egyidejű meghatározatlansága. (A 2. posztulátumnak tulajdonképpen csak egy gyengébb alakja kerül felhasználásra, nevezetesen, hogy *léteznek* fel nem cserélhető operátorok.) FEYERABEND [3], BOCCHIERI és LOINGER [4] tévedése onnan ered, hogy nem veszik észre a 2. posztulátum hallgatólagos felhasználását, ami nélkül a *Neumann*-féle négy axióma valóban másféle (nem kvantált) valószínűségi elméleteket is jellemezhet.

A fenti axiómákból NEUMANN levezeti az $M(A) = Sp(\mathbf{AU})$ összefüggést. Nála ez a valószínűségi kijelentés központi helyet foglal el. Ez két szempontból is érthető. 1. NEUMANN nem a valószínűséget, hanem a várható értéket tekinti alapvető fogalomnak. Ez ugyan történeti okokból érthető, de a tárgyalást mégis nehézkessé teszi. 2. Világosan leszögezi, hogy a ψ állapotfüggvény az egyes rendszerek állapotát jellemzi. A későbbiekben azonban kijelenti, hogy „felejtsük el az egész kvantummechanikát", a *Neumann*-féle axiómák kivételével, és ettől kezdve megállapításait nem az egyes rendszerek, hanem a sokaságok viselkedése szempontjából teszi meg, ezért azután az egyetlen rendszert jellemző állapotfüggvény (ψ) háttérbe szorul a sokaságot jellemző statisztikus operátorral (**U**) szemben.

Ezek után NEUMANN definiálja a szórásmentes sokaság fogalmát. Egy sokaság szórásmentes, ha $M(R^2) = (M(R))^2$ minden R-re.

Befejezésül megvizsgálja, hogy létezhetnek-e szórásmentes sokaságok. A vizsgálat módja a következő: megnézi, hogy az A'., B'., I., II. axiómák milyen megszorításokat jelentenek **U**-ra nézve. Végül is arra az eredményre jut, hogy *szórásmentes sokaság nem létezik.* (*Neumann tétele*)

E ponton ismét vissza kell térnünk FEYERABEND, BOCCHIERI és LOINGER elgondolásaihoz. Ők a következőképpen gondolkodnak: az A'., B'., I. és II. axiómák minden valószínűségi elméletben teljesülnek. Következésképpen a *Neumann*-tétel is minden valószínűségi elméletben igaz, nempedig csak a kvantummechanikában. De ez tévedés, hiszen a *Neumann*-tétel levezetésénél fel kell használni a kvantummechanika 2. posztulátumát is, amely más elméletekben nem áll fenn.

4. A kvantummechanika valószínűségi eloszlásfüggvényei

A kvantummechanika kísérletek kimenetelét vizsgálja. Ilyen kísérlet például a következő: megmérjük a ψ állapotban levő rendszer energiáját. A lehetséges energiaértékeket ismerjük, de hogy ezek közül a rendszeren melyiket fogjuk mérni, annak csak a valószínűségét adhatjuk meg.

Ha most alkalmazni akarnánk a *Kolmogorov*-féle axiómákat, nehézségekbe ütköznénk. Nem tudjuk megmondani, hogy melyek az elemi események, nem tudjuk megadni a valószínűségi mezőt. De ez a részletes taglalás nem is feltétlenül szükséges.

Tudjuk ugyanis azt, hogy minden monoton nemcsökkenő és balról folytonos függvény, amelynek határértéke $-\infty$-ben 0 és $+\infty$-ben 1, egy valószínűségi változó eloszlásfüggvénye lehet [1]. Könnyen belátható, hogy az $F(\lambda|\psi) = P(A < \lambda|\psi)$ függvény valóban ilyen. A kvantummechanika valószínűségi kijelentései szabályos valószínűségi eloszlásfüggvények, mégpedig olyan eloszlásfüggvények, amelyek mindig egyváltozósokként tekinthetők.

A szórásmentes sokaság fogalma is feleslegessé válik. Helyette bevezethetjük a *teljesen szórásmentes állapot* fogalmát: ψ teljesen szórásmentes, ha $D(R|\psi) = 0$ minden R-re. Ilyen ψ nyilvánvalóan nem létezik, hiszen egy fizikai mennyiség szórása csak e mennyiség sajátállapotában tűnhetik el, ψ pedig fel nem cserélhető mennyiségeknek nem lehet szimultán sajátfüggvénye. Így sokkal egyszerűbben és fogalmilag tisztább úton jutunk el *Neumann* tételéhez.

5. A valószínűség fogalma és a kvantummechanika interpretációi

Láttuk, hogy a kvantummechanika valószínűségi eloszlásfüggvényeit az állapotfüggvény egyértelműen meghatározza. Ezért a valószínűség fogalma és az állapotfüggvény értelmezése között szoros kapcsolat van. A valószínűség fogalmának helytelen értelmezése az állapotfüggvény fogalmának helytelen értelmezését vonja maga után. Nézzük először a szubjektív szemléletet. Ha a valószínűség csupán „tudásunk mértéke", akkor ebből az következik, hogy „az állapotot tudásunk határozza meg, és semmi más" [5]. Az állapot ilyen szubjektív értelmezése azután különös következményekre vezet. A kvantummechanika szerint az S fizikai rendszer állapota méréskor gyakran ugrásszerűen megváltozik. A szubjektív szemlélet szerint ilyenkor nem a rendszer objektív állapota változott meg, hanem az én tudásom a rendszerről, tehát egy mérésnél a rendszer állapota csak akkor változik meg, amikor én ránézek a mérőműszer mutatójára. Ha birtokában vagyunk a valószínűség helyes, objektív fogalmának, akkor nem juthatunk ilyen abszurd eredményhez, hanem azt kell mondanunk, hogy a rendszer objektív állapota határozza meg az egyes kísérletek kimenetelének objektív valószínűségét.

A valószínűség fogalmának az a helytelen értelmezése, miszerint egy adott eseménykategóriához tartozó egyetlen eseménynek nincs valószínűsége, s a valószínűség fogalma csak nagyszámú eseményre alkalmazható, szintén forrása a kvantummechanika egy lehetséges hibás interpretációjának. E hibás interpretáció szerint egyetlen S fizikai rendszerhez nem tartozik állapotfüggvény, az állapotfüggvény csak a rendszerek egy sokaságának viselkedését jellemzi. A valószínűség helyes fogalmának ismerete mellett ezt az elképzelést azonnal el kell vetnünk.

Összefoglalva megállapíthatjuk, hogy a valószínűség helyes fogalmának felhasználásával nyilvánvalóvá lesz: a kvantummechanikában az állapotfüggvény csak egyetlen rendszer objektív viselkedését jellemezheti.

A szerző köszönetet mond FÉNYES IMRÉnek, a fizikai tudományok doktorának segítségéért és tanácsaiért, és RÉNYI ALFRÉD akadémikusnak értékes megjegyzéseiért.

IRODALOM

[1] RÉNYI ALFRÉD; *Valószínűségszámítás,* Tankönyvkiadó, Budapest, 1954.
[2] J. VON NEUMANN; *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik,* Springer, Berlin, 1932.
[3] P. K. FEYERABEND; Eine Bemerkung zum Neumannschen Beweis, *Zeitschrift für Physik,* **145**, (1956) 421.
[4] P. BOCCHIERI—A. LOINGER; Einige Bemerkungen über die Frage der verborgenen Parameter, *Zeitschrift für Physik,* **148**, (1957) 308.
[5] F. HAGEDORN; *The Density Matrix,* CERN, Geneva, 1958.

(Beérkezett: 1960. IV. 27.)

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Elméleti Fizikai Intézete

EGY POLINOM IRREDUCIBILITÁSÁRÓL

Írta: SERES IVÁN

Sokan foglalkoztak oly $F(P(x))$ polinomok irreducibilitásával, amelyekben az $F(z)$ irreducibilis polinom együtthatói racionális egész számok, a főegyütthatójuk 1 és a

$$z = P(x) = \prod_{k=1}^{m} (x - a_k) \text{ polinomban az } a_1 < a_2 < \cdots < a_m$$

számok racionális egész számok. Mindezen szétbontásokat a racionális számtest, Γ fölött vizsgálták. Mi bebizonyítjuk a következő

TÉTELT: *Vegyük a 2^{n+1}-edik körosztási polinomot, az $F_{2^{n+1}}(z)$-t, ebbe helyettesítsük a következő szorzatot:*

$$P(x) = \prod_{k=1}^{m} (x^2 + a_k^2), \quad \textit{ahol} \quad o < |a_1| < |a_2| \cdots < |a_m|$$

racionális egész számok, a $G(x) = F_{2^{n+1}}(P(x))$ polinom irreducibilis a racionális számtest, a Γ fölött.

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy a $G(x)$ polinom reducibilis a Γ számtest fölött;

$$G(x) = G_1(x)\, G_2(x),$$

ahol a $G_1(x)$ és $G_2(x)$ polinom összes együtthatói racionális egész számok.

Kis átrendezéssel a tényezők így írhatók:

$$G_1(x) = xH_1(x^2) + K_1(x^2),$$
$$G_2(x) = xH_2(x^2) + K_2(x^2),$$

ahol a $H_1(x^2)$, $H_2(x^2)$, $K_1(x^2)$, $K_2(x^2)$ polinomok racionális egész együtthatójúak. Szorozzuk össze a $G_1(x)$ polinomot a $G_2(x)$-szel:

$$G(x) = x^2 H_1(x^2)\, H_2(x^2) + K_1(x^2)\, K_2(x^2) +$$
$$+ x\big(H_1(x^2)\, K_2(x^2) + H_2(x^2)\, K_1(x^2)\big).$$

Az együtthatók összehasonlításával adódik, hogy

(1) $$H_1(x^2)\, K_2(x^2) + H_2(x^2)\, K_2(x^2) \equiv 0.$$

1. A $H_1(x^2)$, $H_2(x^2)$, $K_1(x^2)$, $K_2(x^2)$ polinomok egyike sem azonosan 0. Pl. $H_1(x^2)\equiv 0$ esetén (1)-ből a $H_2(x^2)\,K_1(x^2)\equiv 0$ azonosságot kapjuk. Ezen szorzatban $K_1(x^2)\not\equiv 0$, mert ellenkező esetben a $G_1(x)$ és $G(x)$ polinom $\equiv 0$ volna. Tehát $H_2(x^2)\equiv 0$, s így

$$G(x)=F_{2^n+1}\left(\prod_{k=1}^{m}(x^2+a_k^2)\right)=K_1(x^2)\,K_2(x^2).$$

Ezen polinomokban $x^2=y$-t írva az

$$F_{2^n+1}\left(\prod_{k=1}^{m}(y+a_k^2)\right)=K_1(y)\,K_2(y)$$

összefüggéshez jutunk. Ez [1] miatt csak úgy lehet, ha $K_1(y)$ vagy a $K_2(y)$ egyike konstans, de akkor a $G_1(x)$ vagy a $G_2(x)$ polinom egyike konstans. Tehát a polinomnak nem felbontása a $G_1(x)\,G_2(x)$ szorzat. Hasonló az okoskodás, ha a $H_2(x^2)$, $K_1(x^2)$, $K_2(x^2)$ polinomok egyikéről tesszük fel, hogy azok azonosan zérusok.

2. Az (1) egyenlet szerint

$$K_1(x^2)=-\frac{H_1(x^2)\,K_2(x^2)}{H_2(x^2)} \tag{2}$$

és

$$G(x)=x^2H_1(x^2)\,H_2(x^2)-\frac{H_1(x^2)\,K_2^2(x^2)}{H_2(x^2)}. \tag{3}$$

Legyen $(H_1(x^2),\, H_2(x^2))=E(x^2)$, ahol az euklideszi algoritmus miatt $E(x^2)$ az x-re nézve páros kitevőjű polinom, amelynek együtthatói racionális számok.

3. A $G(x)$ polinom még így is írható

$$G(x)=x^2H_1(x^2)\,H_2(x^2)-\frac{H_1(x^2)}{E(x^2)}\,\frac{K_2^2(x^2)}{\frac{H_2(x^2)}{E(x^2)}}. \tag{4}$$

A $\frac{H_1(x^2)}{E(x^2)}$ és $\frac{H_2(x^2)}{E(x^2)}$ racionális együtthatójú polinomokról azt tudjuk, hogy egymáshoz relatív prímek. A (2) szerint

$$K_1(x^2)=-\frac{\frac{H_1(x^2)}{E(x^2)}\,K_2(x^2)}{\frac{H_2(x^2)}{E(x^2)}},$$

ezért $\frac{H_2(x^2)}{E(x^2)}\,\Big|\,K_2(x^2)$, továbbá természetesen fennáll a $\frac{H_2(x^2)}{E(x^2)}\,\Big|\,xH_2(x^2)$ összefüggés.

Így $G(x)$ osztható volna $\frac{H_2(x^2)}{E(x^2)}$-tel, ami csak akkor lehet [1] miatt, ha a $\frac{H_2(x^2)}{E(x^2)}$ polinom konstans, ekkor

$$\mathrm{Gr}\, H_2(x^2) = \mathrm{Gr}\, E(x^2).$$

A $\dfrac{K_2(x^2)}{\frac{H_2(x^2)}{E(x^2)}}$ kifejezés racionális együtthatójú algebrai polinom, így (4) szerint $\frac{H_1(x^2)}{E(x^2)}$-tel osztható volna a $G(x)$ polinom.

Ez, [1] miatt szintén csak akkor lehetséges, ha a $\frac{H_1(x^2)}{E(x^2)}$ polinom konstans.

Végül is

$$\mathrm{Gr}\, H_1(x^2) = \mathrm{Gr}\, H_2(x^2) = \mathrm{Gr}\, E(x^2)$$

és

$$\left.\begin{aligned} H_1(x^2) &= \delta_1 E(x^2) \\ H_2(x^2) &= \delta_2 E(x^2) \end{aligned}\right\} \text{ ahol a } \delta_1 \text{ és } \delta_2 \text{ racionális számok}$$

s így $H_1(x^2) = \delta_3 H_2(x^2)$ (a δ_3 is racionális szám). Ezt a (3) összefüggésnél figyelembe véve,

$$G(x) = F_{2^n+1}\left(\prod_{k=1}^{m}(x^2+a_k^2)\right) = \delta_3\left(x^2 H_2^2(x^2) - K_2^2(x^2)\right).$$

Mivel az $x^2 H_2^2(x^2) - K_2^2(x^2)$ polinom együtthatói racionális egész számok és a $G(x)$ valamint az $(xH_2(x^2)+K_2(x^2))(xH_2(x^2)-K_2(x^2))$ polinom főegyütthatóinak abszolút értéke 1, azért $\delta_3 = \pm 1$.

Így

$$\pm F_{2^n+1}\left(\prod_{k=1}^{m}(x^2+a_k^2)\right) = x^2 H_2^2(x^2) - K_2^2(x^2).$$

Az $x=0$ helyen a következő összefüggést kapjuk:

$$\mp F_{2^n+1}\left(\prod_{k=1}^{m} a_k^2\right) = \mp\left(\prod_{k=1}^{m} a_k^{2^{n+1}} + 1\right) = K_2^2(0).$$

Ez ellentmondást ad, mert a jobboldalon négyzetszám állt, a baloldalon $\prod_{k=1}^{m} a_k \neq 0$ miatt pedig nem.

Köszönettel megemlítem KÖRNYEI IMRÉnek egy általános megjegyzését:

Ha az $f(x)$ racionális egész együtthatós, a Γ fölött irreducibilis polinom, amelynek főegyütthatója 1, *az $f(x^2)$ polinom is irreducibilis marad, ha $f(0) \neq a^2$-tel (ahol az a racionális egész szám).*

A bizonyítás ugyanúgy vihető végbe, mint a $G(x)$ polinom irreducibilitásának kimutatásánál.

IRODALOM

[1] I. Seres: Lösung und Verallgemeinerung eines I. Schurschen Irreduzibilitätsproblem für Polynome, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* 7 (1956) 151—157.

(Beérkezett: 1960. XII. 14.)

A Magyar Tudományos Akadémia
Matematikai Kutató Intézete

A FŐJOBBIDEÁLOKRA NÉZVE MINIMUM-FELTÉTELŰ GYŰRŰK

Írta: SZÁSZ FERENC

Édesapámnak, 70. születésnapjára ajánlom tisztelettel és szeretettel

Bevezetés

A matematika valamennyi ágában a legutóbbi négy-öt évtizedben végbement nagymérvű fejlődés egyre jobban nyilvánvalóvá teszi a modern algebrának mind több és több helyen való alkalmazhatóságát és más matematikai területeken való szükségképpeni előbukkanásának tényét. A modern algebra számos ága közt — a csoportok és hálók elmélete mellett — a testelméletből, ideálelméletből és reprezentációelméletből kialakult gyűrűelmélet igen fontos és előkelő szerepet tölt be.

Címe szerint dolgozatomban, amely kandidátusi értekezésem módosított és rövidített változata, szintén gyűrűelmélettel, éspedig a címben kitűzött gyűrűosztálynak egy lehetőleg mélyrehatóbb szerkezeti vizsgálatával igyekszem foglalkozni. A címben szereplő gyűrűket *MHR*-gyűrűknek fogom nevezni, figyelembe véve megjelent, ill. sajtó alatt levő német nyelvű két publikációmat[1] [34], [35]. Ezek a gyűrűk az *Artin*-féle gyűrűknek egyik természetes általánosításai, amelyek vizsgálatára figyelmemet KERTÉSZ ANDOR volt szíves felhívni. Az *MHR*-gyűrűket az jellemzi, hogy a főjobbideálok bármely halmazában van minimális, tehát hogy teljesül főjobbideálokra nézve a leszálló láncfeltétel, amely szerint nincsenek végtelen hosszú fogyó főjobbideálláncok. Az *MHR*-gyűrűk osztályába tartozik ezek szerint minden *Artin*-féle gyűrű. Bár az *MHR*-gyűrűk elméletében az eredmények és vizsgálati módszerek tekintetében van bizonyos lazább és homályosabb hasonlóság az *Artin*-féle (azaz jobbideálokra nézve minimum-feltételű) gyűrűk elméletéhez képest, a bizonyításokat mégis megnehezíti általában az a tény, hogy egy gyűrű főjobbideáljai általában nem alkotnak (a metszetre és generálásra nézve) hálót, sőt még félhálót sem. Továbbá az *Artin*-féle gyűrűknek, sőt még a speciálisabb *Frobenius*-féle algebráknak az elmélete, nagyfokú kiépítettségük ellenére is, még nagyon messze van a teljes befejezettségtől. Annál inkább nem meglepőek a nehézségek,

[1] Időközben hasonló témáról megjelent 1959. X. 1-én C. C. FAITH [9] kis cikke, amely 1959. V. 6-án került az *Archiv der Math.* szerkesztőségéhez. Kandidátusi disszertációmat 1959. IX. 24-én nyújtottam be a MTA III. Osztályának és előzőleg [34] cikkemet még 1958. XII. 27-én (végleges formában pedig 1959. III. 18-án) eljuttattam a *Publ. Math. Debrecen* folyóiratnak, a sajnos, késve megjelent 7. kötete részére.

amelyekre a dolgozat végén felsorolt néhány nehezebb nyitott kérdés is rávilágít, ha az egészen tetszőleges gyűrűk osztálya és az *Artin*-féle gyűrűk osztálya között egy olyan közbülső osztályt veszünk, mint amilyen pl. az MHR-gyűrűk osztálya. A radikálnak és féligegyszerűségnek a tetszőleges gyűrűkre való *Jacobson*-féle értelmezése, valamint a kidolgozott *Jacobson*-féle és másféle elméletek és módszerek [17] igen sok esetben, de mégsem minden esetben nagy horderejű eszközöket jelentenek az ilyen speciális közbülső gyűrűosztályok vizsgálatában. Egy-egy ilyen közbülső gyűrűosztálynak azonban megvannak általában a maga sajátos problémái és módszerei, amelyek idomulnak a témához. Szerencsés esetben pedig egy ilyen speciális közbülső osztály éppen speciális volta miatt — amellett, hogy még mindig elég messzemenő általánosítása az *Artin*-féle gyűrűk osztályának — lehetővé teszi mélyreható struktúratételek megállapítását. A tetszőleges gyűrűk tanulmányozásának kiváló és standard útmutatója JACOBSON [17] könyve. Ez a könyv azt mutatja, hogy igen sok algebristának, köztük *Jacobson*on kívül S. AMITSUR, V. A. ANDRUNAKIEVICS, G. AZUMAYA, R. BAER, B. BROWN, C. CHEVALLY, J. DIEUDONNÉ, FUCHS L., R. E. JOHNSON, I. KAPLANSKY, A. G. KUROS, J. LEVITZKI, N. H. MCCOY és másoknak a munkássága révén ma már meglehetősen gazdag az eredményekben a tetszőleges, vagy legalábbis erősebb végességi feltételeknek eleget nem tevő gyűrűknek az elmélete. (Végességi feltételen olyan kikötést értünk, amellyel minden véges algebrai struktúra rendelkezik, és amely nincs meg legalább egy ugyanolyan fajtájú végtelen algebrai struktúrának.) A jelen dolgozatom csak egy szerény lépés igyekszik lenni az enyhébb végességi feltételű gyűrűknek a vizsgálata irányában.

Az **1.** §-ban vázlatosan ismertetni fogom az előforduló fogalmakat és jelöléseket, és helykímélés végett a részleteket illetőleg az eredeti forrásmunkákra hivatkozom. A jelöléseket azonban igyekszem részletezni.

A dolgozat **2.** §-ában példát látunk olyan egyszerű (tehát féligegyszerű és ideálmentes) MHR-gyűrűre, amely nem *Artin*-féle. Erre a példára később gyakran hivatkozunk. Továbbá példák mutatják, hogy egyrészt létezik olyan kommutatív MHR-gyűrű, amelynek a (*Jacobson*-féle) radikálja nem nilpotens, és maga a gyűrű nem MH_1R-gyűrű, másrészt külön megmutatjuk, hogy a főjobbideáloknak és a főbalideáloknak a minimum-feltételei egymástól függetlenek. A **2.** §-ban tárgyalunk néhány fontos, nagyrészben közismert segédtételt is. Érdekes eredmény még az is, hogy A-val együtt eAe is MHR-gyűrű, ha $e^2 = e \in A$, továbbá nilpotens MH_1R-gyűrűnek bármely részgyűrűje is MH_1R-gyűrű.

A **3.** §-ban először példát adunk primitív, de nem egyszerű gyűrűre, továbbá egyszerű, de nem MHR-gyűrűre, majd pedig igazoljuk, hogy bármely ideálmentes MHR-radikálgyűrű prímszámrendű zérógyűrű. Megmutatjuk, hogy *MHR*-gyűrűknél egybeesik az egyszerű gyűrű, a primitív gyűrű, a balprimitív gyűrű, a prímgyűrű és az olyan gyűrű fogalma, amelynek egyrészt van $\neq 0$ talpa (socle-ja), másrészt amelynek bármely végesen generált részgyűrűje része a gyűrű egy *Artin*-féle egyszerű részgyűrűjének. Eszerint az *A* *MHR*-gyűrűben a prímideáloknak, a primitív ideáloknak és az olyan *M* maximális ideáloknak a fogalma, amelyekre $A^2 + M = A$ teljesül, egymással egybeesik.

A **4.** §-ban a (*Jacobson*-féle értelemben) féligegyszerű *MHR*-gyűrűket tárgyaljuk. Megadjuk az *Artin*-féle féligegyszerű gyűrűkről szóló *E. Noether*-féle jellemzésnek és a *Wedderburn—Artin*-féle struktúratételnek egy általánosítását *MHR*-gyűrűk esetére. Speciális esetként adódik SZELE egy tétele, amelyre külön bizonyítást is adunk, továbbá GERCSIKOV egyik tételének új bizonyítása, és SZENDREI egy problémájának az *MHR*-gyűrűk esetén való pozitív megoldása, amelynek a tetszőleges esetben a megoldása negatív. (A *Szendrei*-féle probléma azt kérdezi, hogy ferdetest-e bármely zérusosztómentes egyszerű gyűrű.) (Vö. [5] és [24] egybekapcsolásával.) Vizsgáljuk a 4. §-ban az egyszerű gyűrűknek az *S* szubdirekt összegeit, amely diszkrét összeg lesz, ha *S* egy *MHI*-gyűrű. KERTÉSZ ANDOR egyik tételét általánosítjuk azáltal, hogy bizonyos ekvivalens tulajdonságok sorozatából az egyiknek eleget tevő gyűrűkről megmutatjuk, hogy féligegyszerű *MHR*-gyűrűk, ha a jobbannullátormentességet is feltételezzük. Ekkor a balegységelem erősebb feltételezése éppen az *Artin*-féle féligegyszerű gyűrűkhöz vezet.

Az **5.** §-ban más ekvivalens feltételek megállapításával az *MHR*-gyűrűk esetére általánosítjuk az *Artin*-féle féligegyszerű gyűrűkről szóló *Goldman—Fuchs—Szele*-féle kritériumot. Utóbbi szerint pontosan az *Artin*-féle féligegyszerű gyűrűk azok, amelyeknek minden jobbideálja balegységelemes. Mármost az említett általánosításunk mellett a *Goldman—Fuchs—Szele*-féle kritériumra megadunk egy másik általánosítást is, sőt közöljük ennek a két általánosításnak egy közös általánosítását is. Ez éppen az 5. 3. állítás első részállítása, amely leírja a tetszőleges *MHR*-gyűrűk bizonyos jobbideáljait. Kiderül az is, hogy ha egy gyűrű minden főjobbideálban fekvő jobbideálja jobbegységelemes, akkor a gyűrű ferdetestek diszkrét direkt összege. Ez szintén egy *Fuchs—Szele*-féle eredményt általánosít. Továbbá a nem feltétlenül egységelemes gyűrűkben is igazoljuk az általánosított *Neumann*-féle regularitási kritériumot és élesítjük a *Harada—Kovács*-féle kritériumot is [15], [20]. Megmutatjuk továbbá, hogy minden féligegyszerű *MHR*-gyűrű *Neumann*-reguláris gyűrű, és hogy létezik olyan *Neumann*-reguláris gyűrű, amely nem *MHR*-gyűrű. Ebben a példában, bár minden főjobbideál balegységelemes, mégis van olyan főjobbideál, amelynek egy additív alcsoportja a gyűrű végtelen sok jobbideáljának direkt összege, tehát ez a jobbideál nem balegységelemes. Utalunk arra is, hogy a [9] cikk apróbetűs 4. megjegyzése végtelen sok ellenpéldával cáfolható, aminek oka FAITH egy félreértése.

A dolgozat **6.** §-a az *MHR*-gyűrűk additív csoportját vizsgálja. Megállapítjuk annak a kritériumát, hogy egy A^+ *Abel*-féle csoport egy A *MHR*-gyűrű additív csoportja legyen. Ebben a témakörben tárgyaljuk azokat az eseteket is, amelyekben A egységelemes *MHR*-gyűrű, vagy *MHR*-radikálgyűrű, vagy primitív *MHR*-gyűrű.

A **7.** §-ban megmutatjuk, hogy bármely *MHR*-gyűrűben egybeesik egymással a *Baer—McCoy*-féle alsó nil radikál, a *Levitzki*-féle radikál, a felső nil radikál és a *Jacobson*-féle radikál. Ezeket pedig mind a *Brown—McCoy*-féle radikál, mind pedig a *Fuchs*-féle radikál tartalmazza. Ha A jobbegységelemes *MHR*-gyűrű, akkor a *Brown—McCoy*-féle és a *Fuchs*-féle radikál egybeesik a *Jacobson*-féle radikállal.[2]

A dolgozat **8.** §-ban az *MHR*-gyűrűket mint operátor-modulusok jobboldali operátortartományait vizsgáljuk. Megmutatjuk azt, hogy ha A féligegyszerű *MHR*-gyűrű, akkor bármely olyan M modulus, amelyre $MA = M$ teljesül, teljesen reducibilis. Megadunk egy modulus-elméleti elegendő feltételt arra, hogy A féligegyszerű *MHR*-gyűrű legyen. Vizsgálható bizonyos operátormodulusoknak az alsó és felső *Loewy*-féle transzfinit rendszere is, ahol az operátortartomány egy (nem féligegyszerű) *MHR*-gyűrű. Megmutatjuk azt, hogy ha A egy M *Abel*-féle csoport teljes endomorfizmus-gyűrűje, akkor M megválasztható úgy, hogy A-nak egy A_0 féligegyszerű *MHR*-részgyűrűje különbözzék A_0 (A-ra vonatkozó) centralizátorának centralizátorától. Ha ugyanis A_0 *Artin*-féle féligegyszerű részgyűrű A-ban, akkor A_0 éppen a centralizátorának a centralizátora. Azt is igazoltuk, hogy ha M-nek az A teljes endomorfizmusgyűrűje egy *MHR*-gyűrű, akkor A összes jobbideáljaira és balideáljaira teljesül a minimum-feltétel. Hasonló érvényes, ha A-ban teljesül a főbalideálok minimum-feltétele.

A **9.** §-ban a főjobbideálokra nézve egyidejűleg maximum- és minimumfeltételnek eleget tevő gyűrűket vizsgáljuk. Megmutatjuk, hogy ezeknél a radikál szerint vett faktorgyűrű *Artin*-féle, és vizsgáljuk magának a gyűrűnek is az additív csoportját. Bevezetjük a tetszőleges gyűrűkben a „szabályos" főjobbideál fogalmát. Szabályos főjobbideálokra bizonyos állítások egész sorozatát igazoltuk. *Artin*-féle és *MMHR*-gyűrűkben pl. a talp homogén komponensei radikáljának a megfelelő homogén komponensre vonatkozó kiegészítő direkt összeadandói mindig szabályos főjobbideálok. Viszont egy tetszőleges gyűrű talpának bármely S szabályos főjobbideálja olyan, hogy S bármely jobbideálja az egész gyűrűnek is jobbideálja. Ezzel és más eredmé-

[2] Hasonló érvényes a *Fuchs*-radikál olyan bizonyos általánosításaira is, amelyeket a közelmúltban vizsgáltunk.

nyekkel elég általános kiegészítést adtunk a talp *Dieudonné*-féle vizsgálatához, felhasználva közismert elemi módszereket. Sok más, de hasonló jellegű állítás érvényes a talp szabályos jobbideáljára.

Végül a dolgozat **10.** §-ában vizsgáljuk az egy elemmel generált részgyűrűkre nézve minimum-feltételű MHU-gyűrűket, és általánosítjuk a szovjet V. I. SNEIDMYULLER néhány eredményét. Egy speciális gyűrűosztályt explicit módon jellemezve (lásd a V-gyűrűket) elegendő feltételt adtunk meg arra, hogy egy MHR-gyűrű MHU-gyűrű legyen és viszont.[3] Leírjuk az MHU-gyűrűk additív csoportját, valamint az MHU-ferdetesteket. Vizsgáljuk továbbá az olyan MHU-radikálgyűrűkhöz hozzárendelt egy bizonyos G csoportot, amely gyűrűk egyszersmind MHR-gyűrűk is. Ez a csoport torziócsoport és *Sylow*-féle p-alcsoportjainak a direkt szorzata, de általában nem feloldható, viszont létezik G-nek egy feloldható transzfinit invariánslánca.

Dolgozatunk végén felsorolunk néhány nyitott problémát is.

1. §. Definíciók és jelölések

Ebben a §-ban főleg a végig használt definíciókra és jelölésekre utalunk, miközben a csoport, a gyűrű fogalmát ismertnek tételezzük fel (lásd [10], [17], [21], [28]). Az említett struktúrák elemeit $a, b, c, \ldots, g, h, \ldots, x, y, z$ jelöli általában. Gyűrűn asszociatív gyűrűt, ideálon kétoldali ideált értünk. Az additív írásmód esetén a neutrális elem O; és $-a$ pedig az a elem inverze. Ha egy A gyűrűnek nincs egységeleme, amit 1-gyel jelölünk, akkor is értelme van az $(1-a)b$ szorzatnak. Ugyanis $(1-a)b = b-ab$, ahol most $1 \in I$ operátorként hat, és I jelöli a racionális egész számok gyűrűjét. Általában legyen $(1-a)B = [b-ab \mid b \in B$; B az A gyűrűnek egy részhalmaza$]$, ahol $[\ldots x_\alpha, \ldots]$ jelenti az $\ldots, x_\alpha, \ldots$ elemekből álló részhalmazt A-ban.

Tudvalevőleg operátormoduluson, pontosabban A-jobbmoduluson, ahol A gyűrű, olyan M *Abel*-féle csoportot értünk, amelyen értelmezve van egy ma operátorszorzat, ahol $ma \in M$, $m \in M$ $a \in A$, és teljesül $(m_1+m_2)a = m_1a+m_2a$; $m(a_1+a_2) = ma_1+ma_2$. Ha A-nak csak a zérus eleme hat M zérus-endomorfizmusaként, akkor A hűen ábrázolható M endomorfizmusaival. A-modulusokban egy ($\neq 0$) A-részmodulus akkor minimális (más szóval egyszerű vagy irreducibilis), ha nincs neki O-tól és önmagától különböző A-részmodulusa. Hasonlóan definiálható a maximális részmodulus is. Egy M modulusban minimális vagy maximális részmodulus nem mindig létezik. A-modulusokra is érvényes a csoportelméletből jól ismert két izomorfiatétel [11], [21], [28].

[3] Explicit felsorolást közlünk bizonyítás nélkül az összes V-gyűrűről is.

Az A-modulusok fontossága leginkább abban rejlik, hogy minden G *Abel*-féle csoport tekinthető I-modulusnak, és minden A gyűrű tekinthető önmagának A-jobbmodulusaként, sőt (A, A)-duplamodulusként. Egy M (A, B)-duplamoduluson nevezetesen olyan *Abel*-féle csoportot értünk, amelyen az A gyűrű balról, a B gyűrű pedig jobbról operál, ez a kétféle operáció sorrendben felcserélhető, és a megszokott axiómák teljesülnek. Így pl.

$$a \cdot (\sum_{i,j,k} a_i m_j b_k b) = (\sum_{i,j,k} a \cdot a_i m_j b_k) \cdot b = \sum_i a a_i \sum_j m_j \sum b_k b \in M;$$

$$a, a_i \in A, \; m_j \in M; \; b, b_k \in B.$$

Jelölje $\{ \}$ a bennfoglalt elemekkel és részhalmazokkal generált részstruktúrát. A pontos megjelölés a továbbiakban pedig félreérthetetlenül utal majd arra, hogy pl. egy A gyűrűben részstruktúrán részgyűrűt vagy additív alcsoportot stb. kell-e értenünk. Egy M modulus definíció szerint akkor az $M_\alpha (\alpha \in \Gamma)$ részmodulusok diszkrét direkt összege, ha $M = \{\ldots M_\alpha \ldots\}$ és $M_\alpha \cap C_\alpha = 0$, ahol $C_\alpha = \{\ldots, M_\beta, \ldots\}$ és β végigfut az összes $\neq \alpha$ indexen. Ekkor M A-izomorf az összes olyan $\langle m_1, m_2, \ldots, m_\alpha, \ldots \rangle$ vektorból álló A modulussal, ahol $m_\alpha \in M_\alpha$, a vektorok egyenlősége és műveleteik komponensekként értelmezendők, és minden vektorban $m_\alpha \neq 0$ csak véges sok α index esetén lehetséges. Ha ezt a legutolsó feltételt elhagyjuk, az M_α modulusok komplett direkt összegét kapjuk. $M = \sum \oplus M_\alpha$ a diszkrét direkt összeg, $M^* = \sum^* \oplus M_\alpha$ a komplett direkt összeg jele. M^*-nak fontos speciális részmodulusai a szubdirekt összegek. (Általánosabban lásd: [3]). M^* egy S részmodulusa akkor az M_α modulusoknak egy szubdirekt összege; ha S olyan $\langle \ldots, m_\alpha, \ldots \rangle$ vektorokból áll, amelyeknél az $\langle \ldots, m_\alpha, \ldots \rangle \to m_\alpha$ leképezés minden rögzített α index mellett homomorfizmus az egész M_α modulusra. M pontosan akkor bizonyos $M/K_\beta (\beta \in \Omega)$ modulusoknak egy szubdirekt összege, ha $\bigcap_{\beta \in \Omega} K_\beta = 0$.

Az egész számok I gyűrűje tehát mind az összes $I/(p)$ véges prímtesteknek, mind pedig az összes $I/(p^n)$ ciklikus p-csoportú egységelemes gyűrűknek egy szubdirekt összege, ahol p prímszám. Direkt és szubdirekt összegekkel kapcsolatban a klasszikussá vált szakirodalomra utalunk, és kiemeljük, hogy gyűrűknél szó lehet additív alcsoportokra, jobbideálokra (balideálokra), ill. ideálokra történő direkt felbontásokról. Utóbbi esetben (ez a gyűrűelméleti direkt összeg!) a direkt komponensek egymást páronként annullálják.

Egy M A-jobbmodulus teljesen reducibilis, ha egyszerű részmodulusok diszkrét direkt összege. Ekkor M-nek egy egyszerű részmodulussal A-izomorf összes A-részmodulusa összegét homogén komponensnek nevezzük. Egy M tetszőleges A-jobbmodulus talpa (socle-ja) jelenti M maximális teljesen reducibilis részmodulusát. Az M talpát M_1-el jelöljük. Ha egy α rendszámra M_α

már definiálva van, legyen $M_{\alpha+1}/M_\alpha$ az M/M_α talpa, míg akkor, ha β limesz rendszám, legyen $M_\beta = \bigcup_{\alpha<\beta} M_\alpha$. Egy A gyűrű A_1 talpán értjük A-nak mint A-jobbmodulusnak a talpát, és hasonlóan értelmezzük az $\bar{A}_1$ baltalpat, valamint az A_β β-adik talpat és $\bar{A}_\beta$ β-adik baltalpat. Akkor és csak akkor $M = M_\gamma$ egy γ rendszámra, ha M bármely $\neq 0$ részmodulusa bármely $\neq 0$ homomorf képének van $\neq 0$ egyszerű részmodulusa.

Jelölje $(\ )_r$, $(\ )_l$, ill. $(\ )$ rendre a gyűrűnek a $(\ )$-ban bennefoglalt elemekkel generált jobbideálját, balideálját, ill. ideálját. A-nak egy R jobbideálja nil jobbideál, ha R minden x eleme nilpotens, azaz $x^n = 0$ (n egy x-től függő természetes szám). R akkor nilpotens, ha $R^n = 0$, ahol R^n az R-ből vett összes n-tényezős szorzat összege. Egy α rendszámra legyen $R^{\alpha+1} = R \cdot R^\alpha$, míg egy β limesz rendszám esetén pedig $R^\beta = \bigcap_{\alpha<\beta} R^\alpha$. Ideálokkal kapcsolatban megemlítjük, hogy egy A asszociatív gyűrűben a B_1 (illetve B_2) additív alcsoport akkor *Jordan*-féle (illetve *Lie*-féle) ideál, ha a tetszőleges $b_1 \in B_1$, $a_1 \in A$ elempár esetén $b_1a_1 + a_1b_1 \in B_1$ (illetve tetszőleges $b_2 \in B_2$, $a_2 \in A$ elempár esetén $b_2a_2 - a_2b_2 \in B_2$). A *Noether*-féle ideálelmélet ideálhányadosának mintájára az A gyűrű összes olyan r elemeiből álló R jobbideált, amelyre $Br \subseteq C$, ahol C egy részmodulus az M A-modulusban és B az M tetszőleges részhalmaza, jelölhetjük a $(C:B)$ modulushányados szimbólummal. Ezek szerint egy M A-jobbmodulus akkor hű, ha $(O:M) = 0$.

Egy A gyűrűt primitívnek neveznek akkor, ha létezik olyan egyszerű M A-jobbmodulus, amelyre $MA = M$ és $(O:M) = 0$. Világos, hogy prímszámrendű zérusgyűrű, bár ideálmentes, nem lehet primitív, és hogy minden ferdetest primitív. Egy gyűrűt egyszerűnek nevezünk, ha ideálmentes és primitív. Ilyenek pl. egy ferdetest feletti teljes matrixgyűrűk. A *Chevally—Jacobson*-féle sűrűségi tétel [17] szerint bármely A primitív gyűrű izomorf egy ferdetest feletti V vektortér lineáris transzformációinak egy sűrű részgyűrűjével. Ez a sűrű jelző azt jelenti, hogy bármely véges sok $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$, az alaptest felett lineárisan független vektorhoz, és tetszőleges $x_1, x_2, \ldots, x_n \in V$ vektorokhoz létezik olyan $a \in A$ lineáris transzformáció, hogy $v_1a = x_1$, $v_2a = x_2, \ldots, v_na = x_n$.

Egy A gyűrű P ideálja primitív, ha A/P primitív gyűrű [17]. Mármost A-ban a J *Jacobson*-féle radikál az összes primitív ideál metszete. A/J radikálmentes, és primitív gyűrűknek egy szubdirekt összege. A radikálmentes gyűrűket féligegyszerűnek hívják. A továbbiakban radikálon és féligegyszerűségen mindig a *Jacobson*-félét értjük. (Duális módon értelmezhető a balprimitívség és balradikál, az utóbbi egybeesik a radikállal, azaz a jobbradikállal, ellenben még tisztázatlan a primitívség és a balprimitívség viszonya). Egy A gyűrű pontosan akkor féligegyszerű, ha minden $a \in A (a \neq 0)$ elemhez van olyan M_a egyszerű A-jobbmodulus, hogy $M_a \cdot a \neq 0$. Az olyan M egyszerű

A-jobbmodulusok, amelyekre $MA = M$, A-izomorfok az olyan $(A/R)^+$ A-jobbmodulusokkal, amelyeknél létezik olyan $a \in A$ elem, hogy tetszőleges $b \in A$ esetén $b - ab \in R$. Az olyan R jobbideálokat A-ban, amelyeknek van $(1-c)A$ alakú része $(c \in A)$, modulárisnak nevezzük. J éppen az összes moduláris maximális jobbideál metszete. Minden moduláris maximális jobbideál egyszersmind maximális moduláris jobbideál és viszont. Akkor és csak akkor $(1-a)A = A$, ha van olyan $b \in A$, hogy $b - ab = -a$, azaz $a + b - ab = 0$, minthogy $x = ax + (1-a)x = -(b-ab)x + (1-a)x \in (1-a)A$. Egy R jobbideál kvázireguláris, ha minden $r \in R$ elemhez van olyan $r' \in R$, hogy $r + r' - rr' = 0$. Ekkor szükségképpen $r' + r - r'r = 0$, $r'r = rr'$. Továbbá J éppen az összes kvázireguláris jobbideál összege és maga is kvázireguláris. (Igazolható, hogy az $x \circ y = x + y - xy$ művelet asszociatív, és J elemei ezzel a művelettel csoportot alkotnak, amelynek O az egységeleme. Ennek a csoportnak egy speciális esetét tárgyaljuk a 11. §-ban, ahol egy általánosított-feloldható torziócsoport szerepel.) Minthogy $e^2 = e$ és $e + x - ex = 0$ esetén $e = e - (e - e^2) + (e - e^2)x = e(e + x - ex) = e \cdot O = O$, ezért J egyetlen idempotens eleme O.

Egy P ideál A-ban prímideál, ha $B \cdot C \subseteq P$ esetén $B \subseteq P$ vagy $C \subseteq P$, ahol B és C ideál A-ban. Egy A gyűrű prímgyűrű, ha benne (O) prímideál. A-ban az összes prímideál metszete a *McCoy*-féle radikál [25]. Ez tetszőleges gyűrűkben egybeesik a *Baer*-féle radikállal, amely az A gyűrű összes olyan B nil ideáljának a metszete, amelyekre A/B nem tartalmaz nilpotens jobbideálokat [2], [17]. Legyen A-ban N_1 az összes nilpotens jobbideál összege és ha N_α már definiálva van, $N_{\alpha+1}/N_\alpha$ az A/N_α nilpotens jobbideáljainak összege és limesz β rendszámnál legyen $N_\beta = \bigcup_{\alpha < \beta} N_\alpha$. Van olyan γ rendszám, hogy $N_\gamma = N_{\gamma+1}$. A *Baer—McCoy*-féle radikál A-ban mármost éppen ez az N_γ ideál, amit alsó nilradikálnak is neveznek.

Egy A gyűrűben a *Levitzki*-féle radikál az összes lokálisan nilpotens ideál K összege, ahol egy B gyűrűt akkor nevezünk lokálisan nilpotensnek, ha minden végesen generált részgyűrű nilpotens [23]. Az A/K-nak a *Levitzki*-féle radikálja O. A-ban az összes nilideál összege az U felső nilradikál.

Egy A-gyűrű B ideálja *Brown—McCoy* [4] szerint reguláris, ha A/B egységelemes egyszerű gyűrű. Az A gyűrű G *Brown—McCoy*-féle radikálja [4] az összes reguláris maximális ideál metszete. Különben G az összes olyan a elem halmaza, amelyekre (a) minden b eleme reguláris abban az értelemben, hogy $b \in A(1-b)A + (1-b)A$. Ezért $G \supseteq J \supseteq U \supseteq K \supseteq N_\gamma = B$.

Egy A gyűrű Z *Fuchs*-féle zéróid radikálja [10] a következőképpen definiálható. A-nak egy B ideálját l-zérófaktor ideálnak nevezzük, ha B minden $\neq 0$ eleme baloldali zérusosztó. Egy C ideált l-zéróid ideálnak hívunk, ha bármely B l-zérófaktor ideál mellett $B + C$ az A-nak l-zérófaktor ideálja. Az összes l-zéróid ideál Z_l összege A-nak maximális l-zéróid ideálja. Hasonlóan értelmezzük a bal-jobb duális r-zérófaktor, ill. r-zéróid ideált és a Z_r ideált. Mármost Z Fuchs-féle radikálja $Z = Z_l \cap Z_r$. (Létezik ugyanis olyan A, hogy $Z_l \neq Z_r$). Z_l az összes S_α maximális l-zérófaktor ideál metszete, és bármelyik ilyen S_α szükségképpen prímideál [10].

Végül újra megemlítjük, hogy egy A gyűrűt *Artin*-féle gyűrűnek nevezünk akkor, ha a jobbideáloknak bármely halmazában van minimális, vagy ekvivalens feltétel: ha bármely $R_1 \supseteq R_2 \supseteq R_3 \supseteq \cdots$ fogyó jobbideállánc véges számú lépésben megszakad.

Egy A gyűrűt MHR-gyűrűnek (illetve MHI-gyűrűnek) nevezünk, ha a főjobbideálok (illetve főideáloknak) bármely halmazában van minimális. Továbbá, egy A gyűrűt MH_1R-gyűrűnek nevezünk, ha minden olyan $R_1 \supseteq R_2 \supseteq \cdots$ fogyó jobbideállánc megszakad, ahol R_1 (az első tag) főjobbideál (ill. főjobbideál része). Nyilván minden *Artin*-féle gyűrű MH_1R-gyűrű és minden MH_1R-gyűrű MHR-gyűrű. Hogy ezek az osztályok egymásnál valódi módon bővebbek, szintén kimutatható. Az *Artin*-féle gyűrűkkel kapcsolatban az [1], [11], [12], [14], [16], [17], [37] és [38] művekre utalunk. Az *Artin*-féle gyűrűk a kommutatív testek felett vett végesrangú algebráknak (hiperkomplex rendszereknek) fontos általánosításai.

Más alapfogalmakat illetőleg az [1], [7], [11], [17], [21] és [28] tankönyvekre hivatkozunk. A ferdetestek feletti duális vektortereknek, az ezekben definiálható bizonyos fontos topológiának, és ennek a $\neq 0$ talpú primitív gyűrűk *Jacobson*-féle struktúratételével való kapcsolatának részletes vizsgálatát az olvasó a [17] könyvben találhatja meg.

2. §. Példák és előzetes eredmények

Tárgyalásainkat néhány érdekes gyűrű explicit megadásával és fontos elemi tények ismertetésével kezdjük.

Első példánk azt mutatja, hogy létezik olyan MHR-gyűrű, amely nem *Artin*-féle.

2.1. Példa. Legyen az A gyűrű végtelen sok A_α *Artin*-féle gyűrűnek a gyűrűelméleti direkt összege. A-ban még a kétoldali ideálok minimum-feltétele sem teljesül, így A nem is *Artin*-féle. Minthogy minden $a \in A$ elem véges sok A_α *Artin*-féle gyűrű direkt összegében van, A nyilván MHR-gyűrű.

Most pedig olyan egyszerű gyűrűt konstruálunk, amely nem *Artin*-féle, de MHR-gyűrű, és amelynek nincs egységeleme.

2.2. Példa. Legyen az A gyűrű izomorf a K_0 racionális számtest felett vett algebrával, amelynek az e_{ij} báziselemeire $e_{ij}e_{kl} = \delta_{jk}e_{il}(1 \leqq i, j, k, l \in I)$

teljesül. Tekintsük az A gyűrűt a K_0 operátortartomány nélkül. Legyen $R_i = (e_{ii})_r$. Belátható, hogy R_i az A-nak minimális jobbideálja, és hogy A az összes R_i direkt összege. Minthogy A mint A-jobbmodulus teljesen reducibilis, A egy MHR-gyűrű. A nem lehet Artin-féle, mert végtelen sok jobbideáljának a diszkrét direkt összege. Ha B kétoldali ideál A-ban és $0 \neq b = \sum_{i,j} r_{ij} e_{ij} \in B$, ahol az összeg véges és pl. $r_{kl} \neq 0 (r_{ij} \in K_0)$, akkor $r_{kl}^{-1} e_{mk} b e_{ln} = e_{mn} \in B$ mutatja, hogy $B = A$, azaz A ideálmentes, sőt $e_{11}^2 = e_{11} \neq 0$ miatt egyszerű gyűrű.

A továbbiakban olyan MHR-gyűrű létezését mutatjuk meg, amely nem MHL-gyűrű.[4]

2.3. Példa. Legyen az $S^{(n)}$ gyűrű izomorf a 2. 2. Példa A gyűrűjének az olyan e_{ij} elemekkel generált részgyűrűjével, ahol a j indexek egy rögzített n korlátnál nem nagyobbak. Az operátor nélküli $S^{(n)}$ gyűrűben sem a jobbideálok, sem a balideálok minimum-feltétele nem teljesül. Belátható, hogy $S^{(n)}$ végtelen sok minimális $R_i^{(n)} = (e_{ii})_r$ jobbideáljának a diszkrét direkt öszszege, tehát MHR-gyűrű, ellenben nem MHL-gyűrű, mert $e_{ij} \cdot e_{n+1\,k} = 0$ miatt a $(2^m e_{n+1\,k})_l$ főbalideálok $(m = 1, 2, 3, \ldots)$ végtelen fogyó láncot alkotnak $S^{(n)}$-ben.

MEGJEGYZÉS. Legyen a $T^{(m,n)}$ gyűrű izomorf a 2. 3. Példában szereplő $S^{(n)}$ gyűrűnek az olyan e_{ij} elemekkel generált részgyűrűjével, amelyekre $m > n \geqq 1, i \leqq m, j \leqq n (m, n, i, j \in I)$. Igazolható, hogy $T^{(m,k)}$-ben létezik végtelen fogyó balideállánc, bár $T^{(m,n)}$ Artin-féle. A nevezetes Hopkins-féle példa lényegében a $T^{(2,1)}$ gyűrű.

Most megmutatjuk olyan MHR-gyűrű létezését, amely nem MH_1R-gyűrű és amelynek a radikálja nem nilpotens, hanem nilideál.

2.4. Példa. Legyen $A = \{e, a_1, a_2, a_3, \ldots\}$, ahol $a_i + a_i = e + e = ea_i + a_i = a_i e + a_i = e^2 + e = a_i^{i+1} = a_i a_j + \delta_{ij} a_i^2 = a_j a_i + \delta_{ij} a_i^2 = 0$. Nyilván $A = (e)_r$, és minthogy a $B_i = (a_i, a_{i+1}, a_{i+2}, \ldots)_r$, jobbideálok végtelen fogyó láncot alkotnak, A nem MH_1R-gyűrű. A-ban a J-radikál, amelyet az összes a_i generál, pontosan azokból az elemekből áll, amelyeknek nincs reciproka az e egységelemre vonatkozólag. Minthogy pedig $(a_i)_r$ véges, A valóban MHR-gyűrű, hiszen $x \notin J$ esetén $(x)_r = A \cdot J$ az A kommutatív volta miatt nilideál, amely nem nilpotens, mert $0 \neq a_n^n \in J^n (1 \leqq n \in I)$.

Ezek a példák szemléltetően mutatják, hogy az MHR-gyűrűknél az *Artin*-féle gyűrűkhöz képest mind eltérések, mind pedig hasonlóságok előfordulnak. Az MHR-gyűrűk olyan sajátos közbülső osztályt alkotnak a végességi feltételek nélküli tetszőleges gyűrűk és az *Artin*-féle gyűrűk között, amelynek a részletvizsgálatokat tekintve még sok nyitott problémája van a

[4] Azaz A-ban nem teljesül a főbalideáloknak a minimum-feltétele.

radikálnak és a primitív gyűrűknek a JACOBSON által jól kidolgozott elméletét figyelembe véve is, és az eredmények egy része szinte meglepő. Az állítások, amelyeket ebben a §-ban ismertetünk, egyrészt nem illenek be természetes módon a további speciális §-okba, másrészt általánosságuknál fogva későbbi §-okban alkalmazásra kerülnek, harmadsorban pedig általában nem is új, hanem többnyire ismert eredmények, vagy pedig nem mély eredmények. A további §-okban viszont speciális MHR-gyűrűket igyekszünk részletekben inkább elmélyedően vizsgálni.

2.5. Állítás. MHR-gyűrű bármely homomorf képe is MHR-gyűrű. MHR-gyűrűk diszkrét direkt összege szintén MHR-gyűrű. MHR-gyűrű bármely jobbideáljában van minimális jobbideál. Egy R minimális jobbideál egy A gyűrűben vagy $R=eA(e^2=e)$ alakú, vagy pedig $R^2=0$. Bármely *Artin*-féle gyűrűnek a *Schreier*-féle bővítése egy MHR-gyűrűvel szintén MHR-gyűrű. Ha A tetszőleges gyűrű, amelyben O az egyetlen nilpotens jobbideál, akkor A-nak az A_1 talpa és $\bar{A}_1$ baltalpa egybeesik. Ha A egy MHR-gyűrű, amelynek A_α az α-adik talpa, ahol α tetszőleges rendszám, akkor létezik olyan γ rendszám, hogy $A_\gamma=A$.

Bizonyítása részben nyilvánvaló, részben közismert, részben pedig elvégezhető a [17] könyv és a [2] cikk felhasználásával és megszokott módszerekkel.

2.6. Állítás. Ha M egy teljesen reducibilis A-jobbmodulus, akkor M bármely homomorf képe és részmodulusa is teljesen reducibilis. Minimális A-részmodulusok bármely rendszerének összege előállítható bizonyos minimális részmodulusok diszkrét direkt összegeként. Bármely A féligegyszerű MHR-gyűrű mint A-jobbmodulus teljesen reducibilis, éspedig idempotens minimális jobbideálok diszkrét direkt összege. Ha A tetszőleges gyűrű, amelynek a J radikálja nilideál, és ha $f^2-f\in J$, akkor van olyan $e\in A$, hogy $e-f\in J$ és $e^2=e$. Minden MHR-gyűrűben a J radikál nilideál.

Bizonyítás. Az első két részállítás közismert [17]. Legyen mármost A féligegyszerű MHR-gyűrű. $A=\bigcup_{a\in A}(a)_r$ miatt elég igazolni, hogy minden $(a)_r$ mint A-jobbmodulus, teljesen reducibilis. Legyen $e_1A\neq 0$ minimális jobbideálja A-nak $(a)_r$-ban. Ámde elemi bizonyítással belátható, hogy $(a)_r=e_1A\oplus\oplus(a-e_1a)_r$ érvényes. Ha $(b)_r=(a-e_1a)_r\neq 0$, legyen $e_2A\neq 0$ az A-nak minimális $(b)_r$-ben fekvő jobbideálja, amelyre $(b)_r=e_2A\oplus(b-e_2b)_r$. Legyen $c=b-e_2b\neq 0$ esetén e_3A az A-nak minimális $(c)_r$-beli jobbideálja. Minthogy az $(a)_r\supset(b)_r\supset(c)_r\supset\cdots$ fogyó főjobbideállánc véges, van olyan m természetes szám, hogy $(a)_r=e_1A\oplus e_2A\oplus\cdots\oplus e_mA$, ami bizonyítandó volt. Az utolsóelőtti részállítás közismert [17].

Legyen J az A tetszőleges MHR-gyűrű radikálja, és $x \in J$. Van olyan m, hogy $(x^m)_r = (x^{m+1})_r$, tehát $x^m = nx^{m+1} + x^{m+1}y = x^m z$, ahol $z = nx + xy (n \in I, y \in A)$. Nyilván $z \in J$. Ha $z + z_1 - zz_1 = 0$, akkor $x^m = x^m - x^m \cdot (z + z_1 - zz_1) = (x^m - x^m z) - (x^m - x^m z) z_1 = 0$. Tehát x nilpotens elem, és J nilideál.

2.7. Állítás. Legyen A tetszőleges MHR-gyűrű, J az A radikálja, A_α az A-nak α-adik talpa, ahol α rendszám. Ekkor $A_\alpha \cdot J^\alpha = 0$. Ha speciálisan $\alpha = n$, ahol n természetes szám, és ha A minden elemének van relatív jobbegységeleme, akkor A_n nem szűkebb J^n-nek A-beli balannullátoránál.

2.8. *Példa.* Legyen $B(p) = \{x_p, y_p\}$, ahol $px_p = py_p = x_p^2 = y_p x_p = y_p^2 - y_p = x_p y_p - x_p = 0$ és legyen $A = \sum_p \oplus B_p$ kiterjesztve az összes különböző p prímszámra. Világos, hogy A-nak sem bal-, sem jobbegységeleme nem létezik, továbbá minden elemnek van relatív jobbegységeleme, de pl. x_p-nek nincs relatív balegységeleme.

Bizonyítás. A 2.7. állítás igazolásához látnunk kell, hogy a-nak pontosan akkor van relatív jobbegységeleme A-ban, ha $a \in aA$. A két részállítás további belátásához elég a [2] cikkre és a 2.6. állításra hivatkozni.

2.8. Állítás. Ha A egy MHR-gyűrű, amelynek J a radikálja, akkor van olyan γ rendszám, hogy $J^{\gamma+1} = 0$. (Tehát J ezért is nilideál.)

Bizonyítás. Létezik a 2.5. állítás szerint olyan γ rendszám, hogy $A_\gamma = A$. De a 2.7. állítás szerint $A_\gamma \cdot J^\gamma = 0$, ezért $J^{\gamma+1} = J \cdot J^\gamma \subseteq A \cdot J^\gamma = A_\gamma \cdot J^\gamma = 0$. Ebből J nilideál volta folyik, transzfinit indukcióval könnyen újra belátható [2].

2.9. Állítás. Ha A tetszőleges MHR-gyűrű, és $e^2 = e \in A$ akkor eAe, illetve $(1-e)A(1-e)$ szintén MHR-gyűrű. Ha A nilpotens MH_1R-gyűrű, akkor A-nak bármely B részgyűrűje is MH_1R-gyűrű.

Bizonyítás. Alkossanak az eAe gyűrűnek az $(ea_n e)_r$ főjobbideáljai fogyó láncot, és legyen $R_n = (ea_n e)_r + ea_n eA$, amely nyilván A-nak az $ea_n e$ által generált főjobbideálja. Világos, hogy $m \leq n$ esetén $R_n \subseteq R_m$. Minthogy pedig A egy MHR-gyűrű, van olyan k, hogy $R_k = R_{k+1} = R_{k+2} = \cdots$ Ekkor azonban $eR_k e = eR_{k+1} e = eR_{k+2} e = \cdots$, és így $eR_j e = (ea_j e)_r + ea_j e \cdot eAe = (ea_j e)$ miatt $(ea_k e)_r = (ea_{k+1} e)_r = \cdots$. Tehát eAe valóban MHR-gyűrű. Hasonlóan vizsgálandó az $(1-e)A(1-e)$ részgyűrű esete is.

Legyen végül B egy A nilpotens MH_1R-gyűrű részgyűrűje, $A^n = 0$, $A^{n-1} \neq 0$ és L_k az A^k balannullátor ideálja. Nyilván teljesül $0 \subseteq L_1 \subseteq L_2 \subseteq \cdots \cdots \subseteq L_{n-1} = A$. Legyen továbbá $R_1 \supseteq R_2 \subseteq R_3 \subseteq \cdots$ a B jobbideáljainak olyan ogyó lánca, ahol R_1 a B egy főjobbideáljának a része, azaz $R_1 \subseteq I \cdot a + aB$. Így $R_1 \subseteq I \cdot a + aA$, és legyen $a \in L_s$, tehát $R_m \subseteq R_1 \subseteq L_s$ (m természetes szám és $1 \leqq s \leqq n-1$). Tegyük fel, hogy $R_1 \supset R_2 \supset R_3 \supset \cdots$ végtelen fogyó lánc volna, amiből ellentmondást vezetünk le. Legyen $R_m^* = R_m + R_m A$, amely A-nak $(a)_r$-ben fekvő jobbideálja. Minthogy A egy MH_1R-gyűrű, van olyan m_1 index, hogy $R_{m_1}^* = R_{m_1+1}^* = R_{m_1+2}^* = \cdots$. Továbbá L_k definíciójából folyik, hogy $L_s A \subseteq L_{s-1}$, mert $(L_s A) A^{s-1} = 0$. Ezért $R_m A \subseteq L_s A \subseteq L_{s-1}$ miatt $R_{m_1} \equiv R_{m_1+1} \equiv \equiv R_{m_1+2} \equiv \cdots (\text{mod } L_{s-1}^+)$. De A^+ alcsoporthálója moduláris, ezért $R_{m_1} \cap L_{s-1} \supset \supset R_{m_1+1} \cap L_{s-1} \supset \cdots$ szükségképpen végtelen fogyó jobbideállánca B-nek, amely $(a)_r \cap L_{s-1}$ része. Véges számú ismételt eljárás után végül megadható volna a B gyűrűnek olyan végtelen fogyó $Q_1 \supset Q_2 \supset Q_3 \supset \cdots$ jobbideállánca, amely benne van az $(Ia + aB) \cap L_{s-1}$ metszetben. Minthogy pedig $Q_i A \subseteq L_1 A = 0$, mindegyik Q_i jobbideál A-ban. Van tehát olyan m_j index az MH_1R-gyűrű definíciója szerint, hogy $Q_{m_j} = Q_{m_j+1} = Q_{m_j+2} = \cdots$, ami ellentmond annak, hogy $Q_1 \supset Q_2 \supset Q_3 \supset \cdots$ végtelen fogyó lánc. Minthogy pedig a tetszőlegesen választott $R_1 \supseteq R_2 \supseteq R_3 \supseteq \cdots$ lánc sem végtelen fogyó, a B részgyűrű nyilván MH_1R-gyűrű.

3. §. Egyszerű *MHR*-gyűrűk és primitív *MHR*-gyűrűk

Az előző § anyaga után megkezdjük az *MHR*-gyűrűk speciális részletvizsgálatait. Előzőleg láttuk, hogy létezik olyan egyszerű *MHR*-gyűrű, amely nem egységelemes, tehát nem *Artin*-féle. A *Chevalley—Jacobson*-féle sűrűségi tételt, továbbá DIEUDONNÉ, LITOFF, BAER, WOLFSON és JACOBSON vizsgálatait — amelyek a duális vektorterekben értelmezhető sajátos topológia révén szolgáltatnak mélyrehatóbb gyűrűelméleti betekintést—, valamint a *Jacobson*-féle radikál és primitív gyűrűk elméletét felhasználva többoldalú jellemzés adható az egyszerű *MHR*-gyűrűkre. Hasonlóan az egyszerű *Artin*-féle gyűrűkhöz, egybeesik az egyszerű *MHR*-gyűrűk osztálya mind primitív, mind pedig a balprimitív *MHR*-gyűrűk osztályával. Sőt, ez az osztály pontosan azokból a nem zérus talpú gyűrűkből áll, amelyekben bármely végesen generált részgyűrű része egy ferdetest feletti teljes matrixgyűrűnek, amely szintén a gyűrű részgyűrűje, és az említett ferdetest az egyszerű *MHR*-gyűrűtől függ, a végesen generált részgyűrűtől pedig nem függ. Nem *MHR*-gyűrűkre nézve az még nyitott probléma, hogy minden primitív gyűrű balprimitív-e. Továbbá — mint igazoltuk — az *MHR* radikálgyűrűk pontosan akkor ideálmentesek, mint amikor az *Artin*-féle radikálgyűrűk is ideálmentesek, ti. ha $|A| = p$ és $A^2 = 0$.

Az egyszerű *MHR*-gyűrűknél fellépő viszonyok mérlegelésére említünk egy példát egyszerű, egységelemes nem *MHR*-gyűrűre, minthogy az előző §-ban már láttunk egyszerű *MHR*-gyűrűt, amely nem egységelemes.

3.1. Példa. Legyen F ferdetest, és V olyan balvektortér F felett, amelyre rang ${}_F V = \aleph_0$. Legyen A a V összes F-endomorfizmusának a gyűrűje, amely jobboldali operátortartomány V-re nézve. Legyen A_0 az összes olyan $a \in A$ halmaza, amelyre a $V \cdot a$ képtér végesrangú. A_0 kétoldali ideál A-ban, és $0 \neq A_0 \neq A$ miatt A nem egyszerű.[5] A-val együtt A/A_0 is egységelemes, továbbá A/A_0 egyszerű gyűrű [17] szerint. A/A_0 talpa O, így A/A_0 nem MHR-gyűrű. Maga az A gyűrű pedig olyan nem egyszerű gyűrű, amely primitív.

3.2. **Tétel.** A prímszámrendű zérógyűrűk az összes ideálmentes MHR-radikálgyűrűk.

Bizonyítás. Legyen A ideálmentes MHR radikálgyűrű. Ekkor $A = J$, ahol J a radikál, továbbá $A = A_1$, ahol A_1 az A talpa, mert $A_1 \neq 0$ és A idálmentes. Ezért $A^2 = A_1 \cdot J = 0$ a 2.7. állítás szerint, és $|A| = p$, mert ellenkező esetben léteznének nem-triviális ideálok. Megfordítva, bármely prímszámrendű zérógyűrű ideálmentes és MHR-radikálgyűrű.

Hivatkozva JACOBSON [17] könyve IV. fejezetének definícióira és eredményeire, kimondható a következő

3.3. **Tétel.** Egy tetszőleges A gyűrűre nézve ekvivalensek az alábbi állítások:

a) A egyszerű MHR-gyűrű;

b) A olyan MHR-gyűrű, amelyben (O) prímideál;

c) A primitív MHR-gyűrű;

d) A izomorf egy ferdetest feletti balvektortér végesrangú lineáris transzformációinak egy sűrű részgyűrűjével;

e) megadhatók olyan duális (V, V') vektorterek egy F ferdetest felett, hogy A izomorf a V tér összes önmagába való, V'-topológiában folytonos, végesrangú lineáris transzformációjának a gyűrűjével;

f) A-nak a talpa $\neq 0$, és A bármely végesen generált részgyűrűje része A egy *Artin*-féle egyszerű részgyűrűjének;

g) A-nak a talpa $\neq 0$, és A bármely két elemmel generált részgyűrűje része A egy *Artin*-féle egyszerű részgyűrűjének;

h) A egyszerű és a talpa $\neq 0$.

Bizonyítás.

a)-ból folyik b). Ha teljesül a) és $B_1 \cdot B_2 = 0$ az A-nak $B_1 \neq 0$, $B_2 \neq 0$ ideáljaira, akkor $A = B_1 = B_2$, tehát $A^2 = 0$, amit kizártunk. Ezért A-ban (0) prímideál és így érvényes b).

b)-ből folyik c). Teljesüljön b) és legyen R az A tetszőleges minimális jobbideálja és B_1 az A-nak az R által generált kétoldali ideálja. Világos, hogy

[5] Igazolható, hogy A olyan egységelemes *Neumann*-reguláris gyűrű, amelyben a *Fuchs*-felé zéróid radikál A_0, tehát $\neq 0$ (Vö. [10] érvénytelen megjegyzésével).

A-ban R-nek és B_1-nek a jobboldali annullátorai megegyeznek, és ezt az annullátort, amely kétoldali ideál, B_2-vel jelöljük. Ámde $B_1 \cdot B_2 = 0$ csak úgy lehet $B_1 \neq 0$ és a b) feltétel miatt, ha $B_2 = 0$. Ez pedig azt jelenti, hogy A hűen reprezentálható az R irreducibilis A-jobbmodulusban, azaz A primitív MHR-gyűrű. Így valóban teljesül c) is.

c)-ből folyik d). JACOBSON sűrűségi tételét alkalmazva kapjuk A előállítását egy F ferdetest feletti V vektortér lineáris transzformációinak egy sűrű részgyűrűjeként. Továbbá A mint féligegyszerű MHR-gyűrű, a 2.6. állítás szerint idempotens minimális $eA(e^2 = e)$ jobbideálok diszkrét direkt összege. Mármost [17] szerint az e elem elsőrangú lineáris transzformációt indukál V-ben, ezért A minden eleme végesrangú lineáris transzformációnak felel meg.

d)-ből folyik e). Ez JACOBSON [17] könyve alapján belátható.

e)-ből folyik f). Ez éppen a *Dieudonné—Litoff—Jacobson*-féle eredmény [17].

f)-ből folyik g). Ez triviális.

g)-ből folyik h). Ha teljesül g) és $b \in A$, $0 \neq a \in A$ tetszőleges elemek, akkor van A-nak olyan S *Artin*-féle egyszerű részgyűrűje, amelynek az $\{a, b\}$ részgyűrű része. S egyszerűsége és egységelemének létezése miatt $S = S \cdot a \cdot S$, tehát létezik olyan $s_1^{(j)}, s_2^{(k)} \in S$ elemrendszer, hogy $b = \sum_{j,k} s_1^{(j)} a s_2^{(k)}$, ami azt jelenti b tetszőleges megválasztása miatt, hogy az A-ban generált (a) főideál éppen A, tehát A egy $\neq 0$ talpú egyszerű gyűrű. Ezért teljesül h).

h)-ból folyik a). Teljesüljön h). Ha $A_1 \neq 0$ az A talpa, akkor $A_1 = A$, mert A egyszerű. Ezért A, minthogy jobbról teljesen reducibilis, MHR-gyűrű, ami éppen az a) állítás.

3.4. Állítás. A 3.3. tételnek érvényes egy bal-jobb duálisa is egyszerű MHL-gyűrűkre vonatkozólag, továbbá a 3.3. tétel a), b), $\cdots$, h) állítása ekvivalensek ennek a duális tételnek az a′), b′), $\cdots$, h′) állításaival. Ezért az MHR- (illetve MHL)-gyűrűkön belül ekvivalens egymással a primitívség és balprimitívség. MHR-gyűrűkön belül mind a prímideálok, mind a primitív ideálok, mind pedig az $A = A^2 + M$ feltételeknek eleget tevő M maximális ideálok osztálya megegyezik.

Bizonyítás. Alkalmazva a 3.3. tételre a gyűrűelméleti bal-jobb dualitást, elég igazolni, hogy bármely egyszerű MHR-gyűrű MHL-gyűrű is. Ez pedig a 2.5. állítás szerint igaz, mert az A_1 talp és $\bar{A}_1$ baltalp egyaránt maga az A gyűrű.[6] A többi részállítás folyik a 3.3. tételből, mert A/M pontosan akkor egyszerű, ha M maximális és $A^2 \nsubseteq M$, azaz $A = A^2 + M$.

[6] Lásd pl. JACOBSON [17] könyve 65. oldal 1. tételt

Megjegyezzük, hogy egyszerű *MHR*-gyűrűnek az összes balideálját és összes jobbideálját a duális vektorterek segítségével kanonikus alakban lehet leírni [17].

4. §. Féligegyszerű *MHR*-gyűrűk

Ismeretes, hogy bármely féligegyszerű gyűrű primitív gyűrűknek egy szubdirekt összege és megfordítva. Ebben a §-ban, a féligegyszerű *MHR*-gyűrűk speciális osztályát vizsgálva az összes féligegyszerű gyűrű közt, általánosítani fogjuk mind a *Noether*-féle kritériumot, mind pedig a *Wedderburn—Artin*-féle első struktúratételt az *Artin*-féle gyűrűk esetéről az *MHR*-gyűrűk esetére [38]. Ezekben az általánosításokban számossági kikötések az *Artin*-féle gyűrűkhöz képest lényegében nem szerepelnek. Csupán csak az előző §-ban szereplő és a *Wedderburn—Artin*-féle második struktúratételt általánosító 3. 3. tétellel kapcsolatban kell megemlíteni, hogy az egyszerű *MHR*-gyűrűk c) állítás (lásd 3. 3. tételt!) szerinti jellemzésénél a gyűrű elemei olyan $\mathfrak{m} \times \mathfrak{m}$ típusú matrixokkal reprezentálhatók ($\mathfrak{m}$ tetszőleges számosság), amelyek mindegyikében csak véges sok oszlopvektor $\neq 0$. Továbbá azt is megemlítjük, hogy a tetszőleges féligegyszerű gyűrűkről szóló szubdirekt előállítás *MHR*-gyűrűk esetében mindig helyettesíthető diszkrét direkt összegként való előállítással, amelynek egyszerű ideáljai abszolút egyértelműen meghatározottak. Ebben a §-ban speciális féligegyszerű *MHR*-gyűrűket is tárgyalunk.

4. 1. Állítás. Egy A gyűrű akkor és csak akkor féligegyszerű *MHR*-gyűrű, ha A idempotens minimális jobbideáloknak a diszkrét direkt összege. Egy A gyűrű akkor és csak akkor féligegyszerű *MHR*-gyűrű, ha abszolút egyértelműen meghatározott egyszerű *MHR*-gyűrűknek a gyűrűelméleti diszkrét direkt összege.

Bizonyítás. Az első részállítás egyik felét a 2. 6. állítással kapcsolatban már igazoltuk. Hogy a másik fele, ti. a megfordítás is érvényes, belátható lesz a második részállítás igazolásával. Ha ugyanis A idempotens minimális jobbideálok diszkrét direkt összege, akkor egy rögzített minimális jobbideál A-homomorf képe vagy O, vagy izomorf kép. Osszuk be A minimális jobbideáljait A-izomorf jobbideálok páronként idegen K_α osztályaiba. Mint ismeretes, egy K_α osztályba eső minimális jobbideálok S_α összege egyszerű gyűrű, és $\alpha \neq \beta$ esetén $S_\alpha S_\beta = S_\beta S_\alpha = 0$. Minthogy pedig $A = \sum_\alpha{}' \oplus S_\alpha$, A kétoldalról is teljesen reducibilis. A-nak mint A-jobbmodulusnak pedig éppen az S_α ideálok lesznek a homogén komponensei. Ha ármost J az A radikálja, akkor J az A-nak gyűrűelméletileg is direkt összeadandója, hiszen A mint (A, A)-duplamodulus teljesen reducibilis. Ezért J mint homomorf kép, idempotens minimális jobbideálok összege lévén, szükségképpen O, tehát A féligegyszerű és nyilván MHR-gyűrű, mert jobbról teljesen reducibilis. Így az első részállítást teljesen igazoltuk. Lényegében már csak a második részállítás egyértelműségéről szóló kijelentése bizonyítandó. Ez viszont $S_\alpha^2 = S_\alpha$, ill. $A^2 = A$ miatt a következőképpen látható be. Ha $A = \sum_\alpha \oplus S_\alpha$ féligegyszerű MHR-gyűrűnek $A = \sum_\beta \oplus T_\beta$ egy másik felbontása egyszerű ideálok gyűrűelméleti diszkrét direkt összegére, akkor $S_\alpha = \sum_\beta S_\alpha T_\beta$ miatt létezik egy egyértelmű $\alpha \to \alpha' = \beta$ leképezés az $[\ldots, \alpha, \ldots]$ indexhalmazról a $[\ldots, \beta, \ldots]$ indexhalmazba, ahol $S_\alpha T_\gamma = \delta_{\gamma\alpha'} S_\alpha$ egyértelműen meghatározza S_α egyszerűsége miatt az $\alpha \to \alpha' = \beta$ leképezést. Hasonlóan megadható egy $\beta \to \beta' = \alpha$ egyértelmű leképezés is bizonyos α indexek halmazára. Ezért a két indexhalmaz számossága megegyezik a halmazelméleti ekvivalenciatétel alapján. $S_\alpha = S_\alpha T_{\alpha'} \neq 0$ és $S_\alpha \subseteq T_{\alpha'}$, ami az abszolút egyértelműséget mutatja.

4.2. Állítás. Jobbideálmentes gyűrű vagy prímszámrendű zérógyűrű, vagy ferdetest (SZELE [36]). Nilpotens elem nélküli MHR-gyűrű ferdetestek gyűrűelméleti diszkrét direkt összege (GERCSIKOV).[7] Zérusosztómentes MHR-gyűrű ferdetest, így egyszerű. (Vö. PEÁK [27]). Kommutatív féligegyszerű MHR-gyűrű testek diszkrét direkt összege. (Vö. DEDEKIND [6]). Féligegyszerű MHR-gyűrű pontosan akkor *Artin*-féle, ha van féloldali egységeleme.

MEGJEGYZÉSEK. Az első részállítás, SZELE tétele [36], folyik a *Wedderburn—Artin*-féle struktúratételekből, de adunk az alábbiakban rövid elemi bizonyítást is. A harmadik részállítással kapcsolatban megemlítendő PEÁK ISTVÁN igen érdekes [27] félcsoportelméleti cikke, amely többek közt felveti SZENDREI JÁNOS egy problémáját: melyek az összes zérusosztómentes egyszerű gyűrűk. Megoldásként az MHR-gyűrűk osztályán belül csak a ferdetesteket kapjuk. Léteznek viszont olyan nemkommutatív zérusosztómentes gyűrűk, amelyek MALCEV vizsgálata [24] szerint nem ágyazhatók be ferdetestbe, de P. M. COHN [5] eredménye szerint beágyazhatók zérusosztómentes egyszerű gyűrűbe (KÖRNYEI). Ez az utóbbi egyszerű gyűrű nyilván nem lehet MHR-gyűrű.

Bizonyítás. Ha A jobbideálmentes, és egy $a \neq 0$ elemre $aA \neq A$, akkor $aA = 0$, $A = \{a\}$, $A^2 = 0$, $|A| = p$. Ellenkező esetben minden $a \neq 0$ mellett $aA = A$. Ha $b \neq 0$, akkor $A = aA = a(bA) = abA$ mutatja A zérusosztómentességét. Így egyetlen $ae = a$ egyenlet és a zérusosztómentesség alapján e kétoldali egységelem, és $ax = e$ megoldhatósága, valamint az asszociatív törvény miatt A ferdetest. Ezzel SZELE tételét bebizonyítottuk.

Ha A nilpotens elem nélküli MHR-gyűrű, akkor nilideálmentes, tehát

[7] Matematicseszkij Szbornik, N. S. 7 (1940) 591—597.

féligegyszerű, A 3.3. tétel és a 4.1. tétel szerint A tartalmaz mindegyik egyszerű ideáljában egyszerű *Artin*-féle részgyűrűket, amelyek — ha nem ferdetestek — tartalmaznak $\neq 0$ nilpotens elemet. Ezért A minden egyszerű ideálja ferdetest, amivel GERCSIKOV tételét bebizonyítottuk.

Ha A zérusosztómentes MHR-gyűrű, akkor GERCSIKOV előbb igazolt tétele szerint A ferdetest. Tehát MHR-gyűrűk körében a zérusosztómentes egyszerű gyűrűk ferdetestek, ellentétben a tetszőleges gyűrűk körében levő zérusosztómentes egyszerű gyűrűkkel.

Kommutatív féligegyszerü MHR-gyűrű S_α minimális kétoldali ideálok direkt összege. S_α minden jobbideálja A-nak is jobbideálja, ezért S_α az első részállítás szerint test. Ezzel DEDEKIND tételének az általánosítását igazoltuk.

Az utolsó részállítás bizonyításához elég megmutatni, hogy ha a féligegyszerű MHR-gyűrű, amely JACOBSON ([17], 65. oldal, 1. tétel) szerint MHL-gyűrű is, balegységelemes, akkor *Artin*-féle. Legyen e a balegységelem, ami benne van véges sok $e_1A, \ldots, e_nA$ idempotens minimális jobbideál összegében, de akkor abban $A = eA$ is benne van. Ezért létezik A jobbideáljainak fősora, tehát A *Artin*-féle.

4.3. Állítás. Minden féligegyszerű MHR-gyűrű MH_1R-gyűrű és MH_1I-gyűrű is. Ha A olyan MHI-gyűrű, amely bizonyos S_α egyszerű gyűrűknek egy szubdirekt összege, akkor A bizonyos abszolút egyértelműen meghatározott $S'_\alpha(\simeq S_\alpha)$ egyszerű gyűrűknek a diszkrét direkt összege.

Bizonyítás. Elég az utolsó részállítást igazolni. $A = \bigcup_{a \in A} (a)$ miatt pedig elegendő lesz megmutatni azt, hogy (a) mint (A, A)-duplamodulus teljesen reducibilis. Legyen A az A/B_α egyszerű gyűrűknek egy szubdirekt összege, ahol $\bigcap_\alpha B_\alpha = 0$ és B_α olyan maximális ideál A-ban, amelyre $A = A^2 + B_\alpha$. Legyen $a \in A$ egy rögzített tetszőleges elem és $C_\alpha = (a) \cap B_\alpha$. Elegendő az összes olyan C_α ideált tekinteni, amelyekre $C_\alpha \neq (a)$. Ekkor $(a)/C_\alpha \simeq ((a) + B_\alpha)/B_\alpha = A/B_\alpha$ és $(a) = (a)^2 + C_\alpha$, mert $(a)^2 \subseteq C_\alpha$ esetén $((a) + B_\alpha)^2 \subseteq B_\alpha$, $A^2 \subseteq B_\alpha$, ami ki van zárva. Ezért (a) bizonyos A-egyszerű $(a)/C_\alpha$ gyűrűknek egy szubdirekt összege $\bigcap_\alpha C_\alpha = 0$ miatt. Az (a) ideálban létezik A-nak egy $(m_1) \neq 0$ minimális ideálja, amelyhez megadható olyan C_β, hogy $(m_1) \cap C_\beta = 0$, mert ellenkező esetben $(m_1) \subseteq \bigcap_\alpha C_\alpha$ volna, ami lehetetlen. De ekkor $(m_1) \oplus C_\alpha = (a)$, mert az A-egyszerű $(a)/C_\alpha$ gyűrűnek része az $((m_1) \oplus C_\alpha)/C_\alpha (\neq C_\alpha/C_\alpha)$ gyűrű. Ezzel beláttuk, hogy (a)-nak mint (A, A)-duplamodulusnak minden (m_1) minimális részmodulusa direkt összeadandója. Ha mármost $a = m_1^* + a_1$, ahol $m^* \in (m_1)$, és a_1 az egyik kiegészítő direkt összeadandó eleme, akkor $m_1^* \neq 0$, tehát $(m_1^*) = (m_1)$, ezért $(a) = (m_1) \oplus (a_1)$. Hasonlóan érvényes $(a_1) = (m_2) \oplus (a_2)$, ahol az ideálok A-ideálok és $(m_2)\neq 0$. Véges számú lépésben $(a)=$ $=(m_1)\oplus(m_2)\oplus\cdots\ominus(m_k)$ adódik, ahol (m_i) az A-nak minimális ideálja. Ezért A mint (A, A)-duplamodulus teljesen reducibilis, amit bizonyítani akartunk. Az egyértelmű előállítás igazolását ugyanis a 4. 1. tétellel kapcsolatban már elintéztük.

Mint ismeretes, KERTÉSZ ANDOR [18] és [19] cikkeiből folyik az, hogy egy A gyűrű pontosan akkor *Artin*-féle féligegyszerű gyűrű, ha balegységelemes és teljesül bizonyos ekvivalens állításoknak az egyike (pl. A jobbideáljainak a hálója komplementumos; vagy: bizonyos maximális jobbideálok metszete $(O)_r$; vagy: A egybeesik a talpával; vagy: A-t minimális jobbideáloknak bármely maximális független rendszere generálja). Világos, hogy a balegységelemes gyűrűk jobbannullátormentesek mindig, viszont végtelen sok test direkt összege, bár nem balegységelemes, mégis jobbannullátormentes, mert ez a gyűrű féligegyszerű. Jelölje A' az egységelemes gyűrűknél A-t, a nem egységelemes gyűrűknél pedig jelölje az A-nak a *Dorroh*-féle (legszűkebb egységelemes kanonikus) bővítését. Mármost KERTÉSZ ANDOR eredményének érvényes az az általánosítása, amely kimondja, hogy a jobbannullátormentes gyűrűk közt a fenti ekvivalens tulajdonságok éppen a féligegyszerű MHR-gyűrűket jellemzik, ugyanis egy jobbról teljesen reducibilis A-gyűrű pontosan akkor féligegyszerű, ha jobbannullátormentes, hiszen $A_1\cdot J=0$ a 2.7. állítás szerint, ahol A_1 a talp és J a radikál (Vö. [33], különösen a megjegyzésekkel). Érvényes tehát a

4.4. **Tétel.** Egy A jobbannullátormentes gyűrűre nézve ekvivalensek az alábbi állítások:

a) A féligegyszerű MHR-gyűrű;

b) A idempotens minimális jobbideáloknak a diszkrét direkt összege;

c) A-ban a maximális jobbideálok metszete nulla, és A egy MHR-gyűrű;

e) A egybeesik az A_1 talppal;

d) A egy MH_1R-gyűrű, amelyben bizonyos moduláris maximális jobbideálok metszete $(O)_r$;

f) A bármely elemének az A'-beli jobbannullátora az A' véges sok maximális jobbideáljának a metszete;

g) A jobbideálhálója komplementumos;

h) A minden jobbideálja szerváns jobbideál;

i) A bármely olyan minimális R_α jobbideálokból álló maximális rendszerére, amelyekre $\sum_\alpha{}' \oplus R_\alpha$ létezik, $A=\sum\oplus R_\alpha$ teljesül.

Bizonyítás végett elegendő KERTÉSZ [18] cikkére hivatkozni.

5. §. A Goldman—Fuchs—Szele-féle kritérium általánosításai

Ismeretes, hogy FUCHS és SZELE [12] cikkének főtétele szerint egy A-gyűrű pontosan akkor *Artin*-féle féligegyszerű gyűrű, ha A minden jobbideálja balegységelemes. Korábban [14] cikkében — más megfogalmazásban — *Goldman* is megállapította ezt a szükséges és elegendő feltételt az *Artin*-féle féligegyszerű gyűrűkre. Ebben a §-ban ennek a tételnek több általánosítását adjuk, amelyek féligegyszerű MHR-gyűrűk vizsgálatát célozzák, és vizsgáljuk a *Neumann*-féle reguláris gyűrűknek és a féligegyszerű MHR-gyűrűknek a viszonyát is. Első tájékozódásul megemlíthető az

5. 1. **Tétel.** Egy A gyűrűre nézve ekvivalensek az alábbi állítások:

a) A féligegyszerű MHR-gyűrű;

b) A bármely végesen generált jobbideálja balegységelemes, és teljesül A végesen generált jobbideáljainak a minimum-feltétele;

c) A-nak bármely végesen generált jobbideálban fekvő jobbideálja balegységelemes;

d) A bármely főjobbideálja balegységelemes, és A egy MHR-gyűrű;

e) A-nak bármely főjobbideáljában fekvő jobbideálja balegységelemes;

f) A féligegyszerű és teljesül a végesen generált jobbideálokban fekvő jobbideálok minimum. feltétele.

Bizonyítás.

a)-ból folyik b). Az a) esetben minden a elem, ezért minden R végesen generált jobbideál benne van véges sok $e_1'', e_2'', \ldots, e_{n_2}''$ idempotenssel generált jobbideálban, ahol $e_i''A$ minimális jobbideál. Így van olyan $e_1', e_2', \ldots, e_{n_1}'$, hogy $R = e_1'A \oplus \cdots \oplus e_{n_1}'A$, ahol $e_j'A$ szintén minimális és idempotens jobbideál. Világos, hogy A'-ban teljesül a végesen generált jobbideálok minimum-feltétele, mert az R-ben van az A-jobbideáloknak véges fősora. Válasszunk most R-ben ismételt *Peirce*-féle felbontásokkal olyan e_kA idempotens minimális jobbideálokat, hogy $e_{k+1}A \subseteq (1-e_k) \cdots (1-e_2)(1-e_1)R$. Legyen most $e = 1 - (1-e_n)(1-e_{n-1}) \cdots (1-e_2)(1-e_1)$, ahol 1 természetes szám és n az eljárás lépéseinek hossza. Ekkor $e \cdot e_k = e_k$ miatt e balegységelem az $R = e_1A \oplus \cdots \oplus e_nA$ jobbideálban, tehát teljesül a b) állítás.

b)-ből folyik c). Legyen b) teljesülése esetén R az A olyan jobbideálja, amely egy $R_1 = (a_1, a_2, \ldots, a_m)_r$ végesen generált jobbideál része. Minthogy b) miatt R_1 balegységelemes, ezért R_1 főjobbideál. Továbbá, b) miatt A féligegyszerű MHR-gyűrű, hiszen $e^2 = e \in J$ esetén $e = 0$, ahol J az A radikálja. Ennélfogva $R_1 = R \oplus R^*$. Ha $e_1 = e + e^*$ ebben a felbontásban az R_1 balegységeleme, akkor $e \in R$ pedig balegységelem lesz R-ben, tehát valóban érvényes a c) állítás.

b)-ből folyik d). Ez triviális.

c)-ből folyik e). Ez is triviális.

d)-ből folyik e). Ennek bizonyítása teljesen hasonló ahhoz, mint ahogyan igazoltuk, hogy „b)-ből folyik c)".

e)-ből folyik f). Világos, hogy $e^e = e \in J$ miatt $J = e = 0$, tehát A féligegyszerű gyűrű. Legyen $R_1 \supset R_2 \supset R_3 \supset \cdots$ az A gyűrű végesen generált jobbideálokban fekvő jobbideáljainak egy végtelen fogyó lánca. Ilyen lánc nem létezhetik féligegyszerű MHR-gyűrűkben, mert azok jobbról teljesen reducibilis gyűrűk, ezért a fogyó lánc létezése miatt A nem MHR-gyűrű. De ekkor létezik egy végtelen fogyó főjobbideállánc is A-ban, legyen ez $e_1 A \supset e_2 A \supset \supset e_3 A \supset \cdots (e_i^2 = e_i)$, ugyanis e) szerint minden főjobbideál balegységelemes. Minden k természetes számra teljesül $e_1 A = e_{k+1} A \oplus \sum_{j=1}^{k} \oplus (e_j - e_{j+1}) e_j A$. Ekkor azonban létezik a $D = \sum_{j=1}^{\infty} (e_j - e_{j+1}) e_j A$ direkt összeg, amely c) feltétel szerint balegységelemes, hiszen $D \subseteq e_1 A$. Legyen e_0 egy balegységelem D-ben. Ekkor van olyan k_0 természetes szám, hogy $e_0 \in D_0 = \sum_{j=1}^{k_0} \oplus (e_j - e_{j+1}) e_j A$. Tehát $D = e_0 D \subseteq D_0$, ami lehetetlen. Ezért $R_1 \supset R_2 \supset R_3 \supset \cdots$ nem lehet végesen generált jobbideálokban fekvő jobbideáloknak végtelen fogyó lánca. Tehát teljesül f).

f)-ből folyik a). Ez triviális.

Ezzel az 5. 1. tételt teljesen bibizonyítottuk.

5.2. Állítás. Az 5. 1. tételben szereplő *a), b),..., f)* állítások ekvivalensek azokkal a további *a'), b'),..., f')* állításokkal, amelyek bal-jobb dualizálással nyerhetők az a), b),..., f) állításokból. Továbbá egy A gyűrű akkor és csak akkor ferdetesteknek a gyűrűelméleti diszkrét direkt összege, ha A minden főjobbideálban fekvő jobbideálja jobbegységelemes (ill. minden főbalideálban fekvő balideál balegységelemes).

Bizonyítás. A 2. 5. állítás szerint A-nak az A_1 talpa és $\bar{A}_1$ baltalpa egymással egyenlő, így féligegyszerű MHR-gyűrű, mindig MHL-gyűrű és megfordítva.

Az utolsó állítás igazolására elég megmutatni azt, hogy ha A minden $(a)_r$ főjobbideálban fekvő R jobbideáljának van egy e jobbegységeleme, akkor A ferdetestek a direkt összege. Az A gyűrű feltételeink mellett féligegyszerű, mert $e_1^2 = e_1 \in J$ esetén, ahol J a radikál, $e_1 = 0$, és $a \in J$ esetén $a = ae_1$. Ha e az $R(\subseteq (a)_r)$ jobbideál jobbegységeleme, akkor legyen $R_1 = (1-e)R$. Minthogy $x \in R$ esetén $xe = x$, nyilván $R_1^2 = (1-e)R \cdot (1-e)R = 0$. Tehát $J = 0$ miatt $R_1 = 0$, és így $R = eR + (1-e)R$ alapján $R = eR (e^2 = e)$, más szóval e kétoldali egységeleme R-nek. Mármost A féligegyszerű MHR-gyűrű az 5. 1.

tétel szerint, sőt A főjobbideálokban fekvő jobbideáljai egységelemesek. Ha most e_1A és e_2A két $\neq 0$ idempotens minimális jobbideál, akkor — mint láttuk — e_i egyértelműen meghatározott kétoldali egységelem e_iA-ban, és e_i éppen $e_1A \oplus e_2A$ kétoldali egységelemének: e-nek komponense e_iA-ban, azaz $e = e_1 + e_2$. Így $(e - e_1)e_1 = e_2e_1 = 0$ és $(e - e_2)e_2 = e_1e_2 = 0$ folytán $e_1A \cdot e_2A = e_1Ae_1 \cdot e_2Ae_2 = 0$ és $e_2A \cdot e_1A = 0$, azaz e_iA kétoldali ideál A-ban. Ekkor azonban e_iA jobbideálmentes, tehát ferdetest, és A éppen ezeknek az egymást páronként annulláló ferdetesteknek a direkt összege.

5.3. Állítás. Egy A tetszőleges gyűrűnek bármely végesen generált jobbideálban fekvő R jobbideálja pontosan akkor $R = eA + R_1$ alakú, ahol $e^2 = e$ és R_1 nil-jobbideál, ha a J radikál nilideál, és ha A/J féligegyszerű MHR-gyűrű. Egy tetszőleges A gyűrű pontosan akkor MH_1R-gyűrű, ha A/J féligegyszerű MHR-gyűrű, a J radikál nilideál és teljesül a minimum-feltétel a főjobbideálokban fekvő nil-jobbideálokra. A-ban bármely R jobbideál pontosan akkor $R = eA + R_1$ alakú, ahol $e^2 = e$, R_1 nilideál, ha A/J *Artin*-féle féligegyszerű gyűrű, és a J radikál nilideál.

Bizonyítás. Az első részállítás az 5. 1. tétel következménye, és egyszersmind bizonyos általánosítása is. Ugyanis, ha minden főjobbideálban fekvő R jobbideál $R = eA + R_1$ alakú, ahol $e^2 = e$ és R_1 niljobbideál, akkor A/J féligegyszerű MHR-gyűrű az 5. 1. tétel szerint, és J nil ideál. Fordítva, ha R főjobbideálban fekvő jobbideál, A/J féligegyszerű MHR-gyűrű és J nilideál, akkor az 5. 1. tétel szerint az $(R+J)(J \cong R)/R \cap J$ gyűrű balegységelemes. Létezik tehát a 2. 6. állítás szerint R-ben olyan $e \neq 0$ idempotens, hogy $e + J$ éppen $R + J$ balegységeleme, ugyanis nyilván elég az $R \cap J \neq R$ esetet vizsgálni. Minthogy $x \in R$ esetén $x \equiv ex \pmod{R \cap J}$, nyilván $(1-e)R \subseteq J$. Minthogy pedig $eA \subseteq R \subseteq A$, egyszersmind $eA = eR$, tehát $R = eA \oplus R_1$, ahol $R_1 = (1-e)R \subseteq J$.

Most megmutatjuk, hogy a második részállítás feltételei elegendők ahhoz, hogy A egy MH_1R-gyűrű legyen. Ha ugyanis $R_i \subseteq (a)_r$, akkor $R_i + J \subseteq (a + J)_r$, továbbá $R_i \cap J \subseteq (a)_r$. Létezik tehát olyan k index, hogy ha $R_1 \supseteq R_2 \supseteq R_3 \supseteq \cdots$, akkor egyidejűleg $R_k + J = R_{k+1} + J = \cdots$, illetve $R_k \cap J = R_{k+1} \cap J = \cdots$. Az A^+ alcsoport-hálójának modularitása miatt azonban $R_k = R_{k+1} = \cdots$, tehát A tényleg MH_1R-gyűrű.

Ha mármost minden R jobbideál A-ban $R = eA + R_1$ alakú, ahol $e^2 = e$ és R_1 nil-jobbideál, akkor A/J balegységelemes maga is, tehát Artin-féle féligegyszerű gyűrű, és a J radikál nilideál. Ha pedig A/J *Artin*-féle, és a J radikál nilideál, akkor — az előzőekhez hasonlóan — bármely jobbideál $R = eA + R_1$ alakú, ahol $e^2 = e$ és R_1 nil-jobbideál.

Ennek nyilvánvaló következménye a *Goldman—Fuchs—Szele*-féle tétel is, mert ha minden jobbideál balegységelemes, akkor $J=0$ és $A \sim A/J$ *Artin*-féle féligegyszerű gyűrű. Ezzel a 6.2. állítást teljesen igazoltuk.

Végül vizsgáljuk a féligegyszerű *MHR*-gyűrűk és a *Neumann*-féle reguláris gyűrűk kapcsolatát.

5.4. Állítás. Egy A gyűrű — amelynek nem feltétlenül létezik baloldali vagy jobboldali egységeleme — akkor és csak akkor reguláris (*Neumann*-féle értelemben), ha minden főjobbideál balegységelemes. Továbbá A pontosan akkor reguláris, ha minden $a \in A$ elemmel teljesül $(a)_r, (a)_l = (a)_r \cap (a)_l$. Minden féligegyszerű *MHR*-gyűrű reguláris.

MEGJEGYZÉS. NEUMANN [26] a kritériumot eredetileg kétoldali egységelem létezésének feltételezésével mondta ki. Továbbá M. HARADA [15] és korábban KOVÁCS [20] a második kritérium részben gyengébb alakját állapították meg egymástól függetlenül, de $R \cdot L = R \cap L$ teljesülését az összes R jobbideálra és összes L balideálra megkövetelték. (Vö. LAJOS S. [22].)

Bizonyítás. A reguláris volta definíció szerint biztosítja, hogy minden $a \in A$ elemhez létezik olyan $x \in A$, hogy $a = axa$. Ezért $(a)_r = (axa)_r \subseteq \subseteq (ax)_r \subseteq (a)_r$, tehát $(a)_r = (e)_r$, ahol $e = ax, e^2 = e$ és így e balegységelem $(a)_r$-ban, ha A reguláris. Fordítva, legyen minden $(a)_r$ főjobbideálban egy $e = na + ab (n \in I, b \in A)$ balegységelem, és $x = n^2a + nab + nba + bab$. Ekkor $axa = a(n^2a + nab + nba + bab)a = (na + ab)^2 a = ea = a$ miatt A valóban reguláris.

Továbbá, ha A reguláris, akkor $(a)_r \supseteq aA \supseteq (axa)_r$ és $a = axa$ miatt $(a)_r = aA$ és $(a)_l = Aa$. Ezért a nyilvánvaló $aA \cdot Aa \subseteq aA \cap Aa$ relációt figyelembe véve elegendő igazolni, hogy $aA \cap Aa \subseteq aA \cdot Aa$. Legyen $y \in aA \cap Aa$. Ekkor $y = au = va (u, v \in A)$, és $axa = a$, tehát $y = (axa)u = (ax)(au) = (ax)(va) \in aA \cdot Aa$, amiből $aA \cap Aa = aA \cdot Aa$ folyik.

Ha fordítva, egy tetszőleges A gyűrűben mindig $(a)_r \cdot (a)_l = (a)_r \cap (a)_l$, akkor létezik olyan $n_1, n_2 \in I$ számpár és $b_1, b_2 \in A$ elempár, hogy $a = a(n_1 + b_1) \cdot (n_2 + b_2)a$. Legyen $x = n_1^2 n_2^2 a + n_1 n_2 a (n_1 b_2 + n_2 b_1 + b_1 b_2) + n_1 n_2 (n_1 b_2 + n_2 b_1 + b_1 b_2) a + (n_1 b_2 + n_2 b_1 + b_1 b_2) a (n_1 b_2 + n_2 b_1 + b_1 b_2)$. Ekkor $axa = (n_1 n_2 a + a \cdot (n_1 b_2 + n_2 b_1 + b_1 b_2))^2 a = (a(n_1 + b_1) \cdot (n_2 + b_2))^2 a = a$, tehát A reguláris.

Mármost az 5.4. állítás és az 5.1. tétel alapján valóban bármely féligegyszerű *MHR*-gyűrű reguláris.

Végül megmutatjuk, hogy létezik olyan féligegyszerű gyűrű, amely reguláris, de nem *MHR*-gyűrű.

5.5. Példa. Legyen A megszámlálható végtelen sok $A_1, A_2, A_3, \ldots$ reguláris gyűrűnek a gyűrűelméleti komplett direkt összege. A az összes formálisan különböző $\langle a_1, a_2, a_3, \cdots \rangle$ végtelen vektorból áll, a műveletek komponensekként végzendők. Ha $a_i x_i a_i = a_i$ akkor $x_i a_i$ egy relatív jobbegységelem a_i számára.

Legyen $b_1 = \langle a_{11}, a_{12}, \cdots \rangle$, ahol $0 \neq a_{1n} \in A_n$. Ha b_{k-1}, már definiálva van, legyen a b_k vektor első $k-1$ helyen csupa 0, és álljon b_k-nak bármely n-edik helyén $a_{kn} \in A_n$, ahol $a_{k-1n} a_{kn} = a_{k-1n} (n \geqq k)$. Ekkor $a_{kn} \neq 0 (n \geqq k)$. Legyen továbbá $c_m = b_1 \cdot b_2 \cdots b_m$. Világos, hogy c_m olyan vektor, amelynek az első $m-1$ helyén csupa 0 van, míg $k \geqq m$ esetén a c_m-nek a k-adik helyén éppen $a_{1k} \neq 0$ szerepel. Ezért, bár A reguláris, A-ban $(c_1)_r \supset (c_2)_r \supset \cdots$ végtelen fogyó főjobbideállánc. Van olyan $e_m (= e_m^2)$, hogy $(c_m)_r = e_m A$. Ekkor $D = \sum_{m=1}^{\infty} (e_m - e_{m+1}) e_m A$ nem balegységelemes jobbideál A-ban, noha $D \subseteq e_1 A (e_1^2 = e_1)$ teljesül.[8]

Végül megjegyezzük, hogy végtelen sok *Artin*-féle E_n egyszerű a gyűrűelméleti diszkrét direkt összegében nem teljesül a főjobbideálok maximumfeltétele, $S_n = E_1 \oplus \cdots \oplus E_n$ főjobbideál és $S_1 \subset S_2 \subset S_3 \subset \cdots$ teljesül. (Vö. [9] utólagos, hibás, apróbetűs 4. megjegyzésével.)

6. §. Az *MHR*-gyűrűk additív csoportja

Alábbi eredményeink bizonyításai általában FUCHS [11] könyve módszereit használják fel.

A gyűrűk additív csoportjára vonatkozó *Szele*-féle, majd közösen végzett *Fuchs*—*Szele*-féle vizsgálatoknak, amelyeket később FUCHS LÁSZLÓ lényegesen továbbfejlesztett, megvannak a megfelelői *MHR*-gyűrűkre vonatkozólag. A továbbiakban ezeket az *MHR*-gyűrűkről szóló vizsgálatokat fogjuk ismertetni.

6.1. **Tétel.** Egy A^+ *Abel*-féle additív csoport akkor és csak akkor egy A *MHR*-gyűrű additív csoportja, ha $A^+ = B \oplus C$, ahol B teljes és C redukált torzió-alcsoport. Ha A-ban van $C(p^\infty)$ típusú zérógyűrű, akkor $C(p^\infty)$ az A kétoldali annullátorában fekszik. Ha A nilpotens MH_1R-gyűrű, akkor a minimum-feltétel teljesül A-nak egy főjobbideálban fekvő alcsoportjaira.

Bizonyítás. Minthogy $n(a)_r = (na)_r$ $(n \in I)$, létezik olyan $m_a \in I$ egész szám, hogy $(m_a a)_r \subseteq B$, ahol B az A^+ maximális teljes alcsoportja. Továbbá $A^+ = B \oplus C$, és ha $c \in C$, akkor $m_c \cdot c \in C \cap B$, tehát $m_c \cdot c = 0$. Ezért C torzió csoport. Megfordítva, ha $A^+ = B \oplus C$ mondott tulajdonságú felbontás, akkor $B = B_1 \oplus B_0$, ahol B_1 torziócsoport és B_0 torziómentes, és építsünk B_1-re és C-re zérógyűrűt, B_0-ra pedig testet, amely $B_0 \neq 0$ esetén a prímtestének vagy végesfokú egyszerű algebrai bővítése, vagy m-transzcendenciafokú tisztán transzcendens bővítése. Belátható, hogy az $AB_1 = AC = B_1 A = CA = 0$ előírással A valóban egy A^+-ra épített *MHR*-gyűrű.

[8] Persze D nem is főjobbideál A-ban.

Legyen mármost $A^+ = B \oplus C$ az előbbi jelölésekkel egy MHR-gyűrű additív csoportja és $Z = C(p^\infty) \subseteq A$. Legyen $z \in Z, O(z) = p^k$, továbbá $0 \neq x \in A, x = b + c, b \in B, c \in C, O(c) = l$. Minthogy $ly_1 = z$ és $p^k y_2 = b$ megoldható, nyilván $xz = (b+c)z = (p^k y_2)z + c(ly_1) = 0 + 0 = 0$, és hasonlóan $zx = 0$, tehát $A \cdot Z = Z \cdot A = 0$.

Legyen végül A nilpotens MH_1R-gyűrű, és $G_1 \supset G_2 \supset \cdots$ olyan végtelen fogyó alcsoportlánc A^+-ban, hogy fennálljon $G_n \subseteq (a)_r$ egy rögzített $a \in A$ elemmel. Legyen L_k az A^k balannullátora. L_k kétoldali ideál, és ha $A^m = 0$, $A^{m-1} \neq 0$, akkor $0 \subseteq L_1 \subseteq L_2 \subseteq \cdots \subseteq L_{m-1} = A$. Tegyük fel, hogy $a \in L_t$. Ekkor $G_k \subseteq L_t$, sőt $R_k = G_k + G_k A \subseteq (a)_r \subseteq L_t$. Minthogy A egy MH_1R-gyűrű, van olyan m_1, hogy $R_{m1} = R_{m_1+1} = R_{m_1+2} = \cdots$. Ámde $G_k A \subseteq L_t A \subseteq L_{t-1}$ miatt $G_{m_1} + L_{t-1} = G_{m_1+1} + L_{t-1} = \cdots$ továbbá $G_{m_1} \cap L_{t-1} \supset G_{m_1+1} \cap L_{t-1} \supset \cdots$, hiszen A^+ alcsoportjainak hálója moduláris. Ezért L_{t-1}-ben létezik egy végtelen fogyó alcsoportlánc. Végül L_1-ben létezik $Q_1 \supset Q_2 \supset Q_3 \supset \cdots$ végtelen fogyó alcsoportlánc, ahol $Q_i \subseteq (a)_r$, ha eljárásunkat megfelelő véges sok lépésben ismételjük. De $Q_i A \subseteq L_1 \cdot A = 0$, ezért Q_i jobbideál A-ban. Minthogy $Q_i \subseteq (a)_r$ és A egy MH_1R-gyűrű, létezik olyan m_s, hogy $Q_{m_s} = Q_{m_s+1} = Q_{m_s+2} = \cdots$, ami lehetetlen. Ezért már az eredeti $G_1 \supset G_2 \supset G_3 \supset \cdots$ alcsoportlánc sem lehet $G_k \subseteq (a)_r$ esetén végtelen fogyó lánc.

6.2. **Tétel.** A^+ pontosan akkor egy A egységelemes MHR-gyűrű additív csoportja, ha $A^+ = B \oplus C$, ahol B torziómentes teljes csoport és C pedig korlátos-elemrendű torziócsoport. A^+ pontosan akkor egy A MHR-radikálgyűrűnek az additív csoportja, ha A^+ torziócsoport.

Bizonyítás. Legyen A egységelemes MHR-gyűrű. A-nak ekkor nem lehet $C(p^\infty)$ alcsoportja a 6.1. Tétel miatt, és ezért $A^+ = B \oplus C$, ahol B torziómentes teljes csoport és C torziócsoport, amelyről következőképpen derül ki, hogy korlátos elemrendű. Ha $O(c) = n, c \in C$ és $nx = b, b \in B$, akkor $cb = c(nx) = (nc)x = 0$, tehát $CB = 0$ és hasonlóan $BC = 0$. Ezért B és C ideál A-ban, tehát mint endomorf kép, szintén egységelemes. Mármost $m = O(e)$ esetén, ahol e egységelem C-ben, nyilván $mC = 0$, tehát C korlátos elemrendű.

Legyen fordítva $A^+ = B \oplus C$ adva, ahol B torziómentes teljes csoport és C korlátos elemrendű torziócsoport. Legyen definíció szerint $BC = CB = 0$ és B egy 0-karakterisztikájú test, amely rang $B = \mathfrak{m}$ számossági-értékétől függően a prímtestének vagy végesfokú egyszerű algebrai bővítése, vagy pedig $\mathfrak{m}$ transzcendenciafokú tisztán transzcendens bővítése. Továbbá $C = \sum_{m,k} \oplus D_{mk}$, ahol D_{mk} jelenti C bizonyos p_m^k rendű ciklikus alcsoportjainak a direkt összegét (p_m rögzített prímszám, k rögzített).[9] Legyen most definíció

[9] Az összes prímszámot növő sorrendben indexezzük.

szerint $D_{mk}D_{nl}=\delta_{mn}\delta_{kl}D_{mk}$, és építsünk D_{mk}-ra FUCHS LÁSZLÓ könyvének érdekes lemmája alapján ([11], 281. o.) egy olyan egységelemes kommutatív gyűrűt, amelynek $D_{mk}, p_m D_{mk}, p_m^2 D_{mk}, \ldots, p_m^{k-1} D_{mk}$ és $p_m^k D_{mk}=0$ az összes (főjobb-) ideáljai. Így A^+-ra valóban MHR-gyűrűt építettünk.

Ha A primitív MHR-gyűrű, akkor egyszerű gyűrű is a 4. 2. tétel alapján. Ezért ha p prímszám, $pA=0$, vagy $=A$, mert pA ideál A-ban. Ha van olyan p, hogy $pA=0$, akkor A^+ elemi p-csoport. Ha pedig ilyen p nincs, akkor mindig $pA=A$, ezért A^+ teljes, amelyben nem lehet $C(p^\infty)$ alcsoport a 6. 1. tétel szerint. Ezért A^+ torziómentes teljes csoport. Megfordítva, A^+-ra építhető kommutatív test, amely primitív MHR-gyűrű, akár ha $pA=0$, akár pedig ha A^+ torziómentes teljes csoport.

Legyen végül A egy MHR-radikálgyűrű. Akkor A nilgyűrű. Legyen $0 \neq x \in A$ és k olyan természetes szám, amelyre $(2^k x)_r=(2^{k+1}x)_r$, ugyanis A egy MHR-gyűrű. Ha $y=2^k x$, akkor létezik olyan $n \in I$ és $z \in A$, hogy $y=n(2y)+(2y)z$, amiből $(2n-1)y=y\cdot(-2z)$, illetve $(2n-1)^l y=y(-2z)^l$ folyik minden l természetes számra nézve. Minthogy $(-2z)^m=0$ (m egy természetes szám) és $n \in I$ miatt $(2n-1)^m \neq 0$, szükségképpen torzióscsoport A^+, mert $(2n-1)\cdot 2^k x=0$, ha $0 \neq x \in A$.

Megfordítva, ha A^+ torziócsoport, akkor ez additív csoportja egy olyan A MHR-radikálgyűrűnek, amelyre $A^2=0$.

7. §. Az MHR-gyűrűk különböző radikáltípusai

Jelölje az A gyűrűben J a *Jacobson*-féle radikált, L az alsó nil (*Baer—McCoy*-féle) radikált, U a felső nilradikált, L^* a *Levitzki*-féle radikált, G a *Brown—McCoy*-féle radikált és Z *Fuchs*-féle (zéróid-) radikált. Ha A egy nem feltétlenül MHR-gyűrű, akkor $L \subseteq L^* \subseteq U \subseteq J \subseteq G$ és $U \subseteq Z$, továbbá létezik mind olyan gyűrű, hogy $Z \subset J$, mind pedig olyan gyűrű, hogy $G \subset Z$. Most megvizsgáljuk, hogy MHR-gyűrűkben hogyan helyezkednek el ezek a radikáltípusok egymáshoz képest [2], [4], [10], [17], [23], [25].

7. 1. **Tétel.** Ha A egy MHR-gyűrű, akkor az előbb említett radikáltípusokra $L=L^*=U=J$ teljesül.

MEGJEGYZÉS. Ezzel újra belátható lesz (vö. a 2. 6. állítással!), hogy a J *Jacobson*-féle radikál MHR-gyűrűkben nilideál.

Bizonyítás. Elegendő megmutatni, hogy $J=L$, hiszen L egy speciális nilradikál és ekkor $J \supseteq U \supseteq L^* \supseteq L$ miatt folyik a 8. 1. tétel állítása is. Ha $J \neq L$ volna, akkor A/L-ben $J/L \neq L/L=\bar{o}$. Az L definíciója miatt A/L-ben $\bar{o}$ az egyetlen nilpotens ideál, tehát $\bar{o}$ az egyetlen nilpotens jobbideál is. Ezért A/L-nek J/L-ben fekvő bármely $R/L \neq 0$ minimális jobbideálja tartalmaz egy $e+L$ idempotens elemet (lásd a 2. 5. állítást), mert R/L nem lehet nilpotens. De ekkor maga az $e(\neq 0, \in R)$ elem is megválasztható a 2. 6. állítás szerint idempotens elemként, ami lehetetlen ($e^2=e, e+z-ez=0$, esetén $e^2+ez-e^2z=0$, azaz $e=0$, holott $e\neq 0$). Ezért $J=L$, ami bizonyítandó volt.

7. 2. **Tétel.** Ha A tetszőleges MHR-gyűrű, akkor az előbb említett radikáltípusokra $J\subseteq G\cap Z$. Továbbá, ha A jobbegységelemes MHR-gyűrű, akkor $J=G=Z$.[10]

Bizonyítás. Minthogy minden (asszociatív) gyűrűben $J\subseteq G$, elegendő megmutatni, hogy $J\subseteq Z$. Ismeretes [10], hogy Z az összes maximális l-zérófaktor ideál Z_l metszetének és az összes maximális r-zérófaktor ideál Z_r metszetének a metszete. Minthogy pedig MHR-gyűrűben prímideál ugyanazt jelenti, mint primitív ideál, és minthogy [10] szerint a maximális l-zérófaktor, illetve maximális r-zérófaktor ideálok prímideálok A-ban, és J az összes primitív ideál metszete, kell hogy $J\subseteq Z_l\cap Z_r\subseteq Z$ legyen. Ezért $J\subseteq Z\cap G$.

Ezután tegyünk fel, hogy létezik az A-ban egy e jobboldali egységelem. Megmutatjuk, hogy A-ban minden $C(\neq A)$ valódi kétoldali ideál l-zérófaktor ideál. Ellenkező esetben léteznék C-ben A-nak minimális olyan $(c)_r$ főjobbideálja, hogy $c(\in C)$ nem l-zérófaktor. Ez esetben $cx=0$ csak $x=0$ mellett igaz. Minthogy pedig $(c^2)_r\subseteq(c)_r\subseteq C$ és $c^2y=0$ esetén $c^2y=c(cy)$ miatt $cy=0$, tehát $y=0$, egyszersmind c^2 sem l-zérófaktor. Ennélfogva $(c^2)_l=(c)_l$, és így létezik olyan $d\in A$, hogy $c=c^2d\in(c^2)_r$, hiszen A-nak van egy e jobbegységeleme. Ekkor $c(e-cd)=0$, ami azt jelenti, hogy $e-cd=0$, mert c nem l-zérófaktor. Tehát $c\in C$ és C kétoldali ideál volta miatt $A=Ae=Acd\subseteq C$, ami ellentmond annak, hogy $C\neq A(C\subseteq A)$. Ezért minden $C\subset A$ kétoldali valódi ideál l-zérófaktor ideál, így a maximális l-zérófaktor ideálok éppen a maximális valódi ideálok, amelyek pedig $e\in A$ és a 4. 1. állítás miatt éppen a primitív ideálok A-ban. Ez azt jelenti, hogy $Z_l=J$, tehát a nem jobbegységelemes esetben is igaz és éppen az előbb igazolt $J\subseteq Z_l\cap Z_r$ kapcsolat folytán $J=Z_l\subseteq Z_l\cap Z_r=Z\subseteq Z_l$, tehát $J=Z$.

Ha A-ban, amely MHR-gyűrű, létezik egy e jobbegységelem, akkor A/J *Artin*-féle féligegyszerű gyűrű az 5. 1. állítás utolsó részállítása miatt, tehát A/J egységelemes egyszerű gyűrűknek egy szubdirekt (sőt direkt) összege. Ezek szerint A/J-ben a *Brown—McCoy*-féle radikál $J/J=\bar{o}$, hiszen egy gyűrűben a *Brown—McCoy*-féle radikál az összes olyan maximális ideálok metszete, amelyek szerinti faktorgyűrűk egységelemes egyszerű gyűrűk. Tehát $G\subseteq J$, és mivel pedig $J\subseteq G$ minden gyűrűben teljesül, $J=G$. Így jobbegységelemes MHR-gyűrűkben valóban $J=G=Z$.

Ezek után még néhány példát említünk meg.

[10] Hasonló érvényes a *Fuchs*-radikál bizonyos általánosításaira is.

7.3. Példa. Legyen az A gyűrű $\{a, b\}$, ahol $a+a=b+b=a^2=ab=$ $=ba=b^2+b=0$. Az A gyűrű véges, mert négyelemű, $L=L^*=U=J=$ $=G=\{a\}$. Továbbá A/J kételemű test. A-nak nincs jobbegységeleme, mert $A^2=\{b\}\neq A$, és a *Fuchs*-féle zéróid radikálra $Z=A$ teljesül, mert A minden eleme balzérusosztó és jobbzérusosztó.

7.4. Példa. Legyen A az a gyűrű, amelyet jelen dolgozatunkban a 2.2. példánál adtunk meg. A-nak nincs az 5.1. állítás szerint jobboldali egységeleme, mert A (*Jacobson*-féle értelemben féligegyszerű és) egyszerű MHR-gyűrű, amely a 3.1. állítás szerint MHL-gyűrű is, és A nem *Artin*-féle. A-ban — mint említettük — teljesül $J=0$, ellenben $G=A$, hiszen $G=0$ esetén A jobbegységelemes volna. Minthogy pedig könnyen belátható, hogy minden $a\in A$ elemet balról és jobbról annullálja A-nak egy elegendő nagy indexű e_{ii} idempotens báziseleme, így $Z=A$.

7.5. Példa. Legyen $A=\{a, b\}$; $a+a=b+b=ab=ba+a=a^2=$ $=b^2+b=0$. Minthogy A négyelemű, még inkább MHR-gyűrű. A-nak b balegységeleme. Minthogy pedig az A-nak $a\neq 0$ balannullátora, A-nak nincs jobbegységeleme. Ez a példa is mutatja, hogy MHR-gyűrűknél a jobbegységelem létezése nem szükséges ahhoz, hogy $G=Z=J$ teljesüljön. A végesség miatt ugyanis $G=J$, mert ez még *Artin*-féle gyűrűkben is igaz. Továbbá, minthogy A egy balegységelemes MHL-gyűrű, A-ban a 8.2. tételnek egy bal-jobb duális megfelelője miatt $Z=J$, ennélfogva $Z=G=J$.

7.6. Példa. Legyen A az összes páros számlálójú és páratlan nevezőjű racionális számok gyűrűje (a közönséges összeadással és szorzással ellátva). Ekkor $J=G=A$, mert A egyetlen elemének sincs A-ban reciproka, tehát A „nem-egységei" ideált alkotnak, amely maga A. Zérusosztómentesség miatt pedig $L=L^*=U=Z=0$, tehát A nem MHR-gyűrű a 8.1. tétel miatt. Továbbá $A\supset 2A\supset 4A\supset\cdots$ végtelen fogyó főjobbideállánc.

8. §. *MHR*-gyűrűk mint operátortartományok

Ebben a §.-ban megvizsgáljuk, hogy az *Artin*-féle gyűrűk feletti modulusokhoz képest mi a hasonló és mi az eltérő az A MHR-gyűrűk feletti M operátormodulusoknál, ahol A nem feltétlenül féligegyszerű.

8.1. Tétel. Legyen A féligegyszerű MHR-gyűrű, és M egy A-modulus, amelyre $MA=M$. Ha M egy irreducibilis A-modulus, akkor M operátorizomorf A egy minimális jobbideáljával. Ha pedig M tetszőleges a mondott feltételek mellett, akkor teljesen reducibilis, és A egyszerű ideáljainak halmaza egyértelműen leképezhető M homogén komponenseinek a halmazára.

Bizonyítás. Legyen A féligegyszerű MHR-gyűrű, és legyen először M egy irreducibilis A-modulus, amelyre $MA = M$. Minthogy M-nek az A által annullált elemei részmodulust alkotnak, továbbá M irreducibilis és $MA = M$, ezért $mA = M$ minden $0 \neq m \in M$ esetén. Ekkor az $a \to ma (a \in A)$ leképezés A-nak homomorfizmusa M-re, amelynek a magva egy K jobbideál, és fennáll az A-modulusokra $A/K \simeq M$. Ezért K maximális jobbideál, amely $m = me (e \in A)$, $m(a - ea) = 0$, $a - ea \in K$ miatt moduláris maximális jobbideál A-ban [17]. Minthogy A mint A-jobbmodulus a 2.6. állítás szerint teljesen reducibilis, létezik olyan R jobbideál, hogy $A = R \oplus K$. Világos, hogy $R \simeq A/K$ s $A/K \simeq M$ miatt $M \simeq R$.

Legyen most M tetszőleges, $MA = M$ és A féligegyszerű MHR-gyűrű. Ekkor $m \in M = MA$ azt jelenti, hogy $m = m_1 a_1 + \cdots + m_n a_n$, ahol $m_i \in M$ és $a_i \in A$, sőt, A-nak mint A-jobbmodulusnak a teljesen reducibilis volta miatt feltehető, hogy $a_i \in R_i$, ahol R_i az A minimális jobbideálja, és hogy $m_i a_i \neq 0$. Ekkor az $a_i \to m_i a_i$ megfeleltetés R-nek A-homomorfizmusa az $M_i = m_i R_i$ modulusra, amely R_i minimális volta és $m_i a_i \neq 0$ miatt izomorfizmus. Ezért M_i minimális, és M teljesen reducibilis. A tétel utolsó részállítása klasszikus módszerekkel könnyen belátható [17], [38].

A következő példa azt mutatja, hogy eltérőleg az Artin-féle féligegyszerű gyűrűktől — létezik olyan M modulus egy A féligegyszerű (nem *Artin*-féle) MHR-gyűrű felett, hogy M nem bomlik fel $M = M_0 \oplus M_1$ direkt összeg alakban, ahol $M_0 A = 0$, $M_1 = M_1 A$.

8.2. Példa. Legyen A a 2.2. példában szereplő egyszerű MHR-gyűrű, és M az összes (a, n) pár halmaza, ahol $a \in A$, $n \in I$. Egyenlőséget és összeadást a párok közt komponensekként értelmezünk, továbbá az $(a, n) b = (ab + nb, 0)$ előírással M egy A-jobbmodulussá válik. Tegyük fel, hogy $M = M_0 \oplus M_1$, ahol $M_0 A = 0$, $M_1 A = M_1$, és $M_i \neq 0$ $(i = 1, 2)$ részmodulus M-ben. Ekkor van olyan $0 \neq m_0 = (a_0, n_0) \in M_0$, hogy minden $b \in A$ elemmel $a_0 b + n_0 b = 0$. Minthogy A féligegyszerű, még inkább annullátormentes, tehát $n_0 \neq 0$. Létezik a 2.6. állítás szerint A-ban olyan R jobbideál, hogy $A = (a_0)_r \oplus R$, ahol nyilván $R \neq 0$. Legyen mármost $0 \neq r \in R$. Ekkor $a_0 r + n_0 r = 0$, tehát $0 \neq n_0 r = -a_0 r \in (a_0)_r \cap R$, ami lehetetlen. Ezért szükségképpen $M_0 = 0$, $M = M_1$ és $M_1 A = M_1$ miatt $MA = M$ teljesülne, holott $(0, 1) \in M$ és $(0, 1) \notin MA$, mert MA minden eleme $(ab + nb, 0)$ alakú. Ezzel megmutattuk, hogy valóban nem létezik M-nek kívánt tulajdonságú direkt felbontása.

8.3. Állítás. Legyen A tetszőleges gyűrű. Ha A bármely $(a)_r$ főjobbideálban fekvő R jobbideáljára és bármely M A-modulus bármely x elemére nézve az $xR (\subseteq M)$ részmodulus M-nek direkt összeadandója, akkor A szükségképpen féligegyszerű MHR-gyűrű.

Bizonyítás. Hasonlóan a 8.2. példához, legyen M az összes (a, n) pár halmaza, ahol $a \in A$; A azonban tetszőleges gyűrű, $n \in I$ és a párok egyenlőségét, összeadását komponensekként értelmezzük. Legyen A az állításban megmondott tulajdonságú tetszőleges gyűrű, $x=(0,1) \in M$, és $M'=xR \subseteq M$, azaz $M'=[(r,0) | r \in R]$. Feltétel szerint létezik egy $M=M' \oplus M''$ direkt felbontás, amelyre vonatkozólag legyen $x=x'+x''$, $x' \in M'$, $x'' \in M''$, $x'=(e,0)$, $x''=(-e,1)$. Minthogy $x''r=(-er+r, 0) \in M' \cap M''$, ha $r \in R$, nyilván $er=r$, azaz e balegységelem R-ben. Ezért A az 5.1. tétel szerint valóban féligegyszerű MHR-gyűrű.

8.4. Definíció. Legyen M tetszőleges additív *Abel*-féle csoport, E az M teljes endomorfizmusgyűrűje, $A^{(0)}$ az E-nek tetszőleges (rögzített) részgyűrűje. Ha $A^{(n)}$ már definiálva van $(0 \leqq n \in I)$, legyen $A^{(n+1)}$ az $A^{(n)}$ centralizátora E-ben.

MEGJEGYZÉSEK. $A^{(n)}$ minden természetes számra nézve E-nek egy részgyűrűje, ezért M úgy tekinthető, mint egy hű $A^{(n)}$-jobbmodulus, amelynél $A^{(n+1)}$ éppen az összes $A^{(n)}$-endomorfizmus rézgyűrűje. Belátható, hogy az $A^{(n)} \to A^{(n+1)}$ leképezés E részgyűrűi egy hálójának egy önmagába való antihomomorfizmusa, és a definíció miatt $n \geqq 1$ esetén $A^{(n)}=A^{(n+2)}$ minden $A \subseteq E$ részgyűrűre nézve. Továbbá $M \neq 0$, $A^{(0)}=0$ esetén $A^{(1)}=E \neq 0$, tehát $A^{(0)} \neq A^{(1)}$. Ha $n=0$, és $A^{(0)}$ féligegyszerű *Artin*-féle gyűrű, akkor [1] szerint $A^{(0)}=A^{(2)}$ is teljesül, tehát minden $n \geqq 0$ esetén $A^{(n)}=A^{(n+2)}$. Sőt már akkor is minden $n \geqq 0$ esetén $A^{(n)}=A^{(n+2)}$, ha A olyan speciális féligegyszerű MHR-gyűrű, amely tetszőleges sok egyszerű *Artin*-féle gyűrűnek a gyűrűelméleti diszkrét direkt összege. Minden $A^{(0)}$-gyűrűre $A^{(0)} \subseteq A^{(2)}$.

Az alábbi példa azt mutatja, hogy létezik olyan A egyszerű MHR-gyűrű, amelyre $A^{(0)} \neq A^{(2)}$.

8.5. Példa. Legyen az M *Abel*-féle csoport A^+, ahol A a 2.2. példában szereplő egyszerű, tehát egyszersmind primitív MHR-gyűrű. Legyen E az (operátorok nélkül tekintett) A^+ csoport teljes endomorfizmusgyűrűje. Minthogy A jobbannullátormentes gyűrű, azonosítva az $a \in A$ elemet az $x \to xa$ leképezéssel, $(x \in A)$, A természetes módon beágyazható E-be. Legyen mármost $A^{(0)}=A$, és az előzőek szerint $M=A^+$. Megmutatjuk, hogy $A^{(0)} \neq A^{(2)}$, bár $A^{(0)} \subseteq A$. Láttuk a 2.2. példánál, hogy A izomorf a K_0 racionális számtest feletti és az e_{ij} elemekkel generált A' algebrával, ahol az A gyűrűt a K_0 operátortartomány nélkül tekintjük, és $e_{ij}e_{kl}=\delta_{jk}e_{il}$ (i, j, k, l korlátlanul befutja az összes természetes számot). Az A gyűrű az összes $(e_{ii})_r$ idempotens minimális főjobbideál diszkrét direkt összege, amelyek mint A-modulusok páronként A-izomorfok egymás közt. Valósítsa meg az $(e_{ii})_r$ jobbideálról az $(e_{jj})_r$ jobbideálra történő A-izomorf leképezést egy rögzített β_{ij} izomorfizmus. Ezt egy A-endomorfizmusává terjeszthetjük ki az $e_{ij}\beta_{kl}=\delta_{ik}e_{lj}$ önkényes megállapodással, hiszen $e_{ij}\beta_{kl}=e_{ll}$, továbbá $(e_{li})_r=(e_{ll})_r$, és elegendő $(e_{ii})_r$ egy A-homomorfizmusánál e_{ii} képét megadni. Belátható, hogy $\beta_{ij}\beta_{kl}=\delta_{jk}\beta_{il}$ és $(e_{ij}e_{kl})\beta_{mn}=(e_{ij}\beta_{mn})e_{kl}$, tehát β_{mn} egy A-endomorfizmus E-ben. Ezért $\beta_{mn}\in A^{(1)}$, továbbá $\sum_{i=1}^{\infty}\beta_{ii}=1$ az identikus automorfizmus. Legyen most $b\in A^{(1)}$ tetszőleges elem, és $b_{ij}=\beta_{ii}b\beta_{jj}$. Világos, hogy $b_{ij}\in A^{(1)}$ és $b=1, b, 1=\sum_{i,j}^{\infty}\beta_{ii}b\beta_{jj}=$ $=\sum_{i,j}^{\infty}b_{ij}$. Azonosítsuk most $(e_{11})_r$ összes A-endomorfizmusának testét a K_0 racionális számtesttel, ilyen módon az $r_{ij}\in K_0$ szám és a $\sum_{n=1}^{\infty}\beta_{n1}r_{ij}\beta_{1n}\in A^{(1)}$ endomorfizmus közt nem teszünk megkülönböztetést: $r_{ij}=\sum_{n=1}^{\infty}\beta_{n1}r_{ij}\beta_{1n}$, ahol a jobboldalra írt endomorfizmus értelmezve van már minden $(e_{ii})_r$ főjobbideálon ($n\geqq 2$ esetén is). Érvényes továbbá $\beta_{ij}r_{ij}=\beta_{i1}r_{ij}\beta_{1j}=r_{ij}\beta_{ij}$, ami β_{ij}-vel való bal-, illetve jobbszorzással közvetlenül folyik. Mármost $(e_{ii})_r b_{jk}\subseteq\delta_{ij}(e_{kk})_r$, ezért $e_{ii}b_{ij}=d_j\in(e_{jj})_r$ alkalmas d_j elemmel (amely többek közt j-től is függ). Ekkor $e_{1i}(\beta_{1i}b_{ij}\beta_{j1})=(e_{1i}\beta_{1i})(b_{ij}\beta_{j1})=e_{ii}b_{ij}\beta_{j1}=d_j\beta_{j1}\in(e_{11})_r$, és minthogy $\beta_{1i}b_{ij}\beta_{j1}\cdot$ $\cdot(=\beta_{1i}b\beta_{j1})\in A^{(1)}$, létezik olyan $r_{ij}\in K_0$ endomorfizmus, hogy $e_{1i}r_{ij}=d_j\beta_{j1}$. Ezért $e_{1i}r_{ij}=e_{ii}b_{ij}\beta_{j1}=e_{1i}\beta_{1i}b_{ij}\beta_{j1}$, tehát $r_{ij}=\beta_{1i}b_{ij}\beta_{j1}$, ahonnan $b_{ij}=\beta_{ii}b_{ij}\beta_{jj}=$ $=\beta_{i1}r_{ij}\beta_{1j}=\beta_{ij}r_{ij}=r_{ij}\beta_{ij}$. Ennélfogva b-nek megfeleltethető egy $\aleph_0\times\aleph_0$ típusú K_0 feletti végtelen mátrix, amelyben csak véges sok oszlopvektor $\neq 0$. Ugyanis $b=\sum_{i,j}^{\infty}b_{ij}=\sum_{i,j}^{\infty}r_{ij}\beta_{ij}$, $\beta_{ij}\in A^{(1)}$, továbbá r_{ij} és β_{ij} felcserélhető, a β_{ij} elemek pedig mátrixegységekként szorzódnak, és $e_{kl}b$ csak véges sok e_{ij}-nek lehet K_0 feletti lineáris kombinációja. Jelölje $\bar{a}\in E$ az $a\in A$ elemmel végzett jobbszorzást, és legyen $\bar{A}$ az összes olyan formális $\sum_{i,j}^{\infty}s_{ij}\overline{e_{ij}}$ végtelen összeg, ahol $s_{ij}\neq 0$ csak véges sok j indexre teljesül. Ekkor $M\bar{A}(\subseteq M)$ elemei véges sok tagú összegek. Továbbá $m\in M, a^{(1)}\in A^{(1)}, \bar{c}\in\bar{A}$ tetszőleges megválasztása mellett mindig teljesül $(ma^{(1)})\bar{c}=(m\bar{c})a^{(1)}$, ezért $\bar{c}\in A^{(2)}$, így $\bar{A}\subseteq A^{(2)}$. De beágyazással elérhető $A^{(0)}\subset\bar{A}$ és ezért valóban $A^{(0)}\neq A^{(2)}$.

