A MAGYAR
TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK
OSZTÁLYÁNAK

KÖZLEMÉNYEI

IX. KÖTET

AKADÉMIAI KIADÓ BUDAPEST

1959

NÉVMUTATÓ

TARTALOMJEGYZÉK

1. szám

A TUDOMÁNYOS MINŐSÍTŐ BIZOTTSÁG HÍREI

2. szám

A KÜLFÖLDI SZAKIRODALOMBÓL

KÖNYVISMERTETÉSEK

A MAGYAR
TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK
OSZTÁLYÁNAK

KÖZLEMÉNYEI

IX. KÖTET 1. SZÁM

AKADÉMIAI KIADÓ
BUDAPEST

1959

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK

KÖZLEMÉNYEI

IX. kötet 1. szám

Szerkesztőség: Budapest, V., Széchenyi rakpart 3.
Kiadóhivatal: Budapest, V., Alkotmány utca 21.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei változó terjedelmű füzetekben jelennek meg és az Akadémia III. osztályának felolvasóülésein bemutatott matematikai dolgozatokat, valamint egyéb dolgozatokat, referátumokat. továbbá az osztály munkájára vonatkozó közleményeket, könyvismertetéseket stb. közölnek Évenként egy kötet jelenik meg (négy szám alkot egy kötetet).

Kéziratok a következő címre küldendők:

A Magyar Tudományos Akadémia
III. Osztályának Közleményei.
Budapest, V., Széchenyi rakpart 3.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi levelezés.

Minden szerzőt 100 különlenyomat illet meg megjelent munkájáért.

Közlésre el nem fogadott kéziratokat a szerkesztőség lehetőleg visszajuttat a szerzőhöz, de felelősséget a beküldött kéziratok megőrzéséért vagy továbbításáért nem vállal

A Közlemények előfizetési ára kötetenként belföldi címre 40 forint, külföldi címre 60 forint. Belföldi megrendelések az Akadémiai Kiadó, Budapest, V., Alkotmány u. 21. (Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 05-915-111-44), külföldi megrendelések a „Kultúra" Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalat, Budapest, VI., Népköztársaság útja 21. (Magyar Nemzet Bank egyszámlaszám: 43-790-057-181) útján eszközölhetők.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztálya a következő idegen nyelvű folyóiratokat adja ki:

1. Acta Mathematica Hungarica
2. Acta Physica Hungarica.

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA

1958. ÉVI NAGYGYŰLÉSE

A MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK ELŐADÁSAI

Október 22-én, szerdán délután 3 órakor

JÁNOSSY LAJOS akadémikus

Kiterjedt fényforrás intenzitás-fluktuációi

DETRE LÁSZLÓ levelező tag

A változócsillagok kutatásának jelentősége

Október 23-án, csütörtökön délelőtt 10 órakor

HAJÓS GYÖRGY akadémikus*

Bolyai János Appendixének egy vélt hiányosságáról

L. N. CSAKALOV akadémikus

Egyértékű függvények egy osztályáról

VARGA OTTÓ levelező tag

A nem euklideszi geometria általánosításáról

Október 23-án, csütörtökön délután 3 órakor

RÉDEI LÁSZLÓ akadémikus

Komplex egységgyökök egyensúlyhalmazai és Hajós csoportfaktorizáció problémája

Október 24-én, pénteken délelőtt 10 órakor

PÁL LÉNÁRD a fizikai tudományok kandidátusa

A neutronsokszorozás elméletéről

Október 24-én, pénteken délután 3 órakor

FENYVES ERVIN a fizikai tudományok kandidátusa—BOZÓKI GYÖRGY—DOMOKOS GÁBOR—GOMBOSI ÉVA

Nagyenergiájú magkölcsönhatások vizsgálata fotoemulzióban

KESZTHELYI LAJOS a fizikai tudományok kandidátusa—ZIMÁNYI JÓZSEF

β-részecskék polarizációja a Li^8 bomlásában

Október 27-én, hétfőn délután 4 órakor

HAJÓS GYÖRGY akadémikus

Az Osztályvezetőség beszámolója

* Hajós György előadása betegsége miatt elmaradt, ehelyett került sor Csakalov bolgár akadémikus előadására.

AZ OSZTÁLYVEZETŐSÉG BESZÁMOLÓJA*

Szerkesztette HAJÓS GYÖRGY akadémikus, osztálytitkár

Az Osztályvezetőség a jelen beszámolóban kettős célt tűzött ki maga elé, egyrészt összefoglaló képet kíván adni a legutóbbi Nagygyűlés óta az osztály tudományterületein elért eredményekről, beszámolva az Osztályhoz tartozó akadémiai intézetek és céltámogatásban részesülő egyetemi intézetek tudományos munkájáról, másrészt az Osztály eddigi működését óhajtja megvizsgálni az MSZMP művelődéspolitikai irányelveinek tükrében.

Megkívánom jegyezni, hogy az Osztályvezetőség beszámolója a beszámoló időszakában elért tudományos eredményeket tekintve nem nyújthat teljes és részletes képet, mert hiszen az Osztályhoz tartozó intézetek csak az év befejeztével adnak átfogó jelentést ez évi tudományos működésükről, az Osztályvezetőség beszámolója pedig mindenkor elsősorban ezekre az intézeti beszámolókra támaszkodik.

A beszámoló foglalkozik a matematika, a fizika és a csillagászat területén elért újabb eredményekkel; de a Kibernetikai Kutató Csoport munkásságára nem tér ki, tekintettel arra, hogy ez év tavasza óta az Elnökség határozata folytán a Kibernitikai Kutató Csoport nem tartozik az Osztályvezetőség felügyelete alá.

A tudományos eredmények ismertetését a matematika területén elért újabb eredmények ismertetésével kezdem.

A *Matematikai Kutató Intézet* tudományos munkatársai a beszámoló időszakában eredményesen folytatták elméleti tárgyú és az alkalmazások irányába eső vizsgálataikat. Az Intézet kutatói mintegy 34 tervtémával foglalkoztak és ezekkel kapcsolatban újabb eredményekhez jutottak. Az Intézet munkatársainak több mint 100 dolgozata került sajtó alá. Azok a területek, amelyeken jelentősebb eredményekről számolhatunk be, a következők: a mátrixelmélet alkalmazásai műszaki feladatok megoldására, a valószínűségszámítás és annak alkalmazásai (a sztochasztikus folyamatok elméletének alkalmazásai, pl. a telefontechnikában, információelmélet, valószínűségszámítási módszerek a szám elméletben), a rendezett minták elmélete, a nyeregpont módszer és alkalmazásai, a függvényapproximáció elmélete, az ortogonális polinomok elmélete, a hővezetés differenciálegyenletének új peremértékfeladatai. Elkészült az Inté-

* Hajós György betegsége miatt a beszámolót Budó Ágoston lev. tag olvasta fel.

zet Szegeden működő Matematikai Logika és Alkalmazásai Osztálya által épített logikai gép, amelyet több hazai és külföldi tudományos összejövetelen bemutattak, ill. ismertettek. A szegedi logikai gépnek igen fontos alkalmazási területe a vasutbiztosító berendezések ellenőrzése.

Az Intézet több új kapcsolatot létesített a népgazdaság különböző intézményeivel gyakorlati problémák megoldása érdekében. Azok közül az intézmények közül, amelyekkel az Intézet a kérdéses időszakban együttműködött gyakorlati feladatokkal kapcsolatos matematikai problémák megoldásában, csak néhányat említek meg: a Kohó- és Gépipari Minisztérium megbizásából sor került az üzemi energiafogyasztás ingadozásainak valószínűségszámítási értékelésére és megfelelő energiagazdálkodási terv kidolgozására. Az Állattenyésztési Kutató Intézet részére biometriai statisztikai problémákat oldottak meg a kutatók. A Diósdi Csapágygyár megbízásából statisztikai minőségellenőrzési és a szerszámgépek megfelelő geometriai kialakítására vonatkozó számításokat végeztek. A szegedi logikai gép alkalmazásáról már szólottam. E kérdésben az Intézet a Telefongyárral áll összeköttetésben.

A közgazdaságban a matematika alkalmazásainak tanulmányozására rendszeres szemináriumok folytak az ökonometria, a lineáris programozás tárgyköréből és rokonterületekről.

Megjelent az Intézet több munkatársa és gyakorlati szakemberek által együttesen írt és VINCZE ISTVÁN által szerkesztett „Statisztikai minőségellenőrzés” című könyv az ipari és kereskedelmi minőségellenőrzés matematikai statisztikai módszereiről. A könyv elméleti része a minőségellenőrzés mellett a matematikai statisztika számos más ipari alkalmazását is ismerteti.

Az Intézet munkatársai az Intézet pártszervezetének kezdeményezésére másutt dolgozó matematikusok bevonásával nagyobb tanulmányban dolgozzák fel a matematikai kutatás feltételeinek alakulását és fejlődését a két világháború közötti és a felszabadulás utáni időszakban. E tanulmány rövidesen elkészül.

A budapesti Eötvös Loránd Tudományegyetem Matematikai Intézetében a következő témakörökben értek el az Intézet munkatársai kiemelkedő eredményeket: rekurziv függvények elmélete, Abel-csoportok elmélete, a nem euklideszi geometria, topológia, a valószínűségszámítás, a komplex függvénytan, a diofantikus approximáció és a gráfelmélet területén.

Az elért eredményekről az Intézet munkatársainak kb. 50 dolgozata jelent meg, vagy van sajtó alatt. Ez évben jelenik meg első ízben az Egyetem évkönyvének matematikai füzete, amely az Intézet munkatársainak idegen nyelven megjelenő dolgozatait tartalmazza.

A Szegedi Tudományegyetem Bolyai Intézetében eredményesen tovább folytatódtak a funkcionálanalizis körében folyó vizsgálatok. Külön meg kell emliteni azt az eredményt, amelynek segítségével jól használható operátorkalkulus adható meg az általános operátorokra. Az ortogonális sorok elméletében elért kiemelkedő eredmény az, amely arra a 30 éve nyitott problémára ad választ, hogy az ortogonális függvényekre vonatkozó Mensov—Rademacher-féle tételekben szereplő becslések nem finomíthatók.

Számos új eredményt értek el az Intézet munkatársai az algebrai struktúrák elméletében és az algebrai számelméletben. Az elért eredmények közül kiemelhető az, amely a komplex egységgyökök véges halmazait illetően jól kezelhető kritériumot adott meg arra, hogy egy ilyen halmazba tartozó elemek összege zérus legyen. A matematikai logika terén elért kiemelkedő eredmény az aritmetika axióma rendszerének ellentmondástalansága Gentzen-féle bizonyításának a Hilbert—Bernays-féle axiómarendszerre való alkalmazása.

A debreceni Kossuth Lajos Tudományegyetem Matematikai Intézetében intenzív vizsgálatok folynak a differenciálgeometria területén. Az egyik kiemelkedő eredmény lehetőséget nyújt nemcsak metrikus Kawaguchi-terek összes differenciálinvariánsainak meghatározására, hanem ezeknek a tereknek affin általánosításaira is. Eredményesen tovább folytatódtak az operátormodulusokra vonatkozó vizsgálatok és e vizsgálatok számos új eredményhez vezettek. Több más, az absztrakt algebrához tartozó új eredmény is van. A függvényegyenletek elméletében egyrészt további új eredmények láttak napvilágot, másrészt alkalmazásként a geometriai objektumok elméletében vannak új eredmények. Megemlítendők továbbá azok az eredmények, amelyek a determináns és mátrixelmélet területére esnek.

A Budapesti Műszaki Egyetem III. Matematikai Tanszékének dolgozói az általános ortogonális sorfejtések konvergencia, ill. szummációs problémáinak vizsgálatában értek el újabb eredményeket.

A Budapesti Műszaki Egyetem Villamosmérnökkari Matematikai Tanszékén az újabb eredmény a funkcionálanalízis és a disztribució elmélet területéhez tartozik. Megemlítendő az az eredmény, amely lehetővé teszi a disztribúció elméletnek a függvényegyenletek megoldására való alkalmazását.

A következőkben a fizikában elért eredmények ismertetésére térek át.

A Központi Fizikai Kutató Intézet Kozmikus Sugárzási Osztályán a beszámoló időszakában elsősorban a nagyenergiájú magkölcsönhatások vizsgálatával foglalkoztak és értek el újabb eredményeket. Jelentős vizsgálatokat végeztek az Osztály munkatársai a fény mikrostruktúrájával kapcsolatban. Ellenőrizték, hogy a fény interferenciaképessége független a fény intenzitásától és a berendezés méreteitől, és az interferencia akkor is megjelenik, ha a kísérleti berendezésben klasszikus elképzelés szerint egyidejűleg csak egyetlen egy fénykvantum tartózkodik. Ez a tény alapvető jelentőséggel bír a mikrofizikai folyamatokról kialakított fizikai kép szempontjából.

Az Atomfizikai Osztályon eredményesen folyt az atommagok szerkezetének és a gyorsított részecskékkel előidézett magreakcióknak a tanulmányozása.

Az Elektromágneses Hullámok Osztályán a rádiófrekvenciás spektroszkópia területén magpolarizációs kísérletek előkészítése folyik. A jelenség vizsgálatához szükséges berendezés bemérése van jelenleg folyamatban.

A neutronfizikai kutatók kidolgozták a nagyenergiájú neutronokkal történő besugárzás okozta rácssérülések statisztikus elméletét, amelynek alapján lehetőség nyílik a rácssérülések okozta fizikai elváltozások összehasonlítására.

A Mágneses Osztályon a kutatók kidolgozták a feszültségimpulzusok tárolására alkalmas négyszögletes hiszterézis hurkú ferritek előállítási technológiáját.

A Magkémiai Osztály kutatóinak kiemelkedő eredményei a hazai uránércek kémiai feldolgozásával kapcsolatos alapkutatások. Az e téren elért technológiai és analitikai-kémiai kutatások alapként szolgálnak az ipari kutatóintézetek által folytatandó technológiai és félüzemi kísérletekhez.

A Radiológiai Osztályon a kutatók az Au^{198} izotóppal homogén alumínium ötvözet előállításának módszerét dolgozták ki és ennek segítségével eljárást adtak az alumínium kohók áramhatásfokának mérésére.

A Spektroszkópiai Osztályon eredményesen folytak a molekula, spektroszkópiai, az emissziós abszorpciós spektroszkópiai vizsgálatok. Önálló kutatómunka folyik az Intézet *Elektronikus Kutató Csoportjában* is, amely kutatásoknak fő célja új magfizikai részecskeszámlálók, amplitudó analizátorok és egyéb más műszerek építése és fejlesztése.

A Központi Fizikai Kutató Intézetben elért eredmények közül csak néhány kiemelkedőt soroltam fel. Meg kell említenem, hogy az elért kutatási eredmények mellett számos műszer és kutatóeszköz építése fejeződött be, ill. van folyamatban. Az elkészült berendezések közül hadd említsem meg, hogy négy magfizikai gyorsító készült el és ezek különböző magfizikai vizsgálatoknál kerültek felhasználásra.

A debreceni Atommag Kutató Intézetben tovább folytak a laboratóriumi kísérletek az U-nak szénhamuban történő feldúsítására az esetleges ipari kivonás előkészítő vizsgálataiként. A laboratóriumi vizsgálatok biztatóan alakulnak. Lehetséges a szenet megfelelő előválogatás és előkészítés után úgy elfűteni, hogy pár ezrelék U tartalmú pernye maradjon vissza. Az uránkoncentráció további növelése azonban gyakran jelentékeny uránmennyiség elvesztésével jár a szén meddő részében maradó U miatt, ezért a gyakorlati megvalósítás alkalmával a gazdaságosság elérése érdekében kompromisszumos megoldást kell választani.

Az Intézet széleskörű vizsgálatokat végzett az ország természetes vizei urántartalmának analízisére vonatkozólag. Az Intézetben folyó kutatások közül legnagyobb érdeklődést a He^6-os izotóppal végzett neutrinó visszalökési kísérletek váltottak ki.

Az Elméleti Fizikai Kutató Csoport kutatói az atomok és atommagok statisztikus elméletében, a szilárd testek elméletében és a kvantumkémiában tovább folytatták vizsgálataikat és értek el újabb eredményeket a beszámoló időszakában is. Az atommagok statisztikus elmélete területén komoly érdeklődést keltett a magok saját rezgésének tárgyalása, a nem nulla impulzusmomentumú atommagok hasadásának vizsgálata a statisztikus magelmélet alapján, valamint nagyenergiájú elektronok koherens szóródásának tárgyalása, továbbá a szelén- és tellurra vonatkozó kutatások. A kvantumkémiai vizsgálatokban kiderült, hogy a Weizsäcker-féle módszerrel bővített statisztikus atommodellben a Weizsäcker-féle energiatag jelentős szerepet játszik a homëopoláros molekulák kötésének tárgyalásakor.

Az Eötvös Loránd Tudományegyetem Elméleti Fizikai Intézetében az elméleti fizika általános elvi problémáinak megoldásában újabb eredmények születtek. Kiderült, hogy eddig kvantumosnak tartott jelenségek a klasszikus fizika területéről is jól megközelíthetők. Az elemi részek kvantumelméletében és a termodinamikában ugyancsak több újabb eredményt tartalmazó publikációt jelentettek meg az Intézet dolgozói.

Az Eötvös Loránd Tudományegyetem I. Kísérleti Fizikai Intézetében egyrészt a szilárd testek fizikája témakörébe tartozó rend-rendezetlenség átalakulási vizsgálatok indultak meg, másrészt röntgenfinomszerkezeti vizsgálatok folynak, ill. vannak előkészületben.

Az Eötvös Loránd Tudományegyetem II. Kísérleti Fizikai Intézetében egyrészt felület és rétegszerkezet-vizsgálatokkal, másrészt elektronfizikai és elekrondinamikai vizsgálatokkal foglalkoznak.

Az Építőipari és Közlekedési Műszaki Egyetem Kísérleti Fizikai Intézetében a kristályfizika tárgykörében eredményes kutatómunka folyt a beszámoló időszakában is. Az Intézet munkatársai az újabb eredményeket mintegy 20 dolgozatban publikálták, amelyek részletes ismertetésére nem térek ki.

A Műszaki Egyetem Atomfizikai Tanszékén ugyancsak tovább folytatódtak a molekula spektroszkópiai kutatások elméleti irányban.

Az Orvostudományi Egyetem Orvosi Fizikai Intézetében egyrészt kristályfizikai vizsgálatok, másrészt biofizikai vizsgálatok folytak eredményesen.

A Szegedi Tudományegyetem Kísérleti Fizikai Intézetében egyrészt lumineszcencia, másrészt félvezető kutatások folytak. A lumineszcencia kutatások során a polarizációs spektrumok vizsgálata céljából az eddig használt eljárásoknál pontosabb módszert fejlesztettek ki az Intézet kutatói. A félvezető kutatásokban leginkább említésre méltó az az eredmény, hogy sikerült kadmiumszulfid és kadmiumszelenidporokból sajtolás útján fényelemeket előállítani és ezek főbb tulajdonságait megvizsgálni.

A Szegedi Tudományegyetem Elméleti Fizikai Intézetében térelméleti és kvantumkémiai vizsgálatokkal foglalkoztak.

A Kossuth Lajos Tudományegyetem Elméleti Fizikai Intézetében eredményesen folynak a molekulák egyesített atommodelljével kapcsolatos vizsgálatok.

Ezután rátérek a csillagászat területén elért eredmények rövid ismertetésére:

A Csillagvizsgáló Intézet munkája a beszámoló időszakában elsősorban az RR Lyrae-csillagok fotoelektromos kolorimetriájára koncentrálódott. Ez a program a Nemzetközi Csillagászati Unióval történt megegyezés alapján, más csillagvizsgálókkal való együttműködésben kerül lebonyolításra.

Az Intézet megszervezte a mesterséges holdak hazai megfigyelő hálózatát és ez év februárjától rendszeresen figyelik a holdak átvonulását. Az állomások felszereléséhez 40 speciális távcsövet kaptak ajándékba a Szovjetunió Tudományos Akadémiájától. Meg kell említeni továbbá, hogy az Intézet rendszeresen megjelenő kiadványa — amely az Intézet kutatói által elért eredményeket tartalmazza — mindig nagy nemzetközi érdeklődést vált ki.

A Napfizikai Kutató Csoport tovább folytatta az előző években Budapesten megkezdett észleléseket és azok feldolgozását.

A beszámoló időszakában elért eredmények vázlatos ismertetése után foglalkozni kívánok az Osztályvezetőség, a bizottságok és az Osztályhoz tartozó akadémiai intézetek munkájával a bevezetőben említett művelődéspolitikai irányelvek tükrében. Az irányelvek feladatul tűzik ki a természettudományok területén — s így e feladatok nyilván az Osztály tudományterületeire is vonatkoznak — egyrészt a perspektivikus alapvető kutatás és az aktuális részletproblémák helyes arányának kialakítását, másrészt az atomenergia békés felhasználását célzó kutatások fejlesztését, azaz az atomfizikai és anyagszerszerkezeti kutatások fokozását kísérleti és elméleti irányban egyaránt. Az irányelvek feladatul tűzik ki továbbá, hogy a hazai tudományos kutatás főleg azokon a területeken folyjék, amelyeken értékes hagyományaink vannak és a világszint aránylag kisebb erőfeszítéssel elérhető és tartható. Természetesen a kutatások tervszerű fejlesztése azt kell hogy célozza, hogy a hazai kutatások eredményei hatékonyan hozzájáruljanak a szocialista építés kulturális és gazdasági feladatainak megoldásához. Az irányelvekben megjelölt eme feladatok megvalósítása természetesen szükségessé teszi a tervszerű tudományos káderutánpótlást, olyan kutatógárda nevelését, amely a maga lelkes munkájával a fenti irányelvek megvalósítására törekszik.

Megállapítható, hogy az Osztályvezetőség és az irányitása alatt működő bizottságok eddigi működésük során törekedtek oly módon irányítani a matematika, fizika és csillagászat területén folyó kutatásokat, hogy a perspektivikus alapvető kutatások és a gyakorlati élet által megoldásra váró aktuális részletfeladatok között helyes arány alakuljon ki. Természetesen ennek a helyes aránynak a kialakítása nem minden esetben sikerült, vagy nem minden kutatási területen valósult meg megfelő módon.

A Matematikai Kutató Intézet megalakulásakor Alkalmazott Matematikai Intézet néven kezdte meg működését. Az Intézet működésének első éveiben elsősorban és főként a gyakorlati élet által felvetett, sok esetben nem is tudományos jelentőségű problémák megoldásával foglalkozott. Így az elméleti kutatások, ha nem is szorultak háttérbe, az Intézet tématervén kívüli módon folytak. Az Intézetnek a megalakulása első idejében kifejtett, főként gyakorlati vonatkozású működését azonban mégsem lehetett és lehet helytelennek ítélni, mert hiszen a matematika elméleti eredményei gyakorlati alkalmazásának szükségességét a műszaki és gyakorlati élet emberei nem ismerték és azt lehet mondani, hogy ma sem ismerték fel teljesen. E téren kétségkívül a Matematikai Kutató Intézet hasznos úttörő munkát végzett és végez ma is, bár korántsem kielégítő az eredmény. Az elmélet és a gyakorlat egységének kialakítása érdekében alakult azután át az Intézet Matematikai Kutató Intézetté és a matematika alkalmazásaival foglalkozó osztályok mellett elméleti osztályok is létesültek. Az Intézet mostani működése és az elért eredmények azt bizonyítják, hogy az Intézetben a kívánt módon alakult ki az elméleti kutatások és az alkalmazásokkal foglalkozó kutatások aránya.

Fizikai intézeteink közül a Központi Fizikai Kutató Intézet megalakulása után az első években a fizikai kutatásokhoz nélkülözhetetlen műszerek építésével, korszerűsítésével foglalkozott. Ebben az időszakban az Intézetben, néhány témát kivéve, alapvető kutatások alig folytak. A gyakorlat részére számos, jelentős mérőműszert dolgozott ki ebben az időszakban az Intézet, ezeknek a gyártása és ezt követően ezeknek az exportálása azonban igen nagy nehézségekbe ütközött, az ipar és az egyes szakminisztériumok meg nem értése miatt. Az Intézetben ma már rendelkezésre állnak a kutatáshoz szükséges műszerek és berendezések, és számos alapvető jelentőségű témában folynak a kutatások és értek el az Intézet munkatársai új eredményeket. Az alapvető elméleti kutatások alkalmazásai érdekében a jövőben az Intézetnek szoros kapcsolatot kell kialakítania az Akadémia keretében nemrég létesült Műszaki Fizikai Kutató Intézettel.

A néhány évvel ezelőtt alakult Atommag Kutató Intézetben a megalakulástól kezdődően helyes arány alakult ki az elvi és a gyakorlati vonatkozású kutatások között.

Az Osztályvezetőség és a Fizikai Bizottság mindenkor arra törekedett, hogy az atomenergia békés felhasználását célzó hazai kutatásokra biztosíttassék a legnagyobb anyagi támogatás. Az atomenergia békés felhasználását célzó kutatások folynak döntő mértékben a Központi Fizikai Kutató Intézetben is, az Atommag Kutató Intézetben is, ill. elméleti vonatkozásban az Elméleti Fizikai Kutató Csoportban.

Hiányosságként kell azonban megemlíteni, hogy az irányelvekben megjelölt anyagszerkezeti vizsgálatok nem részesültek kellő mértékű támogatásban. Az anyagszerkezeti vizsgálatokra a jövőben fokozottabb gondot kell fordítania mind az Osztályvezetőségnek, mind pedig a Fizikai Bizottságnak.

Az Osztály tudományterületein azokban a kutatási ágakban, amelyekben értékes hagyományaink voltak, a felszabadulás után még erőteljesebben folytatódtak a kutatások. Gondolok itt pl. a matematikában a funkcionál-analízisre, a függvényapproximációra stb., fizikában az atomok és atommagok statisztikus elméletére, vagy csillagászatban a változócsillagok megfigyelésére. Az Osztály tudományterületein tehát mindenkor törekedett az Osztályvezetőség értékes hagyományainkra, mint alapra építeni.

A viszonylag kisebb erőfeszítéssel és anyagi áldozattal világszinten tartható kutatási ágakat nem minden esetben fejlesztettük kellő mértékben. A matematikában és a csillagászatban az irányelveknek ez a célkitűzése megvalósult, a fizikában azonban nem minden esetben. Pl. a kristályfizika, amely lényegesen kisebb anyagi befektetéssel tartható világszinten, nem részesült minden esetben abban az anyagi támogatásban, amelyben részesítése indokolt lett volna. Nagymértékben elősegítené a hazai kutatásokat az, hogyha a baráti országokkal szorosabb együttműködés alakulna ki. A baráti országokkal évenként kötött kultúregyezmények ezeket az együttműködési lehetőségeket biztosítják, az együttműködés megvalósítását azonban számos akadály, főként az e téren meglevő bürokrácia hátráltatja és gátolja. Az együttműködés akkor lenne gyümölcsöző, ha közvetlen személyi és kutatási kapcsolatok alakulhatnának ki a baráti országok azonos témáival foglalkozó kutatói és kutatóintézetei között.

Az irányelvekben kijelölt feladatok megvalósítása tervszerű káderutánpótlás biztosítását teszi szükségessé. A tudományos káderutánpótlás terén az új tudományos minősítések bevezetésével, az aspiránsképzés megszervezésével kétségkívül nagy eredményeket értünk el. Ezek az eredmények azonban korántsem kielégítők. Még mindig hiányoznak a tudományos káderek fejlődését elősegítő, a dialektikus materializmus világnézetén alapuló élénk tudományos viták. E téren voltak kezdeményezések, ezek azonban az utóbbi években teljesen megszűntek. Az Osztályvezetőségnek és az Osztály keretében működő Fizikai és Matematikai Bizottságnak, továbbá a bizottsági feladatokat ellátó Csillagászati Tudományos Tanácsnak törekednie kell arra, hogy élénk vitaszellem alakuljon ki az osztály mindhárom tudományterületén. Tudományos káderutánpótlásunk másik hiányossága, hogy a szakmai és politikai követelmények nem minden esetben érvényesültek az aspiránsfelvételeknél és a tudományos minősítéseknél. E téren a feladat az, hogy a jövőben a szocialista rendszerhez hű, nemcsak szakmailag, de politikailag is kiváló fiatalok nyerjenek felvételt aspiránsképzésre, ill. kerüljenek intézeteinkbe kutatói állásokba.

A következőkben ismertetni kívánom az Osztálynak, az Osztályvezetőségnek és az osztály bizottságainak munkáját a beszámoló időszakában A zárt *osztályüléseken* az osztály tagjai tájékoztatást kaptak az Osztályvezetőség munkájáról, a Kossuth-díj javaslatokat vitatták meg és javaslatokat tettek külföldi tudósok ez évben történő meghívására.

Az *Osztályvezetőség* rendszeresen tartott ülésein a következő napirendi pontok szerepeltek: az Osztály 1958. évi tudományos tervének kidolgozása, az intézetek 1957. évi tudományos munkájáról szóló beszámolók értékelése és véleményezése, kultúregyezményes és egyéb kiküldetési és meghívási javaslatok összeállítása, a tudományos minősítéssel és könyv- és folyóiratkiadással kapcsolatos folyó ügyek tárgyalása.

Az Osztály keretében működő Matematikai és Fizikai Bizottság és a bizottsági feladatokat ellátó Csillagászati Tudományos Tanács lényegében az Osztályvezetőséggel azonos napirendi pontokat tárgyalt, ill. e napirendi pontokkal kapcsolatos véleményét szögezte le az Osztályvezetőség részére.

A Fizikai Bizottság ezenkívül a helyszínen tanulmányozta a Kísérleti Atomreaktor tudományos osztályainak és a debreceni Atommag Kutató Intézetnek a munkáját. E látogatások alkalmával a Fizikai Bizottság tagjai megvitatták a két intézet munkáját és a látogatás nagymértékben hozzájárult a két intézet közötti szorosabb együttműködés kialakításához. A Fizikai Bizottság behatóan foglalkozott egyetemeink kísérleti fizikaoktatásának problémáival és e tárgyban — mivel sajnálatos módon a néhány év előtti memorandum eredménytelen maradt — új memorandumot dolgozott ki és juttatott el az Osztályvezetőség útján az illetékes fórumokhoz.

A Matematikai Bizottság a beszámoló időszakában több új taggal bővült és remélhető, hogy az így kiegészített bizottság a matematikai tudomány hazai fejlesztése érdekében még élénkebb tevékenységet fog kifejteni.

Mind a Matematikai Bizottság, mind a Fizikai Bizottság tagjai tevékenyen részt vettek a bizottságok munkájában. Nem mondható el ez azonban a Csillagászati Tudományos Tanács tagjairól.

Az Osztályhoz tartozó akadémiai intézetek tudományos terveinek és évi munkabeszámolóinak első fokon való értékelése és véleményezése az intézeti tudományos tanácsok feladata. Az intézeti tudományos tanácsok valamennyi, az Osztályhoz tartozó akadémiai intézetben megalakultak, de egyedül csak a Matematikai Kutató Intézet tudományos tanácsa működött rendszeresen és kielégítő módon. Az Osztályvezetőség éppen ezért elhatározta, hogy az intézeti tudományos tanácsok működését felülvizsgálja és új intézeti tudományos tanácsok létesítésére tesz javaslatot az Akadémia elnökének.

A következőkben rövid tájékoztatást kívánok adni az Osztályhoz tartozó intézetekben bekövetkezett változásokról:

A bevezetőben már említettem, hogy elnökségi határozat folytán a Kibernetikai Kutató Csoport ez év áprilisától nem tartozik az Osztályhoz. A Kutató Csoport felett a felügyeletet egy, az Elnökséghez tartozó Elnökségi Bizottság látja el. A Kibernetikai Kutató Csoportnak az Osztály kötelékéből való kiválása azért vált szükségessé, mert az Osztályvezetőség tagjai a Kutató Csoport felett szükséges tudományos felügyeletet nem tudják ellátni, mivel a Kibernetikai Kutató Csoport tudományos tervében döntő többségben olyan feladatok szerepelnek, amelyek nem az Osztályhoz tartozó tudományágakhoz tartoznak.

Sikerült végre megoldani a Csillagvizsgáló Intézeten belüli, főként személyi ellentétekből származó vitákat és problémákat oly módon, hogy az intézetből kivált a Napfizikai Osztály és önálló kutató csoportként Debrecenben folytatja működését Napfizikai Kutató Csoport néven, DEZSŐ LORÁND vezetésével.

A Matematikai Kutató Intézetben a beszámoló időszakában a Funkcionálanalízis, a Matematikai Logika és Alkalmazásai és az Orvosstatisztikai Csoport osztállyá alakult át, az utóbbi Biometriai Osztály elnevezéssel. Új önálló kutató csoportok megszervezése van folyamatban (algebrai, számelméleti és geometriai csoport). A többi intézetben lényegesebb változás a beszámoló időszakában nem történt.

Az intézetek ez évi fejlesztését a következő adatok bizonyítják: Az Osztályhoz tartozó intézetek létszáma a tavalyihoz viszonyítva 71 fővel emelkedett, ebből 60 fő a Központi Fizikai Kutató Intézet létszámának emelkedése. Az intézetek költségvetése a mult évihez viszonyítva csaknem 8 millió Ft-tal nagyobb volt ebben az évben. A beruházás ez évi összege 1,7 millió Ft-tal volt nagyobb a tavalyinál. Ezek az adatok azt is bizonyítják, hogy kormányzatunk az ország gazdasági lehetőségeihez mérten maximális anyagi támogatásban részesíti a tudományos kutatómunkát.

A tudományos káderutánpótlás jövőbeni feladatairól már szólottam. A tudományos minősítések keretében a kandidátusi címek odaítélésére vonatkozólag új rendelkezés jelent meg, amelynek célja a kandidátusi disszertációk színvonalának emelése, fokozottabb követelmények támasztása a disszertánsokkal és a kandidátusi fokozattal rendelkezőkkel szemben. Az új rendelkezés minden bizonnyal fokozottabb és eredményesebb munkára fogja ösztönözni mind az aspiránsokat, mind pedig a kandidátusi fokozattal rendelkező kutatókat. Néhány tájékoztató adatot említek meg a tudományos káderhelyzetre vonatkozóan: Jelenleg a tudományterületeinken 20 doktori és 74 kandidátusi fokozattal rendelkező kutató van. Az ez évi aspiránsfelvétel során hárman nyertek felvételt szovjet aspiranturára, 1 fő pedig belföldi aspirántusára. Az idei aspiránsfelvételeknél már érvényesültek azok a szempontok, amelyeket előzőleg már említettem. Jelenleg az Osztály tudományterületein összesen 5 belföldi és 5 Szovjetunióban tanuló aspiráns folytat tanulmányokat. A beszámoló időszakában összesen 4 kandidátusi disszertáció megvédésére került sor. Mind a négyen elnyerték a kandidátusi fokozatot.

Ebben az évben is tovább fejlődtek matematikusaink, fizikusaink és csillagászaink nemzetközi kapcsolatai. Az elmult időszakban különösen a Központi Fizikai Kutató Intézet építette ki, ill. fejlesztette tovább nemzetközi kapcsolatait több külföldi fizikai kutatóintézettel. Elsősorban a dubnai Egyesített Atommag Kutató Intézettel, továbbá a román és a bolgár Akadémia fizikai kutatóintézeteivel, valamint a milánoi Atomkutató Intézettel is felvette a kapcsolatot. Különösen gyümölcsözők ezek a kapcsolatok a kozmikus sugárzások területén.

A Csillagvizsgáló Intézet megfigyeléseit — a szovjet és más külföldi csillagvizsgáló intézetekkel hosszú idő óta — szoros együttműködésben végzi. A Matematikai Kutató Intézet ugyancsak tovább fejlesztette a külföldi matematikai intézetekkel való kapcsolatait, elsősorban a folyóiratcsere útján.

A beszámoló időszakában a kultúregyezmények keretében, valamint az akadémiai kiküldetésekben és az Akadémia anyagi támogatásával összesen 65 kutató 90 alkalommal utazott tanulmányútra, vagy tudományos rendezvényre. Ezenkívül számosan utaztak külföldre saját költségen, vagy pedig más szervek, különösen az Országos Atomenergia Bizottság kiküldetésében.

Kiküldötteink számos kongresszuson vettek részt a beszámoló időszakában és ezek közül különösen három kongresszuson való résztvételünket szeretném kiemelni.

A Nemzetközi Matematikai Unió Edinburghban megrendezett kongresszusán az Akadémia, a Művelődésügyi Minisztérium és a Bolyai János Matematikai Társulat küldötteként, valamint saját költségen 26 tagú magyar delegáció vett részt. A magyar matematikai tudomány megbecsülését mutatja, hogy a kongresszust előkészítő bizottság a nagyobb előadások közül két előadás megtartására magyar tudóst kért fel. A 26 tagú magyar küldöttség tagjai mintegy 19 előadásban adtak képet e tudományág hazai helyzetéről és fejlettségéről.

Ez év szeptemberének első felében került sor Genfben az ENSZ rendezésében az atomenergia békés felhasználásával foglalkozó II. kongresszus megrendezésére, amelyen a kormány delegációjának tagjaként 5 fizikus vett részt. A kongresszuson való részvétel igen hasznos volt mind a külföldön legújabban elért elméleti és gyakorlati eredmények megismerése, mind pedig fizikusaink nemzetközi kapcsolatainak továbbfejlesztése szempontjából. A delegációnak a kongresszuson lehetősége nyílt arra is, hogy az atomenergia békés felhasználása terén elért hazai eredményekről beszámoljon.

A Nemzetközi Csillagászati Unió a Szovjetunió Tudományos Akadémiájával közösen ez év augusztusában rendezte meg X. kongresszusát Moszkvában. E kongresszuson Akadémiánk képviseletében 7 tagú delegáció vett részt. A kongresszuson való részvétel során a magyar csillagászok értékes diszkussziókat folytattak a külföldi csillagászokkal. A kongresszus után a magyar csillagászok megtekintették a taskenti, grúziai, krimi és pulkovói csillagvizsgáló intézeteket és megismerkedtek az ott folyó vizsgálatokkal.

Külföldi tudósok közül a kultúregyezmény keretében, vagy más módon összesen 11 kutató járt Magyarországon. A külföldi tudósok közül különösen C. V. Raman Nobel-díjas indiai fizikus, a MTA tiszteletbeli tagja látogatása volt igen értékes a fizikusok számára. Reméljük, hogy nemzetközi kapcsolataink a jövőben tovább fognak erősödni.

A beszámoló időszakában mindössze egy művet adtunk ki, Grosev—Sapiro: Atommag spektroszkópia című könyvét. Könyvkiadásunkban a beszámoló időszakában visszaesés volt tapasztalható. Ennek oka elsősorban az, hogy a legtöbb szerző az Akadémiai Kiadóval kötött határidőt sok irányú elfoglaltsága miatt nem tudja betartani. A következő időkben előreláthatóan ismét javulás fog mutatkozni könyvkiadásunkban, amennyiben több önálló munka megjelenése várható.

Zavartalanul működik folyóiratkiadásunk. Mind az idegen nyelvű, mind a magyar nyelvű folyóirataink rendszeresen megjelennek és cikkekkel bőségesen ellátottak.

A beszámoló időszakában — kivéve a nálunk járt külföldi vendégek előadásait — az Osztály csak felolvasó üléseket rendezett. A felolvasó üléseken összesen 116 önálló eredményeket tartalmazó dolgozat ismertetésére, ill. bemutatására került sor.

Tájékoztatásul megemlítem, hogy a Matematikai Bizottság javaslata alapján az Osztályvezetőség — az Elnökség hozzájárulásával — a II. Magyar Matematikai Kongresszus megrendezését 1960-ra tervezi Budapesten, együttműködésben a Bolyai János Matematikai Társulattal.

Az Osztály tudományos irányítása alatt álló Bolyai János Matematikai Társulat és az Eötvös Loránd Fizikai Társulat ez évben is rendezett Balatonvilágoson kollokviumokat. Matematikából: mátrixelmélet és alkalmazásai, Monte Carlo módszer, funkcionálanalízis és diofantikus approximáció tárgyú kollokviumokat tartottak. Fizikából: az elemi részecskékkel és a gázkisülésekkel foglalkozó kollokviumokon jöttek össze fizikusaink. E kollokviumokon számos külföldi matematikus és fizikus vett részt és tartott előadást. Mindkét társulattal az Osztály együttműködése zavartalan és kielégítő.

Az osztályvezetőségi beszámoló végéhez érve kérem az Osztály tagjait és a jelenlevőket, hogy hozzászólásaikban bírálataikkal, javaslataikkal segítsék elő a beszámolóban említett célkitűzések megvalósítását.

VIZSGÁLATOK AZ OPERÁTORMODULUSOK ELMÉLETÉBEN, II.

Írta: KERTÉSZ ANDOR

II. AZ OPERÁTORMODULUSOK ALGEBRAI ELMÉLETE*

6. §. Kompatibilis egyenletrendszerek operátormodulusok felett

A klasszikus algebra tárgya a komplex számtest feletti algebrai egyenletek vizsgálata. Bár az absztrakt algebra a klasszikus algebrából, s különösen pedig a magasabb fokú egyenletek vizsgálatából sarjadt ki, a fejlődés jelenlegi fokán az absztrakt algebrában a különféle algebrai struktúrák szerkezetének vizsgálata nyomult előtérbe, s aránylag kevés szó esik az egyenletekről. Éppen ezért, ha egy adott struktúrafajta esetében az egyenletekkel és ezek megoldásaival foglalkozunk, indokoltnak látszik erre az „algebrai" jelzővel utalnunk.

Az operátormodulusok algebrai elmélete tehát az operátormodulusok elméletének az a része, amely operátormodulusok feletti egyenletrendszerekkel foglalkozik.

Legyen R tetszőleges gyűrű, G tetszőleges R-modulus, és x G-nek egy határozatlan eleme. E határozatlanban, amelyet a továbbiakban ismeretlennek mondunk, felírható legáltalánosabb G feletti egyenlet

$$rx + nx = g \qquad (r \in R,\ n \in E,\ g \in G) \tag{1}$$

alakú. Ha van olyan $x = h$ ($\in G$) elem, amelyre az (1) egyenlet teljesül, akkor azt mondjuk, hogy az (1) egyenlet G-ben megoldható és h (egyik) megoldása.

Ismeretes, hogy egy A algebrailag zárt (más terminológiában komplett, vagy teljes) Abel-féle csoportban bármely $nx = a$ $(0 \neq n \in E,\ a \in A)$ egyenletnek van megoldása.[22] Az Abel-féle csoportok között tehát van olyan, amelyben (bizonyos triviális kivételektől eltekintve) minden egyismeretlenes egyenlet megoldható. Egy Abel-féle csoport feletti $nx = a$ $(n \neq 0)$ egyismeretlenes egyenlet megoldhatóságával kapcsolatban nincsenek elvi problémák, mert az, ha a tekintett csoportban nem is, de annak valamely alkalmas bővítésében

* A fejezetek és paragrafusok számozása az I. részben (III. Osztály Közleményei VIII/4. sz. 411—436. o.) alkalmazott számozáshoz kapcsolódik. A cikk teljes irodalomjegyzékét is az I. részben közöltük.

[22] E tulajdonságot tekinthetjük az algebrailag zárt csoportok definíciójának is.

biztosan megoldható. Más a helyzet tetszőleges R-modulus esetében, ahol már *egy* egyismeretlenes egyenlet megoldhatósága is mélyebb kérdésekkel függ össze. Előfordulhat ugyanis, hogy az (1) egyenletet tekintve, valamely $s(\in R)$, $m(\in E)$ elempárra $s(rx+nx)+m(rx+nx)=0$ érvényes, míg a jobboldal megfelelő lineáris kombinációja $sg+mg\neq 0$. Egy ilyen egyenlet nyilván nem oldható meg G-ben, de nem oldható meg G-nek egyetlen bővítésében[23] sem. Operátormodulusok esetében tehát már egyetlen, egyismeretlenes egyenlet sem mindig „kompatibilis".[24] Hogy közönséges Abel-féle csoportok esetében ilyen anomália nem fordulhat elő, annak oka az, hogy egy $nx=a$ $(n\neq 0)$ alakú egyenlet baloldalát csak a 0 annullálja, amely nyilván a jobboldalt is annullálja. Ahhoz, hogy operátormodulusok feletti egyenletekkel foglalkozhassunk, mindenekelőtt a kompatibilis egyenletrendszer fogalmát kell tisztáznunk.

Legyen R tetszőleges gyűrű, A tetszőleges $\mathfrak{m}(>0)$ számosságú indexhalmaz és S az x_α $(\alpha\in\mathrm{A})$ határozatlanok rendszere. Tekintsük a G R-modulus felett az

(2) $$f_\beta=g_\beta \qquad (\beta\in\mathrm{B},\ g_\beta\in G)$$

egyenletek rendszerét, ahol B ugyancsak tetszőleges (nem üres) indexhalmaz és f_β az x_α $(\alpha\in\mathrm{A})$ szabad bázissal bíró $R(\mathfrak{m})$ szabad R-modulus eleme, azaz

(3) $$f_\beta=\langle a_{\beta 1}, n_{\beta 1}\rangle x_{\alpha_{\beta 1}}+\cdots+\langle a_{\beta k}, n_{\beta k}\rangle x_{\alpha_{\beta k}} \qquad (\langle a_{\beta j}, n_{\beta j}\rangle\in R^*)$$

egy R^* feletti lineáris forma. Azt mondjuk, hogy az

(4) $$x_\alpha=h_\alpha\ (\in G;\ \alpha\in\mathrm{A})$$

elemrendszer a (2) egyenletrendszer (G-beli) megoldása, ha (4)-et (2)-be helyettesítve az egyenletek teljesülnek. A megoldhatóságnak triviálisan szükséges feltétele a következő: minden olyan, véges sok f_β között fennálló reláció, amely e lineáris formák két R^*-feletti lineáris kombinációjának az egyenlőség jelével való összekapcsolása, érvényben marad akkor is, ha az f_β-kat a jobboldalon álló megfelelő g_β elemekkel helyettesítjük. Más szavakkal: minden

$$\langle s_1, m_1\rangle f_{\beta_1}+\cdots+\langle s_i, m_i\rangle f_{\beta_i}=0$$

alakú relációból

$$\langle s_1, m_1\rangle g_{\beta_1}+\cdots+\langle s_i, m_i\rangle g_{\beta_i}=0$$

következik. Ezt a követelményt *kompatibilitási feltételnek* nevezzük.

Legyen mármost (2) a kompatibilitási feltételt kielégítő egyenletrendszer. Ekkor az $f_\beta\to g_\beta$ leképezés az $R(\mathfrak{m})$ szabad R-modulus f_β $(\beta\in\mathrm{B})$ elemei által generált M részmodulusának egy G-be való jól meghatározott φ R-homomor-

[23] Azaz egy olyan R-modulusban, amelynek G részmodulusa.

[24] Lássunk erre egy egyszerű példát. Legyen $R=E\oplus E$. (Az R gyűrű elemeit (n, m) elempárokkal jelöljük.) A $(0,1)(x,y)=(1,0)$ $R_{(R)}$ feletti egyenlet nyilván nem kompatibilis, mert pl. $(1,0)$ a baloldalt annullálja, a jobboldalt azonban nem.

fizmusát indukálja:

$$(\langle s_1, m_1\rangle f_{\beta_1} + \cdots + \langle s_i, m_i\rangle f_{\beta_i})\varphi = \langle s_1, m_1\rangle (f_{\beta_1}\varphi) + \cdots + \langle s_i, m_i\rangle (f_{\beta_i}\varphi) =$$
$$= \langle s_1, m_1\rangle g_{\beta_1} + \cdots + \langle s_i, m_i\rangle g_{\beta_i},$$

theát speciálisan $f_\beta \varphi = g_\beta$ ($\beta \in B$). (A leképezés egyértelműségét a kompatibilitási feltétel biztosítja.) — Megfordítva, az $R(\mathfrak{m})$ szabad R-modulus valamely M részmodulusának G-be való φ operátorhomomorf leképezése olyan G feletti egyenletrendszereket szolgáltat, amelyek eleget tesznek a kompatibilitási feltételnek. Ezen egyenletrendszerek mindegyikében a baloldalakon az M-modulus valamely generátorrendszerét alkotó f_β lineáris formák állnak, a megfelelő jobboldalak pedig a $g_\beta = f_\beta \varphi$ egyenlőségekkel vannak definiálva.

Ha két, a kompatibilitási feltételnek eleget tevő egyenletrendszer az $R(\mathfrak{m})$ modulus ugyanazon részmodulusának ugyanazt a M operátorhomomorfizmusát indukálja, akkor a két rendszert *ekvivalensnek* mondjuk. Nyilvánvaló, hogy két G feletti egyenletrendszer akkor és csak akkor ekvivalens, ha az egyik rendszer bármely egyenlete a másik rendszer véges sok egyenletének R^* feletti (bal-) lineáris kombinációjaként áll elő, és megfordítva. Az is világos, hogy ekvivalens, a kompatibilitási feltételnek eleget tevő egyenletrendszerek megoldásai megegyeznek. Eszerint a kompatibilitási feltételnek eleget tevő ekvivalens egyenletrendszerek között nem szükséges megkülönböztetést tennünk és kimondhatjuk a következő definíciót:

DEFINÍCIÓ: *Egy tetszőleges G R-modulus feletti $[M, \varphi]$ $\mathfrak{m}$-ismeretlenes kompatibilis egyenletrendszeren az $R(\mathfrak{m})$ szabad R-modulus M részmodulusának G-be való adott φ operátorhomomorf leképezését értjük. Az $[M, \varphi]$ egyenletrendszert homogénnak nevezzük, ha $M\varphi = 0$.*

POLLÁK GYÖRGY értékes megjegyzését felhasználva definíciónkat a következőképpen egészíthetjük ki:

A G R-modulus feletti $[M, \varphi]$ kompatibilis egyenletrendszer G-ben akkor és csak akkor oldható meg, ha az M részmodulus φ operátorhomomorf leképezése folytatható az egész $R(\mathfrak{m})$ szabad R-modulusnak egy G-be való $\overline{\varphi}$ operátorhomomorf leképezésévé. Az $[M, \varphi]$ egyenletrendszer megoldásai kölcsönös és egyértelmű kapcsolatban állnak a φ homomorfizmus $\overline{\varphi}$ folytatásaival, s így az $[M, \varphi]$ egyenletrendszer valamely megoldásán mindig a φ leképezés megfelelő $\overline{\varphi}$ folytatását érthetjük.

Valóban, tegyük fel, hogy a (4) elemrendszer a (2) egyenletrendszernek valamely megoldása. Az $x_\alpha \to h_\alpha$ ($\alpha \in A$) leképezés az egész $R(\mathfrak{m})$ modulusnak egy G-be való $\overline{\varphi}$ R-homomorf leképezését indukálja. Ekkor

$$f_\beta \overline{\varphi} = \langle a_{\beta 1}, n_{\beta 1}\rangle (x_{\alpha_{\beta 1}}\overline{\varphi}) + \cdots + \langle a_{\beta k}, n_{\beta k}\rangle (x_{\alpha_{\beta k}}\overline{\varphi}) =$$
$$= \langle a_{\beta 1}, n_{\beta 1}\rangle h_{\alpha_{\beta 1}} + \cdots + \langle a_{\beta k}, n_{\beta k}\rangle h_{\alpha_{\beta k}} = g_\beta = f_\beta \varphi,$$

tehát $\bar{\varphi}$ a φ leképezés alkalmas folytatása. — Megfordítva, tegyük fel, hogy a (2) egyenletrendszer által indukált φ homomorfizmus folytatható az egész $R(\mathfrak{m})$ modulusnak egy G-be való $\bar{\varphi}$ homomorf leképezésévé. Legyen speciálisan $x_\alpha \bar{\varphi} = h_\alpha$ $(\alpha \in \mathrm{A})$. Ekkor

$$\begin{aligned} f_\beta \bar{\varphi} &= (\langle a_{\beta 1}, n_{\beta 1}\rangle x_{\alpha_{\beta 1}} + \cdots + \langle a_{\beta k}, n_{\beta k}\rangle x_{\alpha_{\beta k}}) \bar{\varphi} = \\ &= \langle a_{\beta 1}, n_{\beta 1}\rangle (x_{\alpha_{\beta 1}} \bar{\varphi}) + \cdots + \langle a_{\beta k}, n_{\beta k}\rangle (x_{\alpha_{\beta k}} \bar{\varphi}) = \\ &= \langle a_{\beta 1}, n_{\beta 1}\rangle h_{\alpha_{\beta 1}} + \cdots + \langle a_{\beta k}, n_{\beta k}\rangle h_{\alpha_{\beta k}}. \end{aligned}$$

Másrészt, mivel $\bar{\varphi}$ M-en megegyezik φ-vel, φ definíciója szerint

$$f_\beta \bar{\varphi} = f_\beta \varphi = g_\beta.$$

Ezzel megmutattuk, hogy $x_\alpha = h_\alpha$ $(\alpha \in \mathrm{A})$ a (2) egyenletrendszer megoldása.

Tekintsünk a G R-modulus felett egy

$$(5) \qquad f_\beta = g_\beta \qquad (f_\beta \in R(\mathfrak{m});\ g_\beta \in G;\ \beta \in \mathrm{B})$$

egyenletrendszert. Jelöljük $G(\mathfrak{m})$-mel a G és $R(\mathfrak{m})$ modulusok direkt összegét:

$$(6) \qquad G(\mathfrak{m}) = G \dotplus R(\mathfrak{m}).$$

Ekkor érvényes a következő

10. TÉTEL: *A G R-modulus feletti* (5) *egyenletrendszerre ekvivalensek az alábbi feltételek:*

α) az (5) *egyenletrendszer kompatibilis;*

β) az $f_\beta - g_\beta$ $(\beta \in \mathrm{B})$ elemek halmaza a $G(\mathfrak{m})$ modulusban olyan H részmodulust generál, amelyre $G \cap H = 0$;

γ) az (5) *egyenletrendszer megoldható G valamely bővítésében.*

BIZONYÍTÁS: *α)-ból következik β).* Tegyük fel, hogy

$$\langle r_1, n_1\rangle (f_{\beta_1} - g_{\beta_1}) + \cdots + \langle r_k, n_k\rangle (f_{\beta_k} - g_{\beta_k}) = g \in G.$$

Ebből

$$(\langle r_1, n_1\rangle f_{\beta_1} + \cdots + \langle r_k, n_k\rangle f_{\beta_k}) - (\langle r_1, n_1\rangle g_{\beta_1} + \cdots + \langle r_k, n_k\rangle g_{\beta_k}) = g.$$

A (6) direkt felbontás miatt $\langle r_1, n_1\rangle f_{\beta_1} + \cdots + \langle r_k, n_k\rangle f_{\beta_k} = 0$, s ekkor α)-ból $\langle r_1, n_1\rangle g_{\beta_1} + \cdots + \langle r_k, n_k\rangle g_{\beta_k} = 0$, tehát $g = 0$ következik.

β)-ból következik γ). Tekintsük a $\overline{G(\mathfrak{m})} = G(\mathfrak{m})/H$ faktormodulust. Ebben a faktormodulusban a $\bar{g}$ $(g \in G)$ elemek a β) feltétel miatt egy G-vel izomorf R-modulust alkotnak, $\overline{G(\mathfrak{m})}$ tehát G bővítésének tekinthető. Az $f \to \bar{f}$ $(f \in R(\mathfrak{m}))$ leképezés az $R(\mathfrak{m})$ modulusnak $\overline{G(\mathfrak{m})}$-ba való olyan R-homomorf leképezése, amely az

$$f_\beta = \bar{g}_\beta \qquad (\beta \in \mathrm{B})$$

egyenletrendszer által indukált R-homomorf leképezést kiterjeszti az egész $R(\mathfrak{m})$-re. Az (5) egyenletrendszer tehát megoldható $\overline{G(\mathfrak{m})}$-ban.

γ)-ból következik α). Legyen $\bar{\varphi}$ az $R(\mathfrak{m})$-nek G valamely G' bővítésébe való olyan operátorhomomorf leképezése, amelyre $f_\beta \bar{\varphi} = g_\beta$ ($\beta \in \mathrm{B}$) teljesül. Ilyen $\bar{\varphi}$ homomorfizmus létezését γ) biztosítja. Ekkor nyilvánvaló, hogy az $R(\mathfrak{m})$ modulus $M = \{\ldots, f_\beta, \ldots\}_{\beta \in \mathrm{B}}$ részmodulusának az $f_\beta \to g_\beta$ ($\beta \in \mathrm{B}$) leképezéssel indukált G-be való φ leképezése az M részmoduluson megegyezik $\bar{\varphi}$-sal, tehát homomorfizmus. Ezzel a tétel állítását bebizonyítottuk.

A 10. tétel alapján az (5) egyenletrendszer kompatibilitása a β) és γ) tulajdonságokkal is definiálható, mindamellett a mi definíciónk ezeknél természetesebbnek látszik. A β) és γ) tulajdonságok gyűrűelméleti analogonjának ekvivalenciája megtalálható [38] és [43]-ban.

Eddigi meggondolásaink illusztrálása és alkalmazása céljából átfogalmazását adjuk EHRENFEUCHT egy tételének. Ez az átfogalmazás egy érdekes új eredményt ad a lineáris diophantikus egyenletrendszerek elméletében. J. H. C. WHITEHEAD egy problémájának megoldásaként A. EHRENFEUCHT bebizonyította a következő tételt [9]:

Legyen F megszámlálható szabad Abel-féle csoport és H az F valamely részcsoportja. H akkor és csak akkor direkt összeadandója F-nek, ha H-nak bármely, a C végtelen ciklikus csoportba való homomorf leképezése folytatható az egész F-nek C-be való homomorf leképezésévé.[25]

Tekintsünk most egy tetszőleges homogén lineáris egyenletrendszert az egész számok E gyűrűje felett az $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ ismeretlenekben:

$$f_\beta(x_1, x_2, \ldots) = m_{\beta 1} x_{n_{\beta 1}} + \cdots + m_{\beta k} x_{n_{\beta k}} = 0$$

(β befut egy tetszőleges B indexhalmazt). Ez a rendszer nyilvánvalóan kompatibilis. Helyettesítsük most a jobboldalon álló zérusokat $l_\beta \in E$ számokkal úgy, hogy az

$$f_\beta = l_\beta \qquad (\beta \in \mathrm{B}) \tag{7}$$

egyenletrendszer ismét kompatibilis legyen.[26] EHRENFEUCHT tételéből, továbbá a modulus feletti kompatibilis egyenletrendszer megoldhatóságára vonatkozó meggondolásainkból következik, hogy *az összes olyan kompatibilis egyenletrendszer, amely az f_β lineáris formák rögzítése mellett a fenti módon áll elő, akkor és csak akkor oldható meg racionális egész számokkal, ha az $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ határozatlanokkal kifeszített szabad Abel-féle csoportban az f_β lineáris formák által generált részcsoport direkt összeadandó.*

[25] Figyelmeztetünk arra, hogy itteni meggondolásainkban Abel-féle csoportot, tehát 0-modulust tekintünk, így a szabad R-modulus szerepét a szabad Abel-féle csoport és az operátorhomomorfizmus szerepét a közönséges homomorfizmus veszi át.

[26] Ebben az esetben a kompatibilitás feltétele teljesen explicit alakban adható meg. A (7) egyenletrendszer ugyanis akkor és csak akkor kompatibilis, ha bármely véges részrendszere kompatibilis a klasszikus értelemben, azaz mátrixának rangja a megfelelő homogén egyenletrendszer mátrixának rangjával egyenlő.

7. §. Szerváns részmodulus

Ismeretes, hogy a közönséges Abel-féle csoportok elméletében milyen fontos szerepet tölt be a szerváns részcsoport fogalma. Ebben a paragrafusban ezt a fogalmat visszük át tetszőleges operátormodulusok esetére és megvizsgáljuk az így bevezetett szerváns részmodulusok néhány alapvető tulajdonságát.

Legyen G tetszőleges R-modulus. A G modulus valamely H részmodulusát *szerváns részmodulusnak* nevezzük (G-ben), ha bármely G-ben megoldható H feletti

(8) $$\langle r_\nu, n_\nu \rangle x = h_\nu \quad (\langle r_\nu, n_\nu \rangle \in R^*;\ h_\nu \in H;\ \nu \in \Delta)$$

egyismeretlenes egyenletrendszer H-ban is megoldható. Szerváns részmodulusra példa G bármely direkt összeadandója, így speciálisan 0 és G.[27] Könnyű belátni, hogy a szerváns részmodulus fogalma közönséges Abel-féle csoportok esetében megegyezik a szerváns részcsoport fogalmával.[28]

Mint a definíció közvetlen következményét megemlítjük, hogy *ha H_1 szerváns részmodulus G-ben és H_2 szerváns részmodulus H_1-ben, akkor H_2 szerváns részmodulus G-ben is.*

Tetszőleges Abel-féle csoportban szerváns részcsoportok növekvő láncának egyesítése is szerváns részcsoport. Ez az állítás szerváns részmodulusokra általában elveszti érvényességét. Ezt mutatja a következő példa. Legyen $R^{(1)}, R^{(2)}, \ldots, R^{(n)}, \ldots$ egységelemes gyűrűk végtelen sorozata és S e gyűrűk komplett direkt összege. Az S tehát egységelemes gyűrű. Az

(9) $$R^{(1)}_{(S)},\ R^{(1)}_{(S)} + R^{(2)}_{(S)},\ \ldots,\ R^{(1)}_{(S)} + \cdots + R^{(n)}_{(S)},\ \ldots$$

modulusok $S_{(S)}$-nek direkt összeadandói, s így méginkább szerváns részmodulusai. A (9) sorozat S_0 egyesítése azonban mégsem szerváns részmodulus

[27] Arra vonatkozóan, hogy egy szerváns részmodulus nem szükségképpen direkt összeadandó, lásd pl. a [31] dolgozat 3. §-át. Az ott konstruált G modulus T részmodulusa G-ben szerváns részmodulus, de nem direkt összeadandó.

[28] Közönséges Abel-féle csoportok esetén ugyanis bármely egyismeretlenes kompatibilis egyenletrendszer egyetlen egyenlettel helyettesíthető:

Legyen B az A Abel-féle csoport részcsoportja és

$$n_\nu x = b_\nu \qquad (n_\nu \in E;\ b_\nu \in B;\ \nu \in \Delta)$$

egy B feletti kompatibilis egyenletrendszer. Ez az egyenletrendszer ekvivalens az

$$nx = b$$

egyenlettel, ahol n az n_ν elemek által E-ben generált ideál valamelyik generátoreleme, s ha

$$n = l_1 n_{\nu_1} + \cdots + l_k n_{\nu_k} \qquad (l_1, \ldots, l_k \in E),$$

akkor

$$b = l_1 b_{\nu_1} + \cdots + l_k b_{\nu_k}.$$

$S_{(S)}$-ben. Tekintsük ugyanis azt az egyenletrendszert, amely S_0 összes s elemére az $sx = s$ egyenletekből áll. Ez az egyenletrendszer S-ben nyilván megoldható, S_0-ban azonban nem, mert S_0 mint az $R_1, R_2, \dots$ gyűrűk *diszkrét* direkt összege nem jobbegységelemes gyűrű.

Most bebizonyítjuk a következő tételt:

11. TÉTEL: *A G R-modulus valamely H részmodulusa akkor és csak akkor szerváns G-ben, ha a G/H faktormodulus bármely eleme rendhűen reprezentálható.*[29]

BIZONYÍTÁS: Legyen H szerváns részmodulus G-ben és $\bar{g} = g + H$ a G/H faktormodulus tetszőleges eleme. Ha $O(\bar{g}) = 0$, akkor szintén $O(g) = 0$. Tegyük fel tehát, hogy $O(\bar{g}) = L \neq 0$. Az $\langle s, m\rangle g$ ($\langle s, m\rangle \in L$) elemek H-hoz tartoznak, s minthogy H szerváns részmodulus G-ben, van H-ban olyan h elem, hogy $\langle s, m\rangle h = \langle s, m\rangle g$ minden $\langle s, m\rangle$ ($\in L$) elemre. A $g' = g - h$ elem a $\bar{g}$ mellékosztály eleme és rendje ugyancsak L. Egy $\langle s, m\rangle \in L$ elemre ugyanis $\langle s, m\rangle g' = \langle s, m\rangle g - \langle s, m\rangle h = 0$, s ha $\langle r, n\rangle \notin L$, akkor $\langle r, n\rangle g' = \langle r, n\rangle g - \langle r, n\rangle h \neq 0$, minthogy $\langle r, n\rangle h \in H$ és $\langle r, n\rangle g \notin H$.

Megfordítva, tegyük fel, hogy H G-nek olyan részmodulusa, hogy G bármely H szerinti mellékosztálya rendhűen reprezentálható. Megmutatjuk, hogy H szerváns részmodulus G-ben. Legyen (8) egy G-ben megoldható H feletti egyenletrendszer és g ($\in G$) e rendszer valamely megoldása:

$$\langle r_\nu, n_\nu\rangle g = h \qquad (\nu \in \Delta).$$

Tekintsük a G/H faktormodulust. Ha $O(\bar{g}) = L$, akkor nyilvánvalóan bármely ν ($\in \Delta$) indexre $\langle r_\nu, n_\nu\rangle \in L$. Másrészt feltevésünk szerint van olyan $g' = g - h$ ($h \in H$) elem, amelyre $O(g') = L$. Így

$$\langle r_\nu, n_\nu\rangle g' = \langle r_\nu, n_\nu\rangle g - \langle r_\nu, n_\nu\rangle h = 0 \qquad (\nu \in \Delta),$$

s innen

$$\langle r_\nu, n_\nu\rangle h = \langle r_\nu, n_\nu\rangle g = h_\nu \qquad (\nu \in \Delta),$$

azaz a (8) egyenletrendszernek a h ($\in H$) elem megoldása.

A 11. tétel közvetlen következményei:

Ha a G/H modulus torziómentes modulus, akkor H szerváns részmodulus G-ben.

A G torziómentes modulus H részmodulusa akkor és csak akkor szerváns részmodulus G-ben, ha a G/H faktormodulus is torziómentes.

A 11. tétel segítségével bebizonyítjuk a következő tételt:

12. TÉTEL: *Ha H a G R-modulus szerváns részmodulusa és a $\bar{G} = G/H$ faktormodulus ciklikus modulusok direkt összege, akkor H G-nek direkt összeadandója.*

[29] Pontosabban ez azt jelenti, hogy G bármely H szerinti mellékosztályában van olyan elem, amelynek rendje megegyezik e mellékosztály rendjével a G/H faktormodulusban.

BIZONYÍTÁS: Legyen
$$\bar{G} = \sum_{\lambda \in \Lambda}' \{\bar{g}_\lambda\}$$
a $\bar{G} = G/H$ faktormodulusnak ciklikus részmodulusok direkt összegére való olyan felbontása, ahol minden $\lambda\,(\in \Lambda)$ indexre $O(\bar{g}_\lambda) = O(g_\lambda)$ (lásd a 11. tételt), és legyen A a G modulusnak a g_λ $(\lambda \in \Lambda)$ elemek által generált részmodulusa:
$$A = \sum_{\lambda \in \Lambda}' \{g_\lambda\}.$$
Megmutatjuk, hogy $G = H \dotplus A$. Egyrészt világos, hogy $G = \{H, A\}$. Másrészt legyen $a \in A \cap H$:
$$a = \langle r_1, n_1 \rangle g_{\lambda_1} + \cdots + \langle r_k, n_k \rangle g_{\lambda_k} \qquad (\langle r_i, n_i \rangle \in R^*).$$
Minthogy $a \in H$, az
$$\bar{a} = \langle r_1, n_1 \rangle \bar{g}_{\lambda_1} + \cdots + \langle r_k, n_k \rangle \bar{g}_{\lambda_k} = 0$$
egyenlőség is érvényes. A $\bar{g}_\lambda$ elemek azonban függetlenek $\bar{G}$-ban, így
$$\langle r_i, n_i \rangle \bar{g}_{\lambda_i} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, k),$$
s minthogy $O(\bar{g}_{\lambda_i}) = O(g_{\lambda_i})$, az
$$\langle r_i, n_i \rangle g_{\lambda_i} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, k)$$
egyenlőségek is következnek. Ebből $a = 0$ adódik, s így valóban $G = H \dotplus A$.

13. TÉTEL: *Legyen H szerváns részmodulusa és A valamely H-t tartalmazó tetszőleges részmodulusa a G R-modulusnak. Az A részmodulus akkor és csak akkor szerváns részmodulus G-ben, ha A/H szerváns részmodulus G/H-ban.*

BIZONYÍTÁS: Legyen A/H szerváns részmodulus G/H-ben és
$$\langle r_\nu, n_\nu \rangle x = a_\nu \quad (\in A;\ \langle r_\nu, n_\nu \rangle \in R^*,\ \nu \in \Delta) \tag{10}$$
A feletti egyenletrendszer, amelynek $x = g$ $(\in G)$ megoldása. Megmutatjuk, hogy a (10) egyenletrendszer A-ban is megoldható. Feltevésünkből következik, hogy vannak olyan $a \in A$ és $h_\nu \in H$ $(\nu \in \Delta)$ elemek, amelyekre az
$$\langle r_\nu, n_\nu \rangle a = a_\nu + h_\nu \qquad (\nu \in \Delta) \tag{11}$$
egyenlőségek teljesülnek. (10)-ből és (11)-ből
$$\langle r_\nu, n_\nu \rangle (a - g) = h_\nu \qquad (\nu \in \Delta)$$
következik, s minthogy H szerváns részmodulus G-ben, van olyan $h \in H$ elem, hogy
$$\langle r_\nu, n_\nu \rangle h = h_\nu \qquad (\nu \in \Delta). \tag{12}$$
A (11) és (12) egyenlőségek alapján
$$\langle r_\nu, n_\nu \rangle (a - h) = a_\nu \qquad (\nu \in \Delta),$$
s minthogy $a - h \in A$, állításunk egyik felét bebizonyítottuk.

Megfordítva, legyen A szerváns részmodulus G-ben és legyen

$$\langle r_\nu, n_\nu\rangle \bar{x} = \bar{a}_\nu \qquad (a_\nu \in A,\ \nu \in \Delta)$$

egy A/H feletti egyenletrendszer, amelynek $\bar{g}$ megoldása. Ekkor vannak olyan $h_\nu\,(\in H)$ elemek, hogy

$$\langle r_\nu, n_\nu\rangle g = a_\nu + h_\nu \in A \qquad (\nu \in \Delta).$$

Feltevésünk szerint alkalmas $a\,(\in A)$ elemre

$$\langle r_\nu, n_\nu\rangle a = a_\nu + h_\nu \qquad (\nu \in \Delta)$$

teljesül, és így

$$\langle r_\nu, n_\nu\rangle \bar{a} = \bar{a}_\nu \qquad (\nu \in \Delta).$$

Ezzel bebizonyítottuk, hogy A/H szerváns részmodulus G/H-ban.

Megjegyezzük, hogy állításunk második felének igazolásakor a H részmodulus szerváns jellegét nem használtuk ki. Ezért valamivel többet bizonyítottunk: *homomorf leképezésnél bármely, a homomorfizmus magját tartalmazó szerváns részmodulus képe is szerváns részmodulus.*

E paragrafust egy olyan tétel bizonyításával zárjuk, amely szintén egy modulus valamely részmodulusa feletti egyenletrendszerekre vonatkozik, s a modulus direkt összeadandóit jellemzi:

14. TÉTEL:[30] *Egy tetszőleges G R-modulus valamely H részmodulusa G-nek akkor és csak akkor direkt összeadandója, ha bármely H feletti G-ben megoldható egyenletrendszer H-ban is megoldható.*

BIZONYÍTÁS: Tegyük fel, hogy

$$G = H + K \tag{13}$$

és az

$$f_\beta(\ldots, x_\nu, \ldots) = h_\beta\,(\in H) \tag{14}$$

egyenletrendszer G-ben megoldható. Ha $\ldots, g_\nu, \ldots\ (\in G)$ a (14) egyenletrendszer valamely megoldása, akkor a (13) direkt felbontás alapján egyértelműen adódó

$$g_\nu = a_\nu + b_\nu \qquad (a_\nu \in H;\ b_\nu \in K)$$

előállítással

$$f_\beta(\ldots, g_\nu, \ldots) = f_\beta(\ldots, a_\nu, \ldots) + f_\beta(\ldots, b_\nu, \ldots) = h_\beta \qquad (\in H)$$

adódik, ahonnan

$$f_\beta(\ldots, a_\nu, \ldots) = h_\beta.$$

Az $\ldots, a_\nu, \ldots$ elemrendszer tehát H-beli megoldása a (13) egyenletrendszernek.

[30] Ezt a tételt Abel-féle csoportokra GACSÁLYI mondta ki [17]. Az itt közölt bizonyítás is GACSÁLYI eljárásának értelemszerű módosításával keletkezett.

Megfordítva, tegyük fel, hogy bármely H feletti G-ben megoldható egyenletrendszer H-ban is megoldható. Legyen $\ldots, g_\mu, \ldots$ G elemeinek olyan rendszere, hogy

(15) $$G=\{H, \ldots, g_\mu, \ldots\}.$$

Tekintsük most az összes fennálló

(16) $$\langle r_1, n_1\rangle g_{\mu_1}+\cdots+\langle r_k, n_k\rangle g_{\mu_k}=h \quad (\in H;\ \langle r_i, n_i\rangle \in R^*)$$

alakú egyenlőséget. Ezen relációk rendszerének megfelel egy olyan H feletti

(16′) $$\langle r_1, n_1\rangle x_{\mu_1}+\cdots+\langle r_k, n_k\rangle x_{\mu_k}=h$$

egyenletrendszer, amelynek a $\ldots, g_\mu, \ldots$ elemrendszer megoldása. Feltevésünk szerint a (16′) egyenletrendszer valamely $\ldots, h_\mu, \ldots$ H-beli elemrendszerrel is kielégíthető, tehát

(17) $$\langle r_1, n_1\rangle h_{\mu_1}+\cdots+\langle r_k, n_k\rangle h_{\mu_k}=h.$$

Megmutatjuk, hogy

(18) $$G=H+K,$$

ahol

$$K=\{\ldots, g_\mu-h_\mu, \ldots\}.$$

A H és K részmodulusok az egész G modulust generálják, minthogy $\{H, K\}$ tartalmazza az összes g_μ elemet és fennáll (15). Másrészt legyen

$$\langle r_1, n_1\rangle (g_{\mu_1}-h_{\mu_1})+\cdots+\langle r_k, n_k\rangle (g_{\mu_k}-h_{\mu_k})=h' \in H$$

a $H\cap K$ metszet tetszőleges eleme. Itt a baloldal (16) és (17) baloldalainak a különbsége, tehát szükségképpen $h'=0$, s így $H\cap K=0$ adódik. Ezzel bebizonyítottuk, hogy (18) fennáll, tehát a tétel bizonyítását is befejeztük.

8. §. Algebrailag zárt operátormodulusok

Az Abel-féle csoportok feletti egyenletek elméletének rendszeres tárgyalását 1950-ben megjelent [41] dolgozatában SZELE TIBOR adja. SZELE egy olyan elméletet épít ki Abel-féle csoportok esetében, amely analogonja a testek Steinitz-féle elméletének. Abból az észrevételből kiindulva, hogy egy G Abel-féle csoport feletti legáltalánosabb egyenlet $nx=g$ ($n\in E$; $g\in G$; x az ismeretlen) alakú, definiálja a csoportok algebrai és transzcendens bővítését, s e definíciók alapján a testelmélet számos tétele szóról-szóra átvihető az Abel-féle csoportok elméletébe.

A Szele-féle elméletben az „algebrailag zárt csoportok“ összeesnek az ún. teljes Abel-féle csoportokkal. Értékes eredménnyel járult ehhez az elmélethez GACSÁLYI SÁNDOR, bebizonyítván az algebrailag zárt Abel-féle csoportok ama nevezetes tulajdonságát, hogy bennük bármely, felettük tekintett, tetszőlegesen sok ismeretlent és egyenletet tartalmazó kompatibilis egyenletrendszer is megoldható [16].

Ebben a paragrafusban egy hasonló elmélet alapjait szeretnénk lerakni teljesen tetszőleges operátortartománnyal ellátott modulusok esetére. Meglepő, hogy ebben a legáltalánosabb esetben is igaz marad az algebrailag zárt Abel-féle csoportokra vonatkozó számos eredmény. Tárgyalásunknak megvan az az előnye is, hogy néhány, operátormodulusokra már korábban is ismert eredményt általánosít és beilleszt egy szélesebb elmélet kereteibe, s a logikai sorrend alkalmas megállapításával ezeknek az eredményeknek egyszerűbb bizonyítását teszi lehetővé.

Legyen R tetszőleges gyűrű és G R-modulus. A G modulust *algebrailag zártnak* nevezzük, ha bármely G feletti egyismeretlenes kompatibilis egyenletrendszer G-ben megoldható.

Mindenekelőtt megjegyezzük, hogy a definícióban azt a kikötést, hogy minden kompatibilis egyismeretlenes *egyenletrendszer* megoldható legyen, nem helyettesíthetjük azzal a gyengébb kikötéssel, hogy minden kompatibilis egyismeretlenes *egyenlet* megoldható. Ezt mutatja a következő példa:

Legyen K végtelen sok K_ν test komplett direkt összege. A K_ν testek K_0 diszkrét direkt összege K-ban ideál, így K_0 K-modulusnak tekinthető. A K gyűrű egységelemes reguláris gyűrű a NEUMANN JÁNOS-féle értelemben[31], ezért K-nak NEUMANN egy tétele alapján (lásd [36], vol. 2, ch. 2.) bármely főideálja direkt összeadandója. Ebből következik, hogy K_0-ban mint K-modulusban bármely egyismeretlenes kompatibilis *egyenlet* megoldható. Másrészt tekintsük az összes $k_\beta x = k_\beta$ ($k_\beta \in K_0$) egyenletekből álló *egyenletrendszert*. Ez nyilvánvalóan kompatibilis, viszont K_0-ban nem oldható meg, minthogy K_0-nak nincs egységeleme.

Az algebrailag zárt operátormodulusok legfontosabb tulajdonságait fejezi ki a

15. TÉTEL:[32] *Egy tetszőleges G R-modulusra ekvivalensek az alábbi tulajdonságok:*

a) *G algebrailag zárt R-modulus;*

b) *ha G a D R-modulus direkt összeadandója, akkor D-nek erős direkt összeadandója is;*

[31] Eszerint egy R gyűrű reguláris, ha bármely r eleméhez van olyan $x (\in R)$ elem, hogy $rxr = r$ [35].

[32] Ez a tétel mutatja, hogy az algebrailag zárt modulusok fogalma az uniter modulusok speciális esetében megegyezik a R. BAER által bevezetett komplett és a homologikus algebrában fellépő injektív modulusok fogalmával. Így e paragrafus eredményei néhány, már korábban ismert eredményt is magukban foglalnak [3], [8].

c) *az* $R^*_{(E)}$ *modulus tetszőleges* $L_{(E)}$ *részmodulusának bármely* ψ *G-be való homomorf leképezéséhez van olyan* g_0 $(\in G)$ *elem, hogy* $\langle s, m\rangle \psi = \langle s, m\rangle g_0$ *minden* $L_{(E)}$*-beli* $\langle s, m\rangle$ *elemre teljesül;*

d) *ha* φ *a tetszőleges B R-modulus valamely A részmodulusának egy G-be való homomorf leképezése, akkor* φ *folytatható az egész B-t G-be leképező homomorfizmussá;*

e) *bármely G feletti kompatibilis egyenletrendszer G-ben megoldható;*

f) *ha G a D R-modulusnak részmodulusa, akkor egyben direkt összeadandója is;*

g) *ha G a D R-modulusnak részmodulusa, akkor egyben szerváns részmodulusa is.*

Az a) és e) tulajdonságok ekvivalenciájának érdekes folyománya a következő

1. KOROLLÁRIUM: *Ha az R gyűrűben bármely egyismeretlenes kompatibilis lineáris egyenletrendszer megoldható, akkor R-ben bármely (tetszőlegesen sok ismeretlent és egyenletet tartalmazó) kompatibilis lineáris egyenletrendszer is megoldható.*

Minthogy egy K ferdetest feletti kompatibilis egyismeretlenes egyenletrendszer ekvivalens egyetlen K feletti kompatibilis egyenlettel, s így mindig megoldható, az 1. korolláriumból azonnal adódik GACSÁLYI következő tétele [16]:

2. KOROLLÁRIUM: *Ferdetestben bármely kompatibilis lineáris egyenletrendszer megoldható.*

A TÉTEL BIZONYÍTÁSA: a)*-ból következik* b).[33] Tegyük fel, hogy G a D R-modulus részmodulusa és legyen H D-nek (ZORN lemmája alapján okvetlenül létező,) a $G \cap H = 0$ tulajdonságra nézve maximális részmodulusa. Megmutatjuk, hogy

$$D = G \dotplus H. \tag{19}$$

Bevezetve a $K = G \dotplus H$ jelölést, tegyük fel, hogy $K \subset D$. Ekkor van olyan d $(\in D)$ elem, amely K-nak nem eleme. Tekintsük az összes olyan $\langle s, m\rangle$ $(\in R^*)$ elemek halmazát, amelyekre $\langle s, m\rangle d \in K$. Ezek az elemek R^*-ban egy L balideált alkotnak. (H maximalitása miatt $L \neq 0$.) A K konstrukciója szerint minden $\langle s, m\rangle$ $(\in L)$ elemre

$$\langle s, m\rangle d = g \dotplus h,$$

ahol a g és h elemeket az $\langle s, m\rangle$ elem egyértelműen meghatározza. Az

$$\langle s, m\rangle x = g \qquad (\langle s, m\rangle \in L)$$

[33] Valójában többet bizonyítunk be, mint amit a tételben állítunk. BAER jól ismert módszerével [3] megmutatjuk, hogy ha G D-nek részmodulusa, akkor erős direkt összeadandója is.

egyenletrendszer nyilvánvalóan kompatibilis, ezért az a) szerint van olyan $g_0(\in G)$ elem, hogy minden $\langle s, m\rangle$ $(\in L)$ elemre

$$\langle s, m\rangle g_0 = g.$$

Tekintsük most a $d' = d - g_0$ $(\notin K)$ elemet. Erre

$$\langle s, m\rangle d' = h \in H, \tag{20}$$

ha $\langle s, m\rangle \in L$ és

$$\langle r, n\rangle d' \notin K,$$

ha $\langle r, n\rangle \notin L$. A H részmodulus feltételezett maximális tulajdonságánál fogva $\{H, d'\} \cap G \neq 0$, így van olyan $h\,(\in H)$ és $\langle r, n\rangle$ $(\in R^*)$ elem, hogy

$$h + \langle r, n\rangle d' = g \neq 0 \qquad (g \in G).$$

Minthogy $\langle r, n\rangle d' = g - h \in K$, szükségképpen $\langle r, n\rangle \in L$, ezért (20) alapján $\langle r, n\rangle d' \in H$, tehát $g \in H$, ami viszont ellentmondásban van azzal, hogy $g \in G$ és $g \neq 0$. Ezzel (19)-et bebizonyítottuk.

b)-*ből következik* c). Legyen ψ az $R_{(k)}$ modulus $L_{(R)}$ részmodulusának G-be való valamely R-homomorf leképezése és legyen

$$D = G \dotplus R(1). \tag{21}$$

Jelöljük x-szel az $R(1)$ szabad R-modulus valamely szabad generátorelemét. Ekkor az összes $\langle s, m\rangle \psi - \langle s, m\rangle x$ $(\langle s, m\rangle \in L)$ elemek halmaza D-nek olyan M_0 részmodulusát alkotja, amelyre $M_0 \cap G = 0$. (A (21) direkt felbontás alapján ugyanis az $\langle s, m\rangle \psi - \langle s, m\rangle x = g$ $(\in G)$ relációból következik, hogy $g = 0$.) Legyen mármost M D-nek olyan részmodulusa, amely maximális a következő tulajdonságokra nézve: $M_0 \subseteq M$, $M \cap G = 0$. A b) feltétel miatt

$$D = G + M, \tag{22}$$

és így léteznek olyan egyértelműen meghatározott $g_1(\in G)$ és $g_2(\in M)$ elemek, amelyekre $x = g_1 + g_2$. Ebből L minden $\langle s, m\rangle$ elemére

$$\langle s, m\rangle x = \langle s, m\rangle g_1 + \langle s, m\rangle g_2 \tag{23}$$

adódik. Másrészt

$$\langle s, m\rangle x = \langle s, m\rangle \psi - (\langle s, m\rangle \psi - \langle s, m\rangle x), \tag{24}$$

ahol $\langle s, m\rangle \psi - \langle s, m\rangle x \in M_0 \subseteq M$. Minthogy az $\langle s, m\rangle x$ elem komponensei a (22) direkt felbontásban egyértelműen vannak meghatározva, (23) és (24) alapján azt nyerjük, hogy

$$\langle s, m\rangle \psi = \langle s, m\rangle g_1 \quad \text{minden} \quad \langle s, m\rangle \ (\in L)\text{-re},$$

ami a b) $\Rightarrow$ c) állítást igazolja.

c)-*ből következik* d). Legyen φ a tetszőleges B R-modulus valamely A részmodulusának egy G-be való homomorf leképezése. Tegyük fel továbbá a c) feltétel teljesülését.

SEGÉDTÉTEL: *Ha b B-nek tetszőleges eleme, φ mindig folytatható az $\{A, b\}$ modulusnak egy G-be való homomorf leképezésévé.*

1. Ha $\{b\} \cap A = 0$, akkor $\{A, b\} = A + \{b\}$, s φ folytatásának a lehetősége nyilvánvaló.

2. Legyen $\{b\} \cap A \neq 0$ és L az R^* gyűrű összes olyan $\langle s, m \rangle$ eleme által alkotott balideálja, amelyre $\langle s, m \rangle b \in A$. Az

$$\langle s, m \rangle \to (\langle s, m \rangle b) \varphi \qquad (\langle s, m \rangle \in L)$$

leképezés $L_{(R)}$-nek G-be való homomorf leképezése, minthogy

$$(\langle s_1, m_1 \rangle + \langle s_2, m_2 \rangle) \to [(\langle s_1, m_1 \rangle + \langle s_2, m_2 \rangle) b] \varphi =$$
$$= (\langle s_1, m_1 \rangle b) \varphi + (\langle s_2, m_2 \rangle b) \varphi$$

és

$$r \langle s, m \rangle \to [(r \langle s, m \rangle) b] \varphi = [r (\langle s, m \rangle b)] \varphi = r [(\langle s, m \rangle b) \varphi],$$

tehát van olyan $g_0 (\in G)$ elem, hogy

$$(25) \qquad (\langle s, m \rangle b) \varphi = \langle s, m \rangle g_0$$

minden $\langle s, m \rangle (\in L)$ elemre. Most megmutatjuk, hogy az

$$(26) \qquad a + \langle r, n \rangle b \to a\varphi + \langle r, n \rangle g_0 \qquad (a \in A;\ \langle r, n \rangle \in R^*)$$

leképezés a φ homomorfizmus kívánt folytatása. Hogy ez a leképezés művelettartó, s minden $a (\in A)$ elemre $a \to a\varphi$, az nyilvánvaló, tehát már csak a leképezés egyértelműségét kell igazolnunk. Tegyük fel, hogy fennáll egy

$$(27) \qquad a_1 + \langle r_1, n_1 \rangle b = a_2 + \langle r_2, n_2 \rangle b \qquad (a_1, a_2 \in A;\ \langle r_1, n_1 \rangle, \langle r_2, n_2 \rangle \in R^*)$$

alakú egyenlőség. Ebből

$$(\langle r_1, n_1 \rangle - \langle r_2, n_2 \rangle) b = a_2 - a_1 \in A,$$

tehát

$$(28) \qquad \langle r_1, n_1 \rangle - \langle r_2, n_2 \rangle = \langle s_0, m_0 \rangle \in L$$

következik. A (26) leképezés alapján

$$a_1 + \langle r_1, n_1 \rangle b \to a_1\varphi + \langle r_1, n_1 \rangle g_0$$

és

$$a_2 + \langle r_2, n_2 \rangle b \to a_2\varphi + \langle r_2, n_2 \rangle g_0.$$

Azt kell belátnunk, hogy $a_1\varphi + \langle r_1, n_1 \rangle g_0 = a_2\varphi + \langle r_2, n_2 \rangle g_0$. A (27) egyenletből (28) alapján $a_2 = a_1 + \langle s_0, m_0 \rangle b$ adódik. Ebből (25) felhasználásával

$$a_2\varphi = (a_1 + \langle s_0, m_0 \rangle b) \varphi = a_1\varphi + (\langle s_0, m_0 \rangle b) \varphi = a_1\varphi + \langle s_0, m_0 \rangle g_0,$$

tehát

$$a_2\varphi + \langle r_2, n_2 \rangle g_0 = a_1\varphi + \langle s_0, m_0 \rangle g_0 + \langle r_2, n_2 \rangle g_0 =$$
$$= a_1\varphi + (\langle s_0, m_0 \rangle + \langle r_2, n_2 \rangle) g_0 = a_1\varphi + \langle r_1, n_1 \rangle g_0.$$

Ezzel a segédtételt bebizonyítottuk.

A segédtétel felhasználásával a c) $\Longrightarrow$ d) állítás így bizonyítható be:

Tekintsük az összes olyan (H_μ, φ_μ) elempárok halmazát, amelyekre H_μ a B-nek A-t tartalmazó részmodulusa és φ_μ e részmodulusnak egy φ-t folytató G-be való homomorf leképezése. Ezt a halmazt féligrendezett halmazzá tehetjük a következő módon: legyen $(H_\lambda, \varphi_\lambda) \leqq (H_\mu, \varphi_\mu)$, ha $H_\lambda \subseteq H_\mu$ és φ_μ folytatása φ_λ-nak. Mivel e féligrendezett halmaz induktív, azaz bármely láncához tartalmazza annak egy felső korlátját (ti. a láncban szereplő H_μ-k ill. φ_μ-k egyesitéseként előálló $\bar{H}$, ill $\bar{\varphi}$-ból alkotott $(\bar{H}, \bar{\varphi})$ párt), ZORN lemmája biztosítja e halmazban egy maximális (H^*, φ^*) elempár létezését. Mármost a segédtétel alapján H^* feltétlenül összeesik B-vel, s így φ^* a B modulusnak egy φ-t folytató G-be való homomorf leképezése. Ezzel a c) $\Longrightarrow$ d) állítást bebizonyítottuk.

d)-*ből következik* e). Valóban, hiszen ha d) teljesül minden B-re, akkor speciálisan teljesül abban az esetben is, ha B szabad R-modulus. Ez azonban éppen azt jelenti, hogy G-ben bármely kompatibilis egyenletrendszer megoldható.[34]

e)-*ből következik* f). Tegyük fel, hogy G a D R-modulus részmodulusa. Minthogy bármely G feletti D-ben megoldható egyenletrendszer kompatibilis, s így az e) feltétel alapján van G-beli megoldása is, tehát a 14. tétel alkalmazható. Eszerint G a D modulus direkt összeadandója.

f)-*ből következik* g). Az állítás nyilvánvaló, minthogy egy direkt összeadandó mindig szerváns részmodulus.

g)-*ből következik* a). Legyen

$$f_\beta(x) = g_\beta \tag{29}$$

valamely G feletti egyismeretlenes kompatibilis egyenletrendszer. Ekkor a 10. tétel szerint van olyan K R-modulus, amelynek G részmodulusa, s amelyben a (29) egyenletrendszer megoldható. Minthogy a g) feltevés szerint G

[34] A d) $\Longrightarrow$ e) következtetésre itt egy másik bizonyítást is bemutatunk, amely általános voltánál fogva más struktúrafajtákra vonatkozó hasonló jellegű állítások bizonyítására is használható. — Legyen

$$f_\beta(\ldots, x_\alpha, \ldots) = g_\beta \tag{$*$}$$

tetszőleges G feletti kompatibilis egyenletrendszer. Ez a 10. tétel szerint azt jelenti, hogy van olyan K R-modulus, amelynek G részmodulusa, s amelyben a tekintett egyenletrendszer megoldható. Jelöljünk egy tetszőleges megoldást éppen az $\ldots, x_\alpha, \ldots$ $(\in K)$ elemekkel. Minthogy a $g\varphi = g$ $(g \in G)$ identikus leképezés a K modulus G részmodulusának G-re való homomorf leképezése, a d) feltétel szerint ez folytatható az egész K-nak G-re való $\bar{\varphi}$ homomorf leképezésévé. Ekkor

$$f_\beta(\ldots, x_\alpha\bar{\varphi}, \ldots) = [f_\beta(\ldots, x_\alpha, \ldots)]\,\bar{\varphi} = g_\beta\bar{\varphi} = g_\beta\varphi = g_\beta,$$

tehát az $\ldots, (x_\alpha\bar{\varphi}), \ldots$ $(\in G)$ elemrendszer a $(*)$ egyenletrendszer G-beli megoldása.

szerváns részmodulus K-ban, a (29) egyenletrendszer G-ben is megoldható, tehát G algebrailag zárt R-modulus.

Ezzel a 15. tétel bizonyítását befejeztük.

Ha az A R-modulus a K R-modulus részmodulusa, akkor azt mondjuk, hogy *K A-nak bővítése.* Ha A és K között az $A \subset K$ reláció áll fenn, akkor *valódi* bővítésről beszélünk. Legyen $0 \neq k \in K$. A k elemet *A felett algebrai elemnek* nevezzük, ha megoldása valamely A feletti $\langle r, n \rangle x = a$ ($\langle r, n \rangle \in R^*$, $0 \neq a \in A$) egyenletnek. Ellenkező esetben azt mondjuk, hogy k *transzcendens elem A felett.* A K modulus *algebrai bővítése* A-nak, ha K bármely 0-tól különböző eleme A felett algebrai elem. Minden más esetben K A-nak *transzcendens bővítése.*

3. LEMMA: *Legyen $A \subseteq B \subseteq C$ R-modulusok lánca. C A-nak akkor és csak akkor algebrai bővítése, ha B A-nak és C B-nek algebrai bővítése.*

A bizonyítás közvetlenül a definícióból folyik.

4. LEMMA: *Legyen a K R-modulus az A R-modulus bővítése. K akkor és csak akkor algebrai bővítése A-nak, ha K bármely H részmodulusára a $H \cap A = 0$ relációból $H = 0$ következik.*

Valóban, tegyük fel, hogy K A-nak algebrai bővítése, továbbá, hogy $H \subset K$ és $H \cap A = 0$. Ekkor H bármely 0-tól különböző x eleméhez van olyan $\langle r, n \rangle$ ($\in R^*$), hogy $0 \neq \langle r, n \rangle x \in A$. Tehát szükségképpen $H = 0$. Megfordítva, ha K bármely H részmodulusára $H \cap A = 0$-ból $H = 0$ következik, akkor a $0 \neq x$ ($\in K$) elemre $\{x\} \cap A \neq 0$, tehát van olyan $\langle r, n \rangle$ ($\in R^*$), hogy $\langle r, n \rangle x = a$ ($\neq 0$, $a \in A$).

5. LEMMA: *Legyenek $A (\neq 0)$ és B a K R-modulus részmodulusai. Ha $A \cap B = 0$ és B maximális e tulajdonságra nézve, akkor a K/B faktormodulus algebrai bővítése az $(A+B)/B (\cong A)$ modulusnak.*

Legyen ugyanis $k + B$ ($k \notin B$) tetszőleges K/B-beli $\bar{0}$-tól különböző elem. Ekkor B választásánál fogva $(\{k, B\} \cap (A+B)) \subsetneqq B$, tehát $k + B$ az $(A+B)/B$ felett algebrai elem.

16. TÉTEL: *Egy A R-modulus akkor és csak akkor algebrailag zárt, ha nincsen valódi algebrai bővítése.*

Legyen K az algebrailag zárt A modulus bővítése. Ekkor a 15. tétel alapján K-nak van olyan H részmodulusa, hogy $K = A + H$. Ha K valódi bővítés, akkor $H \neq 0$, s így a 4. lemma alapján K A-nak nem algebrai bővítése.

Megfordítva, tegyük fel, hogy A-nak nincs valódi algebrai bővítése, és legyen K egy tetszőleges, A-t tartalmazó R-modulus. Megmutatjuk, hogy A a K-nak direkt összeadandója, ami a 15. tétel alapján állításunk bizonyítását jelenti. Ha $A=0$, akkor máris készen vagyunk. Tegyük fel tehát, hogy $A\neq 0$. Legyen H K-nak olyan részmodulusa, amely maximális az $A\cap H=0$ tulajdonságra nézve. Ekkor az 5. lemma szerint K/H az $(A+H)/H$ $(\simeq A)$ modulusnak algebrai bővítése. Feltevésünk miatt azonban ez csak akkor lehetséges, ha $K=A+H$, q. e. d.

Legyen K az A modulus tetszőleges bővítése. A K modulus $h_1, \ldots, h_k$ 0-tól különböző elemeit *A felett algebrailag függetlennek* mondjuk, ha egy

$$\langle r_1, n_1\rangle h_1+\cdots+\langle r_k, n_k\rangle h_k = a \ (\in A)$$

alakú relációból mindig

$$\langle r_1, n_1\rangle h_1=\cdots=\langle r_k, n_k\rangle h_k=0$$

következik. K elemeinek tetszőleges számosságú rendszere A felett algebrailag független, ha bármely véges részrendszere is az. Nyilvánvaló, hogy ha $A=0$, az A feletti algebrai függetlenség fogalma összeesik a közönséges függetlenség fogalmával. Akkor mondjuk, hogy *K tisztán transzcendens bővítése A-nak*, ha a K modulust A és egy A felett algebrailag független S elemrendszer generálja.

17. TÉTEL: *A tetszőleges A R-modulus bármely K bővítése egy tisztán transzcendens és egy ezt követő algebrai bővítésként áll elő.*

Legyen ugyanis S a K elemeinek maximális A felett algebrailag független elemrendszere. (Ilyen S elemrendszer létezését ZORN, ill. TUKEY lemmája biztosítja.) Ekkor $\{A, S\}$ tisztán transzcendens bővítése A-nak. Ha $\{A, S\}\subset K$, akkor legyen $g\in K$, $g\notin\{A, S\}$. Az S rendszer maximalitásánál fogva fennáll egy

$$\langle r, n\rangle g+\langle r_1, n_1\rangle h_1+\cdots+\langle r_k, n_k\rangle h_k=a \ (\in A)$$

alakú reláció, ahol $h_1, \ldots, h_k\in S$ és $\langle r, n\rangle g\neq 0$. Így

$$0\neq\langle r, n\rangle g=a-(\langle r_1, n_1\rangle h_1+\cdots+\langle r_k, n_k\rangle h_k)\in\{A, S\},$$

tehát g algebrai elem $\{A, S\}$ felett. Ez a tény a tételt bizonyítja.

A G R-modulus két bővítését *ekvivalensnek* nevezzük, ha közöttük olyan izomorfizmus létesíthető, melynél G elemei fix elemek.

Bebizonyítjuk az operátormodulusok algebrai lezárásának tételét.

18. TÉTEL: *Legyen R tetszőleges gyűrű. Ekkor*

α) bármely G R-modulusnak van algebrailag zárt bővítése;

β) egy G_0 R-modulusra nézve ekvivalensek a következő állítások:

β_1) G_0 maximális algebrai bővítése G-nek;

β_2) G_0 algebrailag zárt algebrai bővítése G-nek;

β_3) G_0 minimális algebrailag zárt bővítése G-nek;

γ) bármely G R-modulusnak van egy, és ekvivalencia erejéig csakis egy olyan G_0 bővítése, amely bír a β_1), β_2), β_3) tulajdonságokkal.[35]

BIZONYÍTÁS: *α) bizonyítása.* Legyen τ olyan limesz rendszám, amelyhez tartozó számosság nagyobb R^* elemeinek számosságánál. Minden ν $(0 \leq \nu \leq \tau)$ rendszámra definiáljuk a G_ν R-modulusokat:

1. $G_0 = G$.

2. Ha $\nu - 1$ létezik, tekintsünk egy tetszőleges $G_{\nu-1}$ feletti $[L, \varphi]$ egyismeretlenes kompatibilis egyenletrendszert. Ekkor $G_{\nu-1}$-nek van olyan $G'_{\nu-1}$ bővítése, amelyben ez az egyenletrendszer megoldható. Eljárásunknak (transzfinit rekurzióval való) megismétlésével egy olyan G_ν modulushoz juthatunk, amelyben már minden $G_{\nu-1}$ feletti egyismeretlenes kompatibilis egyenletrendszer megoldható.

3. Ha ν limesz szám, G_ν legyen az összes G_μ $(\mu < \nu)$ modulusok egyesítése.

Megmutatjuk, hogy $A = G_\tau$ G-nek algebrailag zárt bővítése. Legyen $[M, \psi]$ tetszőleges A feletti egyismeretlenes kompatibilis egyenletrendszer. Ez az $R(1)$ szabad R-modulus M részmodulusának (vagy másképpen az R^* gyűrű M balideáljának) az A-ba való ψ R-homomorfizmusa. Ekkor van olyan $\sigma(<\tau)$ rendszám, hogy $M\psi \subseteq G_\sigma$. Az $[M, \psi]$ egyenletrendszer tehát $G_{\sigma+1}$-ben, s így A-ban is megoldható. Következésképpen A algebrailag zárt modulus.

β) bizonyítása. Tegyük fel, hogy β_1) teljesül. A 3. lemma szerint G_0 bármely algebrai bővítése G-nek is algebrai bővítése volna, ezért G_0-nak nincs valódi algebrai bővítése. Így (a 16. tétel alapján) G_0 algebrailag zárt.

Tegyük fel, hogy β_2) teljesül. Ha G_0 nem volna minimális algebrailag zárt bővítése G-nek, akkor volna olyan G_1 algebrailag zárt modulus, amelyre $G \subseteq G_1 \subset G_0$. Tehát $G_0 = G_1 + K$ volna, ahol $K \neq 0$, de így G_0 nem lehetne algebrai bővítése G-nek.

Tegyük fel, hogy β_3) teljesül. Ekkor G_0-nak, mint algebrailag zárt modulusnak, nincsen valódi algebrai bővítése. Ezért G_0 G-nek okvetlenül maximális algebrai bővítése, ha G-nek egyáltalán algebrai bővítése. Tehát csak azt kell megmutatnunk, hogy G_0 G-nek algebrai bővítése. Tekintsük G-nek egy G_0-ba eső H maximális algebrai bővítését (Zorn-lemma!). Kimutatjuk, hogy $H = G_0$. Tegyük fel, hogy H' H-nak tetszőleges algebrai bővítése. Ekkor H-nak G_0-ba való identikus leképezése folytatható az egész H'-nek G_0-ba való homomorf leképezésévé. Mivel e leképezés M magjára $M \cap H = 0$, a bővítés algebrai voltánál fogva $M = 0$, tehát H-nak G_0-ba való beágyazása folytatható H'-re

[35] A minimális algebrailag zárt bővítés egzisztenciájára és unicitására vonatkozó állításnak erre az általános esetre való bizonyítását a szerzővel egy időben R. E. JOHNSON is elvégezte. (Lásd [22], Theorem 7. 1.)

is. Így szükségképpen $H' = H$. A H-nak tehát nincs valódi algebrai bővítése, következésképpen H algebrailag zárt, s a β_3) tulajdonság miatt $H = G_0$.

γ) *bizonyítása.* Először is megmutatjuk, hogy G-nek van β_2) tulajdonságú bővítése. Legyen G' (az α) szerint biztosan létező) algebrailag zárt bővítése G-nek, s tekintsük G-nek egy H maximális algebrai bővítését G'-ben. Mint láttuk, H algebrailag zárt, tehát $G_0 = H$ β_2) tulajdonságú modulus.

Rögzítsük G_0-t, s legyen $\bar{G}$ G-nek tetszőleges minimális algebrailag zárt bővítése. Minthogy G_0 G-nek algebrai bővítése és $G \subseteq \bar{G}$, a $\beta_3) \Longrightarrow \beta_1)$ következtetésnél alkalmazott meggondolások alapján G_0 beágyazható $\bar{G}$-ba, tehát $\bar{G}$ tartalmazza G-nek egy G_0-sal ekvivalens $\bar{G}_0$ bővítését. Mivel pedig G_0 algebrailag zárt, és $\bar{G}$ minimális algebrailag zárt bővítése G-nek, szükségképpen $\bar{G}_0 = \bar{G}$. Tehát G_0 és $\bar{G}$ G-nek ekvivalens bővítései.

Ezzel a 18. tétel bizonyítását befejeztük.

9. §. Algebrailag zárt operátormodulusok (folytatás)

A jelen paragrafusban az algebrailag zárt modulusok fogalmával kapcsolatban néhány további kérdést fogunk megvizsgálni.

Könnyű belátni a következő állítások érvényességét:

Algebrailag zárt modulus bármely direkt összeadandója is algebrailag zárt.

Algebrailag zárt modulus valamely részmodulusa akkor és csak akkor szerváns, ha algebrailag zárt.

Modulusok komplett direkt összege akkor és csak akkor algebrailag zárt, ha minden komponense is algebrailag zárt.

Tekintsük most a következő példát:

Legyen R a végtelen sok $S^{(1)}, S^{(2)}, \ldots$ gyűrű diszkrét direkt összege, $R = \sum S^{(i)}$, ahol minden $S^{(i)}$ gyűrű legalább kételemű. Minthogy $S^{(i)}$ R-nek ideálja, R-modulusnak tekinthető. Minden $S^{(i)}_{(R)}$ modulust ágyazzunk be egy $A^{(i)}$ algebrailag zárt R-modulusba, s tekintsük az

$$(30) \qquad A = \sum A^{(i)}$$

direkt összeget. Megmutatjuk, hogy A nem algebrailag zárt R-modulus. Az összes

$$rx = r \qquad (r \in R)$$

egyenletek rendszere nyilvánvalóan egy kompatibilis A feletti egyenletrendszer. Ennek az egyenletrendszernek azonban nem lehet A-ban megoldása, minthogy bármely x ($\in A$) elemnek a (30) direkt felbontásban csak véges sok komponense különbözik 0-tól, így minden x ($\in A$)-hez van olyan i index, hogy egyetlen 0-tól különböző r_0 ($\in S^{(i)}$) elemre sem állhat fenn az

$$r_0 x = r_0$$

egyenlőség.

Példánkból a következő tények olvashatók le:

a) *Algebrailag zárt modulusok diszkrét direkt összege általában nem algebrailag zárt.*[36]

b) *Algebrailag zárt modulusok növekvő láncának egyesítése általában nem algebrailag zárt.*

Hasonlóképpen *általában nem igaz az sem, hogy egy algebrailag zárt R-modulus bármely faktormodulusa is algebrailag zárt volna.*

Az alábbiakban algebrailag zárt modulusokra vonatkozó, a fenti megállapításokkal összefüggő duális problémákat fogunk vizsgálni.

Egy R gyűrűt *T_4-tulajdonságúnak* nevezünk, ha tetszőleges G R-modulus esetén abból, hogy az

$$\langle r_\nu, n_\nu\rangle x = g_\nu \quad (\in G;\ \langle r_\nu, n_\nu\rangle \in R^*;\ \nu \in \Delta) \tag{31}$$

egyenletrendszer bármely véges részrendszere G-ben megoldható, következik, hogy G-ben az egész (31) egyenletrendszer megoldható.

19. TÉTEL:[37] *Egy R gyűrűre nézve ekvivalensek az alábbi tulajdonságok:*

a) *R balideáljaira nézve maximumkövetelménynek tesz eleget;*

b) *R^* balideáljaira nézve maximumkövetelménynek tesz eleget;*

c) *R T_4-tulajdonságú;*

d) *tetszőleges G R-modulus szerváns részmodulusai növekvő láncának egyesítési halmaza is szerváns;*

e) *algebrailag zárt R-modulusok növekvő láncának egyesítési halmaza is algebrailag zárt;*

f) *algebrailag zárt R-modulusok diszkrét direkt összege is algebrailag zárt.*

BIZONYÍTÁS: a)-*ból következik* b). Először megmutatjuk, hogy ha A_i és A_{i+1} két balideál R^*-ban, amelyekre $A_i \subseteq A_{i+1}$, $R \cap A_i = R \cap A_{i+1}$ és $\{R, A_i\} = \{R, A_{i+1}\}$ teljesül, akkor $A_i = A_{i+1}$.

Legyen $a_{i+1} \in A_{i+1}$. Ekkor $\{R, A_i\} = \{R, A_{i+1}\}$-ből $a_{i+1} = r + a_i$ $(r \in R, a_i \in A_i)$ következik. Minthogy $A_i \subseteq A_{i+1}$, $r = a_{i+1} - a_i \in A_{i+1}$, tehát $r \in R \cap A_{i+1} = R \cap A_i$, azaz $r \in A_i$. Ekkor $a_{i+1} = (r + a_i) \in A_i$, tehát $A_{i+1} \subseteq A_i$, ami az $A_i \subseteq A_{i+1}$ feltétellel együtt az $A_i = A_{i+1}$ állítást bizonyítja.

Tegyük fel, hogy az R gyűrűre fennáll a) és legyen

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots \subseteq A_n \subseteq \cdots \tag{32}$$

[36] Ez a tény is bizonyára hozzájárul ahhoz, hogy adott R gyűrű esetén az összes algebrailag zárt R-modulus áttekintésének feladata igen nehéz problémának látszik.

[37] Ez a tétel PAPP ZOLTÁN eredménye, amely az ő szíves beleegyezésével itt kerül először publikálásra. Az a) és b) feltételek ekvivalenciájának bizonyítása KOVÁCS LÁSZLÓtól származik.

balideálok növekvő lánca R^*-ban. Rendeljük A_i-hez R^* következő két balideálját:

$$\left.\begin{array}{l} B_i = A_i \cap R \\ C_i = \{R, A_i\} \end{array}\right\} \quad i = 1, 2, \ldots, n, \ldots,$$

amelyekre nyilván teljesül

$$B_1 \subseteq B_2 \subseteq \cdots \subseteq B_n \subseteq \cdots \tag{33}$$

és

$$C_1 \subseteq C_2 \subseteq \cdots \subseteq C_n \subseteq \cdots. \tag{34}$$

A fentebb bizonyítottak értelmében a (32) láncban egy $A_i \subset A_{i+1}$ (szigorú tartalmazási) reláció csak akkor állhat fenn, ha a $B_i \subset B_{i+1}$, $C_i \subset C_{i+1}$ relációknak legalább egyike teljesül. Minthogy B_i balideál R-ben, az a) feltevés szerint a (33) láncban csak véges sok balideál különbözhet egymástól. Másrészt, csak véges sok különböző balideált tartalmazhat a (34) lánc is, mivel a $C_i \subset C_{i+1}$ reláció ekvivalens $(C_i/R) \subset (C_{i+1}/R)$ teljesülésével és C_i/R az R^*/R $(\simeq E)$ gyűrű ideálja, ahol az ideálokra nézve teljesül a maximumkövetelmény. Ebből következik, hogy a (32) lánc is csak véges sok különböző balideált tartalmazhat, azaz R^* balideáljaira nézve teljesül a maximumkövetelmény.

b)-*ből következik* c). Tegyük fel, hogy fennáll b) és legyen

$$\langle r_\nu, n_\nu \rangle x = g_\nu \quad (\in G, \langle r_\nu, n_\nu \rangle \in R^*, \nu \in \Delta) \tag{35}$$

olyan egyenletrendszer a G R-modulus felett, amelynek bármely véges részrendszere megoldható G-ben.

Jelölje L az R^*-nak az $\langle r_\nu, n_\nu \rangle$ $(\nu \in \Delta)$ elemek által generált balideálját. Minthogy egy gyűrű balideáljaira kirótt maximumkövetelmény ekvivalens azzal, hogy a tekintett gyűrű valamennyi balideálja végesen generált, L végesen generált balideál R^*-ban és generátorelemei választhatók a (35) egyenletrendszer baloldalán álló együtthatók közül:

$$L = \{\langle r_{\nu_1}, n_{\nu_1} \rangle, \ldots, \langle r_{\nu_k}, n_{\nu_k} \rangle\} \quad (\nu_i \in \Delta, i = 1, \ldots, k).$$

Az

$$\langle r_{\nu_i}, n_{\nu_i} \rangle x = g_{\nu_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, k) \tag{36}$$

véges sok egyenletből álló egyenletrendszer (35) részrendszere, ezért feltevésünk szerint G-ben megoldható. Legyen $g\,(\in G)$ egy megoldás, azaz legyen

$$\langle r_{\nu_i}, n_{\nu_i} \rangle g = g_{\nu_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, k).$$

Bebizonyítjuk, hogy $g\,(\in G)$ megoldása az egész (35) egyenletrendszernek is. Mivel (35) minden véges részrendszere megoldható, ezért kompatibilis, s így az

$$\langle r_\nu, n_\nu \rangle \to g_\nu$$

leképezés az $L_{(R)}$ modulus egy φ homomorfizmusát indukálja a G modulus $H=\{\ldots, g_\nu, \ldots\}_{\nu\in\Delta}$ részmodulusára és fennállnak az

$$\langle r_{\nu_i}, n_{\nu_i}\rangle g = \langle r_{\nu_i}, n_{\nu_i}\rangle \varphi \qquad (i=1,2,\ldots,k)$$

egyenlőségek. Mármost, ha

$$\langle r_\nu, n_\nu\rangle = \sum_{i=1}^{k} \langle s_i^{(\nu)}, m_i^{(\nu)}\rangle \langle r_{\nu_i}, n_{\nu_i}\rangle \qquad (\langle s_i^{(\nu)}, m_i^{(\nu)}\rangle \in R^*),$$

akkor

$$\langle r_\nu, n_\nu\rangle g = \left(\sum_{i=1}^{k} \langle s_i^{(\nu)}, m_i^{(\nu)}\rangle \langle r_{\nu_i}, n_{\nu_i}\rangle\right) g = \sum_{i=1}^{k} \langle s_i^{(\nu)}, m_i^{(\nu)}\rangle (\langle r_{\nu_i}, n_{\nu_i}\rangle \varphi) =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{k} \langle s_i^{(\nu)}, m_i^{(\nu)}\rangle \langle r_{\nu_i}, n_{\nu_i}\rangle\right) \varphi = \langle r_\nu, n_\nu\rangle \varphi = g_\nu \qquad (\nu\in\Delta),$$

ami azt mutatja, hogy g a (35) egyenletrendszernek valóban megoldása.

c)-*ből következik* d). Tegyük fel, hogy R T_4-tulajdonságú és legyen Γ egy jólrendezett indexhalmaz, továbbá $S\subseteq G$ az

$$S_1\subseteq S_2\subseteq\cdots\subseteq S_\mu\subseteq\cdots \qquad (\mu\in\Gamma)$$

(G-ben) szerváns részmodulusok növekvő láncának egyesítési halmaza: $S=\bigcup_{\mu\in\Gamma} S_\mu$.

Tekintsünk most egy tetszőleges

(37) $$\langle r_\nu, n_\nu\rangle x = g_\nu \qquad (\in S;\ \langle r_\nu, n_\nu\rangle\in R^*;\ \nu\in\Delta)$$

S feletti egyenletrendszert, amely G-ben megoldható. A (37) egyenletrendszer bármely, véges sok egyenletet tartalmazó

(38) $$\langle r_{\nu_i}, n_{\nu_i}\rangle x = g_{\nu_i} \qquad (i=1,2,\ldots,k)$$

részrendszere is nyilván megoldható G-ben. Minthogy a (38) egyenletrendszerhez létezik olyan $\tau\in\Gamma$ index, amelyre $g_{\nu_i}\in S_\tau$ $(i=1,2,\ldots,k)$ és mivel S_τ szerváns G-ben, (38) S_τ-ban, s így S-ben is megoldható. Az R gyűrű T_4-tulajdonságából következik tehát, hogy S-ben az egész (37) egyenletrendszer megoldható, azaz S G-nek szerváns részmodulusa.

d)-*ből következik* e). Tegyük fel, hogy R-re teljesül a d) tulajdonság és tekintsük az

$$A_1, A_2, \ldots, A_\mu, \ldots \qquad (\mu\in\Gamma)$$

algebrailag zárt R-modulusok

(39) $$A_1\subseteq A_2\subseteq\cdots\subseteq A_\mu\subseteq\cdots \qquad (\mu\in\Gamma)$$

növekvő láncát. Jelöljük A-val a (39) lánc egyesítési halmazát: $A=\bigcup_{\mu\in\Gamma} A_\mu$; és $\bar{A}$ jelölje A-nak valamely algebrailag zárt bővítését.

Ekkor minden $\mu\in\Gamma$ indexre A_μ szerváns $\bar{A}$-ban, így a d) feltétel szerint A is szerváns $\bar{A}$-ban, amiből szükségképpen következik, hogy A algebrailag zárt.

e)-*ből következik* f). Az állítás nyilvánvaló, mivel algebrailag zárt R-modulusok diszkrét direkt összege előállítható mint algebrailag zárt R-modulusok növekvő láncának egyesítési halmaza.

f)-*ből következik* a). Ennek bizonyításához elegendő azt megmutatni, hogy ha R-ben a balideálokra nézve nem teljesül a maximumkövetelmény, akkor konstruálható olyan $A = \sum_{i=1}^{\infty} A_i$ direkt összeg, hogy jóllehet valamennyi A_i $(i = 1, 2, \ldots)$ algebrailag zárt R-modulus, A nem algebrailag zárt R-modulus.

Fussa be K_μ az R^* gyűrű összes balideálját, s tekintsük a $H = \sum_{\mu} R^*_{(R)}/K_{\mu(R)}$ R-modulust, illetve ennek egy B algebrailag zárt bővítését. A 3. §. végén tett megjegyzésünk alapján közvetlenül belátható, hogy R^* bármely K balideáljához van B-nek olyan a eleme, amelyre $O(a) = K$.

Legyen

$$A_i \sim B \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

és

$$A = \sum_{i=1}^{\infty} A_i, \tag{40}$$

továbbá tegyük fel, hogy R balideáljaira nézve nem tesz eleget a maximumkövetelménynek. Bebizonyítjuk, hogy A nem algebrailag zárt.

Minthogy az R gyűrűben van balideáloknak szigorúan növekvő (végtelen) lánca, nyilvánvalóan létezik R-beli elemeknek olyan

$$l_0 = 0, l_1, l_2, \ldots, l_n, \ldots \; (\in R)$$

sorozata, amelyre

$$l_{n+1} \notin \{l_0, l_1, \ldots, l_n\} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$L_n = \{l_0, l_1, \ldots, l_n\} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$L = \bigcup_n L_n,$$

$$B_0 = \{0\},$$

$$B_n = A_1 + A_2 + \cdots + A_n \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

$$L_0 \varphi_0 = B_0.$$

Teljes indukcióval bebizonyítjuk, hogy minden n természetes számhoz létezik $L_{n(R)}$-nek olyan φ_n homomorf leképezése, amelyre

$$\begin{cases} L_n \varphi_n \subseteq B_n \\ L_n \varphi_n \not\subseteq B_{n-1} \text{ és} \\ \varphi_n \text{ a } \varphi_{n-1} \text{ homomorf leképezés folytatása.} \end{cases} \tag{41}$$

Az állítás az $n=1$ esetben nyilvánvalóan igaz, mert ha a_1 B_1-nek olyan (biztosan létező!) eleme, amelyre $O(a_1)=O(l_1)$, akkor $L_{1(R)}$-nek az $l_1 \to a_1$ leképezés által indukált φ_1 homomorfizmusára teljesülnek a (41) követelmények.

Tegyük fel, hogy már megkonstruáltuk a (41) tulajdonságokkal bíró φ_n homomorfizmusokat egészen $n=m$-ig bezárólag. Két esetet kell megkülönböztetnünk: 1. $L_m \cap \{l_{m+1}\}=0$, 2. $L_m \cap \{l_{m+1}\} \neq 0$.

Ad 1. Ha $L_m \cap \{l_{m+1}\}=0$, akkor $L_{m+1(R)}=L_{m(R)}+\{l_{m+1}\}_{(R)}$. Legyen a_{m+1} A_{m+1}-nek olyan eleme, amelyre $O(a_{m+1})=O(l_{m+1})$. Ekkor az $l_{m+1} \to a_{m+1}$ leképezés a φ_m leképezéssel együtt az $L_{m+1(R)}$ modulus kívánt φ_{m+1} homomorf leképezését indukálja.

Ad 2. Legyen $L_m \cap \{l_{m+1}\} \neq 0$, K az l_{m+1} elem rendje az $L_{m+1(R)}/L_{m(R)}$ faktormodulusban (más szavakkal K az R^* gyűrű összes olyan $\langle s,j\rangle$ eleme által alkotott balideálja, amelyre $\langle s,j\rangle l_{m+1} \in L_m$), végül a_0 olyan A_{m+1}-beli elem, amelyre

$$O(a_0)=K. \tag{42}$$

Az

$$\langle s,j\rangle \to (\langle s,j\rangle l_{m+1})\varphi_m \qquad (\langle s,j\rangle \in K)$$

egyértelmű leképezés $K_{(R)}$-nek B_m-be való homomorf leképezése, minthogy

$$(\langle s_1,j_1\rangle+\langle s_2,j_2\rangle) \to (\langle s_1+s_2,j_1+j_2\rangle l_{m+1})\varphi_m =$$
$$=(\langle s_1,j_1\rangle l_{m+1})\varphi_m+(\langle s_2,j_2\rangle l_{m+1})\varphi_m$$

és

$$r\langle s,j\rangle \to [(r\langle s,j\rangle) l_{m+1}]\varphi_m=[r(\langle s,j\rangle l_{m+1})]\varphi_m=r[(\langle s,j\rangle l_{m+1})\varphi_m];$$

tehát a 15. tétel alapján van olyan $a^*(\in B_m)$ elem, amelyre

$$(\langle s,j\rangle l_{m+1})\varphi_m=\langle s,j\rangle a^* \tag{43}$$

teljesül minden $\langle s,j\rangle \in K$ esetén. Megmutatjuk, hogy az

$$z+\langle r,t\rangle l_{m+1} \to z\varphi_m+\langle r,t\rangle (a^*+a_0) \qquad (z \in L_m, \langle r,t\rangle \in R^*) \tag{44}$$

φ_{m+1} leképezés az $L_{m(R)}$-nek egy (41) tulajdonságú homomorf leképezése.

Az, hogy a (44) leképezés művelettartó, és hogy $L_{m+1}\varphi_{m+1} \subseteq B_{m+1}$, nyilvánvaló. Ha $\langle r,t\rangle \notin K$, akkor $\langle r,t\rangle a_0 \neq 0$, s mivel $z\varphi_m+\langle r,t\rangle a^* \in B_m$ és $\langle r,t\rangle a_0 \in A_{m+1}$, következik, hogy $z\varphi_m+\langle r,t\rangle(a^*+a_0) \notin B_m$, tehát $L_{m+1}\varphi_{m+1} \not\subseteq B_m$. Végül minthogy L_m tetszőleges z_0 eleme

$$z_0=z+\langle s,j\rangle l_{m+1} \qquad (z \in L_m, \langle s,j\rangle \in K)$$

alakú, felhasználva a (42) és (43) egyenlőségeket

$$z_0\varphi_{m+1}=(z+\langle s,j\rangle l_{m+1})\varphi_{m+1}=z\varphi_m+\langle s,j\rangle(a^*+a_0)=$$
$$=z\varphi_m+\langle s,j\rangle a^*=z\varphi_m+(\langle s,j\rangle l_{m+1})\varphi_m=$$
$$=(z+\langle s,j\rangle l_{m+1})\varphi_m=z_0\varphi_m$$

adódik, amely azt mutatja, hogy φ_{m+1} φ_m-nek folytatása. Tehát már csak annak kimutatása maradt hátra, hogy a (44) leképezés egyértelmű.

Tegyük fel, hogy fennáll egy

$$z_1 + \langle r_1, t_1 \rangle l_{m+1} = z_2 + \langle r_2, t_2 \rangle l_{m+1} \qquad (z_1, z_2 \in L_m)$$

alakú egyenlőség. φ_{m+1} (44)-ben való definíciója alapján

$$(z_1 + \langle r_1, t_1 \rangle l_{m+1})\varphi_{m+1} = z_1\varphi_m + \langle r_1, t_1 \rangle (a^* + a_0)$$

és

$$(z_2 + \langle r_2, t_2 \rangle l_{m+1})\varphi_{m+1} = z_2\varphi_m + \langle r_2, t_2 \rangle (a^* + a_0).$$

Azt kell belátnunk, hogy

$$z_1\varphi_m + \langle r_1, t_1 \rangle (a^* + a_0) = z_2\varphi_m + \langle r_2, t_2 \rangle (a^* + a_0).$$

Mivel

$$z_2 = z_1 + \langle r_1 - r_2, t_1 - t_2 \rangle l_{m+1},$$

$z_2\varphi_m = z_2\varphi_{m+1}$ felhasználásával

$$z_2\varphi_m = z_1\varphi_m + \langle r_1 - r_2, t_1 - t_2 \rangle (a^* + a_0),$$

s így valóban

$$z_2\varphi_m + \langle r_2, t_2 \rangle (a^* + a_0) = z_1\varphi_m + \langle r_1 - r_2, t_1 - t_2 \rangle (a^* + a_0) +$$
$$+ \langle r_2, t_2 \rangle (a^* + a_0) = z_1\varphi_m + \langle r_1, t_1 \rangle (a^* + a_0).$$

Ezzel bebizonyítottuk, hogy minden n természetes szám esetén létezik olyan φ_n homomorf leképezés, amely kielégíti a (41) követelményeket.

Jelöljük φ-vel az R gyűrű $L = \bigcup_n L_n$ balideáljának azt a leképezését, amely a φ_n leképezések egyesítése útján áll elő. φ nyilvánvalóan az $L_{(R)}$ modulusnak az $A = \sum_{i=1}^{\infty} A_i$ R-modulusba való homomorf leképezése.

Tekintsük az

$$(45) \qquad lx = l\varphi \qquad (l \in L)$$

A feletti kompatibilis egyenletrendszert. A (45) egyenletrendszernek A-ban nem lehet megoldása, minthogy bármely a $(\in A)$ elemnek a (40) direkt felbontásban csak véges sok komponense különbözik 0-tól, így minden $a\,(\in A)$-hoz van olyan i index, hogy $a \in B_i$, s ekkor az $l_{i+1}a = l_{i+1}\varphi$ egyenlőség nem állhat fenn, mivel a baloldal B_i-nek eleme, a jobboldal viszont $l_{i+1}\varphi = l_{i+1}\varphi_{i+1}$ miatt biztosan nem eleme B_i-nek. A tehát nem algebrailag zárt.

Ezzel a 19. tétel bizonyítását befejeztük,

Ezt a paragrafust egy hasonló jellegű tétel bizonyításával zárjuk.

20. TÉTEL:[38] *Egy R gyűrűre akkor és csak akkor teljesül az, hogy bármely algebrailag zárt R-modulus bármely faktormodulusa is algebrailag zárt, ha R^* bármely $L_{(R)}$ balideálja valamely szabad R-modulus direkt összeadandója.*

[38] Az unitér modulusok esetében e tétel állításával tartalmilag megegyező állítás megtalálható CARTAN és EILENBERG könyvében (Lásd [6], Theorem 5.4, 14. old.)

BIZONYÍTÁS: Először tegyük fel, hogy R^* bármely balideálja egy szabad R-modulus direkt összeadandója, és legyen G' a G algebrailag zárt R-modulus homomorf képe az η homomorfizmusnál. Megmutatjuk, hogy bármely $[L_{(R)}, \varphi]$ egyismeretlenes G' feletti kompatibilis egyenletrendszer G'-ben megoldható. (Az, hogy a tekintett egyenletrendszer egyismeretlenes, nyilvánvalóan azt jelenti, hogy $L_{(R)}$ az R^* valamely balideálja.) Legyen $L_{(R)}$ az F szabad R-modulus direkt összeadandója:

$$F = L_{(R)} + K, \tag{46}$$

és jelöljük ε-nal az F-nek (a (46) direkt felbontás alapján) $L_{(R)}$-re való projekcióját. Ha x_α ($\alpha \in A$) az F valamely szabad bázisa, akkor minden α ($\in A$) indexhez meghatározunk egy (és csak egy) olyan g_α ($\in G$) elemet, amelyre

$$g_\alpha \eta = (x_\alpha \varepsilon)\varphi. \tag{47}$$

Az $x_\alpha \to g_\alpha$ ($\alpha \in A$) leképezés az F modulusnak egy G-be való ψ R-homomorf leképezését indukálja. A ψ egyben $L_{(R)}$-nek is G-be való homomorf leképezése, tehát az

$$lx = l\psi \qquad (l \in L_{(R)})$$

G feletti egyenletrendszer kompatibilis. Így G algebrai zártságánál fogva van olyan g ($\in G$) elem, amelyre

$$lg = l\psi \tag{48}$$

minden $l \in L_{(R)}$ esetén teljesül. Megmutatjuk, hogy $g\eta$ az $[L_{(R)}, \varphi]$, azaz az

$$lx = l\varphi \qquad (l \in L_{(R)})$$

egyenletrendszer megoldása. Legyen l $L_{(R)}$-nek tetszőleges eleme. Mivel $l \in F$, fennáll egy

$$l = \langle r_1, n_1 \rangle x_{\alpha_1} + \cdots + \langle r_k, n_k \rangle x_{\alpha_k}$$

előállítás. Ekkor felhasználva (48)-at és (47)-et,

$$\begin{aligned} l(g\eta) &= (lg)\eta = (l\psi)\eta = \langle r_1, n_1 \rangle (x_{\alpha_1}\psi)\eta + \cdots + \langle r_k, n_k \rangle (x_{\alpha_k}\psi)\eta = \\ &= \langle r_1, n_1 \rangle (g_{\alpha_1}\eta) + \cdots + \langle r_k, n_k \rangle (g_{\alpha_k}\eta) = \langle r_1, n_1 \rangle (x_{\alpha_1}\varepsilon)\varphi + \cdots + \\ &+ \langle r_k, n_k \rangle (x_{\alpha_k}\varepsilon)\varphi \, [(\langle r_1, n_1 \rangle x_{\alpha_1} + \cdots + \langle r_k, n_k \rangle x_{\alpha_k})\varepsilon]\varphi = (l\varepsilon)\varphi = l\varphi \end{aligned}$$

adódik, s ezzel megmutattuk, hogy G' algebrailag zárt.

Megfordítva, tegyük fel, hogy az R gyűrű olyan, hogy bármely algebrailag zárt R-modulus bármely faktormodulusa is algebrailag zárt, és legyen L az R^* tetszőleges balideálja. Ekkor valamely F szabad R-modulusra s annak valamely H részmodulusára fennáll az $F/H \simeq L_{(R)}$ izomorfizmus. Ágyazzuk be F-et egy G algebrailag zárt modulusba. A $G' = G/H$ modulus is algebrailag zárt és $F' = F/H$ olyan részmodulusa, amely izomorf $L_{(R)}$-hez. Legyen τ $L_{(R)}$-nek F'-re való valamely izomorf leképezése és η a G-nek G/H-ra való természetes homomorfizmusa. Az $lx = l\tau$ ($l \in L$) kompatibilis G' feletti egyenletrendszer, s mivel G' algebrailag zárt, van olyan g' ($\in G'$)

elem, hogy

$$lg' = l\tau$$

minden l ($\in L$)-re. Legyen g egy olyan G-beli elem, amelyre

$$g\eta = g',$$

s tekintsük G-ben az Lg részmodulust. Minthogy

$$(lg)\eta = l(g\eta) = lg' = l\tau \qquad (l \in L), \tag{49}$$

az Lg modulus F-nek is részmodulusa, továbbá mivel $lg = 0$-ból $l\tau = 0$, azaz $l = 0$ következik, fennáll az $Lg \cong L_{(R)}$ izomorfizmus. Végül megmutatjuk, hogy

$$F = Lg + H.$$

Először is nyilvánvaló, hogy $Lg \cap H = 0$, minthogy H az F modulus összes olyan h elemeinek halmaza, amelyekre $h\eta = 0$, s (49) alapján Lg-nek ilyen eleme csupán a 0. Másrészt (49) szerint $(Lg)\eta = F'$, s ezért $\{Lg, H\} = F$. Ezzel a tétel bizonyítását befejeztük.

10. §. Az algebrailag zárt triviális modulusok leírása

Az algebrailag zárt operátormodulusokkal kapcsolatban alapvető fontosságú a következő probléma:

Adott R gyűrűhöz meghatározandó az összes algebrailag zárt R-modulus.

A probléma ebben az általánosságban igen nehéznek látszik. Mi a jelen paragrafusban a megoldás felé megtesszük az első szerény lépést, amikor teljes leírását adjuk az algebrailag zárt triviális modulusoknak.

Legyen r az R gyűrű tetszőleges eleme, s tekintsük az összes olyan m ($\in E$) számok I halmazát, amelyekhez van olyan t ($\in R$), hogy $tr = mr$ teljesül. I az E gyűrű ideálja, s legyen n ennek az ideálnak nem negatív generáló eleme: $I = (n)$. Az n számot az r elem *exponensének* nevezzük és $n = e(r)$-rel jelöljük.

21. TÉTEL: *A tetszőleges R gyűrűre a legalább kételemű G triviális R-modulus akkor és csak akkor algebrailag zárt, ha R-nek nincs 0 exponensű eleme és G-re mint közönséges Abel-féle csoportra teljesülnek a következő feltételek:*

1. *G algebrailag zárt,*
2. *G bármely pozitív rendű elemének rendje és R bármely elemének exponense relatív prímek.*[39]

[39] Ebben a paragrafusban egy G Abel-féle csoport valamely g elemének rendjén a szokásos fogalmat (tehát a g elem ciklusának számosságát) értjük, és jelölésére az $o(g)$ jelet használjuk. Ezzel szemben még megállapodunk abban, hogy a végtelen rendű elemet 0 rendűnek tekintjük.

BIZONYÍTÁS: Legyen G algebrailag zárt triviális R-modulus. Ha r az R gyűrű 0 exponensű eleme volna, akkor az $rx=a$ ($\neq 0, a\in G$) egyenlet kompatibilis lenne, minthogy $\langle t, m\rangle rx=0$-ból $(tr+mr)x=0$, $tr=-mr$, tehát $m=0$ következnék, s ekkor $\langle t, m\rangle a=0$ is fennállna. Az $rx=a$ ($\neq 0$) egyenlet azonban nem oldható meg G-ben, következésképpen R-nek nincs 0 exponensű eleme. — Tekintsük most a tetszőleges

$$nx=g\ (\in G;\ n\in E)$$

G feletti egyenletet. Ez kompatibilis egyenlet, minthogy a baloldalt csupán $\langle r, 0\rangle$ típusú R^*-beli elemek annullálhatják, amelyek a jobboldalt is mindig annullálják. Így G-ben a tekintett egyenlet megoldható, tehát G, mint közönséges Abel-féle csoport, algebrailag zárt. Tegyük fel továbbá, hogy valamely $r\ (\in R)$ elem $e(r)$ exponense és valamely pozitív rendű $g\ (\in G)$ elem rendje nem relatív prímek. Ekkor G-nek van olyan g' ($\neq 0$) eleme, hogy $e(r)g'=0$. Megmutatjuk, hogy az $rx=g'$ egyenlet kompatibilis. Valóban, ha $\langle t, m\rangle rx=0$, akkor $(tr+mr)x=0$, $tr=-mr$, tehát $m=m'\cdot e(r)$, s így

$$\langle t, m\rangle g'=tg'+mg'=mg'=m'\cdot e(r)g'=0,$$

amiből következik, hogy az $rx\to g'$ leképezés az $R(1)$ szabad R-modulus $\{rx\}$ részmodulusának egy G-be való homomorf leképezését indukálja. Másrészt a G triviális R-modulusban az $rx=g'$ ($\neq 0$) egyenletnek nem lehet megoldása, s mivel ez ellentmondana annak, hogy G algebrailag zárt, szükséges, hogy ha $o(g)>0$, akkor minden $r\ (\in R)$ elemre $(e(r), o(g))=1$ legyen.

Megfordítva, tegyük fel, hogy R-nek nincs 0 exponensű eleme, G triviális R-modulus és G-re mint közönséges Abel-féle csoportra teljesül 1. és 2. Megmutatjuk, hogy G algebrailag zárt R-modulus. Tekintsük az

$$\langle r_\nu, n_\nu\rangle x=g_\nu \tag{50}$$

G feletti tetszőleges kompatibilis egyenletrendszert, ahol (természetesen az általánosság korlátozása nélkül) feltételezzük, hogy az $\langle r_\nu, n_\nu\rangle$ elemek valóban befutják R^* valamely L balideálját. Az L balideál $\langle r_\mu, 0\rangle$ alakú elemei R^*-ban szintén balideált alkotnak, s az (50) egyenletrendszerből a megfelelő

$$\langle r_\mu, 0\rangle x=g_\mu \tag{51}$$

egyenleteket kiválasztva, mint kompatibilis egyenletrendszer részrendszerét, szintén kompatibilis egyenletrendszert nyerünk. Legyen $s_\mu\ (\in R)$ olyan elem, hogy $s_\mu r_\mu=e(r_\mu)\cdot r_\mu$. Ekkor

$$\langle s_\mu, -e(r_\mu)\rangle\langle r_\mu, 0\rangle x=0,$$

s az (51) rendszer kompatibilitása miatt

$$\langle s_\mu, -e(r_\mu)\rangle g_\mu=s_\mu g_\mu-e(r_\mu)g_\mu=-e(r_\mu)g_\mu=0.$$

Itt $e(r_\mu)>0$, tehát $o(g_\mu)>0$, s mivel $(e(r_\mu), o(g_\mu))=1$, szükségképpen $g_\mu=0$.

Mármost tekintsük az

(52) $$n_\nu x = g_\nu$$

egyenletrendszert. Az $n_\nu \to g_\nu$ leképezés egyértelmű, minthogy az előző bekezdés szerint a 0 képe okvetlenül 0, és $n_{\nu_1} + n_{\nu_2}$ képe $g_{\nu_1} + g_{\nu_2}$. Az (52) egyenletrendszer tehát egy a G 0-modulus feletti kompatibilis egyenletrendszer, s mivel 1. teljesül, van olyan $g (\in G)$ elem, amely az (52) egyenletrendszer megoldása:

$$n_\nu g = g_\nu.$$

Ez a g elem azonban

$$\langle r_\nu, n_\nu \rangle g = r_\nu g + n_\nu g = n_\nu g = g_\nu$$

miatt az (50) egyenletrendszernek is megoldása, s ezzel bebizonyítottuk, hogy G algebrailag zárt R-modulus.

A most bizonyított tételből könnyen levezethetők a következő állítások:

1. KOROLLÁRIUM: *Ha R-nek van 0 exponensű eleme, akkor algebrailag zárt triviális R-modulus csupán egy van, az egyelemű R-modulus. Ha R valamennyi elemének exponense pozitív, akkor az összes algebrailag zárt triviális R-modulust azok a triviális R-modulusok adják, amelyek mint közönséges Abel-féle csoportok a racionális számok additív csoportjával izomorf csoportok és olyan Prüfer-féle kváziciklikus csoportok direkt összegeként állnak elő, amelyek az R gyűrű bármely elemének exponenséhez relatív prím prímszámokhoz tartoznak. — Speciálisan, ha R valamennyi elemének exponense 1, akkor bármely algebrailag zárt közönséges Abel-féle csoport mint triviális R-modulus is algebrailag zárt.*

2. KOROLLÁRIUM: *Egy tetszőleges R gyűrű akkor és csak akkor olyan, hogy bármely algebrailag zárt közönséges Abel-féle csoport mint triviális R-modulus is algebrailag zárt, ha R bármely r eleméhez van olyan R-beli s elem, hogy $sr = r$. — Speciálisan, ha R egységelemes gyűrű, akkor bármely algebrailag zárt közönséges Abel-féle csoport mint triviális R-modulus algebrailag zárt.*

3. KOROLLÁRIUM: *Ha az R gyűrű bármely r eleméhez van olyan R-beli s elem, hogy $sr = r$, akkor egy tetszőleges G triviális R-modulus minimális algebrailag zárt bővítése úgy nyerhető, hogy vesszük G-nek mint közönséges Abel-féle csoportnak a minimális algebrailag zárt bővítését, s ezt triviális R-modulussá tesszük.*

11. §. Féligegyszerű gyűrűk mint operátortartományok

Ebben a paragrafusban az algebrailag zárt operátormodulusokra vonatkozó duális problémával foglalkozunk. Az előző paragrafusban láttuk, hogy egy triviális R-modulus csak abban az esetben lehet algebrailag zárt, ha mint

0-modulus is algebrailag zárt. Mivel pedig bármely Abel-féle csoport bármely R gyűrű esetén triviális R-modulusnak tekinthető, nincsen olyan R gyűrű, amelyre bármely R-modulus algebrailag zárt volna. Éppen ezért a kérdést másképpen vetve fel azt vizsgáljuk, hogy melyek azok az R-gyűrűk, amelyekre bármely R-modulus maximális triviális részmodulusának és egy algebrailag zárt R-modulusnak a direkt összege. A probléma megoldása éppen a féligegyszerű gyűrűk osztályához vezet.

Féligegyszerű gyűrűnek nevezünk egy olyan gyűrűt, amely balideáljaira nézve minimumkövetelménynek tesz eleget, s amely nem tartalmaz zérustól különböző nilpotens balideált. A féligegyszerű gyűrűk elméletében legfontosabb a WEDDERBURN—ARTIN-féle struktúratétel ([45], [1], [42]), amely a féligegyszerű gyűrűk osztályának explicit leírását tartalmazza. E tétel szerint *egy gyűrű akkor és csak akkor féligegyszerű, ha véges sok olyan kétoldali ideál direkt összege, amelyek mindegyike izomorf egy (ferdetest feletti) véges dimenziójú vektortér lineáris transzformációinak teljes gyűrűjével.* Ebből a jellemzésből nyilvánvaló, hogy féligegyszerű gyűrű mindig egységelemes gyűrű, fennáll a bal- és jobboldali fogalmak szimmetriája, továbbá, hogy a féligegyszerű gyűrűk kategóriája felöleli az összes ferdetestet is. A féligegyszerű gyűrűk egy másik igen fontos jellemzése E. NOETHERtől származik [37]. Eszerint egy tetszőleges gyűrű akkor és csak akkor féligegyszerű, ha egységelemes és minimális balideálok direkt összegére bontható. Mi a továbbiakban FUCHS LÁSZLÓ és SZELE TIBOR alábbi tételét is fel fogjuk használni, amelyet mintegy a féligegyszerű gyűrűk definíciójának tekintünk:

Egy gyűrű akkor és csak akkor féligegyszerű, ha bármely balideáljának van jobboldali egységeleme [14].

Bebizonyítjuk a következő tételt:

22. TÉTEL: *Egy tetszőleges R gyűrű akkor és csak akkor féligegyszerű, ha bármely G R-modulus*

$$G = G_0 + G_1 \tag{53}$$

direkt összeg alakjában írható, ahol G_0 a G modulus maximális triviális részmodulusa, G_1 pedig egy algebrailag zárt R-modulus.

BIZONYÍTÁS: Először tegyük fel, hogy a tetszőleges R gyűrűre bármely G R-modulus (53) alakú. Tekintsük ekkor speciálisan az $R^*_{(R)}$ modulust:

$$R^*_{(R)} = A_0 + A_1,$$

s legyen e felbontásnak megfelelően

$$\langle 0, 1\rangle = e_0 + e_1 \qquad (e_0 \in A_0,\ e_1 \in A_1).$$

Ha L R-nek tetszőleges balideálja, akkor minden l ($\in L$)-re

$$\langle l, 0\rangle = l\langle 0, 1\rangle = le_0 + le_1 = le_1 \in A_1,$$

tehát az $\langle l, 0\rangle$ $(l \in L)$ elemek H összessége az A_1 modulus részmodulusa, tehát H maximális triviális részmodulusa már 0. Következésképpen H algebrailag zárt. Most tekintsük az

$$\langle l, 0\rangle x = \langle l, 0\rangle \qquad (l \in L)$$

H feletti, nyilvánvalóan kompatibilis egyenletrendszert, ahol l befutja L összes elemét, s legyen ennek valamely H-beli megoldása $\langle e, 0\rangle$ $(e \in L)$. Ekkor minden l $(\in L)$-re $\langle l, 0\rangle\langle e, 0\rangle = \langle le, 0\rangle$, azaz $le = l$. Az e elem tehát az L balideál jobboldali egységeleme. Mivel pedig L tetszőleges volt, FUCHS és SZELE tétele alapján R féligegyszerű gyűrű.

Megfordítva, legyen R féligegyszerű gyűrű és G tetszőleges R-modulus. Ekkor a Peirce-féle felbontás szerint

$$G = G_0 + G_1,$$

ahol G_0 a G maximális triviális részmodulusa, G_1 pedig unitér R-modulus. Annak bizonyításában, hogy G_1 algebrailag zárt, felhasználjuk az alábbi segédtételt:[40]

SEGÉDTÉTEL: *Ha R féligegyszerű gyűrű, akkor az x_α $(\alpha \in \mathrm{A})$ szabad bázissal generált F unitér szabad R-modulus bármely M részmodulusához megadható F-nek olyan*

$$F = M + N \tag{54}$$

direkt felbontása, amelyben N

$$N = \sum_{\delta \in \Delta}{}' \{s_\delta x_\delta\} \qquad (s_\delta \in R) \tag{55}$$

alakú részmodulus és Δ az A indexhalmaz valamely részhalmaza.

Segédtételünk bizonyítása céljából tekintsük az R féligegyszerű gyűrűnek NOETHER idézett tétele alapján létező valamely

$$R = L_1 + L_2 + \cdots + L_m \tag{56}$$

direkt felbontását, ahol L_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ minimális balideál R-ben. Az R gyűrű 1 egységelemére ennek megfelelően az

$$1 = e_1 + e_2 + \cdots + e_m \tag{57}$$

előállítást nyerjük. Ekkor (56) és (57) alapján azt kapjuk, hogy

$$e_i = e_i(e_1 + e_2 + \cdots + e_m) = e_i e_1 + e_i e_2 + \cdots + e_i e_m,$$

azaz

$$e_i e_k = \begin{cases} e_i, & \text{ha } i = k, \\ 0, & \text{ha } i \neq k. \end{cases}$$

Tehát $Re_i = L_i$.

[40] A tételben kimondott állítás igazolása egyszerűbben nyerhető a 28. tételre való hivatkozással, itt mégis más utat választunk, mert ennek segítségével a megoldásokra explicit formulát nyerünk.

Tekintsük most az F unitér szabad R-modulust. Az 1 elem (57) felbontása alapján nyilvánvaló, hogy

(58) $$\{x_\alpha\} = \{e_1 x_\alpha\} + \{e_2 x_\alpha\} + \cdots + \{e_m x_\alpha\},$$

azaz

(59) $$F = \sum_{\alpha \in A}' \{x_\alpha\} = \sum_{\alpha \in A}' (\{e_1 x_\alpha\} + \{e_2 x_\alpha\} + \cdots + \{e_m x_\alpha\}).$$

Legyen mármost X maximális olyan részhalmaza az összes

$$e_i x_\alpha \qquad (\alpha \in A;\ i = 1, \ldots, m)$$

elemek halmazának, amely által generált

(60) $$\{X\} = \cdots + \{e_i x_\alpha\} + \cdots$$

részmodulus M-mel közös része 0. Megmutatjuk, hogy (54) és (55) teljesül F-nek $N = \{X\}$ részmodulusára. E célból nyilván elegendő azt bizonyítani, hogy $e_j x_\lambda$ eleme az $M + \{X\}$ direkt összegnek bármely λ ($\in A$) és $j = 1, \ldots, m$ esetén, hiszen ekkor (58) szerint $x_\lambda \in M + \{X\}$ ($\lambda \in A$). Ez azonban nyilvánvaló, mert az X halmazra kirótt maximális tulajdonság miatt

$$\{e_j x_\lambda\} \cap (M + \{X\}) \neq 0,$$

és így, minthogy $\{e_j x_\lambda\}$ minimális részmodulus F-ben,

$$\{e_j x_\lambda\} \subseteq M + \{X\},$$

azaz $e_j x_\lambda \in M + \{X\}$. Ezzel megmutattuk, hogy (54) érvényes az $N = \{X\}$ részmodulusra; N (55) alatti előállítása pedig egyszerűen úgy adódik (60)-ból, hogy az azonos x_α határozatlanoknak megfelelő $\{e_i x_\alpha\}$ direkt összeadandókat

$$\{e_i x_\alpha\} + \{e_j x_\alpha\} = \{(e_i + e_j) x_\alpha\}$$

mintára összevonjuk.

Az ily módon igazolt segédtétel alapján befejezzük a tétel bizonyítását. Legyen $[M, \varphi]$ a G_1 unitér R-modulus feletti tetszőleges kompatibilis egyenletrendszer. Megmutatjuk, hogy a φ leképezés kiterjeszthető az egész F modulus $M\varphi$-be való valamely $\bar{\varphi}$ operátorhomomorfizmusává. Mármost (54) alapján φ-nek egy ilyen kiterjesztését közvetlenül megadhatjuk. Ha ugyanis f F-nek tetszőleges eleme, akkor felhasználva az (54) szerinti

$$f = f' + f'' \qquad (f' \in M,\ f'' \in N)$$

egyértelmű előállítást, a $\bar{\varphi}$ kiterjesztett leképezést az

$$f\bar{\varphi} = f'\varphi \ (\in M\varphi)$$

előírással definiáljuk. Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

Ha az $[M, \varphi]$ egyenletrendszert az

$$f_\beta(\ldots, x_\alpha, \ldots) = g_\beta \quad (\in G_1;\ \alpha \in \mathrm{A};\ \beta \in \mathrm{B}) \tag{61}$$

„koordinátás" alakban tekintjük, akkor az egyenletrendszer tekintett $\overline{\varphi}$ megoldása az

$$x_\alpha = c_\alpha \quad (\in M\varphi;\ \alpha \in \mathrm{A})$$

alakban adható meg, ahol c_α a (61) egyenletrendszer jobboldalán álló g_β elemek közül véges soknak egy R feletti lineáris kombinációja.

Tekintsük most az $[M, \psi]$ G_1 feletti homogén egyenletrendszert, tehát $M\psi = 0$. Az (54) és (55) összefüggések alapján az F unitér szabad R-modulus összes olyan G_1-be való $\overline{\psi}$ homomorf leképezései, amelyekre

$$M\overline{\psi} = 0, \tag{62}$$

egyértelműen jellemezhetők az (55)-ben szereplő $s_\delta x_\delta$ elemek

$$(s_\delta x_\delta)\overline{\psi} = h_\delta \quad (\in G_1;\ \delta \in \Delta) \tag{63}$$

képeivel, ahol $O(h_\delta) \supseteq O(s_\delta x_\delta)$; és másfelől: tetszőleges $h_\delta (\in G_1;\ \delta \in \Delta)$ elemrendszert előírva, amelyre $O(h_\delta) \supseteq O(s_\delta x_\delta)$, (63), (55) és (54) alapján mindig F-nek egy kívánt tulajdonságú $\overline{\psi}$ homomorfizmusát nyerjük. Továbbá, mivel az $r_\alpha = x_\alpha \overline{\psi}$ elemrendszer az

$$f_\beta(\ldots, x_\alpha, \ldots) = 0 \tag{64}$$

„koordinátás" alakban írt $[M, \psi]$ homogén egyenletrendszer megoldása, és az (54), (55) összefüggésekből az F-beli x_α elemek egyértelműen meghatározott

$$x_\alpha = x'_\alpha + \sum_{\delta \in \Delta} d_{\alpha\delta}(s_\delta x_\delta) \qquad (x'_\alpha \in M) \tag{65}$$

előállítása következik, azt találtuk, hogy a tekintett homogén egyenletrendszer összes megoldásai a (65), (63), (62) alapján felírt

$$r_\alpha = x_\alpha \overline{\psi} = \sum_{\delta \in \Delta} d_{\alpha\delta} h_\delta \qquad (\alpha \in A)$$

képletek szerint nyerhetők, ahol a h_δ paraméterek értékeit az $O(h_\delta) \supseteq O(s_\delta x_\delta)$ feltételeknek eleget téve, de egyébként tetszőlegesen választhatjuk meg a G_1 modulus elemei közül.

Összekapcsolva a (61) és (64) egyenletrendszerek megoldásaira vonatkozó eredményeinket, kimondhatjuk a következő tételt:

23. TÉTEL: *Ha R féligegyszerű gyűrű, akkor a tetszőleges G_1 unitér R-modulus feletti ((61) alakú) egyenleteknek bármely $[M, \varphi]$ kompatibilis rendszere G_1-ben megoldható és az összes G_1-beli megoldás az*

$$x_\alpha = c_\alpha + \sum_{\delta \in \Delta} d_{\alpha\delta} h_\delta \qquad (\alpha \in A) \tag{66}$$

képletrendszer segítségével nyerhető, ahol a h_δ paraméterek értékei az $O(h_\delta) \supseteq O(s_\delta x_\delta)$ $(\delta \in \Delta)$ feltételeknek eleget téve, de egyébként tetszőlegesen variálnak

G_1-ben; az $s_\delta, d_{\alpha\delta}$ ($\in R$) konstansok az (54) *direkt felbontástól függő* (55) *és* (65) *összefüggések által vannak definiálva, végül a c_α ($\in G_1$) konstansok a* (61) *egyenletek jobboldalán álló g_β-k R feletti (véges) lineáris kombinációi.*

1. KOROLLÁRIUM: *Ha R féligegyszerű gyűrű, akkor a tetszőleges G_1 unitér R-modulus feletti $[M, \varphi]$ kompatibilis egyenletrendszernek akkor és csak akkor van pontosan egy megoldása G_1-ben, ha egy* (54), (55) *direkt felbontás esetén G_1 bármely h elemére és bármely δ ($\in \Delta$) indexre $O(h) \supseteq O(s_\delta x_\delta)$-ból következik, hogy $h = 0$.*

Minthogy a kompatibilitás véges jellegű tulajdonság, érvényesek az alábbi következmények is:

2. KOROLLÁRIUM: *Ha R féligegyszerű gyűrű, akkor a G_1 unitér R-modulus feletti tetszőleges egyenletrendszer akkor és csak akkor oldható meg G_1-ben, ha bármely véges számú egyenletből álló részrendszere megoldható G_1-ben.*

3. KOROLLÁRIUM: *Ha R féligegyszerű gyűrű, akkor a G_1 unitér R-modulus feletti bármely egyenletrendszernek van maximális megoldható részrendszere.*

A 21. tétel felhasználásával adódik a

4. KOROLLÁRIUM: *Ha R féligegyszerű gyűrű, a tetszőleges R-modulus akkor és csak akkor algebrailag zárt, ha maximális triviális részmodulusa mint közönséges Abel-féle csoport algebrailag zárt.*

Féligegyszerű gyűrűvel mint operátortartománnyal ellátott tetszőleges modulus minimális algebrailag zárt bővítésének meghatározását tartalmazza a

24. TÉTEL: *Legyen R féligegyszerű gyűrű és G tetszőleges R-modulus. Tekintsük G-nek a G_0 maximális triviális részmodulus és egy G_1 unitér R-modulus direkt összegeként való $G = G_0 + G_1$ felbontását. Legyen az A 0-modulus a G_0-nak, mint 0-modulusnak minimális algebrailag zárt bővítése. Tekintsük most A-t triviális R-modulusnak. Ekkor az $A + G_1$ R-modulus a G modulus minimális algebrailag zárt bővítése.*

BIZONYÍTÁS: Legyen $\bar{G}$ a G egy minimális algebrailag zárt bővítése. Minthogy a 22. tétel szerint G_1 algebrailag zárt, fennáll egy $\bar{G} = \bar{A} + G_1$ direkt felbontás, ahol $G_0 \subseteq \bar{A}$. Az $\bar{A}$ modulus, mint algebrailag zárt modulus direkt összeadandója, maga is algebrailag zárt, mégpedig G_0-nak nyilvánvalóan minimális algebrailag zárt bővítése. Mivel továbbá R egységelemes gyűrű, a 21. tétel 3. korolláriuma szerint $\bar{A}$ triviális R-modulus, s mint 0-modulus, G_0-nak mint 0-modulusnak minimális algebrailag zárt bővítése. Ezzel a 24. tételt bebizonyítottuk.

E paragrafus hátralevő részét a fentiekkel szorosan összefüggő tisztán gyűrűelméleti kérdéseknek szenteljük.

Adott R gyűrű esetén az R-modulusok algebrai elmélete magában foglalja az R gyűrű feletti lineáris egyenletrendszerek[41] elméletét is. Valóban, az $R_{(R)}$ modulus feletti bármely egyenletrendszer az R gyűrű feletti lineáris egyenletrendszernek tekinthető és megfordítva.

A ferdetestek feletti lineáris egyenletrendszerek klasszikus elmélete szerint bármely kompatibilis egyenletrendszernek van megoldása a tekintett ferdetestben és az összes megoldás bizonyos szabadon választható értékű paraméterek lineáris függvényeiként állítható elő. Eszerint a 23. tétel ennek az elméletnek egy messzemenő általánosítása, amely a $G_1 = R_{(R)}$ speciális esetben a következő, tisztán gyűrűelméleti eredményt adja:

Egy R féligegyszerű gyűrűben bármely R feletti kompatibilis lineáris egyenletrendszer megoldható, s az egyenletrendszer összes megoldása az

$$x_\nu = c_\nu + \sum' r_i t_i \qquad (r_i \in R)$$

alakú képletrendszer segítségével nyerhető, ahol a t_i-k az R gyűrű bizonyos S_i részhalmazaiból szabadon választható értékű paraméterek, a c_ν konstansok pedig a tekintett egyenletrendszer jobboldalán álló konstansok R feletti (véges, bal-) lineáris kombinációi.

Ha a megoldást szolgáltató képletekbe $t_i = 0$-t helyettesítünk, akkor az adódik, hogy az $x_\nu = c_\nu$ elemrendszer megoldása a tekintett lineáris egyenletrendszernek. Ki lehet mutatni, hogy ez a tény megfordítható:

Egy R gyűrű akkor és csak akkor féligegyszerű, ha bármely R feletti kompatibilis lineáris egyenletrendszernek van olyan megoldása, amelyet a tekintett egyenletrendszer jobboldalán álló konstansok R feletti (véges, bal-) lineáris kombinációi alkotnak. (Lásd [25].)

Egy R gyűrűt *lineárisan zártnak* nevezünk, ha bármely R feletti kompatibilis lineáris egyenletrendszer megoldható R-ben.[42]

25. TÉTEL: *Egy R gyűrű akkor és csak akkor féligegyszerű, ha bármely balideálja lineárisan zárt.*

BIZONYÍTÁS: Először tegyük fel, hogy R minden balideálja lineárisan zárt, és legyen L R-nek tetszőleges balideálja. Mivel az

$$lx = l \qquad (l \in L)$$

lineáris egyenletrendszer nyilvánvalóan kompatibilis, van olyan $e (\in L)$ elem, hogy $le = l$ minden $l (\in L)$-re. L-nek tehát van jobbegységeleme, s így R FUCHS és SZELE tétele alapján féligegyszerű gyűrű.

[41] Félreértések elkerülése céljából hangsúlyozzuk, hogy gyűrű feletti lineáris egyenletrendszeren mindig bal-lineáris egyenletrendszert értünk, azaz olyat, amelyben a határozatlanok balról vannak gyűrűbeli elemekkel szorozva.

[42] A 15. tétel 1. korolláriuma szerint e definícióban elegendő lett volna az egyismeretlenes egyenletrendszerek megoldhatóságát posztulálni.

Megfordítva, ha R féligegyszerű gyűrű, akkor a 22. tétel alapján R bármely L balideáljára $L_{(R)}$ algebrailag zárt R-modulus, s ekkor minden R-beli (és méginkább L-beli) együtthatókkal és L-beli konstans tagokkal felírt kompatibilis lineáris egyenletrendszer megoldható L-ben. L tehát lineárisan zárt.

(Beérkezett: 1958. VI. 30)

BELOUSZOV EGY TÉTELÉRŐL ÉS ANNAK NÉHÁNY ALKALMAZÁSÁRÓL

Írta: HOSSZÚ MIKLÓS (Miskolc)

1. §.

V. D. BELOUSZOV [1][1] egy előadásában a következő tételt mondta ki:

1. TÉTEL: *Amennyiben egy halmaz négy F, G, H, K művelet mindegyikére nézve kvázicsoportot alkot, és ezek között fennáll bármely x, y, z halmazelemhármasra az*

$$F[G(x,y),z]=H[x,K(y,z)] \qquad (x,y,z\in Q) \tag{1}$$

azonosság, akkor létezik olyan csoport, melynek mindnégy kvázicsoport izotópja.