8.6. **Tétel.** Legyen M egy additív *Abel*-féle csoport, amelynek A a teljes endomorfizmusgyűrűje, mint jobboldali operátortartomány. Ekkor az alábbi állítások egymással ekvivalensek:

1, A egy MHR-gyűrű;

2, A egy *Artin*-féle gyűrű, azaz az összes jobbideálokra nézve minimum-feltételű gyűrű;

3, A egy MHL-gyűrű;

4, A-ban teljesül az összes balideál minimum-feltétele;

5, M az összes racionális szám $\mathfrak{R}$ additív csoportja véges sok példányának és egy véges *Abel*-féle csoportnak a direkt összege.

Bizonyítás. Hivatkozunk FUCHS LÁSZLÓ [11] könyve megfelelő helyén levő módszerekre, illetve ezeknek természetes módosításaira, anélkül hogy a bizonyítás részleteit ismertetnénk. Csupán arra mutatunk rá, hogy az A gyűrű ε egységelemével generált $(n\varepsilon)_r$ $(= nA)$ főjobbideálokat kell vizsgálni, amelyek közül egy minimálisnak mindig teljes az additív csoportja. Továbbá M egy adott direkt felbontásában a direkt összeadandók számának végességét a projekció-endomorfizmusokkal generált főjobb-, illetve főbalideálok vizsgálatával mutatjuk ki.

MEGJEGYZÉSEK.

1. Legyen J az A tetszőleges MHR-gyűrű radikálja és $MA = M$, M egy A-modulus. Ha K az M egy részmodulusa, M/K akkor és csak akkor teljesen reducibilis A-modulus, ha $M.J \subseteq K$.

Bizonyítás. Ha M/K teljesen reducibilis, akkor $(M/K)J = K/K$ a 2.7. állítás szerint, tehát $MJ \subseteq K$. Fordítva, ha $MJ \subseteq K$ és $a_1 + J = a_2 + J$, akkor minden $m \in M$ elemre $ma_1 + mJ = ma_2 + mJ$, tehát $ma_1 + K = ma_2 + K$. Ezért M/K egy A/J-jobbmodulus, és $(M/K)(A/J) = M/K$, valamint a 8.1. tétel miatt M/K teljesen reducibilis, mert A/J féligegyszerű MHR-gyűrű.

2. Ha $M/K \neq \bar{o}$ olyan A-modulus, hogy $(M/K)A = M/K$, továbbá ha M/K teljesen reducibilis, és ha bármely olyan A-homomorfizmus, amely egy tetszőleges $M/L = (M/L)A$ teljesen reducibilis A-modulust M/K-ra képez le, szükségképpen izomorfizmus, akkor M-ben a $K(\neq M)$ részmodulust tökéletesnek nevezzük. Egy M modulus pedig akkor tökéletes, ha benne a 0 részmodulus tökéletes. Ezért M/K az előző esetben tökéletes. Mármost M egy K tökéletes részmodulusa egyértelműen meghatározott.

Bizonyítás. Legyen M-ben K_1 és K_2 tökéletes részmodulus. A definíció és az 1. megjegyzés szerint $MJ \subseteq K_i (i = 1, 2)$, ahol J az A radikálja. Tehát $MJ \subseteq K_1 \cap K_2$, és így $M/(K_1 \cap K_2)$ is teljesen reducibilis az 1. megjegyzés miatt. Minthogy pedig a φ_i: $m + (K_1 \cap K_2) \to m + K_1$ leképezés A-homomorfizmus, amely a tökéletesség definíciója szerint izomorfizmus, kell hogy $K_i = K_1 \cap K_2 = K_2$ legyen $(i = 1, 2)$.

Vizsgálhatók az összes alsó és felső *Loewy*-féle rendszerek is, de ezek tárgyalását nem részletezzük. (A felső rendszer a tökéletes részmodulusokkal, az alsó rendszer a hipertalpakkal adható meg.)[11]

[11] Lásd: F. SZÁSZ, Beziehungen zwischen den Abelschen Gruppen und den Assoziativen Ringen mit Minimalbedingung für Hauptrechtsideale, *(Második) II. Magyar Matematikai Kongresszus, Budapest, 1960. augusztus 24—31. Előadáskivonatok.* **2.** 60—62.

9. §. *MMHR*-gyűrűk és szabályos főjobbideálok

9.1. Definíció. *MMHR*-gyűrűnek nevezzük az olyan *MHR*-gyűrűket, amelyekben a főjobbideáloknak a maximum-feltétele is teljesül.

MEGJEGYZÉSEK. Végtelen sok *Artin*-féle egyszerű gyűrűnek a gyűrűelméleti diszkrét direkt összege nem *MMHR*-gyűrű, de *MHR*-gyűrű. Ugyancsak nem *MMHR*-gyűrű, de *MHR*-gyűrű bármely $C(p^\infty)$ típusú zérógyűrű. Bármely véges gyűrű, bármely *Artin*-féle féligegyszerű gyűrű, sőt bármely $C(p^\infty)$ alcsoportot nem tartalmazó *Artin*-féle gyűrű [11] azonban *MMHR*-gyűrű.

9.2. Állítás. Egy féligegyszerű gyűrű akkor és csak akkor *MMHR*-gyűrű, ha *Artin*-féle. Egy A tetszőleges *MMHR*-gyűrű A^+ additív csoportja szükségképpen $A^+ = B \oplus C$ alakú, ahol B torziómentes teljes csoport, C pedig olyan redukált torziócsoport, amelynek csak véges sok különböző $C_p \neq 0$ p-komponense van.

Bizonyítás. Világos, hogy bármely *Artin*-féle féligegyszerű gyűrű *MMHR*-gyűrű. Legyen mármost A féligegyszerű *MMHR*-gyűrű. Ekkor minden végesen generált jobbideál balegységelemes az 5.1. tétel szerint, és minthogy $e_1A \subset e_2A \subset e_3A \subset \cdots (e_i^2 = e_i)$ megszakad, $A = e_m A$, tehát A balegységelemes és így *Artin*-féle az 5.1. állítás utolsó részállítása szerint.

Legyen A^+ egy A tetszőleges *MMHR*-gyűrű additív csoportja. Minthogy $C(p^\infty)$ az A annullátorának része és $C(p^\infty)$ nem *MMHR*-gyűrű, A-nak a B maximális teljes alcsoportja torziómentes, és $A^+ = B \oplus C$, ahol C a 6.1. tétel szerint torziócsoport. Ha C-nek végtelen sok $\neq 0$ különböző p-komponense volna, és ha $a_n \neq 0, p_n a_n = 0$, $c_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, ahol p_n az n-edik prímszám, akkor a $(c_1)_r \subseteq (c_2)_r \subset \cdots$ láncból kiválasztható volna egy végtelen növő lánc, ami lehetetlen. Ezért véges sok a $\neq 0$ p-komponensek száma.

Az alábbi példa azt mutatja, hogy $C_p \neq 0$ korlátos elemrendű volta nem szükséges ahhoz, hogy C_p-re építhető legyen *MMHR*-gyűrű.

9.3. Példa. Legyen $C_p = C(p) \oplus C(p^2) \oplus \cdots \oplus C(p^n) \oplus \cdots$ Világos, hogy C_p redukált csoport, ezért ha definíció szerint $C_p = A^+$ és $A^2 = 0$, akkor A egy *MMHR*-gyűrű, mert ellenkező esetben C_p egy végtelen növő főjobbideálláncát véve: $(c_1)_r \subset (c_2)_r \subset (c_3)_r \subset \cdots$ megadhatók olyan $k_1, k_2, k_3, \cdots$ egész számok, hogy $c_n = p(k_n c_{n+1})$ és feltehető, hogy $c_1 \neq 0, pc_1 = 0$. Ekkor a $b_1 = c_1$ és $b_{n+1} = k_1, k_2 \ldots, k_n, c_{n+1}$ jelöléssel $\{b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots\} \sim C(p^\infty)$, mert $pb_1 = 0$, $b_1 \neq 0, pb_{n+1} = k_1, k_2 \ldots k_{n-1} c_n = b_n$. Ez pedig lehetetlen. Tehát A egy *MMHR*-gyűrű.

Bár C_p korlátos elemrendűsége nem túlságosan erős feltétel, ez a feltétel mégsem látszik szükségesnek ahhoz, hogy C_p-re építhető legyen legalább egy *MMHR*-gyűrű. Másfelől a korlátos elemrendűség nem is elegendő ahhoz hogy minden A^+ feletti A gyürü $MMHR$-gyürü legyen. Ezt mutatja az alábbi

9.4. Példa. Legyen C_p végtelen sok $C(p)$ direkt összege. Ha $A^+ = C_p$ és A végtelen sok K_p prímtest gyűrűelméleti diszkrét direkt összege, akkor A nem $MMHR$-gyűrű, de MHR-gyűrű. (Ha viszont $A^+ = C_p$, $A^2 = 0$, akkor A egy $MMHR$-gyűrű, de nem *Artin*-féle).

9.5. Definíció. Legyen A tetszőleges gyűrű, $e^2 = e \in A$. Az $S = eA$ főjobbideált „szabályosnak" nevezzük, ha a $Q = (1-e)AeA(1-e)$ részgyűrű (amely A-nak kváziideálja STEINFELD OTTÓ szerinti értelemben[12]) nilpotens gyűrű.

MEGJEGYZÉSEK. Általában $1 \notin A$, hanem $1 \in I$, és $(1-e)D = [d-ed \mid d \in D]$. Továbbá $Q = (1-e)AeA \cap AeA(1-e)$, Ha A nem radikálgyűrű és ha A vagy *Artin*-féle vagy pedig $MMHR$-gyűrű, akkor van A-nak egy e főidempotens eleme [7], és ekkor $(1-e)A(1-e)$ nilpotens, tehát Q még inkább nilpotens, azaz eA szabályos főjobbideál A-ban. Továbbá, ha A kommutatív, vagy ha $e^2 = e$ az A-nak a Z centrumában fekszik, vagy pedig ha A nilpotens $(\neq 0)$ elem nélküli gyűrű, akkor eA szintén szabályos főjobbideál. Ha A-ban eA szabályos főjobbideál és ha φ az A-nak egy gyűrűelméleti homomorfizmusa, akkor $(e\varphi)^2 = e\varphi$, és $e\varphi \cdot A\varphi$ szabályos főjobbideál az $A\varphi$ gyűrűben. Tehát szabályos főjobbideálok aránylag gyakran előfordulhatnak.

Most megmutatjuk, hogy nem minden $eA(e^2 = e)$ főjobbideál szabályos.

9.6. Példa. Legyen A a kételemű test feletti 2×2 típusú (tizenhat elemű) teljes matrixgyűrű; amelynek elemei $r_1e_{11} + r_2e_{12} + r_3e_{21} + r_4e_{22}$, ahol $r_i = 0$ vagy $= 1$, és $e_{ij}e_{kl} = \delta_{jk}e_{il}$. Minthogy A egyszerű gyűrű, és $0 \neq e_{11} \in Ae_{11}A$, nyilván $Ae_{11}A = A$, továbbá $1 - e_{11} = e_{22}$, mert $e_{11} + e_{22}$ az A egységeleme. Ezért $0 \neq e_{22} = e_{22}^2 \in e_{22}Ae_{22} = (1-e_{11})Ae_{11}A(1-e_{11}) = Q$ miatt Q nem nilpotens gyűrű, és így $e_{11}A(e_{11}^2 = e_{11})$ nem szabályos főjobbideál A-ban.

A szabályos főjobbideálok legfőbb jelentősége abban látszik, hogy DIEUDONNÉ és HOPKINS vizsgálatait, amelyek egy A gyűrű A_1 talpát tárgyalták, a szabályos főjobbideálok segítségével általánosítani és kiegészíteni tudjuk tetszőleges $\neq 0$ talpú gyűrűkben, így speciálisan az MHR-gyűrűkben és $MMHR$-gyűrűkben is [8], [16].

Jelölések. Legyen A tetszőleges gyűrű, amelynek a talpa $A_1 \neq 0$. Legyen H_μ egy rögzített minimális jobbideállal A-izomorf összes jobbideál összege, azaz A_1-nek egy homogén H_μ komponense. Tudvalévően $A_1 = \sum_\mu \oplus H_\mu$. Legyen továbbá N_μ az A összes H_μ-ben fekvő nilpotens jobbideáljának az összege, és M_μ olyan jobbideál A-ban, amely N_μ-höz kiegészítő direkt összeadandó

[12] Acta Math. Acad. Sci. Hung. 6 (1955) 479—484.

H_μ-ben. Ismeretes, hogy mind M_μ, mind H_μ bármely jobbideálja A-nak is jobbideálja [8].

Érvényes a következő

9.7. **Tétel.** Legyen A tetszőleges gyűrű, amelynek a talpa $A_1 \neq 0$. A jelölések legyenek az előzőekben ismertetettek. Legyen $e \in A_1$, $e^2 = e$, $R = eA$, és R az A-nak szabályos főjobbideálja.

Akkor e kétoldali egységelem R-ben, R-nek minden jobbideálja A-nak is jobbideálja és R Artin-féle féligegyszerű gyűrű. Ha N bizonyos (pl. az összes) N_μ összege, akkor $eN = 0$, de általában $N_0 = Ne \neq 0$.

Legyen $n \in N_0$ tetszőleges elem. Ekkor $eA \oplus N = (e+n)A \oplus N$, ahol $(e+n)^2 = e+n$, sőt $(e+n)A$ szabályos főjobbideál A-ban. Továbbá $ex \to (e+n)x$ egy A-izomorfizmus, és $A(1-e) \subseteq (1-e-n)A$; $A(1-e-n) \subseteq \subseteq (1-e)A$. Csak $n_1 = n_2$ esetén lehet $(e+n_1A = (e+n_2)A (n_i \in N_0)$.

Ha — megfordítva — teljesül egy tetszőleges R jobbideállal $eA \oplus N = R \oplus N$, akkor R szükségképpen szabályos főjobbideál, amelynek kétoldali egységeleme $e+m$, ahol m alkalmas elem N_0-ból, tehát: $R = (e+m)A = (e+m)A(e+m)$.

Bizonyítás. Legyen $e^2 = e \in A_1$ és eA szabályos főjobbideál, továbbá $B = eA(1-e) + AeA(1-e)$, $Q = (1-e)AeA(1-e)$. Ekkor B balideál A-ban, és *Peirce*-féle felbontás miatt, valamint $(eA)^2 = eA$ miatt $B = Q + eA(1-e)$. Feltétel szerint eA szabályos, tehát $Q^m = 0$ egy m természetes számra. Teljes indukcióval igazolható $B^k = Q^k + eA(1-e) \cdot Q^{k-1} (k \geqq 2)$. Ezért $B^{m+1} = 0$ és így $C = B + BA$ az A-nak nilpotens kétoldali ideálja. Tehát $D = eA \cap C$ az A-nak nilpotens jobbideálja és a 2.6. állítás szerint $eA = D \oplus E$, ahol E az A-nak jobbideálja. De ekkor D is balegységelemes, és így $D = 0$. Ebből pedig $eA(1-e) \subseteq B \subseteq C$ és $eA(1-e) \subseteq eA$ miatt $eA(1-e) \subseteq D$, tehát $eA(1-e) = 0$ folyik. Ennélfogva *Peirce*-féle felbontással $eA = eAe$, azaz e kétoldali egységelem az eA szabályos főjobbideálban. Minthogy pedig $A = (1-e)A + eAe$, $(eAe)^2 \subseteq eAe$, $eAe \cdot (1-e)A = 0$, világos, hogy eAe bármely jobbideálja A-nak is jobbideálja. Így $(eA)^2 = eA \subseteq A_1$ miatt eA *Artin*-féle féligegyszerű gyűrű.

Minthogy $eA \cap N = 0$, nyilván $eN = 0$.

Legyen továbbá $N_0 = N_e$ és $n \in N_0$. Ekkor $en = 0$, $ne = n$ és $n^2 = 0$ miatt valóban $(e+n)^2 = e+n$. Minthogy $ea = (e+n)a - na$ és $(e+n)b = eb + nb (a, b \in A)$, érvényes $eA \oplus N = (e+n)A \oplus N$, hiszen $(e+n)A \cap N$ balegységelemes nilpotens jobbideál, amely A_1 része, tehát ez a metszet O. Már ez a direkt előállítás is mutatja, hogy eA és $(e+n)A$ egymással A-izomorfok. Legyen $\varphi_1 : x \to ex (x \in A)$; $\varphi_2 : x \to (e+n)x (x \in A)$; φ_1 magva K_1, φ_2 magva K_2, amelyek A jobbideáljai. Ha $x_2 \in K_2$, akkor $ex_2 = -nx_2 \in eA \cap N = 0$, tehát $x_2 \in K_1$. Ha pedig $x_1 \in K_1$, akkor $n = ne$ miatt $(e+n)x_1 = 0$ és így $x_1 \in K_2$. Ezért $K_1 = K_2$ és a $\varphi : ex \to (e+n)x$ leképezés valóban A-izomorfizmus.

Megmutatjuk, hogy eA-val együtt $(e+n)A$ is szabályos főjobbideál A-ban. Elég megmutatni, hogy $Q^* = (1-e-n)A(e+n)A(1-e-n)$ nilpotens. Feltétel szerint $Q = (1-e)AeA(1-e)$ nilpotens, tehát $Q^k = 0$. Bebizonyítjuk, hogy $(Q^*)^{2k} = 0$, ami abból fog folyni, hogy $\{Q, N\}^{2k} = 0$ és $Q^* \subseteq \{Q, N\}$. Ugyanis Q^* minden eleme $q+n$ alakú, ahol $q \in Q$ és $n \in N$. Jelöljön továbbá P egy tetszőleges $2k$-tényezős szorzatot, amelynek tényezői a $Q \cup N$ halmazelméleti egyesítésből valók. Ha P-nek nincs tényezője N-ből, akkor $P \in Q^{2k}$, tehát Q^k miatt $P = 0$. Ha P pontosan egy tényezőt tartalmaz N-ből, akkor $P = q_1 \dots q_s \cdot n \cdot q_1' \cdots q_t'$, ahol $q_i, q_j' \in Q, n \in N$. Ha $s \leqq k-1$, és $t \leqq s-1$ volna, akkor P nem lehetne $2k$-tényezős szorzat, ezért vagy $s \geqq k$, vagy $t \geqq k$, és ezért $Q^k = 0$ miatt $P = 0$. Ha végül P az N-ből legalább két tényezőt tartalmaz, akkor $P \in N^2$, mert N ideál, tehát $P = 0$. Ezért valóban $(Q^*)^{2k} = 0$, és $(e+n)A$ szabályos főjobbideál. Minthogy pedig $ex \to (e+n)A$ egy A-izomorfizmus, $A(1-e) = A(1-e-n)$. Továbbá $eA = eAe$ miatt $A(1-e) = (1-e)A(1-e) \subseteq (1-e)A$ és így $A \cdot (1-e-n) \subseteq (1-e)A$, valamint $A(1-e) \subseteq (1-e-n)A$, mert $(e+n)A$ is szabályos főjobbideál.

Ha $(e+n_1)A = (e+n_2)A (n_i \in N_0 = Ne)$, akkor létezik olyan $a \in A$, hogy $(e+n_1)e = (e+n_2)a$, ahonnan $n_2 - n_1 = (n_2 - n_1)e = n_2e - (ea + n_2a - e) = (e+n_2)(e-a) \in (e+n_2)A \cap N_0$, tehát $n_2 - n_1 = 0$ és $n_1 = n_2$.

Teljesüljön végül A-nak egy tetszőleges R jobbideáljára $R \oplus N = eA \oplus N$, ahol eA az előbbi szabályos főjobbideál ($e^2 = e$). Ekkor $e = f + n$, ahol $f \in R$ és $n \in N$. Mármost $N^2 = 0$ és $(f+n)^2 = f + n$ miatt $f^2 - f \equiv n - nf (\mathrm{mod}\ R \cap N)$, és így $f^2 = f, nf = n$ valamint triviálisan $fn = 0, n^2 = 0$. Nyilván $fA \oplus N = eA \oplus N = R \oplus N \supseteq fA \oplus N$, mert $e = f^2 + n$ és $f \in R$. Ezért $fA \oplus N = R \oplus N$, $fA \subseteq R, fA \cap N = R \cap N (=0)$, ami A^+ alcsoportjai hálójának modularitása miatt azt jelenti, hogy $R = fA$. Továbbá $f = e + m$, ahol $m = -n \in N$, valamint $me = -n(f+n) = -nf - n^2 = -nf = m$. Ezért $m \in N_0Ne$ és $R = (e+m)A$, amit bizonyítani akartunk.

9.8. Állítás. A jelölések a 9.7. tétel jelöléseivel azonosak és legyen A vagy *Artin*-féle vagy *MMHR*-gyűrű. Legyen H^* néhány H_μ direkt összege, $N^* = H^* \cap J$, ahol J az A radikálja és M^* az A olyan jobbideálja, amely H^*-ban N^*-hoz egy kiegészítő direkt összeadandó. Akkor M^* szabályos főjobbideál A-ban.

Bizonyítás. M^* véges sok $e_iA(e_i^2 = e_i)$ idempotens minimális jobbideál direkt összege. Feltehető, hogy $e_{i+1} \in (1-e_i)(1-e_{i-1}) \cdots (1-e_1)M^*$, és ezzel belátható — hasonlóan az 5.1. tétel *a)*-ból következő *b)* része bizonyításához — hogy M^* balegységelemes, azaz $M^* = eA$, ahol $e^2 = e$. Megmutatjuk, hogy eA

szabályos főjobbideál, — azaz $Q=(1-e)AeA(1-e)$ nilpotens gyűrű. Világos, hogy $Q\subseteq(1-e)A\cap H^*=D$. Ha $d\in D$, akkor létezik olyan $a_1, a_2\in A, n\in N^*$, hogy $d=(1-e)a_1=ea_2+n\in M^*\oplus N^*$. Ebből e-vel balról való szorzás után $e^2a_2+en=0$, ezért $ea_2=-en\in M^*\cap N^*$, $ea_2=en=0$, $d=n$, tehát $N^*\supseteq D\supseteq Q$. Minthogy pedig $N^2=0$ miatt $Q^2=0$, az $M^*=eA$ jobbideál valóban szabályos.

MEGJEGYZÉS. A 9.7. tételnek és a 9.8. állításnak következménye az, hogy ha A vagy *Artin*-féle, vagy *MMHR*-gyűrű, és ha a jelölések megegyeznek a 10.2. állítás jelöléseivel, akkor M^*-nak bármely jobbideálja A-nak is jobbideálja, ezért M^* *Artin*-féle féligegyszerű gyűrű.

10. §. Kiegészítések és problémák

10.1. Definíció. Egy A gyűrűt *MHU*-gyűrűnek nevezünk, ha teljesül az A egy elemmel generált részgyűrűinek a minimum-feltétele.

10.2. Definíció. Egy A gyűrűt *V*-gyűrűnek nevezünk akkor, ha A bármely végesen generált valódi $(\neq A)$ részgyűrűje főjobbideál.

MEGJEGYZÉSEK. Minden véges gyűrű, és minden torziócsoportú zérógyűrű szükségképpen *MHU*-gyűrű. Mint ismeretes, a szovjet V. I. SNEIDMYULLER olyan szűkebb gyűrűosztályt [30] vizsgált, amely az összes részgyűrűkre nézve minimum-feltételű gyűrűkből áll. Ez az osztály valódi része az *MHU*-gyűrűk osztályának, mert egyrészt nyilván része, másrészt egy elemi p-csoportú végtelen zérógyűrű *MHU*-gyűrű, de benne nem teljesül a tetszőleges részgyűrűk minimum-feltétele. Azt is láttuk a 6.1. tétel utolsó részállításánál, hogy bármely nilpotens MH_1R-gyűrű *MHU*-gyűrű. Világos, hogy *MHU*-gyűrű bármely részgyűrűje és bármely homomorf képe szintén *MHU*-gyűrű, és hogy egy $A\neq 0$ tetszőleges *MHU*-gyűrű bármely $\neq 0$ részgyűrűje tartalmaz $\neq 0$ minimális részgyűrűt, ami vagy p-elemű test, vagy p-elemű zárógyűrű. — Továbbá egy *V*-gyűrű bármely részgyűrűje és homomorf képe szintén *V*-gyűrű. Egy *V*-gyűrű, amely *MHU*-gyűrű is, a definíció miatt *MHR*-gyűrű is. Fordítva, legyen A olyan *V*-gyűrű, amely *MHR*-gyűrű. Ekkor $(a)_r=\{a\}+aA$ és $aA\subseteq\{a\}$ miatt $\{a\}=(a)_r$, tehát A egyszersmind *MHU*-gyűrű is. Tehát egy *V*-gyűrű pontosan akkor *MHU*-gyűrű, ha *MHR* gyűrű. Az olyan A véges elemi p-csoportú zérógyűrűk, amelyekre $|A|\geqq p^3$ teljesül és a véges testek azt mutatják, hogy A-nak nem mindig kell *V*-gyűrűnek vagy nilpotens MH_1R-gyűrűnek lenni ahhoz, hogy a főjobbideáloknak és az egy elemmel generált részgyűrűknek a minimum-feltétele egymásból következzék. A végtelen *V*-gyűrűk osztályán belül csak az olyan zérógyűrűk lesznek *MHR*-gyűrűk, amelyeknél A^+ torziócsoport, és a p-komponensei $A_p^+\cong C(p^\infty)$. Ennek a meglepő dolognak az oka az alábbi eredményünk, amelyet itt csak kimondunk, de nem bizonyítunk:

10.3. **Tétel.** Az összes V-gyűrűk izomorfiától eltekintve a következők:

A_1) a racionális egészek gyűrűjének részgyűrűi;

A_2) elsőrangú torziómentes zérógyűrűk;

B_1) egy A_1) alatti gyűrűnek és bizonyos egységelemes, négyzetmentes számrendű véges gyűrűnek a gyűrűelméleti direkt összege;

B_2) egy A_2) alatti gyűrűnek és bizonyos torziócsoportú féligegyszerű gyűrűnek a gyűrűelméleti direkt összege;

C) az összes $C(p^\infty)$ típusú zérógyűrűk;

D_1) az $\{x\}$, $px=x^4-x^3=0$ gyűrűk összes részgyűrűi (amelyek explicit meghatározhatók);

D_2) p^2-rendű, nem ciklikus csoportú zérógyűrűk;

D_3) az $\{x,y\}$, $px=py=x^2=y^2-y=xy-x=yx=0$ gyűrűk;

D_4) az $\{x,y\}$, $px=py=x^3=y^3xy=yx=x^2-ky^2=0$ gyűrűk, ahol p páratlan prímszám, $(p,k)=1$ és $(-k)$ kvadratikus nem-maradék modulo p;

D_5) az $\{x,y\}$, $px=py=xy=yx-y^2=x^3=y^3=y^2-kx^2=0$ gyűrűk, ahol p páratlan prímszám, $(p,k)=1$ és (k^2-4k) kvadratikus nem-maradék modulo p (Ilyen k minden p páratlan prímszámhoz létezik.);

D_6) az $\{x,y\}$, $x+xy+y=xy=yx-y^2=x^3=y^3=x^2-y^2=0$ gyűrűk;

E_1) az $\{x\}$, $p^nx=x^2-p^fx=0$ gyűrűk, ahol $2\leqq n\in I$, $0\leqq f\in I$, $n\geqq f$;

E_2) az $\{x\}$, $p^nx=p(x^2-p^fx)=x(x^2-p^fx)-(x^2-p^fx)$ gyűrűk, ahol $2\leqq n\in I$, $1\leqq f\in I$, $n\geqq f$;

F) az olyan nem-p-csoportú, de torziócsoportú A gyűrűk, amelyeknél bármely p-komponens izomorf egy C, D_1, E_1, vagy E_2-nél felsorolt gyűrűvel.

Megjegyezzük még az MHU-gyűrűkkel kapcsolatban, hogy a K_0 racionális számtest, bár MHR-gyűrű, nem MHU-gyűrű. Az alábbi példa pedig azt mutatja, hogy létezik olyan MHU-gyűrű, amely nem MHR-gyűrű. Ez a két gyűrű nyilván nem is V-gyűrű.

10.4. Példa. Legyen az A gyűrű $\{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$, ahol $a_n+a_n=a_n^{n+1}=$ $=a_na_m+a_ma_n=0$. Ekkor A végtelen, kommutatív, nem-nilpotens nilgyűrű. Minthogy minden elem $\sum a_{i_1}^{k_1}, a_{i_2}^{k_2}\ldots a_{i_n}^{k_n}$ $(k_n\leqq i_n)$ alakú véges összeg, minden végesen generált részgyűrű véges, ezért A egy MHU-gyűrű. Továbbá $(a_1)_r\supset(a_1a_2)_r\supset(a_1a_2a_3)_r\supset\cdots$ miatt A nem MHR-gyűrű.

Az MHU-gyűrűkre érvényes a következő

10.5. Állítás. Bármely MHU-gyűrű additív csoportja torziócsoport. Minden MHU-ferdetest kommutatív, prímkarakterisztikájú és abszolút algebrai. Ha A olyan MHU-radikálgyűrű, amely MHR-gyűrű is, akkor A elemei az $r_1\circ r_2=r_1+r_2-r_1r_2$ műveletre nézve egy G (nem feltétlenül feloldható) torziócsoportot alkotnak. G a *Sylow*-féle p-alcsoportjainak a direkt „szorzata". Továbbá G-nek létezik a tartalmazási relációra nézve nem feltétlenül jólrendezett transzfinit feloldható invariáns rendszere, azaz olyan $G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq \cdots \cdots \supseteq G_\alpha \supseteq \cdots \supseteq G_\alpha = 0$ normálosztórendszere, hogy G_β / G_γ Abel-féle csoport, ha $G_\beta \supseteq G_\gamma$ és ha nincs a rendszernek olyan G_δ normálosztója, hogy $G_\beta \supset G_\delta \supset G_\gamma$. Ez a rendszer a $\subseteq$ tartalmazás ellentett $\precsim$ relációjára nézve már jólrendezett. (Tehát $B \precsim C$ pontosan akkor teljesül, ha $B \supseteq C$).

Bizonyítás. Először megmutatjuk, hogy bármely A MHU-gyűrű A^+ additív csoportja torziócsoport, azaz $A^+ = T$, ahol T az A^+ maximális torzióalcsoportja. T ideál A-ban, és ha $T \neq A$ volna, akkor $(A/T)^+ \neq \bar{o}$ torziómentes lenne $A/T \neq 0$, azonban tartalmazna minimális $\neq 0$ részgyűrűt, így p-rendű elemet is, ami lehetetlen. Ezért $A/T = \bar{o}$ $A = T$, ami azt mutatja, hogy A^+ valóban torziócsoport. Megfordítva, bármely torziócsoportra építhető egy MHU-zérógyűrű.

Minthogy MHU-gyűrűnek bármely részgyűrűje is MHU-gyűrű, és a K_0 racionális számtesben az egészekből álló I-gyűrű nem MHU-gyűrű, bármely A MHU-ferdetest prímkarakterisztikájú. Ha a K_p prímtest felett egy $x \neq 0$ elem transzcendens volna, akkor $\{x\} \supset \{x^2\} \supset \cdots \supset \{x^{2^n}\} \supset \cdots$ egy elemmel generált részgyűrűknek végtelen fogyó lánca, ami lehetetlen. Ezért bármely A MHU-ferdetest abszolút algebrai. Ha $a \in A$, akkor $\{a\}$ véges nullosztómentes gyűrű, tehát $\{a\}$ kommutatív véges test. Ennélfogva létezik olyan k természetes szám, hogy $a^{p^k} - a = 0$. JACOBSON [17] tétele szerint A kommutatív gyűrű. Ezért, ha A MHU-ferdetest, akkor kommutatív, prímkarakterisztikájú, abszolút algebrai test.

Legyen most A olyan MHU-radikálgyűrű, amely MHR-gyűrű is. Ekkor A nilgyűrű, és ha $r_1 \circ r_2 = r_1 + r_2 - r_1 \cdot r_2$, $a \in A$, $a^m = 0$, $a^{m-1} \neq 0$, $b = -(a + a^2 + \cdots + a^{m-1})$, akkor $a \circ O = O \circ a = a$ és $a \circ b = b \circ a = 0$ mutatja, hogy a $G = (A, \circ)$ struktúra valóban csoport, hiszen $a \circ (b \circ c) = a + b + c - ab - ac - bc + abc = (a \circ b) \circ c$. Továbbá $(A, +)$ az előzőek szerint Abel-féle torziócsoport. Ha $p^k a = 0$ és $q^l b = 0$ (p, q különböző prímszámok), akkor $a \circ b = a + b$ sőt minden elem egyértelműen $a_{p_1} \circ a_{p_2} \circ \cdots \circ a_{p_n}$ alakban írható, ahol a_{p_i}-nek az additív rendje A-ban egy p_i-hatvány. ($i \neq j$ esetén $p_i \neq p_j$). Ezért $G = A_{p_1} \otimes \ldots \otimes A_{p_i} \otimes \ldots$, ahol A_{p_i} az A^+-nak a p_i-komponense. Minthogy pedig A-ban $\{a\}$ véges részgyűrű, és $a \circ a \in \{a\}$, világos, hogy G torziócsoport. Legyen $|\{a\}| = p^m$. Minthogy a p^m-számú összes elem a véges $\{a\}$ gyűrűből G-nek egy részcsoportját alkotja, amelynek a G-ben az a által generált csoport részcsoportja, Lagrange tétele miatt kell hogy a rendje G-ben egy p^k szám legyen, ahol $k \leq m$. Ha most $b \in A_p$, akkor $a \circ b \in A_p$, tehát A_p részcsoport G-ben az előzőek szerint, és A_p p-csoport G-ben. G-nek bármely p_i-rendű eleme $b_i = a_{p_i} \circ a_{q_1} \circ \cdots \circ a_{q_j}$ alakú, ahol $a_{p_i} \in A_{p_i}$, és $q_n \neq p_i$, $a_{q_n} \in A_{q_n}$.

Így az egyértelműség miatt $b_i = a_{p_i}$, ami azt jelenti, hogy A_{p_i} a G_p-nek egyetlen *Sylow*-féle alcsoportja, tehát normálosztója. Ezzel kapcsolatban megemlítjük, hogy ha N tetszőleges kétoldali ideál A-ban, akkor N normálosztó G-ben. Ha ugyanis $a \circ c = a + c - ac = 0$ $(a, c \in A)$ és $b \in N$, akkor $a \circ b \circ c = a + b + c - ab - ac - bc + abc = (a + c - ac) + (b - ab - bc + abc) \in N$. Mármost $A = J$ radikálgyűrű, ezért a transzfinit hatványok egy $A \supseteq A^2 \supseteq \cdots \cdots \supseteq A^{\omega} \supseteq \cdots \supset A^{\delta} = 0$ transzfinit normálosztóláncot alkotnak G-ben. Továbbá $(r_1 \circ A^{\beta+1}) \circ (r_2 \circ A^{\beta+1}) = (r_1 + A^{\beta+1}) \circ (r_2 + A^{\beta+1}) = (r_1 + r_2 - r_1 r_2) + A^{\beta+1} = (r_1 + r_2) + A^{\beta+1}$, ha $r_i \in A^{\beta}$, mert $r_1 r_2 \in A^{\beta+1}$. Ezért $r_1 + r_2 = r_2 + r_1$ miatt $A^{\beta}/A^{\beta+1}$ *Abel*-féle csoport, és $A \supseteq A^2 \supseteq \cdots \supseteq A^{\omega} \supseteq \cdots$ a normálosztóknak transzfinit feloldható, invariáns rendszere.

Befejezésképpen összegyűjtünk néhány nyitott problémát, amelyek az *MHR*-gyűrűknek az előzőekben kifejtett egyik elméletével közvetlen vagy közvetett kapcsolatban állnak:

1. Probléma. Milyenek egy *MHR*-gyűrű felett vett $n \times n$ típusú teljes matrixgyűrűk?

2. Probléma. Létezik-e olyan *MHR*-gyűrű, amelynek végtelen sok főbalideálja és véges sok főjobbideálja van?

3. Probléma. Létezik-e olyan *MHR*-gyűrű, amelyben nem teljesül a végesen generált jobbideálok minimum-feltétele?

4. Probléma. Létezik-e olyan *MHR*-gyűrű, amelyben nem teljesül a minimum-feltétel az olyan jobbideálokra, amelyek egy főjobbideál hatványai?

5. Probléma. Mi annak egy szükséges és elegendő feltétele, hogy egy *MHR*-gyűrű *MHL*-gyűrű legyen?

6. Probléma. Mi annak egy szükséges és elegendő feltétele, hogy egy *MHR*-gyűrű *MMHR*-gyűrű legyen?

7. Probléma. Mi annak egy szükséges és elegendő feltétele, hogy egy *MHR*-gyűrű *MHU*-gyűrű (ill. egy *MHU*-gyűrű *MHR*-gyűrű) legyen?

8. Probléma. Létezik-e olyan *MHR*-radikálgyűrű, amely nem *MHL*-gyűrű?

9. Probléma. Létezik-e olyan *MHR*-radikálgyűrű, amelynek egy részgyűrűje nem *MHR*-gyűrű?

10. Probléma. Mi annak egy szükséges és elegendő feltétele, hogy egy *MHR*-gyűrűben teljesüljön a *Lie*-féle (ill. *Jordan*-féle) főideálok minimumfeltétele?

11. Probléma. Mi annak egy szükséges és elegendő feltétele, hogy bármely olyan gyűrű *MHR*-gyűrű legyen, amelyben teljesül a *Lie*-féle (ill. *Jordan*-féle) főideálok minimum-feltétele?

12. Probléma. Leírandó az összes olyan zérusosztómentes egyszerű gyűrű, amely nem ferdetest!

13. Probléma. Mi annak egy szükséges és elegendő feltétele, hogy egy *MHR*-gyűrű beágyazható legyen egyszerű *MHR*-gyűrűbe?

14. Probléma. Mi annak egy szükséges és elegendő feltétele, hogy az E_α egyszerű gyűrűk egy szubdirekt összegében az E_α gyűrűk izomorfizmustól eltekintve egyértelműen meghatározottak legyenek?

15. Probléma. Melyek azok az összes gyűrűk, amelyeknek bármely főjobbideálban fekvő balideáljuk balegységelemes (ill. jobbegységelemes)?

16. Probléma.[13] Ha $\mathfrak{m}$ és $\mathfrak{n}$ két különböző végtelen számosság, létezik-e olyan gyűrű, amely $\mathfrak{m}$ idempotens minimális jobbideáljának és $\mathfrak{n}$ idempotens minimális balideáljának a diszkrét direkt összege?

17. Probléma. Létezik-e olyan A *MHR*-gyűrű (ill. tetszőleges gyűrű), amelynek egy e idempotens elemével $(1-e)A(1-e)$ nem nilpotens, de $(1-e)AeA(1-e)$ nilpotens részgyűrű?

18. Probléma. Létezik-e minden γ rendszámhoz olyan A *MHR*-gyűrű, amelynek a J radikáljára $J^\gamma = 0$ és $\beta < \gamma$ esetén $J^\beta \neq 0$?

19. Probléma. Létezik-e minden γ rendszámhoz olyan A nemtriviális *MHR*-gyűrű, hogy a J radikál J^γ hatványának balannullátora A-ban nem az A_β β-adik talp?

20. Probléma. Mi annak egy szükséges és elegendő feltétele, hogy egy A *MHR*-gyűrűben a β-adik talp és β-adik baltalp egymással egybeessék?

21. Probléma. Minden *MHR*-gyűrűben része-e a *Brown—McCoy*-féle radikál a *Fuchs*-féle radikálnak?

22. Probléma. Mi annak egy szükséges és elegendő feltétele, hogy *MHR*-gyűrűnek a *Fuchs*-féle radikál szerint vett faktorgyűrűje *Fuchs*-féle radikálmentes legyen?

23. Probléma. Mi annak egy szükséges és elegendő feltétele, hogy egy nem egységelemes *MHR*-gyűrűt beágyazhassunk egy egységelemes *MHR*-gyűrűbe?

24. Probléma. Mi annak egy szükséges és elegendő feltétele, hogy egy *Abel*-féle csoport egy *MMHR*-gyűrű additív csoportja legyen?

25. Probléma. Egy M Abel-féle csoport E teljes endomorfizmusgyűrűjének milyen A részgyűrűire teljesül az, hogy az A-részgyűrű E-re vonatkozó centralizátorának centralizátora maga A?

[13] Időközben ezt a problémát a szerző megoldotta.

26. Probléma. Milyen *Abel*-féle csoportoknak van nem-triviális *MHR*-gyűrű részgyűrűje a teljes endomorfizmusgyűrűjükben?

27. Probléma. Leírandó az összes olyan G *Abel*-féle csoport, amelyek teljes endomorfizmusgyűrűjében teljesül a kétoldali főideálok minimum feltétele! (Meghatározandó egy szükséges és elegendő feltétel.)

28. Probléma. Legyen A tetszőleges *MHR*-gyűrű és M egy A-jobbmodulus. Mi mondható a felső és alsó *Loewy*-féle rendszerekről, ha $MA \neq M$, vagy ha van olyan $a \in A$, hogy $a \notin aA$ vagy ha a radikál nem nilpotens?

IRODALOM

[1] E. Artin—C. J. Nesbitt—R. M. Thrall, *Rings with minimum condition,* Ann Arbor, Michigan, (1944).

[2] R. Baer, Radical ideals, *Amer. Jour. Math.* **65** (1943) 537—568.

[3] G. Birkhoff, Subdirect unions in universal algebra, *Bull. Amer. Math. Soc.* **50** (1944) 764—768.

[4] B. Brown—N. H. McCoy, Radicals and subdirect sums, *Amer. Jour. Math.* **69** (1947) 46—58.

[5] P. M. Cohn, Simple rings without zero-divisors, and Lie division rings, *Mathematika* **61** (1959) 14—18.

[6] R. Dedekind, *Gesammelte mathematische Werke,* Braunschweig (Vieweg) 1931—32.

[7] M. Deuring, Algebren, *Ergebnisse der Math.* **4.**, Berlin, 1937.

[8] J. Dieudonné, Sur le socle d'un anneau et les anneaux simples infinis, *Bull. Soc. Math. France* **70** (1942) 46—75.

[9] C. C. Faith, Rings with minimum condition on principal ideals, *Archiv der Math.* **10**: 5 (1959) 327—330.

[10] L. Fuchs, On a new type of radical, *Acta Sci. Math.* **16** (1955) 43—53.

[11] L. Fuchs, *Abelian groups,* Publishing House Hung. Acad. Sci. Budapest, 1958.

[12] L. Fuchs—T. Szele, Contribution to the theory of semi-simple rings, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **3** (1952) 233—239.

[13] А. И. Герчиков, Кольца, разложимые в прямую сумму тел, Мат. Сбор. **7** (49) (1940) 591—597.

[14] O. Goldman, A characterization of semi-simple rings with the descending chain condition, *Bull. Amer. Math. Soc.* **52** (1946) 1021—1027.

[15] M. Harada, Note on the dimension of modules and algebras, *Jour. Inst. Polytechnic,* Osaka City Univ. **7** (1956) 17—27.

[16] Ch. Hopkins, Rings with minimal condition for left ideals, *Ann. Math.* **40** (1939) 712—730.

[17] N. Jacobson, Structure of rings, *Amer. Math. Soc. Coll. Publ.* **37** (1956).

[18] A. Kertész, Beiträge zur Theorie der Operatormoduln, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **8** (1957) 235—257.

[19] A. Kertész, Eine Charakterisierung der halbeinfachen Ringe, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **9** (1958) 343—344.

[20] L. Kovács, A note on regular rings, *Publ. Math. Debrecen* **4** (1956) 465—468.

[21] A. G. Kuros, *Csoportelmélet,* Akadémiai Kiadó, Budapest (1955).

[22] Lajos S., A félcsoportok ideálelméletéhez, *MTA III. Oszt. Közl.* 11 (1961) 57—66.

[23] J. LEVITZKI, On the radical of a general ring, *Bull. Amer. Math. Soc.* **49** (1943) 462—466.
[24] A. I. MALCEV, On the immersion of an algebraic ring into a field, *Math. Ann.* **113** (1937) 686—691.
[25] N. H. MCCOY, Prime ideals in general rings, *Amer, Jour, Math.* 71 (1949) 823—833.
[26] J. VON NEUMANN, *Continuous geometry,* Princeton, 1937.
[27] I. PEÁK, Ein Satz über Halbgruppen, *Publ. Math. Debrecen* **6** (1959) 111—112.
[28] L. RÉDEI, *Algebra* I., Akad. Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1959.
[29] L. RÉDEI, Vollidealringe im weiteren Sinn I., *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **3** (1952) 243—268.
[30] В. И. Шнейдмюллер, Бесконечные кольца а конечными убывающими цепями подколец, Математ. Сборник **27** (69) : 2 (1950) 219—228.
[31] F. SZÁSZ, Note on rings in which every proper left-ideal is cyclic. *Fund. Math.* **44** (1957) 330—332.
[32] F. SZÁSZ, Die explizite Bestimmung von einigen Klassen der assoziativen Ringe, *Bull. Acad. Polon. Sci. Cl. III.*, **7** (1959), 107—110.
[33] F. SZÁSZ, Az operátormodulusok Kertész-féle radikáljáról, *MTA III. Oszt. Közl.* **10** (1960) 35—38.
[34] F. SZÁSZ, Über Ringe mit Minimalbedingung für Hauptrechtsideale I., *Publ. Math. Debrecen* **7** (1960) 54—64.
[35] F. SZÁSZ, Über Ringe mit Minimalbedingung für Hauptrechtsideale, II., *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* (sajtó alatt).
[36] T. SZELE, Die Ringe ohne Linksideale, Bul. Ştii. Acad. Rep. Pop. Romîne **1** (1949) 783—789.
[37] T. SZELE, Nilpotent Artinian rings, *Publ. Math. Debrecen* **4** (1955) 71—78.
[38] B. L. VAN DER WAERDEN, *Algebra II.*, Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1955.

(Beérkezett: 1960. VI. 10.)

A Magyar Tudományos Akadémia
Matematikai Kutató Intézete

A KÜLFÖLDI SZAKIRODALOMBÓL

A SÍKBELI TARTOMÁNYOK KVÁZI-KONFORM LEKÉPEZÉSEI ELMÉLETÉNEK ÁLTALÁNOS FELADATA*

Írta: M. LAVRENTYEV (Kiev)

A jelen cikk számos olyan állítás bizonyítását tartalmazza, amelyet a szerző két korábbi közleményben (Общая задача квази-конформных отображений плоских областей, Доклады Академии наук УССР, 1946; Квазиконформные отображения и их производные системы, Доклады Академии наук СССР, 1946) fogalmazott meg.

1. Alapfogalmak. Azt mondjuk, hogy a

$$(1)\qquad \begin{cases} \Phi_1\left(x, y, u, v, \dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial v}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial y}\right)=0, \\ \Phi_2\left(x, y, u, v, \dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial v}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial y}\right)=0 \end{cases}$$

egyenletrendszer lehetővé teszi az x, y sík D tartományának az u, v sík $\varDelta$ tartományára való kvázi-konform leképezését, ha a D tartománynak van olyan homeomorf leképezése $\varDelta$-ra, amelyet az (1) egyenletrendszert kielégítő

$$(2)\qquad \begin{cases} u=u(x, y), \\ v=v(x, y) \end{cases}$$

függvények létesítenek. Azt fogjuk továbbá mondani, hogy a (2) leképezés megfelel az (1) rendszernek.

D-nek $\varDelta$-ra való, adott (1) egyenletrendszernek megfelelő leképezése megszerkesztésének a feladatát a kvázi-konform leképezések általános feladatának vagy általánosított *Riemann*-feladatnak fogjuk nevezni. Nyilvánvaló, hogy abban az esetben, amikor az (1) rendszer a *Cauchy—Riemann*-féle egyenletrendszerrel azonos, az általánosított *Riemann*-feladat átmegy a konform leképezés *Riemann*-feladatába.

Ugyanúgy, ahogy az ideális folyadék stacionárius áramlásának a feladatai a konform leképezés feladataira vezethetők vissza, az ideális gáz stacionárius áramlásának számos feladatát (síkbeli és tengelyes szimmetriájú áram-

* Математический сборник, 21 (1947), № 2, 285-320.

lás) a gázdinamika egyenleteinek megfelelő kvázi-konform leképezésre vonatkozó feladatként lehet megfogalmazni.

2. A leképezés karakterisztikái. Adjuk meg a tetszés szerinti (1) egyenletrendszernek megfelelő kvázi-konform leképezés geometriai interpretációját. E célból bevezetjük a leképezés adott pontban vett karakterisztikáinak a fogalmát.

Legyen adva egy az (1) rendszernek megfelelő (2) kvázi-konform leképezés. Vegyük a vizsgált leképezés lineáris főrészét tetszés szerinti egymásnak megfelelő pontokból álló párra vonatkozólag:

$$
(3)\qquad \begin{cases} u-u_0=u_x(x-x_0)+u_y(y-y_0), \\ v-v_0=v_x(x-x_0)+v_y(y-y_0). \end{cases}
$$

Tekintsünk az u, v síkban egy egységnyi oldalú négyzetet, amelynek egyik csúcsa $w_0=u_0+iv_0$, két oldala $\overline{w_0 w_1}$ és $\overline{w_0 w_2}$,

$$
w_2-w_0=(w_1-w_0)e^{i\frac{\pi}{2}}.
$$

Jelöljük a $\overline{w_0 w_1}$ vektor u-tengellyel alkotott szögét ν-vel:

$$
w_1-w_0=e^{i\nu}.
$$

A (3) leképezésnél a felvett egységnyi oldalú négyzet valamely Π_ν parallelogrammának fog megfelelni; ennek során a w_1, w_2 pontok feleljenek meg a z_1, z_2 pontoknak.

Legyen

$$
z_1-z_0=V_\nu e^{i\alpha_\nu},
$$

$$
\theta_\nu=\arg\frac{z_2-z_0}{z_1-z_0},
$$

$$
W_\nu V_\nu\cdot\Delta=1,
$$

ahol Δ a (3) transzformáció determinánsa. A bevezetett $V_\nu, \alpha_\nu, \theta_\nu, W_\nu$ mennyiségek (tetszés szerinti rögzített ν esetén) teljesen meghatározzák a Π_ν parallelogrammát és elemien kifejezhetők a (3) transzformáció együtthatóival. Az (1) összefüggések a V, α, θ, W mennyiségek közötti két összefüggéssel helyettesíthetők:

$$
(4)\qquad \begin{cases} W_\nu=F_1^{(\nu)}(x, y, u, v, V_\nu, \alpha_\nu), \\ \theta_\nu=F_2^{(\nu)}(x, y, u, v, V_\nu, \alpha_\nu). \end{cases}
$$

A $V=V_0$, $\alpha=\alpha_0$, $\theta=\theta_0$, $W=W_0$ mennyiségeket a (2) leképezés x, y pontban vett karakterisztikáinak, a

$$
(5)\qquad \begin{cases} W=F_1(x, y, u, v, V, \alpha), \\ \theta=F_2(x, y, u, v, V, \alpha) \end{cases}
$$

rendszert pedig karakterisztikákban felírt egyenletrendszernek fogjuk nevezni.

Ahhoz, hogy a (2) leképezés megfeleljen az (1) rendszernek, szükséges és elégséges, hogy a karakterisztikák között minden pontban fennálljon az (5) összefüggés.

3. Derivált egyenletrendszerek. Mind az exisztenciatételek bizonyítása, mind a kvázi-konform leképezések tulajdonságainak a vizsgálata érdekében nagyon lényeges, hogy az analitikus függvény deriváltjának a fogalmát kiterjesszük a kvázi-konform leképezésekre. Abban az esetben, amikor az (1) rendszer azonos a *Cauchy—Riemann*-egyenletrendszerrel, akkor a $P=\log V$ és α karakterisztikák konjugált harmonikus függvények:

$$\frac{\partial P}{\partial v}=-\frac{\partial \alpha}{\partial u},$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial v}=\frac{\partial P}{\partial u}.$$

Mutassuk meg, hogy az általános esetben fennáll a következő tétel:

1. TÉTEL. *A D tartománynak a Δ tartományra való* (2) *kvázi-konform leképezése feleljen meg az* (5) *egyenletrendszernek, legyen*

$$\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} > 0,$$

továbbá az u, v függvényeknek létezzenek D-ben folytonos másodrendű parciális deriváltjai, a F_1, F_2 függvényeknek pedig folytonos elsőrendű parciális deriváltjai az összes argumentumok szerint.

E feltételek mellett a $P=\log V$ és α karakterisztikák a Δ tartományban eleget tesznek a következő egyenletrendszernek:

$$(6)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial v}=a_1\dfrac{\partial P}{\partial u}+a_2\dfrac{\partial \alpha}{\partial u}+a_3, \\[2ex] \dfrac{\partial \alpha}{\partial v}=b_1\dfrac{\partial P}{\partial u}+b_2\dfrac{\partial \alpha}{\partial u}+b_3, \end{cases}$$

ahol az a, b együtthatók x, y, u, v, P és α ismert függvényei:

$$a_1=\frac{\partial W}{\partial V}\operatorname{ctg}\theta-\frac{\partial \theta}{\partial V}\frac{W}{\sin^2\theta},$$

$$a_2=\frac{1}{V}\left\{\frac{\partial W}{\partial \alpha}\operatorname{ctg}\theta-\frac{\partial \theta}{\partial \alpha}\frac{W}{\sin^2\theta}-W\right\},$$

$$a_3 = \operatorname{ctg}\theta\left\{\frac{\partial W}{\partial u}\frac{1}{V}+\frac{\partial W}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial W}{\partial y}\sin\alpha\right\}-$$

$$-\frac{W}{\sin^2\theta}\left\{\frac{\partial\theta}{\partial u}\frac{1}{V}+\frac{\partial W}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial W}{\partial y}\sin\alpha\right\},$$

$$b_1=\frac{\partial W}{\partial V},$$

$$b_2=\frac{1}{V}\left\{\frac{\partial W}{\partial\alpha}+W\operatorname{ctg}\theta\right\},$$

$$b_3=\frac{\partial W}{\partial u}\frac{1}{V}+\frac{\partial W}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial W}{\partial y}\sin\alpha.$$

A (6) egyenletrendszert a tekintett (2) leképezés, illetve az (5) egyenletrendszer d e r i v á l t e g y e n l e t r e n d s z e r é n e k fogjuk nevezni.

BIZONYÍTÁS. Ismertetjük a (6) egyenletrendszer geometriai levezetését. Tekintsünk a Δ tartományban egy végtelenül kicsiny q négyzetet, amelynek az oldalai párhuzamosak a koordinátatengelyekkel; legyen a négyzet oldalhosszúsága du. A tekintett leképezés a q négyzetet valamely Q görbevonalú négyszögnek felelteti meg. Legyen AB és CD a Q négyszögnek az a két oldala, amely a q négyzet u-tengellyel párhuzamos ab, cd oldalainak felel meg.

Ahhoz, hogy megkapjuk az (5) rendszer első egyenletét, elég kiszámítani a CD és AB oldal hosszúságkülönbségének másodfokú főrészét.

Ahhoz, hogy megkapjuk az (5) rendszer második egyenletét, elég kiszámítani a CD és AB közötti szög lineáris főrészét.

Minthogy feltevés szerint u és v második deriváltjai folytonosak, azért a AB és CD oldalak, továbbá a AC és BD oldalak görbületei végtelenül keveset térnek el egymástól. Innen könnyen látható, hogy számításaink érdekében a Q görbevonalú négyszöget helyettesíthetjük azzal a Q_1: $A_1B_1C_1D_1$ görbevonalú négyszöggel (1. ábra), amelyet a következő adatok határoznak meg:

$$\overline{A_1B_1} = V du,$$

$$\sphericalangle C_1A_1B_1 = \theta = F_2(x, y, u, v, V, \alpha),$$

$$\overline{A_1C_1} = \frac{W du}{\sin\theta} = \frac{du}{\sin\theta} F_1(x, y, u, v, V, \alpha),$$

$$\overline{B_1D_1} = \frac{W + dW}{\sin(\theta + d\theta)} du,$$

$$\sphericalangle D_1B_1E = \theta + d\theta + d\alpha,$$

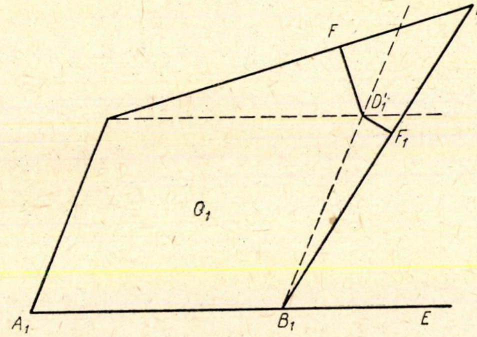
ahol dW, $d\alpha$, $d\theta$ az F_1, α és F_2 függvények teljes növekményei, miközben u növekménye du és $v=\text{const.}$:

$$dW=\left[\frac{\partial W}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial u}+\frac{\partial W}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial u}+\frac{\partial W}{\partial u}+\frac{\partial W}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial W}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\right]du=$$

$$=\left[\frac{\partial W}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial u}+\frac{\partial W}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial u}+\frac{\partial W}{\partial u}+\frac{\partial W}{\partial x}V\cos\alpha+\frac{\partial W}{\partial y}V\sin\alpha\right]du,$$

$$d\theta=\left[\frac{\partial \theta}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial u}+\frac{\partial \theta}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial u}+\frac{\partial \theta}{\partial u}+\frac{\partial \theta}{\partial x}V\cos\alpha+\frac{\partial \theta}{\partial y}V\sin\alpha\right]du,$$

$$d\alpha=\frac{\partial \alpha}{\partial u}du.$$



1. ábra

A $\overline{C_1D_1}-\overline{A_1B_1}$ különbség meghatározása céljából szerkesszünk parallelogrammát A_1B_1 és A_1C_1 oldalakkal, ennek a parallelogrammának a A_1 csúcscsal szemközti csúcsa legyen D_1'. Bocsássunk D_1'-ből merőlegest C_1D_1-re, ill. B_1D_1-re és jelöljük ezeket $D_1'F$-fel, ill. $D_1'F_1$-gyel. A magasabbrendűen végtelen kicsiny tagokat elhagyva kapjuk:

$$\frac{\partial V}{\partial v}du^2=\overline{C_1D_1}-\overline{A_1B_1}=\overline{FD_1}=\overline{D_1'F_1}\sin\theta+\overline{F_1D_1}\cos\theta=$$

$$=\frac{W}{\sin\theta}(d\theta+d\alpha)\sin\theta\,du+\left(\frac{W+dW}{\sin(\theta+d\theta)}-\frac{W}{\sin\theta}\right)\cos\theta\,du.$$

Az utóbbi összefüggésben dW és $d\theta$ helyébe behelyettesítve a megfelelő kifejezéseket, nehézség nélkül nyerjük az (5) rendszer első egyenletét.

Ahhoz, hogy a második egyenletet megkapjuk, elég a $D_1'F$ szakasz hosszát kiszámítani:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial v}du=\frac{\overline{D_1'F}}{\overline{A_1B_1}}=\frac{1}{V}\{\overline{D_1F_1}\sin\theta-\overline{D_1'F_1}\cos\theta\},$$

ami nyilvánvaló helyettesítések után megadja a második keresett egyenletet.

4. Speciális esetek. Megemlítünk néhány speciális esetet, amikor a derivált egyenletrendszer egyszerűbb alakot ölt.

Ha a egyenletrendszerben az x, y, u, v koordináták explicite nem szerepelnek, akkor $a_3=b_3=0$, és a derivált egyenletrendszer a parciális deriváltakban homogén lineárissá válik:

$$\frac{\partial P}{\partial v}=a_1\frac{\partial P}{\partial u}+a_2\frac{\partial \alpha}{\partial u},$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial v}=b_1\frac{\partial P}{\partial u}+b_2\frac{\partial \alpha}{\partial u},$$

az a_1, a_2, b_1, b_2 együtthatók pedig csak P-től és α-tól függnek. Ha ebben az egyenletrendszerben független változóknak P-t és α-t, ismeretlen függvényeknek u-t és v-t választjuk, akkor egyszerű átalakítások után egyenletrendszerünk *homogén* lineáris egyenletrendszerbe megy át.

Ez a helyzet a gázdinamika egyenleteinél. Nevezetesen a gázdinamika egyenletei (ideális gáz síkbeli stacionárius áramlása) karakterisztikákban felírva

$$W=F(V),$$

$$\theta=\frac{\pi}{2}$$

alakúak, a derivált egyenletrendszer pedig a

$$\begin{cases}\dfrac{\partial V}{\partial v}=-F(V)\dfrac{\partial \alpha}{\partial u},\\[2mm] \dfrac{\partial \alpha}{\partial v}=F'(V)\dfrac{\partial P}{\partial u}\end{cases}$$

alakot ölti. Ezt az egyenletrendszert, a V, α független változókban felírva, Sz. A. Csapligin vezette le először analitikusan, és a rendszer az ő nevét viseli.

5. Erős elliptikusság. Minthogy az a célunk, hogy a konform leképezésekre vonatkozó minél több geometriai tételt kiterjesszünk a kvázi-konform leképezésekre, azért ebben a cikkben a kvázi-konform leképezések olyan osztályainak a vizsgálatára szorítkozunk, amelyek elliptikus rendszereknek felelnek meg. E leképezés-osztályok tanulmányozását az elliptikusság fogalmának geometrizálásával kezdjük.

Azt mondjuk, hogy az (5) egyenletrendszer erősen elliptikus, ha bármely ν mellett teljesülnek a következő feltételek:

1°. A F_1, F_2 függvények az argumentumok tetszés szerinti értékei mellett egyértéküek, folytonosak és differenciálhatók.

2°. Van olyan pozitív k állandó, hogy az argumentumok minden értékénél

$$k<\theta_\nu<\pi-k.$$

3°. Van olyan pozitív k állandó, hogy az argumentumok minden értékénél

$$\frac{\partial F_1^{(\nu)}}{\partial V_\nu}>k>0.$$

Hasonlítsuk össze az egyenletrendszerek erős elliptikusságának most bevezetett fogalmát az elliptikusság szokásos fogalmával olyan rendszerek esetében, amelyek a parciális deriváltakra nézve homogének és lineárisak:

$$(7)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = a_{11}\dfrac{\partial v}{\partial x} + a_{12}\dfrac{\partial v}{\partial y}, \\[2mm] \dfrac{\partial u}{\partial y} = a_{21}\dfrac{\partial v}{\partial x} + a_{22}\dfrac{\partial v}{\partial y}, \end{cases}$$

ahol az a együtthatók x, y, u, v megadott függvényei.

Írjuk fel a (7) egyenletrendszert a V, α, W, θ karakterisztikákban.

A koordinátarendszer kezdőpontját az egységnyi oldalú négyzet csúcspontjába, illetve a Π parallelogramma megfelelő csúcspontjába helyezve, kapjuk:

$$x = \frac{1}{\varDelta}(v_y \cdot u - u_y \cdot v),$$

$$y = -\frac{1}{\varDelta}(v_x \cdot u - u_x \cdot v),$$

$$\varDelta = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}.$$

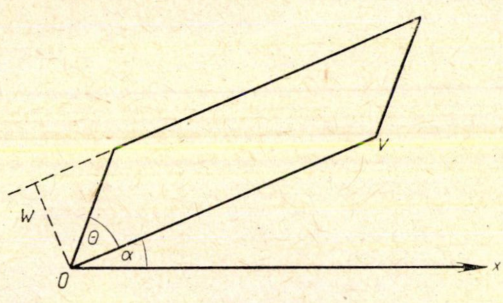
Innen (2. ábra) a Π karakterisztikus parallelogrammára a következő nyilvánvaló összefüggéseket nyerjük:

$$(8)\qquad -\frac{v_x}{v_y} = \operatorname{tg} \alpha,$$

$$(9)\qquad \frac{1}{\varDelta}\sqrt{v_x^2 + v_y^2} = V,$$

$$(10)\qquad W = \frac{1}{\varDelta \cdot V},$$

$$(11)\qquad \sin\theta = \frac{1}{V\sqrt{v_x^2 + v_y^2}}.$$



2. ábra

Mindenekelőtt (8)-ból és (7)-ből kifejezzük $\varDelta$-t v_y segítségével:

$$\varDelta = [a_{11} \operatorname{tg} \alpha + a_{12} - \operatorname{tg} \alpha (a_{21} \operatorname{tg} \alpha + a_{22})] v_y^2.$$

Ezt behelyettesítve (9)-be és újra felhasználva (8)-at, kapjuk:

$$(12)\qquad v_y = \frac{1}{V} \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}{(a_{11} \operatorname{tg} \alpha + a_{12}) - (a_{21} \operatorname{tg} \alpha + a_{22}) \operatorname{tg} \alpha}.$$

A Δ-ra és v_y-ra talált kifejezéseket behelyettesítve (10)-be, egyszerűsítések után megkapjuk a karakterisztikákban felírt első egyenletet:

$$(13)\qquad W=[a_{12}\cos^2\alpha+(a_{11}-a_{22})\sin\alpha\cos\alpha-a_{21}\sin^2\alpha]\cdot V.$$

Most (11)-ben u_x és u_y helyébe v_x-szel és v_y-nal való, (7)-ből nyert kifejezésüket írva, majd v_x-et és v_y-t (8) és (12) alapján V-vel kifejezve, megkapjuk a karakterisztikákban felírt második egyenletet:

$$(14)\qquad \sin\theta=\frac{a_{11}\cos^2\alpha+(a_{11}-a_{22})\sin\alpha\cos\alpha-a_{21}\sin^2\alpha}{\sqrt{(a_{11}\sin\alpha+a_{12}\cos\alpha)^2+(a_{21}\sin\alpha+a_{22}\cos\alpha)^2}}.$$

A (13), (14) kifejezésekből megállapíthatjuk, hogy az elliptikusság általunk adott geometriai definíciója ekvivalens a (11)-ben fellépő kvadratikus alak pozitivitásával, azaz a

$$(15)\qquad -a_{12}a_{21}>\frac{1}{4}(a_{11}-a_{22})$$

relációval, de az utóbbi feltétel a (7) egyenletrendszer elliptikusságának ismert analitikus feltétele. Az erős elliptikusság követelménye nyilván ekvivalens azzal a feltétellel, hogy a (13)-ban szereplő kvadratikus alak minimuma nagyobb legyen k-nál.

Megmutattuk, hogy (15) ekvivalens azzal a feltétellel, hogy a W függvény $\nu=0$ esetén V-ben monoton növekedő. Minthogy (15) az x, y és u, v sík tetszés szerinti lineáris transzformációjára nézve invariáns, a (15) feltétel azzal is ekvivalens, hogy $\frac{\partial F^{(\nu)}}{\partial V_\nu}$ pozitív bármilyen ν mellett.

Ily módon lineáris rendszereknél $\frac{\partial F_1^{(\nu)}}{\partial V_\nu}$ pozitivitása $\frac{\partial F_1}{\partial V}$ pozitivitásának következménye.

Egyszerű példákon könnyű megmutatni, hogy nemlineáris rendszerek esetében a $\frac{\partial F_1}{\partial V}>0$ feltételből nem következik, hogy $\frac{\partial F_1^{(\nu)}}{\partial V_\nu}>0$ bármely ν-re.

6. Erős elliptikusság és derivált egyenletrendszerek. Visszatérve az általános esetre, bebizonyítjuk a következő alapvető tételt:

2. TÉTEL. *Az 1. tételben szereplő feltételek mellett és $b_1>0$ esetén a (6) derivált egyenletrendszer elliptikussága ekvivalens azzal, hogy a $F_1^{(\nu)}$ függvény V_ν szerinti deriváltja bármely ν-re pozitív.*

BIZONYÍTÁS. Azt kell bebizonyítani, hogy a

$$(16)\qquad \frac{\partial F_1^{(\nu)}}{\partial V_\nu}>0$$

feltétel ekvivalens a

$$-a_2b_1>\frac{1}{4}(b_2-a_1)^2,$$

vagy, az a, b mennyiségeket a karakterisztikákat tartalmazó megfelelő kifejezésekkel helyettesítve, a

$$\left\{ W\left(1+\frac{\theta_\alpha}{\sin^2\theta}\right) - W_\alpha \operatorname{ctg}\theta \right\} V\cdot W_\nu > \frac{1}{4}\left\{ W\left(\operatorname{ctg}\theta + \frac{V\theta_\nu}{\sin^2\theta}\right) + W_\alpha - V W_\nu \operatorname{ctg}\theta \right\}^2$$

feltétellel.

Ennek a bebizonyítása céljából (16)-ot kifejezzük a F_1, F_2 függvények segítségével.

A lineáris transzformációk ismert törvényei szerint a $V_\nu, \alpha_\nu, \theta_\nu, W_\nu$ karakterisztikák elemien kifejezhetők a V, α, θ, W karakterisztikákkal. Kiszámítjuk e függvények teljes differenciálját. Az írás egyszerűsítése érdekében legyen

$$\log V_\nu = v, \quad \alpha_\nu = \varphi.$$

Azonkívül nyilvánvalóan nem megy az általánosság rovására, ha az összes számításokat az $\alpha = 0$, $V = 1$ esetre végezzük, úgyhogy $d\log V = dV$. Miután ezt megjegyeztük, mindenekelőtt kiszámítjuk v és φ parciális differenciálját θ szerint. Kapjuk:

$$(17)\qquad \begin{cases} dv = -\dfrac{\sin\varphi\cos\varphi}{\sin^2\theta}\,d\theta, \\ d\varphi = \dfrac{\sin^2\varphi}{\sin^2\theta}\,d\theta. \end{cases}$$

Most keressük meg v és φ parciális differenciálját V szerint. Ki kell számítanunk a φ szög és V_ν növekményét, amikor a Π karakterisztikus parallelogrammában egyedül V változik meg dV-vel. Π említett megváltoztatását az x-tengely irányában történő, $1+dV$ arányú affin nyújtással és a θ szög megváltoztatásával érhetjük el, a többi paramétert közben rögzítve. Az említett deformációk közül az elsőnél kapjuk:

$$(18)\qquad \begin{cases} d\varphi = -\sin\varphi\cos\varphi\, dV, \\ dv = \cos^2\varphi\, dV, \end{cases}$$

ezalatt a θ szög növekménye

$$(19)\qquad d\theta = -\sin\theta\cos\theta\, dV.$$

Következésképpen ahhoz, hogy megkapjuk a keresett differenciálokat, elegendő dv és $d\varphi$ (18) kifejezéséből kivonni dv, ill. $d\varphi$ megfelelő (17) kifejezését, az utóbbiakban $d\theta$-t a (19) kifejezéssel helyettesítve. Az említett átalakítások után végül kapjuk:

$$(20)\qquad \begin{cases} dv = (-\sin\varphi\cos\varphi + \sin^2\varphi\operatorname{ctg}\theta)\,dV, \\ d\varphi = (\cos^2\varphi - \sin\varphi\cos\varphi\operatorname{ctg}\theta)\,dV. \end{cases}$$

A karakterisztikák α szerint vett parciális differenciáljai közvetlenül felírhatók:

$$(21) \qquad \begin{cases} dv = 0, \\ d\varphi = d\alpha. \end{cases}$$

Hátra van még a W szerinti parciális differenciálok kiszámítása. $1+\frac{dW}{W}$ arányú hasonlósági transzformációnál fennáll, hogy

$$d\alpha = d\theta = 0, \quad dV = \frac{dW}{W}.$$

Azonkívül

$$(22) \qquad d\varphi = 0, \quad dv = \frac{dW}{W}.$$

Ily módon ahhoz, hogy megkapjuk a keresett differenciálokat, elegendő dv és $d\varphi$ (22) kifejezéséből kivonni a (20) képletekből a $dV=\frac{dW}{W}$ helyettesítéssel adódó kifejezéseket; ekkor

$$(23) \qquad \begin{cases} d\varphi = (\sin\varphi\cos\varphi - \sin^2\varphi \operatorname{ctg}\theta)\dfrac{dW}{W}, \\ dv = (\sin^2\varphi + \sin\varphi\cos\varphi \operatorname{ctg}\theta)\dfrac{dW}{W}. \end{cases}$$

A parciális differenciálokra nyert kifejezések összeadása útján megkapjuk a keresett teljes differenciált:

$$dv = (\cos^2\varphi - \sin\varphi\cos\varphi \operatorname{ctg}\theta)dV - \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\sin^2\theta}d\theta +$$
$$+ (\sin^2\varphi + \sin\varphi\cos\varphi \operatorname{ctg}\theta)\frac{dW}{W},$$

$$d\varphi = (-\sin\varphi\cos\varphi + \sin^2\varphi \operatorname{ctg}\theta)dV + d\alpha + \frac{\sin^2\varphi}{\sin^2\theta}d\theta +$$
$$+ (\sin\varphi\cos\varphi - \sin^2\varphi \operatorname{ctg}\theta)\frac{dW}{W}.$$

A karakterisztikákban felírt egyenletek értelmében a W, θ karakterisztikák V és α megadott függvényei, tehát

$$dW = W_V dV + W_\alpha d\alpha,$$
$$d\theta = \theta_V dV + \theta_\alpha d\alpha.$$

Innen, az írásmód egyszerűsítésére bevezetve a $w = \log W$, $t = \operatorname{tg}\varphi$ jelölést, kapjuk:

$$(1+t^2)dv = \left[1+\left(-\operatorname{ctg}\theta - \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial\theta}{\partial V} + \operatorname{ctg}\theta\frac{\partial w}{\partial V}\right)t + \frac{\partial w}{\partial V}t^2\right]dV +$$
$$+\left[\left(\operatorname{ctg}\theta\frac{\partial w}{\partial\alpha} - \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial\theta}{\partial\alpha}\right)t + \frac{\partial w}{\partial\alpha}t^2\right]d\alpha,$$

$$dt = \left[\left(\frac{\partial w}{\partial V}-1\right)t - \left(\frac{\partial w}{\partial V}\operatorname{ctg}\theta - \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial\theta}{\partial V} - \operatorname{ctg}\theta\right)t^2\right]dV +$$
$$+\left[1+\frac{\partial w}{\partial\alpha}t + \left(1+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial\theta}{\partial\alpha} - \frac{\partial w}{\partial\alpha}\operatorname{ctg}\theta\right)t^2\right]d\alpha.$$

Az utóbbi két formula segítségével könnyen kiszámítható $d\log W_\nu$. Valóban, az $\omega=\log W_\nu$ jelöléssel fennáll, hogy

$$\omega = w + \log V - \log V_\nu,$$

tehát, minthogy esetünkben $V=1$,

$$d\omega = dw + dV - dv$$

és végül helyettesítések után

$$(1+t^2)d\omega = \left[\frac{\partial w}{\partial V} - \left(\frac{\partial w}{\partial V}\operatorname{ctg}\theta - \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial\theta}{\partial V} - \operatorname{ctg}\theta\right)t + t^2\right]dV +$$
$$+\left[\frac{\partial w}{\partial\alpha} - \left(\frac{\partial w}{\partial\alpha}\operatorname{ctg}\theta - \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial\theta}{\partial\alpha}\right)t\right]d\alpha.$$

A dv, dt és $d\omega$ számára nyert kifejezéseket egyszerűbb alakra hozhatjuk, ha felhasználjuk a (6) derivált egyenletrendszerben (181. oldal) szereplő a és b mennyiségeket. Helyettesítések után kapjuk:

$$(24)\quad \left\{\begin{aligned}
(1+t^2)dv &= \left[1+\left(\frac{a_1}{W}-\operatorname{ctg}\theta\right)t + \frac{b_1}{W}t^2\right]dV + \\
&\quad + \left[\left(\frac{a_2}{W}+1\right)t + \left(\frac{b_2}{W}-\operatorname{ctg}\theta\right)t^2\right]d\alpha, \\
dt &= \left[\left(\frac{b_1}{W}-1\right)t - \left(\frac{a_1}{W}-\operatorname{ctg}\theta\right)t^2\right]dV + \\
&\quad + \left[1+\left(\frac{b_2}{W}-\operatorname{ctg}\theta\right)t + \frac{a_2}{W}t^2\right]d\alpha, \\
(1+t^2)d\omega &= \left[\frac{b_1}{W} - \left(\frac{a_1}{W}-\operatorname{ctg}\theta\right)t + t^2\right]dV + \\
&\quad + \left[\frac{b_2}{W} - \operatorname{ctg}\theta - \left(\frac{a_2}{W}+1\right)t\right]d\alpha.
\end{aligned}\right.$$

A kvadratikus alakokat — dV és $d\alpha$ együtthatóit — rendre A-val és B-vel jelölve kapjuk:

$$(1+t^2)dv = A_1 dV + B_1 d\alpha,$$
$$(1+t^2)d\varphi = A_2 dV + B_2 d\alpha,$$
$$(1+t^2)d\omega = A_3 dV + B_3 d\alpha.$$

Tekintsünk egy t értéket, amelynél a B_2 alak különbözik zérustól, és variáljuk a Π karakterisztikus parallelogrammát a $dt=0$ feltétel mellett. Ebben az esetben

$$d\alpha = -\frac{A_2}{B_2} dV,$$

és a $dv, d\omega$ differenciálokra egyszerű számítások után a következő előállításokat kapjuk:

$$dv = \frac{1}{1+t^2} \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{B_2} dV = \frac{M}{W \cdot B_2} dV,$$

ahol M kvadratikus alak t-re nézve,

$$d\omega = \frac{dV}{1+t^2} \frac{A_3B_2 - A_2B_3}{B_2} = \frac{dV}{WB_2}[-a_2t^2 + (b_2 - a_1)t + b_1].$$

A kimondott tétel bebizonyításához elég megmutatnunk, hogy az erős elliptikusság feltételeiből következik a

$$N = -a_2t^2 + (b_2 - a_1)t + b_1$$

kvadratikus alak pozitivitása.

Ha a N alaknak nincsenek zérushelyei, akkor N pozitív. Valóban, a $\frac{\partial F_1^{(\nu)}}{\partial V_\nu} > 0$ feltétel miatt

$$MN > 0, \tag{25}$$

de $t=0$ esetén $M=1$, következésképpen $N>0$.

Most tegyük fel, a bizonyítandó állítással ellentétben, hogy a N kvadratikus alaknak léteznek t_1, t_2 zérushelyei. Mindenekelőtt mutassuk meg, hogy ebben az esetben t_1 és t_2 a M és B_2 alakoknak is zérushelyei lesznek. (25) értelmében M és N zérushelyeinek egybe kell esniük. Tegyük fel, hogy $B_2(t_1) \neq 0$, akkor a Π parallelogramma elsőrendűen végtelen kicsiny

$$dV \text{ és } d\alpha = -\frac{A_2}{B_2} dV$$

megváltoztatásakor a Π_ν parallelogramma[1] V_ν, α_ν karakterisztikái dV-nél magasabbrendűen végtelen kicsiny mennyiséggel változnak meg, továbbá $F_1^{(\nu)}$ és

[1] A ν szög az $\alpha_\nu = \operatorname{arc\,tg} t_1$ szögnek felel meg.

$F_2^{(\nu)}$ differenciálhatósága következtében a Π_ν parallelogrammában a W_ν, θ_ν karakterisztikák megváltozása is dV-nél magasabbrendűen végtelen kicsiny, ami nyilván összeegyeztethetetlen Π általunk választott megváltoztatásával.

Ily módon már csak a

$$M(t_1)=N(t_1)=B_2(t_1)=0, \qquad t_1 \neq 0,$$
$$M(t_2)=N(t_2)=B_2(t_2)=0, \qquad t_2 \neq 0$$

esetet kell megvizsgálnunk. A M, N, B_2 alakok együtthatóit összehasonlítva kapjuk:

$$\frac{a_1}{W}-\operatorname{ctg}\theta=0, \quad \frac{b_1}{W}-1=0,$$

és a (24) képletek a következő alakot öltik:

$$dt=\left[1+\left(\frac{b_2}{W}-\operatorname{ctg}\theta\right)t-\frac{a_2}{W}t^2\right]d\alpha=B_2 d\alpha,$$

$$dv=dV+\left[\left(\frac{a_2}{W}+1\right)t+\left(\frac{b_2}{W}-\operatorname{ctg}\theta\right)t^2\right]\frac{d\alpha}{1+t^2}=dV+B_1 d\alpha,$$

$$d\omega=dV+\left[\left(\frac{b_2}{W}-\operatorname{ctg}\theta\right)-\left(\frac{a_2}{W}+1\right)t\right]\frac{d\alpha}{1+t^2}=dV+B_3 d\alpha.$$

Ha

$$B_1(t_1)=B_3(t_1)=0,$$

akkor

$$N=1+t^2,$$

vagyis pozitív. Ezek szerint feltehetjük, hogy a $t=t_1$ helyen a B_1, B_3 alakok egyike különbözik zérustól. Legyen például

$$B_1(t_1)\neq 0.$$

Variáljuk a Π parallelogrammát úgy, hogy V megváltozása dV, az α szög megváltozása pedig $\frac{dV}{B_1(t_1)}$ legyen. Akkor a vizsgált

$$\alpha_\nu=\operatorname{arc\,tg} t_1$$

esetben a Π_ν parallelogrammára fennáll, hogy

$$d\alpha_\nu=dV_\nu=0,$$

vagyis a Π_ν parallelogramma dV-nél magasabbrendűen végtelen kicsiny mennyiségekkel változik meg, ami nyilván lehetetlen. A tételt maradéktalanul bebizonyítottuk.

A továbbiakban mindig erősen elliptikus rendszerekkel foglalkozunk, és a derivált egyenletrendszerről, a bebizonyított tétel alapján, szintén feltesszük, hogy elliptikus.

7. Áramvonalak, áramvonalsűrűség. A gázdinamika terminológiáját követve az x, y sík azon görbéinek a seregét, amelyek a kvázi-konform leképezés során az u, v sík $v = \text{const.}$ egyeneseibe mennek át, *áramvonalaknak* fogjuk nevezni. A leképezés W karakterisztikáját *áramvonalsűrűségnek* nevezzük.

Jelöljük azt a szöget, amelyet egy L sugár az x, y pontbeli áramvonallal bezár, ϑ-val. A

$$R_\vartheta = \frac{W}{\sin \vartheta}$$

mennyiséget ϑ *irányú áramvonalsűrűségnek* fogjuk nevezni a L sugár mentén.

A konform leképezések esetében, amikor az (1) rendszer a *Cauchy—Riemann*-féle egyenletrendszerrel azonos, az áramvonalak sűrűsége és görbülete között ismert összefüggések állnak fenn:

$$\frac{\partial \log W}{\partial n} = -\frac{\partial \alpha}{\partial s},$$

ahol ds és dn az áramvonal, ill. az áramvonal normálisa egymással jobbrendszert képező vonalelemei.

A kvázi-konform leképezések általános elmélete számos kérdésének a vizsgálatánál szükségünk lesz az említett összefüggés tetszés szerinti elliptikus rendszer esetére való általánosítására. E célból mindenekelőtt a (6) derivált egyenletrendszert átalakítjuk oly módon, hogy P-nek az u és v koordináta szerint vett deriváltjait α-nak u és v szerint vett deriváltjaival fejezzük ki. Kapjuk:

$$\frac{\partial P}{\partial u} = \overline{a}_1 \frac{\partial \alpha}{\partial u} + \overline{b}_1 \frac{\partial \alpha}{\partial v} + \overline{c}_1,$$

$$\frac{\partial P}{\partial v} = \overline{a}_2 \frac{\partial \alpha}{\partial u} + \overline{b}_2 \frac{\partial \alpha}{\partial v} + \overline{c}_2,$$

$$-\overline{b}_1 \overline{a}_2 > \frac{1}{4} (\overline{b}_2 - \overline{a}_1)^2, \qquad \overline{b}_1 = \frac{1}{b_1} > 0. \tag{26}$$

Határozzuk meg a P függvénynek az u-tengellyel γ szöget alkotó irány szerinti deriváltját. Ennek az iránynak az ívelemét $d\lambda$-val jelölve, kapjuk:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial \lambda} &= \frac{\partial P}{\partial u} \cos \gamma + \frac{\partial P}{\partial v} \sin \gamma = \\ &= (\overline{a}_1 \cos \gamma + \overline{a}_2 \sin \gamma) \frac{\partial \alpha}{\partial u} + (\overline{b}_1 \cos \gamma + \overline{b}_2 \sin \gamma) \frac{\partial \alpha}{\partial v} + (\overline{c}_1 \cos \gamma + \overline{c}_2 \sin \gamma). \end{aligned} \tag{27}$$

Jelöljük γ_1-gyel azt a szöget, amelyet a

$$\bar{b}_1 \cos\gamma + \bar{b}_2 \sin\gamma = 0$$

összefüggés határoz meg; ekkor a (27) reláció a következő alakot ölti:

$$\frac{\partial P}{\partial \lambda} = -A_1 \frac{\partial \alpha}{\partial u} + B_1, \tag{28}$$

ahol

$$A_1 = \frac{\bar{a}_1 \bar{b}_2 - \bar{a}_2 \bar{b}_1}{\sqrt{\bar{b}_1^2 + \bar{b}_2^2}}.$$

A (26) feltétel következtében fennáll, hogy

$$A_1 > 0.$$

Nem nehéz belátni, hogy a (28) egyenlettel analóg egyenlet érvényes a W áramvonalsűrűségre is:

$$\frac{\partial W}{\partial \lambda} = -A_2 \frac{\partial \alpha}{\partial u} + B_2, \qquad A_2 > 0. \tag{28'}$$

A továbbiakhoz, a (28), (28') egyenleteken kívül, szükségünk lesz a R_ϑ sűrűség ϑ irány szerinti deriváltjának a kifejezésére. Elemi számolás adja a következő eredményt:

Erősen elliptikus egyenletrendszerhez a leképezett tartomány minden egyes x, y pontjában van olyan ϑ irány, amely különbözik az áramvonal irányától, az áramvonal pozitív irányával jobbrendszert alkot, és *amelyre*

$$\frac{\partial R_\vartheta}{\partial t} = -A \frac{\partial \alpha}{\partial s} + B, \quad A > 0, \tag{29}$$

ahol dt és ds a ϑ irány, ill. az áramvonal íveleme, a A, B együtthatók pedig a koordináták és a V, α karakterisztikák függvényei. Ha a leképezés karakterisztikákban felírt egyenletei a koordinátákat explicite nem tartalmazzák, akkor $B = 0$, és a (29) egyenlet a

$$\frac{\partial R_\vartheta}{\partial t} = -A \frac{\partial \alpha}{\partial s} \tag{30}$$

alakot ölti.

A (30) egyenletnek nagyon szemléletes geometriai jelentése van, amelyet az erős elliptikusság definiálására is fel lehet használni: az áramvonalak sűrűsége konkávitásuk irányában növekszik.

A további vizsgálatokhoz szükségünk lesz az y tengely irányában vett áramvonalsűrűségre vonatkozó összefüggésekre is. Legyen

$$y = y(x, v)$$

annak az áramvonalnak az egyenlete, amely a $v=\text{const.}$ egyenesnek felel meg. Ekkor az y-tengely irányában vett $R=R_{\frac{\pi}{2}}$ áramvonalsűrűség

$$R=\frac{\partial y}{\partial v}$$

lesz. Legyen

$$\tau=\operatorname{tg}\alpha=\frac{\partial y}{\partial x}.$$

E jelölések mellett a derivált egyenletrendszer a következő alakot veszi fel:

$$\left\{\begin{aligned}&\frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial \tau}{\partial v},\\&\frac{\partial R}{\partial v}=a\frac{\partial \tau}{\partial x}+b\frac{\partial \tau}{\partial v}+c,\end{aligned}\right.\tag{31}$$

ahol a, b és c a koordináták, a τ iránytangens és a R sűrűség adott függvényeinek tekinthetők. Ha a kiindulási egyenletrendszer erősen elliptikus, akkor fennáll:

$$-a-\frac{1}{4}b^2>k>0.$$

8. Az általánosított Schwarz-féle elv. A konform leképezések elméletének egyik legfontosabb geometriai elve az ún. *Schwarz—Lindelöf*-elv. A jelen paragrafusban ennek az elvnek különböző általánosításait adjuk meg kvázi-konform leképezések esetére.

Sávszerű tartományoknak egyenesvonalú sávokra való kvázi-konform leképezéseit fogjuk vizsgálni.

Jelöljük $D(\Gamma_0, \Gamma)$-val azt a tartományt, amelyet a Γ_0 és Γ görbe határol:

$$\begin{aligned}\Gamma_0:&\ y=y_0(x),\\ \Gamma:&\ y=Y(x),\end{aligned}\qquad y_0(x)<Y(x);$$

a továbbiakban mindig feltesszük, hogy Γ_0 és Γ görbülete korlátos és eleget tesz a *Hölder*-feltételnek. A D sávval egyidejűleg tekintsünk egy tőle végtelenül kevéssé eltérő $D(\overline{\Gamma}_0, \overline{\Gamma})$ sávot, ahol a $\overline{\Gamma}_0, \overline{\Gamma}$ görbék,

$$\begin{aligned}\overline{\Gamma}_0:&\ y=\overline{y}_0(x),\\ \overline{\Gamma}:&\ y=\overline{Y}(x),\end{aligned}$$

végtelenül közel vannak Γ_0-hoz, ill. Γ-hoz. Szerkesszük meg e tartományok mindegyikének egy-egy kvázi-konform leképezését a

$$0<v<h$$

egyenlőtlenséggel jellemzett Δ sávra. A két leképezés közül az első feleljen meg a

$$
\left\{\begin{aligned} W &= F_1(x, y, v, V, \alpha), \\ \theta &= F_2(x, y, v, V, \alpha) \end{aligned}\right. \tag{32}
$$

karakterisztikákban felírt egyenletrendszernek, a második pedig egy végtelenül közeli, az u változót explicite szintén nem tartalmazó

$$
\left\{\begin{aligned} W &= \overline{F}_1(x, y, v, V, \alpha), \\ \theta &= \overline{F}_2(x, y, v, V, \alpha) \end{aligned}\right. \tag{33}
$$

egyenletrendszernek.

Legyenek most

$$
\begin{aligned} y &= y(x, v), \\ \overline{y} &= \overline{y}(x, v) \end{aligned}
$$

az említett leképezéseknek megfelelő áramvonalak és $n = n(v)$ az

$$
\overline{y}(x, v) - y(x, v) - \varphi(x), \quad |x| < \infty, \quad v = \text{const.}
$$

különbség abszolút maximuma:

$$
n = \max_{|x| < \infty} \{\overline{y}(x, v) - y(x, v) - \varphi(x)\},
$$

ahol $\varphi(x)$ kétszer differenciálható függvény, amelyre $|\varphi'(x)| < k'$, $|\varphi''(x)| < k''$; feltesszük, hogy az $n(v)$ maximum x véges értékeinél éretik minden v érték mellett, $0 \leqq v \leqq h$. Tegyük fel, hogy n eléretik az $x = x_0 = x_0(v)$ helyen, és vezessük be az $m = n + \varphi(x_0)$ jelölést.

A választott jelölések mellett bebizonyítjuk a következő lemmát:

LEMMA. *Tegyük fel, hogy a* (32), (33) *egyenletrendszerek erősen elliptikusak, továbbá, hogy a $\overline{F}_{1,2}$ függvénynek és összes elsőrendű parciális deriváltjainak a $F_{1,2}$ függvénytől és annak megfelelő parciális deriváltjaitól való eltérése legfeljebb ε. Ha ezeken kívül teljesül az a feltétel is, hogy ε-nal együtt $m(v)$ is végtelenül kicsiny marad, akkor érvényes a következő egyenlőtlenség:*

$$
\frac{d^2 m}{d v^2} > A_0 m + A_1 \frac{dm}{dv} + A_2 \varepsilon + A_3 k'' + A_4 k', \tag{34}
$$

ahol a A együtthatók függnek az $y(x, v)$ függvény második parciális deriváltjaitól (lineárisan) és a F függvények első és második parciális deriváltjaitól.

BIZONYÍTÁS. A bizonyításhoz mindenekelőtt használjuk fel a (31) összefüggéseket. Alkalmazva ezeket mindkét leképezésre, kapjuk:

$$
\frac{\partial^2 y}{\partial v^2} = a \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial v} + c,
$$

$$
\frac{\partial^2 \overline{y}}{\partial v^2} = \overline{a} \frac{\partial^2 \overline{y}}{\partial x^2} + \overline{b} \frac{\partial^2 \overline{y}}{\partial x \partial v} + \overline{c},
$$

ahol $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ a variált második leképezésnek megfelelő a, b, c együtthatók. Innen és a lemma feltételeiből a

$$z = z(x, v) = \bar{y}(x, v) - y(x, v)$$

jelöléssel kapjuk:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = a\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial v} + B, \tag{35}$$

ahol

$$B = A_0 z + A_1 \frac{\partial z}{\partial v} + A_2 \varepsilon + A_4 \frac{\partial z}{\partial x}.$$

Miután ezt megjegyeztük, tekintsük az x, v síknak azt a M és M' pontját, ahol a $z(x, v) - \varphi(x)$ függvény eléri $m(v)$ maximumát a v, ill. a $v + dv$ paraméterérték mellett. A MM' iránynak az x tengellyel bezárt α szögét nyilván a

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \varphi''\right)\cos\alpha + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial v}\sin\alpha = 0 \tag{36}$$

összefüggés határozza meg.

Most számítsuk ki a R sűrűség α irányban vett $\frac{dR}{dt}$ deriváltját:

$$\frac{dR}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial R}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial R}{\partial v}\sin\alpha = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial v}\cos\alpha + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\sin\alpha,$$

vagy, (35) értelmében,

$$\frac{dR}{dt} = a\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\sin\alpha + (b\sin\alpha + \cos\alpha)\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + B\sin\alpha.$$

A (36) összefüggés felhasználásával küszöböljük ki a vegyes deriváltat, ekkor

$$\begin{aligned}\frac{dR}{dt} &= a\sin\alpha\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - (b\sin\alpha + \cos\alpha)\operatorname{ctg}\alpha\cdot\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \varphi''\right) + B\sin\alpha = \\ &= -\frac{1}{\sin\alpha}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \varphi''\right)[-a\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + b\sin\alpha\cos\alpha] + \\ &\qquad + (B - a\varphi'')\sin\alpha,\end{aligned} \tag{37}$$

és itt a szögletes zárójelben álló kifejezés az egyenletrendszer erős elliptikussága következtében nem negatív. Azonban $dv = \sin\alpha \cdot dt$; azonkívül a M maximumhelyen fennáll:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \varphi'' \leqq 0, \quad \frac{\partial z}{\partial x} + \varphi' = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{dm}{dv},$$

és így (37) mindkét oldalát elosztva $\sin\alpha$-val, kapjuk:

$$\frac{d^2m}{dv^2} > A_0 m + A_1 \frac{dm}{dv} + A_2\varepsilon - a\varphi'' + A_4 k'.$$

Ezzel a kívánt egyenlőtlenséget teljesen bebizonyítottuk.

MEGJEGYZÉS. A (34) egyenlőtlenség levezetésénél feltételeztük, hogy α különbözik zérustól. Nyilvánvaló, hogy az egyenlőtlenség érvényes marad azokban a pontokban is, ahol $\alpha = 0$. Ezekben a pontokban a számítások lényeges megváltoztatása nélkül dv helyett a Δv véges növekményt kell venni.

A bebizonyított lemmából a klasszikus *Schwarz—Lindelöf*-elv különféle általánosításai nyerhetők a legáltalánosabb kvázi-konform leképezések esetére.

A cikk további részében arra az esetre szorítkozunk, amikor az egyenletekben a koordináták explicite nem szerepelnek. Ebben az esetben a konform leképezésekkel való analógia kiváltképpen teljes.

3. TÉTEL. *Tegyük fel, hogy az* (1) *erősen elliptikus egyenletrendszer a koordinátákat explicite nem tartalmazza:*

$$\left\{\begin{aligned} &\Phi_1\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0, \\ &\Phi_2\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0, \end{aligned}\right. \tag{38}$$

és legyenek $y = y(x, v)$, *ill.* $y = \bar{y}(x, v)$ *annak a kvázi-konform leképezésnek az áramvonalai, amely megfelel a* (38) *egyenletrendszernek, és a* $D(\Gamma_0, \Gamma)$, *ill.* $D(\Gamma_0, \bar{\Gamma})$ *tartományt,*

$$\Gamma_0\colon\ y = y_0(x), \quad \Gamma\colon\ y = y(x), \quad \bar{\Gamma}\colon\ y = \bar{y}(x),$$

a $0 < v < 1$ *sávra képezi le. E feltételek mellett, továbbá ha az y függvények kétszer differenciálhatók és*

$$\bar{y}(x) > y(x),$$

akkor

$$\bar{y}(x, v) > y(x, v). \tag{39}$$

Ugyanezen feltételek mellett Γ_0 *minden pontjában fennáll, hogy*

$$\frac{\partial \bar{y}}{\partial v} > \frac{\partial y}{\partial v}, \tag{40}$$

és abban a pontban, ahol $\bar{y}(x) - y(x)$ *eléri maximumát,*

$$\frac{\partial \bar{y}}{\partial v} > \frac{\partial y}{\partial v}. \tag{41}$$

BIZONYÍTÁS. Először is jegyezzük meg, hogy az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük azt is, hogy $x \to \infty$ és $x \to -\infty$ esetén az $y_0(x), y(x)$ függvények véges határértékhez, deriváltjaik pedig zérushoz tartanak, és hogy $\lim_{x \to \pm\infty} (\bar{y}(x) - y(x)) = 0$. Miután ezt megállapítottuk, használjuk fel az előző paragrafusban bebizonyított lemmát. Jelöljük $M(v)$-vel $\bar{y}(x, v) - y(x, v)$ maximumát rögzített v mellett és $-m(v)$-vel ugyanennek a kifejezésnek a minimumát. Akkor a lemma értelmében

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\frac{d^2M}{dv^2} > A\frac{dM}{dv}, \\
&\frac{d^2m}{dv^2} > A\frac{dm}{dv}.
\end{aligned}
\right.
\tag{42}
$$

A (42) egyenlőtlenségből könnyű levezetni a tétel helyességét „eléggé keskeny” sávok leképezése esetére. Valóban, tekintsük az $y_0(x) < y < y(x, h)$, $y_0(x) < y < \bar{y}(x, h)$ sávoknak a $0 < v < h$ sávra való leképezését, és legyen v_0 a

$$\frac{d^2m}{dv^2} = A\frac{dm}{dv},$$

$$m(0) = 0, \quad m'(0) = 1$$

egyenlet $m(v)$ integráljának a legkisebb gyöke. Ha most $h_0 < v_0$ és

$$\bar{y}(x, h_0) > y(x, h_0), \tag{43}$$

akkor $h = 0$ esetén fennáll, hogy

$$\frac{\partial \bar{y}}{\partial v} > \frac{\partial y}{\partial v},$$

mert ellenkező irányú egyenlőtlenségből (42) alapján

$$\min\,[\bar{y}(x, h) - y(x, h)] < 0$$

következne minden $h < v_0$ értékre.

Ebből egy ismert egyszerű eljárást[1] alkalmazva könnyű kimutatni, hogy ha h_0 eléggé kicsiny, és a (43) feltétel teljesül, akkor abban a pontban, ahol $\bar{y}(x, h_0) - y(x, h_0)$ felveszi maximumát, szintén fennáll

$$\frac{\partial \bar{y}}{\partial v} > \frac{\partial y}{\partial v},$$

és minden $0 < h < h_0$ értékre

$$\bar{y}(x, h) > y(x, h).$$

Ezzel a tételt igazoltuk „elég keskeny sávokra”.

[1] Lásd M. A. Лаврентьев, Конформные отображения, Москва—Ленинград, 1946.

A tétel teljes bebizonyításához elég megmutatnunk, hogy az

$$\bar{y}(x, 2h_0) > y(x, 2h_0)$$

feltételből következik

$$\bar{y}(x, h_0) > y(x, h_0).$$

Tegyük fel, az állítással ellentétben, hogy valamely pontban

$$\bar{y}(x, h_0) \leqq y(x, h_0),$$

és jelentse x_0 azt a pontot, ahol $\bar{y}(x, h_0) - y(x, h_0)$ felveszi minimumát. Tekintsük $R = \frac{\partial y}{\partial v}$ és $\bar{R} = \frac{\partial \bar{y}}{\partial v}$ értékét az $x = x_0$, $v = h_0$ helyen az $y_0(x) < y < y(x, h_0)$, $y_0(x) < y < \bar{y}(x, h_0)$ alsó sávok és az $y(x, h_0) < y < y(x, 2h_0)$, $\bar{y}(x, h_0) < y < \bar{y}(x, 2h_0)$ felső sávok leképezése során.

A tétel már bizonyított része értelmében az alsó sávok leképezésénél a vizsgált pontban fennáll, hogy

$$\bar{R} > R,$$

a felső sávok leképezésénél pedig, hogy

$$\bar{R} < R;$$

ezzel tételünket maradéktalanul bebizonyítottuk.

A bebizonyított tétel lehetővé fogja tenni, hogy a konform leképezések mindazon tulajdonságait, amelyek csak a *Schwarz—Lindelöf*-féle elven nyugszanak, kiterjesszük a kvázi-konform leképezések tekintett osztályára. Így például a bebizonyított tételből könnyen következik az unicitási tétel.

4. TÉTEL. *A* $D(\Gamma_0, \Gamma)$ *sávnak a* $0 < v < 1$ *sávra való kétszer differenciálható (a* (38) *erősen elliptikus egyenletrendszert kielégítő) kvázi-konform leképezése, amely a végtelen távoli pontot önmagának felelteti meg, az* u, v *síknak egy, az* u *tengellyel párhuzamos eltolásától eltekintve egyértelműen meg van határozva.*

9. Maximum-elv és viselkedés a peremen. A konform és kvázi-konform leképezések elméletében lényegesek azok a tételek, amelyek a leképezésnek a peremen való viselkedését írják le, és speciálisan a deriváltakra vonatkozó, a leképezett tartomány határának geometriai jellemzőitől függő becslések. Ezeket a tételeket a *Schwarz—Lindelöf*-elv, továbbá a lineáris egyenletrendszereket kielégítő kvázi-konform leképezések bizonyos ismert tulajdonságai alapján lehet megkapni. Teljesség kedvéért a következő paragrafusban felsoroljuk a lineáris differenciálegyenlet-rendszerek azon tulajdonságait, amelyekre most, vagy a későbbiekben szükségünk lesz. A jelen paragrafusban hivatkozni fogunk ezekre a tulajdonságokra.

Ismét olyan kvázi-konform leképezéseket tekintünk, amelyek $D(\Gamma_0, \Gamma)$ tartományokat a $0<v<1$ sávba visznek át, és erősen elliptikus (38) egyenletrendszereknek felelnek meg. Feltesszük, hogy a Γ_0, Γ görbék görbülete egyenletesen folytonos, továbbá hogy a D sáv $y(x)-y_0(x)$ szélessége felülről és alulról korlátos, végül hogy a sáv

$$\frac{1}{2}\{|y_0'(x)|+|y'(x)|\}$$

hajlása korlátos.

5. TÉTEL. *A $D(\Gamma_0, \Gamma)$ sávnak a $0<v<1$ sávra való, a (38) egyenletrendszernek megfelelő, kvázi-konform leképezésénél a $R=\frac{\partial y}{\partial v}$, $\tau=\frac{\partial y}{\partial x}$ függvények a peremen elérik maximumukat és minimumukat.*

BIZONYÍTÁS. Szerkesszük meg egyenletrendszerünkhöz és a R, τ függvényekhez a derivált egyenletrendszert:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial x} &= \frac{\partial \tau}{\partial v}, \\ \frac{\partial R}{\partial v} &= a\frac{\partial \tau}{\partial x}+b\frac{\partial \tau}{\partial v}. \end{aligned}\right. \tag{44}$$

Az eredeti egyenletrendszer erős elliptikussága miatt a derivált egyenletrendszer szintén elliptikus lesz, következésképpen a

$$R=R(x, v),$$
$$\tau=\tau(x, v)$$

függvényrendszer a $0<v<1$ sávnak valamely egyszeresen összefüggő *Riemann*-felületre való kvázi-konform leképezését valósítja meg és, a 10. § 1. tulajdonsága szerint, R és τ a peremen eléri maximumát és minimumát.

A most bizonyított maximum-elvet közvetlenül is meg lehetett volna kapni a (44) rendszer másodrendű egyenletre való visszavezetése útján.

6. TÉTEL. *A D tartomány Γ_0, Γ határoló görbéi tegyenek eleget a következő feltételeknek:*

$$k_0<y(x)-y_0(x)<k,$$
$$|y_0'(x)|<k', \quad |y'(x)|<k',$$
$$|y_0''(x)|<k'', \quad |y''(x)|<k'',$$

ezen feltételek mellett a D tartományban fennáll

$$0<m<R<M,$$

ahol m és M csak a k állandóktól és a F_1, F_2 karakterisztikus függvényektől függ, a D tartomány alakjától nem.

BIZONYÍTÁS. A maximum-elv értelmében elég, ha R-et D határán becsüljük. Foglalkozzunk R alulról való becslésével. A bebizonyított *Schwarz—Lindelöf*-elv szerint elég, ha kimutatjuk R alulról való korlátosságát tetszés szerinti $D_0(\gamma_0, \gamma)$ „majoráns" tartományra, ahol γ_0 és γ a következő tulajdonságokkal rendelkezik: γ érinti Γ-t és sehol sincs Γ alatt, γ_0 sehol sincs Γ_0 alatt. Ilyen tartomány megszerkesztéséhez felhasználjuk a (44) derivált egyenletrendszert. Szerkesszünk a R, τ síkban egy Δ konvex tartományt, amelyet két, a (R_0, τ_0) pontot a (R_1, τ_1) ponttal,

$$0 < R_0 < R_1, \quad \tau_0 < 0 < \tau_1,$$

összekötő C_0 és C_1 körív határol, ahol a C_0, C_1 ívek minden pontban pozitív szöget alkotnak a R tengellyel, a C_0 ív konkáv, a C_1 ív pedig konvex. Legyen

$$R = R(u, v), \quad \tau = \tau(u, v) \tag{45}$$

az u, v sík $0 < v < 1$ sávjának a Δ tartományra való, a derivált egyenletrendszernek megfelelő, kvázi-konform leképezése.

A (45) leképezésből kvadraturák segítségével megkaphatjuk az eredeti egyenletrendszernek megfelelő kvázi-konform leképezést. Valóban, a (45) összefüggések megadják az áramvonalsűrűséget és az áramvonalak iránytangensét mint u és v függvényét, R-ből és τ-ból viszont a karakterisztikákban felírt egyenletrendszer segítségével egyértelműen meghatározható a V karakterisztika, szintén mint u és v függvénye, végül bármelyik áramvonal mentén fennáll:

$$\frac{dx}{du} = V \cos \alpha = \frac{V}{\sqrt{1+\tau^2}}. \tag{46}$$

Innen

$$\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial y}{\partial x}\frac{dx}{du} = \frac{V\tau}{\sqrt{1+\tau^2}}. \tag{47}$$

(46)-ot és (47)-et rögzített v mellett integrálva, megkapjuk az összes áramvonalat. Integrálva még (45) első,

$$\frac{\partial y}{\partial v} = R(u, v)$$

egyenletét, teljes megfelelést kapunk az áramvonalak és a v értékek között, és megkapjuk az u, v sík $0 < v < 1$ sávjának az x, y sík valamely D tartományára való leképezését. Nem nehéz megmutatni, hogy D egyrétű sáv lesz. Azonkívül a k konstansok bármely értékéhez találhatók olyan R_0, τ_0, R_1, τ_1 értékek és a C_0, C_1 ívek görbületének olyan értékei, hogy a megkonstruált tartomány „majoráns" legyen.

Teljesen analóg konstrukcióval lehet R felső becslését megkapni.

10. Lineáris egyenletek és lineáris egyenletrendszerek. Bizonyítás nélkül felsorolok több, másodrendű lineáris egyenletekre és lineáris egyenletrendszert kielégítő kvázi-konform leképezésekre vonatkozó állítást. Az összes felsorolt állítások benne foglaltatnak, vagy könnyen következnek a matematikai fizika egyenleteivel foglalkozó tankönyvekben[1] és M. A. LAVRENTYEV[2], Z. JA. SAPIRO[3] és B. V. SABAT[4] cikkeiben kifejtett megfelelő tételekből.

Kezdjük a másodrendű lineáris egyenletek elméletére vonatkozó eredményekkel.

Tekintsük a

$$\Delta y + A\frac{\partial y}{\partial \xi} + B\frac{\partial y}{\partial \eta} = 0, \tag{48}$$

$$\Delta y + A\frac{\partial y}{\partial \xi} + B\frac{\partial y}{\partial \eta} = f(\xi, \eta) \tag{49}$$

alakú egyenleteket, ahol Δ a *Laplace*-operátor:

$$\Delta y = \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2},$$

A, B, f pedig ξ-nek és η-nak a $0 \leqq \eta \leqq 1$ sávban értelmezett függvényei.

1. TULAJDONSÁG. A (48) egyenletben szereplő A, B együtthatók maradjanak a c korlát alatt, első és második deriváltjaik pedig a c', ill. c'' korlát alatt:

$$|A| < c_0, \quad |B| < c_0, \quad |\operatorname{grad} A| < c', \quad |\operatorname{grad} B| < c', \ldots, \tag{50}$$

és legyen megadva két függvény, $y_0(\xi)$ és $y(\xi)$, amelyekre

$$|y_0| \leqq k_0, \quad |y| \leqq k_0, \quad |y_0'| \leqq k', \quad |y'| \leqq k', \quad |y_0''| \leqq k'', \quad |y''| \leqq k''.$$

Ezek mellett a feltételek mellett a (48) egyenletnek a $0 < \eta < 1$ sávban van olyan $y(\xi, \eta)$ megoldása, amely a határokon az $y_0(\xi)$, ill. az $y(\xi)$ értéket veszi fel. Az $y(\xi, \eta)$ függvény $\frac{\partial y}{\partial \xi}$, $\frac{\partial y}{\partial \eta}$ parciális deriváltjai felülről és alulról korlátosak, továbbá egyenletesen folytonosak a $0 \leqq \eta \leqq 1$ zárt sávban, és a felső és alsó korlátokra, valamint az egyenletes folytonosság indexére megadható egy-egy, csak a c és k konstansoktól függő becslés.

[1] R. COURANT, D. HILBERT, Methoden der mathematischen Physik, II, Berlin, 1937.

[2] М. А. Лаврентьев, Об одном классе непрерывных отображений, Математический сборник, 42 : 4 (1935), 407—424.

[3] З. Я. Шапиро, О существовании квази-конформных отображений, Доклады Академии наук СССР, XXX, 8 (1941), 685—687.

[4] Б. В. Шабат, Об обобщенных решениях одной системы уравнений в частных производных, Математический сборник, 17 (59) : 2 (1945), 193—209.

Ha $y(\xi)\equiv 0$ és $y_0(\xi)$ nem nagyobb ε-nál, akkor

$$y(\xi,\eta)<\varepsilon(1-c_1\eta),$$

ahol c_1 csak a c_0, c' konstansoktól függ.

2. TULAJDONSÁG. A fenti jelölések mellett a c_0, c', k' mennyiségekkel együtt a $\frac{\partial y}{\partial \xi}$ derivált is zérushoz tart.

3. TULAJDONSÁG. A (49)-ben szereplő A, B együtthatók tegyenek eleget az előbbi feltételeknek, és legyen $y(\xi,\eta)$ a (49) egyenlet megoldása zérus peremfeltételek mellett: $y(\xi,0)=0$, $y(\xi,1)=0$. Ha az f függvény differenciálható és a $0\leqq\eta\leqq 1$ sávban mindenütt teljesül, hogy

$$|f(\xi,\eta)|<\varepsilon,$$

akkor

$$\left|\frac{\partial y}{\partial \xi}\right|<K\varepsilon, \quad \left|\frac{\partial y}{\partial \eta}\right|<K,$$

ahol a K konstans csak a c_0, c', c'' értékektől függ.

A (48), (49) egyenletek megoldásainak említett tulajdonságain kívül szükségünk lesz a későbbiekben a

$$\frac{\partial^2 y}{\partial v^2}+A\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2 y}{\partial x\,\partial v}=0 \tag{51}$$

egyenlet megoldásainak alábbi tulajdonságára, ahol A és B a $0\leqq v\leqq 1$ sávban eleget tesz az (50) feltételeknek és az elliptikusság feltételének:

$$A-\frac{1}{4}B^2>c_0>0.$$

4. TULAJDONSÁG. Ha $y=y(x,v)$ az (51) egyenlet integrálja és $y\not\equiv$ const., akkor $\frac{\partial y}{\partial x}$-re érvényes a maximum-elv: $\frac{\partial y}{\partial x}$ a tartomány belsejében nem éri el maximumát és minimumát.

5. TULAJDONSÁG. A és B csak x-től függjön, amellett teljesüljön

$$\left|\frac{dA}{dx}\right|<\nu, \quad \left|\frac{dB}{dx}\right|<\nu, \quad \left|\frac{d^2A}{dx^2}\right|<\nu, \quad \left|\frac{d^2B}{dx^2}\right|<\nu,$$

és legyen az (51) egyenlet $y(x,v)$ megoldása olyan, hogy

$$M=\max_{|x|<\infty}\frac{d^2y(x,1)}{dx^2}>\max_{|x|<\infty}\frac{d^2y(x,0)}{dx^2}+\lambda. \tag{52}$$

Ezek mellett a feltételek mellett van olyan, csak ν-től és c_0-tól függő

$\lambda=\lambda(\nu, c_0)>0$, $\lim\limits_{\nu\to 0}\lambda=0$, hogy (52)-ből következzék, hogy

$$\left|\frac{\partial^2 y(x,v)}{\partial x^2}\right|<M$$

a sáv tetszés szerinti pontjában.

Áttérünk a lineáris egyenletrendszereknek megfelelő kvázi-konform leképezések tulajdonságaira.

Vizsgálni fogjuk a

$$\left\{\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial \eta}&=a_1\frac{\partial x}{\partial \xi}+b_1\frac{\partial y}{\partial \xi},\\ \frac{\partial y}{\partial \eta}&=a_2\frac{\partial x}{\partial \xi}+b_2\frac{\partial y}{\partial \xi}\end{aligned}\right. \tag{53}$$

egyenletrendszernek megfelelő (a ξ, η sík $0<\eta<1$ sávját az x, y sík egy tartományába átvivő) kvázi-konform leképezéseket, ahol az a, b együtthatók a négy koordináta, x, y, ξ és η megadott, kétszer differenciálható függvényei. Azonkívül feltesszük, hogy az (53) egyenletrendszer elliptikus:

$$-b_1a_2-\frac{1}{4}(b_2-a_1)^2>\nu>0,$$

ahol ν a koordinátáktól független állandó.

Mindenekelőtt megemlítjük a következő általános tételt:

6. TULAJDONSÁG. *Minden egyszeresen összefüggő, hiperbolikus típusú S Riemann-felülethez található a $0<\eta<1$ sávnak S-re való (az (53) egyenletrendszernek megfelelő) kvázi-konform leképezése; a leképezés három valós állandótól eltekintve egyértelműen meghatározott. Ha az a, b együtthatók abszolút értékben a k korlát alatt maradnak, a S felület pedig az*

$$|y|<H$$

sávhoz tartozik, akkor a $h<\eta<1-h$, $h>0$, sávban az x, y függvények eleget tesznek a Hölder-feltételnek:

$$\begin{gathered}|f(\zeta+\Delta\zeta)-f(\zeta)|<K|\Delta\zeta|^\alpha,\\ \zeta=\xi+i\eta,\quad f(\zeta)=x+iy,\end{gathered} \tag{54}$$

ahol K és az $\alpha>0$ kitevő csak a ν, k, H, h konstansoktól függ.

Ha még azt is feltesszük, hogy az a, b együtthatók összes második parciális deriváltjai a k'' korlát alatt maradnak, akkor a $h<\eta<1-h$ sávban x és y összes parciális deriváltjai egy, csak a ν, k, H, h, k'' mennyiségektől függő korlát alatt maradnak, és

$$\left|\frac{\partial x}{\partial \eta}\right|<K\log\frac{1}{\eta(1-\eta)}. \tag{55}$$

Foglalkozzunk külön azzal az esettel, amikor S a $0<y<1$ egységsáv, és a

$$z=f(\zeta),$$
$$z=x+iy$$

leképezés során a $\xi=\pm\infty$ pontok az $x=\pm\infty$ pontokba mennek át.

7. TULAJDONSÁG. Ha az a, b együtthatók első parciális deriváltjai közül egyik se haladja meg az ε' értéket, akkor a $0\leqq\eta\leqq1$ sávban fennáll:

$$0<k<\left|\frac{f(\zeta+\Delta\zeta)-f(\zeta)}{\Delta\zeta}\right|<K,$$

ahol k és K csak ε'-től, ν-től és az a, b együtthatók abszolút értékének maximumától függ.

8. TULAJDONSÁG. Ha az a, b együtthatók összes első parciális deriváltjai az ε', a második parciális deriváltak pedig az ε'' korlát alatt maradnak, akkor a $0<\eta<1$ sávban fennáll:

$$\left|\frac{\partial^2 x}{\partial\xi^2}\right|<K\varepsilon. \tag{56}$$

Befejezésül megemlítünk még két olyan tulajdonságot, amely a leképezés variációja és az a, b együtthatók variációja közötti összefüggést adja meg.

9. TULAJDONSÁG. Tegyük fel, hogy az (53) egyenletrendszeren kívül adva van egy tőle végtelenül keveset eltérő

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial\eta}=\bar{a}_1\dfrac{\partial x}{\partial\xi}+\bar{b}_1\dfrac{\partial y}{\partial\xi}, \\ \dfrac{\partial y}{\partial\eta}=\bar{a}_2\dfrac{\partial x}{\partial\xi}+\bar{b}_2\dfrac{\partial y}{\partial\xi} \end{cases} \tag{57}$$

egyenletrendszer is, és legyen

$$z=\bar{f}(\zeta)$$

az (57) rendszert kielégítő, a $0<\eta<1$ egységsávot a $0<y<1$ egységsávba átvivő leképezés,

$$\bar{f}(\pm\infty)=\pm\infty,$$
$$\bar{f}(0)=0.$$

E feltételek mellett, ha az a, b együtthatók első és második parciális deriváltjai $\frac{1}{T}$-nél, a $\delta a_1=\bar{a}_1-a_1,\ldots,\delta b_2=\bar{b}_2-b_2$ variációk ε-nál, a variációk első és második parciális deriváltjai pedig $\frac{\varepsilon}{T}$-nél nem nagyobbak, akkor

x-nek és y-nak ξ és η szerinti második parciális deriváltjai közül egyiknek a variációja sem nagyobb, mint $K\frac{\varepsilon}{T}$ ($K=$ const., T nagy az egységhez képest), az első deriváltak variációja pedig legfeljebb $K\varepsilon$.

11. A közelítő megoldás és tulajdonságai. A 7. §-ban végzett vizsgálatok értelmében egy görbevonalú sávot a $0<v<1$ sávba átvivő kvázi-konform leképezés megszerkesztésének a feladata visszavezethető egy másodrendű kvázi-lineáris egyenlethez tartozó *Dirichlet*-feladatra. Az általunk vizsgált esetben, amikor az eredeti egyenletrendszer a koordinátákat explicite nem tartalmazza, a kvázi-lineáris egyenlet

$$\frac{\partial^2 y}{\partial v^2} - b\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial v} - a\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \tag{58}$$

alakú lesz, ahol az a, b együtthatók R és τ függvényei:

$$R = \frac{\partial y}{\partial v}, \quad \tau = \frac{\partial y}{\partial x},$$
$$a = a(R, \tau), \quad b = b(R, \tau);$$

ezek a függvények első és második deriváltjaikkal együtt a R, τ síkon egyenletesen folytonosak.

Minthogy az eredeti egyenletrendszerről feltettük, hogy erősen elliptikus, az (58) egyenlet elliptikus lesz,

$$-a - \frac{1}{4}b^2 > 0, \tag{59}$$

ha $R \neq 0$.

A legközelebbi paragrafusokban a megoldás megszerkesztésénél azzal a kiegészítő feltevéssel fogunk élni, hogy elég nagy R-ekre,

$$R \geqq C,$$

teljesül

$$a = -1, \quad b = 0,$$

elég kis R értékekre, $R \leqq \mu$, pedig

$$-a - \frac{1}{4}b^2 > k > 0.$$

Ezektől a megszorításoktól később meg fogunk szabadulni.

Áttérve az (58) egyenlet megoldásának a megszerkesztésére, először megkonstruáljuk az ehhez az egyenlethez tartozó *Dirichlet*-feladat egy „közelítő megoldását".

Ezt a közelítő megoldást a $0<v<1$ egységsávban fogjuk megszerkeszteni, feltételezve, hogy a keresett $y(x, v)$ függvény e sáv határain adott értékeket vesz fel:

$$\left.\begin{aligned} y(x,0)&=y_0(x),\\ y(x,1)&=y_1(x),\end{aligned}\right\} \tag{60}$$

ahol feltesszük, hogy az y_0, y_1 függvények kétszer differenciálhatók és olyanok, hogy

$$0<k_0<y_1(x)-y_0(x)<k_1,$$
$$|y_0'(x)|<k', \quad |y_1'(x)|<k',$$
$$|y_0''(x)|<k'', \quad |y_1''(x)|<k''.$$

Rögzítsünk egy T pozitív számot és vezessük be az

$$a_0=a_0(x)=a(R_0,\tau_0), \quad b_0=b_0(x)=b(R_0,\tau_0) \tag{61}$$

jelöléseket, ahol

$$\left\{\begin{aligned} R_0&=\frac{1}{T^2}\int\limits_{x-T}^{x+T}dt\int\limits_{t-T}^{t+T}[y_1(t)-y_0(t)]dt,\\ \tau_0&=\frac{1}{2T^3}\int\limits_{x-T}^{x+T}dt\int\limits_{t-T}^{t+T}[y_1(t+T)-y_1(t)+y_0(t+T)-y_0(t)]dt.\end{aligned}\right. \tag{62}$$

R_0-t és τ_0-t differenciálva becsléseket kaphatunk a R_0 és a τ_0 mennyiség x szerinti első négy deriváltjára:

$$\begin{aligned} |R_0'|&<\frac{2(k_1-k_0)}{T}; & |\tau_0'|&<\frac{2k'}{T},\\ |R_0''|&<\frac{4k_1}{T^2}; & |\tau_0''|&<\frac{4k'}{T^2},\\ |R_0'''|&<\frac{4k'}{T^2}; & |\tau_0'''|&<\frac{4k'}{T^3},\\ |R_0^{\mathrm{IV}}|&<\frac{4k''}{T^2}; & |\tau_0^{\mathrm{IV}}|&<\frac{4k''}{T^3}.\end{aligned} \tag{63}$$

A fenti becsléseken kívül szükségünk lesz még a továbbiakban R_0 és τ_0 deriváltjai variációjának a becslésére y_0 és y_1 variációjának a függvényében. Legyen tehát

$$\delta y_0=0, \quad |\delta y_1|\leqq\varepsilon,$$

akkor nyilván

$$\begin{aligned} |\delta R_0'|&<\frac{4\varepsilon}{T}, & |\delta\tau_0'|&<\frac{8\varepsilon}{T^2},\\ |\delta R_0''|&<\frac{4\varepsilon}{T^2}, & |\delta\tau_0''|&<\frac{8\varepsilon}{T^3}.\end{aligned} \tag{64}$$

Most írjuk fel a

$$\text{(63a)} \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} - a_0(x)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - b_0(x)\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial v} = 0$$

differenciálegyenletet. Ennek az egyenletnek a $0<v<1$ sávban reguláris és a sáv határain a (60) értékeket felvevő integrálját az (58) egyenlet ugyanezen peremértékekhez tartozó integrálja „közelítő" értékének fogjuk tekinteni. Az a-ra és b-re tett feltevések mellett a (63a) egyenlet elliptikus típusú lineáris egyenlet, amelynek tetszés szerinti kétszer differenciálható peremfeltételek mellett van a $0<v<1$ sávban kétszer folytonosan differenciálható megoldása.

A (63a) egyenlet integráljának ismert, az előző paragrafusban felsorolt, tulajdonságain kívül szükségünk lesz a következő variációs tételre:

1. LEMMA. *A k', k'' konstansok elég kis rögzített értékeire és bármely elég nagy rögzített T értékre, ha $y_0(x)$ variációja legfeljebb ε és $|x|\to\infty$ esetén zérushoz tart, $y_1(x)$ variációja pedig zérus:*

$$|\delta y_0(x)| \leqq \varepsilon, \quad \delta y_1(x) = 0, \quad \lim_{|x|\to\infty} \delta y_0(x) = 0,$$

akkor tetszés szerinti $v>0$ mellett $y(x, v)$ variációja, $v = \text{const.}$, *nem nagyobb, mint $m\varepsilon$,*

$$|\delta y(x, v)| < m\varepsilon,$$

ahol m csak v-től függ, és minden $v>0$ értékre

$$m = m(v) < 1.$$

BIZONYÍTÁS. A bizonyításhoz a (63a) egyenletet mindenekelőtt hozzuk kanonikus alakra:

$$\text{(63b)} \qquad \Delta y + A\frac{\partial y}{\partial \xi} + B\frac{\partial y}{\partial \eta} = 0.$$

A régi x, v és az új ξ, η változók között fennálló

$$\text{(65)} \qquad \xi = \xi(x, v), \qquad \eta = \eta(x, v)$$

kapcsolatok a $0<v<1$ egységsávnak a $0<\eta<1$ egységsávra való olyan kvázi-konform leképezését fogják megvalósítani, amely a

$$\text{(66)} \qquad \begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial x} &= \frac{b_0}{\Delta}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{a_0}{\Delta}\frac{\partial \xi}{\partial v}, \\ \frac{\partial \eta}{\partial v} &= -\frac{1}{\Delta}\frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{b_0}{\Delta}\frac{\partial \xi}{\partial v}, \end{aligned} \qquad \Delta = -a_0 - \frac{1}{4}b_0^2 > k > a$$

lineáris egyenletrendszernek felel meg. A A, B együtthatók alakja a következő lesz:

$$(67)\qquad \begin{aligned} A &= \frac{1}{M}(a_0\xi_{xx}+b_0\xi_{xv}+\xi_{vv}),\\ B &= \frac{1}{M}(a_0\eta_{xx}+b_0\eta_{xv}+\eta_{vv}), \end{aligned} \qquad M=\frac{1}{-a_0\xi_x^2-b_0\xi_x\xi_y+\xi_y^2}.$$

Transzformáljuk hasonló módon a variált peremfeltételeknek megfelelő (63a) egyenletet; az

$$\bar{y}(x,v)=y(x,v)+\delta y(x,v)$$

jelöléssel kapjuk:

$$(68)\qquad \Delta\bar{y}+\bar{A}\frac{\partial\bar{y}}{\partial\bar{\xi}}+\bar{B}\frac{\partial\bar{y}}{\partial\bar{\eta}}=0,$$

ahol $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$, $\bar{A}$, $\bar{B}$ a (66), (67) képletek alapján határozhatók meg, ha az utóbbiakban a_0-t és b_0-t variált értékükkel helyettesítjük.

Miután ezt megjegyeztük, rögzítsünk egy tetszés szerinti $M(x_0, v)$ pontot, és becsüljük meg ebben a pontban a $\delta y(x,v)$ variációt. A (65) leképezésnél és a variált

$$(69)\qquad \bar{\xi}=\bar{\xi}(x,v),\quad \bar{\eta}=\bar{\eta}(x,v)$$

leképezésnél fellépő tetszés szerinti állandót válasszuk meg úgy, hogy a M pont az első leképezés során a $M_1(0,\eta_0)$ pontba menjen át, és hogy mindkét leképezésnél az x tengely valamelyik x_1 pontja a koordinátarendszer kezdőpontjába menjen át.

A keresett δy variációt négy variáció összegeként állítjuk elő:

$$\delta y=\delta_1+\delta_2+\delta_3+\delta_4.$$

δ_1-nek választjuk a (63b) egyenlet $y(\xi,\eta)$ integráljának a variációját a M_1 pontban a A, B kezdeti függvények mellett, amikor csak a peremfeltételek változnak: az $y(\xi,0)=y_0[x(\xi)]$ feltételről áttérünk az $y(\xi,0)=y_0[x(\xi)]+$ $+\delta y_0[x(\xi)]$ feltételre. δ_2-nek választjuk a (63b) egyenlet megoldásának δy variációját a M_1 pontban, amikor csak A és B változik. δ_3-nak választjuk a (63b) egyenlet integráljának δy variációját a M_1 pontban, amikor csak a peremfeltételek variálódnak a ξ, η koordinátákról a $\bar{\xi}, \bar{\eta}$ koordinátákra való áttérésnek megfelelően:

$$\delta y_0=y_0[\bar{x}(\xi)]-y_0[x(\xi)].$$

δ_4-nek vesszük a (63b) egyenlet megoldásának $\delta\dot{y}$ variációját a M_1 pontról arra a $\bar{M}_1(\bar{\xi}_0,\bar{\eta}_0)$ pontra való áttérésnél, amely a M pontnak a (69) leképezés során megfelel.

Megmutatjuk, hogy a tett feltevések mellett δy főtagja δ_1 lesz, amely az előző paragrafusban említett 1. tulajdonság értelmében kielégíti a

$$(70)\qquad |\delta_1|<\varepsilon(1-c\eta_0)$$

egyenlőtlenséget, ahol $c>0$; de a (65) leképezés 7. tulajdonsága miatt az $\frac{\eta_0}{v}$ hányados olyan felső és alsó korlátok között marad, amelyek szintén csak a k', k'', T konstansoktól függnek, következésképpen a (70) becslésben η_0 helyébe v-t írhatunk:

$$|\delta_1| < \varepsilon(1-cv).$$

Most megmutatjuk, hogy T nagy értékeire az összes többi δ-k kicsinyek εv-hez, vagy ami ugyanaz, $\varepsilon\eta_0$-hoz képest.

Variálva a (63b) egyenletet, δ_2-re kapjuk:

$$\Delta\delta_2 + A\frac{\partial\delta_2}{\partial\xi} + B\frac{\partial\delta_2}{\partial\eta} = -\frac{\partial y}{\partial\xi}\delta A - \frac{\partial y}{\partial\eta}\delta B. \tag{71}$$

Meg kell becsülnünk δ_2-t a M_1 pontban a mellett a feltétel mellett, hogy az egységsáv határain δ_2 zérussá válik. Ebből a célból megbecsüljük (71) jobboldalát; ennek során elég arra az esetre szorítkoznunk, amikor $|y_1(0)-y_0(0)|<2C$. A lineáris egyenletek 1. tulajdonsága értelmében $\frac{\partial y}{\partial\xi}$ és $\frac{\partial y}{\partial\eta}$ olyan korlátok alatt marad, amelyek csak a C, k', k'' állandóktól függnek, így (71) jobboldalának nagyságrendjét δA és δB fogja meghatározni. (67) szerint δA és δB olyan összegekként írhatók fel, amelyeknek tagjai egyrészt az a, b függvényeknek a ξ, η függvények x és v szerinti második parciális deriváltjai variációjával való szorzatai, másrészt ugyanezeknek a deriváltaknak a és b variációjával való szorzatai:

$$a_0\delta\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}, \ldots, b_0\delta\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}, \ldots, \tag{72}$$

$$\delta a_0\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}, \ldots, \delta b_0\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}, \ldots . \tag{73}$$

Tekintsük a (72) tagokat. A feladat feltételei szerint a_0 és b_0 korlátos, továbbá (63), (64) és a lineáris kvázi-konform leképezések 9. tulajdonsága alapján az összes $\delta\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}, \ldots$ variációk $\frac{\varepsilon}{T}$ nagyságrendűek lesznek. Most foglalkozzunk a (73) tagokkal. A lineáris egyenletrendszerek 8. tulajdonsága értelmében $\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}, \ldots$ kicsinyek, ha $\frac{1}{T}$ kicsiny, δa_0 és δb_0 nagyságrendje pedig ε.

Tehát végeredményben

$$\left|\frac{\partial y}{\partial\xi}\delta A + \frac{\partial y}{\partial\eta}\delta B\right| < K\frac{\varepsilon}{T},$$

ahol K csak a C, k', k'' mennyiségektől függő állandó.

Innen (71) linearitása miatt következik, hogy

$$\left|\frac{\partial \delta_2}{\partial \eta}\right| < K_1 \frac{\varepsilon}{T},$$

és a minket érdeklő M_1 pontban

$$|\delta_2| < K_1 \frac{\varepsilon \eta}{T}.$$

Áttérünk δ_3 becslésére. δ_3 definíciója és a (65) kvázi-konform leképezést, valamint ennek variációját meghatározó feltételek alapján feladatunk a (63b) egyenlet megoldása azon variációjának a megbecslésére redukálódik, amely az

$$y = y_0(\xi), \quad \text{ha} \quad \eta = 0,$$
$$y = y_1(\xi), \quad \text{ha} \quad \eta = 1$$

peremfeltételről az

$$y = y_0[\varphi_0(\xi)],$$
$$y = y_1[\varphi_1(\xi)]$$

feltételre való áttérés során következik be, ahol

$$\bar{\xi} = \varphi_0(\xi) \quad \text{és} \quad \bar{\xi} = \varphi_1(\xi)$$

azok a függvények, amelyek a ξ, η sík és a $\bar{\xi}, \bar{\eta}$ sík egységsávja határai közötti megfelelést létesítik. Ezek a függvények háromszor differenciálhatók, és a 9. tulajdonság értelmében fennáll:

$$\varphi_0(0) = 0, \quad |\varphi_0'(\xi) - 1| < K\varepsilon, \quad |\varphi_0''(\xi)| < \frac{T\varepsilon}{T},$$

$$|\varphi_1'(\xi) - 1| < K\varepsilon, \quad |\varphi_1''(\xi)| < K\varepsilon.$$

Azonkívül nyilvánvaló, hogy

$$|\varphi_1(0)| < K\varepsilon,$$

ahol K csak a k konstansoktól függ.

Innen, tekintetbe véve k', k'' és $\frac{1}{T}$ kicsiny voltát, a lineáris egyenletek 6. tulajdonsága alapján kapjuk, hogy δ_3 kicsiny $\eta\varepsilon$-hoz képest.

Becsülnünk kell még δ_4-et. A kvázi-konform leképezések 9. tulajdonsága és a (65), (69) leképezésekre tett kiegészítő feltételek miatt fennáll:

$$|\bar{\xi}_0| < K\eta_0\varepsilon,$$

$$|\bar{\eta}_0 - \eta_0| < \frac{K\eta_0\varepsilon}{T},$$

de a feladat feltételei és a lineáris egyenletek 7. tulajdonsága szerint $\frac{\partial y}{\partial \xi}$

kicsi, $\frac{\partial y}{\partial \eta}$ pedig csak a k konstansoktól függő korlát alatt marad, következésképpen δ_4 kicsiny lesz $\eta_0\varepsilon$-hoz képest.

Állításunkat maradéktalanul bebizonyítottuk.

12. Illesztési lemma. Tekintsük az x, v síkban a $-1<v<1$ sávot, és legyenek ennek a sávnak a $v=\pm 1$ határain megadva az $y=y_1(x)$, $y=y_2(x)$ függvények; tegyük fel, hogy ezek a függvények eleget tesznek az 1. lemma feltételeinek. A lineáris egyenletrendszerek 1. tulajdonsága következtében bármely kétszer differenciálható $y_0(x)$ függvényhez, amelyre $|y_2-y_0|$, $|y_0-y_1|$, $|y_0'|$ és $|y_0''|$ korlátos, mindig lehet konstruálni olyan $y_1(x, v)$, $y_2(x, v)$ függvényeket, hogy y_1 kielégítse a (63a) egyenletet a $-1<v<0$ sávban és a $v=0$, $v=-1$ egyeneseken rendre az $y_0(x)$, $y_1(x)$ értékeket vegye fel, az y_2 függvény pedig a $0<v<1$ sávban tegyen eleget (63a)-nak és a $v=0$, $v=1$ egyeneseken rendre az $y_0(x)$, $y_2(x)$ értékeket vegye fel. Természetesen feltesszük, hogy a (63a) egyenletben fellépő a_0, b_0 együtthatókat meghatározó (61), (62) képletekben az alsó sáv esetében $y_1(x)$ és $y_0(x)$, a felső sáv esetében $y_0(x)$ és $y_2(x)$ szerepel.

Bebizonyítjuk a következő lemmát:

2. LEMMA. *Az $y_1(x)$-re és $y_2(x)$-re tett feltevések és elég nagy T mellett van olyan kétszer differenciálható $y_0(x)$ függvény, hogy az x tengely mentén teljesül*

$$\left[\frac{\partial y_1(x, v)}{\partial v}\right]_{v=0}=\left[\frac{\partial y_2(x, v)}{\partial v}\right]_{v=0}.$$

Ha $y_1'(x)$ és $y_2'(x)$ a k' korlát alatt, $|y_1''(x)|$ és $|y_2''(x)|$ pedig a k'' korlát alatt marad, akkor

$$|y_0(x)|<k', \quad |y_0''(x)|<\nu(k'-k''),$$

ahol k'-vel együtt ν is zérushoz tart.

BIZONYÍTÁS. A bizonyításhoz használjuk fel a *Schwarz*-féle alternáló eljárást. Rögzítsünk egy h számot. Tekintsük a $B_1\colon -1<v<h$, $B_2\colon -h<v<1$ sávokat és szerkesszünk meg bennük egy-egy függvénysorozatot. Jelöljük $y_1^{(1)}(x, v)$-vel a (63a) egyenletnek azt a megoldását a B_1 sávban, amely a $v=h$ egyenesen a 0 értéket, a $v=-1$ egyenesen pedig az $y_1(x)$ értékeket veszi fel. Jelöljük $y_2^{(1)}(x, v)$-vel a (63a) egyenletnek azt a megoldását a B_2 sávban, amely a $v=-h$ egyenesen az $y_1^{(1)}(x, -h)$, a $v=1$ egyenesen pedig az $y_2(x)$ értékeket veszi fel. $y_1^{(n)}(x, v)$-vel fogjuk jelölni a (63a) egyenletnek azt a megoldását a B_1 sávban, amely a $v=h$ egyenesen az $y_2^{(n-1)}(x, h)$, a $v=-1$ egyenesen pedig az $y_1(x)$ értékeket veszi fel; $y_2^{(n)}(x, v)$ a (63a) egyenletnek az a megoldása, amely $v=-h$ esetén $y_1^{(n)}(x, -h)$-val, $v=1$ esetén $y_2(x)$-szel egyenlő.

A 9. tulajdonság folytán az összes $y^{(n)}$ függvények x szerinti parciális deriváltjai nem nagyobbak k'-nél, az x szerinti második parciális deriváltak pedig nem nagyobbak $(k''+\lambda)$-nál, ahol λ nem függ sem n-től, sem h-tól. Innen az 1. lemma felhasználásával következik, hogy az

$$y_1^{(1)}, y_1^{(2)}, \ldots, y_1^{(n)}, \ldots$$
$$y_2^{(1)}, y_2^{(2)}, \ldots, y_2^{(n)}, \ldots$$

sorozatok mindegyike egyenletesen konvergál, az egyik a B_1, a másik a B_2 sávban. Jelöljük e sorozatok limeszét $y_1(x, v, h)$-val, ill. $y_2(x, v, h)$-val.

A lineáris egyenletek 1. tulajdonsága értelmében a megkonstruált függvények a (63a) egyenlet megoldásai és (h-ra nézve) egyenlő mértékben folytonos v szerinti parciális deriváltakkal rendelkeznek; azonkívül a konstrukció szerint

$$y_1(x, -h, h) = y_2(x, -h, h), \quad y_1(x, h, h) = y_2(x, h, h).$$

Innen következik, hogy $h \to 0$ esetén a megszerkesztett függvények határértékben megadják a keresett $y_1(x, v)$, $y_2(x, v)$ megoldásokat.

A lemma állításának második része az 1. lemmában szereplő konstrukcióból és a lineáris egyenletek 4. és 5. tulajdonságából következik.

A fent bizonyított két lemmából könnyen nyerhető a 2. lemmában szereplő $y_0(x)$ függvényre vonatkozó következő variációs állítás:

3. LEMMA. *A 2. lemma feltételei mellett kapjon az $y_1(x)$ függvény egy végtelenül kicsiny, kétszer differenciálható δy_1 növekményt. Az $y_0(x)$ illesztési függvény megfelelő növekményét δy_0-lal jelölve fennáll*

$$|\delta y_0| < \mu |\delta y_1|,$$

ahol μ csak a k konstansoktól függő állandó és

$$\mu < 1.$$

13. Hasonlósági elv. A (63a) egyenlet nyilván invariáns az x, v, y tér hasonlósági transzformációjára nézve, ha a T közepelési intervallumot ugyanazzal a hasonlósági tényezővel változtatjuk meg. Ebből következik, hogy az előző lemmákat meg lehet fogalmazni tetszés szerinti olyan sávra, amelynek a határai párhuzamosak az x tengellyel.

Ha a sáv szélessége λ, akkor a (62) képletekben R_0 és τ_0 helyébe a

$$R_0 = \frac{1}{t^2 \lambda} \int_{x-t}^{x+t} ds \int_{s-t}^{s+t} [y_2(s) - y_1(s)]\, ds,$$

$$\tau_0 = \frac{1}{2t^3} \int_{x-t}^{x+t} ds \int_{s-t}^{s+t} [y_2(s+t) - y_2(s) + y_1(s+t) - y_1(s)]\, ds \;\cdot$$

kifejezéseket kell behelyettesíteni.

A három utolsó lemma állításai érvényben maradnak akkor, ha rögzített k_2 mellett,

$$|y_2(x)-y_1(x)|<k_2\lambda,$$

a következő öt mennyiség elég kicsiny:

$$\max|y_1'|, \quad \max|y_2'|, \quad \lambda\max|y_1''|, \quad \lambda\max|y_2''|, \quad \frac{\lambda}{\varepsilon}.$$

14. Az n-edik közelítés. A

$$0<v<1$$

egységsávot osszuk fel n számú $B_1, B_2, \ldots, B_n$ sávra,

$$B_i\colon \frac{i-1}{n}<v<\frac{i}{n}, \qquad i=1,2,\ldots,n.$$

A $Y(x,v)$ függvényt az (58) egyenlet n-edrendű közelítő megoldásának nevezzük, ha a Y függvény a B sávban folytonos parciális deriváltakkal rendelkezik x és v szerint, és ha mindegyik B_i sávban, $i=1,2,\ldots,n$, a Y függvény kielégíti a (63a) egyenletet

$$\lambda=\frac{1}{n},$$

$$y_1=Y\left(x,\frac{i-1}{n}\right), \qquad y_2=Y\left(x,\frac{i}{n}\right)$$

mellett.

Nyilvánvaló, hogy az így definiált n-edik közelítés, Y, függni fog a t „közepelési" paramétertől, amelyet a

$$t=\frac{T}{n}$$

képlettel értelmezünk.

Most bebizonyítjuk a következő alapvető lemmát:

4. LEMMA. *Legyen adva két függvény, $y_0(x)$ és $y_1(x)$, amelyeknek létezik első és második deriváltjuk, és amelyekre*

$$
\begin{gathered}
|y_1(x)-y_0(x)|\leqq k,\\
\lim_{x\to+\infty} y_0(x)=h_0, \quad \lim_{x\to-\infty} y_0(x)=h_1,\\
\lim_{x\to+\infty} y_1(x)=h_2, \quad \lim_{x\to-\infty} y_1(x)=h_3,\\
|y_0'(x)|\leqq k', \quad |y_1'(x)|\leqq k',\\
|y_0''(x)|\leqq k'', \quad |y_1''(x)|\leqq k''.
\end{gathered}
\tag{75}
$$

E feltételek teljesülése és elég kicsiny k', k'', $\frac{1}{T}$ értékek esetén minden n egész számhoz az (1) egyenletnek létezik olyan $Y(x, v)$ n-edrendű közelítő megoldása a B sávban, amely a sáv határain az $y_0(x)$, ill. $y_1(x)$ értékeket veszi fel:

$$Y(x, 0) = y_0(x), \quad Y(x, 1) = y_1(x).$$

BIZONYÍTÁS. Mindenekelőtt jegyezzük meg, hogy $y_0(x) = y_1(x)$ esetén a megoldás triviális: $Y(x, v) \equiv 0$ tetszés szerinti n-re és T-re.

Most tegyük fel, hogy a keresett Y_μ megoldás létezik a $\mu y_0(x)$, $\mu y_1(x)$ peremfeltételek mellett, ahol y_0 és y_1 teljesíti a (75) feltételeket, μ pedig valamilyen 1-nél kisebb pozitív szám, és szerkesszük meg a $(\mu + \Delta\mu) y_0(x)$, $y_1(x)$ peremfeltételekhez tartozó megoldást elég kicsiny $\Delta\mu$ esetére. A fokozatos közelítés módszerével keresni fogjuk $Y^{(1)}_{\mu+\Delta\mu}$ értékeit a B_i sávok határain. Ismertetjük az eljárást.

Tekintsük a B_1 és a B_2 sávot. Alkalmazva az illesztési lemmát, konstruáljunk egy, a $0 < v < \frac{2}{n}$ sávban folytonosan differenciálható függvényt, amely a B_1, B_2 sávokban kielégíti a (63a) egyenletet és a $v = 0$, $v = \frac{2}{n}$ határokon rendre a $(\mu + \Delta\mu) y_0(x)$, $Y_\mu\left(x, \frac{2}{n}\right)$ értékeket veszi fel. Jelentse $z_1(x, 1)$ a megszerkesztett függvény értékeit a $v = \frac{1}{n}$ egyenesen. Az $\frac{1}{n} < v < \frac{3}{n}$ sávban, ugyanannak a lemmának a segítségével, konstruáljuk meg (63a)-nak a $v = \frac{1}{n}, \frac{3}{n}$ egyeneseken a $z_1(x, 1)$, $Y_\mu\left(x, \frac{3}{n}\right)$ értékeket felvevő megoldását. A kapott függvény $v = \frac{2}{n}$ egyenes menti értékeit jelöljük $z_1(x, 2)$-vel. Ezt az eljárást folytatva, $n-1$ számú függvényt kapunk:

$$z_1(x, 1), z_1(x, 2), \ldots, z_1(x, n-1).$$

Ismételjük meg a fent leírt eljárást úgy, hogy a $Y_\mu\left(x, \frac{i}{n}\right)$ peremfeltételeket a $z_1(x, i)$ peremfeltételekkel helyettesítjük, ezáltal újabb $n-1$ számú függvényt kapunk:

$$z_2(x, 1), z_2(x, 2), \ldots, z_2(x, n-1).$$

A z_2 függvényekből kiindulva megkonstruálunk $n-1$ számú z_3 függvényt stb.

Megmutatjuk, hogy a lemma feltételeinek fennállása esetén tetszés szerinti i-re, $i=1,2,\dots,n-1$, a

$$z_1(x,i),\ z_2(x,i),\dots,z_n(x,i),\dots$$

függvénysorozat egyenletesen konvergál egy kétszer differenciálható $z(x,i)$ függvényhez, és a (63a) egyenletnek az a megoldása, amely a B_i, $i=1,2,\dots,n$, sávokban a $z(x,i)$, $z(x,i+1)$ peremértékeket veszi fel, megadja a keresett $Y^{(1)}_{\mu+\Delta\mu}$ megoldást.

Ennek érdekében előbb megemlítjük a z_n függvények néhány tulajdonságát.

A 3. lemma és a konstrukció folytán fennáll:

$$|z_n'(x,i)|<k'. \tag{76}$$

Innen, ugyanazon lemma értelmében, elég nagy T esetén kapjuk:

$$|z_n''(x,i)|<\mu(k',k'')\cdot n. \tag{77}$$

Ezeknek a tulajdonságoknak a következtében elég kis k' és $\frac{1}{T}$ értékekre és tetszés szerinti rögzített k'' és k mellett a z függvények megszerkesztése lehetséges, továbbá a 3. lemma szerint

$$|z_{n+1}-z_n|<\varrho|z_n-z_{n-1}|, \tag{78}$$

ahol $\varrho<1$ és nem függ n-től és i-től.

(78)-ból következik, hogy a

$$z_1(x,i),\ z_2(x,i),\dots,z_m(x,i),\dots$$
$$i=1,2,\dots,n-1$$

sorozat egyenletesen konvergens. Azonkívül, (77) és (78) értelmében, az (58) egyenlet „közelítő" megoldásai — a (63a) egyenlet megoldásai a B_i sávban a z_{i-1}, z_i peremértékek mellett — (m-re nézve) egyenlő mértékben folytonos $\frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial y}{\partial v}$ parciális deriváltakkal fognak rendelkezni, és a konstrukció szerint $m\to\infty$ esetén a B_i, B_{i+1} sávok közös határán a B_i-hez tartozó $\frac{\partial y}{\partial v}$ derivált egyenlővé válik a B_{i+1}-hez tartozó $\frac{\partial y}{\partial v}$ deriválttal.

Ezzel bebizonyítottuk, hogy ha a $\mu y_0(x)$, $\mu y_1(x)$ peremfeltételekhez van $Y(x,v)$ megoldás, akkor a $(\mu+\Delta\mu)y_0(x)$, $\mu y_1(x)$ peremfeltételekhez is lehet megoldást szerkeszteni.

Ebből a megoldásból kiindulva ugyanezen a módon lehet megoldást konstruálni a $(\mu+\Delta\mu)y_0(x)$, $(\mu+\Delta\mu)y_1(x)$ peremfeltételekhez.

Minthogy $\mu=0$ esetén van triviális megoldás, az indukciós elv igazolásával a megfogalmazott lemmát maradéktalanul bebizonyítottuk.

Tisztázni fogjuk a kapott „közelítő" megoldás néhány tulajdonságát. Ebből a célból tekintsük az x, v sík $0<v<1$ egységsávjának a R, τ sík S *Riemann*-felületére való, a

$$\left\{\begin{aligned} R &= \frac{\partial Y}{\partial v}, \\ \tau &= \frac{\partial Y}{\partial x} \end{aligned}\right. \tag{79}$$

függvények által létesített leképezését.

A (31) leképezés kvázi-konform és eleget tesz a

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial \tau}{\partial v} &= \frac{\partial R}{\partial x}, \\ \frac{\partial R}{\partial v} &= a_0 \frac{\partial \tau}{\partial x} + b_0 \frac{\partial \tau}{\partial y} \end{aligned}\right. \tag{80}$$

egyenletrendszernek, ahol a_0 és b_0 az x, y változóknak az $\frac{i}{n} < v < \frac{i+1}{n}$ sávok mindegyikében egyenletesen folytonos függvénye. Azonkívül ezek az együtthatók egyenletesen korlátosak és teljesítik a (80) egyenletrendszer erős elliptikusságára vonatkozó feltételt.

A feladat feltételei szerint a S *Riemann*-felület a

$$|R| < k'$$

sávhoz tartozik. Innen a lineáris kvázi-konform leképezések 6. tulajdonsága alapján a (78) leképezésre a következő tulajdonságokat nyerjük:

1°. Bármely pozitív h szám esetén a

$$h < v < 1-h$$

sávban a R, τ függvények egyenlő mértékben folytonosak, és eleget tesznek a *Hölder*-feltételnek (n-re nézve egyenletesen).

2°. Tetszés szerinti v-re fennáll:

$$|R(x, v)| < K \log \frac{1}{v(1-v)},$$

ahol K nem függ n-től.

3°. A 2. tulajdonságból és τ korlátosságából közvetlenül következik, hogy a Y megoldások a $0<v<1$ sávban n-re nézve egyenlő mértékben folytonosak.

15. Exisztencia-tétel. A (80) leképezések imént felsorolt tulajdonságaiból és a 6. tulajdonságból közvetlenül következik, hogy leképezés-családunk kompakt, és $n \to \infty$ esetén minden egyenletesen konvergens részsorozat határértékben a $0<v<1$ sáv olyan kvázi-konform leképezését adja, amely megfelel a

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial \tau}{\partial v}=\frac{\partial R}{\partial x}, \\ &\frac{\partial R}{\partial v}=a(R, \tau) \frac{\partial \tau}{\partial x}+b(R, \tau) \frac{\partial \tau}{\partial v} \end{aligned}\right. \tag{81}$$

egyenletrendszernek; a limeszként kapott R, τ függvények x és v szerinti parciális deriváltjai léteznek és eleget tesznek a *Hölder*-feltételnek minden $h<v<1-h$, $h>0$ sávban. Ebből és a Y függvények egyenlő mértékben való folytonosságából az is következik, hogy a Y függvények megfelelő részsorozata egyenletesen konvergens a $0<v<1$ sávban, és a határfüggvény lesz az (58) egyenlet keresett megoldása.

Ezzel bebizonyítottuk az exisztencia-tételt a 4. lemma feltételei mellett. Felhasználva a lineáris egyenletrendszert kielégítő kvázi-konform leképezések tulajdonságait és a *Schwarz*-féle alternáló eljárást, nem nehéz a tételt tetszés szerinti kétszer differenciálható peremfeltételek esetére általánosítani.

Tehát tegyük fel, hogy az (58) egyenlet integráljának a $0<v<1$ egységsávban való létezését kimondó tétel érvényes tetszés szerinti, az alábbi feltételeket teljesítő, $y_0(x)$, $y_1(x)$ peremértékek mellett:

1°. $x \rightarrow \infty$ és $x \rightarrow -\infty$ esetén y_0 és y_1 véges határértékhez tart.
2°. $|y_0'(x)| \leqq k'$, $|y_1'(x)| \leqq k'$.
3°. $|y_0''(x)| \leqq k''$, $|y_1''(x)| \leqq k''$.

Megmutatjuk, hogy bármely elég kicsiny δy_1 függvényhez,

$$|\delta y_1|<\varepsilon, \quad |\delta y_1'|<\varepsilon, \quad |\delta y_1''|<\varepsilon,$$

megkonstruálható az (58) egyenletnek egy, az $y_0(x)$, $y_1(x)+\delta y_1$ peremértékekhez tartozó megoldása.

Jegyezzük meg mindjárt, hogy nem jelenti az általánosság megszorítását, ha kezdettől fogva feltesszük, hogy mindenütt

$$\delta y_1 \geqq 0.$$

A keresett megoldás megszerkesztéséhez felhasználjuk a *Schwarz*-féle alternáló eljárást.

Bontsuk fel az egységsávot a $v=\frac{1}{3}$, $v=\frac{2}{3}$ egyenesekkel három sávra: D_1: $0<v<\frac{1}{3}$, D_2: $\frac{1}{3}<v<\frac{2}{3}$, D_3: $\frac{2}{3}<v<1$. Jelöljük $y(x, v)$-vel az (58) egyenlet megoldását az eredeti feltételek mellett.

Jelöljük $Y_1^{(1)}(x, v)$-vel (58)-nak azt a megoldását a D_2+D_3 sávban, amely a határokon az $y\left(x, \frac{1}{3}\right)$ és $y_1+\delta y_1$ értékeket veszi fel. $Y_1^{(2)}(x, v)$-vel jelöljük

(58) azon megoldását a D_1+D_2 sávban, amely a határokon az $y_0(x)$ és $Y_1^{(1)}\left(x, \frac{2}{3}\right)$ értékeket veszi fel. A $Y_n^{(1)}$ függvény (58)-nak az a megoldása a D_2+D_3 sávban, amely a határokon a $Y_{n-1}^{(2)}\left(x, \frac{1}{3}\right)$, $y_1+\delta y_1$ értékeket veszi fel. $Y_n^{(2)}$ lesz (58)-nak azon megoldása a D_1+D_2 sávban, amely a határokon az $y_0(x)$ és $Y_n^{(1)}\left(x, \frac{2}{3}\right)$ értékeket veszi fel.

Az exisztencia-tétel bizonyítása érdekében meg kell mutatnunk, hogy:

1°. Elég kis ε-ra az összes $Y^{(1)}$ és $Y^{(2)}$ függvények megszerkeszthetők.

2°. A megszerkesztett sorozatok $n \to \infty$ esetén a keresett megoldáshoz tartanak.

A sorozat konvergenciája azonnal következik kompaktságából és monotonitásából. Valóban, a *Schwarz*-féle elv értelmében

$$Y_1^{(1)} < Y_2^{(1)} < \cdots < \sup\left[\max y_0(x),\ \max(y_1+\delta y_1)\right],$$

$$Y_1^{(2)} < Y_2^{(2)} < \cdots < \sup\left[\max y_0(x),\ \max(y_1+\delta y_1)\right];$$

azonkívül a derivált egyenletrendszernek megfelelő kvázi-konform leképezésre vonatkozó maximum-elv szerint bármelyik Y függvényre fennáll:

$$\left|\frac{\partial Y}{\partial x}\right| < k'+\varepsilon.$$

Annak a bizonyítását, hogy az összes Y függvények megkonstruálása lehetséges, két részre bontjuk. Először kimutatjuk a megoldás létezését elég kicsiny k' mellett, de tetszés szerinti k''-re. E célból fel fogjuk tételezni, hogy a 2° feltételben k' olyan kicsiny, hogy az (58) egyenletnek minden, a $\frac{2}{3}$ szélességű $0<v<\frac{2}{3}$, ill. $\frac{1}{3}<v<1$ sávon értelmezett $z(x, v)$ megoldására a

$$\left|\frac{\partial z}{\partial x}\right| < k_1'$$

feltételnek a sáv határain való teljesüléséből következik, hogy a $v=\frac{1}{3}$, ill. $v=\frac{2}{3}$ középvonalon

$$\left|\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right| \leqq k_0'' = \varrho(k'), \quad \lim_{k\to 0} \varrho(k') = 0.$$

Az, hogy ilyen k_1' konstans tetszés szerinti k'' mellett létezik, a lineáris egyenletrendszerek 8. tulajdonságából következik.

Miután ezt megjegyeztük, tekintsünk egy δy_1-et, amelyre

$$|y_1' + \delta y_1'| \leqq k_1'.$$

Ilyen körülmények között, ha

$$|y_1'' + \delta y_1''| < \frac{9}{4} k_0'', \tag{82}$$

akkor az összes Y függvények megszerkeszthetők. Valóban, a maximum-elv értelmében $\frac{\partial Y}{\partial x}$-re teljesülni fog

$$\left|\frac{\partial Y}{\partial x}\right| < k_1',$$

következésképpen a $v = \frac{1}{3}$, $v = \frac{2}{3}$ egyeneseken a Y függvények x szerinti második deriváltja kisebb lesz, mint k_0''. Innen következik, hogy a $D_1 + D_2$ sávban a konstrukció mindig lehetséges. Vizsgálnunk kell még a $D_2 + D_3$ sávot. Elvégezve ennek a sávnak $\frac{2}{3}:1$ arányú hasonlósági kiszélesítését, a $Y_k^{(1)}$ megoldások megszerkesztését az egységsávra vezetjük vissza, és (82) folytán a peremértékek második deriváltja nem haladja meg a k_0'' értéket. A $Y^{(1)}$ függvények megkonstruálása szintén mindig lehetséges. Ezzel kimutattuk a megoldás létezését tetszés szerinti kétszer differenciálható y_0, y_1 peremértékekre az

$$|y_0'(x)| < k_1', \quad |y_1'(x)| < k_1'$$

feltétel mellett.

Áttérve az általános esetre, δy_1-et vessük alá az

$$|y_1' + \delta y_1'| < \frac{3}{2} k_1'$$

feltételnek, és tekintsük $Y_1^{(1)}$ konstrukcióját. Miután a $D_2 + D_3$ sávot az egységsávra vezettük vissza, olyan peremfüggvényeket kapunk, amelyeknek a deriváltja abszolút értékben nem nagyobb, mint k_1'. Innen és a $\frac{\partial Y}{\partial x}$-re vonatkozó maximum-elvből adódik az összes $Y^{(1)}$ és $Y^{(2)}$ megszerkesztésének lehetségessége. Ezzel az (58) egyenlet megoldásának a létezéséről szóló tételt bebizonyítottuk két megszorítás mellett: 1) elég nagy R-re

$$a = 1, \; b = 0$$

és 2) $x \to \infty$ és $x \to -\infty$ esetén az $y_0(x)$, $y_1(x)$ peremfüggvények véges határértékhez tartanak.

Az első megszorítás y_0, y_1, y_0', y_1' korlátossága esetén automatikusan feleslegessé válik annak a tételnek az alapján, amely becslést ad R-re. A második megszorítást újabb határátmenet útján lehet kiküszöbölni.

Ily módon véglegesen megfogalmazhatjuk az (58) egyenlet integráljának létezésére vonatkozó tételt:

7. TÉTEL. *Ha a*

$$\frac{\partial^2 y}{\partial v^2} - a\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - b\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial v} = 0 \tag{83}$$

egyenlet $a = a(R, \tau)$, $b = b(R, \tau)$ *együtthatói első és második deriváltjaikkal együtt egyenletesen folytonosak a* R, τ *síkban, és*

$$-a - \frac{1}{4}b^2 > k > 0, \tag{84}$$

akkor bármely két, első két deriváltjával együtt korlátos, $y_0(x)$ *és* $y_1(x)$ *függvényhez a* (83) *egyenletnek van olyan megoldása a* $0 < v < 1$ *sávban, amely a sáv határain rendre az* $y_0(x)$, $y_1(x)$ *értékeket veszi fel.*

A bebizonyított tételből és a kvázi-konform leképezések fentebb megállapított általános tulajdonságaiból könnyen nyerhető a kvázi-konform leképezés létezésére vonatkozó alábbi tétel:

8. TÉTEL. *Ha a karakterisztikákban felírt*

$$\left\{\begin{array}{l} W = F_1(V, \alpha), \\ \theta = F_2(V, \alpha) \end{array}\right. \tag{85}$$

egyenletrendszer erősen elliptikus, és a $D(\Gamma_0, \Gamma)$ *tartomány* $\Gamma_0 : y = y_0(x)$, $\Gamma : y = Y(x)$ *határaira teljesülnek a*

$$k < Y(x) - y_0(x) < K,$$
$$|y_0'(x)| < k', \quad |Y'(x)| < k',$$
$$|y_0''(x)| < k'', \quad |Y''(x)| < k''$$

feltételek, ahol k, K, k', k'' *valamilyen állandók, akkor a*

$$D: \ y_0(x) < y < Y(x)$$

tartománynak mindig van olyan, a (85) *egyenletrendszernek megfelelő kvázi-konform leképezése az* u, v *sík* $h < v < H$ *sávjára, amely a* $\pm\infty$ *pontokat a* $\pm\infty$ *pontokba viszi át.*

A leképezés, az u tengely irányában történő tetszés szerinti eltolástól eltekintve, egyértelműen meg van határozva.

BIZONYÍTÁS. Nyilvánvaló, hogy nem megy az általánosság rovására, ha feltesszük, hogy $h=0$, $H=1$; azonkívül a (83) egyenlet integráljának létezéséről most bizonyított tétel értelmében elég megmutatnunk, hogy a (85) egyenletrendszer erős elliptikussága és a

$$k < Y(x) - y_0(x) < K$$

feltétel fennállása esetén a (83) egyenlet $y_0(x)$, $Y(x)$ peremfeltételekhez tartozó $y(x, v)$ integráljára a $0 < v < 1$ sávban mindenütt érvényes, hogy

$$R = \frac{\partial y}{\partial v} > 0.$$ [1]

De a maximum-elv szerint R a $0 < v < 1$ sáv határán felveszi legkisebb értékét, és ez a k, K konstansok segítségével becsülhető (6. tétel):

$$R \geqq \mu(k, K) > 0.$$

Másrészt a $-a - \frac{1}{4} b^2$ kifejezés minimális értéke $R \geqq \mu$ esetén, az erős elliptikusság feltétele miatt, pozitív:

$$-a - \frac{1}{4} b^2 > m(\mu).$$

Ebből következik, hogy ha a (84) feltételben az n konstans kisebb $m(\mu)$-nél, akkor a (83) egyenlet megkonstruált megoldásának meglesz az a szükséges tulajdonsága, hogy R pozitív.

BEFEJEZÉS. Ebben a cikkben a kvázi-konform leképezések általános feladatának csak arra az esetére végeztünk részletes vizsgálatot és bizonyítottunk be exisztencia-tételt, amikor az egyenletben a koordináták explicite nem szerepelnek, és amikor sávszerű tartományoknak egyenesvonalú sávokra való leképezéséről van szó. A teljes elméletet, a lineáris elmélet itt nélkülözhetetlen kiegészítéseinek részletes kifejtésével együtt, külön monográfiában szándékszom megadni. Mindjárt megjegyzem azonban, hogy a lineáris egyenletrendszerekről a nemlineárisakra való áttérés legnagyobb elvi nehézségei éppen annál a résznél adódtak, amelyet a jelen cikkben fejtettem ki.

A sávszerű tartományokról korlátos tartományokra való áttérés nem ütközik elvi nehézségekbe: sávok „illesztése" helyett lehet gyűrűket „illeszteni". Ilyenkor az egyenesvonalú koordinátákat polárkoordinátákkal (csillagtartományok esete) vagy valamilyen speciális görbevonalú koordinátákkal (általános eset) kell helyettesíteni.

[1] Ennek az egyenlőtlenségnek a bizonyításához lényegesen ki kell használnunk az eredeti egyenletrendszer erős elliptikusságát, mert, amint példákkal könnyen igazolható, $y_0(x) < Y(x)$ fennállásából és a (84) feltételből nem következik, hogy $R > 0$.

A tanulmányozott egyenletrendszerről a tetszés szerinti erősen elliptikus egyenletrendszerre való áttérést azokkal a módszerekkel lehet elvégezni, amelyeket egy korábbi cikkben ismertettünk: „Об одном классе непрерывных отображений" (Математический сборник, 1935).

Lényegesen nagyobb és távolról sem legyőzött nehézségekre vezetnek a vegyes típusú egyenletrendszerekre és a háromdimenziós tartományok leképezésére való áttérés problémái.

Fordította: Bognár János,
az MTA Matematikai Kutató Intézete

A TUDOMÁNYOS MINŐSÍTŐ BIZOTTSÁG HÍREI

Rapcsák András doktori értekezésének nyilvános vitája

A *Tudományos Minősítő Bizottság* 1959. december 18-án rendezte meg RAPCSÁK ANDRÁS: „Metrikus és affinösszefüggő pályaterek pályatartó leképezései” című doktori értekezésének nyilvános vitáját. A doktori értekezés opponensei: VARGA OTTÓ, a Magyar Tudományos Akadémia levelező tagja, FEJES-TÓTH LÁSZLÓ, a matematikai tudományok doktora és SOÓS GYULA, a matematikai tudományok kandidátusa voltak. A bíráló bizottság elnöke: ALEXITS GYÖRGY akadémikus, titkár: MOÓR ARTHUR, a matematikai tudományok kandidátusa, tagjai: HAJÓS GYÖRGY akadémikus, valamint ACZÉL JÁNOS, MAKAI ENDRE és SZÁSZ PÁL, a matematikai tudományok doktorai voltak.

Az elnök megnyitó szavai után a titkár ismerteti RAPCSÁK ANDRÁS életrajzát és tudományos munkásságát. Ez utóbbi a felsőbb differenciálgeometriai terek vizsgálatának köréből meríti tárgyát, nevezetesen több dolgozatban foglalkozik a felületelmélet, ill. equivalenciatheoria problémájával *Finsler*, illetve reguláris *Cartan* terekben, továbbá a pályageometria felépítésével vonalelemterekben; benyújtott doktori disszertációjában pedig különböző struktúrájú vonalelemterek pályatartó leképezéseit vizsgálja.

Ezután RAPCSÁK ANDRÁS ismertette disszertációjának téziseit. A jelölt disszertációjában a differenciálgeometria több érdekes problémáját tárgyalja és oldja meg. Dolgozatának első részében új módon értelmezi a differenciálható vonalelemsokaságokat. Ez a felépítési mód lényegesen eltér az eddig szokásostól, amely a vonalelemsokaságokat a pontsokaságok bővítése útján nyerte. RAPCSÁK ANDRÁS vizsgálatában a vonalelem és a görbe játssza az alapelem szerepét. Egy vonalelemsokaságban a

$$(*) \qquad \frac{d^2x^i}{dt^2}+2G^i\left(x(t),\frac{dx}{dt}\right)=0, \qquad i=1,2,\ldots,n$$

differenciálegyenletrendszerrel egy *kitüntetett görbesereg* definiálható, amelyek a $(*)$ megoldásai. Ezeket a görbéket a tér pályagörbéinek, vagy röviden pályáknak nevezzük. Ehhez a fogalomhoz legegyszerűbben a variációszámítás révén juthatunk; egy variációszámítási probléma extremálisai ugyanis éppen egy $(*)$ típusú differenciálegyenletrendszer megoldásai. Hangsúlyozzuk azonban, hogy $(*)$ nem szükségképpen egy variációprobléma karakterisztikus differenciálegyenletrendszere. Általában egy oly vonalelemsokaságot, amelyben a $(*)$-ot kielégítő görbék a tér pályagörbéi, *affinösszefüggő pályatér*-nek nevezzük.

Az első probléma, amelyet az affinösszefüggő pályaterek elméletében RAPCSÁK ANDRÁS disszertációjának II. részében megoldott, a következő: Ha

P_n és $\bar{P}_n$ két affinösszefüggő pályatér, melyek annak szükséges és elégséges feltételei, hogy P_n a $\bar{P}_n$-re pályatartóan leképezhető legyen. RAPCSÁK ANDRÁS dolgozatának első alaptételében ezeket a feltételeket tenzori alakban, tehát koordinátainvariáns módon határozza meg. Az itt fellépő *Weyl-* és *Douglas*-féle tenzorok a pályatartó leképezésekkel szemben teljes invariáns rendszert alkotnak. Ezt mondja ki a disszertáció második alaptétele.

A dolgozat harmadik részében RAPCSÁK ANDRÁS metrikus terek pályatartó leképezéseit vizsgálja. A metrikus terek struktúráját egy a v^i-kben elsőfokú pozitív homogen $L(x^i, v^i)$ alapfüggvény határozza meg. A teret jellemző tenzorok az L alapfüggvényből vezethetők le. A tér pályagörbéi az L alapfüggvénnyel meghatározott variációs probléma extremálisai lesznek. A második részben tárgyalt probléma ezen tereknél a következőképpen fogalmazható: Milyen feltételeket kell az $\bar{\mathfrak{F}}_n$ *Finsler*-tér $\bar{L}$ alapfüggvényének kielégítenie, hogy $\bar{\mathfrak{F}}_n$ geodetikusan leképezhető legyen egy L alapfüggvénnyel jellemzett $\mathfrak{F}_n$ *Finsler*-térre. A geodetikus leképezhetőségre egy sor egymással equivalens feltétel adható meg, amelyekből egyszerűsége és könnyű kezelhetősége miatt az

$$\bar{l}_{i|k} - \bar{l}_{k|i} = 0, \qquad \bar{l}_i \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial \bar{L}}{\partial v^i}$$

feltételt külön is kiemeljük. A $_{|k}$ szimbólum ezen utóbbi képletben a kovariáns differenciált jelenti.

Ezután rátér dolgozatának mondhatni legérdekesebb problémája tárgyalására. Ez a probléma a következő: Legyen adva egy affinösszefüggő P_n pályatér; kérdés, mikor látható el a tér reguláris *Finsler* metrikával tágabb, ill. szűkebb értelemben, azaz oly módon, hogy az extremálisok a pályagörbékkel egyezzenek meg, ill. ezen feltételen túlmenően, az s ívhossz a P_n-tér pályagörbéi kitüntetett paraméterének lineáris függvénye legyen. Ez a probléma azonos a variációszámítás inverz problémájával, amely azt vizsgálja, hogy valamely adott $(2n-2)$ paraméteres görbesereg mikor egyezik meg egy variációprobléma extremálisaival. A dolgozat III. és IV. alaptétele megadja a metrizálhatóság szükséges és elegendő feltételeit.

A továbbiakban ezen két utóbbi alaptételt alkalmazza bizonyos speciális esetekre. Először meghatározza azokat a szükséges és elegendő feltételeket, amelyek biztosítják, hogy a P_n-tér pályatartóan leképezhető legyen egy *Riemann* geometriára. Végül azon metrikus tereket vizsgálja, amelyek leképezhetők oly térre, amelynek extremálisai egyenesek. Ezen metrikus terek alapfüggvénye a III. alaptétel segítségével jellemezhető, ugyanis ebben az esetben az egyik tér pályagörbéi éppen az egyenesek. Ily módon analitikus megoldását kapjuk azon még *Hilbert*től származó problémának, amely azt tűzi ki feladatként, hogy meghatározandók azok a geometriák, amelyeknek geodetikus vonalai az egyenesek.

Miután RAPCSÁK ANDRÁS ismertette disszertációjának téziseit, az opponensek olvasták fel bírálatukat a disszertációiról. Mindhárom opponensi vélemény kiemelte a dolgozat érdemeként, hogy a dolgozatban egy *Hilbert* által még a századfordulón felvetett kérdés is! mint részeredmény analitikus tárgyalásmóddal megválaszolást nyer. Mindhárom opponens a disszertációnak elfogadását ajánlotta és csak egy-két, a lényeget nem érintő kifogás hangzott el. VARGA OTTÓ megemlítette, hogy a pályatér definíciója az I. részben csak a metrikus esetre van megadva, míg a II. rész a nem metrikus esetről szól és csak a III. részben kerül sor a metrikus tér részletes tárgyalására. FEJES-TÓTH LÁSZLÓ egy részletesebb történeti áttekintést hiányolt, míg SOÓS GYULA néhány egyszerűsítő megjegyzést fűzött a dolgozathoz.

Ezután RAPCSÁK ANDRÁS válaszolt az opponensek véleményére, amelyet az opponensek kielégítőnek találtak. ALEXITS GYÖRGY akadémikus vetett fel egy érdekes problémát; hogyan jellemezhetők egy R lokálisan kompakt metrikus tér azon topologikus leképezései, amelyek geodetikus vonalakat geodetikus vonalakba visznek át. RAPCSÁK ANDRÁS válaszában utalt BUSEMAN ez irányú vizsgálataira.

Ezután a bíráló bizottság határozathozatalra vonult vissza. A bizottság a megejtett szavazás után szótöbbséggel *javasolta a Tudományos Minősítő Bizottságnak, hogy* RAPCSÁK ANDRÁSt *nyilvánítsa a matematikai tudományok doktorává*. Döntése indokolásában megállapította, hogy RAPCSÁK ANDRÁS disszertációja a differenciálgeometriát értékes eredményekkel gazdagította. A dolgozat kiemelendő érdemének tartja, hogy a felvetett és megoldott problémák konstruktív jellegűek. A disszertáció lényegesen hozzájárult egy HILBERt által felvetett probléma megoldásához, amennyiben bizonyos feltételek mellett megadja azon függvényeket, amelyhez tartozó variációprobléma megoldásai megfelelő koordinátarendszerben egyenesek. Két pályatér pályatartó leképezhetőségére először adott az irodalomban szükséges és elegendő feltételt.

Moór Arthur,
a matematikai tudományok kandidátusa

Szász Ferenc kandidátusi disszertációjának nyilvános vitája

1960. március 10-én rendezte meg a *Tudományos Minősítő Bizottság* SZÁSZ FERENC „A főjobbideálokra nézve minimum-feltételű gyűrűk" c. kandidátusi értekezésének nyilvános vitáját. Az értekezés opponensei RÉDEI LÁSZLÓ akadémikus és KERTÉSZ ANDOR, a matematikai tudományok doktora voltak, a bírálóbizottság pedig KALMÁR LÁSZLÓ, a Magyar Tudományos Akadémia levelező tagja (elnök), STEINFELD OTTÓ, a matematikai tudományok kandidátusa (titkár), SZÉP JENŐ, a matematikai tudományok doktora, SZÁSZ GÁBOR és SZENDREI JÁNOS, a matematikai tudományok kandidátusai, tagokból állott.

Az elnök megnyitó szavai és a jelölt tudományos munkásságának ismertetése után SZÁSZ FERENC előadta disszertációjának téziseit.

Egy asszociatív gyűrűt *Artin*-félének nevezünk, ha jobbideáljaira teljesül a minimum-feltétel. Az *Artin*-féle gyűrűk vizsgálatának nagy jelentősége van az asszociatív gyűrűk elméletében. SZÁSZ FERENC disszertációjában egy tágabb gyűrűosztállyal foglalkozik, mégpedig azon gyűrűk osztályával, amelyeknek főjobbideáljaira teljesül a minimum-feltétel. Ezeket a gyűrűket a szerző röviden MHR-gyűrűknek nevezi.

Az előkészítő jellegű paragrafusok után a jelölt sorraveszi az *Artin*-féle gyűrűk egyes problémaköreit és megvizsgálja, hogy az illető kérdések hogyan módosulnak az MHR-gyűrűk esetén. A nyert eredmények közül kiemeljük a következőket. A szerzőnek sikerül az egyszerű és féligegyszerű Artin-féle gyűrűkre vonatkozó struktúratételeket általánosítania az egyszerű és féligegyszerű MHR-gyűrűkre. Érdekesek azok az eredmények, amelyek arról szólnak, hogy milyen tartalmazási viszony áll fenn MHR-gyűrűkben a különféle radikálok között. Említésre méltóak azok a vizsgálatok is, amelyek az MHR-gyűrűk additív struktúrájára vonatkoznak.

A tézisek elhangzása után FUCHS LÁSZLÓ aspiránsvezető méltatta a disszertációt. Megállapította, hogy a dolgozat témaválasztása szerencsés, és az elért eredmények értékesek.

Ezután RÉDEI LÁSZLÓ ismertette opponensi véleményét, melyben megállapította, hogy a szerző érdekes új gyűrűosztályt vizsgál, erről több értékes megállapítást tesz, miközben ötletesen használja a gyűrű- s csoportelméleti modern kutatási módszereket. Dícséretes, hogy a disszertáció nagy számú megvilágító példát is tartalmaz. Az értekezést a kandidátusi fokozat szempontjából elfogadásra javasolja.

KERTÉSZ ANDOR opponens megállapította, hogy SZÁSZ FERENC disszertációja nagy anyagot ölel fel, és számos új értékes eredménnyel gazdagítja gyűrűelméleti ismereteinket. Kiemelendőnek tartja a szerző éles problémalátását. Úgy véli azonban, hogy egyes paragrafusok kihagyása nem csökkentette volna a disszertáció értékét. Az értekezést elfogadásra javasolja.

A jelölt válaszában vitába szállt az opponensek egyes megállapításaival, és érvelését hol az egyik, hol a másik opponens értékelésére hívatkozva támasztotta alá.

Miután a választ mindkét opponens tudomásul vette, megindult a disszertáció feletti vita.

FUCHS LÁSZLÓ véleménye szerint a dolgozat egységesebb és gördülékenyebb lett volna, ha a jelölt egy-két tételt kihagyott volna.

Vita folyt továbbá arról a terminológiai kérdésről, hogy átvihetők-e a magyar nyelvű közleményekbe az idegen nyelvű rövidítésekből származó elnevezések (például „MHR" = „Minimalbedingung für Hauptrechtsideale").

KALMÁR LÁSZLÓ egyrészt olyan szemléltető ábra felrajzolását kérte, amelyből kitűnik, hogy milyen tartalmazási reláció áll fenn a disszertációban szereplő különféle gyűrűosztályok között, másrészt indokolást kért az értekezés végén szereplő problémák kiválasztására.

A hozzászólók a jelölt válaszát elfogadták, majd a bírálóbizottság határozathozatalra vonult vissza.

Szünet után KALMÁR LÁSZLÓ elnök ismertette a bírálóbizottság döntését. A bírálóbizottság megállapítása szerint a szerző egy érdekes új gyűrűosztályról értékes megállapításokat tett és vizsgálatait számos illusztráló példával egészítette ki. Az értekezésből kitűnik, hogy szerzője a gyűrűelmélet irodalmát alaposan ismeri és módszereit jól tudja alkalmazni. A bizottság egyhangúlag javasolta a *Tudományos Minősítő Bizottságnak, hogy* SZÁSZ FERENCet *nyilvánítsa a matematikai tudományok kandidátusává.* A Tudományos Minősítő Bizottság részéről ez a jóváhagyás azóta meg is történt.

Steinfeld Ottó,
a matematikai tudományok kandidátusa

Ára: 20,— Ft

TARTALOMJEGYZÉK

A KÜLFÖLDI SZAKIRODALOMBÓL

A TUDOMÁNYOS MINŐSÍTŐ BIZOTTSÁG HÍREI

A MAGYAR
TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK
OSZTÁLYÁNAK

KÖZLEMÉNYEI

XI. KÖTET 3. SZÁM

AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST
1961

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK
KÖZLEMÉNYEI

XI. kötet 3. szám

Szerkesztőség: Budapest, V., Nádor utca 7.
Kiadóhivatal: Budapest, V., Alkotmány utca 21.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei változó terjedelmű füzetekben jelennek meg, és az Akadémia III. osztályának felolvasóülésein bemutatott matematikai dolgozatokat, valamint egyéb dolgozatokat, referátumokat, továbbá az osztály munkájára vonatkozó közleményeket, könyvismertetéseket stb. közölnek. Évenként egy kötet jelenik meg (négy szám alkot egy kötetet).

Kéziratok a következő címre küldendők:

A Magyar Tudományos Akadémia
III. Osztályának Közleményei.
Budapest, V., Nádor u. 7.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi levelezés.

Minden szerzőt 100 különlenyomat illet meg megjelent munkájáért.

Közlésre el nem fogadott kéziratokat a szerkesztőség lehetőleg visszajuttat a szerzőhöz, de felelősséget a beküldött kéziratok megőrzéséért vagy továbbításáért nem vállal.

A Közlemények előfizetési ára kötetenként belföldi címre 40 forint, külföldi címre 60 forint. Belföldi megrendelések az Akadémiai Kiadó, Budapest, V., Alkotmány u. 21. (Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 05-915-111-46), külföldi megrendelések a „Kultúra" Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalat, Budapest, I., Fő utca 32. (Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 43-790-057-181) útján eszközölhetők.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztálya a következő idegen nyelvű folyóiratokat adja ki:

1. Acta Mathematica Hungarica
2. Acta Physica Hungarica.

AZ OSZTÁLYVEZETŐSÉG BESZÁMOLÓJA*

Írta: HAJÓS GYÖRGY

Az Osztályvezetőség múlt évi beszámolója áttekintést adott az Akadémia újjászervezése óta eltelt 10 év eredményeiről, a fejlődés mértékéről és ezek figyelembevételével foglalkozott az Osztály feladataival. A mostani beszámoló a múlt évi munka értékelése, az ez évi feladatok megjelölése mellett foglalkozik az e[illegible] intézetek működésével, a könyvkiadás, a tudományos káderutánpótlás eredményeivel és problémáival, az Osztály felügyelete alatt működő társulatok munkájával, a nemzetközi kapcsolatokkal, az Osztály különböző rendezvényeivel és egyéb irányú tevékenységével.

A beszámoló foglalkozik a hazai matematikai, fizikai és csillagászati kutatások fejlesztésével. A fejlesztést illetően az Akadémia már több ízben foglalkozott a *távlati kutatási terv kérdéseivel.* Az erre vonatkozó határozatok nemcsak azt mutatják, hogy az Akadémia milyen nagy fontosságot tulajdonít e munkának, hanem jelzik e téren elért előrehaladásunkat, és ugyanakkor kifejezik egy ilyen terv összeállításának nehézségeit és bonyolultságát is. Az 1958. évi közgyűlés határozata részletesen előírta az Akadémia szerveinek közreműködését a távlati terv kidolgozásában. A múlt évi közgyűlésen pedig az Elnökség már részletesen számot adott az Akadémia eredményes részvételéről a távlati terv előkészítő munkájában és a határozat — a kidolgozásban való további közreműködésen túlmenően — a tervek megvalósítására irányuló munkát tette az akadémiai intézetek feladatává.

Az országos távlati tudományos kutatási terv előzetesen kitűzött 104 kutatási főfeladatából 47 tartozik az Akadémiához, ebből 3 a mi Osztályunkhoz. A tervtanulmányokat kidolgozó előkészítő bizottságokban mintegy 100, a III. Osztályhoz tartozó tudós és tudományos dolgozó vett részt. A 3 főfeladat tervtanulmánya 1960 végéig elkészült.

A távlati terv a mi területeinken is megalapozottabbá és tervszerűbbé teszi a kutatás fejlesztési irányának és ütemének meghatározását, valamint a kutatási ráfordítások megállapítását azáltal, hogy alapul szolgál kutatóintézményeink éves tervei elkészítéséhez. Alapot ad a távlati terv arra is, hogy ki

* 1961. április 13.

lehessen emelni a II. ötéves terv időszakában megvalósítandó legfontosabb kutatási feladatokat.

A távlati terv előkészítésének első szakasza a tervtanulmányok benyújtásával lezárult. A munka következő szakaszaként a tervtanulmányok központi egyeztetését és felülvizsgálatát irányozta elő a Tudományos és Felsőoktatási Tanács. Ez a munka teljes erővel folyik és ebben az Akadémia tevékenyen részt vesz.

A hozzánk tartozó akadémiai intézetek, céltámogatott akadémiai tanszéki kutató csoportok és egyetemi intézetek az 1960. évi tudományos munkáról és az 1961. évi kutatási tervekről — a Központi Fizikai Kutató Intézet (KFKI) kivételével — beszámoltak az Osztálynak. A KFKI csak nemrég küldött rövid beszámoló vázlatot és tervet, de az Osztályvezetőség még ez utóbbit sem tárgyalhatta. A beszámoló jelentések, tudományos tervek előkészítése tekintetében általában fejlődésről és néhány helyes kezdeményezésről számolhatunk be.

Az akadémiai kutató intézetek beszámolóit, terveit először a tudományos tanácsok, majd az akadémiai bizottságok vitatták meg és ezután tárgyalta az Osztályvezetőség. A jelentéseket, terveket opponenseknek adjuk ki tanulmányozás végett és észrevételeik alapján tárgyalják a bizottságok. Az opponensi vélemények alapján a bizottságok vitája, állásfoglalása elvibb és érdemibb.

A céltámogatott intézeteknek is teljes beszámoló jelentést és tervet kellett készíteni. Ezeket a beszámolókat, terveket az Osztály keretében működő bizottságok vitatták meg és készítették elő osztályvezetőségi tárgyalásra.

Általánosságban megállapítható, hogy intézeteinkben megfelelő gondossággal készítették elő a tudományos terveket s az 1961. évi kutatási tervek határozott fejlődésről tanúskodnak az előző évekhez képest. Ez a fejlődés megnyilvánult mind a tervkészítés módszerében, mind a kutatási tervek érdemi összeállításában. A tervek tárgyalását eredményesebbé tette az a körülmény, hogy bizottságaink azokat az 1960. évi beszámoló jelentésekkel együtt vitatták meg.

A következőkben az egyes intézetek munkájáról adunk tájékoztatást a legutóbbi közgyűlés óta eltelt időszakra vonatkozólag.

A MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZETBEN eredményes kutató munka folyt mind a matematika elméleti ágaiban, mind pedig a matematika alkalmazásaiban. Az elmúlt év során megjelent, vagy sajtó alá került az intézeti munka eredményeit tartalmazó dolgozatok és könyvek száma 175, amiből 139 az 1960. évi munka eredménye. Ezen eredmények részletes ismertetésére nem térünk ki. Az eredményeket részben az Intézet Közleményeiben megjelent dolgozatok, részben azok a más matematikai folyóiratokban megjelent dolgozatok tartalmazzák, amely dolgozatoknak a jegyzéke az Intézet Közleményeiben megtalálható. Az eredmények a valószínűségszámítás alkalmazásai, a matematikai statisztika és alkalmazásai, a matematika közgazdasági alkalmazásai, a valós függvénytan, a topológia, a differenciálegyenletek elmélete és alkalmazásai, a komplex függvénytan, a funkcionálanalízis, a matematikai logika és alkalmazásai, numerikus és grafikus módszerek, az algebra és geometria tárgykörébe tartoznak.

Tovább fejlődött az Intézet összeköttetése ipari és tudományos kutatóintézetekkel, üzemekkel, intézményekkel. Számos intézménnyel állandó jellegű együttműködés alakult ki. Az elmúlt év során érkezett külső megbízások száma 144 volt, míg az ugyancsak múlt évben elintézett megbízások száma 156. Az Intézet alapítása óta megoldott feladatok száma ezzel 1340-re nőtt. Az alkalmazott matematikusok iránti igény erősen megnövekedett. Ma már határozott matematikus-hiányról beszélhetünk és ezért feltétlenül szükséges az egyetemi matematikus-képzés kereteit felemelni. Amíg ez meg nem valósul, az Intézet sokkal több külső megbízást kap, mint amit el tud látni.

Az Intézet a matematika gyakorlati alkalmazásainak szélesebb körű elterjesztése érdekében a Közalkalmazottak Szakszervezete támogatásával és a Bolyai János Matematikai Társulat bevonásával ankétot tartott. Helyes volna, ha az Intézet a jövőben is folytatná ezt a munkát oly módon, hogy az alkalmazó szakterületek szerint rendezne ankétokat (pl. a matematika módszereinek és eredményeinek alkalmazása a textiliparban stb.).

A külső megbízások teljesítésében, de a kutatómunkában is mind nagyobb hátrányt jelent, hogy az Intézetnek nincs elektronikus számológépe. Az Intézet munkatársai a múlt év során jelentős munkát fordítottak elektronikus számológépek programozásához való felkészülésre.

Ugyancsak nehezíti az Intézet munkáját, hogy már évek óta alig kap létszámemelést. Ugyancsak probléma, hogy az Intézet helyhiánnyal küzd, amit még fokozott, hogy az MN7 analógiás számológép részére, amelynek üzembehelyezése most folyik, helyet kellett biztosítani. Az Osztályvezetőség mindent el fog követni, hogy az Intézet e problémáinak megoldását elősegítse.

A Számítástechnikai Központ munkája az elmúlt évben sokat javult. A kapkodó, irreális határidőket hajszoló munka felszámolása megtörtént. Tovább kell javítani a műszaki jellegű kutatómunka színvonalát, főképp a tervszerűséget, az erők jobb koncentrálását és a kutatás alaposabbá, módszeresebbé tételét.

Lényegében az elmúlt év elején kezdődött meg az M-3 gép rendszeres üzemeltetése. A Központ már az elmúlt évben is sok számítási feladatott kapott. A gépet átlagban heti 120 órában üzemeltették. Az MTA 4 intézményének, 6 ipari kutató intézetnek, 3 egyetemi intézetnek, 4 tervező intézetnek, 7 államigazgatási szervnek, 5 üzemnek összesen 161 feladatot oldottak meg az M-3 gépen.

Eredményes munkát végzett az *Elméleti Osztály*. Függőhídak szilárdságtani ellenőrzésére egy új, a valóságos helyzetet a régi módszernél pontosabban figyelembevevő módszer kidolgozására került sor. Befejeződött a pamutszövőipar fejlesztési tervezésénél alkalmazható gépi programozási módszer kidolgozása. A kémiai ipar szempontjából a szénhidrogén krakkolásának elvi kérdései tisztázására vonatkozó vizsgálati eredmények jelentősek.

A *Gazdasági Alkalmazások Osztálya* foglalkozott a gazdasági programozás problémáinak vizsgálatával. Eredményes munka folyt a lineáris programozás és a szállítási problémákra vonatkozó vizsgálatokban.

A *Számológép Kutatási Osztály* (műszaki részleg) múlt évi tervében szerepelt egy mágnesszalagmemória megépítése, azonban különböző hiányosságok miatt kellő biztonságú üzemeltetése előreláthatólag nehézségekkel fog járni, ezért célszerű volna egy korszerű mágnesszalagmemória-rendszert készen vásárolni és az M-3-hoz illeszteni. A gép ezen kiegészítése az eddiginél több feladattípus megoldását tenné lehetővé. A ferritmemória építése azt a célt szolgálja, hogy a gép jelenlegi átlagos 30 művelet/másodperc sebessége kb. 1500 művelet/másodpercre növekedjék.

A Központ fő feladata az elektronikus számológépek segítségével a korszerű számítástechnika meghonosítása és fejlesztése a tudományos műszaki és gazdasági problémák vizsgálatában. Ennek megvalósítása érdekében — többek között — az M-3 gép teljesítőképességének és kihasználásának további növelésére, azaz intenzív műszaki kutató munkára is szükség van. Ez utóbbival kapcsolatban különböző problémák vannak, így pl. egyik legnagyobb gond az, hogy az Osztály felelősen nem tudja irányítani e munkákat. Gondot okoz az Osztálynak az is, hogy a központ feladataira vonatkozó javaslatunk jóváhagyására ez ideig még nem került sor.

Figyelemre méltó eredmények születtek az EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM MATEMATIKAI INTÉZETÉBEN az absztrakt halmazelméletben, a rekurzív függvények elméletében, az absztrakt algebra területén, elsősorban a félcsoport-, csoport- és gyűrűelméletben. Több dolgozat jelent meg a számelméletből és a diofantikus approximáció elméletből. A valós függvénytan területén ugyancsak eredményes vizsgálatokra került sor. Néhány dolgozat az interpoláció témakörébe vágó problémákat tárgyal. Több irányú topológiai, gráfelméleti és elemi geometriai vizsgálatokat is végeztek az Intézetben. Kiterjedt és sokféle irányú kutatás folyt a valószínűségszámítás és a valószínűségszámítás különböző gyakorlati és matematikai alkalmazását illetőleg.

A SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM BOLYAI INTÉZETÉBEN eredményes vizsgálatokat végeztek a gyorsműködésű számológépek programozásával kapcsolatban. A matematikai logikában elsősorban olyan problémákat vizsgáltak, amelyek a matematikai gépek elméletével kapcsolatosak. E vizsgálatok eredményeképpen az eddigieknél hatékonyabban végezhető a matematikai gépek szerkesztésének előkészítése. Jelentős halmazelméleti eredmények is születtek az Intézetben. Foglalkozik az Intézet a véges ciklikus csoportok összes Hajós-féle faktorizációinak meghatározásával. A másodfokban nem kommutatív véges csoportok témakörön belül az egyszerű csoportok vizsgálatában vannak új eredmények. A modern algebra más területein is intenzív munka folyt az Intézetben. Újszerűen tárgyalták a komplex függvénytan Pick—Nevanlinna—Löwner-féle témakörét az operátorok elméletének felhasználásával. E problémakör a részecskék ütközésének elméletében játszik lényeges szerepet. Eredményes vizsgálatok folytak a konstruktív függvénytan, az általános és speciális ortogonális sorok elméletével kapcsolatban.

A Debreceni Kossuth Lajos Tudományegyetem Matematikai Intézetében algebra, analízis, geometria, valószínűségszámítás és alkalmazott matematika tárgykörökben végeztek vizsgálatokat. A kutatás mindegyik témakörben eredménnyel folyt, ki kell itt emelni a függvényegyenletek terén elért eredményeket.

Eredményes munka folyt az ortogonális sorok, Fourier-sorok és approximációelmélet témakörben a Budapesti Műszaki Egyetem III. Matematikai Tanszékén; a differenciálgeometriai terek struktúrája, speciális differenciálgeometriai terek témakörben és az affin differenciálgeometriában az Építőipari és Közlekedési Műszaki Egyetem Matematikai Tanszékén. A Villamosmérnökkari Matematikai Tanszék az elmúlt év folyamán a Korányi TBC Intézet részére elkészített egy diagnosztikai célokat szolgáló logikai gépet. A gép alkalmas a TBC-sek kompenzációs fokának gyors megállapítására. Eredményesen folynak a disztribució elmélettel és az operátorszámítással kapcsolatos kutatások is.

A Központi Fizikai Kutató Intézet 1960. évi tudományos tevékenységét alapfeladatának megfelelő szellemben végezte.

Az alapkutatások területén a következő értékes eredmények születtek:

A kozmikus sugárzási vizsgálatokkal kapcsolatban megállapítást nyert, hogy a 9 BeV-es protonok ütközési mechanizmusát a kaszkádmodell helyesebben írja le, mint a csőmodell. Gyümölcsöző együttműködés alakult ki a kozmikus sugárzási laboratórium és az Egyesített Atomkutató Intézet egyes laboratóriumai között.

A fény mikroszerkezetére vonatkozó vizsgálatok igazolták, hogy egy kettéosztott koherens fénynyalábban az intenzitás fluktuációi nem függetlenek egymástól.

A magfizikai kutatások területén ki kell emelni a Mössbauer-effektus első hazai megvalósításának jelentőségét, továbbá a B^{10} (d, p) B^{11} reakció polarizációs viszonyainak tanulmányozása terén elért eredményeket. Ugyancsak értékesek a maghasadás és a gyors neutron-spektroszkópia terén elért eredmények.

A szilárdtestfizikai vizsgálatok új felismerésre vezettek a rendeződési jelenségek és a Hall-effektus, valamint az atomi rendezettség és a mágneses rendezettség közötti kapcsolat felderítésében.

Az 1960. évi munkának egyik legjelentősebb eredménye a szovjet segítséggel megépített zéróteljesítményű reaktor (ZR-1) üzembehelyezése volt. A népi demokratikus országok között ez volt az első üzembehelyezett, zéróteljesítményű reaktor. A berendezés lehetőséget biztosít, zónaszerkezetének könnyű módosítása révén, különböző zónastruktúrák és organikus lassító közegek vizsgálatára.

A radioaktív izotóp termelés a tervezett keretekben egész évben zavartalanul folyt. Több radioaktív izotóp-készítmény előállításának módszerét a KFKI dolgozta ki.

Az elektronikus laboratórium jelentős munkát végzett a hazai nukleáris műszergyártás alapjainak megteremtésében, az átgondolt, célszerű szabványosítás bevezetésében, a típusegységek műszaki adatainak javításában stb.

Az Intézet tudományos tevékenységének eme pozitív vonásai mellett meg kell jegyezni, hogy egyes területeken az előrehaladás a lehetőségekhez képest lassú volt. Így a szilárdtestfizikai vizsgálatokhoz nagyfontosságú neutrondiffraktográf elkészítése elhúzódott. A kelleténél lassabban indultak meg a sugárhatáskémiai és sugárhatásfizikai kutatások. A külső szervekkel való nehézkes együttműködés miatt jelentős lemaradás történt a szerves moderátorok vizsgálatához nagyfontosságú denterizált difenil előállítása terén. Ugyancsak a tervezettnél lassabban készült és így 1960 folyamán nem fejeződött be a kísérleti fűtőelem laboratórium sem.

Ezeknek a lemaradásoknak és hibáknak legfőbb oka az erők egyidejű, nem átgondolt leterhelésében keresendő. Számos területen, főként a műhelyekben csökkenteni kell a kísérleti munkadarabok átfutási idejét és szigorúan meg kell követelni a műszaki előírások pontos betartását.

A tudományos kutató munka eredményes műveléséhez és az előkészítés szakaszának lerövidítéséhez feltétlenül szükséges az egyes laboratóriumokon belül a műszaki személyzet megerősítése, valamint néhány fős, elektronikában jártas szakemberekből közvetlenül a kutatásban résztvevő csoport létrehozása. A jelen helyzetben ugyanis a laboratóriumok rendelkezésére álló nagy mennyiségű és egyedenként is nagy csőszámú elektronikus berendezések karbantartása és a kísérletekhez való adaptálása a laboratóriumokon belüli elektronikus szakemberek hiánya miatt igen nehézkesen valósítható meg.

Összefoglalásul megállapítható, hogy a KFKI az 1960. év folyamán eredményes tudományos munkát végzett. A tudományos munka előkészítő szakaszának lerövidítése érdekében azonban igen fontos a műszaki színvonal további tökéletesítése és a laboratóriumokon belüli műszaki személyzet növelése. Az Intézet feladata biztosítani néhány jól kiválasztott területen — együttműködésben a baráti országokkal — a magenergia hasznosításához szükséges felkészültséget mind az alap- és alkalmazott kutatások, mind pedig a közvetlen gyakorlati célú kutatások területén. Az 1961. évi tudományos tervnek ezen feladat megvalósításához szükséges tudományos kutatási tevékenységet kell magában foglalnia.

Az Atommag Kutató Intézet (ATOMKI) 1960. évi tervében 3 témacsoport szerepelt. Az erőket a múlt évben a magfizikai témák művelésére és a gyorsítók építésére csoportosították. Az Intézet munkatársai szép eredményeket értek el — aránylag szerény felszereléssel — a magspektroszkópia területén. Ahhoz, hogy az e területen kialakult jó kutató kollektíva eredményesebben dolgozzék, egy nagy felbontóképességű béta-spektrométer építésére vagy megvásárlására van szükség.

Igen jelentős eredményeket értek el az Intézetben a humuszsavaknak a hasadási termékeket megkötő tulajdonságára vonatkozó vizsgálatok során. Ismeretes, hogy világszerte gondot okoz a hasadási termékek megkötése, éppen ezért az említett vizsgálatoknak nagy ipari jelentősége is van. Ezek a vizsgálatok útmutatást adhatnak a hasadási termékek és radioaktív szennyeződések szerves anyagokkal történő visszatartására.

A magreakciók területén — megfelelő berendezések hiánya miatt — egyelőre még csak a Po-alfa sugaraival való bombázásra kerülhetett sor. Szétválasztott stabil izotópokat bombázva, modern szcintillációs detektálási technikát alkalmazva sikerült új eredményt elérni. A magfizikai kutatások korszerűbbé tétele feltétlenül megkívánja, hogy az Intézet mielőbb egy 5 MeV-os Van de Graaff generátort kapjon és ugyancsak mielőbb befejeződjék a 800 KV-os kaszkád-generátor, továbbá a 300 KV-os neutron-generátor építése.

Az Intézetben 1952 óta megszakítás nélkül folyik a csapadék radioaktivitásának mérése. Geokémiai és geológiai szempontból fontos vizsgálatokat folytatnak a természetes vizek és üledékeik U, Rn, Th, Io és Ra-tartalmára vonatkozóan is.

Az Intézet tudományos vezetése 1960-ig erősen centralizált volt. Ezt részben az indokolta, hogy tapasztalt kutatókkal az Intézet nem rendelkezett. 1960-ra tehetséges, vezetésre alkalmas munkatársak nőttek fel, így megteremtődött a feltétele a tudományos osztályok szervezésének. Erre ez év elején került sor. Jelenleg az Intézetben három osztály és néhány csoport működik. A három osztály a következő: *Neutron Fizikai Osztály, Magspektroszkópiai*

Osztály, Magreakciók és Tudományos Alkalmazásaik Osztálya. Örömmel kell üdvözölni azt, hogy az Intézet eljutott arra a fejlődési fokra, amikor szükségessé vált a centralizált, egyszemélyi vezetésnek a felváltása a kollektív vezetéssel.

Az Intézet az elmúlt évben komoly fejlődésen ment át. Sikerült a kutatási területet leszűkíteni. A témák megválasztásában erőteljes koncentráció alakult ki. A további munka érdekében törekedni kell arra, hogy a két, magfizikai kutatásokkal foglalkozó centrum — a KFKI és az ATOMKI — között kiépített kapcsolat minél tartalmasabbá váljék, az együttműködés mind magasabb formái valósuljanak meg.

Összegezve a fentieket, megállapítható, hogy az Intézet értékes tudományos munkát végzett és a kutató káderek fejlődésével megvan a remény arra, hogy az elkövetkezendő időkben az Intézet munkája gyorsabb fejlődést fog mutatni és további értékes eredményekkel fogja gazdagítani a magyar tudományt.

Az MSZMP VII. Kongresszusának irányelvei előírják az ipar vidéki centralizációját, ugyanakkor a Politikai Bizottság 1960 novemberi határozata leszögezi, hogy meg kell alapítani a magyar nukleáris műszeripart. A KGM e határozat végrehajtásaként nukleáris műszergyárat tervez létesíteni Debrecenben. Az egyéb szempontokon kívül azért is Debrecenre esett a választás, mert itt az ATOMKI támogatást tud nyújtani az üzem megindításához.

Az Elméleti Fizikai Kutató Csoport az elmúlt évben atomok és atommagok statisztikus elméletével, hullámmechanikai többtestproblémával és annak alkalmazásaival, szilárdtestek elméletével, kvantumkémiai vizsgálatokkal és elemi részek nem-lineáris elméletével foglalkozott.

A múlt év végén befejeződött az ionizációs energiák, elektronaffinitások elméleti meghatározása. Ugyancsak befejeződött az összenyomott atomok polarizálhatóságának vizsgálata az atomtérfogat függvényében, a nukleongáz statisztikus elméletének kidolgozása magas hőmérsékleten.

Az alifás szénhidrogén molekulák kötései közti kölcsönhatások vizsgálata során az 1960. év folyamán sikerült a módszert elméletileg megalapozni.

Foglalkozott a Csoport az Ag-Br kristály kötése sávos spektrumának s hibahelyeinek, valamint iondiffúziójának; a Po-fém kötésének és sávos spektrumának vizsgálatával. Meghatározták a tellur atom egyelektron hullámfüggvényeit és energiaértékeit. Vizsgálatok folynak a reális kristályok tulajdonságainak értelmezésénél fontos szerepet játszó Schottky-féle hiányhelyek képződési energiájának, egymással és más rácshibákkal való kölcsönhatásainak tisztázására vonatkozóan. Az ezüstfém elméletének kidolgozására is sor került.

Meghatározták a nitrogénmolekula energiáját és elektroneloszlását, kidolgozták az elemi részecskék egy nem-lineáris spinor-elméletét.

A csoport az elmúlt évben is igen eredményes, elismerésre méltó munkát végzett.

Az akadémiai céltámogatás koncentrálása következtében 4 *akadémiai tanszéki kutatócsoportot* szerveztünk. Három csoportban a szilárdtestek fizikájának különböző területeivel foglalkoznak, egyben pedig elméleti fizikai kutatómunka folyik. Ezekben az akadémiai tanszéki kutatócsoportokban folyó munkák szervesen kiegészítik az akadémiai intézetekben folyó kutatásokat. A következőkben a csoportok múlt évi munkájának eredményeiről, ez évi feladatairól számolunk be:

Az ELMÉLETI FIZIKAI ALAPKUTATÓ CSOPORT (ELTE Elméleti Fizikai Intézet) munkatársai az elmúlt évben is eredményesen foglalkoztak a klasszikus fizika és kvantumfizika határterületeivel, a klasszikus fizikai és elvi problémákkal. Önálló eredmény is született; az égéstermékekből adódó „ballaszt" kidobása problémájának elemzése a relativisztikus rakéták interstelláris mozgása kapcsán.

Az elemirész-fizikai vizsgálatok közül kiemelkedő értékűek és nemzetközi érdeklődést váltottak ki az indefinit metrikára vonatkozó kutatások.

Figyelemre méltó eredményeket értek el a Csoportban a magnetohidrodinamikai hullámok elméleti vizsgálatában.

A KRISTÁLYNÖVEKEDÉSI KUTATÓ CSOPORT (Építőipari és Közlekedési Műszaki Egyetem Mérnökkari Kísérleti Fizikai Intézet) munkatársai vizsgálták a kristálymagok keletkezését, kristályok növekedési mechanizmusát. Szép eredmények születtek a kristályok belső diszlokációinak vizsgálata során. Foglalkoztak a Csoportban a színcentrumok (színezett alkalihaloidek) gerjesztési értékeinek vizsgálatával, kristályok belső súrlódásával. Ez utóbbi mellékágaként rekristallizációs kutatások is folytak paraffinon. Eredményesen foglalkozik a Csoport a hazai és általános fizikatörténeti kutatásokkal is. A Csoportnak évek óta legnagyobb problémája a helyiséghiány. A laboratóriumok túlzsúfoltak, nincs hely az újabb berendezések elhelyezésére, a fiatal munkatársak foglalkoztatására, pedig a Csoport kiválóan alkalmas arra, hogy ott fiatal fizikusok nőjjenek fel. Úgy látszik, hogy ez a probléma is megoldódik ez év végére, ugyanis a szomszéd épületből a KFKI részleg felköltözik Csillebércre és remény van arra, hogy a felszabaduló helyiségeket a Csoport kapja meg.

A LUMINESZCENCIA és FÉLVEZETŐ KUTATÓ CSOPORT (Szegedi Tudományegyetem Kísérleti Fizikai Intézet) munkatársainak sikerült egy, az oldatok abszorpciós, emissziós és hőmérsékleti sugárzási spektrumai közti összefüggésre vonatkozó, SZTYEPANOVtól származó formulát úgy általánosítani, hogy az új formula segítségével már nemcsak a Stokes-féle, hanem az anti-Stokes-féle tartományban is tanulmányozni lehet az említett spektrumok közötti kapcsolatokat, sőt az abszorpciós és emissziós spektrumok birtokában a hatásfokfüggvényt is ki lehet számítani. 1960-ban tovább folytak a kioltott lumineszkáló oldatok hatásfokának a kioltóanyag koncentrációjától való függésével kapcsolatos vizsgálatok.

A Csoport munkatársai eredményesen foglalkoztak a félvezetőkben, a töltéshordozók diffúziós konstansának, élettartamának, mozgékonyságának és felületi rekombinációs sebességének egyidejű meghatározásával. Az elért eredmények hasznosan alkalmazhatók a gyakorlati félvezetőkutatásban is.

A KRISTÁLYFIZIKAI LABORATÓRIUMBAN (Orvosi Fizikai Intézet, Budapest) eredményesen vizsgálták a hőkezelés hatását alkalihalogenid kristályokra. Az eredményeket a Laboratórium a technikai egykristályok előállításakor, illetőleg feldolgozásakor alkalmazza. Foglalkozik a Laboratórium szcintillációs kristályok előállításával, fizikai tulajdonságuk vizsgálatával és minőségük fokozásával. A kristályok előállításának módszereit folyamatosan átadják az iparnak. Foglalkoznak még radioizotópok alkalmazásának problémájával a diagnosztikában és a kísérletes orvosi kutatásban, a diffúzió és permeabilitás folyamatainak vizsgálatával biológiai objektumokon és ezek befolyásolásával ultrahang segítségével.

Eredményes elméleti spektroszkópiai vizsgálatokat végeztek a BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM ATOMFIZIKAI TANSZÉKÉN. Sikerült kidolgozni a $\Sigma - \Delta$ és $\pi - \Delta$ átmenetek intenzitás eloszlását. Más értékes eredmények is születtek a Tanszéken az elméleti spektroszkópiai témakörben. Bár megkezdődött a kísérleti spektroszkópiai kutatások újjászervezése is, kutatási eredményről itt most mégsem számolhatunk be, mert segédszemélyzet hiánya miatt nem működtethették a berendezéseket. Remény van arra, hogy a közeli hetekben ez a létszámprobléma megoldódik, így a kísérleti spektroszkópiai kutatómunka megindítására is sor kerülhet.

Figyelemre méltó eredmények születtek az ELTE KÍSÉRLETI FIZIKAI I. TANSZÉKEN a vakanciák fémekben való szerepének vizsgálata során. Helyes a Tanszéknek az a törekvése, hogy a röntgenmódszereket mint mérési eljárást, alkalmazni igyekeznek egyes szilárdtestfizikai kérdések eldöntésében.

A KOSSUTH LAJOS TUDOMÁNYEGYETEM ELMÉLETI FIZIKAI INTÉZETÉBEN (Debrecen) meghatározták a H_2O protonaffinitását a molekulák egyesített atom modelljének segítségével. Vizsgálatokat folytattak nemesgázok ütközési potenciáljának elméleti meghatározásával kapcsolatban. Hátráltatja a munkát, hogy az Intézet csak kézi meghajtású számológéppel rendelkezik.

Térelméleti, kvantumkémiai és elméleti asztrofizikai vizsgálatok folytak a SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM ELMÉLETI FIZIKAI INTÉZETÉBEN. Gátolja a munkát, hogy tudományos segéderő (kalkulátor) nem áll rendelkezésre, így a numerikus számolásokat is a kutatóknak kell végezniök. Ezen azonban az Akadémia a közeljövőben nem tud segíteni. Helyes volna, ha az Intézet együttműködne az Elméleti Fizikai Kutató Csoporttal, ez esetben ugyanis a numerikus számolási munkákat a Csoport kalkulátorai elvégeznék.

Az ELTE Atomfizikai Tanszék 1960. évi feladata elsősorban a kísérleti fizikai oktatás minőségi megjavítása volt, ezért az akadémiai témák művelésére kevesebb erő jutott. Remélhető, hogy a következő alkalommal tudományos eredményekről is beszámolhatunk már.

A Miskolci Nehézipari Műszaki Egyetem Fizikai Tanszékén elemi részecskék kísérleti vizsgálatával foglalkoztak fotoemulziós lemezek és buborékkamra felvételek kidolgozása útján. Ennek során új eljárást dolgoztak ki arra, hogyan lehet a nyomszélességmérések eredményeiből a töltésre következtetni.

A Csillagvizsgáló Intézet fő kutatási iránya a változócsillagok vizsgálata. Ez a vizsgálat rendkívül fontos a csillagok stabilitásának, belső szerkezetének és fejlődésének szempontjából. A kínai csillagászokkal való kooperáció első eredményes programja volt az AC Andromedae kooperatív megfigyelése, amelybe az USA Berkeley-i csillagvizsgálója is bekapcsolódott. Folytatódott az AR Her periódus- és fénygörbeváltozásainak elemzése. Több más megfigyelési program elvégzésére is sor került. A múlt évi észlelési anyag nagy részét az Intézet munkatársai már feldolgozták. Az eredményeket publikálták vagy külföldi rendezvényeken ismertették. Erőteljes ütemben folyik a fotoelektromos mérőberendezések kifejlesztése. Új eljárás kidolgozására került sor a mesterséges holdak megfigyelése pontosságának fokozására.

A múlt év szeptemberében átadták az Intézetnek a mátrai obszervatórium főépületét. Már elkészült a Schmidt-teleszkóp befogadására szolgáló kupola része is.

Lényegesen nehezíti az Intézet fejlődését, hogy az Intézet helyiségeinek túlnyomó részét idegen lakók foglalják el. Már most is nagy a túlzsúfoltság, de további tudományos munkatársak elhelyezése már lehetetlen, pedig a mátrai obszervatórium üzembehelyezése a tudományos létszám emelését elengedhetetlenné teszi. A nyári gyakorlatra jelentkezett egyetemi hallgatók elhelyezése is csak úgy volt lehetséges, hogy arra az időre szabadságra küldtek néhány állandó dolgozót.

A Napfizikai Obszervatórium 1960. évi munkája majdnem teljes egészében az 1961. február 15-i teljes napfogyatkozás Bulgáriában való megfigyelésének előkészítésére korlátozódott. Emellett a napkorongról többszáz felvétel készítésére is sor került.

Az Obszervatórium munkatársai az észlelési munkában nagy szorgalommal vesznek részt, azonban a munka lényegében az észlelési anyag halmozásán túl nem igen terjedt. Sem az Obszervatórium vezetője, sem munkatársai eddig még egyetlen egy tudományos dolgozatot sem jelentettek meg, mióta Debrecenben működik az Obszervatórium. Kívánatos, hogy a jövőben az Obszervatórium nagyobb súlyt helyezzen az észlelési anyag feldolgozására és az eredmények publikálására.

Megállapítható, hogy 1960-ban a tudományos kutatómunka mind az akadémiai intézetekben, mind pedig a céltámogatott egyetemi intézetekben általában eredményesnek mondható. Az Elnökség és az Osztályvezetőség különböző határozatai, amelyek a kutatómunka irányaira, tervezési módszereire és az intézetek fejlesztésére irányultak, sok tekintetben érvényesültek. Az előbbi nem teljes áttekintés is érzékelhetően mutatja, hogy intézeteinkben széleskörű alapkutatások folynak, emellett pedig a gyakorlati problémák megoldásához is több, közvetlenül felhasználható tudományos eredménnyel járulnak hozzá. Ugyanakkor azonban több nehézség és megoldatlan probléma is jelentkezett.

Az akadémiai kutató intézetek 1960. év folyamán igyekeztek érvényesíteni az intézeti felülvizsgálatok után hozott elnökségi, illetve osztályvezetőségi határozatokat. Ez mutatkozik meg abban, hogy az intézetek szervezetileg tovább szilárdultak, javult a vezetés színvonala, a tudományos tanácsok érdemibb munkát végeztek, a szakmai-ideológiai viták rendezésére gyakrabban került sor és rendszeresebbé vált az ideológiai képzés. Intézeteink az elmúlt évben általában csökkentették a kutatott témák számát és nagyobb erőt összpontosítottak a fontosabb kutatásokra. Így pl. az ATOMKI-ban az elmúlt év folyamán megszünt a túlzottan nagyszámú téma kutatása, mely éveken keresztül egyik akadályozója volt az eredményesebb tudományos munkának.

Hátráltatja az intenzívebb tudományos munkát a kutatók és segéderők kisebb vagy nagyobb mértékű hiánya, pl. a Matematikai Kutató Intézetben, a Csillagvizsgáló Intézetben, az ATOMKI-ban.

Helyhiánnyal küzd a Matematikai Kutató Intézet, a Számítástechnikai Központ. A Csillagvizsgáló Intézet fejlődését akadályozza, hogy az Intézet helyiségeinek jelentős részét idegen lakók foglalják el, ugyanakkor nagy a túlzsúfoltság az egyes munkahelyeken.

Intézeteink korszerű nagyműszerekkel való ellátása igen szerény mértékben előrehaladt az 1960. év folyamán, de a kellő színvonalú műszerezettség még változatlanul problémát jelent szinte valamennyi intézetben. A kutatómunka fejlődése megkíván különféle egyéb beruházásokat, amelyek hiánya egyre inkább nehezíti a munkát. Így pl. fontos, hogy az ATOMKI mielőbb kapjon egy korszerű gyorsító berendezést, a Matematikai Kutató Intézet pedig egy elektronikus számológépet.

A céltámogatás jelentőségét a tudományos eredmények is tanúsítják, s megállapítható, hogy a céltámogatás koncentrálásának kedvező hatása már mutatkozott 1960-ban. Probléma az akadémiai tanszéki kutató csoportok szervezeti megerősítése. A fejlődés további elősegítése érdekében szükséges, hogy az Akadémia a Művelődésügyi és az Egészségügyi Minisztériummal egyetértésben biztosítsa a kutatócsoportok munkájának zavartalanságát.

Az 1961. évi kutatási tervükbe intézeteink elsősorban és legnagyobbrészt olyan témákat vettek fel, amelyek a távlati tudományos kutatási tervben is szerepelnek. Ez egyben a kutatások bizonyos koncentrálását és az összhangolás javulását jelenti.

A bizottságok és az Osztályvezetőség tervmódosítást minimális mértékben eszközöltek, mert a tervek előkészítő tárgyalásain már érvényesültek a tervutasításokban meghatározott szempontok.

A beszámolási időszakban az Osztály tagjai *osztályülés* keretében tárgyalták meg és értékelték az Osztályvezetőség tevékenységét, javaslatokat dolgoztak ki a Kossuth-díjak odaítélésére és új akadémiai rendes és levelező tagok, továbbá tiszteleti tagok választására.

Az *Osztályvezetőség* megtárgyalta az akadémiai és az egyetemi intézetek tudományos terveit és tudományos beszámoló jelentéseit. Foglalkozott az Osztály könyvkiadási ügyeivel. Rendszeresen foglalkozott a nemzetközi kapcsolatok fejlesztésével, a nagyobb beruházási igények elbírálásával. Javaslatára az Elnökség új Tudományos Tanácsot nevezett ki a Számítástechnikai Központban. Meghatározta a Központ feladatkörét. Foglalkozott egyetemi tanári és docensi pályázatok elbírálásával. Javaslatára az Elnökség átszervezte az Osztály keretében működő bizottságokat. Foglalkozott a II. Magyar Matematikai Kongresszus előkészítésével. Javaslatot készített az 1961/1962-ben tartandó kollokviumokra vonatkozóan. Javaslatot terjesztett az Elnökség elé az 1960. évi elnöki jutalmak kiosztásával kapcsolaban. Tárgyalta a KFKI és az Elméleti Fizikai Kutató Csoport felülvizsgálatával kapcsolatos elnökségi bizottságok jelentéseit és ezen intézmények munkájának megjavítása érdekében újabb határozatokat hozott. Ennek eredményeképpen tegnap ülést tartott a KFKI Tudományos Tanácsa és megtárgyalta a múlt évi munkáról szóló beszámolót és az ez évi terveket. Foglalkozott az Osztályvezetőség az 1961. február 15-i napfogyatkozás észlelésére Bulgáriába utazó expedíció tudományos programjával. Előterjesztést készített az 1961. évi akadémiai jutalmak odaítélésére vonatkozóan.

Az Osztály keretében működő *Matematikai Bizottság*, a *Fizikai Bizottság* és a *Csillagászati Bizottság* munkájának legfontosabb része az Osztályhoz tartozó akadémiai és egyetemi intézetek működésének irányítása és ezen intézetekben folyó kutatómunka elősegítése volt. Ennek keretében a bizottságok alapos előkészítés után tárgyalták az intézetek múlt évi beszámoló jelentéseit, az ez évi tudományos terveket. Foglalkoztak a nemzetközi kapcsolatok fejlesztésével, könyvkiadásunk megjavításával, az osztályprémium odaítélésével stb. Általában az Osztályvezetőség elé kerülő ügyeket előzőleg a bizottságok tárgyalták meg és ezekkel kapcsolatban javaslatokat terjesztettek az Osztályvezetőség elé.

A Csillagászati Bizottság — amely egyúttal a Csillagvizsgáló Intézet és a Napfizikai Obszervatórium Tudományos Tanácsa is — a fentieken kívül foglalkozott a Nemzetközi Csillagászati Unióval kapcsolatos kérdésekkel és külön ülésen meghívottakkal tárgyalta a csillagászati káderkérdést. A káderkérdésre vonatkozó javaslatok egy része már meg is valósult.

A továbbiakban tájékoztatást kívánunk adni az Osztály *könyv- és folyóiratkiadási tevékenységéről.*

A múlt évi közgyűlés óta az Osztály könyvkiadási terve keretében 4 könyv jelent meg. Ezek közül 2 matematikai, 2 pedig fizikai tárgyú.

Különösen jelentős RIESZ FRIGYES *Összegyűjtött munkái*nak kiadása, amely nagy sikerre számíthat mind a hazai, mind pedig a külföldi matematikusok körében. Jó visszhangja van CSÁSZÁR ÁKOS *Az általános topológia alapjai* című francia nyelven megjelent könyvének. Hézagpótló munka ZEMPLÉN JOLÁN *A magyarországi fizika története 1711-ig* című könyve, amelyet haszonnal forgathatnak a kutatókon kívül a középiskolai tanárok és a tárgy iránt érdeklődő egyetemi hallgatók is. E könyv ideológiai vonatkozásban is hasznos munka. Második kiadásban jelentette meg a Kiadó a LÁNG LÁSZLÓ szerkesztette *Színképatlasz* I. kötetét, amelynek külföldön szintén igen nagy sikere van.

Mind saját tapasztalataink, mind pedig az Akadémiai Kiadó tájékoztatása szerint külföldi kutatók és tudományos könyvkiadók nagy érdeklődést tanúsítanak a magyar matematikusok és fizikusok idegen nyelven megjelenő munkái iránt. Ez kétségkívül a hazánkban folyó tudományos munka és azok művelői iránti megbecsülést jelenti. Ez a tény is — de főként a távlati kutatási terv végrehajtásának és a fiatal kutatók fejlődésének elősegítése — arra kell hogy ösztönözze az Osztály tagjait és a minősítéssel rendelkező kutatókat, hogy vállalkozzanak magyar, ill. idegen nyelven megjelenő könyvek megírására.

Folyóiratkiadásunkban az elmúlt évben nem volt változás. Mind magyar, mind idegen nyelven megjelent folyóirataink magas színvonalúak. Törekednünk kell azonban arra, hogy az egyes számok átfutási ideje csökkenjen. Most ugyanis az a helyzet, hogy többek között a túl nagy átfutási idő miatt kutatóink jelentős része inkább külföldi szaklapokban publikál.

A következőkben az Osztály területén folyó *kádermunkáról*, ezen belül az aspiránsképzés és a tudományos minősítés helyzetéről, feladatairól adunk tájékoztatást.

E problémákkal az Akadémia Elnöksége súlyának megfelelő alapossággal többször is foglalkozott, kialakította álláspontját és nekünk is ennek megfelelően kell e kérdéssel foglalkozni. Az Elnökség arra a következtetésre jutott, hogy kádermunkánk helyességét és eredményét nemcsak az összetétel különféle változásain kell lemérni, hanem főképpen azon, hogy e káderpolitika mennyiben segíti elő alkotóképes kutatógárdák kialakítását intézeteinkben és ezen keresztül tudományos eredményeink gyarapodását.

Ha ennek megfelelően vizsgáljuk intézeteink káderhelyzetét, megállapíthatjuk, hogy — a különböző hiányosságok és még meglevő különböző helytelen szemléletek ellenére is — számottevő eredményeket értünk el. Jelentős számban nevelődtek fel tehetséges fiatal kutatók a matematika különböző ágaiban, a fizikán belül elsősorban a magfizika, továbbá a szilárdtestek fizikája területén. A csillagászatban változatlanul probléma a káderhiány, bár az elmúlt év folyamán az Osztály, a Művelődésügyi Minisztérium és a Csillagvizsgáló Intézet hatékony intézkedéseket tett ennek megszüntetésére. Ennek eredménye azonban csak az elkövetkező években fog mutatkozni. A kibernetika területén is megtörténtek az első lépések, hogy a fiatal kutatók és rajtuk keresztül e tudományterület gyorsabb fejlődését elősegítsük, főként az aspirantura különböző formái útján.

Szükséges annak hangsúlyozása, hogy a fiatal kutatók szakmai nevelése mellett fokozott gondot kell fordítani világnézetük alakítására, marxista nevelésükre, mert ilyen vonatkozásban már kevésbé lehetünk megelégedve.

Az aspirantura, illetőleg a tudományos minősítés területén a tervszerűség fokozását, a személyi kiválasztás megjavítását tűzte ki legfontosabb feladatként az Elnökség. Az aspiránsok kiválasztásánál alapvető, hogy a szakmai és politikai követelményeket együttesen kell figyelembe venni és egyik irányban sem lehet engedményeket tenni. Arra kell törekedni, hogy a tudományos utánpótlás többségében tehetséges, marxista világnézetű fiatal kutatókból kerüljön ki és továbbra is nagy gonddal kell foglalkozni a munkás és paraszt származású fiatal kutatókkal. Ennek a követelménynek akkor tudunk eleget tenni, ha ezt az elvet már az intézetekben érvényesítjük. (E tekintetben az ez évi aspiráns felvételeknél a KFKI különösen jó munkát végzett.)

Az utóbbi évben sikerült e téren is előbbre jutnunk és emellett arra törekedtünk, hogy az aspiránsokat — különösen a szovjet, rendes és levelező formáknál — elsősorban azokra a szakterületekre vegyük fel, amelyek fejlesztését a távlati kutatási terv előtérbe helyezi.

Az elmondottakkal kapcsolatban néhány számszerű adat ismertetése következik. Jelenleg 7 aspiránsunk végzi tanulmányait a Szovjetunióban, 4 matematikus és 3 fizikus. A matematikusok közül kettő információelmélettel, egy programozáselmélettel, a 3 fizikus közül kettő szilárdtestfizikával, egy pedig magfizikával foglalkozik. Belföldi rendes aspiranturán jelenleg 3 fő, levelező aspiranturán 10 fő, önálló aspiranturán 12 fő végzi tanulmányait. Ezek zöme mind szakmailag, mind politikailag megfelelő és aspiránsi témáik is megfelelnek a már említett követelményeknek.

Ez évben az Osztály szovjet aspiranturára 6 fő, belföldi rendes aspiranturára 2 fő, levelező aspiranturára 4 fő, önálló aspiranturára 15 fő felvételét javasolta.

A legutóbbi közgyűlés óta egy fizikus doktori és 4—4 matematikus, ill, fizikus kandidátusi disszertáció megvédésére került sor. A disszertációk színvonala általában megfelelt azoknak a magas követelményeknek, amelyek az Osztályon már kialakultak és ezektől a követelményektől a jövőben sem szabad eltekinteni. A tudományos minősítések vonatkozásában az Osztály kezdettől fogva magas követelményeket támasztott, és álláspontunk helyességét az Elnökség megerősítette erre vonatkozó határozatában.

Az Osztály múlt évi *rendezvényei* egyrészt azt a célt szolgálták, hogy kutatóink számot adjanak szakterületükön elért eredményeikről, másrészt, hogy elősegítsük a hazánkban folyó kutatások fejlődését, fejlesszük nemzetközi kapcsolatainkat.

Rendezvényeink közül elsőnek a *II. Magyar Matematikai Kongresszusról* kell szólni igen röviden — és főként adatszerűen —, mert a kongresszus értékelése az Osztály különböző fórumain már megtörtént, a szervezőbizottság elnöke pedig a Magyar Tudomány c. folyóiratban részletesen ismertette és értékelte a kongresszus eredményeit. A kongresszus értékelésével az Elnökség külön is foglalkozott.

A kongresszus egy plenáris ülést tartott az ünnepélyes megnyitó alkalmával, amelyen két előadás keretében Bolyai János halálának 100. évfordulójáról történt megemlékezés. Ezt követően 10 szekcióban folyt a munka és összesen 309 előadás hangzott el, ezek közül 130 magyar, 179 pedig külföldi matematikus előadása volt. Eltérés volt a kongresszusok hagyományaitól abban, hogy a programban minden szekciónak két ún. kötetlen ülése volt, amely azt a célt szolgálta, hogy a résztvevők szakterületük megoldatlan problémáit vessék fel és vitassák meg. A programnak ez a része is nagy tetszést aratott és igen sikeres volt.

A kongresszusnak 653 résztvevője volt, ezek közül 409 magyar és 22 országból 244 külföldi. A külföldiek közül 55-en az Akadémia, a Bolyai János Matematikai Társulat, és különböző egyetemek vendégeként, 189-en pedig saját költségükön vettek részt a kongresszuson.

A résztvevők egyöntetűen állapították meg, hogy a kongresszus mind tudományos, mind egyéb vonatkozásban igen sikeres volt és megmutatta, hogy a nagy hagyományokkal rendelkező magyar matematikai iskola erőteljesen fejlődik továbbra is és számottevő nemzetközi elismerésben részesül. Igen jelentős eredménye a kongresszusnak nemzetközi kapcsolataink bővítése, továbbfejlesztése, amelynek hatása a kutató munkában gyümölcsözni fog. Jelentős politikai hatása is volt a kongresszusnak.

A másik kiemelkedő rendezvény az *alacsonyenergiájú magfizikai kollokvium* volt, amelyet az Osztály az Eötvös Loránd Fizikai Társulattal és az Országos Atomenergiai Bizottsággal (OAB-vel) közösen rendezett meg Balatonöszödön.

Ezen 75 magyar és 31 külföldi fizikus vett részt, mindannyian a szocialista országokból. A kollokvium célja az volt, hogy a külföldi résztvevők az előadásokból és az intézetlátogatások alkalmával megismerjék a magyarországi magfizikai kutatások eredményeit, beszámoljanak saját eredményeikről, megvitassák a közös problémákat és szorosabb együttműködés alakuljon ki a baráti országok magfizikai intézetei között.

A kollokviumon több neves külföldi fizikus vett részt, köztük I. M. FRANK Nobel-díjas szovjet professzor is.

A 45 előadás közül 24-et magyar, 21-et pedig külföldi fizikus tartotta.

E kollokvium is bebizonyította, hogy a magyar intézetek által választott magfizikai témák aktuálisak és eredményesen művelhetők, továbbá azt, hogy az elmúlt 10 esztendő alatt egy tehetséges, fiatal magyar kutatógárda nőtt fel.

A kollokvium eredményességét elismerte a Dubnai Egyesített Atomkutató Intézet Tudományos Tanácsa is és ajánlotta, hogy az intézet tagországai felváltva évenként más-más országban rendezzenek hasonló kollokviumokat a magfizika egy-egy szűkebb területéről.

Ez évben és a következő években az Osztály nem kíván nagyobb szabású tudományos összejöveteleket rendezni, hanem az elmúlt évek jól bevált gyakorlatának megfelelően a matematika, a fizika és esetleg a csillagászat egy-egy szűkebb területén rendezünk kollokviumokat a társulatokkal közösen, külföldi tudósok részvételével.

A továbbiakban még röviden szólni kell a *felolvasó ülések*ről és az Osztály keretében rendezett egyéb előadásokról.

Az elmúlt év folyamán 4 alkalommal tartottunk felolvasó ülést, amelyen egy-egy matematikai, illetőleg fizikai tárgyú előadás hangzott el, továbbá 53 matematikai, fizikai és csillagászati tárgyú dolgozatot mutattak be az Osztály tagjai. Sajnálattal kell megállapítani ezúttal is, hogy felolvasó üléseink látogatottságában erőfeszítéseink ellenére sem mutatkozott fejlődés. Igen sok esetben még azok sem jelentek meg, akiknek dolgozata bemutatásra került.

A felolvasó üléseken kívül további 4 előadást rendeztünk külföldi előadókkal. J. COCKROFT az angol atomerőmű programról, C. F. POWEL egy magfizikai tárgyú, E. R. MUSZTELJ a szovjet akadémiai delegáció tagja 2 csillagászati tárgyú előadást tartott.

Nemzetközi kapcsolataink fejlődését már érintettük mind számszerű, mind tartalmi vonatkozásban, amikor a Matematikai Kongresszusról, ill. a Magfizikai Kollokviumról számoltunk be. Ezért most a külföldi utazásokról és a közös kutatási témákról adunk tájékoztatást.

A szocialista országok akadémiáival kötött egyezmények alapján széleskörű együttműködés alakult ki közös témák kutatásában. A KFKI ezen túlmenően további együttműködést folytat a szocialista országok magfizikai intézeteivel, különösen a Dubnai Egyesített Atomkutató Intézettel az OAB-on keresztül.

A legutóbbi közgyűlés óta az Osztály területéről akadémiai egyezmények keretében, az Osztály devizakeretéből és meghívások alapján 82 kutató 125 alkalommal utazott külföldre. (Az OAB további kb 25 fizikust utaztatott). A 82 kiutazóból 40 matematikus (beleértve a Számítástechnikai Központban dolgozó különböző végzettségű dolgozókat is), 30 fizikus és 12 csillagász. A számok az 1959. évhez viszonyítva is jelentős fejlődést mutatnak. Kívánatos lenne azonban, hogy fiatal kutatók részére több lehetőséget biztosítson az Akadémia hosszabb időtartamú tanulmányutakra, amely elősegítené szakmai fejlődésüket, növelné látókörüket és nem utolsósorban fokozná nyelvtudásukat.

Eredményes volt az Osztályhoz szakmailag tartozó két *társulat* tevékenysége is az elmúlt évben. A *Bolyai János Matematikai Társulat* nagy segítséget adott az Osztálynak a II. Magyar Matematikai Kongresszus megrendezéséhez. A nyári hónapokat kivéve hetenként tartott előadások színvonalasak és általában látogatottak voltak. Ebben az évben a társulat — a III. Osztály segítségével — két kollokvium megrendezését tervezi, az egyiket geometriai, a másikat differenciál-, integrál- és függvényegyenletek tárgykörben. Az *Eötvös Loránd Fizikai Társulat* az elmúlt évben magfizikai kollokviumot rendezett és vándorgyűlést Miskolcon. Ez év áprilisában rendezte meg a középiskolai fizika tanárok háromnapos ankétját 350 pesti és vidéki résztvevővel, amelyen vezető fizikusok tartottak tudományos előadásokat. A társulat ebben az évben — ugyancsak a III. Osztály támogatásával — lumineszcencia és elméleti fizika témakörökben rendez kollokviumot. Az ez évi vándorgyűlés megtartására is sor kerül Pécsett, amely a Biofizikai Társulattal közös rendezvény lesz.

Az Osztály költségvetése 1960-ban (felújítás nélkül) 13,8 millió Ft volt. Ez az összeg 1961-ben 14,6 millió Ft-ra emelkedett. Az 1960. évi létszámkeretünk 284 fő volt. Ez a létszám azonos az 1961. évi kerettel. A beruházás összege 1960-ban 13,9 millió Ft, az előirányzat 1961-ben 5,2 millió Ft. Az építésekkel összefüggő beruházások közül 1960-ban befejeződött a Csillagvizsgáló Intézet piszkéstetői obszervatóriuma kutató épületének építése. Az ATOMKI részére egy szovjet gyártmányú tömegspektrográf beszerzésére a múlt évben 2,6 millió Ft-ot fordítottunk.

A céltámogatás összege 1960-ban és 1961-ben is 580 000 Ft. Ebből az összegből a múlt évben és ebben az évben is 17 egyetemi intézetet és tanszéket támogattunk, ill. támogatunk.

Az Osztályvezetőség beszámolóját a jövő feladataival szeretném befejezni. Leglényegesebb feladatnak tartjuk, a távlati tudományos terv megvalósítását. Fontos feladatunk az akadémiai intézetek és az egyetemeken megalakult kutató csoportok további eredményes munkájának biztosítása minden vonatkozásban és a tudományos káderutánpótlás tervszerűbbé tétele. Célszerű továbbá a könyv- és folyóiratkiadás, s nemzetközi kapcsolataink további fejlesztése. E feladatok megvalósításához kérjük az Osztály tagjainak lelkes és aktív közreműködését.

A LINEÁRIS FÜGGVÉNYEGYENLETEK EGY OSZTÁLYÁRÓL

Írta: HOSSZÚ MIKLÓS

1. §. Bevezetés

1. A dolgozatban néhány

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i F(\sigma_i x) = 0 \tag{1}$$

típusú függvényegyenletet fogunk tekinteni, ahol az ismeretlen F függvény értelmezési tartománya egy X halmazból alkotott

$$X^n = X \times X \times \ldots \times X$$

n-tényezős direkt szorzat, míg a függvényértékek egy A Abel-féle csoport elemei, α_i, σ_i pedig az A illetve az X^n elemeire ható operátorok. Az x független változónak eszerint n komponense van; ezt szükség esetén az

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \qquad x_i \in X$$

írásmóddal lehet hangsúlyozni.

σ_i gyanánt háromféle operátort fogunk használni:

$$\pi_i x = (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n),$$

$$\theta_i x = (x_1, \ldots, x_{i-1}, c, x_{i+1}, \ldots, x_n),$$

$$\gamma^i x = (x_{i+1}, \ldots, x_{i+n}), \qquad x_{k+n} = x_k.$$

Ezek közül π_i az X^n-et képezi le X^{n-1}-re, θ_i az X^n-et vetíti az $x_i = c$ egyenlettel meghatározott „koordinátasíkra", γ^i pedig n periódusú ciklikus operátor[1]. Itt és a későbbiekben is a γ^i operátor jele alatt az indexeket mod n redukálni kell.

2. A szokásos

$$(F+G)(x) = F(x) + G(x), \qquad x \in X^n$$

értelmezés alapján az A-beli függvényértékkel rendelkező függvények összes-

[1] Sok esetben, pl. a 2. tételben is, csupán a periodikusság játszik szerepet, a meggondolások minden változtatás nélkül átvihetők erre az általánosabb esetre is, midőn a koordinátákra bontás nincs feltéve. Így a vizsgálat kiterjed pl. egy függvény iteráltjait tartalmazó lineáris függvényegyenletekre is [2, 3]. A szögletes zárójelben álló számok a dolgozat végén található irodalomra utalnak.

sége maga is egy L^n Abel-féle csoportot alkot. Ennek alcsoportja az (1) egyenlet megoldásainak összessége, ugyanis a felírt függvényegyenlet nyilván lineáris, mert ha F és G két megoldás, akkor $F+G$ is az. Általában is egy lineáris függvényegyenlet *összes* megoldásának megadása egy S alcsoport meghatározását jelenti. A megoldás *legáltalánosabb alakja* a megoldásban szereplő *tetszőleges elemek* E halmazából származtatva

$$F=\chi f, \qquad f \in E$$

alakban adja meg az S alcsoport minden egyes F elemét.

Gyakori eset, hogy az L^n csoportnak csak valamely M részét választjuk ki az (1) egyenletben megengedett függvények osztályának, vagyis (1) megoldását valamilyen mellékfeltétel kirovásával keressük, pl. csak (bizonyos topológia szerint) folytonos függvényeket tekintünk, vagy pl. csak olyanokat engedünk meg, melyek függetlenek bizonyos x_i $(i \in \varkappa)$ változóktól, amit a θ operátor segítségével a

$$F(x)=F(\theta_\varkappa y) \tag{2}$$

feltételi egyenlettel tudunk kifejezni. (Ez utóbbinál $\varkappa$ az $1,\ldots,n$ indexhalmaz bizonyos részhalmazát jelöli.) Ilyenkor a megoldást szolgáltató tetszőleges elemek E halmazától is megkívánjuk, hogy az L^n-nel közös része M része legyen.

Maga E rendszerint L^n-ből és az L^n-re ható operátorok tartományából vagy ezek egy részéből áll, de nyilván határozatlan egy tetszőleges 1—1 leképezés erejéig, ugyanis az $e \in E$ elemekre az

$$e \rightarrow e'=\varepsilon e$$

1—1 leképezést alkalmazva olyan E' halmazt nyerünk, melynek elemeiből a megoldások

$$F=\chi\varepsilon^{-1}e' \qquad e' \in E'$$

alakban származtathatók. Határozatlan továbbá E olyan szempontból is, hogy χE többszörösen fedheti S-et, vagyis egy-egy $F \in S$ megoldást több $f, g \in E$ elemből is származtathatunk az

$$F=\chi f=\chi g$$

alakban. Célszerű tehát kiválasztani E-nek azt a legszűkebb $\bar{E}$ részét, melyre $\chi\bar{E}$ egyszeresen fedi S-et, mert így kapjuk meg a megoldásban szereplő *lényeges* tetszőleges elemeket, melyek közül már egyik sem hagyható el a teljes megoldási rendszer származtatásához. Ez az eset áll fenn pl. a lineáris differenciálegyenletek esetében, midőn a legáltalánosabb megoldás egyetlen lineárisan független (alap) rendszerből származtatható.

A dolgozatban vizsgált esetekben, *midőn E is csoport, és χ homomorfizmus, mely E-t S-re képezi le, a lényeges tetszőleges elemek E halmaza nyilván E-nek a χ homomorfizmus magja szerinti faktorcsoportjával izomorf.* Ez tehát azt jelenti, hogy példáinkban egy $\bar{E}$ legszűkebb rendszert úgy nyerünk, ha megkeressük azoknak az $e \in E$ elemeknek az N alcsoportját, melyeket χ a 0-ra képez le, és E-ből kiválasztjuk az $fN (f \in E)$ mellékosztályoknak egy teljes reprezentáns rendszerét.

Minthogy a megoldásban szereplő tetszőleges elemek halmaza és a megoldás legáltalánosabb alakjának fogalma a megoldást képező alcsoport fogalmához képest több határozatlanságot tartalmaz, fő feladatunknak mindig ez utóbbi megadását tekintjük egy lineáris függvényegyenlet megoldásakor.

3. A probléma történetét illetően megemlítjük, hogy M. GHERMANESCU [1, 4—10] kezdeményezte a

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x) F(\gamma^i x) = b(x), \qquad x \in X^n \tag{3}$$

inhomogén függvényegyenlet vizsgálatát, melynek legáltalánosabb megoldása nyilván előállítható a homogén egyenlet általános megoldása és egy partikuláris megoldás összegeként. Fontos szerepet játszik a

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i(\gamma^j x) F(\gamma^{i+j} x) = b(\gamma^j x), \qquad j = 1, \dots, n$$

egyenletrendszer lineárisan független egyenleteinek száma. Külön vizsgálatot igényel a homogén egyenlet, ahol $\alpha_i = 1$. Ekkor is különösen az a speciális eset bizonyult nehéznek, midőn $F(x)$ független bizonyos x_i komponensektől. A nehézséget az okozza, hogy a megoldást is legfeljebb annyi változós függvényekkel kell megadni, mint ahány változótól ténylegesen függ maga F, vagyis megköveteljük, hogy a megoldásban szereplő tetszőleges elemek E halmaza az (1)-ben megengedett (2) alakú függvények M halmazának része legyen. Így látni fogjuk, hogy a specializálás ez esetben korántsem jelent egyszerűsítést. Ekkor a függvényegyenlet megoldása az 1. segédtételben összefoglalt kombinatorikai meggondolásokat igényli.

A $\sigma_i = \gamma^i$ eset felfogható kissé általánosabban úgy is, hogy ekkor $\sigma_i x = \gamma \sigma_{i-1} x$, ahol γ n periódusú operátor. Ebben a felfogásban H. KIESEWETTER [12] vizsgálatait (3) általánosításának tekinthetjük, midőn a σ_i operátorok nem a $\sigma_i = \gamma \sigma_{i-1}$ összefüggés alapján alkotnak ciklust, hanem pl.

$$\sigma_i x = \varphi(\sigma_{i-1} x, \sigma_{i-2} x)$$

alapján, ahol φ olyan függvény, mely $X^n \times X^n$-t X^n-re képezi le, és az indexeket mod n redukálni kell.

(3) általánosításával kapcsolatban vetődött fel az a probléma, hogy mi az egyenlet megoldása, ha a γ^i ciklikus permutációk helyett az $1, 2, \ldots, n$ indexek teljes permutációs csoportjának egyéb elemeit tekintjük [7].

A $\sigma_i = \pi_i$ operátorral az (1) függvényegyenlet a kombinatorikus topológiában játszik fontos szerepet [2, 13—16].

4. A dolgozat 2. §-ában a homológia csoportok meghatározásával foglalkozunk, függvényegyenlet megoldási módszerekkel.

A 3. §-ban (3) megoldását adjuk meg a (2) mellékfeltétellel, abban a speciális esetben, midőn

$$a_i(x) = 1, \quad b(x) = 0.$$

Bebizonyítjuk, hogy akkor (3) megoldásainak S alcsoportja az

$$f_i(x) - f_i(\gamma^i x)$$

alakú függvények S_i alcsoportjainak összege, ahol $f_i \in L^n$

$$f_i(x) = f_i(\theta_{\varkappa \cup (\varkappa - i)} x), \qquad x \in X^n$$

tulajdonságú függvény, azaz független az x_k $[k \in \varkappa \cup (\varkappa - i)]$ változóktól.

Általánosítjuk [1] eredményeit is, amelyben a szerzők a

$$\varkappa = p+1, p+2, \ldots, n$$

esetet vizsgálták, továbbá (11) alatt explicit alakban előállítjuk az f_i függvényeket, kifejezve azokat F segítségével, vagyis adott F megoldáshoz megadjuk az őt

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n} [f_i(x) - f_i(\gamma^i x)]$$

alakban előállító f_i függvényeket. A felírt képletekben a szokásnak megfelelően $\varkappa \cup \nu$ és $\varkappa \pm \nu$ a halmazok egyesítését, illetve az elempárok összegéből vagy különbségéből alkotott halmazt jelöli.

2. §. A homológia csoportok függvényegyenletei

1. A kombinatorikus topológiában egy $f \in L^n$ függvényt röviden n-dimenziós *láncnak* szokás nevezni. Értelmezzük egy $f \in L^{n-1}$ lánc n-dimenziós *határát* a

$$(\Delta f)(x) = \sum_{i=1}^{n} (-1)_i f(\pi_i x), \qquad x \in X^n$$

egyenlettel. Az ilyen határokból alkotott láncok összessége az L^n-nek egy D^n alcsoportja. A

(4) $$(\Delta F)(x) = 0, \qquad x \in X^{n+1}$$

feltételt (függvényegyenletet) kielégítő (0 határú) $F \in L^n$ láncok, az ún. *ciklusok* összessége is alcsoportja L^n-nek, ezt Z^n-nel jelöljük. A $H^n = Z^n/D^n$ faktorcsoport az ún. *homológia* csoport. Ha $n=1$, akkor (4)

$$-F(x_2)+F(x_1)=0, \qquad x_i \in X$$

-ra redukálódik, ekkor $F=$ állandó. Minthogy továbbá $n>1$ esetén $H^n=0$ [16], ezért ekkor $Z^n=D^n$. Fennáll tehát az

1. TÉTEL. *A* (4) *függvényegyenlet minden megoldása felírható az*

$$(5) \qquad F(x)=\begin{cases}(\Delta f)(x) \;, & ha \quad n>1; \\ állandó, & ha \quad n=1\end{cases}$$

alakban, ahol f alkalmas L^{n-1}-beli függvény, Δ pedig a fentebb értelmezett határképző operátor.

A tétel más szavakkal azt mondja ki, hogy egy $n>1$-dimenziós lánc akkor és csak akkor ciklus, ha határa egy $n-1$-dimenziós láncnak. Ebből következik az is, hogy két $n-1$-dimenziós lánc határa akkor és csak akkor egyezik meg, ha különbségük ciklus, vagyis egymástól legfeljebb egy $n-2$-dimenziós lánc határában különböznek. Eszerint az n-dimenziós ciklusok Z^n alcsoportját már az $n-1$-dimenziós láncok határai közül azok is megadják, melyek páronként nem csupán egy $n-2$-dimenziós lánc határában térnek el egymástól, és e rendszer már legszűkebb, nem tartalmaz felesleges elemet. Vagyis az n-dimenziós ciklusok Z^n alcsoportja a Δ leképezésben éppen az fD^{n-1} ($f \in L^{n-1}$) mellékosztályok egy reprezentáns rendszerének a képe. (Minthogy Δ az L^{n-1}-nek L^n-be való homomorfizmusa, és Z^{n-1} a homomorfizmus magja, ezért közvetlenül is világos, hogy a $D^n=\Delta L^{n-1}$ homomorf kép izomorf L^{n-1}/Z^{n-1}-nel.) A bevezetésben tett megjegyzés szerint tehát érvényes a következő:

1′ TÉTEL. *A* (4) *függvényegyenlet legáltalánosabb megoldása* (5), *ahol a megoldásban szereplő tetszőleges f függvények halmaza izomorf az L^{n-1}/D^{n-1} faktorcsoporttal.*

2. Függvényegyenlet megoldási módszerekkel is könnyen bizonyítható az 1. tétel, [16]-ra való hivatkozás nélkül. Legyen ugyanis $n>1$, és $x_{n+1}=c$ rögzített, akkor (4)-ből az

$$f(\bar{x})=(-1)^{n+1}F(x_1,\dots,x_n,c), \quad \bar{x}=(x_1,\dots,x_n)\in X^n$$

jelöléssel valóban

$$F(\bar{x})=F(\pi_{n+1}x)=-(-1)^n\sum_{i=1}^{n}(-1)^iF(\pi_i x)=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{n+1}(-1)^iF(\pi_i x)=\sum_{i=1}^{n}(-1)^i f(\pi_i\bar{x})=(\Delta f)(\bar{x}).$$

Viszont ha

$$F(\bar{x})=(\varDelta f)(\bar{x}), \qquad \bar{x}\in X^{n}$$

teljesül, akkor fennáll

$$F(\pi_i x)=\sum_{j=1}^{i-1}(-1)^j f(\pi_j\pi_i x)+\sum_{j=i+1}^{n+1}(-1)^{j-1}f(\pi_j\pi_i x),$$

$$(\varDelta F)(x)=\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^i F(\pi_i x)=\sum_{j<i}(-1)^{i+j}f(\pi_j\pi_i x)+\sum_{j>i}(-1)^{i+j-1}f(\pi_j\pi_i x)=0,$$

vagyis

$$F(\bar{x})=(\varDelta f)(\bar{x}), \qquad \bar{x}\in X^{n}$$

tetszőleges $f\in L^{n-1}$ függvénnyel ki is elégíti (4)-et.

Az $n=1$ esetben a tétel állítása nyilvánvalóan teljesül.

3. Megjegyezzük, hogy pl. az $n=2$ esetben Z^2-t az

$$F(x_1, x_2)+F(x_2, x_3)=F(x_1, x_3) \tag{6}$$

függvényegyenletet kielégítő függvények alkotják, míg D^2-t a

$$\varDelta f=f(x_1)-f(x_2) \tag{7}$$

alakúak, melyek közül az $f(c)=0$ feltételt kielégítő f függvényhez tartozók valóban az előző függvényegyenlet legáltalánosabb megoldásai [11, 17, 18]. Finomítható tehát az az állítás, hogy (6) legáltalánosabb megoldását a (7) képlet adja, ahol f tetszőleges egyváltozós függvény. Ugyanis a felírt (7) képlet többszörösen is megadja (6) teljes megoldását. E példában a bevezetés jelöléseit követve, tekinthetjük úgy, hogy

$$E=L^{n-1}$$

$$\chi f=(\varDelta f)(x), \quad N=\chi^{-1}0=D^{n-1},$$

tehát $n=1$ esetén $N=D^1$ a

$$\chi f=f(x_1)-f(x_2)=0$$

feltételt kielégítő, $f(x)=$ állandó függvények összessége, s így az

$$f(c)=0$$

feltételt kielégítő függvények összessége L^1-nek L^1/D^1-gyel izomorf része. Algebrai kifejezések nélkül szemléletesebben ezt úgy mondhatjuk, hogy minden kétváltozós függvény, amely

$$F(x_1, x_2)=g(x_1)-g(x_2)$$

alakban előállítható, előáll

$$F(x_1, x_2)=f(x_1)-f(x_2), \quad f(c)=0$$

alakban is, éspedig egyértelműen. Legyen ugyanis pl. $f(x)=g(x)-g(c)$, akkor valóban fennáll az utóbbi egyenlet, és az $x_2=c$ helyettesítés igazolja, hogy az ilyen $f(x)=F(x,c)$ már egyértelműen meg is van határozva F-fel.

Megjegyezzük még, hogy szokás Δ-t másként is értelmezni. Pl. [14]-ben (6) helyett

$$F(x_1, x_2 x_3)+F(x_2, x_3)=(x_1 x_2, x_3)+F(x_1, x_2)x_3, \qquad x_i \in X$$

lép fel, ahol azonban X maga is csoport, éspedig A-nak operátor csoportja. Ekkor Z^1 meghatározásának problémája is érdekes, az

$$F(x_1 x_2)=F(x_1)x_2+F(x_2), \qquad x_i \in X$$

ún. keresztezett homomorfizmusok megkeresése a feladat.

3. §. A ciklikus egyenlet vizsgálata

1. Foglalkozzunk a

$$\sum_{i=1}^{n} F(\gamma^i x)=0, \qquad x \in X^n \tag{8}$$

függvényegyenlet vizsgálatával.

2. TÉTEL. *Adott A^* Abel-féle csoport esetén, melyen az $na=b$ egyenlet egyértelműen megoldható $a \in A$-ra, a (8) függvényegyenlet legáltalánosabb megoldása*

$$F(x)=\nabla_1 f(x) \overset{\text{def}}{=} f(x)-f(\gamma x), \tag{9}$$

ahol $f \in L^n$ tetszőleges függvény.

Bizonyítás. (8) alapján

$$F(x)=-\sum_{i=1}^{n-1} F(\gamma^i x),$$

tehát

$$F(x)=1/n[(n-1)F(x)+F(x)]=1/n\sum_{i=1}^{n-1}[F(x)-F(\gamma^i x)]=$$

$$=1/n\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{i}[F(\gamma^{j-1}x)-F(\gamma^j x)]=f(x)-f(\gamma x),$$

ahol

$$f(x) \overset{\text{def}}{=} 1/n\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{i} F(\gamma^{j-1}x).$$

Viszont nyilvánvaló, hogy (9) tetszőleges $f \in L^n$ esetén ki is elégíti (7)-et:

$$\sum_{i=1}^{n} F(\gamma^i x)=\sum_{i=1}^{n}[f(\gamma^i x)-f(\gamma^{i+1}x)]=\sum_{i=1}^{n} f(\gamma^i x)-\sum_{i=2}^{n+1} f(\gamma^i x)=0.$$

Látjuk, hogy a megoldások S^1 alcsoportja L^n-ből a ∇_1 leképezéssel származtatható, esetünkben tehát a bevezetés jelölései szerint $E = L^n$, és $\chi = \nabla_1$ endomorfizmus, mely L^n-et S^1-re képezi le. Az endomorfizmus magja a

$$\nabla_1 g = g(x) - g(\gamma x) = 0$$

feltételt kielégítő (a ciklikus operátorral szemben invariáns) g függvények C alcsoportja, tehát $\bar{E}$ gyanánt választható L^n-nek az L^n/C-vel izomorf része.

A bizonyítás egyszersmind megadja $f(x)$-et is, azaz adott $F(x)$-hez a (9) függvényegyenlet legáltalánosabb

$$f(x) = g(x) + 1/n \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{i} F(\gamma^{j-1}x), \quad g(x) = g(\gamma x)$$

megoldását.

2. Térjünk rá ezután (8) megoldására abban az esetben, midőn

$$(2) \qquad F(x) = F(\theta_\varkappa x), \qquad x \in X^n$$

teljesül valamely adott $\varkappa$ indexhalmazra. Észrevesszük, hogy (9)-hez hasonlóan a

$$(10) \qquad \sum_{i=1}^{n-1} [f_i(x) - f_i(\gamma^i x)], \quad f_i(x) = f_i(\theta_{\varkappa \cup (\varkappa - i)} x), \; x \in X^n$$

alakú függvények összessége kielégíti (8)-at, továbbá (2)-t is, hiszen $f_i(x)$ és $f_i(\gamma^i x)$-ben x_k $(k \in \varkappa)$ éppen a k-adik, illetve $k-i$-edik helyen szerepelne, az ezen a helyen álló változóktól azonban az f_i függvény (10_2) alapján független.

Jelöljük $S^n_\varkappa$-nel az L^n csoportnak a (10) alatti alakú függvényeket tartalmazó alcsoportját. (Világos, hogy a (10) alakú függvények összege és különbsége is ugyanilyen alakú.)

3. TÉTEL. *Legyen A^n Abel-féle csoport, melyen az $ma = b$ egyenletnek van egyértelmű $a = b/m$ megoldása, tetszőleges $m = 1, 2, \ldots, n$ esetén. Akkor a* (8) *fügvényegyenlet* (2)-*t kielégítő minden $F \in L^n$ megoldása az $S^n_\varkappa$ részcsoport eleme, azaz felírható a* (10) *alakban, alkalmas $f_i \in L^n$ függvényekkel.*

1. SEGÉDTÉTEL. *Jelöljük K^m_r-nel az $1, \ldots, m$ elemekből alkotott r-edosztályú kombinációk halmazát. Akkor bármely $T_\nu \in A$ $(\nu \in K^n_r)$ sorozat és rögzített m esetén fennáll*

$$\sum_{m \in \nu \in K^n_r} \sum_{i=1}^{n} T_{\nu - i} = r \sum_{\nu \in K^n_r} T_\nu .$$

2. SEGÉDTÉTEL. *Ha egy $T_\nu \in A^n (\nu \in K^n_r)$ sorozat olyan tulajdonságú, hogy valamely rögzített m esetén fennáll*

$$T_\nu = T_{\nu \cup m}, \qquad T_{(1, \ldots, n)} = 0,$$

akkor

$$T_m = \sum_{r=1}^{n-1} \frac{(-1)^{r-1}}{r} \sum_{m \in \nu \in K_r^n} \sum_{i=1}^{n} T_{\nu-i}.$$

3. SEGÉDTÉTEL. *Ha $F(x)$ kielégíti (8) és (2)-t, akkor*

$$\sum_{i=1}^{n} F(\theta_{\nu-i} x) \in S_\varkappa^n$$

teljesül bármely $\nu \in K_r^n$ esetén, mely $\varkappa$-t (vagy alkalmas k-val $\varkappa - k$-t) részhalmazként tartalmazza.

3. Foglalkozzunk először a segédtételek bizonyításával.

Ad. 1. Az 1. segédtételben felírt egyenlőség jobb oldalán az összeg minden tagja pontosan r-szer szerepel a bal oldalon.

Legyen ugyanis ν egy eleme n_0. Akkor $\nu - i$ $(i = 1, \ldots, n)$ éppen r esetben tartalmazza n_0-t, ahányszor $\nu \in K_r^n$ r számú eleme közül valamelyik az n_0 helyére kerül $\nu - i$-ben. Legyen

$$\nu - p_j \qquad (j = 1, \ldots, p)$$

ezek közül az összes különböző, és

$$\nu - s_j = \nu, \qquad (j = 1, \ldots, s).$$

Minthogy

$$\nu - p_j - s_k \qquad (j = 1, \ldots, p; \quad k = 1, \ldots, s)$$

megadja az összes lehetséges r számú olyan $\nu - i$ alakú indexhalmazt, mely n_0-t tartalmazza, ezért $ps = r$.

Egy adott $\nu = \bar{\nu} - i$-t nyilván csak oly $\bar{\nu} \in K_r^n$-ből kiindulva kaphatunk, melyre

$$\bar{\nu} = \nu + i = \nu - p_j$$

teljesül valamilyen $j = 1, \ldots, p$ esetén. Ezek mindegyikéből s féleképpen áll elő

$$\nu = \bar{\nu} - i = \nu - p_j - i = \nu - s_k,$$

éspedig akkor, amikor

$$i = s_k - p_j \qquad (k = 1, \ldots, s).$$

Tehát a bal oldali összeg pontosan $ps = r$ esetben tartalmaz $\nu \in K_r^n$ indexű tagot.

Ad 2. Az 1. segédtételben szereplő összeget átrendezve, kapjuk, hogy

$$\sum_{m \in \nu \in K_r^n} T_\nu = 1/r \sum_{m \in \nu \in K_r^n} \sum_{i=1}^{n} T_{\nu-i} - \sum_{m \notin \nu \in K_r^n} T_\nu,$$

tehát ismételt alkalmazással a

$$T_m = \sum_{m\in\nu\in K_1^n} T_\nu = 1/1 \sum_{m\in\nu\in K_1^n}\sum_{i=1}^{n} T_{\nu-i} - \sum_{m\notin\nu\in K_1^n} T_\nu =$$

$$= 1/1 \sum_{m\in\nu\in K_1^n}\sum_{i=1}^{n} T_{\nu-i} - \sum_{m\in\nu\in K_2^n} T_\nu = 1/1 \sum_{\dots}\sum_{\dots}\dots - 1/2\sum_{\dots}\sum_{\dots}\dots + \sum_{m\notin\nu\in K_2^n} T_\nu = \dots$$

egyenlőség sorozat igazolja a 2. segédtétel állítását.

Ad 3. Helyettesítsünk (8)-ban x_k $(k\in\nu)$ helyébe c-t, akkor

$$\sum_{i=1}^{n} F(\gamma^i\theta_\nu x) = 0,$$

tehát

$$\sum_{i=1}^{n} F(\theta_{\nu-1}x) = \sum_{i=1}^{n} [F(\theta_{\nu-i}x) - F(\gamma^i\theta_\nu x)], \qquad (\varkappa\subseteq\nu)$$

valóban speciális $S_\varkappa^n$-beli függvény.

4. Térjünk rá ezután a 3. tétel bizonyítására. Mint előrebocsátottuk, $S_\varkappa^n$ minden eleme kielégíti (8)-at és (2)-t. Azt kell tehát csak bizonyítani, hogy (8) minden (2) alakú megoldása $S_\varkappa^n$-hoz tartozik. E célból válasszuk a 2. segédtételben szereplő sorozat elemeiként $T_\nu = F(\theta_{\varkappa-m+\nu}x)$-et. Akkor a 2. segédtétel feltételei teljesülnek, ugyanis bármely $m\in\varkappa$ esetén

$$(\varkappa - m) + \nu \cup m(\varkappa - m + \nu) \cup (\varkappa - m + m) = (\varkappa - m + \nu) \cup \varkappa,$$

tehát (2)-t is figyelembe véve,

$$T_{\nu\cup m} = F(\theta_{\varkappa-m+\nu\cup m}x) = F(\theta_{(\varkappa-m+\nu)\cup\varkappa}x) = F(\theta_\varkappa\theta_{\varkappa-m+\nu}x) = F(\theta_{\varkappa-n+\nu}x) = T_\nu,$$

továbbá (8)-ból az $x_k = c$ $(k = 1, \dots, n)$ helyettesítéssel

$$n\,T_{(1,\dots,n)} = n\,F(\theta_{(1,\dots,n)}x) = n\,F(c, c, \dots, c) = 0$$

adódik. Így a 2. és 3. segédtételt felhasználva azt kapjuk, hogy

$$F(x) = F(\theta_\varkappa x) = F(\theta_{\varkappa-m+n}x) = \sum_{r=1}^{n-1}\frac{(-1)^{r-1}}{r}\sum_{m\in\nu\in k_r^n}\sum_{i=1}^{n} F(\theta_{\varkappa-m+\nu-i}x) \qquad \in S_\varkappa^n,$$

s ezt kellett éppen bizonyítani.

Figyelemre méltó, hogy a bizonyítás alapján $F(x)$-hez effektíve is megadható egy (10) alakú előállítás, pl. az

$$f_i(x) = g(x) + \sum_{r=1}^{n-1}\frac{(-1)^{r-1}}{r}\sum_{m\in\nu\in k_r^n} F(\theta_{\varkappa-m+\nu-i}x) \tag{11}$$

függvénnyel, ahol $g(x) = g(\gamma x)$ tetszőleges ciklikus invariáns függvény.

Megfigyelhetjük, hogy a 3. segédtételben és a 3. tétel teljes bizonyítása során sem használtuk fel a (8) egyenletet teljes általánosságban, hanem csak rögzített $x_k = c$ $(k \in \varkappa)$ választás esetén, tetszőlegesen változó x_i $(i \notin \varkappa)$-val.

5. Az $S_\varkappa^n$ megoldások alcsoportját az L^n csoportból a következő módon lehet származtatni: a $k \in \varkappa \cup (\varkappa - i)$ indexű változók helyébe $x_k = c$-t helyettesítve olyan f_i függvények E_i alcsoportját kapjuk, melyek kielégítik az

$$f_i(x) = f_i(\theta_{\varkappa \cup (\varkappa - i)} x), \qquad x \in X^n$$

összefüggést, azaz függetlenek az x_k $(k \in \varkappa \cup (\varkappa - i))$ változóktól. Ezután az E_i elemeire értelmezzük a

$$\nabla_i f = f(x) - f(\gamma^i x)$$

operátort, mely nyilván endomorfizmus, amely E_i-t $S_\varkappa^n$-ba képezi le. Így a 3. tétel állítása úgy fogalmazható, hogy (8)-nak a (2) feltétellel kijelölt M halmazon minden megoldása az

$$S_\varkappa^n = \sum_i \nabla_i E_i \tag{10'}$$

alcsoport eleme.

A bevezetésben mondottak szerint a legáltalánosabb megoldás származtatható $E = \sum_i E_i$-nek olyan részhalmazából, melyet a ∇_i leképezések egyrétűen képeznek le $S_\varkappa^n$-ra. Keressük tehát E ezen részét!

A következő észrevételeket tehetjük:

a) Ha valamely i, j indexpárra

$$\nabla_i E_i \cap \nabla_j E_j = N \neq 0,$$

akkor egyikükből, pl. E_j-ből $\nabla_j^{-1} N$ elhagyható.

Ez az eset áll elő pl. akkor, ha $j = n - i$; akkor $\nabla_{n-i} E_{n-i} = \nabla_i E$ miatt az E_i halmazok közül elég csupán a $2i \leqq n$ feltételt kielégítő indexűeket tekinteni.