A jelen dolgozatban e tételre egy egyszerű bizonyítást és néhány alkalmazást adunk. E célból először az 1. tételt a következő pontosabb alakban fogalmazzuk meg:

Az (1) *függvényegyenlet legáltalánosabb invertálható megoldása*

$$\left\{\begin{aligned} F(x,y)&=A(f_1x,h_2k_2y),\\ G(x,y)&=f_1^{-1}A(f_1g_1x,h_2y),\\ H(x,y)&=A(f_1g_1x,h_2y),\\ K(x,y)&=h_2^{-1}A(f_1g_1x,h_2k_2y),\end{aligned}\right. \tag{2}$$

ahol $A(x,y)$ tetszőleges csoport művelet Q felett, továbbá $f_1, g_1, g_2, h_2, k_1, k_2$ tetszőleges invertálható leképezések Q-n a

$$f_1g_2=h_2k_1 \tag{3}$$

megszorítással.

BIZONYÍTÁS: Értelmezzük az

$$i_1x=I(x,a),\quad i_2x=I(a,x),\quad I=F,G,H,K$$

leképezéseket, és helyettesítsünk (1)-ben

$$x=a,\quad y=g_2^{-1}f_1^{-1}u,\quad z=k_2^{-1}h_2^{-1}v,$$

ill.

$$x=g_1^{-1}f_1^{-1}u,\quad y=a,\quad z=k_2^{-1}h_2^{-1}v,$$

ill.

$$x=g_1^{-1}f_1^{-1}u,\quad y=k_1^{-1}h_2^{-1}v,\quad z=a,$$

[1] A szögletes zárójelben álló számok a dolgozat végén található irodalomjegyzékre utalnak. [1]-ben a tétel bizonyítás nélkül van kimondva.

illetve $x = z = a$-t, akkor az

$$(4)\quad \begin{cases} A(u,v) \overset{\text{def}}{=} F(f_1^{-1}u,\ \ k_2^{-1}h_2^{-1}v) = h_2K(g_2^{-1}f_1^{-1}u,\ \ k_2^{-1}h_2^{-1}v) = \\ = H(g_1^{-1}f_1^{-1}u,\ \ h_2^{-1}v) = f_1G(g_1^{-1}f_1^{-1}u,\ \ k_1^{-1}h_2^{-1}v), \end{cases}$$

illetve az

$$F[G(a,y),a] = H[a,K(y,a)]$$

összefüggéshez jutunk. Ebből következik, hogy (1) megoldása csak (2) alakú lehet, ahol fennáll (3) is.

Másrészt nyilvánvaló, hogy (2) ki is elégíti (1)-et tetszőleges asszociatív $A(x,y)$-nal és tetszőleges f_i, g_i, h_i, k_i-val, melyek között a (3) összefüggés fennáll. Erről úgy győződhetünk meg, hogy (2)-t (1)-be helyettesítjük:

$$A[A(f_1g_1x, h_2k_1y), h_2k_2z] = A[f_1g_1x, A(f_1g_2y, h_2k_2z)],$$

és bevezetjük az

$$u = f_1g_1x, \quad v = h_2k_1y = f_1g_2y, \quad w = h_2k_2z$$

jelölést. Ezáltal az 1. tételt bebizonyítottuk.

Megjegyzések:

1. A bizonyítás F, G, H, K invertálhatóságát csak az $x = a$, ill. $y = a$ helyen használja fel lényegében; így a feltételek enyhítésével a tétel megfelelő módon általánosítható. Ekkor $A(x,y)$ asszociatív, de nem feltétlen invertálható minden rögzített x, ill. y helyen, tehát Q^I csupán egy félcsoport izotópja.[2]

2. Helyettesítsünk $x = \alpha_3u$, $y = \alpha_4v$, $z = \alpha_5w$-t, akkor (1)-et az

$$\alpha_1F[\alpha_2\alpha_2^{-1}G(\alpha_3u, \alpha_4v), \alpha_5w] = \alpha_1H[\alpha_3u, \alpha_6\alpha_6^{-1}K(\alpha_4v, \alpha_5w)]$$

alakban írhatjuk fel. E képlet

$$(5)\ A(x,y) = \alpha_1F(\alpha_2x, \alpha_5y) = \alpha_2^{-1}G(\alpha_3x, \alpha_5y) = \alpha_1H(\alpha_3x, \alpha_6y) = \alpha_6^{-1}K(\alpha_4x, \alpha_5y)$$

asszociativitását fejezi ki; minthogy F, G, H, K között fenn kell állni a (4) összefüggéseknek, Q^I közös csoport izotópjának műveletét kaphatjuk az (5) képlet alapján, ha α_i kielégíti az

$$\alpha_2\alpha_1 = f_1^{-1}, \quad \alpha_2\alpha_3^{-1} = g_1, \quad \alpha_4\alpha_5^{-1} = k_1^{-1}k_2,$$
$$\alpha_6\alpha_5^{-1} = k_2, \quad \alpha_2\alpha_4^{-1} = g_2, \quad \alpha_6\alpha_1 = h_2^{-1}$$

egyenlet rendszert. E rendszer biztosan megoldható, pl. az

$$\alpha_1x = x, \quad \alpha_2 = f_1^{-1}, \dots$$

[2] A Q halmazt az (invertálható) $I(x,y)$ $(Q \times Q \to Q)$ müveletre nézve Q^I kvázicsoportnak nevezzük. Q^I az S^J izotópja, ha van olyan invertálható $x \to \chi x$, φx, ψx $(Q \to S)$ leképezés, mellyel fennáll

$$\chi I(x,y) = J(\varphi x, \psi y), \qquad (x, y \in Q).$$

Ebből a $\chi = \varphi = \psi$ speciális esetben az izomorfizmus értelmezését nyerjük.

választással a (2) alatti esethez jutunk. Minthogy a csoport tulajdonságok izomorf invariánsok, egy megoldás létezése maga után vonja végtelen sok megoldás létezését. A rendszer megoldhatóságának szükséges és elégséges feltétele éppen (3).

2. §.

A továbbiakban néhány alkalmazást mutatunk be. Ismeretes, hogy az aránypárok beltagjai felcserélhetők. Kérdés, milyen kvázicsoporton érvényes hasonló felcserélhetőség? Ezzel kapcsolatban a következő tételeket bizonyítjuk be:

2. TÉTEL: *Bármely Q° kvázicsoport, amely kielégíti a*

(6) $$x \circ y = u \circ v \rightleftarrows x \circ u = y \circ v, \qquad (x, y, u, v \in Q)$$

összefüggést, egy Abel-féle csoport izotópja, és

$$x \circ y = \alpha(x - y), \qquad (x, y \in Q),$$

ahol $x \to \alpha x$ $(Q \to Q)$ invertálható leképezés, míg $x - y$ egy kommutatív csoport művelet inverze.

3. TÉTEL: *Bármely Q^{*} kvázicsoport, amely kielégíti a*

(7) $$x * y = u * v \rightleftarrows x * v = u * y, \qquad (x, y, u, v \in Q)$$

összefüggést, egy 2 periódusú csoport izotópja, azaz olyané, amelyben minden elem megegyezik saját inverzével.

BIZONYÍTÁS: Értelmezzük az $x = z \circ y$ művelet inverzét ezen egyenlet $z = x \circ y^{-1}$ megoldásaként. Ez kielégíti az $(x \circ y^{-1}) \circ y = (x \circ y) \circ y^{-1} = x$ összefüggést. Akkor (6)-ot a következő alakban írhatjuk fel:

(8) $$\begin{gathered} [(u \circ v) \circ y^{-1}] \circ u = y \circ v, \\ (u \circ v) \circ y^{-1} = (y \circ v) \circ u^{-1}. \end{gathered}$$

Ez utóbbi (1) speciális esete, midőn

$$F(x, y) = H(y, x) = x \circ y^{-1}, \quad G(x, y) = K(y, x) = x \circ y,$$

tehát az 1. tétel szerint

$$x \circ y = \chi^{-1}(\varphi x \cdot \psi y),$$

ahol $x \cdot y$ csoport művelet. Eszerint fennáll

$$\varphi x \cdot \psi y = \varphi u \cdot \psi v \rightleftarrows \varphi x \cdot \psi u = \varphi y \cdot \psi v.$$

Válasszuk y és v-t úgy, hogy $\psi y = \psi v = e$ az egységelem legyen, akkor $\varphi x = \varphi u$, és látható, hogy $\psi u = (\varphi u)^{-1} \cdot a$, ahol $a = \varphi y$ rögzített elem. Így érvényes

$$\varphi x \cdot (\varphi y)^{-1} \cdot a = \varphi u \cdot (\varphi v)^{-1} \cdot a \rightleftarrows \varphi x \cdot (\varphi u)^{-1} \cdot a = \varphi y \cdot (\varphi v)^{-1} \cdot a,$$

ami tetszőleges x, y, u, v mellett csak úgy lehet, ha

$$x \cdot y^{-1} = u \cdot v^{-1} \rightleftarrows x \cdot u^{-1} = y \cdot v^{-1},$$

$$x \cdot u^{-1} = y \cdot u^{-1} \cdot x \cdot y^{-1},$$

következőleg, ha $u = e$-t teszünk,

$$x \cdot y = y \cdot x$$

teljesül, vagyis $x \cdot y$ kommutatív. Tehát

$$x \circ y = \chi^{-1}(\varphi x \cdot \psi y) = \chi^{-1}[\varphi x \cdot (\varphi y)^{-1} \cdot a] = \alpha(x - y),$$

ahol

$$\alpha x = \chi^{-1}(\varphi x \cdot a),$$

míg $x - y$ az

$$x + y = \varphi^{-1}(\varphi x \cdot \varphi y)$$

kommutatív csoport művelet inverze.

A 3. tétel hasonló módon bizonyítható, s ott is fennáll

$$x * y = \chi^{-1}(\varphi x \cdot \psi y),$$

csakhogy most

$$\varphi x \cdot \psi y = \varphi u \cdot \psi v \rightleftarrows \varphi x \cdot \psi v = \varphi u \cdot \psi y,$$

azaz

$$x \cdot y = u \cdot v \rightleftarrows x \cdot v = u \cdot y$$

érvényes. Így

$$x \cdot y = u \cdot x^{-1} \cdot u \cdot y,$$

ami $x = x^{-1}$-et szolgáltatja, ha $y = u$ az egységelem.

Viszont egyszerűen meg lehet győződni arról, hogy az ilyen alakú $x \circ y$ és $x * y$ ki is elégíti (6)-ot, illetve (7)-et.

Megjegyzés: Az $x \circ y$ műveletre nem tudunk felírni olyan jellemző függvényegyenletet, mely csupán az $x \circ y$ műveletet tartalmazza; ezzel szemben az $x \circ y^{-1}$ inverz műveletre lehet találni ilyen belső jellemzést: ha (8)-ban $u = s \circ v^{-1}$, $y = t \circ v^{-1}$-et helyettesítünk, akkor

$$s \circ (t \circ v^{-1})^{-1} = t \circ (s \circ v^{-1})^{-1}$$

-et nyerjük, s ez az asszociatív törvény egy változata (lásd [2, 5]).

3. §.

Egy előző dolgozatomban foglalkoztam a

(9) $$F[G(x, y), H(u, v)] = K[M(x, u), N(y, v)], \qquad (x, y, u, v \in Q)$$

függvényegyenlettel és ennek néhány speciális esetével [3]. Az 1. tétel alapján könnyen következik a

4. TÉTEL: *A (9) függvényegyenlet legáltalánosabb invertálható megoldása*

$$(10)\qquad \begin{cases} F(x,y)=\alpha x+\beta y, \\ G(x,y)=\alpha^{-1}(\varphi x+\psi y), \\ H(x,y)=\beta^{-1}(\sigma x+\omega y), \\ K(x,y)=\gamma x+\delta y, \\ M(x,y)=\gamma^{-1}(\varphi x+\sigma y), \\ N(x,y)=\delta^{-1}(\psi x+\omega y), \end{cases}$$

ahol $x+y$ *tetszőleges kommutatív csoport művelet, míg*

$$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varphi, \psi, \sigma, \omega$$

tetszőleges invertálható leképezések Q-n.

BIZONYÍTÁS: Az $u=a$ rögzítéssel látható, hogy

$$F[x, H(a,y)], \quad G(x,y), \quad K[M(x,a),y], \quad N(x,y)$$

kielégíti (1)-et, tehát az 1. tétel szerint

$$\left.\begin{aligned} F(x,y)&=\alpha x+\beta y, \\ G(x,y)&=\alpha^{-1}(\varphi x+\psi y), \\ K(x,y)&=\gamma x+\delta y, \\ N(x,y)&=\delta^{-1}(\nu x+\varrho y), \end{aligned}\right\} \qquad (x+y=A(x,y)).$$

Hasonlóan szimmetria okok miatt

$$H(x,y)=\beta^{-1}(\chi x+\varkappa y),$$
$$M(x,y)=\gamma^{-1}(\mu x+\pi y).$$

Helyettesítsük ezeket vissza (9)-be:

$$\varphi x+\psi y+\chi u+\varkappa v=\mu x+\pi u+\nu y+\varrho v.$$

A változók alkalmas rögzítésével látható, hogy

$$\mu x=\varphi x+a, \quad \varkappa v=b+\varrho v,$$

tehát φx és ϱv-vel egyszerűsítve

$$\psi y+\chi u+b=a+\pi u+\nu y.$$

Ezután ψy, illetve χu-t az egységelemnek választva

$$\chi u=a+\pi u+c, \text{ ill. } \nu y=d+\psi y+b$$

adódik. Vagyis fennáll

$$\psi y+a+\pi u+c=a+\pi u+d+\psi y,$$

amit más jelölésekkel az

$$y+u+c=u+d+y$$

alakban is felírhatunk. Ha u az egységelem, akkor $y+c=d+y$ következik, ami minden y esetén csak úgy állhat, ha $c=d$ a Q^+ centrumába esik; így c-vel egyszerűsítve

$$y+u=u+y$$

teljesül, azaz Q^+ kommutatív. Következőleg azt irhatjuk, hogy

$$N(x,y)=\delta^{-1}(\nu x+\varrho y)=\delta^{-1}(\psi x+d+b+\varrho y)=\delta^{-1}(\psi x+\omega y),$$
$$H(x,y)=\beta^{-1}(\chi x+\varkappa y)=\beta^{-1}(a+\pi x+c+b+\varrho y)=\beta^{-1}(\sigma x+\omega y),$$
$$M(x,y)=\gamma^{-1}(\mu x+\pi y)=\gamma^{-1}(\varphi x+a+\pi y)=\gamma^{-1}(\varphi x+\sigma y).$$

Viszont nyilvánvaló, hogy (10) *tetszőleges* $\alpha, \beta, \ldots$ invertálható függvénnyel kielégíti (9)-et, ha $x+y$ asszociatív és kommutatív művelet.

Megjegyzés: Ha (9) folytonos megoldásait keressük, akkor a (10) megoldásban szereplő függvények is folytonosak, és az $x+y$ csoport művelet is folytonos. Minthogy minden egytagú folytonos csoport izomorf a valós additív csoporttal, az

$$F(x,y)=K(x,y),\quad G=M=\Phi,\quad H=N=\Psi,$$
$$\Phi[y,F(x,y)]=x,\quad \Psi[F(x,y),x]=y$$

speciális esetben a 4. tétel felhasználásával a hatszögű szövetek alaptételének egy új bizonyítását nyertük. Ugyanis ekkor Φ és Ψ értelmezését figyelembe véve

$$F[\Phi(x,y),\Psi(u,v)]=F[\Phi(x,u),\Psi(y,v)]$$

az $x=y_1$, $v=x_1$, $y_2=\Psi(y,x_1)$, $x_2=\Phi(y_1,y)$, $y_3=\Psi(u,x_1)$, $x_3=\Phi(y_1,u)$ jelöléssel másként az

$$y=F(x_1,y_2)=F(x_2,y_1),\quad u=F(x_1,y_3)=F(x_3,y_1)\Longrightarrow F(x_2,y_3)=F(x_3,y_2)$$

alakban írható, ami a Thomsen-féle ábra zárásával egyenértékű [4]. Az egytagú folytonos csoportok előállításának felhasználásával egyéb szövésgeometria tételek bizonyítására is felhasználható az 1. tétel.

IRODALOM

[1] В. Д. Белоусов: Ассоциативные системы квазигрупп, Успехи Мат. Наук 13 (1958), вып. 3 (81), 243.

[2] M. Hosszú: Some functional equations related with the assotiative law, *Publicationes Math.*, 3 (1954) 205—214.

[3] M. Hosszú: A generalization of the functional equation of bisymmetry, *Studia Math.*, 14 (1953) 100—106.

[4] Radó Ferenc,... (sajtó alatti cikk a kolozsvári Mathematica-ban).

[5] A. Sade: ... (sajtó alatti cikk a Publ. Math.-ben).

(Beérkezett: 1958. VIII. 18.)

KOMPLEMENTUMOS HÁLÓK SZERKEZETÉRŐL

Írta: SZÁSZ GÁBOR (Szeged)

A hálók különféle speciális osztályai közül a hálóelméleten belül is, de még inkább annak a matematika más ágaiban való alkalmazásai terén, kiemelkedő szerepet játszanak a komplementumos és a relatív komplementumos hálók. Ennek megfelelően számos kutató foglalkozott az ilyen hálók szerkezetének vizsgálatával, továbbá olyan természetű problémákkal, hogy bizonyos típusú hálók komplementumos vagy relatív komplementumos voltára milyen más (bizonyos esetekben egyszerűbben kimutatható) szükséges, elegendő, illetve szükséges és elegendő feltételek adhatók meg. Ez a dolgozat is ilyen természetű kérdéseket tárgyal.

Az 1. fejezet a tárgyalás szempontjából legfontosabb definíciókat tartalmazza.

A 2. fejezet először NEUMANN egy klasszikus tételének bizonyos értelmű megfordításával foglalkozik. Ez a megfordítás lényegileg egy speciális alakú, komplementumos moduláris hálók feletti egyenletrendszer megoldhatóságának kimutatását jelentené; közben azonban többre jutunk abban a tekintetben, hogy az 1. tételben egy olyan eljárást adunk meg, amely a felvetődött egyenletrendszer összes megoldásainak meghatározására alkalmas, mégpedig nemcsak komplementumos moduláris, hanem tetszés szerinti korlátos relatív komplementumos hálók esetében is. A tétel erejét mutatja, hogy belőle, ill. felhasználásával számos más eredmény adódik. Így, a fejezet hátralevő részében, a komplementumos moduláris hálókra vonatkozó apróbb alkalmazásokon kívül, e tételre támaszkodva igen egyszerű bizonyítást adunk arra az ismert tételre, hogy minden egyértelműen komplementumos moduláris háló disztributív.

A 3. fejezetben pedig egy DILWORTH-től származó s a kettős végességi követelménynek eleget tevő komplementumos hálók modularitására vonatkozó kritérium érvényességét e tétel segítségével a korlátos relatív komplementumos hálók osztályára is kiterjesztjük. Ebből adódik a 6. tétel, amely szerint egyértelműen komplementumos nemmoduláris háló nem lehet relatív komplementumos. Ugyancsak a 3. fejezetben még egy szükséges és elegendő feltételt adunk komplementumos hálók moduláris voltára vonatkozólag.

A 4. fejezet problémája a 3. fejezet első §-ában ismertetett Dilworth-féle tételhez analóg tétel felállítása (közelebbről, egy bizonyos típusú részháló létezésének kérdése) komplementumos nemdisztributív moduláris hálókra. Egyszerű példák mutatják, hogy a pontos analógia nem érvényes; ennek megfelelően szükséges és elegendő feltételt adunk a kívánt típusú részháló létezésére (8. tétel). A tételből rögtön adódik egy projektív geometriai jellegű eredmény olyan páronként idegen lineáris altérhármasok létezéséről, ill. nemlétezéséről, amelyek közül bármely kettő kifeszíti a teret. A tétel érdekessége, hogy a fent nevezett típusú hálók direkt felbontásában szereplő komponensek hosszúságának páros vagy páratlan voltával kapcsolatos.

Az 5. fejezet fő eredménye az, hogy féligmoduláris félkomplementumos háló bármely elemének maximális félkomplementumai egyben az illető elem komplementumai (9. tétel). Következményeként egy elegendő feltétel adódik arra, hogy egy féligmoduláris félkomplementumos háló komplementumos legyen. (Ilyen kérdésekkel a szerző már régebben is foglalkozott; a jelenlegi eredmény a régebbieket is magában foglalja.) Tételünket rögtön alkalmazzuk olyan végtelen hosszúságú féligmoduláris félkomplementumos hálókra, amelyeknek valamennyi, a háló esetleg létező legnagyobb elemét nem tartalmazó részhálója már véges hosszúságú.

1. Definíciók

Az absztrakt algebrában általánosan használt fogalmakat illetőleg [10]-re utalunk.

1. 1. Háló és rendezése. Egy L halmazon legyen értelmezve két művelet, melyeket *egyesítés*nek és *metszés*nek nevezünk, s $\cup$, ill. $\cap$ jellel fejezünk ki. L-et *hálónak* nevezzük, ha mindkét művelet asszociatív és kommutatív, továbbá L bármely a, b elempárjára teljesülnek az $a \cup (a \cap b) = a$, $a \cap (a \cup b) = a$ elnyelési azonosságok.

Minden hálóban bevezethető egy rendezési reláció a következő definícióval: a háló a, b elempárjára legyen $a \leqq b$ akkor és csak akkor, ha $a = a \cap b$ (vagy, ami ezzel ekvivalens, ha $a \cup b = b$). A továbbiakban mindig erről a rendezésről van szó.

Az L háló a, b elempárját *összehasonlíthatónak* nevezzük, ha vagy $a \leqq b$ vagy $a \geqq b$ teljesül; ellenkező esetben azt mondjuk, hogy a, b *összehasonlíthatatlanok*, s ezt az $a \| b$ jellel fejezzük ki.

Ha az L háló valamely a, b elempárjára $a < b$, de egyetlen olyan $x (\in L)$ elem sincs, amellyel $a < x < b$ teljesülne, akkor azt mondjuk, hogy a-t *követi* b, s ezt a tényt az $a \prec b$ jellel fejezzük ki.

Ha egy hálónak van olyan eleme, amely minden más elemnél kisebb (ill. nagyobb), akkor ezt az elemet a háló *legkisebb* (ill. *legnagyobb*) *elemének* nevezzük, s o-val (ill. i-vel) jelöljük. Az o, i elemeket ebben a dolgozatban a háló *korlátelem*einek, minden más elemét pedig *belső elem*nek fogjuk nevezni. Az L belső elemeinek halmazára bevezetjük az $\mathfrak{I}(L)$ jelölést.

Egy L hálót *alulról* (ill. *felülről*) *korlátos*nak mondunk, ha van o (ill. i) eleme. A mindkét oldalról korlátos hálóra a *korlátos háló* elnevezést használjuk. Alulról korlátos háló valamely $p(\neq o)$ elemét *pont*nak vagy *atom*nak nevezzük, ha $o \prec p$.

Egy korlátos L hálót *atomos*nak nevezünk, ha az L minden $x(\neq o, i)$ eleméhez található olyan $p, m(\in L)$ elempár, hogy $o \prec p \leqq x \leqq m \prec i$.

1. 2. Háló hosszúsága, elem magassága. A háló *részláncai*n a háló rendezett részhalmazait értjük. A *láncok hosszúságát* a következőképpen definiáljuk: véges $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ lánc esetén a lánc hossza az n szám, végtelen sok elemből álló lánc esetén pedig az elemek halmazának számossága.

*Maximális*nak nevezzük az R láncot (L-ben), ha R az L egyetlen részláncának sem valódi részhalmaza. Az L által tartalmazott összes maximális láncok hosszúságának felső határa a *háló hosszúsága*. Aszerint, hogy ez véges-e vagy végtelen, *véges hosszúságú* és *végtelen hosszúságú* hálókról beszélünk.

Alulról korlátos L háló valamely a elemének *magasságát* az összes $x \leqq a$ $(x \in L)$ elemek által alkotott részháló hosszúságával definiáljuk, s $d(a)$-val jelöljük. Ha ez véges, akkor a-t *véges magasságú elem*nek nevezzük.

1. 3. Végességi követelmények. Legyen c_0 egy L háló tetszés szerinti eleme, s definiáljuk L-nek egy részláncát a következő módon: a részlánc $\left\{\begin{matrix}\text{legkisebb}\\ \text{legnagyobb}\end{matrix}\right\}$ eleme legyen c_0, egyébként pedig c_k $(k \geqq 1)$ legyen L valamely olyan eleme, amely $\left\{\begin{matrix}\text{nagyobb}\\ \text{kisebb}\end{matrix}\right\}$ c_{k-1}-nél. Ha bármely c_0-ból kiindulva, minden így képezett lánc véges hosszúságú, akkor azt mondjuk, hogy L *eleget tesz a* $\left\{\begin{matrix}\textit{növekvő}\\ \textit{csökkenő}\end{matrix}\right\}$ *láncok végességi követelményének.* Ha egy hálóban mindkét végességi követelmény érvényes, akkor azt mondjuk, hogy *kettős végességi követelménynek tesz eleget.*

1. 4. Félkomplementum, komplementum, relatív komplementum. Legyen L alulról korlátos háló. Az L valamely a elemének *félkomplementum*án értjük az L minden olyan x elemét, amelyre

$$(1) \qquad a \frown x = o.$$

Ha emellett $x \neq o$, akkor x az *a valódi félkomplementuma*. Ha L minden belső elemének van valódi félkomplementuma, akkor L-et *félkomplementumos háló*nak nevezzük.

Legyen ezután L (nemcsak alulról, hanem felülről is) korlátos, s a az L valamely eleme. Ekkor az *a komplementum*án értjük az L minden olyan x

elemét, amely (1) mellett az $a \cup x = i$ egyenletet is kielégíti. Ha L bármely elemének van legalább egy komplementuma, akkor L-et *komplementumos hálónak*, ha pedig L minden elemének pontosan egy komplementuma van, akkor *egyértelműen komplementumos hálónak* nevezzük.

Legyen a, b egy tetszés szerinti L háló olyan elempárja, amelyre $a \leqq b$. Ekkor az $a \leqq r \leqq b$ $(r \in L)$ feltételeknek eleget tevő r elemek halmaza L-nek részhálója, amelyet az a, b elempár által meghatározott *intervallumnak* nevezünk s $[a, b]$-vel jelölünk. Az L valamely s eleméről akkor mondjuk, hogy az r *relatív komplementuma* $[a, b]$*-ben* (vagy: r-nek $[a, b]$-beli relatív komplementuma), ha $r \cap s = a, r \cup s = b$. (Következőleg, $s \in [a, b]$.) Ha L minden egyes a, b, r $(a \leqq r \leqq b)$ elemhármasa esetén van r-nek legalább egy relatív komplementuma $[a, b]$-ben, akkor L-et *relatív komplementumos hálónak* nevezzük.

1.5. A hálók legfontosabb típusai. Egy hálót *disztributívnak* nevezünk, ha bármelyik művelete a másikra nézve disztributív. A komplementumos disztributív hálókat *Boole-algebráknak* szokás nevezni.

Egy hálót *modulárisnak* nevezünk, ha benne $a \leqq c$ esetén minden b-re

(2) $$(a \cup b) \cap c = a \cup (b \cap c).$$

Végül, egy L hálót (CROISOT nyomán, l. [6], 85. o.) *féligmodulárisnak* nevezünk, ha az L minden olyan a, b, c elemhármasához, amelyre

$$b \cap c < a < c < a \cup b,$$

található L-nek legalább egy olyan t eleme, amelyre

$$b \cap c < t \leqq b$$

és

$$(a \cup t) \cap c = a.$$

Megjegyezzük, hogy minden disztributív háló egyszersmind moduláris, s minden moduláris háló egyszersmind féligmoduláris ([1], 134. o.; [6], 84. o.).

2. Komplementum és relatív komplementum korlátos relatív komplementumos hálókban

2.1. Neumann tétele. A komplementumos moduláris hálók elméletének megalapozása és kiépítése terén igen nagy érdemei vannak NEUMANN JÁNOSnak. Az ő nevéhez fűződik, többek között, az alábbi, bár majdnem triviálisan bizonyítható, mégis igen fontos tétel, amelyet — célunknak megfelelően — az eredetitől ([9], 6. o.) eltérő szövegezéssel, de lényegileg változatlanul a következőképpen fogalmazunk meg:

Neumann tétele: *Legyen L komplementumos moduláris háló, r az L tetszés szerinti eleme, a és b pedig az L olyan, egyébként tetszés szerinti elemei, amelyekre*

(3) $$a \leqq r \leqq b$$

teljesül. Akkor, az r akármelyik komplementumát jelöli is t, az

(4) $$s = (a \cup t) \cap b = a \cup (t \cap b)$$

elem az r (egyik) relatív komplementuma $[a, b]$-ben.[1]

Következőleg, minden komplementumos moduláris háló relatív komplementumos.

A dolgozatnak ebben a fejezetében a tétel egy bizonyos értelmű megfordításának problémájával s az így nyert eredmény néhány alkalmazásával foglalkozunk.

2. 2. Neumann tételének megforditása. Mindenekelőtt néhány szót szólunk arról, hogy a tétel milyen értelmű megfordítására gondolunk. A tétel, mint láttuk, komplementumos moduláris hálókra — amelyek természetesen korlátosak és éppen a tétel szerint relatív komplementumosak — kimondja, hogy ha r eleget tesz (3)-nak, t pedig az r komplementuma, akkor minden egyes (4) szerinti s elem az r relatív komplementuma $[a, b]$-ben. Felvetődik a probléma, hogy viszont előáll-e r minden $[a, b]$-beli s relatív komplementuma ezen a módon; azaz, az r bármely $[a, b]$-beli s relatív komplementumához megadható-e az r-nek egy t komplementuma úgy, hogy t kielégítse a (4) egyenletet.

Megmutatjuk, hogy e problémára a válasz igenlő, sőt hogy ez a megfordítás bizonyos nemmoduláris hálókra is érvényes.

Neumann tételének ezt a megfordítását az 1. tétel 1. következménye fogja tartalmazni. Maga a tétel pedig nemcsak a kívánt tulajdonságú t exisztenciáját fogja igazolni, hanem eljárást is ad az összes ilyen t elemek meghatározására. A tétel 2. következménye kevésbé érdekes; inkább csak a 3. tétel előkészítése érdekében fogalmazzuk meg.

1. TÉTEL: *Legyen L korlátos relatív komplementumos háló, a és b az L olyan elemei, amelyekre $a \leqq b$ teljesül, r és s pedig az $[a, b]$ olyan elemei, amelyek egymásnak relatív komplementumai $[a, b]$-ben. Ekkor az*

(5) $$\left\{\begin{array}{l} r \cap t = o \\ r \cup t = i \\ (a \cup t) \cap b = s \\ a \cup (t \cap b) = s \end{array}\right.$$

[1] A (4)-beli két kifejezés egyenlő volta a modularitásból következik; 1. (2). — Félreértések elkerülése végett hangsúlyozni kívánjuk, hogy a „Neumann tétele" kifejezést csak a későbbiek megfogalmazásának könnyítése érdekében használjuk, tehát nem azért, mintha e tétel NEUMANN nagyon értékes munkásságában jelentős helyet foglalna el.

egyenletrendszer t-re nézve megoldható, s a rendszer összes megoldásai előállnak a következő módon: Vesszük

1. *az a összes* $[o, s]$*-beli relatív komplementumainak Y halmazát,*
2. *a b összes* $[s, i]$*-beli relatív komplementumainak Z halmazát,*
3. *végül, minden egyes* y, z $(y \in Y, z \in Z)$ *elempárhoz az s összes* $[y, z]$*-beli relatív komplementumainak (y-tól és z-től függő)* T_{yz} *halmazát.*

Az (5) egyenletrendszer összes megoldásai éppen a $T = \bigcup_{\substack{y \in Y \\ z \in Z}} T_{yz}$ *halmaz elemei.*[2]

1. KÖVETKEZMÉNY (Neumann tételének megfordítása): *Legyen L korlátos relatív komplementumos háló, a, b, r pedig L olyan elemei, amelyekre* $a \leqq r \leqq b$ *teljesül. Akkor az r bármely* $[a, b]$*-beli s relatív komplementumához megadható r-nek legalább egy olyan t komplementuma, amely kielégíti a (4) egyenletet.*[3]

2. KÖVETKEZMÉNY: *A tétel feltevései mellett az (5) egyenletrendszer bármely t megoldása előállítható*

$$t = ((a' \frown s) \smile s') \frown (s \smile b') = (a' \frown s) \smile (s' \frown (s \smile b')) \tag{6}$$

alakban, ahol a', b', s' *rendre az* a, b, s *elemek egy-egy alkalmasan választott komplementumát jelentik.*

A tételnek és következményeinek bizonyítása előtt néhány megjegyzést teszünk.

1. MEGJEGYZÉS: Látjuk, hogy az (5) egyenletrendszer megoldásainak T halmaza csak az a, b, s elemektől függ, r-től azonban független. Ha tehát r_1 és r_2 mindketten az s relatív komplementumai $[a, b]$-ben, akkor az (5)-ből $r = r_1$ és $r = r_2$ helyettesítéssel előálló két egyenletrendszernek pontosan ugyanazok a t elemek a megoldásai; következőleg, ebben az esetben r_1-nek és r_2-nek van (legalább egy) közös komplementuma.

2. MEGJEGYZÉS: A tételben adott eljárás minden egyes t megoldást pontosan egyszer állít elő, mert ha pl. $y_1 \neq y_2$ $(y_1, y_2 \in Y)$, akkor $s \frown t = y_1$ és $s \frown t = y_2$ egyidejűleg L egyetlen t elemére sem teljesülhet.

3. MEGJEGYZÉS: Végül megjegyezzük, hogy a tétel általánosabban is fogalmazható. Ahelyett ugyanis, hogy kikötjük L relatív komplementumos voltát,

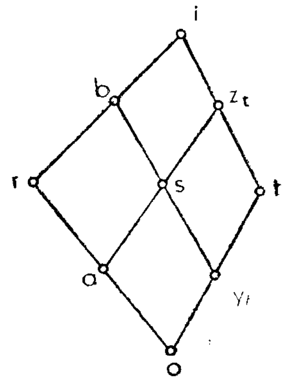
[2] A tételnek egy nagyon speciális esete az [1], 8. fejezet 1. §-ának 2. gyakorlófeladata.

[3] Látjuk, hogy az 1. következmény nem más, mint a tételben szereplő, s a tekintett egyenletrendszer megoldhatóságára vonatkozó részletállítás stiláris átfogalmazása. Hogy mégis külön kimondjuk, annak két oka is van. Egyrészt az 1. következmény állítása önmagában is érdekes, másrészt ezáltal válik világossá a tételnek a Neumann-féle tétellel való kapcsolata.

elegendő feltenni, hogy (az Y és Z halmazok nem üresek s) létezik legalább egy olyan y, z ($y \in Y, z \in Z$) elempár, hogy T_{yz} nem üres.

Ezek után rátérünk a tételnek és következményeinek bizonyítására.

BIZONYÍTÁS: A tétel feltevései miatt az Y, Z, T_{yz} halmazok egyike sem üres. Ha tehát kimutatjuk, hogy a T halmaz elemei valóban kielégítik az (5) egyenletrendszert, akkor ezzel a rendszer megoldhatóságát (tehát az 1. következmény állítását) is bebizonyítottuk. Ennek megfelelően először éppen ezt mutatjuk meg.



Legyen t a T halmaz tetszés szerinti eleme. Ekkor, a T definíciónál fogva, találhatók olyan $y_t (\in Y)$, $z_t (\in Z)$ elemek, amelyekre érvényesek a következő egyenletek:

(7) $\qquad a \cap y_t = o, \quad a \cup y_t = s,$

(8) $\qquad b \cap z_t = s, \quad b \cup z_t = i,$

(9) $\qquad s \cap t = y_t, \quad s \cup t = z_t.$

Továbbá, a tétel feltevései szerint

(10) $\qquad r \cap s = a, \quad r \cup s = b.$

Ezeket felhasználva, egyszerű számolással mutatjuk meg, hogy minden egyes t elem az r komplementuma. Ugyanis

$$r \cap t = (r \cap b) \cap (z_t \cap t) = \qquad [(10)\text{-ből és } (9)\text{-ből}]$$
$$= r \cap (b \cap z_t) \cap t =$$
$$= r \cap s \cap t = (r \cap s) \cap s \cap t = \qquad [(8)\text{-ból}]$$
$$= a \cap s \cap t = \qquad [(10)\text{-ből}]$$
$$= a \cap y_t = o \qquad [(9)\text{-ből és } (7)\text{-ből}],$$

s duálisan $r \cup t = i$.

Továbbá, t kielégíti az (5) egyenletrendszer utolsó két egyenletét is. Ugyanis

$$(a \cup t) \cap b = (a \cup y_t \cup t) \cap b = \qquad [(9)\text{-ből}]$$
$$= (s \cup t) \cap b \qquad [(7)\text{-ből}]$$
$$= z_t \cap b = s \qquad [(9)\text{-ből és } (8)\text{-ból}],$$

s hasonlóan $a \cup (t \cap b) = s$.

Ezzel befejeztük annak kimutatását, hogy a T tetszés szerinti t eleme az (5) egyenletrendszer megoldása.

Fordítva, tegyük fel, hogy t az (5) egyik megoldása. Definiáljunk két elemet, y-t és z-t (L-ben) az

$$y = s \cap t, \quad z = s \cup t$$

egyenletekkel. Ekkor, mindenek előtt, t az s relatív komplementuma $[y, z]$-ben.

Továbbá, figyelembe véve (5) utolsó két egyenletét,

$$y = s \cap t = (a \cup t) \cap b \cap t = b \cap t,$$

$$z = s \cup t = a \cup (t \cap b) \cup t = a \cup t.$$

Előbbiből a tétel feltevései között szereplő $a \leqq b$ és az r definíciójából adódó $a \leqq r$ egyenlőtlenség, valamint (5) első egyenlete miatt

$$a \cap y = a \cap (b \cap t) = (a \cap b) \cap t =$$

$$= a \cap t \leqq r \cap t = o,$$

s ugyanebből, az (5) utolsó egyenlete miatt,

$$a \cup y = a \cup (b \cap t) = s.$$

Duálisan adódik, hogy

$$b \cup z = i, \quad b \cap z = s.$$

Ezek szerint y az a-nak relatív komplementuma $[o, s]$-ben, z pedig a b-nek relatív komplementuma $[s, i]$-ben.

Tehát, az (5) egyenletrendszer tetszés szerinti t megoldása, $y = s \cap t$ és $z = s \cup t$ választással, valóban előáll a tételben leírt módon. Ezzel a tétel bizonyítását befejeztük.

Végül megmutatjuk, hogy a 2. következmény állítása levezethető a tételből. Láttuk, hogy minden egyes, a 2. következmény állításában szereplő t megegyezik a tételben szereplő T halmaz valamelyik elemével. Azonban, ugyancsak a tétel (vagy még egyszerűbben, annak 1. következménye) szerint, Y bármely y, ill. Z bármely z eleme előáll

$$y = o \cup (a' \cap s) = a' \cap s, \tag{11}$$

ill.

$$z = (s \cup b') \cap i = s \cup b' \tag{12}$$

alakban, ahol a', ill. b' az a, ill. b elem alkalmasan választott komplementuma. Ugyanígy, az y, z elemek akármilyen választása esetén is, T_{yz} minden egyes t eleme előáll

$$t = (y \cup s') \cap z = y \cup (s' \cap z) \tag{13}$$

alakban, ahol s' az s alkalmasan választott komplementuma. Látható, hogy a (11)—(13) egyenletek közvetlenül adják a 2. következmény állítását.

2. 3. Alkalmazás moduláris hálókra. A 2. 2. §-ban kapott eredményeket most moduláris hálókra fogjuk alkalmazni. NEUMANN tételéből tudjuk, hogy ebben az esetben a korlátosság és a relatív komplementumosság együtt ekvivalens a komplementumossággal; ezért az előző § eredményei bármely komplementumos moduláris hálóra alkalmazhatók.

Először egyszerű bizonyítást adunk a következő ismert tételre:

2. TÉTEL: *Minden egyértelműen komplementumos moduláris háló disztributív.*

BIZONYÍTÁS: Legyenek a, b, r egy komplementumos moduláris (tehát, NEUMANN tétele szerint egyszersmind relatív komplementumos) L háló olyan, egyébként tetszés szerinti elemei, hogy $a \leqq r \leqq b$. Az 1. tétel 1. következménye és NEUMANN tétele szerint az r elem $[a, b]$-beli s relatív komplementumai éppen az összes $s=(a \cup r') \cap b$ alakú elemek, ahol r' befutja az r összes komplementumait. Ha tehát L egyértelműen komplementumos is, akkor minden egyes r elemének bármely azt tartalmazó $[a, b]$-ben pontosan egy relatív komplementuma van, ez pedig, egy ismert tétel ([1], 134. o.) szerint azt jelenti, hogy L disztributív.

Az 1. tétel 2. kiegészítésével kapcsolatban természetesen vetődik fel a kérdés, milyen további feltételeknek kell a szóban forgó L hálót alávetnünk ahhoz, hogy L minden egyes (6) alakú t eleme az (5) egyenletrendszer megoldása legyen. Következő tételünkben kimutatjuk, hogy ehhez elegendő feltenni L modularitását.

3. TÉTEL: *Legyen L komplementumos háló, a és b az L olyan elemei, amelyekre $a \leqq b$ teljesül, r és s pedig az $[a, b]$ olyan elemei, amelyek egymásnak relatív komplementumai $[a, b]$-ben. Továbbá a', b', ill. s' legyenek az a, b, ill. s elemek tetszés szerinti komplementumai. Ha L moduláris, akkor minden egyes* (6) *alakú t elem az* (5) *egyenletrendszer megoldása (s így, speciálisan, az r komplementuma).*

BIZONYÍTÁS: A bizonyítás, a feltételek felhasználásával, az $r \cup t$, $r \cap t$, $(a \cup t) \cap b$, $a \cup (t \cap b)$ kifejezések értékének közvetlen kiszámítása útján is elvégezhető, az 1. tétel alapján azonban csaknem számolás nélkül adódik az alábbi meggondolással (amely egyébként nem más, mint az 1. tétel 2. következményének bizonyításánál látott gondolatmenet megfordítása).

Feltevésünk szerint az L háló moduláris. De akkor, NEUMANN tételének értelmében, az a', b', s' tetszés szerinti választása esetén is az

$$y = o \cup (a' \cap s) = a' \cap s$$

elem az a relatív komplementuma $[o, s]$-ben, a

$$z = (s \cup b') \cap i = s \cup b'$$

elem a b relatív komplementuma $[s, i]$-ben, s végül a

$$\begin{aligned} t &= ((a' \cap s) \cup s') \cap (s \cup b') = \\ &= (a' \cap s) \cup (s' \cap (s \cup b')) \end{aligned}$$

elem az s relatív komplementuma az $[y, z] = [a' \cap s, s \cup b']$ intervallumban.

Tehát, az 1. tétel figyelembevételével, t valóban az (5) egyenletrendszer megoldása, függetlenül attól, hogy a', b', ill. s' az a, b, ill. s elem melyik komplementumát jelenti.

A komplementumos moduláris hálókra vonatkozóan még egy olyan eredményt akarunk megemlíteni, amely az 1. tételből adódik. Ez az eredmény ugyan NEUMANN tételének és 1. tételünknek egyszerű következménye, tartalmánál fogva azonban — mint a 3. tétel természetes kiegészítése — mégsem érdektelen.

4. TÉTEL: *Legyen L komplementumos moduláris háló, a, b, r pedig az L olyan elemei, amelyekre $a \leqq r \leqq b$ teljesül. Akkor az r bármely t komplementumához található r-nek olyan $[a, b]$-beli s relatív komplementuma, valamint az a, b, s elemeknek egy-egy olyan a', b', s' komplementuma, hogy az a', b', s, s', t elemekre* (6) *teljesül.*

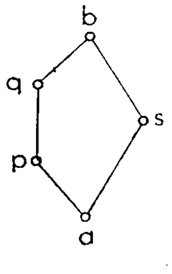
BIZONYÍTÁS: NEUMANN tétele szerint az $(a \cup t) \cap b = a \cup (t \cap b)$ elem r relatív komplementuma $[a, b]$-ben; válasszuk ezt s-nek. Ezzel az s-sel t egy (5) alakú egyenletrendszer megoldása, s így — az 1. tétel 2. következménye szerint — valóban előállítható a 4. tételben kimondott módon.

3. Komplementumos hálók modularitására vonatkozó feltételek

3. 1. Dilworth modularitási tétele. Ismeretes, hogy DEDEKIND ([3], 389. o.) hálók moduláris voltára a következő szükséges és elegendő feltételt adta:

Dedekind tétele: *Egy háló akkor és csak akkor moduláris, ha nincs a*

(14)



hálóval izomorf részhálója.

DEDEKIND tételét kettős végességi követelménynek eleget tevő hálók esetére DILWORTH [4] lényegesen élesítette. Tételének idézése előtt állapodjunk meg a következő elnevezésben: egy korlátos L háló valamely R részhálóját *Dilworth-féle részhálónak* mondjuk, ha R tartalmazza az L korlátelemeit és izomorf (14)-gyel. Ezzel az elnevezéssel DILWORTH tétele a következőképpen hangzik:

Dilworth modularitási tétele: *Kettős végességi követelménynek eleget tevő komplementumos háló akkor és csak akkor moduláris, ha nincs Dilworth-féle részhálója.*

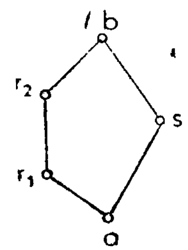
A feltétel szükségessége DEDEKIND tételéből következik; elegendősége viszont hosszas számolást igényel, s az egyes lépések igen lényegesen kihasználják a végességi követelmények fennállását. A következő §-ban tárgyalandó 5. tétel, valamint MCLAUGHLIN-nek e dolgozat lezárása után megjelent eredménye („Atomos komplementumos háló akkor és csak akkor moduláris, ha nincs Dilworth-féle részhálója" ; l. [8]) azonban mutatják, hogy mégsem egy „véges jellegű" tételről van szó.

3.2. Dilworth tételének kiterjesztése relatív komplementumos hálókra. Az előbb mondottaknak megfelelően kimutatjuk, hogy érvényes a következő:

5. TÉTEL: *Korlátos relatív komplementumos háló akkor és csak akkor moduláris, ha nincs Dilworth-féle részhálója.*

BIZONYÍTÁS: A feltétel szükségessége ismét triviálisan következik DEDEKIND tételéből; elegendőségét az 1. tétel alapján bizonyítjuk be.

Ha egy korlátos relatív komplementumos L háló nem moduláris, akkor DEDEKIND tétele szerint van legalább egy



diagramos részhálója. Ebben s-nek r_1 és r_2 is $[a, b]$-beli relatív komplementuma, s így az 1. tétel utáni 1. megjegyzés szerint van olyan t elem, amely r_1-nek és r_2-nek is komplementuma. Következőleg, az o, r_1, r_2, t, i elemek L-nek Dilworth-féle részhálóját képezik. Ezek szerint, ha egy korlátos relatív komplementumos hálónak nincs Dilworth-féle részhálója, akkor az a háló szükségképpen moduláris.

Eredményünket rögtön felhasználjuk arra, hogy bepillantást nyerjünk az egyértelműen komplementumos hálók szerkezetébe. Régebben azt sejtették (l. pl. [2]), hogy minden ilyen háló disztributív; DILWORTH azonban 1945-ben (az [5] dolgozatban) ezt a sejtést megcáfolta, kimutatván, hogy minden háló beágyazható egyértelműen komplementumos hálóba.[4] Másrészt a 2. tétel sze-

[4] Ez az eredmény azért cáfolja meg a sejtést, mert disztributív háló minden részhálója is disztributív.

rint egyértelműen komplementumos moduláris háló disztributív is; tehát az egyértelműen komplementumos hálók két osztályba sorolhatók, úgymint a Boole-algebrák és az egyértelműen komplementumos nemmoduláris hálók osztályába. Az utóbbiak szerkezetének feltárása terén új lépést jelent a

6. TÉTEL: *Egyértelműen komplementumos nemmoduláris háló nem lehet relatív komplementumos.*

BIZONYÍTÁS: A tétel közvetlenül adódik az előző tételből. Ha ugyanis a korlátos L háló nemmoduláris, de relatív komplementumos, akkor az 5. tétel szerint van Dilworth-féle részhálója. Következőleg, L ekkor nem egyértelműen komplementumos.

3. 3. Egy modularitási feltétel. Dilworth modularitási tétele, s ugyancsak az általunk bebizonyított 5. tétel szükséges és elegendő feltételt tartalmaz bizonyos típusú komplementumos hálók modularitására. Most, az említett tételekre támaszkodva, egy további modularitási feltételt adunk.

7. TÉTEL: *Legyen L olyan korlátos háló, amely a következő* (A), (B) *tulajdonságok közül legalább az egyikkel rendelkezik:*

(A) *L atomos és komplementumos;*

(B) *L relatív komplementumos.*

Akkor L moduláris voltának szükséges és elegendő feltétele az, hogy L bármely a, b, c elemhármasára az

$$a \cup c = i \tag{15}$$

$$a \cap c = o \tag{16}$$

$$b \cap c = o \tag{17}$$

egyenletek fennállásából vagy $b \leqq a$, vagy $b \| a$ következzék.

A bizonyításhoz a következő segédtételt bocsátjuk előre:

SEGÉDTÉTEL: *Korlátos L háló csak akkor moduláris, ha bármely a, b, c elemhármasára a* (15), (17) *egyenletek fennállásából vagy $b \leqq a$, vagy $b \| a$ következik.*

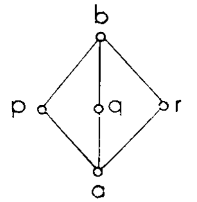
Mert ha egy korlátos hálóban található olyan a, b, c elemhármas, amelyre a (15), (17) egyenletek mellett $b > a$ is teljesül, akkor (15) szerint $b \cup c \geqq$ $\geqq a \cup c = i$, (17) szerint pedig $a \cap c \leqq b \cap c = o$, s így az o, a, b, c, i elemek L-nek Dilworth-féle részhálóját képezik. Következőleg, DEDEKIND modularitási tétele szerint ekkor L nem moduláris.

Rátérünk a 7. tétel bizonyítására. A segédtétel szerint a tételben megadott feltétel szükséges; kimutatjuk, hogy elegendő is. E célból tekintsünk egy olyan korlátos L hálót, amelyben (A), ill. (B) teljesül. Ha L nem moduláris, akkor — (A) teljesülése esetén MCLAUGHLIN [8]-beli fentebb idézett eredménye, (B) teljesülése esetén pedig 5. tételünk szerint — tartalmaz Dilworth-féle részhálót; ennek belső elemeit jelöljük a-, b-, c-vel, mégpedig legyen éppen $o<a<b<i$ és $o<c<i$. A Dilworth-féle részháló definíciójából (l. (14)-et a, b, p, q, s helyett rendre o, i, a, b, c-vel) rögtön látható, hogy erre az a, b, c elemhármasra (15), (16) és (17) teljesül; ennek ellenére $b>a$. Ezzel a feltétel elegendőségét is igazoltuk.

A fentiekből látható, hogy a 7. tételben az (A), ill. (B) tulajdonság bármely olyan (T) tulajdonsággal helyettesíthető, amelyre fennáll az, hogy (T) tulajdonságú komplementumos háló csak akkor moduláris, ha nincs Dilworth-féle részhálója.

4. Véges hosszúságú komplementumos moduláris hálók szerkezetéről

4. 1. A probléma felvetése. Ismeretes ([1], 134. o.), hogy egy moduláris háló akkor és csak akkor disztributív, ha nem tartalmaz a

(18) 

hálóval izomorf részhálót. DEDEKIND és DILWORTH modularitási tételeire viszszagondolva, önként vetődik fel a következő kérdés: nem igaz-e DILWORTH tételének olyan analogonja, hogy kettős végességi követelménynek eleget tevő — vagy, ami moduláris hálók esetén ezzel ekvivalens, véges hosszúságú — komplementumos moduláris háló akkor és csak akkor disztributív, ha nem tartalmaz olyan, a (18)-cal izomorf részhálót, amelyben a-nak a háló legkisebb, b-nek pedig a háló legnagyobb eleme felel meg.

Egyszerű ellenpélda meggyőz arról, hogy az állítás „akkor" része általában nem igaz. Tekintsünk például egy ε projektív síkot, s az ε összes lineáris altereinek tartalmazás szerint rendezett (moduláris, de nem disztributív) E hálóját, az üres halmazt is E-hez számítva. Könnyű látni, hogy E-ben nincs olyan (18)-cal izomorf részháló, amely E mindkét korlátelemét tartalmazná. (A p, q, r elemek helyébe ugyanis az ε bizonyos pontjait, illetve egyeneseit kellene helyettesíteni; de akkor a p, q, r elemek között

1. vagy két pontnak kellene előfordulnia, amikor is ezek E-beli egyesítettje az ε-nak egy egyenese, nem pedig maga az ε,

2. vagy két egyenesnek kellene előfordulnia, amikor is ezek E-beli metszete az ε-nak egy pontja, nem pedig az üres halmaz.)

A háromdimenziós projektív tér összes lineáris altereinek hálójában viszont — amely ugyancsak moduláris, de nem disztributív — már vannak olyan (18) diagramos részhálók, amelyekben $a = o$ és $b = i$: ilyet alkot, az üres halmaz és a teljes tér hozzávételével, bármely három páronként kitérő egyenes.

Felvetjük tehát a következő problémát: mi a szükséges és elegendő feltétele annak, hogy egy véges hosszúságú komplementumos nemdisztributív moduláris hálónak legyen olyan (18) diagramos részhálója, amelyben $a = o$ és $b = i$. A fenti két példa alapján várható, hogy ez a feltétel kapcsolatban lesz a háló hosszúságával.

4. 2. Előkészületek. Már a felvetett probléma megoldását tartalmazó tételünk megfogalmazásához is szükségünk van a komplementumos moduláris hálók elméletében ismeretes bizonyos eredmények idézésére. A tárgyalás folyamatossága érdekében egyszersmind a bizonyításban alkalmazásra kerülő eredményeket is már most ismertetjük. Mindezeket az eredményeket segédtételek formájában fogalmazzuk meg.

Mindenek előtt két segédtételt mondunk ki a véges hosszúságú komplementumos moduláris hálók szerkezetéről:

1. SEGÉDTÉTEL: *Bármely véges hosszúságú komplementumos moduláris L háló egyértelműen előállítható egy P_0 Boole-algebra és véges számú $P_1, \ldots, P_t$ egyszerű*[5] *komplementumos nemdisztributív moduláris háló*

$$L = P_0 \quad P_1 \quad \cdots \quad P_t \qquad (t \text{ véges}) \tag{19}$$

direkt összetételeként.[6]

2. SEGÉDTÉTEL: *Véges hosszúságú komplementumos nemdisztributív moduláris háló akkor és csak akkor egyszerű, ha bármely p, q $(p \neq q)$ pontpárjához található legalább egy olyan $r (\neq p, q)$ további pont, hogy $r < p \cup q$.*

Az 1. segédtétel abból következik, hogy ([1], 120. o., Lemma 2 és Theorem 6) minden véges hosszúságú komplementumos moduláris háló egyértelműen előállítható egyszerű (véges hosszúságú) komplementumos moduláris hálók direkt összetételeként; a segédtételbeli P_0 a disztributív komponensek direkt összetétele. A 2. segédtételre nézve l. [7], 89. o.

3. SEGÉDTÉTEL ([1], 67. o.): *Legyen L véges hossúságú moduláris háló, s $d(x)$ $(x \in L)$ jelentse az x elem magasságát L-ben. A $d(x)$ függvény értéke akkor és csak akkor 0, ha $x = o$; továbbá, L bármely a, b elempárjára*

$$d(a \cup b) + d(a \cap b) = d(a) + d(b). \tag{20}$$

[5] Egy L hálót *egyszerűnek* nevezünk, ha minden egyes homomorf képe vagy egyelemű háló vagy magával L-lel izomorf.

[6] Természetesen akár a P_0, akár az összes P_k $(k = 1, \ldots, t)$ hálók lehetnek egyelemű hálók is; ez utóbbi esetben — és csak akkor — L disztributív.

DEFINÍCIÓ ([7], 104. o.): *Alulról korlátos moduláris háló valamely* $\{p_1, \ldots, p_m\}$ *(m véges) ponthalmazát függetlennek (s a* $p_1, \ldots, p_m$ *pontokat egymástól függetleneknek) nevezzük, ha*[7] $(\bigcup_{k=1}^{l} p_k) \cap p_{l+1} = o$ $(l = 1, \ldots, m-1)$.

Kimutatható ([1], 104. o.), hogy e definíció — formája ellenére — a pontok adott sorrendjétől független; ebből következik, hogy *független ponthalmaz minden részhalmaza is független.*

4. SEGÉDTÉTEL: *Alulról korlátos moduláris L háló pontjainak bármely* $\{p_1, \ldots, p_m\}$ *halmazára* $d(p_1 \cup \cdots \cup p_m) \leqq m$, *s egyenlőség pontosan akkor áll, ha a* $\{p_1, \ldots, p_m\}$ *ponthalmaz független.*

Az $m = 2$ esetben a 4. segédtétel triviális, az $m > 2$ esetre pedig teljes indukcióval igazolható a következőképpen. Feltesszük, hogy a 4. segédtétel minden legfeljebb $m-1$ elemből álló ponthalmazra igaz. Ekkor a 3. segédtételbeli (20) folytán

$$(21) \quad d(p_1 \cup \cdots \cup p_m) = d(p_1 \cup \cdots \cup p_{m-1}) + d(p_m) - d((p_1 \cup \cdots \cup p_{m-1}) \cap p_m).$$

Az indukciófeltevés miatt (21) jobboldala mindig kisebb vagy egyenlő mint $(m-1) + 1 - 0 = m$. Speciálisan, $\{p_1, \ldots, p_m\}$ akkor és csak akkor független, ha $\{p_1, \ldots, p_{m-1}\}$ független és $(p_1 \cup \cdots \cup p_{m+1}) \cap p_m = o$, vagyis ha (21) jobboldala éppen egyenlő $(m-1) + 1 - 0 = m$-mel.

A 4. segédtételből rögtön következik, hogy m-hosszúságú moduláris háló pontjaiból akkor és csak akkor választható ki m-elemű független ponthalmaz, ha a háló legnagyobb eleme előállítható pontok egyesítettjeként. Mivel komplementumos moduláris hálók esetén ez mindig lehetséges ([1], 105. o. Theorem 6), ezért érvényes az

5. SEGÉDTÉTEL: *Ha az L komplementumos moduláris háló hossza m (ahol m véges), akkor L legnagyobb eleme előállítható m számú egymástól független pont egyesítettjeként.*

4.3. A tétel és bizonyítása. Most már megfogalmazhatjuk a 4.1 végén felvetett probléma megoldását.

8. TÉTEL: *Véges hosszúságú komplementumos moduláris L háló akkor és csak akkor tartalmaz olyan* (18) *diagramos részhálót, amelynek legkisebb eleme az L legkisebb elemével, legnagyobb eleme pedig az L legnagyobb elemével egyezik meg, ha a* (19) *szerinti direkt felbontásában* P_0 *az egyelemű háló, s minden egyes* P_k $(k = 1, \ldots, t)$ *hosszúsága páros.*

[7] Az $\bigcup_{k=1}^{l}$ szimbólum jelentése: $\bigcup_{k=1}^{l} p_k = p_1 \cup \cdots \cup p_l$.

BIZONYÍTÁS: Az 1. segédtétel szerinti felbontásnak megfelelően az L tetszés szerinti a, b, c elemei reprezentálhatók

$$(22) \qquad \left.\begin{aligned} a &= (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_t) \\ b &= (\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_t) \\ c &= (\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_t) \end{aligned}\right\} \qquad (\alpha_k, \beta_k, \gamma_k \in P_k;\ k = 0, 1, \ldots, t)$$

alakban. Továbbá, ha ω_k és ι_k jelenti a P_k $(k=0, 1, \ldots, t)$ legkisebb, ill. legnagyobb elemét, akkor az

$$(23) \qquad a \frown b = b \frown c = c \frown a = o$$

$$(24) \qquad a \smile b = b \smile c = c \smile a = i$$

egyenletek az a, b, c elemekre akkor és csak akkor teljesülnek, ha az a, b, c elemek (22) szerinti komponenseire fennállnak az

$$(25) \qquad \alpha_k \frown \beta_k = \beta_k \frown \gamma_k = \gamma_k \frown \alpha_k = \omega_k$$

$$(26) \qquad \alpha_k \smile \beta_k = \beta_k \smile \gamma_k = \gamma_k \smile \alpha_k = \iota_k$$

egyenletek.

A fentiekre támaszkodva, először azt mutatjuk meg, hogy a tételben felsorolt feltételek szükségesek. Ebből a célból tegyük fel, hogy L-nek van olyan a, b, c elemhármasa, amely eleget tesz a (23)—(24) egyenleteknek, s így ezeknek az elemeknek komponensei eleget tesznek (25)—(26)-nak.

Ebben az esetben a P_0 disztributív háló $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ elemei egymásnak páronkénti komplementumai. Disztributív háló minden elemének azonban legfeljebb egy komplementuma lehet ([1], 134. o.). Ezért $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ nem lehetnek mind különbözők; nyilván az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy éppen $\alpha_0 = \beta_0$. Ebből azonban, (25)—(26) miatt,

$$\omega_0 = \alpha_0 \frown \beta_0 = \alpha_0 \frown \alpha_0 = \alpha_0 = \alpha_0 \smile \alpha_0 = \alpha_0 \smile \beta_0 = \iota_0$$

következik; ez pedig éppen azt jelenti, hogy P_0 valóban egyetlen elemből áll.

Tekintsük ezután a P_k $(k=1, \ldots, t)$ komplementumos moduláris hálókat. A P_k-ban $d(\xi_k)$-val jelölve a $\xi_k (\in P_k)$ elem magasságát, a 3. segédtétel, valamint (25) és (26) miatt,

$$\left.\begin{aligned} d(\alpha_k) + d(\beta_k) &= d(\iota_k) + d(\omega_k) = d(\iota_k) \\ d(\beta_k) + d(\gamma_k) &= d(\iota_k) + d(\omega_k) = d(\iota_k) \\ d(\gamma_k) + d(\alpha_k) &= d(\iota_k) + d(\omega_k) = d(\iota_k) \end{aligned}\right\} \qquad (k=1, \ldots, t).$$

Összeadva ezeket az egyenleteket, azt kapjuk, hogy

$$2(d(\alpha_k) + d(\beta_k) + d(\gamma_k)) = 3d(\iota_k) \qquad (k=1, \ldots, t).$$

Mivel pedig az utóbbi egyenlet baloldalán páros szám áll, ezért a jobboldalán is párosnak kell állnia; azaz, $d(\iota_k)$-nak (minden k-ra) oszthatónak kell lennie 2-vel.

A feltételek szükségességének bizonyításával tehát készen vagyunk.

A feltételek elegendőségének bizonyításához, a (23)—(24) és (25)—(26) egyenletrendszerek ekvivalenciája miatt, csak azt kell megmutatnunk, hogy *ha egy komplementumos nemdisztributív moduláris P háló páros* ($\neq 0$) *hosszúságú és egyszerű, akkor P-ben találhatók olyan* a, b, c *elemek, amelyek kielégítik a* (23)—(24) *egyenleteket.* (Mivel P nem az egyelemű háló, ezért a (23)—(24) teljesülése esetén a, b, c máris mind különbözők.)

Ennek megfelelően legyen P olyan háló, amelynek megvannak az összes most felsorolt tulajdonságai. Jelöljük a P hosszúságát (annak kifejezésére, hogy ez kikötéseink szerint páros szám) $2n$-nel, ahol $n>0$ és egész. Ekkor, $d(x)$-szel jelölve az $x(\in P)$ elem magasságát,

$$d(i)=2n. \tag{27}$$

Az 5. segédtétel szerint tehát i előállítható

$$(\bigcup_{k=1}^{n} p_k)\cup(\bigcup_{k=1}^{n} q_k)=i \tag{28}$$

alakban, ahol $\{p_1,\ldots,p_n,q_1,\ldots,q_n\}$ a P valamely független ponthalmaza.

Válasszuk a-nak, ill. b-nek az

$$a=\bigcup_{k=1}^{n} p_k \tag{29}$$

$$b=\bigcup_{k=1}^{n} q_k \tag{30}$$

elemet; ekkor, (28) szerint, máris

$$a\cup b=i. \tag{31}$$

Ugyanakkor, a 3. segédtételben foglalt (20) egyenlet, továbbá (31) szerint

$$d(a\cap b)=d(a)+d(b)-d(a\cup b)=$$
$$=d(a)+d(b)-d(i).$$

Azonban, a 4. segédtétel és (27) szerint

$$d(a)+d(b)-d(i)=n+n-2n=0.$$

Utolsó két egyenletünkből $d(a\cap b)=0$, azaz — a 3. segédtétel első állítása folytán —

$$a\cap b=o. \tag{32}$$

Tekintsük ezután P összes $e_k=p_k\cup q_k$ $(k=1,\ldots,n)$ alakú elemeit. A P egyszerűsége folytán, a 2. segédtétel értelmében, minden egyes e_k-hoz van legalább egy olyan $r_k(\neq p_k, q_k)$ pont, hogy $r_k\leqq p_k\cup q_k$. Mivel egyrészt a 4. segédtétel szerint $d(p_k\cup q_k)=d(q_k\cup r_k)=d(r_k\cup p_k)$, másrészt $r_k\leqq p_k\cup q_k$ miatt $q_k\cup r_k$, $r_k\cup p_k\leqq p_k\cup q_k$, ezért

$$e_k=p_k\cup q_k=q_k\cup r_k=r_k\cup p_k \qquad (k=1,\ldots,n). \tag{33}$$

Definiáljuk ezután c-t a következőképpen:

(34) $$c = \bigcup_{k=1}^{n} r_k.$$

Ekkor a (29), (34) és (33) egyenletek szerint,

$$a \cup c \geqq p_k \cup r_k = e_k > q_k \qquad (k = 1, \ldots, n).$$

Ebből és (30)-ból, valamint (31)-ből

(35) $$a \cup c = a \cup (a \cup c) \geqq a \cup (\bigcup_{k=1}^{n} q_k) = a \cup b = i.$$

Másrészt, a $d(a \frown b)$ kiszámításakor már alkalmazott gondolatmenettel, (35)-öt is felhasználva,

$$\begin{aligned} d(a \frown c) &= d(a) + d(c) - d(a \cup c) = \\ &= d(a) + d(c) - d(i) \leqq \\ &\leqq n + n - 2n = 0, \end{aligned}$$

ahonnan

(36) $$a \frown c = o.$$

Végül, az a és b elemek szimmetrikus szerepe miatt, az előbbi meggondolásokkal

(37) $$b \cup c = i,$$

(38) $$b \frown c = o$$

is adódik. De (31), (32), valamint (35)—(38) szerint az o, a, b, c, i elemek L-nek (18) diagramos részhálóját képezik.

Ezzel a tétel bizonyítását befejeztük.

4. 4. A tétel projektív geometriai kapcsolatai. A komplementumos moduláris hálók elmélete kapcsolatban áll a projektív terek elméletével: számos projektív geometriai tételnek megvan a hálóelméleti megfelelője, s a komplementumos moduláris hálókra vonatkozó egyes tételekből érdekes projektív geometriai eredmények is adódnak.

A 8. tétel projektív geometriai megfelelőjét igen könnyen megfogalmazhatjuk. Legyen $\mathfrak{P}$ az n-dimenziós valós projektív tér, P pedig a $\mathfrak{P}$ összes lineáris altereinek tartalmazás szerint rendezett hálója (az üres halmazt is a lineáris alterek közé számítva). Ekkor a P egy $(n+1)$-hosszúságú komplementumos moduláris háló. Nevezzük a $\mathfrak{P}$ két $\mathfrak{X}$ és $\mathfrak{Y}$ lineáris alterét a $\mathfrak{P}$ *független generátorpárjának*, ha e két altér közös elem nélküli s együtt kifeszíti a $\mathfrak{P}$ teret. Ekkor a 8. tételből azonnal következik, hogy *a $\mathfrak{P}$ projektív térben akkor és csak akkor találhatók olyan $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ lineáris alterek, melyek közül bármely kettő a $\mathfrak{P}$-nek független generátorpárját alkotja, ha n páratlan.* (A tétel tehát, speciális esetként, magában foglalja a 4. 1 végén, a problémafelvetés előtt tárgyalt példákat.) A tétel bizonyítását megfigyelve, az is kiderül, hogy ekkor végtelen sok ilyen tulajdonságú altérhármas létezik.

A most kimondott projektív geometriai állítás természetesen tisztán projektív geometriai (illetőleg lineáris algebrai) módszerekkel is bebizonyítható, mégpedig éppen a 8. tétel bizonyításánál látott gondolatmenettel. Ez azonban nem meglepő, mert hiszen a tárgyalt bizonyítás maga is egy projektív geometriai gondolat általánosítása. Legyen ugyanis $\mathfrak{P}_3$ a háromdimenziós projektív tér, s e, f a $\mathfrak{P}_3$ két kitérő egyenese. Ekkor egy olyan g egyenes, amely mind az e-hez, mind az f-hez képest kitérő, meghatározható úgy, hogy először kijelölünk két-két pontot, E_1, E_2-t és F_1, F_2-t az e, ill. f egyenesen, s ezután g-nek vesszük az $E_k F_k$ $(k=1,2)$ egyenesek valamely $G_k (\neq E_k, F_k)$ pontjainak összekötő egyenesét.

5. Félkomplementum és komplementum féligmoduláris hálókban

5. 1. Féligmoduláris háló maximális félkomplementumairól. DEDEKIND tételét korlátos moduláris hálókra alkalmazva azonnal adódik, hogy egy ilyen háló egyetlen elemének sem lehet két különböző összehasonlítható komplementuma. Ennek alapján pedig már triviális, hogy ha r egy korlátos moduláris háló tetszés szerinti eleme s t az r valamely komplementuma, akkor r-nek nincs t-nél nagyobb félkomplementuma sem.

Általában, alulról korlátos K háló esetén valamely $r(\in K)$ elem *maximális félkomplementumán* az r olyan m félkomplementumát fogjuk érteni, amelyre az $r \frown f = o$, $f \geqq m$ feltételekből $f = m$ következik (azaz, amelynél nagyobb félkomplementuma nincs r-nek). Ha egy ilyen $m \neq o$, akkor ezt az elemet az r *maximális valódi félkomplementumának* fogjuk nevezni.

Ezzel az elnevezéssel fentebbi megjegyzésünket így fogalmazhatjuk: *Korlátos moduláris háló bármely elemének összes komplementumai egyszersmind az illető elem maximális félkomplementumai.*[8]

Kimutatjuk, hogy a félkomplementumosság kikötése mellett az állítás megfordítása is érvényes, mégpedig nemcsak moduláris, hanem féligmoduláris hálókra is:

9. TÉTEL: *Ha egy féligmoduláris félkomplementumos L háló valamely r elemének van m maximális valódi félkomplementuma, akkor L-nek van legnagyobb eleme és m az r komplementuma.*

[8] Az állítás általában már féligmoduláris hálókra sem érvényes, mert hiszen korlátos féligmoduláris hálóban lehet olyan elem, amelynek van két összehasonlítható komplementuma (gondoljunk pl. az affin tér esetére vagy DILWORTH modularitási tételére és az 5. tételre), s ezek közül a kisebbik mint félkomplementum sem maximális.

KÖVETKEZMÉNY: *Ha egy féligmoduláris háló mindegyik belső elemének van maximális valódi félkomplementuma, akkor a hálónak van legnagyobb eleme s a háló komplementumos.*

BIZONYÍTÁS: Mindenekelőtt megjegyezzük, hogy a következmény a tételből triviálisan adódik, tehát csak magával a tétellel kell foglalkoznunk.

A tétel bizonyítása céljából tekintsünk egy féligmoduláris félkomplementumos L hálót, s ennek tetszés szerinti r elemét. Mivel $r=o$-ra és $r=i$-re (amennyiben i létezik) az állítás nyilvánvalóan igaz, ezért a továbbiakban feltehetjük, hogy $r\in\mathfrak{J}(L)$. (Az $\mathfrak{J}(L)$ jelentését illetőleg 1.1-re utalunk.)

Ezek után világos, hogy elegendő megmutatni a következőt: *Ha* $r\in\mathfrak{J}(L)$, *és* f *az* L *olyan eleme, hogy*

(39) $$r\cap f=o \quad \text{és} \quad f\neq o,$$

továbbá

(40) $$r\cup f\in\mathfrak{J}(L),$$

akkor r*-nek van* f*-nél nagyobb félkomplementuma.* Ennek megfelelően tegyük fel, hogy az r, f elemekre (39) és (40) teljesül s vezessük be az

(41) $$r\cup f=d$$

jelölést. (40) és az L félkomplementumos volta miatt d-nek van valamely x valódi félkomplementuma, s a (41)-ből leolvasható $f\leqq d$ miatt $x\cap f\leqq x\cap d=o$. Ezek szerint

(42) $$x\cap f=x\cap d=o \quad \text{és} \quad x\neq o.$$

Biyonyitandó állításunkat most a következő két részletállításra bontjuk fel:

1. *Ha az* L *valamely* z *eleme eleget tesz az*

(43) $$o<z\leqq x$$

(44) $$(z\cup f)\cap d=f$$

feltételeknek, akkor $z\cup f>f$, *és* $z\cup f$ *az* r*-nek (valódi) félkomplementuma;*

2. *Ha* r, f, d *és* x *eleget tesznek a* (39)—(42) *feltételeknek, akkor megadható* L*-nek olyan* z *eleme, amely kielégíti a* (43), (44) *feltételeket.*

Látjuk, hogy e két állítás együtt éppen a fentebb megfogalmazott, bizonyítandó állítást adja.

AZ 1. BIZONYÍTÁSA: Először azt mutatjuk meg, hogy $z\cup f$ az r félkomplementuma:

$$\begin{aligned} r\cap(z\cup f) &= (r\cap d)\cap(z\cup f) = && \text{[(41)-ből]} \\ &= r\cap(d\cap(z\cup f)) = && \\ &= r\cap f=o && \text{[(44)-ből és (39)-ből].} \end{aligned}$$

Továbbá

$$z\frown f\leqq x\frown f=o<z \qquad [(43)\text{-ból és }(42)\text{-ből}];$$

márpedig $z\frown f<z$, mint tudjuk, ekvivalens $z\smile f>f$-fel.

A 2. BIZONYÍTÁSA: Vezessük be a következő jelölést:

(45) $$(x\smile f)\frown d=v.$$

Ekkor (41) szerint

$$v=(x\smile f)\frown d\geqq f\frown f=f,$$

azaz $v\geqq f$.

Ha $v=f$, akkor a v elem (45)-ben adott definíciója folytán

$$(x\smile f)\frown d=f,$$

tehát $z=x$ helyettesítéssel (44) máris teljesül. De teljesül ekkor (43) is, mert (42) szerint $o<x(\leqq x)$.

Hátra van az az eset, amikor $v>f$. Kimutatjuk, hogy ekkor

(46) $$x\frown v<f<v<x\smile f.$$

Valóban,

$$x\frown v=x\frown(x\smile f)\frown d= \qquad [(45)\text{-ből}]$$

$$=x\frown d=o<f \qquad [(42)\text{-ből és }(39)\text{-ből}]$$

és

$$x\smile f\geqq(x\smile f)\frown d=v \qquad [(45)\text{-ből}],$$

de $x\smile f=v$ lehetetlen, mert belőle ismét (45) szerint

$$x\leqq x\smile f=v=(x\smile f)\frown d\leqq d,$$

azaz $x\frown d=x$ következnék, s ez ellentmondás (42)-vel.

Most használjuk ki azt, hogy L féligmoduláris. Az 1.5-ben ismertetett definíció szerint (46) fennállása maga után vonja olyan $t(\in L)$ elem létezését, amelyre

(47) $$x\frown v<t\leqq x$$

és

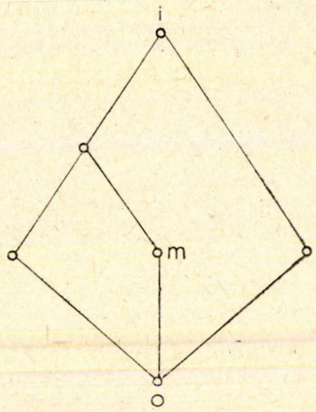
$$f=(f\smile t)\frown v.$$

Az előbbiből $t\smile f\leqq x\smile f$, s ebből tovább, az utóbbi és (45) miatt,

(48) $$f=(t\smile f)\frown v=(t\smile f)\frown(x\smile f)\frown d=$$
$$=(t\smile f)\frown d.$$

Végeredményben, (47) és (48) szerint $z=t$-re (43) és (44) is teljesül. Eszerint a 2. részletállítást is bebizonyítottuk.

Tételünkhöz és ennek következményéhez egy-egy megjegyzést fűzünk. Először is, nem féligmoduláris hálókra az állítás már nem érvényes. Így például, az



hálóban m az r maximális félkomplementuma, s mégsem komplementuma.

A következménnyel kapcsolatban azt jegyezzük meg, hogy egy r elem maximális valódi félkomplementumának létezéséhez — azon a triviális követelményen túl, hogy r-nek egyáltalán legyen valódi félkomplementuma — elegendő például, hogy a háló eleget tegyen a növekvő láncok végességi követelményének (speciálisan, hogy véges hosszúságú legyen) vagy az ún. általános metszet-disztributivitásnak.[9] A következmény tehát speciális esetként magában foglalja a [11] dolgozat 2. és 3. tételét.

5. 2. A féligmoduláris hálók egy speciális osztályáról. Ebben a §-ban olyan végtelen hosszúságú féligmoduláris hálókról lesz szó, amelyeknek összes belső elemei véges magasságúak. (Ez a típus a véges hosszúságú hálók legközvetlenebb általánosítása.) Ezekre a hálókra a 9. tétel alapján bebizonyítjuk a következőt:

10. TÉTEL: *Legyen L olyan félkomplementumos féligmoduláris háló, amelynek összes belső elemei véges magasságúak. Ha L hosszúsága végtelen, akkor minden egyes r belső eleméhez és bármely K pozitív egész számhoz megadható r-nek olyan félkomplementuma, amelynek magassága K-nál nagyobb.*

[9] Ez utóbbi fogalmat ([6], 78. o. nyomán) a következőképpen definiáljuk. Legyen $H=\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ az L háló tetszés szerinti számosságú részhalmaza, s $\bigcup_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$ jelentse a H-nak L-beli legkisebb felső korlátját, feltéve hogy ez létezik. (Ha H véges, akkor ez a definíció megegyezik a 6. lábjegyzetben adottal.) Az L hálóról akkor mondjuk, hogy eleget tesz az *általános metszet-disztributivitásnak*, ha minden $M=\{b_\delta\}_{\delta\in\Delta}$ részhalmazára és bármely a elemére az $a\cap(\bigcup_{\delta\in\Delta} b_\delta)$ és $\bigcup_{\delta\in\Delta}(a\cap b_\delta)$ kifejezések léteznek és egymással egyenlők.

Következőleg: A tétel feltételeinek teljesülése esetén az r belső elem összes félkomplementumainak magasságai a pozitív egész számok halmazát kitöltik.

Bizonyítás: Mindenekelőtt rámutatunk arra, hogy a tétel feltevéseinek eleget tevő L háló egyetlen belső elemének sincs komplementuma: ugyanis, mint azt a szerző egy régebbi dolgozatában ([12], 243. o.) megmutatta, két véges magasságú elem egyesítettje is véges magasságú.

Az előző bekezdésben elmondottakból azonban, a 9. tétel szerint, az következik, hogy az r belső elemnek maximális (valódi) félkomplementuma sincs. Eszerint az r akármelyik valódi m_1 félkomplementumából kiindulva, található L-ben olyan

$$o < m_1 < m_2 < \cdots < m_K < m_{K+1} < \cdots \tag{49}$$

végtelen növekvő lánc, amelynek minden egyes eleme r-nek félkomplementuma. Mivel a (49)-beli m_{K+1} elem magassága mindenesetre K-nál nagyobb, ezért a tétel állítása helyes.

A tétel utáni megjegyzés helyessége a tétel állításából és abból a nyilvánvaló tényből következik, hogy ha L valamely f eleme az r félkomplementuma, akkor minden f-nél kisebb elem is az r félkomplementuma.

IRODALOM

[1] G. Birkhoff: *Lattice theory,* Amer. Math. Soc. Coll. Publ., vol. **25**, revised edition, New York, 1948.

[2] G. Birkhoff—M. Ward: A characterization of Boolean algebras, *Annals of Math.*, **40** (1939) 609—610.

[3] R. Dedekind: Über die von drei Moduln erzeugte Dualgruppe, *Math. Annalen,* **53** (1900) 371—403.

[4] R. P. Dilworth: On complemented lattices, *Tôhoku Math. Journal,* **47** (1940) 18—23.

[5] R. P. Dilworth: Lattices with unique complements, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **57** (1945) 123—154.

[6] M. L. Dubreil-Jacotin—L. Lesieur—R. Croisot: *Leçons sur la théorie des treillis, des structures algébriques ordonnées et des treillis géométriques,* Cahiers scientifiques, vol. **21**, Paris, 1953.

[7] H. Hermes: *Einführung in die Verbandstheorie,* Die Grundlehren der math. Wiss. in Einzeldarst., Bd. **73**, Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1955.

[8] J. E. McLaughlin: Atomic lattices with unique comparable complements, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **7** (1956) 864—866.

[9] J. Neumann: *Lectures on continuous geometries,* Princeton, 1936—37.

[10] Rédei L.: *Algebra I.*, Budapest, 1954.

[11] G. Szász: Dense and semi-complemented lattices, *Nieuw Archief voor Wiskunde,* (3), **1** (1953) 42—44.

[12] G. Szász: On the structure of semi-modular lattices of infinite length, *Acta Sci. Math.*, **14** (1951—52) 239—245.

(Beérkezett: 1957. XI. 1.)

STANDARD IDEÁLOK

Írta: GRÄTZER GYÖRGY

1. §. Bevezetés

E dolgozat célkitűzése a hálóideálok egy speciális osztályának, a standard ideáloknak definiálása és részletes vizsgálata. A standard ideál fogalmának szükségességét két körülmény is indokolja.

E fogalom bevezetéséhez első útként az a törekvés szolgálhat, amely a hálók ideálelméletét a gyűrűk ideáljainak (csoportok normálosztóinak) szerepéhez hasonlóan kívánja kidolgozni. Itt elsősorban arra gondolunk, hogy minden gyűrű ideál egy és csak egy homomorfizmus magja, továbbá az ideálok kielégítik az ismert izomorfia tételeket, a Zassenhaus lemmát és a Jordan—Hölder—Schreier tételt. Könnyű látni azonban, hogy hálók körében a szokásos ideálfogalommal általában egyik előbbi tétel sem marad érvényben.

A fenti kérdések közül a hálóelméleti ideálfogalomnak a homomorfizmusmagokkal létesíthető kapcsolatát SCHMIDT E. TAMÁSsal együtt írt [3] és [4] dolgozatunkban vizsgáltuk. Más fontos feladat ezek után az izomorfia tételek és a Jordan—Hölder—Schreier—Zassenhaus tétel érvényességének vizsgálata. E tételek mind bizonyos faktorstruktúrákra vonatkozó állítások, s ezek analogonjait hálók körében keresve mindenekelőtt szükséges a faktorháló alkalmas definiálása. Az L/I faktorhálón az L háló egy olyan homomorfizmusa által létrehozott homomorf képét kell értenünk, amely homomorfizmusnak magja az I ideál. Azonban ha az I ideállal képezhető is az L/I faktorháló, ez általában nem lesz egyértelmű. Két kézenfekvő megállapodás lehetséges: az I magú homomorfizmusok közül a legkisebb, ill. a legnagyobb kitüntetése L/I egyértelmű értelmezésénél.[1] K. SHODA [8] cikkében kimutatta, hogy az utóbbi definíciót véve alapul, érvényesek maradnak az előbb felsorolt tételek. Azonban már J. HASHIMOTO is rámutatott [5] dolgozatában arra, hogy

[1] Legyenek φ_1 és φ_2 L homomorfizmusai és Θ_1, ill. Θ_2 a megfelelő homomorfizmusokat indukáló kongruenciareláció. Akkor mondjuk, hogy $\varphi_1 \leqq \varphi_2$, ha $\Theta_1 \leqq \Theta_2$ a szokásos értelemben. Arra nézve, hogy az I maggal rendelkező homomorfizmusok között létezik legkisebb, utalunk G. BIRKHOFF [1]-re, s a legnagyobb létezésének bizonyítása sem okoz nagy problémát.

ez hálók esetében nem jelent túl sokat, hiszen pl. láncoknál csak a kételemű homomorf képeket veszi tekintetbe. Ezért a továbbiakban

az L/I faktorhálón az L háló I magú legkisebb homomorfizmusa szerinti faktorhálóját értjük.

Disztributív hálóban — a faktorháló ilyen definíciójával — könnyűszerrel nyerhető, hogy az ideálokra érvényesek a fentebb említett tételek. J. HASHIMOTO [5] dolgozatában bebizonyította, hogy ezen a módon a hálóelméletben jól ismert neutrális ideálokra[2] is igaz tételek nyerhetők. Könnyű azonban példát konstruálni arra, hogy nem minden olyan ideálosztály, amelyben érvényesek az előbb említett tételek, szükségképpen a neutrális ideálok osztálya. Egy általános ideálosztályt, amelyben igazak a fenti tételek és amely tartalmazza a neutrális ideálok osztályát, szolgáltatnak a standard ideálok.

Következőkben vázoljuk a standard ideál fogalom szükségességének másik okát. R. P. DILWORTH [2] munkájában kezdte meg a relatív komplementumos hálók strukturális vizsgálatát. Egyik fő észrevétele az volt, hogy a véges hosszúságú, komplementumos, moduláris hálók elméletéből ismeretes G. BIRKHOFFtól és K. MENGERtől származó alaptétel érvényes a véges relatív komplementumos hálók körében. Ezen általánosítási törekvés azóta sok más szerzőnél is megtalálható. Kézenfekvő tehát a relatív komplementumos hálók körébe kiterjeszteni azokat a tételeket, amelyek komplementumos, moduláris hálók neutrális ideáljaira vonatkoznak (lásd. pl. BIRKHOFF [1] 125. old. és SHIH—CHIANG WANG [9]). Ez esetben azonban a tételek szó szerinti átvitele nem vezet helyes eredményre, főleg ha olyan 0 elemes hálókat tekintünk, ahol csak a $[0, a]$ intervallumok komplementumosságát tesszük fel. Tehát itt is egy olyan új ideálosztály bevezetésére van szükség, melynek segítségével átmenthetők az előbb említett tételek, s amely ideálosztály moduláris hálók körében megegyezik a neutrális ideálokkal. Ezt a célt ismét a standard ideálok segítségével érjük el.

A dolgozat 2. §-ában nyújtjuk a standard elem és ideál definícióját és több ekvivalens feltétellel jellemezzük ezeket. A 3. §-ban a standard elemnek és ideálnak néhány alapvető, az előbbi jellemzésekből leszűrhető tulajdonságát foglaljuk össze. A 4. § a standard elem és neutrális elem kapcsolatát vizsgálja, s egy elég általános hálóosztályban (mely a moduláris hálókat is magában tartalmazza) kimutatja a két fogalom ekvivalenciáját. Igazoljuk, hogy $\{s_1, s_2, x\}$ disztributív részháló, ha x tetszőleges és s_1, s_2 standard elem. Az 5. §-ban a standard ideálok és homomorfizmusmagok viszonyát nézzük meg. Ugyanitt adjuk BIRKHOFF és WANG fentebb említett tételeinek általánosításait.

[2] Az L háló a elemét neutrálisnak nevezzük, ha bármely $x, y \in L$-lel együtt disztributív részhálót generál. A háló I ideálja neutrális, ha az L háló ideáljainak $\mathfrak{L}$ hálójában I neutrális elem.

Továbbá tetszőleges háló standard ideál szerinti faktorstruktúráját jellemezzük. A 6. §-ban a két izomorfia tételt és a Jordan—Hölder—Schreier—Zassenhaus tételt bizonyítjuk standard ideálokra. A 7. §-ban ellenpéldákat mutatunk be s a dolgozatot néhány probléma felsorolásával fejezzük be.

2. §. Standard elem és ideál bevezetése

Mielőtt a bevezetésben említett standard ideált definiáljuk, bevezetjük a standard elem fogalmát. Láthatjuk majd, hogy a standard elem és ideál kapcsolata analóg a neutrális elem és ideál viszonyával.

1. DEFINÍCIÓ: *Az L háló s elemét standard elemnek nevezzük, ha L bármely x és y elemére*

$$x \cap (s \cup y) = (x \cap s) \cup (x \cap y). \tag{1}$$

Mindenekelőtt lássunk néhány példát standard elemekre. Az x, y, z $(y > z)$ elemek által generált ötelemű, nem-moduláris hálóban y standard elem, azonban nyilván nem neutrális, továbbá az $(x]$ ideál homomorfizmusmag s x nem standard elem. (Ezzel beláttuk, hogy a következő fogalmak közül semelyik kettő sem ekvivalens: az x elem neutrális; az x elem standard; az $(x]$ ideál homomorfizmusmag.)

Könnyű látni továbbá, hogy disztributív háló minden eleme standard, hiszen (1) disztributív egyenlőség. Ugyancsak mindig standard elem egy tetszőleges háló 1, illetve 0 eleme.

A standard elem néhány jellemzését foglalja össze az

1. TÉTEL: *Az L háló s elemére a következő feltételek ekvivalensek:*

(α) *s standard elem;*

(β) *L minden olyan u és t elemére, amelyre $u \leqq s \cup t$, fennáll $u = (u \cap s) \cup (u \cap t)$;*

(γ) *kongruenciareláció az a Θ_s reláció, amelynél $x \equiv y(\Theta_s)$ akkor és csakis akkor teljesül, ha $(x \cap y) \cup s_1 = x \cup y$ valamilyen $s_1 \leqq s$-re;*

(δ) *L bármely x és y elemére*

(i) $s \cup (x \cap y) = (s \cup x) \cap (s \cup y)$,

(ii) *$s \cup x = s \cup y$ és $s \cap x = s \cap y$ fennállásából $x = y$ következik.*

BIZONYÍTÁS: A négy feltétel ekvivalenciáját ciklikusan fogjuk kimutatni.

(α)-ból következik (β). Mivel $u \leqq s \cup t$, ezért $u = u \cap (s \cup t)$, de ez utóbbit (1) alapján kifejtve $u = (u \cap s) \cup (u \cap t)$, ami u-nak épp a kívánt előállítása.

(β)-ből következik (γ). Felhasználjuk a [4] dolgozat 1. lemmáját. Eszerint ahhoz, hogy Θ_s kongruenciareláció, elegendő belátni az alábbi a)—d) állítások teljesülését.

a) $x \equiv x(\Theta_s)$ minden $x \in L$-re. Valóban minden $x \in L$ esetén $(x \cap x) \cup \cup (x \cap s) = x \cup x$ és így az $x \cap s = s_1$ jelöléssel adódik állításunk.

b) Ha $x \geqq y \geqq z$, $x \equiv y(\Theta_s)$ és $y \equiv z(\Theta_s)$, akkor $x \equiv z(\Theta_s)$. A feltételekből ugyanis $x = y \cup s_1$ és $y = z \cup s_2$ ahol $s_1, s_2 \leqq s$ s így $x = y \cup s_1 = (z \cup s_2) \cup \cup s_1 = z \cup (s_1 \cup s_2)$, ami épp azt jelenti, hogy $x \equiv z(\Theta_s)$, mert $s_1 \cup s_2 \leqq s$.

c) Ha $x \geqq y$ és $x \equiv y(\Theta_s)$, akkor bármely $u \in L$-re $x \cup u \equiv y \cup u(\Theta_s)$ és $x \cap u \equiv y \cap u(\Theta_s)$. Valóban a feltételek miatt $x = y \cup s_1$, $(s_1 \leqq s)$, s így mindkét oldal u-val egyesítve kapjuk, hogy $x \cup u = (y \cup u) \cup s_1$, azaz $x \cup u \equiv y \cup u(\Theta_s)$. Továbbá $x = y \cup s_1$ és $s_1 \leqq s$ miatt $x \cap u \leqq y \cup s_1 \leqq y \cup s$, tehát a ($\beta$) feltételt u, t helyett az $x \cap u, y$ elemekre alkalmazva s $x \geqq y$-t is figyelembe véve, adódik $x \cap u = (x \cap u \cap y) \cup (x \cap u \cap s) = (y \cap u) \cup s_2$, ahol $s_2 = x \cap u \cap s \leqq s$, ami épp a kivánt reláció teljesülését jelenti.

d) $x \equiv y(\Theta_s)$ ekvivalens azzal, hogy $x \cup y \equiv x \cap y(\Theta_s)$. Ezen állítás nyilvánvaló, mert Θ_s definíciójában x és y csak mint $x \cup y$ és $x \cap y$ szerepel.

(γ)-ból következik (δ). Lássuk be először az (i) feltétel teljesülését. Θ_s definíciója alapján $x \equiv s \cup x(\Theta_s)$ és $y \equiv s \cup y(\Theta_s)$. Ezen két kongruencia megfelelő oldalainak metszésével adódik $x \cap y \equiv (s \cup x) \cap (s \cup y)(\Theta_s)$; azonban a monotonitás miatt $x \cap y \leqq (s \cup x) \cap (s \cup y)$, tehát ($\gamma$) alapján kapjuk, hogy $(x \cap y) \cup s_1 = (s \cup x) \cap (s \cup y)$, ahol $s_1 \leqq s$. Ebből — mindkét oldalt s-sel egyesítve, s szem előtt tartva, hogy $s_1 \leqq s$ és $(s \cup x) \cap (s \cup y) \geqq s$ — adódik $(x \cap y) \cup s = (s \cup x) \cap (s \cup y)$, ami épp az (i) feltétel.

Másodszor igazoljuk az (ii) feltételt. Mivel $s \cup y \equiv y(\Theta_s)$, ezért ha mindkét oldalon x-szel metszünk és felhasználjuk az (ii)-ben szereplő $x \cup s = y \cup s$ feltételt, azt kapjuk, hogy $x = (x \cup s) \cap x = (y \cup s) \cap x \equiv y \cap x(\Theta_s)$, azaz ($\gamma$) miatt $(x \cap y) \cup s_1 = x$, ahol $s_1 \leqq s$. Ezen utolsó egyenlőségből $s_1 \leqq x$, tehát egyszersmind $s_1 \leqq s \cap x = s \cap y \leqq y$ ($s \cap x = s \cap y$ (ii) második feltétele következtében), azaz $x = (x \cap y) \cup s_1 \leqq (x \cap y) \cup y = y$. Hasonlóképp kaphatjuk, hogy $y \leqq x$, azaz $x = y$, ami a bizonyítandó állítás volt.

(δ)-ból következik (α). Legyen $a = x \cap (s \cup y)$ és $b = (x \cap s) \cup (x \cap y)$. Be fogjuk bizonyítani, hogy $s \cup a = s \cup b$, $s \cap a = s \cap b$ s ekkor (ii)-ből $a = b$ adódik, amivel (α) igazolva lesz. Valóban, $s \cap a = s \cap (x \cap (s \cup y)) = x \cap \cap (s \cap (s \cup y)) = x \cap s$, továbbá a monotonitásból folyólag $x \cap s \leqq b \leqq [x \cap (s \cup y)] \cup \cup [x \cap (s \cup y)] = a$, így $a \cap s = x \cap s$-ből $b \cap s = x \cap s$ adódik, tehát $a \cap s = b \cap s$. Másrészt (i)-ből $s \cup a = s \cup [x \cap (s \cup y)] = (s \cup x) \cap (s \cup y) = s \cup (x \cap y) = s \cup (x \cap s) \cup (x \cap y) = s \cup b$, amivel állításunkat igazoltuk.

Megjegyzés. A (δ) feltételben (i) ekvivalens a következővel

(i′) az $x \to x \cup s$ leképezés L endomorfizmusa;

az állítás nyilvánvaló. Továbbá a bizonyításból látható, hogy (ii) a következő gyengébb feltétellel pótolható:

(ii') $x \geqq y$ esetén $s \cup x = s \cup y$, $s \cap x = s \cap y$ fennállásából $x = y$ következik.

Fel szeretnénk hívni a figyelmet még arra a fontos tényre, hogy Θ_s *a legkisebb olyan kongruenciareláció, melynél* $(s]$ *osztály*, azaz $\Theta_s = \Theta[(s]]$.[3] Rátérünk ezután a standard ideál definiálására.

2. DEFINÍCIÓ: *Az L háló S ideálját standard ideálnak nevezzük, ha L ideáljainak $\mathfrak{L}$ hálójában S standard elem, azaz bármely két I és K ideálra*

$$I \cap (S \cup K) = (I \cap S) \cup (I \cap K).$$

Standard ideálokra példát nyújtanak a standard elemek is, mert minden standard elem által generált főideál standard ideál.

Az 1. tételnek standard ideálokra vonatkozó analogonját, néhány feltétellel bővítve mondja ki a

2. TÉTEL: *Az L háló S ideáljára a következő feltételek ekvivalensek:*

(α') *S standard ideál;*

(α'') *bármely két I és K főideálra $I \cap (S \cup K) = (I \cap S) \cup (I \cap K)$;*

(β') *bármely I ideálra $S \cup I$ elemei $s \cup x$ alakúak, ahol $s \in S$, $x \in I$;*

(β'') *bármely I főideálra $S \cup I$ elemei $s \cup x$ alakúak, ahol $s \in S$ és $x \in I$;*

(γ') *kongruenciareláció az a Θ_S relációja $\mathfrak{L}$-nek, amelynél $I \equiv K$ akkor és csakis akkor teljesül, ha $(I \cap K) \cup S_1 = I \cup K$, valamilyen $S_1 \subseteq S$ ideálra;*

(γ'') *kongruenciareláció azon $\Theta[S]$ relációja L-nek, amelynél $x \equiv y\,(\Theta[S])$ akkor és csakis akkor teljesül, ha $(x \cap y) \cup s = x \cup y$, alkalmas $s \in S$-sel;*

(δ') *bármely I és K ideálra*

(i*) $S \cup (I \cap K) = (S \cup I) \cap (S \cup K)$,

(ii*) $S \cap I = S \cap K$ és $S \cup I = S \cup K$ *fennállásából $I = K$ adódik.*

BIZONYÍTÁS. Belátjuk, hogy (β') ekvivalens a következő feltétellel.

(β^*) Minden olyan I és K ideálra, amelyre $I \subseteq S \cup K$, fennáll $I = (I \cap S) \cup (I \cap K)$.

Elég belátnunk, hogy (β^*)-ból következik (β'), viszont ha $S \cup K$ valamely a eleme nem volna $s \cup x\,(s \in S, x \in K)$ alakban előállítható, akkor az $I = (a]$ ideál nyilván nem tehetne eleget a fenti feltételnek. Megjegyezzük még, hogy (β'')-nek is hasonló analogonja érvényes I és K főideálokra.

2. tétel feltételei az 1. tételben szereplő feltételek analogonjai, s ezért az (α'), (β'), (γ'), (δ') feltételek helyessége következik az 1. tétel $\mathfrak{L}$-re való alkalmazásából. Mivel (α'') speciális esete (α')-nek, továbbá az (α'')$\to$(β''), (β'')$\to$ $\to$(γ'') ugyanúgy látható be, mint az 1. tétel analóg feltételeinél, ezért téte-

[3] $\Theta[I]$-vel jelöljük (lásd [4]), az I ideálhoz tartozó legkisebb homomorfizmust indukáló kongruenciarelációt, $\Theta_{a,b}$ pedig az $a \equiv b$ által generált minimális kongruenciarelációt jelöli.

lünk teljesen bizonyítva lesz, ha belátjuk, hogy (γ'')-ből következik (β'). Valóban, tegyük fel (γ'') teljesülését az S ideálra és legyen I tetszőleges ideál, továbbá $x \in S \cup I$. Az ideál-egyesítés definíciójánál fogva alkalmas $s \in S$ és $i \in I$ elemekkel $x \leqq s \cup i$. Tekintsük az $y = x \cap i$ elemek. $s \equiv s \cap i(\Theta[S])$, így $x = x \cap (s \cup i) \equiv [(s \cap i) \cup i] \cap x = y(\Theta[S])$, tehát ($\gamma''$) miatt $x = y \cup s'$, alkalmas $s' \in S$-sel, ami bizonyítandó volt.

Ezzel a 2. tétel bizonyítását befejeztük.

Végül még egy megjegyzést teszünk a standard elem és ideál viszonyára vonatkozóan. Nyilvánvaló, hogyha az L hálóban van standard elem s, akkor létezik standard ideál is, nevezetesen $(s]$. Fordítva azonban a standard ideál egzisztenciája nem vonja maga után a standard elem létezését. Erre triviális példát szolgáltathat egy tetszőleges, 0 és 1 elemmel nem rendelkező egyszerű háló[4] (lásd a 7. § 1. példáját), amelyben nem lehet standard elem, mert akkor a standard elem által generált főideál az 1. tétel (γ) feltétele miatt homomorfizmusmag volna, s így a háló nem lenne egyszerű. Standard ideál viszont van benne, mert az egész háló, mint ideál, standard. Egy kevésbé triviális példát nyerünk, ha tekintjük két előbbi típusú háló, L_1 és L_2 kardinális összegét (azaz $x \geqq y$ megőrzi jelentését L_1 és L_2-n belül, továbbá $x > y$ minden $x \in L_1$ és $y \in L_2$-re), amely hálóban L_2 nem triviális standard ideál, viszont standard elem nyilván nem létezik.

3. §. A standard elem (ideál) néhány tulajdonsága

A standard elem (ideál) legfontosabb tulajdonságait az 1. (illetve 2.) tétel sűríti magába. Ezeknek néhány következményét nézzük most meg.

1. LEMMA: *A standard elemek az L háló disztributív részhálóját alkotják, továbbá az $s \to \Theta_s$ megfeleltetés izomorfizmus, így a Θ_s kongruenciarelációk $\Theta(L)$-nek részhálóját alkotják.*

BIZONYÍTÁS: Legyen s_1 és s_2 stardard elem. Ekkor az (1) képlet ismételt alkalmazásával nyerjük, hogy bármely $x, y \in L$-re $x \cap [(s_1 \cup s_2) \cup y] = x \cap [s_1 \cup (s_2 \cup y)] = (x \cap s_1) \cup [x \cap (s_2 \cup y)] = (x \cap s_1) \cup (x \cap s_2) \cup (x \cap y) = [x \cap (s_1 \cup s_2)] \cup (x \cap y)$, ami épp azt jelenti, hogy $s_1 \cup s_2$ standard elem. Hogy az $s \to \Theta_s$ megfeleltetés $\cup$-re nézve izomorfizmus, az rögtön látható, mert $\Theta_{s_1} \cup \Theta_{s_2} = \Theta_{s_1 \cup s_2}$ ugyanaz mint (lásd a [3] lábjegyzetet) $\Theta[(s_1]] \cup \Theta[(s_2]] = \Theta[(s_1 \cup s_2]]$ (mivel Θ_s az $(s]$ ideált osztályként tartalmazó legkisebb kongruenciareláció). Ez az egyenlőség, mint ismeretes (lásd [4]), általános érvényű, így ezen speciális esetben is alkalmazható.

[4] Egy hálót egyszerűnek nevezünk, ha csak triviális kongruenciarelációi vannak.

Lássuk be, hogy $\Theta_{s_1} \cap \Theta_{s_2} = \Theta_{s_1 \cap s_2}$. Valóban, ha $x \equiv y\,(\Theta_{s_1} \cap \Theta_{s_2})$, akkor $x \equiv y\,(\Theta_{s_1})$, ezért $(x \cap y) \cup s_1' = x \cup y\; (s_1' \leqq s_1)$. Másrészt $x \equiv y\,(\Theta_{s_2})$ is fennáll, s ebből $s_1' = (x \cup y) \cap s_1' \equiv (x \cap y) \cap s_1'\,(\Theta_{s_2})$, így alkalmas $s \leqq s_2$-vel $s_1' = [(x \cap y) \cap \cap s_1'] \cup s$. Mivel $s \leqq s_1'$ igaz, ezért $s \leqq s_1 \cap s_2$, és $(x \cap y) \cup s = (x \cap y) \cup [(x \cap y) \cap s_1'] \cup s = (x \cap y) \cup s_1' = x \cup y$, vagyis $x \equiv y\,(\Theta_{s_1} \cap \Theta_{s_2})$ akkor és csak akkor következik be, ha alkalmas $s \in (s_1 \cap s_2]$ elemmel $(x \cap y) \cup s = x \cup y$, ami az 1. tétel ($\gamma$) feltétele szerint ekvivalens azzal, hogy $s_1 \cap s_2$ standard, továbbá, hogy $\Theta_{s_1} \cap \Theta_{s_2} = \Theta_{s_1 \cap s_2}$.

Végül a standard elemek alkotta részháló disztributívitása nyílvánvaló, mert mint láttuk ez a háló izomorf $\Theta(L)$ egy részhálójával, amely szükségképp disztributív.

Az 1. lemmát standard ideálokra valamivel élesebb formában tudjuk kimondani.

2. LEMMA: *A standard ideálok az L háló ideáljai $\mathfrak{L}$ hálójának $\cup$-re nézve komplett, $\cup$-végtelen disztributív*[5] *részhálóját alkotják és az $S \to \Theta[S]$ megfeleltetés $\cup$-komplett izomorfizmus az S standard ideálok és a hozzájuk tartozó $\Theta[S]$ kongruenciarelációk között.*

BIZONYÍTÁS: Az 1. lemma miatt elegendő már csak a komplettségre és végtelen disztributívitásra vonatkozó állításokat belátnunk.

$\bigcup\limits_{\alpha} S_\alpha$ nyilván standard ideál, mert bármely I ideált is tekintjük, $\bigcup\limits_{\alpha} S_\alpha \cup I$ valamely x eleméhez kiválasztható az S_α ideálok közül véges sok úgy, hogy $x \in \bigcup\limits_{i=1}^{n} S_{\alpha_i} \cup I$. Láttuk azonban, hogy $\bigcup\limits_{i=1}^{n} S_{\alpha_i}$ standard ideál, így $x = s \cup u$ $\Big(s \in \bigcup\limits_{i=1}^{n} S_{\alpha_i} \subseteq \bigcup\limits_{\alpha} S_\alpha,\; u \in I\Big)$ ami a 2. tétel (β') feltétele miatt éppen azt jelenti, hogy $\bigcup\limits_{\alpha} S_\alpha$ standard ideál, vagyis a standard ideálok hálója $\cup$-re nézve komplett. A $\Theta[\bigcup\limits_{\alpha} S_\alpha] = \bigcup\limits_{\alpha} \Theta[S_\alpha]$ reláció fennáll tetszőleges ideálokra (lásd [4]), továbbá $\Theta(L)$-ben érvényes az $\cup$-végtelen disztributívitás, ez pedig $\cup$-komplett részháló-tartó tulajdonság s ezzel a 2. lemmát bizonyítottuk.

3. LEMMA: *Standart elem (ideál) homomorf képe is standard.*

BIZONYÍTÁS: Az állítás a standard elem (ideál) definíciójából nyilvánvaló.

Megjegyezzük, hogy a 3. lemma megfordítása nem igaz, azaz alkalmas hálónak lehet olyan homomorfképbeli standard eleme, melynek egyetlen inverz képe sem standard (lásd 7. § 2. példa).

4. LEMMA: *Ha az S standard ideálnak az I ideállal való metszete és egyesítése is főideál, akkor I szintén főideál.*

[5] Azaz korlátlanul fennáll az $S \cap \bigcup\limits_{\alpha} S_\alpha = \bigcup\limits_{\alpha} (S \cap S_\alpha)$ egyenlőség.

BIZONYÍTÁS: Legyen $S \cap I = (b]$ és $S \cup I = (a]$; a 2. tétel (β') feltétele alapján ekkor $a = s \cup x (s \in S, x \in I)$. Állítjuk, hogy $I = (x \cup b]$. Valóban, legyen $w \geq x \cup b$ és $w \in I$. Ekkor $(a] \supseteq S \cup (w] \supseteq S \cup (x \cup b] \supseteq S \cup (x] = (a]$, azaz $S \cup (w] = S \cup (x \cup b]$, továbbá $(b] = S \cap I \supseteq S \cap (w] \supseteq S \cap (x \cup b] \supseteq S \cap (b] = (b]$, azaz $S \cap (w] = S \cap (x \cup b]$. Ez utóbbi két egyenlőség viszont a 2. tétel (δ') (ii*) feltétele alapján azt jelenti, hogy $(w] = (x \cup b]$, így $w = x \cup b$, amivel a lemma bizonyítását befejeztük.

KOROLLÁRIUM: *Ha az L háló S és T standard ideáljainak metszete és egyesítése is főideál, akkor S és T szintén főideál.*

A korollárium a 4. lemmának triviális következménye.

5. LEMMA: *Ha s az L háló standard eleme, ekkor az* $(a]$ *főideálban* $a \cap s$ *szintén standard elem.*

BIZONYÍTÁS: Az $(a]$ főideál elemei valamennyien $x \cap a$ alakba írhatók, ahol x végigfutja L elemeit. Elég tehát a standard elem definíciója alapján belátni, hogy $(x \cap a) \cap [(s \cap a) \cup (y \cap a)] = [(x \cap a) \cap (s \cap a)] \cup [(x \cap a) \cap (y \cap a)]$. Valóban, az igazolandó egyenlőség baloldalából kiindulva, (1) többszöri alkalmazásával nyerjük, hogy $(x \cap a) \cap [(s \cap a) \cup (y \cap a)] = (x \cap a) \cap [(s \cup y) \cap a] = (x \cap a) \cap (s \cup y) = (x \cap a \cap s) \cup (x \cap a \cap y) = [(x \cap a) \cap (s \cap a)] \cup [(x \cap a) \cap (y \cap a)]$, ami az állítás volt.

4. §. Neutrális elemek és disztributív részhálók

A bevezetésben említett okok miatt a standard ideálokat oly módon kellett értelmeznünk, hogy magukba foglalják a neutrális ideálokat is és moduláris hálóban e két fogalom egyezzék meg. Kimutatjuk, hogy a standard ideálok, sőt elemek eleget tesznek a következő kikötéseknek:

6. LEMMA: *Minden neutrális elem (ideál) standard.*

BIZONYÍTÁS: Az állítás a definícióból nyilvánvaló.

Ismeretes G. BIRKHOFF (lásd [1] 28. old.) azon tétele, mely szerint az L háló a eleme akkor és csak akkor neutrális, ha az 1. tétel (δ) (i) és (ii) feltételein kívül még azon feltételt is kielégíti, hogy

(iii) az $x \to x \cap a$ leképezés L endomorfizmusa.

E tételből nyilvánvaló, hogy

7. LEMMA: *Az a standard elem (ideál) akkor és csak akkor neutrális, ha* (iii) *teljesül.*

Továbbá világos az is, hogy

8. LEMMA: *Ha az a elem standard az L hálóban és duálisában is, akkor a neutrális.*

Ismeretes továbbá (lásd [1] 79. old.), hogy egy moduláris hálóban az a elem akkor és csak akkor neutrális, ha az $x \to x \cap a$ vagy az $x \to x \cup a$ megfeleltetés endomorfizmus. Ebből nyilvánvalóan adódik a

9. LEMMA: *Moduláris hálóban minden standard elem neutrális.*

Mivel moduláris háló ideáljainak hálója szintén moduláris, ezért a 9. lemmából adódik a következő

KOROLLÁRIUM: *Moduláris háló minden standard ideálja neutrális.*

A következő 3. tétel az előző lemmát nagymértékben általánosítja. Hogy a 9. lemmát mégis külön igazoltuk, azzal csak kitüntetett szerepét szerettük volna hangsúlyozni.

3. TÉTEL: *Gyengén moduláris*[6] *háló minden standard eleme neutrális.*

BIZONYÍTÁS: Legyen az L hálónak s standard eleme. A 7. lemma alapján elég belátnunk, hogy az $x \to x \cap s$ leképezés endomorfizmus, vagy ami ezzel ekvivalens: $s \cap (x \cup y) = (s \cap x) \cup (s \cap y)$.

Az egyszerűség kedvéért vezessük be az $a = s \cap (x \cup y)$ és $b = (s \cap x) \cup$ $\cup (s \cap y)$ jelöléseket. Tegyük fel, hogy valamilyen $x, y \in L$-re az előbbi egyenlet nem teljesül, azaz $a > b$.

Először belátjuk, hogy $a \cup x > b \cup x$ és $a \cup y > b \cup y$. Tegyük fel ugyanis, hogy ezek valamelyike pl. $a \cup x > b \cup x$ nem teljesül; ekkor $a > b$ miatt $a \cup x = b \cup x$. Tekintsük az $s \cap x \equiv x(\Theta_{s \cap x, x})$ kongruenciát és egyesítsük ezen kongruencia mindkét oldalát b-vel, majd messük el a-val. Kapjuk, hogy (lásd a [6] lábjegyzetet) $\overline{s \cap x, x} \to \overline{b, a}$, mert figyelembe véve a és b jelentését adódik $a \cap (b \cup (s \cap x)) = a \cap b = b$ és $a \cap (b \cup x) = a \cap (a \cup x) = a$. A gyenge modularitás következtében ekkor $\overline{b, a} \to \overline{u, v}$, ahol $s \cap x \leqq u < v \leqq x$. Mivel azonban $a, b \leqq s$ tehát az utóbbi hozzárendelés miatt teljesül $u \equiv v(\Theta_s)$, azaz az 1. tétel (γ) feltétele alapján $v = u \cup s_1 (s_1 \leqq s)$. Ekkor azonban $v = u \cup s_1 \leqq$ $\leqq u \cup (s \cap x) = u$, mert $s_1 \leqq x$ és $s_1 \leqq s$ fennállásából $s_1 \leqq s \cap x$ adódik. Ez utóbbi azonban ellentmondásban van azzal a feltevésünkkel, hogy $u < v$ és így igazoltuk, hogy $a \cup x > b \cup x$. Hasonlóan látható be $a \cup y > b \cup y$.

Ezek után igazoljuk, hogy $\overline{s \cap (b \cup x), b \cup x} \to \overline{a \cap (b \cup y), a}$; valóban, messük el az $s \cap (b \cup x)$ ill. $b \cup x$ elemeket először x-szel, s kapjuk az $s \cap x$ és

[6] Azt mondjuk, (lásd [3]), hogy az L háló a, b elempárjához hozzá van rendelve a c, d elempár, jelben $\overline{a, b} \to \overline{c, d}$ ha alkalmas $x_1, x_2, \dots, x_n$ elemekkel teljesülnek a következő egyenletek:

$$\{\dots[((a \cup b) \cup x_1) \cap x_2] \cup x_3) \cap \dots\} \cup x_n = c \cup d,$$
$$\{\dots([((a \cap b) \cup x_1) \cap x_2] \cup x_3) \cap \dots\} \cup x_n = c \cap d.$$

Az L hálót gyengén modulárisnak nevezzük (lásd [4]), ha valahányszor $\overline{a, b} \to \overline{c, d}$ $(a > b,$ $c > d)$, akkor $\overline{c, d} \to \overline{a_1, b_1}$ $(a \geqq a_1 > b_1 \geqq b)$.

x elemeket. Ez utóbbi két elemet egyesítve a $b \cup y$ elemmel adódik $(b \cup y) \cup$ $\cup (s \cap x) = b \cup y$ (mert $s \cap x \leqq (s \cap x) \cup (s \cap y) = b \leqq b \cup y$) és $(b \cup y) \cup x =$ $= b \cup (x \cup y)$. Végül a-val történő metszés után eljutunk az $a \cap (b \cup y)$, ill. $[b \cup (x \cup y)] \cap a = a$ elemekhez (az utóbbi abból következik, hogy $b \cup (x \cup y) \geqq$ $\geqq s \cap x \cup y) = a$). Ezzel a kivánt hozzárendelést bizonyítottuk. A gyenge modularitást alkalmazandó még be kell látnunk, a hozzárendelésben szereplő elempárok különbözőségét. Feltéve, hogy $a \cap (b \cup y) = a, b \cup y \geqq a$ adódna s így $a \cup y = b \cup y$ állna fenn, ellentétben a már bizonyított $a \cup y > b \cup y$-nal; másrészt ebből már az is látható, hogy $s \cap (b \cup x) = b \cup x$ sem lehet, mert ez ellentmondana a már bizonyított $\overline{s \cap (b \cup x), b \cup x} \to \overline{a \cap (b \cup y), a}$ hozzárendelésnek. A gyenge modularitás alapján tehát létezik olyan z, w elempár, mely kielégíti az $s \cap (b \cup x) \leqq z < w \leqq b \cup x$ egyenlőtlenségeket és $\overline{a \cap (b \cup y), a} \to \overline{z, w}$. Ugyanúgy, mint az előzőkben, ezen relációból is $z \equiv w(\Theta_s)$ adódik, tehát $w = z \cup s'$ $(s' \leqq s)$. Azonban $w \leqq b \cup x$ miatt $s' \leqq s \cap (b \cup x)$, mert $s \geqq a > b$ tehát $w = z \cup s' \leqq z \cup (s \cap (b \cup x)) = z$, ami ellentmond $w > z$-nek. Ellentmondásra vezetett tehát az $a > b$ feltétel s így a 3. tétel bizonyítását befejeztük.

1. KOROLLÁRIUM: *Ha az L háló ideáljainak $\mathfrak{L}$ hálója gyengén moduláris, akkor L minden standard ideálja neutrális.*

2. KOROLLÁRIUM: *Relatív komplementumos háló minden standard eleme neutrális.*

Az első korolláriumot bizonyítandó alkalmaznunk kell a 3. tételt az L háló ideáljainak hálójára, $\mathfrak{L}$-re. A második korollárium egyszerűen abból a tényből adódik, hogy minden relatív komplementumos háló gyengén moduláris (lásd [4]).

A neutrális elemet azzal a tulajdonsággal definiáltuk, hogy bármely két elemmel együtt disztributív részhálót generál. Analóg állítást tartalmaz a standard elemekre vonatkozólag a

4. TÉTEL: *Legyen az L hálónak s_1 és s_2 standard eleme. Ekkor az $\{s_1, s_2, x\}$ részháló disztributív minden $x \in L$-re.*

BIZONYÍTÁS: O. ORE [6] cikkében kimutatta, hogy egy háló y, z és w elemei akkor és csak akkor generálnak disztributív részhálót, ha y, z és w minden a, b, c permutációjára fennállanak a következő egyenlőségek:

(2) $$a \cap (b \cup c) = (a \cap b) \cup (a \cap c),$$

(3) $$a \cup (b \cap c) = (a \cup b) \cap (a \cup c),$$

(4) $$(a \cap b) \cup (a \cap c) \cup (b \cap c) = (a \cup b) \cap (a \cup c) \cap (b \cup c).$$

Ha speciálisan az $y = s_1, z = s_2, w = x$ elemeket vizsgáljuk, akkor a (2) egyenlet, mivel b vagy c standard, a standard ideál definíciója miatt fennáll.

(3)-at igazolandó, elég az $a=s_1$ helyettesítést elvégezni az 1. tétel (δ) feltétele miatt. A $b=s_1, c=s_2$ eset is könnyen kiszámítható. Végül belátjuk a (4) egyenlet teljesülését. Felhasználva, hogy az 1. lemma alapján $s_1 \cap s_2$ és $s_1 \cup s_2$ is standard elemek, továbbá az 1. tétel (α), (δ) feltételeinek ismételt alkalmazásával adódik, hogy $(s_1 \cap s_2) \cup (s_1 \cap x) \cup (s_2 \cap x) = (s_1 \cap s_2) \cup [(s_1 \cup s_2) \cap x] = [(s_1 \cap s_2) \cup (s_1 \cup s_2)] \cap [(s_1 \cap s_2) \cup x] = (s_1 \cup s_2) \cap (s_1 \cup x) \cap (s_2 \cup x)$, ami a bizonyítandó volt.

5. §. Standard ideálok és homomorfizmusmagok

Ha az s elem standard, akkor az 1. tétel (γ) feltételéből azonnal adódik, hogy $L/(s] \sim [s)$. Kérdés, hogy mi mondható abban az esetben, ha a vizsgált standard ideál nem főideál.

5. TÉTEL: *Legyen az L hálónak S standard ideálja. Ekkor az L/S háló ideáljainak hálója izomorf $\mathfrak{L}$-nek $[S, L]$ intervallumával, s így az $[S, L]$ intervallum izomorfiától eltekintve meghatározza L/S-et.*

BIZONYÍTÁS: Minden $K \in [S, L]$, L-beli ideálnak feleltessük meg L/S azon ideálját, melybe K az $L \to L/S$ homomorfizmusnál átmegy. Ez a leképezés nyilván homomorf, így elég kimutatni, hogy ha $I \supset J \supseteq S$, akkor I és J az $L \to L/S$ leképezésnél nem esik egybe. Valóban, ha minden $x \in I$-hez lenne olyan $y \in J$, hogy $x \equiv y(\Theta[S])$ állna fenn, akkor $(x \cap y) \cup s = x \cup y$ teljesülne valamilyen $s \in S$-re. Ekkor azonban $x \cap y$ és $s \in J$-ből $x \cup y \in J$ adódik, vagyis $I = J$ állna fenn, ellentétben feltevésünkkel.

A tétel utolsó állítása azon ismert tényből adódik, hogy egy hálót ideáljainak hálója izomorfiától eltekintve egyértelműen meghatározza, mivel egy háló izomorf ideálhálójának alulról elérhetetlen elemei alkotta hálójával (A. KOMATU eredménye, lásd részletesebben [1], 64. old.).

Következőkben egyszerű feltételt adunk meg arra, hogy egy háló minden homomorfizmusmagja standard ideál legyen.

6. TÉTEL: *Ha az L 0-elemes hálóban minden $[0, a]$ intervallum komplementumos, akkor L minden homomorfizmusmagja standard.*

BIZONYÍTÁS: Legyen az L hálónak I egy homomorfizmusmagja. Tekintsük a $\Theta[I]$ kongruenciarelációt és legyen $a \equiv b(\Theta[I])$ $(a > b, a, b \in L)$. Feltevésünk szerint a $[0, a]$ intervallum komplementumos, tehát létezik egy olyan b' elem, melyre $b \cap b' = 0$ és $b \cup b' = a$. Feltettük, hogy $a \equiv b(\Theta[I])$, tehát $b' = a \cap b' \equiv b \cap b' = 0\,(\Theta[I])$ s mivel I homomorfizmusmag, következik $b' \in I$. Ez azonban $b' \cup b = a$ miatt az 1. tétel (γ) feltétele szerint éppen azt jelenti, hogy I standard ideál.

Az előző bizonyítás kis módosítással megismételhető, ha L-ről azt tesszük fel, hogy relatív komplementumos, azaz érvényes a következő

1. KOROLLÁRIUM: *Az L relatív komplementumos háló minden homomorfizmusmagja standard.*

A 6. tételt a 9. lemmával összevetve adódik G. BIRKHOFF ismert tétele:

2. KOROLLÁRIUM: *Komplementumos moduláris hálóban egy-egyértelmű megfeleltetés van a homomorfizmusmagok és neutrális ideálok között.*

Ily módon a 6. tétel BIRKHOFF ezen tétele általánosításának tekinthető. BIRKHOFF tétele általánosítható úgyis, hogy az 6. tételt nem a 9. lemmával, hanem az általánosabb 3. tétellel vetjük egybe.

Ezután rátérünk egy SHIH—CHIANG WANG-tól [9] származó tétel általánosítására.

7. TÉTEL: *Az L relatív komplementumos 0 és 1 elemes háló kongruenciarelációnak hálója akkor és csak akkor Boole-algebra, ha minden standard ideálja főideál.*

BIZONYÍTÁS: Elegendőség. Ismeretes, hogy relatív komplementumos hálóban minden I ideál legfeljebb egy kongruenciarelációnál — ti. $\Theta[I]$-nél — alkot osztályt. A 6. tétel és feltételünk alapján minden I homomorfizmusmag standard főideál, $I=(s]$ s így $\Theta[I]=\Theta_s$. s a 3. tétel 2. korolláriuma alapján neutrális s így komplementuma s' is az, tehát $\Theta_s \cap \Theta_{s'}=\Theta_{s\cap s'}=\Theta_0$ és $\Theta_s \cup \Theta_{s'}=\Theta_{s\cup s'}=\Theta_1$ vagyis $\Theta_{s'}$ komplementuma Θ_s-nek, azaz $\Theta(L)$ valóban komplementumos.

Szükségesség. A relatív komplementumosság következtében (6. tétel 1. korollárium) L minden kongruenciarelációja $\Theta[S]$ alakú, ahol S standard ideál. Legyen $\Theta[S]$ komplementuma $\Theta[T]$, ekkor $\Theta[S]\cup\Theta[T]=\Theta[S\cup T]=\Theta[(1]]$ és $\Theta[S]\cap\Theta(T]=\Theta[S\cap T]=\Theta[(0]]$. Mivel azonban S, T s így $S\cap T$ és $S\cup T$ szintén standard ideálok, tehát szükségképpen $S\cap T=(0]$ és $S\cup T=(1]$, ami a 4. lemma korolláriumának alapján maga után vonja, hogy S és T főideálok. Ezzel a tétel bizonyítását befejeztük.

6. §. Izomorfia tételek, Zassenhaus lemma

Ebben a paragrafusban a két izomorfiatételt s ennek néhány következményét nézzük meg.

8. TÉTEL: *(Standard ideálok első izomorfia tétele). Legyen adott az L háló S standard ideálja, s egy tetszőleges I ideálja. Ekkor $I\cap S$ standard ideál I-ben, mint hálóban és*

$$I\cup S/S \sim I/I\cap S.$$

BIZONYÍTÁS: Az 5. lemmát alkalmazva az L háló ideáljainak hálójára adódik első állításunk. A maradék állítás pedig speciális esete az első általános izomorfia tételnek (lásd RÉDEI [7]).

9. TÉTEL: *(Standard ideálok második izomorfia tétele). Legyen adva az L hálónak S ideálja és T standard ideálja, s teljesüljön $S \supseteq T$. S akkor és csak akkor standard, ha S/T standard ideálja L/T-nek. Ekkor*

$$L/S \sim {}^{L/T}\big/_{S/T}.$$

BIZONYÍTÁS: Ha S standard, akkor a 3. lemma speciális eseteként adódik, hogy S/T standard L/T-ben. Megfordítva, legyen S/T standard L/T-ben. Kimutatjuk, hogy S-re teljesül a 2. tétel (γ'') feltétele. Mint ahogy az 1. tétel „(β)-ból következik (γ)" részéből látható, ehhez elég belátni, hogy $x \equiv y(\Theta[S])$ és $x \geqq y$ fennállása esetén minden u-ra $x \cap u \equiv y \cap u(\Theta[S])$. Jelölje a' az a elem homomorf képét az $L \sim L/T$ homomorfizmusnál. Mivel $x' \equiv y'(\Theta[S/T])$ és S/T standard L/T-ben, ezért alkalmas $s' \in S/T$-vel fennáll $x' \cap u' = (y' \cap u') \cup s'$. Lévén T standard L-ben, ebből $x \cap u = [(y \cap u) \cup s] \cup t \, (t \in T)$ adódik, ami az $s_1 = s \cup t$ jelöléssel a bizonyítandó $x \cap u = (y \cap u) \cup s_1$, $s_1 \in S$ állításba megy át. Megjegyezzük, hogy a bizonyítás során erősen támaszkodtunk arra az állításra, hogy $\Theta[S/T]$ kongruenciaosztályai épp $\Theta[S]$ kongruenciaosztályainak homomorf képei.

Tudjuk, hogy a két izomorfia tételnek közvetlen folyománya a Zassenhaus lemma. A 3. § lemmáiból ugyanúgy bizonyítható, mint csoportok esetén [7]-ben történik.

ZASSENHAUS LEMMA: *Legyen az L hálónak I és K ideálja, továbbá S standard ideálja I-nek és T standard ideálja K-nak. Ekkor $S \cup (I \cap T)$ standard ideálja $S \cup (I \cap K)$-nak és $T \cup (K \cap S)$ standard ideál $T \cup (I \cap K)$-ban, továbbá fennáll az*

$$ {}^{S \cup (I \cap K)}\big/_{S \cup (I \cap T)} \simeq {}^{T \cup (I \cap K)}\big/_{T \cup (K \cap S)} $$

izomorfizmus.

A Jordan—Hölder—Schreier tétel megfogalmazása végett bevezetjük a következő fogalmat:

3. DEFINÍCIÓ: *Az L háló ideáljainak valamely*

$$I_0 \supseteq I_1 \supseteq \ldots \supseteq I_n$$

sorozatát az $[I_n, I_0]$ intervallum n hosszúságú standard-sorozatának nevezzük, ha I_j standard ideál I_{j-1}-ben $(j = 1, 2, \ldots, n)$. Valódinak nevezzük a standard-sorozatot, ha „$\supseteq$" helyett mindenütt „$\supset$" szerepel. Végül kompozíció-sorozatnak nevezzük minden olyan I_n és I_0 közti valódi standard-sorozatot, melynek nincs tőle különböző standard-sorozat finomítása az $[I_n, I_0]$ intervallumban.

JORDAN—HÖLDER—SCHREIER TÉTEL: *Az L háló bármely két, $[I_n, I_0]$ intervallumbeli standard-sorozata finomítható úgy, hogy a két finomított sorozat hossza megegyezik, s továbbá a két sorozat faktorhálói sorrendtől eltekintve páronként izomorfok. Továbbá, ha a tekintett intervallumban létezik kompozíció-sorozat, akkor minden standard-sorozat kompozíció-sorozattá finomítható.*

Ezen állítások ugyanúgy következnek a Zassenhaus lemmából, mint ahogy az csoportoknál, gyűrűknél szokásos (lásd pl. [7]).

Érdekes, hogy a standard ideálok Zassenhaus lemmája az izomorfia tételek nélkül is könnyen bizonyítható. A részletekre itt nem térünk ki, csupán megjegyezzük, hogy az 5. tétel következményeként elég standard elemekre igazolni az állítást, amely speciális esetben ez már nem okoz különleges nehézségeket.

7. §. Ellenpéldák és problémák

1. A dolgozat első részében mutattunk példát olyan hálóra, amelynek létezik standard ideálja, de standard eleme nincs. E példa teljessé tételéhez adósok vagyunk egy egyszerű és nem korlátos háló megkonstruálásával.

Tekintsük az egész számok láncának direktszorzatát a kételemű hálóval; ezen háló elemei $(n, 0)$, ill. $(n, 1)$ alakúak, ahol n tetszőleges egész szám és 0, ill. 1 a kételemű háló zéró, illetve egységeleme. Definiáljuk a nyert hálóhoz még az $x_n (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ elemeket, s kössük ki a következő relációk teljesülését:

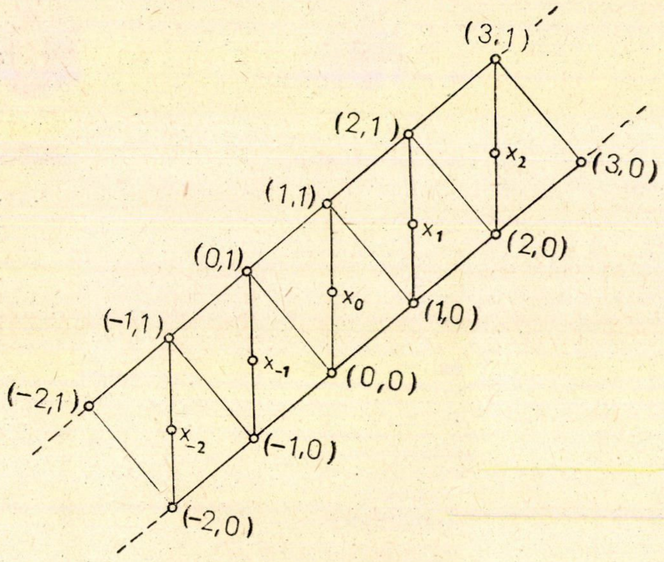
$$x_n \cup (n, 1) = x_n \cup (n+1, 0) = (n+1, 1) \text{ és } x_n \cap (n, 1) = x_n \cap (n+1, 0) = (n, 0).$$

A kapott részben rendezett halmazról (1. ábra) könnyű diszkusszióval kimutatni, hogy eleget tesz a fenti követelményeknek.

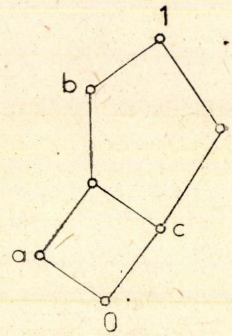
2. Példa olyan elemre, melynek homomorf képe standard és ezen homomorfképbeli elem egyetlen inverz képe sem standard az eredeti hálóban. Tekintsük az $x, y, z \, (y > z)$ elemek által generált ötelemű nem moduláris hálót. Ebben x nem standard s mégis az $y \equiv z$ reláció által indukált homomorf képben x homomorfképe standard elem, s mivel x homomorfképének egyetlen inverz képe x, ezért x kívánt tulajdonságú elem.

3. Gyengén moduláris hálóban nem minden homomorfizmusmag standard ideál. Erre példát szolgáltat a 2. ábrán látható háló és annak $(a]$ ideálja, amely homomorfizmusmag, de nem standard, mivel $a \equiv 0$-ból következik $y = y \cap (a \cup z) \equiv y \cap (0 \cup z) = y \cap z$, s mégis $y = (y \cap z) \cup a_1$ nem állhat fenn semmilyen $a_1 \leqq a$-ra.

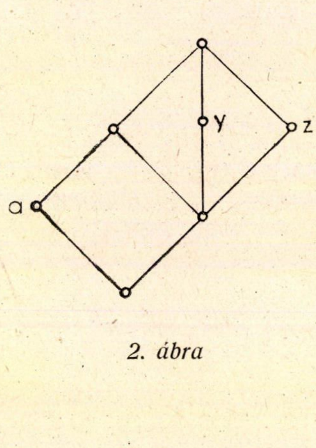
4. Ha az L hálónak egy S ideáljára érvényes, hogy bármely I ideállal $S \cup I / S \simeq I / S \cap I$, akkor S-ről röviden azt mondjuk, hogy eleget tesz az első



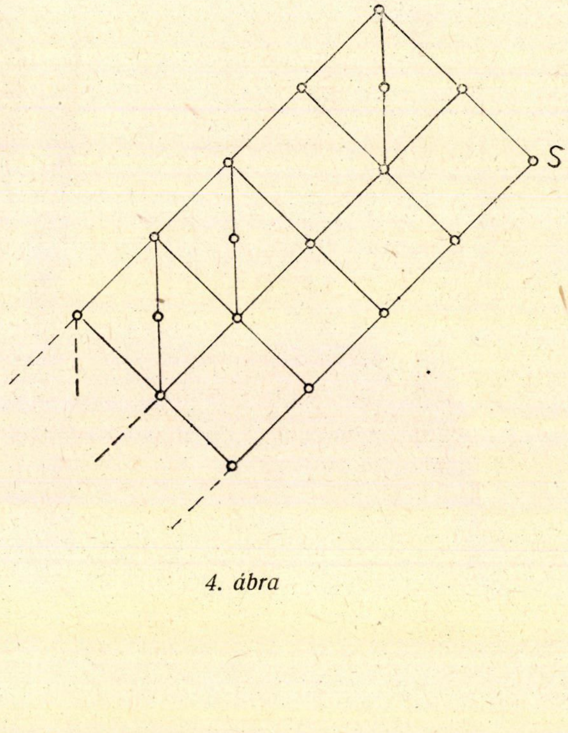
1. ábra



3. ábra



2. ábra



4. ábra

izomorfia tételnek. Láttuk, hogy a standard ideálok eleget tesznek az első izomorfia tételnek. Fordítva azonban — miként azt a 3. ábra $(a]$ főideálja illusztrálja — nem minden, az első izomorfia tételnek eleget tevő ideál standard. Az érdekesség kedvéért megjegyezzük, hogy ezen példában az első izomorfia tételnek eleget tevő ideálok $((0], (c], (a], (b]$ és $(1])$ nem alkotják az ideálok hálójának részhálóját. Sikerült azonban olyan példát is adni, ahol egy, az első izomorfia tételnek eleget tevő ideál nem standard s az első izomorfia tételnek eleget tevő ideálok mégis az ideálok hálójának részhálóját alkotják.

5. A második izomorfia tétel izomorfia-képlete gyengébb alakba megfogalmazva már nem jellemzi a standard ideálokat, amennyiben érvényes a következő:

Létezik olyan L háló, s ennek egy S ideálja, úgy, hogy S homomorfizmusmag, de nem standard ideál, továbbá minden $T \subseteq S$ homomorfizmusmagra S/T standard ideál L/T-ban és $L/S \sim {}^{L/T}\!\big/_{S/T}$.

Ezen állításunkat a 4. ábrán feltüntetett háló igazolja.

Végül néhány megoldatlan problémát szeretnénk felsorolni.

Lehet arra példát konstruálni, hogy gyengén moduláris* háló ideálhálója nem szükségképpen gyengén moduláris. Így a 3. tétel analogonja standard ideálokra nem mondható ki automatikusan a 3. tétel $\mathfrak{L}$-re való alkalmazásával. Ellenben, felmerül a kérdés, hogy vajon ennek ellenére

1. Igaz-e hogy gyengén moduláris hálókban minden standard ideál neutrális? Mi a helyzet relatív komplementumos hálókban?

2. Be lehet bizonyítani, hogy csökkenő láncfeltételű moduláris hálókban minden első izomorfia tételnek eleget tevő ideál standard. Mi állítható gyengén moduláris hálókban?

3. Jellemezzük az első izomorfia tételnek eleget tevő ideálokat láncfeltétel nélküli hálókban!

4. A 2. tétel (δ') feltételének megfelelően jellemzi vajon a standard ideálokat a következő feltétel:

(δ'') bármely I és K főideálra

(i*) $S \cup (I \cap K) = (S \cup I) \cap (S \cup K)$,

(ii*) $S \cap I = S \cap K$ és $S \cup I = S \cup K$ fennállásából $I = K$ adódik.

(Az állítás helyességét sugallja az a tény, hogy a (δ') és (δ'') feltétel között ugyanaz a kapcsolat, mint a 2. tétel (α') és (α''); (β') és (β''), ill. (γ') és (γ'') feltételei között.)

IRODALOM

[1] G. BIRKHOFF: *Lattice Theory,* New York, 1948.
[2] R. P. DILWORTH: The sructure of relatively complemented lattices, *Ann. of Math.,* (2) **51** (1950) 348—359.
[3] GRÄTZER GY. és SCHMIDT E. T.: Hálók ideáljai és kongruenciarelációi I., *Magyar Tud. Akad. III. Osztályának Közleményei,* 7 (1957) 93—109.
[4] GRÄTZER GY. és SCHMIDT E. T.: Hálók ideáljai és kongruenciarelációi II., *Magyar Tud. Akad. III. Osztályának Közleményei,* 7 (1957) 417—434.
[5] J. HASHIMOTO: Ideal Theory for Lattices, *Math. Japonicae,* 2 (1952) 149—186.
[6] O. ORE: Remarks on structures and group relations, *Naturf. Gesellschaft Zürich,* **85** (1940) 1—4.
[7] RÉDEI L.: *Algebra,* Akadémiai Kiadó, Budapest, 1954.
[8] K. SHODA: Über die allgemeinen algebraischen Systeme, *Proc. Imp. Acad. Tokyo,* (1941—1944) 17—20.
[9] S. WANG: On permutable congruence relations, *Acta Math. Sinica,* 3 (1953) 133—141.

A Magyar Tudományos Akadémia
Matematikai Kutató Intézete

(Beérkezett: 1958. III. 4.)

A TUDOMÁNYOS MINŐSÍTŐ BIZOTTSÁG HÍREI

Szép Jenő doktori értekezésének nyilvános vitája

A Tudományos Minősítő Bizottság 1957. szeptember 30-án rendezte meg SZÉP JENŐ, a matematikai tudományok kandidátusa, „Gyűrűk egy új bővítéséről“ c. doktori értekezésének nyilvános vitáját a *Bolyai János Matematikai Társulat* helyiségében. Az értekezés opponensei HAJÓS GYÖRGY és RÉDEI LÁSZLÓ akadémikusok, továbbá FUCHS LÁSZLÓ, a matematikai tudományok doktora, voltak. A vitában TURÁN PÁL akadémikus elnökölt.

A jelölt eddigi tudományos munkásságának ismertetése után SZÉP JENŐ előadta disszertációjának téziseit.

Az algebrai struktúrák elméletében központi jelentőségű az a kérdés, hogy hogyan lehet azonos jellegű struktúrákból új struktúrákat konstruálni. Ezzel a kérdéssel foglalkozik a struktúrák bővítéselmélete. A bővítéselmélet problémáival eddig legrészletesebben a csoportelméletben foglalkoztak, azonban kívánatos e vizsgálatokat más struktúrafajtákra is kiterjeszteni.

Csoportok esetében az ún. Zappa—Szép-féle bővítés problémája a következő: Legyen adva két A' és B' csoport. Meghatározandó az összes olyan G csoport, amelyre $G = AB$, ahol $A \simeq A'$, $B \simeq B'$. E problémát ZAPPA, CASADIO, RÉDEI és SZÉP teljesen megoldották. Számos eredmény ismeretes továbbá a faktorizálható, azaz Zappa—Szép-féle bővítéssel előálló csoportok szerkezetére és e bővítéselméletnek alkalmazásaira vonatkozóan. A fenti bővítésprobléma érdekes speciális esete az, amikor $A \cap B = 1$. Ennek a problémának gyűrűelméleti analogonjával foglalkozik SZÉP disszertációja.

Legyen A' és B' két tetszőleges gyűrű. Meghatározandó az összes olyan R gyűrű, amelyre

$$R = A + B, \tag{1}$$

ahol $A \simeq A'$ és $B \simeq B'$ az R gyűrű részgyűrűi s a $+$ jel a gyűrűk additív csoportjának direkt összegét jelöli. A dolgozat főeredménye e probléma megoldása. A szerző bizonyos kétváltozós függvények segítségével A'-ből és B'-ből egy R kétműveletes struktúrát konstruál, s megadja annak szükséges és elegendő feltételét, hogy R gyűrű legyen, s teljesüljön az (1) direkt felbontás. A dolgozat az izomorfizmus problémáját is megoldja, megadva annak szükséges és elegendő feltételét, hogy az A' és B' gyűrűkből konstruált (1)-nek eleget tevő R és R' gyűrűk izomorfok legyenek. A szerző a konstrukcióban szereplő függvények vizsgálatával foglalkozva, azoknak számos fontos tulajdonságát mutatja ki, továbbá felvilágosítást ad R-nek A-ban és B-ben foglalt legnagyobb bal-, ill. jobbideáljairól. Fontos megállapítást tartalmaz az a tétel, amely szerint a szereplő függvényeket elegendő ismerni az A' és

B' gyűrűk additív csoportjainak generátorelemeire. A dolgozat további részei alkalmazásokról és általánosításokról szólnak.

A jelölt előadása után az opponensek ismertették véleményüket. HAJÓS GYÖRGY akadémikus mindenekelőtt a csoportok és gyűrűk bővítéselméletének viszonyát fejtegeti. Rámutat arra a tényre, hogy míg az összeadás kommutativitása a problémát leegyszerűsíti, a másik gyűrűművelet más természetű nehézségeket okoz. SZÉP témaválasztását érdekesnek és újszerűnek tartja. Megjegyzi, hogy a dolgozatban a problémafelvetés sokrétű, de nem derül ki, hogy a szerző miért éppen ezeket a kérdéseket vizsgálja, s hogy e kérdések vizsgálata során miért nem megy tovább. Bár a szerző nem törekszik a teljességre, az elért eredmények érdekes párhuzamot mutatnak be a csoportelméleti és a gyűrűelméleti téma között.

RÉDEI LÁSZLÓ akadémikus hangsúlyozza a vizsgálatok aktuális voltát és érdekességét. Kiemeli, hogy a szerző figyelemre méltó nagy általánosságú tételek egész sorozatát nyeri, amelyeknek bizonyítása, az analógia ellenére is, a csoportelméleti probléma megoldásában használt módszerektől elütő eljárásokat igényel. Hiányolja, hogy a szerző megelégszik a minél nagyobb általánosságú megállapításokkal, s nem törekszik a speciális esetek vizsgálatára. A dolgozat tárgyalását világosnak tartja, bár megemlíti a megfogalmazás néhány hiányosságát.

FUCHS LÁSZLÓ professzor bírálatában megállapítja, hogy a dolgozat értékes úttörő munkát kezdeményezett a gyűrűk bővítésének egyik területén. A SZÉP-féle konstrukcióval kapcsolatos problémákat két kérdéskörben csoportosítja: az egyik, egy R gyűrű adott felbontásából és a komponensek tulajdonságaiból az R gyűrű szerkezetére következtetni, a másik pedig, adott komponensekből az összes R-ek előállítására törekedni. Bár hangsúlyozza, hogy ilyen újszerű kezdeményezéstől nem kérhető számon, hogy sok, az eredményekkel közvetlen kapcsolatban levő kérdésre nem terjed ki, mégis sajnálatosnak tartja, hogy a szerző szinte kizárólag a második kérdéskörrel foglalkozik. Véleménye szerint az első kérdéskör is számos mély eredmény elérésére nyújt alkalmat.

A dolgozatot mindhárom opponens doktori disszertációként való elfogadásra ajánlja.

Ezután SZÉP JENŐ válaszolt az opponensek bírálatára. Először a dolgozat ama hiányosságával kapcsolatos opponensi megjegyzésekre reflektált, hogy a dolgozat a felvetett problémakörhöz tartozó problémáknak csak egy részével foglalkozik, és sok, a tárgyhoz szorosan kapcsolódó kérdést meg sem említ. Részletesen kifejtette, hogy a dolgozat tárgyával kapcsolatban miért kellett magát szigorúan csupán két problémakörre korlátoznia. Hangsúlyozta azonban — ami egyébként dolgozatából is kiviláglik —, hogy a továbbiakban szisztematikusan tovább kíván haladni, elsősorban az analóg csoportelméleti probléma vizsgálatában kialakult sorrendnek megfelelően. Ezután sorra vette az opponensek egyes bíráló megjegyzéseit. Ezek egy részével egyetértett, a többiekkel kapcsolatban kifejtette saját felfogását. — Az opponensek SZÉP JENŐ válaszát elfogadták.

Ezután a hozzászólásokra került sor. RÉDEI LÁSZLÓ illusztráló példát kért a jelölttől, hogy a disszertáció részleteit nem ismerő jelenlevők számára is világos legyen a konstrukció. SZÉP JENŐ mutat ilyen példát. E sorok írója a terminológia kérdéséhez szólt hozzá, s rámutatott a SZÉP-féle konstrukció jelentőségére a gyűrűk struktúraelmélete szempontjából. Végül két elintézhetőnek látszó problémát vetett fel. SZENDREI JÁNOS kandidátus megjegyezte, hogy igen hasznosnak látja a jelölt által vizsgált problémák tárgyalásában a duplaleképezések használatát, továbbá megkérdezte, hogy a jelölt disszertációjában miért nem tárgyalja a probléma általános esetét. Miután csak SZENDREI kérdése igényelt választ, a jelölt megjegyezte, hogy az általános eset letárgyalásával várnia kell addig, amíg megfelelő példák nem állnak rendelkezésére.

A vita eredményeként a bírálóbizottság megállapította, hogy SZÉP JENŐ disszertációja az absztrakt algebra egyik fontos problémakörével foglalkozik. A dolgozat érdeme a csoportelméletben fontos szerepet játszó Zappa—Szép-féle szorzathoz analóg gyűrűelméleti konstrukció fogalmának bevezetése és az alapproblémák tisztázása. A dolgozat hiányossága, hogy az alkalmazásokból keveset mutat be. A szerző eddigi munkássága alapján azonban remélni lehet, hogy az általa bevezetett konstrukciónak további érdekes alkalmazásait fogja adni.

A Tudományos Minősítő Bizottság a bírálóbizottság javaslatára SZÉP JENŐt a matematikai tudományok doktorává nyilvánította.

Kertész Andor
a matematikai tudományok doktora

Bognár Mátyás kandidátusi értekezésének nyilvános vitája

BOGNÁR MÁTYÁS „*Topologikus terek beágyazása euklideszi terekbe*" című kandidátusi értekezésének nyilvános vitája 1957. július 15-én zajlott le a *Bolyai János Matematikai Társulat* helyiségében. ALEXITS GYÖRGY akadémikus elnökölt. Az értekezés opponensei FUCHS LÁSZLÓ, a matematikai tudományok doktora és SOÓS GYULA, a matematikai tudományok kandidátusa voltak.

Az elnöki megnyitó után a bírálóbizottság titkára ismertette BOGNÁR MÁTYÁS eddigi tudományos munkásságát, majd a jelölt előadta értekezésének téziseit. Mint kifejtette, disszertációjában azzal a kérdéssel foglalkozik, hogy hány dimenziós euklideszi térbe ágyazható be egy n dimenziós megszámlálható bázisú lokálisan kompakt kommutatív topologikus csoport. Topologikus csoportnak topologikus térbe való beágyazásán mindig a tekintett topologikus csoportnak mint topologikus térnek a másik topologikus tér valamely alterére történő kölcsönösen egyértelmű és kölcsönösen folytonos leképezését kell értenünk, figyelmen kívül hagyva a topologikus csoportban értelmezett csoportműveletet. A csoporttulajdonságnak ennek ellenére is lényeges szerepe van, minthogy fontos felvilágosítást nyújt a beágyazandó tér minőségéről és biztosítja egy nagy horderejű, igen hatékony elméletnek, a Pontrjagin-féle dualitáselméletnek, az alkalmazhatóságát.

A disszertáció főeredménye a következő tétel:

Minden n-dimenziós, megszámlálható bázissal rendelkező lokálisan kompakt kommutatív topologikus csoport beágyazható az $n+2$ dimenziós euklideszi térbe.

A kommutatív topologikus csoportok Pontrjagin-féle dualitáselmélete alapján BOGNÁR kimutatja, hogy a fenti tétel igazolásához elegendő a következő állítást bebizonyítani: legyen G egy n rangú $(1 \leqq n < \infty)$ kommutatív, legfeljebb megszámlálhatóan végtelen sok elemből álló csoport. Ekkor a G csoport karaktercsoportja beágyazható az $n+2$ dimenziós euklideszi térbe. Az állítás bizonyítása konstruktív jellegű. A szerző a van Dantzig-féle szolenoid konstrukciót variálva és általánosítva az $n+2$ dimenziós euklideszi térben megkonstruálja azt az n dimenziós ponthalmazt, amelybe az állításban szereplő absztrakt kommutatív csoport karaktercsoportjának topologikus terét homeomorf módon leképezi.

A disszertáció a főeredményt kiegészítő további beágyazási tételeket is tartalmaz. A szerző azt a kérdést vizsgálja, hogy mi a szükséges és elégséges feltétele annak, hogy egy n dimenziós megszámlálható bázissal rendelkező lokálisan kompakt kommutatív topologikus csoport már az n, illetve az $n+1$ dimenziós euklideszi térbe is beágyazható legyen. A dolgozat az n dimenziós esetre vonatkozó kérdést elintézi, bebizonyítván, hogy egy n dimenziós megszámlálható bázissal rendelkező lokálisan kompakt kommutatív topologikus csoport akkor és csak akkor ágyazható be az n dimenziós topologikus térbe, ha lokálisan összefüggő és komponensei nem kompaktak. BOGNÁR az $n+1$ dimenziós esetre vonatkozó kérdést is megvizsgálja, a dolgozatba azonban csak a feltételek elégségességének igazolását veszi fel, minthogy a szükségesség bizonyításának nagy terjedelme miatt e bizonyítást a jelen disszertációban csupán vázolni tudja. Ezzel teljesen megoldja az n dimenziós megszámlálható bázissal rendelkező lokálisan kompakt kommutatív topologikus csoportok euklideszi terekbe való beágyazásának problémáját.

A disszertáció téziseinek ismertetése után elsőnek HAJÓS GYÖRGY akadémikus, BOGNÁR MÁTYÁS aspiránsvezetője szólalt fel. Megemlítette, hogy BOGNÁR eredményei kis részletváltoztatásoktól eltekintve már kb. 3 évvel ezelőtt elkészültek. Minthogy egy problémakör teljes lezárásáról van szó, először, arra buzdította aspiránsát, hogy a teljes megoldást dolgozza ki disszertációjában. Végül mégis azt kellett tanácsolnia, hogy dolgozatát a „be nem ágyazhatósági tétel" nélkül nyújtsa be, minthogy ennek bizonyítása a dolgozat terjedelmét többszörösére emelte volna.

Ezután az opponensek ismertették bírálatukat. Mindkét opponens igen szerencsésnek ítélte meg BOGNÁR MÁTYÁS disszertációs témaválasztását. A topologia nincs olyan mértékben képviselve a hazai matematikai kutatásokban, amint azt fontossága és aktualitása miatt megérdemelné. Éppen ezért igen örvendetes, hogy BOGNÁR topologiai tárgyú és jelentős eredményeket tartalmazó disszertációja e hiányosságot pótolni célozza s új színfolttal gazdagítja a magyar matematikai kutatások széles spektrumát. Az opponensek a dolgozat értékelésében is egyetértenek. Mindketten kiemelik a főtétel fontosságát és méltányolják a disszertánsnak a főtétel bizonyításában nyújtott teljesítményét. Hangsúlyozandónak tartják a kiegészítő tételek érdekességét, azt a könnyedséget, amellyel a szerző a dualitáselmélet eredményeit alkalmazza, s azt a jártasságot, amely a topologia egyéb területeiről kölcsönzött eszközöknek a felhasználásában is megnyilvánul. FUCHS LÁSZLÓ a BOGNÁR által vizsgált és bizonyos értelemben lezárt kérdéskör különféle általánosításainak lehetőségét veti fel. Így például: lehet-e gyengíteni a lokális kompaktság feltételét, elejthető-e a megszámlálhatóság kikötése (a véges rang megtartása mellett), elhagyható-e a kommutativitás követelménye? További kérdés, hogy a topologikus csoport egy *k* dimenziós részterének az *l* dimenziós euklideszi térbe való folytonos, illetve topologikus leképezése az egész csoportnak hány dimenziós euklideszi térbe való leképezésévé terjeszthető ki? SOÓS GYULA a főtétel bizonyításának egyik részletében tesz az egyszerűsítésre javaslatot, majd — anélkül, hogy ezt a disszertáció értékelésének szempontjából lényegesnek tartaná — megemlíti a disszertációnak egyetlen hiányosságát, hogy ti. azt kisebb aránytalanság jellemzi. Ez egyrészt a bevezetés nagy terjedelmében, másrészt abban nyilvánul meg, hogy a dolgozat jól ismert fogalmak definícióit is tartalmazza, míg kevésbé ismert fogalmak definiálására csupán a lábjegyzetekben jut hely.

Mindkét opponens hangsúlyozza, hogy a tartalmas munka formailag is elismerést érdemel. A dolgozat minden részletén látszik, hogy szerzője nagy körültekintéssel és alapossággal fogalmazta munkáját, arra törekedvén, hogy a legapróbb részletek is világosak legyenek. Ennek köszönhető, hogy a dolgozat tanulmányozása a tárgy nehézsége ellenére sem válik fárasztóvá.

Az opponensek egybehangzó véleménye szerint Bognár Mátyás disszertációja kiválóan alkalmas arra, hogy vele szerzője a kandidátusi fokozatot elnyerje.

BOGNÁR MÁTYÁS válaszában megköszönve az opponensek munkáját, hozzászól a FUCHS LÁSZLÓ által felvetett problémákhoz. Ezeket részben megválaszolja, illetve reményt fűz az elintézésükhöz, részben nehéz problémáknak minősíti. Végül reflektál SOÓS GYULA megjegyzéseire. — Az opponensek a választ elfogadják.

Ezután néhány kérdésfeltevésre került sor. CSÁSZÁR ÁKOS megkérdezte, hogy az általános analitikus halmaz fogalma a jelölttől származik-e, vagy már szerepelt az irodalomban. ALEXITS GYÖRGY aziránt érdeklődött, hogy a jelölt eredményei alkalmazhatók-e homogén görbék beágyazási problémáiban. A jelölt válasza az első kérdésre az, hogy az irodalomban még nem találkozott a szóban forgó fogalommal, a másodikra pedig, hogy a tér homogénitása még nem biztosítja azt, hogy a tér topologikus csoport tere legyen, így az alkalmazhatóságnak bizonyos korlátai vannak. SOÓS GYULA kiegészítésképpen megjegyezte, hogy H. HOPF vizsgálatai nyomán már ismeretesek bizonyos feltételek arra nézve, hogy egy homogén topologikus tér topologikus csoport tere legyen.

A bírálóbizottság a lefolyt vita alapján megállapította, hogy BOGNÁR MÁTYÁS disszertációjának témáját a topologiának egyik igen érdekes, és előzmények szempontjából kevéssé kidolgozott területéről választotta. A szerző érdeme, hogy a tárgyul választott nehéz problémát teljes általánosságban tárgyalja és a megoldásban több újszerű gondolatot alkalmaz. A disszertáció eredményei közül különösen kiemelendő a jelentőségére is legfontosabb főtétel: ez és a hozzá csatlakozó kiegészítő tételek egy fontos problémakörnek lényegileg teljes lezárását jelentik. Ennek alapján a bizottság egyhangúlag javasolta a *Tudományos Minősítő Bizottságnak*, hogy BOGNÁR MÁTYÁSt nyilvánítsa a matematikai tudományok kandidátusává.

A *Tudományos Minősítő Bizottság* BOGNÁR MÁTYÁSt a matematikai tudományok kandidátusává nyilvánította.

Kertész Andor
a matematikai tudományok doktora

Technikai szerkesztő: Alpár László

A kiadásért felelős az Akadémiai Kiadó igazgatója Műszaki felelős: Farkas Sándor
A kézirat beérkezett: 1958. XII. 4. — Terjedelem: 9 (A/5) ív, 9 ábra

Szegedi Nyomda Vállalat 58-4747 Felelős vezető: Vincze György

Ára: 20,— Ft

TARTALOMJEGYZÉK

A TUDOMÁNYOS MINŐSÍTŐ BIZOTTSÁG HÍREI

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK

KÖZLEMÉNYEI

IX. KÖTET 2. SZÁM

AKADÉMIAI KIADÓ BUDAPEST

1959

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK
KÖZLEMÉNYEI

IX. kötet 2. szám

Szerkesztőség: Budapest, V., Széchenyi rakpart 3.
Kiadóhivatal: Budapest, V., Alkotmány utca 21.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei változó terjedelmű füzetekben jelennek meg és az Akadémia III. osztályának felolvasóülésein bemutatott matematikai dolgozatokat, valamint egyéb dolgozatokat, referátumokat, továbbá az osztály munkájára vonatkozó közleményeket, könyvismertetéseket stb. közölnek. Évenként egy kötet jelenik meg (négy szám alkot egy kötetet).

Kéziratok a következő címre küldendők:

A Magyar Tudományos Akadémia
III. Osztályának Közleményei.
Budapest, V., Széchenyi rakpart 3.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi levelezés.

Minden szerzőt 100 különlenyomat illet meg megjelent munkájáért.

Közlésre el nem fogadott kéziratokat a szerkesztőség lehetőleg visszajuttat a szerzőhöz, de felelősséget a beküldött kéziratok megőrzéséért vagy továbbításáért nem vállal.

A Közlemények előfizetési ára kötetenként belföldi címre 40 forint, külföldi címre 60 forint. Belföldi megrendelések az Akadémiai Kiadó, Budapest, V., Alkotmány u. 21. (Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 05-915-111-44), külföldi megrendelések a „Kultúra" Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalat, Budapest, VI., Népköztársaság útja 21. (Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 43-790-057-181) útján eszközölhetők.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztálya a következő idegen nyelvű folyóiratokat adja ki:

1. Acta Mathematica Hungarica
2. Acta Physica Hungarica.

VIZSGÁLATOK AZ OPERÁTORMODULUSOK ELMÉLETÉBEN, III.*

Írta: KERTÉSZ ANDOR

III. TELJESEN REDUKÁLHATÓ MODULUSOK

12. §. A teljesen redukálható modulusok jellemzése invariánsok segítségével

Dolgozatunknak e harmadik fejezetét a teljesen redukálható R-modulusok vizsgálatának szenteljük. Egy R-modulust *teljesen redukálhatónak* nevezünk, ha egyszerű R-modulusok direkt összegeként áll elő. A teljesen redukálható modulusok meglehetősen speciális szerkezete lehetővé tesz egy tüzetesebb vizsgálatot, s e modulus-kategóriának invariánsokkal való jellemzését. A jelen paragrafusban ezt a jellemzést adjuk meg.