Ugyanis bármely $f \in E_{n-i}$ esetén

$$\nabla_{n-i} f = f(x) - f(\gamma^{n-i} x) = h(x) - h(\gamma^i x) = \nabla_i h,$$

ahol

$$h(x) \overset{\text{def}}{=} -f(\gamma^{n-i} x)$$

nyilván kielégíti a

$$h(x) = h(\theta_{\varkappa \cup (\varkappa - i)} x)$$

feltételt is, mivelhogy $f \in E_{n-i}$ független a $k \in \varkappa \cup [\varkappa - (n-i)]$ indexű változóitól, tehát

$$h(x) = -f(\gamma^{n-i} x) = -f(x_{1+n-i}, \ldots, x_{r+n-i}, \ldots)$$

sem fog függeni az

$$x_k, k \in \varkappa \cup [\varkappa - (n-i)] + n - i = (\varkappa + n - i) \cup \varkappa = \varkappa \cup (\varkappa - i)$$

változóktól.

Hasonló eset áll elő pl. akkor, ha $j=ri$ esetén

$$\varkappa \cup (\varkappa - j) \supseteq \bigcup_{p=0}^{r} (\varkappa - pi) \tag{12}$$

teljesül; ekkor $\nabla_j E_j \subseteq \nabla_i E_i$, ugyanis akkor bármely $f \in E_j$ esetén írható

$$\nabla_j f = f(x) - f(\gamma^j x) = f(x) - f(\gamma^i x) + f(\gamma^i x) - f(\gamma^{2i} x) + \ldots +$$
$$+ f(\gamma^{(r-1)i} x) - f(\gamma^{ri} x),$$

mely valóban speciális

$$\nabla_i h_p, \quad h_p(x) \overset{\text{def}}{=} f(\gamma^{pi} x) \in E_i$$

alakú függvények összege, éspedig olyanoké, melyek bizonyos x_k $(k \notin \varkappa \cup (\varkappa - i))$ változóktól sem függő $h_p(x)$-ből származnak. Hogy $h_p \in E_i$, azaz

$$h_p(x) = h_p(\theta_{\varkappa \cup (\varkappa - i)} x)$$

teljesül, az nyilvánvaló h_p értelmezése és (12) alapján, hiszen $f(\gamma^{pi} x)$ független a

$$q\big(\in (\varkappa - pi) \cup [\varkappa - (p+1)i] = \varkappa \cup (\varkappa - i) - pi\big)$$

-edik helyen álló változótól, ahol

$$h_p(x) = f(\gamma^{pi} x) = f(x_{1+pi}, \ldots, x_{k+pi}, \ldots)$$

-ben éppen x_k $(k \in \varkappa \cup (\varkappa - i))$ állana.

b) Minthogy éppen a $g(x) = g(\gamma^i x)$ tulajdonságú $g \in E_i$ függvényekre áll $\nabla_i g = 0$, tehát ezek alcsoportját C^i-vel jelölve, mindegyik E_i helyett vehető egy az E_i/C^i-vel izomorf rész.

Az *a*) redukció alapján azt látjuk, hogy a legáltalánosabb megoldást adó (10), illetve (10′) formulában az összegezést nem kell $i = 1, 2, \ldots, n$-re elvégezni, a tagok közül egyesek összevonhatók mint azonos típusúak; pl. az összegezést elég csak az $1, \ldots, [n/2]$ indexek olyan részhalmazára végezni, melyet a (12) feltételt kielégítő j indexek elhagyásával nyerünk.

IRODALOM

[1] J. Aczél—M. Ghermanescu—M. Hosszú, On cyclic equations, *Az MTA Mat. Kut. Int Közleményei*, **5** (1960), 215—221.

[2] J. Erdős, A remark on the paper "On some functional equations" by S. Kurepa, *Glasnik Mat.—Fiz. Astr. Društvo Mat. Fiz. Hrvatske*, (2) **14** (1959), 3—5.

[3] N. Gercevanoff, Quelques procédés de la résolution des équations fonctionnelles linéaires par la méthode d'itération, *C. R. (Doklady) Acad. Sci URSS*, **39** (1943), 207—209.

[4] M. Ghermanescu, Sur quelques équations fonctionnelles linéaires, *Bulletin Soc. Math. France*, **68** (1940), 109—128.

[5] M. Ghermanescu, O clasa de ecuaţii funcţionale, *Pozitiva*, **1** (1940), 121—125.

[6] M. Ghermanescu, Sur une classe d'équations fonctionnelles du premier ordre, *Acta Mathematica*, **75** (1943), 191—218.
[7] M. Ghermanescu, Sur une équation fonctionnelle, *Bulletin Sci. de l'École Polyt. de Timişoara*, **11** (1943), 3—7.
[8] M. Ghermanescu, Ecuaţii funcţionale liniare, *Buletinul Şţi.* **3** (1951), 245—259.
[9] M. Ghermanescu, Ecuaţii funcţionale cu argument funcţional n-periodic, *Acad. R. P. Romîne Bul. şţi. mat. fiz.*, **9** (1957), 43—78.
[10] M. Ghermanescu, O clasă de ecuaţii funcţionale liniare, *Studii şi Cercetări Matematice*, **1** (1958), 113—126.
[11] S. Gołąb, O metryce kątowej ogólnych przestrzeni I, Zasada Chaslesa', *Wiadomosci Math.*, **38** (1933), 1—12.
[12] H. Kiesewetter, *Struktur linearer Funktionalgleichungen im Zusammenhang mit N. H. Abels Theorem*, Dissertation, Jena, 1958.
[13] S. Kurepa, On some functional equations, *Glasnik Mat.—Fiz., Astr. Društvo Mat. Fiz. Hrvatske* (2) **11** (1956), 3—5.
[14] A. G. Kuros, *Csoportelmélet*, Budapest, 1955.
[15] L. Sz. Pontrjagin, *Kombinatórikus topológia*, Budapest, 1955.
[16] T. Rado—P. V. Reichelderfer, *Continuous Transformations in Analysis*, Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1955.
[17] P. Rossier, Sur l'équation de Chasles, *C. R. Soc. Phys. Hist. Nat. Genève*, **62** (1945) 95—97.
[18] D. M. Sinzow, Über eine Funkionalgleichung, *Archiv der Math. und Physik*, (3) **6** (1903), 216—217.
[19] A Valerias, *Two new types of linear functional equations* (Spanish), Buenos Aires, 1944.

(Beérkezett: 1960. VI. 6.)

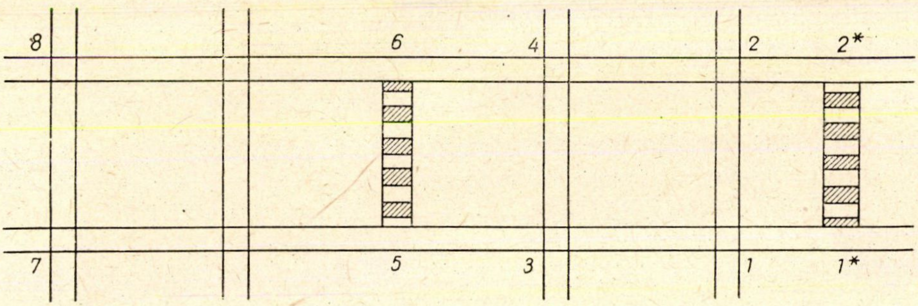
A Miskolci Nehézipari Műszaki Egyetem
Matematikai Intézete

EGY KÖZLEKEDÉSI PROBLÉMÁRÓL

Írták: BÁRTFAI PÁL és DOBÓ ANDOR

Bevezetés

Az alább tárgyalt problémák a nagyvárosi gyalogosközlekedés során lépnek fel. Az 1. ábrán látható vázlatos rajz egy útvonalat — a két oldalán húzódó járdával —, továbbá az adott útvonalat derékszögben keresztező két másik útvonalat tüntet fel. A kereszteződéseknél jelzőlámpák irányítják a forgalmat. A két kereszteződés között egy kijelölt helyen „szabadon" átkelhetnek a gyalogosok[1] (természetesen „derékszögben"). A kiindulási probléma, melyet az



1. ábra

1. §-ban tárgyalunk az, hogy hogyan kell közlekednie annak, aki a legrövidebb idő alatt akar a 8-as pontból az 1-esbe jutni. Ennek kapcsán azt vizsgáljuk, hogy a gyalogosnak érdemes-e igénybe venni a szabad átkelőhelyet. A kérdésre adott válasznál természetesen nem szabad az egyoldalú matematikai eredményre támaszkodni, annál is inkább, mert a döntésnél nem csupán az egyén időnyereségét kell figyelembe venni, hanem a közérdek szempontjait is: a közlekedés biztonságát és zavartalanságát.

Az 1. §-ban tárgyalt problémánál feltételezzük, hogy a gyalogos a szabad átkelőhelyhez érkezésekor még nem látja, hogy mit mutat a jelzőlámpa, illetve ebből nem von le következtetéseket. A 2. §-ban azt mutatjuk meg,

[1] Az itt értelmezett „szabad" átkelés annyiban jelent szabadot, hogy a közlekedők rendőri irányítás nélkül bármikor — ha az úttesten nincs épségüket veszélyeztető közlekedés — áthaladás végett igénybe vehetik ezen a helyen az útszakaszt.

hogy milyen következtetést lehet levonni a célszerű útvonalra és az átlagos időnyereségre akkor, ha a közlekedő látja a jelzőlámpa átkapcsolásait, továbbá ismeri az egyes jelzések időtartamának eloszlását.

1. §

Vezessük be a következő jelöléseket: a, b és c jelölje rendre a piros, zöld és sárga jelzések átlagos időtartamát (a továbbiakban a jelzéseket mindig az út hosszirányában tekintjük, ha nem tüntetünk fel más irányt), t-vel jelöljük a szabad átkelőhelyen történő áthaladás átlagos idejét, t'-vel pedig a jelzőlámpánál történő áthaladás idejét. (A keresztező útszakaszoknál a kijelölt helyeken bármilyen megengedett irányban való áthaladások idejét, számításaink folyamán egyformának tételezzük fel.)

Azokat az időket, amelyeket az úttesten nem áthaladásra vagy várakozásra fordítunk (pl. a 6-ból 4-be jutás idejét) ebben a paragrafusban nullának fogjuk tekinteni, ugyanis az ilyen számításba nem vett idők összege az útvonal bármely megtételi módjánál ugyanakkora, ezek elhagyásával az útvonalak összehasonlítását nem befolyásoljuk. Feltételezzük továbbá a gyalogosok szabályos közlekedését és azt, hogy a zöld jelzésnél elindult gyalogos átéréséig a jelzőlámpát legfeljebb sárgára váltják át.

Először a problémának csak két részletkérdését vizsgáljuk: a 4—1 átkelés A_1 várható idejét, majd a 3—1 átkelés B_1 várható idejét számítjuk ki. Véletlenszerűen érkezve a 4-hez $\frac{a}{a+b+2c}$, $\frac{b}{a+b+2c}$, $\frac{2c}{a+b+2c}$ valószínűségekkel kapunk piros, zöld, illetve sárga jelzéseket. Az egyes esetekben kiszámíthatjuk az átkelés várható idejét, ezeket szorozva a valószínűségekkel és összegezve megkapjuk A_1, ill. B_1 értékét:

$$A_1=\left(\frac{c}{2}+a+c+t'\right)\frac{c}{a+b+2c}+\left(\frac{c}{2}+b+c+t'\right)\frac{c}{a+b+2c}+$$
$$+\left(\frac{a}{2}+c+t'\right)\frac{a}{a+b+2c}+\left(\frac{b}{2}+c+t'\right)\frac{b}{a+b+2c}=$$
$$=\frac{(a+2c)^2}{2(a+b+2c)}+\frac{b^2+4bc+6c^2}{2(a+b+2c)}+t'$$

$$B_1=\left(\frac{c}{2}+t'\right)\frac{c}{a+b+2c}+\left(\frac{c}{2}+a+c+t'\right)\frac{c}{a+b+2c}+$$
$$+\left(\frac{a}{2}+c+t'\right)\frac{a}{a+b+2c}+t'\frac{b}{a+b+2c}=\frac{(a+2c)^2}{2(a+b+2c)}+t'.$$

A kiszámított és rendezett formulákból látható, hogy $A_1>B_1$.

Kérdés, hogy ha a 6-ból az 1-be akarunk jutni, érdemes-e a szabad átkelőt felhasználni. Nyilván csak akkor érdemes, ha $A_1 > B_1 + t$, azaz $t < A_1 - B_1 = \frac{b^2 + 4bc + 6c^2}{2(a+b+2c)}$. Például $a = b$ esetén $c = 0$ közelítéssel számolva $t < \frac{b}{4}$ adódik feltételként. Hogy ez a gyakorlatban teljesül-e, azt a paragrafus végén meg fogjuk vizsgálni.

Ezek után könnyen választ adhatunk a bevezetőben felmerült problémára, vagyis arra a kérdésre, hogyan érdemes közlekedni, ha 8-ból 1-be a legrövidebb időn belül akarunk eljutni? Belátható, hogy mivel $A_1 > B_1$, célszerű elindulni arra, amerre először zöldet kapunk. Ha így 7-be jutunk, további utunk már nem okoz gondot, ugyanis 5-ből 6-ba menni $A_1 > B_1$ miatt nyilván nem érdemes. Ha 8-ból 6-ba jutunk — az előbbi esethez hasonlóan — ott $t \lesseqgtr A_1 - B_1$ alapján kell eldöntenünk az útirányt.

Módosítsuk az előző feladatot úgy, hogy 2*-ból 1*-ba — mint azt az 1. ábra mutatja — egy szabad átkelőhely vezessen. Ekkor a 3—1* áthaladás ideje változatlan, $B_1^* = B_1$, a 4—1* áthaladás ideje azonban megváltozik:

$$A_1^* = \left(\frac{c}{2} + t' + t^*\right)\frac{c}{a+b+2c} + \left(\frac{c}{2} + a + c + t'\right)\frac{c}{a+b+2c} +$$
$$+ \left(\frac{a}{2} + c + t'\right)\frac{a}{a+b+2c} + (t' + t^*)\frac{b}{a+b+2c} =$$
$$= \frac{(a+2c)^2}{2(a+b+2c)} + t' + \frac{b+c}{a+b+2c}t^*,$$

ahol t^* a 2*—1* áthaladás átlagos ideje. Az előzőeket figyelembe véve 8-ból indulva egyetlen probléma, hogy 6-ba érkezve átmenjünk-e 5-be, vagy sem. Érdemes áthaladni, ha

$$t < A_1^* - B_1^* = \frac{b+c}{a+b+2c}t^*.$$

Ez azonban $t = t^*$ esetén lehetetlen, sőt $a = b$ esetén is csak akkor lehetséges, ha $t^* > 2t$. Mivel ez gyakorlatilag nem szokott előfordulni, azt mondjuk, hogy ebben az esetben a 6—5 átjáró használata nem célszerű.

A fentiek után még kézenfekvő megvizsgálni azt az esetet, amikor az útvonal mentén több jelzőlámpás kereszteződés és több szabad átkelő van. Ebben az esetben a számítások azt mutatják, hogy a szabad átkelők közül legfeljebb az utolsót érdemes használni; ha ezután még van jelzőlámpás kereszteződés, akkor csak abban az esetben előnyös a használata, ha $t < A_1 - B_1$.

Gyakorlatban a kérdést a Kossuth Lajos utca Múzeum körúti és a Petőfi Sándor utcai kereszteződésénél vizsgáltuk meg. 40 mérési adat alapján a következő értékeket nyertük:

Múzeum körútnál:

$$a = 66{,}4'' \quad \text{szórása } 20{,}0''$$

$$b = 47{,}3'' \quad \text{szórása } 11{,}6''$$

$$c = 5{,}5'' \quad \text{szórása } 1{,}6''$$

$$A_1 = 37{,}9'' + t'$$

$$B_1 = 24{,}1'' + t'$$

Petőfi Sándor utcánál:

$$a = 40{,}0'' \quad \text{szórása } 9{,}4''$$

$$b = 47{,}1'' \quad \text{szórása } 15{,}0''$$

$$c = 4{,}2'' \quad \text{szórása } 2{,}5''$$

$$A_1 = 28{,}5'' + t'$$

$$B_1 = 12{,}2'' + t'$$

Ugyancsak 40 mérésből meghatároztuk a szabad átkelőhelyen (Puskin mozi előtt) történő áthaladás átlagos idejét: $t = 14{,}9''$.

Az adatok alapján azt mondhatjuk, hogy a Petőfi Sándor utca felől indulva a Múzeum körút túlsó sarkához (8-ból 1-be) nem érdemes az átkelőt igénybe venni, mert $t > A_1 - B_1 = 13{,}8''$. Ellenkező irányban téve meg az utat, a matematikai eredmény ugyan a szabad átkelő használatát javasolja, mert $t < A_1 - B_1 = 16{,}3''$, de meggondolva azt, hogy az időnyereség átlagosan mindössze $1{,}4''$ és ez gyakorlatilag annyira jelentéktelen, hogy ezért nem érdemes a közlekedés biztonságát és zavartalanságát kockáztatni. Ilyen esetben is a jelzőlámpás átkelő használatát javasoljuk.

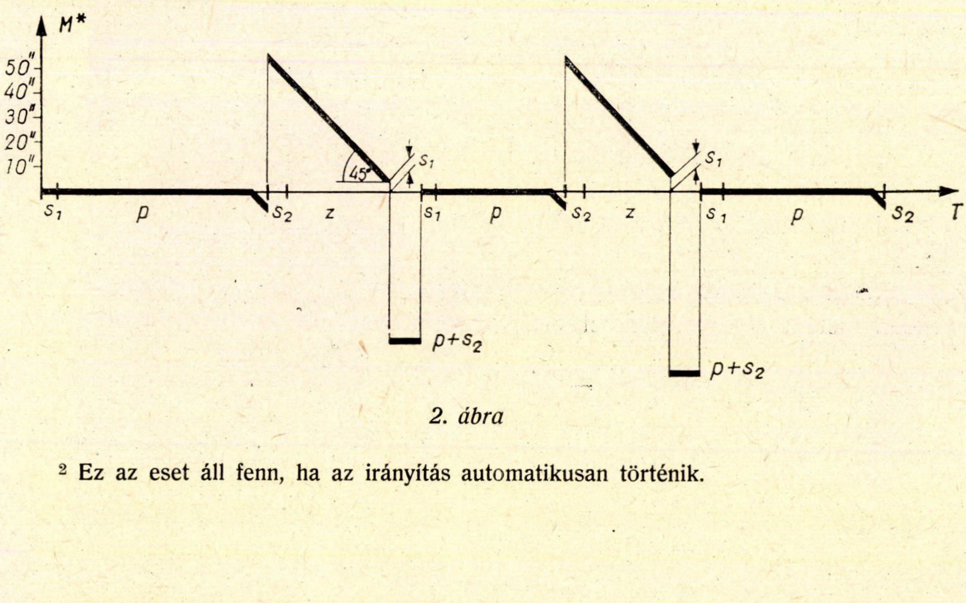
2. §

Ebben a paragrafusban azt fogjuk vizsgálni, hogy a közlekedőnek merre érdemes elindulnia akkor, ha a 6-ba érkezésekor észlelni tudja, hogy mit mutat a jelzőlámpa 4-nél. Egyszerűség kedvéért csak egy esetet tárgyalunk, éspedig azt, amikor 6-ba érkezve a zöld jelzést sárgára kapcsolják át. Tegyük fel, hogy a 6-tól 4-ig terjedő útszakasz megtételéhez T, a 6—5 átkeléshez t idő szükséges. Vizsgáljuk a két számbajöhető útvonal megtételéhez szükséges átlagos idők különbségét.

A tárgyalás megkönnyítése végett tegyük fel, hogy a 6-ból két személy A és B egyszerre indul el úgy, hogy A 4-en át, B pedig 5-ön át jut el 1-be. Tegyük fel továbbá, hogy a jelzőlámpák váltási időtartamait pontosan ismerjük. Jelölje z a zöld, p a piros, s_1 a zöld utáni, s_2 a piros utáni sárga jelzés időtartamát. Az alábbi táblázat mutatja, hogy ha A és B a megadott jelzések esetén érkeznek 4-be, illetve 3-ba, akkor melyik mennyi idővel előbb érkezik 1-be. Az időkülönbségnél m indexszel jeleztük, hogy nem a jelzés teljes időtartamáról van szó, hanem csak arról a részéről, amelyet A-nak 4-be érkezésétől számítunk. Tárgyalásunknál, a gyakorlatnak megfelelően feltételezzük, hogy $t < p$ és $t < z$, ez esetben vizsgálatunk során több eset kizárható, melyet a táblázatban áthúzással jeleztünk. Ha A és B egyszerre érkezik 1-be, akkor időnyereség, illetve veszteség nincs; ezt a táblázatban nullával jelöltük.

$B \backslash A$	s_1	s_2	p	z
s_1	0	×	×	A $p + s_2$
s_2	×	B $z + s_1$	0	×
p	0	×	0	A $p + s_2$
z	×	B $(s_1 + z)_m + s_1 - t$	A $t - p_m - s_2$	B $z_m + s_1 - t$

Az előbbiek alapján a jelzőlámpák váltási időpontjainak pontos ismerete esetén a 2. ábrán látható grafikon azt mutatja meg, hogy ha a 6—4 út megtételéhez T idő szükséges, akkor érdemes-e átmenni, és mennyit nyerünk az átkeléssel.[2] Az abszcisszán a T-t, az ordinátán az időnyereséget ábrázoltuk rögzített t mellett.



2. ábra

[2] Ez az eset áll fenn, ha az irányítás automatikusan történik.

Ha figyelembe vesszük, hogy a váltások időpontjai valószínűségi változók, akkor ez a görbe jelentősen eltorzul. Jelöljük a piros jelzés és az előtte levő sárga jelzés időtartamainak összegét ξ-vel, a zöld jelzés és az előtte levő sárga jelzés időtartamainak t-vel csökkentett összegét η-val. (Feltehetően $\eta > 0$.) Ekkor egy váltási periódus: $\xi+\eta+t=\pi$. Legyenek továbbá a $\xi+\pi_0+\pi_1+\cdots+\pi_k$, $\eta+\pi_0+\pi_1+\cdots+\pi_k$, $\xi+\eta+\pi_0+\pi_1+\cdots+\pi_k$ $(k=0,1,2,\ldots;\ \pi_0=0)$ valószínűségi változók sűrűségfüggvényei rendre $f_k(x)$, $g_k(x)$, $h_k(x)$ eloszlásfüggvényei $F_k(x)$, $G_k(x)$, $H_k(x)$. Ezek ismeretében könnyen kiszámítható a

$$P(\xi+\eta+\pi_0+\pi_1+\cdots+\eta_k<T<\xi+\eta+\pi_0+\pi_1+\cdots+\pi_k+t)=$$
$$=P(T-t<\xi+\eta+\pi_0+\pi_1+\cdots+\pi_k<T)=H_k(T)-H_k(T-t)$$

valószínűség, és így a várható időnyereség kifejezésének negatív előjellel számbajövő tagjai — eltekintve a későbbiekben tárgyalt korrekciótól:

$$K(T)=(a+c)\sum_{k=0}^{\infty}(H_k(T)-H_k(T-t)).$$

A pozitív tagok meghatározásánál elhanyagoltuk azt az esetet, amikor A és B mindketten sárga jelzésnél érkeznek az útkereszteződéshez, mert a mérési eredmények azt mutatják, hogy $s_i<t$ $(i=1,2)$ az esetek túlnyomó többségében. A B-re vonatkozó időnyereség meghatározása végett vegyük figyelembe, hogy

$$P(\xi+\pi_0+\pi_1+\cdots+\pi_k+\alpha\eta<T<\xi+\pi_0+\pi_1+\cdots+\pi_k+(\alpha+\delta)\eta)=$$
$$=\int_0^\infty P(\xi+\pi_0+\pi_1+\cdots+\pi_k+\alpha\eta<T<\xi+\pi_0+\pi_1+\cdots+\pi_k+(\alpha+\delta)\eta\,|\,\eta=y)\cdot$$
$$\cdot g_0(y)\,dy=\int_0^\infty P(T-(\alpha+\delta)y<\xi+\pi_0+\pi_1+\cdots+\pi_k<T-\alpha y)g_0(y)\,dy=$$
$$=\int_0^\infty [F_k(T-\alpha y)-F_k(T-(\alpha+\delta)y)]g_0(y)\,dy\sim\delta\int_0^\infty yf_k(T-\alpha y)g_0(y)\,dy,$$

feltéve, hogy $F_k(x)$ mindenütt differenciálható, és δ elég kicsiny pozitív szám, $(0\leqq\alpha<1)$.

Másrészt η sűrűségfüggvénye $g^*(x)$ a $T=\xi+\pi_0+\pi_1+\cdots+\pi_k+\alpha\eta$ feltétel mellett a Bayes-tétellel kiszámítható:

$$g^*(x)=\frac{xf_k(T-\alpha x)g_0(x)}{\int_0^\infty zf_k(T-\alpha z)g_0(z)dz}.$$

Ennek várható értéke

$$M(\eta\,|\,\xi+\pi_0+\pi_1+\cdots+\pi_k+\alpha\eta=T)=\frac{\int\limits_0^\infty x^2 f_k(T-\alpha x)g_0(x)\,dx}{\int\limits_0^\infty x f_k(T-\alpha x)g_0(x)\,dx}.$$

Mivel a $T=\xi+\pi_0+\pi_1+\cdots+\pi_k+\alpha\eta$ esetén az átkeléssel átlagban $(1-\alpha)\eta+c$ időt nyerünk a másik útvonalhoz képest, így a várható időnyereség pozitív előjeles tagjai a k-adik váltási periódus esetén:

$$L_k(T)=\int\limits_0^1\left[(1-\alpha)\frac{\int\limits_0^\infty x^2 f_k(T-\alpha\eta)g_0(x)\,dx}{\int\limits_0^\infty x f_k(T-\alpha x)g_0(x)\,dx}+c\right]\int\limits_0^\infty x f_k(T-\alpha x)g_0(x)\,dx\,d\alpha=$$

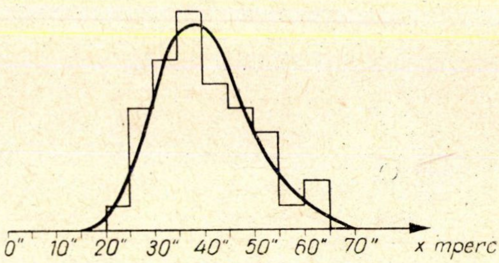
$$=\int\limits_0^1(1-\alpha)\int\limits_0^\infty x^2 f_k(T-\alpha x)g_0(x)\,dx\,d\alpha+c\int\limits_0^1\int\limits_0^\infty x f_k(T-\alpha x)g_0(x)\,dx\,d\alpha.$$

Az

$$L(T)=\sum_{k=0}^{\infty}L_k(T)$$

jelölés mellett a teljes időnyereség tehát

$$M(T)=L(T)-K(T).$$



3. ábra

Az eddigi számításaink során még nem vettük figyelembe a 2. ábrán mutatkozó azon időveszteséget, mely akkor lép fel, ha A 4-hez érkezve piros, B 3-hoz érkezve zöld jelzést kap. Ennek korrigálását $L(T)$ kiszámításához hasonló módon végezhetjük el. Ha $p_k(x)$ jelöli a $\pi_0+\pi_1+\cdots+\pi_k$ sűrűség-függvényét, akkor

$$f^*(x)=\frac{x p_k(T-\alpha x)f_0(x)}{\int\limits_0^\infty z p_k(T-\alpha z)f_0(z)\,dz},$$

ahol $f^*(x)$ a ξ sűrűségfüggvénye a $T=\pi_0+\pi_1+\cdots+\pi_k+\alpha\xi$ feltétel mellett. A sárga jelzés időtartamát jelöljük ζ-val, sűrűségfüggvényét $q(x)$-szel. $f^*(x)$ ismeretében $\varepsilon_k=(1-\alpha)\xi+\zeta$ (ami megfelel annak az időtartamnak, ami A-nak 4-be érkezésétől a legközelebbi zöld jelzésig eltelik) sűrűségfüggvénye könynyen meghatározható.

Ennek alapján kiszámítható a $t-\varepsilon_k$ várható értéke. Ezek után az $L_k^*(T)$ korrekcióra a következő adódik:

$$L_k^*(T)=t\int_0^1\int_0^\infty x p_k(T-\alpha x)f_0(x)\,dx\,d\alpha-$$

$$-\int_0^1\int_0^t\int_0^\infty u x p_k(T-\alpha x)f_0(x)q(u-(1-\alpha)x)\,du\,dx\,d\alpha.$$

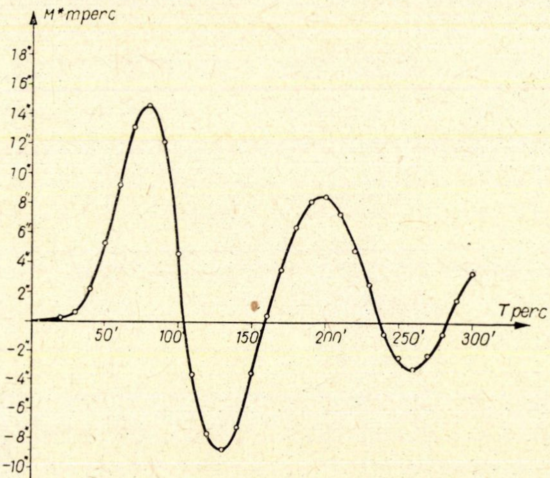
És így a teljes időnyereség az

$$L^*(T)=\sum_{k=0}^{\infty}L_k^*(T)$$

jelölés mellett

$$M^*(T)=L(T)-L^*(T)-K(T).$$

Az 1. §-ban szereplő példára alkalmazva az eredményt, amikor is $t=12''$, kiszámítottuk $M^*(T)$ értékét T függvényeként. A jelzések időtartamának eloszlását Γ-eloszlással közelítettük. A 3. ábrán látható, hogy ez a közelítés elfogadható.



4. ábra

Az így kapott grafikon alapján (4. ábra) az alábbi következtetést vonhatjuk le:

Ha a Petőfi Sándor utca felől közeledünk a Múzeum körút és a Rákóczi út sarkán álló moziműsort hirdető táblához, s ha a Puskin mozi előtti szabad átkelőhelyhez érve azt látjuk, hogy éppen akkor kapcsolják át a zöld jelzést sárgára, akkor, mivel $T\sim 54''$ csak az időnyereséget tekintve, érdemes a szabad átkelőt igénybe venni. Ekkor ugyanis az átlagos időnyereség kb. 6″. Mint látható — a kezdeti szakasztól eltekintve — a görbe a csillapított rezgőmozgást ábrázoló görbéhez hasonlít, amely az $M = 1{,}8''$ értékhez aszimptotikusan közeledik.

Nyilvánvaló, hogy e dolgozatban tárgyalt problémák még többféle szempontból általánosíthatók. Pl. T is tekinthető valószínűségi változónak. Más esetben a közlekedő a szabad átkelésnél figyelembe veheti, hogy az úttesten várakozással vagy anélkül juthat-e át stb. Ezekkel a vizsgálatokkal azonban itt nem foglalkozunk.

(Beérkezett: 1961. I. 17.)

NÉHÁNY MEGJEGYZÉS BIRKHOFF 111. PROBLÉMÁJÁRÓL

Írta: RÉVÉSZ PÁL

Bevezetés

Egy $A=\{a_{ik}\}_{i,k=1}^{n}$ matrixot duplán sztochasztikusnak nevezünk akkor, ha

$$a_{ik}\geqq 0 \qquad (i=1,2,\ldots,n;\ k=1,2,\ldots,n)$$

és

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ik}=1 \qquad (k=1,2,\ldots,n); \qquad \sum_{k=1}^{n} a_{ik}=1 \qquad (i=1,2,\ldots,n).$$

Egy $P=\{p_{ik}\}_{i,k=1}^{n}$ duplán sztochasztikus matrixot permutáció matrixnak nevezünk, ha elemei között csak a 0 és 1 számok fordulnak elő. Könnyen látható, hogy az $n\times n$-es permutáció matrixok száma $n!$

BIRKHOFF [1] dolgozatában bebizonyította a következő tételt.

1. TÉTEL: *Legyen $A=\{a_{ik}\}_{i,k=1}^{n}$ egy duplán sztochasztikus matrix és jelölje $P_1, P_2, \ldots, P_{n!}$ az $n\times n$-es permutáció matrixok sorozatát. Ekkor található a nem negatív valós számoknak egy $c_1, c_2, \ldots, c_{n!}$ sorozata úgy, hogy*

$$A=\sum_{k=1}^{n!} c_k P_k \quad \text{és} \quad \sum_{k=1}^{n!} c_k=1.$$

BIRKHOFF [2] könyvében felveti azt a kérdést, hogy mi módon általánosítható az 1. tétel végtelen matrixokra.

Minthogy e problémával már eddig is több cikk foglalkozott, amelyeknek során nagyszámú megoldatlan probléma vetődött fel és a matematikának több különböző ága került felhasználásra, indokolt e kérdéssel egy összefoglaló cikkben foglalkozni.

Jelen dolgozat az 1. §-ban a véges, a 2. §-ban a végtelen esetet tárgyalja.

1. §. A véges eset

Az 1. tételnek több bizonyítása ismeretes, most egy gráfelméleti eszközöket használó bizonyítást adunk. Elöljáróban ismertetjük a szükséges gráfelméleti fogalmakat és eredményeket, továbbá a lineáris algebra egy jól ismert tételét, amelyre a továbbiakban szükségünk lesz.

1. definíció. Egy $2n$ szögpontú G gráfot páros körüljárásúnak nevezünk, ha megadható a szögpontoknak két diszjunkt, egyenként n szögpontot tartalmazó V, illetve V' halmaza úgy, hogy $\mathcal{G}$ minden éle V-nek egy pontját V'-nek egy pontjával köti össze (de nincs $\mathcal{G}$-nek olyan éle, amely V két pontját, illetve V' két pontját kötné össze).

A páros körüljárású gráfokra vonatkozik a következő

2. TÉTEL [3]: *Legyen $\mathcal{G}$ egy $2n$ szögpontú páros körüljárású gráf. A V és V' halmazokat definiáljuk az 1. definícióban leírt módon. Tegyük fel, hogy V bármely l $(l=1,2,\ldots,n)$ szögpontja össze van kötve V'-nek legalább l szögpontjával. Ekkor található $\mathcal{G}$-nek n éle, úgy, hogy ezek segítségével V minden egyes pontja össze van kötve V'-nek egy és csak egy pontjával.*

Ezen tételt a következő formában is szokták kimondani:

2a. TÉTEL. *Tekintsünk egy n fiúból és n lányból álló társaságot. Tegyük fel, hogy ezen társaságon belül bármely l $(l=1,2,\ldots)$ fiú összesen legalább l lányt ismer. Ekkor minden fiú meg tud nősülni úgy, hogy egy olyan lányt vesz feleségül, akit ismer.*

Fenti átfogalmazás miatt szokták ezt a kérdéskört házassági problémának is nevezni.

Megemlítjük a 2. tétel *végtelen* gráfokra vonatkozó megfelelőjét.

3. TÉTEL [4]. *Legyen $V=\{a_i\}$ $i\in M$ és $V'=\{a'_i\}$ $i\in M'$ két tetszőleges halmaz. (Az M és M' index halmazokról nem teszünk fel semmit.) A $\mathcal{G}$ páros körüljárású gráfot oly módon konstruáljuk, hogy V bizonyos szögpontjait összekötjük V' bizonyos szögpontjaival. Tegyük fel, hogy V minden szögpontja V'-nek csak véges sok szögpontjával van összekötve, V'-nek minden szögpontja V-nek csak véges sok pontjával van összekötve, továbbá V-nek bármely l $(l=1,2,\ldots)$ pontja V'-nek legalább l pontjával van összekötve és V'-nek bármely l pontja V-nek legalább l pontjával van összekötve. Ekkor található V-nek egy V'-re való kölcsönösen egyértelmű leképzése úgy, hogy az egymásnak megfeleltetett pontok $\mathcal{G}$-ben éllel vannak összekötve.*

Rátérünk a szükséges lineáris algebrai fogalmakra.

2. definíció. Legyen E az n-dimenziós euklidesi tér egy halmaza, legyen $\mathbf{x}\in E$, azt mondjuk, hogy $\mathbf{x}$ E-nek extremális pontja, ha nem található E-nek két különböző $\mathbf{x}_1$ és $\mathbf{x}_2$ pontja úgy, hogy

$$\mathbf{x}=\lambda_1\mathbf{x}_1+\lambda_2\mathbf{x}_2,$$

ahol λ_1 és λ_2 pozitív valós számok és $\lambda_1+\lambda_2=1$.

3. definíció. Az n dimenziós tér egy konvex, korlátos, zárt halmazát poliédernek nevezzük, ha csak véges sok extremális pontja van.

Jól ismert a következő egyszerű

4. TÉTEL. *Legyen E az n dimenziós térben egy konvex poliéder. E extremális pontjai legyenek az $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m$ pontok. Ekkor minden $\mathbf{x} \in E$ ponthoz található a nem negatív valós számoknak egy $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ sorozata úgy, hogy*

$$\mathbf{x} = \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 + \cdots + \lambda_m \mathbf{x}_m .$$

Mielőtt rátérnénk az 1. tétel bizonyítására, a következő két lemmát bizonyítjuk be.

1. LEMMA. *Legyen $A = \{a_{ik}\}_{i,k=1}^{n}$ egy duplán sztochasztikus matrix. Ezen matrix nem tartalmazhat egy l sort és j oszlopot tartalmazó azonosan 0 B minort, ha $n-j<l$, azaz bármely l $(l=1,2,\ldots,n)$ sorhoz található l oszlop úgy, hogy az ezek által meghatározott minor minden oszlopában van pozitív elem.*

BIZONYÍTÁS. Tegyük fel, hogy A tartalmaz egy ilyen B minort. Jelöljük C-vel A azon minorát, amely A ugyanazon sorait tartalmazza, mint B és az összes olyan oszlopot, amelyet B nem tartalmaz:

$$A=\begin{array}{rc} & \begin{array}{cc} \quad n-j \quad & \qquad j \qquad \end{array} \\ \begin{array}{r} l\left\{\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right. \\ n-l\left\{\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right. \end{array} & \left(\begin{array}{c|cccc} & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ C & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ & & & B & \\ & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ \hline \cdots\cdots & & & \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ \cdots\cdots & & & \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ & & & & \\ \cdots\cdots & & & \cdots\cdots\cdots\cdots & \end{array}\right) \end{array}$$

Számítsuk ki C elemeinek összegét: mivel A minden egyes sorában az elemek összege 1, kell, hogy C elemeinek összege pontosan l legyen, másrészt A minden egyes oszlopában az elemek összege 1, így C elemeinek összege legfeljebb $n-j<l$. Ellentmondásra jutván, lemmánkat bebizonyítottuk.

2. LEMMA. *Legyen $A = \{A_{ik}\}_{i,k=1}^{n}$ egy duplán sztochasztikus matrix. Ekkor létezik az $1, 2, \ldots, n$ egész számoknak egy $k_1, k_2, \ldots, k_n$ permutációja úgy, hogy $a_{ik_i} > 0$ $(i=1,2,\ldots,n)$.*

BIZONYÍTÁS. Konstruáljuk meg a $\mathcal{G}$ páros körüljárású gráfot a következő módon. Legyen $\mathcal{G}$ szögpontjainak halmaza a $V=\{1,2,\ldots,n\}$ és $V'= =\{1',2',\ldots,n'\}$ halmazok egyesítése; V i pontját összekötjük V' k' pontjával, ha $a_{ik}>0$. Az 1. lemmából egyszerűen következik, hogy az így kapott $\mathcal{G}$ gráf rendelkezik a 2. tétel feltételében leírt tulajdonsággal és így a 2. tételből jelen lemmánk könnyen következik.

Ezután rátérünk az 1. tétel bizonyítására.

AZ 1. TÉTEL BIZONYÍTÁSA. A $B=\{b_{ik}\}_{i,k=1}^{n}$ $n\times n$-es matrixok terében definiáljunk normát a következőképpen:

$$\|B\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}b_{ik}^{2}}.$$

A norma ezen definíciója mellett az $n\times n$-es matrixok egy n^2 dimenziós euklidesi teret alkotnak. Könnyen látható, hogy ezen térben a duplán sztochasztikus matrixok egy konvex, korlátos, zárt halmazt alkotnak. Nyilvánvaló az is, hogy a permutáció matrixok e halmaz extremális pontjai. Megmutatjuk, hogy e halmaznak nincs más extremális pontja, vagyis, hogy ha A egy duplán sztochasztikus matrix, amely nem permutáció matrix, akkor található két különböző duplán sztochasztikus matrix A_1 és A_2 és két pozitív valós szám λ_1 és λ_2 úgy, hogy

$$A=\lambda_1A_1+\lambda_2A_2 \quad \text{és} \quad \lambda_1+\lambda_2=1. \tag{1}$$

Legyen $k_1, k_2, \ldots, k_n$ az $1, 2, \ldots, n$ számoknak egy olyan permutációja, amelyre $a_{ik_i}>0$ $(i=1,2,\ldots,n)$ és az $\varepsilon>0$ számot válasszuk meg úgy, hogy $a_{ik_i}>\varepsilon$ $(i=1,2,\ldots,n)$ legyen. Definiáljuk továbbá az A_1, A_2 matrixokat és a λ_1, λ_2 számokat a következő módon

$$A_1=\{a_{ik}^{(1)}\}_{i,k=1}^{n} \qquad a_{ik}^{(1)}=\begin{cases}\dfrac{a_{ik}-\varepsilon}{1-\varepsilon} & \text{ha} \quad k=k_i\\[2mm] \dfrac{a_{ik}}{1-\varepsilon} & \text{ha} \quad k\neq k_i\end{cases}$$

$$A_2=\{a_{ik}^{(2)}\}_{i,k=1}^{n} \qquad a_{ik}^{(2)}=\begin{cases}\dfrac{a_{ik}+\varepsilon}{1+\varepsilon} & \text{ha} \quad k=k_i\\[2mm] \dfrac{a_{ik}}{1+\varepsilon} & \text{ha} \quad k\neq k_i\end{cases}$$

$$\lambda_1=\frac{1-\varepsilon}{2}, \qquad \lambda_2=\frac{1+\varepsilon}{2}$$

Könnyen látható, hogy (1) teljesül. Így jelen tételünk következik a 4. tételből.

Megemlítjük a Birkhoff-tétel következő triviális átfogalmazásait.

1a. TÉTEL. *Az $n\times n$-es duplán sztochasztikus matrixok halmaza az n^2 dimenziós euklidesi térben megegyezik a permutáció matrixok halmazának konvex burkával.*

1b. TÉTEL. *Jelöljük az $n\times n$-es permutáció matrixok halmazát Ω-val és jelentse $\Omega_{ik}\subset\Omega$ azon permutáció matrixok halmazát, amelyek i-ik sorának* *k-ik eleme* 1. *Legyen* $A = \{a_{ik}\}_{i,k=1}^{n}$ *egy tetszőleges duplán sztochasztikus matrix. Ekkor definiálható az* Ω *térben egy* **P** *valószínűségi mérték úgy, hogy*

$$\mathbf{P}(\Omega_{ik}) = a_{ik}.$$

1c. TÉTEL. *Tekintsük az* n^2 *dimenziós euklidesi tér azon*

$$(x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n}, x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2n}, \ldots, x_{n1}, x_{n2}, \ldots, x_{nn})$$

pontjainak E halmazát, amelyekre

$$\begin{gathered} x_{11} + x_{12} + \cdots + x_{1n} = 1 \\ x_{21} + x_{22} + \cdots + x_{2n} = 1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{n1} + x_{n2} + \cdots + x_{nn} = 1 \\ \frac{1}{n} x_{11} + \frac{1}{n} x_{21} + \cdots + \frac{1}{n} x_{n1} = \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} x_{12} + \frac{1}{n} x_{22} + \cdots + \frac{1}{n} x_{n2} = \frac{1}{n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{1}{n} x_{1n} + \frac{1}{n} x_{2n} + \cdots + \frac{1}{n} x_{nn} = \frac{1}{n} \end{gathered}$$

és

$$x_{ik} \geqq 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n;\ k = 1, 2, \ldots, n).$$

Ezen E halmaz egy n! extremális ponttal rendelkező poliéder.

1d. TÉTEL. *Legyen* $A = \{a_{ik}\}_{i,k=1}^{n}$ *egy tetszőleges* $n \times n$*-es duplán sztochasztikus matrix, az* $n \times n$*-es permutáció matrixok sorozata legyen* $P_1, P_2, \ldots, P_{n!}$. *Ekkor a*

$$x_1 P_1 + x_2 P_2 + \cdots + x_{n!} P_{n!} = A \tag{2}$$

$n!$ *ismeretlent és* n^2 *egyenletet tartalmazó lineáris egyenletrendszernek van egy nemnegatív megoldásrendszere.*

Fentiekkel kapcsolatban megemlítünk néhány megoldatlan problémát.

A 2. lemma szerint, ha $A = \{a_{ik}\}_{i,k=1}^{n}$ egy duplán sztochasztikus matrix, akkor

$$\Sigma a_{1k_1} a_{2k_2} \ldots a_{nk_n} > 0,$$

ahol az összegezés kiterjesztendő az $1, 2, \ldots, n$ számok összes $k_1, k_2, \ldots, k_n$ permutációjára.

1. probléma. VAN DER WAERDEN mondta ki a következő sejtést:

$$\Sigma a_{1k_1} a_{2k_2} \ldots a_{nk_n} \geqq \frac{n!}{n^n}, \tag{3}$$

ahol az összegezés kiterjesztendő az $1, 2, \ldots, n$ számok összes $k_1, k_2, \ldots, k_n$

permutációjára. (Könnyen látható, hogy abban az esetben, ha $a_{ik}=\frac{1}{n}$ $(i, k=1, 2, \ldots, n)$, akkor (3)-ban az egyenlőség jel érvényes.)

Tekintetbe véve, hogy ezen probléma megoldása igen nehéznek látszik, ERDŐS PÁL javasolta a következő egyszerűbb kérdés vizsgálatát:

2. probléma. Létezik-e az $1, 2, \ldots, n$ egész számoknak olyan $k_1, k_2, \ldots, k_n$ permutációja, amelyre

$$a_{1k_1}a_{2k_2}\ldots a_{nk_n} \geqq \frac{1}{n^n}.$$

Mivel ezen egyszerűbb kérdésre sem ismeretes a válasz, ERDŐS PÁL javasolta annak vizsgálatát, hogy létezik-e olyan $k_1, k_2, \ldots, k_n$ permutációja az $1, 2, \ldots, n$ egész számoknak, amelyre

$$a_{1k_1}a_{2k_2}\ldots a_{nk_n} > 0$$

és

$$a_{1k_1}+a_{2k_2}+\cdots+a_{nk_n} \geqq 1.$$

Könnyen látható (felhasználva a számtani és geometriai közép közötti egyenlőtlenséget), hogy ha az előzőleg említett kérdésre igenlő válasz adható, akkor ebből következik, hogy ezen utóbbi kérdésre is igenlő válasz adható. MARCUS és REE [5] bebizonyították ezen utóbbi sejtés helyes voltát.

Az 1c. tétellel kapcsolatban megemlítjük a következő problémát.

3. probléma. Legyen $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$ egy valószínűség eloszlás. Tekintsük az n^2 dimenziós euklidesi tér azon

$$(x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n}, x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2n}, \ldots, x_{n1}, x_{n2}, \ldots, x_{nn})$$

pontjainak E halmazát, amelyekre

$$\begin{gathered}
x_{11}+x_{12}+\cdots+x_{1n}=1\\
x_{21}+x_{22}+\cdots+x_{2n}=1\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
x_{n1}+x_{n2}+\cdots+x_{nn}=1\\
\lambda_1 x_{11}+\lambda_2 x_{21}+\cdots+\lambda_n x_{n1}=\lambda_1\\
\lambda_1 x_{12}+\lambda_2 x_{22}+\cdots+\lambda_n x_{n2}=\lambda_2\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\lambda_1 x_{1n}+\lambda_2 x_{2n}+\cdots+\lambda_n x_{nn}=\lambda_n
\end{gathered}$$

és

$$x_{ik} \geqq 0 \qquad (i=1, 2, \ldots, k;\ k=1, 2, \ldots, n).$$

Mit mondhatunk az E halmaz extremális pontjairól?

A következő probléma az 1d. tétellel kapcsolatos. A lineáris programozásban alapvető szerepet játszik az úgynevezett szállítási probléma. Ez a következőképpen fogalmazható meg.

Jelentsen $A_1, A_2, \ldots, A_n$ n „telephelyet" és $B_1, B_2, \ldots, B_m$ m „felvevőhelyet". Tegyük fel, hogy a telephelyeken rendelkezésünkre áll rendre $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ árumennyiség és a felvevőhelyek $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ árumennyiséget igényelnek. Feltesszük továbbá, hogy

$$\alpha_i \geqq 0 \quad (i=1,2,\ldots,n) \qquad \beta_j \geqq 0 \quad (j=1,2,\ldots,m)$$

és

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \sum_{j=1}^{m} \beta_j .$$

Jelentse továbbá c_{ik} egy egységnyi árunak a szállítási költségét A_i-ből B_k-ba. Feladat: megtervezni a szállítást úgy, hogy a felmerülő költség minimális legyen, másszóval keresendő a

$$\sum_{k=1}^{m} x_{ik} = \alpha_i$$

(4)

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ik} = \beta_k$$

egyenletrendszernek egy nem negatív megoldásrendszere, amely mellett

$$\sum_{i,k} c_{ik} x_{ik}$$

minimális. Nyilvánvaló, hogy a (4) egyenletrendszernek mindig van nem negatív megoldásrendszere. Előfordulhat azonban, hogy bizonyos telephelyekről bizonyos felvevőhelyekre való szállítás megoldhatatlan, azaz kikötjük, hogy bizonyos x_{ik}-k értéke 0 legyen. Ekkor a probléma általában már megoldhatatlan. Érdekes kérdés, hogy milyen további feltételek mellett található a (4) egyenletrendszernek nem negatív megoldásrendszere, ebben az esetben. Ezen kérdés egy speciális esetére választ ad az 1d. tétel.

Tegyük fel, hogy a telephelyek és felvevőhelyek száma egyenlő, azaz $n=m$, tegyük fel továbbá, hogy az i-edik telephelyről az i-edik felvevőhelyre nem szállíthatunk, azaz $x_{ii}=0$ $(i=1,2,\ldots,n)$. Ekkor a megoldhatóságnak nyilván szükséges feltétele, hogy

(5) $$\beta_i \leqq \sum_{k \neq i} \alpha_k \qquad (i=1,2,\ldots,n)$$

legyen. Az 1d. tételből könnyen leolvasható, hogy ezen feltétel elégséges is. Tegyük fel az egyszerűség kedvéért, hogy

$$\sum_{i} \beta_i = \sum_{k} \alpha_k = 1$$

és konstruáljunk egy $n \times n$-es duplán sztochasztikus matrixot, amelynek első sora az $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, a második sora a $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ számokat tartalmazza. Az (5) feltétel biztosítja, hogy ilyen matrix valóban konstruálható. Tekintsük a (2) egyenletrendszer első $2n$ egyenletét, vagyis azokat, amelyeknek jobb oldalán az $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, illetve $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ számok állnak. Az 1d. tétel biztosítja, hogy ezen $2n$ egyenletnek van nem negatív megoldásrendszere. Ebből könnyen leolvasható, hogy az (5) feltétel valóban elégséges.

A véges BIRKHOFF-tétellel foglalkozik a [6] dolgozat is.

2. §. A végtelen dimenziós eset

Mindenekelőtt a 2. lemma végtelen dimenziós analogonját bizonyítjuk be.

4. definíció. Egy $A = \{a_{ik}\}_{i,k=1}^{\infty}$ matrixot duplán sztochasztikusnak nevezünk, ha

$$a_{ik} \geqq 0 \qquad (i, k = 1, 2, \ldots)$$

és

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_{ik} = 1 \quad (k = 1, 2, \ldots); \qquad \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} = 1 \quad (i = 1, 2, \ldots)$$

3. LEMMA. *Legyen $A = \{a_{ik}\}_{i,k=1}^{\infty}$ egy végtelen duplán sztochasztikus matrix. Ekkor létezik a természetes számoknak egy $k_1, k_2, \ldots$ permutációja úgy, hogy $a_{ik_i} > 0$ $(i = 1, 2, \ldots)$.*

Bizonyítás:[1] Tekintsük az

$$A_1 = \{a_{ik}^{(1)}\}_{i,k=1}^{\infty} = \left\{ \begin{array}{llllllll} a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & \ldots, & a_{1n_1}, & 0, & 0, & \ldots \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23}, & \ldots\ldots\ldots, & a_{2n_2}, & 0, & 0, & \ldots \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33}, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & a_{3n_3}, & 0, & 0, & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & & & \\ a_{m_1 1} & \cdot & \cdot & & & & & \\ 0 & a_{m_2 2} & \cdot & & & & & \\ 0 & 0 & a_{m_3 3} & & & & & \\ \cdot & 0 & 0 & & & & & \\ \cdot & \cdot & 0 & & & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & & & \end{array} \right\}$$

azaz

$$a_{ik}^{(1)} = \begin{cases} a_{ik}, & \text{ha} \quad k \leqq n_i \quad \text{és} \quad i \leqq m_k \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

matrixot, ahol az $n_1, n_2, \ldots$ és $m_1, m_2, \ldots$ számokat úgy választjuk, hogy

$$\sum_{k=n_i+1}^{\infty} a_{ik} \leqq \frac{1}{2^{i+3}} \quad (i = 1, 2, \ldots); \qquad \sum_{i=m_k+1}^{\infty} a_{ik} \leqq \frac{1}{2^{k+3}} \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

[1] Ez a bizonyítás HAJNAL ANDRÁStól származik.

Konstruáljuk meg a $\mathcal{G}$ páros körüljárású gráfot a következő módon: Legyen $\mathcal{G}$ szögpontjainak halmaza a $V=\{1,2,\ldots\}$ és a $V'=\{1',2',\ldots\}$ halmazok egyesítése; V i pontját összekötjük V' k' pontjával, ha $a_{ik}^{(1)}>0$. Könnyen látható, hogy az így kapott gráf rendelkezik a 3. tétel feltételében leírt tulajdonsággal és így a 3. tételből jelen lemmánk könnyen következik.

Természetesen vetődik fel az a kérdés, hogy vajon a Marcus—Ree-tétel végtelen megfelelője is érvényes-e. A válasz tagadó, sőt megmutatjuk, hogy tetszőleges $\varepsilon>0$-hoz konstruálható olyan $A=\{a_{ik}\}_{i,k=1}^{\infty}$ duplán sztochasztikus matrix, hogy a pozitív egész számoknak bármely $k_1, k_2, \ldots$ permutációjára

$$a_{1k_1}+a_{2k_2}+\cdots+a_{nk_n}+\cdots\leqq\varepsilon.$$

Tekintsük pl. a következő matrixot[2]

$$A=\{a_{ik}\}=\begin{pmatrix}
1/8 & 1/8 & 1/8 & 1/8 & 1/8 & 1/8 & 1/8 & 1/8 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\
1/8 & 1/16 & 1/16 & 1/16 & 1/16 & 1/16 & 1/16 & 1/16 & 1/16 & 1/16 & 1/16 & 1/16 & 1/16 & 1/16 & 1/16 & 0 & 0 & \ldots \\
1/8 & 1/16 & 1/32 & 1/32 & 1/32 & 1/32 & 1/32 & \cdot & \cdot & \cdot \\
1/8 & 1/16 & 1/32 & 1/64 & 1/64 & 1/64 & 1/64 & \cdot & \cdot & \cdot \\
1/8 & 1/16 & 1/32 & 1/64 \\
1/8 & 1/16 & 1/32 & 1/64 \\
1/8 & 1/16 & 1/32 & 1/64 \\
1/8 & 1/16 & 1/32 & 1/64 \\
0 & 1/16 & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 1/16 & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & 1/16 & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & 1/16 \\
 & 1/16 \\
 & 1/16 \\
 & 1/16 \\
 & 0 \\
 & 0 \\
 & \vdots
\end{pmatrix}$$

Könnyen látható, hogy a pozitív egész számoknak bármely $k_1, k_2, \ldots$ permutációjára

$$a_{1k_1}+a_{2k_2}+\cdots\leqq 2(1/8+1/16+1/32+\cdots)=\frac{1}{2}=\varepsilon.$$

Hasonlóan végezhető el a konstrukció bármely más ε-ra is.

Ezekután rátérünk a Birkhoff-tétel végtelen dimenziós általánosításainak tárgyalására.

[2] Ez a példa HAJNAL ANDRÁStól származik.

5. definíció. Egy

$$A=\begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \dots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \dots, & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}, & a_{m2}, & \dots, & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad (m \leqq n)$$

matrixot (n és m lehet véges vagy végtelen, de $m \leqq n$) gyengén duplán sztochasztikusnak nevezzük, ha

$$a_{ik} \geqq 0 \qquad (i=1,2,\dots,m;\ k=1,2,\dots,n)$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}=1 \quad (i=1,2,\dots,m); \qquad \sum_{i=1}^{m} a_{ik} \leqq 1 \quad (k=1,2,\dots,n).$$

6. definíció. Egy P duplán sztochasztikus matrixot permutáció matrixnak nevezünk, ha elemei közt csak a 0 és 1 számok fordulnak elő.

7. definíció. Egy P gyengén duplán sztochasztikus matrixot kvázi permutáció matrixnak nevezünk, ha elemei közt csak a 0 és 1 számok fordulnak elő.

A $\infty \times \infty$-es permutáció matrixok halmazát Ω-val, a $\infty \times \infty$-es kvázi permutáció matrixok halmazát Ω^*-gal fogjuk jelölni. Jelentse $\Omega_{ik} \subset \Omega$ azon permutáció matrixok halmazát, amelyek i-edik sorának k-adik eleme 1, hasonló módon Ω^*_{ik}-gal fogjuk jelölni azon kvázi permutáció matrixok halmazát, amelyek i-edik sorának k-adik eleme 1.

Könnyen látható, hogy Ω egy kontinuum számosságú halmaz.

A Birkhoff-tétel legtermészetesebb végtelen dimenziós általánosítása a következő lenne: legyen A egy végtelen duplán sztochasztikus matrix, ekkor található a permutáció matrixoknak egy $P_1, P_2, \dots$ sorozata és a nem negatív valós számoknak egy $c_1, c_2, \dots$ sorozata úgy, hogy

$$A=\sum_{i=1}^{\infty} c_i P_i. \tag{6}$$

Sajnos azonban ez nem igaz. Legyen például

$$A=\begin{pmatrix}
1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & \cdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & \cdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & \cdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & \cdots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{pmatrix}$$

Könnyen látható, hogy A nem állítható elő a (6) alakban, ugyanis ha ε tetszőleges pozitív szám és P tetszőleges permutáció matrix, akkor az εP matrix tartalmaz olyan elemet, amely nagyobb, mint az A matrix megfelelő eleme.

Ezért az 1. tételt más módon próbáljuk végtelen matrixokra általánosítani. Az általánosítások megtalálásában segítségünkre lesz az 1a. és 1b. tétel.

Foglalkozzunk először az 1a. tétel általánosításával. Azaz vizsgáljuk meg, hogy lehet-e a végtelen matrixok terében egy topológiát bevezetni úgy, hogy ezen topológia mellett igaz legyen, hogy a duplán sztochasztikus matrixok halmaza a permutáció matrixok halmazának konvex, zárt burka.

PECK és RATTRAY [7] a végtelen matrixok terében bevezettek egy topológiát, amelyet a következő módon jellemezhetünk: azt mondjuk, hogy az $A_n = \{a_{ik}^{(n)}\}_{i,k=1}^{\infty}$ matrixsorozat konvergál a 0 matrixhoz, ha

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{ik}^{(n)}| = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

Bebizonyították, hogy az így kapott topológia mellett igaz az, hogy a duplán sztochasztikus matrixok halmaza a permutáció matrixok halmazának konvex, zárt burka. Az előző bekezdésben említett kérdéskörrel foglalkozik a [8] és [9] dolgozat is.

Egy további eredményt tartalmaz PECK [10] dolgozata. Ebben a következő fogalmakat vezeti be.

8. definíció. Legyen X a számegyenes nem negatív fele. Az $X \times X$ téren értelmezett μ mértéket duplán sztochasztikusnak nevezzük, ha

$$\mu(X \times E) = \mu(E \times X) = \lambda(E),$$

ahol E tetszőleges Borel-halmaz, λ pedig a Lebesgue-mérték.

9. definíció. Az $S \subset X \times X$ Borel-halmazt a μ mérték magjának nevezzük, ha

$$\mu(X \times X - S) = 0.$$

10. definíció. A π duplán sztochasztikus mértéket permutáció mértéknek hívjuk, ha létezik olyan S magja, amely minden $x = a$ $(0 \leqq a < \infty)$ és $y = b$ $(0 \leqq b < \infty)$ egyenesnek egy és csak egy pontját tartalmazza.

PECK [10]-ben megmutatja továbbá, hogy bevezethető az $X \times X$ téren értelmezett σ-additív halmazfüggvények terében egy topológia úgy, hogy ezen topológiára nézve a duplán sztochasztikus mértékek halmaza a permutáció mértékek halmazának konvex, zárt burka.

Megemlítjük, hogy könnyen konstruálható egy olyan fogalom, amely tartalmazza a duplán sztochasztikus mértékek és a duplán sztochasztikus matrixok fogalmát. Nevezetesen, megkapjuk ezt az új fogalmat, ha a 8., 9. és 10. definíciókban az X teret egy topologikus csoporttal, a λ mértéket pedig az X téren értelmezett Haar-mértékkel helyettesítjük. Érdekes lenne a Peck-tételt általánosítani erre az esetre.

Az 1. tétel más lehetséges általánosításaihoz az 1b. tétel mutat utat. Nevezetesen bebizonyítható a következő két tétel [11].

5. TÉTEL. *Legyen* $A=\{a_{ik}\}_{i,k=1}^{\infty}$ *egy gyengén duplán sztochasztikus matrix. Ekkor definiálható a kvázi permutáció matrixok* Ω^* *tere részhalmazainak egy* $\mathfrak{S}^*$ σ*-algebrája és egy, az* $\mathfrak{S}^*$*-on értelmezett* $\mathbf{P}^*$ *valószínűségi mérték úgy, hogy*

$$\Omega^*_{ik}\in\mathfrak{S}^* \quad (i,k=1,2,\ldots) \quad \textit{és} \quad \mathbf{P}^*(\Omega^*_{ik})=a_{ik}.$$

6. TÉTEL. *Legyen* $A=\{a_{ik}\}_{i,k=1}^{\infty}$ *egy duplán sztochasztikus matrix. Ekkor definiálható a permutáció matrixok* Ω *tere részhalmazainak egy* $\mathfrak{S}$ σ*-algebrája és egy* $\mathfrak{S}$*-n értelmezett* $\mathbf{P}$ *valószínűségi mérték úgy, hogy*

$$\Omega_{ik}\in\mathfrak{S} \quad (i,k=1,2,\ldots) \quad \text{és} \quad \mathbf{P}(\Omega_{ik})=a_{ik}.$$

Megemlítjük ezen tételnek néhány következményét. Legyen $\mathbf{x}=(x_1,x_2,\ldots)\in \in l^2$. Az $\mathbf{x}$ vektor i-ik koordinátáját jelöljük $x_i=\mathbf{x}|_i$-vel. Nyilvánvaló, hogy minden A duplán sztochasztikus matrix tekinthető az l^2 téren értelmezett lineáris operátornak.

1. KOROLLÁRIUM. Legyen $A=\{a_{ik}\}_{i,k=1}^{\infty}$ egy duplán sztohasztikus matrix. Ekkor definiálható az Ω téren egy $\mathbf{P}$ valószínűségi mérték úgy, hogy minden $\mathbf{x}\in l^2$-re

$$A\mathbf{x}|_i=\int_{P\in\Omega} P\mathbf{x}|_i d\mathbf{P}.$$

2. KOROLLÁRIUM. Legyen A egy gyengén duplán sztochasztikus matrix. Ekkor definiálható az Ω^* téren egy $\mathbf{P}^*$ valószínűségi mérték úgy, hogy minden $\mathbf{x}\in l^2$-re

$$A\mathbf{x}|_i=\int_{P\in\Omega^*} P\mathbf{x}|_i d\mathbf{P}^*.$$

3. KOROLLÁRIUM. Legyen A egy duplán sztochasztikus (illetve gyengén duplán sztochasztikus) matrix. Ekkor definiálható az Ω (illetve Ω^*) téren egy $\mathbf{P}$ (illetve $\mathbf{P}^*$) valószínűségi mérték úgy, hogy

$$A^k\mathbf{x}|_i=\int_{P_k\in\Omega_k}\cdots\int_{P_1\in\Omega_1} P_1P_2\ldots P_k d(\mathbf{P}_1\times\mathbf{P}_2\times\cdots\times\mathbf{P}_k),$$

illetve

$$A^k\mathbf{x}|_i=\int_{P_k\in\Omega^*_k}\cdots\int_{P_1\in\Omega^*_1} P_1P_2\ldots P_k d(\mathbf{P}^*_1\times\mathbf{P}^*_2\times\cdots\times\mathbf{P}^*_k),$$

ahol $\Omega_i = \Omega$ és $\Omega_i^* = \Omega^*$ és $\mathbf{P}_i = \mathbf{P}$ (illetve $\mathbf{P}_i^* = \mathbf{P}^*$) az Ω_i (illetve Ω_i^*) téren definiált mértékek.

Könnyen látható, hogy a 6. tételből következik a következő

4. KOROLLÁRIUM. Legyen $A = \{a_{ik}\}_{i,k=1}^{\infty}$ egy duplán sztochasztikus matrix. Ekkor létezik a valószínűségi változóknak egy $\zeta_1, \zeta_2, \ldots$ sorozata úgy, hogy

$$\mathbf{P}\{\zeta_i = k\} = a_{ik} \qquad (i = 1, 2, \ldots; \; k = 1, 2, \ldots)$$

és

$$\mathbf{P}\{|i: \zeta_i \in A| = |A|\} = 1,$$

ahol A az egész számok egy halmaza és $|\cdots|$ jelenti a szóban forgó halmaz pontjainak számát.

Nem kívánunk itt foglalkozni sem az 5. és 6. tételek bizonyításával, sem azzal a kérdéssel, hogy az 1., 2. és 3. korolláriumok hogy következnek az említett tételekből, ugyanis ezek a bizonyítások a [11] dolgozatban részletesen megtalálhatók. Csupán két, a bizonyításban lényeges szerepet játszó lemmát említünk meg, amelyek önmagukban is érdekesek.

4. LEMMA. *Legyen*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \ldots, & a_{1n}, & \ldots \\ a_{21}, & a_{22}, & \ldots, & a_{2n}, & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1}, & a_{m2}, & \ldots, & a_{mn}, & \ldots \end{pmatrix}$$

egy gyengén duplán sztochasztikus matrix. Jelöljük az $m \times \infty$-es kvázi permutáció matrixok sorozatát $\{P_1, P_2, \ldots\}$-vel. Ekkor található a nem negatív valós számoknak egy $c_1, c_2, \ldots$ sorozata úgy, hogy

$$A = \sum_{k=1}^{\infty} c_k P_k.$$

Itt az $=$ jel a következőt jelenti:

$$\lim_{N\to\infty} \left\| A - \sum_{k=1}^{N} c_k P_k \right\| = 0.$$

Egy $D = \{d_{ik}\}$ matrix normáját a $\|D\| = \sum_{i,k} |d_{ik}|$ képlettel definiáljuk.

5. LEMMA. *Legyen X egy tetszőleges absztrakt tér, $\mathfrak{S}_1 \subset \mathfrak{S}_2 \subset \cdots$ jelentse X bizonyos részhalmazai σ-algebráinak egy monoton növő sorozatát. $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \ldots$ legyenek az $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \ldots$ σ-algebrákon értelmezett mértékek. Jelöljük $\mathfrak{S}$-sel az $\mathfrak{R} = \sum_{i=1}^{\infty} \mathfrak{S}_i$ algebrát tartalmazó legszűkebb σ-algebrát. Tegyük fel, hogy*

1. Minden i-re ($i=1,2,\ldots$) *található* Ω *diszjunkt részhalmazainak egy* $a_1^{(i)}, a_2^{(i)}, \ldots$ *sorozata úgy, hogy*

$$a_1^{(i)}+a_2^{(i)}+\cdots=\Omega$$

és $\mathfrak{S}_i$ *minden eleme bizonyos* $a_k^{(i)}$ *halmazok összege.*

2. A $\mathbf{P}_i$ *mértékek kompatibilisek, azaz*

$$\mathbf{P}_{i+k}(A)=\mathbf{P}_i(A) \quad \text{ha} \quad A\in\mathfrak{S}_i \qquad (i=1,2,\ldots;\ k=1,2,\ldots).$$

3. Ha

$$a_{i_1}^{(1)}\supset a_{i_2}^{(2)}\supset a_{i_3}^{(3)}\supset\cdots$$

akkor a $\prod_{j=1}^{\infty} a_{i_j}^{(j)}$ *halmaz nem üres.*

Ekkor található az $\mathfrak{S}$ σ*-algebrán egy* $\mathbf{P}$ *valószínűségi mérték úgy, hogy*

$$\mathbf{P}(A)=\mathbf{P}_i(A) \quad \text{ha} \quad A\in\mathfrak{S}_i.$$

Könnyen látható, hogy ezen lemma a 3. feltétel nélkül nem érvényes. Megemlítjük, hogy a valószínűségszámításban gyakran lép fel az a probléma, hogy ezen lemmában az 1. és 3. feltétel milyen más feltételekkel pótolható. Így például a valószínűségszámítás Kolmogorov-féle alaptételének bizonyításában is egy ilyen típusú feltétel megtalálása játssza a főszerepet. Igen nehéz feladatnak látszik egy jól használható elégséges feltétel megadása.

Végül még a következő kérdést említjük meg. Mi módon általánosítható a 6. tétel duplán sztochasztikus mértékekre? A jó általánosítás megtalálásában segítségünkre lehet a 4. korollárium. Nevezetesen felvetjük a következő kérdést.

4. probléma. Legyen μ a λ Lebesgue-mértékre abszolút folytonos, duplán sztochasztikus mérték, Radon—Nykodim deriváltját jelöljük $f(x, y)$-nal. Azaz $f(x, y)$ legyen egy nem negatív függvény, amelyre

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\,dy=1.$$

Létezik-e olyen ξ_t mérhető sztochasztikus folyamat, amelyre

$$P\{\xi_t<\alpha\}=\int_{-\infty}^{\alpha} f(t, y)\,dy$$

$$P\{\lambda(t:\ \xi_t\in A)=\lambda(A)\}=1?$$

Általában érdekes azonban a következő kérdés: ha ξ_t egy mérhető sztochasztikus folyamat, mi mondható a

$$\lambda\{t:\ \xi_t\in A\}$$

valószínűségváltozó eloszlásfüggvényéről? Itt A egy Borel-halmazt jelent és λ a Lebesgue-mérték.

Valószínűnek látszik, hogy ezen probléma megoldásánál egyszerűbb a 2. lemmával analóg következő probléma megoldása.

5. probléma. Legyen $f(x, y)$ az egységnégyzeten értelmezett folytonos függvény, amelyre

$$f(x, y) \geqq 0$$

$$\int_0^1 f(x, y)\,dx = \int_0^1 f(x, y)\,dy = 1.$$

Kérdés, létezik-e a $[0, 1]$ intervallumon értelmezett olyan T mérhető, mértéktartó transzformáció, amelyre

$$f(x, Tx) > 0.$$

IRODALOM

[1] G. Birkhoff, Three observations on linear algebra, *Rev. Univ. Nac. Tucumán* (a) 5 (1946) 147—151.

[2] G. Birkhoff, *Lattice Theory,* revised edition, New York, 1948.

[3] D. König, *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen,* Budapest, 1936.

[4] O. Ore, Graphs and matching theorems, *Duke Math. J.* 22 (1955) 625 639.

[5] M. Marcus—R. Ree, Diagonals of doubly stochastic matrices, *Quarterly Journ. of Math.* 10 (1959) 296—392.

[6] J. Neumann, A certain zero-sum two-person game equivalent to the optimal assignement problem. *Contributions to theory of games,* Vol. 2.

[7] B. A. Rattray—J. E. L. Peck, Infinite stochastic matrices, *Trans. Roy. Soc. Canada,* sect. III 49 (1955) 55—57.

[8] D. G. Kendall, On infinite doubly-stochastic matrices and Birkhoff's problem 111, *J. London Math. Soc.* 35 (1960) 81—84.

[9] J. R. Isbell, Birkhoff's Problem 111., *Proc. Am. Math. Soc.* 6 (1955) 217—218.

[10] J. E. L. Peck, Doubly stochastic measures, *Michigan Math. Journ.* 6 (1959) 217—220.

[11] P. Révész, A probabilistic solution of Birkhoff's problem 111. (in print).

(Beérkezett: 1961. III. 1.)

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Matematikai Intézet

A RIEMANN-TÉR INTEGRÁLGEOMETRIÁJÁNAK NÉHÁNY PROBLÉMÁJÁRÓL

Írta: TEKSE KÁLMÁN

Bevezetés

Felületek integrálgeometriájának alapvető ideái W. BLASCHKE [1] és M. HAIMOVICI [1], [2] munkáiban vetődtek fel először, nevükhöz fűződnek e problémakör első eredményei is.

Felületeken általában nem létezik tranzitív mozgáscsoport, így itt a klasszikus értelemben vett integrálgeometriáról (pl. adott ponttérben bizonyos geometriai objektumok valamely halmazának lokálisan kompakt transzformációcsoporttal szemben invariáns mértékéről) nem beszélhetünk. E nehézségek áthidalására BLASCHKE egy kétméretű pozitív definit metrikájú felület geodetikus vonalainak kétparaméteres sokaságára (a felület egy adott tartományának minden pontján geodetikusok egyparaméteres serege halad át, miközben a felület azon részére szorítkozunk, amelyben a sokaság két görbéje legfeljebb egy pontban metszi egymást) olyan mérték bevezetését javasolta, amely invariáns: a) a felületi koordinátarendszer választásával szemben; b) a görbék paraméterezésével szemben. Az így definiált mérték és annak folyományai nagyfokú hasonlóságot mutatnak a klasszikus integrálgeometria megfelelő eredményeivel.

W. BLASCHKE és M. HAIMOVICI gondolatainak kézenfekvő általánosítását adta L. SANTALÓ [1], akinek sikerült meghatározni az n-dimenziós pozitív definit metrikájú Riemann-tér geodetikus vonalai $2(n-1)$-méretű halmazának fenti értelemben invariáns mértékét.

E problémakör vizsgálatánál jogosan vetődik fel az a kérdés, hogy felületeken, geodetikusoktól különböző görbék halmazának milyen feltételek mellett létezik invariáns mértéke, továbbá, e mérték milyen tulajdonsággal rendelkezik. W. BLASCHKE és M. HAIMOVICI eredményeinek ilyen irányú általánosításaival Moszkvában P. K. RASEVSZKIJ, valamint tanítványai, elsősorban B. V. LESZOVOJ [1] és I. M. JAGLOM [1] foglalkoztak és jelentős eredményeket értek el. B. V. LESZOVOJ [1], a P. K. RASEVSZKIJ [1] által kidolgozott bimetrikus rendszerek elméletének felhasználásával azt kapta, hogy egy pozitív definit metrikájú kétméretű felület valamely S görbéi kétparaméteres halmazának akkor létezik a fenti értelemben vett invariáns mértéke, ha a felület egy tetszőleges rögzített P pontján áthaladó görbék adott P pontbeli görbülete azonos.

Jelen dolgozatban P. K. RASEVSZKIJ ösztönzésére arra a kérdésre igyekszünk választ adni, hogy milyen feltételek mellett általánosíthatók B. V. LESZOVOJ, illetve L. SANTALÓ eredményei az n-méretű V_n Riemann-tér esetére. A probléma vizsgálatát megnehezítette, hogy a bimetrikus rendszerek elméletének általánosítása már a trimetrikus rendszerek esetén is nehezen kezelhető eredményre vezetett. Ezért célszerűnek mutatkozott a kérdések kevésbé szemléletes, de egyszerűbb úton, más oldalról való megközelítése. Ugyanakkor a kapott eredményeket, mint az általános relativitás $(n+1)$-dimenziós terében, elektromágneses mezőben mozgó töltött részecskék pályáinak sűrűségét, fizikailag sikerült interpretálni. Eredményeink felhasználásával L. SANTALÓ [2] bizonyos integrálformulái általánosíthatók lettek a geodetikusoknál jóval általánosabb görbeosztályokra is.

Végül megjegyezzük, hogy a jelen dolgozatban tekintett görbékre és ezek vizsgált halmazára vonatkozóan a továbbiak során mindig feltételezzük a következőket: a) a V_n tér minden pontjában tetszőleges irányban a halmaznak egy és csak egy görbéje halad át; b) a V_n tér bizonyos pontjának olyan környezetére szorítkozunk, amelyben a halmaz tetszőleges két görbéjének legfeljebb egy közös pontja van.

1. Görbék halmazának mértéke n-méretű Riemann-térben

1. 1. A bevezetésben vázolt kérdések tisztázásához tekintsünk egy n-dimenziós V_n Riemann-teret. Az $x^1, x^2, \ldots, x^n$ lokális koordinátarendszerben a a tér pozitív definit metrikus formája legyen:

$$ds^2 = g_{ij}\, dx^i\, dx^j, \tag{1.1}$$

ahol feltételezzük, hogy a

$$g_{ij} = g_{ij}(x^1, x^2, \ldots, x^n)$$

szimmetrikus tenzor argumentumainak kétszer folytonosan differenciálható függvénye. Megjegyezzük, hogy (1. 1)-ben és a továbbiakban mindenütt, egy formulában egyidejűleg előforduló azonos alsó és felső indexek ezen index szerinti összegezést jelentenek, továbbá a latin kisbetűvel jelölt indexek az $1, 2, \ldots, n$, a görög kisbetűvel jelölt indexek az $1, 2, \ldots, 2(n-1)$ értékeket futják be, hacsak valamilyen külön megjegyzést nem teszünk.

Tekintsük most a V_n tér bizonyos S görbéinek valamely $2(n-1)$ paraméteres X halmazát, amelyre teljesülnek a Bevezetésben tett feltevések, és amelynek elemeit az

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2(n-1)}$$

paraméterek határozzák meg. Tegyük fel, hogy ezen S görbék az

$$x^i = x^i(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2(n-1)}; t) \tag{1.2}$$

egyenletekkel vannak megadva, ahol az α_μ ($\mu=1,2,\ldots,2(n-1)$) paraméterek határozzák meg az X halmazhoz tartozó S görbét, t pedig a görbe menti paraméter. Ugyancsak feltesszük, hogy az $x^i(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{2(n-1)};t)$, valamint a továbbiakban előforduló valamennyi függvény az összes változók szerint a szükséges rendszámig bezárólag folytonosan differenciálhatók és a V_n tér tekintett tartományára, valamint az X halmaz S görbéire fennálnak a bevezetés végén tett feltevések. Jelölje

$$\dot{x}^i=\dot{x}^i(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{2(n-1)};t)$$

a V_n tér x^i pontján áthaladó tetszőleges S görbe érintővektorát, azaz

$$\dot{x}^i=\frac{dx^i}{dt}.$$

Az (1.1) formából kapott

$$\varphi=(g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j)^{1/2} \tag{1.3}$$

kifejezés segítségével az X halmaz minden görbéjére képezhetjük a

$$p_i=\frac{\partial\varphi}{\partial\dot{x}^i} \tag{1.4}$$

mennyiségeket, ahol természetesen a p_i-k szintén az α_μ és a t paraméterek függvényei:

$$p_i=p_i(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{2(n-1)};t) \tag{1.5}$$

és a szükségesnek megfelelően folytonosan differenciálhatók. Ily módon az (1.2) és az (1.5) függvényekből rögzített t paraméterérték mellett a következő differenciálformákat kaphatjuk:

$$dx^i=\frac{\partial x^i}{\partial\alpha_\mu}d\alpha_\mu, \tag{1.6}$$

$$dp_i=\frac{\partial p_i}{\partial\alpha_\mu}d\alpha_\mu.$$

A fentiek segítségével M. HAIMOVICI [2] eredményeinek analógiájára képezhetjük a

$$\underset{(2)}{dS}=[dx^idp_i]+f_{ij}[dx^idx^j] \tag{1.7}$$

külső formát,[1] ahol

$$f_{ij}=f_{ij}(x^1,\ldots,x^n;\,p_1,\ldots,p_n),$$

[1] Itt és a továbbiakban mindenütt, a szögletes zárójelekben álló differenciálformák e formák külső szorzatát jelentik. (Lásd pl. P. K. RASEVSZKIJ [2].)

melyekre fennáll

$$f_{ij}+f_{ji}=0,$$

és az összes változók szerint a szükséges rendszámig bezárólag folytonosan differenciálható függvények.

1. 2. Az elmondottak alapján a bevezetésben vázolt feladat megoldásának megközelítéséhez a V_n tér S görbéi tekintett X halmazának valamely kétparaméteres X_2 részhalmazát vizsgáljuk. Ebben az esetben feladatunk azon feltételek meghatározására szorítkozik, amelyeket halmazunk S görbéi egyenleteinek, valamint az $f_{ij}(x,p)$ függvényeknek ki kell elégíteniök ahhoz, hogy az (1.7) külső forma abszolút értékének integrálja invariáns legyen, ahol az integrálás kiterjesztendő az egész halmazra. Más szavakkal, meghatározandók a V_n tér 1. 1. pontban vázolt feltételeket kielégítő azon görbéi, amelyek kétméretű halmazára az (1.7) külső forma abszolút értéke invariáns lesz a lokális koordinátarendszerek, valamint a görbék paramétereinek transzformációival szemben. A továbbiakban először e feladat megoldásával foglalkozunk.

Mielőtt azonban rátérnénk e kérdés részletes vizsgálatára, megjegyezzük, hogy megfontolásainkban az S görbéket a szokásos $(x^1,\dots,x^n;\ \dot{x}^1,\dots,\dot{x}^n)$ koordináták helyett az $(x^1,\dots,x^n;\ p_1,\dots,p_n)$ koordinátákkal fogjuk megadni. Itt formális nehézséget csupán az jelent, hogy a p_i mennyiségek nem függetlenek. Valóban (1. 3)-ból, mivel φ az $\dot{x}^i$ változókban elsőfokú homogén függvény, Euler tételének folyományaként kapjuk:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\dot{x}^i}\dot{x}^i=\varphi.$$

Ebből $\dot{x}^i$ szerinti parciális differenciálással

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial\dot{x}^i\,\partial\dot{x}^j}\dot{x}^i=0,$$

azaz

$$\operatorname{Det}\left|\frac{\partial^2\varphi}{\partial\dot{x}^i\,\partial\dot{x}^j}\right|=\frac{\partial(p_1,p_2,\dots,p_n)}{\partial(\dot{x}^1,\dot{x}^2,\dots,\dot{x}^n)}=0.$$

Az (1. 4) egyenletek tehát nem oldhatók meg az $\dot{x}^i$ változókra vonatkozóan. Mivel azonban egy adott S görbe érintőjének az irányát nem maguk az $(\dot{x}^1,\dot{x}^2,\dots,\dot{x}^n)$ koordináták, hanem ezek aránya határozza meg, ezért a p_i mennyiségek jogosan vehetők az S görbe koordinátáinak.

E rövid kitérő után tekintsük a V_n térben az

$$x^i=x^i(\bar{x}^1,\bar{x}^2,\dots,\bar{x}^n)$$

egyenletekkel megadott koordinátatranszformációt, ahol az x^i-k argumentumaik folytonosan differenciálható függvényei. Ahhoz, hogy az (1. 7) forma e transzformációval szemben invariáns maradjon, az $f_{ij}(x,p)$ függvényekre teljesülniök kell az

$$f_{kl}(x,p)=\left(\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k}\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^l}-\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^l}\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^k}\right)f_{ij}(\bar{x},\bar{p})$$

egyenlőségeknek.

Tegyük fel most, hogy a V_n tér S görbéi X halmazának X_2 részhalmazát az α_1,α_2 paraméterek határozzák meg. Ez esetben az (1.7) forma az (1.6) egyenletek felhasználásával a következő alakban írható:

$$(1.8)\qquad \underset{(2)}{dS}=\left(\frac{\partial x^i}{\partial \alpha_1}\frac{\partial p_i}{\partial \alpha_2}-\frac{\partial x^i}{\partial \alpha_2}\frac{\partial p_i}{\partial \alpha_1}\right)d\alpha_1 d\alpha_2+f_{ik}\left(\frac{\partial x^i}{\partial \alpha_1}\frac{\partial x^k}{\partial \alpha_2}-\frac{\partial x^i}{\partial \alpha_2}\frac{\partial x^k}{\partial \alpha_1}\right)d\alpha_1 d\alpha_2.$$

E formának az S görbék paraméterezésével szemben invariáns volta azt jelenti, hogy a forma t paraméter szerinti variációja nulla:

$$\delta(\underset{(2)}{dS})=\left\{\left(\frac{\partial \dot{x}^i}{\partial[\alpha_1}\frac{\partial p_i}{\partial \alpha_2]}+\frac{\partial x^i}{\partial[\alpha_1}\frac{\partial \dot{p}_i}{\partial \alpha_2]}\right)d\alpha_1 d\alpha_2+\dot{f}_{ik}\frac{\partial x^i}{\partial[\alpha_1}\frac{\partial x^k}{\partial \alpha_2]}d\alpha_1 d\alpha_2+\right.$$

$$\left.+f_{ik}\left(\frac{\partial \dot{x}^i}{\partial[\alpha_1}\frac{\partial x^k}{\partial \alpha_2]}+\frac{\partial x^i}{\partial[\alpha_1}\frac{\partial \dot{x}^k}{\partial \alpha_2]}\right)d\alpha_1 d\alpha_2\right\}\delta t=0,$$

azaz

$$(1.9)\quad \frac{\partial \dot{x}^i}{\partial[\alpha_1}\frac{\partial p_i}{\partial \alpha_2]}+\frac{\partial x^i}{\partial[\alpha_1}\frac{\partial \dot{p}_i}{\partial \alpha_2]}+\dot{f}_{ik}\frac{\partial x^i}{\partial[\alpha_1}\frac{\partial x^k}{\partial \alpha_2]}+f_{ik}\left(\frac{\partial \dot{x}^i}{\partial[\alpha_1}\frac{\partial x^k}{\partial \alpha_2]}+\frac{\partial x^i}{\partial[\alpha_1}\frac{\partial \dot{x}^k}{\partial \alpha_2]}\right)=0.$$

Itt a szögletes zárójelek az α_1 és α_2 paraméterek szerinti alternációt jelentenek, továbbá

$$\dot{f}_{ik}=\frac{\delta f_{ik}(x,p)}{\delta t}.$$

Felhasználtuk továbbá azt, hogy

$$\delta p_i=\frac{\partial p_i}{\partial t}\delta t=\dot{p}_i\delta t,$$

$$\delta x^i=\frac{\partial x^i}{\partial t}\delta t=\dot{x}^i\delta t.$$

A továbbiakban szükségünk lesz a V_n tér adott görbéjének főnormális vektorára, melynek μ_i komponenseit (1.3) felhasználásával a

$$(1.10)\qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial \varphi}{\partial \dot{x}^i}-\frac{\partial \varphi}{\partial x^i}=\mu_i$$

egyenletekkel definiálhatjuk (lásd pl. EISENHART [1]). Könnyen ellenőrizhető, hogy

$$(1.11)\qquad \mu_i=k_i+\psi(t)\dot{x}_i,$$

ahol k_i az S görbe első görbületének kovariáns vektora, $\dot{x}_i$ a görbe kovariáns érintővektora ($\dot{x}_i = g_{ij}\dot{x}^j$) és $\psi(t)$ a t paraméter olyan függvénye, amelyre $\psi(s) = 0$, ha s a görbe ívhossza. Az érintővektorra merőleges k_i vektor hosszát a görbe első görbületének nevezik és k-val jelölik.

Ily módon (1. 4) és (1. 10) felhasználásával kapjuk:

$$\dot{p}_i = \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{x}^i} + \mu_i.$$

Mivel azonban

$$\frac{\partial p_i}{\partial \alpha_s} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \dot{x}^i \partial \alpha_s}, \quad \frac{\partial \dot{p}_i}{\partial \alpha_s} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^i \partial \alpha_s} + \frac{\partial \mu_i}{\partial \alpha_s} \qquad (s = 1, 2),$$

ezért fennáll

$$\frac{\partial \dot{x}^i}{\partial [\alpha_1} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \dot{x}^i \partial \alpha_2]} + \frac{\partial x^i}{\partial [\alpha_1} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^i \partial \alpha_2]} + \frac{\partial x^i}{\partial [\alpha_1} \frac{\partial \mu_i}{\partial \alpha_2]} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial [\alpha_1 \partial \alpha_2]} + \frac{\partial x^i}{\partial [\alpha_1} \frac{\partial \mu_i}{\partial \alpha_2]},$$

ahol a szögletes zárójelek az α_1 és α_2 szerinti alternálást jelentik. Az alternálás folytán a jobb oldal első tagja nulla és így (1. 9)-ből kapjuk:

$$\text{(1. 12)} \qquad \frac{\partial x^i}{\partial [\alpha_1} \frac{\partial \mu_i}{\partial \alpha_2]} + \dot{f}_{ik} \frac{\partial x^i}{\partial [\alpha_1} \frac{\partial x^k}{\partial \alpha_2]} + f_{ik} \left(\frac{\partial \dot{x}^i}{\partial [\alpha_1} \frac{\partial x^k}{\partial \alpha_2]} + \frac{\partial x^i}{\partial [\alpha_1} \frac{\partial \dot{x}^k}{\partial \alpha_2]} \right) = 0.$$

Mivel azonban

$$\mu_i = \mu_i(x, \dot{x}, t),$$

ezért

$$\frac{\partial \mu_i}{\partial \alpha_s} = \frac{\partial \mu_i}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial \alpha_s} + \frac{\partial \mu_i}{\partial \dot{x}^k} \frac{\partial \dot{x}^k}{\partial \alpha_s} \qquad (s = 1, 2).$$

Így (1. 12)-ből következik, hogy

$$\left\{ \left(\frac{\partial \mu_i}{\partial x^k} - \frac{\partial \mu_k}{\partial x^i} \right) + (\dot{f}_{ik} - \dot{f}_{ki}) \right\} \frac{\partial x^i}{\partial \alpha_1} \frac{\partial x^k}{\partial \alpha_2} +$$
$$+ \left(\frac{\partial \mu_i}{\partial \dot{x}^k} + 2 f_{ik} \right) \left(\frac{\partial x^i}{\partial \alpha_1} \frac{\partial \dot{x}^k}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial x^i}{\partial \alpha_2} \frac{\partial \dot{x}^k}{\partial \alpha_1} \right) = 0.$$

Ezen egyenletek tetszőleges t paraméterezés mellett fennállnak, így speciálisan $t = s$ esetén is. Ez esetben (1. 11) következményeképpen

$$\mu_i = k_i,$$

tehát

$$\text{(1. 13)} \qquad \begin{aligned} &\left\{ \left(\frac{\partial k_i}{\partial x^k} - \frac{\partial k_i}{\partial x^i} \right) + (f'_{ik} - f'_{ki}) \right\} \frac{\partial x^i}{\partial \alpha_1} \frac{\partial x^k}{\partial \alpha_2} + \\ &+ \left(\frac{\partial k_i}{\partial x'^k} + 2 f_{ik} \right) \left(\frac{\partial x^i}{\partial \alpha_1} \frac{\partial x'^k}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial x^i}{\partial \alpha_2} \frac{\partial x'^k}{\partial \alpha_1} \right) = 0, \end{aligned}$$

ahol a vesszők mindenütt ívhossz szerinti deriválást jelentenek. Bevezetve az

$$u^i=\frac{\partial x^i}{\partial \alpha_1},\quad v^i=\frac{\partial x^i}{\partial \alpha_2},\quad z^i=\frac{\partial x'^i}{\partial \alpha_1},\quad w^i=\frac{\partial x'^i}{\partial \alpha_2}$$

jelöléseket, továbbá u^i és v^i lineáris függetlenségét felhasználva (ami következik abból, hogy az X_2 halmazt tetszőlegesen választottuk), (1. 13)-ból

$$f'_{[i,j]}=\frac{\partial k_j}{\partial x^i}-\frac{\partial k_i}{\partial x^j} \tag{1. 14}$$

adódik, ahol $[i, j]$ az i, j indexek szerinti alternálást jelenti. Másrészről azonban

$$A_{ij}(u^i z^j-v^i w^j)=0, \tag{1. 15}$$

ahol A_{ij} az (1. 13) kifejezés második tagjának együtthatója. Figyelembe kell vennünk továbbá azt is, hogy x'^i egységvektor:

$$g_{ij}x'^i x'^j=1,$$

és következésképpen, előbbi jelöléseink felhasználásával pl.:

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}u^k x'^i x'^j+2x'_j z^j=0. \tag{1. 16}$$

Így az (1. 15) egyenletnek (1. 16) következményének kell lenni, azaz

$$A_{ij}(u^i z^j-v^i w^j)+\lambda\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}x'^i x'^j u^k+2x'_j z^j\right)=0$$

azonosan fennáll, ahol λ tetszőleges konstans. Ez az u^k független változókban lineáris egyenlet, amiből

$$A_{kj}z^j+\lambda\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}x'^i x'^j=0,$$

$$A_{ij}v^i w^j-2\lambda x'_j z^j=0$$

következik, ahonnan

$$A_{ij}=\frac{\partial k_i}{\partial x'^j}+2f_{ij}=0.$$

Ebből

$$f_{[i,j]}=\frac{1}{4}\left(\frac{\partial k_j}{\partial x'^i}-\frac{\partial k_i}{\partial x'^j}\right), \tag{1. 17}$$

ahol $[i, j]$ az i és j indexek szerinti alternálást jelenti. Következésképpen az (1. 7) külső forma akkor és csak akkor lesz a Bevezetésben vázoltak értelmében invariáns, ha az f_{ij} függvényekre és az S görbékre fennállnak az (1. 14) és (1. 17) egyenletek.

Mivel f_{ij} antiszimmetrikus függvény, (1. 17)-ből könnyen adódik, hogy

$$\frac{\partial k_i}{\partial x'^j} + \frac{\partial k_j}{\partial x'^k} = 0,$$

amiből:

$$\frac{\partial^2 k_i}{\partial x'^j \partial x'^l} = 0,$$

azaz k_i az x'^i változók lineáris függvénye, tehát

$$k_i(x, x') = F_{ij}x'^j + B_i. \tag{1. 18}$$

Itt (1. 17) folyományaként az F_{ij} függvények szintén antiszimmetrikus függvények:

$$F_{ij} = F_{ij}(x), \quad F_{ij} + F_{ji} = 0,$$

továbbá

$$B_i = B_i(x).$$

Másrészről

$$f'_{ij} = \frac{\delta f_{ij}}{\delta s} = \frac{\partial f_{ij}}{\partial x^l} x'^l + \frac{\partial f_{ij}}{\partial x'^l} x''^l,$$

és

$$\frac{\partial f_{ij}}{\partial x'^l} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 k_i}{\partial x'^j \partial x'^l} = 0,$$

azért (1. 14) és (1. 18) alapján fenn kell állniok a következő egyenlőségeknek:

$$\frac{\partial F_{ij}}{\partial x^l} x'^l = \left(\frac{\partial F_{il}}{\partial x^j} - \frac{\partial F_{jl}}{\partial x^i}\right) x'^l + \left(\frac{\partial B_i}{\partial x^j} - \frac{\partial B_j}{\partial x^i}\right),$$

azaz

$$\frac{\partial F_{ij}}{\partial x^l} + \frac{\partial F_{jl}}{\partial x^i} - \frac{\partial F_{il}}{\partial x^j} = 0,$$

$$\frac{\partial B_i}{\partial x^j} - \frac{\partial B_j}{\partial x^i} = 0.$$

Így F_{ij} valamely vektormező rotációja, B_i pedig valamely skalármező gradiense.

Végül, mivel x'^i egységvektor,

$$p_i = g_{ij}x'^j = x'_i. \tag{1. 19}$$

Így (1. 7) és (1. 17) alapján kapjuk, hogy a V_n tér S görbéi X_2 halmazára a

$$\underset{(2)}{dS} = [dx^i dx'_i] + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial k_j}{\partial x'^i} - \frac{\partial k_i}{\partial x'^j}\right)[dx^i dx^j] \tag{1.20}$$

külső forma invariáns lesz a) a V_n tér koordinátatranszformációival, illetve b) az S görbék paraméterezésével szemben.

Az (1.20) kifejezés abszolút értékét a V_n tér S görbéi X_2 kétparaméteres halmaza *sűrűségének* nevezzük. Ezzel a jelen pont elején felvetett problémát megoldottuk, nevezetesen bebizonyítottuk a következő tételt:

1. TÉTEL: *A V_n tér feltételeinket kielégítő S görbéi valamely* $2(n-1)$ *méretű X halmazának kétparaméteres X_2 részhalmaza akkor és csak akkor rendelkezik* (1.7) *alakú invariáns sűrűséggel, ha az S görbe főnormális vektora* (1.18) *alakú, ahol F_{ij} valamely vektormező rotációja, B_i valamely skalármező gradiense, az f_{ij} antiszimmetrikus függvény pedig* (1.17) *alakú.*

Az (1.20) külső formának az X_2 halmazra, azaz e halmaznak megfelelő α_1, α_2 paraméterértékekre kiterjesztett integrálja a fent vázolt értelemben szintén invariáns. Ez az integrál a V_n tér S görbéi X_2 halmazának *integrálgeometriai mértéke.*

1.3. Az elmondottakból világos, hogy a V_n tér fenti feltételeket kielégítő S görbéi X halmazának bármely $2m$-paraméteres X_{2m} részhalmaza (ahol $m<n$) szintén rendelkezik invariáns sűrűséggel, amelyet a

$$(1.21)\qquad \underset{(2m)}{dS} = \left\{[dx^i dx_i'] + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial k_j}{\partial x'^i} - \frac{\partial k_i}{\partial x'^j}\right)[dx^i dx^j]\right\}^m$$

külső forma abszolút értéke szolgáltatja, ahol a hatványozás mint ismételt külső szorzás értendő. Következésképpen fennáll a

2. TÉTEL. *A V_n Riemann-tér 1. tétel feltételeit kielégítő S görbéi* $2(n-1)$-*paraméteres X halmazának bármely $2m$-paraméteres X_{2m} részhalmaza* ($m<n$) *rendelkezik* (1.7) *típusú invariáns sűrűséggel, amelyet az* (1.21) *külső forma abszolút értéke szolgáltat.*

E sűrűségnek az X_{2m} halmazra, azaz e halmaznak megfelelő $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2m}$ paraméterértékekre kiterjesztett

$$(1.22)\qquad M(X_{2m}) = \int\limits_{X_{2m}} \left\{[dx^i dx_i'] + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial k_j}{\partial x'^i} - \frac{\partial k_i}{\partial x'^j}\right)[dx^i dx^j]\right\}^m$$

integrálját az X_{2m} halmaz *integrálgeometriai mértékének* nevezzük.

1. KOROLLÁRIUM. Abban a speciális esetben, amikor a vizsgált S görbék a V_n Riemann-tér Γ geodetikus vonalai, tehát amelyekre $k_i \equiv 0$, a 2. tétel feltételei triviálisan teljesülnek és akkor (1.21) sűrűség az egyszerű

$$\underset{(2m)}{d\Gamma} = \{[dx^i dx_i']\}^m \qquad (m<n)$$

formát veszi fel. Ennek abszolút értéke $m=n-1$ esetben a V_n tér Γ geodetikusai X halmazának L. SANTALÓ által bevezetett invariáns sűrűségét adja.

2. KOROLLÁRIUM. Speciálisan, $n=2$ esetén, amikor az X_2 kétparaméteres görbesereg egy kétméretű felületen fekszik, az (1. 21) formulából a halmaz sűrűségére (1. 19) felhasználásával a

$$(1.23)\qquad \underset{(2)}{dS}=[dx^1dp_1]+[dx^2dp_2]-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial k_1}{\partial x'^2}-\frac{\partial k_2}{\partial x'^1}\right)[dx^1dx^2]$$

formát kapjuk, amely (1. 18) figyelembevételével a következő alakra hozható:

$$\underset{(2)}{dS}=[dx^1dp_1]+[dx^2dp_2]-F_{12}(x)[dx^1dx^2].$$

Esetünkben azonban

$$F_{12}(x)=k(x)\cdot O_{12}(x),$$

ahol $k=k(x)$ az S görbék geodetikus görbülete, O_{ij} pedig a helytől függő ortogonális matrix, amely a görbe érintőegységvektorát a geodetikus normális egységvektorába viszi át. Könnyű azonban belátni, hogy

$$O_{12}(x)=\sqrt{g}=(\mathrm{Det}\,|g_{ij}|)^{1/2}\qquad (i,j=1,2),$$

és így az (1.23) sűrűség a következő, B. LESZOVOJ [1] által kapott alakot veszi fel:

$$(1.24)\qquad \underset{(2)}{dS}=[dx^1dp_1]+[dx^2dp_2]-k(x)\sqrt{g}\,[dx^1dx^2].$$

Ha ezen a felületen egy geodetikus polárkoordinátarendszert tekintünk, amelyben a felület metrikus formája

$$ds^2=d\varrho^2+g(\varrho,\theta)\cdot d\theta^2,$$

ahol θ a koordinátarendszer O kezdőpontján és a felület egy tetszőleges P pontján áthaladó geodetikus vonal rögzített iránnyal bezárt szöge, ϱ pedig P-nek O-tól vett geodetikus távolsága, akkor egyszerű számolással adódik, hogy (1. 24) e polárkoordinátarendszerben a

$$\underset{(2)}{dS}=\left(\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial\varrho}-k\sqrt{g}\right)[d\varrho\, d\theta]$$

alakot veszi fel, amely L. SANTALÓ [2] formulájának általánosítása a felület $k=k(x)$ geodetikus görbületű S görbéinek kétparaméteres sokaságára.

MEGJEGYZÉS. A V_n Riemann-tér S görbéire kapott (1. 10), (1. 11), (1. 18) differenciálegyenletrendszert (melynek teljesülése esetén az S görbék $2(n-1)$-paraméteres X halmaza bármely $2m$-paraméteres X_{2m} részhalmazának létezik (1. 21) alakú invariáns sűrűsége, amely tehát meghatározza a kérdéses görbesokaságot), általános esetben nem könnyű megoldani. Néhány speciális esetben előállítottuk ezen megoldásokat, amelyek leírására azonban itt nem térhetünk ki. Csupán megjegyezzük, hogy az n-dimenziós euklideszi tér esetén e megoldások pl. a csavarvonal bizonyos általánosításait képező görbék halmazához vezettek.

2. Görbék halmazának mértéke mint mechanikai rendszerek Poincaré-féle integrálinvariánsa

A továbbiakban megmutatjuk, hogy a V_n Riemann-térnek a 2. tétel feltételeit kielégítő S görbéi $2m$-paraméteres X_{2m} halmaza $(m<n)$ (1. 22) invariáns mértékének érdekes és fontos mechanikai interpretáció adható. Nevezetesen bebizonyítjuk, hogy az E. CARTAN (lásd pl. [1]) által tanulmányozott Poincaré-féle integrálinvariánsok a már vizsgáltaknál jóval általánosabb mechanikai rendszerek trajektóriáira is léteznek és bizonyos esetekben lényegében az (1. 22) invariáns integrállal azonosak. Az integrálgeometria tételeinek ilyen interpretációja lehetővé teszi a kapott eredmények alkalmazását az analízis és a mechanika számos problémájának vizsgálatánál.

2. 1. Az (1. 22) invariáns integrál fizikai tartalmának tisztázásához tegyük fel, hogy m_0 nyugalmi tömegű és e egységnyi töltésű töltött részecske mozog az $(n+1)$-dimenziós eseménytér gravitációs erőterében (az általános relativitáselmélet $(n+1)$-dimenziós terében) elektromágneses mezőben. Tegyük fel továbbá, hogy terünk, amelyet egy tetszőleges T koordinátarendszer $x^1, x^2, \ldots, x^n, x^{n+1}$ eseménykoordinátáira vonatkoztatunk, $g_{ij}=g_{ij}(x^1, \ldots, x^{n+1})$ tenzormezővel adott V_{n+1} Riemann-tér, ahol

$$\mathrm{Det}\,|g_{ij}|\neq 0, \quad g_{ij}=g_{ji},$$

és, mint e pontban mindenütt, ha külön megjegyzést nem teszünk, a latinbetűs indexek az $1, 2, \ldots, n+1$ értékeket futják be. Ez esetben a tekintett pont mozgását a térben egy görbe írja le, amelynek egyenlete

$$x^i = x^i(x^{n+1}) \qquad (i=1, 2, \ldots, n) \tag{2. 1}$$

alakban írható (ahol paraméterként az x^{n+1} koordinátát használjuk). A töltött részecske mozgását a V_{n+1} térben leíró görbét e részecske trajektóriájának nevezik. E trajektória mentén történő „végtelen kis" elmozdulás koordinátáit dx^i $(i=1, 2, \ldots, n+1)$ differenciálokkal jelöljük. Ugyanakkor a V_{n+1} tér elektromágneses mezejét meghatározó vektorpotenciál komponenseinek jelölésére A_i $(i=1, \ldots, n)$, a mező skalárpotenciáljának jelölésére $\overline{\varphi}$ szimbólumokat vezetjük be.

A relativitáselméletben általában az x^{n+1} paraméter helyett olyan τ paraméter használatos, amelynek differenciálja a trajektória íveleme (ún. sajátidő a trajektória mentén):

$$d\tau=\sqrt{g_{ij}dx^i dx^j}.$$

A trajektória érintővektora, amelynek komponenseit x'^i-vel jelöljük, a következő:

$$x'^i=\frac{dx^i}{d\tau}. \tag{2. 2}$$

(Ezentúl vesszővel jelöljük a trajektória ívhossza szerinti deriválást.)

A fenti jelölések felhasználásával a tekintett pont valóságos trajektóriája a V_{n+1} tér két adott (a τ paraméter τ_0 és τ_1 értékéhez tartozó) pontját összekötő összes lehetséges görbék közül éppen az a görbe lesz, amelyre az

$$\int_{\tau_0}^{\tau_1} L^{(\tau)} d\tau$$

integrál stacionáris, azaz, amelyre ezen integrál valóságos trajektória menti első variációja nulla:

$$\delta \int_{\tau_0}^{\tau_1} L^{(\tau)} d\tau = 0.$$

Ezen integrálokban $L^{(\tau)}$ az x^i és x'^i változók valamely invariáns függvénye és az adott mechanikai rendszer Lagrange-függvényének nevezik. Ennél a felső τ index azt jelenti, hogy a függvényt a τ paraméterre vonatkoztattuk. Ismeretes, hogy a fenti feltételből következik, miszerint a tekintett pont trajektóriájára fennállnak a következő, ún. Euler—Lagrange-féle differenciálegyenletek:

$$\text{(2. 3)} \qquad \frac{d}{d\tau}\frac{\partial L^{(\tau)}}{\partial x'^i} - \frac{\partial L^{(\tau)}}{\partial x^i} = 0.$$

Ismeretes továbbá, hogy a V_{n+1} tér általunk tekintett mechanikai rendszerének Lagrange-féle függvénye (2. 2) felhasználásával

$$\text{(2. 4)} \qquad L^{(\tau)} = -m_0 c^2 \sqrt{g_{ij} x'^i x'^j} + \frac{e}{c} \varphi_i x'^i$$

alakban írható (lásd pl. BERGMAN: [1]), ahol a φ_i-k az $(A_i, \overline{\varphi})$ kovariáns világvektor komponensei, c konstans pedig a fénysebesség.

Feltesszük most, hogy a vizsgált elektromágneses mezőre vonatkozó φ_i vektor csak a hely függvénye és független az iránytól, azaz $\varphi_i = \varphi_i(x)$ és bevezetjük az

$$\frac{e}{c} \varphi_i = V_i(x)$$

jelöléseket, továbbá az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $m_0 = 1$. Ekkor $L^{(\tau)}$ függvény a következő alakban írható:

$$\text{(2. 4)} \qquad L^{(\tau)} = -(c^2 \sqrt{g_{ij} x'^i x'^j} - V_i(x) x'^i).$$

A

$$\text{(2. 5)} \qquad p_k = \frac{\partial L^{(\tau)}}{\partial x'^k} = -\frac{c^2 g_{ik} x'^i}{\sqrt{g_{ij} x'^i x'^j}} - V_k(x)$$

mennyiséget a rendszer k-ik *impulzusának* nevezzük és az ennek analógiájára képzett

$$p_k = -\frac{c^2 g_{ik} x'^i}{\sqrt{g_{ij} x'^i x'^j}} \tag{2.6}$$

mennyiségek az elektromágneses mezőtől mentes rendszer Lagrange-függvényéből számított impulzus komponensei.

Ezek alapján a (2.5) mennyiségek felhasználásával a V_{n+1} tér fenti trajektóriái $2(n-1)$-paraméteres X halmaza tetszőleges kétparaméteres részhalmazára, POINCARÉ eljárását követve, képezhetjük a

$$\underset{(2)}{dS} = [dx^i d\tilde{p}_i],$$

vagy általánosabban az X halmaz tetszőleges $2m$-paraméteres X_{2m} $(m<n)$ részhalmazára a

$$\underset{(2m)}{dS} = \{[dx^i d\tilde{p}_i]\}^m \qquad (m<n) \tag{2.7}$$

külső formákat. E külső forma

$$M(X_{2m}) = \int\limits_{X_{2m}} \{[dx^i d\tilde{p}_i]\}^m$$

integrálja (ahol az integrálás kiterjesztendő a rendszer fázisterének adott $2m$-méretű sokaságára) LIOUVILLE ismert tétele folytán (lásd pl. L. LANDAU—E. LIFSIC, [1]) invariáns marad a sokaság pontjainak — a tekintett részecskék mozgásegyenleteinek megfelelő — időbeni elmozdulásaival szemben. Ez azonban éppen azt jelenti, hogy rendszerünk trajektóriái X halmaza tetszőleges $2m$-paraméteres X_{2m} részhalmazának létezik (a Bevezetésben vázoltaknak megfelelő értelemben) invariáns mértéke. Természetesen, mint a rendszer Lagrange-függvényének (2.4) alakjából is kitűnik, a fentiek csupán a $V_i \equiv 0$ esetben, azaz, ha elektromágneses mező nem lép fel, jelentenek a V_{n+1} tér „geodetikus vonalai" halmazára vonatkozó invariáns mértéket.

2.2. A továbbiakban megmutatjuk, hogy a V_{n+1} térben töltött részecskék trajektóriái X halmazának valamely X_{2m} részhalmazára kapott (2.7) alakú invariáns sűrűség lényegében megegyezik az előző pontban a Riemann-tér feltételeinket kielégítő S görbéinek $2m$-paraméteres halmazára definiált invariáns sűrűséggel. Ehhez a részecskék trajektóriáira kapott (2.3) differenciálegyenletrendszert a mechanikai rendszer (2.4) Lagrange-függvényének felhasználásával a következő alakban írjuk:

$$\frac{d}{d\tau}\frac{\partial L^{(\tau)}}{\partial x'^k} - \frac{\partial L^{(\tau)}}{\partial x^k} = \left\{\frac{d}{d\tau}\frac{\partial(c^2\sqrt{g_{ij}x'^i x'^j})}{\partial x'^k} - \frac{\partial(c^2\sqrt{g_{ij}x'^i x'^j})}{\partial x^k}\right\} -$$

$$-\left\{\frac{d}{d\tau}\frac{\partial V_i x'^i}{\partial x'^k} - \frac{\partial V_i x'^i}{\partial x^k}\right\} = 0.$$

A továbbiakban célszerű bevezetni a következő jelöléseket:

$$Q_k = \frac{d}{d\tau}\frac{\partial(c^2\sqrt{g_{ij}x'^i x'^j})}{\partial x'^k} - \frac{\partial(c^2\sqrt{g_{ij}x'^i x'^j})}{\partial x^k},$$

ahol a $Q_k = Q_k(x, x')$ függvények a részecskékre ható potenciálmentes erőkomponensei. Ily módon az előzőekből kapjuk:

$$Q_k = \frac{d}{d\tau}\frac{\partial V_i x'^i}{\partial x'^k} - \frac{\partial V_i x'^i}{\partial x^k} = \left(\frac{\partial V_k}{\partial x^i} - \frac{\partial V_i}{\partial x^k}\right)x'^i, \tag{2.8}$$

azaz Q_k-k az x'^i változók lineáris függvényei:

$$Q_k = F_{ki}x'^i, \tag{2.9}$$

ahol (2. 8) folyományaként

$$F_{ki} = F_{ki}(x), \quad F_{ki} + F_{ik} = 0.$$

Másrészről a (2. 8), valamint a (2. 6) jelölések figyelembevételével (2. 5)-ből kapjuk:

$$\tilde{p}_i = p_i - V_i,$$

azaz

$$d\tilde{p}_i = dp_i - dV_i = dp_i - \frac{\partial V_i}{\partial x^j}dx^j.$$

Ily módon a (2. 7) külső forma a következő alakban írható:

$$\underset{(2m)}{dS} = \left\{[dx^i dp_i] - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_i}{\partial x^j} - \frac{\partial V_j}{\partial x^i}\right)[dx^i dx^j]\right\}^m \qquad (m < n). \tag{2.10}$$

(2. 8) és (2. 9) felhasználásával (2. 10)

$$\underset{(2m)}{dS} = \left\{[dx^i dp_i] - \frac{1}{2}F_{ij}[dx^i dx^j]\right\}^m \qquad (m < n)$$

alakot vesz fel. E külső forma abszolút értéke tehát V_{n+1} térben, töltött részecskék trajektóriái $2m$-paraméteres X_{2m} halmazának invariáns sűrűségeként tekinthetők. E forma integrálja:

$$M(X_{2m}) = \int\left\{[dx^i dp_i] - \frac{1}{2}F_{ij}[dx^i dx^j]\right\}^m \qquad (m < n), \tag{2.11}$$

ahol az integrálás az egész X_{2m} halmazra kiterjesztendő, a tekintett mechanikai rendszer Poincaré-féle integrálinvariánsa lesz. A (2. 11) integrálokat az (1. 22) kifejezésekkel összehasonlítva, (2. 8), (1. 10) és (1. 18) figyelembevételével kapjuk a következő tételt:

3. TÉTEL. *Az általános relativitáselmélet V_{n+1} terében, elektromágneses mezőben (melynek vektor és skalárpotenciáljai csak a hely függvényei) mozgó*

töltött részecskék trajektóriái $2(n-1)$-paraméteres X halmaza bármely $2m$-paraméteres X_{2m} részhalmazának $(m<n)$ létezik invariáns mértéke (a rendszer Poincaré-féle integrálinvariánsa), amelyet a (2. 11) *integrál szolgáltat. Ez a mérték lényegében azonos a 2. tétel feltételeit kielégítő S görbék $2m$-paraméteres X_{2m} halmazának invariáns mértékével.*

Megjegyezzük, hogy az elmondottak $n=3$ esetén (amikor V_4 pszeudo-riemann-tér) reális fizikai tartalommal rendelkeznek. A fentiekből ugyanakkor az is világos, hogy az integrálgeometriában Riemann-tér esetén tekintett és feltételeinket kielégítő görbék halmazára vonatkozó invariáns mértékek létezése lényegében a mechanika variációs elvének következménye.

3. A kapott eredmények alkalmazásai

Ahhoz, hogy az 1. tétel feltételeit kielégítő görbék sűrűségének kifejezéséből e görbékre vonatkozó integrálformulákat nyerjünk, tegyük fel, hogy adott a V_n térben e görbék $2(n-1)$-paraméteres halmaza. E halmaz (1. 21) invariáns sűrűsége részletesen kiírva, a következő alakú:

$$(3.1)\qquad \underset{(2(n-1))}{dS} = \sum_i [dx^1 dp_1 \dots dx^{i-1} dp_{i-1} dx^{i+1} dp_{i+1} \dots dx^n dp_n] + \sum_{i,j} f_{ij}[dx^1 \dots dx^n dp_1 \dots dp_{i-1} dp_{i+1} \dots dp_{j-1} dp_{j+1} \dots dp_n].$$

Tekintsük most a V_n tér egy rögzített $(n-1)$-dimenziós V_{n-1} hiperfelületét és a fenti feltételeket kielégítő, V_{n-1} felületet metsző S görbéinek halmazát. E halmaz egyik eleme legyen a V_{n-1}-et adott P_0 pontban $(P_0 \in V_{n-1})$ metsző S_0 görbe. Ekkor P_0 elég kis környezetében bevezethető olyan koordinátarendszer, amelyben V_{n-1} egyenlete

$$x^n = 0$$

alakban írható. Mivel azonban a (3. 1) forma invariáns az S görbék paraméterezésével szemben, azért az S_0 görbén a V_{n-1} felülettel való P_0 metszéspont szabadon megválasztható. Ezért feltehetjük, hogy

$$x^n = 0, \quad dx^n = 0,$$

és így (3. 1) a következő alakban írható:

$$(3.2)\qquad \underset{(2(n-1))}{dS} = [dx^1 dp_1 \dots dx^{n-1} dp_{n-1}].$$

(A (3. 1) forma többi tagjaiban mindenütt szerepel dx^n, ezért a tagok nullák.)

Ily módon megállapíthatjuk, hogy az általunk tekintett speciális esetben a halmaz S görbéinek görbülete nem játszik szerepet a sűrűség kifejezésében.

Ez érthető, hiszen ekkor a V_{n-1} környezetében az S görbék halmaza lényegében ugyanolyan tulajdonságokkal rendelkezik, mint a geodetikusok halmaza.

Ily módon (3. 2) felhasználásával az 1. tétel feltételeit kielégítő, a geodetikus vonalaknál jóval általánosabb görbék halmazára könnyen bizonyíthatók az integrálgeometria bizonyos Crofton-típusú tételei.

Így pl. bizonyítható, hogy ha V_{n-1} a V_n Riemann-tér egyszerű és zárt hiperfelülete konvex az S görbék halmazára nézve (a V_{n-1}-et metsző görbének vagy két pontja, vagy egy összefüggő ívdarabja közös V_{n-1}-gyel) és véges V térfogattal rendelkezik, akkor a V_{n-1}-et metsző S görbék mértéke arányos V-vel.

Az S görbék invariáns sűrűségének (1. 22) kifejezéséből egy sor integrálformula nyerhető, amelyek részben SANTALÓ [2] geodetikus vonalak halmazára kapott bizonyos tételeinek általánosításai, részben további Crofton-típusú tételekre vezetnek. E kérdésekre a későbbiekben még visszatérünk.

Befejezésül köszönetemet szeretném kifejezni P. K. RASEVSZKIJ professzornak a fenti vizsgálatok közben adott értékes tanácsaiért.

IRODALOMJEGYZÉK

[1] W. BLASCHKE, Integralgeometrie 11. Zur Variationsrechnung, *Hamburger Abhandlungen* 11 (1936) 359—366.

[1] P. G. BERGMANN, *Introduction to the theory of relativity, 1958.*

[1] E. CARTAN, *Leçons sur les invariants intégraux,* Paris, 1922.

[1] L. P. EISENHART, *Riemannian geometry,* Princeton, 1926.

[1] M. HAIMOVICI, Géométrie intégrale sur les surfaces courbes, *C. R. Acad. Sci., Paris* **203** (1936) 230—232.

[2] M. HAIMOVICI, Géométrie intégrale sur les surfaces courbes, *Ann. Sci. de l'Univ. de Jassy,* **24** (1936) 57—74.

[1] I. M. JAGLOM, Тангенциальная метрика в друпараметрическом семействе кривых на плоскости. Труды сем. по Векторному и Тензорному Анализу, **7** (1949) 341—361.

[1] B. V. LESZOVOJ, Мера площади в друпараметрическом семействе кривых на поверхности. Труды сем. по Векторному и Тензорному Анализу **6** (1948) 447—493.

[1] P. K. RASEVSZKIJ, Полиметрическая геометрия, Труды сем. по Векторному и Тензорному Анализу **5** (1941) 21—147.

[2] P. K. RASEVSZKIJ, Геометрическая теория уравнений с частными производными, Москва—Ленинград, 1947.

[1] L. A. SANTALÓ, Integral geometry in general spaces, *Proc. International Congress of Math. Cambridge,* 1950.

[2] L. A. SANTALÓ, Integral geometry on surfaces. *Duke Math. J.* **16** (1949) 361—375.

(Beérkezett: 1961. V. 11)

SÚLYOZOTT (0, 2)-INTERPOLÁCIÓ ULTRASZFÉRIKUS POLINOMOK GYÖKEIN

Írta: BALÁZS JÁNOS

1. §. Bevezetés

TURÁN PÁL nevezte el (0, 2)-interpolációs polinomoknak azokat a legfeljebb $(2n-1)$-edfokú $R_n(x)$ polinomokat, amelyek az adott

(1.1) $$-1 \leqq \xi_n < \xi_{n-1} < \cdots < \xi_2 < \xi_1 \leqq +1$$

pontokban a következő egyenlőségeket teljesítik

(1.2) $$R_n(\xi_\nu) = \alpha_\nu, \quad R_n''(\xi_\nu) = \beta_\nu, \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

ahol α_ν, β_ν, $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ tetszés szerint megadott valós számok. A (0, 2)-interpolációs polinomok vizsgálatát TURÁN PÁL kezdeményezte és a következő kérdéseket vetette fel:

a) Megadott n különböző $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ alappont esetén *létezik-e* olyan legfeljebb $(2n-1)$-edfokú $R_n(x)$ polinom, amelyre az (1.2) alatti egyenlőségek teljesülnek?

b) Ha ilyen $R_n(x)$ polinom létezik, akkor *egyetlen egy, vagy több ilyen* polinom létezik-e?

c) Ha ilyen $R_n(x)$ polinom egyértelműen meghatározható, hogyan lehet az $R_n(x)$ polinomot további vizsgálatok szempontjából *kezelhető alakban* előállítani?

d) Ha az adott
$$-1 \leqq \xi_{n,n} < \xi_{n-1,n} < \cdots < \xi_{2,n} < \xi_{1,n} \leqq +1, \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$
alappontrendszerhez egyértelműen meghatározhatók az $R_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, interpolációs polinomok és $\alpha_{\nu n} = f(\xi_{\nu n})$, $(\nu = 1, 2, \ldots, n;$ $n = 1, 2, \ldots)$, ahol $f(x)$ egy folytonos függvényt jelent, $\beta_{\nu n}$ valós számok megfelelően adottak, akkor vajon az $R_n(x)$, $(n = 1, 2, \ldots)$, interpolációs polinomok sorozata a $[-1, +1]$ intervallumban *konvergál-e* az $f(x)$ függvényhez vagy nem; s ha konvergál, akkor az $f(x)$ függvénynek milyen feltételeket kell a folytonosságon kívül még teljesítenie?

Ha az (1.1) interpolációs alappontok, továbbá $r_1, r_2, \ldots, r_n$ pozitív egész számok és γ_{ki} értékek adottak, és keressük azt a legkisebb fokú $H(x)$ polinomot, amelyre
$$H^{(i)}(\xi_k) = \gamma_{ki}, \qquad (k = 1, 2, \ldots, n;\ i = 0, 1, 2, \ldots, r_k - 1)$$

akkor nem nehéz bebizonyítani, hogy a feladatnak egyetlen egy megoldása van. Az interpolációnak ezt a módját, ilyen általános esetben, HERMITE [1] vizsgálta első ízben. A $H(x)$ úgynevezett Hermite-féle interpolációs polinom fokszáma nem nagyobb az $m-1$ számnál, ahol

$$m = r_1 + r_2 + \cdots + r_n.$$

Abban az esetben, ha $r_1 = r_2 = \cdots = r_n = 1$; tehát ha a legfeljebb $(n-1)$-edfokú interpolációs polinom a ξ_ν, $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$, alaphelyeken a megadott $\gamma_{\nu 0} = \gamma_\nu$, $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$, értékekkel egyenlő, az interpolációs polinomok egy-egy alakját NEWTON és LAGRANGE határozták meg első ízben. Ezen interpolációs polinomok esetében a konvergencia már a múlt század vége óta a vizsgálatok tárgyát képezi. A vizsgálatok kezdeményezése RUNGE és BOREL nevéhez fűződik. E vizsgálatokban több magyar matematikus ért el igen szép eredményeket.

Ha $r_1 = r_2 = \cdots = r_n = 2$, akkor az interpolációs polinomoknak FEJÉR [2] igen jól kezelhető kifejezését adta meg és bizonyos adott

$$-1 \leqq \xi_{n,n} < \xi_{n-1,n} < \cdots < \xi_{2,n} < \xi_{1,n} \leqq +1, \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

interpolációs alappontrendszerekre igen elegánsan bebizonyította, hogy ha $\gamma_{k1} = 0$, $(k = 1, 2, \ldots, n;\ n = 1, 2, \ldots)$, és az interpolációs polinomok a $\xi_{\nu n}$, $(\nu = 1, 2, \ldots, n;\ n = 1, 2, \ldots)$, alaphelyeken egy folytonos $f(x)$ függvény értékeivel egyeznek meg, akkor a $H_n(f)$ legfeljebb $(2n-1)$-edfokú úgynevezett Hermite—Fejér-féle interpolációs polinomok sorozata egyenletesen konvergál az $f(x)$ függvényhez a $-1 \leqq x \leqq +1$ intervallumban. FEJÉR eredményei után a Hermite-féle és Hermite—Fejér-féle interpolációs polinomok esetében a konvergencia kérdés vizsgálata erőteljesen megindult és e témakörben is több hazai matematikus ért el jelentős eredményeket.

Ha a ξ_k, $(k = 1, 2, \ldots, n)$, alappontokhoz adottak a γ_{ki} értékek, ahol $k = 1, 2, \ldots, n$, az i index pedig a $0, j_1, j_2, \ldots, j_l$ értékeken fut át, ahol $j_1 < j_2 < \cdots < j_l \leqq r_k - 1$ egész számok és keressük azt a *legkisebb* fokszámú $Q(x)$ polinomot, amelyre

$$Q^{(i)}(\xi_k) = \gamma_{ki}, \qquad (k = 1, 2, \ldots, n;\ i = 0, j_1, j_2, \ldots, j_l)$$

tehát amikor a $Q(x)$ interpolációs polinom *bizonyos differenciálhányadosaira nem írunk elő semmit*, akkor az Hermite-féle interpolációval szemben ez az interpoláció ebben az értelemben *hézagos*. Az ilyen $Q(x)$ polinom létezésének, unicitásának és a konvergencia szempontjából kezelhető alak előállításának a kérdése igen nehéz feladat. Az interpolációnak ez az általános módja G. BIRKHOFF [3] dolgozatában szerepel első ízben. G. Birkhoff azonban ezt a legkisebb fokszámú $Q(x)$ polinomot nem határozta meg. Abban a speciális esetben, amikor $n=2$ PÓLYA GYÖRGY [4] meghatározott és explicit alakban előállított bizonyos úgynevezett „hézagos" interpolációs polinomokat.

A hézagos interpolációnak egyik speciális esete az, amikor a ξ_k, $(k=1,2,\ldots,n)$, alappontokban adottak a γ_{ki} értékek $(k=1,2,\ldots,n;\ i=0,2)$ és keressük azt a legkisebb, legfeljebb $(2n-1)$-edfokú $R_n(x)$ polinomot, amelyre

$$R_n^{(i)}(\xi_k)=\gamma_{ki}, \qquad (k=1,2,\ldots,n;\ i=0,2).$$

Ez a hézagos interpoláció a TURÁN PÁL által elnevezett $(0,2)$-*interpoláció*. Várható, hogy ezen interpolációs polinomoknak az

$$y''(x)+A(x)y(x)=0$$

alakú differenciálegyenletek elmélete szempontjából lesz jelentősége.

A $(0,2)$-interpoláció TURÁN PÁL által felvetett kérdéseiben az első eredmény SURÁNYI JÁNOS és TURÁN PÁL nevéhez fűződik. Az irodalomjegyzékben az [5] alatt feltüntetett dolgozatban kimutatták, hogy ha a ξ_ν, $(\nu=1,2,\ldots,n)$ alappontok a nulla pontra szimmetrikusan helyezkednek el és $n=2k+1$ páratlan szám, akkor az (1.2) alatti egyenlőségeknek eleget tevő $R_n(x)$, $(0,2)$-interpolációs polinom vagy nem létezik, vagy nem határozható meg egyértelműen. Ha az (1.1) alappontok a $P_n^{(\lambda)}(x), \lambda>-\frac{1}{2}$, ultraszférikus polinom gyökei, $n\geqq 4$ páros szám és $\lambda+\frac{1}{2}$ nem páros természetes szám, akkor mindig létezik egyetlen egy legfeljebb $(2n-1)$-edfokú $R_n(x)$ polinom. Bebizonyították továbbá, hogy ha az (1.1) alatti alappontok a $\Pi_n(x)=(1-x^2)P'_{n-1}(x)$ polinomok gyökei, ahol $P_{n-1}(x)$ az $(n-1)$-edfokú Legendre-féle polinomot jelöli és n páros szám, akkor ugyancsak egy $R_n(x)$, $(0,2)$-interpolációs polinom létezik.

Ha az (1.1) alappontok a $\Pi_n(x)$ polinom gyökei, $n=2k$, akkor az interpolációs polinomok explicit alakját TURÁN PÁL és BALÁZS JÁNOS [6] határozták meg; a [7] alatti dolgozatukban pedig ezen interpolációs polinomokra vonatkozólag konvergencia tételt bizonyítottak be. A konvergencia tételt FREUD GÉZA [8] élesítette és bebizonyította, hogy ha a $[-1,+1]$ intervallumban az $f(x)$ függvényre teljesül az

$$f(x+h)+f(x-h)-2f(x)=o(h)$$

feltétel, $\alpha_\nu=f(\xi_\nu)$, $(\nu=1,2,\ldots,n;\ n=4,6,\ldots)$ és a β_ν értékek megfelelően választottak, akkor az $R_n(x)$ $(0,2)$-interpolációs polinomok egyenletesen konvergálnak az $f(x)$ függvényhez a $-1\leqq x\leqq +1$ intervallumban, ha $n\to\infty$. Ezen tételben kimondott állítás bizonyos értelemben tovább már nem élesíthető. Ugyanis, ha $0<\varepsilon<1$, $\beta_\nu=0$, $(\nu=1,2,\ldots,n;\ n=4,6,\ldots)$, akkor megadható egy olyan $\mathrm{Lip}(1-\varepsilon)$ osztályba tartozó $f(x)$ függvény, amelyhez tartozó $R_n(x)$ $(0, 2)$-interpolációs polinomok a nulla pontban nem korlátosak. (TURÁN—BALÁZS [7]).

E vizsgálatokba bekapcsolódva R. B. SAXENA és A. SHARMA ([9], [10]) hindu matematikusok meghatározták a $\Pi_n(x)$ polinom gyökein, $n=2k$, azt a legfeljebb $(3n-1)$-edfokú $R_n(x)$, úgynevezett $(0, 1, 3)$-interpolációs polinomot, amely polinom, továbbá az első és harmadik deriváltja a megadott értékeket veszi fel az alappontokban. Konvergencia tételt is bizonyítottak. R. B. SAXENA [11] meghatározta a $(0, 1, 2, 4)$-interpolációs polinomokat ugyancsak a $\Pi_n(x)$, $n=2k$, polinom gyökein, mint alappontokban. Bizonyított továbbá konvergencia tételt is. Bizonyos értelemben módosított $(0, 2)$-interpolációs polinomokat is meghatározott R. B. SAXENA és ezekre is bizonyított konvergencia tételt.

K. K. MATHUR és A. SHARMA [12] az e^{-x^2} súlyfüggvényre a $(-\infty, +\infty)$ intervallumban ortogonális $H_n(x)$ Hermite-féle polinomok gyökeihez, mint alappontokhoz tartozó $(0, 2)$ és $(0, 1, 3)$-interpolációs polinomok egyértelmű létezését mutatták ki, ha $n=2k$. Meghatározták az interpolációs polinomok explicit alakját is, azonban az előállításban szereplő konstansok bonyolult kifejezése miatt, konvergencia tételt nem bizonyítottak.

KIS OTTÓ [13] dolgozatában komplex $(0, 2)$-interpolációval foglalkozott. Az alappontok a következők:

$$z_k = \exp i\frac{2\pi}{n}k, \qquad (k=1, 2, \ldots, n), \quad n \geqq 2.$$

Bebizonyította, hogy ezen alappontok esetén a $(0, 2)$-interpolációs polinomok mindig léteznek és egyértelműen meghatározhatók, függetlenül attól, hogy n páros vagy páratlan. Meghatározta ezen polinomok explicit alakját és kimutatja, hogy ha $f(z)$ reguláris a $|z|<1$ körben és folytonos, ha $|z|\leqq 1$; továbbá $f(e^{ix})$ eleget tesz a Dini—Lipschitz-féle feltételnek, $\alpha_k = f(z_k)$, $(k=1, 2, \ldots, n)$ és β_k értékek megfelelően választottak, akkor az $R_n(z)$, $(0, 2)$-interpolációs polinomok a $|z|\leqq 1$ körben egyenletesen konvergálnak az $f(z)$ függvényhez, ha $n\to\infty$.

A $(0, 2)$-interpolációs polinomok konvergenciáját tehát ugyanolyan feltételek biztosítják, mint a Lagrange-féle interpoláció esetében, ha az alappontok $z_k = \exp i\frac{2\pi}{n}k$, $(k=1, 2, \ldots, n)$.

A $z_k = \exp i\frac{2\pi}{n}k$, $(k=1, 2, \ldots, n)$ alappontok esetében KIS OTTÓ meghatározta a $(0, 1, 2, \ldots, r-2, r)$-interpolációs polinomokat is és konvergencia tételt bizonyított be a $(0, 1, 3)$-interpolációs polinomok esetében.