Legyen R tetszőleges, de a jelen paragrafusban rögzített gyűrű. Mindenek előtt áttekintjük az összes egyszerű R-modulust. Ha A egyszerű R-modulus, akkor egyidejűleg egyszerű R^*-modulus is, és megfordítva. Az A egyszerű R-modulus $a\,(\neq 0)$ elemére az R^*a ciklikus részmodulus 0-tól különbözik, így $R^*a = A$. Az

$$\langle r, n\rangle \rightarrow \langle r, n\rangle a \qquad (\langle r, n\rangle \in R^*)$$

leképezés $R^*_{(R)}$-nek A-ra való homomorf leképezése. Ha L a homomorfizmus magja, akkor $L = O(a)$ és

$$R^*_{(R)}/L_{(R)} \cong A,$$

ahol L R^*-nak szükségképpen *maximális* balideálja. Megfordítva is világos, hogy ha L R^*-nak maximális balideálja, akkor $R^*_{(R)}/L_{(R)}$ egyszerű R-modulus. Következésképpen, *egy A R-modulus akkor és csak akkor egyszerű, ha izomorf valamely $R^*_{(R)}/L_{(R)}$ faktormodulussal, ahol L az R gyűrű valamely maximális balideálja.*

Megjegyezzük, hogy az A egyszerű R-modulus két $a\,(\neq 0), b\,(\neq 0)$ elemére általában $O(a) \neq O(b)$, azonban mindig fennáll $R^*_{(R)}/O(a)_{(R)} \cong R^*_{(R)}/O(b)_{(R)}$. Ha az R gyűrű kommutatív, akkor mindig $O(a) = O(b)$.

* A dolgozat I. része az MTA III. Osztálya Közleményei VIII/4 számában jelent meg (1958. 411—436. old.), a II. rész az MTA III. Osztálya Közleményei IX/1 számában jelent meg (1959. 15—50. old.). A fejezetek, paragrafusok számozása az előző részek számozásához kapcsolódik. Az irodalomjegyzéket az I. részben közöltük.

Most térjünk át a teljesen redukálható R-modulusok vizsgálatára. Az R^* gyűrű $L^{(1)}$ és $L^{(2)}$ balideáljait *ekvivaleseknek* nevezzük (jelben: $L^{(1)} \equiv L^{(2)}$), ha $R^*_{(R)}/L^{(1)}_{(R)} \simeq R^*_{(R)}/L^{(2)}_{(R)}$. Tekintsük az R^* gyűrű ekvivalens balideáljainak osztályait. Minden ilyen C osztályhoz hozzá rendelünk egy A R-modulust, éspedig R^*-nak valamely C-hez tartozó balideálja szerinti faktormodulusát, mint R-modulust. Ezt a modulust a C osztályhoz rendelt R-modulusnak mondjuk. Az egyszerű modulusokra vonatkozó fenti megjegyzésünk alapján nyilvánvaló, hogy ha $L^{(1)} \equiv L^{(2)}$ és $L^{(1)}$ maximális balideál R^*-ban, akkor $L^{(2)}$ is maximális balideál, tehát beszélhetünk a maximális balideálok osztályairól. Továbbá a maximális balideálok osztályai és a páronként nem izomorf egyszerű R-modulusok halmaza között kölcsönösen egyértelmű vonatkozás létesíthető a már tekintett hozzárendelés alapján.

Legyen Θ alkalmas indexhalmaz, amelynek elemeivel az R^* maximális balideáljainak osztályait indexeljük. Minden C_ϑ ($\vartheta \in \Theta$) osztályhoz tartozzék az A_ϑ egyszerű R-modulus, továbbá rendeljünk minden C_ϑ-hoz egy $\mathfrak{m}_\vartheta$ kardinális számot. Ezen a módon $[C_\vartheta, \mathfrak{m}_\vartheta](\vartheta \in \Theta)$ pároknak egy S rendszeréhez jutottunk. Mármost az összes (páronként különböző[43]) S rendszerek halmaza és az összes (páronként nem izomorf) teljesen redukálható R-modulusok halmaza között egy kölcsönösen egyértelmű vonatkozást létesíthetünk a következőképpen. Legyen S megadva. Tekintsük minden $\vartheta(\in \Theta)$ indexre az A_ϑ modulust annyi példányban, mint az $\mathfrak{m}_\vartheta$ számosság. Az így nyert modulusok direkt összege egy jól meghatározott teljesen redukálható R-modulus, s ezt a modulust rendeljük az S rendszerhez. Megfordítva, legyen G teljesen redukálható R-modulus és tekintsük G-nek egyszerű R-modulusok direkt összegére való valamely felbontását. E direkt felbontás alapján rendeljük G-hez azt az S rendszert, amelyben bármely $\vartheta(\in \Theta)$ indexre $\mathfrak{m}_\vartheta$ a C_ϑ osztályhoz tartozó A_ϑ R-modulussal izomorf direkt komponensek számossága az adott felbontásban. Ahhoz, hogy S a G modulust teljesen jellemző invariánsrendszer, még azt kell belátnunk, hogy G-nek egyszerű R-modulusok direkt összegeként való bármely más előállítása is ugyanahhoz az S rendszerhez vezet. Éppen ezt az állítást mondja ki a következő

26. TÉTEL:[44] *Legyen megadva a G teljesen redukálható R-modulusnak egyszerű R-modulusok direkt összegére való két felbontása. Ekkor a két felbontás direkt összeadandói között lehetséges egy olyan kölcsönösen egyértelmű vonatkozást létesíteni, amelyben az egymásnak megfelelő direkt összeadandók izomorfok.*

[43] A $[C_\vartheta, \mathfrak{m}_\vartheta]$ és $[C_\vartheta, \mathfrak{m}'_\vartheta]$ ($\vartheta \in \Theta$ rendszert akkor nevezzük különbözőnek, ha legalább egy $\vartheta_0 (\in \Theta)$ indexre $\mathfrak{m}_{\vartheta_0} \neq \mathfrak{m}'_{\vartheta_0}$.

[44] Ez a tétel — valamivel speciálisabb formában — szerepel N. JACOBSONnak a szerző [27] dolgozatával lényegében egyidőben megjelent [21] könyvében is.

Megjegyzés. A tétel állítása következik A. G. KUROS egy tételéből, amely a Jordan—Hölder—Schreier-féle tételt végtelen normálláncokra általánosítja (lásd [32], [33]). Mi a tételre egy közvetlen bizonyítást adunk, amely visszavezeti a kérdést a véges sok direkt összeadandó esetére.

A bizonyításban felhasználjuk a következő segédtételt:

SEGÉDTÉTEL:[45] *Legyen H az $A_1, A_2, \ldots, A_k$ egyszerű R-modulusok direkt összege. Ekkor H bármely $k+1$ eleme között van olyan, amely a többi k elem R^* feletti baloldali lineáris kombinációjaként áll elő.*

BIZONYÍTÁS: Legyen

$$H = A_1 + A_2 + \cdots + A_k, \tag{1}$$

s az (1) direkt felbontás alapján a tetszőleges H-beli $h_1, h_2, \ldots, h_k, h_{k+1}$ elemekre

$$h_i = \sum_{j=1}^{k} h_j^{(i)} \qquad (h_j^{(i)} \in A_j;\ i = 1, 2, \ldots, k+1).$$

Állításunk mindenesetre igaz, ha $k=1$. Tegyük fel, hogy igaz $k-1$-re is. Ha a h_i elemek mindegyike benne van a $H' = H_2 + \cdots + H_k (\subset H)$ részmodulusban, akkor indukciós feltevésünk értelmében készen vagyunk. Tegyük fel tehát, hogy pl. $h_1 \notin H'$. Ekkor $h_1^{(1)} \neq 0$, és mivel A_1 egyszerű R-modulus, az R^* gyűrűnek vannak olyan $\langle r_i, n_i \rangle$ elemei, amelyekre

$$h_1^{(i)} = \langle r_i, n_i \rangle h_1^{(1)} \qquad (i = 2, \ldots, k+1).$$

A

$$h_2' = h_2 - \langle r_2, n_2 \rangle h_1, \ldots, h_{k+1}' = h_{k+1} - \langle r_{k+1}, n_{k+1} \rangle h_1 \tag{2}$$

elemek valamennyien a H' részmodulusban vannak, s minthogy számuk k, indukciós feltevésünk értelmében fennáll egy

$$h_2' = \langle s_3, m_3 \rangle h_3' + \cdots + \langle s_{k+1}, m_{k+1} \rangle h_{k+1}' \tag{3}$$

reláció, amelyben a h_i' elemek indexelését alkalmasan választottuk meg. Helyettesítsük (2)-t (3)-ba, akkor

$$h_2 = (\langle r_2, n_2 \rangle - \langle s_3, m_3 \rangle \langle r_3, n_3 \rangle - \cdots - \langle s_{k+1}, m_{k+1} \rangle \langle r_{k+1}, n_{k+1} \rangle) h_1 +$$
$$+ \langle s_3, m_3 \rangle h_3 + \cdots + \langle s_{k+1}, m_{k+1} \rangle h_{k+1},$$

s ezzel a segédtétel bizonyítását befejeztük.

[45] A segédtétel bizonyítása arra a speciális esetre, amikor H maximális triviális részmodulusa 0, megtalálható [2]-ben.

A 26. TÉTEL BIZONYÍTÁSA: Legyen

$$G = \sum_{\nu \in \Gamma}{}' A_\nu, \tag{4}$$

$$G = \sum_{\mu \in \Delta}{}' B_\mu \tag{5}$$

a G modulus két olyan direkt felbontása, ahol A_ν ($\nu \in \Gamma$) és B_μ ($\mu \in \Delta$) egyszerű R-modulusok. A $(0 \neq) a_\nu (\in A_\nu)$ elemre (5) alapján fennáll az

$$a_\nu = b_{\mu_1} + \cdots + b_{\mu_k} \qquad (0 \neq b_{\mu_i} \in B_{\mu_i};\ i = 1, \ldots, k)$$

egyértelmű előállítás. Minthogy a_ν az A_ν modulus generáló eleme, nyilvánvalóan $A_\nu \subseteq \sum_{i=1}^{k}{}' B_{\mu_i}$. Továbbá, mivel A_ν egyszerű, A_ν-nek az (5) felbontás szerint B_{μ_i}-be való projekciója szükségképpen B_{μ_i}-re való izomorf leképezés, minthogy B_{μ_i} egyszerű R-modulus, s a homomorfizmus magja 0. Ebből látjuk, hogy az (5) direkt felbontásban van A_ν-vel izomorf direkt összeadandó, s A_ν benne van az összes ilyen direkt összeadandók direkt összegében. Ebből következik, hogy ha a (4), ill. az (5) direkt felbontásban fellépő A_ν-vel izomorf direkt összeadandók direkt összegét U-val, ill. V-vel jelöljük, $U = V$. Ha még megmutatjuk, hogy az U és V-beli direkt összeadandók számossága megegyezik, akkor a tétel bizonyításával készen vagyunk.

Ahhoz, hogy ezt az utóbbi állítást igazoljuk, elegendő megmutatnunk a következőt: *Ha a G R-modulus egyszerű R-modulusok $\mathfrak{n}$ számosságú halmazának direkt összege, akkor G-ben bármely $\mathfrak{n}$-nél nagyobb $\mathfrak{m}$ számosságú elemrendszer függő.* Ha $\mathfrak{n}$ véges, állításunk a segédtételből következik. Legyen $\mathfrak{n}$ végtelen kardinális szám és W egy $\mathfrak{m}$ számosságú G-beli elemrendszer úgy, hogy $\mathfrak{m} > \mathfrak{n}$. Megmutatjuk, hogy a W elemrendszer nem független. Tekintsük a G modulus összes olyan részmodulusainak T halmazát, amelyek a G tekintett direkt felbontásában fellépő direkt összeadandók közül véges soknak a direkt összegeként állnak elő. A W elemrendszer minden eleme benne van G-nek legalább egy olyan részmodulusában, amely a T halmaz eleme. Rendeljünk minden W-beli elemhez pontosan egy ilyen T-beli elemet. Ekkor a W halmazt egyértelműen leképeztük a T halmazba. Minthogy $\mathfrak{m} > \mathfrak{n}$, a 2. lemma alapján T-nek van olyan eleme, amely végtelen sok W-beli elem képe, tehát a W elemrendszernek van olyan végtelen részrendszere, amely benne van véges sok egyszerű R-modulus direkt összegében. Így a segédtétel alapján a W rendszer valóban nem független. Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

13. §. A teljesen redukálható modulusok további jellemzései

E paragrafus célja a következő tétel bizonyítása:

27. TÉTEL:[46] *Legyen R tetszőleges gyűrű és G egy R-modulus. G-re nézve ekvivalensek az alábbi tulajdonságok:*

a) *G teljesen redukálható modulus;*

b) *G-nek van maximális részmodulusa, s G összes maximális részmodulusainak metszete 0, továbbá G ciklikus részmodulusaira nézve minimumkövetelménynek tesz eleget;*

c) *G-t egyszerű részmodulusok generálják;*

d) *G bármely zérustól különböző elemének rendje R^* véges számú maximális balideáljának a metszete;*

e) *G bármely részmodulusa G-nek direkt összeadandója;*

f) *G bármely részmodulusa szerváns részmodulus G-ben;*

g) *G bármely maximális független elemrendszere G-nek bázisa.*

BIZONYÍTÁS: a)-*ból következik* b). Tegyük fel, hogy a G R-modulus az A_ν $(\nu \in \Delta)$ egyszerű R-modulusok direkt összege:

$$G = \sum_{\nu \in \Delta} A_\nu .$$

Ekkor nyilvánvaló, hogy $M_\mu = \sum_{\nu \in \Delta, \nu \neq \mu} A_\nu$ maximális részmodulus G-ben és az összes ilyen M_μ $(\mu \in \Delta)$ maximális részmodulusok metszete 0. Továbbá G-nek bármely 0-tól különböző eleme benne van véges sok egyszerű R-modulus direkt összegében. Egy ilyen direkt összegben azonban már mindig teljesül a minimumkövetelmény, s így a G ciklikus részmodulusaira nézve minimumkövetelménynek tesz eleget.

b)-*ből következik* c). Legyen a G modulus M_λ $(\lambda \in \Delta)$ maximális részmodulusainak metszete 0, és teljesüljön G-ben a ciklikus részmodulusokra vonatkozó minimumkövetelmény. Megmutatjuk, hogy G bármely g eleme benne van egyszerű részmodulusok direkt összegében, amiből c) már következik.

Feltevéseink szerint a $\{g\}$ ciklikus részmodulus tartalmaz egyszerű R-modulust: legyen pl. H_1 $\{g\}$-nek egyszerű részmodulusa. Ekkor van olyan M_{λ_1}, amelyre $H_1 \cap M_{\lambda_1} = 0$ s így a $H_1 + M_{\lambda_1}$ direkt összeg létezik és éppen egyenlő G-vel. Legyen ebben a direkt felbontásban $g = h_1 + m_1$. Ekkor $\{g\} = \{h_1\} + \{m_1\}$. Ha $\{m_1\}$ egyszerű részmodulus, akkor már készen is vagyunk a bizonyítással. Ha $\{m_1\}$ nem egyszerű, akkor biztosan tartalmaz

[46] Az a), c) és e) feltételek ekvivalenciája már korábban ismeretes. (Lásd pl. [18].)

egy H_2 egyszerű részmodulust, és így az előzőkhöz hasonlóan egy $\{g\} = \{h_1\} + \{h_2\} + \{m_2\}$ felbontást kapunk, ahol $\{h_1\}$ és $\{h_2\}$ már egyszerű modulusok. Ezzel az eljárással azonban véges sok lépésben egyszerű $\{m_i\}$ részmodulushoz kell jutnunk, hiszen

$$\{g\} \supset \{m_1\} \supset \{m_2\} \supset \ldots$$

részmodulusoknak szigorúan csökkenő lánca.[47]

c)-*ből következik* d). Generálják G-t az $A_\nu \, (\nu \in \Delta)$ egyszerű részmodulusok. Ha G-nek g tetszőleges zérustól különböző eleme és $g \in \{A_{\nu_1}, \ldots, A_{\nu_k}\}$, akkor feltehetjük, hogy

$$(6) \qquad \{A_{\nu_1}, \ldots, A_{\nu_k}\} = A_{\nu_1} + \cdots + A_{\nu_k}$$

és g-nek (6) szerinti előállítása

$$g = a_{\nu_1} + \cdots + a_{\nu_k} \qquad (0 \neq a_{\nu_i} \in A_{\nu_i}, \, i = 1, \ldots, k).$$

Mivel g-t R^*-nak pontosan azok az elemei annullálják, amelyek g-nek minden a_{ν_i} komponensét annullálják,

$$O(g) = O(a_{\nu_1}) \cap \cdots \cap O(a_{\nu_k});$$

mivel pedig $O(a_{\nu_1}), \ldots, O(a_{\nu_k})$ maximális balideálok R^*-ban, állításunkat bebizonyítottuk.

d)-*ből következik* e). Tegyük fel, hogy a G modulus bármely zérustól különböző g elemének rendje

$$(7) \qquad O(g) = L_1 \cap \cdots \cap L_k = D$$

alakban írható, ahol $L_1, \ldots, L_k$ R^*-nak maximális balideáljai. Megmutatjuk, hogy G tetszőleges H részmodulusa direkt összeadandó. Legyen K maximális G azon részmodulusai között, amelyeknek H-val való metszete 0. (Ilyen K létezését ZORN lemmája biztosítja.) Állítjuk, hogy

$$G = H + K.$$

Ehhez elegendő belátnunk azt, hogy G bármely zérustól különböző g eleme benne van $H + K$-ban. (7)-ből következik, hogy az $R^*_{(R)}/D_{(R)}$ modulus $L_{1(R)}/D_{(R)}, \ldots, L_{k(R)}/D_{(R)}$ maximális részmodulusainak metszete 0, s így az 1 lemma szerint $R^*_{(R)}/D_{(R)}$ véges sok egyszerű R-modulus direkt összege. Másrészt ugyancsak (7) miatt $\{g\} \cong R^*_{(R)}/D_{(R)}$, s így $\{g\}$ is előállítható pl. a

[47] A bizonyítás mutatja, hogy az a) és b) feltételek ekvivalenciája a következő élesebb formában is igaz: *Legyen φ olyan tulajdonság, amely egyszerű modulusokra van definiálva. Egy G modulus akkor és csak akkor φ-tulajdonságú egyszerű modulusok direkt összege, ha G ciklikus részmodulusaira nézve minimumkövetelménynek tesz eleget és vannak benne olyan M_γ maximális részmodulusok, amelyeknek metszete 0 és amelyekre minden G/M_γ faktormodulus φ-tulajdonságú.*

$B_1, \ldots, B_k$ egyszerű részmodulusok direkt összegeként: $\{g\} = B_1 + \cdots + B_k$. Ámde K maximalitása miatt $B_j \cap (H+K) \neq 0$, s így $B_j \cap (H+K) = B_j$, amiből már következik, hogy $(B_1 + \cdots + B_k) \subseteq (H+K)$, azaz $g \in (H+K)$.

e)-*ből következik* f), hiszen minden direkt összeadandó egyben szerváns részmodulus is.

f)-*ből következik* g). Legyen $S = (\ldots, b_\nu, \ldots)_{\nu \in \Delta}$ maximális független elemrendszer G-ben, és vezessük be a $H = \sum_{\nu \in \Delta} \{b_\nu\}$ jelölést. Megmutatjuk, hogy G bármely g eleme benne van H-ban, s így $G = H$. A $g + H$ mellékosztálynak (mint a G/H faktormodulus egyik elemének) rendje az R^* gyűrű egy L balideálja. A 11. tétel szerint $g + H$ tartalmaz olyan $g' = g + h$ $(h \in H)$ elemet, amelynek rendje ugyancsak L. Mivel $\langle r, n \rangle h \in H$ minden $\langle r, n \rangle$ $(\in R^*)$-re, $\langle r, n \rangle g' = \langle r, n \rangle g + \langle r, n \rangle h \in H$ csak akkor állhat, ha $\langle r, n \rangle \in L$. Ámde minden ilyen $\langle r, n \rangle$ $(\in L)$-re $\langle r, n \rangle g' = 0$, s így $\{g'\} \cap H = 0$; ebből viszont S maximális volta miatt $g' = 0$, $g = -h \in H$ következik.

g)-*ből következik* a). Bebizonyítjuk, hogy ha G-nek minden maximális független elemrendszere bázisa, akkor G egyszerű R-modulusok direkt összege. A bizonyítás magva annak igazolása, hogy egy g)-tulajdonságú modulus bármely ciklikus részmodulusa tartalmaz egyszerű részmodulust. Tegyük fel ugyanis, hogy ez igaz, s rögtön látni fogjuk, hogy ebből már következik a bizonyítandó állítás. Legyen U G azon elemeinek halmaza, amelyek (egyenként) egyszerű részmodulusokat generálnak, s legyen S U-beli elemek maximális független rendszere. S G-ben is maximális független rendszer, hiszen G bármely elemének ciklikusa tartalmaz egyszerű részmodulust, s ennek már minden eleme függ S-től. g) szerint azonban S bázisa is G-nek, s így G egyszerű modulusok direkt összege.

Azt kell tehát igazolnunk, hogy egy g)-tulajdonságú modulus bármely ciklikus részmodulusa tartalmaz egyszerű részmodulust. Mindenek előtt megmutatjuk, hogy g)-tulajdonságú modulus összes részmodulusai is g)-tulajdonságúak. Legyen $V = (\ldots, a_\nu, \ldots)_{\nu \in \Delta}$ a G modulus tetszőleges H részmodulusának maximális független elemrendszere. Egészítsük ki V-t alkalmas $b_\mu (\mu \in \Gamma)$ elemekkel G-nek egy W maximális független rendszerévé. Feltevés szerint W G-nek bázisa, azaz

$$G = \sum_{\nu \in \Delta} \{a_\nu\} + \sum_{\mu \in \Gamma} \{b_\mu\}. \tag{8}$$

Ebből már következik $H = \sum_{\nu \in \Delta} \{a_\nu\}$, hiszen V maximalitása miatt kell, hogy H bármely elemének (8) szerinti előállításában a $\sum_{\mu \in \Gamma} \{b_\mu\}$-beli komponens egyenlő legyen zérussal.

Legyen végre g tetszőleges eleme a g)-tulajdonságú G R-modulusnak. Ekkor a $\{g\}=K$ részmodulus is rendelkezik a g) tulajdonsággal. Ha K maga nem egyszerű modulus, akkor van zérustól különböző valódi részmodulusa, pl. K_1. Legyen $0 \neq g_1 \in K_1$ és S_1 egy g_1-et tartalmazó, K-ban maximális független elemrendszer. S_1 legalább két elemből áll, hiszen S_1 bázisa, $\{g_1\}$ $(\subseteq K_1)$ pedig valódi részmodulusa K-nak. Ha $\{g_1\}$ még mindig nem egyszerű modulus, akkor tartalmaz egy $K_2(\neq 0)$ valódi részmodulust. Legyen $0 \neq g_2 \in K_2$. Mivel g_2 és az S_1 rendszer g_1-től különböző elemei függetlenek, konstruálhatunk K-ban egy legalább háromelemű S_2 maximális független elemrendszert. Ezt az eljárást folytatva véges sok lépésben el kell jutnunk K egy egyszerű részmodulusához. Ellenkező esetben ugyanis K-nak egy végtelen sok elemből álló maximális független elemrendszeréhez, azaz végtelen sok elemből álló bázisához jutnánk, ez azonban lehetetlen, hiszen g nem generálhatja végtelen sok modulus direkt összegét.

Ezzel a 27. tétel bizonyítását befejeztük.

Megemlítjük, hogy a c) és e) tulajdonságokból közvetlenül leolvasható a teljesen redukálható modulusoknak az a fontos tulajdonsága, hogy egy ilyen modulusnak *minden homomorf képe és minden részmodulusa is teljesen redukálható.*

Még egy megjegyzést teszünk itt, a teljesen redukálható modulusok endomorfizmusgyűrűivel kapcsolatban. Bebizonyítjuk, hogy

egy G teljesen redukálható R-modulus $\mathfrak{E}(G)$ teljes endomorfizmusgyűrűjének Jacobson-féle radikálja mindig 0.[48]

Legyen $G=\sum_{\nu}'\{a_\nu\}$, ahol minden a_ν elem egyszerű R-modulust generál. G endomorfizmusait jobboldali operátoroknak tekintjük és a $\varrho, \sigma, \ldots$ görög betűkkel jelöljük. Legyen $M(a_\nu)$ a G modulus összes olyan endomorfizmusainak halmaza, amelyek a_ν-t 0-ra képezik le. $M(a_\nu)$ nyilván jobbideál $\mathfrak{E}(G)$-ben. Mivel $\mathfrak{E}(G)$ egységelemes gyűrű s egy ilyen gyűrűben a Jacobson-féle radikál az összes maximális jobbideál metszete [20], elegendő igazolnunk azt, hogy $M(a_\nu)$ maximális jobbideál $\mathfrak{E}(G)$-ben. Ekkor ugyanis $\cap_\nu M(a_\nu)=0$ miatt $\mathfrak{E}(G)$ összes maximális jobbideáljának metszete méginkább 0.

Annak igazolására, hogy $M(a_\nu)$ maximális jobbideál $\mathfrak{E}(G)$-ben, megmutatjuk, hogy bármely $\varrho \notin M(a_\nu)$ endomorfizmusra a ϱ és $M(a_\nu)$ által generált jobbideál tartalmazza az $\mathfrak{E}(G)$ gyűrű ε egységelemét. $a_\nu\varrho \neq 0$ miatt az $a_\nu \rightarrow a_\nu\varrho$ leképezés az $\{a_\nu\}$ modulusnak $\{a_\nu\varrho\}$-ra való izomorf leképezése.

[48] Legyen R tetszőleges gyűrű. Az R gyűrű valamely x elemét kvázireguláris elemnek nevezzük, ha R-ben van olyan y elem, amelyre $x+y+yx=0$ teljesül. Az R gyűrű összes olyan r elemeinek $J(R)$ halmazát, amelyekre bármely $s(\in R)$ esetén sr kvázireguláris, az R gyűrű *Jacobson-féle radikáljának* nevezzük.

Legyen ϱ^* ennek a leképezésnek az inverze, amely tehát az $\{a_\nu \varrho\}$ modulust úgy képezi le $\{a_\nu\}$-re, hogy $a_\nu \varrho \rightarrow a_\nu$. Minthogy $\{a_\nu \varrho\}$ direkt összeadandó G-ben, ϱ^* kiterjeszthető G-nek egy olyan σ endomorfizmusává, amelyre $(a_\nu \varrho)\sigma = a_\nu$. Ekkor $a_\nu(\varrho\sigma - \varepsilon) = 0$, $(\varrho\sigma - \varepsilon) \in M(a_\nu)$, s így ε valóban benne van az $M(a_\nu)$ és ϱ által generált jobbideálban.[49]

14. §. A duális probléma

Már a 11. §-ban is láttuk, hogy a féligegyszerű gyűrűk mint operátortartományok nevezetes tulajdonságokkal rendelkeznek. Ebben a paragrafusban megmutatjuk, hogy a teljesen redukálható operátormodulusokkal kapcsolatban felvetett duális probléma szintén a féligegyszerű gyűrűk osztályához vezet. Egy idevonatkozó korábbi eredmény O. GOLDMAN következő tétele [18]: *Egy R gyűrű akkor és csak akkor féligegyszerű, ha bármely R-modulus maximális triviális részmodulusának és egy teljesen redukálható R-modulusnak direkt összegeként áll elő.* Mi egy hasonló jellegű kritériumot fogunk bebizonyítani, miközben egyszerű bizonyítást nyerünk GOLDMAN tételére is.

Mindenek előtt bebizonyítunk két lemmát:

6. LEMMA: *Egy tetszőleges R gyűrű féligegyszerű, ha R bármely L balideálja és a tetszőleges G R-modulus bármely g eleme esetén Lg szerváns részmodulus G-ben.*[50]

BIZONYÍTÁS: Tegyük fel, hogy az R gyűrűre a lemmában kimondott feltétel teljesül és legyen L R-nek tetszőleges balideálja. Tekintsük most speciálisan az $R^*_{(R)}$ modulust. A $H = L\langle 0, 1\rangle$ részmodulus, amely az összes $\langle l, 0\rangle (l \in L)$ alakú elemekből áll, feltevésünk szerint $R^*_{(R)}$-ben szerváns részmodulus. Az összes $l (\in L)$-re felírt

$$\langle l, 0\rangle x = \langle l, 0\rangle \qquad (l \in L) \tag{9}$$

egyenlet olyan H feletti egyenletrendszert alkot, amelynek $\langle 0, 1\rangle$ nyilvánvalóan megoldása, így van olyan $\langle e, 0\rangle (\in H)$ elem is, amelyre (9) teljesül. Ebből következik, hogy bármely $l (\in L)$ elemre fennáll az $le = l$ reláció, azaz e L-ben jobboldali egységelem, tehát R valóban féligegyszerű gyűrű.

[49] A fentiekben a teljesen redukálható modulusok endomorfizmus-gyűrűjének csupán egyetlen tulajdonságát mutattuk ki, azonban adott esetben az endomorfizmusgyűrű megszerkesztése sem nehéz. Az eljárás hasonló ahhoz, amely [44]-ben megtalálható a véges sok egyszerű R-modulus direkt összegeként előálló modulusok esetére. Eredményképpen az adódik, hogy teljesen redukálható modulus endomorfizmusgyűrűje ferdetestek feletti matrixgyűrűk direkt összegével izomorf.

[50] A lemma állítása meg is fordítható: *minden féligegyszerű gyűrű kielégíti a lemmában megadott feltételt.* (Lásd [26]). Minthogy azonban ezt a tényt nem fogjuk felhasználni, a bizonyítást is mellőzzük.

7. LEMMA: *Ha R féligegyszerű gyűrű, akkor minden unitér R-modulus teljesen redukálható.*

BIZONYÍTÁS: Legyen R féligegyszerű gyűrű és G tetszőleges unitér R-modulus. Megmutatjuk, hogy G bármely H részmodulusa G-nek direkt összeadandója, tehát a 27. tétel alapján G teljesen redukálható. Legyen K a $H \cap K$ tulajdonságra nézve maximális részmodulus G-ben. Megmutatjuk, hogy G bármely g eleme benne van a $H+K$ direkt összegben. Az összes olyan $r(\in R)$ elemek, amelyekre $rg \in H+K$, R-nek egy Q balideálját alkotják. Legyen e a Q jobboldali egységeleme. Ekkor a $g-eg$ elem $R(g-eg)$ ciklusának és $H+K$-nak csupán a 0 közös eleme, minthogy $r \in Q$ esetén $r(g-eg)=0$ és $r \notin Q$ esetén $r(g-eg) \notin H+K$. Ezért a K-ra kirótt maximalitás miatt $g-eg=0$, $g=eg \in H+K$. Ezzel a lemmát bebizonyítottuk.

Most bebizonyítunk egy tételt, amely a 27. tétel alapján O. GOLDMAN már idézett tételét is magába foglalja.

28. TÉTEL: *Egy tetszőleges R gyűrű akkor és csak akkor féligegyszerű, ha bármely G R-modulusra fennáll egy $G=G_0+G_1$ direkt felbontás, ahol G_0 egy triviális, G_1 pedig a 27. tétel* a)—g) *feltételeinek bármelyikét kielégítő R-modulus.*

BIZONYÍTÁS: Először tegyük fel, hogy az R gyűrűre bármely R-modulus $G_1=G_0+G_1$ alakú, ahol G_0 triviális R-modulus és G_1-re teljesül a 27. tétel f) feltétele.[51] Elegendő megmutatnunk, hogy R tetszőleges L balideáljára és G tetszőleges g elemére az Lg modulus G-nek szerváns részmodulusa, minthogy ekkor a 6. lemma szerint R féligegyszerű gyűrű. A fenti direkt felbontás alapján legyen g előállítása: $g=g_0+g_1$ $(g_0 \in G_0; g_1 \in G_1)$. Ekkor $Lg=Lg_0+Lg_1=Lg_1 \subseteq G_1$, s így az f) feltétel alapján Lg szerváns részmodulus G_1-ben. Mivel pedig G_1 G-nek direkt összeadandója, Lg G-ben is szerváns részmodulus.

Ha másrészt R féligegyszerű gyűrű, a Peirce-féle felbontás alapján bármely R-modulus maximális triviális részmodulusának és egy unitér R-modulusnak direkt összege. A 7. lemma alapján az unitér direkt összeadandó teljesen redukálható, tehát a tételt bebizonyítottuk.

Ez a tétel is mutatja, hogy a féligegyszerű gyűrű fogalma milyen fontos és mindamellett milyen természetes általánosítása a ferdetest fogalmának; olyan általánosítás, amely még megőrzi a ferdetest számos nevezetes tulajdonságát. Az a)—g) feltételek a ferdetest feletti vektorterek legfontosabb tulajdonságait fejezik ki, s ezek a tulajdonságok érvényben vannak olyan unitér modulusok esetében is, amelyeknek operátortartománya féligegyszerű gyűrű.

[51] Minthogy a 27. tétel alapján az a)—g) feltételek ekvivalensek, elegendő közülük csupán egyet figyelembe venni.

15. §. Gyűrűelméleti alkalmazások

A 27. tétel, az 1. és 7. lemma alkalmazásaként bebizonyítjuk, a következő gyűrűelméleti tételt:

29. TÉTEL: *Egy R gyűrű akkor és csak akkor féligegyszerű, ha*

(I) *van jobboldali egységeleme és*

(II) *a következő feltételek bármelyike teljesül:*

a′) *R minimális balideáljainak direkt összege;*[52]

b′) *R-nek van véges sok olyan maximális balideálja, amelyeknek a metszete* 0;

c′) *R összeesik a „socle"-jával, azaz R-et minimális balideáljai generálják;*

d′) *R bármely 0-tól különböző elemének baloldali annihilátora az R gyűrű véges sok maximális balideáljának a metszete;*

e′) *R bármely L baideáljához van R-nek olyan K balideálja, hogy $R_{(R)}=L_{(R)}+K_{(R)}$;*

f′) *R-nek bármely balideálja szervánS balideál R-ben;*[53]

g′) *$R_{(R)}$ bármely maximális független elemrendszere $R_{(R)}$-nek bázisa.*

BIZONYÍTÁS: Mindenek előtt megmutatjuk, hogy az (I) feltevés mellett az a′)—g′) feltételek ekvivalensek.

Az a′) $\Longrightarrow$ b′) és b′) $\Longrightarrow$ c′) implikációk az 1. lemma közvetlen következményei.

Tegyük fel, hogy c′) teljesül. Ekkor R-re fennáll egy

$$R=L_1+\cdots+L_k \tag{10}$$

direkt felbontás, ahol $L_i\,(i=1,\ldots,k)$ R-nek minimális balideálja. Megmutatjuk, hogy az R gyűrű e jobboldali egységeleme (kétoldali) egységelem. Tekintsük e-nek a (10) alapján való

$$e=e_1+\cdots+e_k \qquad (e_i=L_i)$$

előállítását. Mivel ekkor $L_i=Re_i$, L_i minimálitása miatt L_i bármely $l_i\,(\neq 0)$ elemére $Rl_i=L_i$. Legyen most r R-nek tetszőleges eleme. Az $r-er$ elem (10) szerint

$$r-er=l_1+\cdots+l_k \qquad (l_i\in L_i)$$

alakban áll elő. Az l_i elemhez a fentiek szerint van olyan $s_i\,(\in R)$ elem, hogy $s_i l_i=l_i$. Ekkor

$$0=s_i(e-er)=s_i l_1+\cdots+l_i+\cdots+s_i l_k$$

[52] Az (I) feltételből következik, hogy a direkt összeadandók száma egy ilyen felbontásban véges.

[53] Az R gyűrű L balideálját *szerváns balideálnak* nevezzük, ha $L_{(R)}$ szerváns részmodulus $R_{(R)}$-ben.

mutatja, hogy $l_i = 0 \, (i = 1, \ldots, k)$, tehát e (kétoldali) egységelem R-ben. — Minthogy R bármely r elemét R-nek azok és csak azok az elemei annullálják, amelyek a tekintett elemnek a (10) direkt felbontás szerinti valamennyi komponensét annullálják, a d′) feltétel teljesülésének belátáshoz elegendő megmutatnunk, hogy az L_i tetszőleges 0-tól különböző a_i elemének A baloldali annihilátora R-nek maximális balideálja. Legyen $s \in R, s \notin A$. (Ilyen s elem biztosan létezik, mivel $Ra_i = L_i$.) Ekkor $0 \neq sa_i \, (\in L_i)$, $Rsa_i = L_i$, tehát van olyan $t(\in R)$ elem, hogy $tsa_i = a_i$, azaz $(e - ts) a_i = 0$. Így $e - ts \in A$, azaz $e \in \{A, s\}$, tehát $\{A, s\} = R$. Azt nyertük, hogy A R-nek maximális balideálja, s ezzel a c′) $\Longrightarrow$ d′) implikációt bebizonyítottuk.

Most tegyük fel, hogy d′) teljesül. Ekkor minthogy az R gyűrű e jobboldali egységelemének baloldali annihillátora 0, R-nek van véges sok olyan maximális balideálja, amelyeknek a metszete 0. Ezért R az 1. lemma alapján minimális balideáljainak direkt összege, s így a 27. tételt a $G = R_{(R)}$ esetre alkalmazva adódik e′).

Az e′) $\Longrightarrow$ f′) $\Longrightarrow$ g′) $\Longrightarrow$ a′) implikációkat úgy nyerjük, hogy a 27. tételt a $G = R_{(R)}$ esetre alkalmazzuk.

Ezzel bebizonyítottuk, hogy ha (I) fennáll, akkor az a′)—g′) feltételek ekvivalensek. Most megmutatjuk, hogy R akkor és csak akkor féligegyszerű, ha (I) és (II) teljesül. Legyen először R féligegyszerű gyűrű, s tekintsük az R gyűrű e jobbegységelemére az összes $r - er \, (r \in R)$ elemekből álló L balideált. Minthogy

$$s(r - er) = sr - sr = 0$$

az L balideálban csupán a 0 lehet jobboldali egységelem, azaz szükségképpen $L = 0$. Tehát e kétoldali egységelem. Minthogy ekkor $R_{(R)}$ unitér R-modulus, a 7. lemma alapján minimális balideálok direkt összege, s így az a′)—g′) tulajdonságok ekvivalenciája miatt R-re az a′)—g′) mindegyike teljesül. — Megfordítva, legyen R olyan jobbegységelemes gyűrű, amelyre f′) teljesül. Ha L R-nek tetszőleges balideálja, akkor az $lx = l \, (l \in L)$ egyenletrendszer R-ben megoldható. Így f′) alapján van olyan $e_0 (\in L)$ elem, amelyre $le_0 = l$ minden $l(\in L)$ esetén. Az e_0 elem tehát L-nek jobbegységeleme, azaz R féligegyszerű gyűrű.

FÜGGELÉK

Egy radikál-fogalom az operátormodulusok elméletében

Ismeretes, hogy a nem kommutatív gyűrűk elméletében milyen fontos szerepet töltenek be a különféle radikál-fogalmak. E fogalmak eredete J. H. M. WEDDERBURN klasszikus [45] dolgozatáig vezethető vissza. A radikál általában a gyűrű olyan ideálja, hogy a szerinte vett faktorgyűrű már radikálmentes, tehát radikálja a zérusideál, továbbá a radikálmentes gyűrűk a klaszszikus féligegyszerű gyűrűk általánosításai abban az értelemben, hogy az egyszerű gyűrűk kategóriájához közel eső gyűrűtípusok szubdirekt összegeként állíthatók elő.

Az alábbiakban operátormodulusok esetére definiáljuk a radikál fogalmát, s megmutatjuk, hogy ez a fogalom hasonló szerepet tölt be a modulusok elméletében, mint a Jacobson-féle radikál a gyűrűelméletben.

Legyen G tetszőleges R-modulus. Azoknak az $x(\in G)$ elemeknek az összességét, amelyekre Rx benne van G minden maximális részmodulusában, $\mathfrak{R}(G)$-vel jelöljük és a G modulus *radikáljának* nevezzük. Ha G-nek nincs maximális részmodulusa, akkor $\mathfrak{R}(G)=G$ legyen. Ebben az esetben azt mondjuk, hogy G *radikál-modulus.* Ha $\mathfrak{R}(G)=0$, akkor G-t *radikálmentes modulusnak* nevezzük.

A definícióból nyilvánvaló, hogy bármely modulusnak van radikálja, s a radikál mindig részmodulus. Továbbá egy G modulus maximális triviális részmodulusa mindig benne van a radikálban.

Jelöljük $\Phi(G)$-vel a G modulus mindazon x elemeinek halmazát, amelyekre bármely $r(\in R)$ esetén rx törölhető G bármely generátor-rendszeréből. A $\Phi(G)$ elemhalmaz a G egy jól definiált részmodulusa, amelyet G *Φ-részmodulusának* nevezünk. Bebizonyítjuk a következő tételt:

30. TÉTEL: *Ha a G R-modulus nem radikál-modulus, akkor bármely x elemére ekvivalensek az alábbi feltételek:*

a) $x\in\mathfrak{R}(G)$;

b) $x\in\Phi(G)$;

c) *x eleme G összes homoperfekt maximális részmodulusának.*

BIZONYÍTÁS: *Ha* a) *nem teljesül, akkor* b) *sem.* Legyen ugyanis M maximális részmodulusa G-nek és $rx\notin M$. Ekkor $M\subset\{rx, M\}=G$ tehát $x\notin\Phi(G)$.

Ha b) *nem teljesül, akkor* c) *sem.* Legyen S olyan elemrendszere G-nek, hogy

$$\{rx, S\}=G \tag{1}$$

és $rx \notin \{S\}$, továbbá, H olyan részmodulus G-ben, amelyre $\{S\} \subseteq H$, $rx \notin H$, s amely maximális e tuljdonságokra nézve. Ekkor H homoperfekt maximális részmodulusa G-nek. A maximalitás onnan adódik, hogy tetszőleges $y \notin H$ esetén $rx \in \{y, H\}$, ebből pedig figyelembe véve, hogy $S \subseteq H$, az $\{y, H\} = G$ egyenlőség következik. Az $rx \notin H$ reláció mutatja a H részmodulus homoperfekt voltát. Ugyanebből a relációból természetesen az is következik, hogy $x \notin H$.

Ha c) *nem teljesül akkor* a) *sem.* Tegyük fel, hogy x nem eleme a H homoperfekt maximális részmodulusnak. Ekkor van olyan $r(\in R)$ elem, amelyre $rx \notin H$, így $x \notin \mathfrak{R}(G)$.

Ebből a tételből számos korolláriumot vezetünk le. Mindenekelőtt mint közvetlen következményt megemlítjük, hogy *G akkor és csak akkor radikálmodulus, ha nem tartalmaz homoperfekt maximális részmodulust.* Ebből a közönséges Abel-féle csoportok speciális esetére adódik, hogy *egy Abel-féle csoport mint unitér E-modulus akkor és csak akkor radikál-csoport, ha algebrailag zárt* (lásd [15]) továbbá, hogy *bármely Abel-féle csoport mint 0-modulus radikálcsoport.*

Legyen H G-nek tetszőleges részmodulusa. Minthogy G bármely N homoperfekt maximális részmodulusára $N \cap H$ vagy egyenlő H-val, vagy H-nak homoperfekt maximális részmodulusa, a 30. tételből adódik, hogy $\mathfrak{R}(H) \subseteq H \cap \mathfrak{R}(G)$. Ha H G-nek direkt összeadandója: $G = H + K$, akkor $\mathfrak{R}(H) = H \cap \mathfrak{R}(G)$. Ekkor ugyanis H bármely M homoperfekt maximális részmudulusa esetén $M + K$ homoperfekt maximális részmodulusa G-nek, s így az $\mathfrak{R}(H) \supseteq H \cap \mathfrak{R}(G)$ reláció is fennáll. Ebből következik, hogy ha $G = \sum_\nu H_\nu$, akkor $\mathfrak{R}(G) \supseteq \sum_\nu \mathfrak{R}(H_\nu)$. Másrészt $\mathfrak{R}(G) \subseteq \sum_\nu \mathfrak{R}(H_\nu)$; ugyanis, ha a $g = h_{\nu_1} + \cdots + h_{\nu_k}$ $(h_{\nu_i} \in H_{\nu_i})$ elemre $rg\,(r \in R)$ a G bármely generátorrendszeréből törölhető, akkor az rh_{ν_i} elem is törölhető H_{ν_i} bármely generátorrendszeréből. Tehát $\mathfrak{R}(G) = \sum_\nu \mathfrak{R}(H_\nu)$.

A 30. tételből következik az is, hogy $\mathfrak{R}(G/\mathfrak{R}(G)) = 0$. Valóban, annál a homomorfizmusnál, amelynek magja $\mathfrak{R}(G)$, homoperfekt maximális részmodulus képe, ill. teljes inverz képe ugyancsak homoperfekt maximális részmodulus.

31. TÉTEL: *Egy tetszőleges R-modulus akkor és csak akkor izomorf perfekt egyszerű R-modulusok szubdirekt összegével, ha radikálmentes.*

Ez a tétel közvetlen következménye a 30. tételnek, továbbá a szubdirekt összegként való előállításra vonatkozó alaptényeknek (2. §.).

A 30. tétel és a 27. tétel a) és b) tulajdonságainak ekvivalenciája alapján, valamint a [47] lábjegyzet figyelembevételével következik a

32. TÉTEL: *Egy tetszőleges R-modulus akkor és csak akkor perfekt egyszerű R-modulusok (diszkrét) direkt összege, ha radikálmentes és ciklikus részmodulusaira nézve minimumkövetelménynek tesz eleget.*

Végül még egy tételt említünk, amely a klasszikus Wedderburn—Artin-féle struktúratétel analogonja. Egy R-modulust féligegyszerűnek nevezünk, ha radikálmentes és részmodulusaira nézve minimumkövetelménynek tesz eleget.

33. TÉTEL: *Egy tetszőleges R-modulus akkor és csak akkor féligegyszerű, ha véges sok perfekt egyszerű R-modulus direkt összegével izomorf.*

Ez a tétel a 32. tétel következménye. Ha még figyelembe vesszük a 26. tételt, látjuk, hogy adott R gyűrű esetén az összes féligegyszerű R-modulus invariánsokkal jellemezhető.

Egy R gyűrű valamely L balideálját *modulárisnak* nevezzük, ha R-nek van olyan e eleme, hogy minden $r(\in R)$ elemre $r-re\in L$ legyen.

34. TÉTEL: *Ha az R gyűrű bármely homoperfekt*[54] *maximális balideálja moduláris, akkor az $R_{(R)}$ modulus radikálja és az R gyűrű Jacobson-féle radikálja megegyezik.*[55]

BIZONYÍTÁS: Először megmutatjuk, hogy ha x nem eleme az R gyűrű M homoperfekt maximális balideáljának, akkor van olyan $r(\in R)$ elem, amelyre rx nem kvázireguláris. Legyen e az R gyűrűnek (M modularitása miatt létező) jobboldali egységeleme mod M. Ekkor nyilvánvaló, hogy az $\bar{R}_{(R)}=R_{(R)}/M_{(R)}$ faktormodulus $\bar{e}$ elemére $s\bar{e}=\bar{0}$ $(s\in R)$ akkor és csak akkor teljesül, ha $s\in M$. Mivel pedig $M_{(R)}$ $R_{(R)}$-nek homoperfekt maximális részmodulusa, $\bar{R}_{(R)}$ perfekt egyszerű R-modulus. Továbbá $x\notin M$ miatt $x\bar{e}\neq\bar{0}$, tehát van olyan $r(\in R)$, hogy

$$rx\bar{e}=-\bar{e}. \tag{2}$$

Tekintsük az összes $y+yrx$ $(y\in R)$ alakú elemek S halmazát. Minthogy

$$(y+yrx)\bar{e}=y\bar{e}+(yrx)\bar{e}=y\bar{e}+y(rx\bar{e})=y\bar{e}-y\bar{e}=0,$$

$S\subseteq M$ teljesül. Így rx nem lehet kvázireguláris elem, mert egy $rx+y'+y'rx=0$ alakú relációból $rx=-y'-y'rx\in S\subseteq M$ adódnék, ami ellentmondásban van a (2) egyenlőséggel.

Megfordítva, tegyük fel, hogy rx $(r\in R, x\in R)$ nem kvázireguláris elem R-ben. Ekkor rx nem eleme az összes $y+yrx$ $(y\in R)$ elemek által alkotott S balideálnak. Legyen M R-nek olyan balideálja, amely maximális a következő

[54] R valamely balideálját *homoperfektnek* nevezzük, ha az mint $R_{(R)}$ részmodulusa homoperfekt.

[55] Jobboldali egységelemmel bíró gyűrűk Jacobson-féle radikáljának egy moduluselméleti jellemzését korábban FUCHS LÁSZLÓ adta [12].

két relációra nézve: $S \subseteq M$ és $rx \notin M$. Megmutatjuk, hogy M maximális balideál R-ben. Valóban, legyen y R-nek tetszőleges eleme és $t (\in R)$ olyan elem, amelyre $t \notin M$. Ekkor $rx \in \{t, M\}$, s így

$$-yrx + (y + yrx) = y \in \{t, M\},$$

tehát $\{t, M\} = R$. Az $rx \notin M$ reláció mutatja az M balideál homoperfekt voltát. Ezzel a 34. tétel bizonyítását befejeztük.

Megjegyezzük, hogy az $\mathfrak{R}(R_{(R)}) \subseteq J(R)$ reláció bizonyításában nem használtuk ki, az R gyűrűre kirótt feltételt. Nyílt kérdés, hogy vajon tetszőleges R gyűrű esetén fennáll-e a $J(R) \subseteq \mathfrak{R}(R_{(R)})$ reláció.

(Beérkezett: 1958. VI. 30.)

A Debreceni Kossuth Lajos Tudományegyetem Matematikai Intézete

INTERPOLÁCIÓ NORMÁLIS PONTCSOPORTOKON, I.
(ERDŐS ÉS TURÁN EGY SEJTÉSÉNEK BIZONYÍTÁSA)

Írta: FREY TAMÁS

(Bemutatta: Turán Pál, akadémikus)

1. §. Bevezetés; jelölések

Az

(1. 1) $$[x_{in}] \qquad (i=1,2,\ldots,n;\, n=1,2\ldots)$$

háromszög-mátrix meghatároz egy polinomsorozatot:

(1. 2) $$\omega_n(x)=\prod_{i=1}^{n}(x-x_{in}) \qquad (n=1,2,\ldots)$$

amely az interpoláció-sorozatokkal kapcsolatosan fontos szerepet játszik. Ebben a vonatkozásban $[x_{in}]$-t gyakran alappont-mátrixnak ill. alappontcsoport-sorozatnak is nevezik. Látni fogjuk: nem csökkenti az általánosságot, ha felteszszük, hogy valamennyi alappont a $[-1, 1]$ intervallumba esik.

FEJÉR [1] nyomán mármost normálisnak, ill. szigorúan vagy ϱ-normálisnak nevezzük az olyan alappont-mátrixokat, amelyeknél az ún. lineáris alappolinomok, a

(1. 3) $$v_{in}(x)=1-\frac{\omega_n''(x_{in})}{\omega_n'(x_{in})}(x-x_{in}) \qquad (i=1,2,\ldots,n;\, n=1,2,\ldots)$$

függvények a $[-1;1]$ alapintervallumban nemnegatívak ill. nem kisebbek a $\varrho>0$ számnál, másszóval: a $v_{in}(x)$ polinomok $[k_{in}]$ zérushelyei, az ún. konjugált pontok nem esnek a $[-1;1]$ intervallum belsejébe, Az alappontmátrix normális volta az interpoláció-sorozat konvergenciaviszonyait illetően nem látszik perdöntőnek (l. pl. a [6], ill. az ezen munka folytatásaképp megjelenő második, hasonló című dolgozatot), mégis érdekes következtetésekre nyújtott lehetőséget, elsősorban az Hermite-, ill. az Hermite—Fejér, később azonban a Lagrange-féle interpoláció-sorozatokkal kapcsolatosan is.

ERDŐS és TURÁN [2] bizonyította be ugyanis, hogy normális alappontmátrix esetén érvényes az

(1. 4) $$|\omega_n(x)|\leqq C_1(\varepsilon)\cdot 2^{-n}\sqrt{n} \qquad (n=1,2,\ldots;\, -1+\varepsilon\leqq x\leqq 1-\varepsilon)\ [1]$$

[1] A dolgozatban $C_i(\alpha,\beta,\ldots)$-val olyan mennyiségeket fogunk jelölni, amelyek az (esetleg megnevezett) $\alpha,\beta,\ldots$ stb. mennyiségektől függenek ugyan, de az n (diszkrét) változótól nem.

becslés. Ez a tény szorosan összefügg a Lagrange-féle interpolációsorozatok konvergencia-viszonyait jellemző Lebesque-függvénnyel, ti. a

$$\lambda_m(x) \equiv \sum_{i=1}^{m} |l_{im}(x)|;$$
(1.5)
$$\left(l_{im}(x) \equiv \frac{\omega_m(x)}{\omega_m'(x_{im})(x-x_{im})}; \; i=1,2,\ldots,m; m=1,2,\ldots\right)$$

-re vonatkozó

(1.6) $$|\lambda_n(x)| = \lambda_n(x) \leqq C_2(\varepsilon)\sqrt{n} \qquad (n=1,2,\ldots; -1+\varepsilon \leqq x \leqq 1-\varepsilon)$$

becsléssel.

ERDŐS és TURÁN fenti munkájukban közölték azt a sejtésüket is, hogy normális alappont-mátrixok esetén még az

(1.7) $$|\omega_n(x)| \leqq C_3(\varepsilon)\cdot 2^{-n} \qquad (-1+\varepsilon \leqq x \leqq 1-\varepsilon; n=1,2,\ldots)$$

becslés is érvényes. Ennek alapján természetesen a

(1.8) $$\lambda_n(x) \leqq C_4(\varepsilon) \log n \qquad (n=1,2,\ldots; -1+\varepsilon \leqq x \leqq 1-\varepsilon)$$

becslés is várhatóan érvényes, sőt az Hermite- ill. Hermite—Fejér féle interpoláció-sorozatok Lebesgue-függvényeire is következtethetünk.

Ebben az irányban — nem sokkal később — GRÜNWALD [3] publikálta azt az eredményét, hogy ϱ-normális alappontmátrix esetén érvényesek az

(1.9) $$|\omega_n(x)| \leqq C_5(\varepsilon)\cdot 2^{-n}\cdot n^{\frac{1-\varrho+\nu}{2}}$$
$$(-1+\varepsilon \leqq x \leqq 1-\varepsilon; n=1,2,\ldots; \nu>0 \text{ tetszőleges})$$

ill. a

(1.10) $$\lambda_n(x) \leqq C_6(\varepsilon)\, n^{\frac{1-\varrho+\nu}{2}} \qquad (-1+\varepsilon \leqq x \leqq 1-\varepsilon; n=1,2,\ldots; \nu>0)$$

becslések.

Ebben a dolgozatban bebizonyítjuk az Erdős—Turán-féle sejtést, amelyet — részben csak az ugyanilyen című második közleményünkben — még élesítünk is; szigorúan normális pontcsoportok esetén ugyanis (1.9) az egész zárt alapintervallumon érvényes, ε-tól független korláttal; emellett az alapintervallum belsejében bármely két zérushely között 2^{-n} nagyságrendű értékeket $|\omega_n(x)|$ ténylegesen fel is vesz. Igazoljuk a (1.8) becslést is, ill. a megfelelő, tovább — nagyságrendileg — már nem is élesíthető becsléseket az Hermite- ill. Hermite—Fejér-féle interpoláció Lebesgue-függvényeire. Ilymódon a konvergencia-viszonyok minden olyan strukturális tulajdonsággal kapcsolatosan, amely az interpolált függvényt az alapintervallum egy zárt részintervallumában *mindenütt* jellemzi, teljesen tisztázva vannak.

E vizsgálatokat finomítjuk azután oly értelemben, hogy nagyságrendileg jellemezzük a „ψ függvények által származtatott Lebesgue függvények“, a

$$\lambda_n(x;\psi)\equiv\sum_{k=1}^{n}\psi(|x-x_{kn}|)\cdot|l_{kn}(x)| \tag{1.11}$$

képlettel definiált formulák egy csoportját is, olyan ψ-függvényekkel kapcsolatosan, amelyek alkalmasak az interpolált függvény strukturális tulajdonságainak jellemzésére, valamely pont környezeteiben. Ezáltal szigorúan lokális approximációs tételeket is meg tudunk adni.

Második dolgozatunkban — az Erdős—Turán-féle sejtés élesítése mellett — meg fogjuk mutatni azt is, hogy az igazolt eredmények tulajdonképp nem azon a tényen múlnak, hogy a konjugált pontok valamennyien az alapintervallumon kívülre esnek, hanem azon, hogy a hozzájuk rendelt alappontoktól mért távolságok alsó korlát felett maradnak.

2. §. Néhány approximációs segédtétel

2. 1. SEGÉDTÉTEL: *Tekintsük a*

$$p(x)=p(x;a)\equiv\begin{cases}0 & ,\ \text{ha}\ -1\leqq x\leqq a\\ 1 & ,\ \text{ha}\ a<x\leqq\dfrac{1+a}{2}\\ -\dfrac{4}{1-a}\left(x-\dfrac{3+a}{4}\right) & ,\ \text{ha}\ \dfrac{1+a}{2}\leqq x\leqq\dfrac{3+a}{4}\\ 0 & ,\ \text{ha}\ \dfrac{3+a}{4}\leqq x\leqq 1\end{cases} \tag{2.1}$$

függvényt, ahol $-1<a<1$.

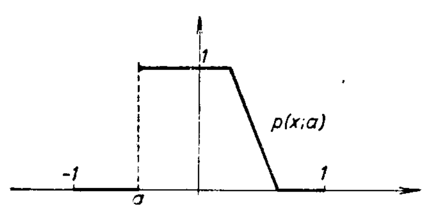
Található ekkor olyan $\{P_n(x)\}$ *polinomsorozat, amelyre érvényesek a* [2]

$$P_n(x)\in H_{6n-4}, \tag{2.2}$$

továbbá az

$$|(x-a)[p(x)-P_n(x)]|\leqq C_1\frac{1}{n} \tag{2.3}$$

$$(-1\leqq x\leqq 1;\ n=1,2,\ldots)$$



1. ábra

[2] H_n-nel jelöljük a következőkben a legfeljebb n-edfokú racionális, $H_n^{(T)}$-vel a legfeljebb n-edrendű trigonometrikus polinomok halmazát.

végül az

$$\left|\int_a^x [p(\xi)-P_n(\xi)]d\xi\right| \leq C_2 \frac{1}{n} \qquad (-1 \leqq x \leqq 1; n=1,2,\ldots) \tag{2.4}$$

relációk.

BIZONYÍTÁS: Az $x = \cos\varphi$ transzformáció után a

$$\pi(\varphi) \equiv p(\cos\varphi) \tag{2.5}$$

páros, periódikus és a $k\pi$ pontokban ($k=0; \pm 1 \pm 2; \ldots$) folytonos és folytonosan differenciálható függvényre jutunk. Jelöljük $\{A_{n;2}(\varphi; f)\}$-fel az általunk ([4] ill. [7]) megadott trigonometrikus polinomsorozatok egyikét, amely a legjobb approximációt az $f \in L_{2\pi}$ függvénnyel kapcsolatosan lokalizálja.[3] ($L_{2\pi}$ a 2π periódusú és egy perióduson L-integrálható függvények osztályát jelöli).

Az alábbiakban az

$$A_{n;2}(\varphi; \pi) - \pi(\varphi) \tag{2.6}$$

különbséget becsüljük, a következő jelöléseket használva

$$a = \cos\alpha; \quad \frac{1+a}{2} = \cos\beta; \quad 0 < \beta < \alpha < \pi. \tag{2.7}$$

Tekintsünk egy tetszőleges φ_0 pontot. Az

$$|A_{n;2}(\varphi_0; \pi) - \pi(\varphi_0)| \leqq C_9 \qquad (n=1,2,\ldots) \tag{2.8}$$

becslés az $A_{n;2}$ eljárás Lebesgue-függvényének korlátosságából és π definíció-

[3] $A_{n;2}(\varphi;f)$-t így definiáltuk:

$$A_{n;2}(\varphi; f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_{n;2}(t-\varphi) f(t)dt \in H^{(T)}_{6n-4}; \tag{2.I.}$$

$$F_{n;2}(x) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=n}^{3n-2} \frac{n-|k+1-2n|}{2^k} \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} \frac{\sin\left(k+l+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{1}{2}x}. \tag{2.II.}$$

Mármost aránylag könnyű számolással belátható, hogy a fentebb megadott eljárás az alábbi — lényeges — tulajdonságokkal rendelkezik:

(2. III.) 1°. $A_{n;2}(\varphi; f) \equiv f(\varphi)$, ha $f \in H^{(T)}_n$

(2. IV.) 2°. $|F_{n;2}(x)| \leqq C_3 \min\left\{n; \frac{\cos^n \frac{x}{2}}{n^2} \cdot \frac{1}{x^3}\right\}$

(2. V.) 3°. $\lambda_n(A_{n;2}) = \int_{-\pi}^{\pi} |F_{n;2}(x)| dt \leqq C_4$.

jából leolvasható. Tegyük most fel, hogy $\varphi_0 \neq \alpha$ és n már elég nagy, éspedig

$$\frac{1}{n} < |\varphi_0 - \alpha| < \frac{\alpha - \beta}{2}. \tag{2.9}$$

Ezesetben így becsülhető a (2. 6) különbség:

$$|A_{n;2}(\varphi_0; \pi) - \pi(\varphi_0)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_{n;2}(t) \cdot [\pi(\varphi_0 + t) - \pi(\varphi_0)]\, dt \right| \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{2\pi} \left\{ \left[\int_{-\pi}^{-|\varphi_0-\alpha|} + \int_{|\varphi_0-\alpha|}^{\pi} \right] + \int_{-|\varphi_0-\alpha|}^{|\varphi_0-\alpha|} \right\} |F_{n;2}(t)|\, |\pi(\varphi_0 + t - \pi(\varphi_0)|\, dt \leqq \tag{2.10}$$

$$\leqq \frac{1}{\pi} \int_{|\varphi_0-\alpha|}^{\pi} |F_{n;2}(t)|\, dt \leqq \frac{1}{\pi} \frac{3\pi^4}{2n^2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{|\varphi_0 - \alpha|^2},$$

minthogy π definíciója, ill. a (2. 1) képlet alapján

$$|\pi(\varphi_0 + t) - \pi(\varphi_0)| \begin{cases} \equiv 0, & \text{ha } |t| \leqq |\varphi_0 - \alpha| \\ \leqq 1, & \text{ha } -\pi \leqq t \leqq \pi. \end{cases} \tag{2.11}$$

Ha viszont

$$\frac{\alpha - \beta}{2} \leqq |\varphi_0 - \alpha|; \quad 0 \leqq \varphi_0 \leqq \pi \tag{2.12}$$

(2. VI.) 4°. $$|F_{n;2}(x)| \leqq C_5(\delta) \cdot \frac{\cos^n \frac{\delta}{2}}{n^2}, \quad \text{ha } \delta \leqq |x| \leqq \pi.$$

és így

$$\Lambda_n^{(k)}(A_{n;2}; \delta) \equiv \left[\int_{-\pi}^{-\delta} + \int_{\delta}^{\pi} \right] |F_{n;2}(x)|\, dx \leqq C_6(\delta) \cdot \frac{\cos^n \frac{\delta}{2}}{n^2}. \tag{2.VII.}$$

5°. Tetszőleges $0 < \varepsilon < 1$ és tetszőleges s mellett

$$|F_{n;2}(x)| \leqq C_7(\varepsilon; s) \cdot n^{-s}, \quad \text{ha } n^{-\frac{1-\varepsilon}{2}} \leqq |x| \leqq \pi, \tag{2.VIII.}$$

és így

$$\Lambda_n^{(k)}\left(A_{n;2}; n^{-\frac{1-\varepsilon}{2}}\right) \equiv \left[\int_{-\pi}^{-n^{-\frac{1-\varepsilon}{2}}} + \int_{n^{-\frac{1-\varepsilon}{2}}}^{\pi} \right] |F_{n;2}(x)|\, dx \leqq C_8(\varepsilon; s) \cdot n^{-s}. \tag{2.IX.}$$

érvényes, akkor

$$|A_{n;2}(\varphi_0;\pi)-\pi(\varphi_0)| \leqq C_{10}\frac{1}{n} \qquad (n \leqq 1, 2, \ldots) \tag{2.13}$$

minthogy $\pi(\varphi)$ pl. a $-\frac{\alpha+3\beta}{4} \leqq \varphi \leqq \frac{\alpha+3\beta}{4}$ ill. az $\frac{5\alpha-\beta}{4} \leqq \varphi \leqq \pi$ intervallumban 1 exponensű Lipschitz-feltételt elégít ki, az $A_{n;2}$-eljárás pedig lokalizálja a legjobb approximációt.

Emellett a középértéktétel alapján

$$|x_0-a| = |\cos\varphi_0 - \cos\alpha| = |\varphi_0-\alpha| \sin|\alpha+\vartheta(\varphi_0-\alpha)|\,|_{0<\vartheta<1} \tag{2.14}$$

és így érvényes az

$$|x_0-a| \leqq |\varphi_0-\alpha|; \quad \frac{1}{|x_0-a|} \geqq \frac{1}{|\varphi_0-\alpha|} \tag{2.15}$$

becslés. Így tehát (2.8), (2.9–10) és (2.13) alapján — felhasználva, hogy $A_{n;2}(\varphi;\pi)$ páros trigonometrikus polinom, s így

$$P_n(x) \equiv A_{n;2}\,(\arccos x;\pi) \tag{2.16}$$

legfeljebb $(6n-4)$-edfokú polinom — érvényes a

$$|P_n(x)-p(x)| \leqq \begin{cases} C_{11}, & \text{ha } -1 \leqq x \leqq 1; \text{ speciálisan ha } |x-a| \leqq \frac{1}{n} \\ \frac{C_{12}}{n^2|x-a|^2}, & \text{ha } \frac{1}{n} \leqq |x-a| < \frac{b-a}{2} \\ C_{13}\frac{1}{n}, & \text{ha } \frac{b-a}{2} < |x-a|; \quad \left(b=\frac{1+a}{2}\right). \end{cases} \tag{2.17}$$

becslés-rendszer. (2.17)-ből azonban a segédtétel minden állítása azonnal leolvasható.

2.2. SEGÉDTÉTEL. *Legyen $c>0$, és tekintsük a*

$$q(x) = q(x;a) \equiv \begin{cases} 0, & \text{ha } -1 \leqq x \leqq a \\ \frac{d}{dx}[(x-a)^{1+c\,(x-a)}], & \text{ha } a < x \leqq a+b < 1-2d < 1 \\ -m(x-a-b)+q(a+b-0;a), & \text{ha } a+b \leqq x \leqq 1-2d \\ 0, & \text{ha } 1-2d \leqq x \leqq 1, \end{cases} \tag{2.18}$$

függvény, ahol $b>0$-t tetszőlegesen, de úgy választottuk, hogy q az $(a+b)$ helyen még pozitív legyen, végül $d>0$-t ugyancsak tetszőlegesen, m-et pedig úgy, hogy $q(x)$ az $(a, 1)$ intervallumon folytonos legyen. Található ez esetben *olyan* $\{Q_n(x)\}$ *polinomsorozat, amelyre érvényesek az alábbi relációk:*

(2. 19) $$Q_n(x) \in H_{6n-4}$$

(2. 20) $$|(x-a)[q(x)-Q_n(x)]| \leqq C_{14}\frac{1}{n} \qquad (-1 \leqq x \leqq 1;\ n=1,2,\ldots)$$

(2. 21) $$\left|\int_a^x [q(\zeta)-Q_n(\zeta)]\,d\zeta\right| \leqq C_{15}\frac{1}{n} \qquad (-1 \leqq x \leqq 1;\ n=1,2,\ldots).$$

BIZONYÍTÁS: Mindenekelőtt írjuk fel a q definíciójában szereplő deriváltat explicite is:

$$\frac{d}{dx}[(x-a)^{1+c(x-a)}] = (x-a)^{1+c(x-a)}\left[\frac{1+c(x-a)}{(x-a)} + c\log(x-a)\right] =$$

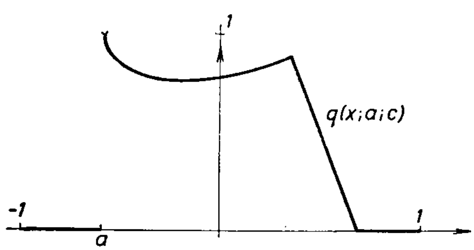
(2. 22) $$= (x-a)^{c(x-a)}[1+c(x-a)+c(x-a)\log(x-a)].$$

Innét azonnal leolvasható, hogy egyrészt

(2. 23) $$\lim_{x\to a+0} q(x;a) = 1$$

érvényes, másrészt pedig, hogy valóban megadható olyan $b_0 = b_0(c;\alpha)$ küszöbszám, amellyel

(2. 24) $$\frac{d}{dx}[(x-a)^{1+c(x-a)}] \geqq \alpha > 0$$
$$\text{ha} \quad a < x \leqq b_0,$$



2. ábra

Tekintsük tehát az

(2. 25) $$r(x) \equiv \begin{cases} q(x;a)-p(x;a), & \text{ha} \quad -1 \leqq x \neq a \leqq 1 \\ 0, & \text{ha} \quad x=a \end{cases}$$

segédfüggvényt, ahol p a 2. 1. tétel „ugrásfüggvénye". Azonnal belátható, hogy[4]

(2. 26) $$r(x) \in C[-1,1], \quad \text{sőt} \quad r(x) \in W_\varrho[-1,1]$$

is érvényes, emellett tetszőleges $\varepsilon > 0$ mellett

(2. 27) $$r(x) \in \mathrm{Lip}_{K(\varepsilon)}\,1, \quad \text{ha} \quad -1 \leqq x \leqq a \quad \text{ill.} \quad a+\varepsilon \leqq x \leqq 1.$$

Jelöljük mármost $\varrho(\varphi)$-vel az $r(x)$-hez indukált periodikus függvényt:

(2.28) $$\varrho(\varphi) \equiv r(\cos\varphi).$$

[4] $W_\varrho[-1,1]$ jelenti az $f(x) \in C[-1,1]$ függvények azon halmazát, amelyre

$$\omega(\delta;f;-1;1) \leqq \varrho\cdot\delta\log\frac{1}{\delta} \qquad \left(0<\delta<\frac{1}{2}\right)$$

érvényes, ahol is $\omega(\delta;f;-1;1)$ az f függvény $[-1,1]$-beli Dini-féle folytonossági modulusát jelöli.

Megmutatjuk, hogy érvényesek az alábbi becslések:

$$(2.29)\qquad |A_{n;2}(\varphi;\varrho)-\varrho(\varphi)| \leqq \begin{cases} \dfrac{C_{16}(\mu)}{n}, & \text{ha } 0\leqq\varphi\leqq\alpha-\mu \text{ ill. } \alpha+\mu\leqq\varphi\leqq\pi. \\ \dfrac{C_{17}(\mu)\cdot|\log|\varphi-\alpha||}{n}, & \text{ha pl. } n^{-\frac{1}{4}}\leqq|\varphi-\alpha|\leqq\mu \\ \dfrac{C_{18}\log n}{n}, & \text{ha } -\pi\leqq\varphi\leqq\pi. \end{cases}$$

Fenti egyenlőtlenségek közül az első és harmadik egyszerű következménye a (2. 27) ill. (2. 26) relációknak és az $A_{n;2}$-eljárás legjobb approximációt lokalizáló tulajdonságának. A másodikat így láthatjuk be: rögzítsünk egy tetszőleges

$$(2.30)\qquad \varphi_0=\alpha+\psi_0;\ 0\neq|\psi_0|<\mu$$

pontot és tekintsük azt a folytonos és folytonosan differenciálható $\varrho^*(\varphi;\ \varphi_0)$ függvényt, amelyre

$$(2.31)\qquad \varrho^*(\varphi;\ \varphi_0)\equiv\varrho(\varphi),\quad \text{ha}\quad \alpha+\frac{1}{2}\psi_0\gtrless\varphi\gtrless\alpha+2\psi_0$$

— ahol is a nagyobb-kisebb jelölések közül sign ψ_0 alapján kell a helyeset kiválasztanunk — továbbá

$$(2.32)\qquad \max_{\alpha+\frac{1}{2}\psi_0\gtrless\varphi\gtrless\alpha+2\psi_0}\left|\frac{d}{d\varphi}\varrho^*(\varphi;\ \varphi_0)\right|=\max_{-\pi\leqq\varphi\leqq\pi}\left|\frac{d}{d\varphi}\varrho^*(\varphi;\ \varphi_0)\right|;\ \frac{d}{d\varphi}\varrho^*(\varphi;\varphi_0)\in C_{2\pi}.$$

érvényesek. $\varrho(\varphi)$ definíciójából azonnal belátható, hogy így

$$(2.33)\qquad |\varrho(\varphi)-\varrho^*(\varphi;\ \varphi_0)|\leqq C_{19}\qquad (-\pi\leqq\varphi\leqq\pi),$$

a (2. 32) relációból és ϱ ill. r definíciójából pedig, hogy

$$(2.34)\qquad \max_{-\pi\leqq\varphi\leqq\pi}\left|\frac{d}{d\varphi}\varrho^*(\varphi;\ \varphi_0)\right|\leqq C_{20}\,|\log|\psi_0||,$$

és így ϱ^* definíciója és az $A_{n;2}$-eljárás tulajdonságai alapján, hogy

$$(2.35)\qquad |A_{n;2}(\varphi;\ \varrho^*)-\varrho^*(\varphi)|\leqq C_{21}\cdot\frac{|\log|\psi_0||}{n}\qquad (-\pi\leqq\varphi\leqq\pi;\ n=1,2,\ldots)$$

érvényes. Lévén pedig $A_{n;2}$ lineáris operáció:

$$(2.36)\qquad \begin{aligned} &|A_{n;2}(\varphi_0;\varrho)-\varrho(\varphi_0)|\leqq \\ &\leqq|A_{n;2}(\varphi_0;\ \varrho^*)-\varrho^*(\varphi_0)|+|\varrho^*(\varphi_0)-\varrho(\varphi_0)|+|A_{n;2}(\varphi_0;\ \varrho-\varrho^*)|. \end{aligned}$$

Az utóbbi egyenlőtlenség jobboldalának első tagjára (2. 35) alatt adtunk becslést, második tagja (2. 31) alapján 0-sal egyenlő s így csak a harmadik tagját kell becsülnünk.

$$|A_{n;2}(\varphi_0;\varrho-\varrho^*)|=C_{19}\int_{\frac{1}{2}|\psi_0|}^{\pi}|F_{n;2}(t)|\,dt=O(n^{-s}),\tag{2.37}$$

s tetszőleges választásánál, hacsak n már elég nagy ahhoz, hogy pl.

$$n^{-\frac{1}{4}}<\frac{1}{2}|\psi_0|\tag{2.38}$$

érvényes legyen. Ezzel a (2.29) alatti becslést igazoltuk; ez utóbbi alapján azonban pontosan ugyanazokkal a módszerekkel, mint a 2.1. segédtételben, igazolhatjuk a 2.2. segédtétel állításait is.

Megjegyezzük, hogy a GRÜNWALD G. [3] által használt approximációs tétel is élesíthető az előző módszerek segítségével, nevezetesen érvényes a

2.3. SEGÉDTÉTEL is: *Legyen $h>0$ és tekintsük a*

$$g(x)=g(x;a)\equiv\begin{cases}0, & ha \quad -1\leqq x\leqq a\\ (x-a)^{\varrho}, & ha \quad a\leqq x\leqq 1\end{cases}\tag{2.39}$$

függvényt. Található ez esetben olyan $\{G_n(x)\}$ polinomsorozat, amelyre

$$G_n(x)\in H_{6n-4}\tag{2.40}$$

$$|\varrho g(x)-(x-a)G_n'(x)\leqq\frac{C_{22}}{n^{\varrho}}\qquad(-1\leqq x\leqq 1;\ n=1,2,\ldots)\tag{2.41}$$

és

$$|g(x)-G_n(x)|\leqq\frac{C_{23}}{n^{\varrho}}\qquad(-1\leqq x\leqq 1;\ n=1,2,\ldots)\tag{2.42}$$

érvényesek.

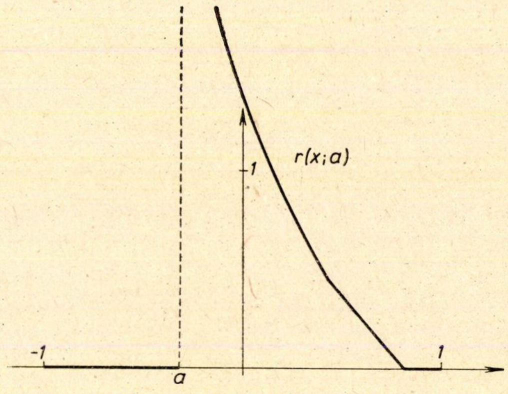
2.4. SEGÉDTÉTEL: *Tekintsük az*

$$s(x)=s(x;a)\equiv\begin{cases}0, & ha \quad -1\leqq x\leqq a\\ -1-\log(x-a), & ha \quad a<x\leqq\frac{1+a}{2}\\ d(x), & ha \quad \frac{1+a}{2}\leqq x\leqq\frac{3+a}{4}\\ 0, & ha \quad \frac{3+a}{4}\leqq x\leqq 1.\end{cases}\tag{2.43}$$

függvényt, ahol $d(x)$ tetszőleges folytonos és folytonosan differenciálható függvényt jelöl, amelyet azonban úgy választunk, hogy

$$s(x)\in C\left[\frac{1+3a}{4};\ 1\right];\quad s'(x)\in C\left[\frac{1+3a}{4};\ 1\right]\tag{2.44}$$

érvényesek legyenek. Található esetben olyan $\{S_n(x)\}$ polinomsorozat, amelyre



3. *ábra*

$$S_n(x) \in H_{6n-4}, \tag{2.45}$$

továbbá

$$\left|(x-a)[s(x)-S_n(x)]\right| \leqq C_{24}\frac{\log n}{n} \qquad (-1 \leqq x \leqq 1;\ n=1,2,\ldots) \tag{2.46}$$

és

$$\left|\int_a^x [s(\xi)-S_n(\xi)]\,d\xi\right| \leqq C_{25}\frac{\log n}{n} \qquad (-1 \leqq x \leqq 1;\ n=1,2,\ldots) \tag{2.47}$$

érvényesek.

BIZONYÍTÁS: Alapjában véve az előzőekben követett gondolatmenetet ismételjük meg. Így a

$$t(x;a)=s(x;a)+p(x;a) \tag{2.48}$$

segédfüggvényt, ill. a hozzátartozó $\tau(\varphi;\alpha)$ indukált függvényt tekintjük és igazoljuk az

$$|A_{n;2}(\varphi;\tau)-\tau(\varphi)| \leqq \begin{cases} C_{41}(\mu)\max\{|\log|\varphi-\alpha||;\log n\}, & \text{ha } 0 \leqq |\varphi-\alpha| \leqq \mu \\ & \text{speciálisan } |\varphi-\alpha| \leqq \dfrac{2}{n}, \\ C_{42}(\mu)\max\left\{\dfrac{|\log|\varphi-\alpha||}{n^2(\varphi-\alpha)^2};\ \dfrac{1}{n|\varphi-\alpha|}\right\}, & \\ & \text{ha } \dfrac{2}{n} \leqq |\varphi-\alpha| \leqq \mu \\ C_{43}(\mu)\dfrac{1}{n}, & \text{ha } \mu \leqq |\varphi-\alpha|; \\ & 0 \leqq \varphi \leqq \pi \end{cases} \tag{2.49}$$

becslést, ahol is $0<\mu<\max\left\{\dfrac{\pi}{2};\ \dfrac{\pi-\alpha}{2}\right\}$. E három becslés közül a harmadik triviális következménye (2.43)-nak ill. az $A_{n;2}$-eljárás tulajdonságainak. Az első és második becslés igazolására megjegyezzük elsősorban, hogy a $\tau(\varphi;\alpha)$ páros függvény ilyen alakú $[0,\pi]$ felett:

$$\tau(\varphi;\alpha)=\begin{cases} 1, & \text{ha } 0 \leqq \varphi \leqq \beta_1 \\ \delta(\varphi), & \text{ha } \beta_1 \leqq \varphi \leqq \beta_2 \\ -\log[\cos\varphi-\cos\alpha], & \text{ha } \beta_2 \leqq \varphi \leqq \alpha \\ 0, & \text{ha } \alpha \leqq \varphi \leqq \pi. \end{cases} \tag{2.50}$$

Tekintsük most $\tau(\varphi;\alpha)$ helyett a $\tau^*(\varphi;\alpha)\in L_{2\pi}$ páros függvényt, amelyre

$$(2.51)\qquad \tau^*(\varphi;\alpha)\equiv\begin{cases}1, & \text{ha } 0\leqq\varphi\leqq\beta_1\\ \delta^*(\varphi), & \text{ha } \beta_1\leqq\varphi\leqq\beta_2\\ -\Theta\log[\alpha-\varphi], & \text{ha } \beta_2\leqq\varphi<\alpha\\ 0, & \text{ha } \alpha\leqq\varphi\leqq\pi,\end{cases}$$

ahol $\delta^*(\varphi)$ is tetszőleges, de úgy van megválasztva, hogy

$$(2.52)\qquad \tau^*\in C\left[0,\frac{\beta_2+\alpha}{2}\right] \quad \text{és} \quad \frac{d}{d\varphi}\tau^*\in C\left[0;\frac{\beta_2+\alpha}{2}\right]$$

legyen, továbbá $\Theta=1$, ha $a\neq-1$ és $\Theta=2$, ha $a=-1$.

Minimális számolással belátható mármost, hogy

$$(2.53)\qquad \Delta(\varphi;\alpha)\equiv\tau(\varphi;\alpha)-\tau^*(\varphi;\alpha)$$

folytonos és folytonosan differenciálható 2π periódusú függvény, s így

$$(2.54)\qquad |A_{n;2}(\varphi;\Delta)-\Delta(\varphi)|\leqq C_{26}\frac{1}{n}$$

érvényes. (2.49) igazolására elegendő tehát megmutatnunk, hogy

$$(2.55)\qquad |A_{n;2}(\varphi;\tau^*)-\tau^*(\varphi;\alpha)|\leqq\begin{cases}C_{27}(\mu)\cdot\max\{|\log|\varphi-\alpha||;\log n\}; & \text{ha } |\varphi-\alpha|\leqq\mu\\ & \text{speciálisan, ha } |\varphi-\alpha|\leqq\frac{2}{n}.\\ C_{28}(\mu)\cdot\max\left\{\frac{|\log|\varphi-\alpha||}{n^2(\varphi-\alpha)^2};\frac{2}{n|\varphi-\alpha|}\right\}; & \text{ha } \frac{1}{n}\leqq\\ & \leqq|\varphi-\alpha|\leqq\mu\end{cases}$$

érvényes, Ezt igazolandó, célszerű még a $\psi=\alpha-\varphi$ eltolást is végrehajtani, azaz a

$$(2.56)\qquad \tau^{**}(\psi)\equiv\begin{cases}\cdots\cdots\cdots\\ 0, & \text{ha } -\alpha+\pi\leqq\psi\leqq0\\ -\epsilon\log\psi, & \text{ha } 0<\psi\leqq\alpha-\beta_2\\ \cdots\cdots\cdots\end{cases}$$

függvényt vizsgálni a $\psi=0$ hely környezetében. Mármost

$$|A_{n;2}(\psi;\tau^{**})-\tau^{**}(\psi)|\leqq\int_{-\pi}^{\pi}|F_{n;2}(t-\psi)||\tau^{**}(t)-\tau^{**}(\psi)|dt$$

$$\leqq\int_{-\pi}^{\pi}|F_{n;2}(t-\psi)|\{|\log|t|+|\log|\psi||\}dt\leqq$$

$$\leqq G_{29}|\log|\psi||+\int_{-\pi}^{\pi}|F_{n;2}(t)|\cdot|\log|t+\psi||dt$$

$$\leqq C_{29}|\log|\psi|| + C_{30}n\int_0^{\frac{1}{n}}|\log|t+\psi||dt + C_{31}\frac{1}{n^2}\int_{\frac{1}{n}}^{\pi}\frac{|\log|t+\psi||}{t^3}dt \leqq$$

$$\leqq C_{32}\max\{|\log|\psi||;\log n\} + C_{31}\frac{1}{n^2}\int_{\psi+\frac{1}{n}}^{\pi}\frac{|\log|\xi||}{(\xi-\psi)^3}d\xi \tag{2. 57}$$

$$\leqq C_{33}\max\{|\log|\psi||;\log n\},$$

minthogy a legutolsó formulában szereplő integrál $\psi \geqq 0$ esetén az

$$\int_{\frac{1}{n}}^{\pi}\frac{|\log\xi|}{\xi^3}d\xi \tag{2. 58}$$

integrállal, $-\frac{2}{n} \leqq \psi \leqq 0$ esetén az

$$n^3\int_0^{\frac{2}{n}}|\log\xi|d\xi + \log n\int_{\frac{2}{n}}^{\pi}\frac{d\xi}{\xi^3} \tag{2. 59}$$

összeggel, $\psi < -\frac{2}{n}$ esetén pedig az

$$\log n\int_{\frac{1}{n}}^{|\psi|-\frac{1}{n}}\frac{d\xi}{\xi^3} + \log n\int_{|\psi|+\frac{1}{n}}^{\pi}\frac{d\xi}{\xi^3} + n^3\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}|\log|\xi||d\xi \tag{2. 60}$$

összeggel majorálható. (2. 58—60)-ból azonban (2. 57) — s így (2. 49) ill. (2. 55) — első becslése is leolvasható.

Legyen most n elég nagy ahhoz, hogy

$$\frac{2}{n} < \psi \leqq \mu \quad (< \alpha - \beta_2) \tag{2. 61}$$

már teljesüljön. Ekkor

$$|A_{n;2}(\psi;\tau^{**}) - \tau^{**}(\psi)| \leqq \int_{-\pi}^{\pi}|F_{n;2}(t)|\cdot|\tau^{**}(t+\psi) - \tau^{**}(\psi)|dt =$$

$$= \{\Big[\int_{-\pi}^{-\mu} + \int_{\mu}^{\pi}\Big] + \int_{-\mu}^{-\psi} + \int_{-\psi}^{-\frac{\psi}{2}} + \Big[\int_{-\frac{\psi}{2}}^{-\frac{1}{n}} + \int_{+\frac{1}{n}}^{\frac{\psi}{2}}\Big] +$$

$$(2.62)\qquad + \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} + \int_{\frac{1}{n}}^{\mu} \Big\} |F_{n;2}(t)|\cdot|\tau^{**}(t+\psi)-\tau^{**}(\psi)|\,dt \leqq$$

$$\leqq C_{34}(\mu)\frac{1}{n^2} + C_{35}\log\psi\cdot\frac{1}{n^2}\int_{\psi}^{\mu}\frac{dt}{t^3} + C_{35}\frac{1}{n^2}\int_{-\psi}^{-\frac{\psi}{2}}\frac{\left|\log\left(1+\frac{t}{\psi}\right)\right|}{|t|^3}\,dt +$$

$$+2\frac{C_{35}}{n^2}\int_{-\frac{\psi}{2}}^{-\frac{1}{n}}\frac{\left|\log\left(1+\frac{t}{\psi}\right)\right|}{|t|^3}\,dt + C_{36}n\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}\log\left(1+\frac{t}{\psi}\right)dt + C_{37}n^{-2}\cdot\log\psi\int_{\frac{\psi}{2}}^{\mu}\frac{dt}{t^3},$$

ahol is az első integrálpárban a $\tau^{**}(\psi)\in L_{2\pi}$ tényt és a (2. VI.) becslést használtuk fel, a második integrálban azt, hogy itt $\tau^{**}(t+\psi)\equiv 0$, a harmadikban, a negyedik párban és az ötödikben $\tau^{**}(\psi)$ definícióját, és a hatodikban azt, hogy

$$(2.63)\qquad |\tau^{**}(t+\psi)|\leqq\left|\log\frac{\psi}{2}\right|,\quad \text{ha}\quad t\geqq-\frac{\psi}{2}$$

(2.62)-ből pedig könnyen leolvasható a (2.55) — s így (2.49) — második becslésének helyessége is, ha $\frac{2}{n}\leqq\psi\leqq\mu$ hiszen

$$(2.64)\qquad \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}\log\left(1+\frac{t}{\psi}\right)dt\leqq 4\cdot\int_{0}^{\frac{1}{n}}\frac{t}{\psi}\,dt=\frac{2}{n^2\psi}$$

és

$$(2.65)\qquad \int_{-\psi}^{-\frac{\psi}{2}}\frac{\left|\log\left(1+\frac{t}{\psi}\right)\right|}{|t|^3}\,dt\equiv\frac{1}{\psi^2}\int_{-1}^{-\frac{1}{2}}\frac{|\log(1+\tau)|}{|\tau|^3}\,d\tau\equiv\frac{C_{38}}{\psi^2}.$$

$$(2.66)\qquad \int_{-\frac{\psi}{2}}^{-\frac{1}{n}}\frac{\left|\log\left(1+\frac{t}{\psi}\right)\right|}{|t|^3}\,dt\leqq 2\int_{-\frac{\psi}{2}}^{-\frac{1}{n}}\frac{1}{\psi\cdot t^2}\,dt<2\frac{n}{\psi}.$$

Legyen végül

$$(2.67)\qquad -\mu<\psi\leqq-\frac{2}{n}.$$

Ekkor τ^{**} definíciója alapján

$$(2.68)\qquad |\tau^{**}(\psi+t)-\tau^{**}(\psi)|=\begin{cases} 0, & \text{ha } -\mu\leqq t\leqq|\psi| \\ |\log(t-|\psi|)|, & \text{ha } |\psi|<t\leqq\mu, \end{cases}$$

Érvényes tehát a következő becslés:

$$|A_{n;2}(\psi;\tau^{**})-\tau^{**}(\psi)|\leqq\int_{-\pi}^{\pi}|F_{n;2}(t)|\cdot|\tau^{**}(\psi+t)-\tau^{**}(\psi)|dt$$

$$\leqq C_{39}(\mu)\cdot\frac{1}{n}+\frac{C_{40}}{n^2}\int_{|\psi|}^{\pi}\frac{|\log(t-|\psi|)|}{t^3}dt$$

$$(2.69)\qquad \leqq C_{39}(\mu)\cdot\frac{1}{n}+\frac{C_{40}}{n^2}\int_{|\psi|}^{\mu}\frac{|\log t|}{t^3}dt+\frac{C_{40}}{n^2}\int_{|\psi|}^{\mu}\frac{\left|\log\left(1-\frac{|\psi|}{t}\right)\right|}{t^3}dt$$

$$\leqq C_{39}(\mu)\frac{1}{n}+\frac{C_{40}}{n^2}\cdot\frac{|\log|\psi||}{\psi^2}+\frac{C_{40}}{n^2\psi^2}\int_{1}^{\frac{\mu}{|\psi|}}\frac{\left|\log\left(1-\frac{1}{\xi}\right)\right|}{\xi^3}d\xi$$

$$\leqq C_{39}(\mu)\cdot\frac{1}{n}+C_{41}\frac{|\log|\psi||}{n^2\psi^2},$$

azaz, ez esetben is érvényes (2. 49) második becslése.

A bizonyítás a továbbiakban ismét szóról-szóra követheti a 2. 1. segédtétel igazolásának menetét.

3. §. Az ún. „külső Lebesgue-függvény" becslése

A Lagrange-féle interpoláció-sorozatok konvergenciavizsgálatainál a

$$(3.1)\qquad \lambda_n(x)\equiv\sum_{k=1}^{n}|l_{kn}(x)|$$

Lebesgue-függvény, a lokalizációs problémákkal kapcsolatosan viszont az ún. „külső Lebesgue-függvény"

$$(3.2)\qquad \Lambda_n^{(k)}(x;\delta)\equiv\sum_{k;\,|x-x_{kn}|>\delta}^{*}|l_{kn}(x)|$$

nagyságrendi alakulása játszik fontos szerepet; ez utóbbi formulában a szummajel feletti csillag arra utal, hogy csak azon k-kra kell összegeznünk, amelyekre

$$(3.3)\qquad |x-x_{kn}|>\delta$$

érvényes.

Az alábbiakban bebizonyítjuk, hogy normális pontcsoportok esetén érvényes a

$$(3.4)\qquad \Lambda_n^{(k)}(x;\delta)\leqq C_1(\varepsilon;\delta)\qquad (-1+\varepsilon\leqq x\leqq 1-\varepsilon;\ n=1,2,\ldots)$$

becslés.

E célból mindenekelőtt azt vizsgáljuk meg, hogy a lineáris alappolinomokat hogyan tudjuk becsülni normális pontcsoportok esetén. Legyen tehát a egy tetszőleges $(-1, 1)$-beli pont. Legyen továbbá

$$(3.5)\qquad c=[\min\{(1-a);(1+a)\}]^{-1}.$$

A $v_{jn}(x)$ lineáris alappolinom meredekségét mármost az határozza meg, hogy milyen távol van egymástól az az x_{jn} alappont, amelyhez a tekintett alappolinom tartozik (ti. a definíció szerint $v_{jn}(x_{jn})=1$) továbbá a hozzátartozó konjugált pont, k_{jn} (ti. a definíció szerint $v_{jn}(k_{jn})=0$). Azt viszont, hogy a tekintett a pontban mekkora minimálisan és maximálisan a $v_{jn}(a)$ érték, egyrészt az alappolinom meredeksége, másrészt viszont az alappont és az a pont távolsága határozza meg.

3. 1. SEGÉDTÉTEL. *Érvényesek az alábbi becslések:*

$$(3.6)\qquad v_{jn}(a)\geqq 1-c|x_{jn}-a|\qquad (j=1,2,\ldots,n;\ n=1,2,\ldots)$$

$$(3.7)\qquad v_{jn}(a)\leqq 1+\frac{|x_{jn}-a|}{\min\{(1-x_{jn});(1+x_{jn})\}}\qquad (j=1,2,\ldots,n;\ n=1,2,\ldots).$$

$$(3.6\text{a})\qquad v_{jn}(a)\geqq 1-\frac{(x_{jn}-a)}{1+x_{jn}}>1-\frac{x_{jn}-a}{1+a}\qquad (x_{jn}>a)$$

BIZONYÍTÁS: A fentebb elmondottak alapján a (3. 7) egyenlőtlenség triviális, hiszen a konjugált pontok szükségképp a $(-\infty, -1]$ vagy az $[1, \infty)$ intervallumban vannak, s így a lineáris alappolinom meredeksége nem lehet nagyobb

$$(3.8)\qquad \frac{1}{\min\{(1-x_{jn});(1+x_{jn})\}}-$$

nél. A (3. 6) egyenlőtlenség belátásához még csak azt kell meggondolnunk, hogy ha $-|a|\leqq x_{jn}\leqq |a|$, akkor

$$(3.9)\qquad \frac{1}{\min\{(1-a);(1+a)\}}\geqq\frac{1}{\min\{(1-x_{jn});(1+x_{jn})\}};$$

ha viszont $|x_{jn}|>|a|$, akkor — alsó becslésről lévén szó — csak az az eset érdekes, amikor az a pont szétválasztja az x_{jn} alappontot és a megfelelő konjugált pontot. Ebben az esetben azonban nyilván érvényes az

$$(3.10)\qquad \frac{1}{|x_{jn}-k_{jn}|}\leqq\frac{1}{\min\{(1-a);(1+a)\}};\ \frac{1}{|x_{jn}-k_{jn}|}\leqq\frac{1}{1+x_{jn}},\ \text{ha } x_{jn}>a$$

becslés, s így (3. 6) és (3. 6a) is. Ha ti. a nem választja szét az alappontot és a hozzátartozó konjugált pontot, akkor

$$v_{jn}(a) \geqq 1 \tag{3.11}$$

és így (3. 6) annál inkább érvényes.

Tekintsük mármost a 2. 2. segédtételben szereplő $q(x; a)$ függvényt és válasszuk meg a benne szereplő állandókat a következőképp

$$c = [\min\{(1-a); (1+a)\}]^{-1} \tag{3.12}$$

$$0 < b \leqq \min\left\{e^{-3}; \frac{1-a}{4}; \frac{1}{2c}\right\} \tag{3.13}$$

$$m \geqq \max\left\{2\frac{q(a+b; a)}{1-a-b}; \frac{1}{b^2}\int_a^{a+b} q(\xi; a)d\xi; 2cq(a+b; a)\right\} \tag{3.14}$$

A

$$Q(x; a) = \int_a^x q(\xi; a)d\xi \tag{3.15}$$

függvényhez tartozó és a tekintett $[x_{kn}]$ normális alappontrendszerre támaszkodó, legfeljebb $(2n-1)$-edfokú Hermite-féle interpolációs polinom ilyen alakú;

$$\begin{aligned} H_n(x; Q) &= \sum_{k=1}^{n} \{Q(x_{kn})v_{kn}(x) + q(x_{kn})(x-x_{kn})\} l_{kn}^2(x) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \Phi_{kn}(x; Q) \cdot l_{kn}^2(x), \end{aligned} \tag{3.16}$$

ahol a

$$\Phi_{kn}(x; Q) \equiv Q(x_{kn}; a)v_{kn}(x) + q(x_{kn}; a) \cdot (x - x_{kn}) \tag{3.17}$$

jelölést használtuk.

3. 2. SEGÉDTÉTEL: *Érvényesek a következő becslések:*

$$\Phi_{kn}(a; Q) \geqq 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n; n = 1, 2, \ldots) \tag{3.18}$$

$$\Phi_{kn}(a; Q) \geqq C_2(\delta) > 0 \qquad (k = k_2; k_2 + 1; \ldots; x_{k_2;n} > a + \delta; n = 1, 2, \ldots) \tag{3.19}$$

feltéve, hogy a $q(x; a)$-ban szereplő állandókak a (3. 12—13—14) *relációk alapján választottuk.*

BIZONYÍTÁS: A $\Phi_{kn}(x; Q)$ faktorokat explicite felírjuk, így könnyen megmutathatjuk a fentebbi becslések helyességét. Legyen tehát n már elegendően nagy és vezessük be a következő index-megállapodásokat.:

$$(3.20)\qquad x_{k_1-1;n} \leqq a < x_{k_1;n};\ k_1 = k_1(n; a)$$

$$(3.21)\qquad x_{k_2-1;n} \leqq a+\delta < x_{k_2;n};\ k_2 = k_2(n; a; \delta)$$

$$(3.22)\qquad x_{k_3;n} \leqq a+b < x_{k_3+1;n};\ k_3 = k_3(n; a; b)$$

$$(2..23)\qquad x_{k_4;n} \leqq 1-2d < x_{k_4+1;n};\ k_4 = k_4(n; a; b; d)$$

Ha mármost $k \leqq k_1 - 1$, akkor a (3. 15) ill. (2. 18) alatti definíciók alapján

$$(3.24)\qquad Q(x_{kn}; a) \equiv q(x_{kn}; a) \equiv 0 \qquad (k \leqq k_1 - 1;\ n = 1, 2, \ldots)$$

s így (3. 18) ezekre a k-kra biztosan érvényes. Ha viszont $k_1 \leqq k \leqq k_3$, akkor — ismét a definíciók alapján:

$$(3.25)\qquad Q(x_{kn}; a) = (x_{kn} - a)^{1+c(x_{kn}-a)}$$

$$(3.26)\qquad q(x_{kn}; a) = Q(x_{kn}; a)\left\{ \frac{1+c(x_{kn}-a)}{x_{kn}-a} - c\log(x_{kn}-a) \right\}.$$

Így tehát

$$(3.27)\qquad \begin{aligned} \Phi_{kn}(a; Q) &= Q(x_{kn})[v_{kn}(a) - 1 - c(x_{kn}-a) - c(x_{kn}-a)\log(x_{kn}-a)] \geqq \\ &\geqq c(x_{kn}-a)^{2+c(x_{kn}-a)}[-2-\log(x_{kn}-a)] = \\ &= -c(x-a)^{2+c(x-a)}[2+\log(x-a)]\big|_{x=x_{kn}}, \end{aligned}$$

ahol figyelembevettük, hogy $k \geqq k_1$ lévén, $(x_{kn} - a)$ és így $Q(x_{kn}; a)$ is nemnegatív, és a 3.1. segédtétel (3. 6a) becslését is felhasználtuk. Minthogy pedig $c > 0$ és k_3-at úgy választottuk, hogy

$$(3.28)\qquad (x_{kn} - a) \leqq e^{-3}, \quad \text{ha} \quad k_1 \leqq k \leqq k_3$$

érvényes, ezért (3. 27—28)-ból rögtön leolvasható, hogy $k_1 \leqq k \leqq k_3$ esetén a (3. 18) alatti; $k_2 \leqq k \leqq k_3$ esetén pedig még a (3. 19) alatti becslés is érvényes, hiszen ekkor

$$(3.29)\qquad (x_{kn} - a)^{2+c(x_{kn}-a)} \geqq C_3(\delta) > 0.$$

Jelöljük a továbbiakban a $v_{kn}(a)$-hoz a 3. 1. segédtételben megadott minoránsfüggvényt $\mu(x)$-szel:

$$(3.30)\qquad v_{kn}(a) \geqq \mu(x)\big|_{x=x_{kn}} = 1 - c(x-a)\big|_{x=x_{kn}} > 0, \quad \text{ha} \quad a \leqq x \leqq 1-2d.$$

A fentiekben nemcsak azt bizonyítottuk, hogy $k_1 \leqq k \leqq k_3$ esetén $\Phi_{kn}(a) \geqq 0$, hanem, hogy

$$(3.31)\qquad \Psi(x) \equiv Q(x; a)\,\mu(x) - (x-a)\,q(x; a) \geqq 0$$

is érvényes $a \leqq x \leqq a+b$-ben, sőt, hogy

$$(3.32)\qquad \Psi(x) \geqq C_4(\delta) > 0, \quad \text{ha} \quad a+\delta \leqq x \leqq a+b.$$

Az alábbiakban azt igazoljuk, hogy a (3. 32) egyenlőtlenség az $a+b \leqq x \leqq 1-2d$ intervallumon is érvényes. E célból mindenekelőtt azt jegyezzük meg, hogy m (3. 14) szerinti megválasztása biztosítja a $d>0$ reláció érvényességét, azaz azt, hogy $q(x;\, a)$ lineáris szakasza még 1 „előtt" metszi az abszcisszatengelyt. Abból indulhatunk ki, hogy (3. 32) szerint

$$Q(a+b;\, a)\,\mu(a+b)-b\,q(a+b;\, a) \geqq C_4(\delta). \tag{3. 33}$$

Legyen most

$$x=a+b+\xi \quad \text{és} \quad 0<\xi \leqq 1-2d-a-b, \tag{3. 34}$$

azaz

$$Q(a+b+\xi;\, a)=Q(a+b)+\frac{\xi}{2}[q(a+b)+q(a+b+\xi)], \tag{3. 35}$$

— hiszen Q e szakaszon kvadratikus függvény, $q(x;a)$ deriválttal — továbbá

$$\mu(a+b+\xi)=1-c(b+\xi)=1-cb-c\xi.$$

Így

$$\begin{aligned}\Psi(a+b+\xi) &\equiv \{Q(a+b+\xi;\, a)\,\mu(a+b+\xi)-(b+\xi)\,q(a+b+\xi;\, a)\}= \\ &= Q(a+b)(1-cb)-bq(a+b)+b[q(a+b)-q(a+b+\xi)]- \\ &-(1-cb-c\xi)\frac{\xi}{2}[q(a+b+\xi)+q(a+b)]-c\xi Q(a+b)-\xi q(a+b+\xi)> \\ &> \Psi(a+b)+bm\xi-\xi[cQ(a+b)+q(a+b)],\end{aligned} \tag{3. 36}$$

ahol felhasználtuk, hogy $1-cb-c\xi$ határozottan pozitív a $0 \leqq \xi \leqq 1-2d-a-b$ szakaszon, továbbá hogy ugyanitt $q(a+b+\xi;\, a)$ határozottan monoton csökkenő.

Mármost a (3. 33) becslés szerint

$$\frac{q(a+b;\, a)}{Q(a+b;\, a)}<\frac{1-cb}{b} \tag{3. 37}$$

érvényes, hiszen $1-cb>0$; így (3. 36) alapján

$$\begin{aligned}\Psi(a+b+\xi) &> \Psi(a+b)+\xi mb-\xi Q(a+b)\left[c+\frac{1-cb}{b}\right]= \\ &= \Psi(a+b)+\xi mb-\xi\, Q(a+b)\cdot\frac{1}{b}= \\ &= \Psi(a+b)+\xi b\left[m-\frac{1}{b^2}\int_a^{a+b} q(\xi;\, a)\, d\xi\right],\end{aligned} \tag{3. 38}$$

azaz (3. 14) alapján

(3. 39) $\quad \Psi(a+b+\xi) \geqq \Psi(a+b), \quad$ ha $\quad 0 \leqq \xi \leqq 1-2d-a-b,$

amivel a (3. 32) becslés helyességét $k_3 \leqq k \leqq k_4$ esetére is igazoltuk. Ha végül $k_4 \leqq k \leqq n$, akkor

(3. 40) $$Q(x_{kn};\, a) \equiv Q(1-2d;\, a);\; q(x_{kn};\, a) \equiv 0$$

(3. 41) $$v_{kn}(a) \leqq \frac{2}{1+a},$$

tehát

(3. 42) $$\Phi_{kn}(a;\, Q) \equiv v_{kn}(a)\, Q(x_{kn};\, a) \geqq 2\frac{Q(1-2d;\, a)}{1+a} \geqq C_2(\delta)$$

s így a segédtétel igazolását befejeztük.

A fentebbi segédtételek alapján már könnyen igazolni tudjuk a külső Lebesgue-függvényre vonatkozó állításunkat:

3. 3. TÉTEL: *Normális alappontmátrix esetén érvényes a*

(3. 43) $$\Lambda_n^{(k)}(x;\, \delta) \leqq C_5(\varepsilon;\, \delta) \qquad (-1+\varepsilon \leqq x \leqq 1-\varepsilon;\; n=1, 2, \ldots)$$

becslés.

BIZONYÍTÁS: Tekintsük a $Q(x;\, a)$ ill. $q(x;\, a)$ függvényeket, amelyeket (3. 15) ill. (2. 18) alatt definiáltunk, a bennük szereplő állandókat válasszuk meg a (3. 12—14) relációk alapján és legyen

$$a \in [-1+\varepsilon;\; 1-\varepsilon].$$

Az alábbiakban mindenekelőtt azt mutatjuk meg, hogy a (3. 16) alatti polinommal kapcsolatosan érvényes a

(3. 44) $$|H_n(a;\, Q)| \leqq \frac{C_6(\varepsilon)}{n} \qquad (n=1, 2, \ldots)$$

becslés. A 2. 2. segédtétel szerint található ugyanis olyan polinomsorozat, $\{Q_n^*(x)\}$, amellyel

(3. 45) $$|Q(x) - Q_n^*(x)| \leqq \frac{C_7}{n}$$

és

(3. 46) $$\left|(x-a)\left[q(x) - \frac{d}{dx}\, Q_n^*(x)\right]\right| \leqq \frac{C_8}{n}$$

végül

(3. 47) $$Q_n^*(x) \in H_n$$

érvényesek tetszőleges természetes n mellett. Minthogy még (3. 15)-ből leolvashatóan $Q(a; a)=0$ is érvényes, azért:

$$|H_n(a; Q)| = |H_n(a; Q) - Q(a; a)| \leqq |H_n(Q - Q_n^*)| + |Q(a; a) - Q_n^*(a)| \leqq$$

$$\leqq \sum_{k=1}^{n} |Q(x_{kn}; a) - Q_n^*(x_{kn})|\, v_{kn}(a)\, l_{kn}^2(a) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \left| q(x_{kn}; a) - \frac{d}{dx} Q_n^*(x_{kn}) \right| |x_{kn} - a| \cdot l_{kn}^2(a) + \tag{3.48}$$

$$+ \frac{C_7}{n} \leqq \sum_{k=1}^{n} v_{kn}(a) \cdot l_{kn}^2(a) + \frac{C_8}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} l_{kn}^2(a) + \frac{C_7}{n} \leqq$$

$$\leqq 2\frac{C_7}{n} + \frac{C_8}{n} \cdot C_9(\varepsilon) = \frac{C_6(\varepsilon)}{n}.$$

Tekintsük ezekután a

$$H_n(a; Q) = \sum_{k;\, x_{kn} > a} \Phi_{kn}(a)\, l_{kn}^2(a)$$

összeget. Minthogy a 3. 2. segédtétel szerint valamennyi $\Phi_{kn}(a)$ nemnegatív $x_{kn} \geqq a$ esetén, azért tetszőleges pozitív $\delta \leqq \min \left\{ e^{-3}; \frac{1-a}{4}; \frac{1}{2C} \right\}$ mellett

$$\frac{C_6(\varepsilon)}{n} \geqq H_n(a; Q) \geqq \sum_{k;\, x_{kn} \geqq a+\delta} \Phi_{kn}(a)\, l_{kn}^2(a). \tag{3.49}$$

Használjuk itt most fel a 3. 2. segédtétel másik, (3. 19) alatti becslését is:

$$C_2(\delta) \cdot \sum_{k;\, x_{kn} \geqq a+\delta} l_{kn}^2(a) \leqq \frac{C_6(\varepsilon)}{n}, \tag{3.50}$$

azaz végül

$$\sum_{k;\, x_{kn} \geqq a+\delta} l_{kn}^2(a) \leqq \frac{C_9(\varepsilon; \delta)}{n}. \tag{3.51}$$

Amennyiben a $Q(x; a)$ függvény helyett ennek az $x=a$ pontra vonatkozó tükörképét használjuk fel, a fenti gondolatmeneteket szóról-szóra megismételve a

$$\sum_{k;\, x_{kn} \leqq a-\delta} l_{kn}^2(a) \leqq \frac{C_{10}(\varepsilon; \delta)}{n} \tag{3.52}$$

becslés adódik, s így (3. 51)-et és (3. 52)-t összefoglalva

$$\sum_{k;\, |x_{kn}-a| \geqq \delta}^{*} l_{ka}^2(a) \leqq \frac{C_{11}(\varepsilon; \delta)}{n}. \tag{3.53}$$

Amennyiben (3. 53)-ra a Cauchy-féle egyenlőtlenséget alkalmazzuk, a bizonyítandó becslést kapjuk éppen:

$$\sum_{k;\, |x_{kn}-a| \geqq \delta} |l_{kn}(a)| \leqq C_{12}(\varepsilon; \delta). \tag{3.54}$$

Az imént igazolt tételnek csaknem triviális következménye a

3.4. (LOKALIZÁCIÓS) TÉTEL: *Az $f(x) \in C[-1, 1]$ függvényhez rendelt és az $[x_{kn}]$ normális alappontmátrixra támaszkodó Lagrange-féle interpoláció-sorozat konvergenciája tetszőleges $x_0 \in (-1, 1)$ pontban csakis az $f(x)$ függvénynek az x_0 egy tetszőleges környezetében mutatott strukturális tulajdonságaitól függ* — azaz e sorozat az $f(x_0)$ értékhez konvergál, ha valamely $\delta > 0$ számhoz megadható olyan $g_\delta(x) \in C[-1, 1]$ függvény, amelyhez tartozó interpoláció-sorozat x_0-ban konvergens és amelyre

$$g_\delta(x) \equiv f(x), \quad \text{ha} \quad x_0 - \delta \leqq x \leqq x_0 + \delta.$$

4. §. Az Erdős—Turán-féle sejtés bizonyítása

4.1. SEGÉDTÉTEL. *Tekintsük az $[x_{kn}]$ normális pontcsoport-sorozatot. Érvényes ez esetben a*

$$\sum_{k=1}^{n} (x - x_{kn})^2 l_{kn}^2(x) \leqq \frac{C_1(\varepsilon)}{n} \qquad (-1 + \varepsilon \leqq x \leqq 1 - \varepsilon) \tag{4.1}$$

becslés.

BIZONYÍTÁS. Legyen $a \in [-1 + \varepsilon;\ 1 - \varepsilon]$ és

$$f(x) \equiv \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad -1 \leqq x \leqq -1 + \frac{\varepsilon}{4} \\ \varphi_1(x), & \text{ha} \quad -1 + \frac{\varepsilon}{4} \leqq x \leqq a - \delta \\ (x-a)^2, & \text{ha} \quad a - \delta \leqq x \leqq a + \delta \\ \varphi_2(x), & \text{ha} \quad a + \delta \leqq x \leqq 1 - \frac{\varepsilon}{4} \\ 0, & \text{ha} \quad 1 - \frac{\varepsilon}{4} \leqq x \leqq 1, \end{cases} \tag{4.2}$$

ahol $\delta > 0$-t úgy választottuk, hogy $[a - \delta; a + \delta] \subset \left[-1 + \frac{3\varepsilon}{4};\ 1 - \frac{3\varepsilon}{4}\right]$, $\varphi_1(x)$ és $\varphi_2(x)$-et pedig úgy, hogy

$$f(x) \in C[-1, 1];\ f'(x) \in C[-1, 1], \quad \text{sőt} \quad f'(x) \in \mathrm{Lip}\, 1 \tag{4.3}$$

érvényes legyen. Található tehát olyan $\{P_n(x)\}$ polinomsorozat, amelyre

$$P_n(x) \in H_n, \tag{4.4}$$

$$|f(x) - P_n(x)| \leqq \frac{C_2}{n} \qquad (-1 \leqq x \leqq 1;\ n = 1, 2, \ldots) \tag{4.5}$$

és

$$|f'(x) - P_n'(x)| \leqq \frac{C_3}{n} \qquad (-1 \leqq x \leqq 1;\ n = 1, 2, \ldots) \tag{4.6}$$

érvényesek. Tekintsük mármost az $f(x)$-hez rendelt, legfeljebb $(2n-1)$-edfokú Hermite-féle interpolációs polinomot és becsüljük meg ennek $x=a$-beli értékét:

$$|H_n(a;f)| \equiv |H_n(a;f)-f(a)| \leqq |H_n(a;f-P_n)| + |f(a)-P_n(a)| \leqq$$

$$\leqq \sum_{k=1}^{n} |f(x_{kn})-P_n(x_{kn})|\, v_{kn}(a)\, l_{kn}^2(a) + \sum_{k=1}^{n} |f'(x_{kn})-P_n'(x_{kn})|\, |x_{kn}-a|\, l_{kn}^2(a) +$$

$$(4.7)\qquad +\frac{C_2}{n} \leqq \frac{C_2}{n}\sum_{k=1}^{n} v_{kn}(a)\, l_{kn}^2(a) + 2\cdot\frac{C_3}{n}\sum_{k=1}^{n} l_{kn}^2(a) + \frac{C_2}{n} \leqq 2\frac{C_2}{n} +$$

$$+2\frac{C_3}{n}\cdot C_4(\varepsilon) \leqq \frac{C_5(\varepsilon)}{n}.$$

Másrészről viszont részletesen kiírva $H_n(a;f)$ egyes tagjait:

$$H_n(a;f) = \sum_{k;\,|a-x_{kn}|\leqq\delta} [v_{kn}(a)-2]\,(a-x_{kn})^2\, l_{kn}^2(a) +$$

$$(4.8)\qquad + \sum_{k;\,|a-x_{kn}|>\delta}^{*} f(x_{kn})\, v_{kn}(a)\, l_{kn}^2(a) + \sum_{k;\,|a-x_{kn}|>\delta}^{*} f'(x_{kn})(a-x_{kn})\, l_{kn}^2(a)$$

adódik. Figyelembevéve tehát (3. 7)-et és (3. 43)-et, továbbá $f(x)$ definícióját, érvényes az

$$\Big|\sum_{k;\,|a-x_{kn}|\leqq\delta} [v_{kn}(a)-2]\,(a-x_{kn})^2\, l_{kn}^2(a) \leqq \frac{C_5(\varepsilon)}{n} +$$

$$(4.9)\qquad +\frac{C_6(\varepsilon)}{n}\cdot \max_k |f(x_{kn})\, v_{kn}(a) + f'(x_{kn})(a-x_{kn}| \leqq$$

$$\leqq \frac{C_5(\varepsilon)}{n} + \frac{C_6(\varepsilon)}{n} C_7(\varepsilon) = \frac{C_8(\varepsilon)}{n}.$$

becslés. A 3. 1. segédtétel (3. 7) becslését is felhasználva, könnyen belátható mármost, hogy $\delta>0$ megválasztható olyan kicsire, hogy a (4. 9) becslés baloldalán, az összegezésben szereplő $[v_{kn}(a)-2]$ faktorok valamennyien negatívak és pl. $-\vartheta<0$-nál is kisebbek legyenek. (3. 7) alapján ugyanis

$$(4.10)\qquad v_{kn}(a)-2 \leqq -1 + \frac{|a-x_{kn}|}{\min\{|1-x_{kn}|;\, |1+x_{kn}|\}},$$

és így

$$(4.11)\qquad v_{kn}(a)-2 \leqq -1 + \frac{\delta_0}{1-\varepsilon-\delta_0} = -1+1-\vartheta = -\vartheta > 0,$$

ha $0<\delta\leqq\min\left(\delta_0;\ \frac{\varepsilon}{4}\right)$, ahol δ_0 a

$$(4.12)\qquad \frac{\delta_0}{1-\varepsilon-\delta_0} = 1-\vartheta$$

egyenlet gyöke. Itt felhasználtuk azt a tényt, hogy $a \in [-1+\varepsilon;\ 1-\varepsilon]$ és így az $x_{kn} \in [a-\delta;\ a+\delta]$ feltétel mellett

$$1-\varepsilon-\delta \geqq 1-\varepsilon-\delta_0 \geqq \min\{(1-x_{kn});\ (1+x_{kn})\}$$

is érvényes. Választva tehát egy $0<\delta \leqq \min\left\{\delta_0;\ \frac{\varepsilon}{4}\right\}$ -et és figyelembevéve (4. 9—11)-et, a

$$(4.13)\qquad \vartheta \sum_{k;\ |a-x_{kn}|\leqq\delta} (x_{kn}-a)^2 l_{kn}^2(a) \leqq \frac{C_8(\varepsilon)}{n}$$

becslés adódik; ehhez hozzávéve még, hogy a 3. 3. tétel (3. 43) összefüggése alapján

$$(4.14)\qquad \sum_{k;\ |a-x_{kn}|>\delta}^{*} (x_{kn}-a)^2 l_{kn}^2(a) \leqq 4\cdot \sum_{k;\ |a-x_{kn}|>\delta}^{*} l_{kn}^2(a) \leqq \frac{C_9(\varepsilon)}{n}$$

azonnal leolvasható a segédtétel állítása.

Most már könnyen igazolhatjuk az Erdős—Turán-féle sejtést:

4. 2. TÉTEL: *Tetszőleges* $[x_{kn}]$ *normális pontcsoportsorozat és tetszőleges* $x \in [-1+\varepsilon;\ 1-\varepsilon]$ *pont esetén érvényes az*

$$(4.15)\qquad |\omega_n(x)| \equiv \left|\prod_{k=1}^{n}(x-x_{kn})\right| \leqq \frac{C_{10}(\varepsilon)}{2^n} \qquad (n=1,2,\ldots)$$

becslés.

BIZONYÍTÁS: A 4. 1. segédtétel (4. 1) becslésével kapcsolatosan felhasználva a Cauchy-egyenlőtlenséget, a

$$(4.16)\qquad \sum_{k=1}^{n} |x-x_{kn}|\,|l_{kn}(x)| \leqq C_{11}(\varepsilon) \qquad (-1+\varepsilon \leqq x \leqq 1-\varepsilon;\ n=1,2,\ldots)$$

becslés adódik. Felhasználva még az ERDŐS és TURÁN [2] által is alkalmazott és igazolt lemmát, amely szerint tetszőleges pontcsoportsorozat esetén érvényes a

$$(4.17)\qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{|\omega_n'(x_{kn})|} \geqq 2^{n-2} \qquad (n=1,2,\ldots)$$

egyenlőtlenség, azonnal belátható a (4. 15) becslés helyessége. Ugyanis (4. 16) és (4. 17) alapján

$$(4.18)\qquad |\omega_n(x)|\,2^{n-2} \leqq |\omega_n'(x)|\cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{|\omega_n'(x_{kn})|} = \sum_{k=1}^{n} |x-x_{kn}|\,|l_{kn}(x)| \leqq C_{11}(\varepsilon)$$

s ez equivalens (4. 15)-tel.

5. §. A Lebesgue-függvény becslése

5. 1. SEGÉDTÉTEL: *Tetszőleges* $[x_{kn}]$ *normális alappontmátrix és* $x \in [-1+\varepsilon;\ 1-\varepsilon]$ *esetén érvényes a*

$$\sum_{k=1}^{n} |x-x_{kn}|\, l_{kn}^2(x) \leqq \frac{C_1(\varepsilon)}{n} \log n \qquad (n=1,2,\ldots) \tag{5.1}$$

becslés.

BIZONYÍTÁS: Legyen $a \in [-1+\varepsilon;\ 1-\varepsilon]$ és tekintsük a 2. 4. segédtételben definiált $s(x;a)$ ill.

$$S(x;a) \equiv \int_a^x s(\xi;a)\, d\xi \tag{5.2}$$

függvényt, továbbá az ez utóbbihoz rendelt legfeljebb $(2n-1)$-edfokú Hermite-féle interpolációs polinomot;

$$H_n(x;S) = \sum_{k;\ x_{kn}>a} \left[\frac{S(x_{kn};a)}{x_{kn}-x} v_{kn}(x) - s(x_{kn};a)\right] (x_{kn}-x)\, l_{kn}^2(x). \tag{5.3}$$

Azonnal belátható, hogy érvényes a

$$H_n(a;S)| = |H_n(a;S)-S(a)| \leqq \frac{C_2(\varepsilon)}{n} \log n \qquad (n=1,2,\ldots) \tag{5.4}$$

becslés. A 2. 4. segédtétel szerint ugyanis található olyan $\{P_n(x) \equiv \int_a^x S_{\left[\frac{n}{6}\right]}(\xi)\, d\xi\}$ polinomsorozat, amelyre

$$P_n(x) \in H_n \tag{5.5}$$

$$|S(x;a)-P_n(x)| \leqq \frac{C_3(\varepsilon)}{n} \log n \qquad (-1 \leqq x \leqq 1;\ n=1,2,\ldots) \tag{5.6}$$

és

$$\left|\left[s(x;a) - \frac{d}{dx} P_n(x)\right](x-a)\right| \leqq \frac{C_4(\varepsilon)}{n} \log n \quad (-1 \leqq x \leqq 1;\ n=1,2,\ldots) \tag{5.7}$$

érvényesek. Így

$$\begin{aligned}
|H_n(a;S)-S(a;a)| &\leqq |H_n(a;S-P_n)| + |S(a;a)-P_n(a)| \leqq \\
&\leqq \sum_{k=1}^{n} \{|S(x_{kn};a)-P_n(x_{kn})|\, v_{kn}(a)\, l_{kn}^2(a)\} + \\
&+ \sum_{k=1}^{n} \left\{\left|S(x_{kn};a) - \frac{d}{dx} P_n(x_{kn})\right| |a-x_{kn}|\, l_{kn}^2(a) + \frac{C_3(\varepsilon)}{n} \log n \leqq \right. \\
&\leqq \frac{C_3(\varepsilon)}{n} \log n \sum_{k=1}^{n} v_{kn}(a)\, l_{kn}^2(a) + \frac{C_4(\varepsilon)}{n} \log n \sum_{k=1}^{n} |a-x_{kn}|\, l_{kn}^2(a) + \\
&+ \frac{C_3(\varepsilon)}{n} \log n \leqq \frac{C_5(\varepsilon) \log n}{n}.
\end{aligned} \tag{5.8}$$

Így tehát (5. 3)-at és (5. 8)-at felhasználva

$$(5.9)\qquad \left|\sum_{k;\, x_{kn}>a} -\left[\frac{S(x_{kn};a)}{a-x_{kn}}v_{kn}(a)+s(x_{kn};a)\right](a-x_{kn})\,l_{kn}^2(a)\right| \leqq \frac{C_5(\varepsilon)\log n}{n}.$$

Vizsgáljuk most meg kissé részletesebben a szögletes zárójelben szereplő faktorokat, és használjuk itt fel a (3. 6) alatti becslést is:

$$-\left[\frac{S(x_{kn};a)}{a-x_{kn}}v_{kn}(a)+s(x_{kn};a)\right] = -\log(x_{kn}-a)\,v_{kn}(a)+1+\log(x_{kn}-a) =$$

$$(5.10)\qquad = 1-|\log(x_{kn}-a)|\cdot[v_{kn}(a)-1] \geqq$$

$$\geqq 1-|\log(x_{kn}-a)|\,\frac{|x_{kn}-a|}{\varepsilon} \geqq \delta(\varepsilon) > \delta_0 > 0,$$

hacsak $0<x_{kn}-a\leqq C_6(\varepsilon;\delta_0)$ és $0<x_{kn}-a\leqq\min\left\{1;\ \frac{1-a}{2}\right\}$ érvényesek (az $x_{kn}\geqq\frac{1+a}{2}$ esetben ti. $s(x;a)$ nincs explicite megadva; erre nem is lesz egyébként szükségünk). Az $s(x;a)$ definíciójában szereplő $d(x)$ függvényt válasszuk azonban úgy, hogy ne csak

$$(5.11)\qquad s(x;a)\equiv 0,\quad \text{ha}\quad \frac{3+a}{4}\leqq x\leqq 1,$$

hanem

$$(5.12)\qquad S(x;a)\equiv 0,\quad \text{ha}\quad \frac{3+a}{4}\leqq x\leqq 1$$

is érvényes legyen. Ennek alapján az (5. 9) baloldalán szögletes zárójelben szereplő és (5. 10) alatt nem vizsgált faktorsorozatra a következő becslést adhatjuk:

$$\left|\frac{S(x_{kn};a)}{x_{kn}-a}v_{kn}(a)-s(x_{kn};a)\right| \leqq$$

$$(5.13)\qquad \leqq \max_{a+\min\left\{C_6;\,1;\,\frac{1-a}{2}\right\}\leqq x\leqq\frac{3+a}{4}} |S(x;a)|\cdot\frac{C_7(\varepsilon)}{\min\left\{C_6;\,1;\,\frac{1-a}{2}\right\}}+$$

$$+\max_{a+\min\left\{C_6;\,1;\,\frac{1-a}{2}\right\}\leqq x\leqq\frac{3+a}{4}} |s(x;a)| \leqq C_8(\varepsilon;\delta_0),$$

ill.

$$(5.14)\qquad \left|\frac{S(x_{kn};a)}{x_{kn}-a}v_{kn}(a)-s(x_{kn};a)\right| \equiv 0,\quad \text{ha}\quad x_{kn}\geqq\frac{3+a}{4}.$$

Itt felhasználtuk a 3. 1. segédtétel (3. 7) becslését is, amely szerint

(5. 15) $$v_{kn}(a) \leqq C_7(\varepsilon), \quad \text{ha} \quad a \in [-1+\varepsilon;\ 1-\varepsilon];\ a < x_{kn} \leqq \frac{3+a}{4}.$$

Figyelembevéve mármost (5. 9)-ben az (5. 10), (5. 13) ill. (5. 14) becslést:

$$\left| \sum_{k;\ a<x_{kn}\leqq a+\min\left\{1;\ C_6;\ \frac{1-a}{2}\right\}} \left[\frac{S(x_{kn};\ a)}{x_{kn}-a} v_{kn}(a) - s(x_{kn};\ a)\right] (x_{kn}-a)\, l_{kn}^2(a) \right| \leqq$$

(5. 16) $$\leqq \frac{C_5 \cdot \log n}{n} + \left| \sum_{k;\ x_{kn}>a+\min\left\{1;\ C_6;\ \frac{1-a}{2}\right\}} \left[\frac{S(x_{kn};\ a)}{x_{kn}-a} v_{kn}(a) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - s(x_{kn};\ a)\right] (x_{kn}-a)\, l_{kn}^2(a) \right| \leqq \frac{C_5 \cdot \log n}{n} +$$

$$+ 2C_8 \cdot \sum_{k;\ x_{kn}>a+\min\left\{1;\ C_6;\ \frac{1-a}{2}\right\}} l_{kn}^2(a) < \frac{C_5 \log n}{n} + 2C_8 \cdot \frac{C_9(\varepsilon)}{n},$$

azaz (5. 10) alapján

(5. 17) $$0 < \delta_0 \sum_{k;\ a<x_{kn}\leqq a+\min\left\{1;\ C_6;\ \frac{1-a}{2}\right\}} (x_{kn}-a)\, l_{kn}^2(a) \leqq \frac{C_{10}(\varepsilon;\ \delta_0) \log n}{n}.$$

Ezt egybevetve a 3. 3. tételből következő

(5. 18) $$\sum_{k;\ a+\min\left\{1;\ C_6;\ \frac{1-a}{2}\right\} < x_{kn} \leqq 1} (x_{kn}-a)\, l_{kn}^2(a) \leqq \frac{C_{11}(\varepsilon;\ C_6)}{n}$$

becsléssel, a

$$\sum_{k;\ a\leqq x_{kn}\leqq 1} (x_{kn}-a)\, l_{kn}^2(a) \leqq \frac{C_{12}(\varepsilon;\ C_6)}{n} \log n \qquad (n=1, 2, \ldots)$$

egyenlőtlenséget kapjuk. A C_{12} állandó függ ugyan még a $C_6(\varepsilon;\ \delta_0)$ állandó, azaz δ_0 választásától is, ez utóbbi azonban tetszőlegesen választható — csak a helyzete korlátozza s így C_{12} tulajdonképp csak ε-tól függ. $s(x;\ a)$ tükörképfüggvényét felhasználva, egyébként a fentebb követett gondolatmenetet szóról-szóra követve adódik a

(5. 19) $$\sum_{k;\ -1\leqq x_{kn}\leqq a} |x_{kn}-a|\, l_{kn}^2(a) \leqq \frac{C_{13}(\varepsilon)}{n} \log n \qquad (n=1, 2, \ldots)$$

becslés, s így (5. 18)-cal együtt a bizonyítandó (5. 1) reláció is.

5. 2. TÉTEL: *Tetszőleges* $[x_{kn}]$ *normális alappontmátrix és* $x \in [-1+\varepsilon;\ 1-\varepsilon]$ *esetén érvényes a*

$$\lambda_n(x) \equiv \sum_{k=1}^{n} |l_{kn}(x)| \leqq C_{14}(\varepsilon) \log n \qquad (n=1, 2, \ldots) \tag{5.20}$$

becslés.

BIZONYÍTÁS: GRÜNWALD [3] használta fel az (1. 9.—10.) alatti relációk igazolásánál a

$$\left\{ \sum_{k=1}^{i-1} + \sum_{k=i+2}^{n} \right\} \frac{1}{|x-x_{kn}|} \leqq C_{15}(\varepsilon)\, n \log n \qquad (n=1, 2, \ldots) \tag{5.21}$$

becslést, amely tetszőleges természetes n és $-1+\varepsilon \leqq x \leqq 1-\varepsilon$; $x_{in} \leqq x \leqq x_{i+1;n}$; $i=i(n)$ esetén érvényes minden olyan alappontrendszerre, amelyre

$$|v_{kn}(x)\, l_{kn}^2(x)| \leqq C_{16} \qquad (-1 \leqq x \leqq 1;\ k=1, 2, \ldots, n;\ n=1, 2, \ldots) \tag{5.22}$$

teljesül. (5. 21) ti. egyszerűen következik az ERDŐS és TURÁNtól származó [2]

$$\Theta_{\nu-1;n} - \Theta_{\nu;n} > C_{17} \cdot \frac{1}{n}; \qquad (\nu=1, 2, \ldots, n;\ n=1, 2, \ldots;\ x_{\nu;n} = \cos \Theta_{\nu;n}) \tag{5.23}$$

becslésből. amely utóbbi viszont (5. 22) egy következménye. (5. 22) természetesen bármely normális pontcsoportsorozatra érvényes az

$$|l_{in}(x)| + |l_{i+1;n}(x)| \leqq C_{18}(\varepsilon) \qquad (n=1, 2, \ldots) \tag{5.24}$$

becsléssel együtt [2]. (5. 1); (5. 21) és (5. 24) alapján azonban könnyen belátható a tétel állítása (a Cauchy-egyenlőtlenséget is alkalmazva):

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} |l_{kn}(x)| &\leqq C_{18}(\varepsilon) + \sum_{k;\, k\neq i;\, i+1}^{n}{}^{*} |l_{kn}(x)| \leqq \\
&\leqq C_{18}(\varepsilon) + \sum_{k;\, k\neq i;\, i+1}^{n}{}^{*} \frac{1}{\sqrt{|x-x_{kn}|}} \sqrt{|x-x_{kn}|}\, |l_{kn}(x)| \leqq \\
&\leqq C_{18}(\varepsilon) + \sqrt{\sum_{k;\, k\neq i;\, i+1}^{n}{}^{*} \frac{1}{|x-x_{kn}|} \cdot \sum_{k;\, k\neq i;\, i+1}^{n}{}^{*} |x-x_{kn}|\, l_{kn}^2(x)} \leqq \\
&\leqq C_{18}(\varepsilon) + \sqrt{C_{15}(\varepsilon) \cdot n \cdot \log n \cdot C_1(\varepsilon) \frac{\log n}{n}} \leqq C_{19}(\varepsilon) \log n,
\end{aligned} \tag{5.25}$$

ahogy állítottuk.

E tétel és a 3. 4. korollárium egy egyszerű következménye az

5. 1. KOROLLÁRIUM: *Legyen* $f(x) \in C[-1;1]$; $x_0 \in [-1+\varepsilon; 1-\varepsilon]$ *és*

$$\begin{aligned}(5.26)\qquad &\omega(\delta; f; x_0-\varepsilon; x_0+\varepsilon) = \\ &= \sup_{0\leq\vartheta\leq\delta}\{\max_{x_0-\varepsilon+\vartheta\leq x\leq x_0+\varepsilon}|f(x)-f(x-\vartheta)|\} = O\left\{\left[\log\frac{1}{\delta}\right]^{-1}\right\}.\end{aligned}$$

Ez esetben az $f(x)$ *függvényhez rendelt és az* $[x_{kn}]$ *normális alappontmátrixra támaszkodó Lagrange-féle interpoláció-sorozat* x_0*-ban* $f(x_0)$*-hoz konvergál.*

IRODALOM

[1] FEJÉR, L.: Über Interpolation. *Göttinger Nachrichten* (1916) 66 - 91.

[2] ERDŐS, P. — TURÁN, P.: On Interpolation I—III. *Annals of Math.* V 38 (1937) 142 – 155; V 39 (1938) 703—724 ill. V 41 (1940)

[3] GRÜNWALD, G.: On the theory of interpolation. *Acta Math.* V 75 (1943) 219—245.

[4] FREY, T.: A legjobb polinomapproximáció lokalizálásáról I—IV. *MTA III. Osztály Közleményei* 3 – 4 (1957) 403—412; II: (1958) 89—112. (A III. ill. IV. rész közlés előtt.)

[5] FREUD, G.: Über die Konvergenz des Hermite-Fejérschen Interpolationsverfahrens. *Acta Math. Ac. Sci. Hung.* V (1954) 109—127.

[6] BALÁZS, J.: Bemerkungen zur Hermite-Fejérschen Interpolationstheorie. *Acta Math.* IX 3—4. 363 – 377.

[7] FREY, T.: A konstruktiv függvénytan néhány lokális tételéről. Kandidátusi értekezés tézisei, Budapest, 1956.

(Beérkezett: 1958. XII. 19.)

Műszaki Egyetem
Villamosmérnöki Kar
Matematika Tanszék

FÜGGVÉNYEGYENLETEK ÉS ALGEBRAI MÓDSZEREK A GEOMETRIAI OBJEKTUMOK ELMÉLETÉBEN, I.

Írta: HOSSZÚ MIKLÓS

TARTALOM

Bevezetés

Valamely k-dimenziós X_k euklidesi tér x elemeit k-komponensű n-dimenziós *geometriai objektumoknak* nevezzük, ha hozzárendelhetők egy n-dimenziós E_n euklidesi tér P pontjaihoz úgy, hogy a $P = \alpha Q$ (koordináta) transzformáció alkalmával a Q-hoz rendelt $y = x\alpha = F(x, \alpha)$ az x-en kívül csupán a $P=\alpha Q$ transzformációtól függ (funkcionálisan). Ha a $P=\alpha Q$ transzformációk *sereget* alkotnak, akkor az $y=x\alpha$ transzformációk is:

$$\text{(I)} \qquad (x\alpha)\beta = x(\alpha\beta), \qquad x\in X_k;\quad \alpha,\beta\in\mathcal{O},$$

azaz két transzformáció helyettesíthető eggyel.

Ha $F(x,\alpha)$-nak a $P=\alpha Q$-tól való függése a

$$P, Q, \frac{dP}{dQ}=\left(\frac{\partial P_i}{\partial Q_j}\right), \ldots, \frac{d^m P}{dQ^m}$$

paraméterekkel leírható, akkor x-et *m-ed osztályú speciális geometriai objektumnak* nevezzük. Elég csupán a tiszta *differenciális* objektumokat vizsgálni [5,6][1], melyeknél F nem függ explicite P és Q-tól:

$$y = x\alpha = F(x,\alpha) = F\left(x, \frac{dP}{dQ}, \ldots, \frac{d^m P}{dQ^m}\right).$$

A $P=\alpha Q=\alpha\beta R$ transzformáció ismétlése során x az (I) alatti törvényszerűség szerint transzformálódik, tehát $\alpha\beta$ a $P=\alpha(\alpha R)$ összetett függvény deriváltjait foglalja össze;

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \left(\frac{dP}{dQ}, \ldots, \frac{d^m P}{dQ^m}\right), \\ \beta &= \left(\frac{dQ}{dR}, \ldots, \frac{d^m Q}{dR^m}\right), \\ \alpha\beta &= \left(\frac{dP}{dR}, \ldots, \frac{d^m P}{dR^m}\right), \end{aligned}\right\} \quad P=\alpha Q=\alpha\beta R,$$

így az $\alpha\beta$ műveletet az összetett függvény deriválási szabálya értelmezi.

Az x-hez rendelt transzformációk (operátorok) értelmezési tartományát $\mathcal{O}$-vel fogjuk jelölni. Ez rendszerint félcsoport, mely tartalmaz egy $\mathcal{G}$ csoportot.

Az $x\in X$ geometriai objektumot az $y=x\alpha$ transzformációs törvény (operációi) jellemzi. Így az (I) (transzformáció) függvényegyenlet megoldása révén az összes különböző típusú geometriai objektum felsorolható. E dolgozat célja (I) megoldásának visszavezetése a megadott $\mathcal{O}$ (vagy $\mathcal{G}$ csoport) szerkezetének vizsgálatára, és egyes speciális esetekben e szerkezeti vizsgálat végrehajtása.

Az I. fejezet 1—2. §-ban látni fogjuk, hogy (I) megoldása $\mathcal{G}\subseteq\mathcal{O}$-on egyenértékű az (absztrakt) $\mathcal{G}$ csoport nemkonjugált alcsoportjainak megkeresésével, és speciálisan $\mathcal{G}$ valamely $\mathfrak{N}$ normálosztóján, rögzített $x=x_0$ helyen az $\alpha\in\mathfrak{N}$ változóban invertálható $x\alpha$ operációk meghatározása egyenértékű

[1] A szögletes zárójelben álló számok a dolgozat III. része végén található irodalom jegyzékre utalnak.

$\mathcal{G}$ bizonyos endomorfizmusainak megkeresésével.[2] Az utóbbi visszavezetési tétel alkalmazható akkor is, ha $\mathcal{G}$ két részcsoport szorzatára bontható, és az egyes tényező részcsoportok normálosztóján invertálható $x_0\alpha$; erről szól a 3. §. A 3. §-ban előzőleg még a megoldást szolgáltató endomorfizmust vizsgáljuk két részcsoport szorzatára bomló $\mathcal{G}$-n. A II. fejezet 1. §-ban az n-dimenziós objektumok $\mathcal{G}_n$ csoportjának általános tulajdonságait ismerjük meg, a 2. §-ban pedig az $m=3$. osztályú $\mathcal{G}_1^3$ csoport összes egy- és kétparaméteres, az egységelem környezetében folytonos, illetve folytonosan differenciálható, egyszeresen összefüggő alcsoportjait fogjuk meghatározni. A 3. §-ban vizsgáljuk a $\mathcal{G}_1^3$ bizonyos részein invertálható megoldásokat, és meghatározásukra adunk egy általános eljárást, amit példákon alkalmazni is fogunk.

A III. fejezetet az objektumok algebrájának szenteljük; objektumok X halmaza *algebrát* alkot, ha abban értelmezve van egy $xy \in X$ művelet, amely automorf az $\bar{x}=x\alpha$ transzformációkkal szemben: $\overline{xy}=\bar{x}\bar{y}$. Itt az előzőkkel szemben nem követeljük meg (I)-et. Az 1. §-ban bebizonyítjuk, hogy tetszőleges k-dimenziós X_k algebra izomorf egy olyan X_k'-vel, mely az $x'y'=x'+\gamma(y'-x')$ művelettel van ellátva, feltéve, hogy bizonyos elsőrendű differenciálhatósági feltételek is teljesülnek. A 2. §-ban másodrendű differenciálhatóság felhasználásával kimutatjuk, hogy bármely $k=1$ dimenziós X_1 algebra izomorf egy olyan X_1'-vel, melyben az $\bar{x}=x\alpha$ operációk (transzformációk) affinitások:

$$\bar{x}'=x'a+b \quad [a=a(\alpha),\, b=b(\alpha)],$$

s az ilyen transzformációkkal szemben automorf műveletek mindig

$$x+\gamma(y-x) \quad \text{vagy} \quad c_1x+c_2y+c_3$$

alakúak, ahol

$$\gamma(at)=a\gamma(t), \quad \text{illetve} \quad c_3(a-1)=(c_1+c_2-1)\,b.$$

Az objektumok algebráját lehet általánosabban is értelmezni; ha $(xy)\alpha$-ról csak annyit tudunk, hogy x és y valamilyen transzformáltjaiból alkotható:

$$(xy)\alpha=H[K(x,\alpha),L(y,\alpha)]$$

(esetleg más

$$x\alpha \neq K(x,\alpha) \neq L(x,\alpha)$$

transzformációs törvénnyel), akkor az X_k és a $x'+\gamma(y'-x')$ művelettel ellátott X_k' között csak izotopizmus [2] áll fenn. Ezekre és még egyéb, több változóra történő általánosításokra a 4. §-ban térünk rá, s látunk néhány általános visszavezetési tételt.

[2] Illetve egyenértékű bizonyos speciális alcsoportok megkeresésével. Az ilyen tulajdonságú megoldások meghatározásának problémáját Aczél János [1] vetette fel.

I. FEJEZET

AZ xa OPERÁCIÓ (TRANSZFORMÁCIÓ) ELŐÁLLÍTÁSA AZ ab (PARAMÉTER) MŰVELET FÜGGVÉNYEKÉNT

1. §. Visszavezetés a $\mathfrak{G}$ (paraméter) csoport szerkezetének vizsgálatára.

1. Megállapodunk néhány elnevezésben és jelölésben.

Az $\mathfrak{O}$ strukturát, vagy speciálisan a $\mathfrak{G}$ csoportot egy X halmaz *operátor tartományának* nevezzük, ha fennáll:

$$(1) \qquad (xa)b = x(ab), \qquad x \in X;\ a,\ b \in \mathfrak{O}.$$

A geometriai objektumok elméletének irodalmával ellentétben itt *jobboldali* operátort vettünk; ez inverz operátor létezése esetén mindegy elvileg, mert pl. az ax baloperátorral együtt $xa = a^{-1}x$ jobboldali operátor:

$$\underline{(xa)b} = b^{-1}(a^{-1}x) = (b^{-1}a^{-1})x = (ab)^{-1}x = \underline{x(ab)},$$

tehát az áttérés egyik oldali operátorról a másik oldalira egyértelmű. A geometriai objektumok elméletében jobbról írott baloperátor írás terjedt el: (1) helyett az

$$F[F(x,a),b] = F(x,ba)$$

jelölést használja több szerző. Később látni fogjuk, hogy lényeges számolási könnyebbséget jelent a jobboperátor írás; egyébként a másik oldali operátorral is teljesen hasonló (duális) tételek bizonyithatók. Hogy mégse térjünk el túlságosan a bevett szokásoktól, xa helyett az ax jelölést használva, az egyes geometriai objektum transzformációs törvényeket felírjuk az irodalomban megszokott (kontravariáns) alakban is.

Operátorok $\mathfrak{G}$ csoportját (általában $\mathfrak{O}$ halmazát) *tranzitivnek* nevezzük X felett, ha van X-nek olyan x_τ eleme, mely tetszőleges $x \in X$-be transzformálható: $x_\tau \mathfrak{G} = X$. Ekkor nyilván $x\mathfrak{G} = X$ is teljesül bármely $x \in X$-nél. Ugyanis alkalmas $a \in \mathfrak{G}$-vel $x = x_\tau a$, tehát

$$x\mathfrak{G} = (x_\tau a)\mathfrak{G} = x_\tau(a\mathfrak{G}) = x_\tau \mathfrak{G} = X.$$

Ha a $\mathfrak{G}$ csoporttal mint operátor tartománnyal ellátott x *unitér* azaz $\mathfrak{G}$ egységelemére: e-re fennáll $xe = x$ $(x \in X)$, akkor X egymástól idegen $X_\tau = x_\tau \mathfrak{G}$ tranzitivitási tartományok összege: $X = \cup X_\tau$. Az $x_\tau \in X$ elemek halmaza X-nek egy *kifeszítő rendszere.* Minthogy előző megjegyzésünk szerint egy tranzivitási tartományt bármely eleme kifeszíti, ezért az X_τ terek közül bármely kettő közös része üres. Nyilván nem jelent különösebb megszorítást X unitér volta, hiszen xa-t már egyértelmű módon jellemzi az X-nek az

$\bar{X} = Xe$ unitér részén való viselkedése: bármely $x \in X$ és $a \in \mathcal{G}$ esetén

$$\left.\begin{array}{l} \underline{xa} = x(ea) = (xe)a = \bar{x}a, \\ \bar{x}e = (xe)e = xe = \bar{x}, \end{array}\right\} \quad x \to \bar{x} = xe \in \bar{X} = Xe,$$

s ez nyilván érvényes bármely egységelemes $\mathcal{O}$ struktúrán.

$\mathcal{G}$ s elemeit, melyek egy $x_\tau \in X$-et változatlanul hagynak, az x_τ elem *stacioner* operátorainak nevezzük. Ezek nem üres $\mathcal{S}$ halmaza nyilván részcsoportja (általában részstruktúrája) $\mathcal{G}$-nek.

Az X-ben ugyan nem értelmezünk műveletet, de X *operátor izomorfizmusának* (röviden o-izomorfizmusának) fogjuk nevezni valamely X' halmazra való $x \leftrightarrow x'$ leképezését. $\mathcal{O}$ operátor tartománya marad X'-nek is, ha az operátorok hatását így értelmezzük:

$$x' \circ a = (xa)', \qquad x \in X,\ a \in \mathcal{O}.$$

Ez egyértelmű vonatkozást létesít az xa és az $x' \circ a$ műveletek között: egyikük meghatározza a másikat. Hasonló módon értelmezzük az $x \to x'$ *o-homomorfizmust* is. X-nek minden operátor-homomorf X' képéhez is hozzárendelhető $\mathcal{O}$ operátor tartományként, s nyilván az $x \to x'$-vel képezett $x' \circ a = (xa)'$ ekkor is kielégíti az (1)-hez hasonló

$$(1') \quad (x' \circ a) \circ b = (xa)' \circ b = [(xa)b]' = [x(ab)]' = x' \circ (ab), \quad x' \in X';\ a,\ b \in \mathcal{O}$$

operátor követelményt, csak most $x' \circ a$-ról a visszatérés xa-ra nem egyértelmű. Természetesen, $x \to x'$ csak akkor értelmez homomorfizmust, ha $x' = y'$-vel együtt

$$(xa)' = (ya)', \qquad a \in \mathcal{G},$$

azaz $x' \circ a = (xa)'$ értelmezése független x választásától. Izomorf-homomorf struktúrák helyett a félreértés veszélye nélkül használhatjuk a megfelelő izomorf-homomorf műveletek elnevezést.

2. Az előbb értelmezett fogalmak felhasználásával kimondhatjuk a következőt:

1. TÉTEL: *Adott $\mathcal{F}$ félcsoport hozzárendelhető önmagához és bármely o-homomorf képéhez operátor tartományként, és tranzitív operátor tartományként csak ezekhez rendelhető hozzá.*

A tétel első része nyilvánvaló, a második rész bizonyítása végett tekintsük az

$$\alpha(\in \mathcal{F}) \to \alpha^\tau = x_\tau a \qquad (\in X_\tau = x_\tau \mathcal{F})$$

leképezést, mellyel valóban

$$xa = \underline{\alpha^\tau a} = (x_\tau \alpha)a = x_\tau(\alpha a) = (\alpha a)^\tau.$$

A tétel más szavakkal azt mondja ki, hogy adott $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}$ félcsoporton és egy tetszőleges rögzített $x_\tau \in X$ elem által kifeszített $X_\tau = x_\tau \mathcal{F}$ tranzitivitási tartományon (1) legáltalánosabb megoldása

$$xa = a^{\tau} a = (aa)^{\tau}, \qquad a \in \mathfrak{F},$$

ahol $a \to a^{\tau} = x$ az $\mathfrak{F}$ tetszőleges operátor-homomorf leképezése X_{τ}-ra. Eszerint (1) megoldása $\mathfrak{F}$-en egyenértékű $\mathfrak{F}$ összes o-homomorfizmusainak a megkeresésével. Ez utóbbi struktúra probléma megoldása különösen egyszerű pl. egy csoporton. Érvényes a következő:

2. TÉTEL. *Egy $\mathfrak{G}$ csoport $\mathfrak{S}$ alcsoportja szerinti*

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{S}\bar{a}, \ \mathfrak{S}\bar{b}, \ldots, = \mathfrak{S}\mathfrak{H}$$

felbontás jobboldali $\mathfrak{H}$ reprezentáns rendszere homomorf képe $\mathfrak{G}$-nek:

(2) $$\bar{a} \circ a = \overline{\bar{a}a}, \quad a = a'\bar{a}(\in \mathfrak{G}) \to \bar{a}(\in \mathfrak{H}); \ a \in \mathfrak{G}.$$

O-izomorfizmustól eltekintve $\mathfrak{G}$-nek nincs is egyéb o-homomorf képe.

A tétel más szavakkal a tranzitív permutációs csoportok reprezentálhatóságát mondja ki a teljes permutációs csoport alcsoportjaihoz tartozó mellékosztályok permutációiként [10].

Megjegyzés. Konjugált $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}' = c^{-1}\mathfrak{S}c$ alcsoportokhoz, melyeket $\mathfrak{G}$-nek egy $a \to c^{-1}ac$ (belső) automorfizmusa egymásra képez le, o-izomorf maradékrendszer tartozik; alkalmas o-izomorfizmus

$$\mathfrak{S}a \leftrightarrow \mathfrak{S}'c^{-1}ac = c^{-1}(\mathfrak{S}a)c.$$

A megegyező alcsoportokhoz tartozó különböző maradékrendszerek között pedig nyilván o-izomorfizmus áll fenn. Viszont nyilvánvaló, hogy o-izomorf X, X' halmazok elemeihez tartozó stacioner operátorok alcsoportjai egymás konjugáltjai; ha ugyanis x_{τ} stacioner operátorainak alcsoportja $\mathfrak{S}$, akkor $x' = (x_{\tau}c)'$-é $\mathfrak{S}_c = c^{-1}\mathfrak{S}c$, hiszen

$$x' \circ \mathfrak{S}' = [(x_{\tau}c)c^{-1}\mathfrak{S}c]' = (x_{\tau}\mathfrak{S}c)' = (x_{\tau}c)' = x',$$

tehát $\mathfrak{S}' \subseteq \mathfrak{S}_c$, és másrészt hasonlóan $c\mathfrak{S}_c c^{-1} \subseteq \mathfrak{S}'$ vagyis valóban $\mathfrak{S}' = \mathfrak{S}_c$.

Másszóval *az o-izomorfizmushoz szükséges és elegendő a rögzített elemekhez tartozó stacioner operátorok alcsoportjainak konjugáltsága.* [5]

KÖVETKEZMÉNY. A $\mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{O}$ csoporton (1) összes, legfeljebb o-izomorfizmustól eltekintve különböző megoldásainak megkeresése egyenértékű $\mathfrak{G}$ összes nemkonjugált $\mathfrak{S}$ alcsoportjainak[3] és a hozzájuk tartozó $\mathfrak{H}$ jobboldali maradék-

[3] A $\mathfrak{G}$ különböző $\mathfrak{S}$ alcsoportjai közül nem kellene számításba venni azokat, melyeknek van $\mathfrak{G}$ normálosztóját képező része; u. i. ha $\mathfrak{S} = \mathfrak{T}\mathfrak{N} = \mathfrak{N}\mathfrak{T}$, ahol $\mathfrak{N}$ a $\mathfrak{G}$ normálosztója, akkor $\mathfrak{N}$ elemei X minden elemének stacioner operátorai, mert

$$x\mathfrak{N} = (x_{\tau}c)\mathfrak{N} = x_{\tau}(c\mathfrak{N}) = x_{\tau}(\mathfrak{N}c) = (x_{\tau}\mathfrak{N})c = x_{\tau}c = x,$$

vagyis xa-t leírja már a $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ faktorcsoporton való viselkedése [5]. Hogy ne kelljen $\mathfrak{G}$ faktorcsoportjait így különválasztva vizsgálni, eltekintünk ettől a megkülönböztetéstől, és $\mathfrak{G}$ alcsoportjai közül számításba vesszük azokat is, melyeknek van $\mathfrak{G}$ normálosztóját képező (az egységelemtől különböző) része.

rendszereknek a meghatározásával [3,5], vagyis az összes ismétlés nélküli $\mathcal{G} = \mathcal{S}\mathcal{H}$ faktorizációk meghatározásával, ahol $\mathcal{S}$ a $\mathcal{G}$-nek alcsoportja. A megoldásokat egy x_τ elem által kifeszített $X_\tau = x_\tau \mathcal{G}$ tranzitvitási tartománnyal operátor-izomorf $\mathcal{H}$-n a (2) képlet (a mellékosztályok tranzlációja) szolgáltatja, ahol $a \to \bar{a}$ a $\mathcal{G}$-nek $\mathcal{H}$-ra való tetszőleges leképezése (o-homorfizmusa).

ÖSSZEFOGLALVA: Adott $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}$ félcsoporton (1) legáltalánosabb megoldásának megkeresése egyenértékű az önmagán operáló $\mathcal{F}$ o-homomorf képeinek meghatározásával, s egy $\mathcal{G}$ csoporton az összes o-izomorfizmustól eltekintve különböző megoldások megkeresése egyenértékű $\mathcal{G}$ összes nemkonjugált alcsoportjainak meghatározásával. A 2. tételben éppen azt bizonyítottuk, hogy egy önmagán operáló $\mathcal{G}$ csoport o-homomorf képe o-izomorf $\mathcal{G}$ valamely $\mathcal{S}$ alcsoportja szerinti $\mathcal{H}$ jobboldali maradékrendszerével, analóg módon azzal, hogy egy csoport homomorf képe izomorf valamely normálosztó szerinti faktorcsoporttal.

2. §. Bizonyos részhalmazon invertálható xa

1. Egy csoport összes alcsoportjainak meghatározása általában nem egyszerű feladat, ezért a következőkben más szemszögből vizsgáljuk (1) megoldásának kérdését.

ACZÉL JÁNOS [1] az (1) megoldásánál más felfogást követ: $\mathcal{O}$-nak egy előre megadott $\mathcal{H}$ (rendszerint normálosztó, de legalább csoport) részén feltételezi az

$$x = x_\tau \xi \longleftrightarrow x' = \xi \quad (\in \mathcal{H})$$

leképezés létezését, és így keresi xa-t. Egy $X = x_\tau \mathcal{O}$ tranzitivitási tartományon ilyen $\mathcal{H}$ bizton létezik: egyik legszűkebb $x_\tau \mathcal{H} = X$ tulajdonságú $\mathcal{H}$. ACZÉL JÁNOS vizsgálataiban $\mathcal{H}$ megválasztása önkényes, de hasznos, mert sok esetben minden további differenciálhatósági, folytonossági, sőt csoport stb. feltétel nélkül nyerhető xa legáltalánosabb alakja. Az általános algebrai módszerek ekkor is sikeresen alkalmazhatók:

Az $x \longleftrightarrow x'$ leképezéssel áttérünk X-ről $\mathcal{H}$-ra, s azon értelmezzük

$$x' \circ a = (xa)', \qquad x (\in X) \longleftrightarrow x' (\in \mathcal{H}), \; a \in \mathcal{O}$$

-t, mely nyilván szintén kielégíti az

$$(x' \circ a) \circ b = x' \circ (ab), \qquad x' \in \mathcal{H}; \; a, \; b \in \mathcal{O} \tag{1'}$$

operátor követelményt. Minthogy $x \longleftrightarrow x'$ invertálható, ezért létezik $e \in \mathcal{H}$, melyre

$$x_\tau e = x_\tau, \quad x'_\tau = e$$

teljesül. Így

$$e \circ \xi = x'_\tau \circ \xi = (x_\tau \xi)' = \xi, \qquad \xi \in \mathcal{H}.$$

Ezután bevezetjük $\mathcal{O}$-nak $\mathcal{H}$-ra való

$$a \to \pi a = e \circ a$$

leképezését, mellyel,

$$\xi \circ a = (e \circ \xi) \circ a = e \circ (\xi a) = \pi(\xi a), \qquad \xi \in \mathcal{H},\ a \in \mathcal{O}.$$

Itt azonban az $a \to \pi a$ leképezést nem ismerjük, csupán annyit tudunk róla, hogy

$$(e \circ a) \circ b = e \circ (ab)$$

fennállása miatt kielégíti a

$$\text{(3)} \qquad \pi[(\pi a)b] = \pi(ab), \qquad a, b \in \mathcal{O}$$

függvényegyenletet. Erre tekintettel $\xi \circ a$-t úgyis felírhatjuk, hogy ξ helyett $\pi\alpha$-t írunk:

$$(\pi\alpha) \circ a = \pi(\alpha a),$$

s ez azt fejezi ki, hogy $\mathcal{H}$ az $\mathcal{O}$ operátor-homomorf képe. Ismételjük azonban, hogy itt az $a \to \pi a$ leképezést nem tekinthetjük adottnak, csupán azt tudjuk róla, hogy kielégíti (3)-t. Az viszont nyílvánvaló, hogy (3) fennállása esetén az $a \to \pi a$ leképezés operátor-homomorfizmus, vagyis α választásától függetlenül értelmezi $(\pi\alpha) \circ a$-t, mely valóban ki is elégíti az (1') operátor követelményt:

$$(\xi \circ a) \circ b = \pi[\pi(\xi a)b] = \pi(\xi ab) = \xi \circ (ab).$$

Mármost (3) megoldása végett feltételezve, hogy $\mathcal{H}$ csoport,

$$(\pi a)\xi \in \mathcal{H} \quad \text{ha} \quad \xi \in \mathcal{H},$$

ezért (3)-ban $b = \xi \in \mathcal{H}$-t helyettesítve,

$$(\pi a)\xi = \pi(a\xi)$$

adódik. Ha $\mathcal{O} = \mathcal{G}$ csoport, akkor felbontható a $\mathcal{H}$ szerinti

$$\mathcal{G} = a'\mathcal{H}, \qquad b'\mathcal{H}, \ldots$$

baloldali maradékosztályokra. Ha $a \in a'\mathcal{H}$, akkor

$$a = a'\bar{a}, \qquad a \in \mathcal{H}.$$

tehát

$$\pi a = \pi(a'\bar{a}) = (\pi a')\bar{a} = (\pi a')a'^{-1}a.$$

Vezessük be ezután π helyett a

$$\pi a = (\chi a^{-1})a$$

összefüggéssel a χ függvényt, akkor az előzővel összehasonlítva látjuk, hogy

$$\chi a^{-1} = (\pi a')a'^{-1}$$

csak a'-tól függ. Helyettesítsük ezt a π-t (3)-ba:

$$\{\chi[(\pi a)b]^{-1}\}(\chi a^{-1})ab = [\chi(ab)^{-1}]ab,$$

vagyis ab-vel jobbról való egyszerűsítés után, új változókkal

$$\chi[a(\pi b^{-1})^{-1}]\chi b = \chi(ab).$$

Az előbbi megállapítás szerint χa csak a-nak az a' reprezentánsától függ. Ha történetesen $\mathcal{H} = \mathfrak{N}$ normálosztó, akkor $\pi b^{-1} \in \mathfrak{N}$ miatt

$$[a(\pi)^{-1}]' = [a'\bar{a}(\pi)^{-1}]' = a',$$

tehát az

$$a \to \chi a = \chi a' = \chi(a\mathfrak{N}) = \pi(a'^{-1})a' \qquad \in \mathfrak{N}a$$

leképezés kielégíti a

$$\chi a \chi b = \chi(ab)$$

összefüggést, azaz $\mathcal{G}$-nek endomorfizmusa. Az ilyen χ-vel képezett

$$\pi a = (\chi a'^{-1})a \,(\in \mathfrak{N})$$

valóban ki is elégíti (3)-at, tehát (1') megoldása

$$\xi \circ a = \pi(\xi a) = [\chi(\xi a)^{-1}]\xi a = (\chi a^{-1})\xi a,$$

s kimondható a következő:

3. TÉTEL: *Az $X, \mathcal{O}$ halmazon értelmezett* (1) *függvényegyenletnek az adott $\mathcal{O}$ struktura $\mathcal{H}$ részén az*

$$x = x_t \xi \leftrightarrow x' = \xi \qquad (\in \mathcal{H})$$

invertálhatósági feltételt kielégítő legáltalánosabb megoldása

$$(xa)' = \xi \circ a = \pi(\xi a)[= (\pi a) \circ a = \pi(a a)], \qquad x \in X,\ a \in \mathcal{O},$$

ahol $a \to \pi a (\in \mathcal{H})$ a

(3) $$\pi[(\pi a)b] = \pi(ab), \quad \pi\xi = \xi; \qquad a, b \in \mathcal{O};\ \xi \in \mathcal{H}$$

összefüggést kielégítő (egyébként tetszőleges) leképzés (o-homomorfizmus). Ha $\mathcal{O} = \mathcal{G}$ csoport, melynek $\mathcal{H} = \mathfrak{N}$ normálosztója, akkor

(4) $$(xa)' = \xi \circ a = (\chi a^{-1})\xi a, \qquad a \in \mathcal{G},$$

ahol

(5) $$a \to \chi a = \chi(a\mathfrak{N}) \qquad \in a\mathfrak{N}$$

a $\mathcal{G}$-nek (tetszőleges) endomorfizmusa:

(6) $$\chi a \chi b = \chi(ab), \qquad ab \in \mathcal{G}.$$

MEGJEGYZÉS. Általában $\mathcal{H}$ nem választható teljesen önkényesen: ha $\mathcal{O} = \mathcal{G}$ csoport, akkor a 2. tétel szerint $\mathcal{H}$ csak $\mathcal{G}$ valamely $\mathfrak{S}$ alcsoportja szerinti jobboldali maradékrendszere lehet; akkor viszont az

$$a = a'\bar{a} \to \pi a = \bar{a}, \qquad a' \in \mathfrak{S}$$

leképezés valóban ki is elégíti (3)-t, hiszen

$$\overline{\bar{a}b} = \overline{\mathfrak{S}\bar{a}b} = \overline{a'\bar{a}b} = \overline{ab}.$$

2. A χ endomorfizmusok meghatározása is struktúra probléma, vagyis $\mathcal{G}$ bizonyos speciális alcsoportjainak megkeresésével egyenértékű. Ezzel kapcsolatban érvényes a következő:

4. TÉTEL: *Ahhoz, hogy egy*

$$a \to \chi a = \chi(a\mathfrak{N}) \qquad \in a\mathfrak{N}$$

alakú leképezés a $\mathfrak{G}$-nek endomorfizmusa legyen, szükséges és elegendő, hogy az $\mathfrak{N}$ normálosztó szerinti $a\mathfrak{N}$ $(a \in \mathfrak{G})$ maradékosztályoknak ezen osztályok alcsoportot alkotó $\mathfrak{T}$ reprezentáns rendszerére való leképezése legyen.

A szükségesség nyílvánvaló annak alapján, hogy a χa $(a \in \mathfrak{G})$ elemek $\mathfrak{T}$ halmaza a $\mathfrak{G}$-nek alcsoportja, merthisz két ilyen elem szorzata is ugyanilyen, továbbá

$$\chi e = e \in \mathfrak{T}, \qquad (\chi a)^{-1} = \chi a^{-1} \in \mathfrak{T};$$

másrészt pedig $\mathfrak{T}$ valóban az $\mathfrak{N}$ normálosztó reprezentáns rendszere, mert minden $a\mathfrak{N}$ osztálynak megfelel egy és csak egy

$$\chi(a\mathfrak{N}) \in a\mathfrak{N}.$$

Az elégségesség is nyílvánvaló, hiszen bármely

$$a \to \chi a = \chi(a\mathfrak{N})$$

leképezés, melynek $\mathfrak{T}$ képtartománya a $\mathfrak{G}$-nek olyan részcsoportja, hogy az az $\mathfrak{N}$ normálosztó szerinti maradékosztályok reprezentáns rendszere, teljesül (6), mert a reprezentánsok szorzata, mely $\mathfrak{T}$ csoport voltából kifolyólag maga is reprezentáns, megegyezik a szorzat reprezentánsával.

Minthogy egy $\mathfrak{T}$ reprezentáns rendszerre jellemző, hogy a $\mathfrak{G} = \mathfrak{T}\mathfrak{N}$ szorzat előállítás ismétlés nélküli, a 4. tétel a 3. tétellel összevetve más szavakkal azt mondja, hogy az (1) függvényegyenletnek a $\mathfrak{G}$ csoport $\mathfrak{N}$ nornálosztóján invertálható megoldásainak meghatározása egyenértékű az olyan ismétlés nélküli

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{T}\mathfrak{N} = \mathfrak{N}\mathfrak{T}$$

előállítások megkeresésével, melyeknél $\mathfrak{T}$ a $\mathfrak{G}$-nak alcsoportja.

3. §. Két alcsoport szorzatára bontható $\mathfrak{G}$ szerkezeti vizsgálata

1. Az eddigiekben (1) megoldását egyváltozós függvényegyenletek megoldására vezettük vissza. Most egy általános eljárást mutatunk az

(5) $$a \to \chi a = (a\mathfrak{N}) \qquad \in a\mathfrak{N}$$

alakú endomorfizmusok megkeresésére, vagyis

(6) $$\chi a \chi b = \chi(ab)$$

megoldására az (5) teljesülése esetén, midőn ugyanakkor a $\mathfrak{G}$ csoport

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_{\mathrm{I}}\mathfrak{G}_{\mathrm{II}} = \mathfrak{G}_{\mathrm{II}}\mathfrak{G}_{\mathrm{I}} = \mathfrak{G}_{\mathrm{I}} \cup \mathfrak{G}_{\mathrm{II}}$$

részcsoportokra való nem feltétlen ismétlés nélküli felbontását ismerjük. Ekkor

(7) $$\left.\begin{array}{ll} \varrho a_{\mathrm{I}} = \chi a_{\mathrm{I}} = \varrho(a_{\mathrm{I}}\mathfrak{N}_{\mathrm{I}}) & \in a_{\mathrm{I}}\mathfrak{N}_{\mathrm{I}}) \\ \sigma a_{\mathrm{II}} = \chi a_{\mathrm{II}} = \sigma(a_{\mathrm{II}}\mathfrak{N}_{\mathrm{II}}) & \in a_{\mathrm{II}}\mathfrak{N}_{\mathrm{II}}) \end{array}\right\} \begin{array}{l} a_i \in \mathfrak{G}_i \\ \mathfrak{N}_i = \mathfrak{G}_i \cap \mathfrak{N} \end{array}$$

$\mathfrak{G}_i$-n értelmezett endomorfizmusok. Észrevesszük azt is, hogy ϱ és σ értelmezése, és χ endomorfizmus volta miatt nem függetlenek, hiszen

$$a = a_{\mathrm{I}} a_{\mathrm{II}} = \alpha_{\mathrm{II}}\alpha_{\mathrm{I}}, \qquad a_i,\ \alpha_i \in \mathfrak{G}_i$$

esetén

$$\chi a = \chi a_{\mathrm{I}} \chi a_{\mathrm{II}} = \chi \alpha_{\mathrm{II}} \chi a_{\mathrm{I}},$$

vagyis érvényes, hogy

(8) $$\chi a = \varrho a_{\mathrm{I}} \sigma a_{\mathrm{II}} = \sigma \alpha_{\mathrm{II}} \varrho \alpha_{\mathrm{I}}, \qquad a = a_{\mathrm{I}} a_{\mathrm{II}} = \alpha_{\mathrm{II}} \alpha_{\mathrm{I}}.$$

Kimondhatjuk a következőt:

5. TÉTEL. *Ahhoz, hogy χ a részcsoportok szorzatára bontható*

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_{\mathrm{I}}\mathfrak{G}_{\mathrm{II}} = \mathfrak{G}_{\mathrm{II}}\mathfrak{G}_{\mathrm{I}} = \mathfrak{G}_{\mathrm{I}} \cap \mathfrak{G}_{\mathrm{II}}$$

csoportnak (5) *alakú endomorfizmusa legyen, szükséges és elegendő a* (8) *egyenletek fennállása, ahol ϱ, σ a* (7) *alatti alakú endomorfizmusok.*

A bizonyítás előtt még megadjuk az 5. tétel függvényegyenlet megoldási megfogalmazását is:

KÖVETKEZMÉNY. A (6) függvényegyenlet (5) kiegészítő feltételt kielégítő megoldásának megkeresésére egyenértékű a (7), (8) összefüggéseket kielégítő ϱ, σ endomorfizmusok meghatározásával, ha a $\mathfrak{G}$ megfelelő módon faktorizálható.

Minthogy a szükségesség bizonyítása már megtörtént, a következmény dedig nem kíván külön bizonyítást, rögtön rátérünk az elégségesség bizonyítására. Tekintsük először (5)-öt:

$$\begin{aligned} \chi a = \chi(a_{\mathrm{I}} a_{\mathrm{II}}) = \varrho a_{\mathrm{I}} \sigma a_{\mathrm{II}} = \varrho(a_{\mathrm{I}}\mathfrak{N}_{\mathrm{I}})\sigma(a_{\mathrm{II}}\mathfrak{N}_{\mathrm{II}}) = \\ = \chi(a_{\mathrm{I}}\mathfrak{N}_{\mathrm{I}} a_{\mathrm{II}}\mathfrak{N}_{\mathrm{II}}) = \chi(a\mathfrak{N}) \in a_{\mathrm{I}}\mathfrak{N}_{\mathrm{I}} a_{\mathrm{II}}\mathfrak{N}_{\mathrm{II}} = a\mathfrak{N}, \end{aligned}$$

ugyanis $\mathfrak{N}_{\mathrm{II}} = \mathfrak{G}_{\mathrm{II}} \cap \mathfrak{N}$ a $\mathfrak{G}_{\mathrm{II}}$-nek normálosztója tehát

$$a_{\mathrm{I}}\mathfrak{N}_{\mathrm{I}} a_{\mathrm{II}}\mathfrak{N}_{\mathrm{II}} = a_{\mathrm{I}}\mathfrak{N}_{\mathrm{I}}\mathfrak{N}_{\mathrm{II}} a_{\mathrm{II}} = a_{\mathrm{I}}\mathfrak{N} a_{\mathrm{II}} = a_{\mathrm{I}} a_{\mathrm{II}}\mathfrak{N} = a\mathfrak{N},$$

hiszen

$$\mathfrak{N}_{\mathrm{I}}\mathfrak{N}_{\mathrm{II}} = \mathfrak{N},$$

mert egyrészt

$$\mathfrak{N}_{\mathrm{I}}\mathfrak{N}_{\mathrm{II}} \subseteq \mathfrak{N}\mathfrak{N} = \mathfrak{N},$$

másrészt

$$\mathfrak{N}_{\mathrm{I}}\mathfrak{N}_{\mathrm{II}} \supseteq \mathfrak{N}_{\mathrm{I}} e \cup e\mathfrak{N}_{\mathrm{II}} = (\mathfrak{G}_{\mathrm{I}} \cap \mathfrak{N}) \cup (\mathfrak{G}_{\mathrm{II}} \cap \mathfrak{N}) = (\mathfrak{G}_{\mathrm{I}} \cup \mathfrak{G}_{\mathrm{II}}) \cup \mathfrak{N} = \mathfrak{G} \cap \mathfrak{N} = \mathfrak{N}.$$

Igazoljuk ezután χ homomorfizmus voltát is. Legyen

$$a = a_{\mathrm{I}} a_{\mathrm{II}}, \qquad b = t_{\mathrm{II}} b_{\mathrm{I}}, \qquad ab = c_{\mathrm{I}} c_{\mathrm{II}},$$

akkor

$$(9) \qquad a_{\mathrm{II}} b_{\mathrm{II}} b_{\mathrm{I}} = a_{\mathrm{I}}^{-1}(ab) = a_{\mathrm{I}}^{-1} c_{\mathrm{I}} c_{\mathrm{II}},$$

tehát (8) felhasználásával a

$$\chi a \chi b = \varrho a_{\mathrm{I}} \sigma a_{\mathrm{II}} \sigma b_{\mathrm{II}} \varrho b_{\mathrm{I}} = \varrho a_{\mathrm{I}} \sigma(a_{\mathrm{II}} b_{\mathrm{II}}) \varrho b_{\mathrm{I}} = \varrho a_{\mathrm{I}} \chi(a_{\mathrm{II}} b_{\mathrm{II}} b_{\mathrm{I}}) =$$
$$= \varrho a_{\mathrm{I}} \chi(a_{\mathrm{I}}^{-1} c_{\mathrm{I}} c_{\mathrm{II}}) = \varrho a_{\mathrm{I}} \varrho(a_{\mathrm{I}}^{-1} c_{\mathrm{I}}) \sigma c_{\mathrm{II}} = \varrho a_{\mathrm{I}} \varrho a_{\mathrm{I}}^{-1} \varrho c_{\mathrm{I}} \sigma c_{\mathrm{II}} = \chi(c_{\mathrm{I}} c_{\mathrm{II}}) = \chi(ab)$$

egyenlőség sorozatot nyerjük, melynek elejét és végét összehasonlítva kapjuk a bizonyítani kívánt állítást.

Az itt tárgyalt visszavezetés hasznát különösen akkor tapasztaljuk, midőn a ϱ, σ közül az egyik pl. ϱ könnyen meghatározható, s akkor σ-t a (8) alapján tudjuk keresni.[4]

2. Előfordul, hogy a 3. tételben használt invertálhatósági feltétel nem teljesül, de $\mathcal{G}$ faktorizálható oly módon, hogy az egyes tényező részcsoportokon már alkalmazható a 3. tétel. Ha a tényező $\mathcal{G}_i$ részcsoportoknak van olyan $\mathcal{H}_i$ része, hogy azokon xa invertálható egy x_{I}, illetve x_{II} helyen, akkor felírható

$$x a_i = \varphi_i \pi_i [(\varphi_i^{-1} x) a_i], \qquad x \in X,\ a_i \in \mathcal{G}_i,\ i = \mathrm{I}, \mathrm{II},$$

ahol

$$(10) \qquad \pi_i[\pi_i a_i) b_i] = \pi_i(a_i b_i), \qquad \pi_i \xi_i = \xi_i;\ a_i,\ b_i \in \mathcal{G}_i;\ \xi_i \in \mathcal{H}_i.$$

Minthogy bármely $a \in \mathcal{G}$ esetén fennáll az

$$a = a_{\mathrm{I}} a_{\mathrm{II}} = \alpha_{\mathrm{II}} a_{\mathrm{I}}$$

felbontás, ezért a következőképpen írható

$$\chi a = \varphi_{\mathrm{II}} \pi_{\mathrm{II}} \{\varphi_{\mathrm{II}}^{-1} \varphi_{\mathrm{I}} \pi_{\mathrm{I}} [(\varphi_{\mathrm{I}}^{-1} x) a_{\mathrm{I}}] a_{\mathrm{II}}\} = \varphi_{\mathrm{I}} \pi_{\mathrm{I}} \{\varphi_{\mathrm{I}}^{-1} \varphi_{\mathrm{II}} \pi_{\mathrm{II}} [(\varphi_{\mathrm{II}}^{-1} x) \alpha_{\mathrm{II}}] \alpha_{\mathrm{I}}\},$$

azaz bevezetve a

$$(11) \qquad \varphi_{\mathrm{I}}^{-1}[(\varphi_{\mathrm{I}} \xi_{\mathrm{I}}) a] = \xi \circ a, \qquad \varphi_{\mathrm{I}}^{-1} \varphi_{\mathrm{II}} = \omega,\ (\omega \mathcal{H}_{\mathrm{II}} = \mathcal{H})$$

jelöléseket,

$$(12) \qquad \xi_{\mathrm{I}} \circ a = \omega \pi_{\mathrm{II}} [\omega^{-1} \pi_{\mathrm{I}} (\xi_{\mathrm{I}} a_{\mathrm{I}}) a_{\mathrm{II}}] = \pi_{\mathrm{I}} \{\omega \pi_{\mathrm{II}} [(\omega^{-1} \xi_{\mathrm{I}}) \alpha_{\mathrm{II}}] \alpha_{\mathrm{I}}\}$$

az X-szel o-izomorf $\mathcal{H}_{\mathrm{I}}$ halmazon értelmezett operáció. Igy tehát nyílvánvaló a következő:

6. TÉTEL. *Legyen a $\mathcal{G}_{\mathrm{I}}$, $\mathcal{G}_{\mathrm{II}}$ részcsoportok szorzatára bontható $\mathcal{G}$ csoport $\mathcal{H}_{\mathrm{I}}$, $\mathcal{H}_{\mathrm{II}}$ részén legalább egy-egy x_i kelyen*

$$\varphi_i \xi_i = x_i \xi_i, \quad \xi_i \in \mathcal{H}_i, \quad i = \mathrm{I}, \mathrm{II}$$

[4] A 4. tételre való tekintettel az 5. tétel azt állítja, hogy a $\mathcal{G} = \mathcal{G}_{\mathrm{I}} \mathcal{G}_{\mathrm{II}} = \mathcal{G}_{\mathrm{II}} \mathcal{G}_{\mathrm{I}}$ csoportnak az adott $\mathfrak{N}$ normálosztóval képezett ismétlés nélküli $\mathcal{G} = \mathfrak{T} \mathfrak{N}$ faktorizációjának megkeresése, melynél $\mathfrak{T}$ a $\mathcal{G}$-nek alcsoportja, egyenértékű a hasonló tulajdonságú

$$\mathcal{G}_i = \mathfrak{T}_i \mathfrak{N}_i, \qquad \mathfrak{N}_i = \mathcal{G}_i \cap \mathfrak{N}$$

faktorizációk meghatározásával, melyeknél fennáll $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_{\mathrm{I}} \mathfrak{T}_{\mathrm{II}} = \mathfrak{T}_{\mathrm{II}} \mathfrak{T}_{\mathrm{I}}$.

invertálható; akkor az ω-ra felírt (12_2) *egyenlet fennállása szükséges és elegendő ahhoz, hogy a vele és a* (10)*-et kielégítő* π_i*-vel meghatározott* (12_1) *alatti* $\xi_1 \circ a$ *operátorművelet legyen, azaz* (1') *teljesüljön.*

Mielőtt a bizonyításra rátérnék, megadjuk a tétel függvényegyenlet megoldási megfogalmazását:

KÖVETKEZMÉNY. Az (1) függvényegyenletnek a kétváltozós xa-ra vonatkozó, az invertálhatósági feltételeket kielégítő megoldásának meghatározása egyenértékű a (10), (12) egyváltozós egyenletnek a π_i, ω-ra vonatkozó megoldásával. A megoldást a (11), (12) képlet szolgáltatja,

A 6. tételbeli feltételek szükségességének bizonyítása már az előzőkben megtörtént. Az elégségesség bizonyításához (1) fennállását kell igazolni, vagyis azt kell kimutatni, hogy érvényes

$$(\xi_1 \circ a) \circ b = \xi_1 \circ (ab), \qquad \xi_1 \in \mathcal{H}_1;\ a, b \in \mathcal{G}; \tag{1'}$$

ebből már a (11_1) szerint fennálló operátor-izomorfizmus miatt következik (1) is. Tekintsök tehát az

$$a = a_1 a_{11} \quad b = b_{11} b_1 \quad ab = c_1 c_{11}$$

felbontásokat, mellyel (1')-t a következő, vele egyenértékű alakban írhatjuk fel:

$$[\xi_1 \circ (a_1 a_{11})] \circ (b_{11} b_1) = \xi_1 \circ (c_1 c_{11}),$$

$$\pi_1\{\omega\pi_{11}[\omega^{-1}(\xi_1 \circ a) b_{11}] b_1\} = \omega\pi_{11}[\omega^{-1}\pi_1(\xi_1 c_1) c_{11}].$$

Minthogy azonban

$$\omega^{-1}(\xi_1 \circ a) = \pi_{11}[\omega^{-1}\pi_1(\xi_1 a_1) a_{11}],$$

és (12_2) szerint

$$\pi_{11}\{\omega\pi_{11}[\omega^{-1}\pi_1(\xi_1 a_1) a_{11}] b_{11}\} = \pi_{11}[\omega^{-1}\pi_1(\xi_1 a_1) a_{11} b_{11}],$$

ezért a (10), (9) összefüggés felhasználásával az igazolandó egyenlőség baloldala átalakítható:

$$\pi_1\{\omega\pi_{11}[\omega^{-1}\pi_1(\xi_1 a_1) a_{11} b_{11}] b_1\} = \omega\pi_{11}\{\omega^{-1}\pi_1[\pi_1[(\xi_1 a_1) a_1^{-1} c_1] c_{11}\} =$$
$$= \omega\pi_{11}\{\omega^{-1}\pi_1[\xi_1 a_1 (a_1^{-1} c_1)] c_{11}\} = \omega\pi_{11}[\omega^{-1}\pi_1(\xi_1 c_1) c_{11}].$$

A 6. tételt tehát bebizonyítottuk.

MEGJEGYZÉS. Ha $\mathcal{H}_i = \mathcal{N}_i$ normálosztó, akkor be lehet vezetni a

$$\pi_i a_i = \chi(a_i^{-1}) a_i$$

összefüggéssel értelmezett χ_i függvényeket, s ezek (6) miatt nyilván endomorfizmusok lesznek:

$$\chi_i a_i \chi_i b_i = \chi_i(a_i b_i), \tag{6'}$$

és (4) helyett a következő módon adják xa-t:

$$\xi_{|} \circ a = \omega\{(\chi_{||} a_{||}^{-1})\omega^{-1}[(\chi_{|} a_{|}^{-1})\xi_{|} a_{|}] a_{||}\} = (\chi_{|} \alpha_{|}^{-1})\omega[(\chi_{||} \alpha_{||}^{-1})(\omega^{-1}\xi_{|})\alpha]\alpha_{|},$$
$$a = a_{|} a_{||} = \alpha_{||}\alpha_{|}.$$

(Beérkezett: 1958. IV. 24.)

Nehézipari Műszaki Egyetem, Miskolc
Matematikai Tanszék

ALGEBRAI STRUKTÚRÁK KONGRUENCIARELÁCIÓIRÓL

Írta: SCHMIDT E. TAMÁS

Bevezetés

Mint ismeretes (lásd [1]) egy tetszőleges A algebrai struktúra* $\Theta, \Phi \ldots$ kongruenciarelációi a természetes részbenrendezésre nézve [$\Theta \leqq \Phi$ akkor és csakis akkor teljesül, ha $x \equiv y(\Theta)$ maga után vonja $x \equiv y(\Phi)$-t] komplett hálót alkotnak, melyet $\Theta(A)$-val jelölünk. Feladatunk $\Theta(A)$ szerkezetének megismerése. Egy adott A struktúrából kiindulva annál könnyebb $\Theta(A)$ vizsgálata, minél több kongruenciarelációja írható A-nak $\Theta_{a,b}$ alakba. ($\Theta_{a,b}$ a legkisebb olyan kongruenciarelációt jelöli, melynél $a \equiv b$. A $\Theta_{a,b}$ alakba írható kongruenciarelációkat minimálisnak nevezzük.) Ha például minden kongruenciareláció minimális, akkor nagyon szoros az adott A struktúra elemeinek és kongruenciareláció hálójának kapcsolata. Mivel minket vizsgálatainkban $\Theta(A)$ szerkezete érdekel, ezért kézenfekvő gondolat az A struktúrát egy olyan S struktúrára kicserélni, hogy $\Theta(A)$ és $\Theta(S)$ izomorfok legyenek, s emellett S-nek a lehető legtöbb kongruenciarelációja legyen minimális. HASHIMOTO [3] egyik tétele szerint a minimális kongruenciarelációk szükségképp alulról elérhetetlenek. A dolgozat főeredménye ennek megfordítása: olyan S struktúrát konstruálunk, melyre $\Theta(S) \simeq \Theta(A)$ és $\Theta(S)$ minden alulról elérhetetlen eleme minimális.

Ez a tétel első kísérlet, hogy teljesen általános algebrai struktúrákra vonatkozóan bizonyítási módszert nyújtson. Ezen módszer alkalmazására a dolgozat két példát tárgyal. Elsőként P. M. WHITMAN [6] egy nevezetes tételére ad új bizonyítást. Ezen tétel szerint minden véges háló beágyazható egy partició hálóba.

A módszer másik alkalmazása a MALCEV által bevezetett részleges algebrai struktúrák, másnéven algebrai strukturoidok elméletében történik. Bebizonyítjuk, hogy minden véges háló izomorf valamely véges algebrai strukturoid kongruenciareláció hálójával.

* Az absztrakt algebrai és hálóelméleti fogalmakra nézve az [1] könyvre utalunk.

1. §. Előkészületek

Legyen A valamely algebrai struktúra. Az A-n értelmezett műveletek összességét jelölje $M(A)$. Már a bevezetésben is említettük, hogy a természetes részberendezésre nézve A kongruenciarelációinak összessége, $\Theta(A)$, hálót alkot. G. BIRKHOFF és V. S. KRISHNAN (lásd [1]) következő tétele effektive megadja ezeket a műveleteket:

Legyen $\{\Theta_\alpha\}$ valamely részhalmaza $\Theta(A)$-nak. A $\{\Theta_\alpha\}$ kongruenciarelációk komplett metszeténél x és y $(x, y \in A)$ akkor és csak akkor kongruensek, ha $x \equiv y\,(\Theta)$ minden $\Theta \in \{\Theta_\alpha\}$-ra. A $\{\Theta_\alpha\}$ kongruenciarelációk komplett egyesítésénél x és y akkor és csak akkor kongruensek, ha alkalmas $x = x_0, x_1, \ldots, x_n = y$ sorozatra $x_{i-1} \equiv x_i\,(\Theta_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ megfelelőképp választott $\Theta_i \in \{\Theta_\alpha\}$-val.

A komplett metszet definíciójából látható, hogy az összes olyan kongruenciareláció metszeténél, melyeknél $a \equiv b$ (rögzített $a, b \in A$-ra), szintén fennáll $a \equiv b$. Így tehát valóban létezik $\Theta_{a,b}$.

Az A struktúrán belül meg lehet adni azt, hogy mely elempárok kongruensek moduló $\Theta_{a,b}$ $(a, b \in A)$. A tétel egyszerűbb megfogalmazhatósága kedvéért előbb bizonyítjuk a következőt:

1. LEMMA: *Minden A algebrai struktúrához található olyan S algebrai struktúra, hogy $\Theta(A) \simeq \Theta(S)$ és $M(S)$-ben csak egyváltozós műveletek vannak.*

BIZONYÍTÁS: Legyen az S struktúra ugyanazon a halmazon értelmezve, mint A. Legyen $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ valamely tetszőleges n-változós művelete A-nak. Ha ennek a műveletnek $n-1$ változóját rögzítjük, akkor egy egyváltozós műveletet nyerünk.

$M(S)$-et úgy definiáljuk, mint $M(A)$ összes egyváltozós műveleteit, továbbá az összes többváltozós műveletből, az összes lehetséges módon elkészített egyváltozós müveleteket. Könnyű belátni, hogy $\Theta(S) \cong \Theta(A)$. Sőt még ennél több is igaz. Az is világos, hogy S és A kongruenciarelációi ugyanazokat a maradékosztályokat létesitik.

Az 1. lemma egyszerűsége ellenére is fontos. Ugyanis, mint a bevezetésben is említettük, adott $\Theta(A)$ mellett célunk az A sruktúrát olyan S struktúrára kicserélni, hogy $\Theta(A) \simeq \Theta(S)$ s amellett az S struktúrából már elég sok következtetést vonhassunk le $\Theta(S)$-re. Az első ilyen kicserélési lépést mutatja meg az 1. lemma.

Legyen adott az A struktúra; most már feltesszük, hogy $M(A)$-ban csupán egyváltozós műveletek szerepelnek. Azt mondjuk, hogy A valamely a, b elempárjához hozzá van rendelve a c, d elempár, jelben $\overline{a, b} \to \overline{c, d}$, ha alkalmas

$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \in M(A)$-ra

$$c = \varphi_1 \varphi_2 \ldots \varphi_n(a), \quad d = \varphi_1 \varphi_2 \ldots \varphi_n(b)$$

[$\varphi_1 \varphi_2 \ldots \varphi_n(x)$ rövidített jelölése $\varphi_1(\varphi_2(\ldots \varphi_n(x)) \ldots)$-nek].

2. LEMMA: *Az A csupa egyváltozós művelettel rendelkező struktúrában $c \equiv d(\Theta_{a,b})$ akkor és csak akkor teljesül, ha léteznek olyan $c = y_0, y_1, \ldots, y_n = d$ elemek, hogy*

$$\overline{a, b} \rightarrow \overline{y_{i-1}, y_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

A 2. lemma explicite kimondva még sehol sem szerepelt. Lényegében azonban tartalmazza A. I. MALCEV [4] dolgozata s hálók esetére R. P. DILWORTH [2]. Lényegében ugyanígy fogalmazható meg tetszőleges (véges sok változós) műveletekkel ellátott struktúrára is, számunkra azonban elég a fenti egyszerűbb alak.

Az 1. lemma mutat rá arra, hogy kongruencia szempontból miért jogos G. BIRKHOFF konvenciója: csak véges változós műveleteket engedünk meg, de ezekből akárhány lehet. Ugyanis az 1. lemma szerint kongruencia szempontból elég egyváltozós műveletekre szorítkozni, viszont már egy binérműveletből is végtelen sok egyváltozós műveletet kapunk.

Szükségünk lesz a következő lemmára:

3. LEMMA: *Az L háló egyesítés kongruenciarelációi komplett hálót alkotnak. Minden egyesítés kongruenciareláció, $\Theta^{\cup}$, felírható $\bigvee \Theta_{a,b}^{\cup}$ alakba, ahol $\Theta_{a,b}^{\cup}$ az a és b-t egybeejtő legkisebb egyesítés kongruenciarelációt jelöli.*

BIZONYÍTÁS: Tekintsük az L hálónak csak az egyesítés műveletét. Erre nézve L algebrai struktúrát alkot: $L^{\cup}$. Így tehát BIRKHOFF [1] tétele szerint $L^{\cup}$ kongruenciarelációi komplett hálót alkotnak. $L^{\cup}$ kongruenciarelációi éppen L egyesítés kongruenciarelációi. Ezzel a 3. lemma első részét beláttuk. A $\Theta^{\cup}$ egyesítés kongruenciareláció nyilván előáll az összes olyan $\Theta_{a,b}^{\cup}$ egyesítéseképp, melyre $a \equiv b(\Theta^{\cup})$.

Az A algebrai struktúra kongruenciareláció hálójának $\Theta(A)$-nak valamely $\{\Theta_\alpha\}$ részhalmazát irányított halmaznak nevezzük, ha minden $\Theta_\alpha, \Theta_\beta \in \{\Theta_\alpha\}$-hoz található $\Theta_\gamma \in \{\Theta_\alpha\}$, melyre $\Theta_\alpha \leqq \Theta_\gamma$, $\Theta_\beta \leqq \Theta_\gamma$ teljesül. Ha Θ előáll egy olyan irányított halmaz elemeinek komplett egyesítéseképp, amely irányított halmaznak önmaga nem eleme, akkor Θ-t alulról elérhetőnek nevezzük. Ellenkező esetben azt mondjuk, hogy Θ alulról elérhetetlen. Az alulról elérhetetlen kongruenciarelációk fontos szerepet játszanak, struktúrájuk már meghatározza $\Theta(A)$ szerkezetét. Az alulról elérhetetlen kongruenciarelációk leírását tartalmazza a következő tétel, mely J. HASHIMOTÓtól (lásd [3]) származik:

4. LEMMA: *Legyen A algebrai struktúra s $\Theta \in \Theta(A)$. A Θ kongruenciareláció akkor és csak akkor alulról elérhetetlen, ha véges sok minimális kongruenciareláció egyesítése.*

2. §. Az alulról elérhetetlen és a minimális kongruenciarelációk kapcsolata

Láttuk az eddigiekből, hogy a minimális kongruenciarelációk a legegyszerűbben leírhatók s így a legkönnyebben kezelhetők. Másrészről az is világos, hogy az eredeti struktúra elemei ezekkel a kongruenciarelációkkal vannak legszorosabb kapcsolatban, például az eredeti struktúra elemeinek permutációjára ezek a kongruenciarelációk a legérzékenyebbek. Kivánatos tehát, hogy a struktúrának minél több minimális kongruenciarelációja legyen. A dolgozat erre vonatkozó főeredménye a következő:

1. TÉTEL: *Minden S algebrai struktúrához található olyan T algebrai struktúra, melyre $\Theta(S) \simeq \Theta(T)$ és $\Theta(T)$-nek minden alulról elérhetetlen eleme minimális.*

Megjegyzés. Érdemes megvizsgálni, hogy az 1. tétel mit mond a 4. lemma szempontjából. Tudjuk, hogy minden Θ kongruenciareláció minimális kongruenciarelációk komplett egyesítése, $\Theta = \bigvee \Theta_{a,b}$. Θ általában sokféleképpen írható fel, mint minimális kongruenciarelációk egyesítése. Tekintsük mindazon kardinális számokat, amilyen számosságú minimális kongruenciareláció egyesítéseképp Θ előállítható. A kardinális számok jólrendezettsége miatt ezek között lesz egy legkisebb; nevezzük ezt Θ rendjének. HASHIMOTO tétele azt mondja ki, hogy Θ rendje akkor és csak akkor véges, ha Θ alulról elérhetetlen, másszóval a rend véges, vagy végtelenségét $\Theta(A)$-n belül hálóelméleti eszközökkel el lehet dönteni. Tegyük már most fel, hogy Θ rendje véges. El lehet vajon dönteni, hogy mekkora? Legalább azt, hogy Θ minimális-e? Az 1. tétel szerint ezekre a kérdésekre tagadó a válasz. Hálóelméleti szempontból semmi sem különbözteti meg a minimális kongruenciarelációkat ezek véges egyesítéseitől.

BIZONYÍTÁS: A gondolatmenet a következő: először az S struktúrát kicseréljük az S' struktúrára, melyben már csak egyváltozós műveletek vannak. Ezután az S' struktúrából megkonstruálunk egy olyan T_1 struktúrát, melyben az előre kiszemelt $\Theta_{a,c} \cup \Theta_{b,d}$ (esetleg másodrendű) kongruenciareláció már minimális. Eljárásunkat transzfinit indukcióval folytatva, nyerjük a tétel állítását.

Induljunk ki tehát az S algebrai struktúrából. Az 1. lemma alapján feltehetjük, hogy S csupán egyváltozós műveleteket tartalmaz. Rögzítsük le S két elemét: a és b-t. Megkonstruáljuk a T_1 struktúrát.

Formálisan képezzük minden $x \in S$-re az $f(x)$ elemet (f tehát nem valamely művelete S-nek!) azon egyetlen megszorítással, hogy $a = f(b)$. Az $f(x)$ alakú elemek halmazát $f(S)$-sel jelöljük; S-nek tehát $f(S)$-sel egyetlen közös eleme van, a, s $x \neq y$ esetén $(x, y \in S) f(x) \neq f(y)$.

Tekintsük ezután a $T_1 = S \cup f(S)$ halmazt. Ezen a halmazon egyváltozós műveleteket értelmezünk. Tekintsük először az $f(x)$ és $g(x)$ egyváltozós műveletek definícióját: Az $f(x), x \in S$ esetén, a formálisan értelmezett $f(x)$ elem, s ha $y = f(x)$, akkor $f(y) = ff(x) = f(a)$; $x \in S$ esetén $g(x) = b$ és $gf(x) = x$. T_1-re kiterjesztjük az összes, S-en értelmezett egyváltozós műveletet. Legyen $\omega(x) \in M(S)$. Ha $x \in S$, akkor $\omega(x)$ őrizze még eredeti jelentését s $y = f(x)$ esetén legyen $\omega f(x) = \omega(a)$. Az $f(x)$, $g(x)$ és $\omega(x)$ $(\in M(S))$ egyváltozós műveletek alkossák $M(T_1)$-et. Ezzel T_1-et algebrai struktúrává tettük.

Belátjuk először, hogy $\Theta(S) \cong \Theta(T_1)$. Legyen $\Theta \in \Theta(S)$. Definiáljuk T_1-en a következő relációt: $u \equiv v(\bar{\Theta})$ akkor és csak akkor áll fenn, ha az alábbi feltételek valamelyike teljesül:

(1) $u, v \in S$ és $u \equiv v(\Theta)$;

(2) $u = f(x), v = f(y)$ és $x \equiv y(\Theta)$;

(3) $x \equiv a(\Theta), b \equiv y(\Theta)$ és vagy $u = x, v = f(y)$, vagy $u = f(y), v = x$.

Igazoljuk, hogy T_1-nek $\bar{\Theta}$ relációja kongruenciareláció.

Világos, hogy $\bar{\Theta}$ reflexív és szimmetrikus.

Legyen $u \equiv v(\bar{\Theta})$ és $v \equiv w(\bar{\Theta})$. Ha $u, v, w \in S$ vagy $u, v, w \in f(S)$, akkor a tranzitivitás (vagyis $u \equiv w(\bar{\Theta})$) nyilvánvaló, mert lényegében Θ tranzitivitásáról van szó (ugyanis $f(x) \equiv f(y)(\bar{\Theta})$ (2) szerint akkor és csak akkor teljesül, ha $x \equiv y(\Theta)$). Tekintsük az $u, v \in S, w \in f(S)$ esetet (az $u \in S$; $v, w \in f(S)$ eset hasonlóan tárgyalható). Ekkor $u \equiv v(\Theta)$, $v \equiv a(\Theta), x \equiv b(\Theta)$, ahol $w = f(x)$ ((1) és (3) alapján), így tehát Θ tranzitivitása folytán $u \equiv a(\Theta)$, tehát (3) miatt $u \equiv w(\bar{\Theta})$. Végezetül foglalkozunk az $u, w \in S, v \in f(S)$ esettel ($u, w \in f(S), v \in S$ ugyanígy tárgyalható). Ekkor (3) szerint $u \equiv a(\Theta), b \equiv x(\Theta)$, $v = f(x), w \equiv a(\Theta)$, s ezek közül az első és harmadik kongruencia Θ tranzitivitása folytán $u \equiv w(\Theta)$-t adja, ami (1) alapján a kívánt $u \equiv w(\bar{\Theta})$-t jelenti.

Ezután igazoljuk $\bar{\Theta}$-ra a helyettesítési elvet. Azt kell belátnunk, hogy ha $\psi(x) \in M(T_1)$ és $u \equiv v(\bar{\Theta})$, akkor $\psi(u) \equiv \psi(v)(\bar{\Theta})$ is fennáll. Három esetet különböztetünk meg:

a) $u, v \in S$. $f(u) \equiv f(v)(\bar{\Theta})$ (2) alapján adódik. A $g(x)$ műveletet alkalmazva, a triviális $b \equiv b(\bar{\Theta})$-hoz jutunk. Ha $\omega(x)$ S-nek valamelyik T_1-re kiterjesztett művelete, akkor $\omega(u) \equiv \omega(v)(\Theta)$ így (1) alapján $\omega(u) \equiv \omega(v)(\bar{\Theta})$.

b) $u, v \in f(S)$. Ekkor $u = f(x), v = f(y)$ és fennáll $x \equiv y(\Theta)$. Az $f(x) \equiv f(y)$ mindkét oldalára az $f(x)$ műveletet alkalmazva $f(a) \equiv f(a)$-t nyerjük. A $g(x)$ művelettel $x = gf(x) \equiv gf(y) = y$ adódik, ami (1) szerint szintén helyes. Végül valamely S-ről kiterjesztett $\omega(x)$ művelettel $\omega(a) \equiv \omega(a)$ adódik.

c) $u \in S, v \in f(S)$. Ekkor $v = f(x)$ s fennállnak az $u \equiv a(\Theta), b \equiv x(\Theta)$ kongruenciák. $u \equiv v(\Theta)$-ra mindkét oldalt alkalmazva rendre az $f(x), g(x)$ és

$\omega(x)$ műveleteket $f(u) \equiv f(a)\,(\overline{\Theta})$, $b \equiv x(\overline{\Theta})$, $\omega(x) \equiv \omega(a)\,(\overline{\Theta})$ adódik, amely kongruenciák valóban könnyen nyerhetők a feltételből.

Ezzel tehát beláttuk, hogy $\overline{\Theta}$ kongruenciareláció. $\overline{\Theta}$ egy osztályozását létesíti S-nek is, mint T_1 részhalmazának, s ez az osztályozás egybeesik a Θ által létesített osztályozással.

Kimutatjuk, hogy a $\Theta \to \overline{\Theta}$ megfeleltetés izomorfizmus $\Theta(S)$ és $\Theta(T_1)$ között. Először is belátjuk, hogy T_1-nek mindegyik kongruenciarelációja előállítható $\overline{\Theta}$ alakban. Valóban, legyen $\Phi \in \Theta(T_1)$. Φ létesít S-en egy osztályozást, melyet indukáló $\Theta(S)$-beli kongruenciarelációt jelölje Θ. Belátjuk, hogy $\Phi = \overline{\Theta}$. Legyen $u \equiv v(\Phi)$. Ha $u, v \in S$, akkor az állítás nyilvánvaló. Világos az $u, v \in f(S)$ esetben is, hiszen $f(x) \equiv f(y)\,(\Phi)$ ekvivalens $x \equiv y\,(\Phi)$-vel. Az $u \in S$, $v \in f(S)\,(v = f(x))$ esetben a kongruencia mindkét oldalára alkalmazzuk az $f(x)$ függvényt, $f(u) \equiv f(v) = ff(x) = f(a)\,(\Phi)$ adódik, majd a $g(x)$ függvényt, s $u = gf(u) \equiv gf(a) = a\,(\Phi)$-t kapjuk. A tranzitivitás folytán tehát $a \equiv v\,(\Phi)$, vagyis $b = g(a) \equiv g(v) = gf(x) = x\,(\Phi)$ is fennáll. Így a Θ kongruenciarelációnál $u \equiv a$ és $b \equiv x$, vagyis T_1-re való kiterjesztésénél a (3) szabály szerint fennáll $u \equiv f(x)\,(\overline{\Theta})$, ami a bizonyítandó volt. Beláttuk tehát, hogy $\Theta \to \overline{\Theta}$ egy-egyértelmű megfeleltetés $\Theta(S)$ és $\Theta(T_1)$ között. A kiterjesztésre vonatkozó szabály miatt az is nyilvánvaló, hogy $\Theta > \Phi$ akkor és csakis akkor teljesül, ha $\overline{\Theta} > \overline{\Phi}$ fennáll. Ha két háló között adva van valamely egy-egyértelmű, kölcsönösen szigorúan monoton leképezés, akkor az szükségképp izomorfia, így $\Theta(S)$ és $\Theta(T_1)$ valóban izomorfok.

Másodszor bebizonyítjuk, hogy

$$\overline{\Theta}_{a,c} \cup \overline{\Theta}_{b,d} = \overline{\Theta}_{c,f(d)}.$$

Valóban, $b \equiv d\,(\overline{\Theta}_{a,c} \cup \overline{\Theta}_{b,d})$ s ebből adódik, hogy $a = f(b) \equiv f(d)(\overline{\Theta}_{a,c} \cup \overline{\Theta}_{b,d})$, s ezt összevetve $a \equiv c\,(\overline{\Theta}_{a,c} \cup \overline{\Theta}_{b,d})$-vel $c \equiv f(d)\,(\overline{\Theta}_{a,c} \cup \overline{\Theta}_{c,d})$-t kapjuk, s így $\overline{\Theta}_{a,c} \cup \overline{\Theta}_{b,d} \geq \overline{\Theta}_{c,f(d)}$. Megfordítva, $c \equiv f(d)\,(\overline{\Theta}_{c,f(d)})$-ből $f(c) \equiv ff(d) = f(a)\,(\overline{\Theta}_{c,f(d)})$ azaz $c = gf(c) \equiv gf(a) = a\,(\overline{\Theta}_{c,f(d)})$-t kapunk, tehát a tranzitivitás miatt $a = f(b) \equiv f(d)\,(\overline{\Theta}_{c,f(d)})$ és $b \equiv d\,(\overline{\Theta}_{c,f(d)})$. Így $\overline{\Theta}_{a,c} \leq \overline{\Theta}_{c,f(d)}$ és $\overline{\Theta}_{b,d} \leq \overline{\Theta}_{c,f(d)}$ tehát $\overline{\Theta}_{a,c} \cup \overline{\Theta}_{b,d} \leq \overline{\Theta}_{c,f(d)}$, amivel a kívánt egyenlőséget bizonyítottuk.

Ezzel teljes egészében beláttuk, hogy T_1 megfelel a kirótt feltételeknek.

Tekintsük azon T struktúrák $\{T_\alpha\}$ osztályát, mely eleget tesz a következő kikötéseknek:

A) $S \subseteq T$ és S-nek minden művelete ki van terjesztve T-re, amit formálisan $M(S) \subseteq M(T)$-vel jelölünk.

B) $\Theta(S) \simeq \Theta(T)$.

C) Legyen $\Phi \in \Theta(T)$ s jelölje $\Theta \in \Theta(S)$ azt a kongruenciarelációt, amely S-en ugyanazt az osztályozást létesíti, mint Φ. A Θ által T-n indukált kongruenciareláció megegyezik Φ-vel.

$\{T_\alpha\}$-n definiálunk egy részbenrendezést a következőképp: $T_\alpha < T_\beta$ akkor és csakis akkor teljesül, ha S és T helyett T_α és T_β-ra teljesülnek az A), B) és C) feltételek, továbbá T_α-nak van olyan nem minimális kongruenciarelációja, amely T_β-n már minimális. A definiált reláció nyilván részbenrendezés. Legyen $\{T_\beta\}_{\beta \in B}$ valamely lánca $\{T_\alpha\}$-nak. Definiáljuk a T algebrai struktúrát a következőkép: $x \in T$ akkor és csakis akkor teljesül, ha valamely $\beta \in B$-re $x \in T_\beta$, s legyen $M(T) = \bigvee_{\beta \in B} M(T_\beta)$. Mivel $T_\alpha < T_\beta$ esetén T_α minden művelete ki van terjesztve T_β-ra is, ezért valóban T algebrai struktúra. Belátjuk, hogy $T \in \{T_\alpha\}$. A) világos. Akárhogyan veszünk egy $\Theta \in \Theta(S)$-et, az ki van terjesztve minden T_β-ra s így magára T-re is. (Ezek a kiterjesztések egymás folytatásai éppen mert $\{T_\beta\}_{\beta \in B}$ lánc.) Ezen kiterjesztett kongruenciareláció bír a C)-ben leírt tulajdonsággal, hiszen ellenkező esetben (ez épp a 2. lemmából látható világosan, hozzátéve még, hogy T-nek bármelyik véges részhalmaza benne van egy alkalmas T_β-ban) már valamelyik T_β-ban ellentmondásra jutnánk. Ugyanígy látható be B) teljesülése is.

Beláttuk, hogy $\{T_\alpha\}$-ban minden részláncnak van maximális eleme, így a Kuratowski—Zorn lemma kissé általánosabb formájából látható, hogy $\{T_\alpha\}$-ban van maximális elem, jelölje az egyiket T. Belátjuk, hogy T eleget tesz az 1. tétel feltételeinek. $\Theta(T) \cong \Theta(S)$ adódik $T \in \{T_\alpha\}$-ból. Tegyük fel, hogy $\Theta(T)$-ben van véges rendű de nem minimális kongruenciareláció. Ekkor T-ből kiindulva és a tétel elején leírt konstrukciót ismét alkalmazva $\{T_\alpha\}$-nak egy T-nél nagyobb eleméhez jutnánk, amely ellentmondás T maximalitásával. Ezzel az 1. tétel igazolását befejeztük.

Kiegészítés. Ha az S struktúra véges, akkor T is végesnek vehető.

A kiegészítés állítása a konstrukcióból nyilvánvaló.

Látható, hogy a konstrukcióban megadott struktúra semilyen szokásos struktúra osztályba (csoport, gyűrű, háló stb.) sem tartozik. Felmerül tehát a következő probléma: egyes struktúra osztályokra találjunk olyan konstrukciót, mely az adott struktúra osztályból nem vezet ki, vagyis ha S benne van, akkor T is eleme. Ez eddig csak két struktúra osztályra, a véges és a disztributív hálók osztályára sikerült megadni. Erre majd másutt visszatérünk. Csoportok, gyűrűk, végtelen hálók esetében a probléma igen nehéznek tűnik.

3. §. Partició hálók véges részhálói

A Whitman tétel egyszerűen fog adódni a következő lemmából:

5. LEMMA: *Legyen S véges algebrai struktúra, Θ_α, Φ_α nem zéró elemei $\Theta(S)$-nek, s teljesüljön a $\Theta_\alpha \leq \Phi_\alpha$ egyenlőtlenség. Létezik egy olyan T algebrai struktúra, hogy $\Theta(T)$ tartalmaz $\Theta(S)$-nek $\bigvee_\alpha \Theta^{\cup}_{\Theta_\alpha, \Phi_\alpha}$ szerinti egyesítés homomorf képével izomorf részhálót.*

BIZONYÍTÁS: Az 1. lemma és 1. tétel szerint feltehető, hogy S-en csak egyváltozós műveletek vannak értelmezve s hogy $\Theta(S)$ minden eleme minimális kongruenciareláció, s így $\Theta_\alpha = \Theta_{a_\alpha, b_\alpha}$, $\Phi_\alpha = \Theta_{c_\alpha, d_\alpha}$. Definiáljunk minden az $\bigvee\limits_\alpha \overset{\cup}{\Theta}_{\Theta_\alpha, \Phi_\alpha}$-ban szereplő α indexre egy $f_\alpha(x)$ függvényt úgy, hogy $f_\alpha(a_\alpha) = c_\alpha, f_\alpha(b_\alpha) = d_\alpha$ és minden $x \in S\,(x \neq a_\alpha, b_\alpha)$-ra az $f_\alpha(x)$ új elem. Legyen az $f_\alpha(x)$ elemek halmaza $f_\alpha(S)$. Az $\bigvee\limits_\alpha (S \cup f_\alpha(S))$ halmaz nem struktúra, hiszen sem az $f_\alpha(x)$ sem a $\varphi_\beta \in M(S)$-beli műveletek az $f_\alpha(S)$-eken nincsenek értelmezve. Ismét formálisan definiáljuk $\varphi_\beta f_\alpha(S)$-et (természetesen feltéve, hogy S-nek nem épp az a_α vagy b_α eleméről van szó), továbbá $f_\beta \varphi_\beta f_\alpha(S)$-et és így tovább az $f_\alpha(x)$-ek és az $M(S)$-beli műveletek összes lehetséges véges sorrendjét figyelembe véve. Ezen új elemek közül kettő csak úgy eshet egybe, ha az az $f_\alpha(a_\alpha) = c_\alpha, f_\alpha(b_\alpha) = d_\alpha$ szabályokból következik. Tekintsük az így kapott elemek halmazát és jelöljük T-vel. Nyilvánvalóan a T halmazon értelmezve vannak mind az f_α, mind az $M(S)$-beli műveletek. Így tehát T algebrai struktúra.

Állítjuk, hogy T kielégíti a lemma feltételeit.

Tekintsük S-nek egy Θ kongruenciarelációját. Definiáljuk $\bar{\Theta}$-t, T egy relációját, a következőképp: $x \equiv y(\bar{\Theta})$ akkor és csak akkor, ha léteznek olyan x_i, y_i—k $(\in A, i = 1, \ldots, n)$, hogy $x_i \equiv y_i(\Theta)$, továbbá olyan $x = z_0, z_1, \ldots z_n = y$ T-beli sorozat, melyre $\overline{x_i, y_i} \to \overline{z_{i-1}, z_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Könnyű belátni, hogy $\bar{\Theta}$ kongruenciareláció. Mivel az $a_\alpha \equiv b_\alpha$ kongruencia mindkét oldalára alkalmazva az $f_\alpha(x)$ műveleteket $c_\alpha = f_\alpha(a_\alpha) \equiv f_\alpha(b_\alpha) = d_\alpha$ adódik, ezért $\bar{\Theta}_\alpha = \bar{\Phi}_\alpha$. Hasonlóképp látható, hogy ha két kongruenciareláció, Φ_1 és Φ_2 kongruens $\bigvee \overset{\cup}{\Theta}_{\Theta_\alpha, \Phi_\alpha}$-nál, akkor $\bar{\Phi}_1 = \bar{\Phi}_2$. Továbbá semmilyen, az $f_\alpha(x)$-ekkel bejövő új hozzárendedelés egyetlen $\overset{\cup}{\Theta}_{\Theta_\alpha, \Phi_\alpha}$-nál kisebb kongruenciarelációt nem bánt, hiszen egy új művelet csak az $\overline{a_\alpha, b_\alpha} \to \overline{c_\alpha, d_\alpha}$ hozzárendelést létesíti s ha valamilyen kongruenciarelációnál már $a_\alpha \equiv b_\alpha$, akkor az már nagyobb, vagy egyenlő, mint Θ_α. Nyilvánvalóan az eredeti struktúrán belül más hozzárendelés nem létesült, hiszen más elempárokra az új $f_\alpha(x)$ operációk alkalmazása kivezet az S struktúrából s visszamenésre nincsen lehetőség. Ezzel a lemma bizonyítását befejeztük.

Láthatjuk, hogy a bizonyítás leglényegesebb pontja az, hogy a Θ_α és Φ_α-k minimális kongruenciarelációk. Ha ugyanis Θ_α-ról csak annyit tudnánk, hogy alulról elérhetetlen, vagyis $\Theta_\alpha = \bigvee\limits_{i=1}^{n} \Theta_{a_i, b_i}$, akkor nem tehetnénk meg, hogy az a_i, b_i-kre definiálnánk új függvényeket, mert ekkor a Θ_α-nál kisebb Θ_{a_i, b_i} kongruenciarelációkat is megbolygatnánk, vagyis a $\Theta \to \bar{\Theta}$ megfeleltetés nem a $\bigvee\limits_\alpha \overset{\cup}{\Theta}_{a_\alpha, b_\alpha}$ szerinti egyesítés homomorfizmus volna. Az 5. lemma végeredményben azt állítja, hogy véges algebrai struktúra kongruenciareláció hálójának minden egyesítés homomorf képe beágyazható egy algebrai struktúra kongruenciareláció hálójába és így egy partició hálóba (ugyanis egy algebrai struktúra kongruenciarelációinak hálója komplett részhálója a struktúrán, mint halmazon értelmezett partició hálónak). Az átfogalmazás helyességének igazolásához csak azt kell belátnunk, hogy az 5. lemmában szereplő egyesítés homomorfizmus a lehető legáltalánosabb. Azonban mint a 3. lemmából tudjuk, minden egyesítés kongruenciareláció minimális egyesítés kongruenciarelációk egyesítése. Így tehát alkalmazható az 5. lemma. Ezen megjegyzés után igazoljuk Whitman tételét:

2. TÉTEL: *Minden véges háló beágyazható egy partició hálóba.*

BIZONYÍTÁS: Azzal az ismert ténnyel kezdjük, hogy minden véges L hálóhoz található olyan B véges Boole-algebra, melynek L egyesítés homomorf képe. Valóban, legyen B az L háló összes részhalmazának Boole-algebrája. Feleltessük meg B egy elemének, amely L valamely részhalmaza, ezen elemek L-beli egyesítését. Könnyű számolás mutatja, hogy ezáltal épp a kívánt egyesítés homomorfizmust kaptuk.

Minden véges Boole-algebra alkalmas algebrai struktúrának (ti. önmagának) kongruenciareláció hálója s így az 5. lemma s az előbbi megjegyzés szerint ezek minden egyesítés homomorf képe, azaz minden véges háló beágyazható kongruenciareláció hálóba s így partició hálóba.

4. §. Algebrai strukturoidok kongruenciarelációi

Sok olyan algebrai operációval találkozunk, melynek az értelmezési tartománya nem az egész struktúra. Például egy gyűrű elem multiplikatív inverze közismert ilyen fogalom, ugyanis egy gyűrűben nem minden elemnek van szükségképpen inverze. Hasonlóképpen egy elem komplementumának fogalmát is általánosan használják a hálóelméletben olyan hálók esetében is, ahol nem minden elemnek van komplementuma. Pontosabban szólva, a gyűrűknél az x^{-1}, illetve hálóknál az x' operáció értelmezési tartománya általában nem az egész struktúra. MALCEV [4] mutatott rá, hogy az ilyen operációkat is (tehát ahol az értelmezési tartomány nem szükségképpen esik egybe az egész struktúrával) teljesjogú operációknak kell tekintenünk. Egy ilyen operációt részleges algebrai műveletnek nevezünk. Az algebrai strukturoid (másnéven részleges algebrai struktúra) egy olyan halmaz, melyen adott egy vagy több (de mindig véges változójú) részleges algebrai művelet.

Mint ismeretes, egy S algebrai struktúra kongruenciarelációinak hálója izomorf az S halmaz partició hálójának valamely részhálójával, mégpedig ezt az izomorfizmust úgy kapjuk meg, hogy egy kongruenciarelációinak megfeleltetjük az általa létesített osztályozást, mint a halmaz egy particióját. Ez az állítás algebrai strukturoidokra már nem érvényes. Egyszerű ellenpélda a következő: S legyen az $1, 2, 3$ és 4 számok halmaza. S-en egy részleges művelet, $f(x)$ van értelmezve. $f(x)$ értelmezési tartománya 1, 2 és $f(1) = 2$, $f(2) = 3$. Legyen Θ az a kongruenciareláció, melynél csupán $1 \equiv 4$, s Φ pedig, mely 2-t és 4-et ejti egybe. Ha Θ-t és Φ-t mint kongruenciarelációkat egyesítjük, akkor mind a négy elem egy osztályba kerül, míg Θ és Φ mint particiók egyesítésénél 1, 2 és 4 kerül az egyik osztályba, s 3 önmagában alkotja a másik osztályt.

A következő állítás azonban igaz.

6. LEMMA: *Az S algebrai strukturoid kongruenciarelációi hálót alkotnak. Ez a háló izomorf az S halmaz partició hálójának valamely metszet részhálójával.*

BIZONYÍTÁS: Feleltessük meg mindegyik kongruenciarelációnak az általa létesített osztályozást, mint particiót. Akárhány ilyen partició particióelméleti metszete újból kompátibilis osztályozás lesz, mert ha a és b egy osztályban vannak, s valamely $\varphi(x)$ részleges művelet (az 1. lemma érvényes természetszerűleg algebrai strukturoidokra is, ezért tehetjük fel, hogy csak egyváltozós részleges algebrai műveletek vannak) értelmezve van a és b-n is, akkor $\varphi(a)$ és $\varphi(b)$ azonos osztályban volt már mindegyik kiindulásul vett particiónál is, így ezek komplett metszeténél is.

Így tehát tetszőleges sok kongruenciarelációnak létezik komplett metszete s ez megegyezik a megfelelő particióelméleti metszettel. Mivel a kongruenciarelációk összességének nyilván van legkisebb és legnagyobb eleme (lásd [1], 49. oldal), valóban hálót alkotnak. Ez egyúttal a kívánt izomorfizmust is szolgáltatja.

Az 1. tétel természetszerűleg érvényes algebrai strukturoidokra is, vagyis kimondható a következő állítás:

7. LEMMA: *Minden S algebrai strukturoidhoz található olyan T algebrai strukturoid, hogy $\Theta(S) \cong \Theta(T)$ és $\Theta(T)$ minden alulról elérhetetlen eleme minimális.*

Az 5. lemma algebrai strukturoidokra élesebben fogalmazható meg:

8. LEMMA: *Legyen S véges algebrai strukturoid s $\Theta_\alpha \leqq \Phi_\alpha$ S-nek nem zéró kongruenciarelációi. Ekkor található olyan T algebrai strukturoid, hogy $\Theta(T)$ izomorf $\Theta(S)$-nak $\bigvee_\alpha \Theta^{\cup}_{\Theta_\alpha, \Phi_\alpha}$ szerinti egyesítés homomorf képével. Ha S véges, akkor T is feltehető végesnek.*

BIZONYÍTÁS: A 7. lemma szerint minden alulról elérhetetlen kongruenciareláció minimális, így alkalmas $a_\alpha, b_\alpha, c_\alpha, d_\alpha$ elemekkel $\Theta_\alpha = \Theta_{a_\alpha, b_\alpha}$, $\Phi_\alpha = \Theta_{c_\alpha, d_\alpha}$. Definiáljuk a f_α részleges algebrai műveleteket: f_α értelmezési tartománya a_α és b_α, továbbá $f_\alpha(a_\alpha) = c_\alpha, f_\alpha(b_\alpha) = d_\alpha$. Ezen részleges algebrai műveleteket hozzácsatolva $M(S)$-hez kapjuk $M(T)$-t. Az 5. lemma bizonyításához hasonlóan látható be, hogy T eleget tesz a 8. lemma feltételeinek. Az 5. lemmával szemben az egyetlen különbség, hogy új elemet nem kellett definiálnunk s így T-nek új kongruenciarelációja nincsen, tehát $\Theta(S)$-nek $\bigvee_\alpha \Theta^{\cup}_{\Theta_\alpha, T_\alpha}$ szerinti egyesítés homomorf képe nem részhálója $\Theta(T)$-nek, mint az 5. lemmában, hanem egyenesen izomorf vele.

Ezen előkészületek után már könnyen bizonyíthatjuk a paragrafus főeredményét:

3. TÉTEL: *Minden véges háló egy alkalmas véges algebrai strukturoid kongruenciareláció hálójával izomorf.*

BIZONYÍTÁS: Minden véges háló egy alkalmas véges Boole-algebra egyesítés homomorf képe, továbbá minden véges Boole-algebra valamely véges algebrai strukturoid kongruenciareláció hálójával izomorf. Végül minden egyesítés homomorfizmus minimális egyesítés homomorfizmusok egyesítése. Ezen állításokat összevetve a 8. lemma állításával adódik a 3. tétel.

A 6. lemma és a 3. tétel kombinációja a következő:

KOROLLÁRIUM: *Minden véges háló izomorf egy véges partició háló alkalmas metszet részhálójával.*

Megjegyezzük, hogy azt már O. ORE [5] bebizonyította, hogy minden véges háló izomorf egy véges partició háló alkalmas egyesítés részhálójával. Azonban a partició háló (ha több, mint háromelemű halmazon van értelmezve) nem önduális, így Ore tételéből nem nyerhető a fenti korollárium.

IRODALOM

[1] G. Birkhoff: *Lattice theory*, New York, 1948.
[2] R. P. Dilworth: The structure of relatively complemented lattices, *Annals of Math.*, **51** (1950) 348—359.
[3] J. Hashimoto: Direct subdirect decompositions and congruence relations, *Osaka Math. Journal*, **9** (1957) 87—112.
[4] А. И. Мальцев: К общей теории алгебраических систем, Мат. Сборник, **35** (77) (1954) 3—20.
[5] O. Ore: Theory of equivalence relations, *Duke Math. Journal*, **9** (1942) 573—627.
[6] P. M. Whitman: Lattices equivalence relations, and subgroups, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **52** (1946) 506—522.

(Beérkezett: 1959. I. 8.)

A Magyar Tudományos Akadémia
Matematikai Kutató Intézete

HASADÁSI TERMÉKEK A LÉGKÖRI CSAPADÉKBAN DEBRECENBEN 1952. ÉS 1957. KÖZÖTT

Írta: SZALAY SÁNDOR* és id. BERÉNYI DÉNES**

1952. márciustól rendszeresen mértük Debrecenben egy ombrométerbe begyűjtött csapadék radioaktivitását.

1952. körül Európa ezen a részén, valamint általában a világon kevés ilyen mérést tettek közzé, és így azt hisszük célszerű, ha a rendelkezésünkre álló adatokat, amelyekből eddig csak az 1953.-es méréseket közöltük [1], most összegyűjtve, 1957. végéig bezárólag közzétesszük. Más szerzők adataival való helyes összehasonlítás érdekében röviden közöljük a mérési eljárást.

Egy ombrométerből naponta egyszer, minden reggel vesszük ki a 24 óra alatt összegyűlt csapadékot. 1953. végéig horgany fémből készült meteorológiai típus-ombrométert használtunk, $1/50$ m^2 területtel. Minthogy tapasztalataink szerint a fém a hasadási termékek egy részét (mérési körülményeink között mintegy 5—20 %-át) adszorbeálta, 1954. eleje óta egy másik ombrométert használunk. Az új ombrométer átmérője 400 mm, területe 0,1256 m^2, gyűjtőtölcsére PVC-ből, gyűjtőedénye üvegből készült. A kapott eső mennyiségét és aktivitását mindig az eredeti szabványos $1/50$ m^2 területre számítottuk át.

Az ombrométerből kivett vizet az edényben leülepedett porral és korommal együtt kevés sósavval megsavanyítva vesszük ki, és lapos porcelán-tálban infravörös lámpa alatti besűrítés után sósavval egy 24 mm belső átmérőjű és 8 mm magas üveg mérőedénykébe visszük át és pároljuk be. A víz begyűjtésétől számított legalább 48 óra eltelte után — amely idő alatt a természetes radioaktív anyagok (RaB + C + ··· stb.) lebomlanak — egy 26 mm átmérőjű végablakkal bíró G. M. számlálócső alá vittük; az ablak 0,1 mm vastag Al-ból készült. Így meghatároztuk a hasadási termékekből származó percenkénti beütések számát. Egy uránoxid standard segítségével meghatározva a mérőberendezés geometriáját, de nem véve figyelembe az Al-ablak abszorbeáló hatását, ezen adatokat hozzávetőleg 10^{-11} Curie egységekbe is átszámítottuk, és feltüntettük a hystogramm ordinátáján. (1. ábra.)

* Magyar Tudományos Akadémia Atommag Kutató Intézete, Debrecen
** Kossuth Lajos Tudományegyetem Meteorológiai Intézete, Debrecen

A felfelé felmért aktivitások fekete oszlopa az aktivitás középértékét, a végén látható két fehér jel a mérések statisztikai hibáját jelenti.

Az ordinátán lefelé feltüntettük a leesett csapadék mennyiségét mm-ben, illetve az 1/50 m^2 területre leesett térfogatban cm^3-ekben.

Sok esetben a mért aktivitások olyan jelentősek voltak, hogy lineáris ábrázolás nem volt lehetséges. Ilyen esetben a percenkénti beütések számát odaírtuk a fekete vonás fölé.

A vízszintes koordinátán a naptári időtengelyt tüntettük fel, és megjelöltük az irodalomból, vagy sajtóból, rádióból tudomásunkra jutott, ismertetett atomrobbantások időpontját és helyét. Ez adatok nem mindig hivatalos közlésen alapulnak, és ezért bizonytalanok, továbbá bizonyosan hiányosak, minthogy sok robbantásról nem történt egyáltalán közlés. Ezért e robbantási adatok hitelességéért felelősséget nem vállalhatunk.

Ha a csapadék aktivitása elegendő nagy volt, hosszabb időn át (heteken át) megfigyeltük a radioaktív bomlását is.

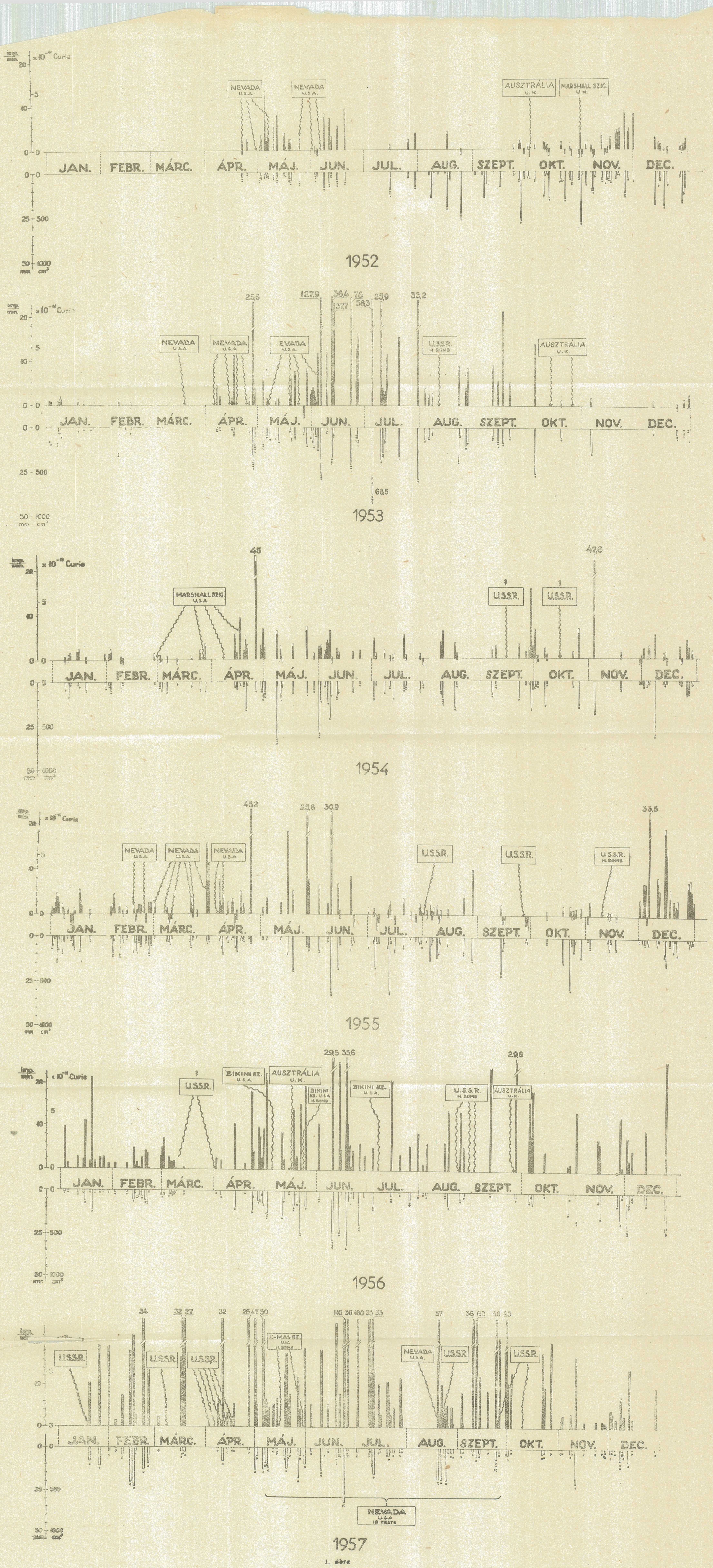
A Way—Wigner formula [2] segítségével gyakran sikerrel meg lehetett állapítani — néhány nap bizonytalansággal —, hogy az aktivitás melyik időpontban történt ismert robbantástól származott. Az utóbbi években a robbantások száma erősen fokozódott, és ezzel együtt nőtt az atmoszféra állandó

I. TÁBLÁZAT

Néhány olyan radioaktív csapadék*, amelyről elég biztosan megállapíthattuk, hogy melyik ismert atomrobbantási kísérletből származik.

A csapadék leesésének időpontja	Csapadékmennyiség mm	Aktivitás imp min 1 50 m^2-en	Fajlagos aktivitás imp min. ml	Ismert robbantás időpontja és helye
1953. június 6.	25,7	128	0,25	1953. május 19. Nevada
1953. június 12.	16,8	364	1,08	1953. június 4. Nevada
1953. június 13.	3,1	37,7	0,61	1953. május 25. Nevada
1953. június 23.	20,9	78	0,19	1953. június 4. Nevada
1954. november 4.	17,7	47,6	0,13	1954. október 15. SzSzSzR
1955. december 16.	24	32,6	0,067	1955. november 9. SzSzSzR H-bomba
1956. január 18.	11,3	21,2	0,1	1955, november 9. „
1956. június 18.	25,3	35,6	0,07	1956. március 10. SzSzSzR?
1956. szeptember 12.	0,4	24,1	3,07	1956. augusztus 29. SzSzSzR
1957. február 25.	15	34	0,113	1956. november 17. SzSzSzR
1957. szeptember 26.	2,1	21,2	0,49	1957. augusztus 38. Nevada

* MEGJEGYZÉS: A táblázatban feltüntetett csapadékokon kívül számos más esetben is sikerült jól kiértékelhető módon megállapitani a robbantás időpontját, de mivel ezek esetében nem állnak rendelkezésre ellenőrző adatok, ezeket a táblázatba nem vettük fel.



1952
NEVADA U.S.A.
NEVADA U.S.A.
AUSZTRÁLIA U.K.
MARSHALL SZIG. U.K.
JAN. FEBR. MÁRC. ÁPR. MÁJ. JUN. JUL. AUG. SZEPT. OKT. NOV. DEC.
1953
NEVADA U.S.A.
NEVADA U.S.A.
NEVADA U.S.A.
U.S.S.R. H. BOMB
AUSZTRÁLIA U.K.
JAN. FEBR. MÁRC. ÁPR. MÁJ. JUN. JUL. AUG. SZEPT. OKT. NOV. DEC.
1954
MARSHALL SZIG. U.S.A.
U.S.S.R.
U.S.S.R.
JAN. FEBR. MÁRC. ÁPR. MÁJ. JUN. JUL. AUG. SZEPT. OKT. NOV. DEC.
1955
NEVADA U.S.A.
NEVADA U.S.A.
NEVADA U.S.A.
U.S.S.R.
U.S.S.R.
U.S.S.R. H. BOMB
JAN. FEBR. MÁRC. ÁPR. MÁJ. JUN. JUL. AUG. SZEPT. OKT. NOV. DEC.
1956
U.S.S.R.
BIKINI SZ. U.S.A.
AUSZTRÁLIA U.K.
BIKINI SZ. U.S.A. H. BOMB
BIKINI SZ. U.S.A.
U.S.S.R. H. BOMB
AUSZTRÁLIA U.K.
JAN. FEBR. MÁRC. ÁPR. MÁJ. JUN. JUL. AUG. SZEPT. OKT. NOV. DEC.
1957
U.S.S.R.
U.S.S.R.
U.S.S.R.
X-MAS SZ. U.K. H. BOMB
NEVADA U.S.A.
U.S.S.R.
U.S.S.R.
JAN. FEBR. MÁRC. ÁPR. MÁJ. JUN. JUL. AUG. SZEPT. OKT. NOV. DEC.
NEVADA U.S.A. 10 TESTS

1. ábra

radioaktív fertőzöttsége. Azt hisszük, hogy most már meglehetősen bizonytalanná vált annak megállapítása, hogy egy bizonyos ismert aktivitás melyik robbantástól származik, mert valószínű, hogy több robbantásból származó kevert aktivitást mérünk, és a lebomlási görbe ezért eltérést mutat a Way-Wigner formulától.

Az alanti táblázatban feltüntettük azokat az aktivitás méréseket, amelyek eredete valamelyes biztonsággal egy ismert bombarobbantáshoz volt rendelhető. (I. táblázat.)

Általánosságban a következőket tapasztaltuk:

A Nevada-i (Uj-Mexikó) robbantások aktivitása többnyire már 8—28 nap mulva jelentkezik Debrecenben. Az 1952-es észleléseinkről közzétett első munkánkban [1] foglalkozunk a hasadási termékek vándorlásának útjával, a sugár áram hordozó szerepével és általában a meteorológiai tényezőkkel. A Csendes Óceáni szigeteken, valamint a Szovjetúnióban végzett robbantások aktivitása sokkal később, legalább 20—40 nap mulva, vagy még későbben érkezik meg hozzánk, valószínűleg nyugati irányból.

II. TÁBLÁZAT

Az erősebb radioaktív fertőzésű csapadékos napok Debrecenben. Az 1/50 m^2 területre eső napi csapadék aktivitása e napokon meghaladta a 35 imp/min ($1{,}33 \cdot 10^{-10}$ Curie) értéket (1 imp/min $\approx 3{,}8 \cdot 10^{-12}$ Curie abszolut aktivitás).

A csapadék leesésének időpontja	Aktivitás imp/min	Aktivitás 10^{-10} Curie	Csapadékmennyiség, ml
1953. június 6.	128	4,86	500
1953. június 12*.	364	13,8	310*
1953. június 14.	37	1,39	100
1953. június 23.	78	2,82	420
1953. július 5.	58	2,20	1370
1954. április 26.	45	1,71	110
1954. november 4.	47,6	1,81	400
1955. április 25*.	45,2	1,72	20*
19.6. június 17.	35,6	1,35	550
1957. május 1.	47	1,80	250
1957. május 6.	50	1,90	250
1957. június 23.	110	4,18	610
1957. július 2*.	180	6,84	50*
1957. augusztus 18.	57	2,12	380
1957. szeptember 10*.	36	1,43	32*
1957. szeptember 12*.	62	2,36	120
1957. szeptember 24.	48	1,82	110

* A *-gal jelölt csapadékok fajlagos aktivitása meghaladja az ivóvízben folyamatos fogyasztásra megengedett koncentráció értékét ($4 \cdot 10^{-9}$ Curie/liter).

A legnagyobb radióaktivitást 1953. június 12.-én észleltük, ez feltehetően a Nevadában 1953. június 4.-én robbantot bomba hatása volt. A nagyobb aktivitásokat a II. táblázat mutatja.

Az egész atmoszféra átlagos radioaktív fertőzöttsége az évek folyamán láthatóan emelkedést mutat.

1957. nyarán szórványosan főzelék-félék aktivitását is mértük, és több ízben határozottan megállapítottuk hasadási termékek jelenlétét. (Így például 50 gr spenót szárítás és hamvasztás után adott percenként maximálisan 28 imp/min értéket, amely érték megfelel $2 \cdot 10^{-6}$ mC/kg-nak.)

Meteorológiai kiértékelés. Az újabb adatok is igazolták azt a korábbi feltevésünket, hogy jelentős mértékben aktív csapadékok rendesen olyan csapadékképződéssel járó időjárási folyamatok alkalmával hullanak, amelyek a magas atmoszférikus rétegek behatolnak fel. Ezek, mint ismeretes, erős betörési frontokkal és labilitási esőkkel, zivatarokkal kapcsolatosak. Az időjárási helyzetek közül az ún. V. b. helyzetek érdemelnek külön említést. Az V. b. helyzetekkel a talajmentén vesztegl frontok lépnek fel, míg a magasban az 500mb felületen zárt mélynyomások találhatók. Ebben az időjárási helyzetben a csapadékképző térbe nemcsak különböző eredetű légtömegek áramlanak, de ezek egyúttal különböző eredetű és keletű aktivitásokat is szállítanak. A szubtrópusi levegő (Tm, Tc) a szubtrópusi maximumban tárolt régi aktivitást, míg a Pm vagy Am levegő a nyugatias áramban úszó újabb keletű aktivitást szállítja. Az V. b. helyzetek veszteglő frontjai rendesen bőséges csapadék kiválást okoznak, és így alkalmasak arra, hogy jelentős mennyiségű aktivitást hozzanak le a légkörből.

A nagyobb — 10 imp./min. — aktivitások szinoptikus vizsgálata azt mutatja, hogy Debrecen és Magyarország légterében a jelentős aktivitású csapadék alkalmával az 500 mb felület magasságában (5—6 km-ben) *mindig nyugatias* a légáramlás, illetve a felettünk ebben a magasságban elhelyezkedő mélynyomású képződménybe nyugati áramlás torkollik. Ez a helyzet akkor is, ha a Szovjetúnióban végrehajtott robbantásokról van szó. Az 1956. augusztus végi szovjet robbantások igen rövid idő alatt, már szeptember elején észlelhetők voltak a debreceni csapadékban. Ugyanakkor azonban 5—6 km magasságban 100—200 km/óra sebességű szelek szállították hozzánk az aktív részecskéket, amelyek szélességi körünk mentén majdnem az egész Földet megkerülve jutottak hozzánk.

A csapadék formája és az aktivitás között határozott összefüggést nem találtunk. 129 3 imp./min.-nél nagyobb aktivitású-esetet megvizsgálva zivatarral, záporral vagy jégesővel jelentkező csapadék 61, míg egyéb makrocsapadék formánál 68 esetben volt jelentősebb aktivitás. A két csoport aránya

61/68 gyakorlatilag egyforma. Az első csoport csapadék formái a nyári évszak, a másodiké a téli és átmeneti évszakok jelenségei. A csapadék formák megoszlása arra mutat, hogy az aktív csapadék az évszak jellegének megfelelő és az abban leggyakrabban előforduló formában lép fel, és nincsen bizonyos csapadékformákhoz kötve.

A nagyobb aktivitású csapadékokat frontológiai szempontból vizsgálva az esetek megoszlása a következő:

Betörés	Felsiklás	Veszteglő	Összes
103	17	9	129

Az aktív csapadék létrehozásában a betörési frontok túlsúlya nyilvánvaló, de nem utasítható el a felsikló és veszteglő frontok szerepe sem. Amint a csapadék formákban, úgy a frontfajtákban sincs tehát egy frontfajtának sem kizárólagos szerepe.

A csapadék és az aktivitás összefüggésének megvilágítása érdekében a két tényező között korrelációkat és lineáris egyenleteket számítottunk, a következő változatokban: 1) csapadékmennyiség — impulzus/min. 2) csapadékmennyiség — imp./min./liter, 3) imp./min. — imp./min./liter.

Az imp./min./liter az 1 liter csapadékra átszámított aktivitást jelenti, ami az impulzus/min. értéknek $\frac{50}{\text{csapadék mm}}$ hányadossal történt szorzásából adódik. A számításokat korrelációs táblázattal hajtottuk végre, amelyben azonban csak a 4 imp./min. és ennél nagyobb értékeket használtuk fel. Ilyen eset összesen 86 volt. Mivel az aktivitás meghatározása a kis csapadékoknál is bizonytalan, elhagytuk az 1 mm alatti csapadékok aktivitását is. Elhagytunk ezenkívül egy-két rendkívüli értéket is, s ezzel a vizsgált esetek száma 80-ra csökkent.

A nyert korrelációk és azok standard hibája a következő:

1	2	3
Csapadék—imp/min	Csapadék—imp/min/lit	imp/min—imp/min/lit
$0{,}3703 \pm 0{,}0871$	$-0{,}3419 \pm 0{,}0994$	$0{,}5164 \pm 0{,}0964$

Az első és harmadik esetben a korreláció *pozitív,* míg a másodikban *negatív,* ami azt jelenti, hogy az állandó térfogatra átszámított impulzus érték a csapadékmennyiséggel fordítottan változik.

A korrelációk nem nagyok, de azok mindegyike P:0,01 %-os nívón is szignifikánsan eltér a 0-tól. (A megfelelő P:0,01 %-os határérték: $n = 30$ esetben 0,283.)

A korrelációs tényezők alapján számított lineáris egyenletek ugyanabban a sorrendben, mint az előbb:

1	2	3
Csapadék—imp/min	Csapadék—imp/min/lit	Imp/min—Imp/min/lit
(X) (Y)	(X) (Y)	(X) (Y)
$Y = 0{,}9136X + 5{,}97$	$Y = -7{,}942X + 177{,}9$	$Y = 5{,}243X + 110{,}5$

(A zárójelbe tett szimbólumok megadják az egyenletek X és Y értékeinek jelentését, ahol a csapadék mindig mm-ben értendő.)

Az 1. egyenlet azt jelenti, hogy minden 1 mm-nyi csapadék növekvés kb. 1 imp/min.-nel növeli a csapadék aktivitását.

IRODALOM

[1] Szalay Sándor és id. Berényi Dénes: Szokatlan radioaktivítás megfigyelése a Debrecenben 1952. április 22. — decenber 31. között leesett csapadékokban. *MTA III. Oszt. Közl.*, 5 (1955) 89—101.

[2] *The Effects of Atomic Weapons*, 250—252, *McGraw Hill Book. Co., New York*, 1950.

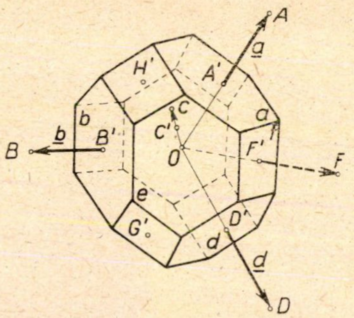
(Beérkezett: 1958. V. 24.)

DELAUNAY NÉHÁNY TÉTELÉNEK BIZONYÍTÁSA

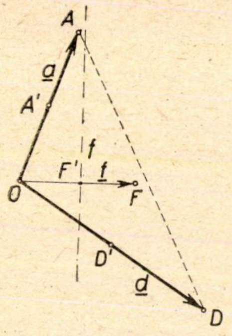
Írta: ZSOLDOS LEHEL

Delaunay (1933) igen egyszerű és szemléletes redukciós eljárást vezetett be, amelynek segítségével egy pontrács bármely primitív elemi cellájának ismeretében könnyűszerrel meghatározhatjuk a pontrácsra jellemző Bravais-cella adatait. A redukció elméletében azonban néhány állítását nem bizonyította. A jelen közlemény célja ezek bizonyítása. Delaunay módszere néhány év óta a finomszerkezet vizsgálatban egyre nagyobb gyakorlati jelentőségre tesz szert [lásd Itô (1949)], ezért aktuális a felmerült problémák tisztázása.

Delaunay cikkének 5,1 §-ában a következőképen vezette be a redukált vektronégyes (reduzierte Vierseit) fogalmát. Tekintsük a legáltalánosabb — az ő jelölései szerint I. típusú — pontrács egy O pontjának Voronoi-tartományát.[1] (1. ábra) Ezt összesen 14 síkidom határolja, melyek közül 8 hatszög



1. ábra



2. ábra

és 6 négyszög. Válasszunk ki négy egymással nem érintkező hatszög határoló lapot. Ez a centroszimmetrikus pároktól eltekintve egyértelműen megtehető. E négy síkfelület mentén négy szomszédos rácspont Voronoi-tartománya érintkezik O Voronoi-tartományával. Jelöljük ezeket a rácspontokat A, B, C, D-vel

[1] A Voronoi-tartományok definíciója és tulajdonságai részletesen megtalálhatók Delaunay idézett cikkében. A Voronoi-tartományok alakja szerint Delaunay a pontrácsokat öt csoportra osztotta.

s az ide mutató vektorokat **a**, **b**, **c**, **d**-vel. A négy vektort együttesen redukált vektornégyesnek nevezzük.

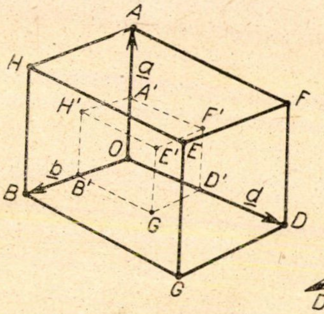
I. *Bebizonyítjuk, hogy e négy vektor közül bármely három primitív elemi cellát feszít ki és valóban teljesül az* $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}=0$ *követelés*. Első lépésként megmutatjuk, hogy az így kiválasztott cellák felülete nem tartalmazhat rácspontot. Vizsgáljuk meg pl. az OAD síkot (2. ábra). Feltételeink szerint az a és d lapok nem érintkeznek,[2] van tehát közöttük egy lap, amit jelöljünk f-fel. A Voronoi-tartományok tulajdonságaiból következik, hogy az a, f, d lapok és centroszimmetrikus párjaik zárt felületzónát alkotnak, és ezért f normálvektora, amely az F rácspontba mutat, az OAD síkban fekszik. De ez az F pont nem feküdhet az OAD_Δ-ben, vagy az AD egyenesen. Ebben az esetben ui. A', D', ill. F'-vel jelölve az $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OD}$, ill. $\overrightarrow{OF}$ vektoroknak és O Voronoi tartományának döféspontját (melyek egyben az OA, OD, OF egyenesek felezőpontjai is) — ha ezt a síkot egy az F' ponton áthaladó $\overrightarrow{OF}$-re merőleges egyenessel kettévágjuk, egyik félsík sem tartalmazhatja egyidejűleg az O, A', D' pontokat és ezeknek valamely véges környezetét. Ebből következik, hogy az A' és D' pontok nem lehetnek egyidejűleg közelebb O-hoz mint F-hez. Viszont feltételeink értelmében az a és d lapok léteznek, s így a Voronoi-tartomány definíciója folytán A' és D' — az A és D pontokat kivéve — közelebb van O-hoz, mint bármely más rácsponthoz, tehát mint pl. F-hez. Ellentmondásra jutottunk, ezért F valóban csak az AD egyenesen kívül feküdhet. A rácskritérium miatt azonban itt is csak úgy helyezkedhet el, hogy $OAFD$ parallelogrammát alkosson (ellenkező esetben az OAD_Δ-ben is kell lennie rácspontnak). Az **a** és **d** vektorok által kifeszített parallelogramma tehát primitív. Ugyanez érvényes a többi vektorpárra is.

Megmutatjuk most, hogy az elemi cellák belseje sem tartalmazhat rácspontot. Rajzoljuk fel pl. az **a**, **b**, **d** elemi cellát (3. ábra), s vágjuk ezt el az F, G, H pontokon átmenő síkkal. A cellának az a nagyobbik fele, melyhez O is tartozik, nem tartalmazhat belsejében rácspontot. Ha ui. lenne egy ilyen I pont, akkor az I ponton áthaladó $\overrightarrow{OI}$-re merőleges sík újabb részt vágna le a cella említett feléből, s ezért ez nem tartalmazhatná egyidejűleg az O, A, B, D, G, F, H csúcspontokat. Ha $A', B', \ldots$ stb.-vel jelöljük az OA, OB, stb... távolságok felezőpontjait, akkor ez azt jelenti, hogy az OI egyenes felezőpontjában emelt $\overrightarrow{OI}$-re merőleges sík a teret két olyan részre osztja, melyek közül egyik sem tartalmazhatja egyidejűleg az $O, A', B', D', F', G', H'$ pontokat, s ezért a fenti pontok nem lehetnek valamennyien közelebb O-hoz, mint I-hez. Ugyanolyan ellentmondásra jutottunk mint az előbb, hiszen feltételeztük, hogy az

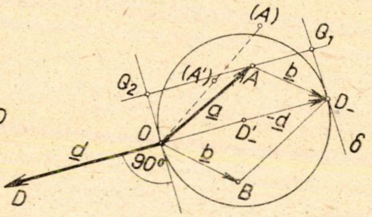
[2] Itt $a, b, \ldots$-al jelöltük a Voronoi-tartománynak azokat a határlapjait, amelyeknek normálvektorai **a**, **b**, ...

a, b, d, f, g, h lapok léteznek, s ezért A', B', D', F', G', H' együttesen az O ponthoz vannak legközelebb.

Ezzel megmutattuk, hogy az $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OD}$ vektorok által kifeszített elemi cella primitív. Ugyanez bebizonyítható a másik három vektorhármasról is. A fentiekből most már nyilvánvaló, hogy az a, b, d lapok közt fekvő e lap normálvektora a fenti elemi cella testátlója s az E pontba mutat, s ezért $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OE}$. Viszont $\overrightarrow{OE}=-\overrightarrow{OC}$ s így $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=0$.



3. ábra



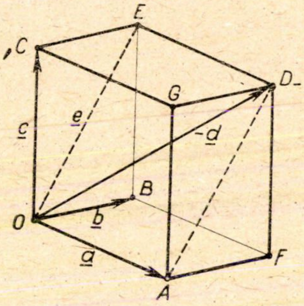
4. ábra

II. DELAUNAY redukált paramétereknek nevezte el a redukált vektornégyes vektorainak páronkénti skaláris szorzatait (**ab**, **bc**, **bd**, **ad**, **ac**, **cd**) és bebizonyította, hogy a redukált paraméterek között pozitív szám nem fordulhat elő. *Megmutatjuk most, hogy az előbb definiált redukált vektornégyest kivéve, nem található még egy olyan primitív vektornégyes, melynek páronkénti skaláris szorzatai között pozitív szám nem szerepel.* Tehát a nem pozitív paraméterek alapján a redukált vektornégyes egyértelműen felismerhető. Állításunkat több lépésben bizonyítjuk be.

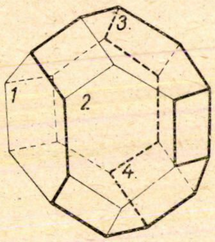
1. A vektornégyes kiválasztásánál csak olyan vektorok jönnek szóba, amelyek szomszédos rácspontokba mutatnak. (Szomszédosnak nevezünk két rácspontot, ha Voronoi-tartományaiknak van közös pontjuk. I. típusú pontrács esetén egy közös határoló lapjuk van).

Vizsgáljuk meg először a kétdimenziós pontrácsot. Legyen pl. **d** olyan vektor, amely egy nem szomszédos rácspontba mutat. Jelöljük D_--szal a $-$**d** vektor végpontjában lévő rácspontot (4. ábra). Válasszuk ki azt az A rácspontot, amely az $\overline{OD_-}$ egyenesre, mint átmérőre emelt körön belül van s amelyre az **a** és $-$**d** vektorok hajlásszöge a legkisebb. Egy ilyen pont bizonyára van, mert ellenkező esetben az OD_- távolság D'_- felezőpontja közelebb volna O-hoz és D_--hoz, mint bármely rácsponthoz; ez pedig csak akkor lehet, ha O és D_- szomszédosak.

Az $OAD_{-\Delta}$ egy primitív elemi cella egyik felét képezi, azonban a cella élvektorainak skalár szorzata; $\mathbf{ab} > 0$. A primitív cella területe: $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (-\mathbf{d})$. Tudjuk, hogy a primitív cella területe független az élek választásától, ezért adott $\mathbf{d}$ esetén, csak olyan vektor képezheti egy primitív cella élét, amelynek végpontja az előbbi A ponton átmenő és $-\mathbf{d}$-vel párhuzamos egyenesen fekszik (ebben az esetben lesz a vektor-szorzat állandó). Mivel ezen az egyenesen az identitás távolság $\overline{OD_-} = \overline{Q_1 Q_2}$, több rácspont a Q_1 és Q_2 pontok közé nem eshet, s így sohasem érhető el, hogy a három vektor $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d})$ egymással tompa szöget zárjon be (skaláris szorzatuk negatív legyen).



5. *ábra*



6. *ábra*

Térjünk most át a háromdimenziós pontrácsra. Tegyük fel ismét, hogy egy primitív vektornégyes $\mathbf{d}$ vektora nem szomszédos rácspontba mutat, de egyébként a vektorok skaláris szorzatai nem pozitívek. Tekintsük az OAD_-E pontok síkját (5. ábra). Mivel

$$\mathbf{cd} \leqq 0, \quad \mathbf{bd} \leqq 0,$$

ezért

$$\mathbf{ed} = \mathbf{cd} + \mathbf{bd} \leqq 0,$$

továbbá

$$\mathbf{ae} \leqq 0.$$

Így az $\mathbf{e}$ és $\mathbf{a}$ vektorokkal képezett parallelogramma az OAD_- síkbeli pontrácsnak egy olyan primitív elemi cellája, amelyre

$$\mathbf{a} + \mathbf{e} + \mathbf{d} = 0,$$
$$\mathbf{ae} \leqq 0, \quad \mathbf{ad} \leqq 0, \quad \mathbf{ed} \leqq 0.$$

A fentiek értelmében ez azonban csak úgy lehetséges, ha D_- a síkrácsban O-val szomszédos, vagyis az OD_- egyenes egyetlen pontja sem tartozhat E vagy A Voronoi-tartományához. Ugyanez mondható el a B, C, G, F pontokról is, amiből következik, hogy a D_- (és ezzel együtt a D pont is) a térrácsban is szomszédos O-val.

Ezek után megállapíthatjuk, hogy I. típusú rács esetén a vektornégyes kiválasztásánál valóban csak a szomszédos pontokba mutató vektorok, tehát a határlapok normálisai jöhetnek szóba.

2. Nem szerepelhetnek a vektornégyesben olyan vektorok, melyek egymásnak (—1)-szeresei. Ekkor ui. az $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}=0$ feltétel miatt a négy vektor konplanáris.

3. Nem szerepelhetnek a Voronoi-tartomány egymással érintkező lapjainak normálisai, mivel két szomszédos lapnormális mindig hegyesszöget zár be egymással.

Ha e három feltételt szem előtt tartjuk a legáltalánosabb Voronoi-tartomány alapján csak kétféleképpen tudunk négy vektort kiválasztani:

a) a négy vektor négy egymással nem érintkező hatszöglap normálisa (redukált vektornégyes).

b) a négy vektor közül legalább egy valamelyik négyszöglap normálisa (1). Az ezt környező négy hatszöglap és az átellenes négyszöglap tiltott (6. ábra). A tiltott lapokat vastag vonalakkal határoltuk. Marad négy hatszög és négy négyszöglap. Az egyik vektornak most is feltétlenül valamelyik hatszöglapon kell áthaladnia (2.), hiszen csak két pár négyszöglap van. Ezzel négy lap ismét tiltottá válik, s a fennmaradt két vektort egyértelműen a négyszöglapok normálisai közül kell kiválasztani (3. és 4.). Ekkor azonban ha pl. a hatszöglapokon áthaladó vektorok közül $\mathbf{c}$ szerepel a vektornégyesben, a másik három vektor szükségképpen $\mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{h}$. De

$$\mathbf{f}+\mathbf{g}+\mathbf{h}=(\mathbf{a}+\mathbf{d})+(\mathbf{b}+\mathbf{d})+(\mathbf{a}+\mathbf{b})=2(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{d})=-2\mathbf{c}.$$

Így

$$\mathbf{f}+\mathbf{g}+\mathbf{h}+\mathbf{c}=-\mathbf{c}\neq 0,$$

s ezenkívül a vektornégyes nem is primitív. Tehát csak egyféleképpen tudunk primitív és nem pozitív paraméterekkel rendelkező vektornégyest kiválasztani, s ez éppen a redukált vektornégyes.

III. *Végül megmutatjuk, hogy a* DELAUNAY *által javasolt redukciós eljárás során a primitív vektornégyes ismét primitívbe megy át.* A redukciós eljárás abból áll, hogy az

$$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$$

vektorok helyett rendre a

$$\mathbf{c}, -\mathbf{b}, \mathbf{a}+\mathbf{b}, \mathbf{d}+\mathbf{b}$$

vektorokat tekintjük. Az 1. ábrának megfelelő irányításban az elemi cellák térfogata

$$V=\mathbf{abd}=\mathbf{adc}=\mathbf{acb}=\mathbf{bcd}.$$

A redukció után pedig

$$V' = \mathbf{c}[(-\mathbf{b}) \times (\mathbf{d} + \mathbf{b})] = -\mathbf{c}\mathbf{b}\mathbf{d} = V,$$
$$V' = \mathbf{c}[(\mathbf{d} + \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} + \mathbf{b})] = \mathbf{c}[\mathbf{d} \times \mathbf{a} + \mathbf{d} \times \mathbf{b} + \mathbf{b} \times \mathbf{a}] =$$
$$= -\mathbf{a}\mathbf{d}\mathbf{c} + \mathbf{b}\mathbf{c}\mathbf{d} + \mathbf{a}\mathbf{c}\mathbf{b} = \mathbf{a}\mathbf{c}\mathbf{b} = V \text{ stb.}$$

Az elemi cellák térfogata a redukció során változatlan, tehát az új vektornégyes primitív.

Az eddigi megfontolásaink I. típusú pontrácsra vonatkoztak. Eredményeink azonban minden pontrácsra egyaránt érvényesek. Ugyanis mint DELAUNAY megmutatta, bármely pontrács előállítható I. típusú pontrácsból annak egy folytonos, egyirányú, homogén deformációjával, miközben a Voronoi-tartományok egyes határlapjai egyenesekké vagy pontokká zsugorodnak össze. Továbbá a nem I. típusú pontrácsban redukáltnak azt a vektornégyest nevezzük, amelyhez a megfelelő I. típusú rács redukált vektornégyese tart, ha a szükséges deformációt végrehajtjuk. Folytonos deformáció során primitív cella primitívbe megy át, s így I. tételünk általános érvényessége nyilvánvaló. A II. tétel érvényességét pedig az biztosítja, hogy a szomszédos pontok a deformáció után is szomszédosak maradnak.

Befejezésül köszönetet mondok SÁNDOR ENDRÉNEK, aki felhívta figyelmemet a fenti problémákra.

IRODALOM

B. DELAUNAY: Neue Darstellung der geometrischen Kristallographie, *Z. Kristallographie*, **84** (1933) 109—149.

T. ITÔ: A general X-Ray Powder Photography, *Nature*, **161** (1949) 775.

(Beérkezett: 1958. IX. 3.)

Az Eötvös Loránd Tudományegyetem
I. sz. Kísérleti Fizikai Intézete

A KÜLFÖLDI SZAKIRODALOMBÓL

RÁDIÓTECHNIKA ÉS SZÁMELMÉLET*

Írta: BALTH. VAN DER POL

Előadásom tárgya két oly tudományág kapcsolata, melyek az első pillanatra talán egymástól teljesen idegennek tűnnek. Nincs is tudomásom arról, hogy az irodalomban e két terület kapcsolatával foglalkoznának. Gondolok egyrészt a szó legtágabb értelmében vett *rádiótechnikára*, arra a témakörre, melyről mindnyájan igen sokat hallottunk, s mellyel személyesen is megismerkedtünk — ha másként nem, hát otthoni rádiókészülékünk használata révén; másrészt a *számelméletre*, mint az ún. tiszta matematika egy részére, mely talán éppen a „legtisztább" matematikai diszciplínának tekinthető. GAUSS-nak — a nagy német matematikusnak — tulajdonítják ezt a megállapítást: „Ha a matematika a tudományok királynője, akkor a számelmélet a matematika királynője". — A számelmélet nagyrészt a természetes számokkal: 1, 2, 3, ... foglalkozik. E természetes számok mindenféle tulajdonságokban meglepően gazdagok és némelyik rájuk vonatkozó tétel az emberi értelem által eddig elért legmagasabb régiókba tartozik. Ez indította KRONECKERt, egy másik matematikust, a következő kijelentésre: „Az egész számokat Isten teremtette, minden egyéb emberek műve."

A természetes számokat bizonyos fokig mindnyájan ismerjük; például, mikor reggel koronában és öreben fizetünk a tejesnek, természetes számokkal van dolgunk. De a természetes számok sorozata túllépi a százat, túl a milliót, sőt a legnagyobb számokat is, melyekkel a csillagászatban találkozunk. Így az az anyag, ami a számelmélettel foglalkozók rendelkezésére áll, végtelenbe nyúlik. A természetes számok mindegyike vagy törzsszám (prímszám), vagy összetett szám. (A prímszámok az egységen és önmagukon kívül semmi más egész számmal nem oszthatók.) Az első prímszámok: 2, 3, 5, 7, ..., de törzsszám például

$$107, 141, 183, 460, 469, 231, 731, 687, 303, 715, 884, 105, 727$$

is, amely (a tizes számrendben felírva) 39 jegyű szám.

* Ez az előadás a Dán Műszaki Akadémián hangzott el 1953. jan. 20-án abból az alkalomból, hogy a szerzőt — az *UNESCO* Nemzetközi Rádiózási Tanácsadó Bizottságának (C. C. I. R; székhelye: Genf, Svájc) igazgatóját — a Valdemar *Poulsen*-díjjal tüntették ki. Az előadás szövege a *Journal of the Franklin Institute* 255. kötetének 6. számában (1953. jún., 475—495. o.) jelent meg, "Radio Technology and the Theory of Numbers" címmel.

Egy ilyen nagy számnál annak megállapítása, hogy nem összetett, azaz hogy az 1-et kivéve egyetlen nála kisebb természetes számmal sem osztható, — nyilván nem könnyű feladat. És mégis nemrégiben egy amerikai matematikus, Dr. D. H. Lehmer, mikor felkerestem Los Angeles-i matematikai „laboratóriumát", azt ujságolta, hogy ő még nagyobb törzsszámot fedezett fel; bizonyára ez a legnagyobb szám, melyről bizonyosan tudjuk, hogy tényleg prím. Ez a szám

$$2^{1279}-1,$$

mely a decimális rendszerben felírva 386 jegyű; Dr. Lehmer modern elektronikus számológépének 14 percre volt szüksége e szám meghatározásához, míg egy emberi lény csak mintegy 125 év alatt végezte volna el ugyanezt.[1]

Milyen kapcsolat áll fenn mármost a rádiótechnika és a számelmélet között?

Mielőtt erre a kérdésre válaszolnék, szeretnék — még általánosabb értelemben — foglalkozni egyrészt a matematika, másrészt a fizika és a technika között fennálló kapcsolattal. A tudomány története azt mutatja, hogy a matematika jórészt a „tiszta matézis" művelői révén fejlődött, akik e tudomány szépségének varázslatos hatása alatt álltak; akiket elbűvölt a tárgykör titokzatos általánossága és akik életüket azzal töltötték, hogy új tényeket és összefüggéseket fedeztek fel ezen az igen kiterjedt és csodálatos területen. Hogy eredményeik alkalmazhatók-e az asztronómiában, a fizikában, a kémiában vagy — mondjuk — a technikában, az elsődleges szempontként rendszerint nem érdekelte őket. Fő célkitűzésük arra irányult, hogy tételeiket mind elvontabb és elvontabb esetekre terjesszék ki, és munkásságuknak vezérelve az általánosság volt. Ebben az értelemben veendő Sir Bertrand Russell angol matematikus és filozófus híres mondása, hogy „egy matematikus sohasem olyan boldog, mint mikor nem ismeri azt, amiről beszél".

Néhány matematikus oly messzire ment e téren, hogy egyenesen büszke volt arra, ha eredményei a gyakorlatban nem voltak alkalmazhatók. Mondják, hogy egyik nagy matematikus a következő megjegyzést tette: „A Bessel-függvények szép függvények *annak ellenére*, hogy sok alkalmazásuk van."

A fizika és a technika a tiszta matematikától kétségkívül bizonyos mértékig függetlenül fejlődött. Természetes tehát, hogy a fizikusok és a műszakiak egyszerre csak meglepődve fedezték fel, hogy pontosan azokat a matematikai segédeszközöket és módszereket, amelyekre nekik szükségük van problémáik megoldására, már hiánytalanul kifejlesztették a tiszta matematika művelői,

1 Erdős Pál szíves információja szerint 1953 óta ugyanazzal a géppel sikerült még nagyobb törzsszámot találni: ($2^{2281}-1$)-et. — Természetesen ezek csak „előőrsök": nem ismerjük az *összes* kisebb prímszámokat. (A fordító megjegyzése.)

akiknek annak idején a legcsekélyebb szándékuk vagy éppen érdeklődésük sem fűződött eredményeik esetleges gyakorlati alkalmazásához.

Előadásom fő célja annak megmutatása, hogy nézetem szerint a fizika és a rádiótechnika oly fejlődési fokozatot ért el, melyben szorosan a számelmélethez tartozó módszerek és eredmények alkalmazhatók — és nagy sikerrel kezdik is azokat alkalmazni — típikusan fizikai, ill. rádiótechnikai problémák megoldására.

Tudom, hogy némelyik matematikus nem ért egyet ezzel a nézettel. Nem tudom, merjem-e idézni ebben a vonatkozásban G. H. HARDYt, a nagy angol matematikust, mégpedig két okból: először, mivel nagy adósságom van vele szemben mindazért, amit szép matematikai kutatómunkája során, különösen pedig a számelméletben adott nekünk és másodszor, mert többé már nem tud vitába szállni velem.[2] Ha tehát megkockáztatom, hogy mégis idézem őt, ezt minden köteles tisztelet kifejezése mellett teszem. — A különben elbűvölő és némelykor egyenesen patetikus (**1**) esszében,[3] melyet nem sokkal halála előtt írt, a következőket mondja (60—61. oldal):

...„ Ha a számelméletet fel lehetne használni bárminő gyakorlati és nyilvánvalóan tiszteletreméltó célra, ha közvetlenül az emberi boldogság előmozdítására vagy az emberi szenvedés enyhítésére lehetne fordítani, mint a fiziológiát és a kémiát, akkor bizonyosan sem GAUSS, sem bármelyik más matematikus nem lett volna oly esztelen, hogy kifogásolja az ilyen alkalmazásokat vagy sajnálkozzék ezek miatt. De a tudomány éppen annyira dolgozik a gonosznak, mint a jónak (s persze különösen háborús időben); és megokoltnak tekinthető mind GAUSS, mind kisebb matematikusok öröme afelett, hogy legalább egy tudomány van — s ez az övék —, amelynek a közönséges emberi tevékenységtől való nagyfokú elszakadottsága lehetővé teszi, hogy megőrizzék nemesnek és tisztának."

Egy másik nagy matematikus és számelmélet-kutató, EDMUND LANDAU ezt írta „standard" (**2**) műve első kötetének 21. oldalán: „GORDAN pflegte etwa zu sagen: Die Zahlentheorie ist nützlich, weil man nämlich mit ihr promovieren kann."[4]

E szempontok helyesek és többé-kevésbé indokoltak lehettek abban az időpontban, amikor íródtak, de az én véleményem az, hogy a fizika és a rádiótechnika olyan fejlődési fokot ért el, hogy területükön igenis nagy sikerrel alkalmazhatók olyan ideák, módszerek és eredmények, amelyek tipikusan a

[2] Mint ismeretes, HARDY 1947. dec. 1-én meghalt. (A ford. megj.)

[3] Zárójelbe tett kövér számok a dolgozat végén levő irodalomjegyzékre utalnak.

[4] GORDAN szokta mondani: „A számelmélet hasznos, mert az ember doktori fokozatot szerezhet vele."

felsőbb számelmélet körébe tartoznak. Hadd adjak önöknek néhány, tézisemet illusztráló példát:

(a) Kocka-alakú kristályok *Röntgen*-spektroszkópiájában észrevették, hogy bizonyos hullámhosszúságú sugarak nem verődnek vissza. Azt találjuk, hogy az előforduló visszaverődések a következő egész számoknak felelnek meg: 1, 2, 3, 4, 5, 6, —, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, —, 16, 17, ..., s kitűnt, hogy a hiányzó n számok $n = 4^k\,(8m+7)$ alakúak, ahol k és m pozitív egészek. Mármost a számelmélet azt tanítja, hogy ezek oly számok, melyek nem állíthatók elő három vagy ennél kevesebb négyzetszám összegeként; az idézett tény nyilván

I. TÁBLÁZAT

A természetes számok additív előállítása négy vagy kevesebb négyzetszámmal

$1 = 1^2$

$2 = 1^2 + 1^2$

$3 = 1^2 + 1^2 + 1^2$

$4 = 2^2 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2$

$5 = 2^2 + 1^2$

$6 = 2^2 + 1^2 + 1^2$

$7 = 2^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2$

$8 = 2^2 + 2^2$

$9 = 3^2 = 2^2 + 2^2 + 1^2$

$10 = 3^2 + 1^2 = 2^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2$

$11 = 3^2 + 1^2 + 1^2$

$12 = 2^2 + 2^2 + 2^2 = 3^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2$

$13 = 3^2 + 2^2 = 2^2 + 2^2 + 2^2 + 1^2$

$14 = 3^2 + 2^2 + 1^2$

$15 = 3^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2$

$16 = 4^2$

$17 = 4^2 + 1^2 = 3^2 + 2^2 + 2^2$

$18 = 3^2 + 3^2 = 4^2 + 1^2 + 1^2 = 3^2 + 2^2 + 2^2 + 1^2$

$19 = 3^2 + 3^2 + 1^2 = 4^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2$

$20 = 4^2 + 2^2 = 3^2 + 3^2 + 1^2 + 1^2$

$21 = 4^2 + 2^2 + 1^2$

$22 = 3^2 + 3^2 + 2^2 = 4^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2$

$23 = 3^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2$

$24 = 4^2 + 2^2 + 2^2$

$25 = 5^2 = 4^2 + 3^2 = 4^2 + 2^2 + 2^2 + 1^2$

$26 = 5^2 + 1^2 = 4^2 + 3^2 + 1^2 = 3^2 + 3^2 + 2^2 + 2^2$

$27 = 3^2 + 3^2 + 3^2 = 5^2 + 1^2 + 1^2 = 4^2 + 3^2 + 1^2 + 1^2$

$28 = 4^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2 = 3^2 + 3^2 + 3^2 + 1^2 = 5^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2$

szoros kapcsolatba hozható euklidesi terünk három dimenziójával. — A mellékelt I. táblázatban ideiktattam egy rövid listát, mely a 28-ig terjedő természetes számok négy vagy kevesebb négyzetszám összegére való felbontását tartalmazza. Négynél több négyzetszámra nincs szükség, viszont négy összeadandó feltétlenül szükséges 7, 15, 23,... esetében, melyek mind a fent említett alakúak.

(b) Egy kristályrács belsejében fellépő potenciálok elmélete (például az ismert *Madelung*-konstans) legjobban az elliptikus theta-függvények felhasználásával vezethető le, amelyek egyúttal az analitikus tárgyalás alapját képezik egész számok négyzetösszegekként való előállításának elméletében. Valóban, a két levezetés teljesen analóg.

(c) A *Planck*-féle sugárzási formulával és az *Einstein—Bose,* valamint *Fermi*-féle statisztikákkal kapcsolatosan bizonyos szempontok szorosan összefüggnek $\zeta(s)$-sel, a *Riemann*-féle zetafüggvénnyel, melynek definíciója:

$$\zeta(s)=\frac{1}{1^s}+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\cdots=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x-1}dx \qquad (\operatorname{Re} s>1) \tag{1}$$

s amely gyakorlatilag minden, a törzsszámok eloszlására vonatkozó aritmetikai vizsgálat alapja. Ezt a tényt — úgy látszik — olyannyira felismerték az Egyesült Államokban, hogy a háború alatt még a ζ-függvény tulajdonságaira vonatkozó tisztán matematikai kutatásokat is a „biztonsági" témakörök közé sorolták (NORBERT WIENERtől kapott szóbeli közlés).

(d) Egy másik számelméleti függvény, amely most kezd jelentős szerepet játszani a fizikában, a $p(n)$ partíció-függvény. A következő generátor-függvény segítségével értelmezzük:

$$\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1-x^k}=1+\sum_1^\infty p(n)x^n \qquad (|x|<1). \tag{2}$$

$p(n)$ nem más, mint azoknak a lehetőségeknek a száma, ahányféleképpen az n egész számot fel lehet írni bármilyen pozitív egészek összegeként, ismétlések megengedése mellett. Így például:

$$\begin{aligned}6&=5+1=4+2=4+1+1=3+3=3+2+1=\\&=3+1+1+1=2+2+2=2+2+1+1=\\&=2+1+1+1+1=1+1+1+1+1+1,\end{aligned}$$

ami tizenegy különböző változatot jelent 6-nak pozitív egészek összegeként való felírására, tehát $p(6)=11$.

E $p(n)$ partíció-függvény és aszimptotikus viselkedése újabban alkalmazást nyer a fizika különböző részeiben, köztük a kristályok növekedésének elméletében (**3**) s felhasználható bizonyos olyan irregularitások megmagyarázására, amelyek kristályok felületén néha fellépnek.

Ezt a néhány példát, amelyekben a modern problémák sikerrel foghatók meg a számelmélethez tartozó módszerekkel és eredményekkel, az elméleti fizika területéről kölcsönöztük.

De a rádiózással kapcsolatban is termékenyen alkalmazható a matematikának ez az egyik legabsztraktabb ága. Hadd szolgáljak Önöknek ismét néhány példával.

(e) Ismeretes, hogy amikor periodikus elektromotoros erő *relaxációs oszcillációt* végző rendszerre hat, ez a rendszer bizonyos körülmények között oly rezgésre kényszerül, amelynek frekvenciája a ható frekvenciának osztója. Ezek a rezgések kiterjedt felhasználására kerülnek a televízióban. Így tehát frekvencia-„demultiplikációval", azaz *osztással* van dolgunk. — Nos, a számok oszthatóságának problémaköre a számelméletnek egy jellegzetes része és talán éppen legfontosabb fejezeteinek egyike. Nem tűnik valószínűtlennek, hogy itt ismét aritmetikai módszerek segíthetnek megvilágítani e nagy mértékben komplex jelenséget, amelyet gyakran felhasználunk a praxisban. Ugyanakkor számos, különböző nemzetiségű matematikus még folytatja az elméleti kutatásokat a szóbanforgó területen, köztük MARY L. CARTWRIGHT az angliai Cambridge-ben (**4**).

(f) Hadd adjak mindjárt egy másik, nagyon „klasszikus ízü" példát: a két vezető gömb közötti kapacitás problémáját. Ennek egyik igen elegáns megoldását Lord KELVIN adta meg 100 évvel ezelőtt az „elektromos képek" általa kidolgozott elmélete segítségével (**5**).

Mindamellett talán nem közismert, hogy az a kifejezés, melyet KELVIN kapott a két, kölcsönösen egymáson kívüli, a, ill. b sugarú és c centrumtávolságú gömb közötti $C_{a,b}$ kapacitásra, a következő alakban írható:

$$C_{a,b}=\frac{EI}{c}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{d(n)-d\left(\frac{n}{2}\right)\right\}\alpha^{n}, \tag{3}$$

ahol

$$\alpha=\frac{E-I}{E+I}$$

és E, I jelenti azon körök közös külső, ill. belső érintőinek hosszát, melyek e gömböknek egy, a középpontjaikon átmenő síkkal való metszése útján adódnak. (3)-ban ott találjuk a $d(n)$ függvényt, a számelmélet egyik jellegzetes függvényét, amely az n szám osztóinak számát adja meg. Hogy egy példát mondjunk: $d(6)=4$, mivel 6-nak négy (pozitív) osztója van, ti. 1, 2, 3 és 6. Megjegyezzük, hogy a (3)-ban $d\left(\frac{n}{2}\right)$ nullával helyettesítendő bármely páratlan n-re. Eszerint, (3)-ban néhány tagot explicite kiírva, adódik:

$$(3a)\quad \begin{cases} C_{a,b} = \dfrac{EI}{c} \Big\{ \alpha + \alpha^2 + 2\alpha^3 + \alpha^4 + 2\alpha^5 + 2\alpha^6 + 2\alpha^7 + \alpha^8 + 3\alpha^9 + \\ \quad + 2\alpha^{10} + 2\alpha^{11} + 4\alpha^{12} + \cdots + 2\alpha^{6089} + 16\alpha^{6090} + 2\alpha^{6091} + \cdots \Big\}. \end{cases}$$

$C_{a,b}$ (3) vagy (3a) alatti alakjának birtokában, ahol az együtthatók számelméleti jellegűek, felismerhető a probléma analógiája a híres *Dirichlet*-féle problémával. Az utóbbi a $\sum_{1}^{N} d(n)$ összeg aszimptotikus viselkedésének meghatározásában áll, $N \to \infty$ mellett (6).

Tudomásunk szerint a jelenlegi irodalomban nem található semmiféle formula, mely approximatív értéket adna e $C_{a,b}$ kapacitásra, midőn a gömbök nagyon közel vannak egymáshoz, azaz d távolságuk kicsi mindkét sugárhoz képest. Ez esetben α nagyon közel van az egységhez és (3) vagy (3a) sorunk ekkor valóban nagyon lassan konvergál. A (3) kifejezés azonban lehetővé tette számunkra, hogy olyan matematikai módszereket alkalmazzunk, amelyek jellemzőek a számelméletre. Így két egyenlő a sugarú gömb esetén, melyek egymástól kicsi d távolságra vannak, a következő egyszerű kifejezést találtuk a kölcsönös kapacitásra:

$$(4)\qquad C_{a,a} \approx \frac{1}{4}\, a \log\left(\frac{a}{d}\right).$$

A (4) képlet teljes levezetését a Függelék tartalmazza.

Láthatjuk tehát, hogyan használhatók fel a modern számelméletből kölcsönzött analitikus módszerek még egy nagyon klasszikus elektromosságtani problémában is.

(g) De van még egy tipikus — s igen alapvető — rádió-probléma, amelyet sohasem láttam az irodalomban világosan kifejtve, s amely szintén arra vezet bennünket, hogy számelméleti eredményeket használjunk fel.

Tegyük fel, hogy valamely v feszültséget, mely az idő két koszinuszos függvényének szuperpoziciója után áll elő, vagyis amely

$$(5)\qquad v = a \cos \omega_1 t + b \cos \omega_2 t$$

alakú, olyan detektorra alkalmazunk, melynek i karakterisztikája kvadratikus függvénye v-nek:

$$(6)\qquad i = 2\alpha v^2.$$

(5)-nek (6)-ba való helyettesítésével adódik:

$$i = \alpha \{ a^2(1 + 2\cos 2\omega_1 t) + b^2(1 + \cos 2\omega_2 t) + \\ + 2ab[\cos(\omega_1 + \omega_2)t + \cos(\omega_1 - \omega_2)t] \}.$$

E formula világosan mutatja, hogy az áram a következő frekvenciákat „tartalmazza“:

$$0,\ 2\omega_1,\ 2\omega_2,\ \omega_1+\omega_2,\ \omega_1-\omega_2.$$

Mikor azonban a detektor-karakterisztika olyan, hogy v-nek csak komplikáltabb transzcendens függvényeként állítható elő, mint pl. az ún. „lineáris detekció“ esetében, vagy midőn $i=e^{\beta v}$, akkor az eredő áram frekvenciái közt — ideértve a negatívakat is — általában alapfrekvenciák minden lineáris kombinációja előfordul, ti.

(7) $$m\omega_1+n\omega_2 \qquad (m, n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Ha továbbá ω_1 és ω_2 kommenzurábilisak, s alkalmas idő-skálát használunk, (7) helyettesíthető

(7a) $$ma+nb$$

-vel, ahol a és b egész szám. Egészeknek egy ilyen típusú kombinációját a számelméletben „modulus“-nak nevezzük (7) és $[a, b]$-vel jelöljük. Megjegyezzük, hogy ezzel kapcsolatban FUETER idéz WILHELM FLIEß: „Zum Ablauf des Lebens“ című könyvéből, amelyben utóbbi azt állítja, hogy [23, 28] előállít minden olyan számot, ami az emberi életben fontos. FLIEß megemlíti pl., hogy

$$1\cdot 28-1\cdot 23=5,$$
$$3\cdot 23-2\cdot 28=13,$$
$$5\cdot 23-4\cdot 28=3,$$
$$5\cdot 28-6\cdot 23=2,$$

s a kapott 5, 13, 3, 2 számok az emberi életben különösen fontos életkorokat reprezentálnak. Azonban, amint FUETER világosan rámutat, a [23, 28] modulus elemei, vagyis a

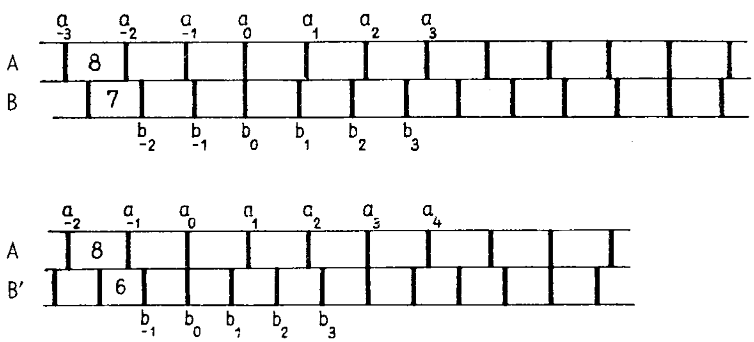
$$23n+28m \qquad (m, n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

számok valójában minden egész számot „lefednek“ $-\infty$-től $+\infty$-ig. Bármely adott egész szám előállítható, ha megtaláljuk a megfelelő (m, n) szempárt.

Ez a helyzet a 23 és 28 bázisok esetében, mivel 23 és 28 legnagyobb közös osztója az egység. Ha viszont pl. a $16n+20m$ modulust vesszük, akkor a generált számok nyilván 4 összes többszörösei, minthogy 16 és 20 legnagyobb közös osztója 4.

Visszatérve mármost a kombinációs hangokkal kapcsolatos rádió-problémáinkra, az általános elmélet arról tájékoztat bennünket, hogy a (7a) modulus előállítja az *a, b számok* vagy (az idő-skála alkalmas transzformációjával) az ω_1 és ω_2 *legnagyobb közös osztójának összes pozitív és negatív egészszámú többszöröseit.* Ennélfogva azok a kombinációs hangok, amelyeket egy transzcendens detektorral nyerünk, mind szabályosan és egyenletesen oszlanak el, egymástól oly frekvencia-távolságra, amely megfelel a és b legnagyobb közös osztójának, feltéve, hogy ω_1 és ω_2 kommenzurábilisak; különben a kombinációs hangok „mindenütt sűrűek". Így például előzetesen megállapíthatjuk, hány kombinációs hang lesz található egy adott frekvencia-sávban s ez a szám csak a sáv szélességétől függ, viszont nem függ a sáv helyzetétől a frekvenciaspektrumban.

Az említett tétel, ti. hogy az $ma+nb$ alakú számok, ahol a és b rögzített egészek, míg m és n egymástól függetlenül végig fut az összes pozitív és negatív egész számokon, nem egyebek, mint az a, b számok legnagyobb közös osztójának (egészszámú) többszörösei, alapvető fontosságú a számelméletben. Valóban, két számnak, a-nak és h-nek legnagyobb közös osztóját legjobban úgy definiálhatjuk, mint a (7a) kifejezés legkisebb pozitív értékét, melyet m és n alkalmas megválasztásával kaphatunk meg.



1. és 1a ábra. A kombinációs hangok eloszlásának szemléltetése nóniuszon, amidőn a detektorra két szinuszos rezgést viszünk

Érdemes itt megjegyezni, hogy a szóbanforgó fundamentális tétel hogyan szemléltethető a technológiában jól ismert nóniusszal. Két lineáris skála segítségével magyarázhatjuk meg a dolgot a legjobban. Az 1. ábrában a két skála egyikét A-val, a másikat B-vel jelöltük. Az A skálán két egymásutáni vonás távolsága: (a_n, a_{n+1}) egyenlő 8 egységgel, míg a B skálán a szukcesszív vonások távolsága: (b_n, b_{n+1}) 7 egység. Mármost először is úgy állítjuk a skálákat, hogy a — tetszés szerint választott — „nulla-vonások" (a_0 és b_0) egy vonalba essenek. Akkor világosan látható, hogy az A skála valamely a_n vonásának a B skála bármely másik b_m vonásától való távolsága éppen $8n-7m$ egység.

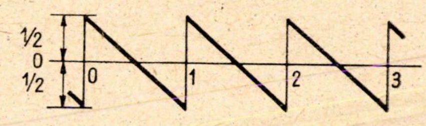
Speciálisan az ábrából világosan látható, hogy

$$a_1-b_1=1 \text{ egység,}$$
$$a_2-b_2=2 \text{ egység,}$$
$$a_3-b_3=3 \text{ egység,}$$
$$\dots\dots\dots\dots$$

úgyhogy ily módon az összes egész számok generálhatók. A legkisebb fellépő pozitív távolság (itt 1) 8-nak és 7-nek legnagyobb közös osztója.

Tekintsük ezután az 1a ábrát, ahol ismét van egy A skála, míg a B skálát egy B' skála helyettesíti, melyen a vonások hat egységnyire vannak egymástól.

Itt az A és B skálán felvett egy-egy vonás legkisebb távolsága (eltekintve zérustól) 2-vel egyenlő; mint például a_1 és b_1, vagy b_3 és a_2 között. Az összes többi távolságok 2 többszörösei, amely 8 és 6 legnagyobb közös osztója.

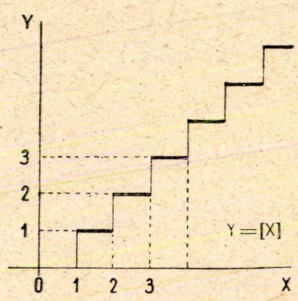


2. *ábra.* *Az* $y = \mathrm{Sa}\,(x)$ *fűrészfog-függvény*

Most utolsó híradástechnikai példánkra térünk.

(h) A 2. ábrán az ún. „fűrészfog"-függvény látható, amelyet $\mathrm{Sa}(x)$-szel jelölünk. A grafikon legnagyobb, ti. $\frac{1}{2}$ ordinátájú pontjai $\left(\text{s egyúttal a legkisebb, } -\frac{1}{2} \text{ ordinátájúak is}\right)$ az $x = \cdots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$ helyekhez tartoznak; a függvény tehát egységnyi ugrást mutat ezekben a pontokban, egyébként pedig (szakaszonként) lineárisan fogyó.

Ilyen időfüggvényt használnak minden televíziós adóban és vevőben a kép vonalainak és mezőinek periódikus „letapogatására". Jelentős technikai fejlődést érték el az utóbbi időben alkalmas alakú és viselkedésű fűrészfogfüggvények kísérleti előállítása terén, Ugyanakkor azonban éppen ez az $\mathrm{Sa}\,(x)$ fűrészfog-függvény, melyet oly nagy mértékben alkalmazunk a híradástechnikában, a számelmélet legalapvetőbb függvénye. Ez világossá válik egy igen egyszerű konstrukció segítségével.



3. *ábra.* *Az* $y = [x]$ *függvény grafikonja*

Az egész számok grafikus ábrázolásakor a 3. ábrát kapjuk. Ezt a lépcsős függvényt a számelméletben így jelöljük:

$$y = [x]. \tag{8}$$

Ha (8)-ból kivonjuk az egyszerű $y = x$ függvényt és hozzáadunk $\frac{1}{2}$-et, az $\mathrm{Sa}\,(x)$ fűrészfog-függvényt kapjuk:

$$\mathrm{Sa}\,(x) = [x] - x + \frac{1}{2}, \tag{9}$$

mely 1 szerint periódikus, azaz

$$\mathrm{Sa}(x+1)=\mathrm{Sa}(x).$$

Ez az $\mathrm{Sa}(x)$ függvény oly alapvető szerepet játszik a számelméletben, hogy nem meglepő, ha valóban lépten-nyomon előfordul. Legyen szabad néhány példát adnom:

Az első a

$$\Pi(x)=\Gamma(x+1)$$

faktoriális-, ill. gammafüggvényre vonatkozó *Stirling*-féle formulával kapcsolatos.

Fennáll a jólismert

$$\Pi(x)=\sqrt{2\pi x}\, x^x e^{-x} e^{\mu(x)} \qquad (x>0) \tag{10}$$

képlet, ahol $\mu(x)$ 0-hoz tart, midőn $x\to\infty$. Az utóbbi $\mu(x)$ függvény eléggé bonyolult, azonban nagyon elegáns és egyszerű módon fejezhető ki a fűrészfog-függvény segítségével, nevezetesen:

$$\mu(x)=\int_0^\infty \frac{\mathrm{Sa}(u)}{u+x}\,du. \tag{11}$$

De (11) tovább általánosítható, ha bevezetjük a $\zeta(s)$ *Riemann*-féle zeta-függvény *Hurwitz*-féle általánosítását, $\zeta(s,x)$-et (8). Ennek definíciója a $\mathrm{Re}\, s>1$ félsíkban:

$$\zeta(s,x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(x+n)^s} \qquad (\mathrm{Re}\, s>1,\ x>0),$$

úgyhogy

$$\zeta(s,1)=\zeta(s).$$

A $\zeta(s,x)$ függvény analitikusan folytatható a $\mathrm{Re}\, s<1$ félsíkban és szintén előállítható az $\mathrm{Sa}(x)$ fűrészfog-függvény segítségével a következőképpen:[5]

$$\frac{1}{s}\left\{\zeta(s,x+1)-\frac{1}{(s-1)x^{s-1}}+\frac{1}{2x^s}\right\}=\int_0^\infty\frac{\mathrm{Sa}(u)}{(u+x)^{s+1}}\,du \tag{12}$$

$$(\mathrm{Re}\, s>-1,\ x>0).$$

(12) a (11) formula általánosítása, amennyiben $s\to 0$ esetén az utóbbira redukálódik.

Ha pedig (12)-ben s-et a $-1<\mathrm{Re}\, s<0$ sávra korlátozzuk, x helyébe zérus is tehető és így a *Riemann*-féle zetafüggvényre a következő elegáns kifejezést kapjuk:

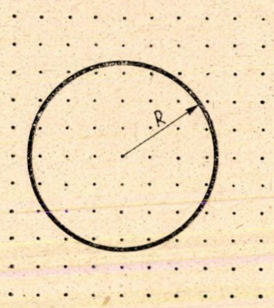
$$\frac{1}{s}\zeta(s)=\int_0^\infty\frac{\mathrm{Sa}(u)}{u^{s+1}}\,du \qquad (-1<\mathrm{Re}\, s<0); \tag{13}$$

[5] (12) baloldalán $s=0$ és $s=1$ esetén a megfelelő határérték veendő. (A ford. megj.)

ez az a függvény, amelynek tanulmányozásához olyan sokkal járult hozzá HARALD BOHR, a nagy dán matematikus, s mely az egész törzsszámelmélet alapja. — A (11), 12 és (13) képlet csupán néhány példa a fűrészfog-függvény előfordulására az analízisben.

Egy másik, tipikusan számelméleti példa a következő:

Tekintsünk egy négyzetes rácspontrendszert (4. ábra), melyben két szomszédos rácspont távolsága egységnyi. Ha egy olyan kört rajzolunk, melynek középpontja egy tetszőleges rácspont, sugara pedig R hosszúságú, akkor a körbe eső rácspontok száma nyilván növekedni fog R növelésekor. A számelméletnek egy klasszikus problémája az R sugarú körbe eső rácspontok számának, $A(R^2)$-nek a meghatározása. Már első látásra világos, hogy ha R igen naggyá válik, akkor ez a szám közelítőleg egyenlő a kör területével, azaz $\pi \cdot R^2$-tel. A korrekció, melyet alkalmaznunk kell, hogy pontos eredményt kapjunk ebből a közelítésből, elegáns módon fejezhető ki a következő, fűrészfog-függvényekből álló sor alakjában, ahol $R=\sqrt{x}$:



4. ábra. A rácspontok száma egy R sugarú kör belsejében

$$\frac{1}{4}\{A(x)-\pi\cdot x\}=\mathrm{Sa}(x)-\mathrm{Sa}\left(\frac{x}{3}\right)+\mathrm{Sa}\left(\frac{x}{5}\right)-\mathrm{Sa}\left(\frac{x}{7}\right)+-\cdots$$

Az $\mathrm{Sa}(x)$ fűrészfog-függvénynek olyan tulajdonságai is vannak, amelyek grafikonjából azonnal láthatók. Valóban, a periodikus $\mathrm{Sa}(x)$ függvény bizonyos szempontokból egyszerűbb, mint — mondjuk — a $\sin 2\pi x$ függvény, jóllehet Fourier-sora:

$$\mathrm{Sa}(x)=\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty}{}' \frac{e^{2\pi i k x}}{2\pi i k}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin 2\pi k x}{\pi k} \tag{14}$$

végtelen sok szinusz-tagot tartalmaz.

A szóbanforgó tulajdonságok egyike:

$$\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Sa}\left(x-\frac{k}{n}\right)=\mathrm{Sa}(nx), \tag{15}$$

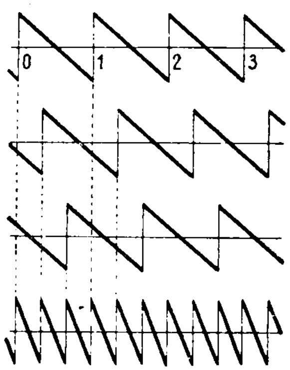
melyet az 5. ábra (az $n=3$ esetben) illusztrál. Szavakban kifejezve ez azt jelenti, hogy n fűrészfog-függvény szuperpoziciója, melyek közül mindegyik $1/n$ fázisdifferenciával van eltolva az előhöz képest, újabb fűrészfog-függvényt szolgáltat, de n-szer akkora frekvenciával. — Ilyen jellegű tulajdonságoknak kétségkívül vannak alkalmazásai a híradástechnikában.

A fűrészfog-függvénynek vannak más sajátságai is (l. 6. ábra), melyek kísérleti vonatkozásban használhatók lehetnek, mint pl.:

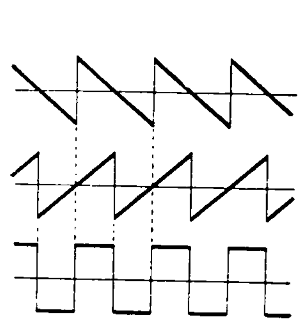
$$\mathrm{Sa}\,(x) - \mathrm{Sa}\left(x - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Sin}\,(2\pi x), \tag{16}$$

ahol $\mathrm{Sin}\,(2\pi x)$ azt a „négyzetes szinusz"-függvényt jelöli, mely (—1)-ről (+1)-re „ugrik" az $x = \ldots, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$ pontokban és (+1)-ről (—1)-re az $x = \ldots, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \ldots$ helyeken, míg a szakadási helyek közötti intervallumokban az 1, ill. —1 konstanssal egyenlő. A következő két alakban is felírható:

$$\mathrm{Sin}\,(2\pi x) = \frac{\sin 2\pi x}{|\sin 2\pi x|} = (-1)^{[2x]}.\text{[6]}$$



5. ábra. Három, rendre 0/3, 1/3, 2/3 periódussal eltolt fűrészfog-függvény összeadása újabb fűrészfog-függvényt szolgáltat, melynek frekvenciája az eredetinek háromszorosa



6. ábra. Ha egy fűrészfog-függvényből kivonunk egy másik, fél periódussal eltolt fűrészfog-függvényt, egy „négyzetes szinusz"-függvényt kapunk

A függvény tehát bizonyos analógiát mutat a közönséges szinuszfüggvénnyel, eltekintve diszkontinuus viselkedésétől.

Nem nehéz megmutatni (például geometriailag), hogy $\mathrm{Sin}\,(2\pi x)$ fűrészfog-függvényekből a következő módon is előállítható (l. 7. ábra):

$$2\,\mathrm{Sa}\,(x) - \mathrm{Sa}\,(2x) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Sin}\,(2\pi x). \tag{17}$$

Megjegyzendő, hogy (17) (16)-ból és (15)-ből is következik, ha az utóbbiban

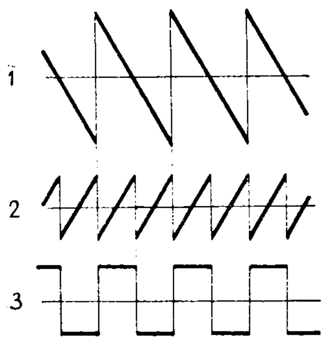
[6] Mint látható, egyúttal $\mathrm{Sin}\,(2\pi x) = \mathrm{sgn}\,(\sin 2\pi x)$, feltéve, hogy a szakadási helyekhez tartozó függvényértékeket 0-nak vesszük. Ez az ún. *Rademacher*-féle ortogonális rendszer első tagja. (A ford. megj.)

n-et 2-nek vesszük. A fűrészfog-függvények összes fenti tulajdonságai, sok egyéb tulajdonsággal együtt, könnyen levezethetők az operátorszámítás segítségével (9).

Megmutatható az is, hogy $\mathrm{Sa}(x)$ 2^n frekvenciájú „négyzetes szinusz"-függvények szerint sorba fejthető. Valóban:

$$\mathrm{Sa}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \,\mathrm{Sin}\,(2^{n-1} \cdot 2\pi x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} (-1)^{[2^n x]}.$$

Az $\mathrm{Sa}(x)$ fűrészfog-függvénynek ezt a Sin-függvényekből való összetételét illusztrálja a 8. ábra. Legfelül öt „négyzetes szinusz"-függvény található: a, b, c, d és e. Az A grafikon a és b összetétele, míg B a, b, c, d, e szuperpozíciója útján jön létre.



7. ábra. Egy fűrészfog-függvénynek egy másik, kétszer akkora frekvenciájú, de feleakkora amplitudójú fűrészfog-függvényből való kivonása egy „négyzetes szinusz"-függvényt szolgáltat

$\mathrm{Sa}(x)$ ilyen kifejtésének, (14) alatti *Fourier*-sorával ellentétben, az az érdekes tulajdonsága van, hogy az ún. *Gibbs*-féle jelenség itt nem lép fel. A 9. ábra a fűrészfog-függvénynek közönséges *Fourier*-komponensekből (szinuszfüggvényekből) való hasonló összetételét szemlélteti; világosan látható a keletkező *Gibbs*-féle jelenség: a szakadási helyek közelében fellépő „túllengések".

Nemrég ismertem fel a fűrészfog-függvényre vonatkozó következő függvényegyenleteket (a második az első folyománya):

$$\mathrm{Sa}(\mathrm{Sa}(x)) = -\,\mathrm{Sa}\left(x + \frac{1}{2}\right), \tag{18}$$
$$\mathrm{Sa}\,\{\mathrm{Sa}(\mathrm{Sa}(x))\} = \mathrm{Sa}(x).$$

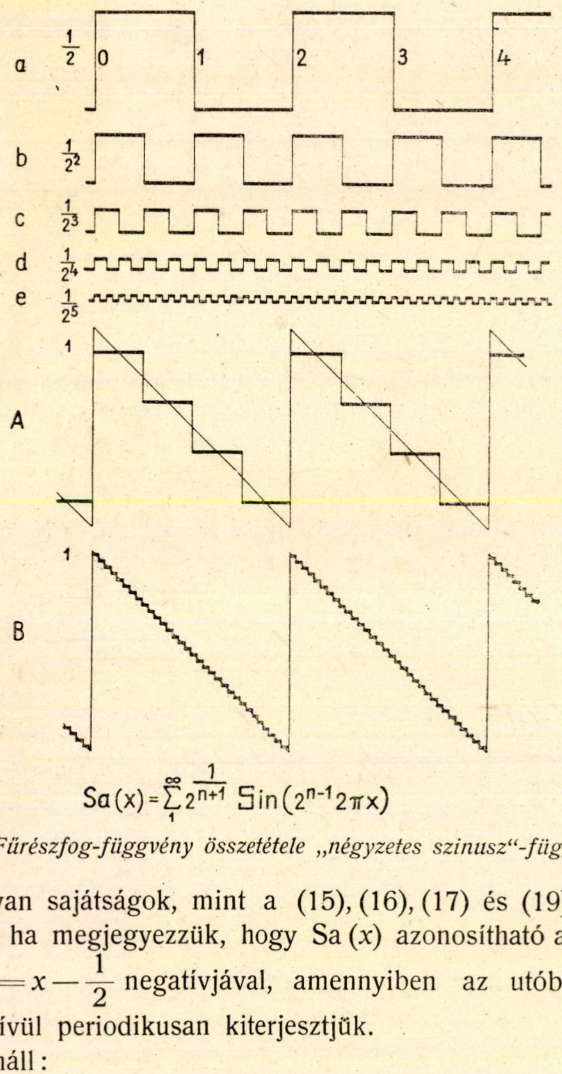
(18) tehát azt mutatja, hogy az $\mathrm{Sa}(x)$ függvényt kétszer egymásután önmagára alkalmazva, az eredeti fűrészfog-függvényt kapjuk. Eszerint bármely páratlan számú iteráció mindig reprodukálja $\mathrm{Sa}(x)$-et.

A (15), (16), (17) és (18) alatti relációk mind viszonylag egyszerűek, de sokkal mélyebb, a fűrészfog-függvényt tartalmazó összefüggések is vannak. Például LANDAU (2, II. kötet, 170. lap) bebizonyítja a következő érdekes formulát:

$$\int_0^1 \mathrm{Sa}(mx) \cdot \mathrm{Sa}(nx)\, dx = \frac{1}{12} \frac{(m, n)}{\{m, n\}}. \tag{19}$$

Itt m és n két pozitív egész számot jelent, (m, n) ezeknek legnagyobb közös osztója, $\{m, n\}$ pedig m és n legkisebb közös többszöröse.

Ez a fűrészfog-függvény számelméleti előfordulására tipikus és elég mélyen fekvő példa.



8. ábra. Fűrészfog-függvény összetétele „négyzetes szinusz"-függvényekből

Végül, olyan sajátságok, mint a (15), (16), (17) és (19) alattiak tovább általánosíthatók, ha megjegyezzük, hogy Sa (x) azonosítható az első *Bernoulli*-polinom: $B_1(x) = x - \frac{1}{2}$ negatívjával, amennyiben az utóbbit a $0 < x \leqq 1$ intervallumon kívül periodikusan kiterjesztjük.

Tehát fennáll:

(20) $$\mathrm{Sa}\,(x) = -B_1(x - [x]).$$

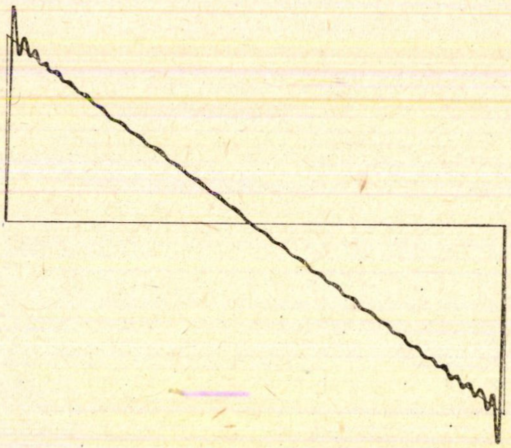
(A *Bernoulli*-polinomokat definiálhatjuk generátor-függvénnyel is:

$$\frac{te^{tx}}{e^t - 1} \sum_0^\infty \frac{B_n(x)}{n!} t^n.)$$

Így a $B_n(x)$ polinomok ismert tulajdonságai rögtön alkalmazhatók a mi Sa (x) fűrészfog-függvényünkre, s ezek közül néhánynak bizonyos technikai értéke is lehet. A közelmultban találtam egy formulát, amely általánosítja a *Landau*-féle relációt. Nem akarom ideiktatni ennek legáltalánosabb alakját, csak a következő speciális esetet:[7]

$$(21)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_0^1 B_k(mx-[mx])\cdot B_k(nx-[nx])\,dx = \\ \displaystyle = (-1)^{k+1}\cdot\frac{k!\,k!}{(2x)!}B_{2k}(0)\left(\frac{(m,n)}{\{m,n\}}\right)^k. \end{cases}$$

E képletben tehát az $(m, n)/\{m, n\}$ viszonyszám valamely k-adik hatványát nyerjük (k pozitív egész) a LANDAU (19) alatti formulájában szereplő első hatvány helyett.



9. ábra. Egy fűrészfog-függvénynek szinuszfüggvényekből való összetétele a tipikus „túllengést" mutatja a diszkontinuitásoknál. („Gibbs-féle jelenség")

Remélhetőleg a fenti érvek meggyőzőek abból a szempontból, hogy megérett az idő a számelméletben, a matematika talán legelvontabb s legtisztább ágában nyert módszereknek és eredményeknek a fizika és a rádiótechnika területén való alkalmazására.

A magam részéről nem érzem azt, hogy e technikai alkalmazások megfosztanák a számelméletet sokféle szépségétől, „charme"-jától és bonyolult lényegétől. Ellenkezőleg, számos, ma még rejtett tétel és reláció napvilágra kerülhet íly módon. Valóban, a fejlődő technika már elérte azt a fokot, amikor jelentős mértékben támogathatja a számelméletet, ma midőn — például — az e és π számokat több mint 2000 tizedesig kiszámították a modern elektronikus számológépek segítségével. Ugyancsak kidolgoznak módszereket és terveket arra, hogy numerikusan vizsgálják — ugyanilyen készülék felhasználásával —

[7] Vö. M. MIKOLÁS, Farey series and their connection with the prime number problem I., *Acta Sci. Math.* Szeged, **13** (1950), 93—117; Lemma 5. — A diofantikus approximációk elméletébe vágó alkalmazásokat és a *Hurwitz*-féle zetafüggvényre való általánosítást illetően l.: M. MIKOLÁS, Integral formulae of arithmetical characteristics relating to the zeta-function of Hurwitz, *Publicationes Math.* Debrecen, **5** (1957), 44—53. (A ford. megj.)

a híres *Riemann*-féle sejtést, mely szerint a $\zeta(s)$ függvény minden nem-triviális zérushelye a $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$ egyenesen fekszik.[8] Ez a hipotézis a legnagyobb fontosságú a modern számelmélet szempontjából, és a felsőbb aritmetika számos eredménye lényegesen fínomítható volna, ha RIEMANN állítása bizonyítható lenne. A probléma azonban ma még megoldatlan és mindezideig dacolt a modern analízis legszellemesebb, legkörmönfontabb és legkidolgozottabb módszereivel, még ha a jelenkori matematikusok legnagyobbjai alkalmazták is azokat. A technika — talán hamarosan — döntő járulékokat adhat ezen az igen érdekes területen. Biztosra vehetjük, hogy az egész számelmélet meglehetősen új szemléletet kapna, ha a modern elektronikus módszerekkel sikerülne találni akárcsak egyetlen olyan nem-triviális „zeta-gyököt“ is, mely — eltérően attól a végtelen sok kritikus sávbeli gyöktől, melynek létezéséről tudunk — *nem* fekszik a $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$ egyenesen.

A tiszta matematika művelői és a gyakorlati szakemberek között harmonikus együttműködés van most kialakulóban a számelmélet szempontjából alapvető jelentőségű, messzemenő eredmények elérésére — mint ahogy az sok más tudományágban is megfigyelhető. Jó példa erre az amsterdami Matematikai Centrum, ahol a numerikus osztály — melyet bőven ellátták elektronikus és mechanikai számológépekkel — értékes és ösztönző szolgálatot tesz az absztrakt kutatással foglalkozó más csoportoknak, legyenek azok az intézeten belül vagy azon kívül.

Megitélésem szerint ebben az irányban továbbhaladva nagy haladást reméltünk ezen a majdnem határtalan területen — a számelmélet területén —, amely olyannyira bővelkedik szép összefüggésekben s olyan törvényszerűségekben, melyeknek megfelelőit hiába keressük a matematika más ágaiban.

IRODALOM

(1) G. H. HARDY: *A Mathematician's Apology*, Cambridge, 1948.
(2) EDMUND LANDAU: *Vorlesungen über Zahlentheorie*, Leipzig, 1927.
(3) H. N. V. TEMPERLEY: Statistical Mechanics and the Partition of Numbers, *Proc. Cambr. Phil. Soc.*, Vol. **48**, p. 683 (1952).
(4) M. L. CARTWRIGHT: Non-linear Vibrations: a Chapter in Mathematical History (Matem. Egyes. elnöki székfoglaló előadás), *The Mathematical Gazette*, May 1952, p. 81.

[8] Azóta a szóbanforgó vizsgálatok már jelentősen előrehaladtak s jelenleg is folynak. Vö. D. H. LEHMER, On the roots of the Riemann zeta-function, *Acta Math.*, **95** (1956), 291—298 — ahol $\zeta(s)$-nek a $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$, $\operatorname{Im} s > 0$ félegyenesen levő első tízezer gyökére vonatkozó eredmények vannak röviden ismertetve. (A ford. megj.)

(5) SIR WILLIAM THOMSON: On the Mutual Attraction or Repulsion Between Two Electrified Spherical Conductors, (1) *Journal de Mathématiques*, 1845, (2) *Phil. Mag.*, April, August, 1853. (Mindkettő újra nyomva a "*Papers on Electrostatics and Magnetism*" c. gyűjteményben, London, 1872, 86. és 144. o.)
(6) G. H. HARDY and E. M. WRIGHT: *The Theory of Numbers*, Oxford, 1938, p. 262.
(7) R. FUETER: *Synthetische Zahlentheorie*, Berlin—Leipzig, 1927, p. 7.
(8) E. T. WHITTAKER and G. N. WATSON: *Modern Analysis*, Cambridge, 1935, p. 265.
(9) BALTH. VAN DER POL and H. BREMMER: *Operational Calculus Based on the Two-Sided Laplace Transform*, Cambridge, 1950.
(10) J. H. JEANS: *The Mathematical Theory of Electricity and Magnetism*, Cambridge, 1915, pp. 196—199.

Függelék

Ha a „*Kelvin*-képek" segítségével meghatározzuk a két, kölcsönösen egymáson kívüli, a ill. b sugarú, c centrumtávolságú gömb közötti $C_{a,b}$ kapacitást, a számolás eredménye így írható (l. pl. (10)):

(1) $$C_{a,b}=\frac{EI}{c}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha^n}{1-\alpha^{2n}}=\frac{EI}{c}h(\alpha),$$

ahol

$$\alpha=\frac{E-I}{E+I},$$

míg

$$E=[c^2-(a-b)^2]^{\frac{1}{2}}$$

és

$$I=[c^2-(a+b)^2]^{\frac{1}{2}},$$

ahol E és I egy mindkét gömb középpontján átmenő síkban a főkörök külső ill. belső érintőinek hosszát jelenti.

Ezek után az (1) alatti sor a következőképpen alakítható át:

$$h(\alpha)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha^n}{1-\alpha^{2n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\alpha^{(2m+1)n},$$

ami rögtön erre a kifejezésre vezet:

(2) $$h(\alpha)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[d(n)-d\left(\frac{n}{2}\right)\right]\alpha^n;$$

itt $d(n)$ az n szám osztóinak száma (például $d(6)=4$, mivel 6 összes osztói: $1, 2, 3$ és 6) és $d\left(\frac{n}{2}\right)$ nullával helyettesítendő, midőn n páratlan.

A (2) alatti sor szoros kapcsolatban van a híres *Dirichlet*-féle problémával ((6), 262. o.).

Avégből, hogy (2) számára approximációt nyerjünk abban az esetben, mikor a gömbök közötti távolság kicsi a gömbsugarakhoz képest (ami igen kevéssel 1 alatti α-értéknek felel meg), a következő módon járhatunk el.

Új x változót vezetünk be

$$\alpha = e^{-e^{-x}}$$

helyettesítéssel, úgyhogy (2)-ből

$$(3) \qquad h(e^{-e^{-x}}) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ d(n) - d\left(\frac{n}{2}\right) \right\} e^{-ne^{-x}} = \sum_{n=1}^{\infty} d(n) \left\{ e^{-ne^{-x}} - e^{-2ne^{-x}} \right\}.$$

adódik.

$e^{-e^{-x}}$-nek kétoldali Laplace-transzformációnál $\Pi(p)$ felel meg ("operational image", vö. **(9)**); írjuk:

$$e^{-e^{-x}} = \Pi(p) \qquad (\mathrm{Re}\, p > 0),$$

s ennek alapján

$$h(e^{-e^{-x}}) = \left(1 - \frac{1}{2^p}\right) \Pi(p) \cdot \zeta^2(p) \qquad (\mathrm{Re}\, p > 1).$$

(3)-nak egy $x \to \infty$ határátmenethez tartozó közelítő értékét megadja az inverz-integrál reziduuma $p = 1$-nél:

$$h(e^{-e^{-x}}) \approx \frac{1}{2\pi i} \oint_{p=1} \left(1 - \frac{1}{2^p}\right) \frac{\Pi(p)}{p} \zeta^2(p) e^{px} dp =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint_{p=1} \left(1 - \frac{1}{2^p}\right) \frac{\Pi(p)}{p} \left(\frac{1}{p-1} + \gamma + \cdots\right) \left(\frac{1}{p-1} + \gamma + \cdots\right) e^{px} dp$$

(itt $\gamma = 0{,}57722\ldots$ az *Euler*-konstans), ami $p = 1 + z$ mellett

$$= \frac{e^x}{2\pi i} \oint_{z=0} \left(1 - \frac{1}{2^{z+1}}\right) \Pi(z) \left(\frac{1}{z} + \gamma + \cdots\right) \left(\frac{1}{z} + \gamma + \cdots\right) e^{zx} dz =$$

$$= \frac{e^{2\pi x}}{2\pi i} \oint_{z=0} \frac{1}{2} (1 + z \log 2 + \cdots)(1 - \gamma z + \cdots) \left(\frac{1}{z^2} + \frac{2\gamma}{z} + \gamma^2\right) e^{zx} dz.$$

Az integrandusból csupán a z^{-1}-et tartalmazó tagokat tartva meg, kapjuk:

$$(4) \qquad h(e^{-e^{-x}}) \approx \frac{e^x}{2\pi i} \oint_{z=0} \frac{1}{2z} (\gamma + x + \log 2)\, dz = \frac{e^x}{2} (\gamma + x + \log 2),$$

s ez éppen (3) kivánt aszimptotikus kifejezése $x \to \infty$ esetére. Visszatérve az eredeti „geometriai“ változókra — feltételünk $I \ll E$ — adódik:

$$e^{-e^{-x}} = \frac{E-I}{E+I} \approx 1 - \frac{2I}{E};$$

innen

$$e^{-x} = -\log\left(1-\frac{2I}{E}\right) \approx \frac{2I}{E} \quad \text{vagy} \quad x \approx \log\frac{E}{2I}.$$

Helyettesítsük ezt be (4)-be:

$$h(\alpha) \approx \frac{1}{2}\frac{E}{2I}\left(\gamma + \log\frac{E}{2I} + \log 2\right) = \frac{E}{4I}\left(\gamma + \log\frac{E}{I}\right);$$

tehát a kapacitás aszimptotikus kifejezése $E \gg I$ mellett (nagyon közeli gömbök esete):

$$C_{a,b} \approx \frac{E^2}{4c}\left(\gamma + \log\frac{E}{I}\right). \tag{5}$$

A jobboldal még tovább egyszerüsíthető, ha bevezetjük a két gömb közötti kis d távolságot:

$$d = c-(a+b);$$

minthogy

$$E^2 \approx 4ab,$$
$$I^2 \approx 2d(a+b),$$

tehát

$$C_{a,b} \approx \frac{ab}{a+b}\left(\gamma + \frac{1}{2}\log\frac{2ab}{d(a+b)}\right). \tag{6}$$

Egyenlő méretű gömbök esetén ($a=b$) (6) a következő alakot ölti:

$$C_{a,a} \approx \frac{a}{2}\left(\gamma + \frac{1}{2}\log\frac{a}{d}\right).$$

Ha pedig a d távolság oly kicsi, hogy még γ-t is elhanyagolhatjuk $\frac{1}{2}\log\frac{a}{d}$-hez képest, akkor két olyan gömb közötti kapacitásra, melyeknek sugara egyaránt a, s melyeknek (centrálismenti) d távolsága igen kicsi, a következő végső képletet kapjuk:

$$C_{a,a} \approx \frac{1}{4}a\log\left(\frac{a}{d}\right).$$

Fordította: Mikolás Miklós,
Eötvös Loránd Tudományegyetem, Matematikai Intézet

KÖNYVISMERTETÉSEK

Fuchs László: Abelian Groups

(Akadémiai Kiadó. Budapest, 1958)

Az a nagyarányú fejlődés, amely századunk első felében a matematika egészében végbement, a csoportelméletet sem hagyta érintetlenül. E fejlődés jelentőségét a csoportelmélet számára röviden két pontban foglalhatjuk össze: 1. az elmúlt fél évszázadban lett a csoportelmélet a matematika önálló és valóban gazdag tartalmú ágává, 2. egyre inkább nyilvánvalóvá vált, hogy mennyire nélkülözhetetlen a csoport fogalma a matematika számos diszciplinájának modern felépítésében, s hogy milyen hasznos szolgálatot tehet a csoportelmélet eredményeinek és módszereinek ismerete más területeket kutató matematikusok számára is. Az izomorfia-elv felállítása, amely az egész absztrakt algebra fejlődésének irányát megszabta, speciálisan a csoportelméletben ahhoz a programmhoz vezetett, amely az izomorf csoportok összes osztályának leírását tűzte ki céljául. Ez a csoport fogalmának igen általános volta miatt, természetesen, súlyos feladatot jelent, s egyelőre csak bizonyos speciális esetekben remélhető kielégítő eredmény.

Az általános csoportelmélet széles területének egyik legfontosabb fejezetét alkotja az Abel-féle (azaz kommutatív) csoportok elmélete. Bár ez a csoportelmélet legalaposabban vizsgált ága, s Abel-féle csoportokról számos, teljesen kielégítő struktúratétel ismeretes, az elmélet még távolról sem tekinthető lezártnak, hiszen a struktúratételek még mindig aránylag speciális csoportosztályokról nyújtanak felvilágosítást és a struktúra-probléma megoldása szempontjából lényeges további mély eredmények elérése valószínűleg nagy horderejű új módszerek kidolgozását igényeli. A kommutativitás azonosságának teljesülése miatt, tehát, az Abel-féle csoportok osztálya kissé hozzáférhetőbbé válik, ez azonban korántsem jelenti azt, hogy egyidejűleg e csoportokkal kapcsolatban a mély és nehéz problémák is megszünnének. Ez a kettősség teszi az Abel-féle csoportok elméletét oly vonzóvá sok algebrával foglalkozó matematikus számára.