A [14] dolgozatban KIS OTTÓ trigonometrikus (0, 2)-interpolációval foglalkozott, amikor az alappontok $\xi_k = \frac{2\pi}{n} k$, $(k = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$ pontok. Ezen alappontok esetében a (0, 2)-interpolációs alappolinomok egyértelműen meghatározhatók, ha az alappontok száma páratlan. KIS OTTÓ explicit alakban előállította ezeket az interpolációs polinomokat és bebizonyította, hogy ha $f(x)$ 2π szerint periodikus folytonos függvény kielégíti az

$$f(x+h)+f(x-h)-2f(x) = o(h)$$

feltételt, $\alpha_k = f(\xi_k)$, a β_k értékek megfelelően választottak $(k = 0, 1, 2, \ldots, n-1;$ $n = 1, 3, 5, \ldots)$, akkor az $R_k(x)$, (0, 2)-interpolációs polinomok sorozata egyenletesen konvergál az egész valós tengelyen az $f(x)$ függvényhez. Kimutatja továbbá, hogy az $f(x)$ függvényre vonatkozó feltétel nem enyhíthető.

Ezzel tulajdonképpen megemlítettük a hézagos interpolációra vonatkozó eddig ismeretes valamennyi eredményt. Az eddigi vizsgálatok és eredmények mutatják, hogy a (0, 2)-interpoláció, vagy másfajta hézagos interpoláció kérdéseinek a vizsgálata nem könnyű probléma. A hézagos interpolációs polinomok nem minden adott alappontrendszer esetén léteznek és határozhatók meg egyértelműen. Ha pedig egy alappontrendszer esetében a hézagos interpolációs polinomok léteznek, egyértelműen meghatározhatók, akkor ezen interpolációs polinomok konvergencia szempontjából kezelhető alakban való előállítása jelent nagy nehézséget. Ez a kérdés lényegesen egyszerűbb abban az esetben, ha Lagrange-féle vagy Hermite-féle interpolációról van szó.

Kívánatos olyan alappontrendszer megadása, amelyhez egyértelműen léteznek (0, 2)-interpolációs polinomok és amely interpolációs polinomok a lehető legegyszerűbb alakban előállíthatók. Ez fontos kérdés nemcsak a konvergencia vizsgálat, hanem az említett differenciálegyenletek elméletében való alkalmazhatóság szempontjából is. E cél elérése érdekében vetette fel TURÁN PÁL a súlyozott (0, 2)-interpoláció gondolatát.

2. §. A súlyozott interpoláció értelmezése, a bizonyítandó tételek

Legyen adott a $[-1, +1]$ intervallumban n különböző x_ν, $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ pont, egy $\varrho(x)$ súlyfüggvény, amely a $(-1, +1)$ intervallumban kétszer folytonosan differenciálható; továbbá adottak az y_ν és y_ν'', $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ valós értékek és keressük azt a legfeljebb $(2n-1)$-edfokú $S_n(x)$ polinomot, amely a következő egyenlőségeknek tesz eleget:

$$S_n(x_\nu) = y_\nu, \ \{\varrho(x) S_n(x)\}''_{x=x_\nu} = y_\nu'', \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Ez a súlyozott (0, 2)-interpoláció értelmezése.

A kérdés az, hogyan kell a $\varrho(x)$ súlyfüggvényt és az alappontokat úgy megválasztani, hogy az $S_n(x)$ polinomok egyértelműen létezzenek és a konvergencia, valamint esetleges egyéb vizsgálatok szempontjából az $S_n(x)$ polinomok kezelhető alakban előállíthatók legyenek.

A dolgozat tárgya ilyen súlyozott (0, 2)-interpoláció vizsgálata, bizonyos mellékfeltétel teljesülése mellett, abban az esetben, ha a súlyfüggvény

$$(2.1) \qquad \varrho(x) = (1-x^2)^{\frac{1+\alpha}{2}}, \qquad (\alpha > -1),$$

és az alappontok

$$(2.2) \qquad -1 < x_n < x_{n-1} < \cdots < x_1 < +1$$

az $\omega_n(x) = P_n^{(\alpha)}(x)$, $\alpha > -1$, ultraszférikus polinom gyökei. Azzal az esettel, amikor az alappontok az Hermite-féle vagy a Laugerre-féle polinomok gyökei egy következő dolgozatban fogunk foglalkozni. Természetesen ezen esetben a $\varrho(x)$ súlyfüggvény más lesz, mint a (2. 1) súlyfüggvény.

Ultraszférikus polinomokon a következő polinomokat értjük:

$$(2.3) \qquad P_n^{(\alpha)}(x) = \left\{\frac{(-1)^n}{2^n \cdot n!} \frac{d^n}{dx^n}[(1-x^2)^{n+\alpha}]\right\}(1-x^2)^{-\alpha}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

ahol $\alpha > -1$. Ismeretes, hogy az $\omega_n(x) = P_n^{(\alpha)}(x)$ ultraszférikus polinomok gyökei mind egyszeresek és valamennyi gyök a $(-1, +1)$ intervallum belsejébe esik, azaz a gyökök felírhatók a (2. 2) alatt megjelölt módon.

Az $\omega_n(x)$ ultraszférikus polinomok kielégítik az

$$(2.4) \qquad (1-x^2)\omega_n''(x) - 2(\alpha+1)x\omega_n'(x) + n(n+2\alpha+1)\omega_n(x) = 0$$

differenciálegyenletet és érvényesek a következő egyenlőségek:

$$(2.5) \qquad (1-x^2)\omega_n'(x) = -nx\omega_n(x) + (n+\alpha)\omega_{n-1}(x),$$

$$(2.6) \qquad \int_{-1}^{1} \omega_n(x)\omega_m(x)(1-x^2)^\alpha dx =$$

$$= \begin{cases} 0, \quad \text{ha} \quad n \neq m \\ \dfrac{2^{2\alpha+1}}{2n+2\alpha+1} \cdot \dfrac{\Gamma(n+\alpha+1)^2}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+2\alpha+1)}, \quad \text{ha} \quad n = m. \end{cases}$$

A (2. 5) és (2. 6) alatti kifejezések megtalálhatók SZEGŐ GÁBOR [15] könyvének 71., illetve 67. oldalán. A (2. 6) kifejezés azt jelenti, hogy az ultraszférikus polinomok ortogonális rendszert alkotnak a $[-1, +1]$ intervallumban az $(1-x^2)^\alpha$ súlyfüggvényre vonatkozólag.

Ha $v_n(x)=(1-x^2)^{\frac{1+2\alpha}{4}}P_n^{(\alpha)}(x)$, akkor igaz a következő (lásd SZEGŐ [15], 165. oldal)

$$\lim n^{\frac{1}{2}} \max_{-1\leqq x\leqq +1} |v_n(x)|=O(1), \quad \text{ha} \quad \alpha\geqq -\frac{1}{2}. \tag{2.7}$$

Az ultraszférikus polinomokra vonatkozó felsorolt összefüggéseket a bizonyítások során fel fogjuk használni.

Ha mármost adott a (2.1) alatti súlyfüggvény, a (2.2) alatti alappontok, továbbá tetszés szerinti y_ν és y_ν'' $(\nu=1,2,\dots,n)$ valós számok, akkor keresni fogjuk azt a legfeljebb $2n$-edfokú $S_n(x)$ polinomot, amelyre teljesülnek a következő egyenlőségek

$$S_n(x_\nu)=y_\nu,\ \{\varrho(x)S_n(x)\}''_{x=x_\nu}=y_\nu'', \qquad (\nu=1,2,\dots,n) \tag{2.8}$$

azzal a mellékfeltétellel, hogy

$$S_n(0)=\sum_{\nu=1}^{n} y_\nu l_\nu(0)^2, \tag{2.9}$$

ahol

$$l_\nu(x)=\frac{\omega_n(x)}{\omega_n'(x_\nu)(x-x_\nu)}, \qquad (\nu=1,2,\dots,n), \tag{2.10}$$

az $(n-1)$-edfokú Lagrange-féle interpolációs alappolinom. Ha $s_\nu(x)$ jelöli azt a legfeljebb $2n$-edfokú polinomot, amelyre

$$s_\nu(x_k)=\begin{cases}0, & \text{ha } \nu\neq k\\ 1, & \text{ha } \nu=k\end{cases} \quad \text{és} \quad \{\varrho(x)s_\nu(x)\}''_{x=x_k}=0, \tag{2.11}$$
$$(\nu=1,2,\dots,n;\ k=1,2,\dots,n)$$

és $\sigma_\nu(x)$ pedig azt a legfeljebb $2n$-edfokú polinomot, amelyre

$$\sigma_\nu(x_\nu)=0, \quad \{\varrho(x)\sigma_\nu(x)\}''_{x=x_k}=\begin{cases}0, & \text{ha } \nu\neq k\\ 1, & \text{ha } \nu=k,\end{cases} \tag{2.12}$$
$$(k=1,2,\dots,n;\ \nu=1,2,\dots,n)$$

akkor a (2.8) egyenlőségeknek eleget tevő $S_n(x)$ polinom nyilvánvalóan a következő módon írható fel:

$$S_n(x)=\sum_{\nu=1}^{n} y_\nu s_\nu(x)+\sum_{\nu=1}^{n} y_\nu''\sigma_\nu(x), \tag{2.13}$$

ha

$$S_n(0)=\sum_{\nu=1}^{n} y_\nu s_\nu(0)+\sum_{\nu=1}^{n} y_\nu''\sigma_\nu(0)=\sum_{\nu=1}^{n} y_\nu l_\nu(0)^2. \tag{2.14}$$

Bebizonyítjuk a következő tételeket:

I. tétel. *Ha* $n=2k+1$ *páratlan szám, akkor a tetszés szerint megadott* y_ν *és* y''_ν, $(\nu=1,2,\ldots,n)$, *valós értékekre, a* $\varrho(x)=(1-x^2)^{\frac{1+\alpha}{2}}$, $\alpha>-1$ *súlyfüggvény mellett olyan legfeljebb* $2n$*-edfokú* $S_n(x)$ *polinom sohasem határozható meg egyértelműen, amelyre*

$$S_n(x_\nu)=y_\nu,\quad \{\varrho(x)S_n(x)\}''_{x=x_\nu}=y''_\nu,\qquad (\nu=1,2,\ldots,n)$$

és

$$S_n(0)=\sum_{\nu=1}^{n} y_\nu l_\nu(0)^2,$$

ahol x_ν, $(\nu=1,2,\ldots,n)$ *az* $\omega_n(x)=P_n^{(\alpha)}(x)$ *ultraszférikus polinom gyökeit jelenti és* $l_\nu(x)$ *a* (2. 10) *alatti kifejezés.*

II. tétel. *Ha* $n=2k$ *páros szám, akkor a tetszés szerint megadott* y_ν *és* y''_ν, $(\nu=1,2,\ldots,n)$ *valós értékekre a* $\varrho(x)=(1-x^2)^{\frac{1+\alpha}{2}}$, $\alpha>-1$, *súlyfüggvény mellett egy és csak egy olyan legfeljebb* $2n$*-edfokú* $S_n(x)$ *polinom létezik, amelyre*

$$S_n(x_\nu)\,y_\nu,\quad \{\varrho(x)S_n(x)\}''_{x=x_\nu}=y''_\nu,\qquad (\nu=1,2,\ldots,n) \tag{2. 15}$$

és

$$S_n(0)=\sum_{\nu=1}^{n} y_\nu l_\nu(0)^2, \tag{2. 16}$$

ahol x_ν, $(\nu=1,2,\ldots,n)$, *az* $\omega_n(x)=P_n^{(\alpha)}(x)$ *ultraszférikus polinom gyökeit jelenti és* $l_\nu(x)$ *a* (2. 10) *alatti kifejezés.*

Ha a (2. 9) alatti mellékfeltétel teljesülését nem követeljük meg és keressük azt a legfeljebb $(2n-1)$-edfokú $S_n^*(x)$ polinomot, amelyre

$$S_n^*(x_\nu)=y_\nu \quad \text{és} \quad \{\varrho(x)S_n^*(x)\}''_{x=x_\nu}=y''_\nu,\qquad (\nu=1,2,\ldots,n), \tag{2. 17}$$

ahol x_ν, $(\nu=1,2,\ldots,n)$, az $\omega_n(x)$ ultraszférikus polinom gyökeit jelenti, akkor megadhatók olyan y_ν és y''_ν, $(\nu=1,2,\ldots,n)$ valós értékek, amelyekhez a (2. 17) egyenlőségeknek eleget tevő legfeljebb $(2n-1)$-edfokú polinom nem létezik. Ezt az állítást be fogjuk bizonyítani.

A (2. 9) alatti mellékfeltételt úgy választottuk meg, hogy a (2. 11), illetve a (2. 12) egyenlőségeknek eleget tevő $s_\nu(x)$ úgynevezett *elsőfajú,* illetve a $\sigma_\nu(x)$ úgynevezett *másodfajú* alappolinomok a lehető legegyszerűbb alakban legyenek előállíthatók.

III. tétel. *Ha* $n=2k$ *páros szám, akkor a II. tétel feltételeit kielégítő legfeljebb* $2n$*-edfokú* $S_n(x)$ *polinomok a következő módon írhatók fel*

$$S_n(x)=\sum_{\nu=1}^{n} y_\nu s_\nu(x)+\sum_{\nu=1}^{n} y''_\nu \sigma_\nu(x),\qquad (n=2,4,6,\ldots) \tag{2. 18}$$

ebben az $s_\nu(x)$, $(\nu=1,2,\dots,n)$, *legfeljebb* $2n$*-edfokú elsőfajú alappolinomok kifejezése*

$$s_\nu(x)=l_\nu(x)^2+\frac{\omega_n(x)}{\omega_n'(x_\nu)}\int_0^x\frac{l_\nu(t)(a_\nu t+b_\nu)-l_\nu'(t)}{t-x_\nu}dt, \tag{2.19}$$

ahol

$$a_\nu x_\nu+b_\nu=l_\nu'(x_\nu),\quad a_\nu=\frac{1+\alpha(1-x_\nu^2-\alpha x_\nu^2)}{2(1-x_\nu^2)^2}, \tag{2.20}$$

és a $\sigma_\nu(x)$, $(\nu=1,2,\dots,n)$, *legfeljebb* $2n$*-edfokú elsőfajú alappolinomok kifejezése*

$$\sigma_\nu(x)=\frac{\omega_n(x)}{2(1-x_\nu^2)^{\frac{1+\alpha}{2}}\omega_\nu'(x_\nu)}\int_0^x l_\nu(t)dt. \tag{2.21}$$

A (2.19) és (2.21) kifejezések miatt rögtön látható, hogy az

$$S_n(0)=\sum_{\nu=1}^n y_\nu l_\nu(0)^2$$

feltétel teljesül.

IV. tétel. *Ha az* $f(x)$ *függvény olyan, hogy a* $-1\leqq x\leqq+1$ *intervallumban* $f'(x)$ *kielégíti az*

$$|f'(x_1)-f'(x_2)|\leqq M|x_1-x_2|^\mu,\qquad -1\leqq x_1<x_2\leqq+1$$

Lipschitz-féle feltételt, ahol $\frac{1}{2}<\mu\leqq1$ *és* $y_\nu=f(x_\nu)$, $y_\nu''=o(\sqrt{n})(1-x_\nu^2)^{\frac{\alpha-3}{2}}$, $(\nu=1,2,\dots,n)$, *akkor a* $-1<x<+1$ *intervallumban a* (2.18) *alatti* $S_n(x)$, $(n=2,4,6,\dots)$ *súlyozott* (0, 2)*-interpolációs polinomok sorozata az* $f(x)$ *függvényhez konvergál, ha* $\alpha>0$. *Ez a konvergencia egyenletes a* $-1+\varepsilon\leqq x\leqq1-\varepsilon$ *intervallumban, ahol* $0<\varepsilon<1$.

A (2.19) és a (2.21) alatti kifejezések mutatják, hogy itt az interpolációs alappolinomok alakja egyszerűbb, mint a $\Pi_n(x)$ polinom gyökeihez, mint alappontokhoz tartozó (0, 2)-interpolációs alappolinomok (lásd TURÁN—BALÁZS [6]). A konvergencia tétel azonban itt az $f(x)$ függvényre vonatkozó erősebb feltételek mellett bizonyítható, mint a $\Pi_n(x)$ gyökeihez, mint alappontokhoz tartozó (0, 2)-interpolációs polinomok esetén (lásd TURÁN—BALÁZS [7] és FREUD [8]).

A IV. tételt abban az esetben bizonyítjuk be, amikor az $\omega_n(x)=P_n^{(\alpha)}(x)$ ultraszférikus polinomban az α paraméter nagyobb mint nulla. A konvergencia bizonyítása ebben az esetben egyszerű eszközök segítségével történhet, míg a $-1<\alpha\leqq0$ esetben az ultraszférikus polinomokra vonatkozó aszimptotikus kifejezésekre volna szükség, amelyek (lásd SZEGŐ [15] könyvét) meglehetősen nehéz télelek bizonyítása útján nyerhetők. A $\varrho(x)=(1-x^2)^{\frac{1+\alpha}{2}}$ súlyfüggvénnyel történő (0, 2)-interpoláció tehát az $\alpha>0$ esetben egyszerűbb, ellentétben a Lagrange- és Hermite—Fejér-féle interpolációval, ahol éppen a $-1<\alpha\leqq 0$ esetben bizonyítható egyszerű eszközökkel a konvergencia tétel.

3. §. Az első, a második és a harmadik tétel bizonyítása

A bizonyítások során két, egyszerűen nyerhető összefüggésre lesz szükség.

a) Ha $\varrho(x)=(1-x^2)^{\frac{1+\alpha}{2}}$ és ha az $\omega_n(x)=P_n^{(\alpha)}(x)$ n-edfokú ultraszférikus polinom gyökeit x_ν, $(\nu=1,2,\dots,n)$ jelöli, akkor

$$\{\varrho(x)\omega_n(x)\}''_{x=x_\nu}=0, \qquad (\nu=1,2,\dots,n). \tag{3.1}$$

Ugyanis

$$\{\varrho(x)\omega_n(x)\}''_{x=x_\nu}=$$

$$=\{\varrho''(x)\omega_n(x)-2(\alpha+1)x(1-x^2)^{\frac{\alpha-1}{2}}\omega_n'(x)+(1-x^2)^{\frac{1+\alpha}{2}}\omega_n''(x)\}_{x=x_\nu}=$$

$$=(1-x_\nu^2)^{\frac{\alpha-1}{2}}\{(1-x^2)^{\frac{1-\alpha}{2}}\varrho''(x)\omega_n(x)-2(\alpha+1)x\omega_n'(x)+(1-x^2)\omega_n''(x)\}_{x=x_\nu}=0,$$

$$(\nu=1,2,\dots,n)$$

figyelembe véve a (2. 4) differenciálegyenletet.

b) Ha

$$l_\nu(x)=\frac{\omega_n(x)}{\omega_n'(x_\nu)(x-x_\nu)}, \qquad (\nu=1,2,\dots,n) \tag{3.2}$$

az $\omega_n(x)$ ultraszférikus polinom x_ν, $(\nu=1,2,\dots,n)$ gyökeihez tartozó Lagrange-féle interpolációs alappolinom, akkor mivel

$$(x-x_\nu)l_\nu(x)=\frac{1}{\omega_n'(x_\nu)}\omega_n(x), \qquad (\nu=1,2,\dots,n) \tag{3.3}$$

ezért a (2. 4) differenciálegyenlet alapján

$$\begin{gathered}(1-x^2)(x-x_\nu)l_\nu''(x)+2(1-x^2)l_\nu'(x)-2(\alpha+1)x(x-x_\nu)l_\nu'(x)-\\-2(\alpha+1)xl_\nu(x)+n(n+2\alpha+1)(x-x_\nu)l_\nu(x)=0.\\(\nu=1,2,\dots,n)\end{gathered} \tag{3.4}$$

Szükségünk lesz a következő két segédtételre:

I. segédtétel. *Ha* $\varrho(x)=(1-x^2)^{\frac{1+\alpha}{2}}$, $\alpha>-1$, *és ha* x_ν, $(\nu=1,2,\ldots,n)$ *az* $\omega_n(x)=P_n^{(\alpha)}(x)$ *n-edfokú ultraszférikus polinom gyökeit jelöli, akkor a*

$$\sigma_\nu(x)=\frac{\omega_n(x)}{2(1-x_\nu^2)^{\frac{1+\alpha}{2}}\omega_n'(x_\nu)}\int_0^x l_\nu(t)\,dt, \qquad (\nu=1,2,\ldots,n). \tag{3.5}$$

2n-edfokú olyan polinomok, amelyekre

$$\sigma_\nu(x_j)=0, \qquad (j=1,2,\ldots,n;\ \nu=1,2,\ldots,n) \tag{3.6}$$

és

$$\{\varrho(x)\sigma_\nu(x)\}''_{x=x_j}=\begin{cases}0, & \text{ha } j\neq\nu\\ 1, & \text{ha } j=\nu.\end{cases} \qquad (j=1,2,\ldots,n;\ \nu=1,2,\ldots,n). \tag{3.7}$$

Bizonyítás: A (3.2) miatt $\sigma_\nu(x)$ nyilván $2n$-edfokú polinom. A (3.6) alatti egyenlőség nyilvánvaló $\omega_n(x_j)=0$, $(j=1,2,\ldots,n)$ miatt.

A (3.5) alapján

$$\{\varrho(x)\sigma_\nu(x)\}''_{x=x_j}=\frac{1}{2(1-x_\nu^2)^{\frac{1+\alpha}{2}}\omega_n'(x_\nu)}\Big\{[\varrho(x)\omega_n(x)]''\int_0^x l_\nu(t)\,dt+$$

$$+2[\varrho'(x)\omega_n(x)+\varrho(x)\omega_n'(x)]l_\nu(x)+\varrho(x)\omega_n(x)l_\nu'(x)\Big\}_{x=x_j}=\begin{cases}0, & \text{ha } j\neq\nu\\ 1, & \text{ha } j=\nu,\end{cases}$$

figyelembe véve (3.1) és azt, hogy egyrészt $\omega_n(x_j)=0$, $(j=1,2,\ldots,n)$, másrészt (3.2) miatt

$$l_\nu(x_j)=\begin{cases}0, & \text{ha } j\neq\nu\\ 1, & \text{ha } j=\nu\end{cases} \qquad (j=1,2,\ldots,n;\ \nu=1,2,\ldots,n). \tag{3.8}$$

Ezzel a segédtételt igazoltuk.

II. segédtétel. *Ha* $\varrho(x)=(1-x^2)^{\frac{1+\alpha}{2}}$, $\alpha>-1$, és ha x_ν, $(\nu=1,2,\ldots,n)$ *az* $\omega_n(x)=P_n^{(\alpha)}(x)$ *n-edfokú ultraszférikus polinom gyökeit jelöli, akkor az*

$$s_\nu(x)=l_\nu(x)^2+\frac{\omega_n(x)}{\omega_n'(x_\nu)}\int_0^x\frac{l_\nu(t)(a_\nu t+b_\nu)-l_\nu'(t)}{t-x_\nu}\,dt, \tag{3.9}$$

ahol

$$a_\nu x_\nu+b_\nu=l_\nu'(x_\nu),\quad a_\nu=\frac{1+\alpha(1-x_\nu^2-\alpha x_\nu^2)}{2(1-x_\nu^2)^2} \tag{3.10}$$

$$(\nu=1,2,\ldots,n),$$

$2n$-edfokú olyan polinomok, amelyekre

$$s_\nu(x_j)=\begin{cases}0, & \text{ha } j\neq\nu\\ 1, & \text{ha } j=\nu\end{cases} \qquad (j=1,2,\dots,n;\ \nu=1,2,\dots,n) \tag{3.11}$$

és

$$\{\varrho(x)s_\nu(x)\}''_{x=x_j}=0, \qquad (j=1,2,\dots,n;\ \nu=1,2,\dots,n). \tag{3.12}$$

Bizonyítás: A (3.2) és (3.10) miatt $s_\nu(x)$ nyilván $2n$-edfokú polinom. Az $\omega_n(x_j)=0$, $(j=1,2,\dots,n)$ és (3.8) miatt (3.11) nyilván igaz. A (3.9) alapján (3.8) és (3.1) miatt, ha $x_j\neq x_\nu$ akkor

$$\begin{aligned}\{\varrho(x)s_\nu(x)\}''_{x=x_j}&=\{\varrho''(x)l_\nu(x)^2+4\varrho'(x)l_\nu(x)l'_\nu(x)+\\&+\varrho(x)[2l''_\nu(x)l_\nu(x)+2l'_\nu(x)^2]\}_{x=x_j}+\\&+\frac{1}{\omega'_n(x_\nu)}\Bigg\{[\varrho(x)\omega_n(x)]''\int_0^x\frac{l_\nu(t)(a_\nu t+b_\nu)-l'_\nu(t)}{t-x_\nu}\,dt+\\&+2[\varrho'(x)\omega_n(x)+\varrho(x)\omega'_n(x)]\frac{l_\nu(x)(a_\nu x+b_\nu)-l'_\nu(x)}{x-x_\nu}+\\&+\varrho(x)\omega_n(x)\left[\frac{l_\nu(x)(a_\nu x+b_\nu)-l'_\nu(x)}{x-x_\nu}\right]'\Bigg\}_{x=x_j}=\\&=2\varrho(x_j)l'_\nu(x_j)^2-2\varrho(x_j)\frac{\omega'_n(x_j)}{\omega'_n(x_\nu)(x_j-x_\nu)}l'_\nu(x_j)=0\end{aligned} \tag{3.13}$$

figyelembe véve (3.2).

Ha pedig $x_j=x_\nu$ akkor (3.13) alapján, (3.10) és (3.8) miatt

$$\begin{aligned}\{\varrho(x)s_\nu(x)\}''_{x=x_\nu}&=\varrho''(x_\nu)+4\varrho'(x_\nu)l'_\nu(x_\nu)+2\varrho(x_\nu)l''_\nu(x_\nu)+\\&+2\varrho(x_\nu)l'_\nu(x_\nu)^2+2\varrho(x_\nu)[l'_\nu(x_\nu)(a_\nu x_\nu+b_\nu)+a_\nu-l''_\nu(x_\nu)]=\\&=\varrho''(x_\nu)+4\varrho'(x_\nu)l'_\nu(x_\nu)+4\varrho(x_\nu)l'_\nu(x_\nu)^2+2\varrho(x_\nu)a_\nu.\end{aligned} \tag{3.14}$$

Mivel pedig

$$\varrho'(x)=[(1-x^2)^{\frac{1+\alpha}{2}}]'=-(1+\alpha)x(1-x^2)^{\frac{\alpha-1}{2}}, \tag{3.15}$$

és

$$\varrho''(x)=-(1-x^2)^{\frac{\alpha-3}{2}}[(1+\alpha)(1-x^2)+(1-\alpha^2)x^2]; \tag{3.16}$$

továbbá (3.2) és (2.4) alapján

$$l'_\nu(x_\nu)=\frac{\omega''_n(x_\nu)}{2\omega'_n(x_\nu)}=\frac{(\alpha+1)x_\nu}{1-x_\nu^2}, \tag{3.17}$$

ezért (3. 14), (3. 16), (3. 15), (3. 17) és (3. 10) miatt

$$\{\varrho(x)s_\nu(x)\}''_{x=x_\nu}=$$

$$(3.18)\qquad =(1-x_\nu^2)^{\frac{\alpha-3}{2}}\{-(1+\alpha)(1-x_\nu^2)-(1-\alpha^2)x_\nu^2-4(1+\alpha)^2x_\nu^2+$$
$$+4(1+\alpha)^2x_\nu^2+1+\alpha(1-x_\nu^2-\alpha x_\nu^2)\}=0.$$

A (3. 18) és a (3. 13) a (3. 12) egyenlőségek érvényességét bizonyítják. — Ezzel a II. segédtételt igazoltuk.

Ezek után rátérhetünk az I. tétel igazolására. Legyen $n=2k+1$ páratlan szám és x_ν $(\nu=1,2,\ldots,n)$ az $\omega_n(x)=P_n^{(\alpha)}(x)$ n-edfokú ultraszférikus polinom gyökei, továbbá y_ν és y_ν'', $(\nu=1,2,\ldots,n)$ tetszés szerint megadott valós értékek. Az I. és II. segédtétel és (3. 1) alapján nyilvánvalóan, ha C tetszés szerinti konstans, az

$$(3.19)\qquad S_n(x)=\sum_{\nu=1}^{n}y_\nu s_\nu(x)+\sum_{\nu=1}^{n}y_\nu''\sigma_\nu(x)+C\omega_n(x)$$

olyan legfeljebb $2n$-edfokú polinom, amelyre egyrészt

$$S_n(x_\nu)=y_\nu,\quad \{\varrho(x)S_n(x)\}''_{x=x_\nu}=y_\nu,\qquad (\nu=1,2,\ldots,n)$$

másrészt viszont $n=2k+1$ miatt $\omega_n(0)=0$, és ezért az I. és II. segédtétel miatt az

$$S_n(0)=\sum_{\nu=1}^{n}y_\nu l_\nu(0)^2$$

feltétel teljesül. Mivel pedig a (3. 19) kifejezésben C tetszés szerinti konstans lehet, ezzel az I. tételt igazoltuk.

A II. és III. tétel bizonyításához tételezzük fel, hogy $n=2k$ páros szám, x_ν, $(\nu=1,2,\ldots,n)$ az $\omega_n(x)=P_n^{(\alpha)}(x)$ n-edfokú ultraszférikus polinom gyökei, továbbá y_ν, y_ν'', $(\nu=1,2,\ldots,n)$ tetszés szerint megadott valós értékek.

Az I. és II. segédtétel alapján nyilvánvalóan az

$$(3.20)\qquad S_n(x)=\sum_{\nu=1}^{n}y_\nu s_\nu(x)+\sum_{\nu=1}^{n}y_\nu''\sigma_\nu(x)$$

olyan legfeljebb $2n$-edfokú polinom, amely a II. tétel (2. 15) és (2. 16) egyenlőségeinek eleget tesz és a III. tétel (2. 18), (2. 19), (2. 20) és (2. 21) alatti kifejezéseivel megegyezik. Hátra van még annak a kimutatása, hogy a (3. 20) alatti polinom az egyetlen olyan legfeljebb $2n$-edfokú polinom, amely a II. tétel állításainak eleget tesz. Ennek igazolása indirekt úton történik.

Tételezzük fel tehát, hogy több ilyen polinom létezik, vagyis a (3. 20) alatti $S_n(x)$ polinomon kívül létezik legalább még egy olyan $Q_n(x)$ legfeljebb $2n$-edfokú polinom, amelyre a (2. 15) és a (2. 16) alatti egyenlőségekhez hasonlóan

$$Q_n(x_\nu)=y_\nu \quad \text{és} \quad \{\varrho(x)Q_n(x)\}''_{x=x_\nu}=y''_\nu, \qquad (\nu=1,2,\dots,n)$$

és

$$Q_n(0)=\sum_{\nu=1}^{n} y_\nu l_\nu(0)^2.$$

Ekkor azonban

$$S_n(x_\nu)-Q_\nu(x_\nu)=0; \quad \{\varrho(x)[S_n(x)-Q_n(x)]\}''_{x=x_\nu}=0, \qquad (\nu=1,2,\dots,n) \tag{3.21}$$

és

$$S_n(0)-Q_n(0)=0 \tag{3.22}$$

lenne.

A (3.21) miatt

$$S_n(x)-Q_n(x)=\omega_n(x)g_n(x)$$

alakban lenne felírható, ahol $g_n(x)$ legfeljebb n-edfokú polinom és $n=2k$ miatt $\omega_n(0)\neq 0$, ezért (3.22) miatt

$$g_n(0)=0 \tag{3.23}$$

kell hogy legyen.

Másrészt teljesülnie kell a

$$\{\varrho(x)[S_n(x)-Q_n(x)]\}''_{x=x_\nu}=\{\varrho(x)\omega_n(x)g_n(x)\}''_{x=x_\nu}=$$
$$=\{\varrho(x)\omega_n(x)\}''_{x=x_\nu}g_n(x_\nu)+2\{[\varrho(x)\omega'_n(x)+\varrho'(x)\omega_n(x)]g'_n(x)\}_{x=x_\nu}+$$
$$+\varrho(x_\nu)\omega_n(x_\nu)g''_n(x_\nu)=0 \qquad (\nu=1,2,\dots,n)$$

egyenlőségeknek. Ebből, mivel $\varrho(x)=(1-x^2)^{\frac{1+\alpha}{2}}$, (3.1) miatt

$$g'_n(x_\nu)=0, \qquad (\nu=1,2,\dots,n)$$

adódnék, ami csak úgy lehetséges, ha $g_n(x)\equiv C$. Mivel pedig (3.23) miatt $g_n(0)=0$ kell hogy legyen, ebből az adódik, hogy $g_n(x)\equiv 0$, azaz $S_n(x)\equiv Q_n(x)$.

Ezzel a II. és a III. tétel állításait is igazoltuk.

A II. és III. tételből egy fontos következmény adódik, amelyet a IV. tétel bizonyításánál fel fogunk használni.

Következmény: *Ha $r(x)$ egy tetszés szerinti, legfeljebb $2n$-edfokú polinom, akkor*

$$r(x)\equiv\sum_{\nu=1}^{n} r(x_\nu)s_\nu(x)+\sum_{\nu=1}^{n}\{\varrho(x)r(x)\}''_{x=x_\nu}\sigma_\nu(x)+C\omega_n(x), \tag{3.24}$$

ahol

$$C=\frac{1}{\omega_n(o)}\left\{r(o)-\sum_{\nu=1}^{n} r(x_\nu)l_\nu(o)^2\right\}. \tag{3.25}$$

Bizonyítás: Legyen ugyanis

$$R(x)\equiv r(x)-\sum_{\nu=1}^{n} r(x_\nu)s_\nu(x)-\sum_{\nu=1}^{n}\{\varrho(x)r(x)\}''_{x=x_\nu}\varrho_\nu(x), \tag{3.26}$$

akkor nyilván (3.6) és (3.11) miatt

$$R(x_j)=0, \qquad (j=1,2,\dots,n)$$

és ezért

$$R(x)=\omega_n(x)g_n(x) \tag{3.27}$$

alakban írható, ahol $g_n(x)$ legfeljebb n-edfokú polinom. Viszont (3.26), (3.27), (3.12), (3.7) és (3.1) miatt

$$\{\varrho(x)R(x)\}''_{x=x_j}=0=2\varrho(x_j)\omega_n'(x_j)g_n'(x_j), \qquad (j=1,2,\dots,n)$$

ami csak úgy lehetséges, hogy $g_n'(x)\equiv 0$, azaz $g_n(x)\equiv C$, vagyis (3.27) és (3.26) miatt

$$C\omega_n(x)\equiv r(x)-\sum_{\nu=1}^{n} r(x_\nu)s_\nu(x)-\sum_{\nu=1}^{n}\{\varrho(x)r(x)\}''_{x=x_\nu}o_\nu(x),$$

ez pedig a (3.24) alatti kifejezés. A C konstans (3.25) alatt megjelölt értéke pedig következik a (2.19) és (2.21) kifejezésekből.

Hátra van még annak a kimutatása, hogy ha a II. tételben a (2.16) alatti egyenlőség fennállását nem követeljük meg, és keressük azt a legfeljebb $(2n-1)$-edfokú $S_n^*(x)$ polinomot, amelyre a (2.17) egyenlőségek érvényesek, akkor könnyen kimutatható, hogy ilyen $S_n^*(x)$ polinom általában nem létezik.

Válasszuk ugyanis az y értékeket a következő módon, ha ν egy fix egész szám, amelyre $1\leqq\nu\leqq n$,

$$y_k=0 \quad \text{és} \quad y_k''=\begin{cases}0, & \text{ha} \quad \nu\neq k\\ 1, & \text{ha} \quad \nu=k\end{cases} \qquad (k=1,2,\dots,n)$$

és keresni fogjuk azt a legfeljebb $(2n-1)$-edfokú $S_n^*(x)$ polinomot, amelyre egyrészt

$$S_n^*(x_k)=0, \qquad (k=1,2,\dots,n) \tag{3.28}$$

másrészt

$$\{\varrho(x)S_n^*(x)\}''_{x=x_k}=\begin{cases}0, & \text{ha} \quad k\neq\nu\\ 1, & \text{ha} \quad k=\nu\end{cases} \qquad (k=1,2,\dots,n). \tag{3.29}$$

A (3.28) miatt

$$S_n^*(x)=\omega_n(x)g_{n-1}(x),$$

ahol $g_{n-1}(x)$ legfeljebb $(n-1)$-edfokú polinom. Ebből viszont (3.1) miatt a

$$\{\varrho(x)S_n^*(x)\}''_{x=x_k}=2\varrho(x_k)\omega_n'(x_k)g_{n-1}'(x_k)=0,$$

$$(k=1,2,\dots,\nu-1,\nu+1,\dots,n)$$

csak úgy lehet, ha $g'_{k-1}(x)\equiv 0$. Ha azonban $g'_{n-1}(x)\equiv 0$, akkor (3. 1) miatt

$$\{\varrho(x)S_n^*(x)\}''_{x=x_\nu}=2\varrho(x_\nu)\omega'_n(x_\nu)g'_{n-1}(x_\nu)=0$$

és nem eggyel egyenlő, azaz a (3. 29) egyenlőség nem teljesülhet. Ezzel állításunkat igazoltuk.

4. §. A másodfajú alappolinomok becslése

A IV. tétel bizonyításához szükség lesz a másodfajú alappolinomokra vonatkozó egy becslésre. A becsléshez pedig bebizonyítjuk a következő segédtételt.

III. segédtétel. *A* $-1<x<+1$ *intervallumban érvényes a következő egyenlőtlenség*

$$V(x)\overset{\text{def}}{=}\frac{1}{1-x^2}-\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{1-x_\nu^2}h_\nu(x)-\sum_{\nu=1}^{n}\frac{2x_\nu}{(1-x_\nu^2)^2}\mathfrak{h}_\nu(x)\geqq 0, \tag{4. 1}$$

ahol

$$h_\nu(x)=\left(1-\frac{\omega''_n(x_\nu)}{\omega'_n(x_\nu)}(x-x_\nu)\right)l_\nu(x)^2,\quad \mathfrak{h}_\nu(x)=(x-x_\nu)l_\nu(x)^2, \tag{4. 2}$$

és $l_\nu(x)$ *a* (3. 2) *alatti kifejezés.*

Bizonyítás: Az $\omega_n(x)$ ultraszférikus polinom x_ν, $(\nu=1,2,\ldots,n)$ gyökeire ugyanis a definíció miatt

$$V(x_\nu)=0 \quad \text{és} \quad V'(x_\nu)=0, \qquad (\nu=1,2,\ldots,n).$$

Ez azt jelenti, hogy a $V(x)$ függvénynek a $-1<x<+1$ intervallumban legalább $2n$ nulla helye van az x_ν gyökökön. Ha tehát volna egy olyan ξ pont a $(-1,+1)$ intervallum belsejében, ahol $V(\xi)<0$ lenne, akkor mivel $\lim\limits_{|x|\to 1-0} V(x)=+\infty$, a függvénynek volna legalább még egy, azaz összesen legalább $(2n+1)$ nulla helye a $(-1,+1)$ intervallum belsejében. A Rolle-féle tétel miatt ezért a $V^{(2n)}(x)$ függvénynek lenne legalább egy nulla helye a $(-1,+1)$ intervallum belsejében. Ez azonban ellentmondásra vezet, ugyanis egyrészt a (4. 1) alatti definíció miatt, másrészt mivel a $-1<x<+1$ intervallumban

$$\frac{1}{1-x^2}=\sum_{j=1}^{\infty}x^{2j}$$

ezért a $-1<x<+1$ intervallumban

$$V(x)^{(2n)}=\{(1-x^2)^{-1}\}^{(2n)}>0.$$

Ezzel a III. segédtételt igazoltuk.

Következmény: *Ha* $\alpha>0$, *akkor mivel az* $\omega_n(x)$ *ultraszférikus polinomok ortogonális rendszert alkotnak a* $-1\leqq x\leqq+1$ *intervallumban, ezért* (4.1) és (4.2) *alapján*

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{\alpha-1}dx\geqq\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{1-x_\nu^2}\int_{-1}^{1}l_\nu(x)^2(1-x^2)^\alpha dx.$$

Mivel pedig (lásd Szegő [15] 343. o.)

$$\int_{-1}^{1}l_\nu(x)^2(1-x^2)^\alpha dx=2^{2\alpha+1}\frac{\Gamma(n+\alpha+1)^2}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+2\alpha+1)}\cdot\frac{1}{(1-x_\nu^2)\omega_n'(x_\nu)^2},\tag{4.3}$$

$$(\nu=1,2,\ldots,n)$$

ezért

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{\alpha-1}dx\geqq 2^{2\alpha+1}\frac{\Gamma(n+\alpha+1)^2}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+2\alpha+1)}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{(1-x_\nu^2)^2\omega_n'(x_\nu)^2}.\tag{4.4}$$

Könnyű bebizonyítani (lásd pl. Natanszon [16] 312. o.), ha $\beta>-1$, $\gamma>-1$, akkor minden természetes n számra

$$\frac{\Gamma(n+1+\beta+\gamma)}{\Gamma(n+1+\beta)}<dn^\gamma,\tag{4.5}$$

ahol d csak a β és γ értékétől függő állandó.

A (4.5) alapján az ismert $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$ összefüggés figyelembe vételével

$$\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(n+1+2\alpha)}{\Gamma(n+1+\alpha)^2}=\frac{1}{n+1}\cdot\frac{\Gamma(n+1+\alpha+1-\alpha)}{\Gamma(n+1+\alpha)}\cdot\frac{\Gamma(n+1+2\alpha)}{\Gamma(n+1+\alpha)}<d_1.\tag{4.6}$$

Ez a becslés lényegében pontos, mert, ha k olyan fix egész szám, amelyre $k-\alpha>-1$ és $\alpha>-\frac{1}{2}$,

$$\frac{\Gamma(n+1+\alpha)^2}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+1+2\alpha)}=\frac{\Gamma(n+1+\alpha)}{\Gamma(n+1)}\cdot\frac{1}{(n+k+\alpha)\cdots(n+1+\alpha)}\cdot\frac{\Gamma(n+1+2\alpha+k-\alpha)}{\Gamma(n+1+2\alpha)}<d_2,\tag{4.7}$$

ahol d_1 és d_2 csak az α értékétől függő konstansok.

A (4. 4) és (4. 6) alapján

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{(1-x_\nu^2)^2 \omega_n'(x_\nu)^2} < d_3, \tag{4.8}$$

ahol d_3 ismét csak az α értékétől függő konstans.

Ezek után rátérhetünk a másodfajú $\sigma_\nu(x)$ interpolációs polinomokra vonatkozó becslés igazolására.

IV. segédtétel. *A* $-1+\varepsilon \leqq x \leqq 1-\varepsilon$ *intervallumban, ahol* $0<\varepsilon<1$ *(ε egyébként tetszés szerinti), érvényes a következő egyenlőtlenség, ha* $\alpha>0$

$$\sum_{\nu=1}^{n} (1-x_\nu^2)^{\frac{\alpha-3}{2}} |\sigma_\nu(x)| \leqq c_7 \frac{1}{\sqrt{n}}, \qquad (n=2,4,6,\dots) \tag{4.9}$$

ahol $\sigma_\nu(x)$ *a* (2. 21) *másodfajú interpolációs alappolinomot jelöli és* c_7 *(a későbbiekben* $c_j, j=1,2,3,\dots$ *is) csak az* α *és* ε *értékétől függő konstans.*

Bizonyítás: A (2.21) alapján

$$\begin{aligned}\sum_{\nu=1}^{n} (1-x_\nu^2)^{\frac{\alpha-3}{2}} |\sigma_\nu(x)| &= \frac{|\omega_n(x)|}{2} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{(1-x_\nu^2)^2 |\omega_n'(x_\nu)|} \left| \int_0^x l_\nu(t)\,dt \right| = \\ &= \frac{|\omega_n(x)|}{2} \left\{ \sum_{|x_\nu| \geqq 1-\frac{\varepsilon}{2}} + \sum_{|x_\nu| < 1-\frac{\varepsilon}{2}} \right\} = \frac{|\omega_n(x)|}{2} \{I_1 + I_2\}.\end{aligned} \tag{4.10}$$

A $-1+\varepsilon \leqq x \leqq 1-\varepsilon$ intervallumban, ha $0 \leqq t \leqq x$, vagy $x \leqq t \leqq 0$, akkor $(1-t^2)^{\frac{\alpha}{2}} \geqq (1-x^2)^{\frac{\alpha}{2}} \geqq \varepsilon^{\frac{\alpha}{2}}$ és $|t-x_\nu| > \frac{\varepsilon}{2}$, ha $|x_\nu| \geqq 1-\frac{\varepsilon}{2}$, ezért a Schwartz—Bunyakovszkij-féle egyenlőtlenség felhasználásával, majd az összegezést minden ν indexre elvégezve

$$\begin{aligned}\frac{\omega_n(x)}{2} I_1 &\leqq \frac{|\omega_n(x)|}{2} \sum_{|x_\nu| \geqq 1-\frac{\varepsilon}{2}} \frac{1}{(1-x_\nu^2)^2 \omega_n'(x_\nu)^2} \int_0^x \frac{|\omega_n(t)|}{|t-x_\nu|}\,dt \leqq \\ &\leqq c_1 |\omega_n(x)| \sum_{|x_\nu| \geqq 1-\frac{\varepsilon}{2}} \frac{1}{(1-x_\nu^2)^2 \omega_n'(x_\nu)^2} \int_0^x |\omega_n(t)| (1-t^2)^{\frac{\alpha}{2}}\,dt \leqq \\ &\leqq c_2 |\omega_n(x)| \left\{ \int_{-1}^{1} \omega_n(t)^2 (1-t^2)^\alpha\,dt \right\}^{1/2} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{(1-x_\nu^2)^2 \omega_n'(x_\nu)^2}.\end{aligned}$$

Ebből (2.7), (2.6), (4.4) és (4.6) alapján a $-1+\varepsilon \leqq x \leqq 1-\varepsilon$ intervallumban

$$\frac{|\omega_n(x)|}{2} I_1 \leqq c_3 \frac{1}{n}. \tag{4.11}$$

Ha pedig $|x_\nu| < 1-\frac{\varepsilon}{2}$, akkor $1-x_\nu^2 > \varepsilon\left(1-\frac{\varepsilon}{4}\right)$ és azért a $-1+\varepsilon \leqq x \leqq \leqq 1-\varepsilon$ intervallumban a Schwartz—Bunyakovszkij-féle egyenlőtlenség felhasználásával,

$$\frac{|\omega_n(x)|}{2} \sum_{|x_\nu|<1-\frac{\varepsilon}{2}} \frac{1}{(1-x_\nu^2)^2 |\omega_n'(x_\nu)|} \left| \int_0^x l_\nu(t)\,dt \right| \leqq$$

$$\leqq c_4 |\omega_n(x)| \sum_{|x_\nu|<1-\frac{\varepsilon}{2}} \frac{1}{|\omega_n'(x_\nu)|} \int_0^x |l_\nu(t)| (1-t^2)^{\frac{\alpha}{2}} dt \leqq$$

$$\leqq c_5 |\omega_n(x)| \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{|\omega_n'(x_\nu)|} \left\{ \int_{-1}^{1} l_\nu(t)^2 (1-t^2)^\alpha dt \right\}^{1/2} \leqq$$

$$\leqq c_5 |\omega_n(x)| \left\{ \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\omega_n'(x_\nu)^2} \cdot \sum_{\nu=1}^{n} \int_{-1}^{1} l_\nu(t)^2 (1-t^2)^\alpha dt \right\}^{1/2}.$$

Ebből pedig a (2.7), (4.3), (4.4) és (4.6) alapján, mivel $(1-x_\nu^2) < 1$, $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$

$$\frac{|\omega_n(x)|}{2} I_2 \leqq c_6 \frac{1}{\sqrt{n}} \tag{4.12}$$

egyenlőtlenség adódik a $-1+\varepsilon \leqq x \leqq 1-\varepsilon$ intervallumra vonatkozólag.

A (4.10), (4.11), és (4.12) a IV. segédtétel bizonyítását adják.

5. §. Az elsőfajú alappolinomok becslése

Az elsőfajú alappolinomok becsléséhez szükségünk lesz a következő segédtételre.

V. segédtétel. *A $-1 < x < +1$ intervallumban igaz a*

$$V(x) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{(1-x^2)^{1+\alpha}} - \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{(1-x_\nu^2)^{1+\alpha}} l_\nu(x)^2 \geqq 0 \tag{5.1}$$

egyenlőtlenség, ahol $l_\nu(x)$ a (3.2) alatti kifejezés és $\alpha > -1$.

A segédtétel bizonyítása szerepel BALÁZS [17] dolgozatában. A bizonyítás módja EGERVÁRY—TURÁN [18] alatti dolgozatában található meg és megegyezik az I. segédtétel bizonyítási módjával.

Az (5. 1) alatti miatt

$$V(x_\nu)=0, \qquad (\nu=1,2,\ldots,n)$$

és (2. 4), (3. 2) miatt pedig

$$V'(x_\nu)=\frac{2(1+\alpha)x_\nu}{(1-x_\nu^2)^{2+\alpha}}-\frac{1}{(1-x_\nu^2)^{1+\alpha}}\cdot\frac{\omega_n''(x_\nu)}{\omega_n'(x_\nu)}=0, \qquad (\nu=1,2,\ldots,n).$$

Ez azt jelenti, hogy a $V(x)$ függvénynek a $-1<x<+1$ intervallumban legalább $2n$ nulla helye van az x_ν gyökökön. Ha tehát volna egy olyan ξ pont a $(-1,+1)$ intervallum belsejében, ahol $V(\xi)<0$ lenne, akkor mivel $\lim\limits_{|x|\to 1-0} V(x)=+\infty$, a $V(x)$ függvénynek volna legalább még egy, azaz összesen legalább $(2n+1)$ nulla helye a $(-1,+1)$ intervallum belsejében, s akkor a Rolle-féle tétel miatt $V^{(2n)}(x)$ függvénynek lenne legalább egy nulla helye a $(-1,+1)$ intervallum belsejében. Ez azonban ellentmondásra vezet, ugyanis egyrészt az (5. 1) alatti definíció miatt, másrészt mivel $\alpha>-1$ és a $-1<x<+1$ intervallumban

$$(1-x^2)^{-1-\alpha}=\sum_{j=1}^{\infty}\binom{-1-\alpha}{j}(-1)^j x^{2j},$$

ezért a $-1<x<+1$ intervallumban

$$V(x)^{(2n)}=\{(1-x^2)^{-1-\alpha}\}^{(2n)}>0.$$

Ezzel az V. segédtételt igazoltuk.

Az (5. 1) alatti egyenlőtlenséget a következő alakban is írhatjuk:

$$\sum_{\nu=1}^{n}\left(\frac{1-x^2}{1-x_\nu^2}\right)^{1+\alpha} l_\nu(x)^2\leqq 1. \tag{5. 2}$$

A IV. tétel bizonyításánál fel fogjuk használni a következő segédtételt:

VI. segédtétel. *A $-1+\varepsilon\leqq x\leqq 1-\varepsilon$ intervallumban, ahol $0<\varepsilon<1$ (ε egyébként tetszés szerinti), érvényes a következő egyenlőtlenség, ha $\alpha\geqq 0$*

$$\left|\sum_{\nu=1}^{n} l_\nu(x)^2-1\right|\leqq\frac{c_{10}}{\sqrt{n}}, \qquad (n=1,2,3,\ldots), \tag{5. 3}$$

ahol $l_\nu(x)$ a (3. 2) *alatti kifejezés.*

Bizonyítás: Érvényes a következő egyenlőség (lásd pl. FEJÉR [2])

$$\sum_{\nu=1}^{n}\left(1-\frac{\omega_n''(x_\nu)}{\omega_n'(x_\nu)}(x-x_\nu)\right) l_\nu(x)^2=1,$$

ezért (2. 4) miatt

$$\sum_{\nu=1}^{n} l_\nu(x)^2-1=2(\alpha+1)\sum_{\nu=1}^{n}\frac{x_\nu}{1-x_\nu^2}(x-x_\nu)l_\nu(x)^2=$$

$$=2(\alpha+1)\Big\{\sum_{|x-x_\nu|\leqq n^{-\frac{1}{2}}}+\sum_{|x-x_\nu|>n^{-\frac{1}{2}}}\Big\}=2(\alpha+1)\{S_1+S_2\}. \tag{5.4}$$

Mivel $|x_\nu|<1$ és $\alpha\geqq 0$ esetén $(1-x_\nu^2)^{-\alpha}\geqq 1$, továbbá a $-1+\varepsilon\leqq x\leqq 1-\varepsilon$ intervallumban $(1-x^2)^{1+\alpha}\geqq\varepsilon^{1+\alpha}$, ezért és továbbá (5. 2) miatt

$$|S_1|\leqq n^{-\frac{1}{2}}\sum_{|x-x_\nu|\leqq n^{-\frac{1}{2}}}\frac{1}{(1-x_\nu^2)^{1+\alpha}}l_\nu(x)^2\leqq c_8 n^{-\frac{1}{2}}\sum_{\nu=1}^{n}\left(\frac{1-x^2}{1-x_\nu^2}\right)^{1+\alpha}l_\nu(x)^2\leqq c_8 n^{-\frac{1}{2}}. \tag{5.5}$$

Ha pedig $|x-x_\nu|>n^{-\frac{1}{2}}$, akkor

$$|S_2|\leqq n^{\frac{1}{2}}\omega_n(x)^2\sum_{|x-x_\nu|>n^{-\frac{1}{2}}}\frac{1}{(1-x_\nu^2)\omega_n'(x_\nu)^2},$$

és ebből (2. 7), (4. 8) miatt, mivel $(1-x_\nu^2)<1$, $(\nu=1,2,\ldots,n)$

$$|S_2|\leqq c_9 n^{-\frac{1}{2}}. \tag{5.6}$$

Az (5. 4), (5. 5) és (5. 6) a IV. segédtétel bizonyítását adják.

Most rátérünk az elsőfajú alappolinomokra vonatkozó becslés igazolására. Ehhez azonban a (2. 19) alatti $s_\nu(x)$ elsőfajú alappolinomokat más alakban írjuk fel.

Igaz a következő egyenlőség

$$\frac{\omega_n(x)}{\omega_n'(x_\nu)}\int_0^x\frac{l_\nu(t)(a_\nu t+b_\nu)-l_\nu'(t)}{t-x_\nu}dt=a_\nu\frac{\omega_n(x)}{\omega_n'(x_\nu)}\int_0^x l_\nu(t)dt+$$

$$+\frac{\omega_n(x)}{\omega_n'(x_\nu)}\int_0^x\frac{(a_\nu x_\nu+b_\nu)l_\nu(t)-l_\nu'(t)}{t-x_\nu}dt. \tag{5.7}$$

Figyelemmel a (3. 10) és (3. 17) kifejezésre

$$\frac{\omega_n(x)}{\omega_n'(x_\nu)}\int_0^x\frac{(a_\nu x_\nu+b_\nu)l_\nu(t)-l_\nu'(t)}{t-x_\nu}dt=$$

$$=\frac{\omega_n(x)}{2(1-x_\nu^2)\omega_n'(x_\nu)}\int_0^x\frac{2(\alpha+1)x_\nu l_\nu(t)-2(1-x_\nu^2)l_\nu'(t)}{t-x_\nu}dt=$$

$$= \frac{\omega_n(x)}{2(1-x_\nu^2)\omega_n'(x_\nu)} \int_0^x \frac{1}{t-x_\nu} \{-2(\alpha+1)(t-x_\nu)l_\nu(t) - 2(t^2-x_\nu^2)l_\nu'(t) +$$
$$+ 2(t^2-1)l_\nu'(t) + 2(\alpha+1)t\, l_\nu(t)\} dt =$$

$$= -\frac{(\alpha+1)\omega_n(x)}{(1-x_\nu^2)\omega_n'(x_\nu)} \int_0^x l_\nu(t)dt - \frac{\omega_n(x)}{(1-x_\nu^2)\omega_n'(x_\nu)}(x+x_\nu)\, l_\nu(x) +$$

$$+ \frac{\omega_n(x)}{(1-x_\nu^2)\omega_n'(x_\nu)} x_\nu l_\nu(0) + \frac{\omega_n(x)}{(1-x_\nu^2)\omega_n'(x_\nu)} \int_0^x l_\nu(t)\, dt +$$

$$+ \frac{\omega_n(x)}{2(1-x_\nu^2)\omega_n'(x_\nu)} \int_0^x \frac{-2(1-t^2)l_\nu'(t) + 2(\alpha+1)t\, l_\nu(t)}{t-x_\nu} dt.$$

Ebből a (3. 4) differenciálegyenlet alapján

$$\frac{\omega_n(x)}{\omega_n'(x_\nu)} \int_0^x \frac{(ax_\nu+b_\nu)l_\nu(t) - l_\nu'(t)}{t-x_\nu} dt = -\frac{(\alpha+1)\omega_n(x)}{(1-x_\nu^2)\omega_n'(x_\nu)} \int_0^x l_\nu(t)dt -$$

$$-\frac{\omega_n(x)(x+x_\nu)}{(1-x_\nu^2)\omega_n'(x_\nu)} l_\nu(x) + \frac{\omega_n(x)x_\nu}{(1-x_\nu^2)\omega_n'(x_\nu)} l_\nu(0) + \frac{\omega_n(x)}{(1-x_\nu^2)\omega_n'(x_\nu)} \int_0^x l_\nu(t)dt +$$

$$+ \frac{\omega_n(x)}{2(1-x_\nu^2)\omega_n'(x_\nu)} \int_0^x \{(1-t^2)l_\nu''(t) - 2(\alpha+1)t\, l_\nu'(t) + n(n+2\alpha+1)l_\nu(t)\} dt =$$

$$= -\frac{(\alpha+1)\omega_n(x)}{(1-x_\nu^2)\omega_n'(x_\nu)} \int_0^x l_\nu(t)dt - \frac{\omega_n(x)(x+x_\nu)}{(1-x_\nu^2)\omega_n'(x_\nu)} l_\nu(x) + \frac{x_\nu \omega_n(x)}{(1-x_\nu^2)\omega_n'(x_\nu)} l_\nu(0) +$$

$$+ \frac{\omega_n(x)}{(1-x_\nu^2)\omega_n'(x_\nu)} \int_0^x l_\nu(t)dt + \frac{\omega_n(x)}{2(1-x_\nu^2)\omega_n'(x_\nu)} (1-x^2)l_\nu'(x) -$$

$$- \frac{\omega_n(x)}{2(1-x_\nu^2)\omega_n'(x_\nu)} l_\nu'(0) + \frac{\omega_n(x)}{(1-x_\nu^2)\omega_n'(x_\nu)} x\, l_\nu(x) - \frac{\omega_n(x)}{(1-x_\nu^2)\omega_n'(x_\nu)} \int_0^x l_\nu(t)dt -$$

$$- \frac{(\alpha+1)\omega_n(x)x}{(1-x_\nu^2)\omega_n'(x_\nu)} l_\nu(x) + \frac{(\alpha+1)\omega_n(x)}{(1-x_\nu^2)\omega_n'(x_\nu)} \int_0^x l_\nu(t) +$$

$$+\frac{n(n+2\alpha+1)}{2}\frac{\omega_n(x)}{(1-x_\nu^2)\omega_n'(x_\nu)}\int_0^x l_\nu(t)\,dt = -\frac{[x_\nu+(\alpha+1)x]\omega_n(x)}{(1-x_\nu^2)\omega_n'(x_\nu)}l_\nu(x)+$$

$$+\frac{x_\nu\omega_n(x)}{(1-x_\nu^2)\omega_n'(x_\nu)}l_\nu(0)+\frac{\omega_n(x)}{2(1-x_\nu^2)\omega_n'(x_\nu)}(1-x^2)l_\nu'(x)-$$

$$-\frac{\omega_n(x)}{2(1-x_\nu^2)\omega_n'(x_\nu)}l_\nu'(0)+\frac{n(n+2\alpha+1)}{2}\cdot\frac{\omega_n(x)}{(1-x_\nu^2)\omega_n'(x_\nu)}\int_0^x l_\nu(t)\,dt.$$

Mivel pedig (3. 2) alapján

$$l_\nu'(x)=\frac{(x-x_\nu)\omega_n'(x)-\omega_n(x)}{\omega_n'(x_\nu)(x-x_\nu)^2},$$

ezért az előző egyenlőségből, figyelemmel arra, hogy $n=2k$ miatt $\omega_n'(0)=0$

$$\frac{\omega_n(x)}{\omega_n'(x_\nu)}\int_0^x\frac{(a_\nu x_\nu+b_\nu)l_\nu(t)-l_\nu'(t)}{t-x_\nu}dt=-\frac{[x_\nu+(\alpha+1)x]\omega_n(x)}{(1-x_\nu^2)\omega_n'(x_\nu)}l_\nu(x)+$$

$$+\frac{x_\nu\omega_n(x)}{(1-x_\nu^2)\omega_n'(x_\nu)}l_\nu(0)+\frac{(1-x^2)\omega_n'(x)}{2(1-x_\nu^2)\omega_n'(x_\nu)}l_\nu(x)-\frac{1-x^2}{2(1-x_\nu^2)}l_\nu(x)^2+ \tag{5.8}$$

$$+\frac{\omega_n(x)}{2(1-x_\nu^2)\omega_n(0)}l_\nu(0)^2+\frac{n(n+2\alpha+1)}{2}\cdot\frac{\omega_n(x)}{(1-x_\nu^2)\omega_n'(x_\nu)}\int_0^x l_\nu(t)\,dt.$$

Ezek után (5. 8), (5. 7) (2. 19) alapján az $s_\nu(x)$ elsőfajú alappolinom a következő módon írható fel:

$$s_\nu(x)=l_\nu(x)^2+a_\nu\frac{\omega_n(x)}{\omega_n'(x_\nu)}\int_0^x l_\nu(t)\,dt-\frac{[x_\nu+(\alpha+1)x]\omega_n(x)}{(1-x_\nu^2)\omega_n'(x_\nu)}l_\nu(x)+$$

$$+\frac{x_\nu\omega_n(x)}{(1-x_\nu^2)\omega_n'(x_\nu)}l_\nu(0)+\frac{(1-x^2)\omega_n'(x)}{2(1-x_\nu^2)\omega_n'(x_\nu)}l_\nu(x)-\frac{(1-x^2)}{2(1-x_\nu^2)}l_\nu(x)^2+ \tag{5.9}$$

$$+\frac{\omega_n(x)}{2(1-x_\nu^2)\omega_n(0)}l_\nu(0)^2+\frac{n(n+2\alpha+1)}{2}\cdot\frac{\omega_n(x)}{(1-x_\nu^2)\omega_n'(x_\nu)}\int_0^x l_\nu(t)\,dt,$$

$$(\nu=1,2,\dots,n)$$

ahol az a_ν konstans a (2. 20) kifejezés.

Ezek után az elsőfajú $s_\nu(x)$ alappolinomokra vonatkozó becslést el tudjuk végezni.

VII. segédtétel. *A* $-1+\varepsilon\leqq x\leqq 1-\varepsilon$ *intervallumban, ahol* $0<\varepsilon<1$ *(ε egyébként tetszés szerinti), érvényes a következő egyenlőtlenség, ha* $\alpha>0$

$$(5.10)\qquad \sum_{\nu=1}^{n}|s_\nu(x)|\leqq c_{23}n^{3/2},\qquad (n=2,4,6,\ldots)$$

ahol $s_\nu(x)$ *a* (2.19) *alatti elsőfajú alappolinom.*

Bizonyítás: A segédtétel állításának igazolásánál a (2.19) alatti $s_\nu(x)$ elsőfajú alappolinomok (5.9) alatti kifejezését használjuk fel.

A következőkben mindig támaszkodunk arra a tényre, hogy $|x_\nu|<1$, $(\nu=1,2,\ldots,n)$; a $-1+\varepsilon\leqq x\leqq 1-\varepsilon$ intervallumban $(1-x^2)\geqq\varepsilon$ és $\alpha>0$. Ezeket a tényeket szem előtt tartva, igazak a következő egyenlőtlenségek:

Az (5.2) alatti egyenlőtlenség miatt

$$(5.11)\qquad \sum_{\nu=1}^{n}l_\nu(x)^2\leqq c_{11}\sum_{\nu=1}^{n}\left(\frac{1-x^2}{1-x_\nu^2}\right)^{1+\alpha}l_\nu(x)^2\leqq c_{11}.$$

Figyelemmel az a_ν konstans (2.20) alatti kifejezésére

$$|\omega_n(x)|\sum_{\nu=1}^{n}\frac{|a_\nu|}{|\omega_n'(x_\nu)|}\left|\int_0^x l_\nu(t)dt\right|\leqq c_{12}|\omega_n(x)|\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{(1-x_\nu^2)^2|\omega_n'(x_\nu)|}\left|\int_0^x l_\nu(t)dt\right|.$$

Az egyenlőtlenség jobboldalán egy konstans szorzó tényezőtől eltekintve a (4.10) alatti kifejezés áll, s ezért a (4.9) egyenlőtlenség miatt

$$(5.12)\qquad |\omega_n(x)|\sum_{\nu=1}^{n}\frac{|a_\nu|}{|\omega_n'(x_\nu)|}\left|\int_0^x l_\nu(t)dt\right|\leqq c_{13}\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

A Cauchy-féle egyenlőtlenség alkalmazásával (2.7), (4.8) és (5.11) miatt

$$(5.13)\qquad \begin{aligned}&\sum_{\nu=1}^{n}\frac{|x_\nu+(\alpha+1)x|\,|\omega_n(x)|}{(1-x_\nu^2)|\omega_n'(x_\nu)|}|l_\nu(x)|\leqq\\ &\leqq c_{14}|\omega_n(x)|\left\{\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{(1-x_\nu^2)^2\omega_n'(x_\nu)^2}\sum_{\nu=1}^{n}l_\nu^2(x)\right\}^{1/2}\leqq c_{15}\frac{1}{\sqrt{n}},\end{aligned}$$

és ugyanígy

$$(5.14)\qquad \sum_{\nu=1}^{n}\frac{|x_\nu|\,|\omega_n(x)|}{(1-x_\nu^2)|\omega_n'(x_\nu)|}|l_\nu(0)|\leqq c_{15}\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Figyelemmel a (2.5) egyenlőségre, majd a Cauchy-féle egyenlőtlenség alkalmazása után (4. 8), (5. 11) és (2. 7) miatt

$$\frac{(1-x^2)|\omega_n'(x)|}{2}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{(1-x_\nu^2)|\omega_n'(x_\nu)|}|l_\nu(x)| = \frac{|-nx\omega_n(x)+(n+\alpha)\omega_{n-1}(x)|}{2}.$$

(5. 15)

$$\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{(1-x_\nu^2)|\omega_n'(x_\nu)|}|l_\nu(x)| \leqq c_{16}\sqrt{n}\left\{\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{(1-x_\nu^2)^2\omega_n'(x_\nu)^2}\sum_{\nu=1}^{n}l_\nu(x)^2\right\}^{1/2} \leqq c_{17}\sqrt{n}.$$

Mivel a feltétel szerint $\alpha>0$ ezért (5. 2) miatt

$$\text{(5. 16)}\qquad \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1-x^2}{1-x_\nu^2}l_\nu(x)^2 \leqq c_{18}\sum_{\nu=1}^{n}\left(\frac{1-x^2}{1-x_\nu^2}\right)^{1+\alpha}l_\nu(x)^2 \leqq c_{18}.$$

A feltétel szerint $n=2k$ páros szám, ezért (lásd pl. SZEGŐ [15] 80. és 166. o.) (4. 5) miatt

$$\text{(5. 17)}\qquad |\omega_n(0)| = |P_n^{(\alpha)}(0)| =$$

$$= \frac{\Gamma(2\alpha+1)\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n+2\alpha+1)}\left|\binom{\frac{n}{2}+\alpha-\frac{1}{2}}{\frac{n}{2}}\right| > c_{19}n^{-\alpha}\left|\binom{\frac{n}{2}+\alpha-\frac{1}{2}}{\frac{n}{2}}\right| > c_{20}n^{-\frac{1}{2}}.$$

Az (5. 17), (2. 7), (5. 2) és $\alpha>0$ miatt

$$\text{(5. 18)}\qquad \frac{|\omega_n(x)|}{2|\omega_n(0)|}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{1-x_\nu^2}l_\nu(0)^2 \leqq c_{21}.$$

S végül (2. 7), (4. 10) és (4. 9) miatt

$$\text{(5. 19)}\qquad \frac{n(n+2\alpha+1)}{2}|\omega_n(x)|\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{(1-x_\nu^2)|\omega_n'(x_\nu)|}\left|\int_0^x l_\nu(t)\,dt\right| \leqq c_{22}n^{3/2}.$$

Tekintve az $s_\nu(x)$ elsőfajú alappolinomok (5. 9) alatti kifejezését, az (5. 11)—(5. 19) egyenlőtlenségek igazolásával bebizonyítottuk a VII. segédtétel állítását. Ugyanis a

$$\sum_{\nu=1}^{n}|s_\nu(x)| \leqq \sum_{\nu=1}^{n}\left\{l_\nu(x)^2+\left|a_\nu\frac{\omega_n(x)}{\omega_n'(x_\nu)}\int_0^x l_\nu(t)\,dt\right|+\left|\frac{[x_\nu+(\alpha+1)x]\omega_n(x)}{(1-x_\nu^2)\omega_n'(x_\nu)}l_\nu(x)\right|+\right.$$

$$+\left|\frac{x_\nu\omega_n(x)}{(1-x_\nu^2)\omega_n'(x_\nu)}l_\nu(0)\right|+\left|\frac{(1-x^2)\omega_n'(x)}{2(1-x_\nu^2)\omega_n'(x_\nu)}l_\nu(x)\right|+\frac{1-x^2}{2(1-x_\nu^2)}l_\nu(x)^2+$$

$$\left.+\left|\frac{\omega_n(x)}{2(1-x_\nu^2)\omega_n(0)}\right|l_\nu(0)^2+\frac{n(n+2\alpha+1)}{2}\left|\frac{\omega_n(x)}{(1-x_\nu^2)\omega_n'(x_\nu)}\int_0^x l_\nu(t)\,dt\right|\right\}$$

egyenlőtlenség jobb oldalán álló valamennyi tag felső becslését megkapjuk az (5. 11)—(5. 19) egyenlőtlenségekből.

6. §. A Jackson-féle közepekre vonatkozó segédtételek

A konvergencia tétel bizonyításához a Jackson-féle közepekre vonatkozó két segédtételre lesz szükség.

Legyen $\varphi(\vartheta)$ 2π szerint periódikus függvény, akkor a hozzá tartozó Jackson-féle közép (lásd JACKSON [24])

$$J_n(\vartheta;\varphi)=\frac{3}{2\pi n(2n^2+1)}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\left(\frac{\sin n\frac{t-\vartheta}{2}}{\sin\frac{t-\vartheta}{2}}\right)^4 dt, \tag{6.1}$$

vagy mint ismeretes a $J_n(\vartheta,\varphi)$ alternatív formája

$$J_n(\vartheta;\varphi)=\frac{3}{\pi n(2n^2+1)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\{\varphi(\vartheta+2t)+\varphi(\vartheta-2t)\}\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^4 dt \tag{6.2}$$

és ismeretes az is, hogy

$$1=\frac{6}{\pi n(2n^2+1)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^4 dt. \tag{6.3}$$

Az itt közölt segédtételek lényegében ismertek, bizonyításukat a teljesség kedvéért közöljük. A bizonyítás módja egyébként megtalálható TURÁN—BALÁZS [7] dolgozatában.

VIII. segédtétel. *Ha $\varphi(\vartheta)$ 2π periódusú differenciálható függvény és $\varphi'(\vartheta)\in \mathrm{Lip}_M\mu$, ahol $0<\mu\leqq 1$, akkor*

$$|\varphi(\vartheta)-J_n(\vartheta;\varphi)|\leqq\frac{K}{n^{1+\mu}},$$

ahol a K konstans az n értékétől független.

Bizonyítás: A (6.2) és (6.3) alapján

$$\Delta_n(\vartheta)=J_n(\vartheta;\varphi)-\varphi(\vartheta)=$$

$$=\frac{3}{\pi n(2n^2+1)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\{\varphi(\vartheta+2t)+\varphi(\vartheta-2t)-2\varphi(\vartheta)\}\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^4 dt,$$

és ebből a Lagrange-féle középérték tétel alapján

$$(6.4)\qquad \Delta_n(\vartheta)=\frac{3}{\pi n(2n^2+1)}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2t\{\varphi'(t_1)-\varphi'(t_2)\}\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^4 dt,$$

ahol

$$(6.5)\qquad \vartheta\leqq t_1\leqq\vartheta+2t \quad \text{és} \quad \vartheta-2t\leqq t_2\leqq\vartheta.$$

A feltétel szerint $\varphi'(t)\in \mathrm{Lip}_M\,\mu$, ezért (6.5) miatt

$$(6.6)\qquad |\varphi'(t_1)-\varphi'(t_2)|\leqq M|t_1-t_2|^\mu\leqq 4^\mu M t^\mu = M_1 t^\mu,$$

ezért

$$(6.7)\qquad |\Delta_n(\vartheta)|\leqq\frac{6M_1}{\pi n(2n^2+1)}\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^{1+\mu}\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^4 dt\leqq\frac{K_0}{n^3}\left\{\int_0^{\frac{1}{n}}+\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}}\right\},$$

ahol K_0 az n értékétől független konstans.

Figyelembe véve, hogy $|\sin nt|\leqq 1$, $|\sin nt|\leqq n|\sin t|$ és a $0\leqq t\leqq\frac{\pi}{2}$ intervallumban $\sin t\geqq\frac{2}{\pi}t$, ezért a (6.7) egyenlőtlenségből

$$|\Delta_n(\vartheta)|\leqq\frac{K_0}{n^3}\left\{n^4\int_0^{\frac{1}{n}} t^{1+\mu}dt+\left(\frac{\pi}{2}\right)^4\int_{\frac{1}{n}}^{\infty} t^{\mu-3}dt\right\}\leqq\frac{K}{n^{1+\mu}}.$$

A továbbiakban szükségünk lesz a következő ismert tényre: Ha az $f(x)$ függvény differenciálható a $-1\leqq x\leqq+1$ intervallumban és ebben az intervallumban $f'(x)\in\mathrm{Lip}_M\mu$, ahol $0<\mu\leqq 1$, akkor ha $x=\cos\vartheta$ és

$$(6.8)\qquad \varphi(\vartheta)=f(\cos\vartheta),$$

akkor a

$$(6.9)\qquad \frac{d\varphi}{d\vartheta}=-f'(\cos\vartheta)\sin\vartheta$$

függvény is a $\mathrm{Lip}\,\mu$ függvényosztályba tartozik, esetleg más M együtthatóval. Ugyanis

$$\left|\left(\frac{d\varphi}{d\vartheta}\right)_{\vartheta=\vartheta'}-\left(\frac{d\varphi}{d\vartheta}\right)_{\vartheta=\vartheta''}\right|=|-f'(\cos\vartheta')\sin\vartheta'+f'(\cos\vartheta'')\sin\vartheta''|=$$

$$=|\sin\vartheta''\{f'(\cos\vartheta'')-f'(\cos\vartheta')\}+f'(\cos\vartheta')\{\sin\vartheta''-\sin\vartheta'\}|\leqq$$

$$\leqq|f'(\cos\vartheta'')-f'(\cos\vartheta')|+M_0|\sin\vartheta''-\sin\vartheta'|,$$

ahol $M_0=\max\limits_{-1\leqq x\leqq+1}|f'(x)|$.

Mivel pedig a feltétel szerint

$$|f'(\cos\vartheta'')-f'(\cos\vartheta')|\leqq M|\cos\vartheta''-\cos\vartheta'|^{\mu}\leqq M|\vartheta''-\vartheta'|^{\mu}$$

és

$$|\sin\vartheta''-\sin\vartheta'|\leqq|\vartheta''-\vartheta'|.$$

Ha $|\vartheta''-\vartheta'|<1$, akkor

$$|\sin\vartheta''-\sin\vartheta'|\leqq|\vartheta''-\vartheta'|^{\mu}<2|\vartheta''-\vartheta'|^{\mu},$$

ha pedig $|\vartheta''-\vartheta'|\geqq 1$, akkor

$$|\sin\vartheta''-\sin\vartheta'|\leqq 2|\vartheta''-\vartheta'|^{\mu}.$$

Ezek után nyilván

$$\left|\left(\frac{d\varphi}{d\vartheta}\right)_{\vartheta=\vartheta'}-\left(\frac{d\varphi}{d\vartheta}\right)_{\vartheta=\vartheta''}\right|\leqq M_1|\vartheta'-\vartheta''|^{\mu}, \tag{6. 10}$$

ahol $M_1=\max\{M,2M_0\}$, azaz a $\dfrac{d\varphi}{d\vartheta}$ függvény valóban a Lip μ függvényosztályhoz tartozik.

Mivel a (6. 8) alatti $\varphi(\vartheta)$ függvény páros, ezért a hozzá tartozó $J_n(\vartheta;\varphi)$ Jackson-féle közép $(2n-2)$-edrendű tiszta cosinus polinom, azaz a

$$J_n(\arccos x;\varphi)\equiv\pi_{2n-2}(x)$$

egy $(2n-2)$-edfokú racionális polinom és

$$\pi_{2n-2}(x)=\frac{3}{\pi n(2n^2+1)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\{\varphi(\arccos x+2t)+\varphi(\arccos x-2t)\}\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^4 dt. \tag{6. 11}$$

A VIII. segédtétel alapján az előzőek miatt a $-1\leqq x\leqq+1$ intervallumban

$$|\pi_{2n-2}(x)-f(x)|\leqq\frac{K}{n^{1+\mu}}. \tag{6. 12}$$

A (6. 11) kifejezést differerenciáljuk x szerint

$$\pi'_{2n-2}(x)=-\frac{3}{\pi n(2n^2+1)}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{\left(\frac{d\varphi}{du}\right)_{u=\arccos x+2t}+\left(\frac{d\varphi}{du}\right)_{u=\arccos x-2t}\right\}\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^4 dt, \tag{6. 13}$$

ebből, mivel (6. 9) miatt

$$\max_{\vartheta}\left|\frac{d\varphi}{d\vartheta}\right| = \max_{\vartheta}\left|\frac{df(\cos\vartheta)}{d\vartheta}\right| \leqq \max_{-1\leqq x\leqq +1}|f'(x)| = M_0 \tag{6.14}$$

és (6. 3) miatt a $-1<x<1$ intervallumban

$$|\pi'_{2n-2}(x)| \leqq \frac{M_0}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{6.15}$$

A (6. 13) kifejezést írjuk át a (6. 1) kifejezéshez hasonló alakban. Ezt megtehetjük megfelelő helyettesítések után, kihasználva a 2π szerinti periodicitást és a következő (6. 13) kifejezéssel ekvivalens kifejezést kapjuk

$$\pi'_{2n-2}(x) = -\frac{3}{2\pi n(2n^2+1)}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\varphi(t)}{dt}\left(\frac{\sin n\dfrac{t-\arccos x}{2}}{\sin\dfrac{t-\arccos x}{2}}\right)^4 dt.$$

Differenciáljuk ezt ismét x szerint, akkor

$$\pi''_{2n-2}(x) = \frac{-3}{2\pi n(2n^2+1)}\cdot\frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\varphi(t)}{dt}\left(\frac{\sin n\dfrac{t-\vartheta}{2}}{\sin\dfrac{t-\vartheta}{2}}\right)^4 dt+$$

$$+\frac{3}{\pi n(2n^2+1)}\cdot\frac{1}{1-x^2}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\varphi(t)}{dt}\left(\frac{\sin n\dfrac{t-\vartheta}{2}}{\sin\dfrac{t-\vartheta}{2}}\right)^3\cdot$$

$$\cdot\frac{n\sin\dfrac{t-\vartheta}{2}\cos n\dfrac{t-\vartheta}{2}-\sin n\dfrac{t-\vartheta}{2}\cos\dfrac{t-\vartheta}{2}}{\sin^2\dfrac{t-\vartheta}{2}}\,dt.$$

Ezen kifejezésből megfelelő helyettesítések után, felhasználva a 2π szerinti periodicitást, a (6. 2) kifejezéshez hasonlóan, a $\pi''_{2n-2}(x)$ kifejezésre a következő alternatív egyenlőséget kapjuk

$$\pi''_{2n-2}(x) =$$

$$= -\frac{3}{\pi n(2n^2+1)}\frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{\left(\frac{d\varphi(u)}{du}\right)_{u=\vartheta+2t}+\left(\frac{d\varphi(u)}{du}\right)_{u=\vartheta-2t}\right\}\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^4 dt+$$

$$+\frac{6}{\pi n(2n^2+1)}\cdot\frac{1}{1-x^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{\left(\frac{d\varphi(u)}{du}\right)_{u=\vartheta+2t}-\left(\frac{d\varphi(u)}{du}\right)_{u=\vartheta-2t}\right\}\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^3 n\frac{\cos nt}{\sin t}dt-$$

$$-\frac{6}{\pi n(2n^2+1)}\cdot\frac{1}{1-x^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{\left(\frac{d\varphi(u)}{du}\right)_{u=\vartheta+2t}-\left(\frac{d\varphi(u)}{du}\right)_{u=\vartheta-2t}\right\}\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^4\operatorname{ctg} t\,dt\equiv$$

$$\equiv u_1(x)+u_2(x)+u_3(x). \tag{6.16}$$

A $\pi''_{2n-2}(x)$ (6.16) alatti kifejezésére támaszkodva a következő segédtételt bizonyítjuk be:

IX. segédtétel. *A $-1<x<+1$ intervallumban a* (6.11) *alatti $\pi_{2n-2}(x)$ polinomra vonatkozólag érvényes a következő egyenlőtlenség*

$$|\pi''_{2n-2}(x)|\leqq\frac{M_0}{(1-x^2)^{3/2}}+\frac{d_7}{(1-x^2)}n^{1-\mu}, \tag{6.17}$$

ahol $M_0=\max\limits_{-1\leqq x\leqq+1}|f'(x)|$, *és d_7 az n értékétől független konstans.*

Bizonyítás: A (6.16), (6.14) és (6.3) miatt

$$|u_1(x)|\leqq M_0\frac{|x|}{(1-x^2)^{3/2}}\cdot\frac{6}{\pi n(2n^2+1)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^4 dt=M_0\frac{|x|}{(1-x^2)^{3/2}}. \tag{6.18}$$

A (6.16) alatti $u_2(x)$ és $u_3(x)$ kifejezéseket a következő módon írjuk fel

$$u_2(x)=\frac{6}{\pi(2n^2+1)}\cdot\frac{1}{1-x^2}\left[\int_0^{\frac{1}{n}}+\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}}\left\{\left(\frac{d\varphi(u)}{du}\right)_{u=\vartheta+2t}-\left(\frac{d\varphi(u)}{du}\right)_{u=\vartheta-2t}\right\}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\frac{\cos nt}{\sin t}\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^3 dt\right]\equiv\frac{6}{\pi(2n^2+1)}\cdot\frac{1}{1-x^2}[I_1+I_2], \tag{6.19}$$

és

$$u_3(x)=-\frac{6}{\pi n(2n^2+1)}\frac{1}{1-x^2}\left[\int_0^{\frac{1}{n}}+\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}}\left\{\left(\frac{d\varphi(u)}{du}\right)_{u=\vartheta+2t}-\left(\frac{d\varphi(u)}{du}\right)_{u=\vartheta-2t}\right\}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^4\operatorname{ctg} t\,dt\right]\equiv-\frac{6}{\pi n(2n^2+1)}\cdot\frac{1}{1-x^2}[I_3+I_4]. \tag{6.20}$$

A (6.10) alatti egyenlőtlenség miatt, mivel $|\cos nt|\leqq 1$, $|\sin nt|\leqq n|\sin t|$ és a $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumban $|\sin t|\geqq \frac{2}{\pi} t$, ezért

$$(6.21)\qquad \frac{6}{\pi(2n^2+1)}\cdot\frac{1}{1-x^2}|I_1|\leqq \frac{6}{\pi(2n^2+1)}\cdot\frac{d_1}{1-x^2}\int_0^{\frac{1}{n}} t^{\mu-1}\cdot n^3 dt\leqq d_2 n^{1-\mu}\cdot\frac{1}{1-x^2},$$

ahol d_1, illetve d_2 az n értékétől független konstansok. Teljesen hasonló módon nyerhető a

$$(6.22)\qquad \frac{6}{\pi n(2n^2+1)}|I_3|\leqq d_3 n^{1-\mu}\cdot\frac{1}{1-x^2}$$

egyenlőtlenség, ahol d_3 ugyancsak független n értékétől. Viszont (6.10) miatt és mivel $|\cos nt|\leqq 1$ és $|\sin nt|\leqq 1$, és a $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumban $|\sin t|\geqq \frac{2}{\pi} t$, ezért

$$(6.23)\qquad \frac{6}{\pi(2n^2+1)}\cdot\frac{1}{1-x^2}|I_2|\leqq \frac{6}{\pi(2n^2+1)}\cdot\frac{d_4}{1-x^2}\int_{\frac{1}{n}}^{\infty} t^{\mu-4} dt\leqq d_5 n^{1-\mu}\frac{1}{1-x^2}.$$

Ugyancsak teljesen hasonló módon nyerhető a

$$(6.24)\qquad \frac{6}{\pi n(2n^2+1)}\cdot\frac{1}{1-x^2}|I_4|\leqq d_6 n^{1-\mu}\cdot\frac{1}{1-x^2}$$

egyenlőtlenség. A d_5 és d_6 konstansok itt is függetlenek n értékétől. A (6.18)—(6.24) kifejezések a IX. segédtétel igazolását adják. Ezek után rátérhetünk a IV. tétel bizonyítására.

7. §. A negyedik tétel bizonyítása

A (6.11) alatti $(2n-2)$-edfokú polinomot (3.24) miatt a következő módon írhatjuk fel

$$(7.1)\qquad \pi_{2n-2}(x)\equiv\sum_{\nu=1}^{n}\pi_{2n-2}(x_{\nu n})s_{\nu n}(x)+\sum_{\nu=1}^{n}\{\varrho(x)\pi_{2n-2}(x)\}''_{x=x_{\nu n}}\sigma_{\nu n}(x)+\gamma_n\omega_n(x),$$

ahol γ_n konstans a következő

$$\gamma_n=\frac{1}{\omega_n(0)}\left\{\pi_{2n-2}(0)-\sum_{\nu=1}^{n}\pi_{2n-2}(x_{\nu n})l_{\nu n}(0)^2\right\}.$$

A (2.18) alapján, ha $y_{\nu n}=f(x_{\nu n})$ és $y''_{\nu n}=o(\sqrt{n})(1-x_{\nu n}^2)^{\frac{\alpha-3}{2}}$, $(\nu=1,2,\ldots,n;$

$n=2,4,6,\ldots$), továbbá (7. 1) miatt

$$|f(x)-S_n(x;f)|\leqq|f(x)-\pi_{2n-2}(x)|+\sum_{\nu=1}^{n}|\pi_{2n-2}(x_{\nu n})-f(x_{\nu n})|\,|s_{\nu n}(x)|+$$
$$+\sum_{\nu=1}^{n}\left|\{\varrho(x)\pi_{2n-2}(x)\}''_{x=x_{\nu n}}-\sigma(\sqrt{n})(1-x_{\nu n}^2)^{\frac{\alpha-3}{2}}\right|\,|\sigma_{\nu n}(x)|+|\gamma_n\omega_n(x)|.$$

Ebből (6. 12) és (5. 10) miatt a $-1+\varepsilon\leqq x\leqq 1-\varepsilon$ intervallumban

$$|f(x)-S_n(x;f)|\leqq\frac{K}{n^{1+\mu}}+\frac{K}{n^{1+\mu}}\cdot c_{23}n^{3/2}+ \tag{7. 2}$$
$$+\sum_{\nu=1}^{n}\left|\{\varrho(x)\pi_{2n-2}(x)\}''_{x=x_{\nu n}}-\sigma(\sqrt{n})(1-x_{\nu n}^2)^{\frac{\alpha-3}{2}}\right|\,|\sigma_{\nu n}(x)|+|\gamma_n\omega_n(x)|.$$

Nyilván

$$\sum_{\nu=1}^{n}\left|\{\varrho(x)\pi_{2n-2}(x)\}''_{x=x_{\nu n}}-\sigma(\sqrt{n})(1-x_{\nu n}^2)^{\frac{\alpha-3}{2}}\right|\,|\sigma_{\nu n}(x)|\leqq$$
$$\leqq\sum_{\nu=1}^{n}|\varrho''(x_{\nu n})\pi_{2n-2}(x_{\nu n})|\,|\sigma_{\nu n}(x)|+2\sum_{\nu=1}^{n}|\varrho'(x_{\nu n})\pi'_{2n-2}(x_{\nu n})|\,|\sigma_{\nu n}(x)|+ \tag{7. 3}$$
$$+\sum_{\nu=1}^{n}|\varrho''(x_{\nu n})\pi''_{2n-2}(x_{\nu n})|\,|\sigma_{\nu n}(x)|+\sigma(\sqrt{n})\sum_{\nu=1}^{n}(1-x_{\nu n}^2)^{\frac{\alpha-3}{2}}|\sigma_{\nu n}(x)|=$$
$$=U_1+U_2+U_3+U_4.$$

Mivel $\varrho(x)=(1-x^2)^{\frac{1+\alpha}{2}}$, $\varrho''(x)=-(1-x^2)^{\frac{\alpha-3}{2}}\{(1+\alpha)(1-x^2)+(1-\alpha^2)x^2\}$ és (6. 12) miatt a $-1\leqq x\leqq +1$ intervallumban $|\pi_{2n-2}(x)|\leqq K_1$, ahol K_1 az n értékétől független konstans, ezért a $-1+\varepsilon\leqq x\leqq 1-\varepsilon$ intervallumban (4. 9) miatt, mivel $\alpha>0$,

$$U_1\leqq c_{24}\sum_{\nu=1}^{n}(1-x_{\nu n}^2)^{\frac{\alpha-3}{2}}|\sigma_{\nu n}(x)|\leqq c_{25}\frac{1}{\sqrt{n}}. \tag{7. 4}$$

A $\varrho'(x)=-(1+\alpha)x(1-x^2)^{\frac{\alpha-1}{2}}$ és (6. 15) miatt (4. 9) alapján

$$U_2\leqq c_{26}\sum_{\nu=1}^{n}(1-x_{\nu n}^2)^{\frac{\alpha-3}{2}}|\sigma_{\nu n}(x)|\leqq c_{27}\frac{1}{\sqrt{n}}. \tag{7. 5}$$

A (6. 17) alatti egyenlőtlenség figyelembevételével, mivel $1-x_{\nu n}^2<1$, ismét (4. 9) miatt a $-1+\varepsilon\leqq x\leqq 1-\varepsilon$ intervallumban

$$U_3\leqq\sum_{\nu=1}^{n}|\varrho(x_{\nu n})|\left[\frac{M_0}{(1-x_{\nu n}^2)^{3/2}}+\frac{d_7}{(1-x_{\nu n}^2}n^{1-\mu}\right]|\sigma_{\nu n}(x)|\leqq \tag{7. 6}$$
$$\leqq c_{28}\sum_{\nu=1}^{n}(1-x_{\nu n}^2)^{\frac{\alpha-3}{2}}|\sigma_{\nu n}(x)|+c_{29}n^{1-\mu}\sum_{\nu=1}^{n}(1-x_{\nu n}^2)^{\frac{\alpha-3}{2}}|\sigma_{\nu n}(x)|\leqq c_{30}n^{\frac{1}{2}-\mu}.$$

Végül (4.9) miatt a $-1+\varepsilon \leqq x \leqq 1-\varepsilon$ intervallumban

$$U_4 = o(1). \tag{7.7}$$

A feltétel szerint $\frac{1}{2} < \mu \leqq 1$ ezért (7.2)—(7.7) egyenlőtlenségek alapján a $-1+\varepsilon \leqq x \leqq 1-\varepsilon$ intervallumban

$$|f(x) - S_n(x; f)| \leqq o(1) + |\gamma_n \omega_n(x)|. \tag{7.8}$$

Mivel pedig $n = 2k$, ezért (5.17) és (2.7) miatt

$$\begin{aligned} |\gamma_n \omega_n(x)| &= \left|\frac{\omega_n(x)}{\omega_n(0)}\right| \left|\pi_{2n-2}(0) - \sum_{\nu=1}^{n} \pi_{2n-2}(x_{\nu n}) l_{\nu n_1}(0)^2\right| \leqq \\ &\leqq c_{31} \left|\pi_{2n-2}(0) - \sum_{\nu=1}^{n} \pi_{2n-2}(x_{\nu n}) l_{\nu n}(0)^2\right| = c_{31} U_5. \end{aligned} \tag{7.9}$$

Ezen kifejezés alapján

$$U_5 = \left|\sum_{\nu=1}^{n} [\pi_{2n-2}(0) - \pi_{2n-2}(x_{\nu n})] l_{\nu n}(0)^2 + \pi_{2n-2}(0)\left[1 - \sum_{\nu=1}^{n} l_{\nu n}(0)^2\right]\right|.$$

Mivel pedig a $-1 \leqq x \leqq +1$ intervallumban a $\pi_{2n-2}(x)$, $(n = 2, 4, 6, \ldots)$ polinomok egy n értékétől független korlát alatt maradnak, s ezért (5.3) miatt

$$\begin{aligned} U_5 &\leqq \sum_{\nu=1}^{n} |\pi_{2n-2}(0) - \pi_{2n-2}(x_{\nu n})| l_{\nu n}(0)^2 + c_{32} \frac{1}{\sqrt{n}} \leqq \\ &\leqq \sum_{\nu=1}^{n} |x_{\nu n}| |\pi'_{2n-2}(\xi_{\nu n})| l_{\nu n}(0)^2 + c_{32} \frac{1}{\sqrt{n}}, \end{aligned}$$

ahol $0 \leqq |\xi_{\nu n}| \leqq |x_{\nu n}|$. Nyilván $1 - x_{\nu n}^2 \leqq 1 - \xi_{\nu n}^2$, ezért (6.15) miatt

$$U_5 \leqq M_0 \sum_{\nu=1}^{n} \frac{|x_{\nu n}|}{\sqrt{1 - x_{\nu n}^2}} l_{\nu n}(0)^2 + c_{32} \frac{1}{\sqrt{n}}. \tag{7.10}$$

Figyelembe véve az $l_{\nu n}(x)$ (3.2) alatti kifejezését, majd a Cauchy-féle egyenlőtlenség felhasználásával (2.7), (4.8) és (5.11) miatt

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{|x_{\nu n}|}{\sqrt{1 - x_{\nu n}^2}} l_{\nu n}(0)^2 &= |\omega_n(0)| \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{|\omega'_n(x_{\nu n})|} \frac{1}{\sqrt{1 - x_{\nu n}^2}} |l_{\nu n}(0)| \leqq \\ &\leqq |\omega_n(0)| \left\{\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{(1 - x_{\nu n}^2)\omega'_n(x_{\nu n})^2} \sum_{\nu=1}^{n} l_\nu(0)^2\right\}^{1/2} \leqq c_{33} \frac{1}{\sqrt{n}}. \end{aligned} \tag{7.11}$$

Ezek után (7.11), (7.10), (7.9) és (7.8) alapján a $-1+\varepsilon \leqq x \leqq 1-\varepsilon$ intervallumban

$$|f(x) - S_n(x; f)| = o(1).$$

Ez pedig a IV. tétel állításának a bizonyítását adja.

IRODALOM

[1] CH. HERMITE, Sur la formule d'interpolation de Lagrange, *Journ. für Math.*, **84** (1878) 70—79.

[2] L. FEJÉR, Über Interpolation *Gött. Nachr.*, (1916) 66—91.

[3] G. D. BIRKHOFF, General mean value and remainder theorems with applications to mechanical differentiation and quadrature, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **7** (1906) 107—136.

[4] G. PÓLYA, Bemerkung zur Interpolation und zur Näherungstheorie der Balkenbiegung, *Zeitschr. für angew. Math. und Mech.*, **11** (1931) 445 449.

[5] J. SURÁNYI—P. TURÁN, Notes on interpolation I, *Acta Math. Ac. Sci. Hung.*, **6** (1955) 66—79.

[6] J. BALÁZS—P. TURÁN, Notes on interpolation II, ibid, **8** (1957) 201—215.

[7] J. BALÁZS P. TURÁN, Notes on interpolation III, ibid, **9** (1958) 195—214.

[8] G. FREUD, Bemerkung über die Konvergenz eines Interpolationsverfahrens von P. Turán, ibid, **9** (1958) 337—341.

[9] R. B. SAXENA—A. SHARMA, On some interpolatory properties of Legendre polynomials, ibid, **9** (1958) 345 358.

[10] R. B. SAXENA—A. SHARMA, Convergence of interpolatory polynomials, ibid, **10** (1959) 157 - 175.

[11] R. B. SAXENA, *On some interpolatory properties of Legendre polynomials,* Ph. D. Thesis, Lucknow, University.

[12] K. K. MATHUR—A. SHARMA, Some interpolatory properties of Hermite polynomials, *Acta Math. Ac. Sci. Hung.*, **12** (1961) 193 207.

[13] О. Киш, Замечания об интерполировании, ibid, **11** (1960) 49—64.

[14] О. Киш, О тригонометрическом (0, 2) — интерполировании, ibid, **11** (1960) 255—276.

[15] G. SZEGŐ, *Orthogonal polynomials,* Amer. Math. Soc. Coll. Publ. New York, 1939.

[16] И. П. Натансон, Конструктивная теория функций, Москва—Ленинград, 1949. I. P. NATANSZON, *Konstruktiv függvénytan,* Akadémiai Kiadó, Budapest, 1952.

[17] J. BALÁZS, Megjegyzések a stabil interpolációról, *Mat. Lapok,* **11** (1960) 280—293.

[18] E. EGERVÁRY—P. TURÁN, Notes on interpolation V., *Acta Math. Ac. Sci. Hung.*, **9** (1958) 259—267.

(Beérkezett: 1961. V. 15.)

A Magyar Tudományos Akadémia
Matematikai Kutató Intézete

Technikai szerkesztő: L. Ziermann Margit

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója — Műszaki szerkesztő: Farkas Sándor
A kézirat beérkezett: 1961. VI. 22. — Terjedelem: 9,75 (A/5) ív, 4 ábra

Szegedi Nyomda Vállalat, Szeged 61-2640

Ára: 21,— Ft

TARTALOMJEGYZÉK

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK

KÖZLEMÉNYEI

XI. KÖTET 4. SZÁM

AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST
1961

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK
KÖZLEMÉNYEI

XI. kötet 4. szám

Szerkesztőség: Budapest, V., Nádor utca 7.
Kiadóhivatal: Budapest, V., Alkotmány utca 21.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei változó terjedelmű füzetekben jelennek meg, és az Akadémia III. Osztályának felolvasóülésein bemutatott matematikai dolgozatokat, valamint egyéb dolgozatokat, referátumokat, továbbá az Osztály munkájára vonatkozó közleményeket, könyvismertetéseket stb. közölnek. Évenként egy kötet jelenik meg (négy szám alkot egy kötetet).

Kéziratok a következő címre küldendők:

A Magyar Tudományos Akadémia
III. Osztályának Közleményei.
Budapest, V., Nádor u. 7.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi levelezés.

Minden szerzőt 100 különlenyomat illet meg megjelent munkájáért.

Közlésre el nem fogadott kéziratokat a szerkesztőség lehetőleg visszajuttat a szerzőhöz, de felelősséget a beküldött kéziratok megőrzéséért vagy továbbításáért nem vállal.

A Közlemények előfizetési ára kötetenként belföldi címre 40 forint, külföldi címre 60 forint. Belföldi megrendelések az Akadémiai Kiadó, Budapest, V., Alkotmány u. 21. (Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 05-915-111-46), külföldi megrendelések a „Kultúra" Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalat, Budapest, I., Fő utca 32. (Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 43-790-057-181) útján eszközölhetők.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztálya a következő idegen nyelvű folyóiratokat adja ki:

1. Acta Mathematica Hungarica
2. Acta Physica Hungarica.

METRIKUS ÉS AFFINÖSSZEFÜGGŐ PÁLYATEREK PÁLYATARTÓ LEKÉPEZÉSEI

Írta: RAPCSÁK ANDRÁS

Tartalomjegyzék

Bevezetés

Ismeretes, hogy az euklideszi tér legáltalánosabb olyan transzformációja, mely egyenest egyenesbe visz át, a projektív transzformáció. Ezzel kapcsolatban rögtön felmerül a kérdés, vajon milyen transzformációk viszik át általánosabb differenciálgeometriai terek pályáit pályákba? Az említett transzformáció — melyet pályatartó vagy geodetikus leképezésnek lehet nevezni — metrikus terek esetén túlságosan nagy érdeklődésre nem tarthatott számot, mert ennél a transzformációnál a metrikai tulajdonságok lényegtelen szerepet játszanak. Ha azonban a problémát úgy vetjük fel, hogy adva van egy $2n-2$ paramétertől függő görbesereg, meghatározandók azok a terek, melyeknek az adott görbesereg a pályaserege, látható, hogy metrikus esetben azon függvények meghatározásáról van szó, melyeknek az adott görbesereg az extremális serege. Eljutottunk tehát a variációszámítás inverz problémájához.

Vessük fel ezért így a kérdést: adva van egy pályasereg, melyek azok az affin, illetve metrikus terek, melyeknek pályáit, illetve geodetikusait az adott görbék alkotják?[1]

[1] A legáltalánosabb metrikus teret, melyről itt szó lehet, az 1. §-ban határozzuk meg.

Ilyen megfogalmazás alapján többek között a következő alapvető problémák merülnek fel:

1. Mi annak a szükséges és elegendő feltétele, hogy két affin pályatér egymásra pályatartóan le legyen képezhető (I. alaptétel).

2. Két $\bar{\mathfrak{L}}$ és $\mathfrak{L}$ alapfüggvénnyel megadott metrikus tér mikor képezhető le egymásra geodetikusan? (11., 13. és 14. tételek.)

3. Finsler-tér mikor képezhető le Riemann-térre? (16. tétel.)

4. Milyen metrikus terek képezhetők le Minkowski-féle térre? Ez a kérdés azonos azzal a Hilbert 4. problémájában felvetett kérdéssel:[2] melyek azok a geometriák, melyekben a geodetikusok egyenesek? — A problémát teljesen megoldjuk a III. rész 9. §-ában.

5. Két Riemann-tér mikor képezhető le egymásra geodetikusan? Ezt a problémát két dimenzióra DINI,[3] n-dimenzióra LEVI-CIVITA[4] oldotta meg teljesen, meghatározva mindkét tér metrikus alaptenzorát.

6. Mikor látható el egy adott pályasereg tágabb értelemben vett metrikával? (III. alaptétel.)

7. Mikor látható el egy adott pályasereg természetes metrikával? (IV. alaptétel.)

A dolgozat három részre tagozódik. Az első részben a variációszámítás segítségével megadjuk a metrikus differenciálgeometriák lokális analitikus megalapozását, majd összefoglaljuk azokat a legfontosabb képleteket, melyekre szükségünk lesz.

A második részben az affin terek pályatartó leképezéseivel foglalkozunk, s erre szükséges és elegendő feltételt mutatunk ki.

A harmadik rész első, második és harmadik §-ában metrikus terek geodetikus leképezéseivel foglalkozunk, ezekre szükséges és elegendő feltételeket adunk, végül vizsgáljuk a metrizálhatóság problémáját. Sikerül itt a metrikus differenciálgeometriában igen fontos parciális differenciálegyenletrendszer általános megoldását is megadni.

Tekintettel arra, hogy a problémák megoldásakor nem volt célunk, hogy mély függvénytani vizsgálatokat végezzünk — aminek a maga helyén természetesen megvan a létjogosultsága — feltettük, hogy a szereplő függvények a C^k, $k \geqq 4$ osztályba tartoznak.[5] Ahol más megszorítást teszünk fel, ott ezt külön jelezzük.

[2] Lásd D. HILBERT [20].
[3] Lásd DINI [13].
[4] Lásd LEVI-CIVITA [28].
[5] C^k a legalább k-szor folytonosan differenciálható függvényosztályt jelenti.

I. RÉSZ

A LOKÁLIS METRIKUS DIFFERENCIÁLGEOMETRIA ANALITIKUS MEGALAPOZÁSA

1. §. A lokális koordináta-rendszer

A metrikus differenciálgeometriai terek megalapozásánál két alapelemet tekintünk, ezek

a) a vonalelem ($\mathfrak{v}$),

b) a görbe ($\mathfrak{g}$).

Szükségünk lesz ezenkívül egy egyváltozós függvényosztályra (A), mely a következő feltételeket elégíti ki.

1. $A \subset C^{4}$ [5]

Ha $f(t) \in A$, akkor 2. $-\infty \leqq \alpha < t < \beta \leqq +\infty$

3. $|f(t)| < 1$.

A osztálybeli függvény n-esnek nevezünk n $f^i(t)$[6] függvényt akkor, ha

1. $f^i \in A$ 2. $\Sigma |f^{i\prime}(t)|^2 > 0$.

I. A. *követelmény:* A vonalelemek és görbék halmaza felbontható olyan (nem szükségképpen diszjunkt) részhalmazokra, melyek mindegyike a következő tulajdonsággal rendelkezik:

1. Minden $\mathfrak{v}$ vonalelemhez hozzárendelhető két rendezett szám n-es, (x^i, v^i), ahol a) $x^i x^i < 1$ és b) $v^i v^i > 0$. Fordítva, minden a) és b) tulajdonságot kielégítő szám $2n$-eshez tartozik egy $\mathfrak{v}$ vonalelem.

2. Minden $\mathfrak{g}$ görbéhez hozzárendelhető két rendezett függvény n-es $f^i(t)$ és $\varphi^i(t)$, melyekre $f^i \in A$, $\varphi^i \in A$.

Fordítva, minden ilyen függvény $2n$-eshez tartozik egy $\mathfrak{g}$ görbe.[7]

II. A. 1. Két $\underset{(1)}{\mathfrak{v}}(\underset{(1)}{x^i}, \underset{(1)}{v^i})$ és $\underset{(2)}{\mathfrak{v}}(\underset{(2)}{x^i}, \underset{(2)}{v^i})$ vonalelem akkor és csak akkor egyenlő, ha

a) $\underset{(1)}{x^i} = \underset{(2)}{x^i}$

b) $\underset{(1)}{v^i} = \lambda \underset{(2)}{v^i}$, $(\lambda > 0)$.

2. Két $\underset{(1)}{\mathfrak{g}}[\underset{(1)}{f^i}(t), \underset{(1)}{\varphi^{i\prime}}(t)]$ és $\underset{(2)}{\mathfrak{g}}[\underset{(2)}{f^i}(t) \underset{(2)}{\varphi^{i\prime}}(t)]$ görbe akkor és csak akkor egyenlő, ha

a) $\underset{(1)}{f^i}(t) \equiv \underset{(2)}{f^i}(t)$

b) $\underset{(1)}{\varphi^{i\prime}}(t) \equiv \lambda(t) \underset{(2)}{\varphi^{i\prime}}(t)$ $(\lambda(t) > 0)$.

[6] A latin indexek 1—n-ig futnak.

[7] A hozzárendelés után a vonalelemet $\mathfrak{v}(x^i, v^i)$-vel, a görbét $\mathfrak{g}[f^i(t), \varphi^{i\prime}(t)]$-vel jelöljük.

I. DEFINÍCIÓ. Egy vonalelem x^i szám n-esét a vonalelem centrumának, a v^i szám n-est pedig a vonalelem irányának nevezzük.

1. TÉTEL. *Az I. A és II. A-ban meghatározott hozzárendelés független az alapul vett t paramétertől.*

Bizonyítás: Tekintsünk egy megengedett $t=t(\tau)$ paramétertranszformációt,[8] akkor egy $\mathfrak{g}\left[f^i(t), \frac{d\varphi^i}{dt}\right]$ görbe átmegy

$$\mathfrak{g}\left[f^i(t(\tau)), \frac{d\varphi^i(t(\tau))}{dt}\right]=\mathfrak{g}\left[\bar{f}^i(\tau), \frac{d\bar{\varphi}^i(\tau)}{d\tau}\frac{d\tau}{dt}\right]$$

görbébe, ahol

$$\bar{f}^i(\tau)\overset{\text{def}}{=}f^i(t(\tau)), \bar{\varphi}^i(\tau)\overset{\text{def}}{=}\varphi^i(t(\tau)).$$

A kapott görbe azonban II. A miatt azonos a $\mathfrak{g}\left(\bar{f}^i(\tau), \frac{d\bar{\varphi}^i(\tau)}{d\tau}\right)$ görbével, qu. e. d.

III. A. Egy $\mathfrak{v}(x^i, v^i)$ vonalelem illeszkedik egy $\mathfrak{g}[f^i(t), \varphi^{i\prime}(t)]$ görbére, ha van olyan $\alpha<t_0<\beta$ paraméterérték, hogy

a) $x^i=f^i(t_0)$

b) $v^i=\lambda\varphi^{i\prime}(t_0)$ $(\lambda>0)$.

II. DEFINÍCIÓ. Az I. A, II. A, III. A követelményekkel megalapozott hozzárendelést a tér lokális koordináta-rendszerének nevezzük.

III. DEFINÍCIÓ. Ha az I. A alapján terünkbe új hozzárendelést vezetünk be, melyet megfordíthatóan egyértelmű, legalább kétszer folytonosan deriválható, el nem tűnő függvénydeterminánssal rendelkező függvénykapcsolat fejez ki, ezt megengedett koordinátatranszformációnak nevezzük.

IV. A. Megengedett koordinátatranszformációnál a III. A illeszkedési relációk fennmaradnak.

2. TÉTEL. *A vonalelemek és görbék megengedett koordinátatranszformációi a vonalelemek centrumának megengedett transzformációjának következményei.*

Legyen ugyanis

$$\bar{x}^i=\bar{x}^i(x), \quad \bar{v}^i=\bar{v}^i(v)$$

$$\bar{f}^i(t)=\bar{f}^i[f^1(t), \ldots, f^n(t)]$$

egy megengedett koordinátatranszformáció. (Az f^i-függvények transzformációs képletei természetesen az összes A osztálybeli függvények transzformációs formuláit magukban foglalják.)

[8] Megengedettnek a szokott értelemben vett, de szigorúan monoton növekvő paramétertranszformációt nevezzük.

Legyen $\mathfrak{g}[f^i(t), \varphi^{i\prime}(t)]$ egy görbe, melyre a $\mathfrak{v}[x^i(t), v^i(t)]$ folytonos vonalelemsorozat illeszkedik. Ilyen vonalelemsorozat az I. A szerint van, $x^i(t) = f^i(t)$, $v^i = \varphi^{i\prime}(t)\cdot\lambda$, $(\lambda > 0)$.

A IV. A miatt tehát a $\mathfrak{g}[\overline{f}^i(t), \overline{\varphi}^{i\prime}(t)]$ görbére a $\mathfrak{v}[\overline{x}^i(t), \overline{v}^i(t)]$ vonalelemsorozatnak illeszkednie kell. A III. A-ból következik, hogy minden t értékre

$$\overline{f}^i[f^1(t), \ldots, f^n(t)] \equiv \overline{x}^i[x^1(t), \ldots, x^n(t)].$$

Ezek szerint a A osztálybeli függvények transzformációs formulái azonosak a vonalelemek centrumainak transzformációs formuláival.

Tekintsük most a $\mathfrak{g}[f^i(t), \varphi^{i\prime}(t)]$ görbét a t_0 paraméter értéknél és legyen

$$f^i(t_0) = \varphi^i(t_0) + c^i = x^i(t_0).$$

Mivel II. A miatt

$$\hat{\mathfrak{g}}[f^i(t), (\varphi^i(t) + c^i)'] \equiv \mathfrak{g}[f^i(t), \varphi^{i\prime}(t)],$$

tehát

$$\left.\frac{d\overline{\varphi}^i[\varphi^1(t) + c^1, \ldots, \varphi^n(t) + c^n]}{dt}\right|_{t=t_0} = \left.\frac{\partial \overline{\varphi}^i}{\partial \varphi^k}\varphi^{k\prime}\right|_{t=t_0} = \left.\frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^k}v^k\right|_{t=t_0}.$$

A II. A és IV. A-ból következik, hogy

$$\overline{v}^i = \frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^k}v^k.$$

Legyen most $\mathfrak{v}(\underset{(0)}{x^i}, \underset{(0)}{v^i})$ egy tetszőleges vonalelem. Tekintsük a következő görbét:

$$\mathfrak{g}[(f^i(t) - f^i(t_0) + \underset{(0)}{x^i}), (\varphi^i(t) - \varphi^{i\prime}(t_0)t + \underset{(0)}{v^i}t)'].$$

Erre a görbére a $\mathfrak{v}(\underset{(0)}{x^i}, \underset{(0)}{v^i})$ vonalelem nyilván a $t = t_0$ helyen illeszkedik, tehát az előbbiek szerint

$$\underset{(0)}{\overline{v}^i} = \left.\frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^k}\right|_{x=\underset{(0)}{x}} \cdot \underset{(0)}{v^k},$$

tételünket tehát teljesen bizonyítottuk.

2. §. A metrika

3. TÉTEL. *A* $\mathfrak{g}[f^i(t), f^{i\prime}(t)]$ *görbe.*

A bizonyítás I. A-ból rögtön adódik.

IV. DEFINÍCIÓ.

A $\mathfrak{g}[f^i(t), f^{i\prime}(t)]$ görbéket a) típusú, a $\mathfrak{g}[f^i(t), \varphi^{i\prime}(t)]$ görbéket b) típusú görbéknek nevezzük.

Tekintsük most az a) típusú görbék egy $2n-2$ dimenziós olyan seregét, mely egy pozitív definit reguláris variációs probléma extremális serege.

Legyen ez $\mathfrak{g}[x^i(t, a^1, \ldots, a^{2n-2}), \dot{x}^i(t, a^1, \ldots, a^{2n-2})]$.[9] Ilyen nyilván létezik, pl. ha valamennyi x^i lineáris függvény t-ben.

Legyen az említett variációs probléma egy $\dot{x}^i$-ban elsőrendű pozitív homogén alapfüggvénye $\mathfrak{L}(x, v) > 0$. Tegyük fel, hogy $\mathfrak{L}(x, v)$ minden változója szerint legalább háromszor folytonosan deriválható.

A megadott görbeseregbe vezessük be az

$$s = \int_{t_0}^{t} \mathfrak{L}(x(t), \dot{x}(t))dt$$

egyenlettel definiált s értéket új paraméternek, ekkor az[10]

$$\text{(B)} \qquad \begin{aligned} x^i &= x^i(s, a^1, \ldots, a^{2n-2}) \\ x^{i\prime} &= x^{i\prime}(s, a^1, \ldots, a^{2n-2}) \\ x^{i\prime\prime} &= x^{i\prime\prime}(s, a^1, \ldots, a^{2n-2}) \end{aligned}$$

egyenletrendszert egy és csak egy módon oldhatjuk fel $s, a^1, \ldots, a^{2n-2}$-re a következőképpen (lásd pl. J. DOUGLAS [14]):

$$\text{(2, 1)} \qquad \begin{aligned} x^{i\prime\prime} &= -2G^i(x, x') \\ \mathfrak{L}(x, x') &= 1, \end{aligned}$$

ahol $G^i(x, v)$ v^i-ben másodrendű pozitív homogén függvény.

Jelölés:

$$\frac{\partial^2 \frac{1}{2}\mathfrak{L}^2(x, v)}{\partial v^i \partial v^k} = g_{ik}(x, v).$$

4. TÉTEL.

$$\text{(2, 2)} \qquad g_{rh} G^r = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 \frac{1}{2}\mathfrak{L}^2}{\partial v^h \partial x^k} v^k - \frac{\partial \frac{1}{2}\mathfrak{L}^2}{\partial x^h}\right] \overset{\text{def}}{=} G_h(x, v).$$

Bizonyítás. Az $\mathfrak{L}(x, v)$ alapfüggvényhez tartozó Euler—Lagrange-féle differenciálegyenletrendszer ugyanis (lásd pl. DUSCHEK—MAYER [16] II. 91. old.)

$$\text{(2, 3)} \qquad x^{r\prime\prime} g_{rh}(x, x') = -2G_h(x, x').$$

(2, 1) és (2, 3)-ból a (B) rendszer megoldásának egyértelműsége miatt következik az állítás.

V_1. DEFINÍCIÓ. A (B) rendszer görbéit a tér geodetikusainak nevezzük.

V_1. A. Egy a) típusú $\mathfrak{g}[x^i(t), \dot{x}^i(t)]$ görbe t_1 és t_2 paraméterérték közötti részének az ívhossza legyen

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \mathfrak{L}(x, \dot{x})dt.$$

[9] A függvényeket most már általában x^i, illetve v^i betűkkel fogjuk jelölni, a t szerinti derivációt ponttal, az s szerintit vesszővel.

[10] A transzformált függvényeket ugyanazon betűkkel jelöljük!

5. TÉTEL. *Meg lehet határozni olyan $v^i = v^i(x)$ függvényt, hogy a*

$$(2,4)\quad \begin{aligned} &\text{a)}\quad \frac{d^2x^i}{ds^2} = -\Gamma^{*i}_{jk}(x,v)x^{j\prime}x^{k\prime} \\ &\text{b)}\quad \frac{dv^i}{ds} = -G^i_k(x,v)x^{k\prime} + \frac{1}{\mathfrak{L}(x,v)}\frac{d\mathfrak{L}(x,v)}{ds}v^i \end{aligned}$$

differenciálegyenletrendszer tetszőleges kezdőértékhez tartozó megoldása

$$\Omega[x, v(x), \dot{x}] \overset{\text{def}}{=} [g_{ik}(x,v)x^{i\prime}x^{k\prime}]^{1/2}$$

alapfüggvény extremálisa.

(2,4)-ben

$$\Gamma^{*k}_{ij}g_{kh} = \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial g_{ih}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ih}}{\partial v^r}G^r_j\right) + \left(\frac{\partial g_{jh}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{jh}}{\partial v^r}G^r_i\right) - \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^h} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial v^r}G^r_h\right)\right\},$$

$$G^i_k = \frac{\partial G^i}{\partial v^k}.$$

Bizonyítás: (2,4) megoldása $(\underset{(0)}{x^i}, \underset{(0)}{v^i}, \underset{(0)}{\dot{x}^i})$ kezdőérték mellett

$$(c)\quad \begin{aligned} x^i &= x^i(s) \\ v^i &= v^i(s) \end{aligned}$$

VARGA OTTÓ kimutatta ([34], [36]), lehet konstruálni olyan $v^i = v^i(x)$ függvényt, hogy a (c) mentén a (2,4) mellett még

$$(2,5)\quad \frac{\partial v^i}{\partial x^j} = -G^i_j + \frac{1}{\mathfrak{L}}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x^j}v^i$$

is teljesül.

Képezzük $\Omega(x, v, \dot{x})$ Euler—Lagrange-féle differenciálegyenletrendszerét, figyelembe véve (2,5) és (2,4)-et, kapjuk:

$$(2,6)\quad \frac{d^2x^i}{ds^2}g_{ik}(x,v) + \Gamma^{*i}_{jr}(x,v)g_{ik}(x,v)x^{j\prime}x^{r\prime} = 0.$$

Ha

$$(2,7)\quad \det|g_{ik}| \overset{\text{def}}{=} g \neq 0,$$

akkor (2,6) azt jelenti, hogy a (c) görbe extremálisa az $\Omega(x, v(x), \dot{x})$ függvényhez tartozó variációs problémának.

(2,7)-et a következő élesebb alakban mutatjuk ki.

6. TÉTEL. *A $g_{ik}(x,v)$ függvények pozitív definit quadratikus alak együtthatói.*

Bizonyítás:
Mivel

$$g_{ik}(x, v)v^i = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial v^k} \mathfrak{L},$$

és

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial v^k} \neq 0, \quad v^i \neq 0,$$

kell, hogy a (2, 7) teljesüljön.

Vezessük be a geodetikusoknál az

$$s = \int_{t_0}^{t} \mathfrak{L}(x, \dot{x})dt$$

új paramétert, akkor

(2, 8) $$\mathfrak{L}(x, x') = 1$$

a geodetikusok mentén, azaz az $\mathfrak{L}(x, x')$ és $\mathfrak{L}^2(x, x')$ reguláris variációs problémája azonos. Ez pedig az $\mathfrak{L}^2$ függvény esetében éppen azt jelenti, hogy

$$g_{ik} X^i X^k$$

kifejezés az X^i segédváltozókban definit.

Mivel

$$g_{ik}(x, v)v^i v^k = \bar{\mathfrak{L}}(x, v) > 0.$$

tehát positiv definit qued.

V_2. DEFINÍCIÓ. A (2, 4) differenciálegyenletrendszer megoldásaiból alkotott $\mathfrak{g}[x^i(t), v^i(t)]$ b) típusú görbéket quasigeodetikusoknak nevezzük.

Az V_1. A követelményhez teljesen hasonlóan követelhetjük:

V_2. A. Egy tetszőleges $\mathfrak{g}[x^i(t), v^i(t)]$ b) típusú görbe ívhossza t_1 és t_2 paraméterértékek között legyen

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g_{ik}(x, v)\dot{x}^i \dot{x}^k}\, dt.$$

7a. TÉTEL. *Ha az alapul vett görbesereghez tartozó alapfüggvény*

$$\mathfrak{L}(x, v) = +\sqrt{\gamma_{ik}(x) v^i v^k}$$

alakú, akkor a görbék V_2. A*-ban meghatározott ívhossza nem függ a görbékre illeszkedő vonalelemtől.*

Bizonyítás. Ha $\mathfrak{L}$ a 7. tételben megadott alakban állítható elő, akkor

$$g_{ik}(x, v) = \gamma_{ik}(x),$$

tehát az V_2. A alapján tételünk igaz.

VI. A. Két $\underset{(1)}{\mathfrak{v}}$ és $\underset{(2)}{\mathfrak{v}}$ vonalelem „távolságán" értjük a rájuk illeszkedő görbék ívhosszának alsó határát. Az ívhosszat a $\underset{(1)}{\mathfrak{v}}$ és $\underset{(2)}{\mathfrak{v}}$ vonalelemeknek megfelelő paraméterértékek között kell venni.

A VI. A. követelményben rögzített távolságfogalom nyilván teljesíti a három távolság axiómát.

3. §. Az érintő vektortér

Az I. A—VI. A követelményekkel megalapozott lokális metrikus tér minden vonaleleméhez vektortereket rendelhetünk.

VI. DEFINÍCIÓ. Egy $\mathfrak{g}[x(t), v(t)]$ görbe t paraméterértékénél tekintett $\dot{x}^i$ derivációkkal meghatározott mennyiséget a görbe érintővektorának nevezzük. Jele: $\vec{x}[\mathfrak{g}(t), \dot{x}^i(t)]$.

Legyen adva egy $\underset{(0)}{\mathfrak{v}}(\underset{(0)}{x^i}, \underset{(0)}{v^i})$ vonalelem. Tekintsük az összes, a $\underset{(0)}{\mathfrak{v}}$-ra illeszkedő görbéket azonos paraméterelőállítás mellett. Ezekre a görbékre a t paraméterértéknél illeszkedjék a $\underset{(0)}{\mathfrak{v}}$.

VII. DEFINÍCIÓ.

Ha

$$\underset{(1)}{\vec{x}} = \vec{x}[\underset{(1)}{\mathfrak{g}}(t_0), \underset{(1)}{\dot{x}^i}(t_0)]$$

$$\underset{(2)}{\vec{x}} = \vec{x}[\underset{(2)}{\mathfrak{g}}(t_0), \underset{(2)}{\dot{x}^i}(t_0)]$$

két tetszőleges érintővektor, akkor legyen

I. $$\underset{(1)}{\vec{x}} = \underset{(2)}{\vec{x}},$$

ha

1. $$\underset{(1)}{x^i}(t_0) = \underset{(2)}{x^i}(t_0)$$

2. $$\underset{(1)}{v^i}(t_0) = \underset{(2)}{v^i}(t_0)$$

3. $$\underset{(1)}{\dot{x}^i}(t_0) = \underset{(2)}{\dot{x}^i}(t_0)$$

II. $$\underset{(1)}{\vec{x}} + \underset{(2)}{\vec{x}} = \vec{x}[\mathfrak{g}(t_0), \underset{(1)}{\dot{x}^i}(t_0) + \underset{(2)}{\dot{x}^i}(t_0)]$$

III. $$\lambda \underset{(1)}{\vec{x}} = \vec{x}[\underset{(1)}{\mathfrak{g}}(t_0), \lambda \cdot \underset{(1)}{\dot{x}^i}(t_0)],$$

ahol a λ tetszőleges szám. Ha $\dot{x}^i(t_0) = 0$, vagy $\lambda = 0$, akkor a kapott vektorok 0 vektorok.

7. TÉTEL. *A $\underset{(0)}{\mathfrak{v}}$ vonalelemre illeszkedő görbék t_0 pontbeli érintővektorai hozzávéve a 0 vektort, vektorteret alkotnak. Legyen ez $\mathfrak{M}^*(\underset{(0)}{\mathfrak{v}})$.*

Bizonyítás:

A bizonyításhoz a VII. definíció értelmében elég azt kimutatni, hogy a $\underset{(0)}{\mathfrak{v}}$-ra illeszkedő görbeseregnek van olyan görbéje, melynek érintővektorai II., ill. III.[11] A $\mathfrak{g}[\{\underset{(1)}{x^i}(t)+\underset{(2)}{x^i}(t)-\underset{(2)}{x^i}(t_0)\}, v^i(t)]$, illetve $\mathfrak{g}[\{\lambda \underset{(1)}{x^i}(t)-(\lambda-1)\underset{(1)}{x^i}(t_0)\}, v^i(t)]$ éppen a keresett görbék, tehát $\mathfrak{M}^*(\underset{(0)}{\mathfrak{v}})$ tényleg vektortér.

Tekintsük most a következő n görbét:

$$\mathfrak{g}[\underset{(k)}{x^i}(t), \underset{(k)}{v^i}(t)],$$

ahol

$$\underset{(k)}{x^i}(t)=\begin{cases} \underset{(0)}{x^i} & \text{ha} \quad i\neq k \\ t+(\underset{(0)}{x^i}-t_0) & \text{ha} \quad i=k. \end{cases}$$

A kapott

$$\underset{(k)}{\vec{e}}=\vec{e}\,[\underset{(k)}{\mathfrak{g}}(t_0), (\underset{(1)}{0}, \ldots, \underset{(k)}{1}, \ldots, \underset{(n)}{0})]\in\mathfrak{M}^*(\underset{(0)}{\mathfrak{v}})$$

k vektor nyilván lineárisan független.

Legyen $\vec{x}=\vec{x}\,[\mathfrak{g}(t_0), \dot{x}^i(t_0)]\in\mathfrak{M}^*(\underset{(0)}{\mathfrak{v}})$ egy tetszőleges vektor, akkor

$$\vec{x}=\underset{(k)}{\vec{e}}\,\dot{x}^k(t_0).$$

Ezzel tételünket teljesen kimutattuk.

A most bevezetett vektorteret kontravariáns vektortérnek nevezzük. Az egyes vektorokat röviden csak az $\dot{x}^i(t_0)$ komponensekkel jelöljük a szokott módon.

A II. A követelményből és a 7. tételből adódik, hogy egy $\xi^i(x, v)$ vektor a v^i-ben 0-ad fokú homogén.

A 2. tétel alapján a kontravariáns vektor transzformációs törvénye:

$$\bar{\xi}^i=\frac{\partial\bar{x}^i}{\partial x^k}\xi^k. \tag{3, 1}$$

8. TÉTEL. *Ha* ξ^i $(\underset{(0)}{x}, \underset{(0)}{v})$*-ban értelmezett mennyiség transzformációs törvénye* (3, 1), *akkor az egy kontravariáns vektor.*

Tekintsük ugyanis a

$$\mathfrak{g}[\{\xi^i t-\xi^i t_0+\underset{(0)}{x^i}\}, v^i(t)]$$

görbét, s az állítás nyilvánvaló.

A $\underset{(0)}{\mathfrak{v}}$ vonalelemhez a kontravariáns vektortér a szokott módon

$$g_{ik}(\underset{(0)}{x}, \underset{(0)}{v})\xi^i(\underset{(0)}{x}, \underset{(0)}{v})$$

vezethető be.

[11] Ha ezek 0 vektorok, az állítás triviális.

VII. A. Ha egy $\mathfrak{g}$ görbe egyenletében az ívhosszat vezetjük be paraméterként, az érintővektor hossza legyen 1.

Az V_1. A, V_2. A és VII. A követelményekből következik a

VIII. DEFINÍCIÓ. Egy $\xi^i(x, v)$ vektor hossza

$$\lambda = \begin{cases} \mathfrak{L}(x, \xi) & \text{ha } \nu\xi^i = v^i \\ [g_{ik}(x, v)\xi^i\xi^k]^{1/2} & \text{ellenkező esetben.} \end{cases}$$

Az első esetben azt mondjuk, hogy a vektor iránya megegyezik a vonalelemének irányával.

Tekintsük most egy tetszőleges $\mathfrak{g}[x^i(t), v^i(t)]$ görbét, s vezessük be az ívhosszat paraméternek.

Legyen (2. 4) alapján a $\mathfrak{g}$ görbe mentén

$$\mathfrak{L}\,\omega^i = \frac{dv^i}{ds} + G^i_k(x, v)x^{k'} - \frac{1}{\mathfrak{L}}\frac{d\mathfrak{L}}{ds}v^i. \tag{3, 2}$$

Mint könnyen belátható ω^i vektor. Egyszerű számítással adódik, hogy ha a $\mathfrak{g}$ görbe a) típusú,

$$g_{ik}(x, x')\omega^i x^{k'} = 0. \tag{3, 3}$$

Ha a görbe b) típusú, akkor

$$g_{ik}(x, v)x^{i'}x^{k'} \equiv 1. \tag{3, 4}$$

Deriváljuk a (3, 4) azonosságot s szerint, vegyük figyelembe az 5. tétel formuláit, kapjuk

$$g_{ik}(x, v)x^{i''}x^{k'} + g_{ik}(x, v)\Gamma^{*i}_{js}(x, v)x^{j'}x^{s'}x^{k'} + \frac{1}{2}\frac{\partial g_{ik}}{\partial v^s}\omega^s x^{i'}x^{k'} = 0. \tag{3, 5}$$

(3, 5) azt jelenti, hogy az $x^{i'}$ érintővektor és az

$$\Omega^i = x^{i''} + \Gamma^{*i}_{jk}x^{j'}x^{k'} + A^i_{jk}\omega^j x^{k'} \tag{3, 6}$$

vektorok „skaláris" szorzata 0.[12]

(3, 6)-ban

$$A^i_{jk} \overset{\text{def}}{=} \mathfrak{L}\frac{1}{2}\frac{\partial g_{kj}}{\partial v^s}g^{si},$$

$$g^{si}g_{ji} = \delta^s_j$$

a Kronecker szimbólum.

IX. DEFINÍCIÓ. ω^i vektort az a) típusú, Ω^i vektort a b) típusú görbék első normálvektorának nevezzük.

A VIII. definíció (3, 4) és (3, 5) alapján kimondhatjuk a

[12] Egyszerű számítással igazolható, hogy Ω^i vektor.

X. DEFINÍCIÓt: Két $\xi^i(x, v), \eta^i(x, v)$ vektor által bezárt szög koszinusza legyen

$$\cos(\xi, \eta) = \frac{g_{ik}\xi^i \eta^k}{\sqrt{\xi^i \xi_i}\sqrt{\eta^i \eta_i}}.$$

Ezek után kapcsolatba hozhatjuk a görbék mentén értelmezett vektortereket.

XI$_1$. DEFINÍCIÓ. Ha egy görbére illeszkedő vonalelemsorozatra (2, 4) b. teljesül, azt a vonalelemsorozatot párhuzamosnak nevezzük.

XI$_2$. DEFINÍCIÓ. Ha (3, 6)-ban $\Omega^i \equiv 0$ a görbe mentén, akkor az érintővektorokat párhuzamosnak nevezzük.

XI$_3$. DEFINÍCIÓ. Ha egy görbe mentén egy η^i vektor a következő (3, 6)-ból levezetett differenciálegyenletrendszert kielégíti:

$$\frac{d\eta^i}{dt} = \Gamma^{*i}_{jk}\eta^j x^{k\prime} + A^i_{jk}\omega^j \eta^k,$$

az η^i vektorokat a görbe mentén párhuzamosnak nevezzük.