Az Abel-féle csoportokról írott első olyan mű, amelynek szerzője a teljesség igényével lép fel, FUCHS LÁSZLÓ most ismertetendő monográfiája. Ami a korábban ugyanerről a témáról megjelent műveket illeti, említést kell tennünk KAPLANSKY *Infinite abelian groups* (1954) című könyvéről, továbbá KUROS *Csoportelméletének* (1953) II. részéről, mely utóbbi már csak terjedelménél fogva is az Abel-féle csoportokról szóló önálló műnek tekinthető. Kétségtelen, hogy az említett két szerző művei megírásával úttörő munkát végzett és hogy e két mű megjelenése nagy mértékben járult hozzá az Abel-féle csoportok elméletének amúgyis rohamos fejlődéséhez. Bár KUROS és KAPLANSKY könyvének megjelenése óta csupán néhány év telt el, az elmélet gyors fejlődése szükségessé tette egy olyan könyv megírását, amelynek nagyobb terjedelme egy részletesebb tárgyalást tesz lehetővé, s amely már figyelembe tudja venni azokat az eredményeket is, amelyek az említett két mű anyagának lezárása óta keletkeztek. Egy ilyen nagyszabású monográfia megírására vállalkozott FUCHS LÁSZLÓ, az Abel-féle csoportok egyik legkiválóbb specialistája. Nem véletlen, hogy ezt a nehéz feladatot éppen magyar matematikus vállalta magára, hiszen világszerte ismertek annak a csoportelméleti iskolának eredményei, amely RÉDEI LÁSZLÓ és SZELE TIBOR kezdeményezésére, az ő lelkes és eredményekben gazdag munkájuk nyomán jött létre.

FUCHS LÁSZLÓ *angol nyelvű* könyve meglehetősen teljes és részletes képet ad az Abel-féle csoportok elméletének jelenlegi helyzetéről. Jóllehet a könyv aránylag nagy terjedelme nagyobb lehetőségeket nyújt, az elmélet gazdag irodalmának feldolgozásában a szerzőnek mégis szelektálnia kell. Az operátor-modulusok és a topologizált Abel-féle csoportok elméletének részletes tárgyalása messze vezetett volna, így ezt a szerző mellőzi, s ezzel kapcsolatban megelégszik utalásokkal. A könyv tehát a szorosabb értelemben vett Abel-féle csoportok elméletének részletes tárgyalását tartalmazza, különös tekintettel a struktúra-problémára.

Az *első fejezet* bevezető jellegénél fogva összegyűjti azokat a csoport-elméleti tényeket, amelyek a későbbiekben nélkülözhetetlenek.

A könyv tulajdonképpeni anyaga a *második fejezettel* kezdődik. Ez a fejezet egy jólismert csoportosztállyal, a ciklikus csoportok direkt összegeként előálló csoportok osztályával foglalkozik. A szabad Abel-féle csoportok fogalmának és legfontosabb tulajdonságainak ismertetése után a véges és a végesen generált csoportok alaptétele következik, majd a szerző azzal a fontos kérdéssel foglalkozik részletesebben, hogy egy tetszőleges Abel-féle csoport milyen feltételek mellett bomlik fel ciklikus csoportok direkt összegére. Egy paragrafus ciklikus csoportok direkt összegeinek részcsoportjairól szól.

A *harmadik fejezet* szintén egy teljesen leírt csoportosztállyal, a teljes Abel-féle csoportok osztályával foglalkozik. Ezek a csoportok (izomorfizmus erejéig) egyértelműen bonthatók kváziciklikus csoportok, továbbá az összes racionális számok additív csoportjával izomorf csoportok direkt összegére és nevezetes jellemző tulajdonságok egész sorával rendelkeznek. E fejezetből ezekkel a tulajdonságokkal ismerkedhet meg az olvasó.

A *negyedik fejezet* a direkt összeadandók és a szerváns részcsoportok vizsgálatának van szentelve. Ismeretes, hogy ezek a fogalmak milyen fontos segédeszközt jelentenek már PRÜFER óta az Abel-féle csoportok szerkezetének vizsgálatában. A fejezet számos kritériumot tartalmaz arra nézve, hogy egy csoport valamely részcsoportja, illetve szerváns részcsoportja direkt összeadandó legyen. Az általános vizsgálatokon kívül néhány paragrafus speciális kérdésekkel foglalkozik: a direkt összeadandók egy erősebb tulajdonsággal rendelkező kategóriájával, a szerváns részcsoport fogalmának bizonyos általánosításaival és az ún. algebrailag kompakt csoportokkal.

A tetszőleges számosságú Abel-féle p-csoportok szerkezetének vizsgálatában alapvető fontosságú fogalomnak bizonyult a KULIKOV-féle bázis-részcsoport fogalma. Az *ötödik fejezet* célja az, hogy a bázis-részcsoportok legfontosabb tulajdonságaival ismertesse meg az olvasót, továbbá hogy előkészítse a következő fejezet strukturális vizsgálatait. Itt van bevezetve a kvázibázis fogalma, amely a ciklikus csoportok direkt összegeként előálló p-csoportok esetében a bázis fogalmával esik össze, míg az általános esetben a bázist bizonyos értelemben helyettesíteni tudja. A bázis-részcsoportok számos nevezetes tulajdonsága között megtaláljuk azt a SZELE TIBORtól származó nagy jelentőségű eredményt, amely szerint a bázis-részcsoport a csoportnak mindig homomorf képe.

A könyv gerincét a VI.—VIII. fejezetek alkotják. Itt tárgyalja a szerző az Abel-féle csoportok három főosztályának, ti. a torzió-, a torziómentes és a vegyes csoportok osztályának struktúraelméletét.

A *hatodik fejezet* a végtelen magasságú elemek nélküli p-csoportok általános vizsgálatával kezdődik, majd részletesen ki van fejtve a megszámlálható p-csoportok PRÜFER—ULM—ZIPPIN-féle struktúraelmélete. Ezen elmélet általánosításának lehetőségét vizsgálva egy terjedelmesebb paragrafus előírt Ulm-sorozatú csoportok konstrukciójával foglalkozik és bebizonyítja KULIKOV és FUCHS tételét ZIPPIN tételének általánosításáról. A fejezet utolsó paragrafusa redukált p-csoportok direkt felbontásaira vonatkozó két problémának van szentelve: 1) mit lehet állítani az olyan p-csoportról, amelynek bármely direkt felbontásában a direkt összeadandók halmazának számossága kisebb, mint a csoport számosságánál nem nagyobb megadott számosság, 2) létezik-e bármely m számossághoz olyan m számosságú p-csoport, amelynek bármely direkt felbontásában van olyan direkt összeadandó, amelynek számossága nagyobb, mint a csoport számosságánál kisebb bármely megadott számosság.

A *hetedik fejezet* tárgya a torziómentes csoportok. A toziómentes csoportok elmélete sokkal kevésbé van kiépítve, mint a torziócsoportoké, bár ma már aránylag sok tény ismeretes a torziómentes csoportok szerkezetéről is. A torziómentes csoportok legjobban kivizsgált osztálya az olyan csoportoké, amelyek 1 rangú csoportok direkt összegeként állnak elő. Az ilyen csoportok invariánsokkal vannak jellemezve. A fejezet egyik paragrafusa olyan torziómentes csoportokkal foglalkozik, amelyeknek operátortartománya a p-adikus egész számok gyűrűje. Ez a paragrafus előkészíti egy módszer kifejtését, amely alkalmas arra, hogy az összes megszámlálható torziómentes csoportot invariánsok (p-adikus elemek mátrixaiból alkotott sorozatok bizonyos értelemben vett ekvivalens osztályai) által jellemezze. Ez az eljárás kiterjesztése annak a jólismert elméletnek, amelyet a véges rangú torziómentes csoportok esetében KUROS, MALCEV és DERRY dolgoztak ki. — A direkt felbontatlan torziómentes csoportok meghatározásának problémáját vizsgálva a fejezet már tartalmazza azt az egészen friss eredményt, amely a $2^{\aleph}$-nál nem nagyobb rangú direk felbonthatatlan csoportok egzisztenciájáról szól. Egy-egy paragrafus a torziómentes csoportok néhány fontos osztályáról: végtelen ciklikus csoportok komplett direkt összegeiről, homogén és szeparábilis csoportokról tájékoztat bennünket.

A *nyolcadik fejezet* a legáltalánosabb csoportosztálynak, a vegyes csoportok osztályának van szentelve. Természetesen a tárgyalások középpontjában a széthasíthatóság kérdése, tehát az a kérdés áll, hogy egy vegyes Abel-féle csoport milyen feltételek mellett bomlik fel egy torzió- és egy torziómentes csoport direkt összegére. A vizsgálatok lényegében három kérdés körül csoportosulnak: 1. meghatározandó az összes olyan T torziócsoport, amelyre minden olyan G vegyes csoport széthasítható, amelynek maximális torzió-részcsoportja izomorf T-vel; 2. meghatározandó az öszes olyan J torziómentes csoport, amelyre a G vegyes csoport széthasítható, valahányszor J izomorf G-nek a maximális torzió-részcsoportja szerint vett faktorcsoportjához; végül 3. adott T torzió- és J torziómentes csoportok esetén mi a szükséges és elegendő feltétele annak, hogy G széthasítható legyen, valahányszor G maximális torzió-részcsoportja izomorf T-vel és G-nek T szerinti faktorcsoportja izomorf J-vel. E kérdésekkel kapcsolatos ismereteket a szerző részletesen feldolgozza, az eddig ismertnél egyszerűbb és világosabb tárgyalási módot alkalmazva. — A fejezet második részében a tetszőleges Abel-féle csoportoknak végtelen mátrixok bizonyos ekvivalencia-osztályaival való jellemzése van adva. Bár ez az eredmény a mátrixok tekintett ekvivalenciájának fogalma miatt kissé nehezen alkalmazhatónak látszik, mégis igen figyelemreméltó, hogy ez az elmélet az első kísérlet a tetszőleges Abel-féle csoportok klasszifikálására. A szerző által alkalmazott szellemes módszert ERDŐS JENŐ fedezte fel a torziómentes csoportok esetében.

A könyv további fejezetei többé-kevésbé függetlenek egymástól és az elmélet alkalmazásait tárgyalják. A *kilencedik fejezet* egy csoportnak egy másik csoportba való homomorfizmuscsoportjának rövidebb vizsgálata után az Abel-féle csoportok endomorfizmusgyűrűit teszi vizsgálat tárgyává. Többek között előírt tulajdonságú endomorfizmusgyűrűvel (pl. ferdetest, Artin-féle gyűrű, reguláris gyűrű stb.) rendelkező Abel-féle csoportok meghatározásával foglalkozik. Egy paragrafus az automorfizmusok csoportja, egy másik a teljesen invariáns részcsoportok vizsgálatának van szentelve.

A *tizedik fejezet* a csoportbővítésekkel foglalkozik. E fejezet tartalmazza SCHREIER elméletét — természetesen Abel-féle csoportokra alkalmazva, továbbá EILENBERG és MACLANE elméletének legfontosabb állításait a bővítések csoportjáról. Ugyancsak részletesen foglalkozik a fejezet azokkal a legújabb eredményekkel, amelyeket R. BAER ért el a bővítések csoportja szerkezetének vizsgálatában.

A rövidebb *tizenegyedik fejezet*ben a tenzori szorzattal ismerkedhet meg az olvasó. A szerző itt rávilágít arra a tényre, hogy miért nem játszik lényeges szerepet a tenzori szorzat az Abel-féle csoportok konstrukciójában, míg a matematika egyéb területein a fontossága elvitathatatlan. A szerző egyik újabb eredménye szerint ugyanis torziócsoportok tenzori szorzata primhatványrendű ciklikus csoportok direkt szorzatát eredményezi, tehát a tenzori szorzat — legalábbis a torziócsoportok esetében a struktúrát leegyszerűsíti. Az általános eset vizsgálata még nem történt meg.

Az igen *tartalmas tizenkettedik* fejezet a gyűrűk additív csoportját vizsgálja. A gyűrűelmélet az Abel-féle csoportok elméletének egyik legfontosabb alkalmazási területe, éppen ezért nem érdektelen annak a kölcsönhatásnak a vizsgálata, amely a gyűrű és additív csoportja között áll fenn. A vizsgálatok lényegében hazai talajból nőttek ki SZELE TIBOR, RÉDEI LÁSZLÓ és nem utolsó sorban a szerző munkássága nyomán, aki számos érdekes eredmény elérésén kívül a rendszerezés nagy munkáját is elvégezte. A tekintett fejezet a vizsgálatoknak két irányát különbözteti meg: a) adott G csoporthoz meghatározandó az összes olyan gyűrű, amelynek additív csoportja izomorf G-vel; b) gyűrűk adott osztályához meghatározandó az összes olyan csoport, amely e gyűrűosztályhoz tartozó valamely gyűrű additív csoportjaként lép fel. Az a) problémával foglalkoznak a Ciklikus csoportok direkt összegeire épített gyűrűk, Torziógyűrűk, Torziómentes gyűrűk, Nilcsoportok és kvázinilcsoportok című paragrafusok. Ami a b) problémát illeti, a szerző meghatározza az Artin-féle gyűrűk, a féligegyszerű és reguláris gyűrűk, végül a maximum- ill. a szigorú minimumkövetelmények eleget tevő gyűrűk additív csoportjait.

A *tizenharmadik fejezet* egy analog problémának, a testek multiplikatív csoportjára vonatkozó vizsgálatoknak van szentelve. Az alapvető kérdés itt az összes olyan Abel-féle csoportok meghatározása, amelyek testek multiplikatív csoportjaiként lépnek fel. Sajnos e problémára vonatkozóan aránylag kevés eredmény ismeretes, kielégítő választ csupán bizonyos speciális esetekben, mint pl. az algebrailag zárt és a valósan zárt testek esetében sikerült adni. Ezeket az eredményeket ismerteti a fejezet.

A *tizennegyedik fejezet* Abel-féle csoport részcsoportjainak hálójával foglalkozik. Itt több fontos probléma vethető fel, pl. szükséges és elegendő feltételeket találni arra, hogy egy adott háló valamely Abel-féle csoport részcsoportjainak hálójával legyen izomorf, vagy meghatározni az összes olyan csoportot, amelyeknek részcsoporthálói izomorfok. Ezek általában igen nehéz kérdések, bár velük kapcsolatban már sok részeredmény ismeretes. A fejezet ezeket, a nagyrészt BAERtől származó eredményeket dolgozza fel.

A *tizenötödik fejezet* a következő problémával foglalkozik: ha adott Abel-féle csoport bizonyos *részhalmazainak* direkt összegeként áll elő, mit mondhatunk ezekről a részhalmazokról. Ez a probléma, amely még abban az esetben is rendkívül nehéznek látszik, ha a csoportra ill. a részhalmazokra bizonyos megszorításokat teszünk, a jólismert HAJÓS-féle tétel általánosítását célozza. Ebben az irányban a szerzőnek vannak figyelemreméltó eredményei. Egyrészt a HAJÓS-féle tétel olyan általánosítását bizonyítja be, amely tetszőleges, (tehát nem szükségképpen véges) csoportok véges sok részhalmazának direkt összegeként való előállítására vonatkozik, másrészt olyan felbontásokat vizsgál, amelyekben a direkt komponensek halmazának számossága tetszőleges lehet. A fejezet tartalmaz egy paragrafust ciklikus csoportok részhalmazok direkt összegeként való előállításáról is.

A könyv utolsó, *tizenhatodik fejezete* bizonyos speciális kérdéseket tárgyal. A felvetett problémák önmagukban is érdekesek, s a megoldások illusztrációk arra, hogy az elméletet hogyan lehet alkalmazni egy-egy konkrét probléma megoldására.

Talán ez a rövid ismertetés is érzékeltetni tudja azt, hogy milyen gazdag az az anyag, amelyet a szerző könyvében feldolgozott. Az anyag összeválogatását a szerző a legnagyobb körültekintéssel végezte, s úgy véljük, hogy a könyv minden olyan ismeretet tartalmaz, amelyet ma az Abel-féle csoportok elméletében lényegesnek tartunk. Emellett gazdag anyagot találhat az olvasó az elmélet eredményeinek alkalmazására is. A szerző nagy gondot fordított arra, hogy könyvébe a legújabb eredmények is belekerüljenek, s így a könyv számos olyan (részben a szerzőtől, részben másoktól származó) eredményt tartalmaz, amely itt először van publikálva. Az olvasó e mű áttanulmányozásakor helyes képet fog kapni arról is, hogy az Abel-féle csoportok elméletében milyen helyet foglalnak el azok az eredmények, amelyeket magyar matematikusok értek el ezen a területen. FUCHS könyve tehát egyben a hazánkban folyó csoportelméleti kutatások dokumentációja is.

Külön kell szólnunk arról a rendkívül alapos munkáról, amelyet a szerző a mű megfogalmazásakor végzett. Az anyag gondos elrendezése, világos és szabatos kifejtése, a bizonyítások csiszoltsága és a stílus egyszerűsége nagyon megkönnyítik az olvasó munkáját. A könyv önmagában is teljesen érthető, s a szerző által csak szerény halmazelméleti ismeret, s bizonyos matematikai érettség van feltételezve. Az anyag főrészeinek részletes kifejtése mellett több mint 500 gyakorlat szolgál a tárgyalt anyag illusztrálására és a tekintett tárgyban való elmélyedésre. Kétségtelen, hogy ezeknek a gyakorlatoknak a kidolgozása nagy mértékben fogja az olvasót a csoportelmélet módszereinek elsajátításához hozzásegíteni. Kiemelendő, hogy a szerző művében csaknem száz érdekes nyílt problémát gyüjtött össze, amelyek nagyrésze magától a szerzőtől származik. Ezek a problémák bizonyára ösztönzőleg hatnak majd az Abel-féle csoportok kutatóira. A könyv egy több mint 300 adatot tartalmazó irodalomjegyzékkel, továbbá egy jól használható szerző-, ill. tárgymutatóval van ellátva.

Mindent összevetve úgy véljük, hogy FUCHS LÁSZLÓ könyvének megjelenésével a csoportelméleti irodalom lényegesen gazdagabbá vált, s hogy e könyv fontos forrásmunkája lesz a további Abel-féle csoportokra vonatkozó kutatásoknak. De nagy haszonnal forgathatják e könyvet azok az egyetemi hallgatók is, akik meg akarnak ismerkedni az algebra e fontos ágával, s így e könyvet a matematikusok szélesebb rétegének is melegen ajánlhatjuk. A könyv, amely angol nyelve révén a külföld számára is hozzáférhető, bizonyára világszerte meleg fogadtatásban fog részesülni.

Kertész Andor

a Debreceni Kossuth Lajos Tudományegyetem Matematikai Intézete

Megjegyzések Hennyey Zoltánnak az operátorszámítás megalapozására irányuló kísérletére

1958 őszén jelent meg HENNYEY ZOLTÁN: Lineáris áramkörök elmélete c. műve, mely, bár a műszaki tudományok egy ágát öleli fel, mégis a matematikus kritikáját is kiváltja. Ennek oka az, hogy a mű jelentékeny része — csaknem negyedrésze — matematikai kérdéseket tárgyal, és a szerző szerint új, önálló matematikai meggondolásokat tartalmaz. Ezek egy részével szeretnénk foglalkozni, hangsúlyozva, hogy nem szándékunk Hennyey könyvéről ismertetést adni.

A szóbanforgó könyv I. fejezete az operátorszámítással foglalkozik és célja az operátorszámítás egy új megalapozását kidolgozni. Pontosabban: a szerző szerint azt az operátorszámítást kívánja felépíteni, mely HEAVISIDE-től származik, amely „azonban matematikailag megalapozatlan ... s sokszor hibás eredményekre vezetett. Az első fejezet ennek a hibának kiküszöbölésére törekszik..." (11. old. 10—12. sor)

A szerző törekvése, sajnos nem járt sikerrel. „Megalapozása" rosszabb, mint az eredeti *Heaviside*-féle és még heurisztikus módszernek sem alkalmas, mert elgondolásait szembetűnően helytelen állításokra építi. „Alapötlete", mellyel a heaviside-i „hibát" ki akarja küszöbölni, a következő: Hennyey szerint a *Heaviside*-féle kalkulus hibája abban áll, hogy nem veszi figyelembe azt, hogy a differenciálhányados operátorának inverze, az integráloperátor, nem egyértelmű (!). E hiba a szerző szerint úgy küszöbölhető ki (15. old. 3. bek.), hogy tekinti mindazon függvények terét, melyek a $t < a$ félegyenesen eltűnnek (a minden függvényre általában más és más valós szám) és az integrációs állandót mindig úgy választja meg, hogy az integrál is a szóbanforgó függvénytérbe essék. (E függvénytér elemeit Hennyey „belépő időfüggvényeknek" nevezi.). Nyilvánvaló, hogy ezzel a Heaviside-kalkulus megalapozatlanságát nem szünteti meg, hiszen ezzel sem az általánosított differenciálás feladatát, sem pedig operátorok függvényeinek szabatos értelmezését nem lehet megoldani. De Hennyey szerint nem is szükséges (e kérdések megoldásában nem is lát nehézséget), mert a következőket hiszi:

a) Minden végtelen sokszor differenciálható függvény egyúttal analitikus is. Igaz, a szerző „analitikus időfüggvényen mindenütt értelmezett és mindenütt akárhányszor differenciálható korlátos időfüggvényt" ért (17. old. 12. sor), de valójában felhasználja — és éppen a kritikus helyeken — azt, hogy az általa analitikusnak nevezett függvények tényleg analitikusak abban az értelemben, ahogyan azt szerte a világon elfogadják. Így például a 25. oldalon (1. sor) ez áll: „$f(t)$ analitikus függvény (ti. HENNYEY-értelemben), mely *tehát* minden t körül minden T-re konvergens TAYLOR-sorba fejthető".

b) Minden folytonos függvény differenciálható. A Deriválás c. fejezetben (19. old. 3. §) ez olvasható: „Egyelőre azonban a deriválásnak csak akkor van értelme, ha a ... belépő függvény a *töréspontokban folytonos*", a 20. oldalon pedig ez áll: „Induljunk ki a ... függvényből, mely tetszésszerinti t esetén folytonos. *Így* deriváltja létezik".

De a *Dirac*-féle δ definíciója sem fogadható el. Hennyey pontosan azt mondja, amit a régi, Hennyey szerint is hibás operátorszámításban mondtak: $\delta_\alpha(t)$ olyan függvény, mely minden t mellett eltűnik a $t = \alpha$ kivételével, e helyen a függvény nincsen értelmezve. Ennek ellenére

$$\int_{-\infty}^{t} \delta_\alpha(x)\,dx = H_\alpha(t),$$

ahol $H_\alpha(t)$ a *Heaviside*-féle egységfüggvény [$H_\alpha(t) = 0$, ha $t < \alpha$ és $H_\alpha(t) = 1$, ha $t > \alpha$]. Illett volna tudnia a szerzőnek, hogy minden szokásos integrálfogalom mellett a második kikötés kielégíthetetlen. De tartalmaz a könyv egy másik, „még szebb" definíciót is a *Dirac*-deltára a 22. és 23. oldalon. Itt lényegében a δ-t egy nem konvergens függvénysorozattal, mint annak határértékét definiálja. Hogy a függvénysorozat nem konvergens, ezt a szerző is megjegyzi, de e nehézségen könnyen segít olymódon, hogy a δ-t a divergens sorozat tagjaival approximálja!

Úgy véljük, az eddigiekből világosan kitűnik *Hennyey* elméletének tudományos értéke. Éppen ezért nem is foglalkozunk a szinte oldalanként fellelhető, az értelmetlenségig pongyola meghatározásokkal és kifejezésekkel (mit jelent az, hogy „operatorikus előállítás“? vagy „végtelen tagú polinom“?) és szokatlan, célszerűtlen jelölésekkel (például miért kell a természetes logaritmusok alapszámát a világszerte szokásos *e* helyett ϵ-vel jelölni?). Sőt az egész mű matematikai része még ennyi megjegyzést sem érdemelne, ha nem az Akadémiai Kiadó egy könyvéről lenne szó. Már pusztán ez a tény önmagában is, de előszavával és több helyen tett megjegyzéseivel még inkább azt a látszatot igyekszik kelteni, hogy itt — ha nem is teljesen sikerült — de „uttörő“ kutatásokról van szó és ezért alkalmas arra, hogy a kutató műszakiakat megtévessze. Ennek a veszélye annál inkább fennáll, mert abban igaza van Hennyey Zoltánnak, hogy a *Laplace*-transzformációra épült operátorszámítás nem mindenben elégíti ki a műszaki és fizikai alkalmazások igényeit. Ezért valami más elmélet szükséges. Abban azonban nincs igaza a szerzőnek (mint ahogyan azt könyvének 13. oldalán írja), hogy „az utóbbi évtizedek szerzői az operátorszámítást a Laplace-traszformáció jól megalapozott bázisára építik fel...“. Éppen a legutóbbi évtizedek egyik legszebb alkalmazott matematikai eredménye az operátorszámítás különböző, nem a Laplace-transzformáción alapuló felépítése, amelyek éppen a természettudományos igényeknek megfelelően az operátor fogalmát helyezik meggondolásaik középpontjába. Utalni lehet itt elsősorban LAURENT SCHWARTZ: Théorie des Distributions c. kétkötetes 1951-ben megjelent világszerte feltűnést keltő könyvére vagy még inkább JAN MIKUSIŃSKI Rachunek Operatorów c. 1953-ban kiadott (a második kiadás 1957-ből való) könyvére, amely nemcsak az operátorszámítás szép, egyszerű és szemléletes felépítését tartalmazza, hanem többek között a lineáris áramkörök elméletének szabatos és egyben szemléletes tárgyalását is adja. Annál sajnálatosabb, hogy Hennyey ezeket az eredményeket nem használta fel, sőt ezekről még említést sem tesz, mert hiszen tudott róluk. E sorok szerzője is, és jelenlétében más matematikusok is, felhívták rá figyelmét.

Hennyey Zoltán dilettáns tárgyalásmódja, a könnyen fellelhető irodalom teljes negligálása és az ebből fakadó félrevezető megjegyzések nemcsak az operátorszámítással kapcsolatos fejezetekben nyilvánulnak meg. Könyvének harmadik fejezete a dimenzióelmélettel, ezzel az érdekes heurisztikus módszerrel foglalkozik. Ezzel kapcsolatban egyszerűen kijelenti, hogy „ez a téma, mellyel a tudomány szinte nem foglalkozik“ (64. oldal). Honnan veszi ezt a szerző?

A dimenzióelmélet, ha nem is áll a matematikai érdeklődés középpontjában, de állandóan művelt tudományág. Nem kell másra utalni, mint DROBOT kiváló dolgozatára a Studia Mathematicában (1953), melyben a pi-tétel igen szabatos, szép bizonyítását adja, vagy H. L. LANGHAAR: Dimensional Analysis and Theory of Models (1951) c. szép könyvére (tucatjával lehetne sorolni régebbi és újabb, e témával foglalkozó könyveket és dolgozatokat). Mi szükség van akkor *Hennyey* „eredeti“, teljesen zavaros okfejtéseire?

Az Akadémiai Kiadónál megjelent műtől sokkal nagyobb tudományos lelkiismeretességet, precizitást és szakszerűséget várunk, mint amilyen HENNYEY könyvének, legalább is, a matematikával foglalkozó része.

Fenyő István

Műszaki Egyetem IV Matematika Tanszék

Technikai szerkesztő: L. Ziermann Margit

A kiadásért felelős az Akadémiai Kiadó igazgatója Műszaki felelős: Farkas Sándor

A kézirat beérkezett: 1959. IV. 2. — Terjedelem: 9,75 (A/5) ív, 16 ábra, 1 melléklet

Szegedi Nyomda Vállalat 59-1609 Felelős vezető: Vincze György

MAGYAR FIZIKAI FOLYÓIRAT

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
III. OSZTÁLYÁNAK

FIZIKAI KÖZLEMÉNYEI

Kutató fizikusok számára önálló eredményeket tartalmazó és összefoglaló jellegű fizikai, csillagászati dolgozatokat, könyvismertetéseket, laboratóriumi fogásokat és ma már klasszikussá vált dolgozatokat közöl hazai és külföldi szerzőktől.

Évenként 1 kötet (kb. 36 ív) jelenik meg 6 számban.

A folyóirat előfizetési ára kötetenként, azaz évenként 42 forint, külföldi címre 60 forint.

Belföldi megrendeléseket az *Akadémiai Kiadó,* Budapest, V., Alkotmány utca 21. (Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 05-915-111-44) teljesít.

Külföldi megrendelések a *„Kultúra“* Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalat, Budapest, VI., Népköztársaság útja 21. (Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 43-790-057-181) útján eszközölhetők.

Ára: 21,— Ft

TARTALOMJEGYZÉK

A KÜLFÖLDI SZAKIRODALOMBÓL

KÖNYVISMERTETÉSEK

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK

KÖZLEMÉNYEI

IX. KÖTET 3. SZÁM

AKADÉMIAI KIADÓ BUDAPEST

1959

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK
KÖZLEMÉNYEI

IX. kötet 3. szám

Szerkesztőség: Budapest, V., Széchenyi rakpart 3.
Kiadóhivatal: Budapest, V., Alkotmány utca 21.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei változó terjedelmű füzetekben jelennek meg és az Akadémia III. osztályának felolvasóülésein bemutatott matematikai dolgozatokat, valamint egyéb dolgozatokat, referátumokat, továbbá az osztály munkájára vonatkozó közleményeket, könyvismertetéseket stb. közölnek. Évenként egy kötet jelenik meg (négy szám alkot egy kötetet).

Kéziratok a következő címre küldendők:

A Magyar Tudományos Akadémia
III. Osztályának Közleményei.
Budapest, V., Széchenyi rakpart 3.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi levelezés.

Minden szerzőt 100 különlenyomat illet meg megjelent munkájáért.

Közlésre el nem fogadott kéziratokat a szerkesztőség lehetőleg visszajuttat a szerzőhöz, de felelősséget a beküldött kéziratok megőrzéséért vagy továbbításáért nem vállal.

A Közlemények előfizetési ára kötetenként belföldi címre 40 forint, külföldi címre 60 forint. Belföldi megrendelések az Akadémiai Kiadó, Budapest, V., Alkotmány u. 21. (Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 05-915-111-44), külföldi megrendelések a „Kultúra" Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalat, Budapest, VI., Népköztársaság útja 21. (Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 43-790-057-181) útján eszközölhetők.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztálya a következő idegen nyelvű folyóiratokat adja ki:

1. Acta Mathematica Hungarica
2. Acta Physica Hungarica.

ÉRTESÍTÉS

A II. MAGYAR MATEMATIKAI KONGRESSZUSRÓL

A Magyar Tudományos Akadémia és a Bolyai János Matematikai Társulat közösen rendezi meg Budapesten

A II. MAGYAR MATEMATIKAI KONGRESSZUST

1960. augusztus 24. és 31. között.

A kongresszuson megemlékeznek a nem euklideszi geometria egyik felfedezőjének, Bolyai János halálának 100. évfordulójáról.

A kongresszuson az alábbi szekciók fognak működni:

1. Algebra és számelmélet.
2. Geometria és topológia.
3. Analízis.
4. Valószínűségszámítás és matematikai statisztika.
5. A matematika alapjai és a matematikai gépek elmélete.
6. A matematika alkalmazásai.
7. A matematika története és oktatása.

A kongresszus iránt érdeklődők forduljanak levélben a kongresszus szervezőbizottságához:

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZETE,
BUDAPEST, V., REÁLTANODA U. 13–15.

A szervezőbizottság az érdeklődők címére rendszeresen megküldi a kongresszusra vonatkozó tájékoztatókat.

A KONGRESSZUS SZERVEZŐBIZOTTSÁGA

IN MEMORIAM WOLFGANGI BOLYAI

— HALÁLÁNAK 100. ÉVFORDULÓJÁRA* —

Írta: DÁVID LAJOS ny. egy. tanár

Alábbi tanulmányom *Bolyai Farkas* három — egy-egy latin, magyar, német — műve alapján készült. Széleskörű munkássága újat vagy jobbat nyujtó részének az eddigi tárgyalásoknál átfogóbb exhaustiója. Egyes tételeit szabatosabban fogalmaztam meg, több fontos esetben leszögeztem prioritását, kiemeltem általa fölvetett s az ő szellemében kifejtendő, ma is értékes, érdekes problémákat, továbbá bő irodalmat csatoltam munkámhoz gondolataival kapcsolataival, így e gondolatok sorsára vonatkozóan is.

Tanulmányom fejezetei: I. **Idő és tér.** — II. **„Systema scientiae."** — III. **Az idő axiómáiról.** — IV. **Határfogalmak.** — V. **Részelmélet és kontinuum.** — VI. **Aritmetika.** — VII. **Analízis.** — VIII. **Geometria.** — Függelék: **Didaktika.** — **Zárószó.**

Rövidítések: A *Tentamen* 2-ik kiadásának (M. T. Akadémia 1897—1904) első kötetére $T._{\text{I}}$, második kötetének első (*„Textus"*) részére $T._{\text{II}}$ által hivatkozom. Továbbá:

Aritmetika 1843 = *A'* Marosvásárhelyt 1829-ben nyomtatott Aritmetika Elejének ... kiadása ... 1843;

KG. = BOLYAI FARKAS szintén névtelenül megjelent *Kurzer Grundriss...* c. munkájának (1851) 2-ik kiadása P. STÄCKEL, *Wolfgang und Johann Bolyai Geometrische Untersuchungen* c. munkája (I—II, 1913) II-ik kötetében 119—179.

Stäckel I. ill. II. = STÄCKEL előbbi munkája.

További irodalom a fejezetek végén.

I. Idő és tér

BOLYAI FARKAS a matematikában két fő diszciplinát különböztet meg: az *aritmetikát* és a *geometriát*. Az aritmetika az *idő formájára redukált mennyiségek*[1], a geometria pedig az „űr" (a testektől való minden irányú és határtalan elvonatkozás után maradó üresség), vagyis a *tér* tudománya[2]. Kép-

* A Magy. Tud. Akadémia III. Osztályának megbízásából 1956-ban készült tanulmány.

zeteink *egymásután*ja illetve *egymásmellettis*ége időben és térben lehetséges, de hogy az idő és a tér, e két végső hely (loca ultima[3]) szemléletünkön kívüli „realitás"-e, vagy nem, azt — mondja BOLYAI — eldöntetlenül hagyjuk: megelégszünk annak megállapításával, hogy mindkettő absztrakció révén válik alkalmassá matematikai meggondolások számára.

Figyelemreméltó BOLYAI e tartózkodása, mivel az általa jólismert és nagyrabecsült NEWTON, EULER és GAUSS szerint a tér realitás, sőt NEWTON szerint az idő is[4]. Egyébként BOLYAIval csaknem egyidőben W. R. HAMILTON[5], később pedig H. v. HELMHOLTZ[6] is az idő fogalmára alapította a valós változó ill. szám fogalmát[7]. De már H. DE WRONSKI szerint is az idő törvényei alkotják az aritmetika tárgyát[8].

Az aritmetika BOLYAI később megjelent könyvében, az *Aritmetika 1843*-ban is „időtan"-ként szerepel[9], de a *KG.*-ben az idő fogalma már csak egyszer fordul elő, és ott is laza összefüggésben a szöveggel[10]. Ebből úgy látszik, hogy közben feladta a *Tentamen*ben elfoglalt álláspontját. Nem ő az egyetlen, aki e téren idők folyamán változtatta fölfogását, ennek igazolására idézzük A. HEYTING[11] következő megállapítását: „Zuerst betrachtete BROUWER das Kontinuum als durch die Zeitintuition gegeben". Különben BOLYAI már a Tentamenben is több helyen[12] leszögezte, hogy „omnia dicta vero ad rectam applicari potest", vagyis okoskodásunk alapjául az idő helyett az egyenest is vehetjük.

Álljon még itt STÄCKEL megjegyzése és javaslata[13]: „Das Heranziehen der Zeit, (als Träger der stetig veränderlichen Grösse,)... bildet einen bemerkenswerten Übergang von der geometrischen zur rein aritmetischen Begründung des Begriffs einer stetig veränderlichen Grösse; eine eingehendere Untersuchung dieser Bestrebungen, die bis jetzt wenig beachtet worden sind, würde sich sicherlich lohnen.[14]"

IRODALOM ÉS JEGYZETEK I.-hez

[1] *T.*I. 27—28, 52, *T.*II. p. XII; *Aritmetika 1843*, 9—10. V. ö. VI-ban e redukálás értelmezését,

[2] *T.*I. 28; *T.*II. p. XI—XII.

[3] *T.*I. 6, máshol „loca primaria": *T.*II. p. XI.

[4] Az aritmetika fenti értelmezése, az idő s a tér végső (vagy első) helyek gyanánt való fölfogása emlékeztet ugyan KANTra, de azzal az eltéréssel hogy BOLYAI hangoztatja (*T.*I. 6,27) az absztrakció szerepét a tiszta idő és tér belső szemléletének létrejöttében, ezzel szemben *Kant*nál az apriorizmus dominál. Megemlítjük, hogy BOLYAI 1804-ben tartott székfoglaló beszédében (közli PERÉNYI JÓZSEF, Irodalomtört. Közl. 27, 1917, 83—88) az idő még nem szerepel az aritmetikával kapcsolatban.

[5] *Theory of conjugate functions...; with... essay on algebra as the science of pure times.* Transact. of the Royal Irish Academy 17, 1837, 299 etc., (read. Nov. 4, 1833.)

[6] *Schriften zur Erkenntnistheorie*, ed. P. Hertz und M. Schlick, 1921, 70, 98.
[7] Mindez Aristotelesre vezethető vissza, kinek mély matematikai meglátásairól részletesen tájékoztat A. Görland, *Aristoteles und die Mathematik*, 1899 c. könyve (VIII + 212).
[8] *Introduction à la philosophie des mathématiques*, Paris, 1811, 1—2.
[9] Pag. 10, 34.
[10] Pag. 141.
[11] *Mathematische Grundlagenforschung* etc. Ergebnisse der Math. und ihrer Grenzgebiete, III. Bd. 4. Heft, 1934, 19.
[12] *T.*I. 59, 60, továbbá 51, 52.
[13] *Stäckel* I, 33.
[14] E vizsgálatban O. Becker, *Mathematische Existenz* etc. 1927, c. könyve okvetlen figyelembe veendő.

II. „Systema scientiae"

Bolyai azt kívánja[1], hogy az *értelmezés* (definitio) lehető egyszerű legyen, ne tartalmazzon fölösleges részt, ugyanakkor azonban állapítsa meg az illető fogalom összes, őt kizárólag jellemző tulajdonságait. Az értelmezés révén adódó fogalomnak *nevet* adunk, ez lehet *szó*, vagy *jel*. Nem-azonos dolgoknak (lehetőség szerint) különböző szók (jelek) feleljenek meg. A fogalom realizálása némelykor bizonytalan vagy éppen lehetetlen[2], ezt később Bolzano[3] is hangoztatja és alkalmazza.

Axióma az önmagában evidens ítélet[4]. Bebizonyításban az axiómák (s így a fogalmak) valamely csoportjából szükségképp következik a bebizonyítandó ítélet. Ennek neve *tétel*.

Mármost Bolyai szerint[5] „a tudomány, vagy inkább a *tudomány rendszere* áttekinthető rendbe való foglalása:

1. szabatos *értelmezés*eknek, kezdve a legegyszerűbb fogalmakon, és a már definiáltak felhasználásával mind bonyolultabbakra térve át...

2. a legegyszerűbb olyan *axiómák*nak, melyek egyike sem következik a többiből;

3. az ezekből bebizonyított *tételek*nek.

Nem lehet azonban mindent értelmezni, nem lehet mindent bebizonyítani a végtelenig haladva visszafelé. Vannak dolgok, további indító ok, és értelmezésükre további világosabb szó nélkül. Mindezek összegyűjtése érdemes munka lenne." Másutt pedig ezt írja: „Minden szót szóval magyarázni nem lehet."[6]

Az előbbi idézetben több meglepő gondolatot találunk. Szerepel benne pl. az axiómák *egyszerűség*ének és egymástól való *függetlenség*ének — akkor még új[7] — követelménye. Ismeretes, hogy az első követelmény nem mindig valósítható meg.[8] Tartalmazza az idézet a *végnélküli regresszus* lehetetlenségének aristotelesi elvét is[9]. Érdekes az utolsó mondat: ,fölhívás 1832-ben (in petto talán már a jénai tartózkodás idejéből, 1796-ból[10]) *egyetemes* (azaz minden egyes tudományban végzendő[11]) *axiomatikus kutatásra.* És majdnem kilencven évvel később D. HILBERT mintegy hitvallásként írta[12]: „Ich glaube: Alles, was Gegenstand des wissenschaftlichen Denkens überhaupt sein kann, verfällt, sobald es zur Bildung einer Theorie reif ist, der axiomatischen Methode und damit mittelbar der Mathematik. Durch Vordringen zu immer tieferliegender Schichten von Axiomen im vorhin dargelegten Sinne gewinnen wir auch in das Wesen des wissenschaftlichen Denkens selbst immer tiefere Einblicke und werden uns der Einheit unseres Wissens immer mehr bewusst. In dem Zeichen der axiomatischen Methode erscheint die Mathematik berufen zu einer führenden Rolle in der Wissenschaft überhaupt."

IRODALOM ÉS JEGYZETEK II.-höz

1 *T* I. 7.

2 U. o. és *Aritmetika 1843,* 197.

3 *Wissenschaftlehre,* 1837 c. munkájában többször írja (I. §§. 19, 25, 48, 70) hogy némely bizonyításban szükségesek lehetetlen, „imaginárius" képzetek, továbbá hogy nem csak létező dolgokat ismerhetünk meg. Ezekre alapítja a „Wahrheit" és a „Satz an sich" fogalmait, amikkel a létezés és érvényesség: az elgondolhatóság és igazság szétválasztására törekszik.

4 A geometriában valamely állítás (itélet) mint axióma alkalmazható vagy fölfogható pl. hipotézis, posztulátum, definíció értelmében: ennek megfelelően interpretálható az „önmagában evidens" kifejezés.

5 *T.* I. 7: Scientia vel potius Systema scientiae. Mivel *scientia* első jelentése *tudás* (1. pl. FINÁLY—RÉGENI, *Latin-magyar iskolai szótár,* 1858), azért e hely STÄCKELtől (II, 29) eltérően így is fordítható: tudomány vagy inkább (bizonyos) tudás rendszere.

6 És így folytatja: „Mert légyenek *a, b,... g* szók: ha az *a* magyarázatába belé jő *b,* a' *b* magyarázatába már nem jöhet sem *a,* sem *b*; és így folyva, végre ha *g* az utolsó, mely az azelőtti *f* magyarázatába belé ment, ezen *g* magyarázatába sem *a,* sem *b,... g* nem mehet, tehát magyarázatlan marad. Ha pedig megint új szó támad, 's meg új, mind tovább, végnélkül folyva, soha se végződik bé." *Aritmetika 1843,* 197.

7 *Stäckel* I, 39. De *Aritmetika 1843,* 199 szerint célszerű mértéket tartani e függetlenségben!

8 vö. pl. DÁVID, *Bolyai-geometria az Appendix alapján,* 1944, 129.

9 L. pl. PAULER Á., *Logika,* 1925, 35, 168—169. Szerepel még ez az elv: *Aritmetika 1843,* 197, 202.

10 vö. DÁVID, *A két Bolyai élete és munkássága,* 1923, 11—12, 189. (20. jegyz.)

11 Ugyanis idézetünk a *Tentamen* valamennyi tudományt osztályozó részében áll.

12 Axiomatisches Denken, Math. Ann. 78, 1918, 415.

III. Az idő axiómáiról

Az aritmetika I.-ben említett értelmezésével együttjár, hogy BOLYAI — több helyen — megkísérelte összeállítani a szemléleti idő axiómáit[1]. Ezek szerint az idő *egyetlen* [= más fogalommal nem identifikálható], bármely pillanattól (időponttól) kezdve *két irányban végnélküli, folytonos*[2] mennyiség, és *e pillanat mindig mint más résznélküli*[3] *van jelen*. Továbbá ha az *a* pillanat előbb van, mint a *b*, ez pedig mint a *c* pillanat, akkor *a* előbbi *c*-nél[4]. Ma ez a *tranzitívitás* axiómája. Csak az *Aritmetika 1843*-ban olvassuk a következőt[5]: *bármely időpont előtt utolsó, utána első időpont nincs*[6].

Kiemeljük még a következő axiómáját: *bármely végesben lévő, ezutáni pillanat bekövetkezik, az összes soha*. Ennek folytatása és befejezése a következő figyelmeztetés: *igen gyakran igaz valami bármelyikről, de az összesről nem-igaz*[7]. Hogy szükséges lehet a *bármelyik* (bármely egyik) és az *összes* (minden egyik) megkülönböztetése, arra maga az axióma első része ad példát is. A *KG.* 173. lapján másik példát is találunk: *„Linien..., deren jeder Punct geometrisch construirt werden kann, alle aber nie"*.

A *bármelyik* és az *összes* fontos, alapvető megkülönböztetése szerepel 1908-ban B. RUSSELLnél — a nem-praedikatív fogalomalkotás tilalmának megvalósítására alkotott típuselméletben — de a prióritás BOLYAI FARKASt illeti[8].

IRODALOM ÉS JEGYZETEK III.-hoz

[1] *T.*I. 11—12, *T.*II. 2, *Aritmetika 1843*, 198.

[2] vö. a kontinuum értelmezését V-ben.

[3] A *Tentamen*ben (*T.*I. 24.) résznélküli (részetlen) = expers azaz ex-pars. V. ö. FINÁLY—RÉGENI II-ben id. m.

[4] Csak a früher és später axiomatikáját adja M. PASCH, *Grundlagen der Analysis*, 1908, 2—5.

[5] Pag. 198.

[6] Punkt reiht sich nicht an Punkt, és Punkt... der mit Punkten sich nicht zum Continuum zusammenreihe: ARISTOTELESből ford. GÖRLAND, id. m. 12, 96 és 27. — BOLYAI írja 1856-ban: Die Anzahl untheilbarer Punkte (sie mag so gross seyn wie man will) macht kein Continuum. (*Briefwechsel Gauss—Bolyai* 1899, 148: Levél Sartorius von Waltershausenhez.)

[7] Az egész idézet így szól: Tempus quodvis finitum, quod non fuit, adveniet, omne nunquam. Saepissime est, quod aliquid de quovis dici potest, de omni non. (*T.*I. 11, a II. axióma.)

[8] KÖNIG DÉNES, *Logikai ellentmondások*, 1910 c. értekezésében (Alexander Emlékkönyv különlenyomat) 10. írja: „Az összes és bármely (alle és jede, all és any) szavak szigorú megkülönböztetését követeli RUSSELL. E gondolat FREGEtől származik: *Grundgesetze der Arithmetik*, I, 1893, [24]." A FREGEre vonatkozó állítás téves: a szigorú megkülönböztetés Bolyainál már több mint hatvan évvel előbb megtörtént.

IV. Határfogalmak

A rendelkezésünkre álló adatok szerint BOLYAI FARKAS volt az első, aki határátmenetkor a félreérthető, sőt elvileg hibás $n = \infty$ jelölésben az egyenlőség jele helyett mást alkalmazott. Mai napság J. G. LEATHEM[1] (1905) nyomán a határátmenetet nyílvessző $\rightarrow$ jelével fejezzük ki. BOLYAInál más jelt találunk[2], de a lényegben, hogy a ∞ jelölés szerint sem valamivel egyenlő szám, legalább hetvenhét évvel megelőzte LEATHEMt.

A valós változó[3] konvergálását BOLYAI kissé nehézkesen fogalmazza (nincs még jel az abszolút értékre), de a lényeg megvan: tetszőlegesen megadva a pozitív z-t (másutt ω-t), bizonyos különbségek ennél kisebbek[4]. Azt a fölfogást vallja, hogy sorozat határértéke $\pm\infty$ is lehet, erről az esetről külön is szól[5]. Említésreméltó a megállapítása, hogy az aritmetika csak véges menynyiségekkel és a zérussal foglalkozik[6], de — mint később látni fogjuk — még az „infinitézimálisnak mondott" kalkulusban sincs szükség végtelenre[7]. Értelmezése szerint valamely V mennyiség véges, ha tetszőleges (nem-zérus) u darabjához tartozik akkora n természetes szám, hogy $nu > V$. Mai kifejezéssel: ha *mérhető* az EUDOXOS (ARCHIMEDES)-féle axióma értelmében[8]. Eszerint a zérus (az idő- és térpont, szemben az időközzel, ill. egyenesdarabbal) nem mennyiség; ezzel magyarázható előbbi különállása az aritmetikában.

A limes fogalmától elválasztva tárgyalja — külön elnevezés nélkül — a *felsőhatárt*. A *Tentamen*ben a supremum létezését axióma révén tételezi föl, később ehhez magyarázatot is fűz, de ez nem bizonyítása a felsőhatár exisztenciájának. A *KG.*-ben a supremum létezése ismét axióma[9]. A három különböző nyelvű, lényegében megegyező állítást így foglalhatjuk egybe:

Ha egy A állítás az a, b zárt időköz bármely pontjában igaz, de a későbbi c pontban már nem igaz, akkor van utolsó az a, c időköz azon p pontjai között, amelyekre áll, hogy az a, p időköz p előtti bármely pontjában igaz A.

1. ábra

E p pontban A vagy igaz (ekkor p az utolsó az ilyen pontok között), vagy nem-igaz (s ekkor p első az ilyen pontok között). A p pont *felsőhatár* az A állításra nézve.

Az analog *alsóhatárt* BOLYAI nem értelmezi.

Az I. §-ban említettük, hogy az időköz helyettesíthető egyenesdarabbal.

A felsőhatárt BOLYAI — többek között — a következő problémákra *alkalmazza*: az ívhossz értelmezése[10], korlátos, monoton változó konvergálása[11], közös síkban levő két egyenes (vagy kör és egyenes) forgással előálló párhuzamosságának (ill. érintésének) létezése[12], véges időköz (egyenesdarab) n-ed részének exisztenziája[13], a mérhetőség axiómája[14].

A felső- és az alsóhatár fogalmát közel egyidőben, de egymástól függetlenül többen is értelmezték[15]. GAUSS *Dissertatió*jának (1799) 6. részében már ismerősként alkalmaz felsőhatárt. Egy 1812. előtti kéziratában (mely csak 1912-ben jelent meg) két szélső határt távolság, azaz metrika nélkül vezet be, pusztán rendezésekre támaszkodva[16]. Néhány év mulva (1817) — mikor a *Tentamen* alapvető részei már elkészültek — B. BOLZANO közölt egy — BOLYAI előbbi axiómájával analóg — tételt „bizonyítással" együtt a felsőhatár létezéséről[17]. Ezek az eredmények azonban majdnem teljesen hatástalanok voltak az akkori matematikus világra, a supremum és az imfimum fogalma csak C. WEIERSTRASS 1860-tól tartott előadásai révén vált közkinccsé, és nyert polgárjogot az analízisben. Elogadhatjuk tehát KÖNIG GYULA és RÉTHY MÓR megállapítását[18]: „BOLYAI hoc fundamento limitis, quod cardinalis propositio est totius systematis, aetatem suam superans monumentum exegit nomini suo".

BOLYAI maga is látta axiómája jelentőségét: olyan alapnak tartotta „mely sok helyt talán edjedül szabadít"[19]. Nehezen, sőt átmeneti tévedés árán jutott el hozzá[20], de alkalmazásaival együtt legfényesebb önálló alkotása[21].

IRODALOM ÉS JEGYZETEK IV.-hez

1 F. CAJORI, *A history of mathematical notations*, II, 1929, 257. E kiváló mű közli *Bolyai* több sajátos jelölését is.

2 E jel a *Tentamen*ben ~, *T*, 3;35, az *Aritmetika 1843*-ban 33, 108,243 a kezdő fölfelé menő vonalka egyenes. Mindkettőnél, és a nyílvesszőnél is kényelmesebb a lefelé kezdő *L*, (FARKAS GYULA kolozsvári előadásaiban már 1900-tól.)

3 A változó (variabilis) jelentése *köz*(ös)*név* (ill. nomen generale) bizonyos mennyiség mérőszámaira. E szót ilyen értelemben először BOLYAI használja 1830-tól kezdve: KERESZTESI MÁRIA, *A magyar matematikai műnyelv története.* Közlemények a Decreceni Tud. Egyetem Mat. Szemináriumából, XI, 1935, 190.

4 „Maius et minus intelligitur hic + et ⊣ abstrahendo." (*T.*I. 35.) E két jel qualitást (pozitív, negatív) jelöl, nem műveletet. Később H. HANKEL (v. ö. VI.-beli művét) alkalmaz ilyen megkülönböztetést.

5 *T.*I. 35, 46; *Aritmetika 1843*, 33; *KG.* 140.

6 *T.*I. 34, 35, 46, ahol log *o* bár „quantitas impossibilis, sed hoc sensu fiet — ∞." Később (188.) már egyszerűen log $o = -\infty$ áll. V.ö. még *Aritmetika 1843*, 33, 34; *KG.* 140.

7 *T.*I. 35; *Aritmetika 1843*, 360.

8 A mérhetőség axiómáját l. még alább 14. jegyz.

9 *T.*I. 20: E; *Aritmetika 1843*, 202; *KG.* 141.

[10] *T.*II. 288, 292—296. Vö. STÄCKEL II, 272, ahol BOLYAI JÁNOS bírál régebbi ívhossz-értelmezéseket leszögezve, hogy mindeniknél szabatosabb a BOLYAI FARKASÉ.

[11] *T.*I. 55.

[12] *Aritmtika 1843,* 203. Az *Appendix*ben (1. §.) BOLYAI JÁNOS alkalmaz hallgatólagosan ilyen forgást, föltételezve, hogy létrejön a párhuzamos egyenest jellemző határhelyzet. Apjának előbbi axiómájával megalapozható a szemléletes eljárás. Célhoz vezet *Dedekind*-féle szeletalkotás is. Vö. DÁVID II. 8. jegyz. id. m. 37—38.

[13] *T.*I. 55 ($n=2$), 58—60. E tétel független az V. posztulátumtól, ezért érdekelhette BOLYAI FARKAST. Vö. DÁVID, id. m. 31.

[14] *T.*I. 57—58. *Aritmetika 1843,* 33. Ezt az axiómát 50 évvel később bebizonyította a DEDEKIND-félével O. STOLZ, Math. Ann, 22, 1883, 504.

[15] BOLYAI FARKAS mondta fiának: „bizonyos dolgoknak mintegy megvan a maguk korszaka, a mikor különböző helyeken egy időben fedeztetnek fel." Vö. DÁVID II. 10. jegyz. id. m. 94, 187 (3. jegyz.).

[16] *Werke X,* 1, 390—395. Vö. L. SCHLESINGER, *Über Gauss' Arbeiten zur Funktionentheorie, Gauss' Werke X,* 2; Abh. 2, 1933, 49—50. Összefügg ez azzal, hogy GAUSS fontosnak tartotta (és fölhívta BOLYAI figyelmét is 1832-ben: *Briefwechsel* 1899, 110 = *Werke VIII,* 1900, 222) a „zwischen", tehát a közbetartozás, az elrendezés axiomatikájának megalkotását.

[17] *Rein analytischer Beweis...,* 1817 = *Ostwalds Klassiker* 153, 1905, 25—29. E „bizonyítás" nem teljes, mivel akkor még hiányzott az irracionális szám aritmetikai értelmezése. Korrekt bizonyítás a HEINE—BOREL-tétellel: O. VEBLEN, Bull. Amer. Math. Soc. (2), X, 1904, 437.

[18] *T.*I. 618.

[19] *Aritmetika 1843,* 344.

[20] *T.*I. 618.

[21] Érdemes lenne a BOLYAI-axióma kapcsolatát az ismert folytonossági és fedési tételekkel, axiómákkal (vö. BOLZANO, STOLZ, VEBLEN említett, és mások idevágó eredményeit is) megvizsgálni, és egybefűzni az V-beli BOLYAI-féle részelmélettel és kontinuum-értelmezéssel.

V. Részelmélet és kontinuum

BOLYAI FARKAS rendszerében alapvetően szerepel az *egész* (totum) és a *rész* (pars) fogalma[1], valamint több ezekre vonatkozó tétel. STÄCKEL 1913-ban azt írta[2], hogy a *Tentamen* idevágó helyei a sokaságelméletbe (halmazelméletbe) tartoznak, és néhány eredményt — átfogalmazva a pontsokaságok modern terminológiájára — iparkodott közérthetőbbé tenni. Pontsokaságokra „egyszerűség kedvéért" szorítkozott, bár BOLYAI tételei az ő véleménye szerint is „eine weitergehende Bedeutung besitzen". Így azonban STÄCKEL magyarázatában elsikkad a tény, hogy BOLYAI korát messze megelőzően lefektette — ha vázlatosan is — egy új, rendkívül általános elmélet, a *részelmélet* (Teiltheorie) első alapjait. Sőt ennél is továbbment, mert eredményeit *sikeresen alkalmazta a lineáris kontinuumnál általánosabb kontinuumok értelmezésére,* és mindez független a sokaságelmélettől. A *Tentamen* megjelenése után csak száz évvel, 1932-től kezdve adta ki E. FORADORI (BOLYAI említése nélkül) a részelmélet terén végzett tartalmas és rendszeres vizsgálatait[3]. Elméletének inkább csak alapgondolatait tartalmazó kis, de tömör könyve — mint mondja — „soll Einblick in eine sich vollziehende Entwicklung bieten"[4].

Az egész és része közötti reláció mind BOLYAI, mind FORADORI elméletében *reflexív* és *tranzitív*. E két követelmény, mint axióma, néhány további fogalommal kiegészítve, elég alap a részelmélet fölépítésére[5]. Mindkét axióma teljesül az egész és része olyan példáinál, aminőket pl. a sokaság (multitudo), a csoport, a számelmélet, a geometria nyujt. FORADORI geometriai szubsztrátumoknál marad[6], BOLYAI messzemenő általánosságra törekszik, és így fogalmazza mondanivalóit. Egy dolognak része — BOLYAI szerint — bármely tulajdonsága is, mint p. a fehér falnak a fehérség[7].

BOLYAI elméletére különösen jellemző az *elválhatatlan* rész (pars indivellibilis) és az *alkotó* rész (portio) fogalma[8]. Az elsőre példa az egyenesdarab, sík- vagy térrész bármely pontja; a másodikra mind *a*, mind *b*, ha valamely egész belőlük tevődik össze, akár közös rész nélküli az *a* és *b*, akár van közös részük, de ez elválhatatlan rész. Elsősorban az elválhatatlan rész fogalmát kellene precízirozni. BOLYAI ezt kétféleképp próbálja meg, de nem mutatja ki a kétféle értelmezés tartalmának azonosságát. Vázlatos tárgyalásában nem látjuk mindig elkülönítve az elképzelhetőt a logikailag létezőtől. Pl. a körlap belseje létező, de csak kerületével együtt képzelhető el.

Az alkotó rész fogalmával értelmezi BOLYAI a kontinuumot[9]: *oly T egész, hogy bármely alkotó része is a p, van közös része p-nek és a T—p maradékrésznek.* STÄCKEL föltételezi a „zártság"-ot az egészről és zárttá teszi a maradékrészt. Ámde BOLYAI nem szorítkozik pontsokaságokra, az ő *totum*ja sokkal általánosabb, vagy olyasféle valami is lehet, ahol esetleg nincs értelmezve a zártság[10].

Végül álljon itt A. FRAENKEL jellemzése a kontinuum intuicionista felfogásáról: Nicht mehr das Verhältnis von *Menge* und *unteilbaren Element* ist entscheidend für das Kontinuum, sondern das Verhältnis von *Ganzem* und *Teil*; es soll geradezu Grundeigenschaft des Kontinuums sein, Teile zu haben, die sich unbegrenzt weiter teilen lassen."[11]

Érdemes tehát BOLYAI részelméletével foglalkozni, gondosan kidolgozott — FORADORI speciálisabb tárgyalásait is magában foglaló — elméletté bővíteni, továbbá tisztázni metodikai és tárgyi relációit a sokaságelmélettel.

IRODALOM ÉS JEGYZETEK V.-höz

1 Az idevágó helyek: *T.*I. 22—24; *T.*II. 2—3; *Aritmetika 1843,* 1, 2; *KG.* 153—154. — *Leibniz* matematikai kategoriái között is szerepel a totum és pars.

2 *Stäckel* I. 36—37.

[3] Monatshefte für Math. und Phys., 39—41, 1932—34. E három értekezésből: *Grundgedanken der Teiltheorie*, Leipzig 1937, II + 79. Előszavában írja FORADORI: Dieses Buch fasst nur die Grundgedanken der Teiltheorie zusammen.
[4] Id. könyv előszavában.
[5] BOLYAI csak a tranzitívitás axiómáját említi (*T.* I. 23), bár kétségtelenül gondol a reflexívitásra is. Utóbbi talán azért nem szerepel nála explicite, mivel a résznélküli pontra (*T.* I. 24, § 3.) alkalmazva ellenmondásos: pontnak része önmaga. És ellentmond EUKLIDESnek: pont az, aminek nincs része. (BAUMGARTNER ALAJOS fordítása, 1905.)
[6] *T.* I. 22, §. 2.
[7] *Foradori*nál többféle „Schachtelung" is szerepel.
[8] Az 1-ső jegyzet helyein.
[9] *T.* I. 24, §. 4; *T.* II. 2—3; *Aritmetika 1843*, 2; *KG.* 153, §. 37.
[10] Így merőben téves STÄCKEL (I. 37.) föltevése, hogy BOLYAI éppen a G. CANTOR-féle kontinuumot akarta értelmezni. Pl. a „Gebiet" is nyílt és összefüggő pontsokaság szintén a kontinuum egy fajtája. Hogy BOLYAI más és helyes irányban volt úttörő, mutatják FORADORI elmélete, s FRAENKEL szövegbeli és alábbi jellemzése.
[11] *Einleitung in die Mengenlehre*, 1928, 3. kiadás, 158. Az idézet folytatása: „Im Einklang mit der Preisgabe des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten bleibt so selbst für die Disjunktion, dass zwei Punkte entweder zusammenfallen oder getrennt liegen, kein Raum mehr; vielmehr trägt die Auffassung des *Werdens* einem endlosen Zusammenrücken von Punkten bis zur allmächlichen Ununterscheidbarkeit Rechnung. Der Zeitbegriff scheint hier in wesenhafter Weise einzugehen".

VI. Aritmetika

Az aritmetika fogalmának (vö. I.) velejárója, hogy BOLYAI értelmezi a mennyiséget, és ennek az „idő formájára" történő redukálását.

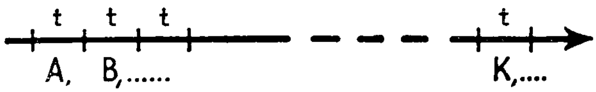
A mennyiségnek, a „rész és egyenlőség leányának"[1] értelmezése már KANTnál is a rész és egész fogalmával kapcsolatos. BOLYAI — az előbbi allegoria kifejtése során — lényegében azt mondja, amit később H. G. GRASSMANN egyszerűen így fejezett ki[2]: mennyiség bármelyik eleme valamely sokaságnak, ha ennek bármelyik elemével — bizonyos megállapodás szerint — vagy egyenlő, vagy nem-egyenlő[3]. B. BOLZANO egy hátrahagyott művében[4] szintén az $=$ és a $\neq$ egymást kizáró relációira, továbbá a rész fogalmára alapítja a mennyiség értelmezését. GAUSS pedig — a KANTnál is meglevő osztályozáshoz csatlakozva — kijelentette[5], hogy az extenzív mennyiséget egynemű részek alkotják, s vele foglalkozik a matematika, az intenzív mennyiség pedig extenzívre redukálandó e tudomány számára.

Az „idő formájára" történő — már NEWTONnál szereplő — redukálás BOLYAInál kölcsönösen egyértelmű megfelelés létesítése a redukálandó mennyiség és bizonyos időtartamok között[6]. De napjainkban már nem kielégítő fejtegetésének az a része, amelyben egyre általánosabb valós számokra tér át a megmért (megszámlált) időtartamokról (egyenesdarabokról). Elmondhatjuk róla is, amit GAUSSról írt SCHLESINGER[7]: „... dass er bei dem Begriff der reellen Zahl oder Grösse keine weiteren Schwierigkeiten empfunden haben dürfte, wie z. B. daraus hervorgeht, dass er im Art. 16 der Dissertation mit einer gewissen schlichten Selbstverständlichkeit sagt: „wir nehmen, um alle Strecken durch Zahlen ausdrücken zu können, eine willkürliche Strecke[8] als Einheit an, und dass er in einer Handschrift (Werke X, 1. S. 391.) eine veränderliche reelle Grösse, durch alle Zwischengrössen hindurch stetig abnehmen" oder zunehmen lässt. Er stand ebben in bezug auf den Begriff der reellen, insbesondere der irrationalen Zahl ganz auf dem Standpunkt seiner Zeitgenossen..."

A komplex szám tárgyalásakor leszögezi BOLYAI[9] a permanencia elvét: „Des Cartes... a pályát új eredmények elérésére megnyitotta. Avégett, hogy a műveletek az általánosság vitorlája alatt folytathatók legyenek, s amennyire lehetséges ne vesszen el az általánosság". Ezt az irányelvet harmincöt év mulva H. HANKEL[10] szintén allegorikusan fogalmazza meg: „itt lép elő a formák permanencia elve, midőn fölszólít minket az új összekapcsolások olyan értelmezésére, hogy ugyanazon formális föltételeket elégítsék ki, mint az eredetileg adott objektumok". Eszerint HANKEL nevet is adott az elvnek, BOLYAI pedig gondosan fogalmazott, kifejezve „amennyire lehetséges"[11] közbevetéssel, hogy határa is lehet az analogia megtartásának. HANKEL megvédte prioritását M. OHMmal (1822) és G. PEACOCKkal (1830) szemben, kiknek fölfogása e tárgyban téves ill. szűk. Nem tud a későbbi G. H. BUBENDEYről (1834), kinél szintén szerepel az elv[12]. Ismeri a *Tentament*[13], meglátja benne BOLYAI JÁNOS *Appendix*ét, de nem szól BOLYAI FARKAS kétségtelen prioritásáról abban is, hogy voltaképp *megállapodás* az analogia minél teljesebb megtartásának a követelése.

Aritmetikai alapvetésében szerepel a következő általános indukciós elv: *dolgok véges vagy végnélküli $A, B, \ldots, K, \ldots$ sorozatában minden tagnak tulajdonsága az x, ha tulajdonsága A-nak, és abból, hogy tulajdonsága valamely tagnak, ugyanez következik az utánajövő tagra is.*

Speciális eset, ha a természetes számok sorozata szerepel. Ekkor „dicitur haec concludendi methodus de n ad $(n+1)$, saepissime usitata". Mind az általános, mind a speciális esetben érvényes a következő szillogizmus-lánc: az A-nak (ill. 1-nek) tulajdonsága az x, tulajdonsága tehát a B-nek (ill. 2-nek) is, tehát tulajdonsága x a C-nek (ill. 3-nak) is, és így tovább. Ha véges a sorozat, akkor *minden* tagjának tulajdonsága az x. Végnélküli sorozat esetében ez a szillogizmus-lánc is végnélküli: az x tulajdonsága *bármelyik* megadott tagnak, de ezzel nincs elintézve *minden* tag. Láttuk a III. fejezetben, hogy BOLYAI leszögezte és példákkal is megvilágította, hogy ami bármelyikről igaz, nem okvetlen igaz mindenikről. Tehát csak magyarázatnak (interpretációnak), és nem bizonyításnak (demonstrációnak) kell tekintenünk a következő megjegyzését: az $A, B, \ldots, K, \ldots$ tagokat hozzárendeljük gondolatban az egymásután sorakozó, tetszőlegesen fölvett, egymással egyenlő véges t időközökhöz. Mivel bármelyik időköz bekövetkezik, azért — mondja BOLYAI — ezzel együtt bekövetkezik a hozzárendelt tag az x tulajdonsággal együtt.



2. ábra

Ekként az „idő formájára redukálja" (vö. I. fejezet) BOLYAI az előbbi szillogizmus-láncot, de nem köthette az egyes szillogizmusok érvényességét az egymásra következő időközök eljöveteléhez. El kellett azonban fogadnia — több-kevesebb tudatossággal — az ezutáni t időközök összességét, az ezutáni totális időt gondolkodásunk logikailag érvényes tárgyául. Ezt teszi POINCARÈ is[16], így írva a matematikai indukcióról: C'est qu'il n'est que l'affirmation de la puissance de l'esprit qui se sait capable de concevoir la répétition indéfini d'un même acte... L'esprit a de cette puissance une intuition directe... L'induction mathématique n'est que l'affirmation d'une propriété de l'esprit lui-même.

Az előbb egymással egyenlő t időközökhöz rendelt egymásutáni tetszőleges $A, B, \ldots, K, \ldots$ tagokat (l. az ábrát) specializáljuk így: valamely tétel (pl. az előbbi x tulajdonság) fönnállása a megfelelő t időközben. Ekkor a lineáris kontinuumra szóló, A. KHINCSIN által közölt[17] (1923) indukciós elv analogonja (BOLYAI fölfogásának jobban megfelelően) időközökre fogalmazva, a következő lehetne: valamely tétel minden időközben áll, ha áll az elsőben, és ha áll valamely időközt megęlőző minden időközben, akkor van nála későbbi időköz, amelyről ugyanez mondható, (vagyis hogy áll a tétel minden megelőző időközben.) A KHINCSIN által közölt elv logikailag ekvivalens a DEDEKIND-féle folytonossági axiómával: bármelyik következik a másikból. Hiányzik azonban még az ennek megfelelő vizsgálat: miféle folytonossági axióma lép a DEDEKIND-féle helyébe mint ekvivalense az előbbi, időközökre (egyenesdarabokra) szóló indukciós elvnek?[18]

IRODALOM ÉS JEGYZETEK VI.-hoz

1 *T.* I. 25—26; *Aritmetika 1843,* 2, 6.

2 *Lehrbuch der Arithmetik,* 1861, 1, 6. Ezt az értelmezést többen átvették, pl. O. STOLZ, *Vorlesungen über allgemeine Arithmetik I,* 1885, 1—2.

3 E megállapodás BOLYAInál többfelé ágazik, s így adódnak nála a különböző egyenlőségek különböző jelekkel. *T.I.* 25—27, 124; *KG*, 135—136.

4 *Paradoxien des Unendlichen*, 1851, 4.

5 SARTORIUS VON WALTERSHAUSEN, *Gauss zum Gedächtnis*, 1856, 98.

6 *T.I.* 27: *Aritmetika 1843*, 2—3, 9—10. E redukálást már NEWTON is alkalmazza *Methodus fluxionum et serierum infinitarum* c. művében. Erről jól tájékoztat O. BECKER, *Grundlagen der Mathematik in geschichtlicher Entwicklung*, 1954, 148.

7 A IV.-ben id. m. 48—49.

8 Tegyük hozzá ezen idézethez, hogy NEWTON, *Arithmetica universalis*, 1707 kezdőszavai szerint az absztrakt szám két egynemű mennyiség viszonya, egység az osztó. És BOLYAI a *KG*.-t NEWTON e művéből vett idézettel kezdi, hogy visszautasítsa a korabeli aritmetikák mesterkedéseit. Kijelenti: „alles was sie [die Mathematik] behandelt, soll reell anschaulich seyn" (Uo. 122.)

9 *T.I.* 121—122.

10 *Theorie der complexen Zahlensysteme* etc. 1867. 26, 11.

11 A 9-ik jegyzetben id. helyen: in quantum fieri potest.

12 Programme des Hamburger Johanneums, 1834. E három (OHM, PEACOCK, BUBENDEY) szerző munkáit nem volt alkalmam olvasni. De a két első színvonala (HANKEL előbbi jellemzése szerint), a harmadik pedig évszáma folytán nem veszélyezteti BOLYAI prioritását.

13 Id. m. 66.

14 *T.I.* 21:F.

15 *Aritmetika 1843*, 1: „Az elme az elibe terjesztetteket szemlélve: el-von, öszvetesz, hasonlít's rendel".

16 *La science et l'hypothése*, 1902, 23—24.

17 *Das Stetigkeitsaxiom des Linearcontinnuums als Induktionsprinzip betrachtet* Fundam. Math. IV. 1923, 164—166. Vö. még O. PERRON: *Die vollständige Induction im Kontinuum.* Jahresber. d. Deutshen Math. Ver. 35, 1926. 194—203.

18 Ez a folytonossági axióma talán beleilleszkedne a kifejtendő BOLYAI-féle részelmélet geometrikumába. Vö. FORADORI V.-ben id. könyve 20—24, 76—77.

VII. **Analízis**

A függvény BOLYAInál[1] elsősorban a XVIII. század képlethez kötött, ún. EULER-féle fölfogásában (1748) szerepel. Van azonban a *Tentamen*ben egy olyan mondat is[2], mely szerint általános értelemben (sensu lato) függvény *bármely* művelet, amely időben vagy térben fölfogható. A ma használatos függvényfogalom, mely nem kívánja meg a függvényi kapcsolat képlettel történő előállíthatóságát — mint ismeretes — S. F. LA CROIX-tól (1810) és P. G. DIRICHLET-től (1837) származik. BOLYAI második értelmezése mindenesetre van annyira általános, hogy átmenetnek tekinthetjük EULERtől DIRICHLET felé.

Újszerű BOLYAI-nál, hogy az infinitézimális számításban mellőzni kívánja mind a végtelen kicsit, mind a végtelen nagyot. Elgondolásának nagy fontosságot tulajdonít, és az infinitézimális mennyiségek helyett véges különbségekkel dolgozik[3]. Figyelemreméltó az is, hogy nem választja külön a differenciál- és az integrálszámítást, hanem a két részben párhuzamosan haladva, egyszerre fejti ki elméletüket. Tárgyalása még az akkori időkhöz viszonyítva is nehézkes[4]. Mindezt — célunkat tekintve — nem részletezzük másféle, valóban értékes alkotásai mellett; utalunk SZÉNÁSSY BARNA idevágó értekezésére[5].

Lényegesen mélyebb BOLYAI munkássága a végtelen műveletsorozatok elméletében, éspedig a *sorok* tanában s az *iterációszámításban*. Az elsőben legfontosabb, hogy BOLYAI szabatosan bebizonyította az *I. fajú A. de Morgan*-féle logaritmikus kritériumskálát. A *Tentamen* megfelelő része szószerinti fordításban a következő:

Aszerint amint konvergál, vagy divergál az a sor, melynek általános tagja $\frac{1}{n^a}$, ugyanazon a esetén konvergál, vagy divergál az a sor is, melynek általános tagja $\frac{1}{n \cdot l^a}$, vagy $\frac{1}{n \cdot l \cdot l_1^a}$, vagy általában $\frac{1}{n \cdot l \cdot l_1 \ldots l_t^a}$, ahol $l = \log n$; $l_1 = \log l$ és $l_t = \log l_{t-1}$, továbbá l_t egynél nem kisebb. ($T._{\text{I.}}$ 585.)

Ezt a kritériumskálát N. H. ABEL már 1827-ben ismerte, de sohasem közölte, A. DE MORGAN pedig csak 1839-ben tette közzé. Így BOLYAI prioritása kétségtelen[6].

Iterációval oldja meg BOLYAI az

$$x^2 + ax - b = 0$$

egyenletet[7]. Ebből

$$x = \frac{b}{a+x}, \quad \text{és} \quad x = \sqrt{b - ax}$$

Mindkét kifejezést úgy iterálja, hogy a jobboldalon x helyébe beírja magát e jobboldalt, és ezt az eljárást végnélkül ismétli. Az elsőből adódó végtelen lánctört konvergencia-vizsgálata a *Tentamen*ben hosszadalmas; eredménye a mai fejlett lánctörtelmélettel egyszerűbben nyerhető. A másodikból adódó iteráció minden egyes lépéskor — a négyzetgyök miatt — kétfelé ágazik. Megvizsgálandó lenne valamennyi ág konvergenciája, a határértékek számossága, algebrai jelentésük, továbbá összefüggésük az első kifejezésből nyert egyértékű lánctörttel. BOLYAI a második kifejezést az $x = \sqrt{c + x}$ speciális esetben tárgyalja; ez kényelmesebb, viszont ebből az általános eset egyszerű transzformációval adódik.

Megtaláljuk a *Tentamen*ben a másodfokúnál általánosabb — már J. DE CONDORCETnál (1777) is szereplő[8] —

$$x_m - x - c = 0 \qquad (m > 1, \text{ egész})$$

trinom egyenlet

$$x=\sqrt[m]{c+\sqrt[m]{c+\ldots \text{ in inf.}}}$$

iterációs megoldását is[9]. BOLYAI idevágó eredményét R. BALTZER idézi kitűnő, a Bolyaiakat nagy nyilvánosság előtt először említő könyvében (1868)[10]: ha $c>0$, akkor a trinom egyenlet legnagyobb valós gyöke 1 és $1+c$ között van, s az előbbi iteráció ehhez a gyökhöz konvergál, ha mindig a pozitív m-edik gyököt választjuk. Később E. NETTO[11] (1887) és C. ISENKRAHE[12] (1888) is tanulmányozta a trinom egyenlet, sőt továbbmenőleg az *általános* algebrai egyenlet iteratív megoldását. Idetartoznak még FARKAS GYULA[13] (1881) és VERESS PÁL[14] (1943) vizsgálatai az előbbi „Bolyai-féle algoritmus"-ra vonatkozóan.

Röviden tárgyalja BOLYAI[15] az

$$x^m=cx \qquad (m>1, \text{ egész})$$

egyenletből nyerhető

$$x=\sqrt[m]{c\cdot\sqrt[m]{c\cdot\ldots \text{ in inf.}}}$$

iterációt is. Ennek az eljárásnak minden lehető gyök-kombinációt számontartó, általános (komplex c-re szóló) elmélete — úgy látszik — még nem ismeretes. Megfelelő általános probléma várja megoldását az utolsó előtti, hasonló, de additív kifejezéssel kapcsolatban is.

IRODALOM ÉS JEGYZETEK VII.-hez

1 *T.*I. 204; *T.*II, XVI; *KG.* 139; *Aritmetika 1843,* 214. Itt functio = közkép. E szót először BOLYAI használta, l. KERESZTESI IV.-ben id. m. 104.

2 *T.*II. 204. Vö. VI. 15. jegyz., hol elménk matematikai alapműveletei között áll a [hozzá] rendelés.

3 Vö. alább SZÉNÁSSYnál az idevágó helyeket, és *Aritmetika 1843,* 360.

4 Érdekes, hogy előadásaiban, legalább is egyideig (Levél GAUSShoz 1816, ápr. 10), G. VEGA ismert munkáját (vö. STÄCKEL I. 210) használta s ebből tanult JÁNOS is.

5 *Bolyai Farkas infinitézimális gondolatai.* Közlemények a debreceni tud. egyetem mat. szemináriumából, XIII, 1937, 17—22.

6 A sorok tanára vonatkozóan is utalunk SZÉNÁSSY előbbi értekezésére: 23—28.

7 *T.*I. 442, 447—448.

8 S. PINCKERLE említi: *Équations et opérations fonctionnelles.* Encycl. des sciences math. II, 1912, 62.

9 *T.*I. 448—449.

10 *Die Elemente der Mathematik,* I, 3. Aufl. 1868, 247.

11 Math. Ann. 29, 141.

12 Math. Ann. 31, 309.

13 Értekezések a Math. Tudományok köréből, VIII.

14 Mennyiségtani és Természettud. Didaktikai Lapok 1943.

15 *T.*I. 449.

VIII. Geometria

BOLYAI FARKAS gondolatvilágát a geometriában főként három probléma alkotta: az V. posztulátum kérdése; a geometria fölépítése merev testek mozgására; a terület elmélete.

Az első problémával kapcsolatban eleinte bizonyítást keresett EUKLIDES „foltjára", majd ezt minél „egyszerűbb" axiómával akarta helyettesíteni, végül szenvedéllyel gyűjtötte a (ma inkább V. posztulátumnak nevezett) XI. axiómával *ekvivalens* tételeket. Ilyen ekvivalens alaptételek megállapítása ma már elavult probléma mind a geometriai rendszer, mind a didaktikai alkalmazás nézőpontjából. De a *Tentamen* megalkotásának évtizedeiben még olyanok is foglalkoztak ezzel az ekvivalenciával, mint CARNOT, LEGENDRE, GAUSS, LAPLACE, LOBACSEVSZKIJ és más kiváló matematikusok. BOLYAI FARKAS szintén sok éven át vesződött vele, de egyre tudatosabban, hogy fáradozása fölösleges. Már 1820-ban erőteljes és színes szavakkal óvta JÁNOSt a problémától[1], mégis a *Tentamen*ben nyolc, a *KG.*-ben egy ilyen ekvivalens alaptételt közölt[2], jóllehet az *Appendix* révén már tudta, hogy az euklidesi rendszerben az V. posztulátum csak egyszerűsítő hatású: fölöslegessé tesz egy — némelykor elég bonyolult határátmenetet. Éppen ezért helyettesítése elvileg szükségtelen[3]. Azonban a $8+1=9$ helyettesítő alaptétel közlésével meg akart kímélni másokat az övéhez hasonló évtizedes fáradozástól.

BOLYAI FARKAS helyettesítő axiómái között van több rendkívül elvont, van megtévesztően „szemléletes", van igen „egyszerű". Nem túlzás, amit róluk 1820-ban írt JÁNOSnak[4]: „...sokkal jobbakat tsináltam, mint addig mások." Magyarázatukat illetően utalunk STÄCKELre[5], és főleg CSADA IMRE monográfiájára[6]. Az egyik helyettesítő axiómát — J. FRISCHAUF[7] szerint is a „legszemléletesebb"-et — KÜRSCHÁK JÓZSEF így fogalmazta[8]: bármely három különböző pont közül kiválasztható kettő, amelyeken a harmadikat belsejében tartalmazó gömb megy át. Itt nem kell két esetet megkülönböztetnünk, mint a legrövidebb fogalmazásban: bármely három pont körön vagy egyenesen van.

Megkísérelte BOLYAI FARKAS a geometria fölépítését merev testek mozgására[9]. Ekkor a geometria az első és legtökéletesebb természettudomány lenne, fizikai, speciálisan mechanikai tudomány (H. v. HELMHOLTZ[10], 1868). E próbálkozásban BOLYAI a merev test 0, 1, ill. 2 fix pontja szerint három egyszerű mozgást különböztet meg[11]. Az egy fix pont esete szolgáltatja a gömbfelületet. Két fix pont esetében a merev test bármely harmadik pontja vagy önmagába visszatérő egyszerű (többszörös pont nélküli) görbét ír le, vagy mozdulatlan: így adódik a gyűrű (térbeli kör), ill. az egyenes (a mozdulatlan harmadik pontok összessége). Végül két, fix-középpontból lehetséges összes egyenlő sugarú gömbfelület-párok metszései a síkot szolgáltatják.

E származtatásokkal BOLYAI FARKAS megelőzte HELMHOLTZot, és megelőzte néhány geometriai axiómájával is. Erre a tényre először SUTÁK JÓZSEF mutatott rá[13]. De nem jutott el BOLYAI a metrikus továbbhaladáshoz szükséges azon színvonalra, amelyről a nagy fizikus — a tér pontjait rendezett számhármasnak fogva föl, és megfelelő axiómák segítségével — elérkezett az állandó görbületű tér fogalmához. Ismeretes, hogy HELMHOLTZ vizsgálatait S. LIE[14] infinitézimális csoportelméleti módszerrel szabatosabbá tette.

Bár ezek a további idevágó vizsgálatok mélyen behatoltak a geometria rendszereibe, de BOLYAI eredeti elgondolása, hogy az egész geometriát bizonyos mozgásokra, és két alapfogalomra (pont, gömbfelület) építse fel, máig sincs elemi úton kifogástalanul megvalósítva[15]. Ezért a geometria eredményes axiómatizálói mindannyian három alapelemből — pont, egyenes, sík —, továbbá az egybevágóságra vonatkozó axiómákból indulnak ki.

Megértően írja STÄCKEL[16] BOLYAI ezirányú vizsgálatairól: „Seine Auseinandersetzungen sind nicht nur recht verwickelt, sondern auch vielfach unklar und unstreng. Es wäre jedoch unbillig, an einen Mathematiker, der die ersten, tastenden Versuche auf dem schwierigen Gebiete der Axiomatik machte, die Anforderungen zu stellen, die wir heute zu stellen gewöhnt sind".

Ezt STÄCKEL csaknem fél évszázada írta. Azóta még inkább megszoktuk a végső elemekig mindent szétszedő és fölmutató tárgyalásokat. Az objektív bírálathoz tehát ma még szükségesebb kellő történeti szemlélet. Ez azonban BOLYAInál csak a tárgyalásra, kifejtésre vonatkozik, a különböző terekről vallott fölfogása időtálló[17]: „Más határba tartoznak azon esméretek [szemben a fizikai ismeretekkel] a mellyek valamely fel-tettekből [hipotézisekből] az itélet [a szillogizmus] törvényei szerint tökélletesen [logikusan] folynak, mint [ahogy] a spatium *megadatik* a Geometriának a nélkül hogy kérdezné, *van-é* [olyan tér a valóságban]...." Ezt írta BOLYAI FARKAS már 1804-ben — BOLYAI JÁNOS és B. RIEMANN eredményei előtt évtizedekkel — amikor EUKLIDES nyomasztó tekintélye miatt a fizikai és a geometriai tér unicitása még minden áron megmentendő dogma volt.

*

Sokszor tárgyalt és nevével kapcsolatban legismertebb fogalmai és tételei az említett harmadik problémához, a terület elméletéhez fűződnek, s az elemi geometria újabb bővítései között előkelő helyen állanak[18].

EUKLIDES a sokszögek területét csak páronként összehasonlítja, de nem méri egységgel: az alak mellett nem érvényesül nála a mérőszám. Összehasonlít, mikor egybevágósággal bebizonyítja, hogy párhuzamosak között közös (egybevágó) alapon nyugvó két paralelogramma egyenlő területű, azaz vagy páronként egybevágó háromszögekből állanak, vagy ez bekövetkezik közös kiegészítő háromszög révén.

Ez a két eset szolgált BOLYAInak irányítóul a következő két általánosításban. Értsünk *síkrészen* a függvényelméletben szereplő folytonos, zárt, önmetszés és önérintés nélküli görbével határolt, egyszeresen összefüggő, zárt tartományt. Ilyen síkrész legyen az alábbiak minden *sokszöge*. Mármost BOLYAI *végesen* (végszerűen) egyenlőnek mond két síkrészt, ha fölosztthatók véges számú, páronként — kölcsönös egyértelműséggel — megfelelő egybevágó síkrészekre. D. HILBERT[19] (1899) ekkor *fölosztás* szerinti egyenlőséget mond. BOLYAI másik általánosítása HILBERTnél a *kiegészítés* szerinti egyenlőség (BOLYAInál nincs külön neve). Ez a következő: a két síkrész kiegészíthető két, egymással fölosztás szerint egyenlő síkrész révén fölosztás szerint egyenlő síkrészekké.

RÉTHY MÓR[20] (1890-től kezdve) BOLYAI következő tételeit vizsgálta meg:

a) két egyenlő területű, egyenesvonalú sokszög (speciális síkrész) mindig egyenlő fölosztás szerint is;

b) két egybevágó egymást részben fedő síkrész nem-közös részei fölosztás szerint egyenlők;

c) két egybevágó síkrészből páronként egybevágó síkrészeket elvéve, a maradékok fölosztás szerint egyenlők.

Az *a)*-t BOLYAI szigorúan bebizonyította, de a *b)* bizonyítását méltán kifogásolta RÉTHY. A már BOLYAI által észrevett nehézségen — hogy bizonyos egymásutáni szerkesztések sorozata esetleg végtelen — RÉTHY a síkrészek határaira tett megszorításokkal segitett. Majd számbavéve H. DOBRINER[21] és E. KÖTTER[22] kritikáit: a *b)* alatti tétel, és ebből már a BOLYAI által bebizonyított *c)* is igaznak bizonyult.

Újabban VARGA TAMÁS[23] (1954) egyszerűsítette az *a)* BOLYAI-féle bebizonyítását két következtetés sorrendjét fölcserélve. (Ugyanő előbbrevitte az *a)* és BOLYAI megismerését tankönyvirodalmunkban, továbbá összegyűjtötte az orosz irodalom idevágó helyeit). Legújabban SZÁSZ PÁL[24] (1956) egyszerűsítette BOLYAI ama tételének bizonyítását, mely szerint az egyenesvonalú sokszög fölosztás szerint egyenlő megadott alapú téglalappal. Figyelemreméltó SZÁSZ bizonyításában, hogy nincs szüksége egyenesdarabok mérésére, és a HILBERT-féle szakasz-kalkulusra.

BOLYAI főeredménye az, hogy *kiegészítés szerint egyenlő egyenesvonalú sokszögek fölosztás szerint is egyenlők.* Vele majdnem egyidőben P. GERWIEN[25] (1833) is eljutott e szép eredményhez, amit HILBERT elmélyített azzal, hogy a tétel bebizonyításához szükséges a mérhetőség EUDOXOS (ARCHIMEDES)-féle axiómája.

A síkrészek (sokszögek) BOLYAI—GERWIEN-féle összehasonlítását továbbfejlesztették egyes axiómák mellőzhetősége nézőpontjából is M. DEHN (1905), A. FINZEL (1912) és mások[26]. Mindezt már nem részletezzük.

Megemlítjük, még, hogy gondolt BOLYAI a kétféle egyenlőség térbeli analogonjaira is, de eredményt nem ért el. Fiát, JÁNOSt is ösztönözte efféle vizsgálatokra, de ő sem ért célt. Tudjuk, hogy GAUSS is hiába fáradt e téren, csak jóval később R. BRICARD, G. SFORZA és főleg M. DEHN (1896—1900) vizsgálatai kezdték meg a helyzet tisztázását. Egyik ismert főeredmény: *infinitézimálisan egyenlő térfogatú gúlák nem okvetlen egyenlők végszerűen is* (az ellentétre itt igen találó a BOLYAI elnevezése); tehát a határérték fogalma a térben, a soklapok térfogatánál — eltérően a sokszögek területétől — már nem nélkülözhető[27].

De azért nem mondható, hogy e vizsgálatok véget értek. Kívánatosak további kutatások annak teljes tisztázásához, hogy síkról térbe menve ki — talán más terület, ill. térfogat egyenlőségeket is értelmezve (G. HESSENBERG, 1930) — hol és mennyiben jelentkezik, vagy marad el analógia. Gondolunk e további kutatásoknál GEŐCZE ZOÁRD mélyenjáró — szemlélettel már nem, vagy csak alig követhető kvadratura és kubatura — vizsgálatainak a bekapcsolására is.

IRODALOM ÉS JEGYZETEK VIII.-hoz

1 DÁVID II. 10. jegyz. id. m. 84—85.

2 *T.*II. 45—56. *KG.* 151, 152. Vö. STÄCKEL I. 77—79.

3 DÁVID II. 8. jegyz. id. m. 66, 159, továbbá 4, 58, 132, 143.

4 STÄCKEL I. 75, 224—225.

5 STÄCKEL I. 47—50, 75, 78; II. 97—109. E második kötet fordításukat is adja.

6 *Az V. posztulátum Bolyai Farkas-féle ekvivalensei.* Közlemények a debreceni tud egyetem mat. szemináriumából, III. füz. 1929.

7 *Absolute Geometrie nach Johann Bolyai,* 1872, 91, és *Elemente der absoluten Geometrie,* 1876, 32.

8 STÄCKEL I. 226.

9 NEWTON írja a *Principia* bevezetésében: Fundatur igitur Geometria in praxi Mechanica, et nihil aliud est quam Mechanicae universalis.

10 *Über die tathsächlichen Grundlagen der Geometrie,* 1868 és *Über die Tathsachen, die der Geometrie zugrunde liegen,* 1868. Hasznos jegyzetek mindkettőhöz: P. HERTZ—M. SCHLICK: *Hermann v. Helmholtz Schriften zur Erkenntnistheorie,* 1921. c. kiadásukban.

11 *T.*II. p. XII. etc. Fordításban: STÄCKEL II. 48—109.

12 A sík e származtatását említik BOLYAIra hivatkozva: FRISCHAUF eml. 2-ik m. 8, 81—90; R. BONOLA, *Die nichteuklidische Geometrie,* 1908, 58; M. ZACHARIAS, *Elementare Geometrie* etc. 1930, 16. A gondolat megvan LEIBNIZnál: *Opuscules et fragments inédits* (ed. L. COUTURAT, 1903, 554—555), de e cím szerint BOLYAI nem tudhatott erről.

13 STÄCKEL I. 219; SUTÁK, *A tér absolut igaz tudománya,* 1897, XIV—XVI.

14 *Theorie der Transformationsgruppen,* III. 1873, 437—523.

15 Vö. pl. M. PIERI, *La geometria elementare istituita sulle nozioni di punto e sfera* Memorie di matem. e fis. della Soc. Italiana d. Scienze (3), 15, 1908, 345, és ennek kritikáját: W. KILLING, *Einführung in die Grundlagen der Geametrie,* II, 1908, Abschn. 7. BOLYAI

JÁNOS megkísérelte apja szóbanforgó vállalkozását, de gömbfelület helyett az említett gyűrűt véve a pont mellé alapul. *(Raum-Lehre oder Geometrie:* STÄCKEL II, 237—267, 274.) Nem jutott teljes eredményhez. Ezen nem változtatott lényegesen SPRINGER (Sályi) ISTVÁN több részletre vonatkozó éles elméjű kiegészítő munkája sem: *Bolyai János geometriai axiomatikájának kiegészítése.* Közlemények a debreceni Tud. Egyetem Mat. Szemináriumából. I. füz. 1927.

16 STÄCKEL I, 40.

17 Lásd PERÉNYI I. 4. jegyz. eml. közlését.

18 *T.* I. 64—67, 287 etc. §. 35, XIX.

19 *Grundlagen der Geometrie,* 7. Aufl. 1930, 70, 72, 152.

20 Math. Ann. 38;42, 45.

21 Math. Ann. 42[bis.]

22 Jahrb. ü. die Fortschr. d. Math. 23, 1891: 532—534.

23 Mat. Lapok V, 101—114.

24 Mat. Lapok VII. 230—236.

25 Journ. f. d. reine u. angew. Math. 10.

26 Idevágó irodalom: ZACHARIAS eml. műve. melyben BOLYAI FARKAS többször szerepel.

27 ZACHARIAS eml. műve, és cikke: Encykl. III.

Függelék: Didaktika

A matematika oktatásának történetét egybevetve a BOLYAI FARKAS munkáiban, följegyzéseiben, leveleiben szétszórtan olvasható didaktikai elvekkel, világosan kitűnik, hogy *ő volt időrendben az első, kinél a matematika tanításának a XIX. század utolsó negyedében megindult nagyszabású nemzetközi reformmozgalma révén kialakult négy főelv:*

a térszemlélet állandó fejlesztése, felhasználása,
a függvényfogalom vezérszerepe,
valódi alkalmazások bőséges tárgyalása,
elméleti értékek fokozatos érvényesítése

már együttesen és csorbítatlanul megvan[1]. Úgyhogy BOLYAI a modern matematikai oktatásnak is előhírnöke, éspedig nemcsak egyes reformgondolatokkal, hanem a főelvek *totalitásával*[2]. Ezt nem részletezzük: utalunk az alábbi irodalomra. De magának a történeti ténynek leszögezése szorosan hozzátartozik az előbbiekben tárgyalt matematikai gondolatokhoz, mert itt nemcsak érdemes prioritásról van szó, hanem BOLYAI gazdag, sokoldalú, színes egyéniségének a matematikával összefüggő, csak újabban meglátott vonásáról is. És e didaktikai totalitás megvalósítása olyan széleskörű gyakorlati probléma, amelyre szilárdan fölépíthető matematikai oktatásunk.

IRODALOM ÉS JEGYZETEK A FÜGGELÉKHEZ

[1] DÁVID L.: *Bolyai Farkas és a matematikai oktatás reformja.* Magyar Paedagogia, XXX. 1921, 148—156. BOLYAI tanári működéséről szól: DÁVID L.: *A két Bolyai* stb. VIII. 1-ső jegyz. id. m. 32—35, 37—39, 41, 44, 53—58, 66, 68, 73—74, 128—130, 146, 149—150.

[2] BUJDOSÓ ERNŐ: *A matematika didaktikája Bolyai Farkasnál.* Közlemények a debreceni Tud. Egyetem Matematikai Szemináriumából, VIII. füz. 1934. Gondosan részletezi a szövegbeli prioritás történeti alapjait és a négy főelvet, egyetemes didaktikai elvekre is kiterjeszkedik. Megállapítja — segítségül véve TÓTH GÉZA: *A matematikai oktatás Herbart pedagógiájában,* 1926. c. alapos monográfiáját is — hogy BOLYAIt az említett reformmozgalom centrális kérdéseinek teljességét tekintve még J. FR. HERBART (1776—1841), a matematika igazi pedagogiai értékének első megállapítója is csak részben előzte meg.

Zárószó

Crescunt disciplinae lente tardeque;
per varios errores sero perveniter ad veritatem.
C. G. J. Jacobi.

Végiglapoztuk a *Tentamen* tekintélyes köteteit, valamint az *Aritmetika 1843* és a *Kurzer Grundriss 1851* már fáradtan írott lapjait. Igazat adunk BOLYAI JÁNOSnak, hogy apját mindig újítás vágya gyötörte fölfogás, szó, jelölés, fogalmak, tételek dolgában, de életében nem ért el nagyobb körben sikert, bár sok új és jeles ötlete volt.

E. BOREL azt írja[1] a matematikai — különösen a folyóirat — irodalom szertelen növekedésével kapcsolatban, hogyha egy új fogalom vagy tétel megjelenése után nem jut be hamarosan a matematikai köztudatba, akkor elsülylyed az irodalom tengerében. Innen már csak szerencsés véletlen hozza napfényre. Így történhetett, hogy sok szép és fontos eredményt többen is fölfedeztek egymásután, függetlenül egymástól. És ha talán megnyugszunk is az első fölfedező névtelenségében[2], de túl az egyén sérelmén, sajnáljuk a másodszor föl nem fedezett, tengerbe süllyedt kincseket, veszteségeit a matematikus világnak.

STÄCKEL és mások kezdése után BUJDOSÓ, CSADA, SÁLYI, SZÉNÁSSY monográfiái és jelen tanulmány bizonyítják, hogy érdemes volt BOLYAI FARKAS alig ismert, vagy éppen ismeretlen gondolatai után kutatni. Bevezetésünk elején ideillő műszóval exhaustionak neveztük az efféle kutatást. Kötelességünk folytatni ezt addig, mig a maradék zérusnak vehető, azután pedig tartsuk napirenden a fölmerült, és a fölmerülő problémákat. Ránk vár a kiegészítés, a megjavítás munkája is: nyugtalan lángelméje gyakran csak vázolt, és némelykor tévedett. Őmaga is emberi dolognak, merőben el nem kerülhetőnek mondotta a tévedéseket: „soha nem lessz a’szegény emberi nemnek semmije tökéletes tiszta" írta JÁNOSnak 1820-ban[3]. Sötétlátása még túlzottabb volt, mikor *(Aritmetika 1843,* 363.) ezt írta:

„a' thékák is ezer évek erratájival akkorák."

Ámde, ha a „tévedés" fogalmát kellően bővítjük, általánosítjuk vagy mélyítjük, hozzászámítva pl. fejlesztendő axióma-rendszert, kevésbé szigorú bizonyítást, valószínű tételt, még gyökértelen általánosítást, ellenőrzéstől elriasztó számítás-rengeteget: akkor az efféle *tökéletlenségek* valóban állandóan szerepelnek a thékákban. Jönnek-mennek, kicserélődnek. És ez jól van így, mert létezésük erős ösztönzés, hasznos biztosíték a matematika fejlesztésére.

Előbbi tanulmányunk BOLYAI FARKAS pozitív eredményei mellett több ilyen fejlődőképes tökéletlenségre, tévedésre mutatott rá. Hisszük, hogy kellő kiegészítések és javítások után előbb-utóbb ezek is érvényesülnek a matematika fejlődésében.

IRODALOM ÉS JEGYZETEK A ZÁRÓSZÓHOZ

1 Méthodes et problèmes. Théorie des fonctions. 1922, VI.

2 *Aritmetika 1843* VII és IV. lapján áll: „vagy ér valamit, vagy nem; ha van becse, nem a név adja, ha nincs, mire a név?... Mindennek mi átmegy a földön, nyoma van... S mire [való] az Oceánban tudni, [hogy] ez [vagy] amaz csepp melyik völgyről jött?"

3 „O, dass dem Menschen nichts Vollkommnes wird" (GOETHE, Faust, I. 1808: Wald und Höhle.)

FÜGGVÉNYEGYENLETEK ÉS ALGEBRAI MÓDSZEREK A GEOMETRIAI OBJEKTUMOK ELMÉLETÉBEN, II.*

Írta: HOSSZÚ MIKLÓS

II. FEJEZET

DIFFERENCIÁLIS GEOMETRIAI OBJEKTUMOK

1. §. Általános megjegyzések az *ab* paraméter műveletről

1. Tekintsük az n-dimenziós Euklidesi térben a

$$P_i = \alpha^i(Q), \quad \alpha(0) = 0; \quad i = 1, 2, \ldots, n;$$
$$Q = (Q_1, Q_2, \ldots, Q_n)$$

transzformációt. Legyen

$$a^i_{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_j} = \partial_{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_j} \alpha^i(0) = \left. \frac{\partial^j \alpha^i}{\partial Q_{\lambda_1} \ldots \partial Q_{\lambda_j}} \right| Q = 0; \qquad i, \lambda_\gamma = 1, 2, \ldots, n$$

akkor a $P = \alpha(Q)$ függvény *Taylor*-sora a $Q = 0$ pont környezetében:

$$\alpha^i(Q) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!} \sum_{\lambda_\nu = 1}^{n} a^i_{\lambda_1 \lambda_2, \ldots \lambda_j} Q_{\lambda_1} \ldots Q_{\lambda_j}, \qquad \nu = 1, 2, \ldots, j.$$

A 0 pont környezetében *Taylor*-sorba fejthető, és a 0 pontot változatlanul hagyó $\alpha(Q)$, $\beta(Q)$, ... transzformációk egymásutáni alkalmazása asszociatív, ugyanis az $\alpha\{\beta[\gamma(Q)]\}$ transzformáció ismétlés eredménye független a sorrendtől. Ezért az

$$a = (a^i_{\lambda_1}, a^i_{\lambda_1 \lambda_2}, \ldots), \qquad i, \lambda_\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

elemek $\mathcal{F}_n$ halmaza egységelemes félcsoport, melyben a $c = ab$ műveletet a

$$\gamma(Q) = \alpha[\beta(Q)], \quad \begin{cases} a = (\partial_{\lambda_1} \alpha^i(0), \ldots), \\ b = (\partial_{\lambda_1} \beta^i(0), \ldots), \\ c = (\partial_{\lambda_1} \gamma^i(0), \ldots), \end{cases} \qquad (i, \lambda_\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

pl. speciálisan $n = 1$ esetén az

$$ab = (a, b_1, a_1 b_2 + a_2 b_1^2, a_1 b_3 + a_3 b_1^3 + 3 a_2 b_1 b_2, \ldots)$$

* A dolgozat I. része a MTA III. Osztályának Közleményei IX/2. számában jelent meg (1959. 149—162. old.).

képlet értelmezi. Az egységelem az $\varepsilon(Q)=Q$ identikus transzformáció deriváltjaiból tevődik össze:

$$e=(\delta^i_j, 0, \ldots), \quad \delta^i_j=\begin{cases} 1, & \text{ha } i=j, \\ 0, & \text{ha } i\neq j. \end{cases}$$

Miként a bevezetésben és az I. fejezet 1. §-ban láttuk, a differenciális geometriai objektumok felsorolása az

$$(1) \qquad (xa)\,b=x\,(ab); \quad x\in X_k; \; a, b\in \mathfrak{F}_n$$

egyenlet megoldásával egyenértékű. Minthogy a reguláris leképezések invertálhatók, ezért a $\det(a^i_{\lambda_1})=0$ feltételt kielégítő elemek $\mathcal{G}_n$ halmaza csoport. Az I. fejezetben egy $\mathcal{G}$ csoporton (1) megoldását visszavezettük $\mathcal{G}$ szerkezetének vizsgálatára; ha ismerjük a megoldást a $\mathcal{G}_n\subset\mathfrak{F}_n$ csoporton, akkor azt kiterjeszthetjük az egész $\mathfrak{F}_n$-re, érvényben tartva (1)-et.

Korlátozzuk tehát figyelmünket csupán $\mathcal{G}_n$-en xa meghatározására. Sőt $\mathcal{G}_n$ helyett is vehetünk egy szűkebb $\mathcal{G}_n^+\subset\mathcal{G}_n$ csoportot, a $\det(a^i_{\lambda_1})>0$ feltételt kielégítő elemek halmazát. Ez célszerű, mert $\det(a^i_{\lambda_1})\neq 0$ miatt $\mathcal{G}_n$ nem egyszeresen összefüggő, $\mathcal{G}_n^+$ azonban már az, és $\mathcal{G}_n$ nyilván felbontható a $\mathcal{G}_n^+$ szerinti

$$\mathcal{G}_n=\mathcal{G}_n^+,\, c\mathcal{G}_n^+, \qquad (\det c<0)$$

maradékosztályokra. Ily módon a $\mathcal{G}_n^+$ csoporton ismerve xa-t, tetszőleges $a\in c\mathcal{G}_n^+$ esetén is megkapjuk az

$$xa=x\,(ca_+)=(xc)\,a_+=(\varphi x)\,a_+$$

megoldást, ahol φx az x-nek tetszőleges

$$\varphi(\varphi x)=x\,(cc), \quad xa=(\varphi x)\,a_+=\varphi(xa_+), \quad a=ca_+=a_+c$$

tulajdonságú függvénye, pl. involutórikus a $cc=e$ választással.

2. Már a bevezetésben is láttuk, hogy nem kell figyelembe venni $a(Q)$ összes deriváltjait, csupán $m+1$-nél alacsonyabb rendű deriváltokra szorítkozva értelmezhetők az m-ed osztályú geometriai objektumok. Ekkor a $\mathcal{G}_n$ csoport $a=(a^i_{\lambda_1}, \ldots)$ elemeire az

$$a\to a'=(a^i_{\lambda_1}, \ldots, a^i_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m})$$

homomorfizmust alkalmazva, a $\mathcal{G}_n^m$ képet nyerjük.

$\mathcal{G}_n^m$-nel együtt $\mathcal{G}_n^\mu$ is nyilván homomorf képe $\mathcal{G}_n$-nek, következőleg $\mathcal{G}_n^m\,(m>\mu)$-nek is. A. NIJENHUIS [5] egyébként meghatározta $\mathcal{G}_n$ összes homomorf képeit.

Az n dimenziószámon, m osztályszámon kívül harmadik fontos adat az X_k (euklidesi tér) dimenziója: k, amit az $x\in X_k$ objektum komponensszámának nevezünk. Csak valódi komponensszámokkal foglalkozunk, azaz X_k-ról feltételezzük, hogy nem fajul k-nál kisebb dimenziós hiperfelületté, s az egyszerűség kedvéért feltesszük azt is, hogy kitölti a teljes k-dimenziós euklidesi teret. Egyébként ugyanis alkalmas operátor-izomorfizmus segítségével X_k-t (folytonosan) le lehetne képezni ilyen térre.

$\mathcal{G}_n^m$ *p-paraméteres* vagy *p-tagú* részcsoportjának nevezzük $\mathcal{S}^p$-t, ha p-dimenziós hiperfelületet alkot $\mathcal{G}_n^m$-ben, azaz bármely $s \in \mathcal{S}^p$ előállítható az $u=(u_1, \ldots, u_p)$ paraméter folytonos (és egyszeresen összefüggő $\mathcal{S}^p$ esetén invertálható) $s=s(u)$ függvényeként úgy, hogy

$$s(u)\, s(v) \in \mathcal{S}^p, \quad \text{ha} \quad s(u), s(v) \in \mathcal{S}^p,$$

azaz

$$s(u)\, s(v) = s(w),$$

ahol w csupán u és v függvénye: $w = w(u, v)$.

2. §. $\mathcal{G}_1^3$ alcsoportjainak meghatározása

1. A $\mathcal{G}_1^3$ egyparaméteres, egyszeresen összefüggő folytonos részcsoportjainak meghatározása céljából tekintsünk egy ilyen alcsoportot, mely nyilván topologikusan izomorf [11] a valós számok additiv csoportjával, azaz elemei előállíthatók egy valós u paraméter folytonos és invertálható $s(u)$ függvényeként úgy, hogy

$$s(u)\, s(v) = s(u+v),$$

majd részletesen:

$$s_1(u)\, s_1(v) = s_1(u+v),$$
$$s_1(u)\, s_2(v) + s_2(u)\, s_1(v)^2 = s_1(u+v),$$
$$s_1(u)\, s_3(v) + s_3(u)\, s_1(v^3) + 3 s_2(u)\, s_1(v)\, s_2(v) = s_3(u+v)$$

teljesül. Az első egyenlet legáltalánosabb folytonos megoldása

$$s_1(u) = e^{c_1 u},$$

ahol c_1 tetszőleges állandó. A másik két egyenletből szimmetria okok miatt

$$s_2 = c_2(s_1 - s_1^2),$$
$$s_3 = c_3(s_1 - s_1^3) + c_4 s_2 (c_5 + s_1),$$

hacsak $s_1(u) \not\equiv 1$, azaz $c_1 \neq 0$, míg

$$s_2(u) + s_2(v) = s_2(u+v),$$
$$s_3(u) + s_3(v) + 3 s_2(u)\, s_2(v) = s_3(u+v),$$

ha $s_1(u) \equiv 1$, azaz $c_1 = 0$.

Ez utóbbi egyenletek közül az első legáltalánosabb folytonos megoldása

$$s_2(u) = k_2 u,$$

míg a második az

$$s_3(u) = \frac{3}{2} k_2^2 u^2 + \varphi(u)$$

helyettesítéssel a *Cauchy*-féle függvényegyenletre vezethető vissza, tehát

$$s_3(u) = \frac{3}{2} k_2^2 u^2 + k_3 u,$$

ahol azonban k_3 helyett új állandót véve

$$s_3 = \frac{3}{2} s_2^2 + k_3 s_2.$$

A c_i együtthatók között visszahelyettesítés után a

$$c_4 = -3c_2; \quad c_5 = 0, \quad \text{vagy} \quad c_2 = 0$$

összefüggéseket kapjuk.

Összefoglalva, a következő alakú egyparaméteres részcsoportokat nyertük:

$$\begin{bmatrix} s_1 \\ c_2(s_1 - s_1^2) \\ c_3(s_1 - s_1^3) - 3c_2^2 s_1(s_1 - s_1^2) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ s_2 \\ {}^3/_2\, s_2^2 + k_3 s_3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ s_3 \end{bmatrix}.$$

Megfigyelhetjük, hogy ezek között vannak egyező típusúak, (konjugáltak) ugyanis

$$\begin{bmatrix} 1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ c_2(s_1 - s_1^2) \\ c_3(s_1 - s_1^3) - 3c_2^2 s_1(s_1 - s_1^2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix},$$

tehát a különböző típusú egytagú részcsoportok:

$$\mathfrak{S}_1^1 : \begin{bmatrix} s_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathfrak{S}_2^1 : \begin{bmatrix} 1 \\ s_2 \\ {}^3/_2\, s_2^2 + k_3 s_2 \end{bmatrix}, \quad \mathfrak{S}_3^1 : \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ s_3 \end{bmatrix}.$$

Az eredményt a következő tételbe foglaljuk:

7. tétel. *A $\mathfrak{G}_1^3$ csoport összes különböző típusú egytagú, egyszeresen összefüggő, folytonos alcsoportjai az előbb felsorolt $\mathfrak{S}_i^1$*-k.

2. Térjünk rá $\mathfrak{G}_1^3$ kéttagú alcsoportjainak a meghatározására. Az $\mathfrak{S}_i^1 \mathfrak{S}_j^1$ szorzatokból a következő különböző típusú kéttagú alcsoportok nyerhetők:

$$\mathfrak{S}_1^2 : \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ {}^3/_2\; s_2^2/s_1 \end{bmatrix}, \quad \mathfrak{S}_2^2 : \begin{bmatrix} s_1 \\ 0 \\ s_3 \end{bmatrix}, \quad \mathfrak{S}_3^2 : \begin{bmatrix} 1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix},$$

Egyszerű számolással meggyőződhetünk arról, hogy pl.

$$\mathfrak{S}_2^2 = \mathfrak{S}_1^1\,\mathfrak{S}_3^1 = \mathfrak{S}_3^1\,\mathfrak{S}_1^1,$$

továbbá, hogy a szorzatok nem szolgáltatnak egyéb típusú kéttagú alcsoportot, mert pl. az

$$\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ {}^3/_2\, s_2^2/s_1 + k_3\,(s_1 - s_1^2) \end{bmatrix}$$

alakú elemek alcsoportja $\mathfrak{S}_1^2$-gyel egyező típusú, alkalmas automorfizmus

$$s \leftrightarrow k s k^{-1}, \quad k = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ k_3 \end{bmatrix}.$$

Kimutatható a következő:

8. tétel. *A $\mathcal{G}_1^3$ csoportnak nincs az előbb felsorolt $\mathfrak{S}_i^2$-ktől különböző típusú egyszeresen összefüggő, folytonosan differenciálható kéttagú alcsoportja.*

A bizonyítás főbb lépései a következők: Azt kell igazolni, hogy a mondott tulajdonságú alcsoportok mindig előállíthatók hasonló tulajdonságú egytagúak szorzataként. Tekintsünk egy kéttagú alcsoportot:

$$\mathfrak{S}^2 : \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix}, \qquad s_i = s_i\,(u_1, u_2)\,;$$

ennek az $\mathfrak{S}_i^2$-vel való közös részét az

$$\begin{aligned} s_3 &= {}^3/_2 \cdot s_2^2/s_1, && \text{illetve} \\ s_2 &= 0, && \text{illetve} \\ s_1 &= 1 \end{aligned}$$

feltételt kielégítő elemek alkotják, melyek maguk is (valódi vagy nem valódi) alcsoportjai $\mathfrak{S}^2$-nek, tehát $\mathcal{G}_1^3$-nak is. Ugyanis az ilyen feltételt kielégítő elemek szorzata is ugyanilyen. Az $\mathfrak{S}^2 \cap \mathfrak{S}_i^2$ közös rész geometriailag két felület metszésvonala, illetve érintkező része, mely folytonosan differenciálható csoportműveletről lévén szó, nem zsugorodhat az egységelemre, vagyis legalább egytagú. Ha az $\mathfrak{S}^2 \cap \mathfrak{S}_i^2$ alcsoportok között nincs kéttagú, akkor van köztük legalább két különböző egytagú, ugyanis

$$\bigcap_{i=1}^{3} \mathfrak{S}_i^2 = e\,;$$

ha viszont az $\mathfrak{S}^2 \cap \mathfrak{S}_i^2$ közös rész kéttagú, akkor ez csak $\mathfrak{S}_i^2$ maga lehet, minthogy $\mathfrak{S}_i^2$-nek nincs valódi kéttagú alcsoportja. Tehát $\mathfrak{S}^2$ mindkét esetben tartalmaz legalább két különböző egytagú alcsoportot.

Minthogy végül $\mathfrak{S}^2$ szabad paramétereinek száma kettőnél több nem is lehet, két különböző egytagú alcsoport szorzata ki is meríti az egyszeresen összefüggő $\mathfrak{S}^2$-t, vagyis a 8. tétel bizonyítva van.

Megjegyezzük, hogy a *Lie*-elméletből ismeretes, hogy minden kéttagú *Lie*-csoport egytagúak szorzata, de leszögezzük, hogy itt nem volt szükség a *Lie*-elmélet apparátusára, és csupán elsőrendű folytonos differenciálhatóságot tételeztünk fel. Sőt, remélhető még a használt feltételek enyhítése is, pl. ACZÉL JÁNOS és KOVÁCS LÁSZLÓ minden egyéb feltétel nélkül meg tudták határozni az

$$\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ F(s_1, s_2) \end{bmatrix}$$

alakú kéttagú alcsoportokat.[1] Felvethető hasonló kérdés az

$$\begin{bmatrix} s_1 \\ G(s_1, s_3) \\ s_3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} H(s_2, s_3) \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix}$$

alakúaknál is; éppen erre a jelenleg még nyílt problémára való tekintettel nem részletezem a 8. tétel bizonyítását.

3. Válasszuk ki $\mathfrak{G}_1^3$-nak a talált alcsoportok szerinti felbontásából a

$$H_i: \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha_2/\alpha_1 \\ \alpha_3/\alpha_1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ 0 \\ \alpha_3 - {}^3/_2\, \alpha_2^2/\alpha_1 - k_3\, \alpha_1\, \alpha_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \alpha_3/\alpha_1 - {}^3/_2\, \alpha_2^2/\alpha_1^2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha_2/\alpha_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \bar{\alpha}$$

maradékrendszereket. Egyszerű számolással meggyőződhetünk, hogy pl.

$$\bar{\alpha} = s\alpha = \begin{bmatrix} s_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1\, \alpha_1 \\ s_1\, \alpha_2 \\ s_1\, \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha_2/\alpha_1 \\ \alpha_3/\alpha_1 \end{bmatrix}, \ldots$$

tehát az

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} \to \bar{\alpha}$$

leképezésekkel a következő egy- és két komponensű geometriai objektum

[1] Más kiinduló pontból jut el ugyanezen probléma megoldásához a 3. § 1.

transzformációkat nyertük:

$$\xi \circ a = \bar{\xi} \circ a = \overline{\xi a} = \begin{bmatrix} 1 \\ \xi_2 a_1 + a_2/a_1 \\ \xi_3 a_1^2 + a_3/a_1 + 3\xi_2 a_2 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \xi_1 a_1 \\ 0 \\ \xi_3 a_1^3 + \xi_1 (a_3 - {}^3/_2 a_2^2/a_1 - k_3 \xi_1 a_1 a_2) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \xi_1 a_1 \\ \xi_1 a_2 + \xi_2 a_1^2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \xi_3 a_1^2 + a_3/a_1 - {}^3/_2 a_2^2/a_1^2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ \xi_2 a_1 + a_2/a_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \xi_1 a_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

ahol k_3 tetszőleges állandó.

Ha felírjuk a három komponensű

$$\xi \circ a = \begin{bmatrix} \xi_1 a_1 \\ \xi_1 a_2 + \xi_2 a_1^2 \\ \xi_1 a_3 + \xi_3 a_1^3 + 3\xi_2 a_1 a_2 \end{bmatrix}$$

geometriai objektum transzformációs törvényt, akkor az 1. tétel szerint ebből az előbbiek operátor-homomorfizmus segítségével származtathatók. A megfelelő leképezések rendre

$$\xi = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} \to \bar{\xi} = \begin{bmatrix} 1 \\ \xi_2/\xi_1 \\ \xi_3/\xi_1 \end{bmatrix}, \ldots .$$

Megjegyezzük még, hogy a

$$\mathbf{c}(a) = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ a_2 & a_1^2 & 0 \\ a_3 & 3a_1 a_2 & a_1^3 \end{bmatrix}$$

mátrix felhasználásával az eredmény rövidebben így írható:

$$\xi \circ a = \mathbf{c}(a) \cdot \xi,$$

vagy az irodalomban megszokottabb [1] transzformáció alak:

$$a \circ \xi = \mathbf{c}(a)^{-1} \cdot \xi = \begin{bmatrix} 1/a_1 & 0 & 0 \\ -a_2/a_1^3 & 1/a_1^2 & 0 \\ 3a_2^2/a_1^5 - a_2/a_1^4 & & 1/a_1^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \xi_1/a_1 \\ \xi_2/a_1^2 - \xi_1 a_2/a_1^3 \\ \xi_3/a_1^3 - 3\xi_2 a_2/a_1^4 + \xi_1 (3a_2/a_1^5 - a_3/a_1^4) \end{bmatrix}.$$

Itt ξ helyett inkább szokták az

$$\eta=\begin{bmatrix}\xi_1\\ \xi_2/\xi_1\\ \xi_3/\xi_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\eta_1\\ \eta_2\\ \eta_3\end{bmatrix}$$

változót használni, mellyel

$$a\circ\eta=\begin{bmatrix}\eta_1/a_1\\ \eta_2/a_1-a_2/a_1^2\\ \eta_3/a_1^2-3\eta_2 a_2/a_1^3+a_2^2/a_1^4-a_3/a_1^3\end{bmatrix}.$$

Ebből az

$$\eta\to\bar\eta=\begin{bmatrix}1\\ \eta_2\\ \eta_3\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}\eta_1\\ 0\\ (\eta_3-{}^3/_2\,\eta_2^2-k_3\eta_1\eta_2)\eta_1\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}\eta_1\\ \eta_2\\ 0\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}1\\ 0\\ \eta_3-{}^3/_2\,\eta_2\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}1\\ \eta_2\\ 0\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}\eta_1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

operátor-homomorfizmussal származtathatók az ismert 1—2-komponensű, $m=3$ osztályú, $n=1$ dimenziós speciális geometriai objektum transzformációs törvények.

3. §. A $\mathcal{G}_1^3$ bizonyos komplexusain invertálható xa

Az I. fejezetben említettük, hogy előre megválasztott halmazon feltételezve az

$$x=x_\tau\xi\longleftrightarrow x'=\xi\ (\in\mathcal{H})$$

leképezés létezését, minden egyéb folytonossági, differenciálhatósági, sőt csoport tulajdonság feltétel nélkül kapjuk az xa transzformációk legáltalánosabb alakját. Mint a 3. tételben láttuk, akkor a

$$\pi[(\pi a)b]=\pi(ab),\quad \pi\xi=\xi;\quad a,b\in\mathcal{G}_1^3;\quad \xi\in\mathcal{H}\tag{3}$$

egyenlet megoldása szolgáltatja xa-t. Csupán egy-egy példán mutatjuk be (3) megoldását, megjegyezve azonban, hogy e módszer általánosabb esetekben is teljesen hasonló módon alkalmazható. Tekintsük a $\mathcal{G}_1^3$ csoportot, s azon a

$$\mathcal{H}_1:\begin{bmatrix}1\\ 0\\ a_3\end{bmatrix},\quad \mathcal{H}_2:\begin{bmatrix}1\\ a_2\\ a_2\end{bmatrix},\quad \mathcal{H}_3:\begin{bmatrix}a_1\\ a_2\\ 0\end{bmatrix},\quad \mathcal{H}_4:\begin{bmatrix}a_1\\ 0\\ a_3\end{bmatrix}$$

komplexusokat. Vizsgáljuk külön-külön ezeken (3) megoldását.

1. A $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$ komplexus $\mathcal{G}_1^3$-nak normálosztója, tehát (3) megoldása a 3. tétel szerint

$$\pi a = (\chi a^{-1})\, a, \tag{4}$$

ahol

$$a \to \chi a = \chi(a\mathcal{K}_i) \in a\mathcal{K}_i, \quad i = 1, 2 \tag{5}$$

tetszőleges endomorfizmus:

$$\chi a\, \chi b = \chi(ab), \qquad a, b \in \mathcal{G}_1^3. \tag{6}$$

Minthogy $\mathcal{K}_2$-n

$$\chi(a) = \chi(a\mathcal{K}_2) = \begin{bmatrix} a_1 \\ \chi_2(a_1) \\ \chi_3(a_1) \end{bmatrix} \in a\mathcal{K}_2,$$

továbbá a 4. tétel szerint χ képtartománya alcsoport, s a 7. tétel bizonyításából láthatóan ilyen alcsoport minden egyéb folytonossági feltétel nélkül is csak a $\mathcal{S}_1^1$-hez hasonló típusú lehet, ezért

$$\chi a = c \begin{bmatrix} a_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} c^{-1}, \qquad c = \begin{bmatrix} 1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}.$$

Hasonló módon $\mathcal{K}_1$-en:

$$\chi a = \chi(a\mathcal{K}_1) = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \chi_3(a_1, a_2) \end{bmatrix} \in a\mathcal{K}_1.$$

Minthogy bármely $a \in \mathcal{G}_1^3$-nál fennáll az

$$a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_2/a_1 \\ a_3/a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ a_2/a_1^2 \\ a_3/a_1^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

faktorizálhatóság, ezért

$$\mathcal{G}_1^3 = \mathcal{S}_1^1 \mathcal{S}_3^2 = \mathcal{S}_3^2 \mathcal{S}_1^1 = \mathcal{S}_1^1 \cup \mathcal{S}_3^2,$$

vagyis az 5. tétel szerint a χ is két tényezőre bomlik:

$$\chi a = \chi \begin{bmatrix} a_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \chi \begin{bmatrix} 1 \\ a_2/a_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \varrho(a_1)\, \sigma(a_2/a_1) = \sigma(a_2/a_1^2)\, \varrho(a_1),$$

ahol

$$\varrho(a_1)\, \varrho(b_1) = \varrho(a_1 b_1), \quad \varrho(a_1) = \begin{bmatrix} a_1 \\ 0 \\ \varrho_3(a_1) \end{bmatrix}, \qquad \varrho(a_2/a_1^2) = \varrho(a_1)\, \sigma(a_2/a_1)\, \varrho(a_1)^{-1},$$

vagyis $a_1 = a_2$-vel

$$\sigma(1/a_1) = \varrho(a_1)\,\sigma(1)\,\varrho(1/a_1),$$

s minthogy

$$\sigma(1) = \chi\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\1\\c_3\end{bmatrix},$$

ezért

$$\sigma(a_2) = \varrho(1/a_2)\begin{bmatrix}1\\1\\c_3\end{bmatrix}\varrho(a_2),$$

ha $a_2 \neq 0$, egyébként pedig χ endomorfizmus volta miatt

$$\sigma(0) = \chi\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}.$$

Ismét a 4. tételből és a 7. tétel bizonyításából láthatóan

$$\varrho(a_1) = \begin{bmatrix}a_1\\0\\k_3(a_1 - a_1^3)\end{bmatrix}.$$

Ezután

$$\sigma(a_2) = \begin{bmatrix}1/a_2\\0\\k_3(1/a_2 - 1/a_2^3)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\c_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_2\\0\\k_3(a_2 - a_2^3)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\a_2\\c_3 a_2^2\end{bmatrix},$$

mely valóban endomorfizmus, hacsak

$$\sigma(a_2) \in \mathfrak{S}_1^2,$$

azaz $c_3 = {}^3/_2$. Így végül a legáltalánosabb χ megoldás a $\mathcal{K}_1$ komplexuson

$$\chi a = \varrho(a_1)\,\sigma\left(\frac{a_2}{a_1}\right) = \begin{bmatrix}a_1\\0\\k_3(a_1 - a_1^3)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\a_2/a_1\\{}^3/_2\, a_2^2/a_1^2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a_1\\a_2\\{}^3/_2\, a_2^2/a_1 + k_3(a_1 - a_1^3)\end{bmatrix}.$$

A $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}_2$ komplexuson talált megoldások birtokában kimondjuk a következőt:

9. tétel. *Az* (1) *függvényegyenletnek az* X_1, *illetve* X_2 *halmazon és a* $\mathcal{G}_1^3$ *csoport* $\mathcal{K}_1$, *illetve* $\mathcal{K}_2$ *komplexusán az*

$$x_\tau\,\xi \longleftrightarrow x' = \xi\,(\in \mathcal{K}_i)$$

invertálhatósági feltételt kielégítő megoldása

$$(xa)' = x' \circ a = \xi \circ a = \pi(\xi a) = (\chi a^{-1})\xi a =$$

$$= k^{-1}\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ {}^3/_2\ a_2^2/a_1 \end{bmatrix}^{-1} k \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \xi_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, \quad c^{-1}\begin{bmatrix} a_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^{-1} c \begin{bmatrix} 1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix},$$

ahol $x \leftrightarrow x' = \xi$ *tetszőleges invertálható leképezés és*

$$k = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ k_3 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

tetszőleges állandó.

2. A $\mathcal{K}_3$ komplexuson is elég egyszerű (3) megoldása. Akkor

$$\pi a = \pi \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{K}_3.$$

Legyen tehát (3)-ban $b_2 = b_3 = 0$, akkor

$$(\pi a)\begin{bmatrix} b_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1\ \pi_1\ a \\ b_1^2\ \pi_2\ a \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{K}_3,$$

tehát

$$\pi[(\pi a)b] = \begin{bmatrix} b_1\ \pi_1\ a \\ b_1^2\ \pi_2\ a \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi_1\ (ab) \\ \pi_2\ (ab) \\ 0 \end{bmatrix},$$

vagyis

$$b_1^i\, \pi_i \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \pi_i \begin{bmatrix} b_1 a_1 \\ b_1^2 a_2 \\ b_1^3 a_3 \end{bmatrix}, \qquad i = 1, 2.$$

Válasszuk $b_1 = 1/a_1$-et, akkor

$$\pi_i a = a_1^i\, \pi_i \begin{bmatrix} 1 \\ a_2/a_1^2 \\ a_3/a_1^3 \end{bmatrix}, \qquad i = 1, 2.$$

Így elintéztük π-nek az a első komponensétől való függését. Ezután a továbbiakban vehetjük az egyszerűség kedvéért $a_1 = b_1 = 1$-et, akkor (3) részletesen kiírva

$$\pi\left(\pi \begin{bmatrix} 1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}\right) = \pi \begin{bmatrix} \pi_1 a \\ \pi_2 a + b_2 \pi_1 a \\ b_3 \pi_1 a + 3 b_2 \pi_2 a \end{bmatrix} = \pi \begin{bmatrix} 1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 + 3 a_2 b_2 \end{bmatrix}.$$

Legyen itt

$$a_3+b_3+3a_2b_2=0,$$

akkor

$$\pi\begin{bmatrix}1\\a_2+b_2\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\a_2+b_2\\0\end{bmatrix}.$$

Kimutatjuk, hogy

$$\pi_2 a-a_2\pi_1 a\equiv 0,\quad a=\begin{bmatrix}1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}.$$

Tekintsük ugyanis azon a elemek halmazát, ahol ez nem teljesülne. Ott meg lehetne választani b_2-t úgy, hogy

$$b_3\pi_1 a+3b_2\pi_2 a=(-a_3-3a_2b_2)\,\pi_1 a+3b_2\pi_2\,a=0,$$

azaz

$$b_2=\frac{a_3\pi_1 a}{3\,(\pi_2 a-a_2\pi_1 a)},$$

következőleg

$$\begin{bmatrix}\pi_1 a\\\pi_2 a+b_2\pi_1 a\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\a_2+b_2\\0\end{bmatrix},\qquad \pi_1 a=1,\ \pi_2 a=a_2$$

teljesüljön, ellentmondásban azzal, hogy

$$\pi_2 a-a_2\pi_1 a\neq 0.$$

Ha viszont

$$\pi_2 a\equiv a_2\pi_1 a,\quad a=\begin{bmatrix}1\\a_2\\a_3\end{bmatrix},$$

akkor

$$\pi\begin{bmatrix}\pi_2 a\\(a_2+b_2)\,\pi_2\,a\\(b_3+3a_2b_2)\,\pi_2 a\end{bmatrix}=\pi\begin{bmatrix}1\\a_2+b_2\\a_3+b_3+3a_2b_2\end{bmatrix}.$$

Legyen itt $a_3=b_3=0$, akkor

$$\pi_1\begin{bmatrix}1\\0\\a_3\end{bmatrix}=\pi_1\begin{bmatrix}1\\b_2\\a_3\end{bmatrix}=f(a_3),$$

s az így értelmezett f-nek nyilván ki kell elégítenie

$$f(a_3)f\,[(b_3+3a_2b_2)/f(a_3)^2]=f(a_3+b_3+3a_2b_2)$$

-t. Vezessük itt be a

$$\varphi(u)=f(u)^2$$

függvényt, akkor új változókkal, négyzetre emelés után egyenletünk:

$$(\varphi u)\,\varphi(v/\varphi u) = \varphi(u+v). \tag{13}$$

Ha $\varphi u \neq 1$, akkor v megválasztható úgy, hogy

$$u+v = v/\varphi u = w$$

legyen. Ekkor

$$\varphi u\, \varphi w = \varphi w,$$

$$\varphi w = 0, \quad \text{vagy} \quad \infty,$$

azaz

$$\pi_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ w \end{bmatrix} = 0 \quad \text{vagy} \quad \infty$$

volna valamilyen w helyen, ami nyilván megengedhetetlen a $\mathcal{G}_1^3$ csoport $\mathcal{H}_3$ komplexusán. Tehát csak

$$\varphi u = f(u)^2 \equiv 1$$

lehet, vagyis a megoldás:

$$\pi_1 a \equiv 1, \quad \pi_1 a \equiv a_2,$$

azaz

$$\pi a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

MEGJEGYZÉS. (13) legáltalánosabb invertálható megoldása[2]

$$\varphi u = 1 + cu, \tag{14}$$

ugyanis $\varphi u \neq 1$ esetén

$$\varphi w = 0, \quad \text{vagy} \quad \infty$$

-ből következik, hogy

$$w = v/\varphi u = \frac{u}{1-\varphi u} = \text{konstans},$$

azaz

$$\varphi u = 1 - \frac{1}{w} u = 1 + cu, \quad \text{ha} \quad \varphi u \neq 1, \quad \text{azaz} \quad u \neq 0;$$

másrészt $\varphi u = 1$ esetén (13) $v = 0$-val $\varphi 0 = 1$-et ad, tehát (14) érvényes minden u-ra.

3. Foglalkozzunk $\mathcal{H}_4$ felett (3) megoldásával. Minthogy $\mathcal{H}_4$ részcsoport, ezért, mint a 3. tétel bizonyításánál is,

$$\pi a = (\pi a')\,\bar{a}, \quad a = a'\bar{a}, \quad \bar{a} \in \mathcal{H}_4,$$

[2] φu invertálhatósága másként azt jelenti, hogy $\pi_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ u \end{bmatrix}$ az u-nak invertálható függvénye.

ahol a' az a reprezentánsa a $\mathfrak{K}_4$ szerinti

$$\mathfrak{G}_1^3 = a'\mathfrak{K}_4, \quad b'\mathfrak{K}_4, \ldots$$

felbontásnál. Reprezentánsok lehetnek az

$$a' = as = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ 0 \\ s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 s_1 \\ a_2 s_1^2 \\ a_3 s_1^3 + a_1 s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ a_2/a_1^2 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (= a\bar{a}^{-1})$$

elemek, tehát

$$\pi a = \begin{bmatrix} \pi_1\left(\dfrac{a_2}{a_1^2}\right) \\ 0 \\ \pi_3\left(\dfrac{a_2}{a_1^2}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ 0 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \pi_1 \\ 0 \\ a_3 \pi_1 + a_1^3 \pi_3 \end{bmatrix},$$

s folytatólag

$$(\pi a)\, b = \begin{bmatrix} a_1 b_1 \pi_1 \\ a_1 b_2 \pi_1 \\ a_1 b_3 \pi_1 + a_2 b_1^3 \pi_1 + a_1^3 b_1^3 \pi_3 \end{bmatrix}.$$

Így (3) baloldala:

$$\pi[(\pi a)\, b] = \begin{bmatrix} \pi_1\left(\dfrac{b_2}{a_1 a_1^2 \pi_1}\right) \\ 0 \\ \pi_3\left(\dfrac{b_2}{a_1 b_1^2 \pi_1}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 b_1 \pi_1 \\ 0 \\ a_1 b_3 \pi_1 + a_3 b_3 b_1^3 \pi_1 + a_1^3 b_1^3 \pi_3 \end{bmatrix},$$

míg a jobboldal

$$\pi(ab) = \begin{bmatrix} \pi_1\left(\dfrac{a_1 b_2 + a_2 b_1^2}{a_1^2 b_1^2}\right) \\ 0 \\ \pi_3\left(\dfrac{b_2}{a_1 b_1^2} + \dfrac{a_2}{a_1^2}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 b_1 \\ 0 \\ a_1 b_3 + a_3 b_1^3 + 3 a_2 b_1 b_2 \end{bmatrix}.$$

Végezetül a

$$\frac{b_2}{a_1 b_1^2} = u, \quad \frac{a_2}{a_1^2} = v$$

jelöléssel, π_1, π_3 meghatározására a komponensek összehasonlítása révén a

$$\pi_1\left[\frac{u}{\pi_1(v)}\right]\pi_1(v) = \pi_1(u+v), \tag{13'}$$

$$\pi_1\left[\frac{u}{\pi_1(v)}\right]\pi_3(v) + \pi_3\left[\frac{u}{\pi_1(v)}\right]\pi_1(v)^3 = 3uv\pi_1(u+v) + \pi_3(u+v) \tag{15}$$

egyenletrendszer szolgál, ahol a

$$\pi\xi = \begin{bmatrix} \pi_1(0) \\ 0 \\ \pi_3(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ 0 \\ \xi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ 0 \\ \xi_3 \end{bmatrix} \qquad (\xi \in \mathfrak{H}_4)$$

kezdeti feltétel miatt

$$\text{(16)} \qquad \pi_1(0) = 1, \quad \pi_3(0) = 0.$$

Az egyenletek közül az első éppen (13), melynek tehát 0 és ∞-től mindenütt különböző megoldása

$$\pi_1 u = 1.$$

Ezt figyelembe véve, legyen

$$\pi_3 u = f(u) - {}^3\!/_2\, u^2,$$

akkor (15) a következőre redukálódik:

$$f(u) + f(v) = f(u+v),$$

tehát végeredményben (3) legáltalánosabb megoldása a $\mathfrak{H}_4$ részcsoporton

$$\pi a = (\pi a')\, \bar{a} = \left(\pi \begin{bmatrix} 1 \\ a_2/a_1^2 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} a_1 \\ 0 \\ a_3 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ f\left(\dfrac{a_2}{a_1^2}\right) - \dfrac{3}{2} \dfrac{a_2^2}{a_1^4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ 0 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ 0 \\ a_3 + a_1^3 f\left(\dfrac{a_2}{a_1^2}\right) - \dfrac{3}{2} \dfrac{a_2^2}{a_1} \end{bmatrix},$$

ahol $f(u)$ tetszőleges additív függvény.

E π oly geometriai objektumot is adhat, melynek a_2-ben seholsem folytonos a transzformációs törvénye. Éspedig

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ 0 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = (\pi\alpha) \circ a = \pi(\alpha a) = \pi \begin{bmatrix} \alpha_1 a_1 \\ \alpha_1 a_2 \\ \alpha_1 a_3 + \alpha_3 a_1^3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ f\left(\dfrac{a_2}{\alpha_1 a_1^2}\right) - {}^3\!/_2 \left(\dfrac{a_2}{\alpha_1 a_1^2}\right)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 a_1 \\ 0 \\ \alpha_1 a_3 + \alpha_3 a_1^3 \end{bmatrix},$$

ahol $f(u)$ tetszőleges diszkontinuus additív függvény.

Összefoglalva kimondható a

10. tétel. (3) *legáltalánosabb megoldása a* $\mathfrak{K}_3, \mathfrak{K}_4$ *komplexuson:*

$$\pi a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a_1 \\ 0 \\ a_3 + a_1^3 f\left(\frac{a_2}{a_1^2}\right) - \frac{3}{2}\frac{a_2^2}{a_1} \end{bmatrix},$$

ahol $f(u)$ *tetszőleges additív függvény.*

4. (3)-ból általánosabb megoldásokat nyerünk, ha nem zárjuk ki $\pi_1 = 0$, vagy ∞-t. Ekkor azonban a (13'), (15) egyenletek megoldása már több gondot okoz. Differenciálhatósági feltételek nélkül ezidáig nem sikerült még. A szereplő függvények folytonos differenciálhatóságát[3] feltételezve viszont könnyen célhoz érünk. Differenciáljuk pl. (13')-t u szerint, akkor $u = 0$ esetén a (16) kezdeti feltétel miatt

$$\pi_1'(v) = c_1, \quad \pi_1(v) = 1 + c_1 v.$$

Ezt (15)-be helyettesítve, és u szerint differenciálva, $u = 0$ esetén egy elsőrendű lineáris, inhomogén differenciálegyenletet kapunk, melynek legáltalánosabb megoldása a (16) kezdeti feltétel figyelembe vételével:

$$\pi_3(v) = k_3 v^3 + k_2 v^2 + k_1 v,$$

ahol azonban a c_1, k_i állandók között a (3), (15)-be való visszahelyettesítés folytán még bizonyos összefüggéseket találunk. A számolás részletezése nélkül kimondjuk a következőt:

11. tétel. (3) *legáltalánosabb differenciálható megoldása a torlódási pontokkal kibővített* $\mathfrak{K}_3, \mathfrak{K}_4$ *halmazokon*

$$\pi a = \begin{bmatrix} a_1 \sqrt{1 + c_3 a_3/a_1^3} \\ a_2 \sqrt{1 + c_3 a_3/a_1^3} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a_1 + c_1 a_2/a_1 \\ 0 \\ c_1 a_3 a_2/a_1^2 + a_3 + k_3 a_2^2/a_1^3 + k_2 a_2^2/a_1 + k_1 a_1 a_2 \end{bmatrix},$$

$$k_3 = {}^1\!/_2\, c_1 (c_1 k_1 - 3), \quad k_2 = {}^3\!/_2 (c_1 k_1 - 1),$$

ahol c_1, c_3, k_1 *tetszőleges állandók.*

A 11. tételben nyert π a következő geometriai objektum transzformációkat szolgáltatja:

$$\xi \circ a = \begin{bmatrix} \xi_1 a_1 \sqrt{1 + c_3 (a_3/a_1 + 3 a_2 \xi_2/\xi_1)/(a_1 \xi_1)^2} \\ (\xi_1 a_2 + \xi_2 a_1^2) \sqrt{1 + c_3 (a_3/a_1 + 3 a_2 \xi_2/\xi_1)/(a_1 \xi_1)^2} \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \xi_1 a_1 + c_1 a_2/a_1 \\ 0 \\ c_1 (\xi_1 a_3 + \xi_3 a_1^3)\, a_2/(\xi_1 a_1^2) + \xi_1 a_3 + \xi_3 a_1^3 + k_3 (a_2/a_1)^3 + k_2 \xi_1 a_2^2/a_1 + k_1 \xi_1^2 a_1 a_2 \end{bmatrix}.$$

[3] Elég csak egyetlen pontban, az origóban feltételezni a differenciálhatóságot [1].

Ezek közül mindkettő operátor-izomorf

$$\eta \circ a = \begin{bmatrix} 1 \\ \eta_1 a_1 + a_2/a_1 \\ \eta_3 a_1^2 + a_3/a_1 + 3\eta_2 a_2 \end{bmatrix}$$

-vel, hacsak $c_1 \neq 0$, $c_3 \neq 0$, amiről egyszerű számolással meggyőződhetünk, pl. úgy, hogy meghatározzuk pl. a $\xi = e$-hez tartozó stacioner operátorok alcsoportját, s ezek pedig $\mathfrak{S}_1^1$ konjugáltjai, s mint a 2. tétel után megjegyeztük, ilyen alcsoportokhoz operátor-izomorf maradékrendszer tartozik.

A stacioner operátorok $\mathfrak{S}$ alcsoportjának meghatározása pl. a második esetben úgy történhet, hogy kihasználjuk az e elemhez tartozó stacioner operátorok

$$e \circ s = \pi(es) = \pi s = e$$

jellemző sajátságát. Legyen rögzített a' mellett $s \in a' \mathfrak{H}_4$, vagyis $s = a' \bar{s}$, akkor

$$\pi s = \pi(a' \bar{s}) = (\pi a') \bar{s} = e,$$

vagyis

$$\bar{s} = (\pi a')^{-1},$$

tehát $\mathfrak{S}$ az $a' \mathfrak{H}_4$ maradékosztályokból pontosan egy elemet tartalmaz, s így

$$\mathfrak{S} = \bigcup_{a' \in \mathfrak{T}} (\mathfrak{S} \cap a' \mathfrak{H}_4) = \bigcup_{a' \in \mathfrak{T}} a' (\pi a')^{-1}, \quad \mathfrak{G}_1^3 = \mathfrak{T} \mathfrak{H}_4,$$

azaz, minthogy $\mathfrak{S}^{-1} = \mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}$ a következő alakú elemek összessége:

$$(\pi a') a'^{-1} = \pi \begin{bmatrix} 1 \\ a_2/a_1^2 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_2/a_1^2 \\ 0 \end{bmatrix}^{-1} = \pi \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ 0 \end{bmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 + c_1 t \\ 0 \\ k_3 t^3 + k_2 t^2 + k_1 t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -t \\ 3t^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + c_1 t \\ -t - c_1 t^2 \\ 3(t^2 + c_1 t^3) + k_3 t^3 + k_2 t^2 + k_1 t \end{bmatrix},$$

mely valóban $\mathfrak{S}_1^1$ konjugáltja, hacsak $c_1 \neq 0$, míg $\mathfrak{S}_2^1$-é, ha $c_1 = 0$, vagyis olyan félcsoport, mely elfajulhat $\mathfrak{S}_1^1$-gyé, vagy $\mathfrak{S}_2^1$-vé.

(Beérkezett: 1958. IV. 24.)

Nehézipari Műszaki Egyetem, Miskolc
Matematikai Tanszék

SZÁSZ GÁBOR EGY TÉTELÉRŐL

Írta: GRÄTZER GY. és SCHMIDT E. T.

Az alábbiakban SZÁSZ GÁBOR [2] dolgozatának 8. tételére adunk új bizonyítást.

A szóbanforgó tétel eredeti alakja — mely az 1. pontban változatlanul szerepel — a *Birkhoff—Menger*-féle direkt tényezőkre ró ki feltételeket. Felmerül a kérdés, vajon nem lehetne-e egyenesen a hálóra adni meg feltételt. A kérdésre igenlő választ ad a 2. tétel.

1. SZÁSZ GÁBOR, a tételt előkészítendő, [2]-ben öt segédtételt mond ki, melyek nagyobbrészt G. BIRKHOFF, továbbá WHITNEY, MACLANE és DILWORTH eredményeit foglalják össze. Az első három segédtételt kis változtatásokkal megismételjük; a függetlenség fogalmára, s az erre vonatkozó eredményeket összegező két utolsó segédtételre nem lesz szükségünk.

1. SEGÉDTÉTEL (BIRKHOFF—MENGER): *Minden véges, komplementumos, moduláris háló, L, egyértelműen felírható az*

$$L = P_0 \times P_1 \times \cdots \times P_n \tag{1}$$

alakban, ahol P_0 Boole-algebra és a P_i-k ($i = 1, 2, \ldots, n$) egyszerű (komplementumos, moduláris), nem disztributív hálók.

2. SEGÉDTÉTEL: *Véges, egyszerű, komplementumos moduláris háló minden (fő) ideálja is egyszerű háló.*

([2]-ben a fenti helyett a következő állítás szerepel: az L véges, komplementumos, moduláris háló akkor és csak akkor egyszerű, ha bármely két különböző atomhoz, p és q-hoz van egy olyan harmadik atom, r, hogy $r < p \cup q$. Mivel ez a tulajdonság, ha egy hálóra teljesül, akkor minden ideáljában is fennáll, ezért ebből az állításból triviálisan adódik a fenti 2. segédtétel.)

3. SEGÉDTÉTEL: *Az L 0-elemes, véges, moduláris háló $[a, b]$ intervallumának hosszát (azaz maximális láncainak hosszát) jelölje $\delta(a, b)$, s legyen $\delta(0, a) = \delta(a)$. $\delta(a) = 0$ akkor és csak akkor, ha $a = 0$, és fennáll a következő identitás:*

$$\delta(a \cap b, a) = \delta(b, a \cup b). \tag{2}$$

Ezekután fogalmazzuk meg SZÁSZ GÁBOR tételét.

1. tétel. *Legyen L 0 és 1 elemes, véges, komplementumos, moduláris háló. L-ben akkor és csak akkor található nem disztributív, ötelemű, 0 és 1-et tartalmazó részháló, ha az* (1) *felbontásban P_0 egyelemű és mindegyik P_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ páros hosszúságú.*

MEGJEGYZÉS: A kívánt részháló létezése a következő egyenletrendszer megoldhatóságát jelenti:

$$x \cap y = y \cap z = z \cap x = 0, \quad x \cup y = y \cup z = z \cup x = 1. \tag{3}$$

AZ 1. TÉTEL BIZONYÍTÁSA: Tetszőleges A algebrai strukturára igaz az az állítás, hogy egy egyenletrendszer akkor és csak akkor oldható meg A-ban, ha valamely direkt előállítása minden direkt-tényezőjében megoldható. Továbbá hálók esetén az 1 és 0 elem direkt-felbontásbeli komponensei épp a direkt tényezők 1 és 0 elemei. Így beláttuk, hogy (3) L-beli megoldhatósága ekvivalens (3) minden P_j-beli $(j=0, 1, \ldots, n)$ megoldhatóságával.

A P_0 Boole-algebrában, ha $0<1$, akkor (3) megoldhatósága egy nem disztributív részháló létezését jelentené, s ezért kell, hogy P_0 egyelemű legyen.

Tegyük fel, hogy (3) P_i-ben $(i>0)$ megoldható. Ekkor

$$\delta(1) = \delta(0, 1) = \delta(0, x) + \delta(x, 1) = \delta(z, 1) + \delta(y, 0) = 2\delta(z, 1),$$

azaz P_i páros hosszúságú.

Elég a tétel bizonyításához már csak azt belátnunk, hogy ha L $2n$ hosszúságú, egyszerű, komplementumos, nem disztributív, moduláris háló, akkor L-ben (3) megoldható. Alkalmazzunk teljes indukciót n-re. $n=1$-re az állítás triviális, mert a nem disztributivitás következményeképpen L-nek van három különböző atomja, p, q, r, melyek kielégítik (3)-at. Tegyük fel, hogy az állítást már minden $1 \leqq k < n$-re beláttuk. Legyen $a \in L$, $\delta(a) = 2n-2$ s a' egy tetszőleges komplementuma a-nak. Nyilván $\delta(a') = 2$. Az $(a]$ és $(a']$ főideálokban a 2. segédtétel és az indukciós feltétel következtében (2) megoldható, legyenek ezek a megoldások x_1, y_1, z_1 és x_2, y_2, z_2. Állítjuk, hogy az $x = x_1 \cup x_2$, $y = y_1 \cup y_2$, $z = z_1 \cup z_2$ elemek megoldásai (3)-nak L-ben. Valóban, $x \cup y = x_1 \cup y_1 \cup x_2 \cup y_2 = a \cup a' = 1$ s ugyanígy $y \cup z = z \cup x = 1$; továbbá $\delta(x) = n$, mert $x_1 \cap x_2 = 0$ s ezért $\delta(x) = \delta(x_1 \cup x_2) = \delta(x_1) + \delta(x_2) = (n-1) + 1 = n$, s ugyanígy $\delta(y) = \delta(z) = n$. Ebből, $\delta(x \cap y, x) = \delta(y, x \cup y) = 2n - n = n$, azaz $\delta(x \cap y) = \delta(x) - \delta(x \cap y, x) = n - n = 0$, tehát $x \cap y = 0$, s ugyanígy $y \cap z = z \cap x = 0$, amivel a tétel bizonyítását befejeztük.

2. A BIRKHOFF—MENGER tétel bizonyítását legegyszerűbben a következő tétel segítségével nyerhetjük.

4. SEGÉDTÉTEL: *Legyen L komplementumos, moduláris háló. Ez esetben*

a) (NEUMANN) $L=(a]\times(a']$ *akkor és csak akkor, ha a-nak pontosan egy komplementuma van;*

b) (BIRKHOFF) *feltéve L végességét, L akkor és csak akkor egyszerű, ha nincsen egyértelműen komplementumos eleme.*

Ezen tétel segítségével az 1. tételt olyan alakra hozhatjuk, amely csak magára a hálóra köt ki feltételt.

2. tétel. *Legyen L 0 és 1 elemes $(0<1)$ véges, komplementumos, moduláris háló. L-nek akkor és csak akkor van 0 és 1-et tartalmazó, nem disztributív, ötelemű részhálója, ha minden egyértelműen komplementumos eleme páros magasságú.*

BIZONYÍTÁS: Legyen L véges, komplementumos és moduláris. Ha az $(a]$ és $(b]$ főideálok mint hálók disztributivak, a és b egyértelműen komplementumosak, akkor az $(a\cup b]$ főideál mint háló disztributív, s $a\cup b$ egyértelműen komplementumos. Ezért van egy maximális u_0 elem L-ben, amely egyértelműen komplementumos és melyre $(u_0]$ mint háló disztributív. Jelölje $u_i (i=1,\dots,n)$ azon minimális egyértelműen komplementumos elemeket, melyekre $(u_i]$ nem disztributív. A 4a) segédtételből triviálisan $L=(u_0]\times(u_1]\times\times\cdots\times(u_n]$, továbbá a 4b) segédtételből mindegyik $(u_i]$ $(i=1,2,\dots,n)$ mint háló egyszerű. A tényezők sorrendjének alkalmas megválasztásával nyilván elérhető, hogy $P_j=(u_j]$ $(j=0,1,\dots,n)$, ahol P_j az 1. segédtételbeli felbontás tényezőit jelöli. A keresett szükséges és elegendő feltétel tehát az 1. tétel szerint $P_0=1$ és a P_i-k $(i=1,\dots,n)$ hosszának párossága. Belátjuk, hogy ez ekvivalens az egyértelműen komplementumos elemek páros magasságával. Valóban, ha minden egyértelműen komplementumos elem páros magasságú, akkor speciálisan minden u_i-re $(i=1,2,\dots,n)$ is teljesül ez, így P_i $(i=1,2,\dots,n)$ páros hosszúságú. Ha $u_0\neq 0$, akkor legyen p egy atom, melyre $p\leqq u_0$. Nyilván p is egyértelműen komplementumos (mert p egyértelműen komplementumos $(u_0]$-ban) s $\delta(p)=1$, ellentmondás, tehát $u_0=0$. Megfordítva, ha $u_0=0$ és $\delta(u_i)$ $(i=1,2,\dots,n)$ páros, akkor minden a egyértelműen komplementumos elem $a=\bigcup_{j=1}^{m} u_{i_j}$ alakú, s ezért $\delta(a)=\sum_{j=1}^{m}\delta(u_{i_j})$ szintén páros, befejezvén a bizonyítást.

1. MEGJEGYZÉS: Az 1. segédtételt BIRKHOFF és MENGER erősebb alakban mondták ki, nevezetesen még azt is állították, hogy a P_i-k $(i=1,2,\dots,n)$ alkalmas n_i-dimenziós projektív tér altérhálójával izomorfok. Ha ezt az állítást is belevesszük az 1. segédtételbe, akkor a 2. segédtétel elhagyható ugyanis P_i egy főideálja éppen egy alkalmas altér összes alterének hálójával

izomorf, vagyis maga is egy projektív geometria altérhálója, s mint ilyen, egyszerű.

2. MEGJEGYZÉS: Bizonyos végtelen komplementumos moduláris hálókban is megoldható (3). Könnyű pl. verifikálni, hogy Neumann „folytonos geometriá"-jában is megoldható (3), s természetesen $\delta(x)=\delta(y)=\delta(z)=\frac{1}{2}$.

IRODALOM

[1] Birkhoff, G.: Lattice theory, *New York, 1948.*

[2] Szász G.: Komplementumos hálók szerkezetéről, *MTA III. Osztályának Közleményei* **9** (1959), 57—79.

(Beérkezett: 1958. VI. 20.)

A Magyar Tudományos Akadémia
Matematikai Kutató Intézete

AZ ELEKTROMÁGNESES TÉR MAXWELL-FÉLE ELMÉLETÉNEK AXIÓMARENDSZERE*

Írta: HORVÁTH JÁNOS

A fizikai elméletek axiomatizálásának a során követendő módszer alapelveinek ismertetése után, összefoglaljuk azokat a javarészt még a kísérleti fizikában ismertetett törvényszerűségeket, amelyek a MAXWELL-elmélet kiépítésénél alapul szolgálnak, majd ezekből absztrahált definíciók és általánosított törvényszerűségek megállapításával egy axiómarendszert javaslunk.

1. §. Bevezetés

Az egyes fizikai elméletek axiomatizálása mind tudományos, mind pedig didaktikai szempontból fontos feladat. A tudományos jelentősége abban rejlik, hogy az axiomatizálás során az elmélet alapvető feltevései, ill. kiinduló pontjai világosabban kihangsúlyozódnak, aminek eredményeképpen az elmélet felépítésének legfontosabb vonásai, továbbá az elmélet alkalmazhatóságának a határai könnyen megállapíthatók. Ez azt jelenti azonban, hogy az elmélet deduktív felépítése, amely elméleti szempontból különösen fontos, tulajdonképpen axiomatizálás nélkül el sem képzelhető. Az elméletek axiómarendszerének a vizsgálatától tehát azt remélhetjük, hogy az illető elmélet fizikai tartalma, az észlelt jelenségek és az elmélet fogalomalkotása közti kapcsolat jobban kidomborodik, úgyhogy az axiomatizálás didaktikai jelentősége sem lehet kétséges, hiszen éppen az axiomatizálás során küszöbölhetjük ki az elmélet felépítésénél az ún. formalizmust, amely a kezdőknél az elmélet lényegének a megértését veszélyezteti. Ebből azonban következik, hogy az elmélet axiomatizálása nem hogy megnehezítené, hanem éppen megkönnyíti a szóban forgó elmélet kifejtését, tehát pl. egyetemi előadásokon is érdeklődésre tarthat számot.

Nem ismeretes egyelőre a MAXWELL-féle elméletnek olyan axiomatizálása, amely az axiomatika követelményeit tűzné ki célul, ill. azt többé vagy kevésbé kielégítené, jóllehet az elektromágneses tér elméletének különböző tankönyvei szükségszerűen foglalkoznak ezzel a kérdéssel, még akkor is, ha egyébként nyíltan nem is fejtik ki ezt a célkitűzést, sőt az axiomatizálást végső soron az elektromos és mágneses jelenségeket leíró kísérleti tankönyvek sem kerülhetik el. Pl. GRIMSEHL [1], GYULAI [2]. MIE [3], POHL [4], SIMONYI [5], SOMMERFELD [6], STRATTON [7], stb. ismert tankönyveiben számos olyan

* Rövidített változata megtalálható: Acta Phys. Acad. Sc. Hungarica 8. 399—418 (1958).

törekvés található, amelyek a mi szempontunkból jelentős eredményeket értek el, mégis — amint látni fogjuk — néhány szempont még ezeken túlmenően is figyelembe veendő.

A MAXWELL-féle elektrodinamika axiomatizálása különösen fontos. MAXWELL elmélete ugyanis a térelméletek prototípusa. Ismeretes újabban a térelméleti felfogás térhódítása, éppen ezért kívánatos, hogy legalább ebben az alapvető elméletben világosan álljanak előttünk ennek a módszernek a fizikai alapjai, ami egyben a további térelméletek megértésének kulcsául szolgálhat.

2. §. A fizikai elméletek axiomatizálásáról általában

Az axiomatika megalapozója, D. HILBERT abban jelölte meg az axiomatika célkitűzéseit, hogy fel kell kutatni az egyes elméletek másra vissza nem vezethető alaptételeit, amelyek már önmagukban biztosíthatják az egyes elméletek logikai, ill. deduktív felépítését és egyben rögzítik, ill. definiálják azokat az a priori adottnak feltételezett alapfogalmakat, mennyiségeket és a köztük fennálló kapcsolatokat, amelyek szükségesek az elmélet kifejtésénél. Hogy mit kell értenünk egy fizikai elmélet axiomatizálásán, azt igen ösztönzően mutatta meg G. HAMEL [8] a mechanika axiómarendszerének a kidolgozásánál.

A fizikai elméletek axióma-rendszerétől HAMEL nyomán az alábbi tulajdonságokat követeljük meg:

a) Teljesség. Az axiómáknak magukban kell foglalniok azokat az alapfogalmakat, az olyan mennyiségek definícióját és a közöttük fennálló azon alapvető összefüggéseket, amelyek az elmélet deduktív felépítéséhez szükségesek.

b) Ellentmondásmentesség. Az axiómarendszerből levezethető tételek összességének ellentmondásmentesnek kell lenniök, amit azáltal biztosítunk, hogy az axiómák alkalmas megválasztásán túlmenően olyan matematikai módszereket alkalmazunk, amelyek ellentmondásmentessége már bizonyított.

c) Függetlenség. Meg kell állapítanunk azt az axiomarendszert, amely már egymásra vissza nem vezethető, minimális számú axiómát tartalmaz.

Ezek a tulajdonságok rögzítik a matematikai axiomatika feladatát és ismeretes, hogy különböző axiómarendszerek különböző matematikai elméletekre vezetnek. Ezekhez a követelményekhez azonban a fizikai elméletek esetében egy további döntő fontosságú követelmény járul:

d) Realizálhatóság. A fizikában csak olyan elméleteket fogadhatunk el, amelyek axiómarendszeréből levezetett tételek végső soron kísérletileg ellenőrizhető megállapításokat tartalmaznak és bizonyos közelítésben megegyezésben vannak a tapasztalattal.

A MAXWELL-féle elmélet axiómáinak, az elektromágneses tér állapothatározóinak a definícióján túlmenően olyan összefüggéseket kell tartalmazniok, amelyeket — éppen úgy, mint a mechanika esetében — a közvetlen tapasztalatból absztrahálunk. Az egyes axiómák tehát olyan kísérletileg megállapított törvények idealizációja révén állapíthatók meg, amelyeket speciális esetben javarészt már az elektromágneses jelenségek tanításának a legelemibb fokán — pl. a középiskolákban — ill. pontosabb formában, a kísérleti fizikában tanítunk. Ezért a továbbiakban az axiómarendszer kiépítése előtt, a következő paragrafusban, összefoglaljuk és megfelelően csoportosítjuk azokat a kísérleti fizikai ismereteket, amelyek a MAXWELL-elmélet kiépítésénél alapul szolgálnak.

3. §. A Maxwell-elmélet kísérleti alapjai

A történeti fejlődésnek megfelelően az elektromágneses jelenségek törvényszerűségeinek a megállapításánál, az immár klasszikusnak tekinthető eljárás szerint, előbb az elektrosztatikus, majd a magnetosztatikus jelenségeket szokás tárgyalni. Ebben az esetben a feltevés az, hogy az elekrosztatikus teret a nyugvó töltések, a magnetosztatikus teret pedig a nyugvó mágneses pólusok, ill. dipolok keltik. A jelenségek további elemzése során felhívjuk a figyelmet arra, hogy az elektromos áram is mágneses teret létesít maga körül, mégpedig az egyenáram magnetosztatikus teret, a váltóáram pedig időben változó mágneses teret, ill. a köráramok tere a mágneses dipól terével egyezik meg. Ámde a klasszikus elektronelmélet megállapítása szerint az elektromos áram elektronok, ill. ionok áramlásából áll, végső soron tehát azt is mondhatjuk, hogy a mágneses teret mágneses pólusok vagy mozgó töltések keltik; pontosabban, tekintettel arra, hogy a fenomenológiai MAXWELL-elmélet keretében még nem beszélünk elektronokról, bevezetjük az elektromos áram fogalmát és vezetők esetében az elektronok áramlása helyett az elektromos áramról és az áram által keltett mágneses térről szokás beszélni. Majd ismertetve a FARADAY-féle indukciós törvényt, az elmélet ilyen típusú kiépítése során megállapítják a váltakozó mágneses és elektromos tér kapcsolatát, ami azután az elektromágneses hullámok fogalmának, ill. tulajdonságainak a megalapozásához vezet.

Felesleges tovább részleteznünk az elmélet klasszikus felépítésének a logikai menetét, hiszen az jól ismeretes. Rá kell azonban mutatnunk az elmélet ilyen típusú kiépítése esetén néhány alapvető nehézségre. Mindenekelőtt ebben az esetben fel kell tételeznünk a mágneses pólusok létezését, jóllehet ezek létezésének kísérleti bizonyítása eddig nem sikerült. Ebben a helyzetben tehát arra kellett törekedni, hogy legalább a permanens mágnesek mibenlétét tisztázza az elmélet, ami viszont — még legmodernebb formájában is — a

MAXWELL-elmélettől idegen atomisztikus meggondolásokat igényelt. Annak ellenére tehát, hogy az elektromágneses jelenségek MAXWELL-féle elméletétől, mint fenomenologiai elmélettől, elvárnók, hogy a jelenségek leírásának logikailag zárt leírását adja, az elmélet fogalomalkotásának néhány eleme tisztázatlan marad. Ezért a két világháború között, főleg POHL, MIE és SOMMERFELD arra törekedtek, hogy a mágneses tér létezését az elektromos áramok jelenlétére vezessék vissza. Ez a felfogás azóta diadalmaskodott és az utóbbi két évtizedben megjelent modern tankönyvek jelentékeny része mind kevesebb és kevesebb szerepet tulajdonít a mágneses tér keltésénél a mágneses pólusoknak. Ehhez az irányzathoz csatlakozunk mi is akkor a MAXWELL-elmélet kiépítésénél abból a feltevésből indulunk ki, hogy az elektromágneses teret a nyugvó elektromos töltések és az elektromos áram (mozgó töltések) keltik. Feltesszük továbbá, hogy az elektromos töltéseloszlás és mozgási állapota a priori adott.

Természetesen nem gondolhatunk arra, hogy az elektromos töltés mibenlétét valahogyan definiáljuk, hanem létezését kísérleti ténynek tekintjük és önkényesen valamilyen mértéket (dimenziót) tulajdonítunk neki. Tekintettel arra, hogy az elektromos töltés minőségileg különbözik a mechanikában megismert fizikai mennyiségektől, célszerűnek látszik, hogy ne fejezzük ki az ismert mechanikai dimenziók segítségével, hanem számára a fizikai mértékrendszer keretében egy új dimenziót vezessünk be, amelyet a továbbiakban Q-val fogunk jelölni*.

Az elektromágneses tér reális létezéséről annak következtében győződhetünk meg, hogy ponderomotoros erőhatása következtében a térben lévő töltött testek, ill. árammal átfolyt vezetők mozgási állapotát megváltoztatja, amelyet mechanikai mérések segítségével regisztrálhatunk.

A nyugvó töltések által keltett teret *elektromos térnek* nevezzük. Az elektromos tér hatása részben abban nyilvánul meg, hogy *ponderomotoros erőt* gyakorol a töltéssel rendelkező testekre, részben pedig a vezetőkben *töltésmegosztást* hoz létre. Kvantitative tehát az elektromágneses tér állapotát két állapothatározóval jellemezzük. Az egyik a tér *erősségét* vagy *intenzitását*, a másik a tér *töltésmegosztóképességét* vagy *gerjesztettségét* adja meg.

A mozgó töltések, ill. áramok által keltett teret *mágneses térnek* nevez-

* Az elektromos töltés egységének a bevezetését megkönnyíti az a körülmény, hogy az elektron töltésének abszolut értéke az elektromos töltés kvantumának tekinthető amelynek minden valóságban előforduló töltés egész számú többszöröse. Természetesen a fenomenológiai MAXWELL-elmélet mit sem tudhat az elektromosság atomisztikus mivoltáról, ezért a töltés egységéül a „coulomb"-ot választjuk. Ismeretes, hogy az elektron töltése $1{,}60 \cdot 10^{-19}$ coulomb, ami megadja ily módon az alapul választott töltésegység abszolut értékét.

Egyben a mechanikai alapmennyiségek: hosszúság, tömeg és idő egységül a métert (M), a kilogramm-tömeget (K) és a másodpercet (S) választjuk.

Az így kapott MKSQ-rendszert GIORGI—SOMMERFELD-féle mértékrendszernek nevezzük.

zük. A mágneses tér részben *ponderomotoros erőt* gyakorol a térben lévő mozgó töltött testekre, ill. árammal átfolyt vezetőkre, részben pedig a benne elhelyezett testeket *mágnesezi.* A mágneses tér állapotát is ily módon két állapothatározóval jellemezhetjük. Az egyik a tér *erősségét* vagy *intenzitását,* a másik a tér *mágnesezőképességét* vagy *gerjesztettségét* jellemzi.

A továbbiakban sorra vesszük a tér állapotát leíró négy állapothatározót. Részben definiáljuk, őket, részben pedig megállapítjuk a fontosabb tulajdonságaikat.

3. 1. *Az elektromos térerősség.* Amint említettük az elektromos tér ponderomotoros erőt gyakorol a töltött testekre. *Az egységnyi töltéssel rendelkező próbatestre ható ponderomotoros erőt elektromos térerősségnek nevezzük.* Az elektromos térerősség ($\mathfrak{E}$) egy vektor, amelynek a dimenziója

(3. 1)
$$[\mathfrak{E}]=\frac{\text{erő}}{\text{töltés}}=\frac{\text{newton}}{\text{coulomb}}.$$

(*i*) *Azoknak a görbéknek az összességét, amelyek érintője minden pontjukban az elektromos térerősség irányába mutat elektromos erővonalaknak vagy E-vonalaknak nevezzük.* Egyenletük:

(3. 2)
$$E_1:E_2:E_3=dx_1:dx_2:dx_3.$$

Itt $\{E_1, E_2, E_3\}$ az $\mathfrak{E}$ vektor komponenseit jelenti és $x_i=x_i(s)$ $(i=1,2,3)$ az erővonalak egyenletét, ahol s az erővonal mentén bevezetett paramétert (pl. ívhosszúságú-paramétert) jelent.

(*ii*) Tekintsük egy tetszés szerinti S görbe mentén a görbe A és B pontja között az $\mathfrak{E}$ vektor vonalmenti integrálját:

(3. 3)
$$U=\int_{A\,(S)}^{B}\mathfrak{E}\,d\mathfrak{s}=\int_{A\,(S)}^{B}E_s ds. \qquad (E_s=E\cos(\mathfrak{E},d\mathfrak{s}))$$

Ez nyilvánvaló módon azt a munkát jelenti, amelyet ahhoz kell végezni, hogy az egységnyi töltést az S görbe mentén, $\mathfrak{E}$ elektromos térben az A pontból a B pontba vigyük. Az U-t *elektromos feszültségnek* és a zárt S görbe mentén vett

(3. 4)
$$\mathsf{E}=\oint_S E_s ds$$

mennyiséget pedig *elektromos körfeszültségnek* (a régebbi félreértésre alkalmat adó terminológia szerint: *elektromotoros erőnek*) nevezzük.

A feszültség dimenziója:

(3. 5)
$$[U]=\frac{\text{newton}\cdot\text{méter}}{\text{töltés}}=\frac{\text{joule}}{\text{coulomb}}=\text{volt}$$

és ennek a felhasználásával az elektromos térerősség dimenziója

$$[\mathfrak{E}] = \frac{\text{volt}}{\text{méter}}. \tag{3.6}$$

Azért volt célszerű az elektromos térerősség dimenzióját ebben az alakban is kifejezni, mert az elektromosságtanban a feszültség mérése az alapvető és sokszor könnyen végrehajtható mérések közé tartozik, ily módon tehát az elektromos módszerrel is mérhetjük.

3. 2. *Az elektromos tér gerjesztettségi vektora.* Ha elektromos töltéssel rendelkező test közelébe vezetőt viszünk, amint már említettük, észlelhetjük a tér töltésmegosztóképességét. Ismeretes ugyanis, hogy két különböző tulajdonsággal rendelkező elektromos töltés létezik. Az egyik töltéssel rendelkező testek a tér irányába, a másik töltéssel rendelkezők viszont éppen ellenkező irányba gyorsulnak fel. Az első töltést *pozitívnak*, a másodikat *negatívnak* szokás nevezni. A töltésmegosztás mármost abban áll, hogy a töltetlen állapotban lévő, tehát azonos mennyiségű pozitív és negatív töltést tartalmazó, vezetőkben a tér töltésmegosztóképessége következtében a pozitív és negatív töltések szétválnak éspedig a teret létrehozó töltéssel ellenkező előjelű töltés a vezetőn a teret létrehozó töltés felé eső oldalon, az egyező előjelű töltés pedig az ellenkező oldalon koncentrálódik.

Az elektromos tér megosztóképességét a következőképpen mérhetjük: Szigetelőnyéllel ellátott két F felületű kis fémlemezt összeérintve az $\mathfrak{E}$ elektromostérerősségű térbe helyezünk. Azon a helyen, ahol a megosztóképességet meg akarjuk határozni, a két fémlapot hirtelen szétválasztjuk és megmérjük az egyes fémlapokon maradt töltésmennyiséget. Ekkor a következőket tapasztaljuk:

(*a*) A két fémlapon azonos mennyiségű, de ellentétes előjelű töltés keletkezik.

(*b*) A keletkezett töltés függ az $\mathfrak{E}$ térerősségtől és attól, hogy a szétválasztás pillanatában a felületek normálisa milyen szöget zár be a térerősség irányával, tehát mennyi az F felületen átmenő erővonalak száma.

(*c*) Végül a keletkezett töltés arányos a felületek nagyságával.

Ezekből a kísérleti megállapításokból azt a következtetést vonhatjuk le, hogy az F felületű fémlapon a megosztás következtében keletkezett töltés egy $\mathfrak{D}$ vektor fluxusával egyezik meg, tehát

$$e = \int_F D_n df, \qquad (D_n = D\cos(\mathfrak{D}, \mathfrak{n})) \tag{3.7}$$

ahol $\mathfrak{n}$ az F felület normálisa. Ezt a $\mathfrak{D}$ vektort az elektromos tér *gerjesztett-*

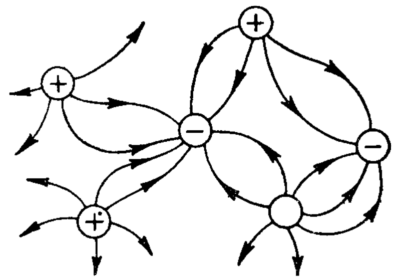
ségi vektorának (vagy a régi terminológiával élve: *eltolódási vektornak*) nevezzük. A gerjesztettségi vektor dimenziója:

$$[\mathfrak{D}] = \frac{\text{töltés}}{\text{felület}} = \frac{\text{coulomb}}{\text{méter}^2}\,. \tag{3. 8}$$

A gerjesztettségi vektor függ az elektromos térerősségtől: $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}(\mathfrak{E})$. Ennek a függésnek a megállapítása, ill. a priori ismerete szükséges az elmélet kiépítésénél és erre a kérdésre a 6. §.-ban még visszatérünk.

(*i*) *Azoknak a görbéknek az összességét, amelyeknek az érintője minden pontban a gerjesztettségi vektor irányába mutat, gerjesztettségi vagy D-vonalaknak nevezzük.*

(*ii*) Megállapodunk abban, hogy a *D*-vonalak mentén az ívhosszúság paramétert úgy definiáljuk, ill. a *D*-vonalakat (3. 7)-nek megfelelően úgy irányítjuk, hogy azok a pozitív töltésű testekről induljanak ki és a negatív töltésű testeken végződjenek. Ezért szokás a pozitív töltésű testeket a tér *forrásainak* és a negatív töltésűeket pedig a tér *semlyékeinek* nevezni.



1. ábra

(*iii*) Az elektromos tér forrásainak az erősségét oly módon definiáljuk, hogy megállapodunk a következőkben: *A tér forrását körülvevő zárt felületen át a felület kifelé mutató normálisának az irányába kilépő D-vonalak száma, tehát a $\mathfrak{D}$ vektornak az F zárt felületen vett fluxusa, megegyezik a forrás töltésével:*

$$\oint_F D_n df = e. \tag{3. 9}$$

Ezt a definíciós egyenletet szokás *az elektromos tér* GAUSS-*féle gerjesztettségi törvényének* is nevezni, ami végső soron tapasztalati megállapítás.

Amennyiben a teret több, esetleg különböző előjelű, töltéssel rendelkező test kelti, amelyek töltése $e_i (i = 1, 2, \ldots, N)$, akkor

$$\oint_F D_n df = \sum_{i=1}^{N} e_i, \tag{3. 10}$$

ahol *F* az egész töltésrendszert magában foglaló zárt felület. Ez az állítás (3. 7) alapján könnyen bebizonyítható és egyben az is igazolható, hogy (3. 9) érvénye független az *F* felület speciális megválasztásától, tehát a $\mathfrak{D}$ vektor fluxusa csak az *F* felület által határolt térfogatban levő össztöltéstől függ.

3. 3. *Vezetési áram, gerjesztettségi áram, teljes áram. A vezető felületén időegység alatt áthaladt töltésmennyiséget vezetési áramerősségnek nevezzük.* Az áramerősség (I) skalár mennyiség és dimenziója

$$[I] = \frac{\text{töltés}}{\text{idő}} = \frac{\text{coulomb}}{\text{másodperc}} = \text{ampère}, \tag{3.11}$$

amelynek a mérése ismét közismert, ezért célszerű a gyakorlatban a töltés egységét a segítségével kifejezni:

$$[Q] = \text{coulomb} = \text{ampèresec}, \tag{3.12}$$

és ennek megfelelően a gerjesztettségi vektor dimenziója:

$$[\mathfrak{D}] = \frac{\text{ampèresec}}{\text{méter}^2}. \tag{3.13}$$

Az elektrodinamikában az áramerősség helyett célszerűbb az *áramsűrűséget* bevezetni: *áramsűrűségnek nevezzük a vezető egységnyi keresztmetszetű darabján, a keresztmetszet normálisának az irányába, egységnyi idő alatt átáramlott töltésmennyiséget.* Az áramsűrűség ($\mathfrak{i}$) vektor, amelynek a dimenziója:

$$[\mathfrak{i}] = \frac{\text{coulomb}}{\text{felület} \cdot \text{másodperc}} = \frac{\text{ampère}}{\text{méter}^2}. \tag{3.14}$$

Az áramerősség és az áramsűrűség definíciójából következik, hogy az áramerősség nem más, mint az áramsűrűség fluxusa a vezető F felületű keresztmetszetén át:

$$I = \int_F i_n df. \qquad (i_n = i \cos(\mathfrak{i}, \mathfrak{n})) \tag{3.15}$$

(i) *Azoknak a görbéknek az összességét, amelyeknek az érintője minden pontban az áramsűrűség vektorának az irányába mutat áramvonalaknak* (pontosabban: *vezetési áramvonalaknak*) *nevezzük.*

(ii) Az elektromos áram és az áramvonalak fogalmával a kísérleti fizikában az egyenáramok tulajdonságainak a vizsgálata során ismerkedünk meg. Ugyanitt megtudjuk azt is, hogy az áramvonalak mindig zárt görbék, tehát az egyenáramú áramkör mindig zárt. Nem kétséges azonban, hogy elektromos áramról, ill. elektromos áramkörröl akkor is beszélnünk kell, amikor pl. váltakozó áramú körben az áramkör kondenzátoron át záródik, jóllehet nem kétséges, hogy a kondenzátor szigetelőrétegén nem hatol keresztül a vezetési áram, hogy zárhassa az áramkört. Hogy a zárt áramkörök fogalmát ebben az esetben is fentarthassuk, feltételezzük, hogy a szigetelőkben egy speciális, a vezetési áramtól minőségileg különböző áram folyik, ami egyébként éppen úgy mágneses teret kelt maga körül, mint a vezetési áram. Ez az áram azonban nem kapcsolatos töltésvándorlással, hiszen speciális körülmények között a jelenlétével még vákuum esetében is számolnunk kell.

A szigetelőkben folyó ezen áramot, amely tehát váltakozó áram esetén zárja az áramkört, a gerjesztettségi vektor időszerinti differenciálhányadosával azonosíthatjuk, hiszen:

$$(3.16)\qquad [\dot{\mathfrak{D}}] = \frac{\text{coulomb}}{\text{méter}^2\,\text{sec}} = \frac{\text{ampère}}{\text{méter}^2}.$$

Ezt az áramot *gerjesztettségi áramnak* (vagy a régebbi terminológiával élve: *eltolódási áramnak*) nevezzük. Az elektromágneses tér elméletében az egyik legdöntőbb fontosságú felfedezés a gerjesztettségi áram létezésének a felismerése volt, ami még MAXWELL érdeme, mert ily módon vált lehetővé a gyorsan változó terek törvényszerűségeinek a feltárása és ez vezetett az elektromágneses hullámok szükségszerű létezésének a felismerésére, még az eletromágneses hullámok kísérleti felfedetése, ill. előállítása előtt.

(*iii*) A természetben azonban sem tökéletes szigetelők, sem tökéletes vezetők nincsenek. Ezért néha — pl. gyorsan változó terek esetén — még a legtökéletesebb vezetőkben is számolnunk kell gerjesztettségi árammal és szigetelők esetében is fellép bizonyos mértékű vezetési áram. Be szokás tehát vezetni a *teljes áramsűrűség* fogalmát, mint a vezetési és a gerjesztési áramsűrűség eredőjét:

$$(3.17)\qquad \mathfrak{C} = \mathfrak{i} + \dot{\mathfrak{D}}$$

és általános esetben feltételezzük, hogy a mágneses teret a teljes áramsűrűség kelti.

3.4. *A mágneses indukciós vektor.* Amint azt fentebb említettük a mágneses tér intenzitását az árammal átfolyt vezetőre ható ponderomotoros erő segítségével mérhetjük. A mágneses térnek azt az állapothatározóját, amely a mágneses tér erősségét jelemzi *indukciós vektornak* ($\mathfrak{B}$) nevezzük.* Az indukciós vektort kétféleképpen definiálhatjuk:

a) Mindenekelőtt bevezetjük a *lineáris vezető*, vagy az elektrotechnikában szokásos terminológiával élve, a *vezeték fogalmát: Lineáris vezetőnek nevezzük az olyan vezetőt, amelynek a vastagsága elhanyagolható a hosszúságához képest.* Legyen a vezető infinitezimális hosszúságú darabjának a

* A $\mathfrak{B}$ indukciós vektort tulajdonképpen az elektromos analógiának megfelelően mágneses térerősségnek kellene nevezni, az elmélet keletkezésének idején azonban a 3.5, pontban bevezetendő $\mathfrak{H}$ vektort nevezték mágneses térerősségnek. Tekintettel arra, hogy ez az elnevezés már teljesen átment a köztudatba, legalább is hazai viszonylatban félreértésre vezethetne, ha megváltoztatnánk a terminológiát, jóllehet a $\mathfrak{H}$ vektort újabban számos szerző mágneses gerjesztettségi vektornak és a $\mathfrak{B}$ vektort mágneses térerősségnek, vagy mágneses intenzitás vektornak nevezi.

keresztmetszete F és hossza $d\mathfrak{s}$, ahol a vezeték ds vonaleleme természetesen most nyilvánvaló módon az áramsűrűség irányával párhuzamos, akkor a lineáris vezető $d^3\mathfrak{r} = Fd\mathfrak{s}$ nagyságú infinitezimális térfogatán időegység alatt átfolyó vezetési áram erőssége, az áramerősség és az áramsűrűség definíciója alapján

$$\int_F \mathfrak{i}d^3\mathfrak{r} = \int_F \mathfrak{i}\cdot df\cdot d\mathfrak{s} = \int_F i_n df\cdot d\mathfrak{s} = Id\mathfrak{s}. \tag{3.18}$$

Az $Id\mathfrak{s}$ mennyiséget a kísérleti fizikában *áramelemnek* nevezzük. Az áramelem vektor mennyiség dimenziója:

$$[Id\mathfrak{s}] = \text{áramerősség} \cdot \text{méter} = \text{ampèreméter}. \tag{3.19}$$

Ezen előkészítés után, *mágneses indukciós vektornak nevezzük az egységnyi áramelemre* (tehát a lineáris vezető egységnyi áramerősséggel átfolyt egységnyi hosszúságú darabjára) *ható mágneses ponderomotoros erőt.* Dimenziója:

$$[\mathfrak{B}] = \frac{\text{newton}}{\text{ampère}\cdot\text{méter}} = \frac{\text{newton}\cdot\text{másodperc}}{\text{coulomb}\cdot\text{méter}} = \frac{\text{newtonméter}\cdot\text{másodperc}}{\text{coulomb}\cdot\text{méter}^2} =$$
$$= \frac{\text{joule}\cdot\text{másodperc}}{\text{coulomb}\cdot\text{méter}^2} = \frac{\text{voltsec}}{\text{méter}^2}. \tag{3.20}$$

Ezen elv alapján mérhető ki a mágneses tér intenzitása pl. a COTTON-féle magnetométer segítségével. A $\mathfrak{B}$ irányát a továbbiakban fogjuk definiálni.

b) A mágneses indukciós vektor másik definíciója, amely valamivel bonyolultabb, mint az előző, de ugyanakkor elvileg egyszerűbb és metodikailag tisztább, amennyiben nem igényli az áramelem fogalmának a bevezetését, a következő:

Helyezzünk a mágneses térbe egy kisméretű próbatekercset, amelynek a menetei által körülzárt felület F és amelyben I áramerősségű elektromos áram folyik. Felfüggesztve ezt egy torziós szálra, a tekercs tengelye beáll egy meghatározott irányba. A tekercs tengelyét úgy irányítjuk, hogy a meneteiben folyó áram iránya a tengely körül jobbra forduló legyen. Amennyiben a tekercs tengelyét a mágneses meridián síkjában, irányára merőlegesen kitérítjük, a ráható mágneses ponderomotoros erő a tekercset eredeti helyzetébe visszatéríteni igyekszik. A tapasztalat szerint a fellépő forgatónyomaték arányos a tekercsben folyó áram erősségével és a tekercs F felületével:

$$N = B\cdot F\cdot I. \tag{3.21}$$

Az így bevezetett

$$B = \frac{N}{F\cdot I} \tag{3.22}$$

arányossági tényezőt az *indukciós vektor* abszolut értékének nevezzük és feltesszük, hogy a $\mathfrak{B}$ vektor iránya megegyezik a tekercs tengelyének az irányával. Az indukciós vektor dimenziója ezen definíció szerint ugyancsak:

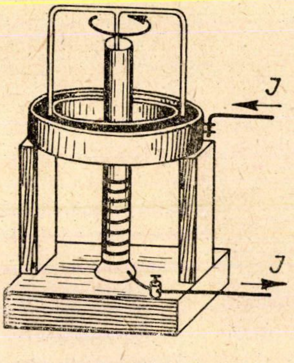
$$(3.23) \qquad [\mathfrak{B}] = \frac{\text{erő·karja}}{\text{felület·áramerősség}} = \frac{\text{newtonméter}}{\text{coulomb}} \cdot \frac{\text{másodperc}}{\text{méter}^2} = \frac{\text{voltsec}}{\text{méter}^2}.$$

(*i*) *Azoknak a görbéknek az összességét, amelynek iránya minden pontjukban az indukciós vektor irányába mutat, mágneses indukciós vonalaknak nevezzük.*

(*ii*) *Az F felületen át, a normális irányban átmenő indukciós vonalak számát, tehát az indukciós vektornak az F felületen való fluxusát, indukciós fluxusnak* (Φ) *nevezzük.*

$$(3.24) \qquad \Phi = \int_F B_n df. \qquad (B_n = B \cos(\mathfrak{B}, \mathfrak{n}))$$

(*iii*) Az indukciós vektor fontos tulajdonságát ismerhetjük meg az *egypólusú elektromotor* segítségével: Egy vasmagos tekercs vasmagját hosszabbítsuk meg és a függőleges helyzetű meghosszabbított vasmag felső végére egy kis mélyedésben helyezzünk el egy higanycseppet. A vasmagra merőleges vízszintes síkban helyezzünk el egy köralakú vályút és abba öntsünk szintén higanyt. Ezekután készítsünk egy kis *U*-alakú drótkeretet, amely a súlypontjában odaforrasztott kis tengelyen a vasmag felső végén levő mélyedésben nyugszik, míg a másik két vége beleér a vályúban levő higanyba. Áramot vezetve a kereten át, oly módon, hogy az áramforrás pozitív sarkát a vályúban levő higanyhoz és a negatív sarkát a vasmaghoz kapcsoljuk, a drótkeret forgásba jön, mert (mint azt a 2. ábrán láthatjuk) a tekercs mágneses tere erőpárt hoz létre, amelynek a forgatónyomatéka ellentétes a keret két ágában.



2. ábra

Számítsuk ki azt a munkát, amelyet akkor nyerünk, ha a drótkeret a tengelye körül egyszer körülfordul. A drótkeret $d\mathfrak{s}_1$ szakaszában folyó $Id\mathfrak{s}_1$ áramelemre ható ponderomotoros erő az indukciós vektor *a*) alatti definíciója alapján $Id\mathfrak{s}_1 \times \mathfrak{B}$. Mozduljon el a tekercs $d\mathfrak{s}_2$ úton, akkor a végzett munka

$$(3.25) \qquad dA = (Id\mathfrak{s}_2 \times \mathfrak{B})d\mathfrak{s}_2 = I\mathfrak{B}(d\mathfrak{s}_2 \times d\mathfrak{s}_1) = I\mathfrak{B}d\mathfrak{f} = IB_n df,$$

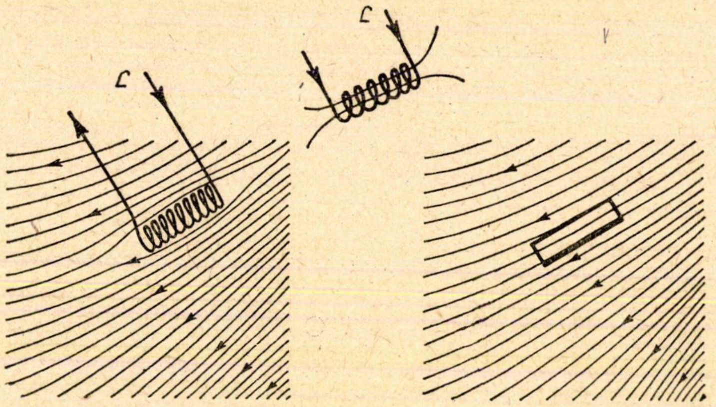
ahol $d\mathfrak{f} = d\mathfrak{s}_2 \times d\mathfrak{s}_1$ az a felületelem, amelyet a tekercs $d\mathfrak{s}_1$ darabja ezen elfordulás közben súrol. Jelöljük *F*-fel azt a felületet, amelyet a teljes drótkeret egy körülfordulása alatt súrolt, akkor az egy körülfordulás alatt végzett munka

(3.26) $$A = I\int_F B_n df = I \cdot \Phi .$$

Amennyiben a drótkeret zárt lenne és ily módon körülfordulása alatt egy zárt felületet súrolna, akkor — tekintettel arra, hogy *az indukciós vonalak a tapasztalat szerint mindig zárt görbék* — a nyert munka egy teljes körülfordulása alatt zéró lenne, hiszen az F felületen ebben az esetben ahány erővonal lépne ki a felület egyik oldalán, ugyanannyi lépne be az ellenkező oldalon, következésképpen az indukciós fluxus eltünnék ($\Phi = 0$). Az indukciós vonalak zártságának következtében tehát

(3.27) $$\oint_F B_n df = 0.$$

Ezt a törvényt MIE *a mágneses térintenzitás alaptörvényének nevezi.**



3. ábra

3.5. *A mágneses gerjesztettségi vektor.* Tapasztalatból tudjuk, hogy lágy vasdarabot helyezve egy árammal átfolyt tekercs belsejébe, az a tekercs (jó közelítéssel homogén) mágneses terében megmágneseződik és az ilyen ún. vasmagos tekercsek éppen a legerősebb elektromágnesek, hiszen a vas igen jól mágnesezhető, A vas mágneseződése — állandó hőmérsékleten — mint ismeretes függ a mágneses tér erősségétől és a mágneses tér gerjesztettségének mértékéül használható.

* Könnyen belátható, hogy ez a megállapítás egyenértékű azzal a jólismert ténnyel — feltéve, hogy a klasszikus felfogás szerint a mágneses tér forrásának a mágneses pólusokat tekintjük — hogy a pozitív és negatív mágneses pólusokat nem lehet elkülöníteni és a természetben mindig csak mágneses dipólokkal találkozunk.

A mágneses tér gerjesztettségének a meghatározása céljából a következőképpen járhatunk el: Tekintsük a mágneses tér egy kis hengeralakú tartományát, amely olyan kicsi, hogy a belsejében a mágneses tér homogénnak tekinthető. Nyilvánvaló, hogy a mágneses tér ugyanazon helyén, a közeg ugyanolyan mértékű mágnesezettsége a külső mágneses tér jelenléte nélkül is megvalósítható, ha ezt a kis hengeralakú tartományt megfelelő árammal átfolyt tekerccsel vesszük körül. A probléma csak az, hogyan válasszuk meg a tekercsben folyó áram erősségét. Ezt azonban kompenzációs módszerrel könnyen megállapíthatjuk. Helyezzük a mágneses térbe a fenti tekercset és folyassunk át rajta olyan áramerősségű áramot, hogy az a külső mágneses teret éppen kikompenzálja. A külső mágneses tér kikompenzálódását úgy ellenőrizhetjük, hogy a tekercs belsejébe torziós szálon egy kis mágnestűt függesztünk fel és azzal ellenőrizzük, hogy a kompenzáció mikor sikerült.

A tapasztalat szerint a mágneses tér gerjesztettsége arányos az áramerősséggel, a tekercs meneteinek a számával (n) és fordítottan arányos a tekercs hosszával (l). A mágneses tér gerjesztettségét ezek alapján egy $\mathfrak{H}$ vektorral jellemezhetjük, amelynek az abszolut értéke

$$H = I\frac{n}{l} \tag{3.28}$$

és iránya megegyezik a tekercs tengelyének az irányával. Az így értelmezett $\mathfrak{H}$ vektort a *mágneses tér gerjesztettségi vektorának* (vagy a klasszikus — de félreértésre alkalmat adó — terminológia szerint: *mágneses térerősségnek*) nevezzük. A mágneses gerjesztettségi vektor dimenziója

$$[\mathfrak{H}] = \frac{\text{ampèremenetszám}}{\text{méter}}.$$

(*i*) *Azoknak a görbéknek az összességét, amelyeknek az érintője minden pontjukban a mágneses gerjesztettségi vektor irányába mutat, a mágneses tér gerjesztettségi vonalainak* (a régi terminológiával élve: *mágneses erővonalaknak*) *vagy H-vonalaknak nevezzük.*

(*ii*) Tekintsünk most két hosszú koaxális hengert, amelyek közül az egyikben az egyik, a másikban pedig az ellenkező irányban folyik az áram. Ismeretes, hogy ilyen körülmények között csak a két henger között lesz mágneses tér és szimmetriaokokból az is nyilvánvaló, hogy a mágneses tér hengerszimmetrikus lesz, következésképpen a gerjesztettségi vonalak koncentrikus körök lesznek, amelyek síkja merőleges a koaxális kábel tengelyére. Tekintsünk pl. egy r sugarú K_r gerjesztettségi vonalat, amely mentén a mágneses gerjesztettségi vektor — nyilvánvaló módon ismét szimmetriaokokból — H = konst. Rekesszük ki ezt a gerjesztettségi vonalat egy kis toroid-tekercs segítségével. A gerjesztettségi vektor fenti definíciója alapján azonban

$$\oint_{K_r} H_s ds = 2\pi r H = I. \tag{3.29}$$

Az ún. ROGOWSKI-féle tekercs segítségével bebizonyítható, hogy ez az összefüggés általános érvényű és független a vezetőt körülzáró S görbe speciális megválasztásától:

$$\oint_S H_s ds = I. \tag{3.30}$$

Ezt az összefüggést *a mágneses tér gerjesztettségi alaptörvényének* szokás nevezni. Egyébként az $\oint_S H_s ds$ mennyiséget *mágneses körfeszültségnek* hívjuk.

3.6. *A* FARADAY*-féle indukciós törvény.* Az indukció jelenségének a felfedezése során FARADAY megállapította, hogy amennyiben egy zárt vezetékkel (S) határolt F felületen át megváltozik a normális irányában átmenő erővonalak száma, akkor a vezetékben elektromos körfeszültség indukálódik; kvantitative:

$$\oint_S E_s ds = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_F B_n df. \tag{3.31}$$

A fenti előjelet ismeretes módon LENZ szabálya rögzíti.

3.7. *Az elektromágneses tér intenzitás- és kvantitás-mennyiségei.* A fenti meggondolásokból kiderül, hogy az elektromágneses tér intenzitását (erősségét) az elektromos tér és a mágneses tér egy-egy állapothatározója, nevezetesen az elektromos térerősség vektor ($\mathfrak{E}$) és a mágneses indukciós vektor ($\mathfrak{B}$) jellemzi. Felhasználva a (3.6) és (3.20) alatti dimenzionális egyenleteket azonnal láthatjuk, hogy a (3.31) FARADAY-féle törvény pusztán dimenzionális okokból csak ezen intenzitás mennyiségek között teremthet összefüggést.

Ugyanakkor az elektromágneses tér gerjesztettségi fokát a két gerjesztettségi vektor, nevezetesen a $\mathfrak{D}$ elektromos és a $\mathfrak{H}$ mágneses gerjesztettségi vektor jellemzi. Ezek a gerjesztettségi vektorok végső soron az elektromos és mágneses tér forrásainak az erősségétől függenek, ezért szokás őket kvantitás mennyiségeknek is nevezni.

Hogy a mágneses tér állapothatározói közül éppen az indukciós vektor az elektromos térerősséggel analóg mennyiség, az a fenti meggondolásokon túlmenően indokolható részint az elektronelmélet, részint pedig a relativisztikus elektrodinamika alapján; ezzel a kérdéssel azonban most nem foglalkozunk.

3.8. *A homogén és az inhomogén elektromágneses tér.* A fenti meggondolások során éltünk egy nyivánvaló, hallgatólagos feltétellel, amelyet részletesebben kell elemeznünk, mert a térelméletekre általánosan jellemző, döntő fontosságú, elvi kérdés rejlik mögötte.

Amikor az imént az egyes állapothatározókat definiáltuk, nyilvánvaló, hogy az ott ismertetett mérési eljárások gyakorlatilag csak homogén elektromos és mágneses térben hajthatók végre. Inhomogén térben ezek a mérési módszerek csak közelítő eredményt szolgáltathatnak. Könnyen beláthatjuk ezt bármelyik állapothatározó esetében, ezért tekintsük az egyszerűség kedvéért példaképpen az elektromos térerősség mérését elektrostatikus tér esetében. Azt mondottuk, hogy az elektromos térerősséget az egységnyi töltéssel rendelkező próbatest segítségével mérhetjük. Legyen ez a próbatest egy kis bodzabélgolyó, amelyben az elektromos töltés eloszlását a $\varrho=\varrho(\mathfrak{r})$, ismertnek feltételezett, *töltéssűrűség* írja le. Feltesszük természetesen, hogy a $\varrho(\mathfrak{r})$ függvény a bodzabélgolyó belsejében folytonos és azon kívül azonosan eltűnő, egyébként integrálható függvény és ily módon az integrálja megadja a bodzabélgolyó összetöltését, e-t:

$$\int_{\infty}\varrho(\mathfrak{r})d^3\mathfrak{r}=\int_{V}\varrho(\mathfrak{r})d^3\mathfrak{r}=e, \tag{3.32}$$

ahol $d^3\mathfrak{r}$ a térfogatelem és V bodzabélgolyó teljes térfogata. Természetesen a ϱ töltéssűrűség dimenziója:

$$[\varrho]=\frac{\text{töltés}}{\text{térfogat}}=\frac{\text{coulomb}}{\text{méter}^3}=\frac{\text{amperesec}}{\text{méter}^3}. \tag{3.33}$$

Homogén elektromos tér esetén ($\mathfrak{E}=\text{konst.}$) az egész próbatestre ható ponderomotoros erő, a térerősség vektorának definíciója alapján

$$\mathfrak{K}=\int_{V}\varrho(\mathfrak{r})\mathfrak{E}d^3\mathfrak{r}=\mathfrak{E}\int_{V}\varrho(\mathfrak{r})d^3\mathfrak{r}=e\mathfrak{E}. \tag{3.34}$$

Inhomogén elektromos tér esetében azonban $\mathfrak{E}=\mathfrak{E}(\mathfrak{r})$, következésképpen a bodzabélgolyó véges kiterjedése esetében a különböző térfogatelemében lévő töltésre ható erő különböző és (még $\varrho=\text{konst.}$ sűrűségeloszlás esetén is) így a ponderomotoros erőnek csak az átlagát mérhetjük, hiszen

$$\mathfrak{K}=\int_{V}\varrho(\mathfrak{r})\mathfrak{E}(\mathfrak{r})d^3\mathfrak{r}. \tag{3.35}$$

Még bonyolultabb a helyzet gyorsan változó elektromos tér esetén ($\mathfrak{E}=\mathfrak{E}(\mathfrak{r};t)$), amikor a mérés véges időtartama miatt a ponderomotoros erőnek csak a térbeli és időbeli átlagát mérhetjük:

$$\mathfrak{K}=\frac{1}{T}\int_{0}^{T}\int_{V}\varrho(\mathfrak{r};t)\mathfrak{E}(\mathfrak{r};t)d^3\mathfrak{r}dt. \tag{3.36}$$

Nyilvánvaló, hogy akármilyen mértékben csökkentjük is elvileg a mérés időtartamát, ahhoz, hogy a térerősséget a térben pontról pontra kimérhessük, pontszerű próbatestre lenne szükségünk, ami azonban lehetetlen, mert ebben az esetben a própatest töltésének is egy $\mathfrak{r}_0$ pontra kellene koncentrálódnia, ami azonban azt jelenti, hogy a $\varrho = \varrho(\mathfrak{r})$ fotytonos és integrálható függvénynek ki kellene elégítenie a

$$(3.36) \qquad \lim_{V\to 0}\int_V \varrho(\mathfrak{r})d^3\mathfrak{r} = \lim_{V\to 0}\left\{V\cdot\frac{1}{V}\int_V \varrho(\mathfrak{r})d^3\mathfrak{r}\right\} = \lim_{V\to 0}\{V\cdot\varrho(\mathfrak{r}_0)\} = e$$

egyenletet. Ez azonban azt jelentené, hogy $\varrho(\mathfrak{r})$ függvény az $\mathfrak{r}_0$ pontban $V\to 0$ esetén olyan mértékben tart végtelenhez, hogy V-vel szorozva, $V=0$ határesetben megadja a próbatest össztöltését, különben pedig azonosan zéró. Ilyen függvény azonban — amint az a DIRAC-féle δ-val kapcsolatban kiderült — nem létezik és egy ilyen sűrűségeloszlás csak a SCHWARTZ-féle disztribucióelmétet keretében értelmezhető.

Ez a paradoxon nemcsak a MAXWELL-féle elméletben, hanem a többi fizikai térelméletben (EINSTEIN-féle gravitációs elmélet, mezon-elmélet, stb.) is fellépp és nem kétséges, hogy a különböző terek kimérésének a problémája, valamint a további jól ismeretes divergencia-problémák (pl. a tér forrásainak végtelenné váló ún. sajátenergiája) végső soron erre vezethetők vissza.

Ezekkel a problémákkal azonban most nem foglalkozhatunk és — az egyébként csak hallgatólagosan kialakult szokásnak megfelelően — a fenti paradoxont úgy hidalhatjuk át, hogy tudomásul vesszük azt a tényt, hogy az egyes állapothatározóknak csak egy-egy pontra vonatkoztatott átlagát határozhatjuk meg, ami egyébként egy fenomenológiai elmélet követelményeinek megfelel, noha igen kicsiny (atomfizikai) dimenzióban (kvantumelektrodinamika) már nem kielégítő és az ismert határozatlansági relációra vezet.

(*i*) A fent bevezetett ϱ töltéssűrűség segítségével, ami általános esetben még az idő függvénye is lehet (3. 29) alapján (3. 9) alatti egyenletünk a következő alakba írható:

$$(3.37) \qquad \oint_F D_n df = \int_V \varrho d^3\mathfrak{r},$$

ahol F a ϱ térfogatot határoló zárt felületet jelenti.

(*ii*) Hasonlóképpen (3. 15) és (3. 30) alapján

$$(3.38) \qquad \oint_S H_s ds = \int_F i_n df,$$

ahol S az F felületet határoló zárt görbe.

4. §. A Maxwell-elmélet axiómarendszerének első csoportja

A fentiekben röviden összefoglalt, túlnyomórészt kísérleti megállapítások után, most már megadhatjuk a MAXWELL-elmélet axiómarendszerének első csoportját. Ezek az axiómák az ismertetett kísérleti megállapítások közvetlen általánosításai lesznek. Az általánosítás abban áll, hogy míg eddig konkrét fizikai mérésekre gondoltunk — pl. a FARADAY-féle indukciós törvény esetében feltettük, hogy a görbe egy zárt vezeték mentén halad és az indukciós fluxus változása a vezetékben indukál elektromos körfeszültséget — addig a továbbiakban feltesszük, hogy a szóbajövő térfogatok és az őket határoló zárt felületek, ill. a felületek és az őket határoló zárt görbék, tetszés szerintiek lehetnek, tehát nem kell nekik szükségszerűen a vezetők mentén haladniok. Az axiómáink tehát a priori általános megállapítások lesznek, amelyek helyessége speciális — kísérletileg realizálható — körülmények között ellenőrizhető és azonosak a fentebb ismertetett tételekkel.

Az axiómáink részben definiálják a tér állapothatározóit, részben pedig megadják a köztük levő alapvető kapcsolatokat. Öt csoportba soroljuk őket:

(*i*) *Gerjesztési axiómák (G)*
(*ii*) *Realizálhatósági axiómák (R)*
(*iii*) *Állapotaxiómák (A)*
(*iv*) *Kapcsolási axiómák (K)*
(*v*) *Anyagi axiómák (M)*

Az egyes állapothatározók definíciójául szolgáló állapot-axiómák esetében megadjuk az illető állapothatározó dimenzióját és a mérési eljárást, amelynek a segítségével meghatározható. Ily módon utalunk arra, hogy az illető állapothatározó az elektromágneses tér reális jellemzője. Az anyagi axiómák során posztuláljuk, hogy a közeg, amelyben a tér gerjesztődik, néhány fenomenológiai állapothatározóval jellemezhető. Ezekkel az axiómákkal azonban (három kivételével) a 7. §.-ban fogunk foglalkozni.

G. I. axióma: *Az elektromágneses teret az elektromos töltések és áramok keltik.*

G. II. a. axióma: *Az elektromos töltés a priori adott fizikai realitás, amelynek a sűrűségeloszlását az ismertnek feltételezett* $\varrho = \varrho(\mathfrak{r}; t)$ *függvény határozza meg.*

G. II. b. axióma: *Kétfajta elektromos töltés ismeretes, amelyek adott körülmények között ellentétes módon viselkednek. Az egyik fajtájukat pozitív, a másikat negatív elektromos töltésnek nevezzük.*

Dimenziója: coulomb = ampèresec.

A mérési eljárás: A pozitív elektromos töltés egysége az a töltésmennyiség, amely az ezüstcoulométer feltöltődésénél időegység alatt 1,11815 mg ezüstöt választ ki.

R. I. axióma: *A töltéssel rendelkező testekre az elektromágneses térben mechanikai erő hat, amelyet ponderomotoros erőnek nevezünk.*

R. II. axióma: *Az elektromágneses tér jelenlétéről ponderomotoros erőhatása és munkavégzőképpességének a mérése révén győződhetünk meg; az utóbbit az elektromágneses tér energiájának nevezzük.*

A. I. a. axióma: *A nyugvó töltések, ill. töltéseloszlás maga körül elektromos erőteret kelt.*

A. I. b. axióma: *Az elektromágneses tér intenzitásával és gerjesztettségi állapotával jellemezhető.*

A. I. c. axióma: *Az elektromos tér intenzitását az elektromos térerősség vektorával jellemezzük ($\mathfrak{E}$), amely megadja az egységnyi töltésre ható ponderomotoros erőt.*

Dimenziója: newton/coulomb = volt/méter.

A mérési eljárás: Mérjük az egységnyi töltésű próbatestre ható ponderomotoros erő átlagát.

A. I. d. axióma: *Az elektromos tér gerjesztettségi állapotát töltésmegosztóképességével jellemezzük. Jellemzésére bevezetjük az elektromos tér gerjesztettségi vektorát ($\mathfrak{D}$), amelynek a fluxusa egy tetszés szerinti zárt F felületen át megegyezik a felület által határolt V térfogatban lévő töltésmennyiséggel.*

$$\oint_F D_n df = \int_V \varrho d^3 r. \tag{4.1}$$

Dimenziója: coulumb/méter² = ampèresec/méter².

A mérési eljárás: Az előző paragrafusban említett kondenzátor felületén meghatározzuk a töltésmegosztás következtében influált töltést.

M. I. axióma: *A természetben található testeket, annak megfelelően, hogy rajtuk az elektromos töltés gyakorlatilag mérhetetlenül rövid idő alatt szétoszlik-e vagy lokalizálva marad, vezetőknek. ill. szigetelőknek nevezzük.*

M. II. a. axióma: *A vezetőkben az elektromos tér hatására elektromos áram folyik. A vezető keresztmetszetén egységnyi idő alatt áthaladó töltésmennyiséget vezetési áramnak nevezzük.*

Dimenziója: coulomb/sec = ampère.

A mérési eljárás: Egysége az az áram, amely az ezüstcoulométerben egységnyi idő alatt 1,11815 mg ezüstöt kiválaszt.

M. II. b. axióma: *Vezetési áramsűrűségnek nevezzük az egységnyi idő alatt az áram irányára merőleges egységnyi felületen áthaladt töltésmennyiséget* ($\mathfrak{i}$).

Dimenzió: ampère/méter².

M. II. c. axióma: *A gerjesztettségi vektor idő szerinti differenciálhányadosa váltakozó elektromos erőtér esetén szigetelőn át is képes a vezetési áramot zárni, ezért gerjesztettségi áramnak nevezzük.*

Dimenziója: ampère/méter².

G. II. c. axióma: *A vezetési és a gerjesztettségi áram az elektromágneses tés gerjesztésénél egyenértékű szerepet játszik és összegüket teljes áramnak nevezzük:*

(4.2) $$\mathfrak{C} = \mathfrak{i} + \dot{\mathfrak{D}}.$$

G. II. d. axióma: *A teljes áram az elektromos tértől minőségileg különböző erőteret kelt, amelyet mágneses térnek nevezünk.*

A. II. a. axióma: *Az árammal átfolyt vezetőkre és mozgó töltésekre a mágneses tér ponderomotoros erőhajtást fejt ki.*

A. II. b. axióma: *A mágneses tér állapotát intenzitásával és gerjesztettségével jellemezzük.*

A. II. c. axióma: *A mágneses tér intenzitását az ún. mágneses indukciós vektorral ($\mathfrak{B}$) jellemezzük, amely megadja az egységnyi vezetési árammal átfolyt vezetők hosszegységére ható ponderomotoros erőt.*

Dimenzió: newton/ampèreméter = voltsec/méter².

A mérési eljárás: A Cotton-féle magnetométer vagy az előző paragrafusban részletezett kis próbatekercs segítségével mérjük.

A. II. d. axióma: *A mágneses indukciós vektor irányának megfelelő érintőjű görbék, a mágneses indukciós vonalak, mindig zártak és így az indukciós vektor fluxusa, tetszés szerinti zárt F felületen át, eltűnik;*

(4.3) $$\oint_F B_n df = 0.$$

A. II. e. axióma: *A mágneses tér gerjesztettségét mágnesezőképességével és a megfelelő mágnesezettséget biztosító elektromos árammal jellemezzük. A gerjesztettségi állapot leírására a mágneses gerjesztettségi vektor, régebbi terminológia szerint az ún. mágneses térerősség vektora, ($\mathfrak{H}$) szolgál. A teljes mágneses gerjesztettség analitikai leírása a gerjesztettségi vektor tetszés szerinti zárt S görbe mentén vett vonalintegrálja, az ún. mágneses körfeszültség, segítségével történik, amely megegyezik az S görbével határolt tetszés szerinti F felületen átmenő teljes árammal:*

(4.4) $$\oint_S H_s ds = \int_F C_n df.$$

Dimenzió: ampèremenet/méter.

A mérési eljárás: A tér teljes gerjesztettségét a Rogowski tekercs segítségével mérjük.

K. I. axióma: *Az elektromos és mágneses tér időbeli változása közvetlen és kölcsönösen egyértelmű kapcsolatban van egymással.*

K. II. axióma: *Tetszés szerinti S zárt görbe mentén az elektromos térerősség vonalmenti integrálja, az ún. elektromos körfeszültség arányos az S görbe által határolt tetszés szerinti F felületen átmenő indukciós vonalak számának időegységre eső megváltozásával:*

$$\oint_S E_s ds = -\frac{d}{dt}\int_F B_n df. \tag{4.5}$$

5. §. A Maxwell-féle egyenletek első csoportja

A teljes áramsűrűség fogalmának a bevezetése révén a fenti integrálegyenletek teljesen általános érvényűek.

A GAUSS- és a STOKES-tételek segítségével ezeket az egyenleteket a következő alakba írhatjuk:

$$\int_V \{\vec{\nabla}\cdot\mathfrak{D}-\varrho\}d^3\mathfrak{r}=0, \qquad \int_F \{\vec{\nabla}\times\mathfrak{E}+\dot{\mathfrak{B}}\}_n df=0, \tag{5.1}$$

$$\int_V \vec{\nabla}\cdot\mathfrak{B}d^3\mathfrak{r}=0, \qquad \int_F \{\vec{\nabla}\times\mathfrak{H}-\dot{\mathfrak{D}}-\mathfrak{i}\}_n df=0, \tag{5.2}$$

ahol $\vec{\nabla}=\{\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2, \partial/\partial x_3\}$ a nabla-operátor és az n index a zárójel mellett arra utal, hogy a zárójelben lévő vektornak az F felület normálisának az irányába mutató komponense veendő. Tekintettel arra, hogy a fenti összefüggéseknek tetszés szerinti térfogat és felület esetében érvényben kell lenniök, kapjuk, hogy

$$\vec{\nabla}\cdot\mathfrak{D}=\varrho \qquad \vec{\nabla}\times\mathfrak{E}+\dot{\mathfrak{B}}=0 \tag{5.3}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\mathfrak{B}=0 \qquad \vec{\nabla}\times\mathfrak{H}-\dot{\mathfrak{D}}=\mathfrak{i}. \tag{5.4}$$

Ezek az egyenletek a MAXWELL-*egyenletek,* az elektromágneses térnek az axiómáinkból levezetett alapegyenletei, az ún. *téregyenletek,* amelyek végső fokon egyértelműen leírják az elektromágneses térben lejátszódó jelenségeket.

A MAXWELL-egyenletek első csoportja azonban még nem határozza meg egyértelműen az állapothatározókat, hiszen közvetlenül láthatjuk, hogy nagyobb az ismeretlen függvények száma, mint az egyenleteké, ezért további összefüggésekre van szükség a tér intenzitás-mennyiségei és a gerjesztettségi vektorai között.

Ezen túlmenően az integrálegyenletek alapján levezethetők azok az általános érvényű *határfeltételek,* amelyek még a fenti matematikai probléma megoldásához szükségesek. Ezeket azonban most nem kívánjuk részletezni.

6. §. Az anyag fenomenológiai jellemzése

A tér intenzitásmennyiségei és a gerjesztettségi vektorok közti kapcsolat megállapításánál tekintettel kell lennünk annak a közegnek a fizikai tulajdonságaira, amelyben az elektromágneses tér gerjesztődik. Ezeknek a tulajdonságoknak a megállapításánál tulajdonképpen tekintettel kellene lennünk az anyag atomisztikus felépítésére. A MAXWELL-elmélet keretében azonban lényeges egyszerűsítő feltevést vezetünk be, amikor feltesszük, hogy az anyag néhány fenomenológiai állapothatározóval jellemezhető. Ennek a leírási módnak megvannak a maga természetes hátrányai, amelyek egyben határt szabnak a MAXWELL-elmélet alkalmazhatóságának. Ugyanakkor azonban vannak ennek a módszernek lényeges előnyei is, amennyiben az elmélet ily módon független lesz az atomfizikai és anyagszerkezeti ismereteink fejlődésétől.

6. 1. *A dielektromos állandó és a mágneses permeabilitás.* A közegek elektromos állapotát a *dielektromos állandóval* (ε) és a mágneses állapotát a *mágneses permeabilitással* (μ) jellemezzük. A mérések tanúsága szerint mind az elektromos, mind pedig a mágneses gerjesztettségi vektor — széles határok között — lineárisan függ a megfelelő intenzitás mennyiségektől, ezért attól függően, hogy a közeg izotróp vagy anizotróp, a következő összefüggéseket sikerült megállapítani:

(6.1) $$\mathfrak{D} = \varepsilon \mathfrak{E}, \qquad \mathfrak{H} = \frac{1}{\mu} \mathfrak{B}, \qquad \textit{(izotróp közeg)}$$

(6.2) $$D_i = \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ik} E_k, \qquad B_i = \sum_{k=1}^{3} \mu_{ik} H_k. \qquad \textit{(anizotróp közeg)}$$

Amikor most itt dielektromos állandóról, ill. dielektromos tenzorról ($\varepsilon_{ik} = \varepsilon_{ki}$) és mágneses permeabilitásról, ill. permeabilitási tenzorról ($\mu_{ik} = \mu_{ki}$) beszélünk, időbeli állandóságot értünk alatta. Amennyiben az ε (ill. ε_{ik}) és a μ (ill. μ_{ik}) térben is állandó, a közeget *homogénnek,* különben pedig *inhomogénnek* nevezzük.

Ezek a lineáris összefüggések szembeszökően ferromágneses és ferroelektromos közegek esetén nem érvényesek, amikor is a $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}(\mathfrak{E})$ és $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}(\mathfrak{B})$ függvények jelentékeny tartományban nem lineárisak és általában a hőmérséklettől is függenek.

A gerjesztettségi vektorok és az intenzitásvektorok dimenziójának az ismeretében egyszerűen meghatározhatjuk a bevezetett anyagi állandók dimenzióját

$$(6.3)\quad [\varepsilon]=\frac{[\mathfrak{D}]}{[\mathfrak{E}]}=\frac{\text{ampèresec}}{\text{voltméter}},\ [\mu]=\frac{[\mathfrak{B}]}{[\mathfrak{H}]}=\frac{\text{voltsec}}{\text{ampèremenet}}=\text{henry}.$$

6.2. *A vákuum anyagi állandói.* Speciális szerepet tölt be az elméletben a fenomenológiai szempontból elektromos és mágneses tulajdonságokkal nem rendelkező, „anyag mentes" közeg, amelyet *elektromágneses vákuumnak* nevezünk. Ilyenkor is gerjeszthető az elektromágneses tér és beszélhetünk *a vákuum elektromos és mágneses állandójáról.*

A vákuum elektromos állandóját (ε_0) a következőképpen határozhatjuk meg: Tekintsünk egy légkondenzátort, amelynek a kapacitása C. Ennek a kapacitását vákuumban — alkalmasan megválasztva a geometriáját — kiszámíthatjuk; legyen az így kapott kapacitásérték γ. Lemérve a légkondenzátor kapacitását egy precíziós ellenállás felhasználásával, a levegő abszolut dielektromos állandója $\varepsilon^*=C/\gamma$. Másrészt a levegő mért, ún. relatív dielektromos állandója (ami per definicionem éppen az abszolút dielektromos állandó és a vákuum elektromos állandójának a hányadosa) $\varepsilon_r=1{,}0006$, következésképpen $\varepsilon_0=\varepsilon^*/\varepsilon_r=0{,}88545\cdot 10^{-11}$ ampèresec/voltméter.

A vákuum mágneses állandójának a mérését, hasonló meggondolás alapján, E. GRÜNEISEN és E. GIEBE visszavezették egy hosszú, egyenletes tekercselésű tekercs önindukciós együtthatójának a precíziós mérésére és azt kapták, hogy

$$(6.4)\quad \mu_0=4\pi\cdot 1{,}256\,637\cdot 10^{-7}\ \text{voltsec/ampereméter}.$$

Módszerüket most nem részletezhetjük (l. pl. [3] 456. old).

Az a tény, hogy be kell vezetnünk a vákuum elektromos és mágneses állandóját, arra utal, hogy az elektromágneses vákuum is reális fizikai tulajdonságokkal rendelkezik.

6.3. *Az elektromos és a mágneses polarizációs vektor.* A dielektromos állandóval és a mágneses permeabilitással való jellemzés helyett oly módon is leírhatjuk a tekintetbe vett közegnek a vákuumtól eltérő elektromos és mágneses sajátságait, hogy bevezetjük az ún. *indukált elektromos és mágneses polarizációs vektorokat:*

$$(5.5)\quad \mathfrak{P}_{(i)}=\mathfrak{D}-\varepsilon_0\mathfrak{E},\quad \mathfrak{M}_{(i)}=\frac{1}{\mu_0}\mathfrak{B}-\mathfrak{H}.$$

Tekintettel arra, hogy (3.8) alapján

$$(6.6)\quad [\mathfrak{P}_{(i)}]=\frac{\text{coulomb}}{\text{méter}^2}=\frac{\text{coulomb méter}}{\text{méter}^3}=\frac{\text{elektromos dipólmomentum}}{\text{méter}^3},$$

a polarizációs vektor a közeg térfogategységének indukált elektromos dipólmomentumát határozza meg.

Hasonlóképpen a mágneses polarizációs vektor esetében

$$(6.7)\qquad [\mathfrak{M}_{(i)}] = \frac{\text{ampèremenet}}{\text{méter}} = \frac{\text{ampèrement (méter)}^2}{\text{méter}^3} = \frac{\text{mágneses dipolmomentum}}{\text{méter}^3},$$

ugyanis ismeretes, hogy a köráram mágneses nyomatéka $|\mathfrak{m}| = I \cdot F$, ahol az $|\mathfrak{m}|$ mágneses momentum a kísérletek tanúsága szerint az I intenzitású áramnak és a vezetékkel határolt F felületnek a szorzata. Következésképpen $\mathfrak{M}_{(i)}$ *a közeg térfogategységének az indukált mágneses dipólmomentumát jelenti.*

Általános esetben (ferroelektromos és ferromágneses kristályok esetén) a közegnek van — a külső elektromos és mágneses tér nélkül is — a priori *permanens elektromos és mágneses dipolmomentuma:* $\mathfrak{P}_0$ és $\mathfrak{M}_0$, és így a *teljes elektromos és mágneses dipolmomentum* jó közelítéssel a következő alakba írható

$$(6.8)\qquad \mathfrak{P} = \mathfrak{P}_0 + \mathfrak{P}_{(i)}, \quad \mathfrak{M} = \mathfrak{M}_0 + \mathfrak{M}_{(i)}.$$

Ezek bevezetésével az (5. 3) és (5. 4) allatti MAXWELL-egyenletek a következő alakba írhatók

$$(6.9)\qquad \vec{\nabla} \cdot \mathfrak{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\{\varrho - \vec{\nabla} \cdot (\mathfrak{P} - \mathfrak{P}_0)\}, \quad \vec{\nabla} \times \mathfrak{E} + \dot{\mathfrak{B}} = 0,$$

$$(6.10)\qquad \vec{\nabla} \cdot \mathfrak{B} = 0, \quad \vec{\nabla} \times \mathfrak{B} - \varepsilon_0 \mu_0 \dot{\mathfrak{E}} = \mu_0 \left\{ \mathfrak{i} + \frac{\partial}{\partial t}(\mathfrak{P} - \mathfrak{P}_0) + \vec{\nabla} \times (\mathfrak{M} - \mathfrak{M}_0) \right\}.$$

Szokás ϱ-t *valódi elektromos töltés sűrűségnek* és a $\varrho - \vec{\nabla} \cdot (\mathfrak{P} - \mathfrak{P}_0)$ mennyiséget *látszólagos töltés sűrűségnek* nevezni, ámde akkor láthatjuk, hogy *az elektromos térerősség forrása a látszólagos töltés sűrűség.* Nevezzük az $\varepsilon_0 \dot{\mathfrak{E}}$ mennyiséget a vákuumban folyó gerjesztettségi áramsűrűségnek, akkor azt kapjuk, hogy *a mágneses tér örvényeit* ($\vec{\nabla} \times \mathfrak{B}$), *a vákuumban folyó gerjesztettségi áramsűrűség és a vezetési áramsűrűség mellett az indukált polarizációs áramsűrűség* ($\dot{\mathfrak{P}}_{(i)}$) *és az indukált mágneses dipólmomentumsűrűség örvényei* ($\vec{\nabla} \times \mathfrak{M}_{(i)}$) *keltik.*

6. 4. *Az elektromos és a mágneses szuszceptibilitás.* A közeg elektromos és mágneses tulajdonságait pl. homogén közeg esetén szokás a következő-

képpen is jellemezni:

$$\mathfrak{P}_{(i)}=\mathfrak{D}-\varepsilon_0\mathfrak{E}=\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}-1\right)\varepsilon_0\mathfrak{E}=(\varepsilon_r-1)\varepsilon_0\mathfrak{E}=\chi_e\varepsilon_0\mathfrak{E}, \tag{6.20}$$

$$\mathfrak{M}_{(i)}=\frac{1}{\mu_0}\mathfrak{B}-\mathfrak{H}=\left(\frac{\mu}{\mu_0}-1\right)\mathfrak{H}=(\mu_r-1)\mathfrak{H}=\chi_m\mathfrak{H}, \tag{6.21}$$

ahol a χ_e és χ_m arányossági tényezőket *elektromos és mágneses szuszceptibilitási állandóknak nevezzük.*

Tekintettel arra, hogy a tapasztalat szerint $\varepsilon>\varepsilon_0$, viszont $\mu\gtrless\mu_0$, kapjuk, hogy $\chi_e>0$, ill. $\chi_m\gtrless 0$. Valahányszor $\chi_m>0$, a közeget *paramágnesnek* és $\chi_m<0$ esetben *diamágnesnek* nevezzük. (Az utóbbi esetben a közeg a tér irányával ellentétes irányban mágneseződik). *Ferromágneses* anyagok esetében $\chi_m\gg 1$.

6. 5. *Az Ohm-törvény differenciális alakja.* Most bebizonyítjuk, hogy homogén elektromos tér esetén az Ohm-törvény ekvivalens a következő differenciális törvénnyel.

$$\mathfrak{i}=\sigma\mathfrak{E}. \tag{6.14}$$

Legyen ugyanis $F(s)$ a vezeték keresztmetszete (ahol s az ívhosszúság paraméter a lineáris vezető mentén), akkor

$$\int_a^b E_s ds=U=\int_a^b \frac{i_s}{\sigma}ds=\int_a^b \frac{1}{\sigma}\frac{I}{F(s)}ds=I\int_a^b \frac{1}{\sigma}\frac{ds}{F(s)}=RI, \tag{6.15}$$

ahol pl. l hosszúságú, állandó vastagságú ($F(s)=F=$ konst.) homogén vezető esetén

$$R=\int_a^b \frac{1}{\sigma}\frac{ds}{F}=\frac{1}{\sigma}\frac{l}{F} \tag{6.16}$$

a vezeték ellenállása. Ezzel azonban az állításunkat igazoltuk.

A (6. 14) alatti egyenletből következik, hogy a σ arányossági tényező dimenziója, amelyet — amint azt egyébként (6. 16) alatti egyenletből láthatjuk — *vezetőképességnek* nevezünk, a következő:

$$[\sigma]=\frac{[\mathfrak{i}]}{[\mathfrak{E}]}=\frac{\text{ampère}^2\ \text{sec}}{\text{méter}\cdot\text{joule}}=\frac{\text{ampère}^2}{\text{wattméter}}=\frac{1}{\text{ohmméter}}. \tag{6.17}$$

Anizotróp közeg esetén (6. 14) alatti egyenletünk a következő alakba írható:

$$i_k=\sum_{l=1}^{3}\sigma_{kl}E_l. \tag{6.18}$$

ahol σ_{kl} a *vezetőképességi tenzor* komponenseit jelenti.

Inhomogén vezető esetén az Ohm-törvény differenciális alakja

(6. 19) $$\mathfrak{i} = \sigma(\mathfrak{E} + \mathfrak{E}^{(s)}),$$

ahol $\mathfrak{E}^{(s)}$ az ún. segéd elektromos térerősség, amelynek a részletesebb körülírásával most nem foglalkozunk.

7. §. A Maxwell-féle elmélet axiómáinak második csoportja

Most végül még három anyagi axiómát kell megadnunk, amelyekben összefoglaljuk az anyagnak az előző paragrafusban vázolt fenomenológiai jellemzését:

M. III. axióma: *Az anyagmentes tér, az ún. elektromágneses vákuum is rendelkezik elektromos és mágneses sajátságokkal, amennyiben benne az elektromos és mágneses intenzitás mennyiségek arányosak a megfelelő gerjesztettségi vektorokkal:*

(7. 1) $$\mathfrak{D} = \varepsilon_0 \mathfrak{E}, \quad \mathfrak{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathfrak{B}.$$

Az ε_0 és μ_0 arányossági tényezőket a vákuum elektromos és mágneses állandóinak nevezzük.

Dimenzió: $[\varepsilon_0]$ = ampèresec/voltméter, $[\mu_0]$ = voltsec/ampèreméter.

A mérési eljárás: Mind az elektromos, mind pedig a mágneses vákuumállandó meghatározási módszerét az előző paragrafusban részleteztük.

M. IV. a. axióma: *A szigetelők elektromos tulajdonságait a térfogategységükre vonatkoztatott elektromos dipólmomentumukkal, az ún. elektromos polarizációs vektorral $\mathfrak{P}$ jellemezzük. A polarizációs vektor additive tevődik össze a külső elektromos tér nélkül is meglévő, permanens elektromos dipólmomentum sűrűségből ($\mathfrak{P}_0$) és a külső tér hatására keletkezett indukált elektromos dipólmomentumsűrűségből ($\mathfrak{P}_i$). Az utóbbi a külső térerősség lineáris függvénye. A lineáris alak együtthatóit az elektromos szuszceptibilitási tenzor komponenseinek nevezzük.*

M. IV. b. axióma: *A vezetők mágneses tulajdonságait a térfogategységükre vonatkoztatott mágneses dipólmomentummal, az ún. mágneses polarizációs vektorral $\mathfrak{M}$ jellemezzük. A polarizációs vektor additive tevődik össze a külső mágneses tér nélkül is jelenlévő permanens mágneses dipólmomentum sűrűségből ($\mathfrak{M}_0$) és a külső tér hatására keletkezett indukált mágneses dipólmomentum sűrűségből ($\mathfrak{M}_{(i)}$) Az utóbbi a külső tér mágneses gerjesztettségi vektorának lineáris függvénye. A lineáris alak együtthatóit a mágneses szuszceptibilitási tenzor komponenseinek nevezzük.*

Dimenzió: Az elektromos χ_e és a mágneses χ_m szuszceptibilitási állandók dimenzió mentesek.

M. V. axióma: *A vezetési áramsűrűség egy vezetőben a teljes elektromos térerősség lineáris függvénye. Az utóbbi additive tevődik össze az elektromos térerősségből* ($\mathfrak{E}$) *és a segédelektromos térerősségből* ($\mathfrak{E}^{(s)}$). *A lineáris forma együtthatóit a vezetőképességi tenzor komponenseinek nevezzük.*

Dimenzió: $[\sigma] = 1/\text{ohmméter}$.

A MAXWELL-*egyenletek második csoportját* — a közeg anyag minőségétől függően — a (6. 1), (6. 2). (6. 14), (6. 18) vagy (6. 19) alatti egyenleteink adják.

8. §. Az axiómarendszer elentmondásmentessége. Az elektromos töltés megmaradásának tétele

Az axiómarendszerünk ellentmondásmentességének a kérdésével most részletesen nem foglalkozhatunk. Egy kérdést azonban feltétlenül meg kell vizsgálnunk. Nevezetesen az **A. II. e.** és a **K. II.** axiómáink tartalmazzák a $\mathfrak{D}$ és $\mathfrak{B}$ vektorokat; meg kell tehát néznünk, hogy ezek az axiómák összeegyeztethetők-e az **A. I. d.** és az **A. II. d.** axiómákkal?

Alkalmazzuk a (4. 4) és (4. 5) alatti egyenleteinket egy F zárt felületre, amely olyan két F_1 és F_2 felületből tevődik össze, amelyek S határgörbéje azonos. Akkor közvetlenül beláthatjuk, hogy

$$(8.1) \qquad \oint_F C_n df = 0, \quad \frac{d}{dt}\oint_F B_n df = 0.$$

Az utóbbi egyenletből azonban következik, hogy

$$(8.2) \qquad \oint_F B_n df = \text{konst.}$$

és ily módon nyilvánvaló, hogy a konstans értéke választható éppen zérónak is, megegyezésben a (4. 3) alatti egyenletünkkel.

Szigetelőkben $\mathfrak{i} = 0$ és így a (8. 1) alatti első egyenlet, valamint a teljes áramsűrűség (4. 2) alatti definíciója alapján

$$(8.3) \qquad \frac{d}{dt}\oint_F D_n df = 0$$

alakban írható, következésképpen

$$(8.4) \qquad \oint_F D_n df = \text{konst.}$$

Ámde ennek a konstansnak az értéke megválasztható úgy, hogy a (4. 1) alatti egyenlet teljesüljön.

Általános esetben a (8. 1) alatti egyenlet a következő alakba írható

$$\oint_F i_n df + \frac{d}{dt}\oint_F D_n df = 0, \tag{8. 5}$$

vagy GAUSS tételének az alkalmazásával, tekintettel a (4. 1) alatti egyenletre

$$\int_V \left\{ \vec{\nabla}\cdot \mathfrak{i} + \frac{\partial \varrho}{\partial t} \right\} d^3\mathfrak{r} = 0, \tag{8. 6}$$

ill. — minthogy ennek a relációnak tetszés szerinti V térfogat esetében teljesülnie kell — differenciális alakban:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot \mathfrak{i} = 0. \tag{8. 7}$$

A (8. 5) alatti integrális egyenlet, ill. a neki megfelelő (8. 7) alatti differenciálegyenlet — amint az közvetlenül belátható — *az elektromos töltés megmaradásának a tételét* fejezi ki.

9. §. Megjegyzések

(*i*) Ismeretes, hogy a MAXWELL-egyenletekből levezethető az elektromágneses térben lejátszódó jelenségek analitikai értelmezése. Ez biztosítja az axiómarendszerünk teljességét, valamint realizálhatóságát.

(*ii*) Az anyagi axiómák csak fenomenológiailag jellemzik az anyag elektromos és mágneses tulajdonságait. Ez a körülmény határt szab az elmélet alkalmazhatóságának. Amennyiben az anyag atomisztikus felépítését is figyelembe vesszük, akkor kiterjeszthetjük az elmélet alkalmazhatósági határát. Az első ilyen elmélet a MAXWELL-elmélet LORENTZ-féle általánosítása volt, amelyet klasszikus elektron-elméletnek is szokás nevezni. Ezzel, valamint az elmélet további módosításával azonban most nem kívánunk foglalkozni,

(*iii*) A fentebb axiomatizált MAXWELL-elmélet nem tartalmazza a mozgó testek elektrodinamikájának törvényszerűségeit. Ezzel a problémával azonban a relativisztikus elektrodinamika keretében szokás foglalkozni, amikor is könnyen kimutatható a MAXWELL-egyenletek relativisztikus invarianciája. A relativisztikus elektrodinamika axiomatizálására egy későbbi dolgozatunkban kívánunk visszatérni.

IRODALOM

[1] GRIMSEHL, G. R. H.: Lehrbuch der Physik, Bd. II. Aufl. 13., *Leipzig,* 1954 Teubner.
[2] GYULAI, Z.: Kísérleti fizika I—II, *Budapest,* 1953 Tankönyvkiadó.
[3] MIE, G.: *Elektrodynamik,* Handbuch der Experimentalphysik, *Leipzig,* 1932. Akad. Verl.
MIE, G.: Lehrbuch der Elektrizität und des Magnetismus, *Stuttgart,* 1941, Enke.
[4] POHL, R. W.: Einführung in die Elektrizitätslehre, IV. Aufg., *Berlin,* 1935 Springer.
[5] SIMONYI, K.: Theoretische Elektrotechnik, *Berlin,* 1957, Verl. d. Wiss.
[6] SOMMERFELD, A.: Elektrodynamik, *Leipzig,* 1949, Akad. Verl.
[7] STRATTON, R.: Elektromagnetic Theory, *New York,* 1951, McGraw—Hill.
[8] HAMEL, G.: Theoretische Mechanik, *Berlin,* 1949, Springer.

(Beérkezett: 1958. VI. 30.)

A Szegedi Tudományegyetem
Elméleti Fizikai Intézete

INTERPOLÁCIÓ NORMÁLIS PONTCSOPORTOKON, II.*

Írta: FREY TAMÁS, Budapest

(Bemutatta: Turán Pál, akadémikus)

Bevezetés: Az első közleményben [8] a normális pontcsoportok több fontos tulajdonságát ismertettük, amelyek meghatározzák a megfelelő interpolációs polinomsorozatok néhány sajátságát. Így a 4. §.-ban igazoltuk, hogy az $[x_{kn}]$ normális alappont-mátrix segítségével képezve az

$$\omega_n(x) = \prod_{k=1}^{n}(x - x_{kn}), \quad n = 1, 2, \ldots$$

polinomsorozatot, arra a $[-1+\lambda;\ 1-\lambda]$ intervallumon $(\lambda > 0)$ érvényes egy

$$|\omega_n(x)| \leqq C_1(\lambda)\cdot 2^{-n}$$

típusú becslés.[1] Szoros kapcsolatban áll ezzel az az 5. §.-ban igazolt tény, hogy a megfelelő *Lagrange*-interpoláció *Lebesgue*-függvényei, a

$$\Lambda_n(x) = \sum_{k=1}^{n} |l_{kn}(x)|\,; \quad l_{kn}(x) = \frac{\omega_n(x)}{(x - x_{kn})\cdot \omega_n'(x_{kn})}$$

függvények $\log n$ nagyságrendűek, azaz

$$\Lambda_n(x) \leqq C_2(\lambda)\log n \qquad (-1+\lambda \leqq x \leqq 1-\lambda\,;\ n = 1, 2, \ldots)$$

illetve az a 3 §.-ban bizonyított állítás, hogy az ún. „külső." *Lebesgue*-függvények, a

$$\Lambda_n^{(k)}(x;\delta) = \sum_{k;\,|x - x_{kn}| \geqq \delta} |l_{kn}(x)|$$

függvények korlátosak, azaz

$$\Lambda_n^{(k)}(x;\delta) \leqq C_3(\delta;\lambda) \qquad (-1+\lambda \leqq x \leqq 1-\lambda\,;\ n = 1, 2, \ldots).$$

Az alábbiakban e ténynek a megfelelő *Fejér*, illetve *Hermite—Fejér*-féle interpolációsorozatokkal kapcsolatos következményeiről beszélünk, míg a következő, harmadik részben egy példával mutatjuk meg, hogy az interpolációsorozatok konvergenciaviszonyaira vonatkozó és itt leírt tények nem annyira az alappontrendszer normális voltából, azaz abból következnének, hogy a konjugált pontok $(-1, 1)$-en kívülre esnek, mint inkább abból, hogy az alappontok és a hozzájuk tartozó konjugált pontok távolsága egy n-től független alsó korlát fölött marad.

* A dolgozat első része a MTA III. Osztályának Közleményei IX/2. számában jelent meg (1959. 121—148. old.). A paragrafusok számozása az előző részek számozásához kapcsolódik.

[1] C_1, C_2 stb.-vel olyan mennyiségeket jelölünk, amelyek nem függnek az n — egész értékeket felvevő — változótól. Más — a premisszákban szereplő — változóktól való függésüket, ha ez lényeges, feltüntetjük.

6. §. Az Hermite ill. Hermite—Fejér interpolációk Lebesgue-függvényeiről

A HERMITE—FEJÉR-féle interpoláció-sorozatokra vonatkozó állítások pontos megfogalmazása céljából egy segédtételt kell igazolnunk, amelynek segítségével azon „ún. elsőfajú alappolinomok[2]" értékét tudjuk becsülni, amelyek az alapintervallum szélein elhelyezkedő alappontokhoz tartoznak.

6. 1. SEGÉDTÉTEL. *Legyen $[x_{kn}]$ tetszőleges normális alappont-mátrix. Érvényes ez esetben a*

$$\sum_{k;\,|x_{kn}|\geqq 1-\delta} v_{kn}(x)\, l_{kn}^2(x) \leqq C_1(\varepsilon;\delta) \qquad (-1+\varepsilon \leqq x \leqq 1-\varepsilon;\ n=1,2,\ldots)$$

becslés $(0<\delta<\varepsilon)$.

BIZONYÍTÁS: Tekintsük az alábbi segédfüggvényt:

$$(6.2)\ g(x)=g(x;\varepsilon;\delta)\equiv\begin{cases} 1, & \text{ha } -1\leqq x\leqq -1+\delta \\ 1-\dfrac{8}{(\delta-\varepsilon)^2}(x+1-\delta)^2, & \text{ha } -1+\delta\leqq x\leqq -1+\dfrac{3\delta+\varepsilon}{4} \\ \dfrac{8}{(\delta-\varepsilon)^2}\left(x+1-\dfrac{\varepsilon+\delta}{2}\right)^2, & \text{ha } -1+\dfrac{3\delta+\varepsilon}{4}\leqq x\leqq -1\dfrac{\delta+\varepsilon}{2} \\ 0, & \text{ha } -1+\dfrac{\delta+\varepsilon}{2}\leqq x\leqq 0 \\ g(-x;\varepsilon;\delta), & \text{ha } 0\leqq x\leqq 1. \end{cases}$$

Azonnal leolvasható, hogy

$$(6.3)\qquad g(x)\in C[-1,1];\quad g'(x)\in C[-1,1],\quad \text{sőt}\quad g'(x)\in \mathrm{Lip}\,1$$

is érvényes. Létezik tehát egy olyan $\{G_n(x)\}$ polinomsorozat, amelyre

$$(6.4)\qquad G_n(x)\in H_n$$

$$\left.\begin{aligned} &(6.5)\qquad |G_n(x)-g(x;\varepsilon;\delta)|\leqq \frac{C_2(\varepsilon;\delta)}{n^2} \\ &(6.6)\qquad |G_n'(x)-g'(x;\varepsilon;\delta)|\leqq \frac{C_3(\varepsilon;\delta)}{n} \end{aligned}\right\}\ (-1\leqq x\leqq 1;\ n=1,2,\ldots).$$

[2] „Első- ill. másodfajú alappolinom"-nak FEJÉR nevezte el a $\{H_{kn}(x)\}=\{v_{kn}(x)l_{kn}^2(x)\}$ ill. $\{\mathfrak{H}_{kn}(x)\}=\{(x-x_{kn})l_{kn}^2(x)\}$ polinomokat. Megjegyezzük itt, hogy a szóbanforgó becsléssel kapcsolatos nehézségeket a 4. 1. ill. 5. 2. segédtételben úgy kerültük meg, hogy a felhasznált segédfüggvényeket az alapintervallum szélén azonosan 0-nak választottuk.

Tekintsük most a $g(x)$-hez rendelt Hermite-féle interpolációs polinomot a $[-1+\varepsilon;\, 1-\varepsilon]$ intervallum egy tetszőleges x_0 pontjában. Itt — ahogy ezt a 3.2.; 4.1. ill. az 5.1. segédtételben megmutattuk — a (6.4—6.6) relációk következtében érvényes a

$$|H_n(x_0; g)| \leqq \frac{C_4(\varepsilon;\delta)}{n} \qquad (n=1,2,\ldots) \tag{6.7}$$

becslés. Ha g definíciójának felhasználásával explicite is felírjuk az interpolációs polinomot és leválasztjuk azokat a tagokat, amelyek érdekelnek bennünket, akkor a (6.7.) ill. a 3.1. és 3.3. tételek alapján az alábbi becslést kapjuk:

$$\begin{aligned}
&\Big|\sum_{k;\,|x_{kn}|\leqq 1-\delta} 1\cdot v_{kn}(x_0)\, l_{kn}^2(x_0)\Big| \leqq \frac{C_4(\varepsilon;\delta)}{n} + \\
&+ \sum_{k;\,1-\delta<|x_{kn}|\leqq 1-\frac{\varepsilon+\delta}{2}} |g(x_{kn})|\, v_{kn}(x_0)\, l_{kn}^2(x_0) + \\
&+ \sum_{k;\,|x_{kn}|\geqq 1-\frac{\varepsilon+\delta}{2}} |g'(x_{kn})|\,|x_0-x_{kn}|\, l_{kn}^2(x_0) \leqq \qquad (6.8)\\
&\leqq \frac{C_4(\varepsilon;\delta)}{n} + \sum_{k;\,1-\frac{\varepsilon+\delta}{2}\geqq|x_{kn}|\geqq 1-\delta} v_{kn}(x_0)\, l_{kn}^2(x_0) + 2C_5(\varepsilon;\delta) \sum_{k;\,|x_0-x_{kn}|>\frac{\varepsilon+\delta}{2}} l_{kn}^2(x_0) \leqq \\
&\leqq \frac{C_4(\varepsilon;\delta)}{n} + C_6(\varepsilon;\delta)\cdot \sum_{k;\,|x_0-x_{kn}|>\frac{\varepsilon-\delta}{2}} l_{kn}^2(x_0) + 2C_5(\varepsilon;\delta)\cdot\frac{C_7(\varepsilon;\delta)}{n} \leqq \frac{C_8(\varepsilon;\delta)}{n},
\end{aligned}$$

amit bizonyítani akartunk.

6.2. TÉTEL. *Legyen $[x_{kn}]$ normális alappontmátrix. Az első ill. másodfajú alappolinomok Lebesgue- ill. külső Lebesgue-függvényeire a következő becslések érvényesek:*

$$\Lambda_n(x; H) \equiv \sum_{k=1}^{n} v_{kn}(x)\, l_{kn}^2(x) \equiv 1 \tag{6.9}$$
$$(-1\leqq x\leqq 1;\ n=1,2,\ldots)$$

$$\Lambda_n(x; \mathfrak{H}) \equiv \sum_{k=1}^{n} |x-x_{kn}|\, l_{kk}^2(x) \leqq \frac{C_9(\varepsilon)}{n}\log n \tag{6.10}$$
$$(-1+\varepsilon\leqq x\leqq 1-\varepsilon;\ n=1,2,\ldots)$$

$$\Lambda_n^{(k)}(x; \delta; H) \equiv \sum_{k;\,|x-x_{kn}|>\delta}^{*} v_{kn}(x)\, l_{kn}^2(x) \leqq \frac{C_{10}(\varepsilon;\delta)}{n} \tag{6.11}$$
$$(-1+\varepsilon\leqq x\leqq 1-\varepsilon;\ n=1,2,\ldots)$$

$$\Lambda_n^{(k)}(x;\delta;\mathfrak{H}) \equiv \sum_{k;\,|x-x_{kn}|\geqq\delta}^{*} |x-x_{kn}|\, l_{kn}^2(x) \leqq \frac{C_{11}(\varepsilon;\delta)}{n} \tag{6. 12}$$
$$(-1+\varepsilon\leqq x\leqq 1-\varepsilon;\ n=1,2,\ldots).$$

BIZONYÍTÁS: (6. 9) a definíció egyszerű következménye, (6. 10)-et és (6. 12)-őt viszont már a 3. ill. 5. §.-ban igazoltuk. (6. 11) a 3. §. tételeiből és a 6. 1. segédtételből könnyen következik. Azon k-kra ugyanis, amelyekre

$$|x_{kn}| \leqq 1-\frac{\varepsilon}{2} \tag{6. 13}$$

érvényes, már a 3. §.-ban igazoltuk a

$$\sum_{\substack{k;\ |x-x_{kn}|\geqq\delta \\ |x_{kn}|\leqq 1-\frac{\varepsilon}{2}}} v_{kn}(x)\, l_{kn}^2(x) \leqq \frac{C_{12}(\varepsilon;\delta)}{n} \tag{6. 14}$$

becslést. A maradékra, azaz a

$$\sum_{\substack{k;\ |x-x_{kn}|\geqq\delta \\ |x_{kn}|> 1-\frac{\varepsilon}{2}}} v_{kn}(x)\, l_{kn}^2(x) \tag{6. 15}$$

összegre viszont épp az imént mutattuk ki a megfelelő becslést.

7. §. Korolláriumok és kiegészítő tételek

7. 1. KOROLLÁRIUM. *Legyen $[x_{kn}]$ normális alappontmátrix, az $f(x)\in C[-1,1]$ függvény pedig elégítsen ki az $[a,b]\subset[-1,1]$ intervallumon Dini—Lipschitz feltételt. Ezesetben az*

$$L_n(x;f)\equiv\sum_{k=1}^{n} f(x_{kn})\, l_{kn}(x) \tag{7. 1}$$

Lagrange-féle intorpoláció-sorozat $[\alpha,\beta]\subset(a,b)$-n egyenletesen $f(x)$-hez konvergál.

E korollárium az 5. 1. korollárium következménye.

7. 2. KOROLLÁRIUM. *Legyen $[x_{kn}]$ normális alappontmátrix, az $f(x)$ függvény pedig legyen $[-1,1]$-ben definiált és korlátos, az $x_0\in(-1,1)$ pontban pedig folytonos. A $[d_{kn}]$ háromszög-mátrix rendelkezzék az alábbi tulajdonsággal:*

$$|d_{kn}| = o\left(\frac{n}{\log n}\right) \qquad (k=1,2,\ldots,n;\ n=1,2,\ldots). \tag{7. 2}$$

Ezesetben az

$$(7.3) \qquad F_n(x;f)=\sum_{k=1}^{n}[f(x_{kn})v_{kn}(x)+d_{kn}(x-x_{kn})]l_{kn}^2(x)$$

Hermite-Fejér polinomsorozat az x_0 pontban az $f(x_0)$ értékhez konvergál.

BIZONYÍTÁS: Legyen

$$(7.4) \qquad F=\sup_{-1\leqq x\leqq 1}|f(x)|$$

továbbá $\varepsilon>0$ tetszőleges. Minthogy $f(x)$ folytonos x_0-ban, megadható olyan $\delta=\delta(\varepsilon)$ mennyiség, hogy

$$(7.5) \qquad |f(x_0+\Delta x)-f(x_0)|\leqq\varepsilon,$$

hacsak $|\Delta x|\leqq\delta$ érvényes. Érvényes emellett az

$$(7.6) \qquad |f(x)-f(x_0)|\leqq 2F$$

becslés is.

Mármost

$$|F_n(x_0;f)-f(x_0)|=\left|\sum_{k=1}^{n}\{[f(x_{kn})-f(x_0)]v_{kn}(x_0)+d_{kn}(x_0-x_{kn})\}l_{kn}^2(x_0)\right|\leqq$$

$$(7.7) \qquad \leqq\{\sum_{k;\,|x_0-x_{kn}|>\delta}^{*}+\sum_{k;\,|x_0-x_{kn}|\leqq\delta}\}|f(x_{kn})-f(x_0)|v_{kn}(x_0)l_{kn}^2(x_0)+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}|d_{kn}||x_0-x_{kn}|l_{kn}^2(x_0),$$

ahol is felhasználtuk a

$$(7.8) \qquad \sum_{k=1}^{n}v_{kn}(x)l_{kn}^2(x)\equiv 1 \quad \text{azaz } f(x_0)\equiv\sum_{k=1}^{n}f(x_0)v_{kn}(x_0)l_{kn}^2(x_0)$$

relációt. A (7.7) egyenlőtlenség jobboldalán az első összegben a (6.11) és a (7.6), a harmadikban a (6.10) és a (7.2), míg a másodikban a (7.5) és a (6.9)-ből következő

$$(7.9) \qquad \sum_{k;\,|x_0-x_{kn}|\leqq\delta}v_{kn}(x_0)l_{kn}^2(x_0)\leqq 1$$

relációt használva fel, az

$$(7.10) \qquad |F_n(x_0)-f(x_0)|\leqq\varepsilon+2F\frac{C_1(X_0;\delta)}{n}\log n$$

becslés adódik, ahol $X_0=1-|x_0|$. Ebből azonban leolvasható a tétel állítása, hiszen ennek alapján tetszőleges $\vartheta>0$-hoz található olyan $n_0(X_0)$ küszöbindex, hogy

$$(7.11) \qquad |F_n(x_0;f)-f(x_0)|<\vartheta$$

hacsak $n \geqq n_0$. Elegendő e célból pl. ε-t $\frac{\vartheta}{2}$-nek választani és rögzíteni, majd n_0-át úgy, hogy

$$2F\frac{C_1(X_0;\,\delta_{(\varepsilon)})}{\frac{\vartheta}{2}} \leqq n_0 \tag{7.12}$$

érvényes legyen.

7. 3. KOROLLÁRIUM. *Legyen az $f(x)$ függvény $[-1, 1]$-ben definiált és korlátos, $(a, b) \subset [-1, 1]$-ben pedig folytonos, a $[d_{kn}]$ számmátrix pedig elégítse ki a*

$$|d_{kn}| = o\left(\frac{n}{\log n}\right) \tag{7.13}$$

feltételt. Legyen továbbá $[x_{kn}]$ normális alappontrendszer. Akkor az

$$F_n(x;f) = \sum_{k=1}^{n} [f(x_{kn})\, v_{kn}(x) + d_{kn}(x - x_{kn})]\, l_{kn}^2(x) \tag{7.14}$$

Hermite—Fejér-féle interpoláció-sorozat az $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$ intervallumon egyenletesen $f(x)$-hez konvergál.

Ez a korollárium egyszerű következménye a megelőzőnek. Az alábbiakban tovább finomítjuk a 7. 2. korolláriumot és megmutatjuk, hogy a normális alappontrendszerre támaszkodó *Hermite—Fejér*-féle interpoláció majdnem oly „finom" approximációs eljárás, mint a *Fejér*-féle összeg.

7. 4. KOROLLÁRIUM. *Legyen $f(x)$ a $[-1, 1]$ intervallumon definiált és ott korlátos függvény, amely az $[x_0 - \varepsilon;\, x_0 + \varepsilon] \subset [-1, 1]$ intervallumon emellett*

a) Lip α *osztálybeli* $(\alpha < 1)$

b) Lip 1 *osztálybeli*

c) *folytonosan differenciálható,*

ill.

d) *folytonosan differenciálható és deriváltja $[x_0 - \varepsilon;\, x_0 + \varepsilon]$-ban Dini—Lipschitz feltételt elégít ki.*

A $[d_{kn}]$ háromszög-mátrix rendelkezzék az alábbi tulajdonságokkal

$$\begin{aligned} &\text{a)}\quad |d_{kn}| \leqq C_2 n^{1-\alpha} \\ (7.15)\quad &\text{b)}\quad |d_{kn}| \leqq C_3 \\ &\text{c) \textit{ill.} d)}\quad |d_{kn}| \leqq C_4;\quad d_{kn} = f'(x_{kn}),\ \text{\textit{ha}}\ \ x_{kn} \in [x_0 - \varepsilon;\ x_0 + \varepsilon]. \end{aligned}$$

Fenti feltételek mellett az $[x_0 - \mu\varepsilon;\, x_0 + \mu\varepsilon]$ intervallumon $(0 < \mu < 1)$ a következő becslés adható az $[x_{kn}]$ normális alappontrendszerre támaszkodó

Hermite—Fejér-féle interpolációs polinomok és az $f(x)$ függvény

$$\Delta_n(x;f)=|F_n(x;f)-f(x)|;\quad F_n(x;f)\in H_{2n-1}$$

eltérésére;

$$(7.16)\quad \begin{aligned} &\text{a)} && \Delta_n(x)\leqq C_5(\varepsilon;\mu)\frac{\log n}{n^\alpha}\\ &\text{b)} && \Delta_n(x)\leqq C_6(\varepsilon;\mu)\frac{\log n}{n}\\ &\text{c)} && \Delta_n(x)=o\left(\frac{\log n}{n}\right)\\ &\text{d)} && \Delta_n(x)\leqq C_7(\varepsilon;\mu)\frac{1}{n}. \end{aligned}$$

BIZONYÍTÁS: $f(x)$ — az $[x_0-\varepsilon; x_0+\varepsilon]$ intervallumra támaszkodva — folytatható egy $g(x)\in C[-1,1]$ függvénnyé úgy, hogy $g(x)$-re az egész $[-1,1]$ intervallumon ugyanaz a struktúra legyen jellemző, amit $f(x)$-re $[x_0-\varepsilon; x_0+\varepsilon]$-on kötöttünk ki, emellett legyen

$$(7.17)\quad g(x)\equiv f(x) \quad \text{ha} \quad x_0-\varepsilon\leqq x\leqq x_0+\varepsilon,$$

$$(7.18)\quad g(x\equiv 0, \quad \text{ha} \quad -1\leqq x\leqq -1+\delta<x_0-\varepsilon; \quad \text{ill. ha} \quad x_0+\varepsilon<1-\delta\leqq x\leqq 1.$$

A folytatás módja mindegyik esetben triviális lévén, először az

$$(7.19)\quad \Delta_n(x;g)=|F_n(x;g)-g(x)|$$

eltérés becslésével foglalkozunk. E célból először azt mutatjuk meg, hogy az a) ill. a b) esetben megadható olyan $\{G_n(x)\}$ polinomsorozat, amelyre

$$(7.20)\quad G_n(x)\in H_n,$$

$$(7.21)\quad |G_n(x)-g(x)|\leqq C_7(\varepsilon;\mu)\frac{1}{n^\alpha} \qquad (\alpha\leqq 1)$$

és végül

$$(7.22)\quad \left|\frac{d}{dx}G_n(x)\right|\leqq C_8(\varepsilon;\mu)n^{1-\alpha} \qquad (\alpha\leqq 1).$$

Mindenekelőtt FREUD G. egy lemmáját idézzük [5]:

„Legyen $\tau_n(x)\in H_n^{(T)}$; $\nu(x)$ pedig egy olyan periódikus függvény, amely bármely 2π hosszúságú szakaszon legfeljebb végesszámú pontban nincs értelmezve és ha e pontok egy tetszőlegesen kicsiny környezetét kizárjuk, a megmaradó halmazon már korlátos. Legyen továbbá

$$(7.23)\quad |\tau_n(x)|\leqq\nu(x) \qquad (-\infty<x<\infty).$$

Jelöljön I_n tetszőleges, $\frac{1}{n}$ hosszúságú intervallumot, és legyen

$$(7.24)\quad \nu^*(I_n)=\inf_{x\in I_n}\nu(x);\quad \nu_n^*=\sup_{I_n\in[-2\pi;2\pi]}\nu^*(I_n).$$

Érvényes ezesetben a

$$(7.25) \qquad |\tau_n(x)| \leqq 2\nu_n^* \qquad (n=1,2,\ldots)$$

becslés".

Tekintsük mármost a $g(x)$ függvényt lokálisan legjobban approximáló $\{G_n(x)\}$ polinomsorozatot — amely a (7. 19) és (7. 20) feltételeket nyilván kielégíti — ill. ezek trigonometrikus indukáltját, a

$$(7.26) \qquad \gamma(\varphi) \equiv g(\cos\varphi); \quad \pi_n(\varphi) \equiv G_n(\cos\varphi)$$

függvényeket. Érvényes ekkor a következő becslés:

$$\left|\frac{\pi_n(\varphi)-\pi_n(\varphi_2)}{\cos\varphi-\cos\varphi_2}\right| \leqq$$

$$(7.27) \qquad \leqq \left|\frac{\gamma(\varphi)-\gamma(\varphi_2)}{\cos\varphi-\cos\varphi_2}\right| + \frac{|\pi_n(\varphi)-\gamma(\varphi)|+|\pi_n(\varphi_2)-\gamma(\varphi_2)|}{|\cos\varphi-\cos\varphi_2|} \leqq$$

$$\leqq \left|\frac{\gamma(\varphi)-\gamma(\varphi_2)}{\cos\varphi-\cos\varphi_2}\right| + \frac{C_9 n^{-\alpha}}{|\cos\varphi-\cos\varphi_2|},$$

tekintve, hogy (7. 20) érvényes. Minthogy pedig itt a baloldalon egy, legfeljebb $(n-1)$-edrendű trigonometrikus polinom áll [$\pi_n(\varphi)$ az $x=\cos\varphi$ mennyiség polinomja, $\pi_n(\varphi)-\pi_n(\varphi_2)$ tehát — rögzített φ_2-nél — szintén, amely az $x_2=\cos\varphi_2$ pontban 0-hellyel rendelkezik s így $x-x_2=\cos\varphi-\cos\varphi_2$-vel osztható], alkalmazhatjuk tehát a fentebb idézett *Freud*-féle lemmát. Ez annyit jelent, hogy a baloldalon elvégezhetjük a $\varphi\to\varphi_2$ határátmenetet, míg a jobboldalon 2-vel történt szorzás után a felső határt kell keresnünk a $|\varphi-\varphi_2| \geqq \frac{1}{n}$ feltétel mellett. Felhasználva tehát a $g(x)\in \mathrm{Lip}\,\alpha$ feltételt:

$$(7.28) \qquad |\pi_n'(\varphi_2)|\cdot\frac{1}{|\sin\varphi_2|} \leqq C_{10}\cdot n^{1-\alpha},$$

amiből könnyen leolvasható a (7. 21) becslés helyessége is.[3] A (7. 19) alatti

[3] A $|\varphi-\varphi_2| \geqq \frac{1}{n}$ feltételből a $\left[\frac{\vartheta}{2};\pi-\frac{\vartheta}{2}\right]$ szakaszon pl. ($\cos\vartheta=1-\delta$) következik a

$$|\cos\varphi-\cos\varphi_2| \geqq C(\delta)\cdot\frac{1}{n}$$

becslés, a $\left[0,\frac{\vartheta}{2}\right]$ és a $\left[\pi-\frac{\vartheta}{2};\pi\right]$ szakaszokon viszont csak

$$|\cos\varphi-\cos\varphi_2| \geqq \frac{1}{2}\frac{1}{n^2}.$$

Ez utóbbi szakaszok felett azonban $|\gamma(\varphi)-\gamma(\varphi_2)|\equiv 0$, míg a (7. 18) feltétel miatt (2. VII) alapján érvényes pl. a $|\pi_n(\varphi)| \leqq C\cdot\frac{1}{n^2}$ becslés, s ezekből következik (7. 28).

különbség mármost így becsülhető:

$$(7.29)\quad \begin{aligned} |F_n(x;g)-g(x)| &\leqq |F_n(x;g)-F_n(x;G_n)|+ \\ &+|F_n(x;G_n)-G_n(x)|+|G_n(x)-g(x)|. \end{aligned}$$

(7. 29) jobboldalán az egyes tagokra a következő korlátot adhatjuk meg:

$$(7.30)\quad \begin{aligned} |F_n(x;g)-F_n(x;G_n)| &\equiv \left|\sum_{k=1}^{n}[g(x_{kn})-G_n(x_{kn})]v_{kn}(x)l_{kn}^2(x)\right| \leqq \\ &\leqq \frac{C_7(\varepsilon;\mu)}{n^\alpha}\sum_{k=1}^{n} v_{kn}(x)l_{kn}^2(x) \leqq \frac{C_7(\varepsilon;\mu)}{n^\alpha} = \frac{C_{11}(\varepsilon;\mu)}{n^\alpha}. \end{aligned}$$

$$(7.31)\quad \begin{aligned} |F_n(x;G_n-G_n(x)| &\equiv |F_nx;G_n)-H_n(x;G_n)| \leqq \\ &\leqq \sum_{k=1}^{n}|d_{kn}-G_n'(x)|\,|x-x_{kn}|l_{kn}^2(x) \leqq \\ &\leqq [C_{12}+C_{13}(\varepsilon;\mu)]n^{1-\alpha}\cdot C_{14}(\varepsilon;\mu)\frac{\log n}{n} \leqq C_{15}(\varepsilon;\mu)\frac{\log n}{n^\alpha}, \end{aligned}$$

hacsak $x\in[x_0-\varepsilon\mu;x_0+\varepsilon\mu]$, a (6. 10) képlet felhasználásával. Így

$$(7.32)\quad |F_n(x;g)-g(x)| \leqq \frac{C_{16}(\varepsilon;\mu)\log n}{n},\ \text{ha } x\in[x_0-\varepsilon\mu;\,x_0+\varepsilon\mu] \quad (n=1,2,\ldots).$$

Ami viszont $\Delta_n(x;f)$ becslését illeti:

$$(7.33)\quad |F_n(x;f)-f(x)| \leqq |F_n(x;f)-F_n(x;g)|+\Delta_n(x;g)+|g(x)-f(x)|,$$

és itt

$$(7.34)\quad \begin{aligned} F_n(x;f)-F_n(x;g)| &\equiv \left|\sum_{k=1}^{n}[f(x_{kn})-g(x_{kn})]v_{kn}(x)l_{kn}^2(x)\right| \leqq \\ &\leqq \sum_{k;\,x_{kn}\in[x_0-\varepsilon;\,x_0+\varepsilon} |f(x_{kn})-g(x_{kn})|v_{kn}(x)l_{kn}^2(x) \leqq [F+\max_{-1\leqq x\leqq 1}|g|]\cdot\frac{C_{17}(\varepsilon;\mu)}{n}, \end{aligned}$$

hacsak $x\in[x_0-\varepsilon\mu;x_0+\varepsilon\mu]$, a (6. 11) képlet felhasználásával. A (7. 33), (7. 34) és (7. 32) ill. (7. 17) képletekből azonban könnyen leolvasható a (7. 16) állítások helyessége.

A c) ill. a d) eset tárgyalása mármost a fentebb leirtakat szóról-szóra követheti.

A következőkben egy fontos lépéssel tovább akarunk menni az eddigieknél, nevezetesen a 7. 2. ill. a 7. 4. korolláriumban az $f(x)$-szel szemben kitűzött strukturális feltételeket szigorúan lokalizálni akarjuk.

E cél eléréséhez a *Lebesgue*-függvények helyett bizonyos „súlyozott” *Lebesgue*-függvények felhasználása és becslése lesz az első feladatunk.

A szóbanforgó súlyfüggvények — amelyeknek a segítségével a későbbiekben majd az interpolálandó függvények folytonosságának "mértékét" akarjuk jellemezni az egyes pontokban — a következő alakúak:

$$(7.35)\qquad |t|^{\varrho_0}\cdot \log^{\varrho_1}\frac{2}{|t|}\cdot \log_2^{\varrho_2}\frac{2e}{|t|}\cdots\cdot \log_s^{\varrho_s}\frac{2\exp_{s-2}(e)}{|t|}\equiv |t|^{\varrho_0}\cdot \psi_s(|t|;\vec{\varrho}),$$

ahol a szimbólumok jelentése:

$$(7.36)\qquad \log_s^{\varrho_s}\alpha=[\log(\log_{s-1}\alpha)]^{\varrho_s};\ \log_1\alpha\equiv\log\alpha;\ \exp_s\alpha=e^{\exp_{s-1}\alpha};\ \exp_1\alpha=e^{\alpha},$$

a ϱ_i kitevők pedig $0<\varrho_0<1$ esetén tetszőlegesek, $\varrho_0=0$ ill. $\varrho_0=1$ esetén viszont az első, 0-tól különböző ϱ_i legyen negatív ill. pozitív. Mármost a *Lagrange*-interpolációkkal kapcsolatosan a

$$(7.37)\qquad \Lambda_n^{(s)}(x)\leqq\sum_{k=1}^{n}|x-x_{kn}|^{\varrho_0}\psi_s(|x-x_{kn}|;\vec{\varrho})\,|l_{kn}(x)|,$$

az *Hermite-*, ill. *Hermite—Fejér* interpolációkkal kapcsolatosan viszont a

$$(7.38)\qquad \Lambda_n^{(s)}(x;H)\equiv\sum_{k=1}^{n}|x-x_{kn}|^{\varrho_0}\psi_s(|x-x_{kn}|;\vec{\varrho})v_{kn}(x)l_{kn}^2(x)$$

súlyozott *Lebesgue*-függvények bevezetése és becslése célszerű. A megfelelő becsléseket a 2—5. §.-ban követett gondolatmenet alapján kaphatjuk.

7. 1. SEGÉDTÉTEL. *Tekintsük az $[x_{kn}]$ normális alappontrendszert. A $[-1+\varepsilon;1-\varepsilon]$ intervallumban egyenletesen érvényes a következő becslés:*

$$(7.39)\qquad \Lambda_n^{(s)}(x;H)\leqq\begin{cases} C_{18}(\varepsilon)\cdot n^{-\varrho_0}\psi_s\left(\frac{1}{n};\vec{\varrho}\right), & \text{ha } \varrho_0<1\\ C_{19}(\varepsilon)\frac{\log n}{n}\psi_s\left(\frac{1}{n};\vec{\varrho}\right), & \text{ha } \varrho_0=1.\end{cases}$$

BIZONYÍTÁS: Első lépésben — a 2. 2. ill. 2. 4. segédtétel gondolatmenetét követve — a következő approximációs segédtételt igazolhatjuk: $\varrho_0<1$ esetben az

$$(7.40)\qquad y(x;a)=\begin{cases} 0, & \text{ha } -1\leqq x\leqq a.\\ (x-x_0)^{\varrho_0}\cdot\psi_s(x-x_0;\vec{\varrho}), & \text{ha } a<x\leqq 1\end{cases}$$

a $\varrho_0=1$ esetben viszont a

$$(7.41)\qquad z(x;a)=\begin{cases} 0, & \text{ha } -1\leqq x\leqq a\\ x-x_0)\log\frac{2}{x-x_0}\psi_s(x-x_0;\vec{\varrho}), & \text{ha } a<x\leqq 1\end{cases}$$

segédfüggvényekhez található olyan, $\{Y_n(x)\}$ ill. $\{Z_n(x)\}$-szel jelölt polinomsorozat, hogy

$$Y_n(x) \in H_n; \quad Z_n \in H_n, \tag{7.42}$$

továbbá

$$|y(x;a) - Y_n(x)| \leqq C_{20}(\varepsilon) \cdot n^{-\varrho_0} \psi_s\left(\frac{1}{n}; \vec{\varrho}\right) \tag{7.43}$$

és

$$\left|\left[\frac{d}{dx} y(x;a) - \frac{d}{dx} Y_n(x)\right](x-a)\right| \leqq C_{21}(\varepsilon) \cdot n^{-\varrho_0} \psi_s\left(\frac{1}{n}; \vec{\varrho}\right), \tag{7.44}$$

ill.

$$|z(x;a) - Z_n(x)| \leqq C_{22}(\varepsilon) \frac{\log n}{n} \psi_s\left(\frac{1}{n}; \vec{\varrho}\right) \tag{7.45}$$

és

$$\left|\frac{d}{dx}[z(x;a) - Z_n(x)] \cdot (x-a)\right| \leqq C_{23}(\varepsilon) \frac{\log n}{n} \psi_s\left(\frac{1}{n}; \vec{\varrho}\right) \tag{7.46}$$

érvényesek Ezen approximációs tételek birtokában viszont, felhasználva itt a 3.3. tétel eredményeit is — már szóról-szóra követhetőek az 5.1—2. tétel meggondolásai, s így adódnak a (7.39) alatti becslések.

7.2. SEGÉDTÉTEL. *Legyen* $[x_{kn}]$ *tetszőleges normális alappontrendszer,* $\mu > 0$ *tetszőleges és* $\vec{\varrho}_\mu = (\underbrace{-1}_{1}; \underbrace{-1}_{2}; \ldots; \underbrace{-1}_{s-1}; \underbrace{-1-\mu}_{s})$. *Érvényes ekkor a*

$$\sum_{k=1}^{n} |x_{kn} - x| \psi_s(|x_{kn} - x|; \vec{\varrho}_\mu) l_{kn}^2(x) \leqq \frac{C_{24}(\varepsilon)}{n} \tag{7.47}$$

becslés a $-1+\varepsilon \leqq x \leqq 1-\varepsilon$ *intervallumban.*

E segédtétel bizonyítása szóról-szóra követheti az 5.1. segédtételét, de az $(x-a)^2$ függvény helyett az

$$|x-a| \psi_s(|x=a|; \vec{\varrho}_\mu) \tag{7.48}$$

függvényt kell tekintenünk.

7.3. SEGÉDTÉTEL. *Megtartva a* 7.2. *segédtétel jelöléseit, érvényes a*

$$\sum_{k=1}^{n} \psi_s(|x_{kn} - x|; \vec{\varrho}_\mu) |l_{kn}(x)| \leqq C_{25}(\varepsilon) \qquad (-1+\varepsilon \leqq x \leqq 1-\varepsilon;\ n = 1, 2, \ldots) \tag{7.49}$$

becslés.

BIZONYÍTÁS: Az 5.2. tétel gondolatmenetét ismét szóról-szóra követhetjük, csakhogy az (5.1) becslés helyett (7.47) alattit, a GRÜNWALD-féle

(5. 21) becslés helyett viszont a

$$\left\{\sum_{k=1}^{i-1}+\sum_{k=i+2}^{n}\right\}\frac{\psi_s(|x-x_{kn}|;\vec{\varrho}_\mu)}{|x-x_{kn}|}\leqq C_{26}(\varepsilon)\cdot n \tag{7.50}$$

$$(-1+\varepsilon\leqq x\leqq 1-\varepsilon;\ x_{in}\leqq x\leqq x_{i+1;n})$$

becslést kell használnunk. Ez utóbbi egyébként ismét triviális következménye az ERDŐStől és TURÁNtól származó (5. 23) alatti egyenlőtlenségnek, hiszen nemcsak $\frac{1}{|x|}$, hanem $\frac{1}{|x|}\cdot\psi_s(|x|;\vec{\varrho}_\mu)$ is monoton csökkenő függvénye x-nek $x>0$ esetben, és

$$\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{2}}\frac{\psi_s(x;\vec{\varrho}_\mu)}{x}\,dx\leqq C_{27} \tag{7.51}$$

érvényes.

Az alábbiakban a 7. 1. segédtételre támaszkodva bebizonyítjuk, hogy a normális pontcsoportra támaszkodó HERMITE—FEJÉR interpoláció épp oly finom approximációs eljárás mint a *Fejér*-féle összeg.

7. 5. KOROLLÁRIUM. *Tekintsük a* $[-1, 1]$ *intervallumon definiált és korlátos* $f(x)$ *függvényt, amely az* $x_0\in(-1, 1)$ *pontban folytonos, éspedig itt*

$$|f(x_0+h)-f(x_0)|\leqq C_{28}\cdot|h|^{\varrho_0}\psi_s(|h|;\vec{\varrho}) \tag{7.52}$$

érvényes, hacsak $x_0+h\in[-1, 1]$. *Legyen továbbá* $[x_{kn}]$ *normális alappontmátrix, a* $[d_{kn}]$ *háromszögmátrix pedig elégítse ki az alábbi feltételeket:*

$$|d_{kn}|\leqq\begin{cases}\dfrac{n^{1-\varrho_0}}{\log n}\cdot o\left\{\psi_s\left(\dfrac{1}{n};\vec{\varrho}\right)\right\}, & \text{ha}\quad \varrho_0<1\\ C_{29}, & \text{ha}\quad \varrho_0=1.\end{cases} \tag{7.53}$$

Érvényes ekkor a következő becslés:

$$\begin{aligned}&|F_n(x_0;f)-f(x_0)|\equiv\\ &\equiv\left|\sum_{k=1}^{n}\{f(x_{kn})v_{kn}(x_0)+(x_0-x_{kn})d_{kn}\}l_{kn}^2(x_0)-f(x_0)\right|\leqq\\ &\leqq\begin{cases}C_{30}\cdot\dfrac{\psi_s\left(\dfrac{1}{n};\vec{\varrho}\right)}{n^{\varrho_0}}, & \text{ha}\quad \varrho_0<1.\\ C_{31}\cdot\dfrac{\log n\cdot\psi_s\left(\dfrac{1}{n};\vec{\varrho}\right)}{n}, & \text{ha}\quad \varrho_0=1.\end{cases}\end{aligned} \tag{7.54}$$

A bizonyítás a 7. 1. segédtétel birtokában triviális.

7.6. KOROLLÁRIUM. *Legyen* $f(x) \in C[-1, 1]$ *és* $x_0 \in (-1, 1)$, *továbbá* $f(x)$ *az* x_0 *pontban legyen folytonos, sőt*

$$(7.55) \qquad |f(x_0+h)-f(x_0)| \leqq C_{32}\psi_s(|h|; \vec{\varrho}_\mu),$$

ahol $\vec{\varrho}_\mu$ *jelentése ugyanaz mint a 7.2. segédtételben. Ez esetben az* $[x_{kn}]$ *normális pontcsoportra támaszkodó*

$$(7.56) \qquad L_n(x; f) \equiv \sum_{k=1}^{n} f(x_{kn}) l_{kn}(x)$$

Langrange-féle interpoláció-sorozat x_0*-ban* $f(x_0)$*-hoz konvergál.*

A BIZONYÍTÁS majdnem triviális. Legyen ugyanis $0 < \mu^* < \mu$. Tetszőleges ε-hoz található ekkor olyan $0 < \delta_0 \leqq \frac{1}{2}(1-|x_0|)$, hogy

$$(7.57) \qquad \left|\log_s \frac{1}{|\delta|}\right|^{\mu^*-\mu} < \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{1}{C_{25}(\mu^*)} \cdot \frac{1}{C_{32}}$$

érvényes, hacsak $|\delta| \leqq \delta_0$. Tekintsük mármost az

$$(7.58) \qquad f^*(x) \in C[-1, 1] \equiv \begin{cases} f(x_0-\delta_0), & \text{ha} \quad -1 \leqq x \leqq x_0-\delta_0 \\ f(x), & \text{ha} \quad x_0-\delta_0 \leqq x \leqq x_0+\delta_0 \\ f(x_0+\delta_0), & \text{ha} \quad x_0+\delta_0 \leqq x \leqq 1 \end{cases}$$

segédfügggvényt. Érvényes erre az

$$(7.59) \qquad |f^*(x_0+h)-f^*(x_0)| \leqq \psi_s(|h|; \vec{\varrho}_{\mu^*}) \cdot \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{1}{C_{25}(\mu^*)}$$

becslés és így a 7.3. segédtétel alapján

$$(7.60) \qquad |L_n(x_0; f^*)-f^*(x_0)| \leqq \frac{\varepsilon}{2} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Minthogy emellett

$$(7.61) \qquad |L_n(x_0; f)-f(x_0)| \leqq |L_n(x_0: f-f^*)| + |L_n(x_0; f^*(x_0)|$$

— és itt a jobboldal első tagja a 3.1. lokalizációs korollárium szerint kisebb $\frac{1}{2}\varepsilon$-nél, ha már $n \geqq n_0(\delta_0) = n_0(\varepsilon)$ — ezért tetszőleges $\varepsilon > 0$ mellett

$$(7.62) \qquad |L_n(x_0; f)-f(x_0)| \leqq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \quad \text{hacsak} \quad n \geqq n_0(\varepsilon),$$

amivel állításunkat igazoltuk.

IRODALOM

[1] FEJÉR, L.: Über Interpolation, *Göttinger Nachrichten,* (1916) 66—91.
[2] ERDŐS, P.—TURÁN, P.: On Interpolation I—III, *Annals of Math.* **38** (1937) 142—155, **39** (1938) 703—724, ill. **41** (1940).
[3] GRÜNWALD, G.: On the theory of interpolation, *Acta Math.,* **75** (1943) 219—245.
[4] FREY, T.: A legjobb polinomapproximáció lokalizásáról I - IV., *MTA III. Oszt. Közl.,* **7** (1957) 403—412; **8** (1958) 89—112 (A III. ill. IV. rész közlés előtt).
[5] FREUD, G.: Über die Konvergenz des Hermite—Fejérschen Interpolationverfahrens, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **5** (1954) 109—127.
[6] BALÁZS, J.: Bemerkungen zur Hermite—Fejérschen Interpolationstheorie, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.,* **9** (1958) 363—377.
[7] FREY, T.: A konstruktív függvénytan néhány lokális tételéről. Kandidátusi értekezés tézisei, *Budapest,* 1956.
[8] FREY, T.: Interpoláció normális pontcsoportokon, I., MTA III. Osztályának Közleményei **9** (1959) 121—148.

(Beérkezett: 1958. XII. 19.)

Műszaki Egyetem
Villlamosmérnöki Kar
Matematika Tanszék

A FÉLIGEGYSZERŰ GYŰRŰK JELLEMZÉSEIRŐL

Írta: KERTÉSZ ANDOR* és STEINFELD OTTÓ**

1. §. Bevezetés

Az (asszociativ) gyűrűk elméletének egyik legfontosabb eredménye, az ún. WEDDERBURN—ARTIN-féle tétel teljesen leírja, pontosabban ferdetestekre vezeti vissza bizonyos nevezetes tulajdonságokkal biró gyűrűk szerkezetét. E tétel jelentősége nemcsak abban áll, hogy a gyűrűelméletben aránylag kevés hasonló jellegű struktúra-tétel ismeretes, hanem abban is, hogy kiinduló pontja egy, az absztrakt algebra keretein is messze túlnövő törekvésnek, amely gyűrűk tágabb osztályait is lineáris transzformációk segítségével igyekszik leírni. A WEDDERBURN—ARTIN-féle tétel által jellemzett gyűrű-osztály az ún. féligegyszerű gyűrűk osztálya. *Féligegyszerűnek* nevezünk egy olyan gyűrűt, amely nem tartalmaz 0-tól különböző nilpotens balideált, s amely balideáljaira nézve minimumkövetelménynek tesz eleget.

A WEDDERBURN-féle klasszikus vizsgálatok óta számos olyan eredmény keletkezett, amely a féligegyszerű gyűrűket bizonyos tulajdonságokkal jellemzi. Ezek az eredmények egyre jobban kiemelték a féligegyszerű gyűrűk fontosságát, s azt mutatták, hogy a féligegyszerű gyűrű fogalma a ferdetest fogalmának olyan általánosítása, amely még rendelkezik a ferdetestek számos nevezetes tulajdonságával. Pl. a ferdetest feletti lineáris egyenletrendszerek elmélete érvényben marad akkor is, ha az egyenletek együtthatóit egy tetszőleges féligegyszerű gyűrűből választjuk [5].

Ebben a dolgozatban a féligegyszerű gyűrűk különféle jellemzései közül eltekintünk azoktól, amelyek a féligegyszerű gyűrűket mint operátortartományokat jellemzik, tehát tisztán gyűrűelméleti jellemzésekkel foglalkozunk. Sőt ezek közül is kihagyjuk azokat, amelyek a lineáris egyenletrendszerek elméletével kapcsolatosak. (Ez utóbbiakra vonatkozóan bőséges anyagot lehet találni az [5] és [6] dolgozatokban.) Egy olyan tételt bizonyítunk be, amely tíz gyűrűelméleti tulajdonság ekvivalenciáját állítja. E tulajdonságok között van a féligegyszerű gyűrűk definíciója, s közös bennük az, hogy valamennyi az

* A Debreceni Kossuth Lajos Tudományegyetem Matematikai Intézete.
** A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézete.

ideál, féloldali ideál és kváziideál fogalmát veszi alapul; azt is mondhatjuk tehát, hogy a tétel a féligegyszerű gyűrűk ideálelméleti jellemzéseit tartalmazza. A tétel állítása magában foglalja a WEDDERBURN—ARTIN-féle tételt, a NOETHER-féle ún. alaptételt (lásd a $(\mathfrak{C})$ és $(\mathfrak{A})$ feltételeket a 3. §-ban, továbbá [13]-at és [1]-et, ill. [8]-at) és a féligegyszerű gyűrűk G. GOLDMANtól származó jellemzését (lásd $(\mathfrak{F})$-et és [4]-et; erre vonatkozóan lásd még [3]-at). A tételben szereplő $(\mathfrak{F})$, $(\mathfrak{G})$, $(\mathfrak{I})$ és $(\mathfrak{J})$ feltételek ekvivalenciája a [7] dolgozat általánosabb vizsgálataiból következményként adódott. Az, hogy a $(\mathfrak{B})$, $(\mathfrak{D})$ ill. $(\mathfrak{H})$ feltételek a féligegyszerű gyűrűket jellemzik, új eredmény. Ennek közlésén kívül a dolgozat célja az, hogy a szóbanforgó tulajdonságokat egyetlen következtetésláncba foglalva mélyebb bepillantást nyújtson ezeknek egymáshoz való viszonyába. A tétel bizonyításában a lehető legnagyobb egyszerűségre törekedve a feltételek sorrendjét úgy igyekeztünk megállapítani, hogy a „ciklikus" bizonyításban egyik feltételből a másik minél természetesebben következzék.

2. §. Definíciók és segédtételek

Gyűrűn mindig asszociatív gyűrűt értünk.

Az R gyűrűt *radikálmentesnek* nevezzük, ha nincs 0-tól különböző nilpotens balideálja.

Azt mondjuk, hogy R balideáljaira nézve *minimumkövetelménynek* tesz eleget, ha R balideáljainak bármely (nem üres) H halmazában van olyan balideál, amely a H halmazban szereplő egyetlen balideált sem tartalmazza valódi módon.

Az R gyűrűt *féligegyszerűnek* nevezzük, ha radikálmentes és balideáljaira nézve minimumkövetelménynek tesz eleget.

Akkor mondjuk, hogy az R gyűrű $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m$ 0-tól különböző elemei ortogonális idempotens elemek, ha $\varepsilon_i \varepsilon_k = \varepsilon_i$ vagy 0 aszerint, hogy $i = k$ vagy $i \neq k$.

Az R balideáljainak valamely rendszerét *függetlennek* mondjuk, ha a tekintett balideálok közül bármelyiknek az összes többi által generált balideállal való metszete 0. Ha az R gyűrű $\mathfrak{l}$ balideáljához van az R-nek olyan $\mathfrak{l}'$ balideálja, hogy $\mathfrak{l}$ és $\mathfrak{l}'$ együtt az egész R-et generálják és $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}' = 0$, akkor azt mondjuk, hogy R-nek $\mathfrak{l}$ *direkt összeadandója.*

Egy R gyűrű $\mathfrak{a}$ részmodulusát *kváziideálnak* nevezzük, ha $R\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}R \subseteq \mathfrak{a}$ teljesül.[1] E fogalom a bal-, ill. jobbideál fogalmának általánosítása. Könnyű belátni, hogy R bármely kváziideálja R-nek részgyűrűje, viszont egy részgyűrű

[1] E fogalom először [9] dolgozatban szerepel. Ezzel kapcsolatban bővebbet a [10] és [11] dolgozatokban találhatunk.

nem szükségképpen kváziideál. Az R gyűrű $\mathfrak{b}(\neq 0)$ kváziideálját *minimálisnak* nevezzük, ha R-nek nincs olyan $\mathfrak{b}'$ kváziideálja, amelyre $0 \subset \mathfrak{b}' \subset \mathfrak{b}$ teljesülne.

Azt mondjuk, hogy az R gyűrű $\mathfrak{a}_{11}, \mathfrak{a}_{12}, \dots, \mathfrak{a}_{mm}$ kváziideáljai *teljes rendszert* alkotnak, ha léteznek olyan $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m$ (zérótói különböző) ortogonális idempotens elemek, hogy $\mathfrak{a}_{ik}$ vagy zéró vagy $\mathfrak{a}_{ik} = \varepsilon_i R \varepsilon_k$ $(1 \leqq i, k \leqq m)$ minimális kváziideál, és ha $\mathfrak{a}_{ik}, \mathfrak{a}_{kj} \neq 0$, akkor

$$\text{(i)} \qquad \mathfrak{a}_{ki} \cdot \mathfrak{a}_{ik} \cdot \mathfrak{a}_{kj} \neq 0$$

teljesül.

Most felsoroljuk a bizonyításban felhasznált segédtételeket.

1. SEGÉDTÉTEL (lásd [10], 8. lemma): *Legyen $\mathfrak{l}\,(\mathfrak{r})$ az R gyűrű balideálja (jobbideálja) és $\varepsilon(\in R)$ idempotens elem, akkor $\varepsilon\mathfrak{l}$ $(\mathfrak{r}\varepsilon)$ az R kváziideálja.*

2. SEGÉDTÉTEL (lásd [10], 3. tétel): *Egy tetszőleges R gyűrű $\mathfrak{a}$ minimális kváziideálja vagy zérógyűrű, vagy ferdetest. Ez utóbbi esetben $\mathfrak{a} = \varepsilon R \varepsilon$, ahol ε az $\mathfrak{a}$ egységeleme.*

3. SEGÉDTÉTEL (lásd [10], 1. tétel): *Az R gyűrű egy minimális bal- és egy minimális jobbideáljának a metszete vagy 0 vagy pedig R-nek minimális kváziideálja.*

KÖVETKEZMÉNY: *Ha ε és η idempotens elem, εR és $R\eta$ minimális jobb- ill. balideál, akkor az $\varepsilon R \eta$ kváziideál vagy 0, vagy pedig minimális kváziideál R-ben.*

A következmény bizonyításához a 3. segédtétel alapján elegendő megmutatni, hogy $\varepsilon R \cap R\eta = \varepsilon R \eta$. Egyrészt világos, hogy $\varepsilon R \eta \subseteq \varepsilon R \cap R \eta$. Másrészt, az $\varepsilon R \cap R\eta$ metszet tetszőleges α elemére alkalmas ϱ, σ $(\in R)$ elemekkel fennáll $\alpha = \varepsilon\sigma = \varrho\eta$. Balról ε-nal szorozva $\alpha = \varepsilon\sigma = \varepsilon\varrho\eta \in \varepsilon R \eta$, tehát $\varepsilon R \cap R\eta \subseteq \varepsilon R \eta$ adódik, azaz valóban $\varepsilon R \cap R\eta = \varepsilon R \eta$.

4. SEGÉDTÉTEL (lásd [10], 7. tétel): *Az R radikálmentes gyűrű mindegyik $\mathfrak{a}$ minimális kváziideálja az R egy alkalmas minimális balideáljának és egy alkalmas minimális jobbideáljának a metszete, következésképpen $\mathfrak{a} = \varepsilon R \eta = \varepsilon R \cap R \eta$ $(\varepsilon^2 = \varepsilon,\ \eta^2 = \eta)$ teljesül, ahol εR minimális jobbideál és $R\eta$ minimális balideál.*

5. SEGÉDTÉTEL (lásd [12], 149. old.): *Ha az R gyűrű véges sok minimális balideál direkt összege, akkor R balideáljaira teljesül a minimumkövetelmény.*

3. §. A tétel és bizonyítása

TÉTEL: *Egy R (asszociativ) gyűrűre vonatkozóan ekvivalensek az alábbi feltételek:*

($\mathfrak{A}$) *R jobbegységelemes és minimális balideálok direkt összege;*

($\mathfrak{B}$) *R olyan kváziideálok összege, amelyek teljes rendszert alkotnak;*

($\mathfrak{C}$) *R véges sok olyan kétoldali ideál direkt összege, amelyek mindegyike egy-egy ferdetest feletti teljes mátrixgyűrűvel izomorf;*

($\mathfrak{D}$) *R radikálmentes és véges sok minimális kváziideál direkt összege;*

($\mathfrak{E}$) *R radikálmentes és balideáljaira teljesül a minimumkövetelmény;*

($\mathfrak{F}$) *R mindegyik balideáljának van jobbegységeleme;*

($\mathfrak{G}$) *R jobbegységelemes és mindegyik balideálja direkt összeadandó;*

($\mathfrak{H}$) *R jobbegységelemes és megegyezik bármely maximális független balideálrendszerének direkt összegével;*

($\mathfrak{I}$) *R jobbegységelemes és bármely 0-tól különböző elemének baloldali annullátora R véges sok maximális balideáljának metszete;*

($\mathfrak{J}$) *R jobbegységelemes és R-ben létezik véges sok olyan maximális balideál, amelyek metszete 0.*

KIEGÉSZÍTÉS: *Alkossuk meg az ($\mathfrak{A}$)—($\mathfrak{J}$) feltételek mindegyikének „duálisát" olymódon, hogy a szereplő „bal"- ill. „jobb"-fogalmakat a megfelelő „jobb"- ill. „bal"-fogalmakkal helyettesítjük. Az így nyert feltételek bármelyike ekvivalens az ($\mathfrak{A}$)—($\mathfrak{J}$) feltételek bármelyikével.*

BIZONYÍTÁS: ($\mathfrak{A}$) $\Longrightarrow$ ($\mathfrak{B}$). Tegyük fel, hogy az R gyűrűre teljesül az ($\mathfrak{A}$) feltétel. A jobbegységelem létezése miatt R *véges sok* minimális balideál direkt összege:

(1) $$R = \mathfrak{l}_1 + \cdots + \mathfrak{l}_m.$$

Jelöljük R jobbegységelemét ε-nal. Ez az elem (1) alapján

(2) $$\varepsilon = \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_m \qquad (\varepsilon_i \in \mathfrak{l}_i)$$

alakban írható. Megmutatjuk, hogy ekkor

(3) $$\varepsilon_i \varepsilon_k = \begin{cases} \varepsilon_i, & \text{ha } i = k \\ 0, & \text{ha } i \neq k \end{cases}$$

és

(4) $$\mathfrak{l}_i = R\varepsilon_i,$$

tehát (1) szerint

(5) $$R = R\varepsilon_1 + \cdots + R\varepsilon_m$$

teljesül.[2] A (2) egyenlőséget balról ε_i-vel szorozva

$$\varepsilon_i = \varepsilon_i\varepsilon = \varepsilon_i\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_i^2 + \cdots + \varepsilon_i\varepsilon_m$$

adódik, ahonnan, figyelembe véve, hogy az R elemeinek az (1) direkt felbontás alapján történő előállítása egyértelmű, megkapjuk (3)-at. Minthogy $\varepsilon_i^2 = \varepsilon_i \neq 0$ miatt $R\varepsilon_i \neq 0$, az $\varepsilon_i \in \mathfrak{l}$ miatt $R\varepsilon_i \subseteq \mathfrak{l}_i$, $\mathfrak{l}_i$ minimalitása implikálja (4)-et, s így (1)-gyel együtt természetesen (5)-t is.

Most kimutatjuk, hogy ε az R-nek (kétoldali) egységeleme. (2) miatt R bármely ϱ elemére

$$\varrho = \varrho\varepsilon = \varrho\varepsilon_1 + \cdots + \varrho\varepsilon_m \tag{6}$$

teljesül. Adott i indexre az

$$\varepsilon\varrho\varepsilon_i - \varrho\varepsilon_i \qquad (\varrho \in R) \tag{7}$$

elemek összessége R-nek egy $\mathfrak{l}$ balideálját alkotja, melyre $\mathfrak{l} \subseteq R\varepsilon_i$ is teljesül. $R\varepsilon_i$ minimalitása miatt vagy $\mathfrak{l} = R\varepsilon_i$, vagy $\mathfrak{l} = 0$. Az $\mathfrak{l} = R\varepsilon_i$ eset azonban lehetetlen, minthogy bármely két (7) alatti elem szorzata 0 és így $\mathfrak{l}$ nem tartalmazhatná az ε_i idempotens elemet. Tehát $\mathfrak{l} = 0$, azaz minden ϱ $(\in R)$ elemre $\varepsilon\varrho\varepsilon_i = \varrho\varepsilon_i$. Minthogy az utóbbi egyenlőség minden $i = 1, \ldots, m$ index esetén fennáll, (6) felhasználásával

$$\varepsilon\varrho = \varepsilon\varrho\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon\varrho\varepsilon_m = \varrho\varepsilon_1 + \cdots + \varrho\varepsilon_m = \varrho\varepsilon = \varrho$$

adódik, s ez bizonyítja, hogy ε balegységelem.

Most azt bizonyítjuk be, hogy az $\varepsilon_i R$ $(i = 1, \ldots, m)$ jobbideálok valamennyien minimálisak. Ebből a célból elegendő azt megmutatni, hogy $\varepsilon_i R$ tetszőleges $\varepsilon_i\sigma$ $(\neq 0,\ \sigma \in R)$ eleméhez található R-nek olyan τ eleme, hogy

$$\varepsilon_i\sigma \cdot \tau = \varepsilon_i. \tag{8}$$

Mindenekelőtt megjegyezzük, hogy az $\varepsilon_i\sigma$ $(\neq 0)$ elem (6) alapján $\varepsilon_i\sigma = \varepsilon_i\sigma\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_i\sigma\varepsilon_m$ alakban írható, ahol pl. az $\varepsilon_i\sigma\varepsilon_k$ komponensről feltehetjük, hogy 0-tól különböző. Tekintsük az $R\varepsilon_i \cdot \varepsilon_i\sigma\varepsilon_k$ balideált. Az ε_i elem idempotens és az $R\varepsilon_k$ balideál minimális voltánál fogva $R\varepsilon_i \cdot \varepsilon_i\sigma\varepsilon_k = R\varepsilon_k$, tehát $\varepsilon_k R\varepsilon_i \cdot \varepsilon_i\sigma\varepsilon_k = \varepsilon_k R\varepsilon_k$. Ennek alapján létezik olyan σ^* $(\in R)$ elem, amelyre

$$\varepsilon_k\sigma^*\varepsilon_i \cdot \varepsilon_i\sigma\varepsilon_k = \varepsilon_k \tag{9}$$

érvényes. Megmutatjuk, hogy

$$\varepsilon_i\sigma\varepsilon_k \cdot \varepsilon_k\sigma^*\varepsilon_i = \varepsilon_i. \tag{10}$$

A rövidség kedvéért vezessük be az $\eta = \varepsilon_i\sigma\varepsilon_k \cdot \varepsilon_k\sigma^*\varepsilon_i$ jelölést. Szorozzuk meg

[2] Ezen részlet bizonyítása lényegileg megegyezik [12], 117. §, 5. segédtétel bizonyításával, azzal a különbséggel, hogy az idézett helyen ε az R (kétoldali) egységeleme.

a (9) egyenletet balról $\varepsilon_i\sigma\varepsilon_k$-val. Az így nyert egyenlőség — tekintetbe véve, hogy $\varepsilon_i\sigma\varepsilon_k \neq 0$ — mutatja, hogy $\eta \neq 0$. Ugyancsak (9) felhasználásával

(11) $$\eta^2 = \eta$$

adódik, s az is azonnal látható, hogy

(12) $$\varepsilon_i \eta = \eta.$$

Továbbá $R\eta \neq 0$, $R\eta \subseteq R\varepsilon_i$ és $R\varepsilon_i$ minimalitása miatt $R\eta = R\varepsilon_i$, tehát létezik olyan ζ ($\in R$) elem, amelyre $\zeta\eta = \varepsilon_i$. Ebből azonban (11) szerint

$$\varepsilon_i\eta = \zeta\eta^2 = \zeta\eta = \varepsilon_i$$

következik, amely utóbbi (12)-vel együtt bizonyítja (10)-et. A $\tau = \varepsilon_k\sigma^*\varepsilon_i$ tehát a (8) egyenlet megoldása, azaz $\varepsilon_i R$ valóban minimális jobbideál.[3]

Minthogy ε (kétoldali) egységelem, a tetszőleges ϱ ($\in R$) elem

$$\varrho = \varepsilon_1\varrho\varepsilon_1 + \varepsilon_1\varrho\varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_m\varrho\varepsilon_m$$

alakban írható, s ez azt jelenti, hogy fennáll:

(13) $$R = \varepsilon_1 R\varepsilon_1 + \varepsilon_1 R\varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_m R\varepsilon_m = \sum_{i,k=1}^{m} \varepsilon_i R\varepsilon_k.$$

A (13) előállításban szereplő $\varepsilon_i R\varepsilon_k$ komplexusok a 3. segédtétel „következménye" szerint vagy zérók, vagy minimális kváziideálok. (9) alapján az is azonnal látható, hogy az (i) feltétel teljesül.

$(\mathfrak{B}) \Longrightarrow (\mathfrak{C})$. Teljesüljön az R gyűrűre a $(\mathfrak{B})$ feltétel, azaz legyen

$$R = \sum_{i,k=1}^{m} \mathfrak{a}_{ik},$$

ahol $\mathfrak{a}_{ik}$ vagy zéró, vagy

$$\mathfrak{a}_{ik} = \varepsilon_i R\varepsilon_k \qquad (1 \leqq i,\ k \leqq m)$$

minimális kváziideál, $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m$ ortogonális idempotens elemek, végül

(14) $$\mathfrak{a}_{ki} \cdot \mathfrak{a}_{ik} \cdot \mathfrak{a}_{kl} \neq 0,$$

valahányszor $\mathfrak{a}_{ik}, \mathfrak{a}_{kl} \neq 0$. Az $1, \ldots, m$ indexek halmazát páronként idegen részhalmazokra bontjuk a következő ekvivalenciareláció segítségével: legyenek i

[3] Ezen a ponton érdemes talán megjegyezni a következőt:
Minthogy ε baloldali egységelem, R tetszőleges ϱ elemére

$$\varrho = \varepsilon_1\varrho + \cdots + \varepsilon_m\varrho$$

érvényes, tehát R az $\varepsilon_i R$ jobbideálok összegeként áll elő, sőt ez az előállítás direkt, minthogy

$$\varepsilon_1\varrho_1 + \cdots + \varepsilon_m\varrho_m = 0 \qquad (\varrho_1, \ldots, \varrho_m \in R)$$

-ból $\varepsilon_i\varrho_i = 0$ adódik, ha balról ε_i-vel szorzunk. Tehát R balegységelemes és minimális jobbideálok direkt összege.

és k *ekvivalensek* (jelben $i \equiv k$), akkor és csak akkor, ha $\mathfrak{a}_{ik} \neq 0$. Ez valóban ekvivalenciareláció, mert a) $0 \neq \varepsilon_i = \varepsilon_i \varepsilon_i \varepsilon_i \in \varepsilon_i R \varepsilon_i = \mathfrak{a}_{ii}$ miatt $i \equiv i$; b) ha $\mathfrak{a}_{ik} \neq 0$, akkor mivel $\mathfrak{a}_{kk} \neq 0$, (14) szerint $\mathfrak{a}_{ki} \cdot \mathfrak{a}_{ik} \cdot \mathfrak{a}_{kk} \neq 0$, tehát $\mathfrak{a}_{ki} \neq 0$, azaz, ha $i \equiv k$, akkor $k \equiv i$; végül c) ha $\mathfrak{a}_{ik} \neq 0$ és $\mathfrak{a}_{kl} \neq 0$, akkor ugyancsak (14) szerint $\mathfrak{a}_{ik} \cdot \mathfrak{a}_{kl} \neq 0$, s minthogy $\mathfrak{a}_{ik} \cdot \mathfrak{a}_{kl} \subseteq \mathfrak{a}_{il}$, ez utóbbira $\mathfrak{a}_{il} \neq 0$, tehát $i \equiv k$ és $k \equiv l$ implikálja, hogy $i \equiv l$. Minthogy $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m$ ortogonális idempotens elemek és $\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_m$ az R egységeleme, ezért az $\mathfrak{a}_{ik} = 0$ tagok törlése után

$$R = \sum_{1 \leqq i, k \leqq m}' \mathfrak{a}_{ik}$$

direkt összeg.

Az indexek sorrendjének alkalmas megválasztásával alkossák $1, 2, \ldots, h$ a tekintett ekvivalencia-osztályoknak egy tetszőlegesét. A „$\equiv$” ekvivalenciareláció definíciója alapján azonnal látható, hogy az

$$(15) \qquad \mathfrak{a} = \sum_{i,k=1}^{h} \varepsilon_i R \varepsilon_k$$

összeg R-nek (kétoldali) ideálja, amelyet az indexeknek bármely másik ekvivalencia-osztályából hasonlóan konstruált ideál mindkét oldalról annullál.

A ($\mathfrak{C}$) tulajdonság igazolásához a fentiek szerint nyilván elegendő azt kimutatnunk, hogy $\mathfrak{a}$ valamely K ferdetest feletti $h \times h$ tipusú mátrixok teljes gyűrűjével izomorf. (14) miatt mindegyik $\varepsilon_i R \varepsilon_1$ $(i = 1, \ldots, h)$ kváziideálnak létezik olyan $(0 \neq) \delta_i (\in \varepsilon_i R \varepsilon_1)$ eleme, amelyre $\varepsilon_1 R \varepsilon_i \delta_i \neq 0$. Minthogy az 1. segédtétel szerint $\varepsilon_1 R \varepsilon_i \delta_i$ $(\subseteq \varepsilon_1 R \varepsilon_1)$ kváziideál, ezért $\varepsilon_1 R \varepsilon_1$ minimalitása miatt $\varepsilon_1 R \varepsilon_i \delta_i = \varepsilon_1 R \varepsilon_1$. Ez egy olyan $(0 \neq) \delta_i^* (\in \varepsilon_1 R \varepsilon_i)$ elem létezését biztosítja, amelyre

$$(16) \qquad \delta_i^* \delta_i = \varepsilon_1 \qquad (i = 1, \ldots, h).$$

A $\delta_i \delta_i^* (\in \varepsilon_i R \varepsilon_i)$ elem (16) miatt idempotens és $\delta_i \delta_i^* \delta_i = \delta_i \varepsilon_1 = \delta_i \neq 0$ miatt 0-tól különböző. Minthogy $\varepsilon_i R \varepsilon_i = K$ a 2. segédtétel szerint ferdetest és ε_i az egységeleme, ezért a

$$(17) \qquad \delta_i \delta_i^* = \varepsilon_i \qquad (i = 1, \ldots, h)$$

összefüggésnek fenn kell állnia.

Feltehető, hogy a δ_i $(\neq 0)$ és δ_i^* $(\neq 0;\ i = 1, \ldots, h)$ elempárok, amelyekre (16) és (17) teljesül, rögzítve vannak.

Tekintsük $\mathfrak{a}$ elemeinek következő leképezését:

$$(18) \qquad a \to \| \delta_i^* a \delta_j \| \qquad (a \in \mathfrak{a};\ i, j = 1, \ldots, h),$$

ahol a jobboldal egy $h \times h$ tipusú négyzetes mátrix a K ferdetest felett. A (18) $\mathfrak{a}$-t a K feletti h-adrangú $K^{(h)}$ teljes mátrixgyűrűbe képezi le; az összeadásra a műveletartás ténye triviálisan teljesül. Minthogy $\varepsilon' = \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_h$ az $\mathfrak{a}$ egységeleme, továbbá (17) miatt az α, β ($\in \mathfrak{a}$) elemekre

$$\|\delta_i^*\alpha\delta_k\|\cdot\|\delta_i^*\beta\delta_k\| = \left\|\sum_{j=1}^{h}\delta_i^*\alpha\delta_j\delta_j^*\beta\delta_k\right\| = \left\|\sum_{j=1}^{h}\delta_i^*\alpha\varepsilon_j\beta\delta_k\right\| = \|\delta_i^*\alpha\beta\delta_k\|,$$

(18) alapján

$$\alpha\beta\to\|\delta_i^*\alpha\beta\delta_k\| = \|\delta_i^*\alpha\delta_k\|\cdot\|\delta_i^*\beta\delta_k\|,$$

tehát (18) a szorzásra nézve is műveletartó.

Most kimutatjuk, hogy (18) jobboldalán $K^{(h)}$-nak mindegyik $\|\varrho_{ik}\|$ ($\varrho_{ik}\in K$) eleme előfordul. (15), (16), (18), valamint az $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_h$ idempotens elemek ortogonalitása miatt a $\|\varrho_{ik}\|$ mátrixnak (18)-ban az inverzképe $\varrho = \sum_{j,l=1}^{h}\delta_j\varrho_{jl}\delta_l^*$ és $\varrho\in\mathfrak{a}$.

Végül, ha az $\alpha(\in\mathfrak{a})$ elemnek a képe a nullmátrix, akkor mindegyik $\delta_i^*\alpha\delta_j$ $(i,j=1,\dots,h)$ zéróval egyenlő, amiből (17) miatt $\alpha=\varepsilon'\alpha\varepsilon'=$ $=\sum_{i,j=1}^{h}\varepsilon_i\alpha\varepsilon_j=\sum_{i,j=1}^{h}\delta_i\delta_i^*\alpha\delta_j\delta_j^*=0$ következik.

$(\mathfrak{C})\Longrightarrow(\mathfrak{D})$. Teljesüljön az R gyűrűre a $(\mathfrak{C})$ feltétel, azaz legyen

(19) $$R = K_1^{(n_1)}\oplus\cdots\oplus K_r^{(n_r)},$$

ahol $K_i^{(n_i)}$ a K_i ferdetest feletti n_i-rangú teljes mátrixgyűrűt jelöli $(i=1,\dots,r)$ és $\oplus$ a gyűrűelméleti direkt összeg jelölésére szolgál. Minthogy $K_i^{(n_i)}$ az R kétoldali ideálja és egyben direkt összeadandó R-ben, ezért elegendő azt kimutatnunk, hogy bármely rögzített i indexre $K_i^{(n_i)}$ radikálmentes és véges sok minimális kváziideál direkt összege. (A továbbiakban a jelölések egyszerűsítése céljából az i indexet is elhagyjuk.) Jelölje $\mathfrak{a}^{(j,k)}$ a $K^{(n)}$-be tartozó azon mátrixok halmazát, amelyekben a j-edik sor és k-adik oszlop metszéspontján tetszőleges K-beli elem áll, a többi helyen 0. Bármely $\mathfrak{a}^{(j,k)}$ $K^{(n)}$-nek kváziideálja, minthogy tekintettel a mátrixok szorzási szabályára

$$K^{(n)}\mathfrak{a}^{(j,k)}\cap\mathfrak{a}^{(j,k)}K^{(n)}\subseteq\mathfrak{a}^{(j,k)}$$

teljesül. Továbbá, nyilván érvényes a következő direkt összeg-előállítás:

(20) $$K^{(n)} = \mathfrak{a}^{(1,1)}+\mathfrak{a}^{(1,2)}+\cdots+\mathfrak{a}^{(n,n)}.$$

Annak kimutatása végett, hogy az $\mathfrak{a}^{(j,k)}$ kváziideálok minimálisak, tekintsük az $\mathfrak{a}^{(j,k)}$ kváziideálnak egy tetszőleges

$$\begin{pmatrix} 0\cdots0\cdots\cdot0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0\cdots a_{jk}\cdots0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0\cdots0\cdots\cdot0 \end{pmatrix} \qquad (0\neq a_{jk}\in K)$$

zérótól különböző elemét. K ferdetest lévén az

$$xa_{jk}=b_{jk} \quad \text{és} \quad a_{jk}y=b_{jk} \qquad (a_{jk}, b_{jk}, x, y \in K)$$

egyenletek bármely $b_{jk}(\in K)$ elemre megoldhatók. Ezen egyenletek $x, y(\in K)$ megoldásaival fennállnak a következő mátrixegyenletek is:

$$\begin{array}{c} \\ j \end{array}\overset{\textstyle j}{\begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & \ddots & \\ & x & \ddots \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 0 \cdots\cdots 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots a_{jk} \cdots \\ 0 \cdots\cdots 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdots\cdots 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots b_{jk} \cdots \\ 0 \cdots\cdots 0 \end{pmatrix} \text{ és } \begin{pmatrix} 0 \cdots\cdots 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots a_{jk} \cdots \\ 0 \cdots\cdots 0 \end{pmatrix} \overset{\textstyle k}{\begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & \ddots & \\ & y & \\ 0 & \ddots & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 0 \cdots\cdots 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots b_{jk} \cdots \\ 0 \cdots\cdots 0 \end{pmatrix}$$

ami azt jelenti, hogy az $\mathfrak{a}^{(j,k)}$-nak bármely zérótól különböző eleme által generált kváziideál megegyezik $\mathfrak{a}^{(j,k)}$-val, vagyis $\mathfrak{a}^{(j,k)}$ minimális kváziideál.

$K^{(n)}$ radikálmentességének kimutatása végett tekintsük $K^{(n)}$ azon E_{jj} $(j=1,2,\ldots,n)$ elemeit, melyekben a j-edik sor és j-edik oszlop metszéspontján a K ferdetest egységeleme áll, a többi helyen 0. Nyilván az E_{jj} mátrixok ortogonális idempotensek és az

$$(21) \qquad E=E_{11}+E_{22}+\cdots+E_{nn}$$

mátrix a $K^{(n)}$ egységeleme. Könnyen belátható (lásd pl. [12] 142. old.), hogyha egy gyűrűnek van zérótól különböző nilpotens balideálja, akkor van ilyen (kétoldali) ideálja is. Eszerint $K^{(n)}$ radikálmenteségéhez elegendő azt belátnunk, hogy bármely $\mathfrak{l}(\neq 0)$ ideálja tartalmaz idempotens elemet. (21) miatt fennáll a

$$(22) \qquad \mathfrak{l}=E\mathfrak{l}E=\sum_{j,k=1}^{n} E_{jj}\mathfrak{l}E_{kk}$$

direkt összeg-előállítás. Az $\mathfrak{l}\neq 0$ feltétel miatt legalább egy $E_{jj}\mathfrak{l}E_{kk}\neq 0$. Minthogy az 1. segédtétel szerint $E_{jj}\mathfrak{l}E_{kk}$ a $K^{(n)}$ kváziideálja és $E_{jj}\mathfrak{l}E_{kk}\subseteq \mathfrak{a}^{(j,k)}$ is teljesül, ezért $\mathfrak{a}^{(j,k)}$ minimalitása miatt

$$(23) \qquad E_{jj}\mathfrak{l}E_{kk}=\mathfrak{a}^{(j,k)}.$$

Minthogy (22) és (23) szerint $\mathfrak{a}^{(j,k)}\subseteq \mathfrak{l}$ teljesül, továbbá a mátrixok szorzási szabálya és $\mathfrak{a}^{(k,k)}$ minimalitása miatt

$$\mathfrak{a}^{(k,j)}\cdot\mathfrak{a}^{(j,k)}=\mathfrak{a}^{(k,k)}\,(\subseteq \mathfrak{l})$$

is fennáll, ezért az $E_{kk}(\in \mathfrak{a}^{(k,k)})$ idempotens mátrix eleme $\mathfrak{l}$-nek. Ezzel $K^{(n)}$ radikálmentességét és egyben a $(\mathfrak{C})\Longrightarrow(\mathfrak{D})$ állításunkat is igazoltuk.

$(\mathfrak{D})\Longrightarrow(\mathfrak{E})$. Legyen az R gyűrű radikálmentes és teljesüljön a

$$(24) \qquad R=\mathfrak{k}_1+\cdots+\mathfrak{k}_r$$

direkt előállítás, ahol $\mathfrak{k}_1,\ldots,\mathfrak{k}_r$ az R minimális kváziideáljai. A 4. segédtétel felhasználásával (24) helyett

$$(24') \qquad R=\varepsilon_1 R\eta_1+\cdots+\varepsilon_r R\eta_r \quad (\mathfrak{k}_i=\varepsilon_i R\eta_i;\ \varepsilon_i^2=\varepsilon_i,\ \eta_i^2=\eta_i;\ i=1,\ldots,r)$$

írható. A 4. segédtételből az is következik, hogy $R\eta_1, \dots, R\eta_r$ minimális balideálok R-ben. (24′)-ből látható, hogy R előállítható az $R\eta_1, \dots, R\eta_r$ minimális balideálok összegeként. Az indexek sorrendjének alkalmas megválasztásával elérhető, hogy az

$$R = R\eta_1 + \cdots + R\eta_s \qquad (s \leqq r)$$

előállítás *direkt* összeg legyen. Ezt figyelembe véve, az 5. segédtétel alapján az R gyűrű balideáljaira teljesül a minimumkövetelmény.

$(\mathcal{E}) \Longrightarrow (\mathcal{F})$.[4] Tegyük fel, hogy az R gyűrűre teljesül az $(\mathcal{E})$ feltétel. Először azt mutatjuk ki, hogy R egy tetszőleges balideálja tartalmaz idempotens elemet. Ehhez, a minimumkövetelmény következtében, elegendő azt bizonyítanunk, hogy R mindegyik minimális balideálja tartalmaz idempotens elemet. E célból tekintsük R-nek egy $\mathfrak{l}_0$ minimális balideálját. Legyen λ az $\mathfrak{l}_0$-nak tetszőleges, 0-tól különböző eleme. Az $\mathfrak{l}_0\lambda$ az R-nek olyan balideálja, amelyre $\mathfrak{l}_0\lambda \subseteq \mathfrak{l}_0$ teljesül. Az $\mathfrak{l}_0$ minimalitása miatt vagy $\mathfrak{l}_0\lambda = 0$ vagy $\mathfrak{l}_0\lambda = \mathfrak{l}_0$ áll fenn. Ha az összes $\lambda(\neq 0, \in \mathfrak{l}_0)$ elemre $\mathfrak{l}_0\lambda = 0$ lenne, akkor $\mathfrak{l}_0$ nilpotens lenne, ami ellentmond R radikálmentességének; ezért valamelyik λ_0 elemre $\mathfrak{l}_0\lambda_0 = \mathfrak{l}_0$. Az $\mathfrak{l}_0$-nak van tehát olyan ε_0 eleme, amelyre $\varepsilon_0\lambda_0 = \lambda_0$ és így $(\varepsilon_0^2 - \varepsilon_0)\lambda_0 = 0$. Az $\mathfrak{l}_0$ azon elemeinek a halmaza, amelyek a $\lambda_0(\neq 0)$ elemet balról annullálják R-nek egy balideálját alkotják. $\varepsilon_0\lambda_0 = \lambda_0$ miatt ezen balideál valódi része $\mathfrak{l}_0$-nak, ezért $\mathfrak{l}_0$ minimális volta miatt csak zéró lehet. Ezzel kimutattuk, hogy $\varepsilon_0^2 - \varepsilon_0 = 0$, tehát az $\mathfrak{l}_0$ minimális balideálnak ε_0 idempotens eleme.

A következőkben kimutatjuk, hogy az R tetszőleges $\mathfrak{l}$ balideáljának van olyan ε idempotens eleme, amelynek $\mathfrak{l}$-beli baloldali annullátora zérussal egyenlő. Az $\mathfrak{l}$ mindenegyes ε idempotens eleméhez egyértelmű módon hozzá lehet rendelni egy $\mathfrak{l}_\varepsilon$ balideált, amely az összes olyan $\lambda(\in \mathfrak{l})$ elemekből áll, melyre $\lambda\varepsilon = 0$ teljesül. A balideálokra vonatkozó minimumkövetelmény miatt létezik olyan ε idempotens elem, amelyhez tartozó $\mathfrak{l}_\varepsilon$ balideál minimális. Ha $\mathfrak{l}_\varepsilon \neq 0$ volna, akkor az előzőek szerint $\mathfrak{l}_\varepsilon$-nak volna egy $\varepsilon_1(\neq 0)$ idempotens eleme, amelyre $\varepsilon_1\varepsilon = 0$ teljesül. Tekintsük az $\varepsilon' = \varepsilon + \varepsilon_1 - \varepsilon\varepsilon_1 (\in \mathfrak{l})$ elemet. $(\varepsilon + \varepsilon_1 - \varepsilon\varepsilon_1)(\varepsilon + \varepsilon_1 - \varepsilon\varepsilon_1) = \varepsilon + \varepsilon_1 - \varepsilon\varepsilon_1$, tehát ε' idempotens elem, és $\varepsilon'\varepsilon = \varepsilon$. Emiatt $\mathfrak{l}_{\varepsilon'} \subseteq \mathfrak{l}_\varepsilon$. Másrészt $\varepsilon_1\varepsilon = 0$ és $\varepsilon_1\varepsilon' = \varepsilon_1 \neq 0$ miatt $\mathfrak{l}_{\varepsilon'}$ valódi része $\mathfrak{l}_\varepsilon$-nak, ami ellentmond $\mathfrak{l}_\varepsilon$ minimális voltának. Ezért szükségképpen $\mathfrak{l}_\varepsilon = 0$.

Végül megmutatjuk, hogy ε az $\mathfrak{l}$-nek jobboldali egységeleme. Tekintsük $\mathfrak{l}$ egy tetszőleges λ elemére a $(\lambda - \lambda\varepsilon)\varepsilon = 0$ szorzatot. $\lambda - \lambda\varepsilon \in \mathfrak{l}_\varepsilon$ miatt $\lambda - \lambda\varepsilon = 0$. Eszerint ε az $\mathfrak{l}$ balideál jobboldali egységeleme.

$(\mathcal{F}) \Longrightarrow (\mathcal{G})$. Tegyük fel, hogy az R gyűrűre teljesül az $(\mathcal{F})$ feltétel és jelölje ε az R tetszőleges $\mathfrak{l}$ balideáljának jobboldali egységelemét. (Ha speci-

[4] Ezen állítás igazolása megegyezik [2] 4.2A tétel (28. old.) bizonyításával.

álisan $\mathfrak{l}=R$, akkor ε R-nek a $(\mathcal{G})$ feltételben megkövetelt jobbegységeleme.) Tekintsük az összes $\varrho-\varrho\varepsilon$ $(\varrho\in R)$ elemekből alkotott $\mathfrak{l}'$ balideált. Figyelembe véve, hogy $\mathfrak{l}=R\varepsilon$, a

$$\varrho=\varrho\varepsilon+(\varrho-\varrho\varepsilon) \qquad (\varrho\in R)$$

Peirce-felbontás szerint egyrészt világos, hogy

$$R=\mathfrak{l}+\mathfrak{l}'$$

másrészt ez R-nek $\mathfrak{l}$ és $\mathfrak{l}'$ *direkt* összegeként való előállítása, minthogy ε az $\mathfrak{l}$ elemeit jobbról való szorzással reprodukálja, az $\mathfrak{l}'$ elemeit pedig ugyancsak jobbról való szorzással annullálja, tehát $\mathfrak{l}\cap\mathfrak{l}'=0$.

$(\mathcal{G})\Longrightarrow(\mathcal{H})$. Tegyük fel, hogy az R gyűrűre fennáll $(\mathcal{G})$. Legyen $T=$ $=(\ldots,\mathfrak{l}_\nu,\ldots)_{\nu\in\Delta}$ az R gyűrű balideáljainak maximális független rendszere, s vezessük be az $\mathfrak{l}=\sum_{\nu\in\Delta}'\mathfrak{l}_\nu$ jelölést. A $(\mathcal{G})$ feltevés miatt $\mathfrak{l}$ R-nek direkt összeadandója, tehát $R=\mathfrak{l}+\mathfrak{l}'$, ahol a T rendszer maximalitásánál fogva szükségképpen $\mathfrak{l}'=0$, azaz $\mathfrak{l}=R$.