4. §. Az affinösszefüggő és metrikus differenciálgeometriai terekre vonatkozó legfontosabb összefüggések

Legyen adva egy n dimenziós P_n affinösszefüggő pályatér

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = -2G^i(x, \dot{x}) \tag{4, 1}$$

differenciálegyenletrendszerrel, s legyen $G^i(x, v)$ v^i-ben másodfokú pozitív homogén. Ha követeljük azt, hogy (4, 1) a koordináták megengedett transzformációjánál változatlanul maradjon, G^i-re a következő transzformációs törvény adódik:

$$2\overline{G}^i = 2G^r \frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^r} - \frac{\partial^2 x^s}{\partial \overline{x}^r \partial \overline{x}^l}\frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^s}\overline{v}^r \overline{v}^l. \tag{4, 2}$$

Jelöljük

$$\frac{\partial G^i}{\partial v^k} = G^i_k, \ldots. \tag{4, 3}$$

(4, 2) és (4, 3)-ból következik, hogy $G^i_{jk}, \ldots$ mennyiségek tenzorok, valamint a homogenitás miatt:

$$G^i_{klj} v^j = 0. \tag{4, 4}$$

A következőkben a tér K görbületi tenzorait és a W Weyl-féle projektív görbületi tenzorait határozzuk meg.[13]

A (4, 1) és (4, 2)-ben szereplő összefüggési együtthatók segítségével

$$K_j^i = 2\frac{\partial G^i}{\partial x^j} - \frac{\partial G_j^i}{\partial x^r} v^r + 2 G_{jr}^i G^r - G_r^i G_j^r. \tag{4, 5}$$

$$K = K_i^i. \tag{4, 6}$$

$$K_{jk}^i = \frac{1}{3}\left(\frac{\partial K_k^i}{\partial v^j} - \frac{\partial K_j^i}{\partial v^k}\right). \tag{4, 7}$$

$$K_{hjk}^i = \frac{\partial K_{jk}^i}{\partial v^h}. \tag{4, 8}$$

A K_j^i másodrendű, a K_{jk}^i elsőrendű és a K_{hjk}^i tenzor nullafokú pozitív homogén v^i-ben. Ebből adódnak a következő egyenletek:

$$K_{hjk}^i v^h = K_{jk}^i. \tag{4, 9}$$

$$K_{jk}^i v^j = K_k^i. \tag{4, 10}$$

A rövidség kedvéért még a következő jelöléseket vezetjük be:

$$K_j \overset{\text{def}}{=} K_{jr}^r. \tag{4, 11}$$

$$K_{hj} \overset{\text{def}}{=} K_{hjr}^r. \tag{4, 12}$$

Ezekből következik:

$$K_{hj} v^h = K_j. \tag{4, 13}$$

$$K_{hj} v^j = (n-1)\frac{\partial K}{\partial v^h} - K_h. \tag{4, 14}$$

$$K_{hj} v^h v^j = (n-1)\cdot K. \tag{4, 15}$$

$$K_{hj} - K_{jh} = -K_{rhj}^r. \tag{4, 16}$$

A K_{ijk}^h tenzor az első három indexben ciklikusan szimmetrikus, tehát:

$$K_{ijk}^h + K_{jki}^h + K_{kij}^h = 0, \tag{4, 17}$$

valamint érvényes rá a Bianchi identitás:

$$K_{ijk|l}^h + K_{ilj|k}^h + K_{ikl|j}^h + K_{ij}^m G_{mhk}^i + K_{jk}^m G_{mhl}^i + K_{kl}^m G_{mhj}^i = 0. \tag{4, 18}$$

A (4, 18)-ban használt kovariáns deriváció:

$$T_{i|j}^h = \frac{\partial T_i^h}{\partial x^j} - \frac{\partial T_i^h}{\partial v^r} G_j^r - T_r^h G_{ij}^r + T_i^r G_{rj}^h. \tag{4, 19}$$

[13] Lásd pl. BERWALD [1], [2], [3].

A Weyl-féle tenzor értelmezése:

$$
\begin{aligned}
W^i_{hjk} &\overset{\text{def}}{=} K^i_{hjk} + \frac{1}{n+1}\delta^i_h(K_{jk}-K_{kj}) + \frac{1}{n^2-1}\delta^i_j(nK_{hk}+K_{kh}) - \\
(4,20)\qquad &- \frac{1}{n^2-1}\delta^i_k(nK_{hj}+K_{jh}) + \frac{1}{n+1}\frac{\partial(K_{jk}-K_{kj})}{\partial v^h}v^i + \\
&+ \frac{1}{n^2-1}\delta^i_j\frac{\partial K_{km}}{\partial v^h}v^m - \frac{1}{n^2-1}\delta^i_k\frac{\partial K_{jm}}{\partial v^h}v^m.
\end{aligned}
$$

Szükségünk lesz még a J. A. DOUGLAS által[14] bevezetett

$$
(4,21)\qquad D^i_{hjk} \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial^3}{\partial v^h \partial v^j \partial v^k}\left[G^i - \frac{1}{n+1}G^r_r v^i\right]
$$

tenzorra.

Ha egy általános affin pályatér pályái egyenesek, a teret síkprojektív térnek nevezzük.

A (4, 19)-ben értelmezett kovariáns derivációra érvényesek a következő felcserélési formulák:

$$
\begin{aligned}
(4,22')\qquad T^{(k)}_{(j)|i|l} - T^{(k)}_{(j)|l|i} &= -\frac{\partial T^{(k)}_{(j)}}{\partial v^p}K^p_{il} + \sum_{\mu=1}^{m} T^{k_1\ldots k_{\mu-1}pk_{\mu+1}\ldots k_m}_{(j)} K^{k_\mu}_{pil} - \\
&- \sum_{\varrho=1}^{r} T^{(k)}_{j_1\ldots j_{\varrho-1}pj_{\varrho+1}\ldots j_r} K^p_{j_\varrho il},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(4,22'')\qquad \frac{\partial T^{(k)}_{(j)}}{\partial v^i}\Big|_l - \frac{\partial T^{(k)}_{(j)|l}}{\partial v^i} &= -\sum_{\mu=1}^{m} T^{k_1\ldots k_{\mu-1}pk_{\mu+1}\ldots k_m}_{(j)} G^{k_\mu}_{pil} + \\
&+ \sum_{\varrho=1}^{r} T^{(k)}_{j_1\ldots j_{\varrho-1}pj_{\varrho+1}\ldots j_r} G^p_{j_\varrho il}.
\end{aligned}
$$

Ha az adott tér általános metrikus, azaz Finsler-tér $\mathfrak{L}(x,v)$ alapfüggvénnyel, akkor a BERWALD[15] és CARTAN[16] által bevezetett összefüggési együtthatók kapcsolatát a következő egyenlet fejezi ki:

$$
(4,23)\qquad G^i_{hj} = \Gamma^{\ i}_{hj} + C^i_{hj|s}v^s,
$$

ahol

$$
(4,24)\qquad A^i_{hj} \overset{\text{def}}{=} \mathfrak{L}C^i_{hj} \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2}g_{hj\|r}g^{ri}.
$$

A (4, 24)-ben alkalmazott operáció értelmezése:

$$
(4,25)\qquad T^{(k)}_{(j)\|l} = \mathfrak{L}\frac{\partial T^{(k)}_{(j)}}{\partial v^l}:
$$

[14] J. A. DOUGLAS [14].
[15] L. BERWALD [1].
[16] E. CARTAN [9].

Mint könnyen belátható, igazak a következő formulák:

$$l^i_{\|k} = \frac{v^i}{\mathfrak{L}}_{\|k} = \delta^i_k - l^i l_k, \tag{4,26}$$

$$l_{i\|k} = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial v^i}_{\|k} = g_{ik} - l_i l_k, \tag{4,27}$$

$$\mathfrak{L}_{\|k} = \mathfrak{L} l_k. \tag{4,28}$$

$$l^i_{|k} = l_{i\|k} = \mathfrak{L}_{|k} = 0. \tag{4,29}$$

II. RÉSZ

AFFINÖSSZEFÜGGŐ TEREK PÁLYATARTÓ LEKÉPEZÉSEI

5. §. A pályatartó leképezés

Legyen adva egy tetszőleges P_n n-dimenziós[17] affinösszefüggő pályatér. Pályákon értjük a (4, 1) differenciálegyenletrendszert, hozzávéve az összes megengedett paramétertranszformációt. Legyen (4, 1)-ben a paraméter s, egy megengedett paramétertranszformáció

$$s = s(t), \tag{5,1}$$

akkor (4, 1) miatt kapjuk:

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} = -2G^i\left(x, \frac{dx}{dt}\right) - \frac{d^2t}{ds^2}\frac{1}{\left(\frac{dt}{ds}\right)^2}\frac{dx^i}{dt}. \tag{5,2}$$

Azt az s paramétert, melynél a pályák egyenlete (4, 1) alakú, kijelölt paraméternek nevezzük. Könnyen látható, hogy ha s kijelölt paraméter, $\bar{s}$ csak akkor az, ha

$$\bar{s} = as + b, \qquad (a, b \text{ állandók}). \tag{5,3}$$

Ha a pályák (4, 1) differenciálegyenletrendszerét tetszőleges t paraméterre vonatkoztatjuk, a pályák egyenlete lesz:[18]

$$(\ddot{x}^i + 2G^i)\dot{x}^k - (\ddot{x}^k + 2G^k)\dot{x}^i = 0. \tag{5,4}$$

[17] A következőkben legyen $n \geqq 3$. Erre a megkötésre azért van szükség, mert $n = 2$ esetén a Weyl-féle tenzor azonosan nulla. A tárgyalás ebben az esetben is teljesen azonos, csak a Weyl tenzor helyébe a

$$2(K_{i|j} - K_{j|i}) + (K_{im|j} - K_{jm|i})\dot{x}^m$$

tenzor lép.

[18] A vessző s-szerinti, a pont t-szerinti derivációt jelent.

Képezzük le a P_n affinösszefüggő pályateret egy $\bar{P}_n$ affinösszefüggő pályatérre úgy, hogy a P_n tér (x^i, v^i) vonalelemének feleljen meg a $\bar{P}_n$ tér (x^i, v^i) vonaleleme. Legyen ez G leképezés.

9. TÉTEL. *A G akkor és csak akkor viszi át a P_n (5, 4) differenciálegyenletrendszerrel adott pályáit $\bar{P}_n$ pályáiba, ha van olyan $p(x, v)$ v^i-ben elsőfokú pozitív homogén skaláris függvény, hogy*

$$\bar{G}^i(x, v) = G^i(x, v) + p(x, v)v^i, \tag{5, 5}$$

ahol

$$(\ddot{x}^i + 2\bar{G}^i)\dot{x}^k - (\ddot{x}^k + 2\bar{G}^k)\dot{x}^i = 0 \tag{5, 6}$$

a $\bar{P}_n$ geodetikusainak az egyenletrendszere. (5, 4), (5, 5) és (5, 6)-ból adódik, hogy a feltétel elegendő.

Azonban szükséges is. Tegyük fel, hogy G átviszi P_n pályáit $\bar{P}_n$ pályáiba. (5, 4) és (5, 6)-ból következik

$$(\bar{G}^i - G^i)\dot{x}^k = (\bar{G}^k - G^k)\dot{x}^i. \tag{5, 7}$$

(5, 7) tetszőleges, de rögzített (x) mellett minden $\dot{x}^i$-re igaz, tehát

$$[\bar{G}^i(x, v) - G^i(x, v)]v^k = [\bar{G}^k(x, v) - G^k(x, v)]\cdot v^i \qquad \{x^1, \ldots, x^n \text{ konstans}\}. \tag{5, 8}$$

Deriváljuk (5, 8)-at v^j szerint, majd kontraháljuk az i és j indexeket, kapjuk

$$(n+1)(\bar{G}^k - G^k) = (\bar{G}^i_i - G^i_i)v^k. \tag{5, 9}$$

Jelöljük

$$p = \frac{1}{n+1}[\bar{G}^i_i - G^i_i]. \tag{5, 10}$$

(5, 9) és (5, 10)-ből adódik az állításunk.

A 9. tételben kimondott feltételeknek megfelelő G leképezést pályatartó, vagy metrikus esetben geodetikus leképezésnek nevezzük.

Ha P_n pályáinak kitüntetett paramétere s, $\bar{P}_n$ pályáié $\bar{s}$, ezek között (5, 2) és (5, 5) miatt a következő kapcsolat áll fenn:

$$s = \int_{\bar{s}_0}^{\bar{s}} e^{2\int_{\bar{s}}^{\bar{s}} p\left(x, \frac{dx}{d\bar{s}}\right) d\bar{s}} \, d\bar{s}. \tag{5, 11}$$

6. §. Az I. és II. alaptétel

Ebben a §-ban az affin összefüggésből levezethető tenzorok és invariáns műveletek segítségével meghatározzuk a pályatartó leképezés teljes invariáns rendszerét.

Érvényesek a következő alaptételek.

I. ALAPTÉTEL. *Ahhoz, hogy egy P_n affinösszefüggő pályatér egy $\overline{P}_n$ affinösszefüggő pályatérre pályatartóan leképezhető legyen, szükséges és elegendő a következő azonosságok teljesülése:*

$$\overline{W}^i_{hjk} = W^i_{hjk};\ \overline{W}^i_{hjk\overline{|}i} - W^i_{hjk|i} = \frac{n-2}{n+1} W^r_{hjk}(\overline{G}^i_{ir} - G^i_{ir}) - \tag{6, 1'}$$
$$- W^r_{sjk} v^s (\overline{G}^m_{mhr} - G^m_{mhr}) - W^r_{hsk} v^s (\overline{G}^m_{mjr} - G^m_{mjr}) - W^r_{hjs} v^s (\overline{G}^m_{mkr} - G^m_{mkr}),$$

$$\overline{D}^i_{hjk} = D^i_{hjk};\ \overline{D}^i_{hjk\overline{|}i} - D^i_{hjk|i} = \frac{n-1}{n+1} D^r_{hjk}(\overline{G}^i_{ir} - G^i_{ir}), \tag{6, 1''}$$

ahol W^i_{hjk} és D^i_{hjk} a P_n tér, *$\overline{W}^i_{hjk}$ és $\overline{D}^i_{hjk}$ a $\overline{P}_n$ tér Weyl-féle, illetve a Douglas-féle tenzora.*[19]

A tétel szükségessége abból következik, hogy — mint számolással igazolható — pályatartó leképezésnél sem a Weyl-féle, sem a Douglas-féle tenzor nem változik.

Tegyük fel fordítva, hogy (6, 1') és (6, 1'') teljesül. A bizonyítás egyszerűsítése kedvéért K. YANO[20] alapján az adott összefüggési együtthatók segítségével olyan új összefüggési együtthatórendszert vezetünk be, melynek transzformációs formulájából hiányzik a $\frac{\partial^2 p}{\partial v^i \partial v^j}$-t tartalmazó tag.

Legyen ugyanis

$$G^{*i}_{jk} = G^i_{jk} - \frac{1}{n+1} G^s_{sjk} v^i. \tag{6, 2}$$

Nyilván G^{*i}_{jk} v^i-ben 0-adfokú pozitív homogén függvény, koordinátatranszformációs formulája megegyezik a G^i_{jk} koordinátatranszformációs formulájával, tehát úgyanúgy képezhető a G^{*i}_{jk}-val a „görbületi" tenzor, valamint a kovariáns deriváció.

A G^i_{jk} homogénitási feltételéből kapjuk (6, 2) alapján

$$G^{*i}_j = G^i_j. \tag{6, 3}$$

A G^{*i}_{jk}-val képzett kovariáns derivációt a következőképpen írhatjuk fel:

$$T^i_{j*k} = \frac{\partial T^i_j}{\partial x^k} - \frac{\partial T^i_j}{\partial v^r} G^r_k - T^i_r G^{*r}_{jk} + T^r_j G^{*i}_{rk}. \tag{6, 4}$$

[19] Lásd (4, 20) és (4, 21).

[20] K. YANO [39], 194—199. o.

(4, 19) és (6, 4) alapján kapjuk:

$$T^i_{j*k} = T^i_{j|k} + \frac{1}{n+1} T^i_r v^r G^s_{sjk} - \frac{1}{n+1} T^r_j v^i G^s_{srk}. \tag{6, 5}$$

Jelöljük K^{*h}_{ijk}-val a G^{*i}_{jk}-val (4, 7)-hez analóg képezett görbületi tenzort, kapjuk (4, 7)-ből:

$$K^{*h}_{ijk} - K^h_{ijk} + \frac{1}{n+1}(G^s_{skj|i} - G^s_{sij|k})v^h. \tag{6, 6}$$

(5, 5), (6, 2) valamint a 9. tétel alapján kapjuk a

10. TÉTELt. *Ahhoz, hogy egy P_n tér pályatartóan leképezhető legyen egy $\overline{P}_n$ térre, szükséges és elegendő olyan $p(x, v)$ v^i-ben elsőfokú pozitív homogén skalár létezése, melynek v^i szerinti derivációi a következő egyenletrendszert kielégítik:*

$$\overline{G}^{*i}_{jk} = G^{*i}_{jk} + p_j \delta^i_k + p_k \delta^i_j, \tag{6, 7}$$

ahol

$$p_j \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial p}{\partial v^j}. \tag{6, 8}$$

A következőkben szükségünk lesz p_j kovariáns derivációjára. Evégből a (6, 7) segítségével határozzuk meg K^{*h}_{ijk} transzformációs formuláját. Kapjuk:

$$\overline{K}^{*h}_{ijk} - K^{*h}_{ijk} = p_{j*k}\delta^h_i - p_{j*i}\delta^h_k + (p_{i*k} - p_{k*i})\delta^h_j - \left(\frac{\partial G^{*h}_{ij}}{\partial v^k} - \frac{\partial G^{*h}_{kj}}{\partial v^i}\right) p_r v^r. \tag{6, 9}$$

Kontraháljuk (6, 9)-ben a h és k indexeket, kapjuk a (4, 12) jelölés alapján

$$\overline{K}^*_{ij} - K^*_{ij} = -n p_{j*i} + p_{i*j} + \frac{n-1}{n+1} G^s_{sij} p_r v^r. \tag{6, 10}$$

Szorozzuk meg (6, 10)-et n-nel, cseréljük fel az i és j indexeket s azután adjuk hozzá a (6, 10)-hez, kapjuk:

$$p_{i*j} = -\frac{1}{n^2-1}[(n\overline{K}^*_{ji} + \overline{K}^*_{ij}) - (nK^*_{ji} + K^*_{ij})] + \frac{1}{n+1} G^s_{sij} p_r v^r. \tag{6, 11}$$

Határozzuk meg most p_j v^k szerinti kovariáns derivációját. Deriváljuk evégből (5, 10)-et v^j, azután v^k szerint kapjuk:

$$\frac{\partial p_j}{\partial v^k} = \frac{1}{n+1}[\overline{G}^s_{sjk} - G^s_{sjk}]. \tag{6, 12}$$

Alaptételünket nyilván teljesen bebizonyítjuk, ha kimutatjuk, hogy létezik olyan egyértelmű p_j vektormező, mely (6, 7), (6, 11) és (6, 12)-t kielégíti.

Ezek azonban egy Thomas—Veblen[21]-féle vegyes rendszert határoznak meg. Képezzük tehát (6, 11) integrálhatósági feltételeit, s alkalmazzuk a (4, 22')

[21] Lásd J. M. THOMAS—O. VEBLEN [33].

és a (4, 22″) felcserélési formulákat, valamint (4, 20) és (6, 6) egyenleteket, kapjuk:

$$
(6,13)\qquad
\begin{aligned}
&-\frac{1}{n^2-1}(n\overline{K}^*_{kj}+\overline{K}^*_{jk})_{\bar{*}l}+\frac{1}{n^2-1}(nK^*_{kj}+K^*_{jk})_{*l}+\\
&+\frac{1}{n^2-1}(n\overline{K}^*_{lj}+\overline{K}^*_{jl})_{\bar{*}k}-\frac{1}{n^2-1}(nK^*_{lj}+K^*_{jl})_{*k}+\\
&+\frac{1}{n+1}(\overline{K}^{*r}_{lk}\overline{G}^m_{mrj}-K^{*r}_{lk}G^m_{mrj})+W^r_{klj}p_r=0.
\end{aligned}
$$

A $\dfrac{\partial p_{j*k}}{\partial v^l}-\dfrac{\partial p_j}{\partial v^l}{}_{*k}$ kifejezést is (6, 11)-ből határozzuk meg. Használjuk fel ismét a (4, 22″) felcserélési formulákat, valamint (6, 12), (6, 2), (6, 7), (4, 21) egyenleteket, kapjuk:

$$
(6,14)\qquad
\begin{aligned}
&-\frac{1}{n^2-1}\left(n\frac{\partial\overline{K}^*_{kj}}{\partial v^l}+\frac{\partial\overline{K}^*_{jk}}{\partial v^l}\right)+\frac{1}{n^2-1}\left(n\frac{\partial K^*_{kj}}{\partial v^l}+\frac{\partial K^*_{jk}}{\partial v^l}\right)-\\
&-\frac{1}{n+1}\overline{G}^r_{rlj\bar{*}k}+\frac{1}{n+1}G^r_{rlj*k}+\\
&+\frac{1}{n+1}\frac{\partial\overline{G}^{*r}_{ks}}{\partial v^l}v^s\overline{G}^m_{mrj}-\frac{1}{n+1}\frac{\partial G^{*r}_{ks}}{\partial v^l}v^sG^m_{mrj}+D^r_{klj}p_r=0.
\end{aligned}
$$

Deriváljuk továbbá (6, 7)-et kovariánsan, majd v^i szerint, használjuk fel (6, 11)-et és (6, 12)-t, kapjuk:

$$
(6,15)\qquad \overline{W}^r_{kjl}=W^r_{kjl}
$$

$$
(6,16)\qquad \overline{D}^r_{kjl}=D^r_{kjl}.
$$

Ezek az egyenletek azonban feltételünk szerint azonosan teljesülnek. Kimutatjuk most végül, hogy (6, 13) és (6, 14) a (6, 1′) és (6, 1″) következménye.

Helyettesítsük be a (4, 18)-ba (4, 20) és (4, 21)-ből kiszámított értékeket, kapjuk:

$$
(6,17)\qquad
\begin{aligned}
&-\frac{1}{n^2-1}(nK^*_{kj}+K^*_{jk})_{*l}+\frac{1}{n^2-1}(nK^*_{lj}+K^*_{jl})_{*k}+K^{*r}_{lk}G^m_{mrj}=\\
&=\frac{1}{n-2}[-W^r_{klj*r}-W^r_{skm}v^sD^m_{lrj}+W^r_{slm}D^m_{krj}].
\end{aligned}
$$

Deriváljuk (6, 16)-ot v^i szerint, (6, 9), (6, 2), (4, 7) és (4, 12) miatt kapjuk:

$$
(6,18)\qquad
\begin{aligned}
&-\frac{1}{n^2-1}\left(n\frac{\partial K^*_{kj}}{\partial v^l}+\frac{\partial K^*_{jk}}{\partial v^l}\right)-\frac{1}{n+1}G^r_{rlj*k}+\\
&+\frac{1}{n+1}\frac{\partial G^{*r}_{ks}}{\partial v^l}v^sG^m_{mrj}=-\frac{1}{n-1}D^r_{klj*r}.
\end{aligned}
$$

A (6, 17), (6, 18), (6, 15), (6, 16) egyenletekből közvetlenül adódik, hogy (6, 13) és (6, 14) (6, 1′) és (6, 1″) következménye s ebből, valamint az említett J. M. Thomas—O. Veblen-től származó tételből adódik: a (6, 11), (6, 12) és (6, 7) egyenletekből álló rendszer teljesen integrálható. Az I. alaptételt ezzel teljesen bebizonyítottuk.

Ha most tekintetbe vesszük azt, hogy ha (6, 15) és (6, 16) teljesül, a W és D *-gal jelölt kovariáns derivációi helyett a Berwald-féle kovariáns derivációt is használhatjuk, kimondhatjuk a

II. ALAPTÉTELT. *A W^i_{jkl}, D^i_{jkl} tenzorok, ezek kovariáns, valamint v^i szerinti derivációi pályatartó leképezésekkel szemben teljes invariánsrendszert alkotnak.*

Természetesen a P_n és $\overline{P}_n$ terek összefüggési együtthatóival képezett kovariáns derivációk általában nem lesznek egyenlők. Ha összefüggési koefficiensnek a

$$\Pi^i_{jk} = G^i_{jk} - \frac{1}{n+1}(G^h_{hk}\delta^i_j + G^h_{hj}\delta^i_k + G^h_{hjk}v^i)$$

ún. projektív összefüggési együtthatókat vezetjük be, az ezzel képzett kovariáns derivációk is megegyeznek a P_n és $\overline{P}_n$ térben, ekkor azonban ezen mennyiségek általában elvesztik tenzori jellegüket.

III. RÉSZ

ÁLTALÁNOS METRIKUS TEREK GEODETIKUS LEKÉPEZÉSEI

7. §. A geodetikus leképezés szükséges és elegendő feltétele

Tekintsünk most egy, az I. részben megalapozott Finsler-féle teret, F_n-t. Legyen az alapfüggvény $\mathfrak{L}(x, v)$. Közvetlenül belátható, hogy a II. rész eredményei erre az esetre is érvényesek.

Metrikus esetben azonban — mint már említettük — főleg az alapfüggvényre vonatkozó meggondolások és eredmények tartanak nagyobb érdeklődésre számot.

A probléma tehát a következő: Milyen tulajdonságú annak az $\overline{F}_n$ térnek az $\overline{\mathfrak{L}}(x, v)$ alapfüggvénye, amely geodetikusan leképezhető az F_n-re?

11. TÉTEL. *Egy $\overline{F}_n$ akkor és csak akkor képezhető le egy F_n-re, ha az $\overline{\mathfrak{L}}$ alapfüggvény eleget tesz a következő differenciálegyenletrendszernek:*

$$\overline{\mathfrak{L}}_{|i} - \frac{\partial \overline{\mathfrak{L}}_{|s}}{\partial v^i} v^s = 0. \tag{7, 1}$$

Bizonyítás. A feltétel szükséges. Tegyük fel ugyanis, hogy $\overline{F}_n$ leképezhető geodetikusan F_n-re. Ekkor (5, 5) és (4, 29) alapján kapjuk:

$$(7,2) \qquad \frac{\partial \overline{\mathfrak{L}}}{\partial x^m} = \frac{\partial \overline{\mathfrak{L}}}{\partial v^r} \overline{G}^r_m = \frac{\partial \overline{\mathfrak{L}}}{\partial v^r} G^r_m + \frac{\partial (\overline{\mathfrak{L}} p)}{\partial v^m}.$$

Komponáljuk (5, 5)-öt $\overline{l}_i$-vel, kapjuk a homogenitási feltétel miatt:

$$(7,3) \qquad \overline{G}^i \overline{l}_i = G^i \overline{l}_i + p\overline{\mathfrak{L}}.$$

Deriváljuk (7, 3)-at v^m szerint, helyettesítsük az így nyert $\frac{\partial (p\overline{\mathfrak{L}})}{\partial v^m}$ kifejezését (7, 2)-be, kapjuk:

$$(7,4) \qquad \frac{\partial \overline{\mathfrak{L}}}{\partial x^m} = \frac{\partial (\overline{l}_i \overline{G}^i)}{\partial v^m} - \frac{\partial^2 \overline{\mathfrak{L}}}{\partial v^i \partial v^m} G^i.$$

Másrészt ha az $\overline{\mathfrak{L}}$-re vonatkozó (4, 29)-nek megfelelő egyenletet v^i-vel komponáljuk, kapjuk:

$$(7,5) \qquad 2\overline{l}_i \overline{G}^i = v^i \frac{\partial \overline{\mathfrak{L}}}{\partial x^i}.$$

Deriváljuk (7, 5)-öt v^i szerint, helyettesítsük be (7, 4)-be, kapjuk végül (7, 1)-et.

Tegyük fel, hogy (7, 1) teljesül egy $\overline{\mathfrak{L}}$ alapfüggvényre. Ismeretes, hogy $\overline{F}_n$-ben[22]

$$(7,6) \qquad 2\overline{G}_j = \frac{\partial \overline{\mathfrak{L}}}{\partial v^j} \frac{\partial \overline{\mathfrak{L}}}{\partial x^r} v^r + \overline{\mathfrak{L}} \frac{\partial^2 \overline{\mathfrak{L}}}{\partial v^j \partial x^r} v^r - \overline{\mathfrak{L}} \frac{\partial \overline{\mathfrak{L}}}{\partial x^j}.$$

Helyettesítsük be (7, 6)-ba (7, 1)-ből $\frac{\partial^2 \overline{\mathfrak{L}}}{\partial v^i \partial x^r} v^r$ kifejezést, kapjuk:

$$(7,7) \qquad 2\overline{G}_j = \frac{\partial \overline{\mathfrak{L}}}{\partial v^j} \frac{\partial \overline{\mathfrak{L}}}{\partial x^r} v^r + 2\overline{\mathfrak{L}} \frac{\partial^2 \overline{\mathfrak{L}}}{\partial v^j \partial v^r} G^r.$$

Kontraháljuk (7, 7)-et $\overline{g}^{jk}$-val, vegyük figyelembe (4, 27)-et, adódik:

$$(7,8) \qquad \overline{G}^k = G^k + \frac{1}{2\overline{\mathfrak{L}}} \overline{\mathfrak{L}}_{|r} v^r v^k.$$

Legyen

$$(7,9) \qquad p(x, v) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\overline{\mathfrak{L}}} \overline{\mathfrak{L}}_{|r} v^r.$$

(7, 8), (7, 9) és (5, 5)-ből következik az állításunk.

A 11. tételből és (7, 9)-ből következik a

12. TÉTEL. *Ha egy $\overline{F}_n$ tér leképezhető geodetikusan egy F_n térre, a leképezésnél szereplő $p(x, v)$ skaláris előállítását* (7, 9) *adja.*

[22] Lásd pl. E. CARTAN [9].

Arra való tekintettel, hogy elsőrendű parciális differenciálegyenletrendszert könnyebb kezelni, a (7, 1)-ben adott szükséges és elegendő feltétel helyett egy olyan feltételt adunk meg, melyben csak elsőrendű parciális deriváltak szerepelnek.

13. TÉTEL. *Ahhoz, hogy egy $\overline{F}_n$ tér egy F_n térre geodetikusan le legyen képezhető, szükséges és elegendő olyan F_n^* térnek a létezése, melynek alapfüggvénye a következő feltételeket elégíti ki:*

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{L}^*}{\partial v^i \partial v^k} \overset{\text{def}}{=} M_{ik}^*. \tag{7, 10}$$

$$M_{ik|s}^* v^s = 0. \tag{7, 11}$$

$$M_{ir}^* K_{jk}^r + M_{jr}^* K_{ki}^r + M_{kr}^* K_{ij}^r = 0. \tag{7, 12}$$

Az $\overline{F}_n$ tér alapfüggvénye akkor

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{L}^* + B_i(x) v^i. \tag{7, 13}$$

Bizonyítás. Tegyük fel, $\overline{F}_n$ leképezhető F_n-re, akkor (5, 5)-ből kapjuk:

$$\overline{l}_{i|j} = \overline{l}_{j|i}. \tag{7, 14}$$

Deriváljuk (7, 1)-et v^j szerint, vegyük figyelembe a (7, 14)-et, kapjuk (7, 11)-et.

Deriváljuk továbbá (7, 14)-et kovariánsan, cseréljük fel az indexeket ciklikusan és a kapott egyenleteket adjuk össze. Használjuk fel a K görbületi tenzorra vonatkozó (4, 17), valamint a felcserélésre vonatkozó (4, 22′) identitásokat, kapjuk (7, 12)-t. A feltétel tehát szükséges.

Azonban elegendő is. Tegyük fel ugyanis, hogy van olyan F_n^* Finsler-tér, melynek alapfüggvényére (7, 11) és (7, 12) teljesül. Ha $\mathfrak{L}^*$ kielégíti (7, 1)-et, a tétel ki van mutatva. Jelöljük

$$\varrho_i(\mathfrak{L}^*) \overset{\text{def}}{=} \mathfrak{L}_{|i}^* - \frac{\partial \mathfrak{L}_{|s}^*}{\partial v^i} v^s. \tag{7, 15}$$

Tegyük fel tehát,

$$\varrho_i(\mathfrak{L}^*) \neq 0. \tag{7, 16}$$

Számolással igazolható, hogy ha $\mathfrak{L}^*$ kielégíti (7, 11)-et, akkor teljesül a következő azonosság:

$$\frac{\partial \varrho_i(\mathfrak{L}^*)}{\partial v^k} - \frac{\partial \varrho_k(\mathfrak{L}^*)}{\partial v^i} = 0. \tag{7, 17}$$

Deriváljuk (7, 17)-et v^j szerint, cseréljük fel az indexeket ciklikusan s adjuk össze a kapott egyenleteket, kapjuk:

$$\frac{\partial^2 \varrho_i(\mathfrak{L}^*)}{\partial v^h \partial v^j} = 0. \tag{7, 18}$$

A homogenitási feltételek miatt tehát

$$(7,19) \qquad \varrho_i(\mathfrak{L}^*) = \Omega_{ir}(x) v^r.$$

ϱ_i jelentése miatt Ω_{ir} ferdén szimmetrikus.

Deriváljuk (7, 19)-et v^k-szerint, vegyük figyelembe (7, 11)-et, kapjuk:

$$(7,20) \qquad \Omega_{ik}(x) = l^*_{k|i} - l^*_{i|k}.$$

Deriváljuk (7, 20)-at kovariánsan, az indexeket cseréljük fel ciklikusan, adjuk össze a kapott egyenleteket, (7, 12), (4, 17) és (4, 22) alapján kapjuk:

$$(7,21) \qquad \frac{\partial \Omega_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial \Omega_{ji}}{\partial x^k} + \frac{\partial \Omega_{kj}}{\partial x^i} = 0.$$

(7, 21) alapján tehát

$$(7,22) \qquad \Omega_{jk} = \frac{\partial B_j}{\partial x^k} - \frac{\partial B_k}{\partial x^j}$$

differenciálegyenletrendszer teljesen integrálható. Legyen $B_i(x)$ egy megoldása. Ebben az esetben

$$(7,23) \qquad \overline{\mathfrak{L}} = \mathfrak{L}^* + B_j(x) v^j$$

függvényre, (7, 15) és (7, 19) miatt

$$(7,24) \qquad \varrho_i(\overline{\mathfrak{L}}) = 0.$$

A (7, 24) a 11. tétel alapján a 13. tétel teljes bizonyítását jelenti.

A (7, 20)-ból, egy még később felhasználásra kerülő azonosságot kapunk, ha v^j szerint deriváljuk:

$$(7,25) \qquad M^*_{kj|i} - M^*_{ij|k} = 0.$$

A következő §-ban fel fogjuk még használni a

14. TÉTELt. *Ahhoz, hogy* $\overline{F}_n$ F_n*-re geodetikusan leképezhető legyen, szükséges és elegendő, hogy a következő azonosság teljesüljön:*

$$(7,26) \qquad \bar{l}_{i|k} - \bar{l}_{k|i} = 0.$$

Bizonyítás. A tétel szükségességét a (7, 14) mondja ki. Tegyük fel tehát, hogy (7, 26) teljesül. Komponáljuk v^i-vel (7, 26)-ot, kapjuk (7, 1)-et, s ezzel a tétel be van bizonyítva.

A 11., 13. és 10. tételből következik a

15. TÉTEL. *A* (7, 1), (7, 11), (7, 12) *és* (7, 26) *parciális differenciálegyenletrendszer* v^i*-ben elsőrendű pozitív homogén és konvex megoldásai* v^i*-ben lineáris kifejezéstől eltekintve azonosak.*

8. §. Affinösszefüggő pályaterek metrizálhatósága[23]

Legyen adva egy n dimenziós affinösszefüggő pályatér, P_n. A metrikus differenciálgeometria szempontjából alapvető kérdés,[24] mikor látható el a tér reguláris Finsler metrikával tágabb értelemben, azaz mikor létezik oly $\overline{\mathfrak{L}}(x, v)$, a v^i-ben elsőrendű pozitív homogén konvex függvény úgy, hogy az $\overline{\mathfrak{L}}(x, v)$ extremális serege az adott P_n pályatér görbeserege legyen.

Ha ilyen $\overline{\mathfrak{L}}$ létezik, vezessük be ívhossznak a következő kifejezést:

$$s = \int_{s_0}^{s} \overline{\mathfrak{L}}(x, \dot{x})\,dt, \tag{8, 1}$$

akkor a pályák (4, 1) egyenletrendszere az új s paraméterben[25]

$$x^{i''} = -2\overline{G}^i(x, x'), \tag{8, 2}$$

ahol

$$\overline{G}^i(x, v) = G^i(x, v) + p(x, v)v^i, \tag{8, 3}$$

mint egyszerű, a G^i transzformációs törvényét figyelembe vevő számítással kapjuk, (8, 3)-ban

$$2p(x(s), x'(s)) = \frac{\dfrac{d^2t}{ds^2}}{\dfrac{dt}{ds}}. \tag{8, 4}$$

(8, 4)-ből

$$t = \int_{s_0}^{s} e^{2\int_{s_0}^{s} p(x(s),\, x'(s))ds}\, ds. \tag{8, 5}$$

A problémát ezek szerint úgy is megfogalmazhatjuk: Mikor vezethető be a (4, 1) pályákon olyan s paraméter, amelyre igaz: a (4, 1) pályák

$$x^i = x^i(t, a^1, \ldots, a^{2n-2}) \tag{8, 6'}$$

$$\dot{x}^i = \dot{x}^i(t, a^1, \ldots, a^{2n-2}) \tag{8, 6''}$$

véges egyenleteiből kiszámított $t, a^1, \ldots, a^{2n-2}$ paraméterértékeket a $\frac{ds}{dt}$ kifejezésbe behelyettesítve, olyan $\overline{\mathfrak{L}}(x, \dot{x})$ függvényt kapunk, mely $\dot{x}^i$-ben elsőrendű pozitív homogén, pozitív és konvex. Ez tehát azt jelenti (8, 3) értelmében,

[23] Lásd ezzel kapcsolatban O. VARGA [35].

[24] Lásd I. rész.

[25] Most ponttal az eredeti P_n tér t-vel jelölt kitüntetett paramétere szerinti, vesszővel az s szerinti derivációt jelöljük.

hogy meg kell határozni annak a szükséges és elegendő feltételét: egy affinösszefüggő P_n pályatér mikor képezhető le geodetikusan egy Finsler-térre.

A problémát abban a szűkebb vagy természetes értelemben is felvethetjük, hogy mikor látható el P_n olyan metrikával, melynek s ívhossza a P_n pályatér kitüntetett paraméterének lineáris függvénye.

Az eddigiek alapján mindkét kérdésre tudunk választ adni.

III. ALAPTÉTEL.

Egy P_n affinösszefüggő pályatér akkor és csak akkor metrizálható a tágabb értelemben, ha vagy

A) *létezik olyan v^i-ben elsőfokú pozitív homogén és v^i-ben konvex $\bar{\mathfrak{L}}(x, v)$ függvény, mely (7, 1)-et kielégíti; vagy*

B) *létezik a P_n térben olyan $M_{ik}(x, v)$ szimmetrikus, a v^i-ben — elsőfokú pozitív homogén tenzor, mely (7, 11) és (7, 12)-t és a következő*

$$\frac{\partial M_{ik}}{\partial v^j} = \frac{\partial M_{ij}}{\partial v^k} \tag{8, 7}$$

$$F_1 = \frac{1}{\Sigma(v^i)^2 \Sigma(z^i)^2} \begin{vmatrix} M_{ik} & v^i \\ z^k & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \tag{8, 8}$$

feltételeket kielégíti,[26] *vagy*

C) *létezik a P_n térben olyan $\lambda_i(x, v)$ a v^i-ben 0-ad fokú pozitív homogén kovariáns vektor, melyre teljesül*

$$\lambda_{i|k} - \lambda_{k|i} = 0 \tag{8, 9'}$$

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial v^k} - \frac{\partial \lambda_k}{\partial v^i} = 0 \tag{8, 9''}$$

és $\lambda_i v^i$ v^i-ben konvex függvény.

Bizonyítás. Hogy az A), B) és C) feltételek szükségesek, közvetlenül következik a 11., 13. és 14. tételből.[27]

A feltételek azonban elegendők is. Tegyük fel ugyanis, hogy $\bar{\mathfrak{L}}(x, v)$ kielégíti az A) feltételt. Ebben az esetben a feltételek miatt van olyan $\bar{F}_n$ Finsler-tér, melynek $\bar{\mathfrak{L}}(x, v)$ alapfüggvénye,[28] s a 11. tétel értelmében ennek a Finsler-térnek a geodetikusai az adott (4, 1) pályarendszerrel ekvivalensek.

[26] (8, 8)-ban z^i-k tetszőleges valós számokat jelentenek, melyekre $\Sigma(z^i)^2$

[27] A (8, 8)-ban szereplő $F_1 \neq 0$ feltételnek minden v^i-ben konvex függvény eleget tesz. [Lásd C. CARATHÉODORY [8] 220. o.]

[28] Ha $\bar{\mathfrak{L}}(x, v)$ nem pozitív, akkor, mint ismeretes, (lásd pl. C. CARATHÉODORY [8] 243. o.) van olyan $\mathfrak{L}^*$ függvény, mely pozitív és extremális sereg megegyezik $\bar{\mathfrak{L}}$ extremális seregével.

Tegyük fel továbbá, hogy a B)* feltételek teljesülnek. Ekkor az

$$\overline{\mathfrak{L}}(x, v) = v^i \int_{(v)_0}^{(v)} M_{ik}(x, v) dv^k \tag{8, 10}$$

alapfüggvény a (8, 8) feltételek miatt reguláris variációs problémához vezet, tehát van olyan Finsler-tér, melynek alapfüggvénye $\overline{\mathfrak{L}}(x, v)$.[28] Ekkor azonban a 13. tétel miatt P_n leképezhető geodetikusan egy F_n^* Finsler-térre, tehát metrizálható.

Teljesüljön végül C). Kontraháljuk (8, 9')-et v^i-vel, a homogenitási feltétel és (8, 9'') miatt kapjuk (7, 1)-et. Ekkor azonban $\lambda_r v^r = \overline{\mathfrak{L}}$ reguláris variációs problémához vezet, tehát van olyan $\overline{F}_n$ Finsler-tér, melyre P_n geodetikusan leképezhető, s ezzel tételünket teljesen bebizonyítottuk.[28]

A természetes metrizálhatóságra felel a

IV. ALAPTÉTEL. *Egy P_n affinösszefüggő pályatér akkor és csak akkor metrizálható a természetes értelemben, ha létezik a P_n térben olyan $\lambda_i(x, v)$ v^i-ben 0-ad fokú pozitív homogén kovariáns vektor, melyre érvényesek a következő egyenletek:*

$$\lambda_{i|k} = 0 \tag{8, 11}$$

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial v^k} - \frac{\partial \lambda_k}{\partial v^i} = 0, \qquad \lambda_r v^r \ v^i\text{-ben konvex.} \tag{8, 12}$$

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy van olyan $\overline{\mathfrak{L}}$ alapfüggvénnyel megadott $\overline{F}_n$ Finsler-tér, amelynek geodetikusait (4, 1) adja ívhossz paraméterben. Ekkor, ha $\lambda_i = \overline{l}_i(x, v)$, (8, 11) és (8, 12) nyilván teljesül.

Teljesüljön fordítva (8, 11) és (8, 12). Legyen $\lambda_r v^r = \overline{\mathfrak{L}}$ alapfüggvénnyel megadva egy $\overline{F}_n$ Finsler-tér.[28] Ekkor (8, 11), (8, 12) és a III. alaptétel miatt $\overline{F}_n$-re P_n geodetikusan leképezhető. A 12. tétel alapján ekkor

$$\overline{G}^i = G^i + \frac{1}{2\overline{\mathfrak{L}}} \overline{\mathfrak{L}}_{|s} v^s v^i. \tag{8, 13}$$

De (8, 11) alapján

$$\overline{\mathfrak{L}}_{|s} = (\lambda_r v^r)_{|s} = 0, \tag{8, 14}$$

vagyis (8, 13)-ban

$$\overline{G}^i = G^i. \tag{8, 15}$$

(8, 15) éppen a tételünk bizonyítását jelenti:

A III. alaptételből következik a

16. TÉTEL. *Ahhoz, hogy egy affinösszefüggő P_n pályatér geodetikusan Riemann térre legyen leképezhető, szükséges és elegendő a P_n-térben olyan*

$\gamma_{ik}(x)$ szimmetrikus, csak x-től függő, kontravariáns tenzormezőnek a létezése, melyre a következő feltételek teljesülnek:

(8, 16) $$\gamma_{ik}(x)_{|l} = \gamma_{lk}(x)_{|i}$$

(8, 17) $\gamma_{ik} X^i X^k$ *pozitív definit az X^i segédváltozókban.*

Ekkor nyilván

(8, 18) $$\overline{\mathfrak{L}}^2 = \gamma_{ik}(x) v^i v^k.$$

Ha (8, 16)

(8, 19) $$\gamma_{ik|l} = 0$$

alakúra redukálódik, akkor P_n természetes értelemben ellátható Riemann metrikával.

9. §. Azon terek alapfüggvényeinek meghatározása, melyeknek extremálisai egyenesek

A síkprojektív tereket nyilvánvalóan pályatartóan le lehet képezni olyan P_n térre, melybe bevezethető olyan koordináta-rendszer, ahol

(9, 1) $$G^i \equiv 0.$$

A (9, 1) és (5, 5)-ből következik, hogy a síkprojektív terekben bevezethető olyan koordináta-rendszer, melyben

(9, 2) $$\overline{G}^i = p v^i.$$

Hilbert felveti azt a problémát:[29] határozzuk meg mindazon függvényeket, melyeknek extremális serege egyenes.

A probléma tehát az, hogy meg kell határozni azon metrikus terek alapfüggvényeit, melyek egy (9, 1) vagy ami vele azonos, (9, 2) által meghatározott térre pályatartóan leképezhetők.

A III. alaptétellel (9, 2) alapján adódik, hogy ehhez szükséges és elegendő olyan v^i-ben 0-ad fokú pozitív homogén vektormező létezése, melyre igazak:

(9, 3) $$\frac{\partial \lambda_i}{\partial x^k} - \frac{\partial \lambda_k}{\partial x^i} = 0.$$

(9, 4) $$\frac{\partial \lambda_i}{\partial v^k} - \frac{\partial \lambda_k}{\partial v^i} = 0$$

(9, 5) $\lambda_r v^r$ v^i-ben konvex.

[29] D. HILBERT [20] 4. probléma.

Igaz tehát a

17. TÉTEL. *Az összes olyan $\lambda_r v^r$ függvények, melyek* (9, 3), (9, 4) *és* (9, 5)*-öt kielégítik, azok a metrikus alapfüggvények, melyeknek geodetikusai egyenesek.*

A λ_i tehát (9, 3) miatt gradiens vektor, kell tehát, hogy létezzék v^i-ben 0-ad fokú pozitív homogén $\Phi(x, v)$ skaláris függvény, hogy

$$\lambda_i = \frac{\partial \Phi}{\partial x^i}. \tag{9, 6}$$

(9, 4) és (9, 6)-ból kapjuk:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^i \partial v^k} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^i \partial x^k} = 0. \tag{9, 7}$$

Kontraháljuk (9, 7)-et v^k-val, a homogenitási feltétel miatt kapjuk:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^i \partial x^k} v^k = 0. \tag{9, 8}$$

18. TÉTEL. *Ahhoz, hogy a* (9, 3), (9, 4) *és* (9, 5) *feltételeket kielégítő vektormező létezzék, szükséges és elegendő, hogy legyen egy, a* (9, 8) *differenciálegyenletrendszert kielégítő v^i-ben* 0*-ad fokú skaláris $\Phi(x, v)$ függvény, melynél $\frac{\partial \Phi}{\partial x^r} v^r$ v^i-ben konvex.*

A tétel szükségessége adódik (9, 6), (9, 7) és (9, 8) egyenletekből. Tegyük fel tehát, hogy létezik ilyen Φ skaláris. Deriváljuk (9, 8)-at v^s szerint, cseréljük fel az i és j indexeket és vonjuk ki a kapott egyenleteket egymásból, kapjuk (9, 7)-t. Ha a (9, 6)-os jelöléssel élünk, ezekből adódik (9, 3) és (9, 4).

A (9, 8) parciális differenciálegyenletrendszerben tekintsük ismeretlen függvényeknek a $\frac{\partial \Phi}{\partial v^i}$-t s akkor a rendszer integrálfelülete egy v^i alkotóirányú[30] általános hengerfelület lesz. Tehát az általános megoldás:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial v^i} \overset{\text{def}}{=} \Phi_i = \Phi_i(v^1, \ldots, v^n, x^1 v^n - x^n v^1, \ldots, x^{n-1} v^n - x^n v^{n-1}). \tag{9, 9}$$

(9, 9)-ben a $\Phi_i(z^1, \ldots, z^{2n-1})$ függvények változóikban -1-ed fokú pozitív homogén függvények, és ki kell, hogy elégítsék a következő differenciálegyen-

[30] A (9, 8) parciális differenciálegyenletrendszerben a v^i-k nyilván csak mint paraméterek szerepelnek, ha $\frac{\partial \Phi}{\partial v^i}$ az ismeretlen függvény.

letrendszert:

$$(9,10) \qquad \frac{\partial \Phi_L}{\partial z^K} - \frac{\partial \Phi_L}{\partial z^{n+K}} x^n - \frac{\partial \Phi_K}{\partial z^L} + \frac{\partial \Phi_K}{\partial z^{n+L}} x^n = 0,$$

$$(9,11) \qquad \frac{\partial \Phi_L}{\partial z^n} + \frac{\partial \Phi_L}{\partial z^{n+S}} x^S - \frac{\partial \Phi_n}{\partial z^L} + \frac{\partial \Phi_n}{\partial z^{n+L}} x^n = 0.$$ [31]

(9, 10) és (9, 11) nyilván (9, 9) integrálhatósági feltételét adja v^i-re vonatkozólag.

(9, 10)-ben x^n tetszőleges volta miatt kell:

$$(9,12) \qquad \frac{\partial \Phi_L}{\partial z^K} = \frac{\partial \Phi_K}{\partial z^L}; \quad \frac{\partial \Phi_L}{\partial z^{n+K}} = \frac{\partial \Phi_K}{\partial z^{n+L}}.$$

Ugyanúgy kell, hogy fennálljanak:

$$(9,13) \qquad \frac{\partial \Phi_L}{\partial z^n} = \frac{\partial \Phi_n}{\partial z^L}; \quad -\frac{\partial \Phi_L}{\partial z^{n+S}} x^S = \frac{\partial \Phi_n}{\partial z^{n+L}} x^n.$$

A (9, 12) és (9, 13)-nak eleget tevő függvények

$$(9,14') \qquad \Phi_L(z^1, \ldots, z^{2n-1}) = \frac{\partial \Psi(z^1, \ldots, z^n)}{\partial z^L} + \frac{\partial \Omega(z^{n+1}, \ldots, z^{2n-1})}{\partial z^{n+L}};$$

$$(9,14'') \qquad \Phi(z^1, \ldots, z^{2n-1}) = \frac{\partial \Psi(z^1, \ldots, z^n)}{\partial z^n} - \frac{\partial \Omega(z^{n+1}, \ldots, z^{2n-1})}{\partial z^{n+S}} \frac{x^S}{x^n}.$$

(9, 14') és (9, 14'')-ben Ψ és Ω változókban 0-ad fokú pozitív homogén, egyébként tetszőleges függvények.

(9, 9)-ből (9, 10) és (9, 11) miatt kapjuk:

$$(9,15) \qquad \Phi(x, v) = \int_{(v)_0}^{(v)} \Phi_i(v, x^1 v^n - x^n v^1, \ldots, x^{n-1} v^n - x^n v^{n-1}) dv^i.$$

Végül (9, 15)-ből (9, 6) alapján

$$(9,16) \qquad \mathfrak{L}(x, v) = v^k \int_{(c)}^{(v)} \frac{\partial \Phi_i}{\partial x^k} dv^i.$$

Kimondhatjuk tehát a

19. TÉTELt. *Azokban a metrikus terekben, amelyekben az extremálisok egyenesek, a metrikus alapfüggvényt a (9, 16)-os formula állítja elő, ahol Φ_i a (9, 10) és (9, 11) egyenletrendszernek tesz eleget, s változóiban —1-ed fokú pozitív homogén függvény.*

[31] (9, 10)-ben és (9, 11)-ben a nagybetűk az $1, 2, \ldots, n-1$ értékeket veszik fel!

A most tárgyalt esetben

$$\frac{\partial \overline{\mathfrak{L}}}{\partial x^i} - \frac{\partial^2 \overline{\mathfrak{L}}}{\partial x^r \partial v^i} v^r = 0. \tag{9,17}$$

A 11. és 19. tételből adódik a

20. TÉTEL. *A (9, 17) alakú parciális másodrendű differenciálegyenletrendszer általános v^i-ben elsőfokú pozitív homogén megoldásait (9, 16) állítja elő.*

Példaképpen felírunk egy ilyen függvényt az $x^1, \ldots, x^{n-1}$, $x^n \neq 0$ pont környezetében:

$$\overline{\mathfrak{L}}(x, v) = \frac{1}{(x^n)^2} \varphi(x^1 v^n - x^n v^1, \ldots, x^{n-1} v^n - x^n v^{n-1}) + \psi(v),$$

ahol φ és ψ változóikban elsőfokú pozitív homogén és konvex függvények.

IRODALOMJEGYZÉK

[1] L. BERWALD: Untersuchung der Krümmung allgemeine metrischer Räume auf Grund des in ihnen herrschenden Parallelismus, *Math. Zeitschrift* **25** (1926) 40—70.

[2] L. BERWALD: Über Finslersche und Cartansche Geometrie IV., *Annals of Math.* **48** (1947) 753—781.

[3] L. BERWALD: Über Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen deren Integralkurven mit dem System der geraden Linien topologisch äquivalent, *Annals of Math.* **48** (1947) 193—215.

[4] O. BOLZA: *Vorlesungen über Variationsrechnung* (Leipzig u. Berlin, 1909).

[5] H. BUSEMAN: *Metric methods in Finsler spaces and in the foundations of geometry* (Princeton, 1942).

[6] H. BUSEMAN: Local metric geometry, *Trans. Amer. Math. Soc.* **56** (1944) 200—244.

[7] H. BUSEMAN: *The geometry of geodesics* (New York, 1955).

[8] C. CARATHÉODORY: *Variationsrechnung und partielle Differentialgleichungen erster Ordnung* (Leipzig und Berlin, 1935).

[9] E. CARTAN: Les espaces de Finsler, *Actualités scientifiques et industrielles* **79** (1934).

[10] G. DARBOUX: *Lecons sor la théorie generale de surfaces* (Paris, 1894) 604. § és 605. §.

[11] D. R. DAVIS: The inverse problem of the Calculus of variations in higher space, *Transactions American Math. Soc.* **30** (1928) 711—736.

[12] D. R. DAVIS: The inverse problem of the calculus of variations in space of $n+1$ dimensions, *Bull. of the Amer. Math. Soc.* **35** (1929) 371—380.

[13] U. DINI: Sopra una problema che si presenta nella teoria generale delle reprezentazioni geografiche di una superficie su di un'altra, *Ann. di Mat.* (2) **3** (1869) 269—293.

[14] J. DOUGLAS: The general geometry of paths, *Annals of Math.* **29** (1928) 143—168.

[15] J. DOUGLAS: Solution of the inverse problem of the calculus of variation, *Transaction Amer. Math. Soc.* **50** (1941) 71 128.

[16] DUSCHEK—MAYER: Lehrbuch der Differentialgeometrie II. (Leipzig u. Berlin, 1930).

[17] L. P. EISENHART: *Riemannian geometry* (Princeton, 1928).

[18] L. P. EISENHART: *Non-Riemannian geometry* (New York, 1927).

[19] P. Finsler: *Über Kurven und Flächen in allgemeinen Räumen.* Diss. (Göttingen, 1918).
[20] D. Hilbert: Mathematische Probleme, *Gött. Nachrichten* (1900) 253—297.
[21] G. Hamel: Über die Geometrien in denen die Geraden die Kürzesten sind, *Math. Ann.* **57** (1903) 231—264.
[22] A. Hirsch: Über eine charakteristische Eigenschaft der Differentialgleichungen der Variationsrechnung, *Math. Ann.* **49** (1897) 49—72.
[23] C. G. Jacobi: *Zur Theorie der Variationsrechnung und der Differentialgleichungen* Werke, 4. kötet.
[24] M. S. Knebelman: Collineations and notions in generalized spaces, *Amer. Journal of Math.* **51** (1929) 527—564.
[25] G. Kowalewski: *Einführung in die Theorie der kontinuierlichen Gruppen* (Leipzig u. Berlin, 1931).
[26] J. Kürschák: Über eine charakteristische Eigenschaft der Differentialgleichungen der Variationsrechnung. *Math. Ann.* **60** (1905) 157—165.
[27] D. Laugwitz: Geometrische Behandlung eines inversen Problems der Variationsrechnung, *Annales Univ. Saraviensis* **2** (3) (1956) 235—244.
[28] Levi-Civita: Sulle transformazioni delle equazioni dinamiche, *Ann. di Mat.* **24** (1896) 255—300.
[29] S. Lie: *Vorlesungen über Differentialgleichungen* (Leipzig, 1891).
[30] A. Rapcsák: Über die Begründung der lokalen metrischen Differentialgeometrie, *Publ. Math. Debrecen* **7** (1960) 382—393.
[31] J. A. Schouten: *Ricci-Calculus* (Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1954).
[32] J. A. Schouten—D. J. Struik: *Einführung in die neueren Methoden der Differentialgeometrie* II. (Groningen—Batavia, 1938).
[33] J. M. Thomas—O. Veblen: Projective invariants of affine geometry of paths, *Annals of Math.* **27** (1926) No. 2., 279—296.
[34] O. Varga: Vektorfelder, deren kovariante Ableitung längs einer vorgegebenen Kurve verschwindet, *Hung. Acta Math.* **I.** (1949) 1—3.
[35] O. Varga: Bedingungen für die Metrisierbarkeit von affinzusammenhängenden Linienelementmannigfaltigkeiten, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **5** (1954) 7—16.
[36] O. Varga: Über das Krümmungsmass in Finslerschen Räumen, *Publ. Math. Debrecen* **1** (1949) 116—122.
[37] O. Varga: Normalkoordinaten in allgemeinen differentialgeometrischen Räumen und ihre Verwendung zur Bestimmung sämtlicher Differentialinvarianten, *Comptes Rendus du Premier Congrès des Mathematiciens Hongrois Budapest* (1952) 131—146.
[38] K. Yano: Les espaces d'elements linéares à connexion projective normale et la géométrie projective generale des paths, *Proc. Phys.-Math. Soc. Japan* **24** (1942) 7—24.
[39] K. Yano: *The theory of Lie derivatives and its applications* (Amsterdam, 1955).

(Beérkezett: 1959. XII. 21.)

A Debreceni Kossuth Lajos Tudományegyetem
Matematikai Intézete

HARMADRENDŰ TENZOROK ÉS TENZOR-VEKTOR FÜGGVÉNYEK DIREKT TÁRGYALÁSA

Írta: MOLNÁR FERENC

Bevezetés

Az $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ vektor-vektor függvényt *homogén lineárisnak* nevezzük, ha eleget tesz a következő függvényegyenletnek:

(1) $$\mathbf{f}(c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2) = c_1\mathbf{f}(\mathbf{x}_1) + c_2\mathbf{f}(\mathbf{x}_2),$$

ahol $\mathbf{x}_1$ és $\mathbf{x}_2$ az $\mathbf{x}$ vektorváltozó tetszőleges értékei, c_1 és c_2 tetszőleges skalárok. Az

(2) $$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

jelölés bevezetésével minden homogén lineáris vektor-vektor függvényhez hozzárendelhető egy *tenzornak* nevezett $\mathbf{A}$ operátor, amelyre (1) miatt fennáll

(3) $$\mathbf{A}(c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2) = c_1\mathbf{A}\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{A}\mathbf{x}_2.$$

(2) alapján azt mondjuk, hogy $\mathbf{y}$ az $\mathbf{A}$ tenzornak és az $\mathbf{x}$ vektornak a szorzata.

A fenti definícióból kiindulva felépíthető a tenzoroknak koordináta-rendszertől független, direkt tárgyalása.[1]

Ismeretes, hogy a tenzor fogalmának segítségével értelmezhető a vektor-vektor függvény deriváltja. Részben ezen keresztül, részben pedig azáltal, hogy több fizikai mennyiség tenzorral jellemezhető, széleskörű alkalmazást nyernek a tenzorok a fizikában is.

A térbeli pont helyzetétől függő, tenzorral jellemezhető fizikai mennyiségek egy újabb függvényfajtához, a pont helyvektorához tenzort rendelő $\mathbf{Y} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ tenzor-vektor függvényhez vezetnek. Ilyen tenzor-vektor függvénnyel leírható mennyiségek pl. a rugalmasságtanban a feszültségtenzor és az alakváltozási tenzor. Tenzor-vektor függvény pl. a vektortér deriválttenzora is.

A tenzor-vektor függvény deriváltjának értelmezéséhez szükségünk van a homogén lineáris tenzor-vektor függvény fogalmára. Így a fenti tenzorfogalomnak egy általánosításához jutunk. A tenzor jelöléséhez hasonlóan az

(4) $$\mathbf{Y} = \mathcal{A}\mathbf{x}$$

jelölés bevezetésével minden homogén lineáris tenzor-vektor függvényhez hozzárendelünk egy $\mathcal{A}$ operátort, melyet *harmadrendű tenzornak* nevezünk.[2]

[1] L. pl. [1], 20—46; [2], 366—431.

[2] A harmadrendű tenzorokat a következőkben mindig írott nagybetűvel jelöljük.

Ennek az elnevezésnek megfelelően az eddigiekben szereplő tenzorokat *másodrendű tenzoroknak* nevezzük. Ilyen értelemben a vektorok *elsőrendű*, a skalárok *nulladrendű* tenzoroknak tekinthetők.

DEFINÍCIÓ. *Harmadrendű tenzornak nevezzük az olyan, vektorhoz másodrendű tenzort rendelő* $\mathcal{A}$ *operátort, amelyre*

$$\mathcal{A}(c_1\mathbf{x}_1+c_2\mathbf{x}_2)=c_1\mathcal{A}\mathbf{x}_1+c_2\mathcal{A}\mathbf{x}_2. \tag{5}$$

$\mathbf{Y}=\mathcal{A}\mathbf{x}$ *az* $\mathcal{A}$ *harmadrendű tenzornak és az* $\mathbf{x}$ *vektornak a szorzata.*

Két harmadrendű tenzort egyenlőnek mondunk, ha bármely vektorhoz egyenlő másodrendű tenzorokat rendelnek.[3]

A jelen dolgozat célja a harmadrendű tenzorok tulajdonságainak direkt vizsgálata, majd ezek alkalmazása a tenzor-vektor függvények differenciálásának direkt tárgyalására. Bár a harmadrendű tenzorok koordinátás vizsgálata egyszerűbb a direkt tárgyalásnál, a direkt tárgyalás is tanulságos, elsősorban a másodrendű tenzorok direkt tárgyalásával való összehasonlítás szempontjából. A tárgyalás menete megegyezik a másodrendű tenzorok direkt tárgyalásának menetével. Az 1. §-ban összefoglaljuk és néhány tétellel kiegészítjük a másodrendű tenzorok ismert tulajdonságait, amelyeket a későbbiekben felhasználunk. A 2—6. § a harmadrendű tenzorok, a 7. § a tenzor-vektor függvények tárgyalását tartalmazza.

1. §. Másodrendű tenzorok[4]

1. A másodrendű tenzorok körében értelmezhető az *összeadás, skalárral való szorzás* és *szorzás* művelete a következőképpen:

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{x}=\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{B}\mathbf{x},\quad (\lambda\mathbf{A})\mathbf{x}=\lambda(\mathbf{A}\mathbf{x}),\quad (\mathbf{A}\mathbf{B})\mathbf{x}=\mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{x}).$$

Ezek a műveletek rendelkeznek a skalárok körében ismert tulajdonságokkal, kivéve a szorzás kommutatív tulajdonságát.

Gyakran előfordulnak a következő tenzorok:

a) *Zérustenzor* $(\mathbf{O})$: $\mathbf{O}\mathbf{x}=\mathbf{0}$.

b) *Egységtenzor* $(\mathbf{I})$: $\mathbf{I}\mathbf{x}=\mathbf{x}$.

c) Két vektor *diadikus* (tenzoriális) *szorzata* $(\mathbf{a}\circ\mathbf{b})$:

$$(\mathbf{a}\circ\mathbf{b})\mathbf{x}=\mathbf{a}(\mathbf{b}\mathbf{x}). \tag{1.1}$$

[3] A harmadrendű tenzor definíciójára és néhány tulajdonságának direkt tárgyalására vonatkozólag l. [2], 538—552. Itt a fentiektől eltérően a definícióban (5) helyett az $\mathcal{A}\mathbf{x}$ szorzás folytonos és disztributív volta (azaz $\mathcal{A}(\lim\mathbf{x})=\lim(\mathcal{A}\mathbf{x})$ és $\mathcal{A}(\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2)=\mathcal{A}\mathbf{x}_1+\mathcal{A}\mathbf{x}_2$) szerepel. Ebből viszont $\mathcal{A}(c\mathbf{x})=c\mathcal{A}\mathbf{x}$, és így (5) is következik.

[4] A másodrendű tenzorok alábbiakban bizonyítás nélkül szereplő tulajdonságaira vonatkozólag l. pl. [1], 20–46; [2], 366—431.

d) Vektor és tenzor, ill. tenzor és vektor *vektoriális szorzata* ($\mathbf{a}\times\mathbf{A}$, ill. $\mathbf{A}\times\mathbf{a}$):

(1.2) $$(\mathbf{a}\times\mathbf{A})\mathbf{x}=\mathbf{a}\times\mathbf{A}\mathbf{x},\quad (\mathbf{A}\times\mathbf{a})\mathbf{x}=\mathbf{A}(\mathbf{a}\times\mathbf{x}).$$

Könnyen belátható, hogy a c) és d) alatt értelmezett operátorok homogén lineáris vektor-vektor hozzárendelést létesítenek, azaz valóban másodrendű tenzorok. Ugyancsak belátható, hogy ezen műveletek vektor-, ill. tenzortényezőiknek homogén lineáris függvényei, azaz pl.

$$(\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b})\circ(\gamma\mathbf{c}+\delta\mathbf{d})=\alpha\gamma(\mathbf{a}\circ\mathbf{c})+\alpha\delta(\mathbf{a}\circ\mathbf{d})+\beta\gamma(\mathbf{b}\circ\mathbf{c})+\beta\delta(\mathbf{b}\circ\mathbf{d}).$$

A c) és d) alatt értelmezett tenzorokra fennállnak a következő egyszerűen igazolható összefüggések:

(1.3) $$\mathbf{A}(\mathbf{b}\circ\mathbf{c})=\mathbf{A}\mathbf{b}\circ\mathbf{c},\quad (\mathbf{a}\circ\mathbf{b})\mathbf{C}=\mathbf{a}\circ\mathbf{b}\mathbf{C},$$

(1.4) $$(\mathbf{a}\circ\mathbf{b})(\mathbf{c}\circ\mathbf{d})=(\mathbf{b}\mathbf{c})(\mathbf{a}\circ\mathbf{d}),$$

(1.5) $$(\mathbf{a}\times\mathbf{A})=(\mathbf{a}\times\mathbf{I})\mathbf{A},\quad (\mathbf{A}\times\mathbf{a})=\mathbf{A}(\mathbf{I}\times\mathbf{a}),$$

(1.6) $$(\mathbf{a}\times\mathbf{A})\mathbf{B}=\mathbf{a}\times\mathbf{A}\mathbf{B},\quad \mathbf{B}(\mathbf{A}\times\mathbf{a})=\mathbf{B}\mathbf{A}\times\mathbf{a},$$

(1.7) $$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\circ\mathbf{c})=(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\circ\mathbf{c},\quad (\mathbf{a}\circ\mathbf{b})\times\mathbf{c}=\mathbf{a}\circ(\mathbf{b}\times\mathbf{c}).$$

A definíciók alapján könnyen belátható a következő tételek helyessége is:

(1.8) $\mathbf{a}\circ\mathbf{b}=\mathbf{O}$ *akkor és csak akkor, ha* $\mathbf{a}=0$ *vagy* $\mathbf{b}=0$.

(1.9) $\mathbf{a}\circ\mathbf{b}=\mathbf{b}\circ\mathbf{a}$ *akkor és csak akkor, ha* $\mathbf{a}$ *és* $\mathbf{b}$ *párhuzamos vektorok.*

(1.10) *Ha* $\mathbf{A}\mathbf{x}\parallel\mathbf{a}$ ($\mathbf{a}\neq 0$) *minden* $\mathbf{x}$*-re, akkor van olyan* $\mathbf{b}$ *vektor, hogy* $\mathbf{A}=\mathbf{a}\circ\mathbf{b}$. — Ekkor ugyanis $\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{a}\cdot\lambda(\mathbf{x})$, ahol $\lambda(\mathbf{x})$ homogén lineáris, és így $\lambda(\mathbf{x})=\mathbf{b}\mathbf{x}$.

(1.11) *Ha* $\mathbf{A}\neq\mathbf{O}$ *és* $\mathbf{a}\neq 0$, *továbbá minden* $\mathbf{a}$*-ra merőleges* $\mathbf{x}$ *vektorra* $\mathbf{A}\mathbf{x}=0$, *akkor van olyan* $\mathbf{b}$ *vektor, hogy* $\mathbf{A}=\mathbf{b}\circ\mathbf{a}$. — Az $\mathbf{x}=\alpha\mathbf{a}+\gamma\mathbf{c}$ ($\mathbf{c}\perp\mathbf{a}$) felbontásból adódik ugyanis, hogy $\mathbf{A}\mathbf{x}=\alpha\mathbf{A}\mathbf{a}$, és így (1.10) alapján $\mathbf{A}=\mathbf{A}\mathbf{a}\circ\mathbf{d}$. Innen viszont $\mathbf{x}\perp\mathbf{a}$ esetén $\mathbf{A}\mathbf{x}=(\mathbf{A}\mathbf{a})(\mathbf{d}\mathbf{x})=0$, amiből következik, hogy $\mathbf{d}\parallel\mathbf{a}$, és így $\mathbf{A}=\mathbf{b}\circ\mathbf{a}$.

(1.12) $\mathbf{a}\times\mathbf{I}=\mathbf{I}\times\mathbf{a}$, de általában $\mathbf{a}\times\mathbf{A}\neq\mathbf{A}\times\mathbf{a}$, amint azt $\mathbf{A}=\mathbf{b}\circ\mathbf{a}$ ($\mathbf{b}\nparallel\mathbf{a}$) példája mutatja.

(1.13) $\mathbf{a}\times\mathbf{A}=\mathbf{O}$ *akkor és csak akkor, ha* $\mathbf{a}=0$ *vagy* $\mathbf{A}=\mathbf{a}\circ\mathbf{b}$. — Ha ugyanis $\mathbf{a}\times\mathbf{A}=\mathbf{O}$, akkor $\mathbf{a}\times\mathbf{A}\mathbf{x}=0$ miatt $\mathbf{a}\neq 0$ esetén $\mathbf{A}\mathbf{x}\parallel\mathbf{a}$, és így (1.10) alapján $\mathbf{A}=\mathbf{a}\circ\mathbf{b}$. Az állítás második része nyilvánvaló.

(1.14) $\mathbf{A}\times\mathbf{a}=\mathbf{O}$ *akkor és csak akkor, ha* $\mathbf{a}=0$ *vagy* $\mathbf{A}=\mathbf{b}\circ\mathbf{a}$. — Ha ugyanis $\mathbf{A}\times\mathbf{a}=\mathbf{O}$, akkor $\mathbf{A}(\mathbf{a}\times\mathbf{x})=0$ miatt $\mathbf{a}\neq 0$ és $\mathbf{A}\neq\mathbf{O}$ esetén (1.11) alapján $\mathbf{A}=\mathbf{b}\circ\mathbf{a}$ (míg $\mathbf{A}=\mathbf{O}$ esetén $\mathbf{A}=0\circ\mathbf{a}$). Az állítás második része nyilvánvaló.

2. Ismeretes, hogy az $\mathbf{A}$ másodrendű tenzort egyértelműen meghatározzák $\mathbf{a}_1 = \mathbf{A}\mathbf{e}_1$, $\mathbf{a}_2 = \mathbf{A}\mathbf{e}_2$, $\mathbf{a}_3 = \mathbf{A}\mathbf{e}_3$ *vektorkomponensei*, ahol $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ a derékszögű koordináta-rendszert meghatározó egységvektorok, mégpedig

$$\mathbf{A} = \mathbf{a}_1 \circ \mathbf{e}_1 + \mathbf{a}_2 \circ \mathbf{e}_2 + \mathbf{a}_3 \circ \mathbf{e}_3. \tag{1.15}$$

Az $a_{ik} = \mathbf{e}_i \mathbf{A} \mathbf{e}_k$ $(i, k = 1, 2, 3)$ számok a tenzor *skalárkomponensei*, a belőlük alkotott négyzetes mátrix a tenzor *mátrixa*.

Ha az $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ tenzorok mátrixaira $\mathbf{A} = (a_{ik})$, $\mathbf{B} = (b_{ik})$, akkor

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (a_{ik} + b_{ik}), \quad \lambda\mathbf{A} = (\lambda a_{ik}),$$

$$\mathbf{AB} = (a_{i1} b_{1k} + a_{i2} b_{2k} + a_{i3} b_{3k}).$$

3. Minden $\mathbf{A}$ másodrendű tenzorhoz található egyetlen olyan $\mathbf{A}^*$ tenzor, amelyre

$$\mathbf{u}\mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{v}\mathbf{A}^*\mathbf{u},$$

ahol $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ tetszőleges vektorok. $\mathbf{A}^*$ az $\mathbf{A}$ tenzor *adjungáltja* vagy *transzponáltja*.

Az adjungált tenzorra vonatkozólag fennállnak a következő összefüggések:

$$a^*_{ik} = a_{ki}, \tag{1.16}$$

$$(\mathbf{A}^*)^* = \mathbf{A}, \tag{1.17}$$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})^* = \mathbf{A}^* + \mathbf{B}^*, \quad (\lambda\mathbf{A})^* = \lambda\mathbf{A}^*, \quad (\mathbf{A}\mathbf{B})^* = \mathbf{B}^*\mathbf{A}^*, \tag{1.18}$$

$$(\mathbf{a} \circ \mathbf{b})^* = \mathbf{b} \circ \mathbf{a}, \tag{1.19}$$

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{I})^* = -\mathbf{a} \times \mathbf{I}. \tag{1.20}$$

(1.5), (1.18), (1.20) és (1.12) felhasználásával könnyen igazolhatók a következő formulák is:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{A})^* = -\mathbf{A}^* \times \mathbf{a}, \quad (\mathbf{A} \times \mathbf{a})^* = -\mathbf{a} \times \mathbf{A}^*. \tag{1.21}$$

Az adjungált tenzor fogalmának felhasználásával értelmezhető vektornak tenzorral való szorzata:

$$\mathbf{x}\mathbf{A} = \mathbf{A}^*\mathbf{x}, \tag{1.22}$$

és így $(\mathbf{x}\mathbf{A})\mathbf{y} = \mathbf{x}(\mathbf{A}\mathbf{y})$.

Ennek alapján

$$\mathbf{x}(\mathbf{a} \circ \mathbf{b}) = (\mathbf{x}\mathbf{a})\mathbf{b}, \tag{1.23}$$

$$\mathbf{x}(\mathbf{a} \times \mathbf{A}) = (\mathbf{x} \times \mathbf{a})\mathbf{A}, \tag{1.24}$$

$$\mathbf{x}(\mathbf{A} \times \mathbf{a}) = \mathbf{x}\mathbf{A} \times \mathbf{a}. \tag{1.25}$$

Az $\mathbf{A}$ tenzort *szimmetrikusnak*, ill. *antiszimmetrikusnak* mondjuk, ha $\mathbf{A} = \mathbf{A}^*$, ill. $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^*$. Ezeket $\mathbf{S}$, ill. $\mathbf{T}$ betűvel jelöljük. Minden $\mathbf{A}$ tenzor egyértelműen állítható elő $\mathbf{A}=\mathbf{S}+\mathbf{T}$ alakban, ahol

(1.26) $$\mathbf{S}=\tfrac{1}{2}(\mathbf{A}+\mathbf{A}^*),\quad \mathbf{T}=\tfrac{1}{2}(\mathbf{A}-\mathbf{A}^*).$$

4. Minden $\mathbf{A}$ másodrendű tenzornak van három *skalárinvariánsa* (s_1, s_2, s_3) és egy *vektorinvariánsa* $(\mathbf{v})$, amelyek eleget tesznek a következő egyenleteknek:

(1.27) $$(\mathbf{A}\mathbf{a})\mathbf{b}\mathbf{c}+(\mathbf{A}\mathbf{b})\mathbf{c}\mathbf{a}+(\mathbf{A}\mathbf{c})\mathbf{a}\mathbf{b}=s_1\mathbf{a}\mathbf{b}\mathbf{c},$$

(1.28) $$(\mathbf{A}\mathbf{a})(\mathbf{A}\mathbf{b})\mathbf{c}+(\mathbf{A}\mathbf{b})(\mathbf{A}\mathbf{c})\mathbf{a}+(\mathbf{A}\mathbf{c})(\mathbf{A}\mathbf{a})\mathbf{b}=s_2\mathbf{a}\mathbf{b}\mathbf{c},$$

(1.29) $$(\mathbf{A}\mathbf{a})(\mathbf{A}\mathbf{b})(\mathbf{A}\mathbf{c})=s_3\mathbf{a}\mathbf{b}\mathbf{c},$$

(1.30) $$\mathbf{a}\mathbf{A}\mathbf{b}-\mathbf{b}\mathbf{A}\mathbf{a}=2\mathbf{a}\mathbf{v}\mathbf{b}=\mathbf{a}\mathbf{w}\mathbf{b},$$

ahol $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ tetszőleges vektorok, $\mathbf{w}=2\mathbf{v}$. s_1 a tenzor mátrixának főátlójában álló elemek összege, s_3 a mátrix determinánsának értéke, s_2 pedig ezen determináns főátlóra szimmetrikus másodrendű aldeterminánsainak összege. A $\mathbf{v}$ vektorinvariánsra vonatkozólag $\mathbf{A}=\mathbf{S}+\mathbf{T}$ mellett fennáll

(1.31) $$\mathbf{T}=\mathbf{v}\times\mathbf{I},$$

és $\mathbf{T}$-nek ez az előállítása egyértelmű.

Nyilvánvalóan

(1.32) $$s_1(\mathbf{A})=s_1(\mathbf{A}^*),\quad \mathbf{w}(\mathbf{A})=-\mathbf{w}(\mathbf{A}^*).$$

$\mathbf{w}=\mathbf{0}$ akkor és csak akkor, ha a tenzor szimmetrikus. Antiszimmetrikus tenzornál viszont $s_1=s_3=0$.

A c) és d) alatt definiált tenzorok invariánsaira vonatkozólag a következő formulák érvényesek:

(1.33) $$s_1(\mathbf{a}\circ\mathbf{b})=\mathbf{a}\mathbf{b},$$

(1.34) $$\mathbf{w}(\mathbf{a}\circ\mathbf{b})=-\mathbf{a}\times\mathbf{b},$$

(1.35) $$s_1(\mathbf{a}\times\mathbf{A})=s_1(\mathbf{A}\times\mathbf{a})=-\mathbf{a}\mathbf{w}(\mathbf{A}),$$

(1.36) $$\mathbf{w}(\mathbf{a}\times\mathbf{A})=s_1(\mathbf{A})\mathbf{a}-\mathbf{A}\mathbf{a},$$

(1.37) $$\mathbf{w}(\mathbf{A}\times\mathbf{a})=s_1(\mathbf{A})\mathbf{a}-\mathbf{A}^*\mathbf{a}.$$

(A fentiek közül az $\mathbf{a}\circ\mathbf{b}$-re és $\mathbf{a}\times\mathbf{A}$-ra vonatkozó formulák jól ismertek, az $\mathbf{A}\times\mathbf{a}$-ra vonatkozóak viszont az utóbbiakból (1.21) és (1.32) felhasználásával adódnak.)

Értelmezhetjük két másodrendű tenzor *skaláris (belső) szorzatát:*

(1.38) $$\mathbf{A}\bullet\mathbf{B}=s_1(\mathbf{A}^*\mathbf{B}).$$

A definícióból következik, hogy

(1.39) $$\mathbf{A}\bullet\mathbf{B}=\mathbf{B}\bullet\mathbf{A},$$

(1.40) $$\mathbf{A}\bullet\mathbf{B}=\sum_{k=1}^{3}\mathbf{a}_k\mathbf{b}_k=\sum_{i,k=1}^{3}a_{ik}b_{ik}.$$

A másodrendű tenzor *abszolút értéke:*

$$(1.41)\qquad |\mathbf{A}| = \sqrt{\mathbf{A}\bullet\mathbf{A}} = \sqrt{\sum_{i,k=1}^{3} a_{ik}^2}.$$

Két másodrendű tenzor (elsőrendű)[5] *vektoriális szorzatát* a következőképpen értelmezzük:

$$(1.42)\qquad [\mathbf{A}, \mathbf{B}] = \mathbf{w}(\mathbf{A}^*\mathbf{B}).$$

A definíció alapján könnyen belátható, hogy ez a vektoriális szorzat rendelkezik a következő tulajdonságokkal:

$$(1.43)\qquad \lambda[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = [\lambda\mathbf{A}, \mathbf{B}] = [\mathbf{A}, \lambda\mathbf{B}],$$

$$(1.44)\qquad [\mathbf{A}+\mathbf{B}, \mathbf{C}+\mathbf{D}] = [\mathbf{A}, \mathbf{C}] + [\mathbf{A}, \mathbf{D}] + [\mathbf{B}, \mathbf{C}] + [\mathbf{B}, \mathbf{D}],$$

$$(1.45)\qquad [\mathbf{A}, \mathbf{A}] = 0,$$

$$(1.46)\qquad [\mathbf{A}, \mathbf{B}] = -[\mathbf{B}, \mathbf{A}].$$

Az $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ tenzorok $\mathbf{a}_k$, $\mathbf{b}_k$ vektor-, ill. a_{ik}, b_{ik} skalárkomponenseivel kifejezve:

$$(1.47)\qquad \begin{aligned}[\mathbf{A}, \mathbf{B}] &= \mathbf{e}_1(\mathbf{a}_3\mathbf{b}_2 - \mathbf{a}_2\mathbf{b}_3) + \mathbf{e}_2(\mathbf{a}_1\mathbf{b}_3 - \mathbf{a}_3\mathbf{b}_1) + \mathbf{e}_3(\mathbf{a}_2\mathbf{b}_1 - \mathbf{a}_1\mathbf{b}_2) = \\ &= \mathbf{e}_1\sum_{i=1}^{3}(a_{i3}b_{i2} - a_{i2}b_{i3}) + \mathbf{e}_2\sum_{i=1}^{3}(a_{i1}b_{i3} - a_{i3}b_{i1}) + \mathbf{e}_3\sum_{i=1}^{3}(a_{i2}b_{i1} - a_{i1}b_{i2}),\end{aligned}$$

ill.

$$(1.48)\qquad [\mathbf{A}^*, \mathbf{B}^*] = -\mathbf{a}_1\times\mathbf{b}_1 - \mathbf{a}_2\times\mathbf{b}_2 - \mathbf{a}_3\times\mathbf{b}_3.$$

(1.15) és (1.19) alapján ugyanis

$$\mathbf{A}^*\mathbf{B} = (\mathbf{e}_1\circ\mathbf{a}_1 + \mathbf{e}_2\circ\mathbf{a}_2 + \mathbf{e}_3\circ\mathbf{a}_3)(\mathbf{b}_1\circ\mathbf{e}_1 + \mathbf{b}_2\circ\mathbf{e}_2 + \mathbf{b}_3\circ\mathbf{e}_3),$$

ill.

$$\mathbf{A}\mathbf{B}^* = (\mathbf{a}_1\circ\mathbf{e}_1 + \mathbf{a}_2\circ\mathbf{e}_2 + \mathbf{a}_3\circ\mathbf{e}_3)(\mathbf{e}_1\circ\mathbf{b}_1 + \mathbf{e}_2\circ\mathbf{b}_2 + \mathbf{e}_3\circ\mathbf{b}_3),$$

ahonnan (1.4), (1.34) és (1.42) felhasználásával (1.47), ill. (1.48) már egyszerűen következik.

5. A másodrendű tenzort *közönségesnek* mondjuk, ha csak a zérusvektorhoz rendeli a zérusvektort. Ellenkező esetben a tenzor *elfajuló.* Könnyen belátható, hogy az **1,** c) és d) alatt definiált tenzorok elfajulók.

Az elfajuló tenzorokra vonatkozóan egyszerűen bizonyíthatók a következő tételek:

(1.49) *A tenzor akkor és csak akkor elfajuló, ha* $s_3 = 0$.

[5] A későbbiekben értelmezni fogjuk két másodrendű tenzor harmadrendű tenzort adó vektoriális szorzatát is. Itt az „elsőrendű" elnevezés arra utal, hogy a szorzás eredménye vektor (elsőrendű tenzor).

(1.50) *A tenzor akkor és csak akkor elfajuló, ha adjungáltja is elfajuló.* — Ez (1.49)-ből közvetlenül adódik.

(1.51) *Ha* $\mathbf{AB}=\mathbf{O}$, *akkor egyikük zérustenzor, vagy mindkettő elfajuló.* — Ha ugyanis $\mathbf{AB}=\mathbf{O}$, de $\mathbf{B}\neq\mathbf{O}$, akkor van olyan $\mathbf{x}\neq\mathbf{0}$ vektor, amelyre $\mathbf{Bx}\neq\mathbf{0}$. Innen viszont $\mathbf{A}(\mathbf{Bx})=\mathbf{0}$ miatt már következik, hogy $\mathbf{A}$ elfajuló. Ha viszont $\mathbf{A}\neq\mathbf{O}$, akkor $\mathbf{A}^*\neq\mathbf{O}$, és így $(\mathbf{AB})^*\mathbf{x}=\mathbf{B}^*(\mathbf{A}^*\mathbf{x})=\mathbf{0}$ miatt az előbbiek szerint $\mathbf{B}^*$, következésképpen (1.50) alapján $\mathbf{B}$ is elfajuló.[6]

2. §. Műveletek harmadrendű tenzorokkal. Speciális harmadrendű tenzorok

1. A másodrendű tenzorok mintájára értelmezhetjük harmadrendű tenzorok között a következő *műveleteket:*[7]

a) *Összeadás:* $(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})\mathbf{x}=\mathfrak{A}\mathbf{x}+\mathfrak{B}\mathbf{x}$.

b) *Skalárral való szorzás:* $(\lambda\mathfrak{A})\mathbf{x}=\lambda(\mathfrak{A}\mathbf{x})$.

Könnyen belátható, hogy az így értelmezett operátorokra (5) teljesül, azaz valóban harmadrendű tenzorok, továbbá, hogy itt is érvényesek az összeadás és a skalárral való szorzás ismert tulajdonságai.

a) és b) alapján értelmezhetjük harmadrendű tenzorok különbségét is:

$$\mathfrak{A}-\mathfrak{B}=\mathfrak{A}+(-1)\mathfrak{B}.$$

Belátható, hogy

$$(\mathfrak{A}-\mathfrak{B})+\mathfrak{B}=\mathfrak{A}.$$

Két harmadrendű tenzor harmadrendű tenzort adó (harmadrendű) szorzata a másodrendű tenzorok mintájára nem értelmezhető, hiszen $\mathfrak{B}\mathbf{x}$ másodrendű tenzor, és így $\mathfrak{A}(\mathfrak{B}\mathbf{x})$ nincs értelmezve.

2. A tárgyalás folyamán fontos szerepet játszanak az alábbi speciális harmadrendű tenzorok:

a) *Zérustenzor* ($\mathfrak{O}$): $\mathfrak{O}\mathbf{x}=\mathbf{O}$ (minden vektorhoz a másodrendű zérustenzort rendeli).

A másodrendű egységtenzornak nincs megfelelője harmadrendű tenzorok körében.

b) Másodrendű tenzor és vektor, ill. vektor és másodrendű tenzor (harmadrendű) *diadikus szorzata* ($\mathbf{A}\circ\mathbf{b}$, ill. $\mathbf{a}\circ\mathbf{B}$):[8]

(2.1) $$(\mathbf{A}\circ\mathbf{b})\mathbf{x}=\mathbf{A}(\mathbf{bx}),$$

(2.2) $$(\mathbf{a}\circ\mathbf{B})\mathbf{x}=\mathbf{a}\circ\mathbf{Bx}.$$

[6] Megemlítjük, hogy állításunk nem fordítható meg, azaz vannak olyan elfajuló tenzorok, amelyek szorzata zérustól különböző, pl. $(\mathbf{e}_1\circ\mathbf{e}_2)(\mathbf{e}_2\circ\mathbf{e}_2)=\mathbf{e}_2^2(\mathbf{e}_1\circ\mathbf{e}_2)\neq\mathbf{O}$.

[7] L. pl. [2], 539—541.

[8] L. [2], 541 és 558.

c) Harmadrendű és másodrendű, ill. másodrendű és harmadrendű tenzor (harmadrendű) *félbelső szorzata* ($\mathcal{A}\odot\mathbf{B}$, ill. $\mathbf{A}\odot\mathcal{B}$):[9]

$$(\mathcal{A}\odot\mathbf{B})\mathbf{x}=\mathcal{A}(\mathbf{B}\mathbf{x}), \tag{2.3}$$

$$(\mathbf{A}\odot\mathcal{B})\mathbf{x}=\mathbf{A}(\mathcal{B}\mathbf{x}).\text{[10]} \tag{2.4}$$

d) Vektor és harmadrendű tenzor, harmadrendű tenzor és vektor, ill. két másodrendű tenzor (harmadrendű) *vektoriális szorzata* ($\mathbf{a}\times\mathcal{A}$, $\mathcal{A}\times\mathbf{a}$, ill. $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$):[11]

$$(\mathbf{a}\times\mathcal{A})\mathbf{x}=\mathbf{a}\times\mathcal{A}\mathbf{x}, \tag{2.5}$$

$$(\mathcal{A}\times\mathbf{a})\mathbf{x}=\mathcal{A}(\mathbf{a}\times\mathbf{x}), \tag{2.6}$$

$$(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\mathbf{x}=\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\mathbf{x}).\text{[12]} \tag{2.7}$$

Könnyen belátható, hogy a b)—d) alatt értelmezett operátorokra (5) teljesül, tehát valóban harmadrendű tenzorok. Ugyancsak könnyen bizonyítható, hogy a definiált műveletek tényezőiknek homogén lineáris függvényei.

A definíciók alapján egyszerűen bizonyíthatók a következő összefüggések:[13]

$$(\mathbf{a}\circ\mathbf{b})\circ\mathbf{c}=\mathbf{a}\circ(\mathbf{b}\circ\mathbf{c}), \tag{2.8}$$

$$(\mathcal{A}\odot\mathbf{B})\odot\mathbf{C}=\mathcal{A}\odot(\mathbf{B}\mathbf{C}), \tag{2.9}$$

$$\mathbf{A}\odot(\mathbf{B}\odot\mathcal{C})=(\mathbf{A}\mathbf{B})\odot\mathcal{C}, \tag{2.10}$$

$$(\mathbf{A}\odot\mathcal{B})\odot\mathbf{C}=\mathbf{A}\odot(\mathcal{B}\odot\mathbf{C}), \tag{2.11}$$

$$(\mathbf{a}\times\mathcal{A})=(\mathbf{a}\times\mathbf{I})\odot\mathcal{A},\quad \mathcal{A}\times\mathbf{a}=\mathcal{A}\odot(\mathbf{I}\times\mathbf{a}), \tag{2.12}$$

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B}=\mathbf{A}\odot(\mathbf{I}\times\mathbf{B})=(\mathbf{A}\times\mathbf{I})\odot\mathbf{B}. \tag{2.13}$$

A fenti speciális tenzorokra vonatkozólag érvényesek a következő tételek:[14]

$\mathbf{A}\circ\mathbf{b}=\mathcal{O}$ *akkor és csak akkor, ha* $\mathbf{A}=\mathbf{O}$ *vagy* $\mathbf{b}=\mathbf{0}$. — Ez a definíció alapján nyilvánvaló.

$\mathbf{a}\circ\mathbf{B}=\mathcal{O}$ *akkor és csak akkor, ha* $\mathbf{a}=\mathbf{0}$ *vagy* $\mathbf{B}=\mathbf{O}$. — Az állítás első része nyilvánvaló, a második rész $\mathbf{a}\circ\mathbf{B}\mathbf{x}=\mathbf{0}$ miatt (1. 8) alapján egyszerűen következik.

$\mathbf{A}\circ\mathbf{a}=\mathbf{a}\circ\mathbf{A}$ *akkor és csak akkor, ha* $\mathbf{a}=\mathbf{0}$ *vagy* $\mathbf{A}=\lambda(\mathbf{a}\circ\mathbf{a})$. — Ha ugyanis $\mathbf{A}\circ\mathbf{a}=\mathbf{a}\circ\mathbf{A}$, akkor bármely két $\mathbf{x},\mathbf{y}$ vektorra $(\mathbf{A}\mathbf{y})(\mathbf{a}\mathbf{x})=$ $=\mathbf{a}(\mathbf{y}\mathbf{A}\mathbf{x})$. Innen, ha $\mathbf{A}\mathbf{y}\nparallel\mathbf{a}$, akkor $\mathbf{a}=\mathbf{0}$; ha viszont $\mathbf{a}\neq\mathbf{0}$, akkor $\mathbf{A}\mathbf{y}\parallel\mathbf{a}$

[9] L. [2], 542 és 547.

[10] $\mathcal{A}\odot\mathbf{I}=\mathbf{I}\odot\mathcal{A}$, de általában $\mathcal{A}\odot\mathbf{B}\neq\mathbf{B}\odot\mathcal{A}$, amint azt $\mathcal{A}=\mathbf{I}\circ\mathbf{e}_1$ és $\mathbf{B}=\mathbf{e}_2\circ\mathbf{e}_3$ példája mutatja.

[11] Vö. [2], 561—562.

[12] $\mathbf{a}\times\mathcal{A}\neq\mathcal{A}\times\mathbf{a}$ általában, amint azt $\mathcal{A}=\mathbf{I}\circ\mathbf{a}$ példája mutatja. Hasonlóan $\mathbf{A}\times\mathbf{B}\neq\mathbf{B}\times\mathbf{A}$ általában, hiszen pl. $\mathbf{A}\times\mathbf{I}\neq\mathbf{I}\times\mathbf{A}$, ha $\mathbf{A}\neq\mathbf{I}$.

[13] Vö. [2], 558, 559 és 542.

[14] Vö. 1. §, (1.8)—(1.11).

minden $\mathbf{y}$ vektorra, ahonnan (1.10) miatt $\mathbf{A}=\mathbf{a}\circ\mathbf{b}$. Ezt felhasználva kapjuk, hogy $\mathbf{b}\circ\mathbf{a}=\mathbf{a}\circ\mathbf{b}$, azaz (1.9) alapján $\mathbf{b}=\lambda\mathbf{a}$, amiből következik, hogy $\mathbf{A}=\lambda(\mathbf{a}\circ\mathbf{a})$. Állításunk második része (2.8) közvetlen következménye.

Ha $\mathcal{A}\mathbf{x}=\lambda\mathbf{A}$ $(\mathbf{A}\neq\mathbf{O})$ *minden* $\mathbf{x}$*-re, akkor van olyan* $\mathbf{b}$ *vektor, hogy* $\mathcal{A}=\mathbf{A}\circ\mathbf{b}$. — A bizonyítás azonos (1.10) bizonyításával (felhasználva a (2.1) alatti definíciót).

Ha $\mathcal{A}\neq\mathcal{O}$ *és* $\mathbf{a}\neq\mathbf{0}$, *továbbá minden* $\mathbf{a}$*-ra merőleges* $\mathbf{x}$ *vektorra* $\mathcal{A}\mathbf{x}=\mathbf{O}$, *akkor van olyan* $\mathbf{B}$ *tenzor, hogy* $\mathcal{A}=\mathbf{B}\circ\mathbf{a}$. — A bizonyítás azonos (1.11) bizonyításával (felhasználva az előző tételt és a (2.1) alatti definíciót).

3. §. Harmadrendű tenzor mátrixa

1. Az $\mathcal{A}$ harmadrendű tenzort egyértelműen meghatározzák $\mathbf{A}_1=\mathcal{A}\mathbf{e}^1$, $\mathbf{A}_2=\mathcal{A}\mathbf{e}_2$, $\mathbf{A}_3=\mathcal{A}\mathbf{e}_3$ *tenzorkomponensei*, mégpedig

(3.1) $$\mathcal{A}=\mathbf{A}_1\circ\mathbf{e}_1+\mathbf{A}_2\circ\mathbf{e}_2+\mathbf{A}_3\circ\mathbf{e}_3.$$

Az

(3.2) $$\mathbf{a}_{jk}=\mathbf{A}_k\mathbf{e}_j=(\mathcal{A}\mathbf{e}_k)\mathbf{e}_j \qquad (j,k=1,2,3)$$

vektorok a harmadrendű tenzor *vektorkomponensei*, az

(3.3) $$a_{ijk}=\mathbf{e}_i\mathbf{a}_{jk}=\mathbf{e}_i\mathbf{A}_k\mathbf{e}_j=\mathbf{e}_i(\mathcal{A}\mathbf{e}_k)\mathbf{e}_j \qquad (i,j,k=1,2,3)$$

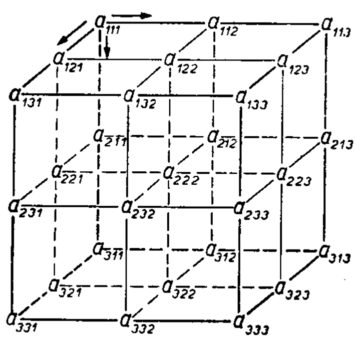
számok a *skalárkomponensek*. Ily módon a harmadrendű tenzort 3 tenzorkomponens, 9 vektorkomponens és 27 skalárkomponens jellemzi.[15]

A fentiek alapján az $\mathcal{A}$ harmadrendű tenzorhoz hozzárendelhető egy vektorelemekből álló négyzetes mátrix:

(3.4) $$\begin{pmatrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} & \mathbf{a}_{13} \\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{22} & \mathbf{a}_{23} \\ \mathbf{a}_{31} & \mathbf{a}_{32} & \mathbf{a}_{33} \end{pmatrix},$$

melynek oszlopaiban az $\mathbf{A}_i$ $(i=1,2,3)$ tenzorok vektorkomponensei állnak, továbbá egy skalárelemekből álló ún. *köbös mátrix:*

(3.5)



15 L. [2], 540.

melynek oldalsíkjait az $\mathbf{A}_i$ tenzorok mátrixai alkotják. Az a_{ijk} skalárkomponens az i-ik vízszintes sík, a j-ik homloksík és a k-ik oldalsík találkozásánál levő elem.

Az $\mathcal{A}$ harmadrendű tenzor komponenseivel és az $\mathbf{x}(x_1, x_2, x_3)$ vektor koordinátáival az $\mathbf{Y} = \mathcal{A}\mathbf{x}$ másodrendű tenzor, ill. annak $\mathbf{y}_j$ és y_{ij} komponensei a következőképpen állíthatók elő:[16]

(3.6) $$\mathbf{Y} = x_1\mathbf{A}_1 + x_2\mathbf{A}_2 + x_3\mathbf{A}_3,$$

(3.7) $$\mathbf{y}_j = \sum_{k=1}^{3} \mathbf{a}_{jk} x_k \qquad (j = 1, 2, 3),$$

(3.8) $$y_{ij} = \sum_{k=1}^{3} a_{ijk} x_k \qquad (i, j = 1, 2, 3).$$

2. Legyenek $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{a}, \mathbf{b}$ skalárkomponensei rendre $a_{ijk}, b_{ijk}, c_{ijk}, a_{ij}, b_{ij}, a_i, b_i$. A 2. §-ban értelmezett műveletekre, valamint az ott szereplő diadikus és félbelső szorzatok skalárkomponenseire vonatkozólag a definíciók és (3. 3) felhasználásával egyszerűen bizonyíthatók a következő összefüggések:[17]

Ha $\mathcal{C} = \mathcal{A} + \mathcal{B}$, akkor $c_{ijk} = a_{ijk} + b_{ijk}$.

Ha $\mathcal{C} = \lambda\mathcal{A}$, akkor $c_{ijk} = \lambda a_{ijk}$.

$\mathcal{A} = \mathcal{O}$ akkor és csak akkor, ha $a_{ijk} = 0$ $(i, j, k = 1, 2, 3)$.

Ha $\mathcal{C} = \mathbf{A} \circ \mathbf{b}$, akkor $c_{ijk} = a_{ij} b_k$.

Ha $\mathcal{C} = \mathbf{a} \circ \mathbf{B}$, akkor $c_{ijk} = a_i b_{jk}$.

Ha $\mathcal{C} = \mathcal{A} \odot \mathbf{B}$, akkor $c_{ijk} = \sum_{s=1}^{3} a_{ijs} b_{sk}$.

Ha $\mathcal{C} = \mathbf{A} \odot \mathcal{B}$, akkor $c_{ijk} = \sum_{s=1}^{3} a_{is} b_{sjk}$.

3. A harmadrendű tenzorok fenti koordinátás előállításai az euklideszi tér derékszögű Descartes-féle koordináta-rendszerében érvényesek. Ferdeszögű koordináta-rendszerben a tárgyalásunkban szereplő vektoroknak a kontravariáns a^i vektorok, a másodrendű tenzoroknak az egyszeresen kontravariáns és egyszeresen kovariáns a^i_j tenzorok, míg a harmadrendű tenzoroknak az egyszeresen kontravariáns és kétszeresen kovariáns a^i_{jk} tenzorok felelnek meg. Ennek alapján ferdeszögű koordináta-rendszerben a diadikus, ill. félbelső szorzatok a következő műveleteket jelentik:

$$a^i_j b_k = c^i_{jk}, \quad a_i b^j_k = c^j_{ik},$$

ill.

$$a^i_{js} b^s_k = c^i_{jk}, \quad a^i_s b^s_{jk} = c^i_{jk}$$

(az utóbbi két esetben s szerint összegezni kell!).

[16] L. [2], 557—558.
[17] Vö. [2], 558—559.

4. §. Harmadrendű tenzor adjungáltjai

1. A másodrendű tenzoroktól eltérően a harmadrendű tenzorhoz több adjungált (transzponált) tenzor rendelhető. Mindegyik adjungált a másodrendű tenzor adjungáltjának más-más tulajdonságát veszi át.

a) *Jobboldali adjungált.* Minden $\mathfrak{A}$ harmadrendű tenzorhoz található egyetlen olyan $\mathfrak{A}^*$ tenzor, amelyre

$$(\mathfrak{A}\mathbf{u})\mathbf{v} = (\mathfrak{A}^*\mathbf{v})\mathbf{u}, \tag{4.1}$$

ahol $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ tetszőleges vektorok. — Rögzített $\mathbf{v}$ esetén ugyanis $(\mathfrak{A}\mathbf{u})\mathbf{v} = \mathbf{g}(\mathbf{u})$ homogén lineáris vektor-vektor függvény, és így $(\mathfrak{A}\mathbf{u})\mathbf{v} = \mathbf{B}(\mathbf{v})\mathbf{u}$. $\mathbf{B}(\mathbf{v})$ viszont szintén homogén lineáris, következésképpen van olyan $\mathfrak{A}^*$, hogy $\mathbf{B}(\mathbf{v}) = \mathfrak{A}^*\mathbf{v}$.

A (4.1) alatt definiált $\mathfrak{A}^*$ tenzort az $\mathfrak{A}$ tenzor jobboldali adjungáltjának nevezzük.

A definícióból egyszerűen következik, hogy

$$(\mathfrak{A}^*)^* = \mathfrak{A}. \tag{4.2}$$

$\mathfrak{A}^*$ komponensei (4.1), (3.2) és (3.3) alapján:

$$\mathbf{a}^*_{jk} = \mathbf{a}_{kj} \qquad (j, k = 1, 2, 3), \tag{4.3}$$

$$a^*_{ijk} = a_{ikj} \qquad (i, j, k = 1, 2, 3). \tag{4.4}$$

(4.4) indokolja a jobboldali adjungált elnevezést.

b) *Baloldali adjungált.* Minden $\mathfrak{A}$ harmadrendű tenzorhoz található egyetlen olyan ${}^*\mathfrak{A}$ tenzor, amelyre

$$(\mathfrak{A}\mathbf{x})^* = {}^*\mathfrak{A}\mathbf{x}, \tag{4.5}$$

ahol $\mathbf{x}$ tetszőleges vektor. — $(\mathfrak{A}\mathbf{x})^*$ ugyanis homogén lineáris, és így ${}^*\mathfrak{A}$ valóban létezik.

A (4.5) alatt definiált ${}^*\mathfrak{A}$ tenzort az $\mathfrak{A}$ tenzor baloldali adjungáltjának nevezzük.

A definícióból egyszerűen adódnak a következő formulák:

$$ {}^*({}^*\mathfrak{A}) = \mathfrak{A}, \tag{4.6}$$

$$(\mathfrak{A}\mathbf{u})\mathbf{v} = \mathbf{v}({}^*\mathfrak{A}\mathbf{u}), \tag{4.7}$$

$$\mathbf{u}(\mathfrak{A}\mathbf{v}) = ({}^*\mathfrak{A}\mathbf{v})\mathbf{u}, \tag{4.8}$$

ahol $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ tetszőleges vektorok.

${}^*\mathfrak{A}$ komponensei (4.5) és (3.3) alapján:

$${}^*a_{ijk} = a_{jik} \qquad (i, j, k = 1, 2, 3). \tag{4.9}$$

(4.9) indokolja a baloldali adjungált elnevezést.

c) *Vegyes adjungáltak.* Az $({}^*\mathfrak{A})^*$ adjungált tenzor felhasználásával értelmezhető *vektornak harmadrendű tenzorral való* (másodrendű) *szorzata* a következőképpen:

$$\mathbf{u}\mathfrak{A} = ({}^*\mathfrak{A})^*\mathbf{u}.\text{[18]} \tag{4.10}$$

A definícióból egyszerűen adódnak a következő formulák:

$$(\mathbf{u}\mathfrak{A})\mathbf{v} = [({}^*\mathfrak{A})^*\mathbf{u}]\mathbf{v} = ({}^*\mathfrak{A}\mathbf{v})\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathfrak{A}\mathbf{v}), \tag{4.11}$$

$$\mathbf{u}\,{}^*\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^*\mathbf{u}, \tag{4.12}$$

ahol **u** és **v** tetszőleges vektorok.

$({}^*\mathfrak{A})^*$ komponensei (4. 1), (4. 5) és (3. 3) alapján:

$$({}^*a)^*_{ijk} = a_{kij} \qquad (i, j, k = 1, 2, 3). \tag{4.13}$$

Az ${}^*(\mathfrak{A}^*)$ adjungált tenzorra vonatkozólag (4. 1) és (4. 5) felhasználásával adódik, hogy

$$\mathfrak{A}\mathbf{u} = \mathbf{u}^*(\mathfrak{A}^*). \tag{4.14}$$

${}^*(\mathfrak{A}^*)$ komponensei (4. 5), (4. 1) és (3. 3) alapján:

$$^*(a^*)_{ijk} = a_{jki} \qquad (i, j, k = 1, 2, 3). \tag{4.15}$$

Minthogy (4. 5) és (4. 1) felhasználásával

$$\mathbf{u}[{}^*({}^*\mathfrak{A})^*\mathbf{v}]\mathbf{w} = \{[({}^*\mathfrak{A})^*\mathbf{v}]\mathbf{u}\}\mathbf{w} = [({}^*\mathfrak{A}\mathbf{u})\mathbf{v}]\mathbf{w} =$$
$$= \mathbf{v}(\mathfrak{A}\mathbf{u})\mathbf{w} = \mathbf{v}(\mathfrak{A}^*\mathbf{w})\mathbf{u} = \mathbf{u}[{}^*(\mathfrak{A}^*)\mathbf{w}]\mathbf{v} = \mathbf{u}[{}^*(\mathfrak{A}^*)^*\mathbf{v}]\mathbf{w},$$

tetszőleges **u**, **v**, **w** vektorokra, kapjuk, hogy

$${}^*({}^*\mathfrak{A})^* = {}^*(\mathfrak{A}^*)^* = \overset{*}{\mathfrak{A}}. \tag{4.16}$$

Az $\overset{*}{\mathfrak{A}}$ tenzort az $\mathfrak{A}$ tenzor *hármas adjungáltjának* nevezzük.

(4. 8) és (4. 14), ill. (4. 5) és (4. 10) felhasználásával kapjuk, hogy

$$\mathbf{u}\mathfrak{A}\mathbf{v} = ({}^*\mathfrak{A}\mathbf{v})\mathbf{u} = [\mathbf{v}^*({}^*\mathfrak{A})^*]\mathbf{u} = \mathbf{v}\overset{*}{\mathfrak{A}}\mathbf{u}, \tag{4.17}$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{v}\mathfrak{A}) = (\mathbf{v}\mathfrak{A})^*\mathbf{u} = [({}^*\mathfrak{A})^*\mathbf{v}]^*\mathbf{u} = (\overset{*}{\mathfrak{A}}\mathbf{v})\mathbf{u}. \tag{4.18}$$

A definícióból egyszerűen adódnak a következő összefüggések:

$$\overset{*}{\overset{*}{\mathfrak{A}}} = \mathfrak{A}. \tag{4.19}$$

$$(\overset{*}{\mathfrak{A}})^* = {}^*(\mathfrak{A}^*), \quad {}^*(\overset{*}{\mathfrak{A}}) = ({}^*\mathfrak{A})^*. \tag{4.20}$$

$\overset{*}{\mathfrak{A}}$ komponensei (4. 17) és (3. 3) alapján:

$$\overset{*}{a}_{ijk} = a_{kji} \qquad (i, j, k = 1, 2, 3). \tag{4.21}$$

[18] Vö. [2], 544—547. Itt az $({}^*\mathfrak{A})^*$ adjungált tenzor szerepel jobboldali adjungáltként, míg ${}^*\mathfrak{A}$ definíciója megegyezik a jelenlegivel.

2. A definíciókból egyszerűen következik, hogy az adjungálások az összeadással és a skalárral való szorzással felcserélhetők. Ugyancsak könnyen belátható, hogy a zérustenzor valamennyi adjungáltja zérus, továbbá, ha egy tenzor valamelyik adjungáltja zérus, akkor az zérustenzor.

(4.11), valamint (1.23)—(1.25) felhasználásával könnyen igazolhatók vektor és a 2. §, 2b)—d) alatt definiált speciális harmadrendű tenzorok szorzataira a következő formulák:

$$\mathbf{x}(\mathbf{A}\circ\mathbf{b}) = \mathbf{x}\mathbf{A}\circ\mathbf{b}, \tag{4.22}$$

$$\mathbf{x}(\mathbf{a}\circ\mathbf{B}) = (\mathbf{x}\mathbf{a})\mathbf{B}, \tag{4.23}$$

$$\mathbf{x}(\mathcal{A}\odot\mathbf{B}) = (\mathbf{x}\mathcal{A})\mathbf{B}, \tag{4.24}$$

$$\mathbf{x}(\mathbf{A}\odot\mathcal{B}) = (\mathbf{x}\mathbf{A})\mathcal{B}, \tag{4.25}$$

$$\mathbf{x}(\mathbf{a}\times\mathcal{A}) = (\mathbf{x}\times\mathbf{a})\mathcal{A}, \tag{4.26}$$

$$\mathbf{x}(\mathcal{A}\times\mathbf{a}) = \mathbf{x}\mathcal{A}\times\mathbf{a}, \tag{4.27}$$

$$\mathbf{x}(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \mathbf{x}\mathbf{A}\times\mathbf{B}.\text{[19]} \tag{4.28}$$

A 2. §, 2b)—d) alatt definiált harmadrendű tenzorok adjungáltjai a definíciók alapján egyszerűen meghatározhatók. Példaképpen megemlítünk néhány formulát, amelyek a későbbi tárgyalás során előfordulnak:

$$^*(\mathbf{A}\circ\mathbf{b}) = \mathbf{A}^*\circ\mathbf{b}, \tag{4.29}$$

$$(\mathbf{A}\circ\mathbf{b})^* = {}^*(\mathbf{b}\circ\mathbf{A}), \tag{4.30}$$

$$(\mathbf{a}\circ\mathbf{B})^* = \mathbf{a}\circ\mathbf{B}^*, \tag{4.31}$$

$$^*(\mathbf{a}\circ\mathbf{B}) = (\mathbf{B}\circ\mathbf{a})^* \tag{4.32}$$

$$[{}^*(\mathbf{a}\circ\mathbf{B})]^* = \mathbf{B}\circ\mathbf{a}. \tag{4.33}$$

(4.29), (4.30) és (4.31) a (4.1), ill. (4.5) alatti definíciókból (2.1), ill. (2.2) felhasználásával adódnak,[20] míg (4.32) (4.30)-nak, (4.33) pedig (4.32)-nek közvetlen következménye.

[19] Pl. (4.23) igazolása:

$$[\mathbf{x}(\mathbf{a}\circ\mathbf{B})]\mathbf{y} = \mathbf{x}(\mathbf{a}\circ\mathbf{B}\mathbf{y}) = (\mathbf{x}\mathbf{a})(\mathbf{B}\mathbf{y}) = [(\mathbf{x}\mathbf{a})\mathbf{B}]\mathbf{y},$$

ahol $\mathbf{y}$ tetszőleges vektor, tehát (4.23) valóban fennáll.

[20] Pl. (4.29) és (4.30) igazolása:

$$^*(\mathbf{A}\circ\mathbf{b})\mathbf{u} = [(\mathbf{A}\circ\mathbf{b})\mathbf{u}]^* = \mathbf{A}^*(\mathbf{b}\mathbf{u}) = (\mathbf{A}^*\circ\mathbf{b})\mathbf{u},$$

$$[(\mathbf{A}\circ\mathbf{b})^*\mathbf{u}]\mathbf{v} = [(\mathbf{A}\circ\mathbf{b})\mathbf{v}]\mathbf{u} = (\mathbf{v}\mathbf{b})(\mathbf{A}\mathbf{u}) = \mathbf{v}(\mathbf{b}\circ\mathbf{A})\mathbf{u} = [{}^*(\mathbf{b}\circ\mathbf{A})\mathbf{u}]\mathbf{v},$$

ahol $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ tetszőleges vektorok, tehát (4.29) és (4.30) valóban fennáll.

Fennáll továbbá

$$[^*(\mathbf{A}\times\mathbf{I})]^* = -^*(\mathbf{I}\times\mathbf{A}^*) \tag{4.34}$$

és

$$^*[(\mathbf{A}\times\mathbf{I})^*] = -^*(\mathbf{A}\times\mathbf{I}). \tag{4.35}$$

(4.5), (1.21), (4.28) és (4.10) felhasználásával ugyanis

$$^*(\mathbf{A}\times\mathbf{I})\mathbf{u} = (\mathbf{A}\times\mathbf{u})^* = -\mathbf{u}\times\mathbf{A}^* = -\mathbf{u}(\mathbf{I}\times\mathbf{A}^*) = -[^*(\mathbf{I}\times\mathbf{A}^*)]^*\mathbf{u},$$

azaz

$$^*(\mathbf{A}\times\mathbf{I}) = -[^*(\mathbf{I}\times\mathbf{A}^*)]^*,$$

ahonnan (4.34) már egyszerűen következik. Hasonlóan igazolható (4.35) is, (4.1) és (1.2) felhasználásával.

Végül (4.1) és (2.5) alapján kapjuk, hogy

$$(\mathbf{a}\times\mathfrak{A})^* = \mathbf{a}\times\mathfrak{A}^*. \tag{4.36}$$

(4.29) alkalmazásával (3.1)-ből közvetlenül adódik a következő formula:

$$^*\mathfrak{A} = \mathbf{A}_1^*\circ\mathbf{e}_1 + \mathbf{A}_2^*\circ\mathbf{e}_2 + \mathbf{A}_3^*\circ\mathbf{e}_3. \tag{4.37}$$

3. Az $\mathfrak{A}$ tenzort *jobbról, balról* vagy *középről szimmetrikusnak*, ill. *antiszimmetrikusnak* mondjuk aszerint, hogy $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^*$, $\mathfrak{A} = {}^*\mathfrak{A}$ vagy $\mathfrak{A} = \overset{*}{\mathfrak{A}}$, ill. $\mathfrak{A} = -\mathfrak{A}^*$, $\mathfrak{A} = -{}^*\mathfrak{A}$ vagy $\mathfrak{A} = -\overset{*}{\mathfrak{A}}$.

(4.1), (4.3), (4.4), ill. (4.5), (4.37), (4.9), ill. (4.17), (4.21) alapján közvetlenül adódnak a következő tételek:

$\mathfrak{A} = \pm\mathfrak{A}^*$ *akkor és csak akkor, ha* 1. $(\mathfrak{A}\mathbf{u})\mathbf{v} = \pm(\mathfrak{A}\mathbf{v})\mathbf{u}$ *tetszőleges* $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ *vektorokra,* 2. $\mathbf{a}_{jk} = \pm\mathbf{a}_{kj}$ $(j, k = 1, 2, 3)$, 3. $a_{ijk} = \pm a_{ikj}$ $(i, j, k = 1, 2, 3)$.

$\mathfrak{A} = \pm{}^*\mathfrak{A}$ *akkor és csak akkor, ha* 1. $(\mathfrak{A}\mathbf{x})^* = \pm\mathfrak{A}\mathbf{x}$ *minden* $\mathbf{x}$ *vektorra,* 2. $\mathbf{A}_k^* = \pm\mathbf{A}_k$ $(k = 1, 2, 3)$, 3. $a_{ijk} = \pm a_{jik}$ $(i, j, k = 1, 2, 3)$.

$\mathfrak{A} = \pm\overset{*}{\mathfrak{A}}$ *akkor és csak akkor, ha* 1. $\mathbf{u}\mathfrak{A}\mathbf{v} = \pm\mathbf{v}\mathfrak{A}\mathbf{u}$ *tetszőleges* $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ *vektorokra,* 2. $a_{ijk} = \pm a_{kji}$ $(i, j, k = 1, 2, 3)$.

(4.2), (4.6), ill. (4.19) alapján egyszerűen belátható, hogy bármely $\mathfrak{A}$ harmadrendű tenzor felbontható jobbról, balról, ill. középről szimmetrikus és antiszimmetrikus tenzorok összegére (tehát háromféleképpen), és a megfelelő szimmetrikus és antiszimmetrikus tenzorokra fennállnak az (1.26)-nak megfelelő formulák.

5. §. Invariánsok

A másodrendű tenzor skalár- és vektorinvariánsainak általánosításaképpen harmadrendű tenzoroknál található háromféle vektorinvariáns és egy tenzorinvariáns.

1. Első vektorinvariánsok. Minden $\mathfrak{A}$ harmadrendű tenzorhoz található egy egyértelműen meghatározott $\mathbf{v}_1$ invariáns vektor, amelyre

(5.1) $$(\mathfrak{A}\mathbf{a})(\mathbf{b}\times\mathbf{c})+(\mathfrak{A}\mathbf{b})(\mathbf{c}\times\mathbf{a})+(\mathfrak{A}\mathbf{c})(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=\mathbf{v}_1(\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}),$$

ahol $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ tetszőleges vektorok.[21] A $\mathbf{v}_1$ vektort az $\mathfrak{A}$ harmadrendű tenzor *első vektorinvariánsának* nevezzük.[22]

(5.1)-ből $\mathbf{a}=\mathbf{e}_1$, $\mathbf{b}=\mathbf{e}_2$, $\mathbf{c}=\mathbf{e}_3$ helyettesítéssel kapjuk, hogy

(5.2) $$\mathbf{v}_1=(\mathfrak{A}\mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1+(\mathfrak{A}\mathbf{e}_2)\mathbf{e}_2+(\mathfrak{A}\mathbf{e}_3)\mathbf{e}_3=\mathbf{A}_1\mathbf{e}_1+\mathbf{A}_2\mathbf{e}_2+\mathbf{A}_3\mathbf{e}_3=\mathbf{a}_{11}+\mathbf{a}_{22}+\mathbf{a}_{33},$$

ahonnan $\mathbf{v}_1$ koordinátái:

(5.3) $$(\mathbf{v}_1)_i=\sum_{j=1}^{3}a_{ijj}\qquad (i=1,2,3).$$ [23]

(5.2) alkalmazásával közvetlenül adódik, hogy

(5.4) $$s_1(\mathbf{c}\mathfrak{A})=\mathbf{c}\,\mathbf{v}_1(\mathfrak{A}),$$

ahol $\mathbf{c}$ tetszőleges vektor, és így speciálisan

$$(\mathbf{v}_1)_i=s_1(\mathbf{e}_i\mathfrak{A})\qquad (i=1,2,3);$$ [24]

továbbá (5.2) és (4.1) alapján

(5.5) $$\mathbf{v}_1(\mathfrak{A})=\mathbf{v}_1(\mathfrak{A}^*).$$

$^*\mathfrak{A}$, ill. $\overset{*}{\mathfrak{A}}$ $\mathbf{v}_1$ vektorinvariánsai $\mathfrak{A}$ újabb $\mathbf{v}_1'$, ill. $\mathbf{v}_1''$ első vektorinvariánsait szolgáltatják, mégpedig (5.5) és (4.20) miatt

(5.6) $$\mathbf{v}_1'(\mathfrak{A})=\mathbf{v}_1(^*\mathfrak{A})=\mathbf{v}_1(^*\mathfrak{A})^*,$$

ill.

(5.7) $$\mathbf{v}_1''(\mathfrak{A})=\mathbf{v}_1(\overset{*}{\mathfrak{A}})=\mathbf{v}_1{}^*(\mathfrak{A}^*).$$

Innen (5.4) alapján

(5.8) $$s_1(\mathfrak{A}^*\mathbf{c})=s_1(\mathbf{c}^*\mathfrak{A})=\mathbf{c}\,\mathbf{v}_1'(\mathfrak{A}),$$

(5.9) $$s_1(\mathfrak{A}\mathbf{c})=s_1[\mathbf{c}^*(\mathfrak{A}^*)]=\mathbf{c}\,\mathbf{v}_1''(\mathfrak{A});$$

[21] Az a tény, hogy (5.1) rögzített $\mathbf{v}_1$ vektorral teljesül tetszőleges $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ vektorokra, egyszerűen következik abból, hogy az egyenlőség helyes marad, ha valamelyik vektor helyébe konstansszorosát, ill. egy másik vektorral való összegét helyettesítjük, továbbá, ha a vektorokat permutáljuk. Ilyen lépésekkel ugyanis a teret kifeszítő három vektorból a tér bármely három vektorához eljuthatunk.

[22] Vö. [2], 549—550. — $\mathbf{v}_1$ a másodrendű tenzor s_1 invariánsának a megfelelője.

[23] L. [2], 551.

[24] L. [2], 550—551.

továbbá v_1' és v_1'' koordinátái:

(5.10) $$(v_1')_i = \sum_{j=1}^{3} a_{jij} \qquad (i = 1, 2, 3),$$

(5.11) $$(v_1'')_i = \sum_{j=1}^{3} a_{jji} \qquad (i = 1, 2, 3).$$

A koordinátás előállításokból közvetlenül adódik, hogy *ha* $\mathfrak{A}$ *jobbról, balról, ill. középről antiszimmetrikus, akkor* $v_1 = 0$, $v_1'' = 0$, *ill.* $v_1' = 0$.

Ha viszont $\mathfrak{A} = \pm \mathfrak{A}^*$, *akkor* $^*\mathfrak{A} = \pm {}^*(\mathfrak{A}^*)$ *miatt* $v_1' = \pm v_1''$. *Hasonlóan* $\mathfrak{A} = \pm {}^*\mathfrak{A}$ *esetén* $v_1 = \pm v_1'$, $\mathfrak{A} = \pm \overset{*}{\mathfrak{A}}$ *esetén* $v_1 = \pm v_1''$.

2. Harmadik vektorinvariánsok. Minden $\mathfrak{A}$ harmadrendű tenzorhoz található egy egyértelműen meghatározott v_3 invariáns vektor, amelyre

(5.12) $$(\mathfrak{A}\mathbf{a})[\mathfrak{A}\mathbf{b}, \mathfrak{A}\mathbf{c}] + (\mathfrak{A}\mathbf{b})[\mathfrak{A}\mathbf{c}, \mathfrak{A}\mathbf{a}] + (\mathfrak{A}\mathbf{c})[\mathfrak{A}\mathbf{a}, \mathfrak{A}\mathbf{b}] = v_3(\mathbf{c}\,\mathbf{b}\,\mathbf{a}),$$

ahol **a**, **b**, **c** tetszőleges vektorok.[25] A v_3 vektort az $\mathfrak{A}$ harmadrendű tenzor *harmadik vektorinvariánsának* nevezzük.[26]

(5.12)-ből $\mathbf{a} = e_1$, $\mathbf{b} = e_2$, $\mathbf{c} = e_3$ helyettesítéssel és (1.47) felhasználásával kapjuk, hogy

$$v_3 = -\mathbf{A}_1[\mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3] - \mathbf{A}_2[\mathbf{A}_3, \mathbf{A}_1] - \mathbf{A}_3[\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2] =$$

(5.13) $$\begin{aligned} &= \mathbf{a}_{11}(\mathbf{a}_{22}\mathbf{a}_{33} - \mathbf{a}_{32}\mathbf{a}_{23}) - \mathbf{a}_{21}(\mathbf{a}_{12}\mathbf{a}_{33} - \mathbf{a}_{32}\mathbf{a}_{13}) + \mathbf{a}_{31}(\mathbf{a}_{12}\mathbf{a}_{23} - \mathbf{a}_{22}\mathbf{a}_{13}) - \\ &- \mathbf{a}_{12}(\mathbf{a}_{21}\mathbf{a}_{33} - \mathbf{a}_{23}\mathbf{a}_{31}) + \mathbf{a}_{22}(\mathbf{a}_{11}\mathbf{a}_{33} - \mathbf{a}_{13}\mathbf{a}_{31}) - \mathbf{a}_{32}(\mathbf{a}_{11}\mathbf{a}_{23} - \mathbf{a}_{13}\mathbf{a}_{21}) + \\ &+ \mathbf{a}_{13}(\mathbf{a}_{21}\mathbf{a}_{32} - \mathbf{a}_{22}\mathbf{a}_{31}) - \mathbf{a}_{23}(\mathbf{a}_{11}\mathbf{a}_{32} - \mathbf{a}_{12}\mathbf{a}_{31}) + \mathbf{a}_{33}(\mathbf{a}_{11}\mathbf{a}_{22} - \mathbf{a}_{12}\mathbf{a}_{21}). \end{aligned}$$

(5.13) alapján v_3 a (3.4) alatti vektorelemekből álló mátrixhoz rendelt *determinánsvektornak* nevezhető, ui. ez formálisan arra emlékeztet, mintha egy determináns minden elemét megszoroznánk a hozzá tartozó aldeterminánssal, és a kapott értékeket összeadnánk. (1.43)—(1.46) alapján belátható, hogy v_3 valóban rendelkezik a determináns ismert tulajdonságaival (oszlopvektorok helyett az $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}_3$ „oszloptenzorokat" szerepeltetve).

(5.13)-ból azonnal következik, hogy

(5.14) $$v_3(\mathfrak{A}) = v_3(\mathfrak{A}^*).$$

$^*\mathfrak{A}$, ill. $\overset{*}{\mathfrak{A}}$ v_3 vektorinvariánsai $\mathfrak{A}$ újabb v_3', ill. v_3'' harmadik vektorinvariánsait szolgáltatják, mégpedig (5.14) és (4.20) miatt

(5.15) $$v_3'(\mathfrak{A}) = v_3({}^*\mathfrak{A}) = v_3({}^*\mathfrak{A})^*,$$

ill.

(5.16) $$v_3''(\mathfrak{A}) = v_3(\overset{*}{\mathfrak{A}}) = v_3^*(\mathfrak{A}^*).$$

25 Vö. 21.

26 v_3 a másodrendű tenzor s_3 invariánsának a megfelelője.

(5. 15)-ből (5. 13), (1. 48) és (1. 15) felhasználásával kapjuk, hogy

$$\mathbf{v}_3' = -\mathbf{A}_1^*[\mathbf{A}_2^*, \mathbf{A}_3^*] - \mathbf{A}_2^*[\mathbf{A}_3^*, \mathbf{A}_1^*] - \mathbf{A}_3^*[\mathbf{A}_1^*, \mathbf{A}_2^*] =$$

$$\mathbf{A}_1^*(\mathbf{a}_{12}\times\mathbf{a}_{13} + \mathbf{a}_{22}\times\mathbf{a}_{23} + \mathbf{a}_{32}\times\mathbf{a}_{33}) + \mathbf{A}_2^*(\mathbf{a}_{13}\times\mathbf{a}_{11} + \mathbf{a}_{23}\times\mathbf{a}_{21} + \mathbf{a}_{33}\times\mathbf{a}_{31}) +$$

$$+ \mathbf{A}_3^*(\mathbf{a}_{11}\times\mathbf{a}_{12} + \mathbf{a}_{21}\times\mathbf{a}_{22} + \mathbf{a}_{31}\times\mathbf{a}_{32}) =$$

$$(5.17) \qquad = \mathbf{e}_1(3\mathbf{a}_{11}\mathbf{a}_{12}\mathbf{a}_{13} + \mathbf{a}_{11}\mathbf{a}_{22}\mathbf{a}_{23} + \mathbf{a}_{11}\mathbf{a}_{32}\mathbf{a}_{33} + \mathbf{a}_{12}\mathbf{a}_{23}\mathbf{a}_{21} + \mathbf{a}_{12}\mathbf{a}_{33}\mathbf{a}_{31} +$$

$$+ \mathbf{a}_{13}\mathbf{a}_{21}\mathbf{a}_{22} + \mathbf{a}_{13}\mathbf{a}_{31}\mathbf{a}_{32}) + \mathbf{e}_2(3\mathbf{a}_{21}\mathbf{a}_{22}\mathbf{a}_{23} + \mathbf{a}_{21}\mathbf{a}_{12}\mathbf{a}_{13} + \mathbf{a}_{21}\mathbf{a}_{32}\mathbf{a}_{33} +$$

$$+ \mathbf{a}_{22}\mathbf{a}_{13}\mathbf{a}_{11} + \mathbf{a}_{22}\mathbf{a}_{33}\mathbf{a}_{31} + \mathbf{a}_{23}\mathbf{a}_{11}\mathbf{a}_{12} + \mathbf{a}_{23}\mathbf{a}_{31}\mathbf{a}_{32}) + \mathbf{e}_3(3\mathbf{a}_{31}\mathbf{a}_{32}\mathbf{a}_{33} +$$

$$+ \mathbf{a}_{31}\mathbf{a}_{12}\mathbf{a}_{13} + \mathbf{a}_{31}\mathbf{a}_{22}\mathbf{a}_{23} + \mathbf{a}_{32}\mathbf{a}_{13}\mathbf{a}_{11} + \mathbf{a}_{32}\mathbf{a}_{23}\mathbf{a}_{21} + \mathbf{a}_{33}\mathbf{a}_{11}\mathbf{a}_{12} + \mathbf{a}_{33}\mathbf{a}_{21}\mathbf{a}_{22}).$$

$\mathbf{u}\mathfrak{A} = ({}^*\mathfrak{A})^*\mathbf{u}$ miatt (5. 12) és (5. 15) alapján nyilván fennáll

$$(5.18) \qquad (\mathbf{a}\mathfrak{A})[\mathbf{b}\mathfrak{A}, \mathbf{c}\mathfrak{A}] + (\mathbf{b}\mathfrak{A})[\mathbf{c}\mathfrak{A}, \mathbf{a}\mathfrak{A}] + (\mathbf{c}\mathfrak{A})[\mathbf{a}\mathfrak{A}, \mathbf{b}\mathfrak{A}] = \mathbf{v}_3'(\mathbf{c}\mathbf{b}\mathbf{a}),$$

ahol **a**, **b**, **c** tetszőleges vektorok. Innen $\mathbf{u}\mathfrak{A}^* = \overset{*}{\mathfrak{A}}\mathbf{u}$ miatt

$$(5.19) \qquad \mathbf{v}_3''(\mathfrak{A}) = \mathbf{v}_3'(\mathfrak{A}^*),$$

azaz $\mathbf{v}_3''$ koordinátás előállítása (5. 17)-ből $\mathbf{a}_{jk}$ helyébe $\mathbf{a}_{kj}$-t helyettesítve adódik.

Ha $\mathfrak{A}$ *jobbról antiszimmetrikus, akkor* (5. 13) *miatt* $\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$. *Ha viszont* $\mathfrak{A}$ *középről, ill. balról antiszimmetrikus, akkor* — mint (4. 16) és (4. 20) alapján könnyen belátható — $({}^*\mathfrak{A})^*$, *ill.* ${}^*(\mathfrak{A}^*)$ *jobbról antiszimmetrikus, és így* (5. 15), *ill.* (5. 16) *miatt* $\mathbf{v}_3' = \mathbf{0}$, *ill.* $\mathbf{v}_3'' = \mathbf{0}$.

A $\mathbf{v}_1$ invariánsokhoz hasonlóan, *ha* $\mathfrak{A} = \pm\mathfrak{A}^*$, *akkor* $\mathbf{v}_3' = \pm\mathbf{v}_3''$, *míg* $\mathfrak{A} = \pm{}^*\mathfrak{A}$ *esetén* $\mathbf{v}_3 = \pm\mathbf{v}_3'$, $\mathfrak{A} = \pm\overset{*}{\mathfrak{A}}$ *esetén* $\mathbf{v}_3 = \pm\mathbf{v}_3''$.

3. Második vektorinvariánsok. Minden $\mathfrak{A}$ harmadrendű tenzorhoz található egy egyértelműen meghatározott $\mathbf{v}_2$ invariáns vektor, amelyre

$$(5.20) \qquad \mathbf{a}\times[\mathfrak{A}\mathbf{b}, \mathfrak{A}\mathbf{c}] + \mathbf{b}\times[\mathfrak{A}\mathbf{c}, \mathfrak{A}\mathbf{a}] + \mathbf{c}\times[\mathfrak{A}\mathbf{a}, \mathfrak{A}\mathbf{b}] = \mathbf{v}_2(\mathbf{c}\mathbf{b}\mathbf{a}),$$

ahol **a**, **b**, **c** tetszőleges vektorok.[27] A $\mathbf{v}_2$ vektort az $\mathfrak{A}$ harmadrendű tenzor *második vektorinvariánsának* nevezzük.[28]

(5. 20)-ból $\mathbf{a} = \mathbf{e}_1$, $\mathbf{b} = \mathbf{e}_2$, $\mathbf{c} = \mathbf{e}_3$ helyettesítéssel és (1. 47) felhasználásával kapjuk, hogy

$$\mathbf{v}_2 = -\mathbf{e}_1\times[\mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3] - \mathbf{e}_2\times[\mathbf{A}_3, \mathbf{A}_1] - \mathbf{e}_3\times[\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2] =$$

$$\mathbf{e}_1[\mathbf{a}_{11}(\mathbf{a}_{32} - \mathbf{a}_{23}) + \mathbf{a}_{13}\mathbf{a}_{21} - \mathbf{a}_{12}\mathbf{a}_{31}] + \mathbf{e}_2[\mathbf{a}_{22}(\mathbf{a}_{13} - \mathbf{a}_{31}) + \mathbf{a}_{21}\mathbf{a}_{32} - \mathbf{a}_{23}\mathbf{a}_{12}] +$$

$$(5.21) \qquad + \mathbf{e}_3[\mathbf{a}_{33}(\mathbf{a}_{21} - \mathbf{a}_{12}) + \mathbf{a}_{32}\mathbf{a}_{13} - \mathbf{a}_{31}\mathbf{a}_{23}].$$

[27] Vö. [21].