$(\mathcal{H})\Longrightarrow(\mathcal{J})$. Tegyük fel, hogy az R gyűrűre teljesül $(\mathcal{H})$. Először is megmutatjuk, hogy R bármely 0-tól különböző balideálja tartalmaz minimális balideált. Legyen $(0\neq)\mathfrak{l}=\mathfrak{l}_0$ R-nek tetszőleges balideálja. Ha $\mathfrak{l}_0$ minimális, akkor készen vagyunk. Ha nem, akkor tekintsük R balideáljainak olyan $T_0=(\mathfrak{l}_0,\mathfrak{k}_{01},\ldots,\mathfrak{k}_{0m_0})$ maximális független rendszerét, amely $\mathfrak{l}$-et tartalmazza. (Egy ilyen rendszert könnyű indukcióval meghatározni. Egy balideált ugyanis akkor és csak akkor veszünk fel a rendszerbe, ha a már kiválasztott balideálok rendszerétől független. Hogy ilyen módon véges sok lépésben egy maximális rendszerhez jutunk, azért világos, mert ellenkező esetben az általunk konstruált végtelen független rendszert ZORN lemmája alapján maximális független rendszerré kiegészítve a $(\mathcal{H})$ tulajdonság szerint azt nyernénk, hogy R végtelen sok balideál direkt összege. Ez azonban lehetetlen, mert R jobbegységelemének egy ilyen direkt felbontás alapján történő előállításában csak véges sok komponens lehet 0-tól különböző.)

Minthogy $\mathfrak{l}_0$ a feltevés szerint nem minimális, tartalmaz a $0\neq\mathfrak{l}_1\subset\mathfrak{l}$ feltételnek eleget tevő $\mathfrak{l}_1$ balideált. Ha $\mathfrak{l}_1$ minimális, akkor készen vagyunk. Ha nem, akkor a T_0 rendszerben $\mathfrak{l}_0$-t $\mathfrak{l}_1$-gyel kicserélve olyan T' független rendszerhez jutunk, amely nem maximális, minthogy az $\mathfrak{l}_1+\sum_{i=1}^{m_0}{}'\mathfrak{k}_{0i}$ direkt összeg nem tartalmazhatja $\mathfrak{l}_0$-nak olyan elemeit, amelyek nincsenek $\mathfrak{l}_1$-ben. A T' rendszert balideálok maximális független rendszerévé kiegészítve a $T_1=(\mathfrak{l}_1,\mathfrak{k}_{01},\ldots,\mathfrak{k}_{0m_0},\mathfrak{k}_{11},\ldots,\mathfrak{k}_{1m_1})$ rendszerhez jutunk, ahol m_1 természetes szám, tehát a T_1 rendszer több balideált tartalmaz, mint a T_0 rendszer.

Most ismételjük meg az előző bekezdés eljárását $\mathfrak{l}_0$ helyett $\mathfrak{l}_1$-re és T_0 helyett T_1-re. Ezt az eljárást folytatva véges, mondjuk az i-edik lépésben feltétlenül $\mathfrak{l}_i$ ($\subseteq \mathfrak{l}$) minimális balideálhoz kell jutnunk, minthogy az ellenkező esetben az összes

$$\begin{aligned} K_0 &= (\mathfrak{k}_{01}, \ldots, \mathfrak{k}_{0m_0}), \\ K_1 &= (\mathfrak{k}_{01}, \ldots, \mathfrak{k}_{0m_0}, \mathfrak{k}_{11}, \ldots, \mathfrak{k}_{1m_1}) \\ &\vdots \\ K_j &= (\mathfrak{k}_{01}, \ldots, \mathfrak{k}_{0m_0}, \mathfrak{k}_{11}, \ldots, \mathfrak{k}_{1m_1}, \ldots, \mathfrak{k}_{j1}, \ldots, \mathfrak{k}_{jm_j}) \\ &\vdots \end{aligned}$$

rendszerek K^* uniója végtelen sok balideál független rendszere volna, ez azonban nem lehetséges, minthogy K^*-ot maximális rendszerré kiegészítve ($\mathcal{H}$) alapján a jobbegységelemes R gyűrű végtelen sok balideál direkt összegeként állna elő.

Tekintsük most R minimális balideáljainak valamely S maximális független rendszerét. S az R összes balideáljainak halmazában is maximális, minthogy a fentiek szerint R bármely 0-tól különböző balideálja tartalmaz minimális balideált, s ez már függ az S rendszertől. Így a ($\mathcal{H}$) feltevés alapján R véges sok minimális balideál direkt összege:

$$(25) \qquad R = \mathfrak{m}_1 + \cdots + \mathfrak{m}_t.$$

Legyen R tetszőleges 0-tól különböző ϱ elemének (25) szerinti előállítása

$$(26) \qquad \varrho = \mu_1 + \cdots + \mu_t \qquad (\mu_i \in \mathfrak{m}_i;\ i = 1, \ldots, t).$$

Minthogy a ϱ elemet balról R-nek pontosan azok az elemei annullálják, amelyek a (26) felbontásban szereplő valamennyi μ_i komponenset is annullálják, az ($\mathfrak{I}$) feltétel igazolásához nyilván elegendő azt megmutatnunk, hogy $\mathfrak{m}_i$ tetszőleges $\alpha (\neq 0)$ elemének A baloldali annullátora R-nek maximális balideálja. Legyen $\sigma \in R$, $\sigma \notin A$. (Ilyen σ elem biztosan létezik, minthogy $\mathfrak{m}_i$ összes olyan β elemei, amelyekre $R\beta = 0$, R-nek egy $\mathfrak{m}_i'$ balideálját alkotják, amely $\mathfrak{m}_i$ minimalitása miatt vagy 0, vagy $\mathfrak{m}_i$. $\mathfrak{m}_i' = \mathfrak{m}_i$ azonban nem állhat, minthogy az R gyűrű ε jobbegységelemének a (25) direkt felbontása szerinti előállításában fellépő i-edik ε_i komponensére $R\varepsilon_i = \mathfrak{m}_i \neq 0$.) Ekkor $0 \neq \sigma\alpha (\in \mathfrak{m}_i)$, s a zárójelben álló megjegyzés alapján $R\sigma\alpha = \mathfrak{m}_i$, tehát van olyan $\tau (\in R)$ elem, hogy $\tau\sigma\alpha = \alpha$. Ezt felhasználva $(\varepsilon - \varepsilon\tau\sigma)\alpha = \varepsilon\alpha - \varepsilon(\tau\sigma\alpha) = 0$, tehát $\varepsilon - \varepsilon\tau\sigma \in A$ adódik. Ez azt jelenti, hogy ε benne van az A és a σ által generált $\mathfrak{a}_\sigma = \{A, \sigma\}$ balideálban, s minthogy $R\varepsilon = R$, ebből következik, hogy $\mathfrak{a}_\sigma = R$.

($\mathfrak{I}$) $\Rightarrow$ ($\mathfrak{J}$). Tegyük fel, hogy ($\mathfrak{I}$) teljesül. Ekkor, minthogy az R gyűrű ε jobbegységelemének baloldali annullátora 0, R-nek van véges sok olyan maximális balideálja, amelyek metszete 0.

($\mathfrak{J}$) $\Rightarrow$ ($\mathcal{A}$). Tegyük fel, hogy $\mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_k$ olyan maximális balideálok az R gyűrűben, hogy

$$(27) \qquad \mathfrak{n}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{n}_k = 0$$

teljesül, viszont (27) elveszti érvényét, ha a szereplő maximális balideálok bármelyikét töröljük. Megmutatjuk, hogy ekkor R előállítható a k számú

$$\mathfrak{a}_i = \mathfrak{n}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{n}_{i-1} \cap \mathfrak{n}_{i+1} \cap \cdots \cap \mathfrak{n}_k \qquad (i=1,\ldots,k) \tag{28}$$

minimális balideálok direkt összegeként. Először is bebizonyítjuk, hogy $\mathfrak{a}_i$ minimális balideál ($i=1,\ldots,k$). Mivel ugyanis feltevésünk szerint (27)-ben egyetlen $\mathfrak{n}_i$ sem törölhető, $\mathfrak{a}_1 \neq 0$; továbbá ugyancsak (27) szerint $\mathfrak{a}_1$ és $\mathfrak{n}_1$ direkt összeget generál. Végül, minthogy $\mathfrak{n}_1 \subset \mathfrak{a}_1 + \mathfrak{n}_1 \subseteq R$, $\mathfrak{n}_1$ maximális volta miatt

$$\begin{aligned} R &= \mathfrak{a}_1 + \mathfrak{n}_1 \\ R &= \mathfrak{a}_2 + \mathfrak{n}_2 \\ &\vdots \\ R &= \mathfrak{a}_k + \mathfrak{n}_k, \end{aligned} \tag{29}$$

ahol a második, ..., k-adik egyenlőségek is az elsőhöz hasonlóan adódnak. Következik ezekből, hogy $\mathfrak{a}_i$ minimális balideálja R-nek.

Mármost a (29) alatti második egyenlőséget speciálisan $\mathfrak{n}_1$ elemeire alkalmazva azt nyerjük, hogy

$$\mathfrak{n}_1 = \mathfrak{a}_2 + \mathfrak{n}_1 \cap \mathfrak{n}_2. \tag{30}$$

Az említett egyenlőség $\mathfrak{n}_1$ valamely elemének előállítására való alkalmazásakor ugyanis a jobboldali első komponens is $\mathfrak{n}_1$-beli elem (lásd (28)), s így a második komponens $\mathfrak{n}_1 \cap \mathfrak{n}_2$-be tartozó elem. Ennélfogva (30) baloldala része a jobboldalnak, de a megfordított tartalmazás is nyilvánvaló. — Hasonlóan alkalmazva a (29) alatti harmadik egyenlőséget $\mathfrak{n}_1 \cap \mathfrak{n}_2$ elemeire, a negyediket $\mathfrak{n}_1 \cap \mathfrak{n}_2 \cap \mathfrak{n}_3$ elemeire, s. i. t., rendre nyerjük, hogy

$$\begin{aligned} \mathfrak{n}_1 \cap \mathfrak{n}_2 &= \mathfrak{a}_3 + \mathfrak{n}_1 \cap \mathfrak{n}_2 \cap \mathfrak{n}_3 \\ \mathfrak{n}_1 \cap \mathfrak{n}_2 \cap \mathfrak{n}_3 &= \mathfrak{a}_4 + \mathfrak{n}_1 \cap \mathfrak{n}_2 \cap \mathfrak{n}_3 \cap \mathfrak{n}_4 \\ &\vdots \\ \mathfrak{n}_1 \cap \mathfrak{n}_2 \cap \cdots \cap \mathfrak{n}_{k-1} &= \mathfrak{a}_k + \mathfrak{n}_1 \cap \mathfrak{n}_2 \cap \cdots \cap \mathfrak{n}_k = \mathfrak{a}_k. \end{aligned}$$

Ha most $R = \mathfrak{a}_1 + \mathfrak{n}_1$-be (30) alapján, majd az így kapott egyenlőségbe rendre a legutóbbi összefüggések alapján helyettesítünk, akkor végül

$$R = \mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 + \cdots + \mathfrak{a}_k$$

adódik, s éppen ezt kellett bebizonyítanunk.

Ezzel a tétel bizonyítását befejeztük.

Hogy a „kiegészítés" is érvényes, következik abból, hogy a tétel „duálisát" teljesen analog módon bizonyíthatjuk, s hogy pl. a ($\mathfrak{C}$) feltétel „önduális". Arra, hogy az ($\mathfrak{A}$) feltétel és „duálisa" ekvivalensek, a tétel bizonyítása közben egy közvetlen bizonyítást is nyertünk. (Lásd az $(\mathfrak{A}) \Longrightarrow (\mathfrak{B})$ következtetést és a [3] lábjegyzetet.)

IRODALOM

[1] ARTIN, E.: Zur Theorie der hyperkomplexen Zahlen, *Abh. Hamburg,* **5** (1927) 251—260.

[2] ARTIN, E.—NESBITT, C. J.—THRALL, R. M.: Rings with minimum condition, *Ann Arbor,* 1954.

[3] FUCHS, L.—SZELE, T.: Contribution to theory of semi-simple rings, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.,* **3** (1952) 235—239.

[4] GOLDMAN, O.: A characterization of semi-simple rings with the descending chain condition, *Bull. Amer .Math. Soc.,* **52** (1946) 1021—1027.

[5] KERTÉSZ, A.: The general theory of linear equation systems over semi-simple rings, *Publ. Math. Debrecen,* **4** (1955) 79—86.

[6] KERTÈSZ, A.: Vizsgálatok az operátormodulusok elméletében, II., *Magyar Tud. Akad. Math. Fiz. Oszt. Közl.,* **9** (1959) 15—50.

[7] KERTÉSZ, A.: Beiträge zur Theorie der Operatormoduln, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.,* **8** (1957) 235—257.

[8] NOETHER, E.: Hyperkomplexe Größen und Darstellungstheorie, *Math. Z.,* **30** (1929) 641—692.

[9] STEINFELD, O.: On ideal-quotients and prime ideals, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.,* **4** (1953), 289—298.

[10] STEINFELD, O.: Über die Quasiideale von Ringen, *Acta Sci. Math. Szeged,* **17** (1956), 170 - 180.

[11] STEINFELD, O.: Bemerkung zu einer Arbeit von T. Szele, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.,* **6** (1955) 479—484.

[12] VAN DER WAERDEN, B. L.: Moderne Algebra II., *Berlin,* 1940.

[13] WEDDERBURN, J. H. M.: On hyperkomplex numbers, *Proc. London Math. Soc.,* (2) **26** (1908) 77—118.

(Beérkezett: 1959. VI. 1.)

A KÜLFÖLDI SZAKIRODALOMBÓL

GREEN-FÜGGVÉNYRE VONATKOZÓ EGYENLŐTLENSÉGEK*

Irta: D. M. EJDUSZ (Leningrád)

Legyen a háromdimenziós tér korlátos Ω tartományának a határa S. Feltesszük, hogy az S határ λ-kitevőjű *Ljapunov*-felület. Tekintsük a *Laplace*-operátornak az Ω tartományra vonatkozó *Dirichlet*-feladathoz tartozó $G(x, y)$ *Green*-függvényét. Ez

$$G(x, y) = \frac{1}{4\pi r_{xy}} + g(x, y)$$

alakú, ahol r_{xy} az Ω tartomány x és y pontja közötti távolság, $g(x, y)$ pedig a *Green*-függvény reguláris része. A $g(x, y)$ függvény nem korlátos $\Omega\times\Omega$-ban, érvényes azonban a

$$|g(x, y)| \leqq \frac{1}{4\pi r_{xy}}$$

egyenlőtlenség. LEVY [3] cikkében kísérlet történt a $g(x, y)$ deriváltjaira vonatkozó analog egyenlőtlenség bebizonyítására, de az ott közölt megfontolások hibásak. [2] közleményünkben rövidítve ismertettük a

$$|Dg(x, y)| \leqq c_1 r_{xy}^{-2} \tag{1}$$

egyenlőtlenség bizonyítását; itt $Dg(x, y)$ az egyik pont bármelyik koordinátája szerint vett első deriváltat, c_1 pedig csak Ω-tól függő állandót jelent (az ilyen állandókat a továbbiakban c_i-vel jelöljük).

A jelen cikk 1. §-ában bebizonyítjuk, hogy a

$$g_1(x, y) = \frac{1}{16\pi^2} \int_S \frac{1}{r_{xt}} \frac{\partial}{\partial n_t} \left(\frac{1}{r_{ty}}\right) dS_t$$

függvény bizonyos értelemben a $g(x, y)$ függvény főrésze. Nevezetesen bebizonyítjuk, hogy $\Omega\times\Omega$-ban[1] fennállnak a

$$|g_1(x, y)| \leqq c_2 r_{xy}^{-1}, \tag{2}$$

$$|g(x, y) - g_1(x, y)| \leqq c_3 r_{xy}^{\lambda-1} \tag{3}$$

* Математический Сборник 45 (87), (1958) 455—470.

[1] Ω mindig nyílt tartományt jelent.

egyenlőtlenségek, továbbá az első deriváltakra vonatkozó analóg egyenlőtlenségek, amelyekből speciálisan következik (1). A 2. §-ban a másodrendű deriváltakat vizsgáljuk.

Ismertetjük a felhasználandó jelöléseket. A t, x, y, z, u, v, w betűkkel az $\Omega+S$ halmaz pontjait jelöljük. Legyen $f(u)$ az $u\in\Omega$ pont függvénye, akkor $D^k f(x)$-szel fogjuk jelölni az u pont koordinátái szerint képezett bármelyik k-adrendű derivált értékét az x pontban. Ha $f(u, v)$ két pont függvénye, akkor $D^k f(u, v)$-vel jelöljük az elöl álló u pont koordinátái szerint vett k-adrendű deriváltakat.

Tartozzék a t pont az S felülethez. $S_{t\delta}$-val fogjuk jelölni S-nek a t középpontú, δ sugarú gömb belsejében fekvő részét. n_t-vel jelöljük S külső normálisát a t pontban, T_t-vel a t pontbeli érintősíkot. Ha t és t_1 az S felület pontjai, ϱ_{tt_1}-gyel jelöljük a t_1 pont n_t-től való távolságát.

q-val fogjuk jelölni a *Ljapunov*-féle gömb sugarát, amelyet oly kicsinynek tételezünk fel, hogy teljesülnek a következő feltételek:

1. Ha t és t_1 az S felület pontjai, továbbá $r_{tt_1}<q$, akkor $r_{tt_1}<2\varrho_{tt_1}$.

2. Akármilyen $t\in S$ pontot veszünk is, az S felület S_{tq}-ban foglalt bármely S' darabjának a felszíne kisebb, mint az S' felületdarab T_t-re való vetületének kétszeres területe.

3. $S_{t\delta}$-nak T_t-re való vetülete, — ahol δ tetszésszerinti, q-nál nem nagyobb szám — tartalmazza a T_t-ben fekvő, t középpontú, $\frac{1}{2}\delta$ sugarú kört.

A q sugár ilyen megválasztása mindig lehetséges (lásd [1], 16—17. oldal).

Legyen x az Ω tartomány egyik pontja. Akkor $\bar{x}$-sal fogjuk jelölni az S felület x-hez legközelebb eső pontját. Jegyezzük meg, hogy x rajta van $n_{\bar{x}}$-on.

m-mel fogjuk jelölni az Ω tartomány átmérőjét. Rögzítsünk egy p számot úgy, hogy $p\geqq 3$, $pq\geqq m$.

$\sigma_{t\delta}$-val $\left(t\in S,\ 0<\delta<\frac{1}{2}q\right)$ jelöljük S-nek az n_t tengelyű, δ sugarú körhenger által kimetszett és a t pontot tartalmazó részét. $T_{t\delta}$-val jelöljük $\sigma_{t\delta}$ vetületét T_t-re.

Legyen $\varphi(t, y)$ a $t\in S$, $y\in\Omega+S$ pontok függvénye. Akkor $\frac{\partial\varphi(t, y)}{\partial n_t}$-vel jelöljük a $\varphi(t, y)$ függvénynek (rögzített y mellett) az n_t irányban vett deriváltját a t helyen. (Természetesen ilyenkor a φ függvénynek értelmezve kell lenni n_t mentén is t-hez eléggé közel.)

Legyen továbbá

$$\tau_1(t, y)=\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial n_t}\left(\frac{1}{r_{ty}}\right),$$

ahol $t\in S$, $y\in\Omega+S$.

Már megállapodtunk abban, hogy a csak Ω-tól függő állandókat c_i-vel jelöljük. Ha az állandó függhet még valamilyen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ numerikus paraméterektől is, akkor $c_i(a_1, a_2, \ldots, a_n)$-nel fogjuk jelölni. Ezenkívül néha θ-val és k_i-vel is fogunk jelölni állandókat.

1. §.

1. LEMMA. *Az x, y pontok tartozzanak $\Omega+S$-hez, továbbá legyen $0 \leqq \alpha < 2$, $0 \leqq \beta < 2$. Akkor az*

$$F_0(x, y) = \int_S r_{xt}^{-\alpha} r_{yt}^{-\beta} dS_t$$

függvényre fennáll $\alpha+\beta>2$ esetén az

$$F_0(x, y) \leqq c_4(\alpha, \beta) r_{xy}^{2-\alpha-\beta},$$

$\alpha+\beta=2$ esetén az

$$F_0(x, y) \leqq c_5(\alpha, \beta) |\ln r_{xy}|,$$

$\alpha+\beta<2$ esetén az

$$F_0(x, y) \leqq c_6(\alpha, \beta)$$

egyenlőtlenség.

Ha az x, y pontok S-hez tartoznak, akkor ezeknek az egyenlőtlenségeknek a bizonyítása szerepel az [1] könyvben (156—158. o.). A lemma bizonyítása hasonló módon végezhető, ezért elhagyjuk.

2. LEMMA. *Legyen $\varphi(t, y)$, ahol $t \in S$, $y \in \Omega$, a t pont folytonos függvénye. Tegyük fel, hogy minden $t \in S$, $y \in \Omega$ pontpárra teljesül a*

$$|\varphi(t, y)| \leqq k_1 r_{ty}^{-2} \tag{4}$$

egyenlőtlenség, ahol k_1 állandó. Ezenkívül legyen minden $y \in \Omega$-ra

$$\int_S |\varphi(t, y)| dS_t \leqq k_2, \tag{5}$$

ahol k_2 állandó. Akkor az

$$F(x, y) = \int_S r_{xt}^{-\alpha} \varphi(t, y) dS_t$$

függvényre, ahol $0 \leqq \alpha < 2$, $x \in \Omega+S$, $y \in \Omega$, fennáll az

$$|F(x, y)| \leqq c_7(k_1, k_2, \alpha) r_{xy}^{-\alpha} \tag{6}$$

egyenlőtlenség.

BIZONYÍTÁS. Először tegyük fel, hogy $2pr_{x\bar{x}} < r_{xy}$. Vezessük be a $\Sigma = S_{\bar{x}\delta}$ jelölést, ahol $\delta = p^{-1} r_{xy}$. Így $\delta \leqq q$. Legyen $t \in \Sigma$; akkor, mint könnyen látható, $r_{ty} \geqq \frac{1}{2} r_{xy}$. (4) folytán

$$\left| \int_{\Sigma} r_{xt}^{-\alpha} \varphi(t, y) dS_t \right| \leqq \frac{16\pi k_1}{r_{xy}^2} \int_0^{\delta} \varrho^{1-\alpha} d\varrho = \frac{16\pi k_1 p^{\alpha-2}}{(2-\alpha) r_{xy}^{\alpha}}.$$

Most legyen $t \in S - \Sigma$. Akkor $2pr_{xt} \geqq r_{xy}$. Az (5) egyenlőtlenségből kapjuk:

$$\left| \int_{S-\Sigma} r_{xt}^{-\alpha} \varphi(t, y) dS_t \right| \leqq k_2 (2p)^{\alpha} r_{xy}^{-\alpha}.$$

Innen következik (6).

Abban az esetben, amikor $2pr_{x\bar{x}} \geqq r_{xy}$, a (6) egyenlőtlenség (5)-ből adódik.

3. LEMMA. *Bármely $z \in S$, $z_1 \in S$, $y \in \Omega + S$ ponthármasra, amely eleget tesz az $r_{zz_1} \leqq \theta r_{zy}$ $(0 < \theta < 1)$ feltételnek, érvényes a*

$$|\tau_1(z, y) - \tau_1(z_1, y)| \leqq c_8(\theta)(r_{zy}^{-3} r_{zz_1} + r_{zy}^{-2} r_{zz_1}^{\lambda})$$

egyenlőtlenség. Abban a speciális esetben, amikor $y \in S$, teljesül a

$$|\tau_1(z, y) - \tau_1(z_1, y)| \leqq c_9(\theta)(r_{zy}^{\lambda-3} r_{zz_1} + r_{zy}^{-2} r_{zz_1}^{\lambda})$$

egyenlőtlenség.

E lemma egyszerű bizonyítását elhagyjuk.

4. LEMMA. *Legyen $\varphi(t, y)$, ahol $t \in S$, $y \in \Omega$, a t pont folytonos függvénye és teljesüljön rá a*

$$|\varphi(t, y)| \leqq k_3 r_{ty}^{-\alpha} \tag{7}$$

egyenlőtlenség, ahol $0 < \alpha \leqq 2$ (ha $\alpha \leqq 2$, akkor még feltesszük, hogy fennáll az (5) egyenlőtlenség). Vezessük be a

$$\Phi(z, y) = \int_S \tau_1(z, t) \varphi(t, y) dS_t$$

jelölést. Akkor bármely $z \in S$, $z_1 \in S$, $y \in \Omega$ ponthármasra, amely eleget tesz az $r_{zz_1} \leqq \theta r_{zy}$ $(0 < \theta < 1)$ feltételnek, érvényes a

$$|\Phi(z, y) - \Phi(z_1, y)| \leqq c_{10}(\theta, \alpha, k_3, \lambda')(r_{zy}^{\lambda-1-\alpha} r_{zz_1} + r_{zy}^{-\alpha} r_{zz_1}^{\lambda'})$$

egyenlőtlenség, ahol λ' tetszés szerinti, λ-nál kisebb pozitív szám.[2]

BIZONYÍTÁS. Legyen $\Sigma_0 = S_{z\delta}$, ahol $\delta = \theta r_{zy}$, továbbá $\Sigma_1 = S_{z\delta_1}$, ahol $\delta_1 = \frac{1}{2}(1 + \theta) r_{zy}$. Akkor

$$\Phi(z, y) = \int_{S-\Sigma_1} \tau_1(z, t) \varphi(t, y) dS_t + \int_{\Sigma_1} \tau_1(z, t) \varphi(t, y) dS_t \equiv \Phi_1(z, y) + \Phi_2(z, y).$$

[2] $\alpha = 2$ esetén c_{10} függ még k_2-től is.

Legyen $t \in S - \Sigma_1$; akkor $r_{zz_1} \leqq \frac{2\theta}{1+\theta} r_{zt}$. Alkalmazva a z, z_1, t pontokra a 3. lemmát, kapjuk:

$$|\Phi_1(z, y) - \Phi_1(z_1, y)| \leqq c_{11}(\theta) \int_{S-\Sigma_1} (r_{zt}^{\lambda-3} r_{zz_1} + r_{zt}^{-2} r_{zz_1}^{\lambda}) |\varphi(t, y)| dS_t.$$

Innen

$$|\Phi_1(z, y) - \Phi_1(z_1, y)| \leqq k_3 (c_{12}(\theta) r_{zz_1} r_{zy}^{\lambda+\lambda_1-3} + c_{13}(\theta) r_{zz_1}^{\lambda} r_{zy}^{\lambda_1-2}) \int_S r_{zt}^{-\lambda_1} r_{ty}^{-\alpha} dS_t,$$

ahol $\lambda_1 = 2 - \frac{\alpha}{2}$. Az $\alpha < 2$ esetben az 1. lemma alapján

$$|\Phi_1(z, y) - \Phi_1(z_1, y)| \leqq k_3 c_{14}(\theta, \alpha) (r_{zy}^{\lambda-1-\alpha} r_{zz_1} + r_{zy}^{-\alpha} r_{zz_1}^{\lambda}).$$

$\alpha = 2$ esetén az (5) egyenlőtlenségből következik:

$$|\Phi_1(z, y) - \Phi_1(z_1, y)| \leqq k_2 c_{15}(\theta) (r_{zy}^{\lambda-3} r_{zz_1} + r_{zy}^{-2} r_{zz_1}^{\lambda}).$$

Most legyen $t \in \Sigma_1$; akkor $r_{ty} \geqq \frac{1}{2}(1-\theta) r_{zy}$. (7)-ből következik, hogy a $t \in \Sigma_1$ pontokra

(8) $$|\varphi(t, y)| \leqq k_3 c_{16}(\theta, \alpha) r_{zy}^{-\alpha}.$$

Vezessük be a

$$\psi(t, y) = \begin{cases} \varphi(t, y) & \text{ha} \quad t \in \Sigma_1 \\ 0 & \text{ha} \quad t \in S - \Sigma_1 \end{cases}$$

jelölést. Akkor

$$\Phi_2(z, y) = \int_S \tau_1(z, t) \psi(t, y) dS_t.$$

[1]-ben be van bizonyítva (77—80. o.), hogy a

$$P(z) = \int_S \tau_1(z, t) \mu(t) dS_t$$

függvényre, ahol $\mu(t)$ az S felületen értelmezett korlátos függvény, teljesül a

$$|P(z) - P(z_1)| \leqq c_{17}(\lambda') r_{zz_1}^{\lambda'} \sup_{t \in S} |\mu(t)|$$

egyenlőtlenség, ahol $z \in S$, $z_1 \in S$, $0 < \lambda' < \lambda$. Innen és (8)-ból következik:

$$|\Phi_2(z, y) - \Phi_2(z_1, y)| \leqq k_3 c_{18}(\theta, \alpha, \lambda') r_{zy}^{-\alpha} r_{zz_1}^{\lambda'}.$$

Ezzel a lemmát bebizonyítottuk.

5. LEMMA. *Legyen $\varphi(t, y)$, ahol $t \in S$, $y \in \Omega$, a t pont folytonos függvénye és teljesüljön rá a (7) egyenlőtlenség valamely $\alpha > 0$ mellett. Tegyük fel, hogy vannak olyan pozitív θ, λ', k_4 állandók ($\theta < 1, \lambda' \leqq \lambda$), hogy bármely az $r_{tt_1} \leqq \theta r_{ty}$ feltételnek eleget tevő $t \in S$, $t_1 \in S$, $y \in \Omega$ ponthármasra fennáll a*

(9) $$|\varphi(t, y) - \varphi(t_1, y)| \leqq k_4 (r_{ty}^{-1-\alpha} r_{tt_1} + r_{ty}^{-\lambda-\alpha} r_{tt_1}^{\lambda'})$$

egyenlőtlenség. Legyenek az $x\in\Omega$, $y\in\Omega$ *pontok olyanok, hogy* $2p r_{x\bar{x}} \leqq r_{xy}$. *Vezessük be a* $\sigma_{\bar{x}\delta}=\sigma$ *jelölést, ahol* $\delta=\frac{\theta}{2p} r_{xy}$. *Akkor az*

$$F(u)=\int_{\sigma} r_{ut}^{-1}\varphi(t, y)\,dS_t$$

függvénynek az x pontban vett $DF(x)$ *deriváltja eleget tesz a*

$$|DF(x)| \leqq c_{19}(k_3, k_4, \alpha, \lambda')\, r_{xy}^{\lambda'-\lambda-\alpha}$$

egyenlőtlenségnek.

BIZONYÍTÁS. Legyen $t\in\sigma$. A $\varrho=\varrho_{\bar{x}t}$ jelölés mellett fennáll $r_{\bar{x}t} \leqq 2\varrho$. Innen, felhasználva, hogy $r_{\bar{x}y} \geqq \frac{3}{4} r_{xy}$, kapjuk: $r_{\bar{x}t} \leqq \theta r_{\bar{x}y}$. Következésképpen

$$|\varphi(\bar{x}, y)-\varphi(t, y)| \leqq k_4 c_{20}(\alpha)\left(r_{xy}^{-\alpha-1} r_{\bar{x}t}+r_{xy}^{-\alpha-\lambda} r_{\bar{x}t}^{\lambda'}\right). \tag{10}$$

(7)-ből és az $r_{ty} \geqq \frac{1}{4} r_{xy}$ egyenlőtlenségből adódik:

$$|\varphi(t, y)| \leqq 4^{\alpha} k_3 r_{xy}^{-\alpha}. \tag{11}$$

Becsüljük meg először a $\frac{\partial F(x)}{\partial n}$ deriváltat, ahol n az $n_{\bar{x}}$ normális iránya. Kapjuk:

$$\frac{\partial F(x)}{\partial n}=\int_{\sigma} \frac{\cos(r_{xt}, n_{\bar{x}})-\cos(r_{xt}, n_t)}{r_{xt}^2}\varphi(t, y)\,dS_t+\int_{\sigma} \frac{\cos(r_{xt}, n_t)}{r_{xt}^2}\varphi(t, y)\,dS_t.$$

[1] 78. oldalán be van bizonyítva a

$$|\cos(r_{xt}, n_{\bar{x}})-\cos(r_{xt}, n_t)| \leqq c_{21} r_{\bar{x}t}^{\lambda}$$

egyenlőtlenség. Ebből és a (11) egyenlőtlenségből következik:

$$\left|\int_{\sigma} \frac{\cos(r_{xt}, n_{\bar{x}})-\cos(r_{xt}, n_t)}{r_{xt}^2}\varphi(t, y)\,dS_t\right| \leqq c_{22}(k_3, \alpha)\, r_{xy}^{\lambda-\alpha}.$$

Használjuk fel az

$$\int_{S} \frac{|\cos(r_{xt}, n_t)|}{r_{xt}^2}\,dS_t \leqq c_{23} \qquad (x\in\Omega) \tag{12}$$

egyenlőtlenséget (lásd [1], 275. o.). (11)-ből kapjuk:

$$\left|\int_{\sigma} \frac{\cos(r_{xt}, n_t)}{r_{xt}^2}\varphi(t, y)\,dS_t\right| \leqq 4^{\alpha} k_3 c_{23} r_{xy}^{-\alpha}.$$

Ezzel bebizonyítottuk a

$$\left|\frac{\partial F(x)}{\partial n}\right| \leqq c_{24}(k_3, \alpha)\, r_{xy}^{-\alpha}$$

egyenlőtlenséget.

Becsülnünk kell még az $F(u)$ függvénynek az S felület $\bar{x}$ pontbeli valamely érintője irányában vett deriváltját az x helyen. Jelölje az $\bar{x}$ ponthoz tartozó lokális koordinátarendszer tengelyeit ξ, η, n, ahol a ξ és η tengely az S felület $\bar{x}$ pontbeli érintősíkjában fekszik. Legyenek a $t\in\sigma$ pont koordinátái a lokális rendszerben ξ_0, η_0, n_0, az u pontéi pedig ξ, η, n. Akkor

$$\frac{\partial F(x)}{\partial \xi} = \int_\sigma \frac{\xi_0}{r_{xt}^3}(\varphi(t, y) - \varphi(\bar{x}, y))\, dS_t + \varphi(\bar{x}, y)\int_\sigma \frac{\xi_0}{r_{xt}^3}\, dS_t.$$

(10) alapján

$$\left|\int_\sigma \frac{\xi_0}{r_{xt}^3}(\varphi(t, y) - \varphi(\bar{x}, y))\, dS_t\right| \leqq c_{25}(k_4, \alpha, \lambda')\, r_{xy}^{\lambda'-\lambda-\alpha}.$$

Használjuk fel az [1] 344. oldalán bebizonyított alábbi egyenlőtlenséget:

$$\left|\int_{\sigma_{\bar{x}\delta}} \frac{\xi_0}{r_{xt}^3}\, dS_t\right| \leqq c_{26}\delta^{\lambda},$$

ahol $x\in\Omega$, $2\delta<q$. Kapjuk:

$$\left|\frac{\partial F(x)}{\partial \xi}\right| \leqq c_{27}(k_3, k_4, \alpha, \lambda')\, r_{xy}^{\lambda'-\lambda-\alpha}.$$

A lemmát bebizonyítottuk.

6. LEMMA. *Legyen $\varphi(t, y)$, ahol $t\in S$, $y\in\Omega$, a t pont folytonos függvénye és tegyen eleget a következő feltételeknek:*

a) *Minden $t\in S$, $y\in\Omega$ mellett fennáll a* (7) *egyenlőtlenség, ahol* $0<\alpha\leqq 2$ *(ha $\alpha=2$, akkor még feltesszük, hogy minden $y\in\Omega$ pontra teljesül* (5)*).*

b) *Vannak olyan pozitív θ, λ', k_4 állandók ($\theta<1$, $\lambda'\leqq\lambda$), hogy bármely az $r_{tt_1}\leqq\theta r_{ty}$ feltételnek eleget tevő $t\in S$, $t_1\in S$, $y\in\Omega$ ponthármasra fennáll a* (9) *egyenlőtlenség.*

Akkor az

$$F(x, y) = \int_S r_{xt}^{-1}\varphi(t, y)\, dS_t \qquad (x\in\Omega,\ y\in\Omega)$$

függvény $DF(x, y)$ deriváltjaira érvényes a

$$|DF(x, y)| \leqq c_{28}(k_2, k_3, k_4, \alpha, \lambda', \theta)\, r_{xy}^{\lambda'-\lambda-\alpha}$$

egyenlőtlenség.

BIZONYÍTÁS. Először tegyük fel, hogy $2pr_{x\bar{x}} > r_{xy}$. Abban az esetben, amikor $\alpha = 2$, (5)-ből következik:

$$|DF(x, y)| \leqq 4p^2 k_2 r_{xy}^{-\alpha}.$$

Az $\alpha < 2$ esetben vezessük be a $\beta = \frac{1}{2}\alpha$ jelölést. Akkor (7)-ből és az 1. lemmából adódik:

$$|DF(x, y)| \leqq k_3 r_{x\bar{x}}^{-\beta} \int\limits_S r_{xt}^{\beta-2} r_{ty}^{-\alpha} dS_t \leqq (2p)^{\frac{\alpha}{2}} k_3 c_{29}(\alpha) r_{xy}^{-\alpha}.$$

Legyen most $2pr_{x\bar{x}} \leqq r_{xy}$. Az $F(u, y)$ függvényt két részre bontjuk:

$$F(u, y) = \int\limits_\sigma \frac{\varphi(t, y)}{r_{ut}} dS_t + \int\limits_{S-\sigma} \frac{\varphi(t, y)}{r_{ut}} dS_t \equiv F_1(u, y) + F_2(u, y),$$

ahol u az Ω tartomány tetszés szerinti pontja, $\sigma = \sigma_{\bar{x}\delta}$, $\delta = \frac{\theta}{2p} r_{xy}$. Az 5. lemma szerint

$$|DF_1(x, y)| \leqq c_{19}(k_3, k_4, \alpha, \lambda') r_{xy}^{\lambda'-\lambda-\alpha}.$$

Továbbá ha $t \in S - \sigma$, akkor $r_{xt} \geqq \delta$. Így, a $2pr_{x\bar{x}} > r_{xy}$ esethez hasonlóan, kapjuk a

$$|DF_2(x, y)| \leqq c_{30}(k_2, k_3, \alpha, \theta) r_{xy}^{-\alpha}$$

egyenlőtlenséget. Ezzel a lemmát bebizonyítottuk.

1. TÉTEL. *$\Omega \times \Omega$-ban érvényes (2) és (3)*[3], *valamint a következő egyenlőtlenségek:*

$$|Dg_1(x, y)| \leqq c_{31} r_{xy}^{-2}, \tag{13}$$

$$|D(g - g_1)| \leqq c_{32}(\lambda') r_{xy}^{\lambda'-2}, \tag{14}$$

ahol λ' tetszés szerinti, λ-nál kisebb szám.

BIZONYÍTÁS. Tartozzék az x és y pont Ω-hoz. Akkor

$$g(x, y) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_S \frac{1}{r_{xt}} \frac{\partial G(t, y)}{\partial n_t} dS_t. \tag{15}$$

Innen

$$G(x, y) = \frac{1}{4\pi r_{xy}} + \frac{1}{4\pi} \int\limits_S \frac{1}{r_{xt}} \frac{\partial G(t, y)}{\partial n_t} dS_t. \tag{16}$$

[3] Ha $\lambda = 1$, akkor a (3) egyenlőtlenséget a következőképpen kell írni:

$$|g - g_1| \leqq c_3(\varepsilon) r_{xy}^{-\varepsilon},$$

ahol ε tetszés szerinti pozitív szám.

Legyen z az S felület pontja; akkor (16)-ból következik:

$$\frac{\partial G(z,y)}{\partial n_z} = \tau_1(z,y) + \int_S \tau_1(z,t)\frac{\partial G(t,y)}{\partial n_t}\,dS_t. \tag{17}$$

Legyen

$$\tau_{i+1}(z,u) = \int_S \tau_i(z,t)\tau_1(t,u)\,dS_t,$$

ahol $z\in S$, $u\in\Omega+S$. (17) ismételt alkalmazásával kapjuk:

$$\frac{\partial G(z,y)}{\partial n_z} = \sum_{i=1}^{l}\tau_i(z,y) + \int_S \tau_l(z,t)\frac{\partial G(t,y)}{\partial n_t}\,dS_t, \tag{18}$$

ahol l-et úgy választjuk, hogy $l=\left[\frac{2}{\lambda}\right]+1$. Az 1. lemma értelmében minden $z\in S$, $t\in S$ pontpárra érvényes a

$$|\tau_l(z,t)| \leqq c_{33} \tag{19}$$

egyenlőtlenség. A (12) egyenlőtlenséget átírhatjuk a következőképpen:

$$\int_S |\tau_1(t,y)|\,dS_t \leqq c_{34}. \tag{20}$$

(20)-ból az 1. és 2. lemma alapján következik:

$$\left|\sum_{i=1}^{l}\tau_i(z,y)\right| \leqq c_{35} r_{zy}^{-2}. \tag{21}$$

Az ismert $\frac{\partial G(z,y)}{\partial n_z} \leqq 0$ egyenlőtlenség értelmében

$$\int_S \left|\frac{\partial G(t,y)}{\partial n_t}\right| dS_t = 1. \tag{22}$$

(18)-ból (21), (19) és (22) segítségével kapjuk:

$$\left|\frac{\partial G(z,y)}{\partial n_z}\right| \leqq c_{36} r_{zy}^{-2}. \tag{23}$$

(15)-ből és (17)-ből adódik:

$$g(x,y) = g_1(x,y) + \frac{1}{4\pi}\int_S \frac{1}{r_{xz}}\varphi_0(z,y)\,dS_z,$$

ahol

$$\varphi_0(z,y) = \int_S \tau_1(z,t)\frac{\partial G(t,y)}{\partial n_t}\,dS_t,$$

$$g_1(x,y) = \frac{1}{4\pi}\int_S \frac{1}{r^{xt}}\tau_1(t,y)\,dS_t.$$

(20)-ból és a 2. lemmából következik a (2) egyenlőtlenség, a 3. és 6. lemmából pedig a (13) egyenlőtlenség. Becsülnünk kell még a

$$\Phi_0(x,y) \equiv g(x,y) - g_1(x,y) = \frac{1}{4\pi}\int_S \frac{1}{r_{xz}}\varphi_0(z,y)\,dS_z \tag{24}$$

függvényt. (22)-ből és (23)-ból a 2. lemma segítségével kapjuk:

$$|\varphi_0(z,y)| \leqq c_{27} r_{zy}^{\lambda-2}, \tag{25}$$

ahol $z \in S$, $y \in \Omega$, ebből pedig az 1. lemma értelmében következik (3).

(22) és (23) szerint a $\varphi_0(z,y)$ függvényre alkalmazható a 4. lemma. Ebből a lemmából adódik, hogy bármely, egymással az $r_{zz_1} \leqq \frac{1}{2} r_{zy}$ feltétel útján összekapcsolt $z \in S$, $z_1 \in S$, $y \in \Omega$ ponthármasra fennáll a

$$|\varphi_0(z,y) - \varphi_0(z_1,y)| \leqq c_{38}(\lambda')(r_{zy}^{\lambda-3} r_{zz_1} + r_{zy}^{-2} r_{zz_1}^{\lambda'}) \tag{26}$$

egyenlőtlenség. (25)-ből és (26)-ból adódik, hogy a $\Phi_0(x,y)$ függvényre alkalmazható a 6. lemma az $\alpha = 2 - \lambda$ választással. Ebből a lemmából következik (14).

A tételt bebizonyítottuk.

2. §.

Ebben a paragrafusban feltesszük, hogy az S felület az L_2 osztályba tartozik valamilyen $\lambda < 1$ kitevő mellett (az L_2 osztály definícióját lásd [1] 120. oldalán). Minden ilyen tulajdonságú felület 1 kitevőjű *Ljapunov*-felület. Legyen $\varphi(t)$ a $t \in S$ pont folytonosan differenciálható függvénye. $\bar{D}_i\varphi(t)$-vel $(i = 1, 2, 3)$ fogjuk jelölni a $\varphi(t)$ függvény felületi gradiensének vetületeit a rögzített x_1, x_2, x_3 tengelyekre. Ha $\varphi(t,u)$ a $t \in S$, $u \in \Omega + S$ pontpár függvénye, akkor $\bar{D}_i\varphi(t,u)$-val jelöljük a $\varphi(t,u)$ függvény felületi gradiensének vetületeit, miközben a második helyen álló u pont rögzített.

7. LEMMA. *Ha $z \in S$, $y \in \Omega + S$, akkor fennáll a*

$$|\bar{D}_i\tau_1(z,y)| \leqq c_{39} r_{zy}^{-3}$$

egyenlőtlenség. Ha speciálisan $y \in S$, akkor

$$|\bar{D}_i\tau_1(z,y)| \leqq c_{40} r_{zy}^{-2}.$$

Azonkívül bármely, az $r_{zz_1} \leqq \theta r_{zy}$ $(0 < \theta < 1)$ feltételt kielégítő $z \in S$, $z_1 \in S$, $y \in \Omega + S$ ponthármasra érvényes a

$$|\bar{D}_i\tau_1(z,y) - \bar{D}_i\tau_1(z_1,y)| \leqq c_{41}(\theta)(r_{zy}^{-4} r_{zz_1} + r_{zy}^{-2} r_{zz_1}^{\lambda})$$

egyenlőtlenség. Ha speciálisan $y \in S$, akkor

$$|\bar{D}_i \tau_1(z, y) - \bar{D}_i \tau_1(z_1, y)| \leqq c_{42}(\theta)(r_{zy}^{-3} r_{zz_1} + r_{zy}^{-2} r_{zz_1}^{\lambda}).$$

Ennek a lemmának az elemi bizonyítását elhagyjuk.

8. LEMMA.[4] *Legyen valamely $\sigma_{z\delta}$ ($z \in S$, $2\delta < q$) tartományban értelmezve egy $\varphi(t)$ függvény, amelyre teljesülnek a*

$$|\varphi(t)| \leqq k_0', \tag{27}$$

$$|\varphi(t) - \varphi(t')| \leqq \sum_{i=1}^{n} k_i' r_{tt'}^{\alpha_i} \tag{28}$$

egyenlőtlenségek, ahol $t \in \sigma_{z\delta}$, $t' \in \sigma_{z\delta}$, k_i' és α_i pozitív állandók, $\alpha_i \leqq 1$. Akkor az

$$F(v) = \int_{\sigma_{z\delta}} \tau_1(v, t) \varphi(t) dS_t$$

függvény, ahol $v \in \sigma_{z\delta}$, differenciálható S mentén, és tetszés szerinti v, v' pontokra, amelyek $\sigma_{z\delta_1}$-hez tartoznak ($\delta_1 = \theta\delta$, $\theta < 1$), érvényesek a

$$|\bar{D}_i F(v)| \leqq k_0' c_{32}(\theta) + \sum_{i=1}^{n} k_i' \delta^{\alpha_i} c_{44}(\alpha_i), \tag{29}$$

$$\begin{aligned} |\bar{D}_i F(v) - \bar{D}_i F(v')| \leqq & k_0' c_{45}(\theta, \varepsilon_0)(\gamma \delta^{-1} + \gamma^{\lambda} + \gamma^{\lambda-\varepsilon_0} \delta^{\varepsilon_0}) + \\ & + \sum_{i=1}^{n} k_i' c_{46}(\theta, \alpha_i, \varepsilon_i)(\gamma^{\lambda} \delta^{\alpha_i} + \gamma^{\alpha_i} + \gamma^{\alpha_i - \varepsilon_i} \delta^{\varepsilon_i}) \end{aligned} \tag{30}$$

egyenlőtlenségek, ahol $\gamma = r_{vv'}$, az ε_i-k pedig tetszés szerinti pozitív állandók.

BIZONYÍTÁS. Legyenek ξ, η, n lokális koordináták a z pontban, ahol az n tengely n_z-vel megegyező irányítású. Ekkor a $\sigma_{z\delta}$ felületdarab egyenlete $n = f(\xi, \eta)$ alakú lesz, ahol az $f(\xi, \eta)$ függvény másodrendű deriváltjai λ kitevőjű *Lipschitz*-feltételnek tesznek eleget $T_{z\delta}$-ban. Jelölje (v_1, v_2, v_3) a v pont, (t_1, t_2, t_3) pedig a t pont koordinátáit a lokális rendszerben. Legyen $w(v_1, v_2)$ a v pont, $u(t_1, t_2)$ a t pont T_z-re való vetülete. Akkor (lásd [1], 389. oldal)

$$F(v) = \Phi(w) \cos(n_v, n_z), \tag{31}$$

ahol

$$\Phi(w) = \int_{T_{z\delta}} Q(w, u) \psi(u) du.$$

Itt

$$\psi(u) = \sqrt{1 + [f_\xi'(t_1, t_2)]^2 + [f_\eta'(t_1, t_2)]^2}\, \varphi(t), \qquad du = dt_1 dt_2,$$

$$Q(w, u) = \frac{f(t_1, t_2) - f(v_1, v_2) - (t_1 - v_1) f_\xi'(v_1, v_2) - (t_2 - v_2) f_\eta'(v_1, v_2)}{[(t_1 - v_1)^2 + (t_2 - v_2)^2 + (f(t_1, t_2) - f(v_1, v_2))^2]^{3/2}}.$$

[4] H. L. SZMOLICKIJ bebizonyított egy tételt ([1], 373. oldal), amelynek analogonja a 8. lemma. A bizonyításnál felhasználjuk H. L. SZMOLICKIJ módszerét.

Legyen $u \in T_{z\delta}$, $u' \in T_{z\delta}$. Akkor az $\alpha_0 = 1$ jelölés mellett fennáll

$$|\psi(u)| \leqq c_{47} k_0', \tag{32}$$

$$|\psi(u) - \psi(u')| \leqq c_{48} \sum_{i=0}^{n} k_i' r_{uu'}^{\alpha_i}. \tag{33}$$

Tekintsük először a

$$H(w) = \int_{T_{z\delta}} Q(w, u) du$$

függvényt, ahol $w \in T_{z\delta}$, és végezzük el a

$$t_1 = v_1 + \varrho \cos \omega, \quad t_2 = v_2 + \varrho \sin \omega$$

helyettesítést. Akkor

$$H(w) = \int_0^{2\pi} d\omega \int_0^{l(v_1, v_2, \omega)} \tilde{R}(v_1, v_2, \varrho, \omega) d\varrho,$$

ahol

$$l(v_1, v_2, \omega) = \sqrt{(v_1 \cos \omega + v_2 \sin \omega)^2 + \delta^2 - v_1^2 - v_2^2} - (v_1 \cos \omega + v_2 \sin \omega).$$

Legyen $0 \leqq \omega \leqq 2\pi$, $0 \leqq \varrho \leqq l$; akkor, mint könnyen bizonyítható,

$$|\tilde{R}| \leqq c_{49},$$

$$\left| \frac{\partial \tilde{R}}{\partial v_j} \right| \leqq c_{50} \varrho^{\lambda - 1}, \tag{34}$$

ahol $j = 1, 2$. Ezen egyenlőtlenségek segítségével bebizonyítható a

$$\frac{\partial H}{\partial v_j} = \int_0^{2\pi} \tilde{R}(v_1, v_2, l, \omega) \frac{\partial l}{\partial v_j} d\omega + \int_0^{2\pi} d\omega \int_0^{l} \frac{\partial \tilde{R}}{\partial v_j} d\varrho \equiv H_{j1}(w) + H_{j2}(w)$$

egyenlőség.[5] Legyen $w \in T_{z\delta_1}$; akkor $\left| \frac{\partial l}{\partial v_i} \right| \leqq c_{51}(\theta)$, $\left| \frac{\partial^2 l}{\partial v_i \partial v_j} \right| \leqq \frac{c_{52}(\theta)}{\delta}$, $l \geqq (1-\theta)\delta$.

Innen következik, hogy $T_{z\delta_1}$-ben

$$|H_{j1}(w)| \leqq c_{53}(\theta), \tag{35}$$

$$\left| \frac{\partial H_{j1}}{\partial v_i} \right| \leqq \frac{c_{54}(\theta)}{\delta}, \tag{36}$$

ahol $i, j = 1, 2$. (34) folytán $T_{z\delta}$-ban

$$|H_{j2}(w)| \leqq c_{55} \delta^{\lambda}. \tag{37}$$

Becsüljük meg a H_{j2} függvény növekményét $T_{z\delta}$-ban. Legyen $w, w' \in T_{z\delta}$.

[5] Lásd az analóg megfontolást [1] 382. oldalán.

Vezessük be az

$$r_{uw}=\varrho,\quad r_{uw'}=\varrho',\quad r_{ww'}=\gamma_0,\quad \frac{\partial \tilde{R}}{\partial v_i}=R_i(v_1, v_2, t_1, t_2)\equiv R_i(w; u)$$

jelöléseket. Jelöljük T'-vel azon $u\in T_{z\delta}$ pontok összességét, amelyekre $\varrho>2\gamma_0$. Legyen $u\in T'$, akkor, mint ismeretes ([1], 390. oldal),

$$\left|\frac{R_i(w,u)}{\varrho}-\frac{R_i(w',u)}{\varrho'}\right|\leqq c_{56}\varrho^{-3}(\gamma_0^{1+\lambda}+\varrho\gamma_0^{\lambda}+\varrho^{\lambda}\gamma_0). \tag{38}$$

(34) és (38) segítségével kapjuk:

$$|H_{j2}(w)-H_{j2}(w')|\leqq c_{57}\gamma_0^{\lambda}\left(1+\left|\ln\frac{\delta}{\gamma_0}\right|\right). \tag{39}$$

(35), (37), (36), (39)-ből következik, hogy $T_{z\delta_1}$-ben érvényesek a

$$\left|\frac{\partial H}{\partial v_j}\right|\leqq c_{58}(\theta), \tag{40}$$

$$\left|\frac{\partial H(w)}{\partial v_j}-\frac{\partial H(w')}{\partial v_j}\right|\leqq\frac{c'_{54}(\theta)}{\delta}\gamma_0+c_{57}\gamma_0^{\lambda}\left(1+\left|\ln\frac{\delta}{\gamma_0}\right|\right) \tag{41}$$

egyenlőtlenségek.

Tekintsük a $\Phi(w)$ függvényt. Vezessük be az

$$\tilde{R}(v_1, v_2, \varrho, \omega)=R(v_1, v_2, t_1, t_2)\equiv R(w, u)$$

jelölést. Akkor $\varrho Q(w,u)=R(w,u)$. Nem nehéz bebizonyítani a $T_{z\delta}$-ban érvényes

$$\left|\frac{R}{\varrho}\right|\leqq\frac{c_{59}}{\varrho}, \tag{42}$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial v_i}\frac{R}{\varrho}\right|\leqq\frac{c_{60}}{\varrho^2} \tag{43}$$

egyenlőtlenségeket. Legyen $w, w'\in T_{z\delta}$, $u\in T'$. Akkor, mint ismeretes ([1], 390. oldal),

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial v_i}\frac{R}{\varrho}\right)_w-\left(\frac{\partial}{\partial v_i}\frac{R}{\varrho}\right)_{w'}\right|\leqq c_{61}(\gamma_0\varrho^{-3}+\gamma_0^{\lambda}\varrho^{-2}). \tag{44}$$

A (33), (42), (43), (44) egyenlőtlenségekből következik[6] a

$$\frac{\partial\Phi}{\partial v_j}=\psi(w)\frac{\partial H}{\partial v_j}+I_j(w) \tag{45}$$

[6] Lásd az analóg megfontolást [1] 385—387. oldalán.

összefüggés, ahol

$$I_j(w)=\int\limits_{T_{z\delta}}(\psi(u)-\psi(w))\frac{\partial}{\partial v_j}\left(\frac{R}{\varrho}\right)du.$$

(33)-ból és (43)-ból adódik, hogy $T_{z\delta}$-ban

$$|I_j(w)|\leqq c_{62}\sum_{i=0}^{n}\frac{k_i'\delta^{\alpha_i}}{\alpha_i}. \tag{46}$$

Legyen $w, w'\in T_{z\delta}$. (33), (44), (43) segítségével kapjuk (lásd [1], 387. oldal):

$$|I_j(w)-I_j(w')|\leqq\sum_{i=0}^{n}k_i'c_{63}(\alpha_i)\left(\gamma_0^{\alpha_i}+\gamma_0^{\alpha_i}\left|\ln\frac{\delta}{\gamma_0}\right|+\gamma_0^{\lambda}\delta^{\alpha_i}\right). \tag{47}$$

A (32), (33), (40), (41), (45), (46) és (47) egyenlőtlenségekből adódik (29) és (30).

9. LEMMA. *Legyen $\varphi(t, y)$, ahol $t\in S$, $y\in\Omega$, a t pont folytonos függvénye és teljesüljenek rá az alábbi feltételek:*

a) *Minden $t\in S$, $y\in\Omega$ pontpárra fennáll* (4). *Azonkívül minden $y\in\Omega$-ra érvényes* (5).

b) *Vannak olyan θ és k_5 állandók, hogy bármely az $r_{tt_1}\leqq\theta r_{ty}$ feltételnek eleget tevő $t\in S$, $t_1\in S$, $y\in\Omega$ ponthármasra fennáll a*

$$|\varphi(t, y)-\varphi(t_1, y)|\leqq k_5(r_{ty}^{-3}r_{tt_1}+r_{ty}^{-2}r_{tt_1}^{\lambda})$$

egyenlőtlenség. Vezessük be a

$$\Phi(z, y)=\int\limits_{S}\tau_1(z, t)\varphi(t, y)dS_t \qquad (z\in S)$$

jelölést. Akkor minden $z\in S$, $y\in\Omega$ és $i=1, 2, 3$ mellett teljesül a

$$|\bar{D}_i\Phi(z, y)|\leqq c_{64}(k_1, k_2, k_5, \theta)r_{zy}^{-2} \tag{48}$$

egyenlőtlenség. Azonkívül létezik olyan pozitív $\theta_0(\theta)<1$ szám, hogy bármely az $r_{zz_1}\leqq\theta_0 r_{zy}$ feltétel kielégítő $z\in S$, $z_1\in S$, $y\in\Omega$ ponthármasra fennáll a

$$|\bar{D}_i\Phi(z, y)-\bar{D}_i\Phi(z_1, y)|\leqq c_{65}(k_1, k_2, k_5, \theta, \lambda')(r_{zy}^{-2}r_{zz_1}+r_{zy}^{-\lambda-2}r_{zz_1}^{\lambda'}) \tag{49}$$

egyenlőtlenség, ahol λ' tetszés szerinti, λ-nál kisebb szám.

BIZONYÍTÁS. Válasszuk a $\theta_1>0$ számot olyan kicsinek, hogy fennálljanak a $2\theta_1 m<q$, $4\theta_1<\theta(1-2\theta_1)$ egyenlőtlenségek. Vezessük be a $\sigma'=\sigma_{z\delta_1}$, $\sigma''=\sigma_{z\delta_2}$ jelöléseket, ahol z az S felület egyik pontja, $\delta_1=\theta_1 r_{zy}$, $\delta_2=\frac{1}{4}\delta_1$. Legyen u tetszés szerinti pont S-en. Akkor

$$\Phi(u, y)=\int\limits_{S-\sigma'}\tau_1(u, t)\varphi(t, y)dS_t+\int\limits_{\sigma'}\tau_1(u, t)\varphi(t, y)dS_t\equiv\Phi_1(u, y)+\Phi_2(u, y).$$

Legyen $t\in S-\sigma'$, $z_1\in\sigma''$. Akkor $r_{zt}\geqq\theta_1 r_{zy}$, $r_{zz_1}\leqq\frac{1}{2}r_{zt}$. Innen és (5)-ből a 7. lemma értelmében adódnak a

(50) $$|\bar{D}_i\Phi_1(z,y)|\leqq c_{66}k_2\theta_1^{-2}r_{zy}^{-2}.$$

(51) $$|\bar{D}_i\Phi_1(z,y)-\bar{D}_i\Phi_1(z_1,y)|\leqq c_{67}k_2(\theta_1^{-3}r_{zy}^{-3}r_{zz_1}+\theta_1^{-2}r_{zy}^{-2}r_{zz_1}^{\lambda})$$

egyenlőtlenségek. Most legyen $t\in\sigma'$, $t_1\in\sigma'$. Akkor $r_{ty}\geqq(1-2\theta_1)r_{zy}$, $r_{tt_1}\leqq\theta r_{ty}$, ahonnan

$$|\varphi(t,y)|\leqq k_1(1-2\theta_1)^{-2}r_{zy}^{-2},$$

$$|\varphi(t,y)-\varphi(t_1,y)|\leqq k_5(1-2\theta_1)^{-3}(r_{zy}^{-3}r_{tt_1}+r_{zy}^{-2}r_{tt_1}^{\lambda}).$$

A 8. lemma értelmében ezekből az egyenlőtlenségekből következik:

(52) $$|\bar{D}_i\Phi_2(z,y)|\leqq c_{68}(k_1,k_5)r_{zy}^{-2},$$

(53) $$|\bar{D}_i\Phi_2(z,y)-\bar{D}_i\Phi_2(z_1,y)|\leqq c_{69}(k_1,k_5,\theta,\lambda')(r_{zy}^{-3}r_{zz_1}+r_{zy}^{-2-\lambda'}r_{zz_1}^{\lambda'}),$$

ahol $z_1\in\sigma''$. (50)-ből és (52)-ből adódik (48). Vezessük be a $\theta_0(\theta)=\frac{1}{4}\theta_1$ jelölést. Akkor azok a $z_1\in S$ pontok, amelyekre teljesül az $r_{zz_1}\leqq\theta_0 r_{zy}$ feltétel, σ''-höz tartoznak. (51) és (53) értelmében érvényes rájuk a (49) egyenlőtlenség.

10. LEMMA. *Legyen $\varphi(t,y)$, ahol $t\in S$, $y\in\Omega$, a t pont S mentén folytonosan differenciálható függvénye. Teljesüljenek az alábbi feltételek:*

a) *A $t\in S$, $y\in S$ pontpárokra fennállnak a*

$$|\varphi(t,y)|\leqq k_6 r_{ty}^{1-\alpha},$$

$$|\bar{D}_i\varphi(t,y)|\leqq k_7 r_{ty}^{-\alpha}$$

egyenlőtlenségek, ahol $i=1,2,3$, $1<\alpha\leqq 3$. $\alpha=3$ esetén pótlólag feltesszük, hogy érvényes (5).

b) *Léteznek olyan pozitív θ,λ',k_8 állandók ($\theta<1$, $\lambda'\leqq\lambda$), hogy bármely, az $r_{tt_1}\leqq\theta r_{ty}$ feltételnek eleget tevő $t\in S$, $t_1\in S$, $y\in\Omega$ ponthármasra fennáll a*

$$|\bar{D}_i\varphi(t,y)-\bar{D}_i\varphi(t_1,y)|\leqq k_8(r_{ty}^{-1-\alpha}r_{tt_1}+r_{ty}^{-\lambda-\alpha}r_{tt_1}^{\lambda'})$$

egyenlőtlenség.

Akkor az

$$F(x,y)=\int_S\frac{1}{r_{xt}}\varphi(t,y)\,dS_t\qquad(x\in\Omega,\ y\in\Omega)$$

függvény $D^2F(x,y)$ deriváltjaira érvényes a

$$|D^2F(x,y)|\leqq c_{70}(k_2,k_6,k_7,k_8,\alpha,\theta,\lambda')r_{xy}^{\lambda'-\lambda-\alpha}$$

egyenlőtlenség.

BIZONYÍTÁS. Okoskodjunk ugyanúgy, mint a 6. lemma bizonyításánál. Először tegyük fel, hogy $2pr_{x\bar{x}} > r_{xy}$. Akkor

$$|D^2 F(x,y)| \leqq c_{71}(k_2, k_6, \alpha) r_{xy}^{-\alpha}.$$

Most tegyük fel, hogy $2pr_{x\bar{x}} \leqq r_{xy}$. Legyenek az Ω tartomány tetszés szerinti u pontjának koordinátái valamely rögzített koordinátarendszerben (u_1, u_2, u_3). Akkor

$$F(u,y) = \int_{S-\sigma} r_{ut}^{-1} \varphi(t,y)\, dS_t + \int_{\sigma} r_{ut}^{-1} \varphi(t,y)\, dS_t \equiv F_1(u,y) + F_2(u,y),$$

ahol $\sigma = \sigma_{\bar{x}\delta}$, $\delta = \dfrac{\theta}{2p} r_{xy}$. Ha $t \in S - \sigma$, akkor $r_{xt} \geqq \delta$. Innen

$$|D^2 F_1(x,y)| \leqq c_{72}(k_2, k_6, \alpha, \theta) r_{xy}^{-\alpha}.$$

$D^2 F_2(x,y)$ becsléséhez használjuk fel azt a képletet, amely megadja a differenciálható sűrűségű egyszerű réteg potenciáljának a deriváltját (lásd [1], 89. oldal):

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_2(u,y)}{\partial u_1} &= \int_{\sigma} [\bar{D}_1 \varphi(t,y) - \varkappa \varphi(t,y) \cos(n_t, u_1)] r_{ut}^{-1}\, dS_t + \\ &+ \int_{\sigma} \varphi(t,y) \cos(n_t, u_1) \frac{\partial}{\partial n_t}\left(\frac{1}{r_{tu}}\right) dS_t + \\ &+ \int_{L} r_{ut}^{-1} \varphi(t,y) [\cos(n_t, u_2)\, dt_3 - \cos(n_t, u_3)\, dt_2] \equiv \\ &\equiv I_1(u,y) + I_2(u,y) + I_3(u,y), \end{aligned}$$

ahol L a σ felületdarab határoló görbéje, $\varkappa$ az S felület középgörbülete a t pontban, (t_1, t_2, t_3) a t pont koordinátái. Az 5. lemma segítségével kapjuk:

$$|DI_1(x,y)| \leqq c_{73}(k_6, k_7, k_8, \alpha, \theta, \lambda') r_{xy}^{\lambda'-\lambda-\alpha}.$$

A $DI_2(x,y)$ deriváltak becsléséhez a differenciálható sűrűségű kettős réteg potenciáljának deriváltjaira vonatkozó képletet ([1], 93. oldal) kell felhasználni. Ez a képlet a kettős réteg potenciáljának deriváltjait bizonyos egyszerűréteg-potenciál deriváltjaival fejezi ki, ezek pedig az 5. lemma segítségével becsülhetők. Kapjuk:

$$|DI_2(x,y)| \leqq c_{74}(k_6, k_7, k_8, \alpha, \theta, \lambda') r_{xy}^{\lambda'-\lambda-\alpha}.$$

Az $I_3(x,y)$ integrál deriváltjait közvetlenül lehet becsülni:

$$|DI_3(x,y)| \leqq c_{75}(k_6, \alpha, \theta) r_{xy}^{-\alpha}.$$

Ezzel bebizonyítottuk, hogy az x pontban

$$\left|D\left(\frac{\partial F_2(u,y)}{\partial u_1}\right)\right| \leqq c_{76}(k_6, k_7, k_8, \alpha, \theta, \lambda') r_{xy}^{\lambda'-\lambda-\alpha}.$$

Hasonlóan becsülhetők a $D\left(\frac{\partial F_2}{\partial u_2}\right)$ és $D\left(\frac{\partial F_2}{\partial u_3}\right)$ deriváltak. A 10. lemmát bebizonyítottuk.

2. TÉTEL. *Ha az S felület az L_2 osztályhoz tartozik, akkor $\Omega\times\Omega$-ban fennállnak a*

(54) $$|D^2 g_1(x, y)| \leqq c_{77} r_{xy}^{-3},$$

(55) $$|D^2(g-g_1)| \leqq c_{78}(\varepsilon)\, r_{xy}^{-2-\varepsilon}$$

egyenlőtlenségek, ahol ε tetszés szerinti pozitív szám.

BIZONYÍTÁS. Az (54) egyenlőtlenség közvetlenül adódik (20)-ból, továbbá a 7. és 10. lemmából. Az (55) egyenlőtlenség bizonyításánál ugyanazokat a jelöléseket fogjuk használni, mint az 1. tétel bizonyításánál.

Írjuk át a (17) egyenlőséget a következő alakba:

(56) $$\mu(z, y) = \tau_1(z, y) + \varphi_0(z, y),$$

ahol $z\in S$, $y\in\Omega$, $\mu(z, y) = \frac{\partial G(z, y)}{\partial n_z}$. A (25) egyenlőtlenség feltevéseink mellett a

(57) $$|\varphi_0(z, y)| \leqq c_{79} r_{zy}^{-1}$$

alakot ölti. (26) értelmében bármely, az $r_{zz_1} \leqq \frac{1}{2} r_{zy}$ feltétel útján összekapcsolt $z\in S$, $z_1\in S$, $y\in\Omega$ ponthármasra érvényes a

$$|\varphi_0(z, y) - \varphi_0(z_1, y)| \leqq c_{80} r_{zy}^{-2} r_{zz_1}^{\lambda}$$

egyenlőtlenség. (56) és a 3. lemma felhasználásával kapjuk, hogy ha $r_{zz_1} \leqq \frac{1}{2} r_{zy}$, akkor

(58) $$|\mu(z, y) - \mu(z_1, y)| \leqq c_{81}(r_{zy}^{-3} r_{zz_1} + r_{zy}^{-2} r_{zz_1}^{\lambda}).$$

(22), (23) és (58)-ból következik, hogy a $\varphi_0(z, y)$ függvényre alkalmazható a 9. lemma, amelynek értelmében

(59) $$|\bar{D}_i \varphi_0(z, y)| \leqq c_{82} r_{zy}^{-2},$$

(60) $$|\bar{D}_i \varphi_0(z, y) - \bar{D}_i \varphi_0(z_1, y)| \leqq c_{83}(\lambda')(r_{zy}^{-3} r_{zz_1} + r_{zy}^{-\lambda-2} r_{zz_1}^{\lambda'}),$$

ahol $\lambda' < \lambda$, $r_{zz_1} \leqq \theta_0 r_{zy}$.

Most tekintsük a

$$\Phi_0(x, y) = \int_S r_{xt}^{-1} \varphi_0(t, y) dS_t$$

függvényt. Erre (57), (59) és (60) szerint alkalmazható a 10. lemma. Eredményül azt kapjuk, hogy $\Omega \times \Omega$-ban teljesül a

$$|D^2 \Phi_0(x, y)| \leqq c_{84}(\lambda') r_{xy}^{\lambda'-\lambda-2}$$

egyenlőtlenség, ahol $\lambda' < \lambda$. Ebből és (24)-ből adódik (55). A tételt bebizonyítottuk.

IRODALOM

[1] Н. М. Гюнтер: Теория потенциала и её применение к основным задачам математической физики, Москва, Гостехиздат, № 953.

[2] Д. М. Эйдус: Оценка производных функции Грина, Доклады Академии Наук СССР, **106**, № 2 (1956), 207—209.

[3] P. Levy: Sur l'allure des fonctions de Green et de Neumann dans le voisinage du contour, *Acta Math.*, **42** (1920), 207—267.

Fordította: Bognár János

A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézete

Technikai szerkesztő: L. Ziermann Margit

A kiadásért felelős az Akadémiai Kiadó igazgatója Műszaki felelős: Farkas Sándor
A kézirat beérkezett: 1959. VI. 19. — Terjedelem: 10,5 (A/5) ív, 5 ábra

Szegedi Nyomda Vállalat 59-2729

Ára: 23,— Ft

TARTALOMJEGYZÉK

A MAGYAR
TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK
OSZTÁLYÁNAK

KÖZLEMÉNYEI

IX. KÖTET 4. SZÁM

AKADÉMIAI KIADÓ BUDAPEST
1959

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK
KÖZLEMÉNYEI

A SZERKESZTŐBIZOTTSÁG TAGJAI:

CSÁSZÁR ÁKOS, DETRE LÁSZLÓ, GYULAI ZOLTÁN, HAJÓS GYÖRGY, NOVOBÁTZKY KÁROLY, RÉNYI ALFRÉD, TURÁN PÁL

FŐSZERKESZTŐ:

ALEXITS GYÖRGY

IX. kötet 4. szám

Szerkesztőség: Budapest, V., Széchenyi rakpart 3.
Kiadóhivatal: Budapest, V., Alkotmány utca 21.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei változó terjedelmű füzetekben jelennek meg, és az Akadémia III. osztályának felolvasóülésein bemutatott matematikai dolgozatokat, valamint egyéb dolgozatokat, referátumokat, továbbá az osztály munkájára vonatkozó közleményeket, könyvismertetéseket stb. közölnek. Évenként egy kötet jelenik meg (négy szám alkot egy kötetet).

Kéziratok a következő címre küldendők:

A Magyar Tudományos Akadémia
III. Osztályának Közleményei.
Budapest, V., Széchenyi rakpart 3.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi levelezés.

Minden szerzőt 100 különlenyomat illet meg megjelent munkájáért.

Közlésre el nem fogadott kéziratokat a szerkesztőség lehetőleg visszajuttat a szerzőhöz, de felelősséget a beküldött kéziratok megőrzéséért vagy továbbításáért nem vállal.

A Közlemények előfizetési ára kötetenként belföldi címre 40 forint, külföldi címre 60 forint. Belföldi megrendelések az Akadémiai Kiadó, Budapest, V., Alkotmány u. 21. (Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 05-915-111-44), külföldi megrendelések a „Kultúra" Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalat, Budapest, VI., Népköztársaság útja 21. (Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 43-790-057-181) útján eszközölhetők.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztálya a következő idegen nyelvű folyóiratokat adja ki:

1. Acta Mathematica Hungarica
2. Acta Physica Hungarica.

FÜGGVÉNYEGYENLETEK ÉS ALGEBRAI MÓDSZEREK A GEOMETRIAI OBJEKTUMOK ELMÉLETÉBEN, III.*

Írta: HOSSZÚ MIKLÓS

III. FEJEZET

OBJEKTUMOK ALGEBRÁJA
A DISZTRIBUTIVITÁS FÜGGVÉNYEGYENLETÉNEK ÁLTALÁNOSÍTÁSAI

1. §. Az X_k tér analitikus transzformációkkal szemben automorf műveletei

Foglalkozzunk az m-, illetve k-dimenziós E_m, X_k euklidesi-térben értelmezett

(17) $$(xy)u=(xu)(yu), \qquad x, y \in X_k; \quad u \in E_m$$

disztributivitási egyenlet

$$xy=G(x, y) \qquad (X_k \times X_k \to X_k)$$

megoldásának meghatározásával, midőn

$$xu=F(x, u) \qquad (X_k \times E_m \to X_k)$$

az X_k tér bizonyos leképezése önmagára vagy önmagába, melytől azonban itt nem követeljük meg az (1) tulajdonságot, hanem csak azt, hogy van egységeleme:

$$xe=F(x, e)=x, \qquad (x \in X_k),$$

továbbá az e egységelem bármely kicsiny $\mathfrak{U}$ környezetétől megköveteljük, hogy tranzitív legyen bármely $x \in X_k$ elemnek egy környezete felett:

$$\dim(x\mathfrak{U})=u.$$

Ez utóbbi nyilván csak úgy lehetséges, hogy $m \geqq k$.

Ezenkívül $G(x, y)$-ról feltesszük, hogy legalább egyszer folytonosan differenciálható az

$$x=(x_1, x_2, \ldots, x_k), \quad y=(y_1, y_2, \ldots, y_k)$$

* A dolgozat I. része az MTA III. Osztályának közleményei IX. 2. számában (1959. 149—162. old.), II. része a IX. 3. számban jelent meg (237—253. old). A fejezet és a tételek számozása az előző részek számozásához kapcsolódik.

változókban és úgyszintén $F(x, u)$ az

$$u = (u_1, u_2, \dots, u_m)$$

változókban. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy az

$$(u_1, \dots, u_k) \to F(x, u)$$

leképezés rögzített x és $u_{k+1}, \dots, u_m$ mellett az $u = e$ egységelem környezetében reguláris, ugyanis ellenkező esetben u helyett be lehetne vezetni olyan v paramétert, amely ezt a feltételt kielégítené. Ez utóbbi leképezés regularitása azt jelenti, hogy a

$$\partial_{u_i} F(x, u) = \left(\frac{\partial F^j}{\partial u_i}\right) \qquad (i, j = 1, 2, \dots, k)$$

derivált mátrix az $u = e$ helyen reguláris, így a folytonos, korlátos

$$\mathbf{A}(x) = \partial_{u_i} F(x, e) \tag{18}$$

vektor-mátrix függvény segítségével bizonyos integrabilitási feltételek teljesülése esetén értelmezhetjük a lokálisan invertálható $y = f(x)$ vektor-vektor függvényt, mint az

$$y' = \left(\frac{\partial y_j}{\partial x_i}\right) = \mathbf{A}(y) \qquad (i, j = 1, 2, \dots, k) \tag{19}$$

parciális differenciálegyenlet rendszer egyik megoldását. Ezután kimutatjuk, hogy az $x \to x^* = f(x)$ (lokálisan invertálható) leképzés olyan izomorfizmus, mely $xy = G(x, y)$-hoz egy

$$\Gamma(x, y) = x + \gamma(y - x) \qquad (= x \circ y)$$

típusú függvényt rendel az

$$f(\Gamma) = G[f(x), f(y)] \qquad (= (x \circ y)^* = x^* y^*) \tag{20}$$

összefüggés alapján. Ez utóbbi állítás bizonyítása végett differenciáljuk (17)-et parciálisan az $u_1, \dots, u_k$ változók szerint, és helyettesítsünk $u = e$-t, akkor azt látjuk, hogy

$$\partial_{u_i} F(G, e) = (\partial_{x_i} G) \cdot \partial_{u_i} F(x, e) + (\partial_{y_i} G) \cdot \partial_{u_i} F(y, e),$$

azaz

$$\mathbf{A}(G) = (\partial_x G)\, \mathbf{A}(x) + (\partial_y G)\, \mathbf{A}(y),$$

vagy az x és y helyébe az előbbi összefüggéssel értelmezett $x^* = f(x)$, $y^* = f(y)$-t helyettesítve,

$$\mathbf{A}(x^* y^*) = \partial_{x^*} G(x^*, y^*) \cdot f'(x) + \partial_{y^*} G(x^*, y^*) \cdot f'(y),$$

tehát a (20)-szal értelmezett Γ kielégíti az

$$\mathbf{A}[(x \circ y)^*] = f'(\Gamma)\cdot\partial_x\Gamma + f'(\Gamma)\cdot\partial_y\Gamma =$$
$$= \mathbf{A}[f(\Gamma)]\cdot\partial_x\Gamma + \mathbf{A}[f(\Gamma)]\cdot\partial_y\Gamma$$

összefüggést, amit a reguláris $\mathbf{A}$ mátrixszal egyszerűsítve,

$$\mathbf{1} = \partial_x\Gamma + \partial_y\Gamma$$

adódik, ahol $\mathbf{1}$ az egység mátrix. Ez utóbbi parciális differenciálegyenlet-rendszer átrendezés után azt mutatja, hogy

$$\partial_x[\Gamma(x, x+z) - x] = \mathbf{0},$$

azaz $\Gamma(x, x+z) - x$ független x-től:

$$\Gamma(x, x+z) - x = \gamma(z),$$

vagyis valóban fennáll

$$\Gamma(x, y) = x + \gamma(y - x),$$

vagy, minthogy egyik változó sincs kitüntetve,

$$\Gamma(x, y) = \tilde{\gamma}(x - y) + y.$$

Az eredmény a következő tételbe foglalható:

13. tétel. *Legyen X_k olyan k-dimenziós algebra, amelyen értelmezve van a skaláris változóiban folytonosan deriválható $G(x,y)$ kétváltozós vektor-vektor függvény (művelet), amely automorf bizonyos*

$$F(x, e) = x, \quad |\partial_{u_i} F(x, e)| \neq 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, k)$$

tulajdonságú $x \to \bar{x} = F(x, u)$ transzformációkkal szemben, melynél a (18)—(19) *differenciálegyenlet megoldható. Akkor X_k lokálisan és topologikusan izomorf egy olyan algebrával amely a*

$$\Gamma(x, y) = x + \gamma(y - x) = \tilde{\gamma}(x - y) + y$$

művelettel van ellátva.[1]

[1] Az $m = 1$ esetben egy izomorfizmus segítségével a $\Gamma(x, y)$ művelettel ellátott X_1-beli algebráról át lehet térni olyanra, mely az

$$E(x, y) = x\varphi(y/x) = y\psi(x/y)$$

Euler-féle homogén függvénnyel van ellátva, mint művelettel, ugyanis nyilván

$$\Gamma(\log x, \log y) = \log x + \log e^{\gamma(\log y - \log x)} =$$
$$= \log\{x\, e^{\gamma[\log(y/x)]}\} = \log[x\varphi(y/x)] = \log E(x, y).$$

PÉLDA: Legyen $k=3$, $G(x, y)=x+y$, és $x \to \bar{x}$ álljon forgatásból és nyújtásból; akkor

$$\gamma_i(x)=\log(e^{x_i}+1), \quad f_i(x)=e^{x_i}, \quad i=1,2,3,$$

mert valóban

$$f_i(\Gamma)=e^{x_i+\log(e^{y_i-x_i}+1)}=e^{x_i}(e^{y_i-x_i}+1)=$$
$$=e^{x_i}+e^{y_i}=f_i(x)+f_i(y)=G_i[f(x), f(y)].$$

2. §. Algebrák az X_1 térben

1. A (17) egyenlet $xu=F(x,u)$-ra vonatkozó megoldását csak a $k=1$ esetben fogjuk megkeresni. Most is érvényes a 13. tétel, vagyis

$$(x \circ y)^* = x^* y^*, \quad x \circ y = \Gamma(x,y) = x+\gamma(y-x),$$

ahol azonban az $x \to x^* = f(x)$ leképezés most nemcsak lokálisan invertálható, mert hisz a feltevés szerint $|f'(x)| = |\mathbf{A}(f)| \neq 0$. Az $F(x,u)$ helyett is célszerűbb lesz a vele o-izomorf $x \circ u = \Phi(x,u)$-t vizsgálni, melyet az

$$x^* u = (x \circ u)^*$$

összefüggéssel értelmezhetünk, s mely ebből kifolyólag a (17)-nek megfelelő

$$(17') \qquad (x \circ y) \circ u = (x \circ u) \circ (y \circ u)$$

összefüggést elégíti ki, ugyanis valóban

$$[(x \circ y) \circ u]^* = (x \circ y)^* u = (x^* y^*) u = (x^* u)(y^* u) =$$
$$= (x \circ u)^* (y \circ u)^* = [(x \circ u) \circ (y \circ u)]^*.$$

Helyettesítsük be ezután Γ-t:

$$\Phi[x+\gamma(y-x), u] = \Phi(x,u)+\gamma[\Phi(y,u)-\Phi(x,u)].$$

Itt u-t rögzítjük, és egyelőre nem vesszük figyelembe Φ függését u-tól. Az általánosság sérelme nélkül feltehetjük, hogy $\gamma(0)=0$, ugyanis ellenkező esetben $\gamma(x)$ helyett $\vartheta(x)=\gamma(x)-\gamma(0)$-t tekinthetjük, mely szintén kielégíti a hasonló

$$\Phi[x+\vartheta(y-x)] = \Phi(x)+\vartheta[\Phi(y)-\Phi(x)]$$

egyenletet, ugyanis az előzőből $x=y$ esetén azt kapjuk, hogy

$$\Phi[x+\gamma(0)] = \Phi(x)+\gamma(0),$$

tehát az utóbbi egyenlőség mindkét oldalához $\gamma(0)$-t adva az előzőt nyerjük, ami éppen egyenértékűségüket mutatja. Kapott függvényegyenletünk megoldása végett differenciálhatjuk mindkét oldalt az x, majd az y változó szerint, akkor $x=y$ esetén

$$\Phi''(x)\gamma'(0)[1-\gamma'(0)]-\Phi'(x)\gamma''(0)=-\gamma''(0)\Phi'(x)^2.$$

Tegyük fel, hogy

$$\gamma'(0)[1-\gamma'(0)]\neq 0;$$

ezt már biztosítja pl. a

$$\partial_x \Gamma(x,y)|_{x=y},\quad \partial_y \Gamma(x,y)|_{x=y}\neq 0,$$

azaz, minthogy $f^*(x)\neq 0$, a

$$\partial_x G,\quad \partial_y G\neq 0,\quad \text{ha}\quad x=y$$

feltétel is, mert

$$\partial_x \Gamma=1-\gamma'(x-y),\quad \partial_y \Gamma=\gamma'(y-x).$$

Átrendezés után tehát differenciálegyenletünk:

$$\frac{\Phi''(x)}{\Phi'(x)}=\frac{\gamma''(0)}{\gamma'(0)[1-\gamma'(0)]}[1-\Phi'(x)]=c[1-\Phi'(x)]$$

közvetlenül integrálható:

$$\log|\Phi'(x)|=c[x-\Phi(x)]+\log a_1,$$
$$e^{c\Phi}\Phi'=a_1 \operatorname{sign}\Phi' e^{cx}=ae^{cx}.$$

Ezután két esetet lehet megkülönböztetni:

1. $\gamma''(0)=0,$
2. $\gamma''(0)\neq 0.$

Az első esetben differenciálegyenletünk

$$\Phi'(x)=a$$

-ra redukálódik, vagyis $\Phi(x)=\Phi(x,u)=xa(u)+b(u)$.

A második esetben is közvetlenül integrálható az egyenlet:

$$e^{c\Phi}=ae^{cx}+b,$$

ahol $a=a(u)$, $b=b(u)$ integrációs állandókként lépnek fel. Eredményül tehát mindkét esetben azt kaptuk, hogy $\bar{x}=F(x,u)$ o-izomorf az

$$x\to\bar{x}=ax+b,\quad a=a(u),\ b=b(u)$$

affinitással, alkalmas o-izomorfizmus

$$x\longleftrightarrow x^*=f(x),\quad \text{ha}\quad \gamma''(0)=0,$$

illetve

$$x \longleftrightarrow x^* = e^{cf(x)}, \quad \text{ha} \quad c = \frac{\gamma''(0)}{\gamma'(0)[1-\gamma'(0)]} \neq 0.$$

Az eredmény a következő tételbe foglalható:

14. tétel. *Az X_1 térben minden algebra, ellátva az*

$$F(x, e) = x, \quad \partial_{u_1} F(x, e) \neq 0$$

tulajdonságú, kétszer differenciálható $x \to \bar{x} = F(x, u)$ transzformációkkal szemben automorf, szintén kétszer differenciálható $xy = G(x, y)$ művelettel, amelyre nézve

$$\partial_x G, \quad \partial_y G \neq 0, \quad \text{ha} \quad x = y,$$

topologikusan izomorf egy olyan algebrával, melynek operátorai bizonyos

$$x \to \bar{x} = ax + b, \quad a = a(u), \quad b = b(u)$$

lineáris transzformációk.

2. Keressük meg viszont, hogy X_1-ben melyek az affinitások tranzitív seregével szemben automorf műveletek. Legyen

$$aH(x, y) + b = H(ax + b, ay + b), \quad a = a(u), \quad b = b(u);$$

akkor három esetet tudunk megkülönböztetni

1. $\qquad a(u) = 1;$

2. $\qquad |a(u)| = 1 \quad$ és $\quad a(u_0) = -1$ valamely u_0 esetén;

3. $\qquad |a(u)| \neq 1.$

Az első esetben válasszuk meg úgy $b(u)$-t, hogy $x + b = 0$ legyen; akkor

$$H(x, y) = x + H(0, y - x) = x + \gamma(y - x).$$

A második esetben hasonlóan

$$H(x, y) = x + aH[0, a(y - x)] = x + \gamma(y - x), \quad (|a| = 1),$$

ahol azonban visszahelyettesítés és az $a(u_0) = -1$ választás folytán

$$\gamma(x - y) = \gamma(y - x)$$

adódik, vagyis ismét az előbbi alakú megoldást nyerjük. Végül a harmadik esetben látjuk, hogy

$$\partial_x H(x, y) = \partial_{\bar{x}} H(\bar{x}, \bar{y}) = \partial_{\bar{\bar{x}}} H(x, y) = \cdots = c_1,$$

$$\partial_y H(x, y) = \partial_{\bar{y}} H(\bar{x}, \bar{y}) = \cdots = c_2,$$

azaz

$$H(x, y) = c_1 x + c_2 y + c_3,$$

ahol azonban a visszahelyettesítés után

$$ac_3+b=c_1b+c_2b+c_3,$$

vagyis

$$c_3(a-1)=(c_1+c_2-1)\,b.$$

Az eredmény a következő tételbe foglalható:

15. tétel. *Bármely folytonosan deriválható $H(x,y)$ függvény (művelet) az X_1 térben, amely automorf bizonyos tranzitív $x\to\bar{x}=ax+b$; $a(u), b(u)\not\equiv 0$*[2] *lineáris transzformációkkal szemben, felírható a*

$$H(x,y)=x+\gamma(y-x), \quad \textit{vagy} \quad c_1x+c_2y+c_3$$

alakban, ahol

γ tetszőleges függvény ha $a(u)\equiv 1$;

γ tetszőleges páratlan függvény, ha $|a(u)|\equiv 1$ és $a(u_0)=-1$ legalább egy u_0 esetén;

illetve

$$c_3(a-1)=(c_2+c_2-1)b, \quad \textit{ha} \quad |a(u)|\not\equiv 1.$$

MEGJEGYZÉS. Ha $c_3=0$, akkor $H(x,y)=c_1x+c_2y$ izomorf

$$\Gamma(x,y)=x+\gamma(y-x), \quad \gamma(t)=\log(c_2e^t+c_1)$$

-vel, ugyanis valóban

$$\Gamma(\log x, \log y)=\log x+\log(c_2e^{\log y/x}+c_1)=$$
$$=\log[x(c_2y/x+c_1)]=\log(c_1x+c_2y)=\log H(x,y).$$

A $c_3(c_1+c_2-1)\not\equiv 0$ esetben viszont nem kapunk ilyen Γ-val izomorf H megoldást pl. akkor, ha

$$b(u)=\frac{c_3}{c_1+c_2-1}[a(u)-1].$$

Ez nincs ellentmondásban a 14. tétellel, ugyanis ekkor

$$\bar{x}=ax+\frac{c_3}{c_1+c_2-1}[a(u)-1]$$

az $x=\dfrac{-c_3}{c_1+c_2-1}$ helyen független u-tól: $\bar{x}=\dfrac{-c_3}{c_1+c_2-1}$, ellentétben a 13. tétel

$$\partial_{u_1}F(x,u)|_{u=e}\not\equiv 0$$

feltevésével.

[2] $b\not\equiv 0$ nem sérti az általánosságot, mert $b\equiv 0$ esetén egy alkalmas izomorf leképezést hajtunk végre egy logaritmus függvénnyel.

3. §. Általános algebrák izotopizmusai, disztributivitási egyenletek

1. Fordítsuk figyelmünket általánosabban értelmezett algebrák vizsgálatára. Egy S halmazról (struktúráról) azt fogjuk mondani, hogy általános algebrát alkot, ha abban értelmezve van egy $xy = G(x,y)$ művelet, továbbá S elemeire értelmezve van három invertálható

$$x \leftrightarrow F(x,u) = F_u x, \quad K(x,u) = K_u x, \quad L(x,u) = L_u x$$

leképezés összesség, ahol u valamely U halmaz eleme, melyekre teljesül ezenkívül az is, hogy xy képe az x és y képelemeitől függ csupán:

$$F_u(xy) = K_u x \cdot L_u y, \qquad x, y \in S; \quad u \in U. \tag{21}$$

Ez utóbbi egyenlet részletesen kiírva a disztributivitás függvényegyenletének általánosítása:

$$F[G(x,y), u] = H[K(x,u), L(y,u)]. \tag{21'}$$

Ilyen általános abgebra vizsgálata lép fel pl. a kvázicsoportok elméletében. Egy Q halmaz *kvázicsoport*, ha abban értelmezve van egy invertálható $xy \in Q$ művelet. Q'-t a Q *izotópjának* szokás nevezni, ha van három olyan

$$x(\in Q) \leftrightarrow \Phi x, \quad \Psi x, \quad \Lambda x\, (\in Q')$$

leképezés, hogy

$$\Phi(xy) = \Psi x \cdot \Lambda y, \qquad x, y \in Q. \tag{22}$$

Természetesen kvázicsoportoknál általánosabb struktúrák izotopizmusa is értelmezhető. Mint látjuk, a (21) egyenlet változó u esetén az S általános algebra izotopizmus rendszerét írja le.

A geometriai objektumok elméletében H. PIDEK foglalkozott az X_k térben olyan algebrákkal, melyeknél speciálisan $H = G$, $K = L$. Megemlítjük még, hogy pl. a nomográfiában is előfordul az általánosított disztributív típusú (21) egyenlet, amely azt fejezi ki, hogy az $F[G(x,y), u]$ háromváltozós függvény, amely kapcsolt pontsoros nomogrammal ábrázolható, ábrázolható az u skála ismétlésével és skála ismétlés nélkül is.

Az izotopizmushoz hasonlóan értelmezhető nem feltétlen invertálható leképezésekkel a *homotopizmus* fogalma. A rövidebb kifejezés kedvéért megállapodunk a következőkben: a (Φ, Ψ, Λ) leképezésekről azt mondjuk, hogy a $Q \to Q'$ homotopizmust létesítik, ha fennáll (22).

Rögtön leszögezzük, hogy (Φ, Ψ, Λ) sorrendje nem cserélhető fel, mert (Ψ, Φ, Λ) egy másik struktúra homotopizmusa. A különféle lehetőségek közül a számunkra fontosak felderítésére tekintsünk egy Q kvázicsoportot, ellátva az xy művelettel. Q jobboldali *kvociens* struktúrájának nevezzük (magát a $Q =$) Q_j halmazt, ellátva a

$$z = xy^{-1}, \quad x = zy, \quad \text{vagy} \quad (xy)y^{-1} = x; \qquad (xy^{-1})y = x$$

egyenlettel értelmezett xy^{-1} művelettel. Hasonlóan értelmezzük Q balodali Q_b kvociens struktúráját, kapcsolatban xy balinverz műveletével.

Észrevehetjük, hogy ha (Φ, Ψ, Λ), létesíti a $Q \to Q'$ homotopizmust, akkor (Ψ, Φ, Λ), illetve (Λ, Ψ, Φ) a $Q_j \to Q'_j$, illetve $Q_b \to Q'_b$ homotopizmust létesíti:

$$\Psi(xy^{-1}) = \Phi x \cdot (\Lambda y)^{-1}, \quad \Lambda(^{-1}xy) = {}^{-1}(\Psi x) \cdot \Phi y, \tag{23}$$

amiről egyszerű számolással meggyőződhetünk, pl. az elsőnél úgy, hogy x helyett xy-t helyettesítünk, és az egyenlet mindkét oldalát „szorozzuk” Λy-nal, stb. Amennyiben (Φ, Ψ, Λ) invertálhatók, azaz a $Q \to Q'$ izotopizmust létesítik, a $Q' \to Q$ izotopizmust nyilván $(\Phi^{-1}, \Psi^{-1}, \Lambda^{-1})$ leképezések létesítik:

$$\Phi^{-1}(x \cdot y) = \Psi^{-1} x \Lambda^{-1} y. \qquad x, y \in Q'.$$

A (21) egyenlet megoldását két szempontból vizsgálhatjuk: adott tulajdonságú (F, K, L) izotopizmus rendszerrel rendelkező izotóp S, S' struktúrákat keresünk, vagy adott S struktúra S' izotópjait és (F, K, L) izotopizmus (illetve megfelelően homotopizmus) rendszereit keressük. Mindkét probléma megoldásánál hasznos a következő visszavezetési tétel:

16. tétel. *Ahhoz, hogy* (F_u, K_u, L_u) *az* S *struktúra izotopizmus rendszere legyen, szükséges és elegendő, hogy valamilyen rögzített* $e \in U$ *esetén*

$$\begin{gathered} \Phi_u x = F_e^{-1} F_u x, \quad \Psi_u x = K_e^{-1} K_u x, \quad \Lambda_u x = L_e^{-1} L_u x, \\ (\Phi_e x = \Psi_e x = \Lambda_e x = x) \end{gathered} \tag{24}$$

az S *önizotopizmus rendszere legyen, azaz*

$$\Phi_u(xy) = \Psi_u x \Lambda_u y, \qquad x, y \in S; \quad u \in U \tag{25}$$

teljesüljön.

Más szóval (21) megoldása egyenértékű (25) megoldásával, ahol adott F, K, L esetén Φ, Ψ, Λ a (24) módon van meghatározva, míg adott G-hez a megfelelő Φ, Ψ, Λ-t meghatározva, F, K, L-et a (24)-ből következő

$$F_u x = \varphi \Phi_u x, \quad K_u x = \psi \Psi_u x, \quad L_u x = \lambda \Lambda_u x$$

szolgáltatja, ahol φ, ψ, λ tetszőleges invertálható függvények, melyek S-nek egy izotopizmusát alkotják:

$$\varphi(xy) = \psi x \cdot \lambda y, \tag{26}$$

tehát meghatározzák a kapott F, K, L és G-hez tartozó $H(x, y) = x \cdot y$ megoldást.

BIZONYÍTÁS. (25) fennállásának szükségességét közvetlenül igazolhatjuk úgy, hogy az egyenlet mindkét oldalára alkalmazzuk az F_e leképezést:

$$F_e \Phi_u(xy) = K_e \Psi_u x \cdot L_e \Lambda_u y,$$

ami Φ, Ψ, Λ értelmezése alapján éppen (21), tehát $F_e x$ invertálhatósága miatt valóban igazolja (25)-öt. Az elégségesség igazolása végett legyen

$$F_u x = \varphi \Phi_u y, \quad K_u x = \psi \Psi_u x, \quad L_u x = \lambda \Lambda_u x,$$

ahol φ, ψ, λ tetszőleges invertálható leképezések, melyekkel fennáll

$$\varphi(xy) = \psi x \cdot \lambda y,$$

akkor valóban

$$F_u(xy) = \varphi \Phi_u(xy) = \varphi(\Psi_u x \cdot \Lambda_u y) = \psi \Psi_u x \cdot \lambda \Lambda_u y = K_u x \cdot L_u y.$$

Megjegyezzük, hogy F_u, K_u, L_u invertálhatóságát csupán az $u = e$ helyen használtuk fel, továbbá

$$(F_u^{-1}, \Psi_u^{-1}, \Lambda_u^{-1}) = (F_u^{-1} F_e, K_u^{-1} K_e, L_u^{-1} L_e)$$

is nyilván önizotopizmus rendszere S-nek. Ha (21)-ben nem G, hanem H adott, akkor (25) helyett a

(25′) $$\Phi_u(x \cdot y) = \Psi_u x \cdot \Lambda_u y$$

egyenletre való visszavezetés adja a megoldást, ahol azonban most

(24′) $$\Phi_u x = F_e F_u^{-1} x, \quad \Psi_u x = K_e K_u^{-1} x, \quad \Lambda_u x = L_e L_u^{-1} x$$

értelmezi Φ, Ψ, Λ-t. Ez nyilvánvaló annak alapján, hogy most $(F_u^{-1}, K_u^{-1}, L_u^{-1})$ az $S' \to S$ izotopizmust létesíti.

A 16. visszavezetési tétel birtokában (21) megoldását pl. a X_k térben ugyanúgy határozhatjuk meg, mint (17)-ét. Ha teljesülnek a

$$|\partial_{u_i} \Phi(x, e)|, \quad |\partial_{u_i} \Psi(x, e)|, \quad |\partial_{u_i} \Lambda(x, e)| \neq 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, k)$$

regularitási feltételek, akkor a megoldás is hasonló lesz; csak most G (valamint H) és a

$$\Gamma(x, y) = x + \gamma(y - x)$$

között nem izomorfizmus, hanem (lokális) izotopizmus áll fenn.

Megjegyezzük még, hogy a 13. és 16. tétel bizonyítási módszere alkalmazható akkor is, ha $G(x, y)$ helyett a

$$G(x, y, z, \ldots)$$

többváltozós függvényre hasonló módon értelmezett disztributivitási egyenletet tekintjük, csak akkor

$$\Gamma(x, y, z, \ldots) = x + \gamma(y-x, z-x, \ldots) = x + \tilde{\gamma}(y-x, z-y, \ldots),$$

mely az X_1 térben egy többváltozós *Euler*-féle homogén függvénnyel izomorf.

2. Adott struktúra, pl. kvázicsoport izotopizmus rendszerei, azaz adott G esetén (21) F, K, L-re vonatkozó megoldásának meghatározása általában nehezebb feladat. Mint láttuk, a 16. visszavezetési tétel akkor is sikerrel alkalmazható, vagyis (21) megoldását úgy végezhetjük, hogy megkeressük (25) Φ, Ψ, Λ-ra vonatkozó megoldását. Ezekről ugyan a visszatérés (24) alapján F, K, L-re nem egyértelmű, de ez nem jelent különösebb komplikációt, mert adott G esetén ismerve a Φ, Ψ, Λ megoldásokat, az F, K, L meghatározására szolgáló egyenletekben φ, ψ, λ-t választhatjuk tetszőleges invertálható függvénynek, s az így kapott F, K, L, G valóban ki is elégíti (21)-et, hacsak $H(x, y) = x \cdot y$ (26) alakú. A fő nehézséget (25) megoldása jelenti.

Erős megszorító feltevések nélkül ez ideig nem sikerült még egyéb további általános visszavezetési tételt találni.

Ha feltesszük, hogy az $x \longleftrightarrow K_u x,\ L_u x,\ F_u x$ leképezések összeségének van egy közös $x_0 \in S$ fix eleme:

$$F_u x_0 = K_u x_0 = L_u x_0 = x_0, \qquad u \in U,$$

akkor aránylag könnyen ki tudjuk mutatni, hogy $x \longleftrightarrow \Phi_u x, \Psi_u x, \Lambda_u x$ egy-egy S-sel szorosan összefüggő struktúra automorfizmusa (illetve általában endomorfizmusa, ha nem követeljük meg a leképezés invertálhatóságát). Tekintsük ugyanis a

$$(27)\qquad \begin{cases} G_1(x, y) = (x x_0^{-1})({}^{-1}x_0 y), \\ G_2(x, y) = (x x_0)({}^{-1}y x_0)^{-1}, \\ G_3(x, y) = {}^{-1}(x_0 x^{-1})(x_0 y) \end{cases}$$

műveleteket, melyek invertálható G esetén szintén invertálhatók. Az u-tól való függést fel sem tüntetve, nyilván érvényes (22)—(23) alapján:

$$(28)\qquad \begin{cases} \underline{\Phi G_1(x, y)} = \Psi(x x_0^{-1}) \Lambda(x_0^{-1} y) = [\Phi x (\Lambda x_0)^{-1}][{}^{-1}(\Psi x_0)\, \Phi y] = \\ \qquad = [(\Phi x) x_0^{-1}]({}^{-1}x_0\, \Phi y) = \underline{G_1(\Phi x, \Phi y)}, \\ \Psi G_2(x, y) = \cdots = G_2(\Psi x, \Psi y), \\ \Lambda G_3(x, y) = \cdots = G_3(\Lambda x, \Lambda y). \end{cases}$$

Kimondhatjuk tehát a következőt:

17. tétel. *Az*

$$x \longleftrightarrow \Phi x, \Psi x, \Lambda x$$

leképezések, melyek az x_0 fixponttal bíró S struktúra önizotopizmus rendszerét *alkotják, rendre az S struktúra G műveletével (27) alapján összefüggő G_i műveletekkel ellátott struktúrák automorfizmusai.*

Más szóval adott G esetén (25)-nek az univerzális fixponttal rendelkező Φ, Ψ, Λ-ra vonatkozó megoldásait a (28) egyenletek megoldásai szolgáltatják, ahol a G_i-k a (27) alatt értelmezett függvények.

A módszer hátránya az, hogy az x_0 pontban biztosan nem teljesül a 13. tétel

$$|\partial_{u_i}, \Phi(x,e)| \neq 0, \ldots$$

feltétele. Ezen úgy lehet segíteni, hogy x_0-t kizárjuk S-ből, majd a kapott megoldást kiterjesztjük az egész S-re. Kívánatos volna tehát a fixpont létezését fel nem használó visszavezetési tételt találni. Általános esetben ez ideig még nem sikerült. A $K = L$ speciális esetben azonban elég egyszerű és általános érvényű visszavezetési tételt tudunk kimondani, mely a 13. tétel feltételeit nem zárja ki.

3. Tekintsük tehát az

$$\text{(29)} \quad \begin{cases} \Phi[G(x,y),u] = G[\Psi(x,u), \Psi(y,u)], & (x,y \in Q;\ u \in U) \\ \Phi(x,e) = \Psi(x,e) = x \end{cases}$$

egyenletet, ahol $G(x,y)$ mindkét változóban invertálható.

Kimutatjuk, hogy Ψ kielégíti a

$$\text{(30)} \qquad \Psi[M(x,y),u] = M[\Psi(x,u), \Psi(y,u)]$$

disztributív típusú egyenletet, ahol

$$\text{(31)} \qquad M(x,y) = {}^{-1}y(xy), \qquad G(x,y) = G(y, M),$$

illetve másik, további lehetőségként az

$$\text{(31')} \qquad M(x,y) = (xy)x^{-1}, \qquad G(x,y) = G(M,x)$$

egyenlettel értelmezett idempotens függvény:

$$M(x,x) = x,$$

mely az első, illetve második változóban invertálható. Ez utóbbi állítások nyilvánvalók M értelmezése alapján. (29) bizonyítása is egyszerű: pl. a (31') esetben

$$\Psi M(x,y) = \Psi[(xy)x^{-1}] = \Phi(xy)(\Psi x)^{-1} = [(\Psi x)(\Psi y)](\Psi x)^{-1} = \\ = M(\Psi x, \Psi y).$$

A (31)—(31') összefüggés természetesen csak akkor értelmez az y, illetve x változótól is függő M-et, ha $G(x,y) = xy$ nem kommutatív (szimmetrikus), ugyanis ellenkező esetben

$$M(x,y) = (xy)x^{-1} = (yx)x^{-1} = y,$$

s ekkor a visszavezetési tétel nem alkalmas Ψ meghatározására, mert a (30) egyenlet triviális módon teljesül. Ekkor viszont, ha

$$G(x,y)=G(y,x),$$

másik úton tudunk (30)-hoz hasonló egyenletet levezetni. Ugyanis akkor sok esetben teljesül az, hogy $G(x,x)$ mint x függvénye invertálható, mint pl. a szigorúan monoton függvények körében is. Feltételezve tehát $\mu(x)=G(x,x)$ invertálhatóságát, értelmezzük az M függvényt a

$$\mu(M)=G(M,M)=G(x,y), \qquad M(x,y)=(xy)^{1/2}$$

összefüggéssel, mellyel a

$$\Psi(xy)^{1/2}=[\Psi(xy)^{1/2}\Psi(xy)^{1/2}]^{1/2}=\{\Phi[(xy)^{1/2}(xy)^{1/2}]\}^{1/2}=$$
$$=[\Phi(xy)]^{1/2}=(\Psi x\Psi y)^{1/2}$$

egyenlőség sorozatot írhatjuk fel, s ennek elejét és végét összehasonlítva a (30) egyenletet kapjuk.

Az eredmény a következő tételbe foglalható:

18. tétel. *Ha az*

$$x \to \Phi_u x,\ \Psi_u x=\Lambda_u x,\ (\Phi_e x=\Psi_e x=x), \qquad u\in U,\ x\in Q$$

leképezések egy $xy=G(x,y)$ művelettel ellátott Q kvázicsoport önizotopizmus rendszerét létesítik, akkor $x\to\Psi_u x$ egy idempotens algebra automorfizmusa, mely a

$$G(x,y)=\begin{cases} G(y,M),\ vagy\ G(M,x), & ha\ \ G(x,y)\neq G(y,x);\\ \mu(M), & ha\ \ \mu(x)=G(x,x)\ invertálható\end{cases}$$

egyenlettel értelmezett $M(x,y)$ művelettel van ellátva. Itt $M(x,y)$ az első vagy második, illetve mindkét változójában invertálható, aszerint hogy melyik összefüggéssel van értelmezve, továbbá idempotens: $M(x,x)=x$.

Másszóval: adott vagy adott tulajdonságokkal rendelkező G esetén a (29) függvényegyenlet Ψ-re vonatkozó megoldása egyenértékű (30) megoldásával, ahol M a fentebb értelmezett függvény.

Ψ, G ismeretében Φ már egyszerűen meghatározható visszahelyettesítés után.

Ha a Q felett értelmezett (21)-ben a Φ, Ψ, Λ közül bármelyik kettő megegyezik, akkor szintén érvényes a (30)-hoz hasonló eredményt adó visszavezetési tétel, ugyanis pl., ha $\Lambda=\Phi$, akkor (23) szerint (Ψ, Φ, Φ) a $Q_i\to Q_i$ izotopizmus rendszert létesíti, melyre már alkalmazható (30) stb.

Az idempotens algebrára való visszavezetés módszere alkalmazható a

$$\Phi G(x, y, z, \ldots) = G(\Psi x, \Psi y, \Psi z, \ldots),$$
$$x \longleftrightarrow \mu(x) = G(x, x, \ldots)$$

egyenletnél is:

$$\Psi M(x, y, z, \ldots) = M(\Psi x, \Psi y, \ldots),$$
$$\mu(M) = G,$$

stb.

IRODALOM

[1] Aczél, J.: Beiträge zur Theorie der geometrischen Objekte I—V, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **7** (1957), 339—354, **8** (1957), 19—64.

[2] Bruck, R. H.: Some results in the theory of quasigroups, *Trans. Amer. Math. Soc.* **55** (1944), 19—52.

[3] Haantjes, J.—Laman, G.: On the definition of geometric objects I—II, *Nederl. Akad. Wetensch. Indag Math.* **15** (1953) 208—215, 216—222.

[4] Hosszú, M.: On the functional equation of distributivity, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* 4 (1953), 159—167.

[5] Nijenhuis, A.: *Theory of geometric object*, Amsterdam, 1952.

[6] Pensov, J. E.: The classification of geometric differential objects, *Dokl. Akad. Nauk.* SSSR **80** (1951), 537—540. (Russian).

[7] Pidek, H.: Sur un problème de l'algèbre des objets geometriques de classe zéro dans l'espace X_1, *Ann. Polon. Math.* **1** (1954), 114—126.

[8] Pidek, H.: Sur un problème de l'algèbre des objets géometriques de classe zéro dans l'espace X_n, *Ann. Polon Math.* **1** (1954), 127—134.

[9] Pidek, H.: Sur les objets géometriques de la classe zéro, qui admettent une algèbre, *Ann. Soc. Math.* **24** (1951), 111—128.

[10] Speiser, A.: *Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung*, Berlin, 1923.

[11] Van der Waerden, B. L.: *Kontinuierliche Gruppen.* (Jegyzet)

(Beérkezett: 1958. IV. 24)

Nehézipari Műszaki Egyetem, Miskolc
Matematikai Tanszék

AZ ITERATÍV KÖZELÍTŐMÓDSZEREKRŐL, III.*

Írta: ZAJTA AURÉL

E harmadik részben az inverz *Taylor*-sorfejtéssel és a belőle származtatható *Euler*-féle közelítőképletekkel foglalkozunk. A problémakörnek az 1. pontban adott általános ismertetése után a 2. fejezetben az inverz *Taylor*-sor és ennek hatványozásával kapott sor együtthatóinak explicit alakját bizonyítjuk be, míg a 3. fejezetben az *Euler*-közelítés hibaképletét adjuk. A 4. fejezet arra a kérdésre ad választ, hogyan kell átalakítani az *Euler*-féle közelítőképletet többszörös gyökök esetén, s végül az utolsó pont az I. részben tárgyalt többi képletsorozatnak (a *Kiss—Gornstein* és a *Bernoulli*-féle képleteknek) az *Euler*-képletekkel való szerkezeti rokonságát mutatja be.

1. Az Euler-közelítés és az inverz Taylor-sor kapcsolata

A gyökközelítésre használt *Euler-féle közelítőképletek* könnyen származtathatók az $f(x)$ analitikus függvény inverzének valamely $f(x)=f(a)$ hely környezetében érvényes Taylor-sorából:

$$x=a-\sum_{\nu=0}^{\infty} E_\nu \cdot \left[\frac{f(a)-f(x)}{f'(a)}\right]^{\nu+1}, \tag{1}$$

ahol az E_ν együtthatók értékei:

$$E_0=1,$$

$$E_1=\frac{1}{2}\cdot\frac{f''(a)}{f'(a)},$$

$$E_2=\frac{1}{6}\cdot\left[3\cdot\left(\frac{f''(a)}{f'(a)}\right)^2-\frac{f'''(a)}{f'(a)}\right] \quad \text{stb.},$$

tehát $\nu>0$ esetben az $f(a)$ deriváltjaiból alkotott speciális törtpolinomok, általában pedig a következő formulából kiszámítható kifejezések:

$$E_\nu=\frac{(-1)^\nu\cdot f'(a)^{\nu+1}}{(\nu+1)!}\cdot\left(\frac{d^{\nu+1}x}{df(x)^{\nu+1}}\right)_{x=a}. \tag{2}$$

Ha ξ jelöli az $f(x)$ függvény egyik zérushelyét, akkor (1)-ből:

$$\xi=a-\sum_{\nu=0}^{\infty} E_\nu\cdot\left(\frac{f(a)}{f'(a)}\right)^{\nu+1}, \tag{3}$$

* A dolgozat I. része az MTA III. Osztálya Közleményeinek VI/3—4 számában (1956, 467—489 old.), II. része a VIII/4 számában (1958, 457—472 old.) jelent meg.

és a szereplő a mennyiség választásától függ, hogy — amennyiben a (3) jobboldalán álló sor konvergál, — az $f(x)$ lehetséges zérushelyei közül melyiket szolgáltatja. A gyakorlatban a (3) sort a k-adik tagnál berekesztjük, és az így kapott

$$\varepsilon_k(a) = a - \sum_{\nu=0}^{k-2} E_\nu \cdot \left(\frac{f(a)}{f'(a)}\right)^{\nu+1} \tag{4}$$

kifejezést iteratív módon alkalmazzuk a ξ közelítésére az

$$x_{n+1} = \varepsilon_k(x_n)$$

képlet szerint.

A (4) sorszeleteket EULER [1] ajánlotta először közelítő számítások céljára, éppen ezért *a szereplő polinomokat Euler-polinomoknak nevezzük el.* Azt, hogy a (4) sorszeletek azonosak a II. rész VIII. tételénél definiált és *Euler-közelítésnek* nevezett képletekkel, a 3. fejezetben fogjuk bebizonyítani, éspedig azáltal, hogy megmutatjuk: *a* (4) *képletek konvergenciafoka k-val egyenlő.*

A (4) képletek használatához nélkülözhetetlen az E_ν polinomok explicit alakjának ismerete. Az explicit alakok kiszámítására számos mód ismeretes, pl. felhasználható a (2) formula is, vagy még inkább a belőle levezethető rekurziós összefüggés:

$$E_\nu = \frac{\nu}{\nu+1} \cdot \frac{f''}{f'} \cdot E_{\nu-1} - \frac{1}{\nu+1} \cdot E'_{\nu-1}. \tag{6}$$

Itt a differenciálás a szerint veendő. A (6) formula könnyen verifikálható a (2)-ből, pl. tekintsük a (2)-ből közvetlenül nyerhető

$$\frac{(\nu+1)!\,E_\nu}{(-f')^{\nu+1}} = \frac{1}{f'(a)} \cdot \left[\frac{\nu!\,E_{\nu-1}}{(-f')^\nu}\right]' \tag{7}$$

relációt, melyből a jobboldalon kijelölt differenciálás és a megfelelő átrendezések elvégzésével könnyen adódik a (6).

Az *Euler*-sor explicit alakjának meghatározására BODEWIG [3] szintén rekurziós képletet adott meg, KISS [4] pedig a konvergenciafok fogalmát felhasználó eljárást közölt. WUNDT [5] lényegében a (2)-es képleten alapuló módszerrel számította ki az (1) sor együtthatóit a 8-adik tagig bezárólag. Mindezeknek a módszereknek hátránya, hogy vagy rekurziósak, tehát egy tetszőleges E_ν együttható kiszámításához gyakorlatilag ismerni kell az összes ezt megelőzőt, vagy pedig közvetlenek ugyan, (ilyen pl. a LAGRANGE-tól származó inverziós formula is [2]), de akkor rengeteg számolással járnak. A következő pontban ismertetendő tétel szükségtelenné teszi ezeket a számolásokat, mert tetszőleges indexre egyszerre megadja az E_ν együtthatók explicit alakját.

2. Az E_ν együtthatók explicit alakja

Az (1) *sorral definiált* E_ν *együtthatók explicit alakja a következő:*

$$E_0 = 1,$$

$$\text{(8)}\qquad E_\nu = \sum (-1)^{i_1} \cdot \frac{\prod\limits_{k=1}^{\nu-i_1-1} (\nu+k+1)}{\prod\limits_{k=2}^{\nu+1} i_k! \prod\limits_{k=2}^{\nu+1} (k!)^{i_k}} \cdot \prod_{k=2}^{\nu+1} \left(\frac{f^{(k)}}{f'}\right)^{i_k}, \qquad (\nu > 0)$$

ahol az i_k *hatványkitevők nem-negatív egész számok,*

$$\text{(9)}\qquad i_1 = \nu - \sum_{k=2}^{\nu+1} i_k,$$

és az összegezést minden lehetséges esetre ki kell terjeszteni a

$$\text{(10)}\qquad \sum_{k=2}^{\nu+1} (k-1) i_k = \nu$$

megszorítás figyelembevételével. Amennyiben $\nu - i_1 - 1 = 0$, a számláló produktuma üres szorzatnak tekintendő.

A (8) formula speciális esete a sokkal általánosabb

$$E_{0m} = 1,$$

$$\text{(11)}\qquad E_{\nu m} = m \cdot \sum (-1)^{i_1} \cdot \frac{\prod\limits_{k=1}^{\nu-i_1-1} (\nu+k+m)}{\prod\limits_{k=2}^{\nu+1} i_k! \prod\limits_{k=2}^{\nu+1} (k!)^{i_k}} \cdot \prod_{k=2}^{\nu+1} \left(\frac{f^{(k)}}{f'}\right)^{i_k}, \qquad (\nu > 0)$$

formulának, amelyből $m = 1$ helyettesítéssel kapjuk ($E_{\nu_1} = E_\nu$). Az $E_{\nu m}$ jelöléssel a

$$\text{(12)}\qquad \left[\frac{(a-x)f'(a)}{f(a)-f(x)}\right]^m = \sum_{\nu=0}^{\infty} E_{\nu m} \cdot \left[\frac{f(a)-f(x)}{f'(a)}\right]^\nu$$

sor együtthatóit jelöljük: e soregyütthatók explicit alakját megadó (11) kifejezés bizonyításával egyúttal a (8)-at is bebizonyítottuk. A (11) szintén kiegészítendő még a (9) és (10) mellékfeltételekkel.

A (12) sor érvényességével kapcsolatban megjegyezzük, hogy amennyiben a komplexváltozósnak tekintett $f(x)$ függvény az $x = a$ pontban reguláris és $f'(a) \neq 0$, akkor a

$$z = \frac{f(x)-f(a)}{f'(a)} = 0$$

pont környezetében minden valós egész m esetén érvényes a (12) sorelőállítás. A *Taylor*-sor együtthatóinak kiszámítási formuláját alkalmazva, az $E_{\nu m}$ együtthatókra, (12)-ből azonnal adódik:

$$(13)\qquad E_{\nu m}=\frac{(-f'(a))^{\nu}}{\nu!}\cdot\left(\frac{d^{\nu}\left[\frac{(x-a)f'(a)}{f(x)-f(a)}\right]^{m}}{df(x)^{\nu}}\right)_{x=a}.$$

A (13) természetesen — bonyolultságánál fogva — nem alkalmas az $E_{\nu m}$ polinomok kiszámítására, de a (11) bizonyításánál fontos szerepet tölt be. Rögzített ν esetén ugyanis (11) és (13) jobboldala m-nek ν-edfokú egész függvénye, és ezért ha bebizonyítjuk, hogy a (11) és (13) jobboldalainak egyenlővé tételével nyert

$$(14)\qquad \frac{(-f'(a))^{\nu}}{\nu!}\cdot\left(\frac{d^{\nu}\left[\frac{(x-a)f'(a)}{f(x)-f(a)}\right]^{m}}{df(x)^{\nu}}\right)_{x=a}=$$

$$=m\cdot\sum(-1)^{i_1}\cdot\frac{\prod\limits_{k=1}^{\nu-i_1-1}(\nu+k+m)}{\prod\limits_{k=2}^{\nu+1}i_k!\prod\limits_{k=2}^{\nu+1}(k!)^{i_k}}\cdot\prod_{k=2}^{\nu+1}\left(\frac{f^{(k)}}{f'}\right)^{i_k}\qquad(\nu>0)$$

összefüggést m-nek végtelen sok értéke kielégíti, akkor (14) csak azonosság lehet. De akkor (14) tetszőleges valós egész m-re is fennáll, vagyis *bebizonyítottuk azt a tételt, hogy a* (12) *sor együtthatóinak explicit kifejezése* (11) *alakú.*

Az $E_{\nu m}$ polinomok explicit alakja abban a speciális esetben, amikor m negatív egész és kisebb $(-\nu)$-nél, aránylag könnyen meghatározható. A továbbiakban ezzel foglalkozunk.

Legyen tehát m negatív egész, és jelölje m abszolút értékét n:

$$(15a)\qquad m=-n.$$

A kényelmetlenné váló $E_{\nu(-n)}$ jelölések helyett vezessük be az $E^*_{\nu n}$ jelölést:

$$(15b)\qquad E_{\nu m}=E_{\nu(-n)}=E^*_{\nu n}.$$

Ezzel az új jelöléssel a (12)-ből kis átrendezéssel nyerjük:

$$(16)\qquad \frac{1}{(a-x)^{n}}=\sum_{\nu=0}^{\infty}E^*_{\nu n}\cdot\left[\frac{f(a)-f(x)}{f'(a)}\right]^{\nu-n},$$

speciálisan $n=1$ esetben:

$$(17)\quad \frac{1}{a-x}=\sum_{\nu=0}^{\infty}E^*_{\nu 1}\cdot\left[\frac{f(a)-f(x)}{f'(a)}\right]^{\nu-1}=\frac{f'(a)}{f(a)-f(x)}+\sum_{\nu=1}^{\infty}E^*_{\nu 1}\cdot\left[\frac{f(a)-f(x)}{f'(a)}\right]^{\nu-1}.$$

A (17) jobboldalának csak az első tagja, a (16) jobboldalának viszont az első n tagja az $[f(a)-f(x)]$ kifejezést a nevezőben tartalmazza; az ezután következő tagokban viszont már sehol sem fordul elő $[f(a)-f(x)]$ a nevezőben. Minthogy a (17) sorból a (16) sor a szerint végrehajtott $(n-1)$-szeres differenciálással (és $(-1)^{n-1}\cdot(n-1)!$-sal való osztással) előállítható, a fenti megállapítással egybe vetve nyilvánvaló, hogy a (16) sor első n tagja és csakis ezek, a (17) sornak kizárólag az első tagjából származnak a differenciálás során, tehát

$$\frac{d^{n-1}}{da^{n-1}}\left(\frac{f'(a)}{f(a)-f(x)}\right)=(-1)^{n-1}\cdot(n-1)!\sum_{\nu=0}^{n-1}E^*_{\nu n}\cdot\left(\frac{f(a)-f(x)}{f'(a)}\right)^{\nu-n},$$

vagy, mivel az $f(x)$ itt semmiféle szerepet nem játszik:

$$\left(\frac{f'(a)}{f(a)}\right)^{(n-1)}=(-1)^{n-1}\cdot(n-1)!\sum_{\nu=0}^{n-1}E^*_{\nu n}\cdot\left(\frac{f'(a)}{f(a)}\right)^{n-\nu}. \tag{18}$$

A (18) baloldalának explicit alakja már ismeretes. Emlékeztetünk ugyanis arra, hogy a baloldal szerepel a *Newton-polinomok* egyik előállításában (vö. I. rész (23)):

$$N_n(f)=\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\cdot f^n\cdot\left(\frac{f'}{f}\right)^{(n-1)}, \tag{19}$$

másrészt a *Newton-polinomok* explicit alakját az I. részben ugyancsak megadtuk. A (19) alapján a (18)-ba behelyettesítve, eredményünk:

$$\frac{1}{f^n}\cdot N_n(f)=\sum_{\nu=0}^{n-1}E^*_{\nu n}\cdot\left(\frac{f'}{f}\right)^{n-\nu}, \tag{20}$$

és most feladatunk az, hogy a (20) baloldalára az $N_n(f)$-polinomok explicit alakját beírva, leolvassuk az $E^*_{\nu n}$-polinomokét. Idézzük az $N_n(f)$-polinomok explicit alakját (vö. I. rész 5. pont):

$$N_n(f)=n\cdot\sum(-1)^{i_0}\cdot\frac{(n-i_0-1)!}{\prod\limits_{k=1}^{n}i_k!\prod\limits_{k=1}^{n}(k!)^{i_k}}\prod_{k=0}^{n}(f^{(k)})^{i_k}, \tag{21}$$

ahol

$$\sum_{k=0}^{n}i_k=\sum_{k=1}^{n}k i_k=n. \tag{22}$$

A (21)-ből kis átalakítással és i_0 helyett ν-t írva nyerjük:

$$\frac{N_n(f)}{f^n}=\sum_{\nu=0}^{n-1}\left[n\cdot\sum(-1)^{\nu}\cdot\frac{(n-\nu-1)!}{i_1!\prod\limits_{k=2}^{\nu+1}j_k!\prod\limits_{k=2}^{\nu+1}(k!)^{j_k}}\cdot\prod_{k=2}^{\nu+1}\left(\frac{f^{(k)}}{f'}\right)^{j_k}\right]\cdot\left(\frac{f'}{f}\right)^{n-\nu}. \tag{23}$$

A (21) és (23) összehasonlításával j_k kitevőkre azonnal adódik:

$$(24)\quad \left\{\begin{aligned} j_k &= i_k, \quad (k>1) \\ \text{és} \qquad -\sum_{k=2}^{\nu+1} j_k + n - \nu &= i_1, \end{aligned}\right.$$

és ha most j_1-et úgy definiáljuk, hogy

$$(25)\qquad \sum_{k=1}^{\nu+1} j_k = \nu$$

legyen, akkor a (22), (24) és (25)-ből egyszerűen következik az is, hogy

$$(26)\qquad \sum_{k=1}^{\nu+1} k j_k = 2\nu$$

és

$$(27)\qquad i_1 = n + j_1 - 2\nu.$$

Ha most beírjuk (23)-ba i_1-nek (27)-beli kifejezését, a (20)-szal egybevetve azonnal leolvasható $E^*_{\nu n}$ explicit alakja:

$$(28)\qquad E^*_{\nu n} = n \cdot \sum (-1)^{\nu} \frac{(n-\nu-1)!}{(n+j_1-2\nu)! \prod_{k=2}^{\nu+1} j_k! \prod_{k=2}^{\nu+1} (k!)^{j_k}} \cdot \prod_{k=2}^{\nu+1} \left(\frac{f^{(k)}}{f'}\right)^{j_k},$$

ahol a j_k kitevők nem-negatív egész számok, és az összegezést az összes lehetséges esetre végre kell hajtani a (25) és (26) megszorítások figyelembevételével.

A (28) könnyen identifikálható a (11) alatti kifejezéssel. Ha j_k helyett ismét rátérünk az i_k-val való jelölésre, hamar felismerhető, hogy a (25) és (26) mellékfeltételek ugyanazt fejezik ki együtt, mint a (9) és (10). A (28)-beli két faktoriális hányadosa;

$$\frac{(n-\nu-1)!}{(n+j_1-2\nu)!}$$

pedig nem egyéb, mint a (11) számlálójában levő szorzat $(-1)^{\nu-i_1-1}$-szerese (j_1 helyett i_1-et, n helyett $(-m)$-et írunk, vö. (15 a)):

$$\frac{(n-\nu-1)!}{(n+i_1-2\nu)!} = \prod_{k=1}^{\nu-i_1-1} (n-\nu-k) = (-1)^{\nu-i_1-1} \prod_{k=1}^{\nu-i_1-1} (m+\nu+k).$$

Minthogy (11), ill. (28) mindig érvényes, ha m negatív egész és kisebb $(-\nu)$-nél, azaz m-nek végtelen sok értékére, ezért a már mondottaknál fogva a (11)-gyel megadott explicit alakot általános érvényűnek tekinthetjük.

Kiegészítésképpen megjegyezzük, hogy a $C_{nm}(f)$-polinomokra (vö. I. rész 4. és 5. pont) is fennáll egy a (20)-nak megfelelő összefüggés (most azonban m-nek más a jelentése, mint korábban, tehát (15a) nem érvényes!):

$$(29) \qquad \frac{1}{f^n}\cdot\frac{C_{nm}(f)}{m}=\sum_{\nu=0}^{n-1}\binom{n+m-\nu-1}{n-\nu-1}\cdot\frac{E^*_{\nu n}}{n}\cdot\left(\frac{f'}{f}\right)^{n-\nu}.$$

A (29) $C_{nm}(f)$-polinomok explicit alakjából (vö. I. rész (45)) vezethető le, az $E^*_{\nu n}$-polinomok (28)-as alakjának felhasználásával. A (29)-nek speciális esete az $m=1$ helyettesítésre (vö. I. rész (33)) nyerhető összefüggés:

$$(30) \qquad \frac{1}{f^n}\cdot K_n(f)=\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{n-\nu}{n}\cdot E^*_{\nu n}\cdot\left(\frac{f'}{f}\right)^{n-\nu},$$

melyre az utolsó fejezetben még szükségünk lesz.

3. Az Euler-közelítés hibaformulája

Mint már említettük, a (4) közelítőképlet és a II. rész 5. pontjában definiált *Euler-közelítőképlet* azonosságát azáltal bizonyíthatjuk, hogy a (4) közelítőképlet konvergenciafokáról megmutatjuk, hogy k-val egyenlő. Azt kell tehát bizonyítanunk, hogy az

$$(31) \qquad \varepsilon_k(x)-\xi=x-\xi-\sum_{\nu=0}^{k-2}E_\nu\cdot\left(\frac{f(x)}{f'(x)}\right)^{\nu+1}=\sigma_k\cdot(x-\xi)^k$$

felbontásban, az ún. hibaképletben, σ_k oly kifejezés, melynek $x\to\xi$ közelítésre létezik a határértéke. Ez azonban következik a σ_k kifejezések rekurziós képletéből:

$$(32) \qquad \sigma_{k+1}=\frac{1}{f'}\left(g'\cdot\sigma_k-\frac{1}{k}\cdot g\cdot\sigma_k'\right),$$

és a kezdeti $\sigma_1=1$ $\left(\text{vagy } \sigma_2=\frac{g'}{f'}\right)$ értékekből, amelyekből azonnal megállapítható, hogy σ_k — bizonyos numerikus faktoroktól eltekintve — nevezőjében csak f' valamely hatványát tartalmazza, vagyis létezik a $\lim\limits_{x\to\xi}\sigma_k=\sigma_{k0}$ határérték.

Ami a (32) rekurziós formula bizonyítását illeti, ezt az alábbiakban vázoljuk. A (6) rekurziós képletből kiindulva először a (4) sor általános tagjának, a

$$(33) \qquad \mu_\nu=E_{\nu-1}\cdot\left(\frac{f}{f'}\right)^\nu$$

kifejezéseknek rekurziós képletét,

$$(34)\qquad (\nu+1)\cdot\mu_{\nu+1}=\nu\cdot\mu_\nu-\frac{f}{f'}\cdot\mu'_\nu,$$

vezetjük le, majd mindkét oldalon történő összegezéssel és egyszerűsítésekkel az alábbi összefüggéshez jutunk:

$$(35)\qquad k\cdot\mu_k=\mu_1-\frac{f}{f'}\cdot\sum_{\nu=1}^{k-1}\mu'_\nu=\frac{f}{f'}\cdot\left(1-\sum_{\nu=1}^{k-1}\mu'_\nu\right).$$

Tekintve azonban, hogy

$$\varepsilon_k(x)=x-\sum_{\nu=1}^{k-1}\mu_\nu,$$

ebből

$$\varepsilon'_k=1-\sum_{\nu=1}^{k-1}\mu'_\nu,$$

és

$$\mu_k=\varepsilon_k-\varepsilon_{k+1},$$

következik, amelyeknek a (35)-be való behelyettesítésével megkapjuk az ε_k-kifejezések rekurziós képletét:

$$(36)\qquad \varepsilon_{k+1}=\varepsilon_k-\frac{1}{k}\cdot\frac{f}{f'}\cdot\varepsilon'_k.$$

A (32)-t ebből úgy kapjuk, hogy a (31) szerinti helyettesítéseket:

$$\varepsilon_k=\xi+\sigma_k\cdot(x-\xi)^k,$$

$$\varepsilon_{k+1}=\xi+\sigma_{k+1}\cdot(x-\xi)^{k+1},$$

és

$$\varepsilon'_k=\sigma'_k\cdot(x-\xi)^k+k\sigma_k(x-\xi)^{k-1},$$

a (36)-ban elvégezzük és egyszerűsítünk.

Minthogy a $\lim\limits_{x\to\xi}\sigma_k$ határérték létezik, σ_k sorba fejthető $(x-\xi)$ pozitív kitevős hatványai szerint:

$$\sigma_k=\sigma_{k0}+\sigma_{k1}\cdot(x-\xi)+\sigma_{k2}\cdot(x-\xi)^2+\cdots$$

A hibabecslés szempontjából a sorfejtés első tagja (σ_{k0}) a döntő, ennek explicit alakját az alábbiakban vezetjük le. A (31)-től kis átalakítással

$$\sigma_{k+1}\cdot(x-\xi)^{k+1}-\sigma_k\cdot(x-\xi)^k=-E_{k-1}\cdot\left(\frac{f}{f'}\right)^k$$

következik, vagy, tekintve, hogy $f(x)=g(x)\cdot(x-\xi)$,

$$\sigma_{k+1}\cdot(x-\xi)-\sigma_k=-E_{k-1}\cdot\left(\frac{g}{f'}\right)^k,$$

ahonnét

$$\sigma_{k0} = \lim_{x\to\xi} \sigma_k = \lim_{x\to\xi} E_{k-1}\cdot\left(\frac{g}{f'}\right)^k = \lim_{x\to\xi} E_{k-1}.$$

Mivel E_{k-1} f-nek csak deriváltjait tartalmazza, limesét azáltal nyerjük, hogy explicit kifejezésben mindenütt végrehajtjuk az

$$f^{(h)} \to h\cdot g^{(h-1)} \qquad (h = 1, 2, \ldots, k)$$

helyettesítéseket. Végső eredményünk a (8) felhasználásával:

$$\sigma_{k0} = \frac{1}{k!}\cdot\sum (-1)^{i_0}\frac{(2k-2-i_0)!}{\prod_{h=1}^{k-1} i_h!\prod_{h=1}^{k-1}(h!)^{i_h}}\cdot\prod_{h=1}^{k-1}\left(\frac{g^{(h)}}{g}\right)^{i_h}, \tag{37}$$

ahol az i_h hatványkitevők nem-negatív egész számok,

$$i_0 = k - 1 - \sum_{h=1}^{k-1} i_h,$$

és az összegezést az összes lehetséges esetre ki kell terjeszteni a

$$\sum_{h=1}^{k-1} h\,i_h = k - 1$$

megszorítás figyelembevételével.

4. Az Euler-közelítés szükséges átalakítása többszörös gyökök közelítésekor

Mint a II. rész 1. fejezetében említettük, bármely egyszeres gyök közelítőképletből úgy nyerhetünk ugyanolyan konvergenciafokú, de p-szeres gyök közelítésére alkalmas képletet, hogy benne végrehajtjuk az

$$\left\{\begin{array}{ll} & f(x) \to f(x)^m \qquad \left(m = \frac{1}{p}\right) \\ \text{és} & \\ & f^{(h)}(x) \to \frac{d^h}{dx^h}\left(f(x)^m\right) \end{array}\right. \tag{38}$$

helyettesítéseket. Vizsgáljuk meg, mivé alakul az *Euler*-közelítés a (38) helyettesítések keresztülvitelével.

Az *Euler*-sor általános tagját a

$$\mu_n = E_{n-1}\cdot\left(\frac{f}{f'}\right)^n$$

kifejezések képezik; ezek rekurziós összefüggése pedig, mint az a (34)-ből látható:

$$(34') \qquad (n+1)\cdot\mu_{n+1}-n\cdot\mu_n+\frac{f}{f'}\mu'_n=0.$$

A (38) helyettesítésekkel nyert új kifejezést jelölje M_n:

$$(39) \qquad \mu_n(f''' ; (f''')^{(h)})=M_n(f;f^{(h)}),$$

ekkor a (34')-ből következik, hogy az M_n kifejezések pedig az

$$(40) \qquad (n+1)\cdot M_{n+1}-n\cdot M_n+p\cdot\frac{f}{f'}\cdot M'_n=0$$

rekurziós formulát elégítik ki.

A (40) egyenlet megoldására az M_n polinomokat az alábbi alakban keressük:

$$(41) \qquad M_n=\sum_{\nu=1}^{n}\alpha_{n\nu}\cdot\mu_\nu,$$

ahol az $\alpha_{n\nu}$ mennyiségek numerikus együtthatók és a p függvényei. A (40)-be behelyettesítve:

$$(n+1)\cdot\sum_{\nu=1}^{n+1}\alpha_{(n+1)\nu}\cdot\mu_\nu-n\cdot\sum_{\nu=1}^{n}\alpha_{n\nu}\cdot\mu_\nu+p\cdot\frac{f}{f'}\cdot\sum_{\nu=1}^{n}\alpha_{n\nu}\cdot\mu'_\nu=0.$$

μ'_ν-t kiküszöböljük a (34) alapján. Rendezés után:

$$(42) \qquad \sum_{\nu=1}^{n+1}[(n+1)\alpha_{(n+1)\nu}+(p\nu-n)\alpha_{n\nu}-p\nu\cdot\alpha_{n(\nu-1)}]\cdot\mu_\nu=0,$$

megjegyezve azt, hogy az összegezéskor mechanikusan kiadódó α_{n0} és $\alpha_{n(n+1)}$ együtthatókat zérus-értékűnek kell tekintenünk.

Mivel a μ_ν mennyiségek lineárisan függetlenek, a (42)-ből azonnal leolvasható az $\alpha_{n\nu}$ együtthatók rekurziós képlete:

$$(43) \qquad (n+1)\alpha_{(n+1)\nu}+(p\nu-n)\alpha_{n\nu}-p\nu\cdot\alpha_{n(\nu-1)}=0.$$

Ebből a kezdeti $\alpha_{n0}=0$, $\alpha_{n(n+1)}=0$ és $\alpha_{11}=p$ értékekből valamennyi további együttható meghatározható, éspedig először az α_{n1}, majd ezek ismerete alapján az α_{n2}, majd ezekből az α_{n3} stb együtthatók. Néhány alacsonyabb indexű együttható kiszámított értéke:

$$\alpha_{11}=p, \quad \alpha_{21}=-\binom{p}{2}, \quad \alpha_{31}=\binom{p}{3}, \quad \alpha_{41}=-\binom{p}{4},$$

$$\alpha_{22}=p^2, \quad \alpha_{32}=-p^2(p-1), \quad \alpha_{42}=\frac{1}{12}p^2(p-1)(7p-11)$$

$$\alpha_{33}=p^3, \quad \alpha_{43}=-\frac{3}{2}p^3(p-1),$$

$$\alpha_{44}=p^4.$$

Az $\alpha_{n\nu}$ együtthatóknak a vázolt eljárással történő szukcesszív meghatározását feleslegessé teszi az általános explicit alakjukat megadó alábbi formula:

$$\alpha_{n\nu} = (-1)^{n-\nu} \cdot \nu! \sum \prod_{h=1}^{n-\nu+1} \frac{1}{i_h!} \cdot \binom{p}{h}^{i_h}, \tag{44}$$

ahol az i_h kitevők nem-negatív egész számok, és az összegezésnél az összes lehetséges esetet figyelembe kell venni, amelyek kielégítik a

$$\left\{ \begin{aligned} &\sum i_h = \nu \\ \text{és} \quad &\sum h i_h = n \end{aligned} \right. \tag{45}$$

feltételeket.

A (44) bizonyítására tekintsük az

$$1-(1-x)^p = \alpha_{11}x + \alpha_{21}x^2 + \alpha_{31}x^3 + \cdots$$

és

$$[1-(1-x)^p]^\nu = \alpha_{\nu\nu}x^\nu + \alpha_{(\nu+1)\nu} \cdot x^{\nu+1} + \alpha_{(\nu+2)\nu} \cdot x^{\nu+2} + \cdots$$

sorfejtéseket. A (44) és (45)-ből ugyanis következik, hogy

$$[1-(1-x)^p]^\nu = \sum_{n=\nu}^{\infty} \alpha_{n\nu} \cdot x^n. \tag{46}$$

Ha ennek alapján igazolni tudjuk a (43) rekurziós összefüggést, akkor (44) bizonyítottnak tekinthető. Differenciáljunk mindkét oldalon x szerint:

$$\nu p \cdot [1-(1-x)^p]^{\nu-1} \cdot (1-x)^{p-1} = \sum_{n=\nu}^{\infty} n\alpha_{n\nu} \cdot x^{n-1},$$

szorozzunk $(1-x)$-szel:

$$\nu p \cdot [1-(1-x)^p]^{\nu-1} \cdot (1-x)^p = \sum_{n=\nu-1}^{\infty} [(n+1)\,\alpha_{(n+1)\nu} - n\alpha_{n\nu}] \cdot x^n. \tag{47}$$

Írjuk fel a (46)-ot ν helyett $(\nu-1)$-re és szorozzuk (νp)-vel:

$$\nu p\,[1-(1-x)^p]^{\nu-1} = \sum_{n=\nu-1}^{\infty} \nu p \cdot \alpha_{n(\nu-1)} \cdot x^n, \tag{48}$$

és szorozzuk meg (46)-ot is (νp)-vel:

$$\nu p[1-(1-x^p]^\nu = \sum_{n=\nu}^{\infty} \nu p \cdot \alpha_{n\nu} \cdot x^n.$$

Ha a (48) baloldalából kivonjuk a (47) baloldalát, épp az utolsó egyenlet baloldalát kapjuk. Ugyanez áll tehát a jobboldalakra is. Rendezés és az x^n kiemelése után:

$$\sum_{n=\nu-1}^{\infty}[(n+1)\alpha_{(n+1)\nu}+(\nu p-n)\alpha_{n\nu}-\nu p\cdot\alpha_{n(\nu-1)}]\cdot x^n=0,$$

ahonnét azonnal leolvasható a (45) rekurziós összefüggés.

Annak, hogy az $\alpha_{n\nu}$ együtthatók a (46) sorfejtés tagjaiként szerepelnek, más haszna is van. $x=1$ helyettesítésre ugyanis az alábbi három tétel következik belőle:

$$\text{(49)}\qquad \begin{aligned} &1)\quad \sum_{n=\nu}^{\infty}\alpha_{n\nu}=1, \quad \text{ha } p>0,\\ &2)\quad \sum_{n=\nu}^{N}\alpha_{n\nu}=1, \quad \text{ha } N\geqq \nu p \text{ és } p \text{ pozitív egész, és e kettő együttes alkalmazásával:}\\ &3)\quad \alpha_{n\nu}=0, \quad \text{ha } n\geqq \nu p \text{ és } p \text{ pozitív egész.}\end{aligned}$$

A (49)-et felhasználva könnyen bizonyitható az *Euler-sorra* vonatkozó lényeges tétel: *Legyen az Euler-közelítésnek p-szeres gyökök esetében szükségessé való módosítása, azaz az*

$$\text{(50)}\qquad \varepsilon_{k,p}=x-\sum_{n=1}^{k-1}M_n=x-\sum_{n=1}^{k-1}\left(\sum_{\nu=1}^{n}\alpha_{n\nu}\cdot\mu_\nu\right)$$

kettős sor $k\to\infty$ limesre valamennyi tagját tekintve abszolút konvergens sor. Ekkor a $\lim\limits_{k\to\infty}\varepsilon_{k,p}$ *sor az eredeti Euler-sorrá átrendezhető.*

A bizonyításhoz átalakítjuk az (50)-et:

$$\varepsilon_{k,p}=x-\sum_{\nu=1}^{k-1}\left(\sum_{n=\nu}^{k-1}\alpha_{n\nu}\right)\cdot\mu_\nu,$$

és felhasználjuk a (49)-et:

$$\lim_{k\to\infty}\varepsilon_{k,p}=x-\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\lim_{k\to\infty}\sum_{n=\nu}^{k-1}\alpha_{n\nu}\right)\cdot\mu_\nu=x-\sum_{\nu=1}^{\infty}\mu_\nu=\lim_{k\to\infty}\varepsilon_k,$$

qu. e. d.

5. Az inverz Taylor-sor felhasználása közelítőképletek szerkesztésére

Az inverz *Taylor*-sort, ill. a hatványozásával nyert (12) sort a II. részben tárgyalt kongruencia-relációk segítségével jól fel lehet használni közelítőképletek szerkesztésére.

A (12) sor $x=\xi$ helyettesítésével (ξ az $f(x)$ egyik zérushelyét jelenti) az

$$\left[\frac{(a-\xi)f'(a)}{f(a)}\right]^m=\sum_{\nu=0}^{\infty}E_{\nu m}\cdot\left(\frac{f(a)}{f'(a)}\right)^{\nu} \tag{51}$$

sorba megy át. Ha most bevezetjük az

$$\Omega_{km}=\sum_{\nu=0}^{k-2}E_{\nu m}\cdot\left(\frac{f}{f'}\right)^{\nu}\qquad(k=2,3\ldots) \tag{52}$$

jelölést, akkor (51) így is írható:

$$\left[\frac{(a-\xi)f'(a)}{f(a)}\right]^m=\Omega_{km}+\sum_{\nu=k-1}^{\infty}E_{\nu m}\cdot\left(\frac{f}{f'}\right)^{\nu}. \tag{51'}$$

Az (51')-ből és a belőle $m=1$ és $m\to m+1$ helyettesítésekre nyert összefüggésekből az alábbi relációt nyerjük:

$$\left[\Omega_{k1}+\sum_{\nu=k-1}^{\infty}E_{\nu}\cdot\left(\frac{f}{f'}\right)^{\nu}\right]\cdot\left[\Omega_{km}+\sum_{\nu=k-1}^{\infty}E_{\nu m}\cdot\left(\frac{f}{f'}\right)^{\nu}\right]=\Omega_{k(m+1)}+\sum_{\nu=k-1}^{\infty}E_{\nu(m+1)}\cdot\left(\frac{f}{f'}\right)^{\nu},$$

amelyből leolvasható az

$$\Omega_{k1}\cdot\Omega_{km}\equiv\Omega_{k(m+1)}\bmod f^{k-1} \tag{53}$$

kongruencia érvényessége. Az (53) más alakban, mivel a $\lim\limits_{f\to 0}\dfrac{1}{\Omega_{km}}$ határérték létezik, így írható:

$$\Omega_{k1}\equiv\frac{\Omega_{k(m+1)}}{\Omega_{km}}\bmod f^{k-1};$$

vagy, $\left(\dfrac{f}{f'}\right)$-vel való szorzással:

$$\Omega_{k1}\cdot\frac{f}{f'}\equiv\frac{\Omega_{k(m+1)}}{\Omega_{km}}\cdot\frac{f}{f'}\bmod f^{k}. \tag{54}$$

Minthogy (4)-ből

$$\Omega_{k1}\cdot\frac{f}{f'}=a-\varepsilon_k(a)$$

következik, az (54) így is írható:

$$\varepsilon_k(a) \equiv a - \frac{\Omega_{k(m+1)}}{\Omega_{km}} \cdot \frac{f}{f'} \bmod f^k,$$

ahonnét a II. rész IV. tétel alapján leolvasható, hogy a

$$\Phi_{km}(x) = x - \frac{\Omega_{k(m+1)}}{\Omega_{km}} \cdot \frac{f(x)}{f'(x)} \tag{55}$$

közelítőképlet konvergenciafoka *legalább* k-val egyenlő.

Azt, hogy az (55) konvergenciafoka *pontosan* k-val egyenlő ($k > 1$), a következőképp láthatjuk be. Az (55)-ből $k \to k+1$ helyettesítésére nyert

$$\Phi_{(k+1)m}(x) = x - \frac{\Omega_{(k+1)(m+1)}}{\Omega_{(k+1)m}} \cdot \frac{f(x)}{f'(x)}$$

közelítőképlet konvergenciafoka nyilván legalább $(k+1)$, ez a közelítőképlet azonban $\bmod f^{k+1}$ inkongruens az (55) alattival, amiből következik, hogy amaz nem lehet $(k+1)$ konvergenciafokú. Ugyanis

$$\Omega_{(k+1)(m+1)} \cdot \Omega_{km} - \Omega_{(k+1)m} \cdot \Omega_{k(m+1)} =$$

$$= \left[\sum_{\nu=0}^{k-1} E_{\nu(m+1)} \cdot \left(\frac{f}{f'}\right)^{\nu}\right] \cdot \left[\sum_{\nu=0}^{k-2} E_{\nu m} \cdot \left(\frac{f}{f'}\right)^{\nu}\right] - \left[\sum_{\nu=0}^{k-1} E_{\nu m} \cdot \left(\frac{f}{f'}\right)^{\nu}\right] \cdot \left[\sum_{\nu=0}^{k-2} E_{\nu(m+1)} \cdot \left(\frac{f}{f'}\right)^{\nu}\right] \equiv$$

$$\equiv (E_{(k-1)(m+1)} - E_{(k-1)m}) \cdot \left(\frac{f}{f'}\right)^{k-1} \not\equiv 0 \bmod f^k, \quad \text{ha} \quad k > 1,$$

azaz

$$\frac{\Omega_{(k+1)(m+1)}}{\Omega_{(k+1)m}} \not\equiv \frac{\Omega_{k(m+1)}}{\Omega_{km}} \bmod f^k,$$

ahonnét már látható, hogy

$$\Phi_{(k+1)m} \not\equiv \Phi_{km} \bmod f^{k+1}.$$

Az (55) képlet konvergenciafoka természetesen nem változik, ha a jobb oldalon, vagy csak a számlálóban, vagy csak a nevezőben Ω első indexét k-nál nagyobb értékkel helyettesítjük. Így kapjuk pl. az

$$x - \frac{\Omega_{k(m+1)}}{\Omega_{(k+1)m}} \cdot \frac{f(x)}{f'(x)} \tag{56}$$

közelítőképlet, mely $m = -k$ választással a *Bernoulli-féle közelítő formulát* szolgáltatja, (vö. I. rész (15)). Ennek bizonyítására tekintsük a (20) relációt, amelyből a (15 *b*) és az (52) felhasználásával állításunk azonnal következik:

$$\frac{N_{k-1}}{N_k}\cdot f=\frac{\sum\limits_{\nu=0}^{k-2}E^*_{\nu(k-1)}\cdot\left(\frac{f'}{f}\right)^{k-1-\nu}}{\sum\limits_{\nu=0}^{k-1}E^*_{\nu k}\cdot\left(\frac{f'}{f}\right)^{k-\nu}}=\frac{\sum\limits_{\nu=0}^{k-2}E^*_{\nu(k-1)}\cdot\left(\frac{f}{f'}\right)^{\nu}}{\sum\limits_{\nu=0}^{k-1}E^*_{\nu k}\cdot\left(\frac{f}{f'}\right)^{\nu}}\cdot\frac{f}{f'}=$$

$$=\frac{\sum\limits_{\nu=0}^{k-2}E_{\nu(-k+1)}\cdot\left(\frac{f}{f'}\right)^{\nu}}{\sum\limits_{\nu=0}^{k-1}E_{\nu(-k)}\cdot\left(\frac{f}{f'}\right)^{\nu}}\cdot\frac{f}{f'}=\frac{\Omega_{k(-k+1)}}{\Omega_{(k+1)(-k)}}\cdot\frac{f}{f'}.$$

A (12) sorból kiindulva olyan közelítőképletet is konstruálhatunk, mely speciális esetben a *Kiss—Gornstein-féle képletsorozatot* adja. Szorozzuk meg mindkét oldalt

$$\left[\frac{f(a)-f(x)}{f'(a)}\right]^{m}\text{-nel:}$$

$$(a-x)^m=\sum_{\nu=0}^{\infty}E_{\nu m}\cdot\left[\frac{f(a)-f(x)}{f'(a)}\right]^{m+\nu},$$

és differenciáljunk mindkét oldalon $f(x)$ szerint:

$$-\frac{m\,(a-x)^{m-1}}{f'(x)}=\sum_{\nu=0}^{\infty}(m+\nu)\cdot E_{\nu m}\cdot\left[\frac{f(a)-f(x)}{f'(a)}\right]^{m+\nu-1}\cdot\left(-\frac{1}{f'(a)}\right).$$

Innét $x\to\xi$ helyettesítéssel és kis átalakítással az alábbi eredményt kapjuk:

$$\frac{f'(a)}{f'(\xi)}\cdot\left[\frac{(a-\xi)f'(a)}{f(a)}\right]^{m-1}=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{m+\nu}{m}\cdot E_{\nu m}\cdot\left(\frac{f(a)}{f'(a)}\right)^{\nu}. \tag{57}$$

Ezek után vezessük be az

$$\Omega^*_{km}=\sum_{\nu=0}^{k-2}\frac{m+\nu}{m}\cdot E_{\nu m}\cdot\left(\frac{f}{f'}\right)^{\nu}\qquad(k=2,3,\ldots) \tag{58}$$

jelölést, amelynek segítségével az (57) új alakja:

$$\frac{f'(a)}{f'(\xi)}\cdot\left[\frac{(a-\xi)f'(a)}{f(a)}\right]^{m-1}=\Omega^*_{km}+\sum_{\nu=k-1}^{\infty}\frac{m+\nu}{m}\cdot E_{\nu m}\cdot\left(\frac{f}{f'}\right)^{\nu}. \tag{57'}$$

Az (57')-t írjuk fel $(m-1)$ helyett m kitevővel, továbbá az (51')-t $m=1$

esetre. Ezekből és az (57')-ből nyerjük, hogy

$$\left[\Omega^*_{km}+\sum_{\nu=k-1}^{\infty}\frac{m+\nu}{m}\cdot E_{\nu m}\cdot\left(\frac{f}{f'}\right)^{\nu}\right]\cdot\left[\Omega_{k1}+\sum_{\nu=k-1}^{\infty}E_{\nu}\cdot\left(\frac{f}{f'}\right)^{\nu}\right]=$$

$$=\Omega^*_{k(m+1)}+\sum_{\nu=k-1}^{\infty}\frac{m+1+\nu}{m+1}\cdot E_{\nu(m+1)}\cdot\left(\frac{f}{f'}\right)^{\nu},$$

amelyből leolvasható az alábbi kongruencia:

(59) $$\Omega^*_{km}\cdot\Omega_{k1}\equiv\Omega^*_{k(m+1)} \bmod f^{k-1}.$$

Az (59)-ből, csakúgy, mint az (53)-ból az (54), származik az

$$\Omega_{k1}\cdot\frac{f}{f'}\equiv\frac{\Omega^*_{k(m+1)}}{\Omega^*_{km}}\cdot\frac{f}{f'} \bmod f^k,$$

illetőleg az

$$\varepsilon_k(a)\equiv a-\frac{\Omega^*_{k(m+1)}}{\Omega^*_{km}}\cdot\frac{f}{f'} \bmod f^k$$

kongruencia, amelyből a II. rész IV. tétele alapján szintén következik, hogy a

(61) $$\Phi^*_{km}(x)=x-\frac{\Omega^*_{k(m+1)}}{\Omega^*_{km}}\cdot\frac{f(x)}{f'(x)}$$

közelítőképlet konvergenciafoka is legalább k-val egyenlő. Azt, hogy a (61) konvergenciafoka pontosan k-val egyenlő, az (55)-nél követett eljárással szintén bebizonyíthatjuk.

Végezetül tekintsük a (61)-ből $k\to(k+1)$ helyettesítéssel származó

(62) $$\Phi^*_{(k+1)m}(x)=x-\frac{\Omega^*_{(k+1)(m+1)}}{\Omega^*_{(k+1)m}}\cdot\frac{f(x)}{f'(x)}$$

közelítőképletet, melynek konvergenciafoka tehát: $(k+1)$. Ez a képlet $m=-k$ esetben a *Kiss—Gornstein*-féle képletsorozatot eredményezi. A *Kiss—Gornstein*-féle képletsorozat főrésze ugyanis a (30) felhasználásával:

$$\frac{K_{k-1}}{K_k}\cdot f=\frac{\sum\limits_{\nu=0}^{k-2}\frac{k-1-\nu}{k-1}\cdot E^*_{\nu(k-1)}\cdot\left(\frac{f'}{f}\right)^{k-1-\nu}}{\sum\limits_{\nu=0}^{k-1}\frac{k-\nu}{k}\cdot E^*_{\nu k}\cdot\left(\frac{f'}{f}\right)^{k-\nu}}=$$

$$=\frac{\sum\limits_{\nu=0}^{k-1}\frac{k-1-\nu}{k-1}\cdot E^*_{\nu(k-1)}\cdot\left(\frac{f}{f'}\right)^{\nu}}{\sum\limits_{\nu=1}^{k-1}\frac{k-\nu}{k}\cdot E^*_{\nu k}\cdot\left(\frac{f}{f'}\right)^{\nu}}\cdot\frac{f}{f'},$$

ami viszont nem egyéb, (vö. (15*b*) és (58)), mint a (62) képlet főrésze, ha benne m helyett $(-k)$-t írunk.

IRODALOM

[1] EULER, L.: *Institutiones Calculi Differentialis* II., Cap. IX. — Opera omnia. Ser. I. Vol. X. 422—455.

[2] LAGRANGE, J. L.; Nouvelle méthode pour résoudre les équations litérales par le moyen des séries. *Mém Acad. Berl.* 24 (1768) Oeuvres 3, 25.

[3] BODEWIG, E.: Konvergenztypen und das Verhalten von Approximationen in der Nähe einer mehrfachen Wurzel einer Gleichung. *ZAMM* 29 (1949). 45.

[4] KISS, I.: Die theoretischen Grundlagen der Radizierung mit der Rechenmaschine, *Acta Technica Hung.* Tom. VIII. (1954) Fasc. 3—4.

[5] WUNDT, H.: Eine neue Methode der Periodogrammanalyse und ihre Anwendung auf die Reihe der Sonnenfleckenrelativzahlen, Basel, 1950 (Dissertation).

(Beérkezett: 1958. VIII. 13)

Agrártudományi Egyetem
Mezőgazdasági Gépészmérnöki Kar
Fizika—Matematika Tanszék

NEMESGÁZATOMOK KÖLCSÖNHATÁSI ENERGIÁJÁNAK ELMÉLETI MEGHATÁROZÁSA

Írta: GÁSPÁR REZSŐ

1. §. Bevezetés

AMDUR és munkatársai[1], valamint BERRY[2] vizsgálták semleges atomok és molekulák, köztük a nemesgázatomok egymáson való ütközését. A kísérletek során monoenergetikus ion nyalábot állítottak elő, melyet töltéskicserélődéssel neutralizáltak, miáltal olyan semleges atomnyalábot nyertek, melyek atomjainak kinetikus energiája az ionokéval megegyezett. Ezt a nyalábot nyugvó gázon átengedték, és a szórási keresztmetszetet határozták meg. Ebből könnyen meghatározhatók az atomok kölcsönhatási energiái. AMDUR és BERRY kísérletei jól kiegészítik egymást, mert az előbbi kisebb, az utóbbi nagyobb energiákkal végezte kísérleteit, és a kísérletek így más és más tartományt fednek be, a kölcsönhatási energiát különböző magtávolság értékeknél adják meg.

Semleges atomok potenciális energiáját és sűrűségeloszlását vizsgálva, megállapítottuk,[3] hogy azok alkalmasan választott koordinátarendszerben csaknem univerzális függvénnyel írhatók le, ha a „self-consistent field" módszer *Hartree*-féle közelítésre szorítkozunk. Ennek a megállapításnak alapján sikerült olyan univerzális potenciálfüggvényt megszerkeszteni, amelyik a *Fock*-féle potenciált igen jól közelíti, és amelyik bármely rendszámú atomra a rendszám puszta behelyettesítésével megadható.

Ebben a dolgozatban meg akarjuk mutatni, hogy az alapelv jól alkalmazható más esetekben is, és meg akarjuk határozni semleges nemesgázatomok kölcsönhatási energiáját a statisztikus atomfizika módszereinek felhasználásával.