[28] $\mathbf{v}_2$ a másodrendű tenzor s_2 invariánsának a megfelelője.

Ennek alapján

$$\mathbf{v}_2(\mathfrak{A}) = -\mathbf{v}_2(\mathfrak{A}^*). \tag{5.22}$$

${}^*\mathfrak{A}$, ill. $\overset{*}{\mathfrak{A}}$ $\mathbf{v}_2$ vektorinvariánsai itt is újabb $\mathbf{v}_2'$, ill. $\mathbf{v}_2''$ második vektorinvariánsokat szolgáltatnak, mégpedig (5.22) és (4.20) miatt

$$\mathbf{v}_2'(\mathfrak{A}) = \mathbf{v}_2({}^*\mathfrak{A}) = -\mathbf{v}_2({}^*\mathfrak{A})^*, \tag{5.23}$$

ill.

$$\mathbf{v}_2''(\mathfrak{A}) = \mathbf{v}_2(\overset{*}{\mathfrak{A}}) = -\mathbf{v}_2^*(\mathfrak{A}^*). \tag{5.24}$$

(5.23)-ból (5.21) és (1.48) felhasználásával kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_2' = &-\mathbf{e}_1\times[\mathbf{A}_2^*, \mathbf{A}_3^*] - \mathbf{e}_2\times[\mathbf{A}_3^*, \mathbf{A}_1] - \mathbf{e}_3\times[\mathbf{A}_1^*, \mathbf{A}_2^*] = \\ &= \mathbf{a}_{11}(a_{312}-a_{213}) + \mathbf{a}_{12}(a_{113}-a_{311}) + \mathbf{a}_{13}(a_{211}-a_{112}) + \\ &\mathbf{a}_{21}(a_{322}-a_{223}) + \mathbf{a}_{22}(a_{123}-a_{321}) + \mathbf{a}_{23}(a_{221}-a_{122}) + \mathbf{a}_{31}(a_{332}-a_{233}) + \\ &+ \mathbf{a}_{32}(a_{133}-a_{331}) + \mathbf{a}_{33}(a_{231}-a_{132}). \end{aligned} \tag{5.25}$$

Az előzőek alapján (5.19)-hez hasonlóan belátható, hogy

$$\mathbf{v}_2''(\mathfrak{A}) = -\mathbf{v}_2'(\mathfrak{A}^*), \tag{5.26}$$

azaz $\mathbf{v}_2''$ koordinátás előállítása (5.25)-ből $\mathbf{a}_{jk}$ helyébe $-\mathbf{a}_{kj}$-t, a_{ijk} helyébe $-a_{ikj}$-t helyettesítve adódik.

A koordinátás előállításokból és a definíciókból közvetlenül adódik, hogy *ha* $\mathfrak{A} = \pm \mathfrak{A}^*$, *akkor* $\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$, $\mathbf{v}_2' = \mp \mathbf{v}_2''$, *míg* $\mathfrak{A} = \pm {}^*\mathfrak{A}$ *esetén* $\mathbf{v}_2'' = \mathbf{0}$, $\mathbf{v}_2 = \pm \mathbf{v}_2'$; $\mathfrak{A} = \pm \overset{*}{\mathfrak{A}}$ *esetén* $\mathbf{v}_2' = \mathbf{0}$, $\mathbf{v}_2 = \pm \mathbf{v}_2''$.

4. Tenzorinvariánsok. Minden $\mathfrak{A}$ harmadrendű tenzorhoz található egy egyértelműen meghatározott $\mathbf{R}$ invariáns másodrendű tenzor, amelyre

$$\begin{aligned} &[(\mathfrak{A}\mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathfrak{A}\mathbf{b})\mathbf{c}]\circ\mathbf{a} + [(\mathfrak{A}\mathbf{a})\mathbf{c} - (\mathfrak{A}\mathbf{c})\mathbf{a}]\circ\mathbf{b} + \\ &+ [(\mathfrak{A}\mathbf{b})\mathbf{a} - (\mathfrak{A}\mathbf{a})\mathbf{b}]\circ\mathbf{c} = \mathbf{R}(\mathbf{c}\,\mathbf{b}\,\mathbf{a}), \end{aligned} \tag{5.27}$$

ahol $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ tetszőleges vektorok.[29] Az $\mathbf{R}$ tenzort az $\mathfrak{A}$ harmadrendű tenzor *tenzorinvariánsának* nevezzük.[30]

(5.27)-ből $\mathbf{a} = \mathbf{e}_1$, $\mathbf{b} = \mathbf{e}_2$, $\mathbf{c} = \mathbf{e}_3$ helyettesítéssel kapjuk, hogy

$$\mathbf{R} = (\mathbf{a}_{32}-\mathbf{a}_{23})\circ\mathbf{e}_1 + (\mathbf{a}_{13}-\mathbf{a}_{31})\circ\mathbf{e}_2 + (\mathbf{a}_{21}-\mathbf{a}_{12})\circ\mathbf{e}_3, \tag{5.28}$$

ahonnan $\mathbf{R}$ skalárkomponensei:

$$r_{i1} = a_{i32}-a_{i23}, \quad r_{i2} = a_{i13}-a_{i31}, \quad r_{i3} = a_{i21}-a_{i12} \qquad (i = 1, 2, 3). \tag{5.29}$$

[29] Vö. [21].

[30] $\mathbf{R}$ a másodrendű tenzor $\mathbf{w}$ invariánsának a megfelelője.

(5. 28) alkalmazásával közvetlenül adódik, hogy

$$\mathbf{w}(\mathbf{c}\mathfrak{A}) = \mathbf{c}\mathbf{R}(\mathfrak{A}), \tag{5.30}$$

ahol **c** tetszőleges vektor, és így speciálisan

$$\mathbf{R}^*\mathbf{e}_i = \mathbf{w}(\mathbf{e}_i\mathfrak{A}) \qquad (i = 1, 2, 3); \tag{5.31}$$

továbbá (5. 27) és (4. 1) alapján

$$\mathbf{R}(\mathfrak{A}) = -\mathbf{R}(\mathfrak{A}^*). \tag{5.32}$$

$^*\mathfrak{A}$, ill. $\overset{*}{\mathfrak{A}}$ tenzorinvariánsai $\mathfrak{A}$ újabb $\mathbf{R}'$, ill. $\mathbf{R}''$ tenzorinvariánsait szolgáltatják, mégpedig (5. 32) és (4. 20) miatt

$$\mathbf{R}'(\mathfrak{A}) = \mathbf{R}(^*\mathfrak{A}) = -\mathbf{R}(^*\mathfrak{A})^*, \tag{5.33}$$

ill.

$$\mathbf{R}''(\mathfrak{A}) = \mathbf{R}(\overset{*}{\mathfrak{A}}) = -\mathbf{R}^*(\mathfrak{A}^*). \tag{5.34}$$

Innen (5. 30) alapján

$$\mathbf{w}(\mathfrak{A}^*\mathbf{c}) = \mathbf{w}(\mathbf{c}^*\mathfrak{A}) = \mathbf{c}\mathbf{R}'(\mathfrak{A}), \tag{5.35}$$

$$\mathbf{w}(\mathfrak{A}\mathbf{c}) = \mathbf{w}[\mathbf{c}^*(\mathfrak{A}^*)] = -\mathbf{c}\mathbf{R}''(\mathfrak{A}); \tag{5.36}$$

továbbá $\mathbf{R}'$ és $\mathbf{R}''$ skalárkomponensei:

$$r'_{i1} = a_{3i2} - a_{2i3}, \quad r'_{i2} = a_{1i3} - a_{3i1}, \quad r'_{i3} = a_{2i1} - a_{1i2}, \tag{5.37}$$

$$r''_{i1} = a_{23i} - a_{32i}, \quad r''_{i2} = a_{31i} - a_{13i}, \quad r''_{i3} = a_{12i} - a_{21i} \tag{5.38}$$

$$(i = 1, 2, 3).$$

A koordinátás előállításokból közvetlenül adódik, hogy $\mathfrak{A}$ *akkor és csak akkor jobbról, balról, ill. középről szimmetrikus, ha* $\mathbf{R} = \mathbf{O}$, $\mathbf{R}'' = \mathbf{O}$, *ill.* $\mathbf{R}' = \mathbf{O}$.

Ha viszont $\mathfrak{A} = \pm\mathfrak{A}^*$, *akkor* $\mathbf{R}' = \mp\mathbf{R}''$; $\mathfrak{A} = \pm{}^*\mathfrak{A}$ *esetén* $\mathbf{R} = \pm\mathbf{R}'$, $\mathfrak{A} = \pm\overset{*}{\mathfrak{A}}$ *esetén* $\mathbf{R} = \pm\mathbf{R}''$.

Az antiszimmetrikus harmadrendű tenzorok jellemzésére bebizonyítjuk a következő tételeket:

$\mathfrak{A} = -\mathfrak{A}^*$ *akkor és csak akkor, ha előállítható*

$$\mathfrak{A} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{R}\times\mathbf{I}) \tag{5.39}$$

alakban. Az (5. 39) *alatti előállítás egyértelmű.*

BIZONYÍTÁS. Az (5. 39) alatti tenzor antiszimmetrikus volta közvetlenül adódik (4. 1)-ből. Ha viszont $\mathfrak{A} = -\mathfrak{A}^*$, akkor $\mathbf{a}_{jk} = -\mathbf{a}_{kj}$ $(j, k = 1, 2, 3)$ miatt (5. 28) alapján

$$\mathbf{R} = 2(\mathbf{a}_{32}\circ\mathbf{e}_1 + \mathbf{a}_{13}\circ\mathbf{e}_2 + \mathbf{a}_{21}\circ\mathbf{e}_3),$$

ahonnan (2. 7) és (1. 7) felhasználásával tetszőleges $\mathbf{x}$ vektorra

$$\tfrac{1}{2}(\mathbf{R}\times\mathbf{I})\mathbf{x}=\mathbf{a}_{32}\circ(\mathbf{e}_1\times\mathbf{x})+\mathbf{a}_{13}\circ(\mathbf{e}_2\times\mathbf{x})+\mathbf{a}_{21}\circ(\mathbf{e}_3\times\mathbf{x}).$$

Innen $\mathbf{e}_i=\mathbf{e}_j\times\mathbf{e}_k$ $(i,j,k=1,2,3)$, majd a kifejtési tétel, továbbá (1. 15) és (3. 1) alkalmazásával kapjuk, hogy

$$\tfrac{1}{2}(\mathbf{R}\times\mathbf{I})\mathbf{x}=\mathbf{A}_1(\mathbf{e}_1\mathbf{x})+\mathbf{A}_2(\mathbf{e}_2\mathbf{x})+\mathbf{A}_3(\mathbf{e}_3\mathbf{x})=(\mathbf{A}_1\circ\mathbf{e}_1+\mathbf{A}_2\circ\mathbf{e}_2+\mathbf{A}_3\circ\mathbf{e}_3)\mathbf{x}=\mathcal{A}\mathbf{x},$$

amiből állításunk már következik. Az (5. 39) alatti előállítás egyértelműsége nyilvánvaló.

$\mathcal{A}=-{}^*\mathcal{A}$ *akkor és csak akkor, ha előállítható*

$$\mathcal{A}=\tfrac{1}{2}\,{}^*(\mathbf{I}\times\mathbf{R}''^*) \tag{5.40}$$

alakban. Az (5. 40) *alatti előállítás egyértelmű.*

BIZONYÍTÁS. (4. 16) felhasználásával könnyen belátható, hogy $\mathcal{A}=-{}^*\mathcal{A}$ akkor és csak akkor, ha $\mathcal{B}={}^*(\mathcal{A}^*)$-ra $\mathcal{B}=-\mathcal{B}^*$. Ez viszont (5. 39) alapján akkor és csak akkor teljesül, ha

$$\mathcal{B}=\tfrac{1}{2}[\mathbf{R}(\mathcal{B})\times\mathbf{I}]=-\tfrac{1}{2}(\mathbf{R}''\times\mathbf{I}),$$

ahonnan $({}^*\mathcal{B})^*=\mathcal{A}$ és (4. 34) felhasználásával állításunk következik.

$\mathcal{A}=-\overset{*}{\mathcal{A}}$ *akkor és csak akkor, ha előállítható*

$$\mathcal{A}=\tfrac{1}{2}\,{}^*(\mathbf{R}'\times\mathbf{I}) \tag{5.41}$$

alakban. Az (5. 41) *alatti előállítás egyértelmű.*

A bizonyítás menete megegyezik az előző tételével, csak a $\mathcal{B}=({}^*\mathcal{A})^*$ tenzort és (4. 34) helyett a (4. 35) formulát kell alkalmaznunk.

A fenti tételek az antiszimmetrikus másodrendű tenzor (1. 31) alatti előállítására vonatkozó tétel általánosításai, és azt fejezik ki, hogy valamely antiszimmetrikus harmadrendű tenzort teljesen meghatározza a megfelelő tenzorinvariánsa.

5. Az első vektorinvariáns és a tenzorinvariáns definíciójából közvetlenül adódik, hogy

$$\mathbf{v}_1(\mathcal{A}+\mathcal{B})=\mathbf{v}_1(\mathcal{A})+\mathbf{v}_1(\mathcal{B}),\quad \mathbf{R}(\mathcal{A}+\mathcal{B})=\mathbf{R}(\mathcal{A})+\mathbf{R}(\mathcal{B}). \tag{5.42}$$

$$\mathbf{v}_1(\lambda\mathcal{A})=\lambda\mathbf{v}_1(\mathcal{A}),\quad \mathbf{R}(\lambda\mathcal{A})=\lambda\mathbf{R}(\mathcal{A}). \tag{5.43}$$

A $\mathbf{v}_1'$, $\mathbf{v}_1''$ és $\mathbf{R}'$, $\mathbf{R}''$ invariánsok nyilván rendelkeznek ugyanezekkel a tulajdonságokkal.

A 2. §, 2b)—d) alatt definiált speciális harmadrendű tenzorok $\mathbf{v}_1$ és $\mathbf{R}$ invariánsai a következő formulákból számíthatók ki:

$$(5.44)\qquad \mathbf{v}_1(\mathbf{A}\circ\mathbf{b})=\mathbf{A}\mathbf{b},\qquad \mathbf{R}(\mathbf{A}\circ\mathbf{b})=-\mathbf{A}\times\mathbf{b},$$

$$(5.45)\qquad \mathbf{v}_1(\mathbf{a}\circ\mathbf{B})=\mathbf{a}\cdot s_1(\mathbf{B}),\qquad \mathbf{R}(\mathbf{a}\circ\mathbf{B})=\mathbf{a}\circ\mathbf{w}(\mathbf{B}),$$

$$(5.46)\qquad \mathbf{v}_1(\mathbf{A}\odot\mathfrak{B})=\mathbf{A}\mathbf{v}_1(\mathfrak{B}),\qquad \mathbf{R}(\mathbf{A}\odot\mathfrak{B})=\mathbf{A}\mathbf{R}(\mathfrak{B}),$$

$$(5.47)\qquad \mathbf{v}_1(\mathbf{a}\times\mathfrak{A})=\mathbf{a}\times\mathbf{v}_1(\mathfrak{A}),\qquad \mathbf{R}(\mathbf{a}\times\mathfrak{A})=\mathbf{a}\times\mathbf{R}(\mathfrak{A}),$$

$$(5.48)\qquad \mathbf{v}_1(\mathfrak{A}\times\mathbf{a})=-\mathbf{R}(\mathfrak{A})\mathbf{a},\qquad \mathbf{R}(\mathfrak{A}\times\mathbf{a})=\mathbf{v}_1(\mathfrak{A})\circ\mathbf{a}-\mathfrak{A}^*\mathbf{a},$$

$$(5.49)\qquad \mathbf{v}_1(\mathbf{A}\times\mathbf{B})=-\mathbf{A}\mathbf{w}(\mathbf{B}),\qquad \mathbf{R}(\mathbf{A}\times\mathbf{B})=s_1(\mathbf{B})\cdot\mathbf{A}-\mathbf{A}\mathbf{B}^*.$$

A fenti formulák (5. 4), ill. (5. 30), továbbá (4. 22)—(4. 28), (1. 33)—(1. 37), (1. 23)—(1. 25) felhasználásával egyszerűen igazolhatók.[31]

Az $\mathfrak{A}\odot\mathbf{B}$ harmadrendű tenzor $\mathbf{v}_1$ és $\mathbf{R}$ invariánsaira nem kapható (5. 46)-hoz hasonló egyszerű formula. A

$$(5.50)\qquad \mathbf{v}_1(\mathfrak{A}^*\odot\mathbf{B})=\mathfrak{A}\bullet\mathbf{B},\quad \text{ill.}\quad \mathbf{R}(\mathfrak{A}^*\odot\mathbf{B})=\mathfrak{A}\times\mathbf{B}$$

szorzatokat *az $\mathfrak{A}$ és $\mathbf{B}$ tenzorok* (elsőrendű) *belső*, ill. (másodrendű) *vektoriális szorzatának* nevezzük. (5. 3), ill. (5. 29) alapján

$$(5.51)\qquad (\mathfrak{A}\bullet\mathbf{B})_i=\sum_{s,j=1}^{3} a_{isj}b_{sj},\qquad \mathfrak{A}\bullet\mathbf{B}=\sum_{s,j=1}^{3}\mathbf{a}_{sj}b_{sj}=\sum_{j=1}^{3}\mathbf{A}_j\mathbf{b}_j,$$

ill.

$$(5.52)\qquad \begin{aligned}\mathfrak{A}\times\mathbf{B}=&\sum_{s=1}^{3}(\mathbf{a}_{s3}b_{s2}-\mathbf{a}_{s2}b_{s3})\circ\mathbf{e}_1+\sum_{s=1}^{3}(\mathbf{a}_{s1}b_{s3}-\mathbf{a}_{s3}b_{s1})\circ\mathbf{e}_2+\\&+\sum_{s=1}^{3}(\mathbf{a}_{s2}b_{s1}-\mathbf{a}_{s1}b_{s2})\circ\mathbf{e}_3.\end{aligned}$$ [32]

A fentiek alapján értelmezhető *két harmadrendű tenzor* (másodrendű) *belső*, ill. (harmadrendű) *vektoriális szorzata* ($\mathfrak{A}\bullet\mathfrak{B}$, ill. $\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}$) a következőképpen:

$$(5.53)\qquad (\mathfrak{A}\bullet\mathfrak{B})\mathbf{x}=\mathfrak{A}\bullet(\mathfrak{B}\mathbf{x}),\quad \text{ill.}\quad (\mathfrak{A}\times\mathfrak{B})\mathbf{x}=\mathfrak{A}\times(\mathfrak{B}\mathbf{x}).$$

A másodrendű tenzorok mintájára az $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ harmadrendű tenzorok *skaláris*, ill. (elsőrendű) *vektoriális szorzatát* a következőképpen értelmezzük:

$$(5.54)\qquad \mathfrak{A}\bullet\mathfrak{B}=s_1((^*\mathfrak{A})^*\bullet\mathfrak{B}),\quad \text{ill.}\quad [\mathfrak{A},\mathfrak{B}]=\mathbf{w}((^*\mathfrak{A})^*\bullet\mathfrak{B}).$$

[31] Pl. (5. 44) igazolása:

$$\mathbf{c}\mathbf{v}_1(\mathbf{A}\circ\mathbf{b})=s_1(\mathbf{c}\mathbf{A}\circ\mathbf{b})=(\mathbf{c}\mathbf{A})\mathbf{b}=\mathbf{c}(\mathbf{A}\mathbf{b}),$$
$$\mathbf{c}\mathbf{R}(\mathbf{A}\circ\mathbf{b})=\mathbf{w}(\mathbf{c}\mathbf{A}\circ\mathbf{b})=-\mathbf{c}\mathbf{A}\times\mathbf{b}\quad \mathbf{c}(-\mathbf{A}\times\mathbf{b}),$$

ahol $\mathbf{c}$ tetszőleges vektor, tehát (5. 44) valóban fennáll. — A $\mathbf{v}_1$-re vonatkozó formulák egy részét l. [2], 560—564.

[32] Vö. (1. 41), ill. (1. 47). — A fentieknek megfelelően nevezhetjük az (5. 46) alatti $\mathbf{v}_1$, ill. $\mathbf{R}$ invariánst az $\mathbf{A}$ és $\mathfrak{B}$ tenzorok belső, ill. vektoriális szorzatának.

$\mathfrak{A}\odot\mathbf{B}$ skalárkomponenseiből (5.3) és (3.8) felhasználásával $\mathbf{C}=\mathfrak{A}\bullet\mathfrak{B}$ skalárkomponensei:

$$c_{ij}=\sum_{r,s=1}^{3} a_{isr}b_{srj},^{33}$$

ahonnan

$$\mathfrak{A}\bullet\mathfrak{B}=\sum_{i,r,s=1}^{3} a_{sri}b_{sri}, \tag{5.55}$$

ill.

$$[\mathfrak{A},\mathfrak{B}]=\mathbf{e}_1\sum_{r,s=1}^{3}(a_{sr3}b_{sr2}-a_{sr2}b_{sr3})+ \tag{5.56}$$
$$+\mathbf{e}_2\sum_{r,s=1}^{3}(a_{sr1}b_{sr3}-a_{sr3}b_{sr1})+\mathbf{e}_3\sum_{s,r=1}^{3}(a_{sr2}b_{sr1}-a_{sr1}b_{sr2}).$$

(5.55) és (5.56) segítségével könnyen belátható, hogy $\mathfrak{A}\bullet\mathfrak{B}$, ill. $[\mathfrak{A},\mathfrak{B}]$ rendelkezik a vektorok skaláris, ill. vektoriális szorzatának ismert tulajdonságaival.

(5. 55) módot ad *harmadrendű tenzor abszolút értékének* definiálására

$$|\mathfrak{A}|=\sqrt{\mathfrak{A}\bullet\mathfrak{A}}=\sqrt{\sum_{i,r,s=1}^{3} a_{sri}^2}.$$

6. §. Elfajuló harmadrendű tenzorok

A másodrendű tenzorok mintájára a harmadrendű tenzort *közönségesnek* mondjuk, ha csak a zérusvektorhoz rendeli a zérustenzort.[34] Ellenkező esetben a harmadrendű tenzor *elfajuló.*

A definíciók alapján könnyen belátható, hogy a 2. §, 2b)—d) alatt definiált tenzorok közül $\mathbf{A}\circ\mathbf{b}$ és $\mathfrak{A}\times\mathbf{a}$ elfajuló, míg $\mathbf{a}\times\mathfrak{A}$, ill. $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ nem feltétlenül elfajuló (amint azt $\mathfrak{A}=\mathbf{b}\circ\mathbf{I}$ ($\mathbf{b}\not\parallel\mathbf{a}$), ill. $\mathbf{I}\times\mathbf{I}$[35] példája mutatja); $\mathbf{a}\circ\mathbf{B}$ viszont (1.8) miatt akkor és csak akkor elfajuló, ha $\mathbf{a}=\mathbf{0}$ vagy $\mathbf{B}$ elfajuló.

Az elfajuló tenzorokra vonatkozólag (1.49) és (1.50) általánosításaképpen bebizonyítjuk a következő tételeket:

[33] Vö. [2], 551 és 558—559.

[34] Nyilvánvaló, hogy bármely harmadrendű tenzor a zérusvektorhoz a zérustenzort rendeli.

[35] Ez utóbbi példa azt is mutatja, hogy az (5.39)—(5.41) alatti előállítású antiszimmetrikus harmadrendű tenzorok nem feltétlenül elfajulók — ellentétben az antiszimmetrikus másodrendű tenzorokkal.

Ha $\mathfrak{A}$ elfajuló, akkor $\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}'_3 = \mathbf{0}$. — Ekkor ugyanis van olyan $\mathbf{e}$ egységvektor, amelyre $\mathfrak{A}\mathbf{e} = \mathbf{O}$. Ha viszont a koordináta-rendszert úgy vesszük fel, hogy $\mathbf{e} = \mathbf{e}_1$ legyen, akkor $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_1^* = \mathbf{O}$, ahonnan (5. 13) és (5. 17) alapján állításunk következik.

Megjegyezzük, hogy tételünk nem fordítható meg, hiszen pl. az $\mathbf{I}\times\mathbf{I}$ nem elfajuló tenzorra $\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}'_3 = \mathbf{0}$;[36] továbbá elfajuló tenzor esetén $\mathbf{v}''_3$ nem feltétlenül $\mathbf{0}$, amint azt $\mathbf{I}\circ\mathbf{e}_1$ példája mutatja.

$\mathfrak{A}$ akkor és csak akkor elfajuló, ha $^*\mathfrak{A}$ is elfajuló. — Ha ugyanis $\mathfrak{A}$ elfajuló, akkor van olyan $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ vektor, amelyre $\mathfrak{A}\mathbf{x} = \mathbf{O}$, és így $^*\mathfrak{A}\mathbf{x} = (\mathfrak{A}\mathbf{x})^* = \mathbf{O}$, azaz $^*\mathfrak{A}$ is elfajuló. Ha viszont $^*\mathfrak{A}$ elfajuló, akkor az előzőek szerint $^*(^*\mathfrak{A}) = \mathfrak{A}$ is elfajuló.

Megjegyezzük, hogy elfajuló $\mathfrak{A}$ esetén $\mathfrak{A}\mathbf{x}$ nem feltétlenül elfajuló, ill., ha $\mathfrak{A}\mathbf{x}$ minden $\mathbf{x}$-re elfajuló, akkor $\mathfrak{A}$ nem feltétlenül elfajuló, amint azt $\mathfrak{A} = \mathbf{I}\circ\mathbf{a}$, ill. $\mathfrak{A} = \mathbf{a}\circ\mathbf{I}$ példája mutatja.

Megjegyezzük továbbá, hogy elfajuló $\mathfrak{A}$ esetén $\mathfrak{A}^*$ nem feltétlenül elfajuló, amire (4. 30) alapján ismét $\mathfrak{A} = \mathbf{I}\circ\mathbf{a}$ mutat példát.

7. §. Tenzor-vektor függvények

1. Az alábbiakban, a harmadrendű tenzorok felhasználásával, a tenzor-vektor függvények differenciálását tárgyaljuk. A tárgyalás menete megegyezik a vektor-vektor függvényekével.[37]

Az $\mathbf{Y} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ tenzor-vektor függvényt *differenciálhatónak* mondjuk az $\mathbf{x}_0$ pontban, ha — $\triangle\mathbf{x}$-szel jelölve $\mathbf{x}$-nek $\mathbf{x}_0$-ból kiinduló tetszőleges megváltozását — van olyan $\mathfrak{D}$ és $\mathfrak{E}$ harmadrendű tenzor, hogy $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ megfelelő megváltozására

$$\triangle\mathbf{F} = \mathfrak{D}\triangle\mathbf{x} + \mathfrak{E}(\triangle\mathbf{x})\triangle\mathbf{x}, \tag{7. 1}$$

ahol $\mathfrak{E}(\triangle\mathbf{x}) \to \mathcal{O}$, midőn $\triangle\mathbf{x} \to \mathbf{0}$.[38] $\mathfrak{D}$ az $\mathbf{Y} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ függvény *deriváltja*. A derivált jelölései: $\mathfrak{D} = \dfrac{d\mathbf{F}}{d\mathbf{x}} = \mathbf{F}'$.

A definíció alapján könnyen belátható, hogy a derivált, ha létezik, egyértelműen van meghatározva. A derivált komponensei (3. 2) és (3. 3) alapján:

$$\mathbf{D}_k = \frac{\partial\mathbf{F}}{\partial x_k}, \quad \mathbf{d}_{jk} = \frac{\partial\mathbf{f}_j}{\partial x_k}, \quad d_{ijk} = \frac{\partial f_{ij}}{\partial x_k} \qquad (i, j, k = 1, 2, 3), \tag{7. 2}$$

[36] Ui. $(\mathbf{I}\times\mathbf{e}_2)(\mathbf{I}\times\mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_3\circ\mathbf{e}_2$ felhasználásával (1. 12), (1. 20), (1. 42) és (1. 34) miatt $\mathbf{A}_1[\mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3] = 0$, hasonlóan $\mathbf{A}_2[\mathbf{A}_3, \mathbf{A}_1] = \mathbf{A}_3[\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2] = 0$, és így $\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$. Hasonlóan kapjuk, hogy $\mathbf{v}'_3 = \mathbf{0}$.

[37] Vö. [2], 431—443.

[38] $\mathfrak{A} \to \mathcal{O}$ ha $\mathfrak{A}\mathbf{a} \to \mathbf{O}$ bármely $\mathbf{a}$ vektorra.

ahol $\mathbf{f}_j$ és f_{ij} $(i, j = 1, 2, 3)$ az $\mathbf{F}$ tenzor komponensei, x_k $(k = 1, 2, 3)$ az $\mathbf{x}$ vektor koordinátái. Írható továbbá

$$\mathfrak{D} = \mathbf{F} \circ \nabla, \tag{7.3}$$

ahol $\nabla\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)$ a szimbolikus nabla vektor.[39]

(7. 1), valamint a vektor-vektor és skalár-vektor függvény deriváltjának definíciója alapján egyszerűen bizonyíthatók a következő differenciálási szabályok:

$$(\mathbf{F}^*)' = {}^*(\mathbf{F}'), \tag{7.4}$$

$$(\mathbf{U} + \mathbf{V})' = \mathbf{U}' + \mathbf{V}', \tag{7.5}$$

$$(u\mathbf{V})' = u\mathbf{V}' + \mathbf{V} \circ u', \tag{7.6}$$

$$(\mathbf{u}\mathbf{V})' = \mathbf{u}\mathbf{V}' + \mathbf{V}^*\mathbf{u}', \tag{7.7}$$

$$(\mathbf{U}\mathbf{v})' = \mathbf{U}\mathbf{v}' + \mathbf{v}^*\mathbf{U}', \tag{7.8}$$

$$(\mathbf{U}\mathbf{V})' = \mathbf{U} \odot \mathbf{V}' + {}^*(\mathbf{V}^* \odot {}^*\mathbf{U}'), \tag{7.9}$$

$$(\mathbf{u} \circ \mathbf{v})' = \mathbf{u} \circ \mathbf{v}' + {}^*(\mathbf{v} \circ \mathbf{u}'), \tag{7.10}$$

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{V})' = \mathbf{u} \times \mathbf{V}' - {}^*(\mathbf{V}^* \times \mathbf{u}'), \tag{7.11}$$

$$(\mathbf{U} \times \mathbf{v})' = \mathbf{U} \times \mathbf{v}' - {}^*(\mathbf{v} \times {}^*\mathbf{U}'),[40] \tag{7.12}$$

ahol az $u(\mathbf{x})$, $\mathbf{u}(\mathbf{x})$, $\mathbf{v}(\mathbf{x})$, $\mathbf{U}(\mathbf{v})$, $\mathbf{V}(\mathbf{x})$ függvények differenciálhatók.

2. Az $\mathbf{Y} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ függvény $\mathfrak{D}$ deriváltjának első vektorinvariánsát, ill. tenzorinvariánsát a függvény *divergenciájának*,[41] ill. *rotációjának* nevezzük, azaz

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \mathbf{v}_1\left(\frac{d\mathbf{F}}{d\mathbf{x}}\right), \quad \operatorname{rot} \mathbf{F} = \mathbf{R}\left(\frac{d\mathbf{F}}{d\mathbf{x}}\right). \tag{7.13}$$

(5. 2)-ből, ill. (5. 28)-ból (7. 2) felhasználásával kapjuk, hogy

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \mathbf{f}_3}{\partial x_3}, \tag{7.14}$$

ill.

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \left(\frac{\partial \mathbf{f}_3}{\partial x_2} - \frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial x_3}\right) \circ \mathbf{e}_1 + \left(\frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial x_3} - \frac{\partial \mathbf{f}_3}{\partial x_1}\right) \circ \mathbf{e}_2 + \left(\frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial x_2}\right) \circ \mathbf{e}_3. \tag{7.15}$$

(7. 14), ill. (7. 15) felhasználásával egyszerűen bizonyíthatók a következő szimbolikusan értelmezett képletek:

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \mathbf{F} \nabla, \quad \operatorname{rot} \mathbf{F} = -\mathbf{F} \times \nabla. \tag{7.16}$$

39 L. [2], 552—553.
40 Vö. [2], 553, 560, 562—563.
41 Az $\mathbf{Y} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ függvény divergenciájára vonatkozólag l. [2], 554—555, 563.

Ugyanis

$$F\nabla = (\mathbf{f}_1 \circ \mathbf{e}_1 + \mathbf{f}_2 \circ \mathbf{e}_2 + \mathbf{f}_3 \circ \mathbf{e}_3)\nabla =$$

$$= \mathbf{f}_1(\mathbf{e}_1\nabla) + \mathbf{f}_2(\mathbf{e}_2\nabla) + \mathbf{f}_3(\mathbf{e}_3\nabla) = \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \mathbf{f}_3}{\partial x_3},$$

ill.

$$\mathbf{F}\times\nabla = (\mathbf{f}_1 \circ \mathbf{e}_1 + \mathbf{f}_2 \circ \mathbf{e}_2 + \mathbf{f}_3 \circ \mathbf{e}_3)\times\nabla =$$

$$\mathbf{f}_1 \circ (\mathbf{e}_1\times\nabla) + \mathbf{f}_2 \circ (\mathbf{e}_2\times\nabla) + \mathbf{f}_3 \circ (\mathbf{e}_3\times\nabla) =$$

$$= \mathbf{f}_1 \circ [\mathbf{e}_3(\mathbf{e}_2\nabla) - \mathbf{e}_2(\mathbf{e}_3\nabla)] + \mathbf{f}_2 \circ [\mathbf{e}_1(\mathbf{e}_3\nabla) - \mathbf{e}_3(\mathbf{e}_1\nabla)] + \mathbf{f}_3 \circ [\mathbf{e}_2(\mathbf{e}_1\nabla) - \mathbf{e}_1(\mathbf{e}_2\nabla)] =$$

$$= -\left[\left(\frac{\partial \mathbf{f}_3}{\partial x_2} - \frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial x_3}\right) \circ \mathbf{e}_1 + \left(\frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial x_3} - \frac{\partial \mathbf{f}_3}{\partial x_1}\right) \circ \mathbf{e}_2 + \left(\frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial x_2}\right) \circ \mathbf{e}_3\right].$$

Tenzor-vektor függvény divergenciájának, ill. rotációjának meghatározását egyszerűen vissza tudjuk vezetni vektor-vektor függvény divergenciájának, ill. rotációjának meghatározására a következő képletek szerint:

(7.17) $\qquad \operatorname{div}(\mathbf{c}\mathbf{F}) = \mathbf{c} \operatorname{div} \mathbf{F}, \quad \operatorname{rot}(\mathbf{c}\mathbf{F}) = \mathbf{c} \operatorname{rot} \mathbf{F},$

ahol **c** rögzített vektor.

Ezek a képletek egyszerűen adódnak (5.4), ill. (5.30) alapján, (7.7) felhasználásával:

$$\operatorname{div}(\mathbf{c}\mathbf{F}) = s_1(\mathbf{c}\mathbf{F})' = s_1(\mathbf{c}\mathbf{F}') = \mathbf{c} \operatorname{div} \mathbf{F},$$

$$\operatorname{rot}(\mathbf{c}\mathbf{F}) = \mathbf{w}(\mathbf{c}\mathbf{F})' = \mathbf{w}(\mathbf{c}\mathbf{F}') = \mathbf{c} \operatorname{rot} \mathbf{F}.$$

A (7.4)—(7.12) alatti differenciálási szabályok, továbbá az (5.44)—(5.49) formulák felhasználásával könnyen bizonyíthatók a következő képletek:

(7.18a) $\qquad \operatorname{div}(\mathbf{U}+\mathbf{V}) = \operatorname{div}\mathbf{U} + \operatorname{div}\mathbf{V},$

(7.18b) $\qquad \operatorname{rot}(\mathbf{U}+\mathbf{V}) = \operatorname{rot}\mathbf{U} + \operatorname{rot}\mathbf{V},$

(7.19a) $\qquad \operatorname{div}(u\mathbf{V}) = u \operatorname{div}\mathbf{V} + \mathbf{V}u',$

(7.19b) $\qquad \operatorname{rot}(u\mathbf{V}) = u \operatorname{rot}\mathbf{V} - \mathbf{V}\times u',$

(7.20a) $\qquad \operatorname{div}(\mathbf{u}\mathbf{V}) = \mathbf{u} \operatorname{div}\mathbf{V} + \mathbf{V} \bullet \mathbf{u}',$

(7.20b) $\qquad \operatorname{rot}(\mathbf{u}\mathbf{V}) = \mathbf{u} \operatorname{rot}\mathbf{V} + [\mathbf{V}, \mathbf{u}'],$

(7.21a) $\qquad \operatorname{div}(\mathbf{U}\mathbf{v}) = \mathbf{v} \operatorname{div}\mathbf{U}^* + \mathbf{v}' \bullet \mathbf{U}^*,$

(7.21b) $\qquad \operatorname{rot}(\mathbf{U}\mathbf{v}) = \mathbf{v} \operatorname{rot}\mathbf{U}^* - [\mathbf{v}', \mathbf{U}^*],$

(7.22a) $\qquad \operatorname{div}(\mathbf{U}\mathbf{V}) = \mathbf{U} \operatorname{div}\mathbf{V} + \mathbf{v}_1^*(\mathbf{V}^* \odot^* \mathbf{U}'),$

(7.22b) $\qquad \operatorname{rot}(\mathbf{U}\mathbf{V}) = \mathbf{U} \operatorname{rot}\mathbf{V} + \mathbf{R}^*(\mathbf{V}^* \odot^* \mathbf{U}'),$

(7.23a) $\qquad \operatorname{div}(\mathbf{u} \circ \mathbf{v}) = \mathbf{u} \operatorname{div}\mathbf{v} + \mathbf{u}'\mathbf{v},$

$$(7.23b)\qquad \operatorname{rot}(\mathbf{u}\circ\mathbf{v}) = \mathbf{u}\circ\operatorname{rot}\mathbf{v} + \mathbf{u}'\times\mathbf{v},$$

$$(7.24a)\qquad \operatorname{div}(\mathbf{u}\times\mathbf{V}) = \mathbf{u}\times\operatorname{div}\mathbf{V} - \mathbf{v}_1{}^*(\mathbf{V}^*\times\mathbf{u}'),$$

$$(7.24b)\qquad \operatorname{rot}(\mathbf{u}\times\mathbf{V}) = \mathbf{u}\times\operatorname{rot}\mathbf{V} - \mathbf{R}^*(\mathbf{V}^*\times\mathbf{u}'),$$

$$(7.25a)\qquad \operatorname{div}(\mathbf{U}\times\mathbf{v}) = -\mathbf{U}\operatorname{rot}\mathbf{v} + (\operatorname{rot}\mathbf{U})\mathbf{v},$$

$$(7.25b)\qquad \operatorname{rot}(\mathbf{U}\times\mathbf{v}) = \mathbf{U}\operatorname{div}\mathbf{v} - \operatorname{div}\mathbf{U}\circ\mathbf{v} + \mathbf{U}'\mathbf{v} - \mathbf{U}\mathbf{v}'^*.$$ [42]

(7.21a), (7.21b) speciális eseteiként megemlítjük a következőket:

$$\operatorname{div}(\mathbf{F}\mathbf{x}) = \mathbf{x}\operatorname{div}\mathbf{F}^* + s_1(\mathbf{F}),$$

ill.

$$\operatorname{rot}(\mathbf{F}\mathbf{x}) = \mathbf{x}\operatorname{rot}\mathbf{F}^* + \mathbf{w}(\mathbf{F}).$$

Megemlítjük, hogy az $\mathbf{Y} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ függvény $\mathfrak{D}$ deriváltjának $\mathbf{v}_1'$, ill. $\mathbf{R}'$ invariánsaiként újabb divergencia, ill. rotáció fogalomhoz jutunk:

$$(7.26)\qquad \operatorname{div}_1\mathbf{F} = \mathbf{v}_1'(\mathbf{F}') = \mathbf{v}_1{}^*(\mathbf{F}') = \mathbf{v}_1(\mathbf{F}^*)' = \operatorname{div}\mathbf{F}^*,$$

ill.

$$(7.27)\qquad \operatorname{rot}_1\mathbf{F} = \mathbf{R}'(\mathbf{F}') = \mathbf{R}^*(\mathbf{F}') = \mathbf{R}(\mathbf{F}^*)' = \operatorname{rot}\mathbf{F}^*.$$

(7.26), ill. (7.27) alapján egyszerűen adódnak a következő, (7.16)-nak és (7.17)-nek megfelelő formulák:

$$(7.28)\qquad \operatorname{div}_1\mathbf{F} = \mathbf{F}^*\nabla = \nabla\mathbf{F},\qquad \operatorname{rot}_1\mathbf{F} = -\mathbf{F}^*\times\nabla = (\nabla\times\mathbf{F})^*,$$

$$(7.29)\qquad \mathbf{c}\operatorname{div}_1\mathbf{F} = \operatorname{div}(\mathbf{F}\mathbf{c}),\qquad \mathbf{c}\operatorname{rot}_1\mathbf{F} = \operatorname{rot}(\mathbf{F}\mathbf{c}),$$

ahonnan

$$(7.30)\qquad \mathbf{e}_i\operatorname{div}_1\mathbf{F} = \operatorname{div}\mathbf{f}_i,\qquad \mathbf{e}_i\operatorname{rot}_1\mathbf{F} = \operatorname{rot}\mathbf{f}_i\qquad (i = 1, 2, 3).$$

3. Ismeretes, hogy ha $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, ill. $y = f(\mathbf{x})$ egy irányított, mérhető S határfelületű, zárt, mérhető V térrészben folytonosan differenciálható, akkor fennállnak a következő *Gauss—Osztrogradszkij-féle tételek:*

$$(7.31)\qquad \int_V \operatorname{div}\mathbf{f}\,dV = \int_S \mathbf{f}\,d\mathbf{S},$$

$$(7.32)\qquad \int_V \operatorname{rot}\mathbf{f}\,dV = -\int_S \mathbf{f}\times d\mathbf{S},$$

[42] Pl. (7.23a) és (7.23b) igazolása:

$$\operatorname{div}(\mathbf{u}\circ\mathbf{v}) = \mathbf{v}_1[\mathbf{u}\circ\mathbf{v}' + {}^*(\mathbf{v}\circ\mathbf{u}')] = \mathbf{u}\operatorname{div}\mathbf{v} + \mathbf{v}_1[{}^*(\mathbf{v}\circ\mathbf{u}')]^* = \mathbf{u}\operatorname{div}\mathbf{v} + \mathbf{u}'\mathbf{v},$$

$$\operatorname{rot}(\mathbf{u}\circ\mathbf{v}) = \mathbf{R}[\mathbf{u}\circ\mathbf{v}' + {}^*(\mathbf{v}\circ\mathbf{u}')] = \mathbf{u}\circ\operatorname{rot}\mathbf{v} - \mathbf{R}[{}^*(\mathbf{v}\circ\mathbf{u}')]^* = \mathbf{u}\circ\operatorname{rot}\mathbf{v} + \mathbf{u}'\times\mathbf{v},$$

ahol felhasználtuk még az (5.5), (5.32) és (4.33) formulákat is. — Megjegyezzük, hogy (7.25a) és (7.25b) igazolásához a fentiekhez hasonlóan (5.5) és (5.32), továbbá (4.33) helyett az $[{}^*(\mathbf{a}\times\mathcal{A})]^* = -\mathcal{A}^*$ a formula felhasználása szükséges.

(7.33) $$\int_V \frac{d\mathbf{f}}{d\mathbf{x}} dV = \int_S \mathbf{f} \circ d\mathbf{S},$$

(7.34) $$\int_V \frac{df}{d\mathbf{x}} dV = \int_S f d\mathbf{S}.$$

Ismeretes továbbá, hogy ha $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, ill. $y = f(\mathbf{x})$ egy zárt, irányított, mérhető L határgörbével rendelkező, irányított, mérhető S felületen folytonosan differenciálható, akkor fennállnak a következő *Stokes-féle tételek:*

(7.35) $$\int_S \operatorname{rot} \mathbf{f} d\mathbf{S} = \int_L \mathbf{f} d\mathbf{s},$$

(7.36) $$\int_S \frac{d\mathbf{f}}{d\mathbf{x}} d\mathbf{S} = -\int_L \mathbf{f} \times d\mathbf{s},$$

(7.37) $$\int_S \frac{df}{d\mathbf{x}} \times d\mathbf{S} = -\int_L f d\mathbf{s}$$

((7.36)-nál még azzal a további kikötéssel, hogy $\frac{d\mathbf{f}}{d\mathbf{x}}$ szimmetrikus és $\operatorname{div} \mathbf{f} = 0$).[43]

A fenti formulák általánosításaként, a V, ill. S integrációs tartományokra a fentiekben tett feltevések mellett, folytonosan differenciálható $\mathbf{Y} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ és $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ függvényekre fennállnak a következő *Gauss—Osztrogradszkij-féle*, ill. *Stokes-féle tételek:*

(7.38) $$\int_V \operatorname{div} \mathbf{F} dV = \int_S \mathbf{F} d\mathbf{S},$$ [44]

(7.39) $$\int_V \operatorname{rot} \mathbf{F} dV = -\int_S \mathbf{F} \times d\mathbf{S},$$

(7.40) $$\int_V \frac{d\mathbf{F}}{d\mathbf{x}} dV = \int_S \mathbf{F} \circ d\mathbf{S},$$

ill.

(7.41) $$\int_S \operatorname{rot} \mathbf{F} d\mathbf{S} = \int_L \mathbf{F} d\mathbf{s},$$

[43] L. [1], 105—108; [2], 565—587. — Az itt fellépő integrálok értelmezésére vonatkozólag l. pl. [2], 245—303. — A (7.38)—(7.43) alatt fellépő újabb integrálok ezekhez hasonlóan értelmezhetők

[44] L. [2], 573.

$$\int_S \frac{d\mathbf{F}}{d\mathbf{x}} \mathbf{dS} = -\int_L \mathbf{F} \times \mathbf{ds}, \tag{7.42}$$

$$\int_S \frac{d\mathbf{f}}{d\mathbf{x}} \times \mathbf{dS} = -\int_L \mathbf{f} \circ \mathbf{ds} \tag{7.43}$$

((7.42)-nél még azzal a további kikötéssel, hogy $\frac{d\mathbf{F}}{d\mathbf{x}}$ jobbról szimmetrikus és $\operatorname{div} \mathbf{F} = \mathbf{0}$).

A fenti formulák közvetlenül adódnak a (7.31)—(7.33), ill. (7.35)—(7.37) formulákból, ha azokat az $\mathbf{f} = \mathbf{cF}$ (ill. (7.37)-nél az $f = \mathbf{cf}$) függvényre alkalmazzuk, és felhasználjuk a (7. 17), (1.23), (1.25), (4.22), továbbá (7.43) igazolásánál még a (7.20a), (7.7) és (4. 10) képleteket.[45]

Végül megemlítjük, hogy (7.38) és (7.41), ill. (7.39) és (7.43) felhasználásával — a vektor-vektor függvények mintájára — könnyen igazolhatók a következő formulák:

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{F} = \mathbf{0}, \tag{7.44}$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{Grad} \mathbf{u} = \mathbf{O};\ ^{46} \tag{7.45}$$

továbbá koordináták segítségével adódik, hogy

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{F} = \operatorname{Grad} \operatorname{div} \mathbf{F} - \triangle \mathbf{F}, \tag{7.46}$$

ahol $\triangle \mathbf{F} = \frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial x_3^2}$.

IRODALOM

[1] SZENTMÁRTONY T., *Vektor- és tenzorszámítás* (Budapest, 1948).
[2] PACH ZS. PÁLNÉ—FREY T., *Vektor- és tenzoranalízis* (Budapest, 1960).

(Beérkezett: 1960. VI. 29.)

Az Eötvös Loránd Tudományegyetem
Matematikai Intézete

[45] (7.34)-et $f = \mathbf{cf}$-re alkalmazva visszakapjuk a (7.33) formulát.

[46] Vö. [2], 601—603; $\operatorname{Grad} \mathbf{u} = \frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{x}}$. — A (7.44) és (7.45) formulák formálisan könnyen felírhatók (7.16) alapján a ∇ operátor segítségével is.

EGYDIMENZIÓS VÉLETLEN TÉRKITÖLTÉS VÁLTOZÓ HOSSZÚSÁGÚ SZAKASZOKKAL

Írta: BÁNKÖVI GYÖRGY és DOBÓ ANDOR

Bevezetés

Véletlen térkitöltési problémák felmerülnek számos gyakorlati területen (szemcsés anyagok raktározása, autók parkolása stb.), valamint az elméleti fizikában, például folyadékok strukturális felépítésének vizsgálata során.

Ezek egzakt matematikai tárgyalása általában igen nehéz, konkrét eredmények is csak néhány speciális esetben ismeretesek. Ilyen speciális esetet tárgyal RÉNYI ALFRÉD [1] dolgozatában, ahol a probléma a következő: a $(0, x)$ intervallumra találomra ráhelyezünk egységnyi szakaszokat úgy, hogy azoknak ne legyen egymással közös pontjuk. Az elhelyezést addig folytatjuk, míg a szabad helyek közül a legnagyobb hossza sem haladja meg az egységet. Meghatározandó az ily módon elhelyezhető intervallumok összhosszának (számának) várható értéke. Ezt a mennyiséget $M(x)$-szel jelölve, a szerző azt az eredményt kapta, hogy

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{M(x)}{x} = \int_0^\infty \exp\left\{-2\int_0^t \frac{1-e^{-u}}{u}\,du\right\} dt = 0{,}748\ldots$$

Ennek a modellnek n dimenziós általánosításait vizsgálta PALÁSTI ILONA [2]. BÁNKÖVI GYÖRGY [3] dolgozatában megmutatta, hogy egydimenziós véletlen térkitöltési modelleken alapuló Monte Carlo-módszerek segítségével hogyan számíthatók ki bizonyos típusú bonyolult integrálok.

Jelen dolgozatunkban olyan egydimenziós problémákat vizsgálunk, amelyeknél a szakaszoknak nemcsak elhelyezése, hanem hossza is a véletlentől függ. Ezek a problémák általában jóval bonyolultabbak, mint azok, amelyek az állandó hosszúságú szakaszok esetén fellépnek. Az általunk tárgyalt két modell közül az egyszerűbbel (1. modell) az 1—3. §-okban foglalkozunk; itt az [1] dolgozatban vizsgált esetet olyan értelemben általánosítjuk, hogy az elhelyezendő szakaszok hosszát valószínűségi változónak tekintjük, míg a kezdeti feltétel ugyanaz marad (1-nél kisebb „szabad helyre" nem helyezhető el szakasz). A 4—5. §-okban az 1. modellt továbbfejlesztjük (2. modell), oly módon, hogy a kezdeti feltételt is megváltoztatjuk (az 1-nél kisebb „hézagokat" is kitöltjük). A 6. §-ban eredményeink egy gyakorlati alkalmazási lehetőségére mutatunk rá, míg a 7. §-ban a Monte Carlo-módszerrel elvégzett kísérletek eredményét ismertetjük.

Érdekes, bár kétségtelenül nehéz probléma modelleink többdimenziós megfelelőinek tárgyalása, amely a [2] dolgozat eredményeinek továbbfejlesztésével talán lehetővé válik. Megemlítjük még, hogy kapott eredményeink a [3] dolgozatban tárgyalt Monte Carlo-módszerrel könnyen kiszámítható integrálok osztályát bővítik.

1. §. Az egydimenziós véletlen térkitöltési probléma 1. modellje

Legyen η valószínűségi változó, értelmezve a $[h, 1]$ intervallumon $(h>0)$. Jelölje $F(y)$ η eloszlásfüggvényét.

A $(0, x)$ intervallumon véletlenszerűen helyezzünk el $y_1, y_2, \ldots, y_n \ldots$ hosszúságú szakaszokat, ahol y_i $(i = 1, 2, \ldots)$ η értékeire vonatkozó sorozatos független megfigyelések eredményei. Az elhelyezést az alábbiak szerint végezzük:

1. modell:

1.° Ha $0 \leqq x \leqq 1$, akkor a $(0, x)$ intervallumra nem helyezünk el szakaszt.

2.° Ha $x > 1$, helyezzük el az első, y_1 hosszúságú szakaszt úgy, hogy a szakasz baloldali végpontja — amelyet τ-val jelölünk — a $(0, x - y_1)$ intervallumon egyenletes eloszlású legyen.

3.° Tekintsük a $(0, \tau)$ és $(\tau + y_1, x)$ „szabad intervallumok" közül a nagyobbikat. Amennyiben az 1-nél hosszabb, helyezzük el rajta az y_2 szakaszt 2.°-nek megfelelően (azaz a szakasz baloldali végpontja az y_2-vel jobbról megrövidített szabad intervallumon egyenletes eloszlású legyen).

4.° Válasszuk ki a $(0, x)$ intervallumon az y_1 és y_2 elhelyezése után kapott legnagyobb szabad intervallumot, amennyiben ez 1-nél hosszabb, helyezzük el rajta az y_3 szakaszt az előbbieknek megfelelően[1], és így tovább.

5.° Az eljárás akkor ér véget, ha a leghosszabb szabad intervallum sem nagyobb 1-nél.

Az ilyen módon elhelyezhető szakaszok összhossza nyilván valószínűségi változó; jelöljük ezt ξ_x-szel és várható értékét $M(x)$-szel.[2] Az elhelyezési

[1] Megjegyezzük, hogy a modell matematikai tárgyalása ugyanarra az eredményre vezet (1. (1″) egyenlet), ha az elhelyezés sorrendjét nem az 1-nél hosszabb szabad intervallumok nagysága, hanem tetszőleges, de előre megállapított szabályok határozzák meg. (Pl. mindig a balról első, vagy pedig találomra kiválasztott szabad helyre tesszük a következő elhelyezendő szakaszt.)

[2] $M(x)$ természetesen függ η eloszlásától is, ezt azonban külön nem jelöljük.

eljárásból következik, hogy $M(x)$ kielégíti az

$$(1)\qquad M(x+1)=2\int_h^1 \frac{1}{x+1-y}\int_0^{x+1-y} M(t)\,dt\,dF(y)+\int_h^1 y\,dF(y)\qquad (x>0)$$

függvényegyenletet, valamint az

$$(2)\qquad M(x)=0\qquad (0\leqq x\leqq 1)$$

kezdeti feltételt, ahol $F(y)$ a $[h, 1]$ intervallumon értelmezett tetszőleges, de egy adott elhelyezés folyamán rögzített eloszlásfüggvény, (2) az 1.° következménye, (1) pedig az alábbi módon vezethető le:

Ha $M(x+1|y;t)$ jelenti a ξ_{x+1} valószínűségi változó feltételes várható értékét az $y_1=y$ $(h\leqq y\leqq 1)$ és $\tau=t$ $(0\leqq t\leqq x+1-y)$ feltétel mellett, akkor

$$M(x+1|y;t)=M(t)+M(x+1-t-y)+y\qquad (x>0).$$

Minthogy t a $(0, x+1-y)$ intervallumban egyenletes eloszlású, az

$$M(x+1|y)=\frac{1}{x+1-y}\int_0^{x+1-y} M(x+1|y;t)\,dt=\frac{2}{x+1-y}\int_0^{x+1-y} M(t)\,dt+y$$

és

$$M(x+1)=\int_h^1 M(x+1|y)\,dF(y)$$

összefüggésekből (1) már nyilvánvaló. Ha a közölt elhelyezési eljárás esetén nem a szakaszok összhosszának, hanem a szakaszok számának várható értékét vizsgáljuk, amelyet $N(x)$-szel jelölünk, az (1) összefüggés levezetésénél alkalmazott gondolatmenettel az

$$(1')\qquad N(x+1)=2\int_h^1 \frac{1}{x+1-y}\int_0^{x+1-y} N(t)\,dt\,dF(y)+1\qquad (x>0)$$

egyenlethez jutunk. Az 1.°-ből következik az

$$(2')\qquad N(x)=0\qquad (0\leqq x\leqq 1)$$

kezdeti feltétel.

A továbbiakban a két esetet együtt tárgyaljuk, ezért a

$$(1'')\qquad Q(x+1)=2\int_h^1 \frac{1}{x+1-y}\int_0^{x+1-y} Q(t)\,dt\,dF(y)+K_i\qquad (x>0,\ i=1,2)$$

függvényegyenletet vizsgáljuk a

$$(2'')\qquad Q(x)=0 \qquad (0\leqq x\leqq 1)$$

kezdeti feltétel mellett, ahol

$$K_1=\int_h^1 y\,dF(y),\ K_2=1,$$

$$Q(x)=\begin{cases} M(x), & \text{ha } i=1,\\ N(x), & \text{ha } i=2,\end{cases}$$

K_1 ismert, minthogy $F(y)$ adott.

2. §. A függvényegyenlet megoldása Laplace-transzformáció segítségével

Az

$$(3)\qquad R(x)=\frac{1}{x}\int_0^x Q(t)\,dt$$

jelölés mellett (1″) az alábbi alakba megy át:

$$(4)\qquad \frac{d}{dx}[(x+1)R(x+1)]=2\int_h^1 R(x+1-y)\,dF(y)+K_i \qquad (x>0),$$

míg (2″)-ből a kezdeti feltétel

$$R(x)=0 \qquad (0\leqq x\leqq 1).$$

$R(x)$ Laplace-transzformáltját jelöljük $\varphi(s)$-sel, azaz

$$\varphi(s)=\int_0^\infty R(x)e^{-sx}dx \qquad (s=\sigma+it,\ \sigma>0).$$

Az 1. modellből nyilvánvaló, hogy

$$0\leqq Q(x)\leqq \frac{x}{h},$$

azaz, hogy

$$(5)\qquad 0\leqq R(x)\leqq \frac{x}{2h},$$

amiből $\varphi(s)$ létezése következik.

(4) mindkét oldalát e^{-sx}-szel szorozva és x szerint integrálva, az

$$(6)\qquad \int_0^\infty \frac{d}{dx}[(x+1)\,R(x+1)]e^{-sx}dx=2\int_0^\infty\left(\int_h^1 R(x+1-y)\,dF(y)\right)e^{-sx}dx+\frac{K_i}{s}$$

egyenletet kapjuk. Figyelembe véve egyrészt, hogy (6) jobb oldalán az integrálás sorrendje felcserélhető, és hogy

$$\int_0^\infty R(x+1-y)e^{-sx}dx = e^{s(1-y)}\varphi(s) \qquad (h \leqq y \leqq 1),$$

másrészt, hogy

$$\int_0^\infty \frac{d}{dx}[x+1)R(x+1)]e^{-sx}dx = -se^s\varphi'(s),$$

az alábbi differenciálegyenlethez jutunk:

$$\varphi'(s)+2\frac{\psi(s)}{s}\varphi(s)+\frac{K_i e^{-s}}{s^2}=0, \tag{7}$$

ahol

$$\psi(s)=\int_h^1 e^{-sy}dF(y).$$

(5)-ből következik, hogy

$$\lim_{s\to+\infty}\varphi(s)=0. \tag{8}$$

Megoldva a (7) differenciálegyenletet a (8) kezdeti feltétel mellett:

$$\varphi(s)=\frac{K_i}{s^2}\int_s^\infty \exp\left\{-t-2\int_s^t \frac{1-\psi(u)}{u}du\right\}dt. \tag{9}$$

(9)-ből következik, hogy

$$\lim_{s\to+0} s^2\varphi(s)=K_i\int_0^\infty \exp\left\{-t-2\int_0^t \frac{1-\psi(u)}{u}du\right\}dt=C_i \qquad (i=1,2). \tag{10}$$

3. §. $Q(x)$ aszimptotikus viselkedésének vizsgálata

$R(x)$ aszimptotikus viselkedésének vizsgálatánál az alábbi Tauber-típusú tételt használjuk fel:[1]

Ha $\alpha(x)$ monoton növekvő függvény $(0<x<+\infty)$, $\beta>0$ és

$$\lim_{s\to+0} s^\beta\int_0^\infty e^{-sx}d\alpha(x)=\gamma, \tag{11}$$

akkor

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha(x)}{x^\beta}=\frac{\gamma}{\Gamma(\beta+1)}. \tag{12}$$

[1] Lásd: [1], [4], vagy [5].

Tegyük fel, hogy $R(x)$ monoton növekedő függvény. Alkalmazva a fenti tételt $\alpha(x)=R(x)$ és $\beta=1$ választása mellett és figyelembe véve a (10) összefüggést, valamint azt, hogy

$$\int_0^\infty e^{-sx}dR(x)=\int_0^\infty R'(x)e^{-sx}dx=s\varphi(s),$$

a következő eredményt kapjuk:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{R(x)}{x}=C_i\qquad(i=1,2). \tag{13}$$

$R(x)$ aszimptotikus viselkedéséből már tudunk következtetni $Q(x)$ aszimptotikus viselkedésére. Vegyük észre ugyanis, hogy ha $\alpha(x)$ és $\alpha'(x)$ monoton növekvő függvények $(0\leqq x<+\infty)$, $\beta>1$ és

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha(x)}{x^\beta}=C, \tag{14}$$

akkor

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha'(x)}{\beta x^{\beta-1}}=C. \tag{15}$$

Ez következik egyrészt a fent idézett Tauber-típusú tétel megfordításából[1] (ami úgy értendő, hogy (11) és (12) szerepét felcseréljük), másrészt a parciális integrálás útján belátható

$$\lim_{s\to+0}s^{\beta-1}\int_0^\infty e^{-sx}d\alpha'(x)=\lim_{s\to+0}s^\beta\int_0^\infty e^{-sx}d\alpha(x)$$

összefüggésből.

Tegyük fel, hogy $Q(x)$ monoton növekvő $(0\leqq x<+\infty)$. Ekkor a (3), (13), (14) és (15) összefüggésekből $\alpha(x)=\int_0^x Q(t)dt$ és $\alpha'(x)=Q(x)$ mellett a

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{Q(x)}{x}=2C_i\qquad(i=1,2) \tag{16}$$

eredményre jutunk. (16) érvényességének igazolásához még meg kell mutatnunk, hogy $R(x)$ és $Q(x)$ monoton növekvő függvények $(0\leqq x<+\infty)$. Elegendő azonban $Q(x)$ monotonitásának igazolása, ebből ugyanis (3) miatt $R(x)$ monotonitása már nyilvánvaló.

LEMMA:

Ha $Q(x)$ kielégíti az (1″) egyenletet és monoton növekvő a [0, 1] *intervallumban, akkor monoton növekvő minden x-re* $(0\leqq x<+\infty)$.

[1] Lásd: [5] 182. o.

Bizonyítás:

A feltétel szerint $Q(x)$ monoton növekvő; ha $0 \leqq x \leqq 1$. Megmutatjuk, hogy ha $Q(x)$ monoton növekvő valamely $[0, x_0]$ intervallumban $(x_0 \geqq 1)$, akkor monoton növekvő a $0 \leqq x \leqq x_0 + h$ intervallumban is. Tegyük fel ugyanis, hogy $Q'(\bar{x}) < 0$ valamely $x_0 < \bar{x} \leqq x_0 + h$ helyen. Az (1″) és (4) egyenletből következik, hogy

$$Q(x) = 2\int_h^1 R(x-y)\,dF(y) + K_i \qquad (x > 1).$$

Minthogy az indirekt feltevés szerint

$$Q'(\bar{x}) = 2\int_h^1 \frac{\partial}{\partial x} R(\bar{x}-y)\,dF(y) < 0 \qquad (x_0 < \bar{x} \leqq x_0 + h)$$

és $F(y)$ monoton növekvő, ezért létezik olyan y_0 $(h \leqq y_0 \leqq 1)$, amelyre

$$\frac{\partial}{\partial x} R(\bar{x}-y_0) < 0.$$

De $\bar{x} - y_0 \leqq x_0$, ami ellentmondásra vezet, mert $0 \leqq x \leqq x_0$-ra $Q(x)$ és így $R(x)$ is monoton növekvő. Ezt a gondolatmenetet felhasználva állításunk teljes indukcióval belátható.

Ezáltal (16) érvényességét igazoltuk, fennáll tehát a következő

1. TÉTEL: *Az 1. §-ban definiált $M(x)$ és $N(x)$ függvények az alábbi aszimptotikus összefüggéseknek tesznek eleget:*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{M(x)}{x} = 2\left(\int_h^1 y\,dF(y)\right)\int_0^\infty \exp\left\{-t - 2\int_0^t \frac{1-\psi(u)}{u}\,du\right\} dt \tag{17}$$

és

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{N(x)}{x} = 2\int_0^\infty \exp\left\{-t - 2\int_0^t \frac{1-\psi(u)}{u}\,du\right\} dt. \tag{18}$$

Az 1. tételben szereplő $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{M(x)}{x}$ és $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{N(x)}{x}$ értékei, mint látható, η eloszlásától függenek. Felmerül az a kérdés, hogy a fenti mennyiségek milyen határok között változhatnak. Erre vonatkozóan két tételt mondunk ki.

2. TÉTEL: *A $[h, 1]$ intervallumon értelmezett η valószínűségi változó tetszőleges eloszlása mellett*

$$C(1) \leqq \lim_{x \to +\infty} \frac{N(x)}{x} \leqq C(h) \qquad (0 < h \leqq 1),$$

ahol

$$C(h)=2\int_0^\infty \exp\left\{-t-2\int_0^t \frac{1-e^{-hu}}{u}\,du\right\}dt.$$

Bizonyítás.

Az állítás egyszerűen belátható (18)-ból, minthogy

$$e^{-u}\leqq\psi(u)\leqq e^{-hu};$$

az alsó határ $\mathbf{P}(\eta=1)=1$, a felső határ $\mathbf{P}(\eta=h)=1$ esetén elérhető.

Megjegyzés. A 2. tétel állítása nyilvánvalónak tűnik azon meggondolás alapján, hogy hosszabb szakaszokból kevesebb helyezhető el; ez a meggondolás azonban csak (1 valószínűséggel) konstans hosszúságú szakaszok elhelyezésénél érvényes. A változó hosszúságú elhelyezett szakaszok számának kialakításában (amint az (18)-ból látható) nem η-nak, hanem $e^{-u\eta}$-nak $(0<u<\infty)$ várható értéke játszik szerepet. Így előfordulhat, hogy átlagosan rövidebb szakaszokból kevesebb helyezhető el (várható értékben), mint átlagosan hosszabb, de „kedvezőbb eloszlású" szakaszokból.

3. TÉTEL: *Az* $m(h)=hC(h)$ *függvény monoton növekvő* $(0<h\leqq1)$

Bizonyítás. Minthogy egyrészt

$$m'(h)=C(h)-4\int_0^\infty(1-e^{-ht})\exp\left\{-t-2\int_0^t\frac{1-e^{-hu}}{u}\,du\right\}dt= \tag{19}$$

$$=-C(h)+4\int_0^\infty\exp\left\{-t(1+h)-2\int_0^t\frac{1-e^{-hu}}{u}\,du\right\}dt,$$

másrészt (parciálisan integrálva)

$$C(h)=2\int_0^\infty t\left(1+2\frac{1-e^{-ht}}{t}\right)\exp\left\{-t-2\int_0^t\frac{1-e^{-hu}}{u}\,du\right\}dt,$$

ahonnan

$$\begin{aligned}C(h)=4\int_0^\infty\exp\left\{-t(1+h)-2\int_0^t\frac{1-e^{-hu}}{u}\,du\right\}dt-\\ -2\int_0^\infty t\exp\left\{-t-2\int_0^t\frac{1-e^{-hu}}{u}\,du\right\}dt,\end{aligned} \tag{20}$$

(20)-ból behelyettesítve (19)-be:

$$m'(h)=2\int_0^\infty t\exp\left\{-t-2\int_0^\infty \frac{1-e^{-hu}}{u}\,du\right\}dt>0 \qquad (0<h\leqq 1),$$

amiből az állítás következik.

Megjegyzés. (17)-ből látható, hogy $m(h)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{M(x)}{x}$, ha $\mathbf{P}(\eta=h)=1$. Az 1. modell szerinti, (1 valószínűséggel) konstans szakaszokkal való térkitöltésnél az elhelyezett szakaszok átlagos összhossza nagyobb, ha az egyes szakaszok hossza nagyobb. Ez a tény nem meglepő, de nem is nyilvánvaló.

Az a sejtésünk, hogy az η valószínűségi változó tetszőleges eloszlása mellett fennáll a

$$hC(h)\leqq \lim_{x\to+\infty}\frac{M(x)}{x}\leqq C(1) \qquad (0<h\leqq 1)$$

egyenlőtlenség, de ezt nem sikerült bizonyítanunk. Ez azt jelentené, hogy a RÉNYI A. által [1] dolgozatban vizsgált modell — ahol $\mathbf{P}(\eta=1)=1$, azaz

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{M(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{N(x)}{x}=C(1)=0{,}748\ldots$$

— az 1. modell szerint elhelyezhető szakaszok átlagos számára vonatkozóan alsó határt, a szakaszok összhosszának átlagára vonatkozóan pedig felső határt szolgáltat.

4. §. Az 1. modell továbbfejlesztése

Az egydimenziós véletlen térkitöltésnek az 1. modell szerint való megvalósítása esetén a $(0, x)$ intervallumon maradnak 1-nél nem hosszabb lefedetlen szakaszok („hézagok"). Ebben a §-ban az 1. modellt továbbfejlesztjük, olyan értelemben, hogy a lefedési eljárást a hézagok egy részére is kiterjesztjük.

A fent vázoltaknak megfelelően tekintsük a következő elhelyezési eljárást:

2. m o d e l l:

1.° Az elhelyezést hajtsuk végre az 1. modellnek megfelelően.

2.° A megmaradt „hézagokat" rendezzük el nagyság szerint csökkenő sorrendben; jelölje $l_{\max}$ a legnagyobb hézag hosszát.

3.° Legyen y_ν az éppen elhelyezni kívánt szakasz hossza. $l_{\max}>h$ és $l_{\max}>y_\nu$ esetén a soron következő szakaszt elhelyezzük. A maximális hézagot ezáltal kitöltöttnek tekintjük, s ide már több szakaszt nem helyezünk el. (A hézagból fedetlenül maradt helyeket nem tekintjük újabb hézagoknak.[1])

4.° $y_\nu \geqq l_{\max} > h$ esetén a ν-edik szakaszt el nem helyezhetőnek tekintjük és helyette az $y_{\nu+1}$ hosszúságú szakaszt próbáljuk elhelyezni.

5.° Az elhelyezési eljárás véget ér, ha $l_{\max} \leqq h$.

A továbbiakban feltesszük, hogy

$$F(h+\varepsilon)>0, \tag{21}$$

ha $\varepsilon>0$; ennek következtében ugyanis a 2. modell szerint történő elhelyezési eljárás 1 valószínűséggel befejeződik. Jelöljük a $(0, x)$ intervallumon ily módon elhelyezhető szakaszok összhosszának várható értékét $M^*(x)$-szel, a szakaszok számának várható értékét pedig $N^*(x)$-szel.

Az itt közölt modell vizsgálata nyilván ekvivalens az (1″) egyenlet megoldásának a (2″)-nél általánosabb kezdeti feltétel mellett történő vizsgálatával.

Legyen

$$Q^*(x)=\begin{cases} 0, & \text{ha } 0\leqq x\leqq h \\ q^*(x), & \text{ha } h<x\leqq 1, \end{cases} \tag{22}$$

ahol $q^*(x)$ adott, a $(h, 1]$ intervallumban monoton növekvő függvény és $q^*(1)=1$.

Vizsgáljuk tehát a

$$Q^*(x+1)=2\int_h^1 \frac{1}{x+1-y}\left(\int_0^{x+1-y} Q^*(t)\,dt\right)dF(y)+K_i \qquad (x>0;\, i=1,2) \tag{23}$$

egyenletet a (22) kezdeti feltétel mellett, ahol

$$Q^*(x)=\begin{cases} M^*(x), & \text{ha } i=1 \\ N^*(x), & \text{ha } i=2. \end{cases}$$

Az

$$R^*(x)=\frac{1}{x}\int_0^x Q^*(t)\,dt \tag{24}$$

jelölés mellett (23) az alábbi alakba megy át:

$$\frac{d}{dx}[(x+1)R^*(x+1)]=2\int_h^1 R^*(x+1-y)\,dF(y)+K_i \qquad (x>0). \tag{25}$$

[1] Ha $h\geqq 1/2$, akkor ez a megszorítás tárgytalan. Megjegyezzük, hogy az általunk közölt módszer könnyen alkalmazható abban az esetben is, ha a fenti megszorítástól eltekintünk, tudniillik ekkor csak a (22) alatti kezdeti feltétel módosul; ezzel a térkitöltési modellel azonban itt nem foglalkozunk.

(22)-ből (24) miatt a kezdeti feltétel:

$$R^*(x)=\begin{cases}0, & \text{ha } 0\leqq x\leqq h\\ r^*(x)=\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_h^x q^*(t)\,dt, & \text{ha } h<x\leqq 1.\end{cases}\tag{26}$$

Jelölje $\varphi^*(s)$ $R^*(x)$ Laplace-transzformáltját. Minthogy $q^*(x)\leqq 1$, ezért

$$Q^*(x)\leqq Q(x)+\frac{x}{h}\leqq\frac{2x}{h}$$

és így

$$R^*(x)\leqq\frac{x}{h},\tag{27}$$

amiből $\varphi^*(s)$ létezése következik.

Megismételve a 2. §-ban közölt gondolatmenetet, az alábbi differenciálegyenlethez jutunk:

$$\frac{d\varphi^*(s)}{ds}+\frac{2\psi(s)}{s}\varphi^*(s)+\frac{1}{s^2}\left(s^2A(s)+r^*(1)se^{-s}-2sB(s)+K_ie^{-s}\right)=0,\tag{28}$$

ahol

$$A(s)=\int_h^1 tr^*(t)e^{-st}\,dt,$$

$$B(s)=\int_h^1 b(s,y)e^{-sy}\,dF(y),$$

$$b(s,y)=\begin{cases}0, & \text{ha } y\geqq 1-h\\ \displaystyle\int_h^{1-y} r^*(t)e^{-st}\,dt, & \text{ha } y<1-h.\end{cases}$$

(Megjegyezzük, hogy $B(s)=0$, ha $h\geqq 1/2$.)

(27)-ből következik, hogy

$$\lim_{s\to+\infty}\varphi^*(s)=0.\tag{29}$$

Megoldva a (28)-differenciálegyenletet a (29) kezdeti feltétel mellett:

$$\varphi^*(s)=\frac{1}{s^2}\int_s^\infty\left(t^2e^tA(t)+r^*(1)t-2t\,e^tB(t)+K_i\right)\exp\left\{-t-2\int_s^t\frac{1-\psi(u)}{u}\,du\right\}dt.$$

Alkalmazva a 3. §-ban közölt gondolatmenetet, (figyelembe véve, hogy a $Q(x)$ monoton növekedésének bizonyítására vonatkozó lemma $Q^*(x)$-re is érvényes) eredményül az alábbi tételt nyerjük:

4. TÉTEL. *Ha $Q^*(x)$ eleget tesz a (23) egyenletnek és a (22) alatti kezdeti feltételnek, akkor*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{Q^*(x)}{x}=2C_i^*, \qquad (i=1,2), \tag{30}$$

ahol

$$C_i^*=\int_0^\infty\left(t^2e^tA(t)+r^*(1)t-2te^tB(t)+K_i\right)\exp\left\{-t-2\int_0^t\frac{1-\psi(u)}{u}\,du\right\}dt.$$

5. §. A $\lim_{x\to+\infty}\frac{Q^*(x)}{x}=2C_i^*$ összefüggés meghatározása konkrét esetekben

Ebben a §-ban $q^*(x)$ alkalmas módon történő megválasztásával vizsgáljuk $N^*(x)$ és $M^*(x)$ aszimptotikus értékének alakulását. A számítások egyszerűsítése végett mindvégig feltesszük, hogy $h\geqq 1/2$.[1]

a) Legyen

$$q^*(x)\equiv 1 \qquad (h<x\leqq 1). \tag{31}$$

Ez azt jelenti, hogy az 1. modell szerint történő elhelyezés után maradt hézagok közül a h-nál hosszabbak mindegyikére utólag még el tudunk helyezni egy-egy szakaszt (ez (21) miatt lehetséges).

A (31) feltételből következik, hogy

$$r^*(x)=1-\frac{h}{x} \qquad (h<x\leqq 1)$$

$$A(s)=\frac{e^{-s}}{s^2}\left[e^{(1-h)s}-1-(1-h)s\right]$$

$$B(s)=0,$$

és így (30)-ból

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{N^*(x)}{x}=2\int_0^\infty\exp\left\{-ht-2\int_0^t\frac{1-\psi(u)}{u}\,du\right\}dt \qquad (h\geqq 1/2). \tag{32}$$

$M^*(x)$ aszimptotikus értékének konkrét esetekben való vizsgálata már jóval bonyolultabb feladat; mi itt csak két egyszerű példát tárgyalunk. A 2. modell definíciójából következik, hogy $i=1$ $(Q^*(x)=M^*(x))$ esetén $q^*(x)$ jelenti az x hosszúságú $(h\leqq x\leqq 1)$ hézagon elhelyezett szakasz hosszának

[1] A 6. §-ban tárgyaltak szempontjából csak az az eset érdekes, amikor h közel van 1-hez.

várható értékét, azaz az η valószínűségi változó feltételes várható értékét, a $h \leqq \eta < x$ feltétel mellett, tehát

$$q^*(x) = \frac{\int_h^{x-0} y\,dF(y)}{\int_h^{x-0} dF(y)}.$$

b) Legyen η olyan diszkrét valószínűségi változó, amely a h és 1 értékeket p, illetve $1-p$ valószínűséggel veszi fel. Ebben az esetben a hézagokon csak h hosszúságú szakaszok helyezhetők el, tehát $q^*(x) = h$ $(h < x \leqq 1)$. Ennek következtében

$$r^*(x) = h\left(1 - \frac{h}{x}\right),$$

$$A(s) = \frac{he^{-s}}{s^2}[e^{(1-h)s} - 1 - (1-h)s],$$

$$K_1 = ph + 1 - p,$$

$$B(s) = 0,$$

és így (30)-ból

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{M^*(x)}{x} =$$

$$= 2\int_0^\infty [he^{(1-h)t} + (1-h)(1-p)] \exp\left\{-t - 2\int_0^t \frac{1 - pe^{-hu} - (1-p)e^{-u}}{u}\,du\right\} dt =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{M(x)}{x} + h \lim_{x\to+\infty} \frac{N^*(x) - N(x)}{x}. \tag{33}$$

c) Legyen η a $(h, 1)$ intervallumban egyenletes eloszlású valószínűségi változó. Ez esetben

$$q^*(x) = \frac{x+h}{2},$$

$$r^*(x) = \frac{1}{4x}(x^2 + 2hx - 3h^2),$$

$$A(s) = \frac{e^{-s}}{4s^3}[2e^{s(1-h)}(2hs+1) - \{(1 + 2h - 3h^2)s^2 + 2(1+h)s + 2\}],$$

$$K_1 = \frac{1+h}{2},$$

$$B(s) = 0,$$

és így (30)-ból

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{M^*(x)}{x}=$$

$$=2\int_0^\infty\left(he^{(1-h)t}+\frac{e^{(1-h)t}-1}{2t}\right)\exp\left\{-t-2\int_0^t\frac{1}{u}\left[1+\frac{e^{-u}(1-e^{(1-h)u})}{(1-h)u}\right]du\right\}dt.$$

6. §. Az elért eredmények egy gyakorlati alkalmazása

A véletlen térkitöltési modellek egyik alkalmazási területe autóparkolási szisztémák vizsgálata.[1]

A parkolásnál az optimális helykihasználás nyilván az, amikor az autók szorosan egymás mellé állnak be, ez azonban a gyakorlatban nem mindig valósítható meg. A jó helykihasználás érdekében szokásos az autók helyét előre kijelölni azáltal, hogy a parkolóhelyen egyforma távolságra fehér sávokat festenek. A parkolásnak ez a módja előnyösnek bizonyul az esetben, ha az autók közel egyforma nagyságúak. (Ekkor ugyanis a kijelölt helyet egy-egy autó optimálisan tölti ki.) Ha azonban az autók nagysága meglehetősen ingadozik, akkor a kijelölt helyekre való beállás térkihasználás szempontjából előnytelenné válhat, mert a sávozás a legnagyobb autóméret szerint történik.

A gyakorlatban a parkolás számos esetben nem meghatározott szisztéma szerint, hanem véletlenszerűen megy végbe. A véletlenszerű elhelyezkedés nyilván előnytelen, ha az autók nagysága egyforma (a helykihasználás csak kb. 75%-os, lásd: [1]), de előnyössé válhat, ha az autók nagysága erősen ingadozik. RÉNYI ALFRÉD vetette fel azt a kérdést, hogy milyen esetben nyújt jobb eredményt a véletlenszerű elhelyezés a szisztematikus (sávos) elhelyezésnél, vagyis mikor nem érdemes az autók helyét előre kijelölni. Elért eredményeink segítségével a kérdésre válasz adható, ha a véletlen módon történő beállásra bizonyos egyszerű feltételek teljesülnek.

A 2. modell a következőképpen hozható kapcsolatba az autóparkolással. Az elhelyezendő szakaszok hossza jelentse a beálló autók nagyságát. (Az „autók nagyságán" értjük azok valódi hosszát, illetve szélességét, megnövelve még egy kis távolsággal, amely a beállás módjától függ.)

Egységnek tekintjük a legnagyobb autó nagyságát (vagy annál nagyobb számot). A $(0, x)$ intervallumnak megfelel a parkolóhely hossza, a fenti egységben kifejezve. (Elég nagy x esetén az $x\to+\infty$-re kapott eredményeink már jó közelítéssel alkalmazhatók.) Egy szakasz elhelyezésének megfelel egy autó beállása.

[1] Erre először N. G. DE BRUIJN mutatott rá (lásd [1]).

Természetesen nem várhatjuk azt, hogy a valóságban az autók elkerülik az 1-nél rövidebb helyeket („hézagokat"), ha 1-nél hosszabb szabad hely még van. Heurisztikus megfontolások alapján azonban arra következtethetünk, hogy az általunk tárgyalt modell térkihasználás szempontjából kedvezőtlenebb, mint a valóság.

Hasonlítsuk össze ugyanis a 2. modellt egy olyan elhelyezési eljárással, amelynél megengedjük a hézagok kitöltését mielőtt a „szabad" helyek elfogynának. Minthogy a hézagokban a kisebb szakaszok inkább elférnek, a szabad helyeken elhelyezendő szakaszok eredeti eloszlása módosul, méghozzá úgy, hogy a hosszabb szakaszok nagyobb valószínűséggel fordulnak elő. Kísérleti tapasztalataink alapján viszont arra következtethetünk, hogy ez a módosítás a térkihasználást javítja.

A hézagokon is jobb lesz a térkihasználás; ti. akkor, amikor egy szakaszt nem tudunk egy hézagon elhelyezni, megvizsgáljuk annak elhelyezését egy nagyobb hézagon, ami által az egyes hézagokon az elhelyezett szakasz hosszának várható értéke növekszik. A 2. modell szerint történő autóparkolásnál a kitöltött térhányadra kapott eredményünket tehát úgy tekinthetjük, mint a gyakorlatban előforduló térkihasználás alsó becslését.

Természetesen felmerülhet az a kérdés, hogy miért nem lehet egy olyan modellt vizsgálni, amely pontosabban írja le az autóparkolást. Erre a következőket válaszoljuk:

1. A gyakorlatban a véletlen módon történő autóparkolást számos tényező befolyásolja (pl. terepviszonyok, pszichológiai hatás stb.), s ezek figyelembevétele a helyes matematikai modell megtalálását igen nehézzé teszi.

2. Ha találunk is olyan modellt, amely a valóságot jól közelíti, a matematikai tárgyalásban rendkívül nehéz problémák merülnek fel. Például, ha az autók a „hézagokra" is beállnak amikor még „szabad helyek" vannak, akkor az egyes szabad helyek kitöltése nem lesz független egymástól, s ez az egzakt matematikai tárgyalást áttekinthetetlenül bonyolulttá teszi.

7. §. A Monte Carlo-módszer alkalmazása

Sok olyan problémánál, ahol az egzakt matematikai tárgyalás nehézségekbe ütközik, sikerrel alkalmazható az ún. Monte Carlo-módszer[1]. Ez a módszer előnyösnek bizonyulhat abban az esetben is, amikor a kapott összefüggések numerikus módszerekkel történő kiszámítása túlságosan bonyolult és nincs szükség nagy pontosságra.

A véletlen térkitöltési problémáknál a Monte Carlo-módszer alkalmazása

[1] Lásd pl. [6], [7].

azt jelenti, hogy a modellt az előírt szabályoknak megfelelően, véletlen számtáblázat[1] felhasználásával, kísérletileg megvalósítjuk (szimulálás). Ezen az úton közelítőleg meghatároztuk $M(x)$, $N(x)$, $M^*(x)$ és $N^*(x)$ értékét $x=100$ esetén, midőn η az 1/2 és 1 értékeket 1/2—1/2 valószínűséggel veszi fel. Tapasztalataink alapján

$$\left|\frac{M(100)}{100}-\lim_{x\to+\infty}\frac{M(x)}{x}\right|$$

jelentősen kisebb, mint a kísérleti eredmények szórása, hacsak az elvégzett kísérletek száma nem túlságosan nagy — ugyanez mondható $N(x)$, $M^*(x)$ és $N^*(x)$-re is —, így gyakorlatilag jó közelítést nyújt, ha a kísérleteket 100 egységnyi intervallumon hajtjuk végre.

Alábbiakban feltüntetjük 10 kísérlet alapján kapott eredményeinket:

$$10^{-2}M(100)=0{,}661, \qquad \text{szórás}=0{,}014$$

$$10^{-2}N(100)=0{,}880, \qquad \text{szórás}=0{,}025$$

$$10^{-2}M^*(100)=0{,}805, \qquad \text{szórás}=0{,}009$$

$$10^{-2}N^*(100)=1{,}168, \qquad \text{szórás}=0{,}042.$$

A fenti eredményeket összehasonlítva a „sávos elhelyezéssel", ahol az elhelyezett szakaszok száma nyilván 100, a szakaszok átlagos összhossza pedig 75, láthatjuk, hogy a 2. modell alkalmazása a sávos elhelyezéssel szemben jobb eredményt nyújt. Eredményeink jó egyezést mutatnak (33)-mal, valamint a (17) és (18) közötti kapcsolattal (ti. $M(100)\approx 0{,}75\,N(100)$).

Megjegyezzük, hogy a Monte Carlo-módszer alkalmazása jelen esetben jóval egyszerűbb a numerikus integrálásnál, és igen egyszerűen programozható elektronikus számológépek számára.

IRODALOM

[1] RÉNYI A.: Egy egydimenziós véletlen térkitöltési problémáról, *A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézetének Közleményei* **3** (1958) 109—127.

[2] PALÁSTI, I.: On some random space filling problems, *A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézetének Közleményei* **5** (1960) A. sorozat, 353—360.

[3] BÁNKÖVI, G.: Evaluation of integrals by Monte Carlo methods based on the one-dimensional random space filling, *A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézetének Közleményei* **5** (1960) A. sorozat, 339—352.

[4] HARDY, G. H.: *Divergent Series* (Oxford 1949).

[1] Kísérleteinknél a [8]-ban található véletlen számok táblázatát használtuk.

[5] WIDDER, D. V.: *The Laplace transform* (Princeton, 1946).
[6] MEYER, H. A. (ed.): *Symposium on Monte Carlo methods* (New York, 1956).
[7] BROWN, G. W.: Monte Carlo-módszerek; BECKENBACH, E. F.: *Modern matematika mérnököknek*, (Budapest, 1960), 289—314.
[8] HALD, A.: Statistical Tables and Formulas Wiley, New York, 1952.

(Beérkezett: 1961. VII. 10.)

A Magyar Tudományos Akadémia
Matematikai Kutató Intézete

A TELJESEN REDUCIBILIS OPERÁTORMODULUSOKRÓL

Írta: SZÁSZ FERENC

1. §. Bevezetés

Az A asszociatív gyűrű felett vett M A-jobbmodulusoknak, továbbá M operátorendomorfizmusainak a fogalmát, valamint az ezekkel kapcsolatos alapvető tényeket ismertnek tételezzük fel. (Lásd pl. a [4], [7], [15] és [18] könyveket, illetve a [10] cikksorozatnak és a [17] cikknek az előkészítő részeit.)

A jelen dolgozatban három operátormodulus-elméleti probléma kerül tárgyalásra, éspedig ezek közül az első két probléma a teljesen reducibilis operátormodulusok teljes operátorendomorfizmus-gyűrűjével foglalkozik. A harmadik probléma pedig az Artin-féle féligegyszerű gyűrűknek a főjobbideálokra nézve minimum-feltételű egységelemes gyűrűk osztályán belül való operátormodulus-elméleti jellemzésére vonatkozik.

A dolgozat 2. §-ában megmutattuk azt, hogy egy M teljesen reducibilis A-jobbmodulus $E(M)$ teljes operátorendomorfizmus-gyűrűje mindig reguláris Neumann-féle értelemben*. Tudvalevőleg I. SCHUR egyik fontos lemmája szerint egy M egyszerű (irreducibilis) A-jobbmodulus $E(M)$ teljes operátorendomorfizmus-gyűrűje ferdetest. Továbbá KERTÉSZ A. megmutatta azt (vö. [10] III. részével, valamint a [11] és [12] dolgozatokkal), hogy ha M teljesen reducibilis A-jobbmodulus (azaz M tetszőlegesen sok egyszerű A-jobbmodulusnak a diszkrét direkt összege), akkor M operátorendomorfizmusainak az $E(M)$ teljes gyűrűjében a J Jacobson-féle radikálra $J=0$ teljesül, azaz $E(M)$ Jacobson-féle értelemben féligegyszerű. Minthogy minden Neumann-reguláris gyűrű Jacobson-féle értelemben féligegyszerű, és minthogy léteznek Jacobson-féle értelemben féligegyszerű, de nem Neumann-reguláris gyűrűk, ezért $E(M)$ Neumann-regularitásának igazolása valódi módon élesíti KERTÉSZ A. eredményét. Pontosabban még az is kimondható, bármely Neumann-reguláris gyűrűre nézve, hogy minden $\gamma \in E(M)$ elemhez létezik olyan $\delta \in E(M)$, hogy egyidejűleg érvényes $\gamma=\gamma\delta\gamma$ és $\delta=\delta\gamma\delta$.[1]

A dolgozat 3. §-ában megmutatjuk azt, hogy ha M olyan teljesen reducibilis és végtelen rangú A-jobbmodulus, amely *homogén* abban az értelem-

* Itt és a továbbiakban A mindig asszociatív gyűrűt jelent.

[1] Ha ugyanis $\gamma=\gamma\eta\gamma$ és $\delta=\eta\gamma\eta$, akkor $(\gamma\eta)^2=\gamma\eta$ és $(\eta\gamma)^2=\eta\gamma$ miatt nyilván $\gamma=\gamma\delta\gamma$ és $\delta=\delta\gamma\delta$.

ben, hogy M-nek bármely két egyszerű A-részmodulusa egymással A-izomorf, akkor az $E(M)$ teljes endomorfizmus-gyűrű összes kétoldali ideáljai számossági paraméterekkel kanonikus alakban előállíthatók. Ez hasonlít a bizonyos nagyon fontos típusú primitív gyűrűk összes kétoldali ideáljainak a leírását jelentő Jacobson-féle tárgyaláshoz. (Lásd [7], IV. fejezet végét.)

A 4. §-ban felhasznált alaptényeket illetően utalunk KERTÉSZ ANDOR [10] cikksorozatának függelékére és a szerző [16] cikkére, és ezekre támaszkodva operátormodulus-elméleti jellemzést adunk a féligegyszerű Artin-féle gyűrűkre a főjobbideálokra nézve minimum-feltételű egységelemes gyűrűk osztályán belül. A vizsgálat közben a Kertész-féle radikálnak és a teljes reducibilis operátormodulusoknak néhány alapvető tulajdonságára lesz szükség.

STEINFELD OTTÓnak ezúton mondok köszönetet hasznos megjegyzéseiért.

2. §. Az $E(M)$ endomorfizmus-gyűrű Neumann-regularitásának igazolása teljesen reducibilis jobbmodulusok esetében

Érvényes a következő:

1. TÉTEL. *Ha A asszociatív gyűrű és M teljesen reducibilis A-jobbmodulus, akkor az $E(M)$ teljes operátorendomorfizmus-gyűrű bármely γ eleméhez van olyan $\delta(\in E(M))$ elem, hogy $\gamma=\gamma\delta\gamma$ (és egyszersmind $\delta=\delta\gamma\delta$ is teljesül).*

A *bizonyítás* lényegileg a vektorterek standard vizsgálati módszereivel végezhető el, miközben meg fogjuk különböztetni az alábbi két esetet.

Legyen előbb M homogén, azaz M bármely két egyszerű A-részmodulusa legyen egymással A-izomorf. Többször hivatkozunk majd arra is, hogy tetszőleges teljesen reducibilis M A-jobbmodulusnak bármely A-részmodulusa M-ben direkt összeadandó [7], [10].

Legyen mármost $\gamma\in E(M)$ tetszőleges elem, amelyhez meg fogunk konstruálni egy olyan $\delta\in E(M)$ elemet, amelyre az 1. tétel állításai teljesülnek. Írjuk $E(M)$ elemeit az M baloperátoraiként. Minthogy ekkor a γM képtér nyilván A-részmodulus, kell léteznie M-ben olyan K A-részmodulusnak, hogy érvényes a következő direkt felbontás:

(1) $$M=\gamma M\oplus K.$$

Ha pedig L_γ jelenti az összes olyan $m\in M$ elem halmazát, amelyekre $\gamma m=0$ teljesül, akkor könnyen belátható az, hogy L_γ is A-részmodulus M-ben. Ezért létezik M-ben olyan további N A-részmodulus, hogy a következő direkt felbontás is érvényben lesz:

(2) $$M=L_\gamma\oplus N.$$

Minthogy N az M-nek A-részmodulusa, ezért N tudvalevőleg ([7]) szintén teljesen reducibilis A-jobbmodulus, amely felbomlik

$$N=\sum_{\alpha}\oplus\{n_\alpha\} \qquad (\alpha\in\Gamma)$$

alakban, ahol az összeg direkt, és mindegyik $\{n_\alpha\}$ egyszerű A-részmodulus M-ben. Ekkor (2) miatt γM nyilván generálható az összes γn_α $(\alpha\in\Gamma)$ elemmel. Ha most bizonyos $a_i\in A$ elemekkel fennáll egy

$$\gamma n_{\alpha_1}a_1+\cdots+\gamma n_{\alpha_k}a_k=0 \tag{3}$$

lineáris összefüggés A felett a γn_α elemekre vonatkozólag, akkor az

$$n^*=n_{\alpha_1}a_1+\cdots+n_{\alpha_k}a_k \qquad (\in N)$$

jelölés mellett (3) miatt nyilván $\gamma n^*=0$. Tehát $n^*\in L_\gamma$, ahonnan $m^*\in N$ és (2) miatt $n^*=0$. Minthogy pedig létezik az $\{n_{\alpha_1}\}\oplus\cdots\oplus\{n_{\alpha_k}\}$ direkt összeg, csak $n_{\alpha_1}a_1=\cdots=n_{\alpha_k}a_k=0$ esetén lehet $n^*=0$. Ezért $\gamma n_{\alpha_1}a_1=\cdots=\gamma n_{\alpha_k}a_k=0$, ami éppen azt jelenti, hogy érvényes az alábbi direkt felbontás:

$$\gamma M=\sum_{\alpha\in\Gamma}{}'\{\gamma n_\alpha\}.$$

Léteznek továbbá olyan k_β $(\beta\in\Gamma')$ egyszerű A-részmodulusok, hogy

$$K=\sum_{\beta\in\Gamma'}\oplus\{k_\beta\},$$

hiszen K, mint M egy A-részmodulusa, szintén teljesen reducibilis. Ennélfogva (1) miatt adódik:

$$M=\sum_{\alpha\in\Gamma}\oplus\{\gamma n_\alpha\}\oplus\sum_{\beta\in\Gamma'}\oplus\{k_\beta\}.$$

Ilyen módon elértük azt is, hogy γM-nek a

$$\gamma n_1,\ldots,\gamma n_\alpha,\ldots$$

A-bázisát kiterjesztettük M-nek egy

$$\gamma n_1,\ldots,\gamma n_\alpha,\ldots,\ k_1,\ldots,k_\beta,\ldots$$

A-bázisává. Tudvalevőleg $E(M)$ bármely η elemét egyértelműen meghatározza η-nak az M egy adott A-bázisára kifejtett hatása. Definiáljunk a feltételezett homogenitás alapján egy $\delta\in E(M)$ elemet az alábbi

$$\delta(\gamma n_\alpha)=n_\alpha,\quad \delta k_\beta=0\quad(\alpha\in\Gamma,\beta\in\Gamma') \tag{4}$$

összefüggésekkel.

Ekkor (4) miatt a $\vartheta=\gamma\delta\gamma-\gamma$ operátorendomorfizmusra nyilván $\vartheta n_\alpha=0$ $(\alpha\in\Gamma)$, tehát $\vartheta N=0$ teljesül, továbbá $\gamma L_\gamma=0$ miatt fennáll

$\vartheta L_\gamma = 0$ is. Ezért (2) miatt $\vartheta M = 0$, ahonnan $\vartheta = 0$ és $\gamma = \gamma\delta\gamma$ adódik. Tehát $E(M)$ valóban Neumann-reguláris gyűrű.[2]

Legyen most az M teljesen reducibilis A-jobbmodulus nem-homogén, azaz M-ben létezzék két olyan egyszerű A-részmodulus, amelyek egymással nem A-izomorfok. Ekkor M olyan H_α részmodulusainak (más szóval homogén komponenseinek ([7])) a direkt összege, hogy bármelyik H_α már homogén, azaz mindegyik H_α-ban már bármely két egyszerű A-részmodulus izomorf és $\alpha_1 \neq \alpha_2$ esetén H_{α_1}-nek egy egyszerű A-részmodulusa nem A-izomorf H_{α_2}-nek egy egyszerű A-részmodulusával. Jelölje mármost $E(H_\alpha)$ az említett H_α részmodulus operátorendomorfizmusainak a teljes gyűrűjét. Minthogy H_α homogén, ezért az előbb letárgyalt eset szerint $E(H_\alpha)$ Neumann-reguláris gyűrű. Továbbá $\alpha_1 \neq \alpha_2$ esetén nyilván

$$\operatorname{Hom}(H_{\alpha_1}, H_{\alpha_2}) = 0,$$

ahonnan következik, hogy $E(M)$ az összes előforduló (Neumann-reguláris) $E(H_\alpha)$ gyűrűnek a komplett direkt összege. (Lásd L. FUCHS [4] könyvét, különösen az 55. 1 tételt.)

De Neumann-reguláris gyűrűknek a komplett direkt összege ugyancsak Neumann-reguláris gyűrű, amiből folyik, hogy $E(M)$ Neumann-reguláris gyűrű az általános esetben is.

3. §. Az $E(M)$ gyűrű ideáljai homogén teljesen reducibilis M A-jobbmodulus esetén

Legyen M homogén teljesen reducibilis A-jobbmodulus. Egy N A-részmodulus rangján értjük az $\mathfrak{m}$ számosságot akkor, ha N pontosan $\mathfrak{m}$ számú egyszerű A-részmodulus direkt összege. Igazolható, hogy $\operatorname{rang} N = \mathfrak{m}$ az N részmodulusnak invariánsa, tehát nem függ N speciális direkt felbontásaitól. (Lásd pl. KERTÉSZ A. [10], [11] cikkeit.) Érvényes a következő

2. TÉTEL. *Legyen A asszociatív gyűrű, M teljesen reducibilis, végtelenrangú és homogén A-jobbmodulus és $E(M)$ az M összes operátorendomorfizmusainak a gyűrűje. Ekkor megadható $E(M)$ bármely nullától különböző I ideáljához olyan $\mathfrak{m}$ végtelen számosság, hogy I éppen az összes olyan $\gamma(\in E(M)$ endomorfizmus halmaza; amelyekre* $\operatorname{rang}(\gamma M) < \mathfrak{m}$.

MEGJEGYZÉS. $E(M)$ leírása $\operatorname{rang} M < \aleph_0$ esetén igen egyszerű, és megtalálható pl. VAN DER WAERDEN [18] könyvében is. Ebben a speciális eset-

[2] Legyen most $\vartheta' = \delta\gamma\delta - \delta$. Ekkor (4) miatt $\delta\gamma\delta\gamma n_\alpha = \delta\gamma n_\alpha$ és így $\vartheta'\gamma n_\alpha = 0$. Továbbá $\delta k_\beta = 0$ $(\beta \in \Gamma')$ miatt $\vartheta' K = 0$, ahonnan (1) alapján $\vartheta' M = 0$ és $\vartheta' = 0$ folyik. Tehát $\delta = \delta\gamma\delta$.

ben maga az $E(M)$ gyűrű is egyszerű (tehát ideálmentes) gyűrű, mert ekkor $E(M)$ izomorf egy ferdetest felett vett teljes mátrixgyűrűvel.

A *bizonyítás* újra több lépésben történik.

I. Mindenekelőtt azt igazoljuk, hogy ha $\gamma_1, \gamma_2 \in E(M)$, $\gamma_2 \in I$ és ha $\operatorname{rang}(\gamma_1 M) \leqq \operatorname{rang}(\gamma_2 M)$, ahol $I \neq 0$ az $E(M)$ kétoldali ideálja, akkor $\gamma_1 \in I$.

Legyen ugyanis N_i $(i=1,2)$ az összes olyan $m \in M$ halmaza, hogy $\gamma_i m = 0$. Minthogy N_i A-részmodulus M-ben, létezik olyan K_i A-részmodulus, hogy teljesül

$$M = N_i \oplus K_i \qquad (i=1,2).$$

Legyen most

$$K_i = \sum \oplus \{k_{\underset{(i)}{\alpha_j}}\} \qquad (i=1,2),$$

ahol az összeg direkt és $\{k_{\underset{(i)}{\alpha_j}}\}$ egyszerű A-részmodulus. Ekkor a K_i A-részmodulust a γ_i A-endomorfizmus izomorf módon képezi le a $\gamma_i M$ A-részmodulusra, ahonnan $\operatorname{rang}(\gamma_1 M) \leqq \operatorname{rang}(\gamma_2 M)$ miatt egyszersmind

$$\operatorname{rang} K_1 \leqq \operatorname{rang} K_2 \tag{5}$$

is adódik. Minthogy pedig M homogén operátormodulus, létezik (5) alapján olyan δ_1 endomorfizmus $(\in E(M))$, hogy

$$\delta_1 k_{\underset{(1)}{\alpha_1}} = k_{\underset{(2)}{\alpha_1'}} \quad \text{és} \quad \delta_1 N_1 = 0, \tag{6}$$

ahol α_1' bizonyos egyértelműen meghatározott α_2 indexet jelent Γ_2-ből, és $\alpha_1 \neq \beta_1$ esetén $\alpha_1' \neq \beta_1'$ $(\alpha_1, \beta_1 \in \Gamma_1)$. Ezért nyilván létezik a $\delta_1 K_1$ A-részmoduluson δ_1-nek a δ_1^{-1} inverze, amelyre később szükségünk lesz.

Ha fennállana a $\gamma_2 \delta_1 k_{\underset{(1)}{\alpha_1}}$ $(\alpha_1 \in \Gamma_1)$ elemekre A felett bizonyos $a_1, a_2, \ldots$ $\ldots, a_n (\in A)$ elemekkel egy

$$\sum_{j=1}^{n} \gamma_2 \delta_1 k_{\underset{(1)}{\alpha_j}} a_j = 0 \qquad (a_j \in A)$$

lineáris összefüggés, akkor a

$$k^* = \sum_{j=1}^{n} \delta_1 k_{\underset{(1)}{\alpha_j}} a_j \ (\in K_2)$$

jelölés mellett $\gamma_2 k^* = 0$ teljesül, ahonnan $k^* \in N_2$. Ezért $k^* \in N_2 \cap K_2$ miatt $k^* = 0$. Minthogy $k^* \in \delta_1 K_1$ és $\delta_1 K_1$ részmoduluson létezik δ_1^{-1}, ezért

$$0 = \delta_1^{-1} k^* = \sum_{j=1}^{n} k_{\underset{(1)}{\alpha_j}} a_j = 0$$

érvényes. De a $\sum_j \oplus \{k_{\underset{(i)}{\alpha_j}}\}$ direkt összeg létezik, tehát $k_{\underset{(1)}{\alpha_j}} a_j = 0$ $(j=1,2,\ldots,n)$. Innen tüstént adódik, hogy $\gamma_2 \delta_1 k_{\underset{(1)}{\alpha_j}} a_j = 0$, ami pedig pontosan azt mutatja, hogy $\mathring{A}$ felett a $\gamma_2\delta_1 \underset{(1)}{k_\alpha}$ elemek $(\alpha \in \Gamma_1)$ lineárisan függetlenek. Minthogy M homogén, létezik olyan $\delta_2(\in E(M))$ endomorfizmus, hogy

$$(7) \qquad \delta_2(\gamma_2\delta_1 \underset{(1)}{k_\alpha}) = \gamma_1 \underset{(1)}{k_\alpha} \qquad (\alpha \in \Gamma_1).$$

Legyen mármost $\gamma_0 = \delta_2\gamma_2\delta_1 - \gamma_1$. Ekkor $\delta_1 N_1 = 0$ és $\gamma_1 N_1 = 0$ miatt $\gamma_0 N_1 = 0$, továbbá (7) miatt $\gamma_0 \underset{(1)}{k_\alpha} = 0$ $(\alpha \in \Gamma_1)$, tehát $\gamma_0 K_1 = 0$. Ennélfogva $M = K_1 \oplus N_1$ miatt $\gamma_0 M = 0$, tehát $\gamma_0 = 0$. Ez pedig azt jelenti, hogy $\gamma_1 = \delta_2\gamma_2\delta_1 \in I$.

II. Most megmutatjuk, hogy $\operatorname{rang} M \geqq \aleph_0$ esetén $E(M)$ bármely $I \neq 0$ ideálja tartalmazza az összes olyan γ endomorfizmust, amelyekre $\operatorname{rang}(\gamma M) < \aleph_0$ teljesül. Ez utóbbi γ A-endomorfizmusok egy V ideált alkotnak.

Legyen ugyanis $M = \sum_\alpha \oplus \{m_\alpha\}$ $(\alpha \in \Gamma)$, ahol az összeg direkt, és mindegyik $\{m_\alpha\}$ egyszerű A-részmodulus. Legyen továbbá $\varepsilon_\beta \in E(M)$ olyan endomorfizmus, amelyet az alábbi összefüggésekkel értelmezünk:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_\beta m_\alpha &= \delta_{\alpha\beta} m_\beta \\ \varepsilon_\beta m_\alpha a &= \delta_{\alpha\beta} m_\beta a \end{aligned}\right\} (\alpha, \beta \in \Gamma),$$

ahol $\delta_{\alpha\beta}$ a Kronecker-féle szimbólum. Világos, hogy $\operatorname{rang}(\varepsilon_\alpha M) = \operatorname{rang}\{m_\alpha\} = 1$, és így I. miatt $\varepsilon_\alpha \in I (\neq 0)$. Ha most $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ tetszőleges és egymástól különböző indexek Γ-ból, akkor $\varepsilon_{\alpha_1} + \cdots + \varepsilon_{\alpha_n} \in I$ mutatja, hogy az I ideálban tetszőlegesen nagy n természetes számhoz létezik olyan γ_n endomorfizmus, hogy

$$\operatorname{rang} \gamma_n M = n.$$

Jelölje V az $E(M)$ gyűrű összes olyan γ elemének a halmazát, amelyekre $\operatorname{rang} \gamma M < \aleph_0$. Ekkor V nyilván ideál $E(M)$-ben, továbbá a legutóbbi megállapítás és I. alapján szükségképpen $V \subseteq I$ $(\neq 0)$ teljesül. Ezzel valóban igazoltuk a II. alatti állítást.

III. Most megmutatjuk azt, hogy az I $(\neq 0)$ ideálhoz létezik olyan $\mathfrak{m}$ végtelen számosság, hogy I éppen az összes olyan γ endomorfizmusból áll, amelyekre:

$$\operatorname{rang}(\gamma M) < \mathfrak{m}.$$

Legyen ugyanis $\mathfrak{m}$ a legkisebb olyan számosság, amelyre teljesül $\operatorname{rang}(\gamma M) < \mathfrak{m}$ bármely $\gamma \in I$ endomorfizmus mellett. Láttuk II.-nél azt, hogy $V \subseteq I$. Ezért szükségképpen $\mathfrak{m} \geqq \aleph_0$. Ha $\operatorname{rang} M < \mathfrak{m}$, akkor $\mathfrak{m}$ definíciója alapján evidens módon belátható, hogy létezik olyan $\gamma \in I$, hogy $\operatorname{rang}(\gamma M) = \operatorname{rang} M$.

Ekkor azonban I. miatt $I = E(M)$. A továbbiakban feltesszük, hogy $I \neq E(M)$ (és természetesen azt is, hogy $I \neq 0$, tehát hogy $0 \neq V \subseteq I$.).

Ha $\mathfrak{m} = \aleph_0$, akkor $I \subseteq V$. Minthogy pedig II. szerint $V \subseteq I$, ezért ekkor $I = V$.

Legyen ezután $\mathfrak{m} > \aleph_0$ és $\mathfrak{m} \leqq \operatorname{rang} M$. Ha továbbá η tetszőleges olyan endomorfizmus az $E(M)$ gyűrűből, hogy $\operatorname{rang}(\eta M) < \mathfrak{m}$ teljesül, akkor $\mathfrak{m}$ definíciója alapján indirekt módon belátható olyan $\vartheta \in I$ endomorfizmus létezése, amelyre $\operatorname{rang}(\vartheta M) \geqq \operatorname{rang}(\eta M)$ érvényes. Ekkor pedig I. alapján fennáll $\eta \in I$, amivel a 2. tételt igazoltuk.[3]

4. §. Az Artin-féle féligegyszerű gyűrűk egy jellemzése az operátormodulusok Kertész-féle radikáljával a főjobbideálokra nézve minimum-feltételű egységelemes gyűrűk osztályában

Tudvalevőleg Artin-félének nevezik az összes jobbideáljára nézve minimum-feltételű gyűrűket. Ennél a gyűrűosztálynál valódi módon bővebb a főjobbideálokra nézve minimum-feltételű gyűrűknek, azaz röviden az MHR-gyűrűknek az osztálya [17].

Ebben a §-ban gyűrűk radikálján és féligegyszerűségén a Jacobson-félét értjük [7]. Ha A féligegyszerű MHR-gyűrű és M olyan A-jobbmodulus, hogy $MA = M$ érvényes, akkor M teljesen reducibilis A-jobbmodulus [17]. Minthogy ekkor az A gyűrűre [17] miatt $A^2 = A$ teljesül, így ismét látható az a tény, hogy bármely A féligegyszerű MHR-gyűrű, mint önmagának A-jobbmodulusa, teljesen reducibilis operátormodulus. Speciálisan, ha A Artin-féle féligegyszerű gyűrű, akkor A mint önmagának A-jobbmodulusa, végesrangú teljesen reducibilis modulus.

Mármost a 4. § címében említett jellemzéshez emlékeztetünk egy M egészen tetszőleges A asszociatív gyűrű felett vett tetszőleges A-jobbmodulus $R_A(M)$ Kertész-féle radikáljának a fogalmára. ([10], III. rész, függelék.) M Kertész-féle $R_A(M)$ radikálja az összes olyan $m (\in M)$ elem halmaza, amelyekre az mA részmodulus része M minden maximális A-részmodulusának, míg abban az esetben, ha M-ben nem léteznek maximális (valódi) részmodulusok, akkor $R_A(M) = M$. A részleteket illetően lásd a [10] és [16] cikkeket.

Kiemelendő az $R_A(M)$ Kertész-féle modulusradikálnak az a tulajdonsága, hogy olyan M teljesen reducibilis A-jobbmodulusokban, amelyekre

[3] Ezek szerint $E(M)$ ideálhálója a 2. tétel feltételei mellett lánc. Elegendő nagy végtelen $\mathfrak{m}$ számossághoz tehát megadhatók olyan $E(M)$ általánosabb típusú egységelemes Neumann-reguláris gyűrűk, amelyekben mind a Brown—McCoy-féle radikál, mind pedig a Fuchs-féle radikál zérustól különbözik [1], [5], és amelyekben az utóbbi radikáltípus különbözik bizonyos általánosításaitól is. (Pl. minden $\mathfrak{m} \geqq \aleph_1$ esetén.) Vö. még a szerző cikkével: *Archiv der Math.*, 12 (1961) 282—289.

fennáll $MA = M$, szükségképpen $R_A(M) = 0$ teljesül. Ezért bármely A féligegyszerű MHR-gyűrűnek, mint önmaga A-jobbmodulusának a Kertész-féle modulusradikálja 0.

Ezekkel kapcsolatban megemlítjük a következő problémát, amely KERTÉSZ ANDORtól származik:

Meghatározandók az összes olyan A asszociatív gyűrűk, amelyeknek megvan az a T tulajdonságuk, hogy bármely M A-jobbmodulusnak (az előbb definiált) $R_A(M)$ modulusradikáljára $R_A(M)\cdot A = 0$ teljesül!

Ennek az érdekes problémának a teljes megoldása mindeddig — tudtommal — még nincs elintézve. A megoldás felé haladva azonban kimondható az alábbi

3. TÉTEL. *Egy A egységelemes MHR-gyűrű akkor és csak akkor T-tulajdonságú, ha A Artin-féle féligegyszerű gyűrű.*

Bizonyítás.

Legyen előbb A olyan egységelemes MHR-gyűrű, amely egyszersmind T-tulajdonságú is. Minthogy ekkor bármely M A-jobbmodulus esetén $R_A(M)\cdot A = 0$, ezért speciálisan $R_A(A)\cdot A = 0$, ahol az A gyűrű önmaga A-jobbmodulusának tekinthető. Ámde az A gyűrűben létezik egységelem, amelyet az 1 szimbólummal jelölünk. Ezért [10] szerint A-ban az $R_A(A)$ modulusradikál éppen az A gyűrű $J(A)$ Jacobson-féle radikálja. Ennélfogva $J(A)\cdot A = 0$, és minthogy $1 \in A$, szükségképpen $J(A) = 0$. Tehát A féligegyszerű MHR-gyűrű, amely egységelemes. Ezért a [17] cikk alapján A szükségképpen Artin-féle féligegyszerű gyűrű.

Legyen most A féligegyszerű Artin-féle gyűrű. (Ekkor A nyilván még inkább egységelemes MHR-gyűrű is.) Legyen továbbá M tetszőleges A-jobbmodulus. M felbomlik a Goldmann—Kertész-féle kritériumok [6], [10] alapján $M = M_0 \oplus M_1$ direkt összegre, ahol $M_0\cdot A = 0$ és $m' \in M_1$ esetén $m'\cdot 1 = m'(1 \in A)$, továbbá M_1 teljesen reducibilis A-jobbmodulus. Ekkor még inkább teljesül $M_1 A = M_1$ és [10] függeléke alapján $R_A(M_1) = 0$, továbbá $R_A(M) = R_A(M_1) = 0$, amivel a 3. tétel igazolást nyert.

IRODALOM

[1] B. BROWN—N. H. MCCOY, Radicals and subdirect sums, *Amer. Jour. Math.* **69** (1947) 46—58.

[2] C. J. EVERETT, Vector spaces over rings, *Bull. Amer. Math. Soc.* **48** (1942) 312—316.

[3] C. J. EVERETT, The basis theorem for vector spaces over rings, *Bull. Amer. Math. Soc.* **51** (1945) 531—532.

[4] L. FUCHS, *Abelian groups*, (Budapest, 1958).

[5] L. FUCHS, On a new type of radical, *Acta Sci. Math.* **16** (1955) 43—53.

[6] O. GOLDMAN, A characterization of semi-simple rings with the descending chain condition, *Bull. Amer. Math. Soc.* **52** (1946) 1021—1027.
[7] N. JACOBSON, *Structure of rings*, (Providence, 1956).
[8] R. E. JOHNSON—F. KIOKEMEISTER, The endomorphisms of the total operator domain of an infinite modul, *Trans. Amer. Math. Soc.* **62** (1947) 404—430.
[9] I. KAPLANSKY, Infinite abelian groups (Ann Arbor, 1954).
[10] KERTÉSZ A., Vizsgálatok az operátormodulusok elméletében, I., *MTA III. Oszt. Közl.* **8** (1958) 411—436; II., *MTA III. Oszt. Közl.* **9** (1959) 15—50; III., *MTA III. Oszt. Közl.* **9** (1959) 105—120.
[11] A. KERTÉSZ, Beiträge zur Theorie der Operatormoduln, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **8** (1957) 235—257.
[12] A. KERTÉSZ, On radical-free rings of endomorphisms, *Acta Univ. Debrecen de Ludovico Kossuth Nominatae* **5** (1958) 159—161.
[13] N. H. MCCOY, Subdirect sums of rings, *Bull. Amer. Math. Soc.* **53** (1947) 856—877.
[14] J. VON NEUMANN, On regular rings, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **22** (1936) 707—713.
[15] L. RÉDEI, *Algebra*, I., (Leipzig, 1959).
[16] SZÁSZ F., Az operátormodulusok Kertész-féle radikáljáról, *MTA III. Oszt. Közl.* **10** (1960) 36—38.
[17] SZÁSZ F., A főjobbideálokra nézve minimumfeltételű gyűrűk, *MTA III. Oszt. Közl.* **11** (1961) 135—177.
[18] B. L. VAN DER WAERDEN, Algebra II. (Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1959).

(Beérkezett: 1961. VI. 5.)

A Magyar Tudományos Akadémia
Matematikai Kutató Intézete

A KÜLFÖLDI SZAKIRODALOMBÓL

A SHANNON-FÉLE ALAPTÉTEL ÁLTALÁNOS MEGFOGALMAZÁSA AZ INFORMÁCIÓELMÉLETBEN*

Írta: R. L. DOBRUSIN

Tartalom

1. §. Bevezetés

1. 1. Történeti és bevezető jellegű megjegyzések

Az információelmélet alapfogalmait SHANNON és WEAVER tartalmas könyve [30] foglalta össze elsőnek; ugyanebben közölték először — a fizikában elfogadott szabatossággal — az információelmélet alaptételét. Ez után jelentek meg MAC-MILLAN [15] és HINCSIN [25], [26] munkái, amelyekben megadták Shannon tételének szabatos interpretációját diszkrét stacionárius forrás és csatorna esetére, azon követelmény mellett, hogy a felveendő közlemény pontosan egybeessék a leadandóval. Vizsgálataiban HINCSIN lényegesen támaszkodott FEINSTEIN [22] munkájának gondolataira. HINCSIN eredményeit továbbfejlesztette ROZENBLAT-ROT [20], [21] és részben PEREZ [17], [18], [19], alkalmazva azokat olyan folyamatokra, amelyeknél a lehetséges állapotok folytonos halmazt képeznek. ROZENBLAT-ROT rámutatott arra is, hogyan lehetne kiterjeszteni az elméletet nem-stacionárius folyamatokra. Érdekes eredmények találhatók WOLFOWITZ [2], [3], valamint BLACKWELL, BREIMAN és THOMASIAN [31] nemrég megjelent dolgozataiban is.

KOLMOGOROV [11] felvetette annak a lehetőségét, hogyan lehetne egészen általánosan és matematikailag szigorúan tárgyalni Shannon tételét. Jelen munkának az a célja, hogy Kolmogorov interpretációjában, eléggé általános feltételek mellett, bebizonyítsa Shannon tételét. Ezeknek az általános feltételeknek

* Uszpehi Matematicseszkih Nauk XIV (1959), vip. 6 (90), 3—104. — Jelen közlemény az eredeti tanulmány 1. §-ának a fordítását tartalmazza.

a megfogalmazásában felhasználásra kerül az információ-sűrűség fogalma, amelyet a matematikai irodalomba GELFAND és JAGLOM ([4] és [5]), valamint PEREZ [17] vezetett be. A későbbiekben állandóan használni fogjuk az információ-stabilitás általános fogalmát is; ez néhány gondolat kapcsán született meg, amelyet az első két említett szerző mondott ki speciális esetekben. Mindjárt itt megjegyezzük, hogy feltételeink ellenőrzése konkrét folyamatosztályok esetében nem triviális, és alapjában véve még meg sem oldott feladat.

A jelen cikkben a szerző arra törekedett, hogy a tárgyalás a legnagyobb reális általánosságban folyjék, emellett a bizonyítások matematikai szigorúsággal történjenek. Ezért — bár nem tételezzük fel, hogy olvasóinknak vannak előzetes ismeretei az információelméletből (mértékelméletből azonban komolyabb előismereteket tételezünk fel: például annyit, amennyi a [24] könyvben található) — cikkünket nem ajánljuk olyan olvasónak, aki most ismerkedik meg a témával, minthogy ilyen olvasó számára tárgyalásmódunk rendkívül fáradságosnak és absztraktnak tűnne. A kezdő számára alkalmas cikkek és könyvek közül [25], [7], [30], [3]-on kívül különösen kiemeljük KOLMOGOROV előadását [11], amelynek gondolatait a jelen cikkben fejtjük ki részletesen, valamint FEINSTEIN kitűnően megírt könyvét [23]. Munkánkról egy rövid előzetes közlemény megjelent már 1958-ban [32], alapvető eredményeit a [33] megjegyzésben fogalmaztuk meg részletesebben.

1. 2. Információ.

Emlékeztetünk néhány általános definícióra, hogy pontosan megfogalmazhassuk az általunk használt terminológiát. (X, S_X) *mérhető térnek* fogjuk nevezni az X halmaz és az X halmaz részhalmazaiból alkotott S_X σ-algebra együttesét. Néha — amennyiben ez nem vezethet félreértésre — a mérhető teret egyetlen X betűvel fogjuk jelölni. $(\Omega, \mathfrak{B}, P)$ *valószínűségi térnek* fogjuk nevezni az $(\Omega, \mathfrak{B})$ mérhető tér és a $\mathfrak{B}$ σ-algebrán megadott $P\{\ \}$ valószínűségi mérték együttesét. *Az X térbe tartozó értékekkel bíró valószínűségi változónak* fogunk nevezni egy $\xi(\omega)$, $\omega \in \Omega$ mérhető függvényt, melynek értékei az X térbe tartoznak. A ξ valószínűségi változó $p_\xi(\cdot)$ *valószínűség-eloszlásának* azt az (X, S_X)-en definiált $p_\xi(\cdot)$ valószínűségi mértéket fogjuk nevezni, amelyet a

$$p_\xi(A) = P\{\xi(\omega) \in A\}, \quad A \in S_X \tag{1.2.1}$$

egyenlőség definiál. Az X mérhető tér *felbontásának* fogjuk nevezni közös elemmel nem bíró oly halmazok tetszőleges véges rendszerét, amelyek S_X-be tartoznak és összegük kiadja az egész X teret.

Ha (X, S_X) és (Y, S_Y) két mérhető tér, *e terek szorzatának* fogjuk nevezni az $(X\times Y, S_X\times S_Y)$ mérhető teret, amelyet az (x, y), $x \in S_X$, $y \in S_Y$ párok

$X \times Y$ halmaza és azon $S_X \times S_Y$ σ-algebra alkot, amelyet az $x \in A$, $y \in B$ feltételek által meghatározott (x, y) párok $A \times B$ halmazai generálnak, ahol $A \in S_X$, $B \in S_Y$. A ξ és η *valószínűségi változókból álló párt* kézenfekvően interpretálhatjuk, mint egyetlen valószínűségi változót, melynek értékei az $X \times Y$ szorzat-térbe tartoznak. Ezt az új valószínűségi változót (ξ, η)-val fogjuk jelölni. E pár $p_{(\xi, \eta)}(\cdot)$ eloszlását, amely mérték az $X \times Y$-on, a *ξ és η változók együttes eloszlásának* fogjuk nevezni és — a zárójel elhagyásával — $p_{\xi\eta}(\cdot)$-val fogjuk jelölni. Ha az X, illetve Y mérhető térben adva van a $p_1(\cdot)$, illetve $p_2(\cdot)$ valószínűségi mérték, *szorzatuknak* fogjuk nevezni azt az $S_X \times S_Y$-on értelmezett $p_1 \times p_2(\cdot)$ mértéket, amelyre fennáll, hogy egy $A \times B$ típusú halmazra, ahol $A \in S_X$, $B \in S_Y$,

$$p_1 \times p_2(A \times B) = p_1(A) p_2(B), \tag{1.2.2}$$

az $S_X \times S_Y$-ba tartozó egyéb halmazokra pedig a szokásos módon van kiterjesztve (e kiterjesztés egzisztenciájának és unicitásának bizonyítását l. [24], 35. §-ban). Ha a ξ és η valószínűségi változók együttes eloszlása $p_{\xi\eta}(\cdot)$ egybeesik a $p_\xi \times p_\eta$ szorzattal, a ξ és η változókat *függetleneknek* nevezzük.

Legyen adva mármost két valószínűségi változó, ξ és η, amelyek értékei az (X, S_X), ill. (Y, S_Y) mérhető terekbe tartoznak. E valószínűségi változók *információjának* — [30][1] és [4]-gyel egyetértésben — a következő számot nevezzük[2]

$$\begin{aligned} I(\xi, \eta) &= \sup \sum_{i,j} P(\xi \in A_i, \eta \in B_j) \log \frac{P\{\xi \in A_i, \eta \in B_j\}}{P\{\xi \in A_i\} P\{\eta \in B_j\}} = \\ &= \sup \sum_{i,j} p_{\xi\eta}(A_i \times B_j) \log \frac{p_{\xi\eta}(A_i \times B_j)}{p_\xi(A_i) p_\eta(B_j)}, \end{aligned} \tag{1.2.3}$$

ahol a felső határ az X tér összes lehetséges $\{A_i\}$ felbontásai és az Y tér összes lehetséges $\{B_j\}$ felbontásai mellett veendő. Az $I(\xi, \xi)$ számot a ξ valószínűségi változó *entrópiájának* nevezik.

Könnyen bebizonyítható (l. a 2. 1. pontot), hogy az információ nemnegatív, felveheti azonban a $+\infty$ értéket is. Tekintettel arra, hogy mindeddig nem közölték az információ alaptulajdonságainak teljes összefoglalását, a 2. §-ban elmondjuk a megfelelő tételeket és bizonyításokat.

Itt utalunk a következő tényre, amely közvetlen folyománya az (1.2.3) definíciónak. Ha a ξ és η változók függetlenek, akkor

$$I(\xi, \eta) = 0. \tag{1.2.4}$$

[1] Az orosz fordításban ez a definíció nem szerepel.

[2] Itt és a továbbiakban 2-es alapú logaritmus szerepel. Mindenütt úgy vesszük, hogy $0 \log \frac{0}{a} = 0$, ha $a \geq 0$, $a \log \frac{a}{0} = +\infty$, ha $a > 0$ és hogy $+\infty + a = +\infty$.

Most megfogalmazunk egy, a továbbiak szempontjából igen fontos eredményt, amelyet egymástól függetlenül nyert GELFAND és JAGLOM [5], [4], illetve PEREZ [17]. Tekintsünk az $(X\times Y, S_X\times S_Y)$ mérhető térben két valószínűségi mértéket: a $p_{\xi\eta}(\cdot)$ együttes eloszlást és a $p_\xi\times p_\eta(\cdot)$ eloszlás-szorzatot. Ismeretes, hogy fennáll a következő alternatíva (l. [24], 30—31. §):

I. *A nem abszolút folytonosság esete.* Ebben az esetben létezik olyan $B\in S_X\times S_Y$ halmaz, hogy $p_\xi\times p_\eta(B)=0$, de $p_{\xi\eta}(B)>0$.

II. *Az abszolút folytonosság esete.* Ebben az esetben tetszőleges olyan $B\in S_X\times S_Y$-ra, amelyre $p_\xi\times p_\eta(B)=0$, $p_{\xi\eta}(B)=0$ is fennáll. Ekkor (Radon—Nikodym tétel) létezik olyan $a_{\xi\eta}(x, y)$ $((x,y)\in X\times Y)$ véges, nem-negatív értékeket felvevő és a $S_X\times S_Y$ σ-algebrára vonatkozólag mérhető függvény, hogy tetszőleges $B\in S_X\times S_Y$-ra a $p_{\xi\eta}(B)$ valószínűséget a

$$p_{\xi\eta}(B)=\int_B a_{\xi\eta}(x,y)p_\xi\times p_\eta(dx,dy) \tag{1.2.5}$$

B-n vett és $p_\xi\times p_\eta(\cdot)$ mérték szerinti integrál adja meg. Az $a_{\xi\eta}(x, y)$ mennyiséget a $p_{\xi\eta}(\cdot)$ mérték $p_\xi\times p_\eta(\cdot)$ mértékre vonatkoztatott *sűrűségének* fogjuk nevezni és megállapodásszerűen

$$a_{\xi\eta}(.,.)=\frac{dp_{\xi\eta}(\cdot)}{dp_\xi\times p_\eta(\cdot)} \tag{1.2.5'}$$

-vel fogjuk jelölni. Az (I) esetben az információ végtelen, a (II) esetben azonban az információt az

$$I(\xi,\eta)=\int_{X\times Y}\log a_{\xi\eta}(x,y)p_{\xi\eta}(dx,dy)=\int_{X\times Y}a_{\xi\eta}(x,y)\log a_{\xi\eta}(x,y)p_\xi\times p_\eta(dx,dy) \tag{1.2.6}$$

képlet szolgáltatja; az (1.2.6)-beli integrálok oly értelemben léteznek, hogy az integrandusok negatív részeinek integráljai konvergensek. Az (1.2.6) képlet levezetése (ezt a képletet az *információ integrálképletének* fogjuk nevezni) a 2.4 pontban található meg. A fent mondottaknak megfelelően az

$$i_{\xi\eta}(x,y)=\log a_{\xi\eta}(x,y) \tag{1.2.7}$$

függvényt a ξ és η valószínűségi változók *információ-sűrűségének* fogjuk nevezni. Mármost az (1.2.6) összefüggés a következő alakra írható át:

$$I(\xi,\eta)=Mi_{\xi\eta}\{\xi,\eta\}.\text{[1]} \tag{1.2.8}$$

Ha $p_{\xi\eta}$ nem-abszolút folytonos $p_\xi\times p_\eta$-ra vonatkozólag, akkor azt fogjuk mondani, hogy a ξ és η valószínűségi változóknak nincs információ-sűrűsége.

[1] Itt és a továbbiakban $M\{\ \}$ várható értéket jelöl.

A legegyszerűbb esetekben megadhatók $i_{\xi\eta}(x, y)$-ra oly kifejezések is, amelyek nem alapulnak a Radon—Nikodym tételen. Például, tegyük fel, hogy S_X, ill. S_Y-on adva van a $\mu_X\{\cdot\}$, ill. $\mu_Y\{\cdot\}$ σ-véges mérték. Ha X és Y végesdimenziós euklideszi terek, akkor $\mu_X\{\cdot\}$, ill. $\mu_Y\{\cdot\}$-ként kézenfekvő közönséges Lebesgue-mértékeket venni. Tegyük fel továbbá, hogy a ξ és η változók egydimenziós $p_\xi(\cdot)$ és $p_\eta(\cdot)$ eloszlásainak, valamint ezen változók $p_{\xi\eta}(\cdot)$ együttes eloszlásának van sűrűsége, azaz léteznek olyan, az S_X, S_Y, illetve $S_X \times S_Y$-ra vonatkozólag mérhető $\pi_\xi(x)$, $\pi_\eta(y)$, ill. $\pi_{\xi\eta}(x, y)$ függvények, amelyekre

$$\text{(1.2.9)} \qquad \begin{cases} p_\xi(A) = \int_A \pi_\xi(x)\mu_X\{dx\}, & A \in S_X, \\ p_\eta(B) = \int_B \pi_\eta(y)\mu_Y\{dy\}, & B \in S_Y, \\ p_{\xi\eta}(C) = \int_C \pi_{\xi\eta}(x, y)\mu_X \times \mu_Y\{dx, dy\}, & C \in S_X \times S_Y. \end{cases}$$

Ekkor könnyen belátható, hogy az $i_{\xi\eta}(x, y)$ információ-sűrűségre $X \times Y$-on (a $p_\xi \times p_\eta(\cdot)$ eloszlás szerint) majdnem mindenütt fennáll

$$\text{(1.2.10)} \qquad i_{\xi\eta}(x, y) = \log \frac{\pi_{\xi\eta}(x, y)}{\pi_\xi(x)\pi_\eta(y)}.$$

Ez például [24] 32. §-a 1. tételéből is következik. Analóg módon, ha X a megszámlálhatóan sok $E_1, E_2, \ldots$ pontból áll, Y pedig a megszámlálhatóan sok $\bar{E}_1, \bar{E}_2, \ldots,$ pontból, S_X, illetve S_Y pedig az X, illetve Y halmazok összes részhalmazainak a halmaza, akkor kézenfekvő a $p_\xi, p_\eta, p_{\xi\eta}$ eloszlásokat a következő valószínűségek megválasztásával megadni:

$$p_\xi^{(i)} = p_\xi(E_i), \quad p_\eta^{(j)} = p_\eta(\bar{E}_j), \quad p_{\xi\eta}^{(i,j)} = p_{\xi\eta}(E_i, \bar{E}_j).$$

Ekkor

$$\text{(1.2.11)} \qquad i_{\xi\eta}(E_i, \bar{E}_j) = \log \frac{p_{\xi\eta}^{(i,j)}}{p_\xi^{(i)} p_\eta^{(j)}},$$

és az (1.2.6) definíció Shannon jól ismert

$$\text{(1.2.12)} \qquad I(\xi, \eta) = \sum_{i,j} p_{\xi\eta}^{(i,j)} \log \frac{p_{\xi\eta}^{(i,j)}}{p_\xi^{(i)} p_\eta^{(j)}}$$

képletére redukálódik.

Feltételes valószínűségeket és feltételes sűrűségeket használva, az (1.2.10) és (1.2.11) információ-sűrűség kifejezések így írhatók:

$$i_{\xi\eta}(x, y) = \log \frac{\pi_{\xi/\eta}(x, y)}{\pi_\xi(x)}, \quad i_{\xi\eta}(E_i, \bar{E}_j) = \log \frac{p_{\xi/\eta}(E_i/\bar{E}_j)}{p_\xi(E_i)}.$$

Ebben az alakban Goldman használta az információ-sűrűséget [7]; s ennek segítségével definiálta az információ fogalmát.

1.3. Információ-stabilitás

Az információelméletnek lényegénél fogva aszimptotikus jellege van. Éppen ezért a következőkben a változó t indextől függő (ξ^t, η^t) valószínűségi változó-pár aszimptotikus tulajdonságait kell vizsgálnunk. Jelen munka minden megállapítása igaz lesz tetszőleges természetű t indexekre és tetszőleges, az analízisben használt határátmeneti mód mellett, amelynél a határértékek megszokott tulajdonságai megvannak. Mindazonáltal a terminológia egyszerűsége kedvéért fel fogjuk tenni, hogy a t index egész értékeket vesz csak fel, vagyis a (ξ^t, η^t) változó-párok sorozataival fogunk dolgozni.

Így tehát tekintsük valószínűségi változó-párok valamely $(\xi^1, \eta^1), \ldots, (\xi^t, \eta^t), \ldots$ sorozatát. Legyenek a (ξ^t, η^t) változók az $(\Omega^t, \mathfrak{B}^t, P^t)$ valószínűségi téren definiálva, s felvett értékeik tartozzanak az (X^t, S_X^t), (Y^t, S_Y^t) mérhető terekbe. Egyszerűség kedvéért a (ξ^t, η^t) párral kapcsolatos bármely jellemzőt stb. ugyancsak t felső indexszel fogunk ellátni, emellett tetszőleges, egy egységet képező kifejezésben ezt az indexet csak egyszer fogjuk feltüntetni. Például

$$p_{\xi^t\eta^t}(A^t) = p^t_{\xi\eta}(A),$$

$$I(\xi^t, \eta^t) = I^t(\xi, \eta),$$

$$i_{\xi^t\eta^t}(x^t, y^t) = i^t_{\xi\eta}(x, y),$$

é. í. t. Egy olyan (ξ^t, η^t) változó-párokból álló sorozatot, amelyek $i^t_{\xi\eta}(x, y)$ információ-sűrűséggel rendelkeznek, *információ-stabilisnek* fogunk nevezni, ha minden elég nagy t érték esetén $0 < I^t(\xi, \eta) < \infty$ és ha a kérdéses valószínűségi változó-sorozatra fennáll:

$$\frac{i^t_{\xi\eta}(\xi, \eta)}{I^t(\xi, \eta)} \to 1, \tag{1.3.1}$$

ha $t \to \infty$, a valószínűségi mértékben való konvergencia értelmében, azaz, ha tetszőleges $\varepsilon > 0$-ra

$$\lim_{t\to\infty} P^t\left\{\left|\frac{i_{\xi\eta}(\xi, \eta)}{I(\xi, \eta)} - 1\right| > \varepsilon\right\} = 0. \tag{1.3.2}$$

Egy olyan (ξ^t, η^t) változó-párokból álló sorozatot, amely nem rendelkezik információ-sűrűséggel, *információ-stabilisnek* fogunk nevezni, ha minden t-re, bizonyos eloszlástól kezdve, $p^t_{\xi\eta}(\cdot)$ szinguláris a $p^t_\xi \times p^t_\eta(\cdot)$ eloszlásra nézve, — azaz, ha létezik egy olyan $B^t \in S^t_X \times S^t_Y$ halmaz, hogy $p^t_{\xi\eta}(B) = 1$, de $p^t_\xi \times p^t_\eta(B) = 0$. Végül, a (ξ^t, η^t) párok tetszőleges sorozatát *információ-stabilisnek* fogjuk nevezni, ha felbontva ezt a sorozatot két olyan részsorozatra, amelyek információ-sűrűséggel rendelkező, illetve nem rendelkező párokból állanak, mindkét említett részsorozat információ-stabilis lesz (esetleg csak egyik, ha a másik csupán végesszámú tagból áll).

Megjegyezzük, hogy a következő pontokban csupán változó-párok információ-stabilis sorozataival kell majd foglalkoznunk, úgy hogy a fentebb bevezetett definíciót elfogadva, eltekinthetünk majd olyan átmeneti esetek vizsgálatától, mint az információ-sűrűséggel rendelkező, de végtelen információértékű párok, vagy információ-sűrűséggel nem rendelkező, de nem szinguláris eloszlású párok esete. A következőkben bemutatandó módszerek lehetővé teszik számos tétel megfogalmazását ezekre az esetekre is, mindazonáltal nem tudtunk találni olyan elég általános és ugyanakkor elég egyszerűnek is tekinthető megfogalmazást, amely átfogja az összes ilyen eseteket, — tekintve, hogy a végtelen információ esetének gyakorlati jelentősége nincs, egyszerűen nem fogunk foglalkozni ezekkel az átmeneti esetekkel.

Megjegyezzük, hogy

$$I^t(\xi, \eta) = M i^t_{\xi\eta}(\xi, \eta)$$

és hogy ennek következtében az információ-stabilitás (1. 3. 1) definíciója igen hasonlit a nagy számok törvényének állításához, — ezt ti. $MS_n \neq 0$ esetén (ahol $S_n = \zeta_1 + \cdots + \zeta_n$ n számú független ζ_i valószínűségi változó összege) meg lehet fogalmazni úgy, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{MS_n} = 1,$$

a valószínűségi mértékben való konvergencia értelmében. Minden alapunk megvan azt remélni, hogy az információ-stabilitás ugyanolyan általános aszimptotikus törvénye a természetnek, mint a nagy számok jól ismert törvénye, — jóllehet ez a tény, mint bebizonyított matematikai tétel, manapság még csak elég kisszámú esetben igazolt.

Nevezetesen, legyen $\{\alpha_k,\ k = \ldots, -1, 0, 1, \ldots\}$ és $\{\beta_k,\ k = \ldots, -1, 0, 1, \ldots\}$ két stacionárius és stacionáriusan összefüggő sztochasztikus folyamat. Jelöljük ξ^t, illetve η^t-vel az első t változó összességét, vagyis legyen $\xi^t = (\alpha_1, \ldots, \alpha_t)$, $\eta^t = (\beta_1, \ldots, \beta_t)$. MAC-MILLAN tételéből [15] (l. még [26]-ot is) rögtön következik, hogy ha az összes α_i és β_i változók végesszámú értéket vehetnek csak fel és ha az a stacionárius folyamat, amelyet az $\{(\alpha_i, \beta_i), \ldots, -1, 0, 1, \ldots\}$ változó-párok alkotnak, ergodikus, akkor a (ξ^t, η^t) párok sorozata információstabilis. Ezt az eredményt tetszőleges értékeket felvevő α_i, β_i változók esetére PEREZ általánosította [18].

Információ-stabilis sorozatokra példák egy másik osztályát úgy kaphatjuk meg, ha felhasználunk egy megjegyzést, amelyet analóg gondolatmenet kapcsán ROZENBLAT-ROT tett [20], [21]. Nevezetesen, tekintsünk olyan $\{\alpha_k,\ k = 1, 2, \ldots\}$, ill. $\{\beta_k,\ k = 1, 2, \ldots\}$ valószínűségi változó-sorozatokat, ahol a változók értékei tetszőleges mérhető terekből valók, amellett feltesszük, hogy az $(\alpha_1, \beta_1)\ (\alpha_2, \beta_2), \ldots$ párok egymástól függetlenek. Legyen ismét

$\xi^t = (\alpha_1, \ldots, \alpha_t)$ és $\eta^t = (\beta_1, \ldots, \beta_t)$. Ekkor

$$i^t_{\xi\eta}(x_1, \ldots, x_t, y_1, \ldots, y_t) = \sum_{k=1}^{t} i_{\alpha_k\beta_k}(x_k, y_k). \tag{1.3.3}$$

Diszkrét esetben, vagy akkor, amikor sűrűségek léteznek, az (1. 3. 3) egyenlőség közvetlenül folyik (1. 2. 11)-ből, illetve (1. 2. 10)-ből, valamint a független változók általános tulajdonságaiból. Az általános esetre ezt a 2. 9 pontban fogjuk bebizonyítani. (1. 3. 3)-ból látható, hogy

$$i^t_{\xi\eta}(\xi, \eta) = \sum_{k=1}^{t} i_{\alpha_k\beta_k}(\alpha_k, \beta_k). \tag{1.3.4}$$

Az (1. 3. 4) képletben szereplő összeadandók független valószínűségi változók. Az információ-stabilitásról szóló állítás — persze, ha $I(\alpha_k, \beta_k) < \infty$, az $i_{\alpha_k\beta_k}(\alpha_k, \beta_k)$ független változók összege relatív stabilitásáról szóló állításra redukálódik (l. [6], 28. §; a nem nagyon lényeges különbség abban áll, hogy ott csak nem-negatív összeadandók esetét vizsgálják). A független változók összegéről szóló elmélet néhány általános tételéből kiindulva (l. [6]) megkaphatók annak a szükséges és elegendő feltételei, hogy a (ξ^t, η^t) sorozat információ-stabilis legyen. Ezek a feltételek természetesen igen általánosak lesznek. Amint azt ROZENBLAT-ROT is megjegyezte [20], [21], hasonló megállapítások tehetők Markov-láncot alkotó változók sorozata esetében is.

Végül említsünk meg még egy esetet, amely matematikai szempontból triviális, de az alkalmazások szempontjából fontos. Legyen a ξ^t változó azonos az η^t változóval és vegyen fel véges $n^t > 1$ számú $E_1, \ldots, E_{n^t}$ értékeket, mindegyiket $\frac{1}{n^t}$ valószínűséggel. Akkor (1. 2. 11)-nek megfelelően

$$i^t_{\xi\eta}(E_i, E_j) = \begin{cases} \log n^t, & i = j, \\ -\infty, & i \neq j. \end{cases}$$

Következésképp

$$P^t\{i_{\xi\eta}(\xi, \eta) = \log n\} = 1,$$

és nyilvánvaló, hogy teljesül az (1. 3. 1) információ-stabilitási tulajdonság.

Nem stacionárius információ-stabilis sorozatok bizonyos új osztályait a nemrég megjelent [34] munka vezette be.

1. 4. Közlemény. Fel fogjuk tenni, hogy a *bemeneti közlemények* (X, S_X) *mérhető tere,* valamint a *kimeneti közlemények* $(\tilde{X}, S_{\tilde{X}})$ *mérhető tere* adott és rögzített. Számos alkalmazásban ez a két tér azonos. Továbbá, *adottnak* fogjuk tekinteni az $X \times \tilde{X}$ szorzattérben értelmezett olyan $p_{\xi\tilde{\xi}}(C)$, $(C \in S_X \times S_{\tilde{X}})$ eloszlások W halmazát, amelyekre teljesül, hogy a ξ komponens ezen együttes eloszlásokkal indukált

$$p_\xi(A) = p_{\xi\tilde{\xi}}(A \times \tilde{X}) \tag{1.4.1}$$

eloszlásai azonosak az összes $p_{\xi\tilde{\xi}} \in W$ eloszlásokra. Ezt a halmazt *közleménynek* ($\{W\}$) fogjuk nevezni. A $p_\xi(\cdot)$ eloszlást *a bemeneti közlemény eloszlásának* fogjuk nevezni; tetszőleges olyan ξ és $\tilde{\xi}$ változópárról pedig, amelynek együttes eloszlása beletartozik W-be, azt fogjuk mondani, hogy ez a pár *kielégíti W reprodukálásának pontossági feltételét.*

Hangsúlyozzuk, hogy a mi egyetlen $\{W\}$ közlemény-fogalmunkban két, empirikus szempontból különböző objektum van egyesítve: a $\{W\}$ reprodukálása pontosságának a feltétele megadja mind a bemeneti közlemény $p_\xi(\cdot)$ eloszlását, amely az átvitelre kerülő anyag statisztikai szerkezetét tükrözi vissza, mind pedig a ξ és $\tilde{\xi}$ együttes eloszlására vonatkozó korlátozást, amely megadja az átvitel kívánt minőségét.

A következőkben csak azzal a speciális esettel fogunk foglalkozni, amidőn W reprodukálása pontosságának feltételei bizonyos specifikus, bár az alkalmazások jó része szempontjából még mindig eléggé általános formában vannak megadva. Nevezetesen feltesszük, hogy adva van bizonyos N számú $\varrho_i(x, \tilde{x})$ $(i = 1, \ldots, N)$ valós függvény, amelyek az $S_X \times S_{\tilde{X}}$ σ-algebra szorzatra vonatkozólag mérhetők, valamint egy $\overline{W}$ N-dimenziós halmaz. A W eloszlás-összesség álljon a $(\xi, \tilde{\xi})$ változó-pár olyan eloszlásaiból, hogy a várható értékkel képezett alábbi N-dimenziós vektorra

$$(1.4.2) \qquad (M\varrho_1(\xi, \tilde{\xi}), M\varrho_2(\xi, \tilde{\xi}), \ldots, M\varrho_N(\xi, \tilde{\xi})) \in \overline{W},$$

fennálljon, ξ pedig adott p_ξ eloszlással rendelkezzék.

Mindjárt megjegyezzük, hogy e definíció sok fontos speciális esetet felölel. Valóban, például legyenek az X és $\tilde{X}$ terek azonosak és X-ben legyen adva egy $\bar{\varrho}(x, \tilde{x})$ metrika, amely mérhető függvény a $X \times \tilde{X}$ téren. Legyen $\overline{W} = [0, a], a \geq 0$. Legyen mármost $N = 1$ és

$$\varrho_1(x, \tilde{x}) = \bar{\varrho}(x, \tilde{x}).$$

(1.4.2)-ből a következő feltételt kapjuk

$$(1.4.3) \qquad M\bar{\varrho}(\xi, \tilde{\xi}) \leqq a.$$

Az (1.4.3) feltétel egyszerű szemléletes jelentése nyilvánvaló: ez azt jelenti, hogy a kimeneti jelnek a bemeneti jeltől való átlagos eltérése nem lépi túl a-t. Legyen most

$$\varrho_1(x, \tilde{x}) = [\bar{\varrho}(x, \tilde{x})]^2;$$

ekkor a következő feltételt kapjuk:

$$(1.4.4) \qquad M[\bar{\varrho}(\xi, \tilde{\xi})]^2 \leqq a,$$

amely azt fejezi ki, hogy a bemeneti jelnek a kimeneti jeltől négyzetes középben való eltérése nem lépi túl a-t.

Azt is írhatjuk továbbá, hogy

$$\varrho_1(x, \tilde{x}) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad \bar{\varrho}(x, \tilde{x}) \leqq b, \\ 1, & \text{ha} \quad \bar{\varrho}(x, \tilde{x}) > b. \end{cases}$$

Ekkor a W követelmény a következő feltételre redukálódik:

$$P\{\bar{\varrho}(\xi, \tilde{\xi}) > b\} \leqq a, \tag{1.4.5}$$

amelynek ugyancsak világos a szemléletes jelentése. Végül $a = 0$-t írva és

$$\varrho_1(x, \tilde{x}) = \begin{cases} 1, & \text{ha} \quad x \neq \tilde{x}, \\ 0, & \text{ha} \quad x = \tilde{x}, \end{cases}$$

mellett a következő feltételt kapjuk:

$$P\{\xi \neq \tilde{\xi}\} = 0. \tag{1.4.6}$$

A következőkben majd látni fogjuk, hogy épp ez a feltétel, a bemeneti közlemények teljes egybeesése a kimeneti közleményekkel (itt a W eloszláshalmaz egyetlen elemből áll), vezet majd tételeinkben olyan eredményekre, amelyeket korábban már HINCSIN [26] és ROZENBLAT [20], [25] is kapott, valamint PEREZ [18] egyes eredményeire.

Most bemutatunk egy példát, amelyben $\varrho_i(x, \tilde{x})$ bizonyos becsléseire van szükség. Az X tér elemei legyenek az $x = (z_1, \ldots, z_n)$ sorozatok, ahol a z_i-k csak két értéket, 0 és 1-et vehetnek fel, S_X pedig legyen az X halmaz összes részhalmazainak összessége. Tegyük fel, hogy az $(\tilde{X}, S_{\tilde{X}})$ tér egybeesik (X, S_X)-szel. Végül $x = (z_1, \ldots, z_n)$ és $\tilde{x} = (\tilde{z}_1, \ldots, \tilde{z}_n)$ megválasztása mellett legyen $\varrho_i(x, \tilde{x}) = |z_i - \tilde{z}_i|$. W-nek a $0 \leqq \varrho_i \leqq a$ $(i = 1, \ldots, n)$ parallelepipedont választva, látjuk, hogy ha a bemeneti közlemény $\xi = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$, a kimeneti közlemény pedig $\tilde{\xi} = (\tilde{\zeta}_1, \ldots, \tilde{\zeta}_n)$, akkor a W feltétel a következő követelményre redukálódik:

$$P\{\zeta_i \neq \tilde{\zeta}_i\} \leqq a \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{1.4.7}$$

Szemléletesen a most tekintett eset a következő: a közleményt egy két jelből álló ábécében egy n-betűs szó írja le, a követelmény pedig az, hogy mindegyik betű átvitelénél a hiba elkövetésének valószínűsége ne lépje túl az a állandót. Pontosan ugyanígy a tekintett típusú feltételre redukálódnak azon különféle feltételek, amelyeket a ξ és $\tilde{\xi}$ változók szórásnégyzetére és kovarianciájára tesznek, amidőn ezek a változók többdimenziós vektorok.

Egy *W-reprodukálási pontosságú közlemény entrópiájának* fogjuk nevezni a

$$H(W) = \inf I(\xi, \tilde{\xi}) \tag{1.4.8}$$

számot,[1] ahol az alsó határ az összes lehetséges olyan valószínűségi változó-

[1] Ha a W halmaz üres, alkalmas lesz $H(W) = +\infty$-t vennünk.

párokra veendő, amelyek eleget tesznek a közlemény-átvitel W-pontossági feltételeinek. Abban a már fentebb is megemlített speciális esetben (l. (1.4.6)), amidőn W egyetlen oly elemből áll, hogy ξ és $\tilde{\xi}$ 1 valószínűséggel egybeesnek, azaz, amidőn a pontossági követelmény abból áll, hogy az átvitt és a vett közlemények teljesen essenek egybe, az entrópiára fennáll $H(W)=I(\xi, \tilde{\xi})$ és ez az entrópia azonos lesz a ξ valószínűségi változó közönséges entrópiájával.

A következőkben közlemények sorozatait fogjuk tekinteni. A fentebb mondottaknak megfelelően a bemeneti, illetve kimeneti közleményeket ξ^t, illetve $\tilde{\xi}^t$-vel fogjuk jelölni, a pontossági feltételeket pedig W^t-vel. A W^t feltételt ismét a $\varrho_i^t(x, \tilde{x})$ függvények, valamint a W^t halmaz határozzák meg. Most definiálni fogunk egy számunkra igen fontos fogalmat: *közlemények információ-stabilis sorozatát.* A $\{W^t\}$ közlemény-sorozatot információ-stabilisnek fogjuk nevezni, ha létezik oly $(\xi^t, \tilde{\xi}^t)$ valószínűségi változópárok információ-stabilis sorozata, melyeknél a t-edik pár eleget tesz a közleménytovábbítás W^t pontossági feltételeinek, és[1]

$$(1.4.9) \qquad \lim_{t\to\infty} \frac{I^t(\xi, \tilde{\xi})}{H^t(W)} = 1.$$

(Persze, itt tulajdonképp a párok sorozatának információ-stabilitása a lényeges, minthogy annak a lehetősége, hogy a W^t pontossági feltételnek és az (1.4.9) feltételnek eleget tegyünk, közvetlen következménye az (1.4.8) definíciónak.) Amint majd a továbbiakban látni fogjuk, összes eredményeink információ-stabilis közleményekre fognak vonatkozni. Az elméletet ezzel a sajátsággal nem rendelkező közleményekre alkalmazni csak az (1.4.8) alapvető definíció megváltoztatásával lehetséges.

Igen egyszerű példa gyanánt tekintsük azt az esetet, amidőn a W^t halmazok mindegyike egyetlen elemből áll, úgy, hogy a $(\xi^t, \tilde{\xi}^t)$ közlemény-pár sorozat (amelyek eleget tesznek a W^t pontossági feltételeknek) egyértelműen meghatározott eloszlással rendelkezik. Itt a közlemény akkor és csak akkor lesz információ-stabilis, hogyha maga a $(\xi^t, \tilde{\xi}^t)$ párok sorozata is információ-stabilis. Rendkívül fontos a már vizsgált $\xi^t=\tilde{\xi}^t$ eset. Ha ξ^t egy stacionárius ergodikus folyamat szakasza, akkor MAC-MILLAN tétele (l. [15] és [26]) egyúttal azt is jelenti, hogy a közlemény információ-stabilis. HINCSIN [26] munkájában épp ilyen közleményt tanulmányozott.

Munkánk 6. §-ában információ-stabilis közleményekre még egy fontos példát fogunk látni: a független komponensű közleményeket. Nevezetesen,

[1] A $\frac{+\infty}{+\infty}$ hányadost itt 1-nek tekintjük, a $\frac{+\infty}{I}$ hányadost pedig, ahol $I<\infty$, $+\infty$-nek.

tegyük fel, hogy adva vannak a (Z, S_Z) és $(\tilde{Z}, S_{\tilde{Z}})$ terek, a (Z, S_Z) térben a $p_\zeta(\cdot)$ valószínűség-eloszlás, a $\varrho(z, \tilde{z})$ $(z \in Z, \tilde{z} \in \tilde{Z})$ mérhető függvény és a W_Z egydimenziós halmaz. Tegyük fel továbbá, hogy az (X^t, S_X^t) és $(\tilde{X}^t, S_{\tilde{X}}^t)$ terek t darab (Z, S_Z), illetve $(\tilde{Z}, S_{\tilde{Z}})$ tér szorzatai, azaz:

$$(X^t, S_X^t) = (Z \times \cdots \times Z, S_Z \times \cdots \times S_Z),$$

$$(\tilde{X}^t, S_{\tilde{X}}^t) = (Z \times \cdots \times \tilde{Z}, S_{\tilde{Z}} \times \cdots \times S_{\tilde{Z}}).$$

Tegyük fel továbbá, hogy a ξ^t bemeneti közlemény p_ξ^t eloszlása a $p_\zeta \times \cdots \times p_\zeta$ t-szeres eloszlás-szorzat, úgy, hogy a bemeneti közlemény: $\xi^t = (\zeta_1, \ldots, \zeta_t)$, ahol a ζ_i-k független valószínűségi változók, mindegyik $p_\zeta(\cdot)$ eloszlással. Továbbá tegyük fel, hogy adva van t számú $\varrho_k^{(t)}(x, \tilde{x})$ függvény (ahol $x^t = (z_1, \ldots, z_t)$, $\tilde{x}^t = (\tilde{z}_1, \ldots, \tilde{z}_t)$) a következő egyenlőséggel

$$\varrho_k^t(x, \tilde{x}) = \varrho(z_k, \tilde{z}_k). \tag{1.4.10}$$

Végül tegyük fel, hogy a t-dimenziós W^t halmaz, amely a reprodukálás pontossága feltételének definíciójában szerepel, t darab W_Z halmaz szorzata. Ekkor azt fogjuk mondani, hogy adva van *független komponensű közlemények szorzata.* A $(\xi^t, \tilde{\xi}^t)$ változó-párt, ahol $\xi^t = (\zeta_1^t, \ldots, \zeta_t^t)$, $\tilde{\xi}^t = (\tilde{\zeta}_1^t, \ldots, \tilde{\zeta}_t^t)$, független komponensű közleményünk reprodukálása pontosságának feltétele, akkor és csak akkor kapcsolja össze, ha a ζ_i^t változók függetlenek, mindegyiküknek ugyanaz a $p_\zeta(\cdot)$ eloszlása van és bármely k-ra az $M\varrho(\zeta_k^t, \tilde{\zeta}_k^t)$ várható értékre fennáll: $M\varrho(\zeta_k^t, \tilde{\zeta}_k^t) \in W_Z$. A 6. §-ban megmutatjuk, hogy ha a $H^1(W)$ entrópia véges, akkor a $H^t(W)$ entrópiára fennáll, hogy

$$H^t(W) = tH^1(W), \tag{1.4.11}$$

és a $\{W^t\}$ közleménysorozat információ-stabilis. Még sok más konkrét példát is lehetne adni független komponensű közleményekre.

Mindmáig megoldatlan az a probléma, hogy hogyan kaphatók általános elégséges feltételek egy közleménysorozat információ-stabilitására (ez szorosan összefügg azzal a problémával, hogyan kaphatunk elég általános feltételeket változó párok sorozata információ-stabilitására; vö. 1. 3. pont).

1. 5. Átviteli berendezés. Egy átviteli berendezés megadásához mindenekelőtt meg kell adni két mérhető teret, (Y, S_Y) és $(\tilde{Y}, S_{\tilde{Y}})$-t, amelyeket az *átviteli berendezés bemenetére belépő jelek terének*, illetve az *átviteli berendezés kimenetén kilépő jelek terének* nevezünk. Sok alkalmazásban kézenfekvő ezt a két teret azonosnak venni. Továbbá, adottnak kell lennie egy olyan $Q(y, \tilde{A})$, $(y \in Y,\ \tilde{A} \in S_{\tilde{Y}})$ átmenet-függvénynek, amelyre fennáll:

1) rögzített $y \in Y$ mellett a $Q(y, .)$ függvény valószínűségi mérték $S_{\tilde{Y}}$-on,
2) rögzített $\tilde{A} \in S_{\tilde{Y}}$ mellett $Q(., \tilde{A})$ mérhető a S_Y σ-algebrára vonatkozólag.

Mint ismeretes, ez a két feltétel azt fejezi ki, hogy $Q(.,.)$-t úgy tekinthetjük, mint egy Markov-lánc átmenet-valószínűségi függvényét. Szemléletesen szólva, a $Q(y,.)$ valószínűség-eloszlás rögzített y mellett nem más, mint az átviteli berendezés kimenetén kilépő jel valószínűség-eloszlása, ha ugyanezen berendezés bemenetére az y jelet vitték rá. Ezenfelül adottnak kell lennie a bemeneti jelek, illetve kimeneti jelek $(Y\times\tilde{Y}, S_Y\times S_{\tilde{Y}})$ szorzattéren értelmezett valószínűség-eloszlásokból álló halmaz valamilyen V részhalmazának. Ez a halmaz bizonyos korlátozást képvisel a bemenő, ill. kimenő jelek együttes eloszlására vonatkozólag. A fentebb leírt Y, $\tilde{Y}$ terek, $Q(.,.)$ függvény és V halmaz összességét *átviteli berendezésnek* fogjuk nevezni; ezt így a következőképpen fogjuk jelölni: „a $\{Q, V\}$ átviteli berendezés”.

Két valószínűségi változóról, η-ról és $\tilde{\eta}$-ról, amelynek értékei az Y, illetve $\tilde{Y}$ terekbe tartoznak, akkor mondjuk, hogy a $\{Q, V\}$ átviteli berendezés kapcsolja őket össze, ha az $(\eta, \tilde{\eta})$ pár eloszlása a V halmazba tartozik és tetszőleges $\tilde{A}\in S_{\tilde{y}}$-re a $P\{\tilde{\eta}\in\tilde{A}/\eta\}$ feltételes valószínűségre fennáll úgy, hogy majdnem mindenütt[1]

$$P\{\tilde{\eta}\in\tilde{A}/\eta\}=Q(\eta,\tilde{A}). \tag{1.5.1}$$

A következőkben csak azt az esetet fogjuk tekinteni, amikor a V korlátozást specifikus módon adjuk meg, — annak az analógiájára, amelyet egy közlemény reprodukálási pontossága feltételeinek megadásakor használtunk. Nevezetesen feltesszük, hogy az $Y\times\tilde{Y}$ térben adva van N számú $\pi_i(y, \tilde{y})$ $(i=1,\ldots,N)$ valós, mérhető függvény. Ezen felül feltesszük, hogy adva van egy $\bar{V}$ N-dimenziós halmaz. A V eloszlás-összesség azon $(\eta, \tilde{\eta})$ változók eloszlásaiból áll, amelyekre fennáll, hogy

$$(M\pi_1(\eta,\tilde{\eta}),\ldots,M\pi_N(\eta,\tilde{\eta}))\in\bar{V}. \tag{1.5.2}$$

Nem nehéz példákat adni a fent leírt típusú korlátozásokra; ezek a példák analogonjai a reprodukálás pontossága feltételeire az előző pontban adott példáknak. Az alkalmazások szempontjából különösen fontosnak tekintendő az a speciális eset, amikor a π_i függvények csak y-tól függenek, úgy hogy a korlátozás csak a bemenő jel eloszlására szól. Például gyakran feltesszük, hogy a bemeneti jel átlagos teljesítménye felülről korlátos.

A $\{Q, V\}$ *átviteli berendezés kapacitásának* a következő számot fogjuk nevezni:

$$C(Q, V)=\sup I(\eta,\tilde{\eta}), \tag{1.5.3}$$

ahol a felső határ azon összes lehetséges η, $\tilde{\eta}$ valószínűségi változó-párokra veendő, amelyeket a $\{Q, V\}$ átviteli berendezés kapcsol össze.

[1] A feltételes valószínűségnek a cikkben sokszor használt általánosított fogalmát illetőleg l. például: [24] 48. §, vagy [9], 1. fej. 8. §.

A következőkben átviteli berendezések $\{Q^t, V^t\}$ sorozataival foglalkozunk. Mint magától értetődik, a t-edik átviteli berendezéshez rendelt objektumokat t felső indexszel fogjuk egyebektől megkülönböztetni. Egy $\{Q^t, V^t\}$ *átviteli berendezés-sorozatot információ-stabilisnek* fogunk nevezni, ha létezik az $(\eta^t, \tilde{\eta}^t)$ változó-párok olyan információ-stabilis sorozata, hogy a t-edik párt a $\{Q^t, V^t\}$ átviteli berendezés kapcsolja össze, továbbá[1]

$$\lim_{t\to\infty} \frac{I^t(\eta, \tilde{\eta})}{C^t(Q, V)} = 1. \tag{1.5.4}$$

Minden további eredmény csak átviteli berendezések információ-stabilis sorozataira fog vonatkozni.

Átviteli berendezések információ-stabilis sorozataira legegyszerűbb példa egy zajmentes diszkrét átviteli berendezés. Nevezetesen, legyen Y^t $n^t < \infty$ pontból álló véges halmaz, S_Y^t álljon az Y^t tér összes részhalmazaiból, és tegyük fel, hogy a kimeneti jelek $(\tilde{Y}^t, S_{\tilde{Y}}^t)$ tere azonos a bemeneti jelek (Y^t, S_Y^t) terével. Tegyük fel továbbá, hogy a $Q^t(.,.)$ átmenet-függvények olyanok, hogy tetszőleges $y^t \in Y^t$-re a $Q^t(y,.)$ eloszlás teljesen az y^t pontba van összpontosítva. Ebben az esetben tetszőleges olyan $\eta^t, \tilde{\eta}^t$ változó-párra, amelyeket az átviteli berendezés összekapcsol, $\eta^t = \tilde{\eta}^t$ 1 valószínűséggel. Végezetül tegyük fel, hogy a bemeneti jel megengedhető eloszlásainak V halmaza az $Y \times \tilde{Y}$ tér összes eloszlásaiból áll. (Ilyen V halmaz megadható π_i becsléseink segítségével, $\bar{V}$-nek az egész teret választva) A leírt átviteli berendezés-sorozat információ-stabilis lesz. Valóban, itt a kapacitás egybeesik Y^t-be eső értékű valószínűségi változók entrópiájának felső határával. Mint ismeretes, ez a felső határ (amely $\log n^t$-vel egyenlő) olyan valószínűségi változókkal érhető el, amelyek az n^t érték közül mindegyiket egy és ugyanazon $\frac{1}{n^t}$ valószínűséggel veszik fel. Ahogy már az 1.3 pontban megjegyeztük, ez a valószínűségi változó-sorozat információ-stabilis és ennek folytán segítségével megfelelhetünk az átviteli berendezések információ-stabilis sorozata definíciójának.

Átviteli berendezések információ-stabilis sorozatára fontos példát kaphatunk, ha (l. az 1.8 pontot) a Hincsin-féle értelemben véges memóriájú diszkrét stacionárius csatorna fogalmából indulunk ki (l. [26]). E sorozat információ-stabilitása CAREGRADSZKIJ egy bizonyításából következik (l. [27]), amelyben arról van szó, hogy e csatorna ergodikus és közönséges kapacitása azonos (a terminológiát illetőleg l. [26]-ot).

Munkánk 6. §-ában információ-stabilis átviteli berendezéseknek egy fontos speciális osztályát fogjuk vizsgálni, nevezetesen a memória nélküli átvi-

[1] Itt és a továbbiakban úgy vesszük hogy $\frac{+\infty}{+\infty} = 1$, $\frac{C}{+\infty} = 0$ és $\frac{+\infty}{C} = +\infty$, ahol $C < \infty$.

teli berendezéseket. Ennél (l. a [29], [16], [23] munkákat) feltesszük, hogy az állapotok tere tetszőleges és bevezetünk egy V kiegészítő korlátozást az átviteli berendezés meghatározásánál.

Nevezetesen, fel fogjuk tenni, hogy adva vannak a (Z, S_Z), $(\tilde{Z}, S_{\tilde{Z}})$ terek és a $Q_Z(z, \tilde{B})$ átmenet-függvény ($z \in Z$, $\tilde{B} \in S_{\tilde{Z}}$), amely rögzített z-re valószínűségi mérték és rögzített $\tilde{B}$ mellett mérhető függvény, — ezenkívül a $\pi(z, \tilde{z})$ mérhető függvény, ($z \in Z$, $\tilde{z} \in \tilde{Z}$) és végül az egydimenziós $\overline{V}_Z$ halmaz. Továbbá tegyük fel, hogy az (Y^t, S_Y^t), illetve $(\tilde{Y}, S_{\tilde{Y}}^t)$ terek a (Z, S_Z), illetve $(\tilde{Z}, S_{\tilde{Z}})$ terekből úgy keletkeztek, hogy azokat t-szer önmagukkal szoroztuk, azaz

$$(Y^t, S_Y^t) = (Z \times \cdots \times Z,\ S_Z \times \cdots \times S_Z),$$
$$(\tilde{Y}^t, S_{\tilde{Y}}^t) = (\tilde{Z} \times \cdots \times \tilde{Z},\ S_{\tilde{Z}} \times \cdots \times S_{\tilde{Z}}).$$

Legyen adva továbbá a $Q^t(y, A)$ átmenet-függvény, éspedig úgy, hogy

$$\text{(1.5.5)} \qquad \begin{cases} y^t = (z_1^t, \ldots, z_t^t),\ \tilde{A}^t = \tilde{B}_1 \times \cdots \times \tilde{B}^t, \text{ ahol } \tilde{B}_k \in S_{\tilde{Z}} \text{ esetén} \\ Q^t(y, \tilde{A}) = Q_Z(z_1, \tilde{B}_1) Q_Z(z_2, \tilde{B}_2) \ldots Q_Z(z_t, \tilde{B}_t) \end{cases}$$

fennálljon, majd a $Q^t(y, \tilde{A})$ függvényt kiterjesztjük tetszőleges $\tilde{A}^t \in S_{\tilde{Y}}^t$ halmazokra az additivitás megőrzésével. Definiáljuk ezután a $\pi_k^t(y, \tilde{y})$ függvényeket, midőn $y^t = (z_1^t, \ldots, z_t^t)$, $\tilde{y}^t = (\tilde{z}_1^t, \ldots, \tilde{z}_t^t)$, a következőképpen:

$$\text{(1.5.6)} \qquad \pi_k^t(y, \tilde{y}) = \pi(z_k^t, \tilde{z}_k^t).$$

Végül tegyük fel, hogy a $\overline{V}$ t-dimenziós halmaz, amely az átviteli berendezések definíciójában szerepel, t darab $\overline{V}_Z$ halmaz sorozata. A most leírt módon megadott átviteli berendezésekről azt fogjuk mondani, hogy az *memória nélküli átviteli berendezés*. Kicsit szabadon azt mondhatjuk, hogy az $(\eta^t, \tilde{\eta}^t)$ változó-párt, ahol $\eta^t = (\zeta_1^t, \ldots, \zeta_t^t)$, $\tilde{\eta}^t = (\tilde{\zeta}_1^t, \ldots, \tilde{\zeta}_t^t)$, memória nélküli átviteli berendezés kapcsolja össze, ha minden k-ra és minden $\tilde{B} \in S_{\tilde{Z}}$, $z \in Z$-re

$$P^t\{\tilde{\zeta}_k \in \tilde{B} / \zeta_k = z\} = Q_Z(z, \tilde{B}),$$

akármilyenek is legyenek azok a kiegészítő feltételek, amelyeket a $\zeta_l^t, \tilde{\zeta}_l^t$, $l \neq k$ változókra tettünk, továbbá ha minden k-ra a $M\pi(\zeta_k^t, \tilde{\zeta}_k^t)$ várható értékre fennáll, hogy $M\pi(\zeta_k^t, \tilde{\zeta}_k^t) \in V_Z$. A 6. §-ban bebizonyítjuk majd, hogy ha a $C^1(Q, V)$ kapacitás véges, akkor tetszőleges t esetén a $C^t(Q, V)$ kapacitásra fennáll:

$$\text{(1.5.7)} \qquad C^t(Q, V) = tC^1(Q, V)$$

és a memória nélküli $\{Q^t, V^t\}$ átviteli berendezések sorozata információ-stabilis lesz. Memória nélküli átviteli berendezések gyakran kerülnek felhasználásra konkrét információelméleti munkákban.

Az a probléma, hogy miként lehet eléggé általános feltételeket kapni arra, hogy átviteli berendezések egy sorozata információ-stabilis legyen, épp úgy, mint a közleményekre vonatkozó analóg probléma, egyelőre megoldatlan maradt.

1.6. Közlemény-átvitel. Emlékeztetünk a következő jól ismert definícióra. Valószínűségi változók $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ sorozata, ahol a változók értékei sorra a (Z_i, S_{Z_i}) mérhető terekbe tartoznak, *Markov-láncot alkot*, ha tetszőleges i-re és tetszőleges $A \in S_{Z_i}$ halmazra 1 valószínűséggel

$$P\{\zeta_i \in A/\zeta_{i-1}\} = P\{\zeta_i \in A/\zeta_{i-1}, \ldots, \zeta_1\}. \tag{1.6.1}$$

Tegyük fel, hogy adva vannak reprodukálási pontossággal $\{W\}$ közlemények és egy $\{Q, V\}$ átviteli berendezés. Azt fogjuk mondani, hogy a $\{W\}$ *közlemény* átvihető a $\{Q, V\}$ *átviteli berendezés segítségével*, ha létezik négy olyan valószínűségi változó, ξ, η, $\tilde{\eta}$ és $\tilde{\xi}$, hogy

1) a négy ξ, η, $\tilde{\eta}$, $\tilde{\xi}$ változóból álló sorozat Markov-láncot alkot,

2) a $\xi, \tilde{\xi}$ változó-pár eleget tesz $\{W\}$ reprodukálási pontossági feltételeinek,

3) az $\eta, \tilde{\eta}$ változó-párt a $\{Q, V\}$ átviteli berendezés kapcsolja össze.

A most adott alapvető definíció bizonyos kommentárokra szorul. Mindenekelőtt jegyezzük meg, hogy — a távközlési csatornával összekapcsolt változó-párok definíciójának megfelelően — 1 valószínűséggel fennáll, hogy

$$P\{\tilde{\eta} \in A/\eta\} = Q(\eta, A),$$

úgy hogy az η-ról $\tilde{\eta}$-ra való átmenet valószínűségeit egyértelműen meghatározza az átviteli berendezés. Szemléletes fogalmakat használva $P\{\eta \in A/\xi = x\}$ feltételes valószínűség-eloszlás úgy interpretálható, mint azon bemeneti jel valószínűség-eloszlása, amibe a kódolás műveleteinek eredményeként az x közlemény megy át. Analóg módon $P\{\tilde{\xi} \in \tilde{A}/\tilde{\eta} = \tilde{y}\}$ úgy interpretálható, mint azon kimeneti közlemény valószínűség-eloszlása, amely az $\tilde{y}$ jelből keletkezik a visszakódolás műveletének eredményeként. A fentebb használt általános tárgyalásmódban a kódolás és visszakódolás műveletei nem okvetlenül meghatározott műveletek, hanem magukban foglalják a véletlenszerűség lehetőségét is. Az a követelmény, hogy a ξ, η, $\tilde{\eta}$, $\tilde{\xi}$ változók alkossanak Markov-láncot, azt fejezi ki, hogy rögzített bemeneti jel mellett az átviteli berendezés kimenetén mutatkozó jel valószínűség-eloszlása nem függ attól, hogy melyik közleményt kódolták ezzel a jellel, továbbá azt, hogy az átviteli berendezés rögzített kimeneti jele mellett azon közlemény valószínűség-eloszlása, amelybe ez a jel a visszakódoláskor átmegy, nem függ attól, milyen volt a bemeneti jel és milyen volt az átkódolt közlemény.

Ismeretes (l. [11]), hogy *ha a* $\{W\}$ *közlemény átvihető a* $\{Q, V\}$ *átviteli berendezés segítségével, akkor*

$$H(W) \leqq C(Q, V). \tag{1.6.2}$$

E tény bizonyítását (ami különben nem nehéz) a teljesség kedvéért majd a 2. 10 pontban közöljük.

A Shannon-féle alaptétel — KOLMOGOROV interpretációjában — azt mondja ki, hogy bizonyos aszimptotikus értelemben és bizonyos regularitási feltevések mellett ez az (1. 6. 2) feltétel elegendő is lesz ahhoz, hogy egy közlemény átvihető legyen egy átviteli berendezés segítségével.

E cikk célja bizonyos hasonló típusú, a következő pontban megfogalmazandó állítások bizonyítása.

1. 7. Alapvető tételek. Tegyük fel, hogy adva van egy $\{W^t\}$ közleménysorozat és egy $\{Q^t, V^t\}$ átviteli berendezés-sorozat, olyan módon, ahogy ez az 1. 4 és 1. 5 pontokban van leírva. Az e pontokban bevezetett jelöléseket is használni fogjuk.

Vezessünk még be bizonyos kiegészítő definíciókat és jelöléseket.

Legyen $U \in R^n$, ahol R^n n-dimenziós euklideszi tér, amelynek pontjai $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n)$. A $\bar{x}' = (x_1', \ldots, x_n')$ és $\bar{x}'' = (x_1'', \ldots, x_n'')$ pontok közti $r(\bar{x}', \bar{x}'')$ távolságként célszerű lesz az

$$(r\bar{x}', \bar{x}'') = \max_{i=1,\ldots,n} |x_i' - x_i''| \tag{1.7.1}$$

számot venni. Ha $\varepsilon \geqq 0$, jelöljük $[U]_\varepsilon$-nal az olyan $\bar{x} \in R^n$ pontok összességét, amelyekre valamilyen $x \in U$ mellett fennáll, hogy

$$r(\bar{x}, x) \leqq \varepsilon.$$

Ha $\varepsilon < 0$, jelöljük $[U]_\varepsilon$-nal az olyan $\bar{x} \in R^n$ pontok összességét, amelyekre tetszőleges x pont, melyre $r(\bar{x}, x) \leqq -\varepsilon$, beletartozik U-ba. Nyilvánvaló, hogy $[U]_0 = U$ és hogy $\gamma < \delta$ esetében $[U]_\gamma \subset [U]_\delta$.

Mármost $\{W_\varepsilon\}$ *közleménynek* fogunk nevezni egy olyan közleményt, amelyet az (1. 4. 2) egyenlőség segítségével adtunk meg, a $\bar{W}$ halmazt $[\bar{W}]_\varepsilon$-nal helyettesítve. Analóg módon $\{Q, V_\varepsilon\}$ *átviteli berendezésnek* fogjuk nevezni azt az átviteli berendezést, amelyet úgy definiálhatunk, hogy az (1. 5. 2) egyenlőségben a $\bar{V}$ halmazt a $[\bar{V}]_\varepsilon$ halmazzal helyettesítjük.

Az 1. 6 pontban adott definíciót módosítva, vezessük be ezenkívül az „ε valószínűségű eseménytől eltekintve pontosan átvitt közlemény" fogalmát is. Nevezetesen azt fogjuk mondani, hogy a $\{W\}$ *közlemény a* $\{Q, V\}$ *átviteli berendezés segítségével* ε *pontossággal átvihető,* ha létezik olyan négy valószínűségi változó, ξ, η, $\tilde{\eta}$, $\tilde{\xi}$, valamint egy $\tilde{\xi}'$ ötödik valószínűségi változó, utóbbi az $(\tilde{X}, S_{\tilde{X}})$ térbe tartozó értékekkel, amelyekre fennállnak a következők:

1) a négy valószínűségi változó, ξ, η, $\tilde{\eta}$, $\tilde{\xi}$ sorozata Markov-láncot alkot,

2) a ξ, ξ' változó-pár eleget tesz $\{W\}$ reprodukálása pontossága feltételeinek,

3) az η, $\tilde{\eta}$ változó-párt a $\{Q, V\}$ távközlési csatorna kapcsolja össze,

4) a $P\{\tilde{\xi} \neq \tilde{\xi}'\}$ valószínűségre fennáll, hogy

$$P\{\tilde{\xi} \neq \tilde{\xi}'\} \leqq \varepsilon. \tag{1.7.2}$$

Az 1)—4) feltételek szemléletes jelentése a következő: ha ezek a feltételek teljesülnek, akkor a kimeneti közleményt ε valószínűséggel változtatva meg, el lehet érni, hogy a bemeneti közleményből és a kimeneti közleményből álló pár eleget tegyen a reprodukálás pontossági feltételnek.

Most megfogalmazunk egy tételt, amely a legáltalánosabb feltételek mellett igaz.

1. TÉTEL. *Legyen adva egy $\{W^t\}$ közleménysorozat és egy $\{Q^t, V^t\}$ átviteli berendezéssorozat, melyekre fennállnak a következők:*

I.

$$\lim_{t\to\infty} H^t(W) = \infty. \tag{1.7.3}$$

II.

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{H^t(W)}{C^t(Q, W)} < 1. \tag{1.7.4}$$

III. *A közlemény definíciójában szereplő $\varrho_i^t(x, \tilde{x})$ függvények M^t száma, valamint az átviteli berendezés meghatározásában szereplő $\pi_i^t(y, \tilde{y})$ függvények N^t száma tegyen eleget tetszőleges $a>0$-ra a következő feltételeknek:*

$$M^t = o(2^{aH^t(w)}), \tag{1.7.5}$$

$$N^t = o(2^{aC^t(Q,V)}). \tag{1.7.6}$$

IV. *Az átviteli berendezések sorozata információ-stabilis, emellett létezik a $\{Q^t, V^t\}$ átviteli berendezéssel összekapcsolt, a*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{I^t(\eta, \tilde{\eta})}{C^t(Q, V)} = 1 \tag{1.7.7}$$

feltételnek eleget tevő (vö. (1.5.4)) *η^t, $\tilde{\eta}^t$ valószínűségi változó-pároknak olyan információ-stabilis sorozata, hogy valamilyen $\bar{b}>0$-ra és*

$$\bar{c}^t = \max_{k=1,\dots,N^t} M\{|\pi_k^t(\eta, \tilde{\eta}) - M\pi_k^t(\eta, \tilde{\eta})|^{1+\bar{b}}\} \tag{1.7.8}$$

bevezetése mellett tetszőleges $a>0$ esetén

$$\bar{c}^t = o(2^{aC^t(Q,V)}). \tag{1.7.9}$$

V. *A közlemények sorozata információ-stabilis; emellett létezik a* $\{W^t\}$ *reprodukálása pontossága feltételeinek, valamint a*

$$\lim_{t\to\infty}\frac{I^t(\xi,\tilde{\xi})}{H^t(W)}=1 \tag{1.7.10}$$

(vö. (1.4.9)) *feltételnek eleget tevő* $\xi, \tilde{\xi}^t$ *valószínűségi változó-párok olyan információ-stabilis sorozata, hogy valamilyen* $b>0$*-ra és*

$$c^t=\max_{k=1,\ldots,M^t} M\{|\varrho_k^t(\xi,\tilde{\xi})-M\varrho_k^t(\xi,\tilde{\xi})|^{1+b}\} \tag{1.7.11}$$

bevezetése mellett tetszőleges $a>0$ *esetén*

$$c^t=o(2^{aH^t(W)}). \tag{1.7.12}$$

Ekkor tetszőleges $\varepsilon>0$*-ra található olyan nagy* T *szám, hogy minden* $t\geqq T$*-re a* $\{W_\varepsilon^t\}$ *közlemény a* $\{Q^t, V_\varepsilon^t\}$ *átviteli berendezés segítségével* ε *pontossággal átvihető.*

Gondoljuk most át kissé az előbbi tétel megfogalmazását. Az I. és II. feltételek tartalma világos a fentebbi meggondolásból. A III. feltétel felső korlátot szab a ϱ_k és a π_k függvények számára. Ez persze nyilvánvalóan teljesül, ha — ahogy ez az alkalmazások többségében fenn is áll — az M^t és N^t számok nem függnek t-től (hanem gyakran egyszerűen 1-gyel egyenlők). Mindazonáltal nem nehéz megadni olyan fontos speciális eseteket, amelyekben M^t és N^t korlátlanul növekednek. Például az 1.4 pont végén leírt független komponensű közlemény esetében $M^t=t$. Az (1.4.11) entrópiaképlet azonban azt mutatja, hogy a független komponensű közlemény esetében a tétel (1.7.5) feltétele teljesül (persze ha $H^1(W)\neq 0$). Figyelmet érdemel a közleményeknek az az általánosabb esete is, amidőn a vizsgált közlemény t számú, de már nem feltétlenül független komponensből áll. Itt ugyancsak azt kapjuk, hogy — általában kézenfekvő kiegészítő homogeneitási feltételek mellett — a $H^t(W)$ entrópia t nagyságrendű. Az M^t függvény-szám általában ugyancsak legfeljebb t nagyságrendű, és ezért az (1.7.5) feltétel általában teljesül. Analóg a helyzet az (1.7.6) feltétellel; speciálisan, az (1.5.7) képlet azt fejezi ki, hogy ez a feltétel teljesül memória nélküli átviteli berendezésre (persze ha $C^1(Q, V)\neq 0$). Nem nehéz konstruálni olyan példákat, amelyek azt mutatják, hogy az (1.7.5) és az (1.7.6) feltételek nem okvetlenül szükségesek. Mindazonáltal ezek láthatólag teljesülnek az összes reálisan előadódó példákban, úgy hogy az 1. tétel III. feltétele nem jelenti a tétel általánosságának lényeges korlátozását.

Tekintsük most az 1. tétel IV. feltételét. Mindenekelőtt megjegyezzük, hogy ha — ahogy ez gyakran elő is adódik a konkrét példákban — a

$\pi_k^t(y, \tilde{y})$ függvények egyenletesen korlátosak k és t szerint, azaz

$$|\pi_k^t(y, \tilde{y})| \leqq \bar{C} < \infty, \tag{1.7.13}$$

akkor $|\bar{c}^t| < \bar{C}$, úgy hogy az (1.7.9) feltétel nyilvánvalóan teljesül az $(\eta^t, \tilde{\eta}^t)$ párok tetszőleges sorozatára, és a tétel IV. feltétele ekvivalens lesz az átviteli berendezések sorozata információ-stabilitásának feltételével, amelyet részletesen vizsgáltunk az 1.4 pontban. Az általános esetben, amidőn a $\pi_k^t(y, \tilde{y})$ függvények nem egyenletesen korlátosak, a IV. feltétel valamivel erősebb, mint a $\{Q^t, V^t\}$ sorozat információ-stabilitásának feltétele. Például a 6. §-ban be fogjuk bizonyítani, hogy memória nélküli átviteli berendezések esetében (l. az 1.5 pontot) a IV. feltétel teljesüléséhez elegendő, hogy valamilyen $\bar{b}>0$ esetén tetszőleges $\varepsilon>0$-ra létezzék egy $\zeta, \tilde{\zeta}$ változó-pár, amelyeket a $\{Q^1, V^2\}$ átviteli berendezés kapcsol össze, azaz

$$\begin{cases} P\{\tilde{\zeta} \in \tilde{A}/\zeta\} = Q_Z(\zeta, \tilde{A}), \\ M\pi(\zeta, \tilde{\zeta}) \in V_Z, \end{cases} \tag{1.7.14}$$

amelyre

$$M\{|\pi(\zeta; \tilde{\zeta}) - M\pi(\zeta, \tilde{\zeta})|^{1+b}\} < \infty, \quad I(\zeta, \tilde{\zeta}) > C^1(Q, V) - \varepsilon. \tag{1.7.15}$$

Az (1.7.14), (1.7.15) feltételeknek eleget tevő változók létezése $\bar{b}=0$ esetében közvetlenül következik a $C^1(Q, V)$ kapacitás definíciójából, és ezért a megfogalmazott követelmények, amelyek a tétel IV. feltételének teljesülését biztosítják, eléggé gyenge kiegészítő korlátozásokat jelentenek csak. Látjuk, hogy a IV. feltétel teljesül átviteli berendezések sorozataira adott konkrét példák olyan jelentékeny többségében, melyek a Shannon-tétel alkalmazásaival kapcsolatban adódnak elő. Arról van szó, hogy általában a $C^t(Q, V)$ kapacitás lineárisan nő t növekedésével, az (1.7.8)-ban szereplő momentumok azonban, ha növekednek is, akkor is úgy, mint bizonyos hatványfüggvény. Mindazonáltal eddig még nem mondtak ki olyan elég általános tételeket, melyek igazolnák ezt a feltevést. A IV. feltétel, amely valószínűségi változók momentumaira vonatkozó megállapítást tartalmaz, helyettesíthető volna egy olyan általánosabb feltétellel, amelyet a „csonkított momentumok" segítségével fogalmaztunk meg (annak analógiájára, ahogy a centrális határeloszlástétel tárgyalásában Ljapunov feltételeit helyettesíteni lehet a Lindeberg-féle feltételekkel). Mindamellett nem vezetjük be a mondott általánosítást, minthogy nem ismerünk olyan reális, konkrét példákat, amelyekben hasznosnak mutatkozna egy ilyen általánosítás.

Az V. feltétellel kapcsolatban ugyanazokat a megjegyzéseket tehetjük, amelyeket a IV. feltétellel kapcsolatban kimondottunk. Speciálisan, ha a $\varrho_k^t(y, \tilde{y})$ függvények k és t szerint egyenletesen korlátosak, azaz, ha

$$|\varrho_k^t(y, \tilde{y})| \leqq C < \infty, \tag{1.7.16}$$

akkor az V. feltétel ekvivalens azzal a követelménnyel, hogy a közlemény információ-stabilis legyen. A memória nélküli átviteli berendezések analogonjai a független komponensű közlemények. A 6. §-ban meg fogjuk jegyezni, hogy ilyen közlemények sorozatára teljesül az V. feltétel, amennyiben tetszőleges $\varepsilon > 0$-ra létezik olyan $(\zeta, \tilde{\zeta})$ változó-pár, hogy

$$\left\{\begin{array}{l} M\varrho(\zeta, \tilde{\zeta}) \in W_{\varkappa}; \quad I(\zeta, \tilde{\zeta}) \leqq H^1(W) + \varepsilon, \\ M|\varrho(\zeta, \tilde{\zeta}) - M\varrho(\zeta, \tilde{\zeta})|^{1+b} < \infty. \end{array}\right. \tag{1.7.17}$$

Lássuk most a tétel állítását. Rögtön szemünkbe tűnik, hogy ugyanakkor, amikor az 1.6 pontban a $\{W\}$ közlemény $\{Q, V\}$ átviteli berendezések segítségével való átviteléről volt szó, az 1. tétel állításában egy $\{W_\varepsilon\}$ közlemény $\{Q, V_\varepsilon\}$ átviteli berendezés segítségével ε pontossággal való átviteléről volt szó. Az 1. tétel állításának megfelelően elég nagy t esetén az ε szám tetszőleges kicsire vehető, úgy hogy — szemléletesen nézve a dolgot — az 1. tétel úgy fogható fel, mint az 1.6. pont állításának fordítottja. Mégis felmerül az a kérdés, lehet-e a tétel állításában az ε számot $\varepsilon = 0$-nak venni. Lentebb látni fogjuk, hogy ez csak bizonyos kiegészítő feltevések mellett lehetséges.

Nézzük most, milyen alakot ölt a W_ε feltétel az 1.4 pontban vizsgált egyes igen egyszerű példák esetében. Ha a W feltételt az (1.4.3) egyenlőtlenség fejezi ki, akkor a W_ε feltétel azt fogja jelenti, hogy

$$M\tilde{\varrho}(\xi, \tilde{\xi}) \leqq a + \varepsilon. \tag{1.7.18}$$

Ha a W feltételt az (1.4.5) egyenlőtlenség fejezi ki, akkor a W_ε feltétel azt jelenti, hogy

$$P\{\tilde{\varrho}(\xi, \tilde{\xi}) > b\} \leqq a + \varepsilon. \tag{1.7.19}$$

Végül, ha a W feltétel az (1.4.6) egyenlőségre redukálódik, akkor a W_ε feltétel azt jelenti, hogy

$$P\{\xi \neq \tilde{\xi}\} \leqq \varepsilon. \tag{1.7.20}$$

Ezen utolsó esetben tételünk azt állítja, hogy elegendő nagy t esetén az átvitel megszervezhető úgy, hogy annak a valószínűsége, hogy a bemeneti és a kimeneti közlemények nem esnek egybe, ne legyen nagyobb, mint egy előre megadott tetszőlegesen kis ε. Már említést tettünk olyan közlemény információ-stabilitásáról, amelyet egy diszkrét stacionárius ergodikus folyamat egy szakasza ad meg, az (1.4.6) reprodukálás-pontossági feltétel mellett, valamint egy olyan átviteli berendezés információ-stabilitásáról, amely egy diszkrét stacionárius, Hincsin-féle értelemben véges dimenziójú csatorna egy szakaszával van megadva. Így egy ilyen szituációban alkalmazható az 1. tétel, amely a HINCSIN által kapott [26] eredményre vezet. Mindazonáltal hangsúlyozzuk, hogy SHANNON tételének ebben a munkában való tárgyalása nem teszi lehetővé, hogy HINCSIN összes eredményeit levezessük, minthogy HINCSIN nemcsak egy folyamat véges szakasza kódolásának feladatával foglalkozik, hanem az egész — időben végtelen — folyamat kódolásának feladatával is.

Az 1. tétel folyományaként könnyen kapható a következő 2. tétel, amely arról szól, hogy bizonyos gyenge kiegészítő korlátozási feltételek mellett az 1. tétel megfogalmazásában $\{W_\varepsilon\}$-t $\{W\}$-vel és $\{Q, V_\varepsilon\}$-t $\{Q, V\}$-vel helyettesíthetjük.

2. TÉTEL. A) *Tegyük fel, hogy teljesülnek az 1. tétel I—IV. feltételei. Tegyük fel továbbá, hogy*

V′) *létezik olyan tetszőlegesen kicsi δ, hogy tetszőleges $\varepsilon \leqq \delta$ esetén az V. feltétel teljesül, ha benne a $\{W^t\}$ reprodukálása pontosságának feltételét a $\{W^t_{-\varepsilon}\}$ feltétellel helyettesítjük.*

Teljesüljön ezenkívül a következő feltétel:

VI. *A $H^t(W_\varepsilon)$ entrópiára fennáll, hogy*

$$\lim_{\varepsilon \to 0-0} \frac{H^t(W_\varepsilon)}{H^t(W)} = 1, \tag{1.7.21}$$

és itt a konvergencia egyenletes $t \geqq \bar{t}$-ben, valamilyen $\bar{t} < \infty$ mellett.

Akkor tetszőleges $\varepsilon > 0$-hoz található egy olyan elég nagy T érték, hogy minden $t \geqq T$-re a $\{W^t\}$ közlemény a $\{Q^t, V^t_\varepsilon\}$ átviteli berendezés segítségével ε pontossággal átvihető.

B) *Tegyük fel, hogy teljesülnek az 1. tétel I—III. és V. feltételei. Továbbá tegyük fel, hogy*

IV′. *létezik oly kis δ, hogy tetszőleges $\varepsilon \leqq \delta$-nál a IV. feltétel teljesül, ha benne a $\{Q^t, V^t\}$ átviteli berendezést $\{Q^t, V^t_{-\varepsilon}\}$-vel helyettesítjük.*

Tegyük fel, hogy ezenfelül teljesül a következő feltétel:

VII. *A $C^t(Q, V_\varepsilon)$ kapacitásra fennáll, hogy*

$$\lim_{\varepsilon \to 0-0} \frac{C^t(Q, V)}{C^t(Q, V_\varepsilon)} = 1, \tag{1.7.22}$$

és a konvergencia egyenletes $t \geqq \bar{t}$-ben, valamilyen $\bar{t} < \infty$ mellett.

Akkor tetszőleges $\varepsilon > 0$-hoz található oly nagy T, hogy minden $t \geqq T$-re a $\{W^t_\varepsilon\}$ közlemény a $\{Q^t, V^t\}$ átviteli berendezés segítségével ε pontossággal átvihető.

C) *Tegyük fel, hogy az 1. tétel I—III. feltételein kívül teljesülnek a fentebb megfogalmazott IV′., V′., VI. és VII. feltételek is.*

Akkor tetszőleges $\varepsilon > 0$-hoz található oly nagy T, hogy minden $t \geqq T$-re a $\{W^t\}$ közlemény a $\{Q^t, V^t\}$ átviteli berendezés segítségével ε pontossággal átvihető.

A IV′. és V′. feltételek szemléletes tartalmukat tekintve teljesen analógok a IV. és V. feltételekkel. Éppen ezért nem fűzünk hozzájuk újabb kommentárokat.

Hogy egy kissé megvilágítsuk a VI. feltétel jelentését, megjegyezzük, hogy ha a W_ε feltételt az (1. 7. 18) vagy az (1. 7. 19) egyenlőtlenség fejezi ki, akkor $a>0$ esetében kézenfekvő azt várni, hogy $H\{W_\varepsilon\}$ folytonos függvénye lesz ε-nak, úgy hogy a határátmenet egyenletességének követelménye, amely benne van a VI. feltételben, általában szólva a regularitás követelményével lesz ekvivalens, amely az alkalmazások java részében teljesül. Másrészt az (1. 7. 20) példában a $[W_\varepsilon]$ halmaz negatív ε esetén üres lesz, vagyis (l. az 1. lábjegyzetet a 436. o.-on) $H(W_\varepsilon)=+\infty$, ha $\varepsilon<0$. Itt, ha $I(\xi,\tilde{\xi})<\infty$, a VI. feltétel nem fog teljesülni. Mindazonáltal világos, hogy — általában véve — nem lehet elérni azt, hogy a bemeneti közleményben ne adódhassanak elő — bár kis valószínűséggel — (jel)eltűnések és ezért a tekintett esetben nem érhető el magának a W feltételnek a teljesülése sem. Analóg a helyzet a VII. feltétellel. Végül megjegyezzük, hogy bizonyos speciális esetekben, melyekben nem teljesül eredetileg a VI. (ill. VII.) feltétel, hasznosnak mutatkozik a $\varrho_k^t(x,\tilde{x})$ (illetve $\pi_k^t(y,\tilde{y})$) függvényt a $\beta_k^t\varrho_k^t(x,\tilde{x})$ (illetve $\bar{\beta}_k^t\pi_k^t(y,\tilde{y})$) függvénnyel helyettesíteni, ahol β_k^t (és analóg módon $\bar{\beta}_k^t$) — alkalmasan megválasztott konstansok —, és oly megfelelő átalakításokat végezni a W^t (és analóg módon a V^t) halmazon, hogy annak eredményeként a $\{W^t\}$ feltétel (és analóg módon a $\{V^t\}$) változatlan maradjon. Ha a β_k^t (illetve $\bar{\beta}_k^t$) konstansok t növekedtével ugyancsak növekszenek, akkor egy ilyen említett helyettesítés eredményeként a VI. (illetve VII.) feltétel már teljesülhet. Itt persze gondoskodni kell arról, hogy egy ilyen változó-megváltoztatás eredményeként továbbra is érvényben maradjon az 1. tétel IV. (illetve V.) feltétele.

Most megfogalmazunk egy tételt, amely azt mondja ki, hogy bizonyos kiegészítő korlátozások mellett elhagyható az 1. és 2. tételek megfogalmazásában szereplő azon kitétel, hogy a közlemény csupán ε pontossággal vihető át egy távközlési csatorna segítségével.

3. TÉTEL. A) *Tegyük fel, hogy az 1. tétel I—V. feltételein kívül még a következő feltételek is teljesülnek:*

VIII. *Léteznek oly* $(\xi^t,\tilde{\xi}^t)$ *és* $(\eta^t,\tilde{\eta}^t)$ *változó-pár sorozatok, melyek a IV. és V. feltételekben felsorolt tulajdonságokon kívül még a következő a), b), c) és d) tulajdonságokkal is rendelkeznek:*

a) *Valamilyen* $\hat{b}>0$ *és*

$$\hat{c}^t=\max_{k=1,\dots,M^t}\int_{X^t}\int_{\tilde{X}^t}|\varrho_k^t(x,\tilde{x})-M\varrho_k^t(\xi,\tilde{\xi})|^{1+\hat{b}}p_\xi^t x p_{\tilde{\xi}}^t(dx,d\tilde{x}) \tag{1.7.23}$$

mellett tetszőleges $a>0$*-ra*

$$\lim_{t\to\infty}\hat{c}^t 2^{-aH^t(W)}=0. \tag{1.7.24}$$

b) *Tetszőleges* $\varepsilon>0$, *tetszőleges* $a>0$, *és tetszőleges* $\delta>0$ *esetén az* (1.7.11) *egyenlőséggel definiált* c^t *konstansra fennáll*[1]*:*

$$\lim_{t\to\infty}(c^t)^a p^t_{\xi\tilde{\xi}}\left(\left|\frac{i_{\xi\tilde{\xi}}(x,\tilde{x})}{I(\xi,\tilde{\xi})}-1\right|>\delta\right)=0. \tag{1.7.25}$$

c) *Létezik olyan* $\tilde{x}^t_+$ *pont, hogy ha*

$$v^t=\max_{k=1,\dots,M^t}\int_{X^t}|\varrho^t_k(x,\tilde{x}_+)-M\varrho^t_k(\xi,\tilde{\xi})|^{1+\hat{b}}p^t_\xi(dx), \tag{1.7.26}$$

tetszőleges $\delta>0$, $a>0$*-ra*[2]

$$\lim_{t\to\infty}\left[2^{-aH^t(W)}+p^t_{\xi\tilde{\xi}}\left(\left|\frac{i_{\xi\tilde{\xi}}(x,\tilde{x})}{I(\xi,\tilde{\xi})}-1\right|>\delta\right)+\right. \tag{1.7.27}$$

$$\left.+p^t_{\eta\tilde{\eta}}\left(\left|\frac{i_{\eta\tilde{\eta}}(y,\tilde{y})}{I(\eta,\tilde{\eta})}-1\right|>\delta\right)\right](v^t)^a=0.$$

A c) *feltétel nyilván teljesül,*[3] *ha teljesül az* a) *feltétel, és ha tetszőleges* $a>0$ *és* $\delta>0$*-ra*

$$\lim_{t\to\infty}[(\hat{c}^t)^a+(M^t)^a]\left[p^t_{\xi\tilde{\xi}}\left(\left|\frac{i_{\xi\tilde{\xi}}(x,\tilde{x})}{I(\xi,\tilde{\xi})}-1\right|>\delta\right)+p^t_{\eta\tilde{\eta}}\left(\left|\frac{i_{\eta\tilde{\eta}}(y,\tilde{y})}{I(\eta,\tilde{\eta})}-1\right|>\delta\right)\right]=0. \tag{1.7.28}$$

d) *Tetszőleges* $\delta>0$*-ra léteznek olyan* $B^t_\delta\in S^t_X\times S^t_{\tilde{X}}$ *halmazsorozatok és* J^t_δ *konstansok, hogy*

1) $(x^t,\tilde{x}^t)\in B^t_\delta$ *mellett és minden* $k=1,\dots,M^t$*-re*

$$|\varrho^t_k(x,\tilde{x})-M\varrho^t_k(\xi,\tilde{\xi})|\leqq J^t_\delta, \tag{1.7.29}$$

2) *fennáll a következő limes-reláció:*

$$\lim_{t\to\infty}J^t_\delta\left[p^t_{\eta\tilde{\eta}}\left(\left|\frac{i_{\eta\tilde{\eta}}(y,\tilde{y})}{I(\eta,\tilde{\eta})}-1\right|>\delta\right)+2^{-\delta H^t(W)}\right]=0, \tag{1.7.30}$$

3) *tetszőleges* $a>0$*-ra*

$$\lim_{t\to\infty}[1-p^t_{\xi\tilde{\xi}}(B_\delta)][(c^t)^a+(M^t)^a+(v^t)^a+1]=0. \tag{1.7.31}$$

A d) *feltétel nyilván teljesül*[4]*, ha tetszőleges* $a>0$*-ra*[5]

$$\lim_{t\to\infty}[(c^t)^a+(M^t)^a]p^t_{\eta\tilde{\eta}}\left(\left|\frac{i_{\eta\tilde{\eta}}(y,\tilde{y})}{I(\eta,\tilde{\eta})}-1\right|>\delta\right)=0. \tag{1.7.32}$$

[1] Ha az információ-sűrűségek valamelyike nem létezik, a megfelelő kifejezést 0-val egyenlőnek vesszük.
[2] L. a megelőző lábjegyzetet.
[3] E tények bizonyítását l. az 5.5. pontban.
[4] E tények bizonyítását l. az 5.5. pontban.
[5] L. az [1] lábjegyzetet a 440. oldalon.

Akkor tetszőleges $\varepsilon>0$-ra létezik oly nagy T, hogy minden $t \geq T$-re a $\{W_\varepsilon^t\}$ közlemény átvihető a $\{Q^t, V_\varepsilon^t\}$ átviteli berendezés segítségével[1].

B) *Tegyük fel, hogy az 1. tétel I—III. feltételei, valamint a 2. tétel IV.', V'., VI., VII. feltételei teljesülnek. Tegyük fel továbbá, hogy teljesül a következő feltétel.*

VIII'. *Létezik oly kis δ, hogy tetszőleges $\varepsilon \leqq \delta$-ra a VIII. feltétel teljesül, ha benne a $\{W^t\}$ közleményt $\{W_{-\varepsilon}^t\}$-nal és a $\{Q^t, V^t\}$ átviteli berendezést a $\{Q^t, V_{-\varepsilon}^t\}$ átviteli berendezéssel helyettesítjük.*

Akkor létezik oly nagy T, hogy minden $t \geq T$-re a $\{W^t\}$ közlemény átvihető a $\{Q^t, V^t\}$ átviteli berendezés segítségével.

Nézzük meg a most megfogalmazott tételben szereplő VIII. feltétel szemléletes jelentését. Mindenekelőtt megjegyezzük, hogy hasonló rendeltetésű kiegészítő feltétel szükségessége amiatt merül fel, hogy ha a $\varrho_k^t(x, \tilde{x})$ függvények nem korlátosak, akkor — bár a ξ^t és $\tilde{\xi}^t$ változók, amelyek az ε pontosságú átvitel definíciójában szerepelnek, csak ezen kis ε valószínűséggel különböznek, — az $M\varrho_k^t(\xi^t, \tilde{\xi}^t)$ és $M\varrho_k^t(\xi^t, \tilde{\xi}^t)$ várható értékek még igen erősen eltérhetnek egymástól. A VIII. a), VIII. b), VIII. c), valamint a VIII. d) feltételek úgy tekinthetők, mint a ϱ_k^t függvények egyenletes korlátossága követelményeinek bizonyos enyhített alakjai. Ezek mind nyilvánvalóan teljesülnek, ha teljesültek az (1. 7. 16) egyenletes korlátossági feltételek.

Másrészt abban az esetben is, amidőn a függvények nem korlátosak, teljesül általában a VIII. feltétel. Ugyanis az információ-stabilis átviteli berendezések és közleményekre reális határok közt megadható példák javarészében tetszőleges $\delta>0$-ra létezik olyan $a>0$, hogy

$$\lim_{t\to\infty} p_{\eta\tilde{\eta}}^t\left(\left|\frac{i_{\eta\tilde{\eta}}(y, \tilde{y})}{I(\eta, \tilde{\eta})}-1\right|>\delta\right)2^{aC^t(Q,V)}=0, \tag{1.7.33}$$

és

$$\lim_{t\to\infty} p_{\xi\tilde{\xi}}^t\left(\left|\frac{i_{\xi\tilde{\xi}}(x, \tilde{x})}{I(\xi, \tilde{\xi})}-1\right|>\delta\right)2^{aH^t(W)}=0. \tag{1.7.34}$$

Például memória nélküli átviteli berendezések és független komponensű közlemények esetére az (1. 7. 33), (1. 7. 34) állítások — mint azt a 6. §-ban látni fogjuk — megkaphatók, mint független valószínűségi változók összegei nagy ingadozásainak valószínűségeire vonatkozó jól ismert becslések következményei (vö. [1] III. rész, 2. fej.). Mindazonáltal, ha az (1. 7. 33) és (1. 7. 34) feltételek

[1] Ez az állítás kiegészíti a 2. tétel C) állítását, amely tétel A) és B) állításainak analóg módon megfogalmazott kiegészítései szintén igazak.

teljesülnek, akkor a tétel (1.7.5) és (1.7.12) feltételeiből következik, hogy teljesülni fognak VIII. b), VIII. c), VIII. d) feltételeink is (a VIII. c) feltételt az (1.7.28) alakban kell venni, a VIII. d) feltételt pedig az (1.7.32) alakban).

A VIII. d) feltétel (1.7.32) alakjának és a VIII. b) feltételnek a szemléletes jelentése az, hogy $t\to\infty$ esetén a $\varrho_k^t(x,\tilde{x})$ függvényt átlagban korlátozó c^t konstans és az M^t szám növekedése nem lehet nagyon gyors az információ-stabilitás beállásának sebességéhez viszonyítva (a VIII. d) feltétel általános megfogalmazása szükséges, mert az $M^t\to\infty$ esetben, és egyenletesen korlátos $\varrho_k^t(x,\tilde{x})$ függvények mellett az (1.7.32) feltétel esetleg nem teljesül).

A VIII. a) feltétel részletesebb kommentárokat kíván. Az összes többi feltételektől abban különbözik ez lényegesen, hogy ennél $\varrho_k^t(x,\tilde{x})$-nak nem a $p_{\xi\tilde{\xi}}^t(dx,d\tilde{x})$ mérték szerinti, hanem a $p_\xi^t\times p_{\tilde{\xi}}^t(dx,d\tilde{x})$ mérték szerinti várható értékeit vizsgáljuk. Hogy rávilágítsunk arra, miért szükséges hasonló típusú feltétel, tekintsünk egy egyszerű közleménypéldát. Nevezetesen tegyük fel, hogy az X^t és $\tilde{X}^t$ terek végesek és azonosak egymással, és hogy adva van az egyetlen

$$\varrho_1^t(x,\tilde{x})=\begin{cases}0, & \text{ha}\quad x=\tilde{x},\\ D^t, & \text{ha}\quad x\neq\tilde{x}\end{cases}$$

függvény, ahol a konstans $D^t\to\infty$, a W feltétel pedig abból áll, hogy $M\varrho_1^t(\xi,\tilde{\xi})=0$. Az átvitelkor fellépő hibák is arra redukálódnak, hogy — bár kis valószínűséggel — $\xi^t\neq\tilde{\xi}^t$, ahol $\tilde{\xi}^t$ a kimeneti közlemény. De ha $D^t\to\infty$ elég gyorsan, akkor $M\varrho^t(\xi,\tilde{\xi})$ nem lesz közel zérushoz. Másrészről $\varrho_1^t(x,\tilde{x})=0$ a $p_{\xi\tilde{\xi}}^t(dx,d\tilde{x})$ mérték szerint és ezért itt teljesülni fognak az összes korlátozások, a VIII. a) feltételen kívül, amely általában véve nem fog teljesülni, minthogy $\hat{c}^t\approx(D^t)^{1+\hat{b}}$, ha nagyszámú pont van az X halmazban. A VIII. c) feltétel szemléletes jelentése közel áll a VIII. a) feltétel szemléletes jelentéséhez.

Befejezésül megmutatjuk, hogy a helyzet lényegesen egyszerűsödik, ha feltesszük, hogy a $\varrho_k^t(x,\tilde{x})$, $\pi_k^t(x,\tilde{x})$ függvények, valamint ezen függvények M^t, ill. N^t mennyiségei egyenletesen korlátosak. Minthogy ez a speciális eset mutatkozik a legfontosabbnak, kimondjuk a következő tételt, amely a 3. tétel következménye:

4. TÉTEL. *Legyenek adva a $\{W^t\}$ közlemények és a $\{Q^t,V^t\}$ átviteli berendezések olyan információ-stabilis sorozatai, melyekre fennáll:*

(1.7.3′) 1) $$\lim_{t\to\infty}H^t(W)=\infty,$$

(1.7.4′) 2) $$\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{H^t(W)}{C^t(Q,V)}<1.$$

Tegyük fel továbbá, hogy bizonyos $\bar{M}$, $\bar{N}$, C konstansokra és minden k és t-re fennáll:

$$M^t \leqq \bar{M}, \quad N^t \leqq \bar{N}, \quad |\varrho_k^t(x, \tilde{x})| \leqq C, \quad |\pi_k^t(y, \tilde{y})| \leqq C. \tag{1.7.35}$$

Akkor tetszőleges $\varepsilon > 0$-ra létezik oly nagy T, hogy minden $t \geqq T$-re a $\{W_\varepsilon^t\}$ közlemény átvihető a $\{Q^t, V_\varepsilon^t\}$ átviteli berendezések segítségével.

1.8. Közleményforrás és távközlési csatorna.

Korábbi szerzők munkáiban a közlemény és az átviteli berendezés általunk használt fogalmai helyett a közleményforrás, ill. a távközlési csatorna fogalma szerepel. A különbség durván szólva abban áll, hogy a jelen cikkben bevezetett tárgyalásmód olyan információ tényleges átvitelét juttatja kifejezésre, amely mindig bizonyos korlátos — bár esetleg igen nagy — időszakasz folyamán halad át. A közleményforrás és a távközlési csatorna fentebb említett fogalmai azon alapulnak, hogy az információ tartós átvitelét idealizálva, azt végtelen időtartamon keresztül folyó átvitelként tekintik. Mindkét tárgyalásmód lényegében egy és ugyanazon reális szituáció egy matematikai modellje, s ezért egyformán jogos. A jelen munkában követett tárgyalásmód előnye az, hogy a tételek megfogalmazása, valamint a bizonyítások igen egyszerűek; ugyanakkor az a tárgyalásmód, amely az átvitel végtelen tartamára épít, sokkal alkalmasabb olyan reális jelentéssel bíró fogalmak bevezetésére, mint az információ létesülésének sebessége, időegység alatti átlagos (csatorna) kapacitás, a kódolással kapcsolatos késleltetés időbeli stacionárius jellege, é. í. t. (ezeket a fogalmakat a véges modell alapján is be lehet vezetni, csak kissé kevésbé kézenfekvő módon). Shannon tétele közleményforrás és távközlési csatorna esetére levezethető a Shannon-féle tételnek közlemények és átviteli berendezések esetére szóló alakjából, viszonylag nem nehéz kiegészítő meggondolások segítségével. Ennek a részletes tárgyalását azonban más munkában adjuk majd meg. Itt összehasonlítás céljára csak az alapvető fogalmak megfogalmazását közöljük, abban az általános alakban, amelyet a jelen munka egész stílusa diktál.

Nevezetesen azt fogjuk mondani, hogy adva van a $\mathfrak{W}$ *közleményforrás*, ha a valós tengely minden $\Delta = (s, t]$ intervallumához hozzá van rendelve a bemeneti és kimeneti közlemények (X^Δ, S_X^Δ); $(\tilde{X}^\Delta, S_{\tilde{X}}^\Delta)$ tereivel és a ξ^Δ és $\tilde{\xi}^\Delta$ közlemények együttes eloszlására tett W^Δ korlátozásokkal megadott $\{W^\Delta\}$ közlemény. Emellett teljesülnie kell a következő megegyezési feltételeknek: ha $\Delta_1 = (s, t]$, $\Delta_2 = (t, u]$ és $\Delta = (s, u)$, akkor

1°. Az (X^Δ, S_X^Δ) és $(\tilde{X}^\Delta, S_{\tilde{X}}^\Delta)$ tereknek egybe kell esniök az $(X^{\Delta_1} \times X^{\Delta_2}$ $S_X^{\Delta_1} \times S_X^{\Delta_2})$, $(\tilde{X}^{\Delta_1} \times \tilde{X}^{\Delta_2}$, $S_{\tilde{X}}^{\Delta_1} \times S_{\tilde{X}}^{\Delta_2})$ szorzat-terekkel.

2°. A $\{W^{\Delta}\}$ közlemény P_{ξ} eloszlása a bemeneten olyan, hogy ha $\xi=(\xi^1,\xi^2)$, ahol ξ^1 és ξ^2 értékeiket az $(X^{\Delta_1}, S_X^{\Delta_1})$, illetve $(X^{\Delta_2}, S_X^{\Delta_2})$-ből veszik, akkor ξ^1 a $\{W^{\Delta_1}\}$ közlemény eloszlásával fog bírni a bemeneten, a ξ^2 pedig a $\{W^{\Delta_2}\}$ közlemény eloszlásával a kimeneten.

3° W^{Δ} reprodukálás pontossági feltételnek azok és csak azok a $\xi=(\xi^1,\xi^2)$, $\tilde\xi=(\tilde\xi^1,\tilde\xi^2)$ változó-párok tesznek eleget, amelyekre ξ a bemeneti közlemény adott P_{ξ} eloszlásával rendelkezik, a (ξ^1,ξ^2), $(\tilde\xi^1,\tilde\xi^2)$ párok pedig eleget tesznek a W^{Δ_1}, illetve W^{Δ_2} pontossági feltételeknek.

Azt fogjuk mondani, hogy $\Xi=\{\xi_{st}, -\infty<s<t<\infty\}$ és $\tilde\Xi=\{\tilde\xi_{st}, -\infty<s<t<\infty\}$ valószínűségi változó-rendszerek eleget tesznek a $\mathfrak{W}$ közleményforrás reprodukálása pontossága feltételeinek, ha 1) $s<t<u$ esetén $\xi_{su}=(\xi_{st},\xi_{tu})$, $\tilde\xi_{su}=(\tilde\xi_{st},\tilde\xi_{tu})$ és 2) tetszőleges $s<t$-re a $(\xi_{st},\tilde\xi_{st})$ pár eleget tesz a $W_{(s,t]}$ közlemények reprodukálása pontossága feltételeinek.

A közlemény létesülésének sebességén a következő számot fogjuk érteni:

$$H(\mathfrak{W})=\lim_{t-s\to\infty}\frac{1}{t-s}H(W_{(s,t]}), \tag{1.8.1}$$

amennyiben ez a határérték létezik. Egy kissé bonyolultabb a $\mathfrak{Q}$ *távközlési csatorna* fogalma. Mindenekelőtt tegyük fel, hogy minden $t\in(-\infty,\infty)$-nek megfeleltettük a csatorna t időpontbeli állapotainak (F^t, S_F^t) mérhető terét. Tegyük fel továbbá, hogy minden $\Delta=(s,t]$ intervallumnak megfeleltetjük a csatorna bemeneti és kimeneti állapotainak $(Y^{\Delta}, S_Y^{\Delta})$, $(\tilde Y^{\Delta}, S_{\tilde Y}^{\Delta})$ tereit (a Δ intervallumon). Továbbá minden Δ intervallumnak megfeleltetünk egy V_{Δ} korlátozást, amelyet az $(Y^{\Delta}, S_Y^{\Delta})$, illetve $(\tilde Y^{\Delta}, S_{\tilde Y}^{\Delta})$-ba tartozó értékekkel bíró $(\eta^{\Delta},\tilde\eta^{\Delta})$ változók együttes eloszlására tettünk. Végül minden $\Delta=(s,t]$-nek feleltessünk meg egy olyan $Q^{\Delta}(f^s, y^{\Delta}, \tilde A^{\Delta})$ átmenet-függvényt — ahol $y^{\Delta}\in Y^{\Delta}$, $f^s\in F^s$, — hogy rögzített $\tilde A^{\Delta}$ mellett az mérhető legyen az (f^s, y^s) változó-pár szerint, rögzített f^s, y^{Δ} mellett pedig legyen mérték $S_{\tilde Y}^{\Delta}$-n. Ha $\mathfrak{S}^s$-valószínűség-eloszlás az (F^s, S_F^s) téren, akkor kézenfekvő módon a $(Q_{\mathfrak{S}^s}^{\Delta}, V^{\Delta})$ átviteli berendezést a következő függvény segítségével határozzuk meg:

$$Q_{\mathfrak{S}^s}^{\Delta}(y^{\Delta}, \tilde A^{\Delta})=\int_{F^s} Q^{\Delta}(f^s, y^{\Delta}, \tilde A^{\Delta})\mathfrak{S}^s(df). \tag{1.8.2}$$

Továbbá, adva vannak a csatorna állapotaira vonatkozó olyan

$$R^{\Delta}(f^s, y^{\Delta}, B^t),\ f^s\in F^s,\ y^{\Delta}\in Y^{\Delta},\ B^t\in S_F^t$$

átmenet-függvények, hogy ezek rögzített B^t mellett a változó-pár mérhető függvényei, rögzített (f^s, y^{Δ}) mellett pedig mértékek az S_F^t téren.

Az előbb bevezetett objektumok $\Delta_1=(s,t]$, $\Delta_2=(t,u]$, $\Delta=(s,u]$ esetén tegyenek eleget a következő megegyezési feltételeknek:

1°. Az (Y^s, S_Y^Δ), illetve $(\tilde{Y}_\Delta, S_{\tilde{Y}}^\Delta)$ terek essenek egybe az $(Y^{\Delta_1}\times Y^{\Delta_2}$, $S_Y^{\Delta_1}\times S_Y^{\Delta_2})$, illetve $(\tilde{Y}^{\Delta_1}\times\tilde{Y}^{\Delta_2}$, $S_{\tilde{Y}}^{\Delta_1}\times S_{\tilde{Y}}^{\Delta_2})$ szorzat-terekkel.

2°. Tetszőleges rögzített $f^s\in F^s$, $y^{\Delta_1}\in Y^{\Delta_1}$, $y^{\Delta_2}\in Y^{\Delta_2}$, $y^\Delta=(y^{\Delta_1}, y^{\Delta_2})$, $\tilde{A}^\Delta=\tilde{A}^{\Delta_1}\times\tilde{A}^{\Delta_2}$, $\tilde{A}^{\Delta_i}\in S_{\tilde{Y}}^{\Delta_i}$-re

$$Q^\Delta(f^s, y^\Delta, \tilde{A}^\Delta)=\int_{F^t} Q^{\Delta_1}(f^s, y^{\Delta_1}, \tilde{A}^{\Delta_1})Q^{\Delta_2}(f^t, y^{\Delta_2}, \tilde{A}^{\Delta_2})R^{\Delta_1}(f^s, y^{\Delta_1}, df^t). \tag{1.8.3}$$

3°. Tetszőleges rögzített $f^s\in F^s$, $B''\in S_F^u$, $y^\Delta=(y^{\Delta_1}, y^{\Delta_2})$-re

$$R^\Delta(f^s, y^\Delta, B'')=\int_{F^t} R^{\Delta_2}(f^t, y^{\Delta_2}, B'')R^{\Delta_1}(f^s, y^{\Delta_1}, df^t). \tag{1.8.4}$$

Szemléletes szempontból nézve, (1.8.4)-et megvilágíthatjuk azzal, hogy azt mondjuk: adott bemeneti jel mellett a csatorna állapotai Markov-folyamatot képeznek, (1.8.3) pedig azt jelenti, hogy a kimeneti jel a csatorna adott állapota mellett valamilyen időpontban nem függ az ezen időpontig szerepelt bemeneti jelektől.

A bevezetett definíció nemcsak azon nemrég megjelent [31] munka gondolatait foglalja magában, amelyben analóg definíciót adtak meg a diszkrét esetre, hanem egy csatorna Feinstein—Hincsin-féle meghatározását is (l. [23], [26]). Ez utóbbi esetben a csatorna állapotaiként a bemenetén és kimenetén levő jeleket kell venni, bizonyos időszakra, amelyet a csatorna memóriájának tartama ad meg,

Azt fogjuk mondani, hogy a

$$H=\{\eta_{st}, -\infty<s<t<\infty\},\qquad \tilde{H}=\{\tilde{\eta}_{st}, -\infty<s<t<\infty\}$$

valószínűségi változó-rendszereket a Ω csatorna kapcsolja össze, ha megadhatók olyan $\{\varphi^t, -\infty<t<\infty\}$ valószínűségi változók, hogy — tetszőleges t-re bevezetve a $H_-^t=\{\eta_{su}, u\leq t\}$, $\tilde{H}_-^t=\{\tilde{\eta}_{su}, u\leq t\}$, $H_+^t=\{\eta_{su}, s>t\}$, $\tilde{H}_+^t=\{\tilde{\eta}_{su}, s>t\}$, $\Phi_-^t=\{\varphi_u, u<t\}$ jelöléseket, a következőket kapjuk:

1°. Tetszőleges $s<t<u$-ra $\eta_{su}=(\eta_{st}, \eta_{tu})$, $\tilde{\eta}_{su}=(\tilde{\eta}_{st}, \eta_{tu})$.

2°. Tetszőleges $\Delta=(s, t]$ és $\tilde{A}\in S_{\tilde{Y}}^\Delta$ mellett a következő feltételes valószínűségre 1 valószínűséggel fennáll:

$$P\{\tilde{\eta}_{st}\in\tilde{A}\,|\,\eta_{st}, \varphi_s, H_-^s, \tilde{H}_-^s, \Phi_-^s\}=Q^\Delta(\varphi_s, \eta_{st}, \tilde{A}). \tag{1.8.5}$$

3°. Tetszőleges $\Delta=(s, t]$, $B\in S_F^t$ mellett a következő feltételes valószínűségre fennáll:

$$P\{\varphi_t\in B\,|\,\eta_{st}, \varphi_s, H_-^s, \tilde{H}_-^s, \Phi_-^s\}=R^\Delta(\varphi_s, \eta_{st}, B). \tag{1.8.6}$$

4°. Az $\eta_{st}, \tilde{\eta}_{st}$ pár eleget tesz a $V_{(s,t]}$ korlátozásnak.

A $\mathfrak{Q}$ távközlési csatorna *időegységre vonatkozó átlagos kapacitásának* a következő mennyiséget nevezzük:

$$C(\mathfrak{Q}) = \lim_{t-s\to\infty} \frac{1}{t-s} \sup_{\mathfrak{S}^s} C(Q^{\Delta}_{\mathfrak{S}^s}, V^{\Delta}),$$

amennyiben ez a határérték létezik. Azt fogjuk mondani, hogy a $\mathfrak{W}$ *közleményforrás* $T>0$*-t meg nem haladó késleltetéssel átvihető a* $\mathfrak{Q}$ *távközlési csatornán*, ha létezik a $H, \tilde{H}, \Xi, \tilde{\Xi}$ változók olyan megválasztása, hogy:

1°. A $\Xi, \tilde{\Xi}$ mennyiségek eleget tesznek a $\mathfrak{W}$ közleményforrás reprodukálása pontossága feltételeinek.

2°. A $H, \tilde{H}$ mennyiségeket a $\mathfrak{Q}$ csatorna kapcsolja össze; ha bevezetjük a következő változókat:

$$\Xi^t_- = \{\xi_\Delta, \Delta \subset (-\infty, t]\}, \qquad \Xi^t_+ = \{\xi_\Delta, \Delta \subset (t, \infty)\},$$

$$H^t_- = \{\eta_\Delta, \Delta \subset (-\infty, t]\}, \qquad H^t_+ = \{\eta_\Delta, \Delta \subset (t, \infty)\},$$

és analóg módon $\tilde{\Xi}^t_-$, $\tilde{\Xi}^t_+$, $\tilde{H}^t_-$, $\tilde{H}^t_+$-t, akkor

3°. Tetszőleges t mellett a Ξ^t_+, Ξ^t_-, H^t_- változók Markóv-láncot képeznek (ez a feltétel azt fejezi ki, hogy a kódolás műveletében nincs megelőzés).

4°. Tetszőleges t mellett a (Ξ, H^t_+), H^t_-, $\tilde{H}^t_-$ változók Markov-láncot alkotnak (ez a feltétel azt jelenti, hogy a csatornán keresztül folyó átvitelben nincs megelőzés, valamint azt, hogy a kimeneti jel csupán a bemeneti jeltől függ, nem pedig a bemeneti közleménytől).

5°. Tetszőleges t mellett a következő három változó $(\Xi, H, \tilde{H}^{t+T}_+)$, $\tilde{H}^{t+T}_-$, $\tilde{\Xi}^t_-$ Markov-láncot képez (ez a feltétel azt jelenti, hogy a kimeneti közlemény kimeneti jel szerint folyó reprodukálásának a késése nem lépi túl T-t, és hogy a kimeneti közlemény adott kimeneti jelnél nem függ a bemeneti jelektől és közleménytől).

SHANNON tételének az a tartalma, hogy ha $H(\mathfrak{W}) < C(\mathfrak{Q})$, akkor a $\mathfrak{W}$ közleményforrás átvihető a $\mathfrak{Q}$ csatornán bizonyos késleltetéssel, ha pedig az ellenkező egyenlőtlenség áll fenn, akkor semmilyen késleltetéssel nem vihető át. Itt persze lehetségesek e megfogalmazás „ε-élesítései", hasonlóan az 1. 7 pont tételeihez. Ezekkel az élesítésekkel itt nem fogunk részletesebben foglalkozni, valamint nem fogjuk vizsgálni azon korlátozásokat sem, melyek mellett ez a tétel igaz.

Fordította: *Medgyessy Pál,*
Magyar Tudományos Akadémia
Matematikai Kutató Intézete

A TUDOMÁNYOS MINŐSÍTŐ BIZOTTSÁG HÍREI

Grätzer György kandidátusi értekezésének nyilvános vitája

A *Tudományos Minősítő Bizottság* 1960. március 11-én rendezte meg GRÄTZER GYÖRGY *„Standard ideálok"* című kandidátusi értekezésének nyilvános vitáját a Bolyai János Matematikai Társulat előadótermében. Az értekezés opponensei FUCHS LÁSZLÓ, a matematikai tudományok doktora és SZÁSZ GÁBOR kandidátus voltak. A bíráló bizottság elnöki tisztét RÉDEI LÁSZLÓ akadémikus látta el.

Az elnöki megnyitó után a bíráló bizottság titkára ismertette GRÄTZER GYÖRGY eddigi tudományos munkásságát, majd a jelölt előadta értekezésének téziseit.

Az értekezés célja egy olyan ideáltípus — a standard ideál — bevezetése, mely hasonló szerepet tölt be a hálók körében, mint a normálosztó, illetve az ideál a csoportok, illetve a gyűrűk esetében. A jelölt bevezeti a standard elem és ideál fogalmát, és kimutatja, hogy gyengén moduláris hálóban a disztributív, standard és neutrális elem fogalma egybeesik. A jelölt ezekből DILWORTH és SHICH-CHIAN WANG egy-egy tételének általánosítását nyeri. Ha bizonyos csoportelméleti fogalmak, nevezetesen: részcsoport, normálosztó, faktorcsoport, csoportművelet helyébe az ideál, standard ideál, faktorháló és egyesítés fogalmát írjuk megfelelően, akkor számos csoportelméleti tételt átfogalmazva helyes hálóelméleti tételhez jutunk. Érvényes többek közt a két izomorfia-tétel, a Zassenhaus-lemma, a Jordan—Hölder—Schreier-tétel, és a Schreier-féle bővítési probléma is megoldható.

A tézisek ismertetése után az elnök felkérte az opponenseket opponensi véleményeik felolvasására.

FUCHS LÁSZLÓ, a matematikai tudományok doktora, opponens véleményében kiemeli a dolgozat világos célkitűzését, mely természetesen felvetődő problémák megoldására törekszik. Az értekezés nagyon igényes munka, amelynek elfogadását feltétlenül javasolja. Külön kiemeli a hálóelmélet széles skálájának biztos kézzel való átfogását, az irodalom alapos ismeretét, a mondanivalók világos kifejezését és a bizonyítások csiszoltságát. Megemlíti a jelölt helyes problémalátását és erős absztraháló készségét. Hiányolja, hogy az értekezésből nem derül ki, hogy a standard ideál fogalma valóban „az" igazi, „a" keresett jó fogalom. Ezek után több kérdést tesz fel a jelöltnek.

SZÁSZ GÁBOR kandidátus, opponens kifejti, hogy az értekezést a bevezetett új fogalom hasznossága szempontjából pozitívan lehet értékelni. A dolgozat tanúsítja azt, hogy a jelölt jól ismeri a hálóelmélet klasszikus és újabb eredményeit, és jártas a hálóelmélet számolástechnikájában. Sajnálatosnak tartja azonban az értekezés gondatlan megfogalmazását. Több apróbb elírási és jelölési pontatlanság említése után kifejti azt az álláspontját, hogy az értekezés ugyan tartalmi szempontból kétségtelenül megüti a kandidátusi értekezések szokásos színvonalát, de gondatlan, elsietett fogalmazása miatt csak megfelelő átfogalmazás után javasolja elfogadásra.

Ezek után GRÄTZER GYÖRGY válaszolt az opponensi véleményekre. Válaszában megköszönte az opponensek fáradságát és számára igen hasznos bírálatát. FUCHS LÁSZLÓ kérdésére válaszolva közli, azóta már bebizonyította, hogy a standard ideál fogalma valóban „a" keresett fogalom. Ezek után FUCHS LÁSZLÓ többi kérdésére és SZÁSZ GÁBOR megjegyzéseire válaszolt.

FUCHS LÁSZLÓ opponens elfogadja a választ, és örül, hogy az általa felvetett probléma megoldása bizonyos értelemben befejezetté tette a standard ideálok elméletét. A választ nagyjából SZÁSZ GÁBOR opponens is elfogadja, de több megjegyzést tesz. Ezután az elnök megnyitja a vitát.

KERTÉSZ ANDOR felveti a standard ideálok és a szabad hálók kapcsolatának megvizsgálását. KALMÁR LÁSZLÓ felveti azon kérdés megvizsgálását, vajon mi az oka a szereplő megfeleltetés létezésének, majd STEINFELD OTTÓ szólalt fel. Mivel több hozzászóló nincs, az elnök felkéri a jelöltet, válaszoljon az elhangzottakra.

GRÄTZER GYÖRGY először SZÁSZ GÁBORnak válaszolt. A KALMÁR LÁSZLÓ által felvetett kérdés irányában folynak már kutatások, de kielégítő eredmény még nem született. A KERTÉSZ ANDOR által felvetett problémát igen nehéznek tartja. A választ a jelenlevők kielégítőnek tartották.

A bíráló bizottság a lefolyt vita alapján megállapítja, hogy az értekezés jelentős eredményeket tartalmaz, amelyek figyelemre méltó előrehaladást jelentenek a tetszőleges hálók ideáljaira vonatkozó ismereteink kiterjesztése szempontjából. Kiemelendő a jelölt helyes problémalátása és bizonyítási készsége. Kár, hogy a megfogalmazás néhány helyen nem elég szabatos.

Ennek alapján a bíráló bizottság *egyhangúlag javasolja a Tudományos Minősítő Bizottságnak, hogy* GRÄTZER GYÖRGYÖT *nyilvánítsa a matematikai tudományok kandidátusává.*

Fried Ervin
a matematikai tudományok kandidátusa

Schmidt E. Tamás kandidátusi értekezésének nyilvános vitája

A *Tudományos Minősítő Bizottság* 1960. március 11-én rendezte meg SCHMIDT E. TAMÁS *„Algebrai struktúrák kongruenciarelációiról"* című kandidátusi értekezésének nyilvános vitáját a Bolyai János Matematikai Társulat előadótermében. Az értekezés opponensei RÉDEI LÁSZLÓ akadémikus és FUCHS LÁSZLÓ, a matematikai tudományok doktora voltak. A bíráló bizottság elnöki tisztét KALMÁR LÁSZLÓ akadémiai levelező tag látta el.

Az elnöki megnyitó után a bíráló bizottság titkára ismertette SCHMIDT E. TAMÁS eddigi tudományos munkásságát, majd a jelölt előadta értekezésének téziseit.

Az értekezés az algebrai struktúrák kongruenciarelációi hálójának szerkezetével kapcsolatban a következő három kérdést vizsgálja: 1. Meghatározandók egy hálóosztály azon egyedei, amelyek valamely adott struktúraosztálybeli struktúra kongruenciareláció-hálójával izomorfak. 2 Meghatározandók mindazon adott struktúraosztálybeli struktúrák, melyek kongruenciareláció-hálója egy adott hálóosztály valamelyik eleme. 3. Meghatározandók egy struktúraosztály mindazon egyedei, melyek kongruenciareláció-hálója valamely más struktúraosztálybeli struktúra kongruenciareláció-hálójával izomorf.

A jelölt a fenti vizsgálatokhoz segítségül veszi az algebrai struktúroidok kongruenciareláció-hálóját.

A jelölt bebizonyítja DILWORTH egy sejtését, mely szerint egy véges háló akkor és csak akkor izomorf valamely véges háló kongruenciarelációhálójával, ha a szóban forgó háló disztributív. A későbbiekben a jelölt ezt a tételt messzemenően általánosítja.

A tézisek ismertetése után az elnök felkérte az opponenseket opponensi véleményeik felolvasására.

RÉDEI LÁSZLÓ akadémikus, opponens megállapítja, hogy az értekezés a hálóelméletnek, illetve az általános algebrának elvi fontosságú kérdéseivel foglalkozik, ezekben több mély eredményt ér el. Tételeinek bizonyítása s az ezekben végzett konstrukciók nagy ügyességet s ötletességet árulnak el. Javasolja az értekezés elfogadását, mely — véleménye szerint — még doktori értekezésnek is elfogadható volna.

FUCHS LÁSZLÓ, a matematikai tudományok doktora, opponens megállapítja, hogy az értekezés értékes, mind problémafelvetésében, mind módszereiben ötletes és értékes munka, amely eléggé újszerű területen figyelemre méltó eredményeket ér el, és nemzetközi mértékkel mérve is érdemleges dolgozat. Az értekezés a kandidátusi értekezések színvonalát kétséget kizáróan meghaladja. Az értekezés megfogalmazása jó, stílusa világos, a lényeget általában jól domborítja ki.

Ezek után SCHMIDT E. TAMÁS válaszolt az opponensi véleményekre. Válaszában megköszönte az opponensek fáradságát és megjegyzéseit, melyekkel teljes mértékben egyetért. Az opponensek a jelölt válaszát kielégítőnek találták.

Miután az elnök a vitát megnyitotta, SZÁSZ GÁBOR szólalt fel. Kifogásolta, hogy az értekezésben csak hálók szerepelnek, s egy tétel kivételével ismert tételek új bizonyítása vagy általánosítása. Az értekezés stílusát pongyolának tartja. FUCHS LÁSZLÓ hozzászólásában kijelentette, hogy nem ért egyet SZÁSZ GÁBORnak az értekezés értékelésére vonatkozó véleményével. Véleménye szerint már a DILWORTH sejtés megoldása is elegendő lett volna az értekezéshez. Ezután RÉDEI LÁSZLÓ, ismét SZÁSZ GÁBOR, majd KALMÁR LÁSZLÓ szólaltak fel. SCHMIDT E. TAMÁS válasza után RÉDEI LÁSZLÓ felszólalására ismét válaszolt a jelölt. Válaszát a jelenlevők kielégítőnek találták.

A bíráló bizottság a lefolyt vita alapján megállapította, hogy az értekezés az általános algebrának bizonyos elvi fontosságú kérdéseivel foglalkozik, és ezen az újszerű területen több mély eredményt ér el. Kiemelendő a DILWORTH által 12 éve felvetett és azóta nyitott probléma megoldása.

Ennek alapján a bíráló bizottság *szótöbbséggel javasolja a Tudományos Minősítő Bizottságnak, hogy* SCHMIDT E. TAMÁST *nyilvánítsa a matematikai tudományok kandidátusává.*

Fried Ervin
a matematikai tudományok kandidátusa

Strommer Gyula kandidátusi értekezésének nyilvános vitája

A *Tudományos Minősítő Bizottság* 1960. június 8-án rendezte meg STROMMER GYULA *„Az egybevágóság Mollerup-féle axiómarendszerének redukciója”* című kandidátusi értekezésének vitáját. A kandidátusi értekezés opponensei: HAJÓS GYÖRGY akadémikus és VARGA OTTÓ, a Magyar Tudományos Akadémia levelező tagja. A bíráló bizottság elnöke: ALEXITS GYÖRGY akadémikus, titkára: MOLNÁR JÓZSEF a matematikai tudományok kandidátusa, tagjai: FEJES TÓTH LÁSZLÓ és SZÁSZ PÁL, a matematikai tudományok doktorai, valamint SOÓS GYULA, a matematikai tudományok kandidátusa.

Az elnök megnyitó szavai után a bíráló bizottság titkára ismertette a jelölt eddigi tudományos munkásságát, majd STROMMER GYULA ismertette értekezésének téziseit.

Ismeretes, hogy a már klasszikusnak mondható Hilbert-féle axiómarendszerben — az egybevágóság fogalmával kapcsolatban — nemcsak a szakaszok, hanem a szögek egybevágósága is alapfogalomként szerepel. 1903-ban J. MOLLERUP doktori értekezésében az egybevágóság axiómáinak olyan rendszerét adta meg, melyben egyetlen alapfogalom a szakaszok egybevágósága. Ez az axiómarendszer a Hilbert-féle III. 1, 2, 3 axiómákból, a Veronese axiómából és még egy *M* axiómából tevődik össze, mely a Veronese axiómával együtt a sík szabad mozgathatóságát biztosítja. Az utóbbi axióma lényegében a szög egyértelmű felmérhetőségét állítja. Ez a Mollerup-féle axiómarendszer szerepel KERÉKJÁRTÓ BÉLA, a geometria alapjairól írt könyvében is.

A dolgozat főeredménye az, hogy a Mollerup-féle axiómarendszert lényegesen egyszerűsítette, mégpedig kimutatta, hogy az *M* axióma, valamint a III. 1 axiómának a szakaszok egybevágóságának reflexivitására vonatkozó része levezethető a többi axiómából, az illeszkedési és rendezési axiómák felhasználásával.

1908-ban R. L. MOORE megmutatta, hogy síkban ez a redukció lehetséges, ha a maradék rendszerből, valamint az illeszkedési és rendezési axiómák alapján bebizonyítható, hogy bármely szakasznak van középpontja. Ez utóbbi létezését azonban csak folytonossági axiómák felhasználásával tudta megmutatni. A térgeometria megalapozásához az is bizonyításra szorul, hogy bármely nem egy síkban fekvő derékszög egymással egybevágó.

A dolgozat elején a szerző független alakban megfogalmazza az említett axiómarendszert. Alapfogalomnak a pontok bizonyos quaterner relációját tekinti, melyet egybevágóságnak nevez. Az egybevágóság alapján értelmezhető a szakaszok egybevágósága és nagyság szerinti összehasonlítása. Könnyen adódik a szakaszok egybevágóságára az ekvivalencia reláció, valamint az, hogy a szakaszok nagyság szerinti összehasonlítása trichotom és tranzitív. Egy ABC szög egybevágó az ABC szöggel, ha van a BA, BA, BC, BC félsugarakon rendre olyan D, D, E, E pont, hogy a BD, BE, ill. a DE szakasz egyenlő a megfelelő BD, BE, ill. DE szakasszal. A szögek így értelmezett egybevágósága független a szögszárakon felvett pontok megválasztásától. A szerző bebizonyítja továbbá, hogy a szögek így értelmezett egybevágósága ekvivalencia reláció. Tehát a szögek egyértelmű felmérhetősége nem adódik közvetlenül. Ui. a szögeknél definiálható „kisebb” relációról egyelőre nem bizonyítható, hogy a szögek egy elrendeződését biztosítja. Ez érzékelteti e rendszer nehézségét a Hilbert-féle axiómarendszerhez képest.

A dolgozat gerincét a szakaszok középpont exisztenciájának és unicitásának bizonyítása képezi. Ennek birtokában bizonyítható az *M* axióma, vagyis a szögek egyértelmű felmérhetősége. STROMMER kimutatja azt is, hogy az általa adott egybevágósági axióma csoport ekvivalens a Hilbert-féle axiómacsoporttal, továbbá azt, hogy független axiómákból áll.

A szerző téziseit kiegészíti azzal a megjegyzéssel, hogy pár nappal előbb SZÁSZ PÁL hívta fel a figyelmét arra, hogy a dolgozat eredménye nem új, azt már I. L. DORROH (1928) és H. G. FORDER (1947) is bebizonyították, erről viszont nem volt tudomása. Ezek után párhuzamot vont az általa adott felépítés és a DORROH, ill. a FORDER-féle felépítés között.

A disszertáció téziseinek elhangzása után az opponensek olvasták fel bírálatukat a jelölt disszertációjáról.

Mindkét opponensi bírálat rámutatott arra, hogy a disszertáció az egybevágósági axiómák redukciójával foglalkozik és lényeges eredménye, hogy új bizonyítást ad arra, hogy a Mollerup-féle axiómarendszer egyik axiómája felesleges.

HAJÓS GYÖRGY nagyon gondosan vizsgálta meg a dolgozatot olyan szempontból is, hogy a gondolatmenetben csak már bebizonyítottakra történt-e hivatkozás. Az okoskodást hibátlannak találta. A jelölt téziseinek kiegészítő megjegyzéséhez kapcsolódva megemlíti, hogy elolvasta mind FORDER, mindpedig DORROH dolgozatát, és megállapította, hogy a jelölt dolgozata ezektől függetlenül készült, és tárgyalása némely vonatkozásban az előzőknél szebb is.

VARGA OTTÓ külön kiemeli az eredeti gondolatokat tartalmazó részeket mint pl. az egyenlőszárú háromszög bázis szögeinek egyenlőségéről ismert tétel megfordítását tartalmazó tétel, a felezőpont egzisztenciájáról szóló tétel, a szögnek az egyik szára körül való elforgatásával szemben való invarianciáját biztosító lemma. Opponensi véleményét kiegészíti azzal a megjegyzéssel, hogy ő is elolvasta DORROH és FORDER dolgozatait, amelyektől a jelölt dolgozata eltér.

STROMMER GYULA az opponensi véleményekre adott válaszában rámutatott arra, hogy a dolgozatot leglényegesebben HAJÓS GYÖRGY azon bírálata érinti, mely a *C*3 axióma függetlenségének igazolására adott modellre vonatkozik, melyben nem teljesül a dolgozat *C*2, *C*4 és *C*6 axiómája. A félreértést a zavaros gépelés okozta és ezt helyesbített szöveggel pótolta. HAJÓS GYÖRGYnek a *C*3 axióma függetlenségére vonatkozó modellel kapcsolatos kérdésére STROMMER GYULA részletesen válaszolt.

Ugyancsak HAJÓS GYÖRGY tett említést további egyszerűsítés lehetőségéről, mely SZÁSZ PÁLtól ered. Ezzel kapcsolatban SZÁSZ PÁL megjegyezte, hogy észrevétele semmit sem von le a jelölt teljesítményének értékéből.

ALEXITS GYÖRGY megjegyzi, hogy a dolgozat kinyomtatásánál az elhangzott észrevételeket figyelembe kell venni, és ezek a kérdésnek valóban egyszerűbb megoldásához vezethetnek.

A bíráló bizottság ezután határozathozatra vonult vissza. A bizottság a megejtett szavazás után *szótöbbséggel javasolta a Tudományos Minősítő Bizottságnak, hogy Strommer Gyulát nyilvánítsa a matematikai tudományok* *kandidátusává.* A határozatában megállapította, hogy STROMMER GYULA disszertációjában egybevágósági axiómák redukciójával foglalkozik és önálló új bizonyítást adott arra, hogy a Mollerup-féle axiómarendszer egyik axiómája felesleges. Okoskodása lényegesen eltér az irodalomban található hasonló bizonyításoktól és némely vonatkozásban egyszerűbbnek is mondható. Dolgozata mintaszerűen világos, kidolgozása igen gondos munkáról tanúskodik.

Molnár József
a matematikai tudományok kandidátusa

Csongor Éva kandidátusi értekezésének nyilvános vitája

1960. június 9-én rendezte meg a *Tudományos Minősítő Bizottság* CSONGOR ÉVA: *„Vizsgálatok a Mg^{24}, Mg^{25}, Mg^{26} izotópoknak Po-alfa sugaraival történő bombázását kísérő gamma sugárzásra vonatkozólag"* c. kandidátusi disszertációjának nyilvános vitáját, az Eötvös Loránd Fizikai Társulat előadótermében.

A bíráló bizottság elnöki tisztét GYULAI ZOLTÁN akadémikus látta el, a bizottság tagjai GÁSPÁR REZSŐ és PÁL LÉNÁRD, a fizikai tudományok doktorai, FENYVES ERVIN, a fizikai tudományok kandidátusa, titkára ERŐ JÁNOS, a fizikai tudományok kandidátusa volt.

Korábbi tudományos munkáinak felsorolása után a jelölt ismertette disszertációjának téziseit. Vizsgálatainak célja szeparált Mg izotópokon létrehozott (α, p) és (α, n) reakciókat kísérő γ-sugárzás gerjesztési görbéjének és a sugárzás energiaspektrumának felvétele volt. A korábban más szerzők által végzett hasonló mérések természetes izotópkeverékkel történtek, s az ebből származó komplex gamma sugárzás kiértékelése ellentmondó eredményekre vezetett. A disszertációban tárgyalt vizsgálatoknál a gamma sugárzás gerjesztési görbéjének felvétele igen kis méretű, tehát jó geometriát biztosító Po forrásból kilépő α-részekkel történt. Az α-részek a vizsgálandó izotópból előállított igen vékony Mg rétegbe ütköztek, energiájukat a forrás és a Mg réteg közötti fékező gáz nyomásával lehetett finoman változtatni. A gerjesztési görbén bizonyos α-energiáknál rezonancia csúcsok jelennek meg, amiből a közbülső S_i magok gerjesztett nívóira lehet következtetni. A γ-sugárzás energiaspektrumának felvételével a sugárzás eredetét lehetett meghatározni, ugyanis a fellépő különböző γ-energiákat azonosítani lehetett a magreakció végtermékeként keletkező gerjesztett magok nívói közötti átmenetekkel. Ily módon tisztázni lehetett, hogy melyik folyamathoz tartozik a sugárzás nagyenergiájú komponense, ami az irodalomban egy régen vitatott kérdés.

MARX GYÖRGY, a fizikai tudományok doktora opponensi véleményében hangsúlyozta, hogy az olyan viszonylag könnyű magok esetében, mint a magnézium, a magátalakulások elméleti vizsgálata nagy nehézségekkel jár, s így fokozottabb mértékben szorulunk a kísérleti kutatások eredményeire. Ezért a disszertáció tárgyválasztását igen szerencsésnek tartja, és kiemelte, hogy a vizsgált reakciókban keletkező γ-sugárzással kapcsolatos kérdéskomplexum tisztázása nemzetközi színvonalú eredménynek tekinthető. Véleménye szerint a mintaszerű kiállítású és felépítésű disszertáció felülemelkedik a kandidátusi értekezések szokásos színvonalán, és javasolta a bíráló bizottságnak a disszertáció elfogadását.

A másik opponens BOZÓKY LÁSZLÓ, a fizikai tudományok kandidátusa volt. A témaválasztást ő is időszerűnek és jelentősnek tartotta. Opponensi véleményében főleg a disszertáció kísérleti vonatkozásaival foglalkozott. Megállapította, hogy a korábbi vizsgálatokhoz képest lényegesen többet mondó eredmény elérését elsősorban az ideális kísérleti feltételek (szcintillációs számláló alkalmazása, szeparált Mg izotópok felhasználása stb.) megteremtése tette lehetővé. Az észlelt gamma-spektrumok kiértékelésére vonatkozó néhány megjegyzés után, kiemelve a vékony magnéziumrétegek előállításánál alkalmazott technika kidolgozásának nagy jelentőségét, javasolta a külön dicséretre méltó értekezés elfogadását.

Miután az opponensi bírálatokban feltett kérdésekre a jelölt kielégítő választ adott, az elnök megnyitotta a vitát. Ennek során a hozzászólók elsősorban a gamma-spektrum alakjára, a spektrum vonalainak szignifikáns voltára vonatkozólag tettek fel kérdéseket. Végezetül GYULAI ZOLTÁN akadémikus hozzászólásában dicsérte a dolgozat világos és jó pedagógiai érzékkel történt kidolgozását, amivel olyanok számára is útmutatást ad, akik ezektől a kérdésektől távol vannak. Javasolta, hogy az ehhez hasonló kerek, és világos problémafelvetésű disszertációk kerüljenek változatlan formában magyar nyelvű kiadásra, ami elősegíthetné az egyetemi hallgatók tanulmányait, és bizonyára hasznos lenne az ilyen kérdések iránt érdeklődők számára is

Ezután a bíráló bizottság határozathozatalra vonult vissza. Döntésében *egyhangúlag javasolta a Tudományos Minősítő Bizottságnak, hogy Csongor Évát nyilvánítsa a fizikai tudományok kandidátusává.* Indololásában megemlíti, hogy a disszertáció a magfizikának egy még ma is sok nyitott kérdést rejtő fejezetével foglalkozik, a konkréten vizsgált témakörben a korábbi ellentmondó irodalmi adatokkal szemben sikerült a leglényegesebb kérdéseket tisztáznia, s az eredmények nemzetközileg is figyelemre méltóak. A disszertáció kiemelkedő értékének tekinti a problémakör mintaszerű ismertetését, és javasolja a dolgozat teljes szövegének magyar nyelvű kiadását.

A bíráló bizottság határozatának ismertetésével a disszertáció vitája véget ért.

Erő János
a fizikai tudományok kandidátusa

KÖNYVISMERTETÉS

Riesz Frigyes Összegyűjtött munkái I—II
Frédéric Riesz: Oeuvres Completes I—II
Friedrich Riesz: Gesammelte Arbeiten I—II

(Akadémiai Kiadó, Budapest, 1960)

HAAR ALFRÉD összegyűjtött munkáinak megjelenése után a Magyar Tudományos Akadémia megjelentette RIESZ FRIGYES (1880—1956) összegyűjtött munkáit is. RIESZ FRIGYES a legkiválóbb magyar matematikusok egyike. Azok közé a matematikusok közé tartozik, akik a matematikai analízis modern ágainak a megalapozásában és kifejlesztésében a legnagyobb hatással voltak. Munkássága döntő módon hozzájárult a matematikai analízis legátfogóbb és egyik legfontosabb ágának, a funkcionálanalízisnek nagyarányú fejlődéséhez. Számos általa bevezetett fogalom, általa kidolgozott módszer, valamint számos eredménye a matematika klasszikus kincsévé vált. Módszerei és eredményei közül nem egy felfedezésük után jóval később új kutatási irányok kiindulópontjává vált; gondolatai ma is élnek, és gyümölcsözően hatnak. Azzal, hogy a Magyar Tudományos Akadémia közrebocsátotta RIESZ FRIGYES összegyűjtött munkáit, RIESZ FRIGYES sok különböző folyóiratban megjelent, a matematika egymástól igen távoleső ágaival kapcsolatos dolgozatai könnyen hozzáférhetővé váltak.

RIESZ FRIGYES összegyűjtött munkái két vastag kötetben, összesen 1601 oldalon három — magyar, francia és német — nyelven jelentek meg. A kiadást — a Magyar Tudományos Akadémia megbízásából — CSÁSZÁR ÁKOS, a matematikai tudományok doktora rendezte sajtó alá; a lektorálás munkáját rajta kívül BOGNÁR JÁNOS, CZIPSZER JÁNOS, továbbá KÁRTESZI FERENC és KRÁLIK DEZSŐ, a matematikai tudományok kandidátusai végezték. A kiadás tartalmazza RIESZ FRIGYES összes dolgozatát, olyan nyelven, ahogyan azok megjelentek (magyarul, franciául, németül, angolul és olaszul), valamint *Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnus* (Paris, Gauthier—Villars, 1913, VI + 182 pp.) c. könyvének teljes szövegét is. Viszont a kiadás összeállításánál eltekintettek RIESZ FRIGYES és SZŐKEFALVI-NAGY BÉLA közös munkájaként 1952-ben megjelent „Leçons d'analyse fonctionnelle" c. könyvnek a felvételétől, egyrészt, mert annak közvetlen kidolgozásában RIESZ FRIGYES csak kisebb mértékben vett részt, másrészt, mert felvétele a kiadvány terjedelmét igen jelentősen megnövelte volna. RIESZ FRIGYES számos dolgozata nagyjából azonos szöveggel magyarul is és valamilyen idegen nyelven is megjelent; ezeknek a dolgozatoknak mindkét változata megtalálható az összegyűjtött munkákban. RIESZ FRIGYES néhány munkája azonban csak magyar nyelven jelent meg; ezeknek francia fordítása a kiadás II. Függelékében megtalálható. Ily módon ezek a munkák magyarul nem tudó matematikusok számára most válnak először hozzáférhetővé. Az I. Függelékben — a szerző hozzájárulásával — szerepel RADÓ TIBOR „Über die Fundamentalabbildung schlichter

Gebiete" (*Acta Sci. Math. Szeged,* 1 (1922—23), 240—251.) c. dolgozata, amelyben először nyert közlést a konform leképezés Riemann-féle alaptételének FEJÉR LIPÓTtól és RIESZ FRIGYEStől származó, azóta általánosan elterjedt bizonyítása. A kiadás mindkét kötetének elején egy-egy tartalomjegyzék, valamint minden kötet végén hibajegyzék van. Az I. kötet elején RIESZ FRIGYESnek egy 1925-ben készített fényképe, amelyen mint a kolozsvári tudományegyetem rektora látható, valamint egy kéziratlapjának a fotokópiája, a II. kötet elején pedig egy 1960-ban készített, az *Acta Sci. Math. Szeged* ő és FEJÉR LIPÓT 70-ik születésnapja alkalmából kiadott díszkötetében közölt fényképe, valamint 75-ik születésnapja alkalmából a Magyar Tudományos Akadémia és az Eötvös Loránd Tudományegyetem által készített plakett fotokópiája található. A háromnyelvű bevezetés és rövid életrajz után RIESZ FRIGYES összes munkáinak (összesen 95 munka) a jegyzéke — a megjelenésük sorrendjében —, továbbá összes munkáinak fotokopikus eljárással készített másolatai következnek. A kiadásban RIESZ FRIGYES munkái tárgykörük szerint a következő módon vannak csoportosítva: **A.** *Topológia,* **B.** *Valós függvénytan,* **C.** *Függvényterek,* **D.** *Analitikus függvények,* **E.** *Harmonikus és szubharmonikus függvények,* **F.** *Funkcionálanalízis,* **G.** *Ergodelmélet,* **H.** *Geometria,* végül *Vegyes kérdések.* Az I. kötetben az *A—E* csoportba, a II. kötetben a többi csoportba sorolt munkák, valamint az említett két függelék található.

Az **A** *csoport*ban szerepel például „Stetigkeitsbegriff und abstrakte Mengenlehre" (*Atti del IV. kong. Internaz. dei Mat. Roma,* 2 (1908), 18—24.) dolgozata, amely az 1908-as római matematikai kongresszuson tartott előadását tartalmazza. Ebben a dolgozatában RIESZ FRIGYES az általános topologikus tér első, valóban használható és a mai napig is (módosított, de ekvivalens formában) életképes axiómarendszerét alkotta meg. Akkor már ismeretes volt a FRÉCHET által bevezetett metrikus tér fogalma; a térfogalom általánosítására maga FRÉCHET is több sikertelennek mondható kísérletet tett. A lényegnek páratlanul mély meglátása kellett ahhoz, hogy RIESZ FRIGYES alig néhány évvel FRÉCHET első ez irányú munkáinak a megjelenése után olyan axiómarendszert adjon meg az általános topologikus tér számára, amely azóta is csak jelentéktelen mértékben volt általánosítható, s amely a topológiai vizsgálatok gerincét képező összes topologikus terekre érvényes. Ezek a vizsgálatai akkor nem keltettek különösebb visszhangot, ő maga sem folytatta az ilyen irányú kutatásait. Az általa adott topologikus térfogalom jelentősége csak a húszas években domborodott ki. A **B** *csoport*ban szerepel többek között „Sur l'intégrale de Lebesgue" (*Acta Math*, **42** (1920), 191—205.) c. dolgozata, amelyben a Lebesgue-mérték fogalmának a felhasználása nélkül, csupán a nullmértékű halmaz fogalmára támaszkodva adja meg a Lebesgue-integrálnak a felépítését. A Lebesgue-integrál bevezetési módját később még tovább egyszerűsítette; ezt a bevezetésmódot, amely azóta már igen elterjedt, és az integrálfogalom különböző általánosításainál igen hasznosnak bizonyult, előadásaiban is használta. A Lebesgue-féle integrálfogalomnak ez a bevezetésmódja azonban csak SZŐKEFALVI-NAGY BÉLÁval közösen írt, az előzőekben már említett könyvükben lett közölve. Ugyancsak a **C** *csoport*ban található „Sur l'éxistence de la dérivée des fonctions monotones et sur quelques problèmes qui s'y rattachent" (*Acta Sci. Math. Szeged,* **5** (1930—32), 208—221.) c. dolgozata, amelyben LEBESGUE monoton függvények differenciálhatóságára vonatkozó tételének adja meg egy közvetlen, egyszerűségben és eleganciában felülmúlhatatlan bizonyítását. A **C** *csoport* munkái közül a következőket említjük meg: „Sur les systèmes orthogonaux de fonctions" (*Comptes Rendus, Paris*, 144 (1907), 615—619.), amelyben az azóta klasszikussá vált tétel, az ún. Riesz—Fischer tétel bizonyítását közli, két hónappal megelőzve FISCHER megfelelő eredményének a közlését; „Sur les opérations fonctionnelles linéaires" (*Comptes Rendus, Paris*, **149** (1909), 974—977.), amelyben a véges, zárt intervallumon folytonos függvények terén értelmezett lineáris operációk előállítását adja meg; „Untersuchungen über Systeme integrierbarer Funktionen" (Math. Annalen, **69** (1910), 449—497.), amelyben az L^p terekre vonatkozó alapvető eredményeit tárgyalja; „Über eine Verallgemeinerung der Parsevalschen Formel" (*Math. Zeitschr.*, **18** (1923), 117—124.), amelyben a Fourier-sorok elméletében már ismert Hausdorff—Young-féle tételnek általános ortogonális rendszerekre való általánosítását bizonyítja be. A **D** *rész* dolgozatai közül a RIESZ MARCELlal közösen írt „Über die Randwerte einer analytischen Funktion" (*Comptes Rendus du 4. Congr. des Math. Scand. Stockholm*, (1916), 27—44.) c. dolgozat az egységkörben analitikus függvények kerületértékeire vonatkozó nevezetes eredményüket tárgyalja; a FEJÉR LIPÓTtal közösen írt „Über einige funktionentheoretische Ungleichungen" (*Math. Zeitschr.*, **11** (1921), 305—314.) c. dolgozat a széleskörű érdeklődést kiváltott egyenlőtlenségükkel foglalkozik; továbbá „Über die Randwerte einer analytischen Funktionen" (*Math. Zeitschr.* **18** (1923), 87—95.) c. dolgozat többek között RIESZ FRIGYESnek a Hardy-féle függvényosztály függvényeire vonatkozó nevezetes felbontási tételét tartalmazza. Az **E** *csoport*ba vannak összegyűjtve a potenciálelméleti és a szubharmonikus függvények elméletében alapvető fontosságú cikkei; így az „Über subharmonische Funktionen und ihre Rolle in der Funktionentheorie und in der Potentialtheorie" (*Acta Sci. Math. Szeged*, **2** (1924—26), 87—100.) c., a szubharmonikus függvények elméletének az alapjait tartalmazó dolgozata is. Az **F** *rész*ben található többek között RIESZ FRIGYES már említett könyvének teljes szövege. Ez a munka a benne foglalt, a végtelen dimenziós vektorterekre, valamint az integrálegyenletek megoldására vonatkozó eredményeken túl az ott bemutatott módszer miatt is érdekes, RIESZ FRIGYES módszere abban áll, hogy egy lineáris transzformáció spektrumának a vizsgálatára a komplex függvénytani reziduumszámításhoz analóg kalkulust alkalmaz. Ennek a módszernek az alkalmazása újabban a Banach-algebrák elméletében, valamint LORCH, DUNFORD és mások által végzett az általános lineáris transzformációk spektrumára vonatkozó, újabb kutatásoknál került előtérbe. Az **F** *csoport*ba sorolt dolgozatok igen sok értékes eredményt és finom észrevételt tartalmaznak, amelyek nagymértékben hozzájárultak a funkcionálanalízis fejlődéséhez és a tárgyalás egyszerűsödéséhez; közülük csak néhányat emelünk ki: „Über lineare Funktionalgleichungen" (*Acta Math.*, **41** (1918), 71—78.), amelyben a Fredholm-féle integrálegyenleteknek egy sokkal általánosabb esetben is alkalmazható megoldását mutatja be; „Sur la décomposition des opérations fonctionnelles linéaires" (*Atti del Congr. Internaz. dei Mat. Bologna* (1928), **3** (1930), 143—148.), amelyben a majoráns operációval kapcsolatos első eredményeit közli; az „Über die linearen Transformationen des komplexen Hilbertschen Raumes" (*Acta Sci. Math. Szeged*, **5** (1930—32), 23—54.) c. dolgozatában a nemkorlátos önadjungált transzformációk spektrálelőállítására vonatkozó Neumenn—Stone-féle tételnek mutatja be egy az eredetinél egyszerűbb bizonyítását; erre a tételre LORCH amerikai matematikussal még további két egyszerű bizonyitást is közöltek („The integral representation of unbounded selfadjoint transformations in Hilbert space", *Transact. of the Amer. Math. Soc.*, **39** (1936), 331—340.); a „Sur quelques notions fondamentales dans la théorie générale des opérations linéaires" (*Annals of Math.*, **41** (1940), 174—206.) c. dolgozatban az ún. félig rendezett lineáris terek széleskörű vizsgálatának a kiindulását szolgáltatja. A **G** *csoport*ból a „Sur la théorie ergodique" (*Commentarii Math. Helv.*, **17** (1944—45), 221—239.) és az „On a recent generalization of G. D. Birkhoff's ergodic theorem" (*Acta Sci. Math., Szeged,* **11** (1948), 197—200.) dolgozatokat említjük meg, amelyekben új és nagyon elegáns bizonyítást ad a Birkhoff-féle individuális ergodikus tételre, valamint ennek Dunford—Miller-féle általánosítására; a bizonyításoknál ugyanannak a folytonos függvényekre vonatkozó lemmának van alapvető szerepe, amelyet a monoton függvények differenciálhatóságára vonatkozó Lebesgue-féle tételnek a bizonyításánál is felhasznált. A **H** *csoport*ban két magyar nyelvű dolgozat, köztük „A negyedrendű elsőfajú térgörbén levő pontkonfigurációk helyzetgeometriai tárgyalása (*Math. és Phys. Lapok,* **11** (1902), 293—309; 346—360; 13 (1904), 191—204.) c. doktori értekezése szerepel. A *Vegyes kérdések* c. csoportban egyéb, a fenti csoportokba be nem sorolható munkák vannak; többek között a „Sur les polynomes trigonométriques" (*Comptes Rendus, Paris,* **158** (1914), 1657—1661.), amelyben a Bernstejn-féle egyenlőtlenségre ad elegáns bizonyítást, felhasználva a Fourier-sorok elméletében azóta közismertté vált, a trigonometrikus polinomok differenciálhányadosainak előállítására vonatkozó formuláját; „Über die Fourierkoeffizienten einer stetigen Funktion von beschränkter Schwankung" (*Math. Zeitschr.*, **2** (1918), 312—315), amelyben először mutatja be a végtelen szorzat alkalmazhatóságát a Fourier-sorok elméletével kapcsolatos példák konstruálásánál; a Riesz-féle szorzat azóta igen jó segédeszköznek bizonyult.

A két kötet kiállítása igen szép, méltó RIESZ FRIGYES munkásságához. A kiadás értékét nagymértékben emelik az egyes kötetek végén levő hibajegyzékek, amelyekben az eredeti munkákban található sajtóhibák és elírások helyesbítésén túlmenően értékes kiegészítések és kritikai megjegyzések is találhatók. A kiadás sajtó alá rendezéséért, valamint a hibajegyzék nagyon gondos és sok munkát igénylő összeállításáért CSÁSZÁR ÁKOST, továbbá BOGNÁR JÁNOST, CZIPSZER JÁNOST, KÁRTESZI FERENCet és KRÁLIK DEZSŐT a matematikusok köszönete illeti meg.

Tandori Károly
a matematikai tudományok doktora

Technikai szerkesztő: L. Ziermann Margit

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója — Műszaki szerkesztő: Farkas Sándor
A kézirat nyomdába érkezett: 1961. IX. 29. — Terjedelem: 11,50 (A 5) ív. 1 ábra

Szegedi Nyomda Vállalat, Szeged 61-3771

Ára: 25,— Ft

TARTALOMJEGYZÉK

A KÜLFÖLDI SZAKIRODALOMBÓL

A TUDOMÁNYOS MINŐSÍTŐ BIZOTTSÁG HIREI

KÖNYVISMERTETÉS