2. §. A kölcsönhatási energia számítása Jensen szerint

A semleges nemesgázatomok kölcsönhatási energiái egészen nagy magtávolság értékektől eltekintve taszítók. Ennek a taszító potenciális energiának meghatározására a statisztikus atomfizika módszerei alkalmasak. JENSEN[4] sze-

[1] J. AMDUR és A. L. HARKNESS, J. Chem. Phys., **22**, 664, 1954 (He); I. AMDUR és E. A. MASON, J. Chem. Phys., **22**, 415, 1955 (Ne); ibid, **22**, 670, 1954 (Ar); ibid., **23**, 2268, 1955 (Kr).
[2] H. W. BERRY, Phys. Rev., **99**, 553, 1955 (Ne); ibid. **75**, 913, 1949, (Ar);
[3] R. GÁSPÁR, Acta Phys. Hung., 3 263, 1954;
[4] H. JENSEN, Zs. f. Phys., **77**, 722, 1932.

rint két nemesgázszerű elektronburokkal rendelkező atom vagy ion kölcsönhatási energiája első közelítésben

$$U = U_c + U_n + U_e + U_k + U_o + U_w, \tag{1}$$

ahol

$$U_c = (Z_1 - N_1)(Z_2 - N_2)e^2 | \delta, \tag{2a}$$

$$U_n = [Z_2\gamma_1(\delta) + Z_1\gamma_2(\delta)]e, \tag{2b}$$

$$U_e = -\frac{1}{2} e[N_2\gamma_1(\delta) + N_1\gamma_2(\delta) + \int \gamma_1\varrho_2 dv + \int \gamma_2\varrho_1 dv, \tag{2c}$$

$$U_k = \varkappa_k \int [(\varrho_1 + \varrho_2)^{5/3} - \varrho_1^{5/3} - \varrho_2^{5/3}] dv, \tag{2d}$$

$$U_o = -\varkappa_o \int [(\varrho_1 + \varrho_2)^{4/3} - \varrho_1^{4/3} - \varrho_2^{4/3}] dv, \tag{2e}$$

$$U_w = \int [W_D(\varrho_1 + \varrho_2) - W_D(\varrho_1) - W_D(\varrho_2)] dv. \tag{2f}$$

A (2) képletben Z_1 és N_1 ill. Z_2 és N_2 a két 1 és 2-vel jelzett atom (ion) rendszáma és elektronjainak száma, δ az atomok (ionok) magjainak távolsága, e az elemi töltés, ϱ_1 és ϱ_2 az atomok (ionok) töltéssűrűsége és $\gamma_i(r_i)r_i$ az iontöltéssel kisebbített magtöltés. (2*b*) az atommagoknak a másik atom (ion) elektronfelhőjével való kölcsönhatását, (2*c*) az elektronfelhők kölcsönhatását tekintetbe vevő potenciális energia tag, (2*d*) az elektronfelhők átfedése következtében beálló kinetikus energianövekedés, (2*e*) és (2*f*) pedig a kicserélődési és korrelációs energia megváltozása. $\varkappa_k = (3|10)(3\pi^2)^{2/3} e a_0$ és $\varkappa_0 = (3|4)(3|\pi)^{1/3} e^2$ állandók. a_0 a legkisebb hidrogénpálya sugara a *Bohr*-elmélet szerint. Az utolsó tagot GOMBÁS vezette be[5] és ez az elektronok közötti *Coulomb* kölcsönhatás korrelációs korrekcióját adja meg.

Semleges atomoknál $Z_1 = N_1$ és $Z_2 = N_2$ és így a pontszerű iontöltések hatását képviselő tagok, így pl. (2*a*) is, eltűnnek. Ha még ezen felül egyelőre a (2*e*) és (2*f*) tagoktól is eltekintünk, a semleges atomok kölcsönhatási energiáját első közelítésben az

$$\begin{aligned} U = \frac{1}{2} e\, [Z_2\gamma_1(\delta) + Z_1\gamma_2(\delta) + \int \gamma_1\varrho_2 dv + \int \gamma_2\varrho_1 dv] + \\ + \varkappa_k \int [(\varrho_1 + \varrho_2)^{5/3} - \varrho_1^{5/3} - \varrho_2^{5/3}]\, dv \end{aligned} \tag{3}$$

kifejezés adja meg. Szorítkozzunk továbbá a fenti közelítésnek megfelelően

[5] W. LENZ, Zs. f. Phys., 121, 523, 1943.

az eredeti THOMAS—FERMI féle megoldásra,[6] mely atomra a potenciális energiát a

$$V = \frac{Z \cdot e}{r} \varphi_0 = \frac{\gamma(r) r}{r}, \tag{4}$$

és a sűrűséget a

$$\varrho = \frac{Z}{4\pi\mu^3} \left(\frac{\varphi_0}{x} \right)^{3/2} \tag{5}$$

alakban adja meg. (4) és (5)-ben φ_0 a jól tabellázott *Fermi*-féle függvény[7] és

$$x = \frac{r}{\mu} \tag{6}$$

a

$$\mu = \frac{0{,}8853 a_0}{Z^{1/3}} \tag{7}$$

egységekben mért magtól való távolság. (4)-et és (5)-öt (3)-ba helyettesítve kapjuk:

$$U = \frac{Z^2}{\mu} f(x), \tag{8}$$

ahol az

$$\begin{aligned} f(x) = {} & e^2 \frac{\varphi_0(\delta_x)}{\delta_x} + \frac{1}{2\pi} \int \frac{\varphi_0(x_1)}{x_1} \left(\frac{\varphi_0(x_2)}{x_2} \right)^{3/2} d v_x + \\ & + \frac{\varkappa_k}{(4\pi)^{5/2} (0{,}8853 a_0)^2} \int \left\{ \left[\left(\frac{\varphi_0(x_1)}{x_1} \right)^{3/2} + \left(\frac{\varphi_0(x_2)}{x_2} \right)^{3/2} \right]^{5/3} - 2 \left(\frac{\varphi_0(x_1)}{x_1} \right)^{5/2} d v_x \right. \end{aligned} \tag{9}$$

függvény csak az x változón keresztül függ a Z rendszámtól. $\delta_x = \delta | \mu$ és $d v_x = d v | \mu^3$ a μ egységben mért magtávolság és az ugyanezen egységben mért térfogatelem.

A (8) és (9) formulák kiértékelése igen fáradságos feladat. Később megmutatjuk, hogy GOMBÁS[8] nyomán hogyan lehet a (2) formulákat úgy egyszerűsíteni, hogy azok kiértékelése könnyebben keresztülvihető legyen. A (8) és (9) formulák ellenőrzése azonban lehetséges indirekt úton, amely fizikai szempontból is mélyebb betekintést nyújt. (8) szerint $y = \frac{\mu}{Z^2} U$ az x változónak rendszámtól független univerzális függvénye. Ha tehát a kísérletileg

[6] Lásd pl. P. GOMBÁS: Statistische Theorie des Atoms und Ihre Anwendungen, Wien, Springer-Vlag, 1949., 41. o.

[7] l. c. P. GOMBÁS [6].

[8] P. GOMBÁS, Zs. f. Phys., **93**, 378, 1935.

meghatározott energiákat az (y, x) koordinátarendszerben ábrázoljuk, azok legalább közelítőleg össze kell hogy essenek. Az 1. ábrán feltüntettük a kísérleti görbéket abban a koordinátarendszerben, melyben univerzális lefutást kellene hogy mutassanak. Kis magtávolságértékeknél látszik is ilyen tendencia, nagyobbaknál nem. A 4. §.-ban részletesen fogunk ezekről még beszélni.

3. §. A kölcsönhatási energia számítása Gombás szerint

A kölcsönhatási energia (1), illetve (2*c*)—(2*d*) képletekkel megadott alakját GOMBÁS[8] tovább egyszerűsítette azáltal, hogy az U_e és U_k energiatagok számítását összevonta, és a *Thomas—Fermi* egyenlet felhasználásával egyszerűbb alakra hozta. Így sikerült a bonyolult kétcentrum integrálok helyett egycentrum integrálokat bevezetnie. Természetesen a problémával kapcsolatos numerikus számítások mennyisége is jelentősen csökkent.

Az $U_e + U_k$ számára a következő kifejezést kaptuk:

$$U_e + U_k = -[N_2\gamma_1(\delta) + N_2\gamma_2(\delta)]e + (\alpha_1 + \beta_1)\varrho_2(\delta) + \beta_2\varrho_1(\delta). \tag{10}$$

A (10) kifejezésben α_1, β_1 és β_2 állandók, melyeknek a jelentése a következő:

$$\alpha_i = 4\pi e \int_0^\infty \gamma_1(r) r^2 dr, \tag{11}$$

$$\beta_i = \frac{20\pi}{3} \varkappa_k \int_0^\infty [\varrho_i(r) r^2] dr.$$

Ismét csak semleges és egyforma atomok kölcsönhatására szorítkozva, melyekre $Z_1 = N_1$ és $Z_2 = N_2$ és $\beta_1 = \beta_2$, a kicserélődéstől és korrelációtól eltekintve a teljes kölcsönhatási energia

$$U = U_e + U_n + U_e + U_k = (\alpha_1 + 2\beta_1)\varrho_1(\delta). \tag{12}$$

Felhasználva a *Thomas—Fermi*-egyenlet semleges atomokra vonatkozó megoldását, (12)-t a

$$U\mu Z^{-2} = 3\left(\frac{\varphi_0}{\delta_x}\right)^{3/2} \int_0^\infty \varphi_0(x) x dx \tag{13}$$

alakban kapjuk meg.

(12)-t a *Lenz—Jensen*-módszer analitikus megoldásával is könnyen kiszámíthatjuk. GOMBÁS eredeti munkájában[8] tetszés szerinti atom-, ill. ionpárra elvégezte ezt. Mi itt csak az általa nyert eredményeket adjuk meg semleges atomok kölcsönhatására specializálva,

$$U\mu Z^{-2} = \left[\frac{8\pi}{\lambda^2 P} (6b_0 + 24b_1 + 120b_2 + 720b_3 + 5040b_4) + \right. \tag{14}$$
$$\left. + 405 \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/3} \frac{0{,}7386}{\lambda P^{4/3}} (1 + 12c_1 + 45c_1^2) \right] \frac{0{,}8853\lambda^3}{4\pi\varepsilon^3} \frac{e^{-\varepsilon\sqrt{\delta_x}}}{\delta_x^{3/2}} (1 + c_1\varepsilon\sqrt{\delta_x})^3,$$

amelyben

$$b_0 = 1, \quad b_1 = 1, \quad b_2 = \frac{4}{P}(27c_1^3 + 15c_1^2 + 3c_1), \tag{15}$$
$$b_3 = \frac{4}{P}(7c_1^3 + 3c_1^2) \quad \text{és} \quad b_4 = \frac{4}{P}c_1^3,$$

továbbá

$$P = 2[2 + 18c_1 + 72c_1^2 + 120c_1^3], \tag{16}$$
$$\lambda = 10{,}91, \quad c_1 = 0{,}265 \quad \varepsilon = (0{,}8853\lambda)^{1/2}.$$

A (14), (15) és (16) képletsort végig vizsgálva láthatjuk, hogy (13)-hoz hasonlóan, itt is a $U\mu Z^{-2}$ mennyiség δ_x-nek rendszámtól független függvénye.

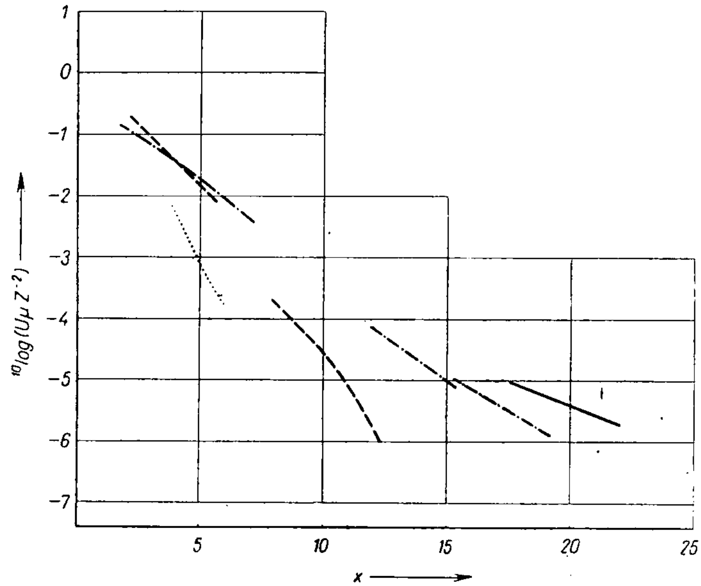
Természetesen nincs akadálya annak, hogy (12) kiszámítását, valamilyen más elektronsűrűséggel végezzük el. Így felhasználhatjuk a „self-consistent" módszerrel meghatározott HARTREE, illetve HARTREE—FOCK-féle sűrűségértékeket. Ezek egészen bizonyosan jó tájékoztató értéket adnak a kölcsönhatási energiára, de nem szabad elfelejteni, hogy ezek a sűrűségek, illetőleg a hozzájuk rendelhető potenciál nem tesz eleget a FERMI—THOMAS egyenletnek, s (10) és (11) bevezetésénél GOMBÁS ezt az egyenletet felhasználta. Végül említsük meg, hogy azokkal a nehézségekkel, melyek (10) és (11)-kifejezéseknek kicsiny magtávolság értékekre való alkalmazását kísérik, a szerző már egy előző munkájában foglalkozott.[9]

4. §. Az eredmények diszkussziója

Az 1. ábrán láthatjuk a nagyobb rendszámú nemesgázatomok kölcsönhatási energiájának kísérletileg meghatározott értékeit. Ordinátául a $^{10}\log(U\mu Z^{-2})$ mennyiséget és abszcisszául a δ_x mennyiséget, tehát az x egységben mért magtávolságértéket mértük fel. Teljesség kedvéért ebbe az ábrába felvettük a He-He kölcsönhatási energiát is, bár számításaink kifejezetten nagyobb rendszámú elemekre vonatkoznak, hiszen statisztikus módszerrel dolgoztunk, és a

[9] R. GÁSPÁR és P. CSAVINSZKY, Acta Phys. Hung., 5, 65, 1955.

He atom két elektronja nem teljesíti a statisztika alkalmazhatóságának a szokásos feltételeit. A He atomra pontozva, a Ne-ra vonalkázva, az Ar-ra eredményvonallal és végül a Kr-ra folytonos, de vonaldarabokkal megjelölt vonallal adjuk meg a kísérleti görbéket. A kisebb magtávolságnál látható görbedarabok BERRY[2] értékei a He görbéjét kivéve, melyek és a nagyobb magtávolság-



1. ábra

értékeknél szereplő görbedarabok AMDUR és munkatársai[1] mérési eredményeit reprezentáló közelítő analitikus függvényeknek felelnek meg. Így a Ne és Ar atomokra BERRY[2] a

$$V(r) = Ae^{-br} \tag{17}$$

alakot használja a

$$\left.\begin{array}{llll} \text{Ne} & A = 10{,}4 \cdot 10^{-9}\,\text{erg} & \text{és} & b = 4{,}25\ \text{Å}^{-1} \\ \text{Ar} & A = 21{,}9 \cdot 10^{-9}\,\text{erg} & \text{és} & b = 4{,}14\ \text{Å}^{-1} \end{array}\right\} \tag{17a}$$

paraméter értékekkel. Természetesen r-t angströmökben kell mérni. (17) a BERRY által vizsgált tartományban néhány százalékon belül reprezentálja a kísérleti görbébet. Az 1. ábrán a logaritmikus léptéknek megfelelően természetesen egyenes szakaszok felelnek meg nekik.

A He-He kölcsönhatási energiát az 1,27 Å-től a 2,30 Å-ig terjedő magtávolság tartományban AMDUR és HARKNESS[1] szerint jól leírja (17) az

$$\text{He} \quad A = 6{,}18 \cdot 10^{-10}\,\text{erg} \quad \text{és} \quad b = 4{,}55\ \text{Å}^{-1} \tag{18}$$

paraméter értékkel. Végül AMDUR és MASON[1] a Ne, Ar és Kr nemesgázokra nagyobb magtávolság értékeknél a következő potenciális energiaértékeket találták:

$$\text{(19)}\quad \begin{array}{lll} \text{Ne} & V(r)=5{,}00\cdot 10^{-10}\, r^{-9{,}99}\,\text{erg} & (1{,}76\,\text{Å} \leqq r \leqq 2{,}13\,\text{Å}), \\ \text{Ar} & V(r)=9{,}03\cdot 10^{-10}\, r^{-7{,}87}\,\text{erg} & (2{,}18\,\text{Å} \leqq r \leqq 2{,}98\,\text{Å}), \\ \text{Kr} & V(r)=2{,}55\cdot 10^{-10}\, r^{-5{,}42}\,\text{erg} & (2{,}42\,\text{Å} \leqq r \leqq 3{,}14\,\text{Å}). \end{array}$$

A fenti kísérletek nem nyújtanak felvilágosítást a magtól távolfekvő tartományokra vonatkozóan. Ezekre a tartományokra más jelenségekből azoknak elméleti értelmezésével kapcsolatban szokás levezetni potenciálértékeket. Így legtöbbször a gázok kompresszibilitásából, viszkozitásából és kristálytulajdonságokból vezetik le ezeket. MASON és RICE[10] vezették le így pl. az alábbi potenciálokat:

$$\text{(20)}\quad \begin{array}{lll} \text{Ne:} & V(r)=[73{,}4\, e^{-4{,}61r}-0{,}0869 r^{-6}]\, 10^{-10}\,\text{erg}, & (2{,}32\,\text{Å} \leqq r \leqq 3{,}19\,\text{Å}), \\ \text{Ar:} & V(r)=[153\, e^{-3{,}62r}-0{,}994\, r^{-6}]\, 10^{-10}\,\text{erg}, & (2{,}98\,\text{Å} \leqq r \leqq 4{,}83\,\text{Å}), \\ \text{Kr:} & V(r)=[5670 r^{-12}-2{,}28\, r^{-6}]\, 10^{-10}\,\text{erg}, & (3{,}4\,\text{Å} \leqq r \leqq 4{,}1\,\text{Å}), \end{array}$$

melyeket számításainkban részben mi is felhasználtunk.

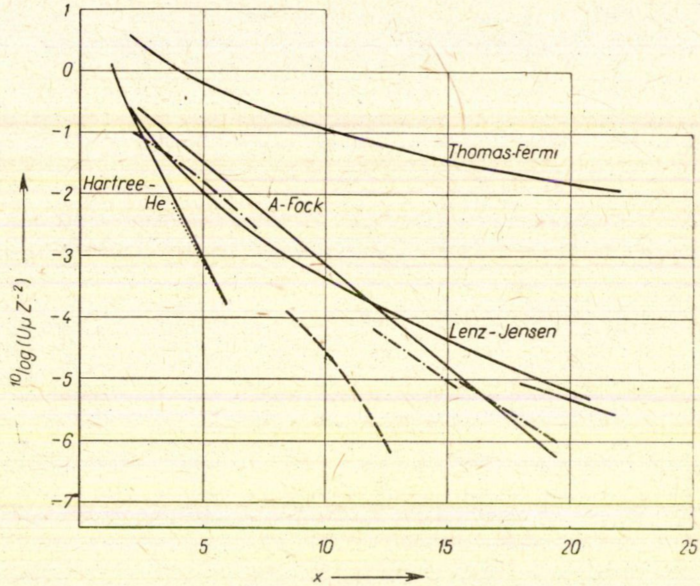
Az 1. ábrán felrajzolt kísérleti görbék jól láthatóan kisebb magtávolságértékeknél egymás közelében futnak, s az univerzális viselkedés abban mutatkozik meg, hogy a nagyobb rendszámú elemek kölcsönhatási görbéi a mérések hibahatárain belül együtt futnak. Egyetlen kivételt láthatunk csak. A helium atomok kölcsönhatási energiája az univerzális lefutású görbéknek csak a közelében fut. A különleges viselkedés okát abban kereshetjük, hogy a helium atomnak csak két elektronja van, s ez a kevés elektronszámú atom így kevésbé illik bele azokba a statisztikus atomelméleti megfontolásokba, melyeknek alapján az univerzális lefutásra vonatkozó megfontolásainkat végeztük.

Érdekes összehasonlítani a kölcsönhatási energiák viselkedését nagyobb magtávolságértékeknél. Szemmel láthatóan a kölcsönhatási energiák ebben a tartományban egyáltalán nem mutatnak univerzális lefutást. Ennek okát a következőkben találhatjuk meg. A statisztikus atomelmélet, THOMAS—FERMI közelítése az atommagtól távoli részeken igen rossz közelítése a hullámmechanikának, s így nagy magtávolságoknál az atomok kölcsönhatási energiája sem mutathatja azt a lefutást, amit a fenti közelítő megoldás alapján, azaz a THOMAS—FERMI megoldás alapján elvárhatunk.

A 2. ábrán a kísérletileg meghatározott görbéken kívül feltüntettünk néhány elméletileg kiszámítottat is. Ezek közül a THOMAS—FERMI elmélet

[10] E. A. MASON és W. E. RICE, J. Chem., Phys., 22, 843, 1954.

görbéje, különösen a nagy magtávolságú tartományban, magasan a kísérleti görbék felett megy. A *Thomas—Fermi*-féle atomok tehát sokkal jobban taszítják egymást, mint a valóságosak. Ennek oka természetesen az előbb már vázolt körülmény, ti. a *Thomas—Fermi*-féle atommodell sűrűsége az atommagtól távoli tartományokban jóval nagyobb, mint a hullámmechanikus atommodellé. Ezen a hibán segített JENSEN és LENZ. Az ő általuk bevezetett atommodell sűrűsége a magtól távoli tartományokban a hullámmechanikuséhoz hasonlóan viselkedik. Az ezzel a sűrűséggel számított kölcsönhatási energia különösen a belső tartományokban igen jó. Azt azonban, hogy nagy magtávolságérté-



2. *ábra*

keknél a LENZ—JENSEN modellel számított kölcsönhatási potenciál a kripton kölcsönhatási energiagörbéjének a közelében fut, véletlennek kell tekintenünk.

Feltüntettük végül a 2. ábrán két elem, a helium és az argon atomok azon kölcsönhatási energiáit, melyeket a „self-consistent" módszerrel nyert sűrűségeloszlások segítségével határoztunk meg. A heliumra D. R. HARTREE[11] által számított sűrűségeloszlást és az argonra a kicserélődés figyelembevételével D. R. HARTREE és W. HARTREE[12] által megadott sűrűségeloszlást használtuk fel. Szembetűnő, hogy mindkét számított görbe milyen jól egyezik a kísérletiekkel, s különösen érdekes, hogy a nagy magtávolságértékeknél is megmarad

11 D. R. HARTREE, Proc. Cambridge phil. Soc. **24**, 111 1928.

12 D. R. HARTREE és W. HARTREE, Proc. Roy. Soc., **166**, 450, 1938.

ez a jó megegyezés. Ez útóbbi tény is arra az általánosan ismert tényre utal, hogy a „self-consistent" módszerrel, de különösen a *Fock*-féle kicserélődési hatás alapján módosított módszerrel meghatározott sűrűségeloszlások az atommagtól távoli tartományokban is helyesen adják vissza az atom valóságos elektronsűrűségét.

Számításainkat mindvégig a GOMBÁS által bevezetett egyszerűsített modell alapján végeztük. GOMBÁS az egyszerűsítés során felhasználta a *Thomas—Fermi*-egyenletet, melyet a hullámmechanikai sűrűségek nem elégítenek ki. Ennek dacára, mint egy előző munkánkban [9] már rámutattunk, nincs okunk kételkedni a hullámmechanikai sűrűségekkel nyert eredmények realitásában. Az itt számított görbék is ezt a tényt húzzák alá.

Összefoglalás

Semleges nemesgázatomok kölcsönhatási energiáit több kísérleti munka tárgyalja. A statisztikus atomelmélet segítségével lehet egy olyan koordinátarendszert találni, melyben az atommaghoz közel eső tartományokban ezek a kölcsönhatási energiák jó közelítésben univerzális lefutásúak. A kölcsönhatási energia statisztikus, *Lenz—Jensen*-féle és „self-consistent field" atommodellek segítségével meghatározott közelítő értékeit is részletesen diszkutálja a dolgozat.

(Beérkezett: 1959. VII. 2.)

A Kossuth Lajos Tudományegyetem
Elméleti Fizikai Intézete,
Debrecen és
az MTA Elméleti Fizikai Kutatócsoportja,
Budapest

NÉHÁNY ÁLTALÁNOSABB MÓDSZER AZ EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEGYENLETEK ELMÉLETÉBEN ÉS A FÜGGVÉNYEGYENLETEK EGYES ÚJABB ALKALMAZÁSAI, I.*

Írta: ACZÉL JÁNOS

A függvényegyenletek elméletében — ellentétben pl. a differenciálegyenletek elméletével — kevés általános megoldási módszert, exisztencia- és unicitási tételt ismerünk. (Nem foglalkozunk itt a differenciál-, integrál- stb. egyenletekre való visszavezetéssel történő megoldási eljárásokkal.)

A jelen dolgozat első részében az egyváltozós és e változó két tetszőleges értékét tartalmazó függvényegyenletek hat típusára adok meg néhány ilyen eljárást és tételt. Ezek közül az I. 1. és 2. §-ban ismertetettek ismert függvényegyenletek megoldásának, a 3. és 4. §-ban ismertetettek a szerző által régebben tárgyalt speciális függvényegyenletek megoldási eljárásának általánosításaként keletkeztek. Figyelemre méltó, hogy az egyváltozós függvényegyenletek megoldhatóságára vonatkozó feltételek itt kétváltozós függvényegyenletek alakjában jelentkeznek, ami további érdekes perspektívát mutat. E feltételeket régebbi dolgozatokban bebizonyított tételek felhasználásával bizonyítjuk. Az 5. és 6. §-ban további újabb eljárások alkalmazásával érünk célt, melyek bizonyos (általában nem lineáris) egyenletrendszerek megoldásán alapszanak, és itt a megfelelő tételek éppen ezen egyenletrendszerek megoldhatóságában jelölik meg az illető függvényegyenlet az adott módszerrel való megoldhatósági feltételeit. Többek között megkapjuk az 5. § elején az

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)\cos y$$

függvényegyenlet egyszerű megoldását:

$$f(x)=a\cos x+b\sin x,$$

melyet St. Kaczmarz előzőleg nehezebb valós függvénytani eszközökkel oldott meg.

* A jelen dolgozat a bevezetéstől és néhány apróbb változtatástól eltekintve magyar nyelvű megfelelője a szerzőtől az Uszpechi Mat. Nauk. 11. kötete 3. füzetében a 3—68. oldalon megjelent orosz nyelvű cikknek.

A következő függvényegyenleteket fogjuk részletesebben tárgyalni:

$$(1)\qquad f(x+y)=G[f(x),f(y)] \qquad (\text{I. 1. §}),$$

$$(2)\qquad f\left(\frac{x+y}{2}\right)=G[f(x),f(y)] \qquad (\text{I. 2. §}),$$

$$\left.\begin{array}{ll}(3) & f(ax+by+c)=G[f(x),f(y)]\\ (3') & f[F(x,y)]=G[f(x),f(y)]\end{array}\right\} \qquad (\text{I. 3. §}),$$

$$(4)\qquad f(x+y)=F[f(x),y] \qquad (\text{I. 4. §}),$$

$$(5)\qquad H[f(x+y),f(x-y),f(x),x,y]=0 \qquad (\text{I. 5. §}),$$

$$(6)\qquad H[f(x+y),f(x-y),f(x),f(y),x,y]=0 \qquad (\text{I. 6. §}),$$

de a még általánosabb

$$f(ax+by+c)=G[f(x),f(y),x,y]$$

és

$$f[F(x,y)]=G[f(x),x,y]$$

függvényegyenletek megoldására is vázolunk eljárásokat.

Amint látjuk, egyenleteink ismert függvényegyenleteknek néha közvetlen, néha azonban eléggé messzemenő általánosításai.

Az I. 1., 2., 3. §-ban ismertetett eljárások a megoldás folytonosságának, monotonitásának feltételezése mellett oldják meg a szóban forgó függvényegyenletet. A 4., 5. és 6. § eljárásai (a 6. § harmadik eljárása kivételével) és tételei viszont mindennemű folytonossági, monotonitási, sőt mérhetőségi feltételek nélkül vezetnek a tárgyalt függvényegyenlet megoldására.

Függvényegyenletek különböző alkalmazásával az irodalomban számos dolgozat foglalkozik, a szerző is megadott régebbi dolgozataiban néhány további ilyen alkalmazást. A jelen dolgozat második része újabb ilyen alkalmazásokat tárgyal, amennyiben a matematika különböző részeiből (geometriai csoportelmélet, vektoralgebra, nem-euklidesi geometria, valószínűségszámítás stb.) további hat olyan problémát ad meg, melyek megoldása függvényegyenletek megoldása révén történik. Ezen egyenletek részben egyváltozós, részben többváltozós függvényegyenletek (vektor-, mátrixegyenletek). Az előbbiek a dolgozat első részében tárgyalt típusokhoz tartoznak, az utóbbiak ilyeneknek, vagy az első részben szereplő többváltozós feltételi egyenleteknek közvetlen általánosításai.

A II. 1. §-ban a (3) típusú egyenletekre visszavezethető

$$f\left(\frac{1-x^2-y^2}{2xy}\right)=f\left(\frac{1+x^2-y^2}{2x}\right)+f\left(\frac{1-x^2+y^2}{2y}\right)$$

függvényegyenlet megoldása révén kimutatjuk, hogy az elliptikus, illetve hiperbolikus „mozgásokkal" („ortogonális" transzformációkkal) szemben invariáns és egy egyenesen additív távolságdefiníció lényegében csak az elliptikus, illetve hiperbolikus geometriában szokásos módon adható meg.

A II. 2. §-ban az (5) típusú

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)\cos y \tag{7}$$

függvényegyenlet szerepel, melynek megoldása révén arra az eredményre jutunk, hogy a vektorösszeadásra disztributív művelet homogén térben lényegében (egy-egy multiplikatív konstanstól eltekintve) csak a szokásos skaláris, illetve vektoriális szorzás lehet. Az eredményből egyébként könnyen levezethetők hasonló tételek a kvaterniószorzásra vonatkozóan.

A II. 3. §-ban először a

$$F[F(x,s),t]=F[x,g(s,t)] \tag{8}$$

n-dimenziós vektor-függvényegyenletet (F, x n-dimenziós vektorok, g, s, t egy-egy valós paraméter) oldjuk meg. (Ez általánosítása egy az I. 4. §-ban szereplő függvényegyenletnek.) — Az eredmény geometriai csoportelméleti értelmezése a következő: n-dimenziós egy paraméteres transzformáció-seregben mindig bevezethető additív paraméter és akkor (egy egyszerű megoldhatósági feltétel teljesülése esetén) a sereg egy koordinátatranszformációval mindig átvihető egy koordinátapárhuzamos eltolás-seregbe. Ezt eddig csak differenciálhatósági feltételek mellett mutatták ki. A már additív paraméterrel felírt

$$F[F(x,u),v]=F(x,u+v)$$

egyenlet a stacionárius mozgásintegrálokra (és homogén láncreakciók generátorfüggvényeire) is jellemző, míg nem-stacionárius mozgásoknál (és inhomogén láncreakciók generátorfüggvényeinél) az

$$F[F(x,t,u),u,v]=F(x,t,v)$$

egyenlet lép a helyébe, melyet szintén megoldunk a II. 3. §-ban.

A II. 4. §-ban a (8) általánosításaként az

$$F[F(x,S),T]=F[x,G(S,T)]$$

(F, x n-dimenziós vektorok, G, S és T $m(\leqq n)$ dimenziós paraméterek) egyenletet oldjuk meg a paraméterekre vonatkozó adott $G(S,T)$ kompozíciós szabály mellett. Az eredmény analóg az egy additív paraméter esetén találttal.

A II. 5. §-ban azt vizsgáljuk, mi annak a valószínűsége, hogy egy esemény egy (s,t) időszakban k-szor következik be, csak azt tételezve fel, hogy az idegen időszakaszokban bekövetkező eseményszámok függetlenek egymástól, és hogy nincs kizárva, hogy az esemény egyszer sem fordul elő.

Ennek $p_k(t, u)\ (a \leqq t \leqq u \leqq b)$ valószinűségére a

$$p_k(t, u) = e^{\sum\limits_{n=1}^{\infty} [f_n(t) - f_n(u)]} \sum_{\substack{r_1+2r_2+\cdots+kr_k=k \\ r_j \geqq 0}} \prod_{j=1}^{k} \frac{[f_j(u)-f_j(t)]^{r_j}}{r_j!} \geqq 0$$

képletet (összetett inhomogén Poisson-eloszlás) kapjuk a

$$p_n(s, u) = \sum_{k=0}^{n} p_{n-k}(s, t)\, p_k(t, u) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n(t, u) = 1$$

$$[s < t < u, \quad p_n(t, u) \geqq 0, \quad p_0(a, b) \neq 0]$$

végtelen függvényegyenletrendszer megoldása révén. (Ennek egyenletei a homogén esetben az (1) típusúakra redukálható

$$p_0(t+u) = p_0(t)\, p_0(u)$$

$$p_1(t+u) = p_1(t)\, p_0(u) + p_0(t)\, p_1(u)$$

$$p_2(t+u) = p_2(t)\, p_0(u) + p_1(t)\, p_1(u) + p_0(t)\, p_2(u)$$

....stb.

függvényegyenletrendszerbe mennek át.) Hasonló eredményeket előzőleg ritkasági, integrálhatósági feltételek mellett bizonyítottak be.

Végül a II. 6.§-ban a fentivel rokon problémát vizsgálunk: az $E_1, E_2, \ldots, E_n$ lehetséges állapotok közti átmenetek $p_{ij}(s, t)\ (s < t;\ i, j = 1, 2, \ldots, n)$ valószínűségei nyilván a

(9) $$p_{ij}(s, n) = \sum_{k=1}^{n} p_{ik}(s, t)\, p_{kj}(t, u) \qquad (s<t<u; i, j=1, 2, \ldots, n)$$

(10) $$\sum_{j=1}^{n} p_{ij}(t, u) = 1 \qquad (t < u;\ i = 1, 2, \ldots, n)$$

$[p_{ij}(s, t) \geqq 0, |p_{ij}| \neq 0]$ függvényegyenletrendszernek tesznek eleget, melyek közül a (9) egyenletek a

$$P(s, u) = P(s, t)\, P(t, u)$$

matrixegyenletbe foglalhatók össze, mely ugyancsak az (1) típusú

$$p(t+u) = p(t)\, p(u)$$

függvényegyenlet inhomogén matrix-általánosítása. Kimutatjuk, hogy e matrixegyenlet legáltalánosabb reguláris megoldása

$$P(t, u) = \Pi(t)^{-1}\, \Pi(u)$$

alakú, ahol $\Pi(v)$ a $\pi_{ij}(v)$ tetszőleges függvényekből alkotott reguláris matrix ($|\pi_{ij}| \neq 0$), melynek $\Pi(v)^{-1}$ az inverze. (Röviden a szinguláris esetet is tárgyaljuk.) A feltételeinket kielégítő átmeneti valószínűségfüggvények:

$$p_{ij}(t, u) = \sum_{k=1}^{n} \Pi_{ki}(t)\, \pi_{kj}(u) \geqq 0 \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n)$$

($\Pi_{ki}(t)$ a $\pi_{ki}(t)$ algebrai minora osztva a $|\pi_{ij}(t)|$ determinánssal), ahol (10)-ből még a

$$\sum_{j=1}^{n} \pi_{kj}(t) = \text{konstans} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

megszorítás következik. Ez tartalmazza az összetett inhomogén Poisson-eloszlásra vonatkozó fenti eredményt is. — Befejezésül említés történik az (1) függvényegyenletet általánosító

$$f(x, z) = G[f(x, y), f(y, z)]$$

függvényegyenlet és még két általános függvényegyenlet megoldásáról általános terekben.

Tételeinket néhol az itt megfogalmazottnál valamivel általánosabb alakban bizonyítjuk be.

A dolgozat lényegesebb része a II. rész. Az I. rész részben ennek bevezetéséül szolgál és magában csak azért lehet érdekes, mert még ilyen egyszerű módszerek tárgyalása sem található meg az eddigi irodalomban.

I. ÁLTALÁNOS MÓDSZEREK[1]

I. 1. § $f(x+y) = G[f(x), f(y)]$

Az

(1) $$f(x+y) = G[f(x), f(y)]$$

függvényegyenlet a *Cauchy*-féle ([2])

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \qquad (f(x) = ax)$$

és

$$f(x+y) = f(x) f(y) \qquad (f(x) = a^x)$$

egyenletek általánosításaként tárgyalható.

Például a

(11) $$f(x+y) = f(x) + f(y) + f(x) f(y)$$

[1] Vö. [35]

függvényegyenletből

$$f(x+y+z)=f(x)+f(y)+f(z)+f(x)f(y)+f(x)f(z)+f(y)f(z)+$$
$$+f(x)f(y)f(z)$$

és így tovább.

(12)
$$f(2x)=2f(x)+f(x)^2=[1+f(x)]^2-1,$$
$$f(3x)=3f(x)+3f(x)^2+f(x)^3=[1+f(x)]^3-1,$$

általában

$$f(nx)=[1+f(x)]^n-1,$$

mert ha ez egy $n=k$-ra teljesül:

$$f(kx)=[1+f(x)]^k-1,$$

akkor

$$f[(k+1)x]=f(kx+x)=f(x)+f(kx)+f(x)f(kx)=$$
$$=f(x)+[1+f(x)]^k-1+f(x)[1+f(x)]^k-f(x)=$$
$$=[1+f(x)]^{k+1}-1. \qquad \text{qu. e. d.}$$

Így $x=1$, illetve $x=\frac{m}{n}$ helyettesítéssel az $f(1)=c$ jelölést használva

$$f(n)=(1+c)^n-1, \quad f(m)=(1+c)^m-1,$$

ill.

$$(1+c)^m-1=f\left(n\frac{m}{n}\right)=\left[1+f\left(\frac{m}{n}\right)\right]^n-1,$$

tehát

$$f\left(\frac{m}{n}\right)=(1+c)^{\frac{m}{n}}-1.$$

(Többértékűség esetén mindig a pozitív gyököt kell venni, mert (12)-ből $1+f(x)=\left[1+f\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2\geqq 0$.) Pozitív irracionális x-ekre, $f(x)$ folytonosságát feltételezve határátmenettel azt kapjuk, hogy

$$f(x)=(1+c)^x-1=k^x-1 \qquad (k=1+c).$$

Másrészt, ha $f(x)$ értelmezési tartománya a 0-t, illetve a negatív számokat is tartalmazza, akkor az eredeti (11) egyenletbe $x=0$-t helyettesítve

$$f(y)=f(0)+f(y)+f(0)f(y),$$

tehát vagy $f(y)\equiv-1$, vagy

$$f(0)=0$$

és ugyancsak (11)-be $y = -x$-et téve,

$$0 = f(x-x) = f(x) + f(-x) + f(x)f(-x) =$$
$$= k^x - 1 + f(-x) + (k^x - 1)f(-x),$$

tehát

$$f(-x) = k^{-x} - 1.$$

Így minden valós x-re (11)-ből

$$f(x) = k^x - 1 \quad \text{vagy} \quad f(x) \equiv -1$$

következik. Másrészt ezek a függvények valóban ki is elégítik a (11) függvényegyenletet:

$$-1 = -1 - 1 + (-1)(-1),$$

ill.

$$f(x) + f(y) + f(x)f(y) = k^x - 1 + k^y - 1 + (k^x - 1)(k^y - 1) =$$
$$= k^x + k^y - 2 + k^{x+y} - k^x - k^y + 1 = k^{x+y} - 1 = f(x+y).$$

Ezzel bebizonyítottuk, hogy a (11) függvényegyenletnek legáltalánosabb folytonos megoldásai $f(x) \equiv -1$ és

$$f(x) = k^x - 1,$$

és így az utóbbi a legáltalánosabb (folytonos és) szigorúan monoton megoldás.

Ez a *megoldási eljárás* általában is alkalmazható az (1) típusú függvényegyenletek megoldására:

$$f(x+y) = G[f(x), f(y)], \tag{1}$$
$$f(2x) = G[f(x), f(x)] = G_2[f(x)],$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f(nx) = G\{f(x), f[(n-1)x]\} = G\{f(x), G_{n-1}[f(x)]\} = G_n[f(x)].$$

Ebből $f(1) = c$ jelöléssel $x = 1$, ill. $x = \frac{m}{n}$ helyettesítés után

$$f(n) = G_n(c), \quad f\left(\frac{m}{n}\right) = G_n^{-1}[G_m(c)],$$

ahol $G_n^{-1}(x)$ a G_n függvény inverz függvénye. Folytonos f esetén határátmenettel minden pozitív irracionális x-re is megkaphatjuk $f(x)$ értékét:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(r_n)$$

ahol $\{r_n\}$ racionális számoknak egy x-hez tartó sorozata.

Ha a 0 ill. a negatív számok is $f(x)$ értelmezési tartományához tartoznak, akkor $f(0)$ az

$$f(0) = G[f(0), f(0)]$$

egyenletből (ez nem lehet azonosság), $f(-x)$ az

$$f(0)=G[f(x), f(-x)]$$

egyenletből határozható meg.

Itt is, a következőkben is, behelyettesítéssel győződhetünk meg róla, hogy a kapott megoldás eleget is tesz-e az eredeti egyenletnek, vagy még specializálni kell, vagy esetleg egyáltalán nincs (nem triviális) megoldás.

Arra, hogy egy (1) típusú függvényegyenletnek mikor létezik (folytonos, szigorúan monoton) megoldása, tehát, hogy a fenti módszer mikor vezet el a függvényegyenlet megoldására, azonnal kapunk egy szükséges feltételt, ha (1)-be $(x+y)$ és z, illetve x és $(y+z)$-t helyettesítünk:

$$f[(x+y)+z]=G[f(x+y), f(z)]=G\{G[f(x), f(y)], f(z)\},$$

$$f[x+(y+z)]=G[f(x), f(y+z)]=G\{f(x), G[f(y), f(z)]\}.$$

Tehát $f(x)=s, f(y)=t, f(z)=u$ jelöléssel az (1) egyenletnél folytonos és szigorúan monoton megoldás létezésének egyik szükséges feltételét

$$G[G(s,t), u]=G[s, G(t,u)] \tag{13}$$

alakban kaptuk. Másrészt a fenti helyettesítéssel azonnal adódik (1)-ből, hogy

$$G(s,t)=f[f^{-1}(s)+f^{-1}(t)],$$

tehát az (1) függvényegyenlet megoldhatósága nyilván azt jelenti, hogy létezik olyan folytonos és szigorúan monoton $f(x)$ függvény, amellyel $G(s,t)$ így állítható elő. És ez adja egyúttal mindjárt a folytonos és szigorúan monoton megoldás létezésének másik szükséges feltételét: mivel $f(x)$-et folytonosnak és szigorúan monotonnak kívántuk, ezért G-nek is folytonosnak és mindkét változójában szigorúan növekvőnek kell lennie.

A következő, a [16] dolgozatban bebizonyított tétel segítségével megmutatjuk, hogy e szükséges feltételek elégségesek is:

1°. TÉTEL: *Ha* $G(t,u)$ $[t, u, G(t,u) \in \langle a, b \rangle]$ *folytonos és mindkét változójában szigorúan növekvő kétváltozós függvény, amely eleget tesz a* (13) *függvényegyenletnek, akkor, és csak akkor létezik olyan folytonos és szigorúan monoton* $g(t)$ *függvény, amellyel* $G(t,u)$ *így állítható elő:*

$$G(t,u)=g^{-1}[g(t)+g(u)].$$

Ha itt még a $g(t)=x, g(u)=y, t=g^{-1}(x)=f(x), u=f(y)$ jelöléssel élünk, akkor teljesen *bebizonyítottuk* a következő tétel *első (exisztencia) állítását:*

1. TÉTEL: *Az (1) függvényegyenletnek akkor és csak akkor létezik folytonos és szigorúan monoton megoldása, ha $G(t, u)$ folytonos és mindkét változójában növekvő, továbbá eleget tesz a*

$$G[G(s, t), u] = G[s, G(t, u)] \tag{13}$$

(asszociativitási) függvényegyenletnek.

Ha $f(x)$ ilyen megoldása (1)-nek, akkor minden

$$h(x) = f(ax)$$

is megoldás és más mérhető megoldás nincs. (Vö. [8]-cal is.)

A második (unicitási) állítást így bizonyítjuk:

Ha

$$f(x+y) = G[f(x), f(y)], \quad G(t, u) = f[f^{-1}(t) + f^{-1}(u)]$$

és

$$h(x+y) = G[h(x), h(y)] = f[f^{-1}h(x) + f^{-1}h(y)],$$

akkor

$$f^{-1}h(x+y) = f^{-1}h(x) + f^{-1}h(y),$$

vagyis $f^{-1}h(x) = \varphi(x)$ jelöléssel

$$\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$$

tehát ([2]):

$$\varphi(x) = ax, \quad h(x) = f(ax) \qquad \text{qu. e. d.}$$

További *példák* eljárásunkra:

$$f(x+y) = \frac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)} \qquad \text{MEGOLDÁS: } f(x) = \operatorname{tg} ax \quad ([8], [32] \text{ vö. } [33]),$$

$$f(x+y) = \frac{f(x)+f(y)}{1+\frac{f(x)f(y)}{c^2}} \qquad \text{MEGOLDÁS: } f(x) = c \operatorname{th} ax \quad ([36]),$$

és

$$f(x+y) = f(x)^{\ln f(y)}, \; (f(x)>0) \quad \text{MEGOLDÁS: } f(x) = e^{a^x}. \tag{14}$$

A $G(t, u) = \dfrac{t+u}{1-tu}$, $G(t, u) = \dfrac{t+u}{1+\dfrac{tu}{c^2}}$, $G(t, u) = t^{\ln u}$ függvények eleget tesznek az 1. tétel feltételeinek (folytonosság, szigorú monotonitás és (13) asszociativitás), amiből következik függvényegyenleteink megoldhatósága.

A (14) egyenlet megoldását részletezve:

$$f(2x) = f(x)^{\ln f(x)} = e^{[\ln f(x)]^2}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$f(nx) = e^{[\ln f(x)]^n}$$

és $f(1)=c$, $\ln c=a$ jelöléssel

$$f(n)=e^{a^n}$$

$$e^{a^m}=f\left(n\frac{m}{n}\right)=e^{\left[\ln f\left(\frac{m}{n}\right)\right]^n}, \quad f\left(\frac{m}{n}\right)=\exp a^{\frac{m}{n}}.$$

Határátmenettel:

$$f(x)=e^{a^x}$$

minden pozitív valós x-re.

(14)-be $y=0$-t helyettesítve

$$f(x)=f(x)^{\ln f(0)},$$

amiből vagy $f(x)\equiv 1$, vagy

$$\ln f(0)=1, \quad f(0)=e.$$

Hasonlóképpen $y=-x$-et helyettesítve (14)-be:

$$e=f(0)=f(x)^{\ln f(-x)}=e^{a^x \ln f(-x)}, \quad f(-x)=e^{a^{-x}}.$$

Tehát (14) általános folytonos megoldása $f(x)\equiv 1$-en kívül

$$f(x)=e^{a^x},$$

mert ez valóban ki is elégíti (14)-t:

$$f(x)^{\ln f(y)}=\left(e^{a^x}\right)^{a^y}=e^{a^{x+y}}=f(x+y).$$

Hasonló módszerekkel oldhatók meg az általánosabb

$$f(x+y)=G[f(x), f(y), x, y],$$

sőt az

$$f(x+y)=G[f(x-y), f(x), f(y), x, y]$$

típusú függvényegyenletek is. — Ezekre az I. 6. §-ban még visszatérünk

I. 2. § $f\left(\frac{x+y}{2}\right)=G[f(x), f(y)]$

A

(2) $$f\left(\frac{x+y}{2}\right)=G[f(x), f(y)]$$

függvényegyenlet a *Jensen*-féle ([5])

(15) $$f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{f(x)+f(y)}{2}$$

egyenlet általánosításaként tárgyalható.

E (15) egyenletet a következőképpen vezethetjük vissza (1) típusú egyenletre:

(15)-ben x helyébe $(x+y)$-t, y helyébe 0-t helyettesítve

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{f(x+y)+f(0)}{2}=\frac{f(x+y)+a}{2},$$

[itt $a=f(0)$ nem határozható meg $x=y=0$ helyettesítéssel, mert az $f(0)=$ $=f(0)$-t adna], és ezt (15)-tel összehasonlítva azt kapjuk, hogy

$$f(x+y)=f(x)+f(y)-a.$$

Ez már (1) típusú egyenlet és a $\varphi(x)=f(x)-a$ helyettesítéssel a *Cauchy*-féle ([2])

$$\varphi(x+y)=\varphi(x)+\varphi(y)$$

függvényegyenletbe megy át:

$$\varphi(x)=cx, \quad f(x)=cx+a,$$

és ez valóban kielégíti (15)-öt:

$$c\frac{x+y}{2}+a=\frac{(cx+a)+(cy+a)}{2}.$$

De megoldhatjuk a (15) függvényegyenletet közvetlenül is, pl. $0\leqq x\leqq 1$-re: Az $f(0)=a$, $f(1)=b$ jelöléssel (15)-ben $x=0$, $y=1$-et, majd $x=0$, $y=\frac{1}{2}$, ill. $x=\frac{1}{2}$, $y=1$-et téve

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{a+b}{2},$$

$$f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{a+\frac{a+b}{2}}{2}=\frac{3a+b}{4}=a+\frac{1}{4}(b-a),$$

$$f\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{\frac{a+b}{2}+b}{2}=\frac{a+3b}{4}=a+\frac{3}{4}(b-a).$$

Általában is igaz, hogy (a rövidebb $b-a=c$ jelöléssel)

$$f\left(\frac{m}{2^n}\right)=a+\frac{m}{2^n}(b-a)=c\frac{m}{2^n}+a.$$

Ha ugyanis ezt n-re (2^n nevezőjű törtekre) már bizonyítottnak vesszük, akkor 2^{n+1} nevezőjű törteknél páros számlálóra természetesen

$$f\left(\frac{2m}{2^{n+1}}\right)=f\left(\frac{m}{2^n}\right)=c\frac{m}{2^n}+a=c\frac{2m}{2^{n+1}}+a.$$

Páratlan számlálójú törteknél viszont (15)-be $x=\frac{m}{2^n}$, $y=\frac{m+1}{2^n}$-et helyettesítve kapjuk, hogy

$$f\left(\frac{2m+1}{2^{n+1}}\right)=f\left(\frac{\frac{m}{2^n}+\frac{m+1}{2^n}}{2}\right)=\frac{c\frac{m}{2^n}+a+c\frac{m+1}{2^n}+a}{2}=c\frac{2m+1}{2^{n+1}}+a.$$

[Vagy másképp: Ha $k\leqq 2^n$

$$f\left(\frac{k}{2^{n+1}}\right)=f\left(\frac{0+\frac{k}{2^n}}{2}\right)=\frac{f(0)+f\left(\frac{k}{2^n}\right)}{2}=\frac{a+c\frac{k}{2^n}+a}{2}=c\frac{k}{2^{n+1}}+a$$

Ha pedig $k\geqq 2^n$

$$f\left(\frac{k}{2^{n+1}}\right)=f\left(\frac{\frac{k-2^n}{2^n}+1}{2}\right)=\frac{f\left(\frac{k-2^n}{2^n}\right)+f(1)}{2}=$$

$$=\frac{(b-a)\left(\frac{k-2^n}{2^n}\right)+a+b}{2}=c\frac{k}{2^{n+1}}+a\Bigg].$$

Nem diadikus x-ekre határátmenettel

$$f(x)=cx+a.$$

A [0, 1] intervallumon kívülre is könnyen kiterjeszthető a megoldás, mely megegyezik az előbb találttal.

Ezek a *megoldási eljárások* általában is alkalmazhatók a (2) típusú függvényegyenletekre:

1. A (2) egyenletbe x helyébe $(x+y)$-t, y helyébe 0-t téve és az így kapott

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)=G[f(x+y),a]$$

egyenletet (2)-vel összehasonlítva azt az (1) típusú

$$G[f(x+y),a]=G[f(x),f(y)]$$

egyenletre tudjuk visszavezetni. [Itt $f(0)=a$ nem határozható meg $a=G(a, a)$-ból, mert $x\equiv G(x, x)$.]

2a) A

$$f(0)=a, \quad f(1)=b,$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=G(a, b),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$f\left(\frac{2m+1}{2^{n+1}}\right)=G\left[f\left(\frac{m}{2^n}\right), f\left(\frac{m+1}{2^n}\right)\right.$$

egyenletekkel rekurzíve meghatározzuk $f(x)$-et minden diadikus tört $x=\frac{m}{2^n}$ helyen.

2b) Egy másik hasonló rekurzív eljárás:

$$f(0)=a, \quad f(1)=b,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$f\left(\frac{k}{2^{n+1}}\right)=G\left[a, f\left(\frac{k}{2^n}\right)\right], \quad \text{ha} \quad k\leqq 2^n,$$

$$f\left(\frac{k}{2^{n+1}}\right)=G\left[f\left(\frac{k-2^n}{2^n}\right), b\right], \quad \text{ha} \quad k\geqq 2^n.$$

Nem-diadikus x-ekre

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} f(d_n),$$

ahol $\{d_n\}$ diadikus törteknek egy x-hez tartó sorozata és így tovább. $x<0$ és $x>1$-re az $a=G[f(x), f(-x)]$, $b=G[f(x), f(2-x)]$ képletekből határozható meg $f(x)$ értéke.

A (2) egyenlet folytonos és szigorúan monoton megoldásának létezésére $G(t, u)$ folytonosságán és növekedésén kívül további szükséges feltétel itt úgy adódik, hogy (2)-be $\frac{x+y}{2}$ és z-t, illetve $\frac{x+z}{2}$ és $\frac{z+y}{2}$-t helyettesítünk:

$$f\left(\frac{\frac{x+y}{2}+z}{2}\right)=G\left[f\left(\frac{x+y}{2}\right), f(z)\right]=G\{G[f(x), f(y)], f(z)\},$$

$$f\left(\frac{\frac{x+z}{2}+\frac{z+y}{2}}{2}\right)=G\left[f\left(\frac{x+z}{2}\right), f\left(\frac{z+y}{2}\right)\right]=G\{G[f(x), f(z)], G[f(z), f(y)]\},$$

tehát a megoldás létezéséhez szükséges a

$$(16) \qquad G[G(s,t),u]=G[G(s,u),\ G(u,t)]$$

feltétel teljesülése is (ferde autodisztributivitás).

Itt (2)-ből azt látjuk, hogy folytonos és szigorúan monoton megoldás létezése azt jelenti, hogy van olyan folytonos és szigorúan monoton $f(x)$ függvény, amellyel a G függvény a

$$G(s,t)=f\left(\frac{f^{-1}(s)+f^{-1}(t)}{2}\right)$$

alakban állítható elő.

Hogy a fenti szükséges feltételek elégségesek is, azt Cz. RYLL-NARDEWSKI következő tétele bizonyítja ([19]):

2_1°. TÉTEL: *Ha $G(t,u)$ $[t,u\in\langle a,b\rangle]$ folytonos és szigorúan növekvő kétváltozós függvény, amely eleget tesz a* (16) *függvényegyenleteknek, akkor és csak akkor látszik olyan folytonos és szigorúan monoton $g(t)$ függvény, amellyel G a*

$$G(t,u)=g^{-1}\left(\frac{g(t)+g(u)}{2}\right)$$

alakban állítható elő.

(Vö. [20]-szal is; $G(t,u)$ folytonosságának feltétele még enyhíthető egy egyenesen való folytonossággá.)

Az $x=g(t)$, $y=g(u)$, $t=g^{-1}(x)=f(x)$, $u=f(y)$ jelöléssel kapjuk a következő tétel első állítását:

2_1. TÉTEL: *A* (2) *függvényegyenletnek akkor és csak akkor van folytonos és szigorúan monoton megoldása, ha $G(t,u)$ folytonos, növekvő és eleget tesz a*

$$(16) \qquad G[G(s,t),u]=G[G(s,u),\ G(u,t)]$$

függvényegyenletnek (ferde autodisztributivitás).

Ha $f(x)$ ilyen megoldása (2)*-nek, akkor minden*

$$h(x)=f(cx+a)$$

is megoldás és más mérhető megoldás nincs is.

A második, unicitási állítást megint így bizonyítjuk:

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)=G[f(x),\ f(y)],\qquad G(t,u)=f\left(\frac{f^{-1}(t)+f^{-1}(u)}{2}\right)$$

$$h\left(\frac{x+y}{2}\right)=G[h(x),\ h(y)]=f\left(\frac{f^{-1}h(x)+f^{-1}h(y)}{2}\right),$$

vagyis $\varphi(x)=f^{-1}h(x)$ jelöléssel éppen a (15) *Jensen*-féle

$$\varphi\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{\varphi(x)+\varphi(y)}{2}$$

egyenletet kapjuk, tehát

$$\varphi(x)=cx+d,$$

$$h(x)=f(cx+d),$$

és fordítva $f(x)$-szel együtt nyilván $h(x)=f(cx+d)$ is kielégíti a (2) függvényegyenletet, qu. e. d.

Egy másik feltételrendszert kapunk (2) megoldásának létezésére a következőképpen:

(2)-ből

$$G[f(x), f(y)]=f\left(\frac{x+y}{2}\right)=f\left(\frac{y+x}{2}\right)=G[f(y), f(x)],$$

másrészt $y=x$ helyettesítéssel

$$f(x)=G[f(x), f(x)],$$

végül x helyébe $\frac{x+y}{2}$ és y helyébe $\frac{u+v}{2}$-t, majd x helyébe $\frac{x+u}{2}$-t és y helyébe $\frac{y+v}{2}$-t helyettesítve

$$f\left(\frac{\frac{x+y}{2}+\frac{u+v}{2}}{2}\right)=G\left[f\left(\frac{x+y}{2}\right), f\left(\frac{u+v}{2}\right)\right]=G\{G[f(x),f(y)], G[f(u),f(v)]\},$$

$$f\left(\frac{\frac{x+u}{2}+\frac{y+v}{2}}{2}\right)=G\left[f\left(\frac{x+u}{2}\right), f\left(\frac{y+v}{2}\right)\right]=G\{G[f(x),f(u)], G[f(y),f(v)]\}.$$

A kapott szükséges feltételek

$$G(x,y)=G(y,x) \qquad \text{(szimmetria)},$$

$$G(x,x)=x \qquad \text{(reflexivitás)}$$

és

(17) $$G[G(x,y), G(u,v)]=G[G(x,u), G(y,v)] \qquad \text{(biszimmetria)}$$

a folytonossággal és növekedéssel együtt elégségesek is, ami következik a [13] dolgozatban bebizonyított, itt következő tételből:

2_2°. TÉTEL: *Ha $G(t, u)$ folytonos, szigorúan növekvő szimmetrikus, reflexív és biszimmetrikus, akkor és csak akkor létezik oly folytonos és szigorúan monoton $g(x)$ függvény, amellyel $G(t, u)$ így állítható elő:*

$$G(t, u) = g^{-1}\left(\frac{g(t)+g(u)}{2}\right).$$

(A két feltételrendszer ekvivalenciáját közvetlenül B. KNASTER [20] bizonyította be.)

A $g(t)=x$, $g(u)=y$, $t=g^{-1}(x)=f(x)$, $u=f(y)$ jelöléssel kapjuk az itt következő alternatív tételt:

2_2. TÉTEL: *A 2_1 tétel állításai érvényben maradnak, ha (16)-ot a következő három függvényegyenlet-feltétellel helyettesítjük:*

(17) $$G[G(x, y), G(u, v)] = G[G(x, u), G(y, v)] \qquad \text{(biszimmetria)}$$

$$G(x, x) = x \qquad \text{(reflexivitás)}$$

$$G(x, y) = G(y, x) \qquad \text{(szimmetria).}$$

*Példa*ként még tárgyaljuk az

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \sqrt{f(x)f(y)}$$

függvényegyenletet, melyet N. I. LOBACSEVSZKIJ [3] a párhuzamossági szög képletének meghatározására használt. A $G(t, u) = \sqrt{tu}$ függvény eleget tesz a 2_1, ill. 2_2 tétel feltételeinek, tehát függvényegyenletünknek van megoldása. A megoldás:

$$f(x) = ac^x = ae^{\frac{x}{k}},$$

amit így kapunk meg pl. a fenti első módszerrel:

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \sqrt{f(x)f(y)},$$

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \sqrt{f(x+y)a},$$

$$f(x+y) = \frac{f(x)f(y)}{a},$$

$$\varphi(x) = \frac{f(x)}{a},$$

$$\varphi(x+y) = \varphi(x)\varphi(y),$$

ennek megoldása (CAUCHY [2]):

$$\varphi(x) = c^x,$$

tehát

$$f(x)=ac^x$$

qu. e. d.

Módszereink az általánosabb

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)=G[f(x), f(y), x, y]$$

alakú függvényegyenletekre is alkalmazhatók.

Ezek egyébként az $u=\frac{x+y}{2}$, $v=\frac{x-y}{2}$ helyettesítéssel az

$$f(u)=G[f(u+v), f(u-v), u+v, u-v]$$

alakra hozhatók, ami az 1. 5. §-ban tárgyalandó

(5) $$H[f(x+y), f(x-y), f(x), x, y]=0$$

típushoz tartozik. Fordítva, az (5) alakú egyenletek

$$x=\frac{u+v}{2}, \quad y=\frac{u-v}{2}$$

helyettesítéssel a

$$H\left[f(u), f(v), f\left(\frac{u+v}{2}\right), \frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right]=0$$

alakra hozhatók és az e §-ban ismertetett módszerekkel tárgyalhatók. Pl. a fenti példánkban tárgyalt függvényegyenlet is LOBACSEVSZKIJnél eredetileg ([3]) az

$$f(c)^2=f(c+\beta)f(c-\beta)$$

alakban lépett fel és az ő megoldása lényegében az I. 1. §-ban említett módszer szerint halad.

I. 3. § $f(ax+by+c)=G[f(x), f(y)], f[F(x, y)]=G[(x), f(y)]$

A

(3) $$f(ax+by+c)=G[f(x), f(y)]$$

függvényegyenlettípust, mely általánosítása az (1) és (2) egyenleteknek és rájuk visszavezethető, csak rövidebben tárgyaljuk, mert részben már foglalkoztunk vele a [14] és [15] dolgozatokban. Itt a teljesség és a közlendő új megoldási eljárások kedvéért említjük meg.

Az ilyen egyenleteknek a már megoldott (1) vagy (2) típusú egyenletekre való visszavezetését a [14]-ben is megoldott

$$f(ax+by+c)=af(x)+bf(y)+c \qquad (ab \neq 0,\ a+b \neq 0) \tag{18}$$

egyenlet *példá*ján mutatjuk be:

Helyettesítsünk (18)-ba

$$x=y=\frac{as+bt}{a+b}=ps+qt \qquad (p+q=1)$$

-et:

$$f(as+bt+c)=(a+b)f(ps+qt)+c.$$

Ha ebben s és t helyébe újra x-et és y-t írunk és összehasonlítjuk (18)-cal, akkor látjuk, hogy

$$f(px+qy)=pf(x)+qf(y) \qquad (p+q=1). \tag{19}$$

Innen kétféleképpen is haladhatnak tovább:

1. (19)-ben sorra elvégezve az $x=\frac{u}{p}$, $y=0$; $x=0$, $y=\frac{v}{q}$; $x=\frac{u}{p}$, $y=\frac{v}{q}$ helyettesítéseket az $f(0)=\gamma$ jelöléssel, azt kapjuk, hogy

$$f(u)=pf\left(\frac{u}{p}\right)+q\gamma,$$

$$f(v)=p\gamma+qf\left(\frac{v}{q}\right),$$

$$f(u+v)=pf\left(\frac{u}{p}\right)+qf\left(\frac{v}{q}\right).$$

A harmadik egyenletből az első kettőt kivonva azt kapjuk, hogy

$$f(u+v)=f(u)+f(v)-\gamma.$$

Ennek az (1) típusú egyenletnek a megoldása, mint azt az I. 2. § elején láttuk,

$$f(x)=\alpha x+\gamma.$$

Ugyanerre az eredményre vezet a másik eljárás is:

2. (19)-ben most az $x=\frac{u+v}{2}$, $y=u$; $x=v$, $y=\frac{u+v}{2}$: $x=p\frac{u+v}{2}+qu$, $y=pv+q\frac{u+v}{2}$ helyettesítéseket végezve el, a követ-

kező egyenleteket nyerjük:

$$f\left(p\frac{u+v}{2}+qu\right)=pf\left(\frac{u+v}{2}\right)+qf(u),$$

$$f\left(pv+q\frac{u+v}{2}\right)=pf(v)+qf\left(\frac{u+v}{2}\right),$$

$$f\left(\frac{u+v}{2}\right)=f\left[p\left(p\frac{u+v}{2}+qu\right)+q\left(pv+q\frac{u+v}{2}\right)\right]=pf\left(p\frac{u+v}{2}+q\right)+$$

$$+qf\left(pv+q\frac{u+v}{2}\right).$$

A harmadik egyenletbe behelyettesítjük az első kettőt:

$$f\left(\frac{u+v}{2}\right)=(p^2+q^2)f\left(\frac{u+v}{2}\right)+pq[f(u)+f(v)] \qquad (p+q=1),$$

$$f\left(\frac{u+v}{2}\right)=\frac{f(u)+f(v)}{2}.$$

De ez éppen a (15) *Jensen*-féle függvényegyenlet, melynek általános megoldása

$$f(x)=\alpha x+\gamma.$$

Ezúttal azonban ez nem feltétlenül elégíti ki az eredeti (18) függvényegyenletet:

$$f(ax+by+c)=a\alpha x+b\alpha y+c\alpha+\gamma,$$

$$af(x)+f(y)+c=a\alpha x+b\alpha y+c+(a+b)\gamma,$$

tehát (18) csak akkor teljesül, ha

$$(\alpha-1)c=(a+b-1)\gamma.$$

Tehát érvényes a következő

3°. TÉTEL. *Az*

$$f(ax+by+c)=af(x)+bf(y)+c \qquad (ab\neq 0, a+b\neq 0)$$

függvényegyenlet általános mérhető megoldása

$$f(x)=\alpha x+\gamma.$$

Itt azonban α és γ csak akkor tetszőleges konstansok, ha $a+b=1$ és $c=0$; ha viszont $a+b\neq 1$, akkor $\gamma=[(\alpha-1)c]/(a+b-1)$, végül ha $a+b=1$, de $c\neq 0$, akkor $\alpha=1$.

Az itt ismertetett *megoldási eljárások* általában is alkalmazhatók a

$$(3) \qquad f(ax+by+c)=G[f(x),f(y)] \qquad (ab\neq 0,\ a+b=0)$$

függvényegyenletre:

(3)-ba

$$x=y=\frac{as+bt}{a+b}=ps+qt \qquad (p+q=1)$$

-et helyettesítve, az eredményben s és t helyébe ismét x-et és y-t írva, és a kapott

$$f(ax+by+c)=G[f(px+qy),f(px+qy)]=G_2[f(px+qy)]$$

egyenletet (3)-mal összehasonlítva a

$$(20) \qquad f(px+qy)=G_2^{-1}\{G[f(x),f(y)]\}=F[f(x),f(y)]$$

egyenlethez jutunk.

Innen, ebben az általános esetben is, kétféleképpen haladhatunk tovább:

1. (20)-ba sorra $x=\frac{u}{p}$, $y=0$; $x=0$, $y=\frac{v}{q}$; $x=\frac{u}{p}$, $y=\frac{v}{q}$-t helyettesítve, az $f(0)=\gamma$ jelöléssel az

$$f(u)=F\left[f\left(\frac{u}{p}\right),\ \gamma\right], \qquad f(v)=F\left[\gamma,\ f\left(\frac{v}{q}\right)\right],$$

$$f(u+v)=F\left[f\left(\frac{u}{p}\right),\ f\left(\frac{v}{q}\right)\right]$$

egyenleteket kapjuk, amiből $f\left(\frac{u}{p}\right)$-t és $f\left(\frac{v}{q}\right)$-t kiküszöbölve egy (1) típusú

$$f(u+v)=H[f(u),f(v)]$$

függvényegyenlethez jutunk.

2. Másrészt (20)-ban az $x=\frac{u+v}{2}$, $y=u$; $x=v$, $y=\frac{u+v}{2}$; $x=p\frac{u+v}{2}+qu$, $y=pv+q\frac{u+v}{2}$ helyettesítéseket végezve el egymás után és a kapott

$$f\left(p\frac{u+v}{2}+qu\right)=F\left[f\left(\frac{u+v}{2}\right),\ f(u)\right],$$

$$f\left(pv+q\frac{u+v}{2}\right)=F\left[f(v),\ f\left(\frac{u+v}{2}\right)\right],$$

$$f\left(\frac{u+v}{2}\right)=f\left[p\left(p\frac{u+v}{2}+qu\right)+q\left(pv+q\frac{u+v}{2}\right)\right]=$$

$$=F\left[f\left(p\frac{u+v}{2}+qu\right),\ f\left(pv+q\frac{u+v}{2}\right)\right]$$

egyenletekből $f\left(p\frac{u+v}{2}+qu\right)$, $f\left(pv+q\frac{u+v}{2}\right)$-t kiküszöbölve egy (2) típusú

$$f\left(\frac{u+v}{2}\right)=H[f(u),\ f(v)]$$

függvényegyenletet kapunk.

Természetesen itt is, mint példánkban, még meg kell győződni róla, hogy a kapott megoldás kielégíti-e az eredeti függvényegyenletet.

(3) megoldásának létezésére itt x helyébe $(ax+by+c)$-t és y helyébe $(au+bv+c)$-t, majd x helyébe $(ax+bu+c)$-t és y helyébe $(ay+bv+c)$-t helyettesítve kapunk szükséges feltételt:

$$f[a^2x+ab(y+u)+b^2v+(a+b+1)c]=f[a(ax+by+c)+b(au+bv+c)+c]=$$
$$=G[f(ax+by+c),f(au+bv+c)]=G\{G[f(x),f(y)],\ G[f(u),f(v)]\}$$

és

$$f[a^2x+ab(u+y)+b^2v+(a+b+1)c]=f[a(ax+bu+c)+b(ay+bv+c)+c]=$$
$$=G[f(ax+bu+c),f(ay+bv+c)]=G\{G[f(x),f(u)],\ G[f(y),f(v)]\},$$

tehát a

(17) $$G[G(x,y),\ G(u,v)]=G[G(x,u),\ G(y,v)]$$

biszimmetria szükséges ahhoz, hogy a (3) egyenletnek létezzék megoldása.

A folytonos és szigorúan monoton megoldás létezésének szükséges feltételét tartalmazza a következő, kissé eltérő alakban már a [15] dolgozatban (vö. [13]) bebizonyított tétel első része:

3. TÉTEL. *A (3) függvényegyenletnek csak akkor lehet folytonos és szigorúan monoton megoldása, ha G folytonos, szigorúan monoton és eleget tesz a (17) függvényegyenletnek (biszimmetria).*

$f(x)$-szel együtt eleget tesz (3)-nak

$$\textit{minden}\quad f(\alpha x+\gamma),\quad (\textit{ha}\quad a+b=1\quad \textit{és}\quad c=0)$$
$$\textit{minden}\quad f(x+\gamma),\quad (\textit{ha}\quad a+b=1\quad \textit{és}\quad c\neq 0)\ \textit{és}$$
$$\textit{minden}\quad f\left(\alpha x+\frac{\alpha c-c}{a+b-1}\right)\quad (\textit{ha}\quad a+b\neq 1)$$

alakú függvény is és csak ezek.

A második állítást itt is a már többször követett úton bizonyítjuk:

$$f(ax+by+c)=G[f(x),\ f(y)],\quad G(t,u)=f[af^{-1}(t)+bf^{-1}(u)+c]$$
$$h(ax+by+c)=G[h(x),\ h(y)]=f[af^{-1}h(x)+bf^{-1}h(y)+c],$$

tehát a $\varphi(t)=f^{-1}h(t)$ függvényre a (18) alakú

$$\varphi(ax+by+c)=a\varphi(x)+b\varphi(y)+c$$

függvényegyenlet teljesül és így a 3° tételből következik a 3. tétel második része.

A fentiekhez hasonló módszerrel oldhatók meg az általánosabb

$$f(ax+by+c)=G[f(x),f(y),x,y]$$

alakú függvényegyenletek is.

Visszavezethető az előbbire a

$$f[F(x,y)]=G[f(x),f(y)] \tag{3'}$$

függvényegyenlet megoldása is, ha F és G közül *az egyik biszimmetrikus* (eleget tesz a (17) függvényegyenletnek).

Ugyanis, ha pl. G biszimmetrikus, akkor

$$G(u,v)=g[ag^{-1}(u)+bg^{-1}(v)+c] \tag{21}$$

és (3')-ből $f^{-1}g(x)=h(x)$, $h^{-1}(x)=s$, $h^{-1}(y)=t$ jelöléssel a (3) típusú

$$h(as+bt+c)=F[h(s),h(t)]$$

függvényegyenletet kapjuk.

[$g(x)$-et a (21)-gyel ekvivalens ugyancsak (3) típusú

$$g(ax+by+c)=G[g(x),g(y)]$$

egyenletből határozhatjuk meg.]

Itt is érvényes ([15]) a megfelelő

3'. TÉTEL. *Ha a* (3') *függvényegyenletben a folytonos és szigorúan monoton F és G függvények közül az egyik biszimmetrikus, akkor az egyenletnek csakis akkor lehet folytonos és szigorúan monoton megoldása, ha a másik is biszimmetrikus.*

Az unicitási viszonyok is a (3)*-beliekhez hasonlóan alakulnak.*

Speciálisan, ha (3')*-ben F vagy G asszociatív, úgy akkor és csak akkor van megoldás, ha a másik is asszociatív.*

Példák:

(22) $f(xy-\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2})=f(x)+f(y)$, MEGOLDÁSA: $f(x)=c \arccos x$,

(23) $f(xy+\sqrt{x^2-1}\sqrt{y^2-1})=f(x)+f(y)$, MEGOLDÁSA: $f(x)=c\,\mathrm{ar\,ch}\,x$.

Itt $G(s,t)=s+t$, $g(t)=kt$, $h(t)=\cos k\frac{t}{c}$ ill. $h(t)=\mathrm{ch}\,k\frac{t}{c}$. E két függvényegyenlet megoldását a II. 1. §-ban fogjuk használni.

I. 4. § $f(x+y)=G[f(x), y]$.

Az itt (I. 4., 5., 6. §) következő módszerek és tételek által adott, az eddigieknél könnyebb megoldási lehetőségnek az is magyarázata, hogy a (4), (5), (6) függvényegyenlettípusokban az x, ill. y változó önállóan, tehát az f függvényen kívül is szerepel.

A

$$f(x+y)=G[f(x), y] \tag{4}$$

alakú függvényegyenletekre triviális *példa*ként a

$$f(x+y)=f(x)+y \tag{24}$$

egyenlet megoldását mutatjuk be először.

Az $x=0$ helyettesítéssel és $f(0)=a$ jelöléssel

$$f(t)=t+a$$

és ez valóban megoldása (24)-nek:

$$(x+y)+a=x+a+y$$

éspedig a $(0, a)$ ponton átmenő megoldás. Egy tetszőleges (c, d) ponton átmenő megoldás

$$f(t)=(t-c)+d,$$

ami (24)-ből $x=c$, $[f(c)=d]$ helyettesítéssel közvetlenül is adódik:

$$f(c+y)=d+y,$$
$$c+y=t,\ y=t-c,$$
$$f(t)=(t-c)+d.$$

Ez az egyszerű *megoldási eljárás* általában is alkalmazható a (4) alakú függvényegyenletekre:

(4)-be $x=0$-t helyettesítünk és itt is az $f(0)=a$ jelölést használjuk:

$$f(t)=G(a, t), \tag{25}$$

tehát (4) megoldása csak ilyen alakú lehet. A (c, d) ponton átmenő megoldás itt is az $x=c$ helyettesítéssel adódik (4)-ből:

$$f(c+y)=G(d, y), \qquad (d=f(c)),$$
$$t=c+y,\ y=t-c,$$
$$f(t)=G(d, t-c).$$

Ez természetesen a megoldásfüggvény (25) alakját is tartalmazza $c=0$-ra.

Hogy a (4)-ből adódott (25) függvény valóban megoldása-e (4)-nek, arról itt is helyettesítéssel győződhetünk meg:

$$f(x+y)=G(a,x+y),$$
$$G[f(x),y]=G[G(a,x),y].$$

Tehát a (25) függvény, melyről láttuk, hogy (4) megoldása csak ilyen alakú lehet, — akkor és csak akkor lesz valóban megoldása a (4) függvényegyenletnek, vagyis (4)-nek akkor és csakis akkor létezik megoldása, ha a

$$G(a,x+y)=G[G(a,x),y] \tag{26}$$

feltétel teljesül. Így adódik a

4_1. TÉTEL. *Ha a $G(x,y)$ függvény legalább egy a értékre eleget tesz a* (26) *feltételnek, akkor és csakis akkor* (4) *megoldható és általános megoldása*

$$f(t)=G(a,t), \tag{25}$$

mely átmegy a $(0,a)$ *ponton. A* (c,a) *ponton átmenő megoldás*

$$f(t)=G(a,t-c)$$

alakba írható. (Vö. [23]-mal is.)

Ezen túlmenően a folytonos és szigorúan monoton megoldásokra vonatkozóan áll a

4_2. TÉTEL. *Ha a* (14) *feltétel egy a-ra teljesül, ha továbbá $G(x,y)$* **vagy** *mindkét változóban folytonos, anélkül, hogy valahol is y-tól függetlenné (y-ban konstanssá) válnék,* **vagy** *mindkét változóban szigorúan monoton, akkor a* (4) *függvényegyenlet* (25) *általános megoldása folytonos* **és** *szigorúan monoton.*

$f(x)$-szel együtt a

$$h(t)=f(t+b)$$

függvények és csak ezek megoldásai (4)*-nek.*

E tétel első két állítását (kissé erősebb alakban) a [23] dolgozatban bebizonyítottuk. Az utolsó (unicitási) állítás bizonyítása itt is így végezhető: (4)-ből

$$f(x+y)=G[f(x),y],\ G(x,y)=f[f^{-1}(x)+y],$$
$$h(x+y)=G[h(x),y]=f[f^{-1}h(x)+y],$$

tehát $\varphi(t)=f^{-1}h(t)$-re

$$\varphi(x+y)=\varphi(x)+y$$

és ez éppen a (24) egyenlet, melynek megoldása $\varphi(t)=t+b$ tehát

$$h(t)=f(t+b),$$

qu. e. d.

További példaként az

$$f(x+y)=f(x)e^y$$

függvényegyenletet említhetjük, melynek van megoldása, mert $G(x,y)=xe^y$ eleget tesz feltételeinknek. Az általános megoldás, mint az $x=0$ helyettesítéssel látjuk: $f(t)=ae^t$.

Ez átmegy a $(0,a)$ ponton. A (c,d) ponton átmenő megoldást

$$f(t)=de^{t-c}$$

alakban írhatjuk fel.

Az

$$f(x+y)=f(x)^y \qquad (f(x)\geqq 0)$$

függvényegyenletnek viszont nincs a triviális $f(x)\equiv 0$ és $f(x)\equiv 1$ megoldásoktól eltérő megoldása, mert a $G(x,y)=x^y$ függvény nem tesz eleget a (25) egyenletnek semmilyen $x=0$ és $x=1$-től különböző értékre. Ha mégis ráerőszakolnánk megoldási eljárásunkat, akkor $f(t)=a^t$ adódna, de ez nem tesz eleget az egyenletnek: $a^{x+y}\neq(a^x)^y$, kivéve, ha $a=0$, vagy $a=1$.

Az általánosabb

$$f[F(x,y)]=G[f(x),x,y]$$

egyenlet hasonló eljárással oldható meg.

Helyettesítsünk ugyanis ebbe is $x=0$-t (természetesen más $x=x_0$ helyettesítéssel is célt érünk):

$$f[F(0,y)]=G[f(0),0,y],$$

és ha a $t=F(0,y)=h(y)$, $y=h^{-1}(t)=g(t)$, $f(0)=a$ jelöléseket vezetjük be, látjuk, hogy ha az egyenletnek egyáltalán van megoldása, akkor az csak

$$f(t)=G[a,0,g(t)]$$

lehet.

Példa: $f(xy)=f(x)^y$ megoldása, mint az $x=1$ helyettesítéssel látjuk ($x=0$ itt nyilván nem alkalmas), $f(t)=c^t$ és valóban $c^{xy}=(c^x)^y$.

I. 5. § $H[f(x+y), f(x-y), f(x), x, y]=0$

A következő 5. és 6. §-ban adott eljárások az eddigiekkel ellentétben nem intézik el teljesen a tárgyalandó (5), (6) függvényegyenlettípusokat, csak bizonyos speciális feltételek között. A hasonló módon megadható eljárásokat természetesen könnyű szaporítani.

A

$$H[f(x+y), f(x-y), f(x), x, y]=0 \tag{5}$$

függvényegyenlettípusra az I. 1. és I. 2. § végén mondottakon kívül egyelőre még két további — különböző feltételek mellett alkalmazható — *megoldási eljárást* tárgyalunk.

1. Az elsőt a ST. KACZMARZ által [6] nehezebb valós függvénytani eszközökkel megoldott

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)\cos y \tag{7}$$

függvényegyenlet *példáján* mutatjuk be (vö. [31]). E függvényegyenletnek, melyet ST. KACZMARZ a második szimmetrikus differenciából a kétszeri deriválhatóság kimutatása mellett az

$$f''(x)=-f(x)$$

differenciálegyenletre vezetett vissza, általános megoldása

$$f(x)=a\cos x+b\sin x.$$

Az egyszerűbb közvetlen megoldás menete a következő:

Végezzük el (7)-ben sorra az

$$x=0, y=t; \quad x=\frac{\pi}{2}+t, y=\frac{\pi}{2}; \quad x=\frac{\pi}{2}, y=\frac{\pi}{2}+t$$

helyettesítéseket és vezessük be az $f(0)=a, f\left(\frac{\pi}{2}\right)=b$ jelöléseket. Így jutunk az

$$f(t)+f(-t)=2a\cos t,$$
$$f(\pi+t)+f(t)=0,$$
$$f(\pi+t)+f(-t)=2b\cos\left(\frac{\pi}{2}+t\right)=-2b\sin t$$

egyenletekre. Ha az első két egyenlet összegéből a harmadikat levonjuk:

$$2f(t)=2a\cos t+2b\sin t,$$

máris látjuk, hogy a (7) függvényegyenlet megoldása csak

$$f(t)=a\cos t+b\sin t$$

alakú lehet. Hogy ez a függvénysereg mindig valóban megoldása is (7)-nek, arról itt is behelyettesítéssel kell meggyőződnünk:

$$f(x+y)+f(x-y)=a\cos(x+y)+a\cos(x-y)+b\sin(x+y)+$$
$$+b\sin(x-y)=2a\cos x\cos y+2b\sin x\cos y=2(a\cos x+b\sin x)\cos y=$$
$$=2f(x)\cos y.$$

Tehát valóban $f(x) = a \cos x + b \sin x$ a (7) függvényegyenlet legáltalánosabb megoldása. Ezt az eredményt a II. 2. §-ban fel fogjuk használni. A $\left(\frac{\pi}{2} + t\right)$ helyettesítések helyett ugyanúgy, vagy még egy kicsit kényelmesebben alkalmazhattunk volna megfelelő $\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$ helyettesítéseket, de az általános (5) egyenlet hasonló tárgyalására a mi fenti helyettesítéseink általánosíthatók jobban.

Mivel példánkban lényegesen felhasználtuk, hogy az $f(x) \cos y$ kifejezés $y = \frac{\pi}{2}$-nél azonosan eltűnik, ezért ezen eljárás más (5) típusú függvényegyenletekre való általánosításához az kell, hogy létezzék olyan $y = y_0$ érték, hogy a (4)-ben szereplő $H(z_1, z_2, z_3, x, y)$ függvény $y = y_0$-ra függetlenné váljon z_3-tól:

(27) $$H(z_1, z_2, z_3, x, y_0) = h(z_1, z_2, x).$$

Ha ez teljesül, akkor a megfelelő itt következő eljárás gyakran eredményre vezet:

(5)-be sorra az $x = 0, y = t$; $x = y_0 + t, y = y_0$; $x = y_0, y = y_0 + t$ helyettesítéssel és $f(0) = a$, $f(y_0) = b$ jelöléssel a

$$H[f(t), f(-t), a, 0, t] = 0$$
$$h[f(2y_0 + t), f(t), y_0 + t] = 0$$
$$H[f(2y_0 + t), f(-t), b, y_0, y_0 + t] = 0$$

egyenletet kapjuk. Ha e három egyenletből $f(2y_0 + t)$ és $f(-t)$-t ki tudjuk küszöbölni, akkor megkapjuk $f(t)$ kifejezését, amelyet behelyettesítve az eredeti függvényegyenletbe, meggyőződhetünk róla, megoldása-e valóban az egyenletnek, vagy még specializálandó, vagy esetleg nincs is az egyenletnek (nem triviális) megoldása.

A fentiekből leszűrhető a következő

5_1 TÉTEL. *Ha létezik oly $y = y_0$, mellyel*

(27) $$H(z_1, z_2, z_3, x, y_0) = h(z_1, z_2, x)$$

és a

$$H(z, u, a, 0, t) = 0,$$
$$h(v, z, y_0 + t) = 0,$$
$$H(v, u, b, y_0, y_0 + t) = 0$$

egyenletek (függetlenek és) z-re megoldhatók, akkor csak a belőlük nyert

$$z = f(t)$$

függvény lehet (5) *megoldása és ez az általános megoldás legfeljebb két tetszőleges a, b konstanst tartalmaz.*

További *példa*ként vizsgáljuk még meg a

$$f(x+y)-f(x-y)-4\sqrt{f(x-y)}+4\sqrt{f(x)}(1-y)-4y=0 \tag{28}$$

függvényegyenletet. Itt $y_0=1$, mert $y=1$-re $f(x)$ már nem szerepel az egyenletben. Végrehajtva az $x=0, y=t$; $x=t+1, y=1$; $x=1, y=t+1$ helyettesítéseket, kapjuk az

$$f(t)-f(-t)-4\sqrt{f(-t)}+4\sqrt{a}(1-t)-4t=0$$
$$f(t+2)-f(t)-4\sqrt{f(t)}-4=0$$
$$f(t+2)-f(-t)-4\sqrt{f(-t)}-4\sqrt{b}t-4t-4=0$$

egyenleteket.

Az első két egyenlet összegéből a harmadikat levonva, a

$$-4\sqrt{f(t)}-4(\sqrt{a}-\sqrt{b})t+4\sqrt{a}=0$$

egyenletre, tehát a $\sqrt{b}-\sqrt{a}=c$, $\sqrt{a}=k$ jelöléssel, az

$$f(t)=(ct+k)^2$$

megoldásra jutunk. Ha azonban ezt az eredeti (28) függvényegyenletbe helyettesítjük, azt látjuk, hogy

$$(cx+cy+k)^2-(cx-cy+k)^2-4(cx-cy+k)+4(cx+k)(1-y)-4y=0,$$
$$4(cx+k)cy-4(cx+k)+4cy+4(cx+k)-4(cx+k)y-4y=0,$$
$$(cx+k)y(c-1)+y(c-1)=0,$$

azaz

$$(c-1)(cx+k+1)=0$$

csak akkor teljesül minden x-re, ha $c=1$ (ugyanis $c=0$ triviális konstans megoldást adna) tehát (28) megoldásai az

$$f(t)=(t+k)^2 \text{ és } f(t)=k$$

függvények. Ezek ki is elégítik (28)-at.

2. Ha a (27) feltétel nem teljesül, akkor gyakran a következő eljárás vezet eredményre, melyet az

$$f(x+y)+2f(x-y)=3f(x)-y$$

függvényegyenlet *példá*ján mutatunk be.

Az $x=0, y=t$; $x=t, y=2t$; $x=t, y=-2t$ helyettesítéseket végezve el, az

$$f(t)+2f(-t)=3a-t,$$
$$f(3t)+2f(-t)=3f(t)-2t,$$
$$f(-t)+2f(3t)=3f(t)+2t$$

egyenleteket kapjuk. Az első egyenletet hárommal szorozva, hozzáadjuk a harmadik egyenlet kétszeresét és az összegből levonjuk a második egyenlet négyszeresét, akkor a

$$3f(t)=-6f(t)+9t+9a$$

egyenlethez jutunk, tehát a megoldás csak

$$f(t)=t+a$$

lehet, és ez ki is elégíti az eredeti függvényegyenletet:

$$(x+y+a)+2(x-y+a)=3(x+a)-y.$$

Ezt az eljárást általában alkalmazva az (5) függvényegyenletre, ott is az $x=0, y=t$; $x=t, y=2t$; $x=t, y=-2t$ helyettesítéseket végezzük el és a kapott

$$H[f(t), f(-t), a, 0, t]=0,$$
$$H[f(3t), f(-t), f(t), t, 2t]=0,$$
$$H[f(-t), f(3t), f(t), t, -2t]=0$$

egyenletekből küszöböljük ki $f(-t)$-t és $f(3t)$-t (ha ez lehetséges). Az így kapott függvény lesz az (5) egyenlet egyetlen lehetséges megoldása. Hogy valóban kielégíti-e a függvényegyenletet, azt a behelyettesítés dönti el.

Itt is leszűrhető a megfelelő

5_2. TÉTEL: *Ha a*

$$H(z, u, a, 0, t)=0,$$
$$H(v, u, z, t, 2t)=0,$$
$$H(u, v, z, t, -2t)=0$$

egyenletek (függetlenek és) z-re megoldhatók, akkor csak a belőlük nyert

$$z=f(t)$$

függvény lehet az (5) *függvényegyenlet megoldása. Ez az általános mogoldás legfeljebb egy tetszőleges a konstanst tartalmaz.*

További *példa*ként a

$$2f(x+y)+f(x-y)=2f(x)(2e^{y}+e^{-y})$$

függvényegyenletet oldjuk meg. — Elvégezve a fenti helyettesítéseket és a kapott

$$2f(t)+f(-t)=a(2e^{t}+e^{-t}),$$
$$2f(3t)+f(-t)=f(t)(2e^{2t}+e^{-2t}),$$
$$2f(-t)+f(3t)=f(t)(2e^{-2t}+e^{2t})$$

egyenletekből $f(-t)$-t és $f(3t)$-t kiküszöbölve (az első egyenlet mindkét oldalát hárommal szorozva, hozzáadjuk a másodikat és levonjuk a harmadik egyenlet kétszeresét) a

$$6f(t)=3a(2e^{t}+e^{-t})-3f(t)e^{-2t},$$

$$f(t)=a\frac{2e^{t}+e^{-t}}{2+e^{-2t}}=ae^{t}$$

általános megoldást kapjuk, és ez ki is elégíti az eredeti egyenletet:

$$2ae^{x+y}+ae^{x-y}=ae^{x}(2e^{y}+e^{-y}).$$

Mivel az I. 5. és I. 6. §-ok tételei csak szükséges feltételeit adják annak, hogy az általuk meghatározott függvény a kiindulási egyenlet megoldása legyen, fokozott jelentősége van annak, hogy a kapott függvénynek az eredeti egyenletbe való helyettesítésével győződjünk meg róla, valóban kielégíti-e az eredeti egyenletet, vagy még specializálni kell, vagy esetleg nem is létezik nem triviális megoldás.

Természetesen alkalmazhatók az (5) függvényegyenletre a (6) egyenlet megoldásához az I. 1. § végén és a következő I. 6. §-ban megadott módszerek is

I. 6. § $H[f(x+y), f(x-y), f(x), f(y), x, y]=0$

Végül az egész általános

(6) $$H[f(x+y), f(x-y), f(x), f(y), x, y]=0$$

függvényegyenletre adunk az I. 1. § végén említetten kívül még három különböző feltételek közt alkalmazható *megoldási eljárást.*

1. Az elsőt az

$$f(x+y)+2f(x-y)+f(x)+2f(y)=4x+y$$

egyenlet *példá*ján mutatom be.

Az $y=0$ helyettesítéssel azonnal a

$$4f(x)+2a=4x$$

$[f(0)=a]$, azaz

$$f(x)=x-\frac{a}{2}$$

megoldáshoz jutunk.

Ezt behelyettesítve egyenletünkbe, látjuk, hogy

$$x+y-\frac{a}{2}+2x-2y-a+x-\frac{a}{2}+2y-a=4x+y$$

csak $a=0$ esetén teljesül. Tehát egyenletünk egyetlen lehetséges megoldása az $f(x)=x$ függvény.

Ez az eljárás általában is alkalmazható a (6) függvényegyenletre: $y=0$-át helyettesítve az $f(0)=a$ jelöléssel, a

$$H[f(x), f(x), f(x), a, x, 0]=0$$

egyenletet kapjuk és ha ez nem identitás, akkor belőle $f(x)$ meghatározható. A kapott eredmény visszahelyettesítésével jutunk $f(x)$ végleges alakjára.

Ebből következik a

6_1. TÉTEL. *Ha van oly a, melyre*

$$H(z, z, z, a, x, 0)=0$$

(nem azonosság és) z-re megoldható, akkor csak a belőle nyerhető

$$z=f(x)$$

függvény lehet megoldása a (6) *függvényegyenletnek. E megoldás legfeljebb egy a konstanst tartalmaz.*

További *példa*ként az

$$f(x+y)+f(x-y)-f(x)-x^3-6xy\sqrt[3]{f(y)}=0$$

függvényegyenletet oldjuk meg. Az $y=0$ helyettesítéssel azt kapjuk, hogy

$$f(x)=x^3$$

a függvényegyenlet megoldása és ez ki is elégíti az egyenletet, mert

$$(x+y)^3+(x-y)^3-x^3-x^3-4xyy=0.$$

2. A második eljárást az

$$f(x+y)-2f(x-y)+f(x)-2f(y)=y-2$$

függvényegyenlet *példá*ján mutatjuk be. Sorra elvégezve az $x=0, y=t$; $x=t, y=2t$; $x=2t, y=t$; $x=t, y=t$ helyettesítéseket a

$$-f(t)-2f(-t)+a=t-2,$$
$$f(3t)-2f(-t)+f(t)-2f(2t)=2t-2,$$
$$f(3t)-4f(t)+f(2t)=t-2,$$
$$f(2t)-2a-f(t)=t-2.$$

Az első és harmadik egyenlet összegéből a második egyenletet és a negyedik egyenlet háromszorosát levonva azt kapjuk, hogy

$$-3f(t)+7a=-3t+4,$$

$$f(t)=t+\frac{7a-4}{3}=t+b.$$

Azonban eredményünket a kiindulási egyenletbe helyettesítve látjuk, hogy

$$x+y+b-2x+2y-2b+x+b-2y-2b=y-2$$

csak akkor teljesül, ha $b=1$. Így

$$f(x)=x+1$$

az egyetlen lehetséges megoldás és ez ki is elégíti az egyenletet.

Általában is a (6) függvényegyenletet az $x=0, y=t$; $x=t, y=2t$; $x=2t, y=t$; $x=t, y=t$ helyettesítésekkel kapott

$$H[f(t), f(-t), a, f(t), 0, t]=0,$$
$$H[f(3t), f(-t), f(t), f(2t), t, 2t]=0,$$
$$H[f(3t), f(t), f(2t), f(t), 2t, t]=0,$$
$$H[f(2t), a, f(t), f(t), t, t]=0$$

egyenletekből $f(-t), f(2t)$ és $f(3t)$ kiküszöbölésével oldhatjuk meg (az így kapott $f(t)$ függvényt mindig visszahelyettesítve az eredeti egyenletbe).

Ebből adódik a

6_2. TÉTEL. *Ha a*

$$H(z, u, a, z, 0, t)=0,$$
$$H(w, u, z, v, t, 2t)=0,$$
$$H(w, z, v, z, 2t, t)=0,$$
$$H(v, a, z, z, t, t)=0$$

egyenletek (függetlenek és) z-re megoldhatók, akkor csak a belőlük nyert

$$z=f(t)$$

függvény (mely legfeljebb egy a konstanst tartalmaz) lehet megoldása a (6) *egyenletnek.*

További *példa:*

$$f(x)f(x+y)=f(y)^2f(x-y)^2e^{y+4} \qquad (f(x)\neq 0)$$

Elvégezve a fenti helyettesítéseket, az $f(0)=a$ jelöléssel az

$$af(t)=f(t)^2f(-t)^2e^{t+4},$$
$$f(t)f(3t)=f(2t)^2f(-t)^2e^{2t+4},$$
$$f(2t)f(3t)=f(t)^4e^{t+4},$$
$$f(t)f(2t)=f(t)^2a^2e^{t+4}$$

egyenleteket kapjuk.

Az első és harmadik egyenlet szorzatát a második egyenlettel és a negyedik egyenlet harmadik hatványával osztva azt kapjuk, hogy

$$\frac{af(t)f(2t)f(3t)}{f(t)^4f(2t)^3f(3t)}=\frac{f(t)^6f(-t)^2e^{2t+8}}{f(t)^6f(-t)^2f(2t)^2a^6e^{5t+16}},$$
$$f(t)^3=a^7e^{3t+8},$$
$$f(t)=\sqrt[3]{a^7e^8}e^t.$$

De $a=f(0)=\sqrt[3]{a^7e^8}$, tehát $a^4=e^{-8}, a=\pm\frac{1}{e^2}$, így

$$f(t)=\pm e^{t-2}$$

a megoldás és ez ki is elégíti függvényegyenletünket:

$$e^{x-2}e^{x+y-2}=e^{2y-4}e^{2x-2y-4}e^{y+4}.$$

3. Ha sem a 6_1, sem a 6_2 tételek feltételei nem teljesülnek, akkor az I. 1. §-ban említett, vagy az itt következő módszer lehet célravezető. E módszer a d'ALEMBERT ([1]) és CAUCHY ([2]) által a

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y) \tag{29}$$

függvényegyenlet megoldására alkalmazott eljárás általánosítása.

Röviden emlékeztetünk a (29) egyenlet ([2]) megoldási eljárására:

(29)-be $y=x$-et helyettesítve azt kapjuk, hogy $2f(x)^2=f(2x)+f(0)$. (29)-ből $y=0$ helyettesítéssel látjuk, hogy vagy $f(0)=1$, vagy $f(x)\equiv 0$. Az utóbbi triviális megoldást ezentúl számításon kívül hagyjuk.

Tehát $f(0)=1$,

$$2f(x)^2=f(2x)+1,$$
$$f(t)=2f\left(\frac{t}{2}\right)^2-1\geqq -1,$$
$$f\left(\frac{t}{2}\right)=\sqrt{\frac{1+f(t)}{2}},$$
$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\frac{1+f(1)}{2}}.$$

Az $f(1) = b$ érték vagy 1-nél nagyobb, vagy -1 és $+1$ közé esik (a határokat is beleértve). Az első esetben van olyan c szám, hogy

$$b = \operatorname{ch} c$$

a másodikban olyan, hogy

$$b = \cos c.$$

A két eset tárgyalása teljesen hasonló, mi az elsőt vázoljuk:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\operatorname{ch} c}{2}} = \operatorname{ch}\frac{c}{2},$$

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = \sqrt{\frac{1+f\left(\frac{1}{2}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{1+\operatorname{ch}\frac{c}{2}}{2}} = \operatorname{ch}\frac{c}{4}.$$

Általában

$$f\left(\frac{1}{2^n}\right) = \operatorname{ch}\frac{c}{2^n},$$

mert, ha ezt n-re már bizonyítottnak tételezzük fel, akkor

$$f\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right) = \sqrt{\frac{1+f\left(\frac{1}{2^n}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{1+\operatorname{ch}\left(c\frac{1}{2^n}\right)}{2}} = \operatorname{ch}\left(c\frac{1}{2^{n+1}}\right).$$

Most (29)-ből $x = \frac{2}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}$, $y = \frac{1}{2^n}$ helyettesítéssel az

$$f\left(\frac{3}{2^n}\right) + f\left(\frac{1}{2^n}\right) = 2f\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)f\left(\frac{1}{2^n}\right)$$

egyenletet kapjuk, tehát

$$f\left(\frac{3}{2^n}\right) + \operatorname{ch}\frac{c}{2^n} = 2\operatorname{ch}\frac{c}{2^{n-1}}\operatorname{ch}\frac{c}{2^n} = \operatorname{ch}\left(c\frac{3}{2^n}\right) + \operatorname{ch}\frac{c}{2^n},$$

vagyis

$$f\left(\frac{3}{2^n}\right) = \operatorname{ch}\left(c\frac{3}{2^n}\right).$$

Általában, minden diadikus x-re

$$f(x) = f\left(\frac{m}{2^n}\right) = \operatorname{ch}\left(c\frac{m}{2^n}\right) = \operatorname{ch} cx,$$

(nem kell $m < 2^n$-et feltételezni!), mert ezt $m = 1, 2$-re (utoljára $m = 3$-ra is) már kimutattuk, és ha $m = 1$, $m = k$ és $m = k+1$-re teljesül, akkor

$m=2k+1$-re így következik $\left[f\left(\frac{2k}{2^n}\right)=f\left(\frac{k}{2^{n-1}}\right)\right.$-re természetesen nem kell külön bizonyítani$\left.\right]$: (29)-be $x=\frac{k+1}{2^n}$, $y=\frac{k}{2^n}$-et helyettesítünk:

$$f\left(\frac{2k+1}{2^n}\right)+f\left(\frac{1}{2^n}\right)=2f\left(\frac{k+1}{2^n}\right)f\left(\frac{k}{2^n}\right)$$

és ebből feltevéseink szerint

$$f\left(\frac{2k+1}{2^n}\right)+\operatorname{ch}\left(c\frac{1}{2^n}\right)=2\operatorname{ch}\left(c\frac{k+1}{2^n}\right)\operatorname{ch}\left(c\frac{k}{2^n}\right)=\operatorname{ch}\left(c\frac{2k+1}{2^n}\right)+\operatorname{ch}\frac{c}{2^n},$$

tehát

$$f\left(\frac{2k+1}{2^n}\right)=\operatorname{ch}\left(c\frac{2k+1}{2^n}\right),$$

qu. e. d.

Nem diadikus x-ekre határátmenettel

$$f(x)=\lim_{d_n\to x}f(d_n)=\lim_{d_n\to x}\operatorname{ch}(cd_n)=\operatorname{ch}(cx).$$

Negatív x-ekre is érvényes ez a képlet, ui. ha (29)-be $x=0$, $y=t$-t teszünk, azt kapjuk, hogy

$$f(t)+f(-t)=2f(t)f(0)=2f(t),$$

tehát $(t<0)$

$$f(t)=f(-t)=\operatorname{ch}c(-t)=\operatorname{ch}ct.$$

Tehát (29) általános folytonos megoldása az általunk tárgyalt esetben

$$f(x)=\operatorname{ch}cx,$$

a másik, teljesen hasonlóan elintézhető esetben az

$$f(x)=\cos cx$$

megoldást kapjuk. Az

$$f(x)\equiv 1$$

konstans megoldás mindkettő határesete $c=0$-ra. Ezeken kívül meg az elején kizárt

$$f(x)\equiv 0$$

tesz eleget az egyenletnek.

Ez az eljárás átvihető az általános (6) egyenlet megoldására: (6)-ba $y=x$-et helyettesítve, $f(0)=a$ jelöléssel a

$$H[f(2x),a,f(x),f(x),x,x]=0 \tag{30}$$

egyenletet kapjuk (esetleg az $x=0$-val kapott

$$H(a, a, a, a, 0, 0)=0$$

-ból, ha ez nem azonosság, a meghatározható). (30)-ból, ha ez lehetséges, kifejezzük $f(x)$-et, ill. $x=\frac{t}{2}$ jelöléssel $f\left(\frac{t}{2}\right)$-et:

$$f\left(\frac{t}{2}\right)=G[f(t), t].$$

Ezzel a képlettel $f(1)=b$-ből $f\left(\frac{1}{2^n}\right)$ szukcesszíve meghatározható:

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=G(b, 1), f\left(\frac{1}{4}\right)=G\left[f\left(\frac{1}{2}\right), \frac{1}{2}\right], \ldots, f\left(\frac{1}{2^n}\right)=G\left[f\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right), \frac{1}{2^{n-1}}\right].$$

Másrészt, ha (6)-ba $x=\frac{k+1}{2^n}$, $y=\frac{k}{2^n}$-et helyettesítünk, a kapott

$$H\left[f\left(\frac{2k+1}{2^n}\right), f\left(\frac{1}{2^n}\right), f\left(\frac{k+1}{2^n}\right), f\left(\frac{k}{2^n}\right), \frac{k+1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right]=0,$$

pl.

$$H\left[f\left(\frac{3}{2^n}\right), f\left(\frac{1}{2^n}\right), f\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right), f\left(\frac{1}{2^n}\right), \frac{1}{2^{n-1}}, \frac{1}{2^n}\right]=0,$$

egyenlettel $f\left(\frac{2k+1}{2^n}\right)$ a már ismert $f\left(\frac{1}{2^n}\right)$-ből és az ismertnek feltételezett $f\left(\frac{k}{2^n}\right), f\left(\frac{k+1}{2^n}\right)$-ből kiszámítható (ha ez az egyenlet $f\left(\frac{2k+1}{2^n}\right)$-re megoldható). Ezzel $f(x)$ minden pozitív (egész és) diadikus tört x-re meg van határozva, pozitív nem diadikus x-ekre ismét határátmenettel

$$f(x)=\lim_{d_n \to x} f(d_n)$$

adjuk meg $f(x)$-et. Végül (6)-ba $x=0$-t helyettesítve, a kapott

$$H[f(y), f(-y), a, f(y), 0, y]=0$$

egyenlettel összefüggést kaptunk $f(y)$ és $f(-y)$ között, amiből $f(x)$ negatív x-ekre is meghatározható.

További *példák:*

A LOBACSEVSZKIJ ([3])-féle

(31) $$f(x+y)f(x-y)=f(x)^2$$

függvényegyenlet így is megoldható: $y=x=\frac{t}{2}$ helyettesítéssel

$$f\left(\frac{t}{2}\right)=\sqrt{af(t)},$$

tehát

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{ab}=a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{2}}=ac^{\frac{1}{2}},$$

$$f\left(\frac{1}{4}\right)=\sqrt{af\left(\frac{1}{2}\right)}=ac^{\frac{1}{4}},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f\left(\frac{1}{2^n}\right)=ac^{\frac{1}{2^n}}$$

és (31)-ben $x=\frac{1}{2^{n-1}}$, $y=\frac{1}{2^n}$ helyettesítéssel

$$f\left(\frac{3}{2^n}\right)f\left(\frac{1}{2^n}\right)=f\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)^2,$$

vagyis

$$f\left(\frac{3}{2^n}\right)ac^{\frac{1}{2^n}}=\left(ac^{\frac{1}{2^{n-1}}}\right)^2=a^2c^{\frac{1}{2^{n-2}}},\quad f\left(\frac{3}{2^n}\right)=ac^{\frac{3}{2^n}}.$$

Általában is

$$f\left(\frac{m}{2^n}\right)=ac^{\frac{m}{2^n}},$$

mert ezt $\frac{1}{2^n}$-re (tehát $\frac{2}{2^n}=\frac{1}{2^{n-1}}$-re is) igazoltuk, és ha $\frac{k}{2^n}$ és $\frac{k+1}{2^n}$-re már beláttuk, akkor $\frac{2k+1}{2^n}$-re is érvényes, amit a (31)-ben elvégzett $x=\frac{k+1}{2^n}$, $y=\frac{k}{2^n}$ helyettesítéssel láthatunk be:

$$f\left(\frac{2k+1}{2^n}\right)f\left(\frac{1}{2^n}\right)=f\left(\frac{k+1}{2^n}\right)^2,$$

$$f\left(\frac{2k+1}{2^n}\right)ac^{\frac{1}{2^n}}=a^2c^{\frac{2k+2}{2^n}},$$

azaz

$$f\left(\frac{2k+1}{2^n}\right)=ac^{\frac{2k+1}{2^n}}$$

és ezt kellett bizonyítani. — Nem diadikus x-ekre határátmenettel szintén

$$f(x)=ac^x$$

-et kapunk. — Végül (31)-be $x=0$-t téve

$$f(y)f(-y)=f(0)^2=a^2, \qquad f(y)=\frac{a^2}{f(y)}=\frac{a^2}{ac^y}=ac^{-y}.$$

Így itt is megkaptuk, hogy

$$f(x)=ac^x$$

a (31) egyenlet általános folytonos megoldása és ez ki is elégíti (31)-et.

Végül az I. 3. § végén szereplő (22) és (23) függvényegyenleteket az inverz függvényekre írva fel, az

(32) $$f(x+y)=f(x)f(y)-\sqrt{1-f(x)^2}\sqrt{1-f(y)^2}$$

és az

$$f(x+y)=f(x)f(y)+\sqrt{f(x)^2-1}\sqrt{f(y)^2-1}$$

egyenleteket kapjuk, és ezek megoldása most $\cos cx$ illetve $\operatorname{ch} cx$ lesz. Példaképpen a két hasonló egyenlet közül a (32) megoldását mutatjuk be.

$|f(x)|\leqq 1$ lévén bevezethetjük az $f(1)=\cos c$ jelölést. — (32)-ből $y=x$ mellett

$$f(2x)=2f(x)^2-1, \qquad f\left(\frac{t}{2}\right)=\sqrt{\frac{1+f(t)}{2}},$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\frac{1+\cos c}{2}}=\cos\frac{c}{2}, \quad f\left(\frac{1}{4}\right)=\sqrt{\frac{1+f\left(\frac{1}{2}\right)}{2}}=\sqrt{\frac{1+\cos\frac{c}{2}}{2}}=\cos\frac{c}{4},$$

. . . .

$$f\left(\frac{1}{2^n}\right)=\cos\left(c\frac{1}{2^n}\right).$$

Általában is $f\left(\frac{m}{2^n}\right)=\cos\left(c\frac{m}{2^n}\right)$, mert ezt $m=1, 2$-re már igazoltuk, és ha $m=1$, $m=k$ és $m=k+1$-re már igaz, akkor (32)-ből $x=\frac{k+1}{2^n}$, $y=\frac{k}{2^n}$ helyettesítéssel

$$f\left(\frac{2k+1}{2^n}\right)=\cos\left(c\frac{k+1}{2^n}\right)\cos\left(c\frac{k}{2^n}\right)-\sin\left(c\frac{k+1}{2^n}\right)\sin\left(c\frac{k}{2^n}\right)=\cos\left(c\frac{2k+1}{2^n}\right).$$

Határátmenettel minden nem-negatív valós x-re is

$$f(x) = \cos cx,$$

tehát

$$f(0) = \cos c0 = 1$$

is.

Végül a negatív x-ekre való kiterjesztés $f(x-y)$ hiánya miatt itt némileg módosított alakban megy: (32)-ben $y = -x$ helyettesítéssel

$$1 = f(0) = \cos cx f(-x) - \sin cx \sqrt{1-f(-x)^2},$$

$$\sin^2 cx[1-f(-x)^2] = 1 - 2\cos cx f(-x) + \cos^2 cx f(-x)^2,$$

$$f(-x)^2 - 2\cos cx f(-x) + \cos^2 cx = 0,$$

$$f(-x) - \cos cx = 0,$$

$$f(-x) = \cos cx = \cos c(-x).$$

Tehát (32) általános folytonos megoldása

$$f(x) = \cos cx$$

és ez ki is elégiti (32)-t:

$$\cos c(x+y) = \cos cx \cos cy - \sin cx \sin cy =$$

$$= \cos cx \cos cy - \sqrt{1-\cos^2 cx}\ \sqrt{1-\cos^2 cy}.$$

Ezzel egyúttal újabb bizonyítását kaptuk, hogy (22) általános folytonos szigorúan monoton megoldása

$$f(x) = k \arccos x$$

és hasonlóan (23)-é $f(x) = k \operatorname{ar\,ch} x$.

Bár a (6) egyenlet általánosítása pl. (1)-nek, viszont a fenti 1., 2. megoldási eljárásaink (és hasonlóan az I. 4. §, I. 5. § eljárásai) feltételezik pl., hogy x explicite is (az f függvényen kívül is) szerepeljen az egyenletben. Ha ez nem teljesül, úgy az I. 1. § végén (vagy az I. 2. § végén) említett, vagy az I. 6. §-beli 3. eljárással kísérletezhetünk, bár itt ismét legalábbis folytonosságot kellett feltételezni, tehát ezek az eljárások nem olyan általánosak, és másrészt hatókörük sincs oly pontosan körülhatárolva, mint az (I. 4. § és) I. 5. §-beli eljárásoké és az I. 6. § 1., 2. eljárásáé.

II. NÉHÁNY ALKALMAZÁS

II. 1. § A nem-euklidesi távolságfogalom

A függvényegyenletek néhány újabb alkalmazásának tárgyalását (régebbiek találhatók pl. a [9], [22], [14], [25] és részben a [28], [29] dolgozatokban) a (22), (23) függvényegyenletek alkalmazásával kezdjük a nem-euklidesi geometriában (vö. [38]).

A sík (x_1, x_2, x_3) homogén koordinátájú pontjához hozzárendeljük a tér (x_1, x_2, x_3) (közönséges) koordinátájú pontját. A homogén koordináták által tartalmazott tetszőleges szorzót az elliptikus esetben az

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=1,$$

ill, a hiperbolikus esetben az

$$x_1^2-x_2^2-x_3^2=1$$

normálással határozzuk meg, tehát az az elliptikus síkhoz egy gömbfelület, a hiperbolikus síkhoz egy kétköpenyű hiperboloid pontjait rendeljük. Ennek pontjait röviden az $X=(x_1, x_2, x_3)$ vektorokkal jellemezzük. A vektorokat a továbbiakban nagy, a skalárokat kisbetűkkel fogjuk jelölni.

Keressük a $d(X, Y)>0$ $(X\neq Y)$ távolságnak olyan értelmezéseit, amelyek (folytonosak és)

a) „mozgással" (az $x_1^2+x_2^2+x_3^2$ ill. $x_1^2-x_2^2-x_3^2$ kifejezést megtartó transzformációval) szemben *invariánsak*, és

b) egy egyenesen (síkmetszeten) felvett távolságokat tekintve *additívek*.

VARGA OTTÓ kimutatta, hogy az a) feltételnek csak a

$$d(X, Y)=f(X\cdot Y)$$

alakú kifejezések felelnek meg, ahol $f(x)$ tetszőleges folytonos függvény és $X\cdot Y$ a „skaláris" szorzás jele, amelyet az elliptikus esetben

$$X\cdot Y=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3$$

-nak, a hiperbolikus esetben

$$X\cdot Y=x_1y_1-x_2y_2-x_3y_3$$

-nak értelmezünk. (Észrevehető, hogy mindkét értelmezésű szorzat *disztributív*.) Ennek bizonyítására, amely a [38] közös dolgozatunkban megjelent, itt nem térek ki.

Megjegyzem azonban, hogy a normálási feltételek miatt bármely vektor önmagával való skaláris szorzata 1-gyel egyenlő.

$$X\cdot X=1 \tag{33}$$

minden X vektorra. — Azt állítom, hogy ebből

(34) $$|X\cdot Y|\leqq 1 \qquad \text{(az elliptikus esetben)},$$

ill.

(35) $$|X\cdot Y|\geqq 1 \qquad \text{(a hiperbolikus esetben)}$$

következik minden X, Y vektorpárra.

Az elliptikus esetben a *Cauchy—Bunjakovszkij—Schwarz* egyenlőtlenségből következik (34):

$$(X\cdot Y)^2=(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3)^2\leqq(x_1^2+x_2^2+x_3^2)(y_1^2+y_2^2+y_3^2)=(X\cdot X)(Y\cdot Y)=1.$$

A hiperbolikus esetben ehhez ezen egyenlőtlenség hiperbolikus analogonját kell bebizonyítanunk:

7°. TÉTEL. *Ha* $x_1^2-x_2^2-\cdots-x_n^2>0$, *akkor*

$$(x_1y_1-x_2y_2-\cdots-x_ny_n)^2\geqq(x_1^2-x_2^2-\cdots-x_n^2)(y_1^2-y_2^2-\cdots-y_n^2).$$

Egyenlőség csak akkor állhat, ha $\{x_i\}$ *és* $\{y_i\}$ *arányosak:*

$$ax_i=by_i \qquad (i=1,2,\ldots,n).$$

BIZONYÍTÁS: Képezzük a

$$v(u)=(x_1u+y_1)^2-(x_2u+y_2)^2-\cdots-(x_nu+y_n)^2=$$
$$=(x_1^2-x_2^2-\cdots-x_n^2)u^2+2(x_1y_1-x_2y_2-\cdots-x_ny_n)u+(y_1^2-y_2^2-\cdots-y_n^2)$$

kifejezést. $v(u)$ az u^2-nek $x_1^2-x_2^2-\cdots-x_n^2>0$ együtthatója miatt felfelé nyíló parabolával ábrázolható, tehát van, ahol $v(u)>0$, pl. $v(\pm\infty)$ pozitív. Másrészt az $u=-\dfrac{y_1}{x_1}$ helyén

$$v\left(-\frac{y_1}{x_1}\right)=-\left(y_2-x_2\frac{y_1}{x_1}\right)^2-\cdots-\left(y_n-x_n\frac{y}{x}\right)^2\leqq 0.$$

$$(x_1^2-x_2^2-\cdots-x_n^2>0 \text{ miatt } x_1\neq 0).$$

Egyenlőség csak akkor állhat, ha $ax_i=by_i$ $(i=1,2,\ldots,n)$. Így $v(u)$-nak valós gyökei vannak, amelyek legfeljebb akkor eshetnek egybe, ha $ax_i=by_i$ $(i=1,2,\ldots,n)$. Tehát a diszkrimináns nem-negatív és legfeljebb akkor 0, ha $ax_i=by_i$ $(i=1,2,\ldots,n)$:

$$(x_1y_1-x_2y_2-\cdots-x_ny_n)^2\geqq(x_1^2-x_2^2-\cdots-x_n^2)(y_1^2-y_2^2-\cdots-y_n^2)$$

és itt egyenlőség legfeljebb akkor állhat, ha $ax_i = by_i$ $(i=1, 2, \ldots, n)$, de ez esetben, mint behelyettesítéssel azonnal látható, valóban egyenlőség áll, qu. e. d.

Ezt alkalmazva (33)-ból valóban megkapjuk, hogy

$$(X\cdot Y)^2 = (x_1 y_1 - x_2 y_2 - x_3 y_3)^2 \geqq (x_1^2 - x_2^2 - x_3^2)(y_1^2 - y_2^2 - y_3^2) = (X\cdot X)(Y\cdot Y) = 1$$

és éppen ez volt a bizonyítandó (35) egyenlőtlenség.

Mármost a b) feltételt a következőképpen érvényesítjük:

Legyen

$$Z = sX + tY \tag{36}$$

a kollinearitás biztosítására, akkor b) nyilván így szól:

$$d(X, Y) = d(X, Z) + d(Z, Y),$$

vagyis

$$f(X\cdot Y) = f(X\cdot Z) + f(Z\cdot Y). \tag{37}$$

A (36) egyenletet önmagával, ill. X-el, ill. Y-nal szorozva a disztributivitás és (33) miatt az

$$1 = s^2 + t^2 + 2st\,X\cdot Y,$$

$$X\cdot Y = \frac{1 - s^2 - t^2}{2st},$$

ill. $X\cdot Z = s + t\,X\cdot Y = \dfrac{1 + s^2 - t^2}{2s}$, ill. $Z\cdot Y = s\,X\cdot Y + t = \dfrac{1 - s^2 + t^2}{2t}$

összefüggésekhez jutunk. Ezeket (37)-be helyettesítve végül a

$$f\left(\frac{1 - s^2 - t^2}{2st}\right) = f\left(\frac{1 + s^2 - t^2}{2s}\right) + f\left(\frac{1 - s^2 + t^2}{2t}\right) \tag{38}$$

függvényegyenletet kapjuk.

Ennek megoldására bevezetjük az

$$x = \frac{1 + s^2 - t^2}{2s} = X\cdot Z, \quad y = \frac{1 - s^2 + t^2}{2t} = Z\cdot Y$$

jelöléseket. (34), ill. (35)-ből

az elliptikus esetben $|x| \leqq 1$, $|y| \leqq 1$,

a hiperbolikus esetben $|x| \geqq 1$, $|y| \geqq 1$

következik. Másrészt

$$4stxy=(1+s^2-t^2)(1-s^2+t^2)=1-(s^2-t^2)^2=2s^2t^2-s^4-t^4+1,$$

$$\left.\begin{array}{l}4s^2(1-x^2)=4s^2-(1+s^2-t^2)^2=\\ 4t^2(1-y^2)=4t^2-(1-s^2+t^2)^2=\end{array}\right\} 2s^2t^2-s^4-t^4+2s^2+2t^2-1,$$

$$\left.\begin{array}{l}4s^2(x^2-1)=\\ 4t^2(y^2-1)=\end{array}\right\} =-(2s^2t^2-s^4-t^4+2s^2+2t^2-1)$$

$$\left.\begin{array}{l}xy-\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}=\\ xy+\sqrt{x^2-1}\sqrt{y^2-1}=\end{array}\right\} =\frac{2s^2t^2-s^4-t^4+1-(2s^2t^2-s^4-t^4+2s^2+2t^2-1)}{4st}=$$

$$=\frac{1-s^2-t^2}{2st}$$

és így a (38) függvényegyenlet átmegy az elliptikus esetben a

$$f(xy-\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2})=f(x)+f(y)\qquad (|x|\leqq 1,\ |y|\leqq 1) \tag{22}$$

a hiperbolikus esetben a

$$f(xy+\sqrt{x^2-1}\sqrt{y^2-1})=f(x)+f(y)\qquad (|x|\leqq 1,\ |y|\geqq 1) \tag{23}$$

függvényegyenletbe. Ezen egyenletek általános folytonos szigorúan monoton megoldásai, mint azt az I. 3. §-ban és az I. 6. §-ban láttuk

$$f(x)=c\arccos x,\quad \text{illetve } f(x)=c\,\mathrm{ar\,ch}\, x,$$

ezek tehát a (38) függvényegyenlet összes folytonos szigorúan monoton megoldásai.

Mivel $f(y)=d>0$ miatt (22)—(23)-ból a mi folytonosnak feltett $f(x)$-ünk szigorúan monoton is; ezért

$$d(X,Y)=f(X\cdot Y)=\left\{\begin{array}{l}c\arccos(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3)\\ c\,\mathrm{ar\,ch}\,(x_1y_1-x_2y_2-x_3y_3)\end{array}\right.$$

az elliptikus, illetve hiperbolikus esetben. Ezek a c szorzó konstanstól eltekintve éppen a szokásos elliptikus (l. pl. [7]), ill. hiperbolikus távolság definíciójának felelnek meg. Érvényes tehát a következő

7. TÉTEL. *A (folytonossági, pozitívitási és)* a) *és* b) *feltételeknek csak a*

$$d(X,Y)=c\arccos(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3)$$

illetve

$$d(X,Y)=c\,\mathrm{arch}\,(x_1y_1-x_2y_2-x_3y_3)$$

elliptikus, ill. hiperbolikus távolságdefiníció felel meg.

II. 2. § Vektorok skaláris és vektoriális szorzása

Ugyancsak a vektorszorzással kapcsolatos az a kérdés, hogy két vektor közötti műveletekre vonatkozó milyen feltételek határozzák meg (esetleg egy állandó szorzótól eltekintve) a közönséges skaláris, illetve vektoriális vektorszorzást (vö. [31]).

A vektorszorzások a szorzás ismert tulajdonságai közül a disztributivitást tartják meg. Az előző §-ból azonban világos, hogy a disztributivitás magában nem elég, mert pl. az $x_1y_1-x_2y_2-x_3y_3$ művelet is disztributív. Kézenfekvő az a gondolat, hogy e művelet $x_1y_1-x_2y_2-x_3y_3$ értelmezésében az x_1 tengely kitüntetett szerepe az, amit ki kell zárni, hogy a szokásos vektorszorzásokhoz jussunk.

Valóban érvényes a

8. TÉTEL: *Egy állandó szorzótól eltekintve csak a szokásos skaláris és vektoriális szorzat tesz eleget az A és B vektorokat összekapcsoló*

$$A \cdot B \quad \textit{és} \quad A \times B$$

vektorműveletekre — melyek közül az elsőnek eredménye skalár, a másodiké vektor — kiszabott következő két feltételnek:

a) *rotáció-automorfizmus: a tér forgásánál a skaláris művelet eredménye változatlan marad, a vektoriálisé együtt forog (a térben nincs kitüntetett irány),*

b) *disztributivitás: összeget tagonként lehet szorozni, skaláris mennyiség kiemelhető a szorzatból.*

BIZONYÍTÁS: a)-ból világos, hogy a műveletek eredménye csak a két vektor nagyságától és a köztük bezárt szögtől függ. b)-ből látjuk, hogy

$$A \cdot B = |A|\,|B|\,E_A \cdot E_B, \qquad A \times B = |A|\,|B|\,E_A \times E_B, \tag{39}$$

$$\text{ahol} \quad E_A = \frac{A}{|A|}, \; E_B = \frac{B}{|B|}$$

az A, ill. B vektor irányába mutató egységvektorok. (E-vel mindig egységvektorokat fogunk jelölni.)

Még néhány elemi, geometriai meggondolásra lesz szükség, amelyeket részben SZELE TIBORTÓL vettem át (szóbeli közlés):

1. Ha A és B nem egyirányúak, akkor az $A \times B$ művelet eredménye egy, a nem egyirányú A, B vektorok síkjára *merőleges* vektor.

2. $X \cdot Y = 0$, ha $X \perp Y$.

3. $X \times Y = 0$, ha $X \| Y$.

(39) értelmében ezen állításokat elég egységvektorokra bizonyítani, pl.

2'. $E_1 \cdot E_2 = 0$, ha $E_1 \perp E_2$

és

3'. $E \times E = 0$.

1. BIZONYÍTÁSA: Legyen C egy, az A, B vektorok síkjára merőleges vektor. Az $A \times B$ vektor mindenesetre előállítható az A, B és C által feszített koordinátarendszerben:

$$A \times B = aA + bB + cC.$$

Az A, B, C vektorhármast C körül π-vel elforgatva, ez átmegy a $(-A)$, $(-B)$, C vektorhármasba, tehát a) miatt

$$(-A) \times (-B) = a(-A) + b(-B) + cC = -aA - bB + cC.$$

De b)-ből

$$(-A) \times (-B) = A \times B,$$

tehát

$$-aA - bB + cC = aA + bB + cC,$$

ami csak akkor lehetséges, ha

$$a = 0, \; b = 0, \; A \times B = cC,$$

tehát az $A \times B$ vektor az A, B vektorok síkjára merőleges és ezt kellett kimutatni.

2'. BIZONYÍTÁSA: Az $E_1 \perp E_2$ vektorpárt E_2 körül π szöggel elforgatva a $(-E_1)$, E_2 párt kapjuk, tehát a) és b)-ből

$$E_1 \cdot E_2 = (-E_1) \cdot E_2 = -E_1 \cdot E_2 \quad \text{azaz} \quad E_1 \cdot E_2 = 0.$$

következik és ez éppen a 2' állítás.

3'. BIZONYÍTÁSA hasonló: b)-ből nyilvánvaló, hogy $E \times E$ iránya csak E-ével (vagy $(-E)$-ével) eshetik össze:

$$E \times E = kE.$$

Mivel azonban az E vektor π-vel elforgatva $(-E)$-be kerül a) miatt egyúttal

$$(-E) \times (-E) = k(-E) = -kE,$$

de b) értelmében

$$-kE = (-E) \times (-E) = E \times E = kE,$$

tehát

$$k = 0, \quad E \times E = 0, \qquad \text{qu. e. d.}$$

Most már eljuthatunk feltételeinkből a (7) függvényegyenlethez, melynek megoldásából eddigi eredményeink alapján következik a 8. tétel.

Vezessük be a

(40) $$E_A \cdot E_B = f(\varphi),$$

illetve a

(41) $$E_A \times E_B = f(\varphi) E_{A\times B}$$

jelöléseket, ahol φ az E_A és E_B vektorok bezárta szög

$$(E_A, E_B)\sphericalangle = \varphi$$

és az $E_A, E_B, E_{A\times B}$ vektorok merőleges jobbrendszert alkotnak. (A (40) és (41) képletekben szereplő $f(\varphi)$ nem ugyanaz, de a következőkben azonos relációkat fogunk róluk kimutatni, úgyhogy a közös jelölés kényelmesebb lesz.) Legyen továbbá E_1, E_2, E_3 három komplanáris vektor és szögeik:

$$(E_1, E_2)\sphericalangle = \varphi - \psi, \quad (E_1, E_3)\sphericalangle = \varphi + \psi,$$

tehát

$$(E_1, E_2 + E_3)\sphericalangle = \varphi.$$

Akkor a b) disztributivitásból adódó

$$E_1 \cdot (E_2 + E_3) = E_1 \cdot E_2 + E_1 \cdot E_3,$$

ill.

$$E_1 \times (E_2 + E_3) = E_1 \times E_2 + E_1 \times E_3 \qquad [(E_1 \times E_2) \parallel (E_1 \times E_3)]$$

-ból

(7) $$2f(\varphi)\cos\psi = f(\varphi + \psi) + f(\varphi - \psi)$$

következik. E függvényegyenlet általános megoldása pedig, mint az I. 5. § 1.-ben láttuk (minden további feltétel nélkül):

$$f(\varphi) = a\cos\varphi + b\sin\alpha \qquad \left(f(0) = a,\ f\left(\frac{\pi}{2}\right) = b\right).$$

Ha már most a skaláris műveletet vizsgáljuk, akkor (39) és (40) értelmében a fenti 2. segédtételből

$$b = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad f(\varphi) = a\cos\varphi$$

$$A \cdot B = a|A|\,|B|\cos(A, B)\sphericalangle;$$

a vektoriális műveletre pedig (41), 3', és (39) révén

$$a = f(0) = 0, \quad f(\varphi) = b\sin\varphi,$$

$$A \times B = b|A|\,|B|\sin(A, B)\sphericalangle E_{A\times B}, \qquad (A \perp E_{A\times B} \perp B)$$

qu. e. d.

Ebből hasonló tételek következnek a kvaterniószorzásra is ([31], vö. [27], [4]).

IRODALOM

[1] D'ALEMBERT, J.: *Mémoir sur les principes de mécanique*, Hist. Acad. sci. Paris, *1769* (1778), 279—287.

[2] CAUCHY, A. L.: Cours d'analyse de l'École Polyt. 1. *Analyse algébrique*, Paris, 1821, p. 103. Oeuvres (2), 2, Paris, 1897, 98—105, 220.

[3] LOBACSEVSZKIJ, N. I.: *Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien*, Berlin, 1840, § 36.

[4] FROBENIUS, G.: Über lineare Substitutionen und bilineare Formen, *Journal für reine und angew. Math.*, 84 (1897), 1—63.

[5] JENSEN, J. L. W. V.: Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes, *Acta Math.*, 30 (1906), 179—193.

[6] KACZMARZ, ST.: Sur l'équation fonctionelle $f(x)+f(x+y)=\varphi(y)f\left(x+\frac{y}{2}\right)$, *Fund. Math.*, 6 (1924), 122—129.

[7] KLEIN, F.: *Vorlesungen über nicht-euklidische Geometrie*, Berlin, 1928, VI. § 1.

[8] CACCIOPOLI, R.: L'equazione funzionale $f(x+y)=F[f(x),f(y)]$, *Giornale di Battaglini*, (3), 66 (1928), 1—6.

[9] PICARD, É.: *Leçons sur quelques équations fonctionnelles avec des applications à divers problèmes d'analyse et de physique mathématique*, Paris, 1928, 1950.

[10] FRÉCHET, M.: Solution continue la plus générale d'une équation fonctionnelle de la théorie des probabilités en chaîne, *Bull. Soc. Math. de France*, 60 (1932), 242—280.

[11] KHINTCHINE, A.: Asymptotische Gesetze der Wahrscheinlichkeitsrechnung, *Ergebnisse d. Math.*, II. 4. Berlin, 1933.

[12] VRANCEANU, G.: *Leçons de géométrie différentielle*, I., Bucarest, 1947, 65—77.

[13] ACZÉL, J.: On mean values, *Bulletin of the Am. Math. Soc.*, 54 (1948), 392—400.

[14] ACZÉL, J.: Über eine Klasse von Funktionalgleichungen, *Comm. Math. Helv.*, 21 (1948), 247—256.

[15] ACZÉL, J.: Sur une équation fonctionnelle, *Publ. de l'Inst. Math. de l'Acad. Serbe des Sci.*, 2 (1948), 257—262.

[16] ACZÉL, J.: Sur les opérations définies pour nombres réels, *Bull. de la Soc. Math. de France*, 76 (1949), 59—64.

[17] TAMARI, D.: Caractérisation des semi-groupes à un paramètre, *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris*, 228 (1949), 1092—1094.

[18] GOŁĄB, S.: Sur les objets géometriques non différentiels, *Bulletin Acad. Polon. Sci. Cl. Sci. Math. Nat.* A, 1949, 67—72.

[19] RYLL-NARDZEWSKI, CZ.: Sur les moyennes, *Studia Math.*, 11 (1949), 31—37.

[20] KNASTER, B.: Sur une équivalence pour les fonctions, *Colloquium Math.*, 2 (1949), 1—4.

[21] ACZÉL, J.: Über einparametrige Transformationen, *Publ Math.*, 1 (1950), 243—247.

[22] ACZÉL, J.: Függvényegyenletek az alkalmazott matematikában, *MTA. III. Osztály Közleményei*, 1 (1951), 131—142.

[23] ACZÉL, J., KALMÁR, L., MIKUSINSKI J. G.: Sur l'équation de translation, *Studia Math.*, 12 (1951), 112—116.

[24] Севастьянов, Б. А.: Теория бетьящихся случайных процессов, Усп. Мат. Наук, 6 (1951), b. 6 (46), 47—99.

[25] JÁNOSSY, L., RÉNYI, A., ACZÉL, J.: On composed Poisson distributions, I., *Acta Math. Hung.*, 1 (1950), 209—224. (Magyarul: *MTA III. Osztály Közleményei*, 1 (1951), 315—328.)

[26] RÉNYI, A.: On composed Poisson distributions, II., *Acta Math. Hung.*, 2 (1951), 83—98.

[27] RICHMOND, D. E.: Complex numbers and vector-algebra, *Amer. Math. Monthly*, 58 (1951), 622—628.

[28] ACZÉL, J.: Többváltozós függvényegyenletek, I., *Mat. Lapok*, 2 (1951), 99—117.

[29] ACZÉL, J.: Többváltozós függvényegyenletek, II., *MTA. AMI. Közleményei*, 1 (1952), 311—333.

[30] ACZÉL, J.: On composed Poisson distributions, III., *Acta Math. Hung.*, 3 (1952), 219—224.

[31] ACZÉL, J.: Bemerkungen über die Multiplikation von Vektoren und Quaternionen, *Acta Math. Hung.*, 3 (1952), 309—316.

[32] SZÁSZ, P.: Neue Bestimmung des Paralellenwinkels in der hyperbolischen Ebene mit den klassischen Hilfsmitteln. *Acta Sci. Math.*, 14 (1952), 247—251.

[33] SZÁSZ, P.: A hiperbolikus trigonometria új síkbeli előállítása a klasszikus segédeszközökkel, *MTA. III. Osztály Közleményei*, 3 (1953), 527—533.

[34] Добрущин, Р. А.: Обобщение уравнении Колмогорова для Марковских процессов с конечным числом возможных состояний, Мат. Сборник, (75), 33 (1953), 567—596.

[35] ACZÉL, J.: Grundriss einer allgemeinen Behandlung von einigen Funktionalgleichungstypen, *Publ. Math.* 3 (1953), 119—132.

[36] BAKER, G. A.: Einstein-numbers, *Amer. Math. Monthly*, 61 (1954), 39—41.

[37] ACZÉL, J.: Lösung der Vektor-Funktionalgleichung der homogenen und inhomogenen n-dimensionalen einparametrigen „Translation", der erzeugenden Funktion von Kettenreaktionen und des Stationären und nicht-stationären Bewegungsintegrals, *Acta Math. Hung.*, 6 (1955), 131—141.

[38] ACZÉL, J., VARGA, O.: Bemerkung zur Cayley-Kleinschen Maßbestimmung, *Publ. Math.*, 4 (1955), 3—15.

[39] ACZÉL, J.: Remarques algébriques sur la solution donnée par M. Fréchet à l'équation de Kolmogoroff I, *Publ. Math.*, 4 (1955), 33—42.

[40] ACZÉL. J., HOSSZÚ, M.: On transformations with several parameters and operations in multidimensional spaces, *Acta Math. Hung.*, 7 (1956), 327—338.

A Debreceni Kossuth Lajos Tudományegyetem Matematikai Intézete

A POPULÁCIÓRA VONATKOZTATOTT HASONLÓSÁG FOGALMÁRÓL*

J. PERKAL *(Vrocław)*

Jóllehet a (geometriai) hasonlóság az ókor óta ismeretes fogalom (szobrok, festmények, térképek, stb.), mégsem alkalmas arra, legalábbis elemi matematikai értelmében, hogy kifejezze az élő világ egyedei közötti hasonlósági viszonyokat. Nem létezik két geometriailag hasonló lény, kivéve azt az esetet, midőn azonos méretűek. Valóban, például ahhoz, hogy egy fa képes legyen nedveit cirkuláltatni, az szükséges, hogy törzsének keresztmetszete körülbelül arányos legyen v térfogatával, tehát átmérője $\sqrt{v}$-vel legyen arányos. Ilyen meggondolások alapján egy $4v$ térfogatú fa átmérője $\sqrt{4} = 2$-ször nagyobb kellene, hogy legyen. Mármost ahhoz, hogy geometriai hasonlóság megvalósuljon, ez az átmérő, mint lineáris méret, nem nőhet csak $\sqrt[3]{4} < 2$-szeresére.

Mindazonáltal, mint az közismert, a természettudósok a hasonlóságnak egy, az azonosságnál sokkal általánosabb fogalmát használják, és kétségkívül, ilyen fogalom szükséges is. Ennek nyilvánvalóan több különböző értelmet tulajdoníthatunk. Ez az előadás azt tűzi ki céljául, hogy két ilyen kísérletet javasoljon.

Legyenek $x, y, z, \ldots$ egy P populáció egyedei. Ezeket az egyedeket a k számú $c_1, c_2, \ldots, c_k$ mennyiség határozza meg, és úgy kezelhetők, mint a k-dimenziós euklideszi tér pontjai. Az xSy szimbólum azt fogja jelenteni, hogy x és y *hasonlóak*. Tegyük fel, hogy

1. ha $x = y$, akkor xSy (a hasonlóság általánosabb, mint az azonosság),
2. ha xSy, akkor ySx (a hasonlóság szimmetrikus reláció),
3. ha xSy és ySz, akkor xSz (a hasonlóság tranzitív reláció).

A tranzitivitás törvénye leszűkíti a természettudósok által használt hasonlósági fogalmat. Valóban, ők kieszelik a két nem-hasonló egyed közötti láncok létezését, mely láncokat olyan egyed-láncszemek alkotják, melyek mindegyike hasonló közvetlen szomszédjaihoz. A 3. tulajdonság alapján ez a lehetőség számunkra ki van zárva.

Két egyedet *azonosnak* fogunk tekinteni, ha mért tulajdonságaik $c_1, c_2, \ldots, c_k$ nagyságai révén megkülönböztethetetlenek, vagyis ha a k-dimenziós

* A Biometriai Symposionon (Budapest), 1959. szeptember 8-án elhangzott előadás szövege.

térben nekik megfelelő egyedi pontok egybeesnek. Két egyedet az *S értelemben hasonlónak* fogjuk nevezni, ha a nekik megfelelő egyedi pontok valamely előre definiált S család ugyanazon halmazában vannak; erről az S családról azt fogjuk mondani, hogy az az xSy relációt *indukálja* (tekintettel arra, hogy ez az indukció egyértelmű). Például a koordináták kezdőpontján áthaladó összes egyenesek S családja a geometriai hasonlóságot indukálja.

Ha megadtunk egy S családot, és következésképp az általa indukált xSy hasonlóságot, akkor csak egyetlen, az S hasonlóságot *invariánsul hagyó transzformáció* létezik, vagyis egyetlen olyan transzformáció van, melynél az x pont és transzformáltja, az S család ugyanazon halmazához tartozik. Ezt a transzformációt $S(x)$-szel jelöljük. Például abban az esetben, ha S a geometriai hasonlóság, ilyen transzformáció az $S(x) = a \cdot x$ transzformáció, ahol a állandó.

Minden mennyiséget, mely az $S(x)$ transzformációnak invariánsa, az S hasonlóság *indexének* fogjuk nevezni. Például a $\frac{c_i}{c_j}$ alakú hányadosok a geometriai hasonlóságnak indexei. Ezen túlmenően a $\frac{c_1}{c_2}, \frac{c_2}{c_3}, \ldots, \frac{c_{k-1}}{c_k}$ indexek ezen hasonlóság *teljes* index-rendszerét alkotják, vagyis valamely egyed összes ilyen indexeinek egy másik egyed megfelelő indexeivel való egyenlősége szükséges és elegendő feltétele geometriai hasonlóságuknak.

Mármost a hasonlóság szokásos értelme viszonylagosnak mutatkozik. Két olyan kínai, akiket Európa lakosainak populációjában hasonlóknak minősítenek, a kínaiak valamely populációjában lehetnek nem-hasonlók. Természetes dolog tehát a hasonlóság jelentését a populációhoz kötni.

Itt a populációra vonatkoztatott hasonlóság két fajtáját fogom megkülönböztetni. Az elsőt *deviációs hasonlóságnak*, a másodikat pedig *természetes hasonlóságnak* fogom nevezni.

Ha valamely populáció homogén, tekinthetjük annak *centrumát*, azaz egy olyan virtuális egyedet, melynek tulajdonsági mennyiségei egyenlők az átlagosokkal. Ezt jelölje p. Két egyedet, x-t és y-t *deviációsan hasonlóknak* fogunk nevezni, ha tulajdonságaik nagyságai tekintetében a p centrumtól arányos módon térnek el. Így, ha x és y a p-től a c_i (ahol $i = 1, 2, \ldots, k$) mennyiségekben térnek el, továbbá ezen differenciák állandók és i-től függetlenek, akkor x és y ebben az értelemben hasonló. Ha például egy ember a populáció centrumától csak orrának hosszában tér el, akkor mindazon emberek, akik hozzá deviációsan hasonlók, a centrumtól csak ebben a tulajdonságban fognak eltérni.

Egy karikatura lényege abban áll, hogy hangsúlyozzuk a modell jellemző vonásait, amit azáltal lehet elérni, hogy a modell és a centrum tulajdonságai közötti különbségeket arányosan szorozzuk. Ebben az esetben a karikatúra deviációsan hasonlít a modellre.

A deviációs hasonlóságot indukáló S halmaz-család a populáció p centrumán áthaladó összes egyenesek családja (és nem az origón áthaladó egyenesek családja, mint a geometriai hasonlóság esetében). Tehát két egyed deviációsan hasonló egymáshoz, ha a k-dimenziós térbeli egyedi pontjaikat összekötő egyenes a p centrumon át halad. Jelöljük p koordinátáit $\bar{c}_1, \bar{c}_2, \ldots, \bar{c}_k$-val. Az ezt a hasonlóságot invariánsul hagyó transzformáció (vektori) alakja a következő: $S(x) = a\,(x-p)$, vagyis numerikus alakban $S(c_i) = a\,(c_i - \bar{c}_i)$, ahol az a együttható állandó.

Ennek a hasonlóságnak az indexei a $\frac{c_i - \bar{c}_i}{c_j - \bar{c}_j}$ hányadosok, és a $\frac{c_1 - \bar{c}_1}{c_2 - \bar{c}_2}$, $\frac{c_2 - \bar{c}_2}{c_3 - \bar{c}_3}, \ldots, \frac{c_{k-1} - \bar{c}_{k-1}}{c_k - \bar{c}_k}$ rendszer ezen indexek teljes rendszere.

Mégis, a deviációs hasonlóság fogalma nem mindig bír érdekes természetes értelemmel. Tekintsük például különböző korú és két tulajdonság: termet és súly által jellemzett gyermekek populációját. Itt a centrum függ az életkorok populáción belüli eloszlásától, és következésképpen nem bír biológiai érdekességgel, éppúgy, mint a deviációs hasonlóság.

Ilyenkor a természetes hasonlóság fogalma az, mely lehetővé teszi, hogy a természettudós intuicióját jobban megragadjuk. Ez esetben a centrum szerepét nem pont, hanem vonal játssza.

Ha felosztjuk a gyermekek ugyanezen populációját életkorok szerinti csoportokra és megkeressük minden egyes csoport centrumát, akkor látjuk, hogy ezen centrumok egy vonal (a fejlődési vonal) mentén helyezkednek el. Azonban a populáció centruma más esetekben is meg lehet fosztva biológiai értékétől. A térben valamely populációt egy többé vagy kevésbé kiterjedt pontfelhő (mage des points) ábrázol. Mennél inkább gömb alakú ez a felhő, annál nagyobb szerep jut a populáció centrumának. Ezzel szemben mennél elnyúltabb ez a felhő, annál nagyobb szerepet játszik egy vonal. Ha úgy tekintjük, hogy a populációk nem túlságosan térnek el a normális eloszlástól, fel lehet tételezni, hogy ez a vonal egyenes (HOTELLING tengelye [1]).

Ekkor két egyént természetes értelemben hasonlónak tekinthetünk, ha egyedi pontjaik a főtengellyel párhuzamos egyenesen helyezkednek el.

Minthogy ezen tengely numerikus meghatározása rendszerint meglehetősen unalmas dolog, én ezt egy másik egyenessel helyettesítem, mégpedig azzal, melyet *természetes tengely*nek neveztem el (lásd [2]), és amelyet már *Teissier* (lásd [3]) is vizsgált. Ezen azt a tengelyt értem, melynek komponensei rendre a $c_1, c_2, \ldots, c_k$ tulajdonságok $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k$ *szórásai*. Következésképp két egyedet *természetes értelemben hasonlónak* nevezek, ha a c_i tulajdonságaik értékei közötti különbségek ezen σ_i szórásokkal arányosak, állandó (i-től független) arányossági együttható mellett.

Ebből következően a természetes hasonlóságot indukáló család a természetes tengellyel párhuzamos egyenesek családja. Tehát azt lehet mondani, hogy két egyed ebben az értemben hasonló valamely populációra nézve, ha az egyedi pontjaikat összekötő egyenes párhuzamos ezen populáció természetes tengelyével. A természetes hasonlóságot invariánsul hagyó transzformáció a térnek a természetes tengellyel párhuzamos transzlációja. Invariánsai és így természetes indexei, a természetes tengellyel párhuzamos egyenesek tetszés szerinti jellemzői.

Képezzük ezen indexek egy rendszerét. Normáljuk e célból a $c_1, c_2, \ldots$ $\ldots, c_k$ tulajdonságokat olyan módon, hogy várható értékük 0 és szórásnégyzetük 1 legyen:

$$\gamma_i = \frac{c_i - \bar{c}_i}{\sigma_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, k).$$

Normáljuk még egyszer a γ_i-ket a

$$\bar{\gamma} = \frac{1}{k} \qquad (\gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_k)$$

átlaguk segítségével olyképp, hogy minden egyes egyed bármely tulajdonságának várható értéke 0 legyen:

$$w_i = \gamma_i - \bar{\gamma} \qquad (i = 1, 2, \ldots, k).$$

Az így definiált w_i-k a természetes hasonlóság számára index-rendszert alkotnak. Ez a rendszer nem teljes, mert az indexek nem függetlenek, tudniillik $w_1 + w_2 + \cdots + w_k = c$. Elegendő azonban belőle bármelyiket elhagyni ahhoz, hogy teljes rendszerré váljék. Bebizonyítottam (lásd [2]), hogy a most definiált természetes indexek egyenlősége valóban szükséges és elegendő feltétele két egyed természetes hasonlóságának.

MILICEROWA (lásd [4]) érdekes eredményeket ért el a természetes indexek alkalmazásával boxolók és más sportolók szomatikus analízisére.

IDÉZETT MŰVEK

[1] HOTELLING, H.: Analysis of a complex of statistical variables into principal components. *J. Educ. Psych.*, **24** (1933) 417—441 és 498—520.

[2] PERKAL, J.: O wskaźnikach antropologicznych (lengyelül). *Przegl. Antrop.*, **19** (1953) 209—221. Összefoglalás franciául ibid. **20** 679—680.

[3] TEISSIER, G.: Allométrie de taille et variabilité chez Maia squinado. *Zool. Exper.*, **42** (1955) 221—264.

[4] MILICEROWA, H.: Zastosowanie wskaźników Perkala de charakterystyki budowi ciała bokserów. *Materiały i Prace Antrop.*, **20** (1956) 1—85. (Angolul) ibid. 71—77. Összefoglalás oroszul ibid. 78—84.

A TUDOMÁNYOS MINŐSÍTŐ BIZOTTSÁG HÍREI

•

Csikai Gyula kandidátusi értekezésének nyilvános vitája

CSIKAI GYULA kandidátusi értekezésének címe: „*A neutrino visszalökő hatásának és az elektron-neutrino szögkorrelációjának vizsgálata a* He^6 *betabomlásánál Wilson-kamrával.*" Nyilvános vitája 1957. szeptember 6-án zajlott le. A *bírálóbizottság* elnöke NOVOBÁTZTKY KÁROLY akadémikus volt, tagjai ERŐ JÁNOS, HOFFMANN TIBOR, KISS DEZSŐ, LADÁNYI KÁROLY, PÁL LÉNÁRD és SIMONYI KÁROLY voltak. A jelölt, tudományos életrajzának felolvasása után, ismertette értekezésének fő tételeit.

A disszertáció témája a beta-bomlás egyik legérdekesebb problémájához, a neutrino hipotézishez kapcsolódik. A jelölt kettős célt tűzött ki maga elé. Egyrészt a ködkamrában bekövetkező bomlások megfigyelésével közvetlenül kívánta kimutatni, hogy az elektron és a visszalökött mag mozgása ellentétben van az impulzusmegmaradás törvényével, ha nem vesszük figyelembe a neutrino létezését. A bomlásokról készült felvételek kiértékelése útján viszont meg akarta határozni az egyes események során a neutrino és az elektron pályái által bezárt szöget, hogy az így kapott szögeloszlásból következtetni tudjon a bomlást előidéző kölcsönhatás természetére vonatkozóan.

A feladat első része, — az elektron és a visszalökött mag pályájának megfigyelése ködkamrában — igen komoly kísérleti nehézségekbe ütközik, aminek oka az, hogy a visszalökött mag energiája a neutrino és az elektron kis tömege miatt igen kicsi. Ennek tudható be, lényegében, hogy valamirevaló felvételt mindezideig nem tudtak készíteni. CSIKAI GYULA kísérleteit alacsonynyomású hidrogénnel töltött ködkamrával végezte el, így biztosította, hogy a visszalökött mag még kis energia esetén is aránylag nagy utat tesz meg, s jól látható nyomot hoz létre. Ezt a célt szolgálja az is, hogy bomló magként He^6-ot használt, mert ennél a kis tömeg aránylag nagy bomlási energiával ($E_{max} = 3{,}5$ MeV) párosul. A kis nyomáson is jól működő ködkamra elkészítése mellett a 0,85 sec-os felezési idővel bomló He^6-nak a kamrába való bejuttatása jelentett komoly feladatot. Ezt a kamrában elhelyezett $Be(OH)_2$ pornak neutronokkal való besugárzásával, majd az (n, α) reakció során keletkező He^6 gáznak a kamra légterébe való befúvásával oldotta meg. A 120 kiértékelhető felvétel nagy részén világosan látható, hogy az elektron és a visszalökött mag iránya nem egyezik meg, más felvételeken viszont cseppszámlálással állapítható meg, hogy a visszalökött mag energiája több vagy kevesebb, mint ami az impulzus-megmaradás alapján várható.

A kapott 120 kísérleti adat alapján megvizsgálta az elektron-neutrino szögkorrelációt. A kísérletileg kapott eloszlást összehasonlította a különböző kölcsönhatások feltételezésével számított elméleti eloszlásokkal. Azt találta, hogy tenzor kölcsönhatás feltételezése esetén lesz a kísérleti adatoktól való eltérés legkisebb, s így arra a következtetésre jutott, hogy a $He^6 \rightarrow Li^6$ átmenetnél a tiszta tenzor kölcsönhatás dominál.

A disszertáció téziseinek ismertetése után az opponensek olvasták fel véleményüket. GYULAI ZOLTÁN akadémikus a téma időszerűségének hangsúlyozása mellett elsősorban a kísérleti problémák kiváló megoldását dicsérte. Ez nemzetközi mértékkel mérve is kiváló teljesítmény és ez a megállapítás érvényes magára az elvi elgondolásra és a gyakorlati kivitelre is. Mint hiányosságot említette meg, hogy a szerző nem mellékelt nagyobb gyűjteményt kísérleteiről készített fényképfelvételeiből.

MARX GYÖRGY, a fizikai tudományok doktora opponensi véleményében szintén kiemelte a probléma időszerűségét. Az elért eredményekről szólva a neutrino visszalökő hatását kimutató vizsgálatokat nemzetközi jelentőségűeknek tekintette. Véleménye szerint a neutrino által átvett impulzus és energia létét a disszertáció az eddigi kísérleteknél közvetlenebb és meggyőzőbb módon igazolta, és úgy gondolja, hogy egyes felvételek helyet kapnak majd a jövő monografiák képanyagában. Kevésbé elismerően szól a disszertáció második részéről, amely a bomlástermékek szögeloszlásának vizsgálatát írja le, és amelyben a jelölt a kölcsönhatás természetére vonatkozóan von le következtetéseket. A mérési adatok kis száma miatt ugyanis igen nagy a statisztikus hiba, és a szögeloszlásnak tenzorcsatolásra mutató aszimmetriája két-három esemény véletlen egybeeséséből is származhat. A jelölt ezt a körülményt következtetései során egyáltalán nem vette figyelembe.

Az opponensi vélemények elhangzása után a jelölt adta meg válaszát a feltett kérdésekre. Ezt az opponensek kielégítőnek tartották. Mivel további kérdés nem merült fel, a *bizottság* visszavonult, hogy határozatot hozzon. Megállapította, hogy a disszertáció a beta-bomlás legszebb és kísérleti szempontból legnehezebb problémakörébe kapcsolódik be. Hangsúlyozta a választott kísérleti módszer szellemességét, és a neutrino visszalökő hatásának kimutatásával kapcsolatban elért eredményeket elsőrendűeknek tekintette. A szögkorreláció meghatározására vonatkozóan az a véleménye alakult ki, hogy az ismertetett módszer a célnak megfelelő, de kellő pontosság eléréséhez alaposabb, és nagyobb anyagot felölelő mérések kiértékelése szükséges. Végül a bizottság a disszertációt egyhangúlag elfogadta és javasolta a *Tudományos Minősítő Bizottságnak,* hogy CSIKAI GYULÁT nyilvánítsa a fizikai tudományok kandidátusává.

Erő János
a fizikai tudományok kandidátusa

Nagy Kázmér kandidátusi értekezésének vitája

NAGY KÁZMÉR *„A fizikai nukleon vizsgálata konfigurációs térbeli módszerekkel”* című kandidátusi értekezésének nyilvános vitáját a *Tudományos Minősítő Bizottság* 1957. szeptember 13-án rendezte meg. A disszertáció opponensei HORVÁTH JÁNOS és NAGY KÁROLY, a fizikai tudományok kandidátusai voltak. NEUGEBAUER TIBOR elnök megnyitó szavai után a bíráló bizottág titkára ismertette NAGY KÁZMÉR eddigi tudományos munkásságát, majd a jelölt összefoglalta értekezésének téziseit.

A dolgozat első része a konfigurációs térbeli módszer alapvonásait tárgyalja szabad terek esetén. A második rész a kölcsönhatásban álló terekkel foglalkozik és összefoglalja a későbbiekben felhasznált legfontosabb összefüggéseket. A jelölt önálló eredményeit a harmadik rész tartalmazza. Ebben a Tomonaga-féle közepes csatolási módszert alkalmazza a Dirac-egyenlet által leírt fizikai nukleon tárgyalására semleges skalár, illetve szimmetrikus pszeudoskalár mezontérrel való kölcsönhatás esetén. A számítások során konfigurációs térbeli módszereket használ, tehát a teret jellemző állapotvektorok a csupasz részecskék térbeli elhelyezkedéséről adnak számot. A jelen közelítésben a nukleon párképződést nem veszi tekintetbe a szerző. A fellépő divergens sajátenergiák a nukleontömeg renormálásával kiejthetők. A nyert állapotvektorok alapján a várható értékek meghatározásán kívül lehetőség nyílik a fizikai nukleon struktúrájával kapcsolatos problémák megvilágítására is. (Kiszámítható például az energiasűrűség a fizikai nukleon környezetében.) A konfigurációs módszer másik előnye, hogy segítségével az elmélet kovariánsan megfogalmazható. Nukleon és semleges skalártér esetén először a nukleon visszalökődésének figyelembevétele nélkül végzi el számításait, majd lényegesen továbbmenve figyelembe veszi a nukleonoknak a mezonemisszió során szenvedett visszalökődését. Ezek után a HEBER által kidolgozott nukleonmodell kritikáját adja. Szimmetrikus pszeudoskalár mezontérrel kölcsönhatásban álló nukleontér esetén tekintetbe veszi a nukleon visszalökődését és egymezonos közelítést alkalmaz.

Mindkét opponens opponensi véleményében rámutat arra, hogy az értekezés a nemzetközi érdeklődés előterében lévő problémát tárgyal. Kiemelik, hogy az eljárás kovarianciája, a nukleon struktúrájával kapcsolatos vizsgálatok, valamint a nukleon visszalökődésének figyelembevétele új, igen értékes és nagy érdeklődésre számottartó eredmények. Hangsúlyozzák, hogy a dolgozat tanúskodik a jelölt elmélyült tudományos képzettségéről, a kutatómunkára való rátermettségéről, továbbá, hogy a kandidátusi értekezések igényeit messzemenően kielégíti.

Mindkét opponens felhívja a figyelmet arra, hogy az eljárás továbbfejlesztése során lényeges a nukleonpárképződés figyelembevétele.

HORVÁTH JÁNOS kandidátus opponensi véleményében több kérdést tesz fel a jelöltnek. Hiányolja, hogy a tömörségre való törekvés következtében több figyelemre méltó eredményt nem hangsúlyozott ki eléggé.

NAGY KÁROLY kandidátus hiányolja, hogy a szerző csak a π mezonokkal való kölcsönhatást vizsgálja, továbbá hogy a szimmetrikus pszeudoskalár mezontérrel végzett számításokban csak egymezonos amplitudókat vett tekintetbe. Felhívja a figyelmet arra, hogy a többmezonos amplitudók figyelembevétele lényegesen módosíthatja a kevesebb mezonos amplitudókkal elért eredményeket.

Ezek után NAGY KÁZMÉR válaszolt a feltett kérdésekre. Kiemeli, hogy HEBER nukleonmodellje azért tarthatatlan, mert a visszalökődést nem veszi figyelembe. Részletesen kitért a párképződéssel kapcsolatos kérdésekre is. Azt, hogy a párképződés figyelembevétele esetén a mezontömeg és töltés renormálásával kapcsolatban milyen nehézségek merülhetnek fel, jelenleg nem tudjuk, mivel ilyen számításokat a közepes csatolás módszerével még senki sem végzett.

Az opponensek a jelölt válaszait kielégítőknek találták. Ezek után a bírálóbizottság határozathozatalra vonult vissza. A határozat megállapítja, hogy „a dolgozat egy jelenleg a tudományos érdeklődés homlokterében álló kérdést tárgyal. A jelöltnek dolgozatában sikerült jelentősen továbbfejleszteni a terek kvantumelméletének ún. konfigurációs térbeli módszereit a fizikai nukleon struktúrájával kapcsolatban. Disszertációjában jelentős, nemzetközi szempontból is figyelemre méltó új eredmény az, hogy a jelöltnek sikerült a Tomonaga-féle közepes csatolás módszerét konfigurációs térre alkalmaznia és ezzel azt kovarianssá tennie. A jelölt az opponensek kérdéseire kielégítő választ adott és ezzel nemcsak azt bizonyította be, hogy disszertációja témakörét teljesen ismeri, hanem azt is, hogy tudományát jelentős új eredményekkel gazdagítani képes.

Ezért a bírálóbizottság egyhangúlag javasolja a *Tudományos Minősítő Bizottságnak*, hogy NAGY KÁZMÉRT nyilvánítsa a fizikai tudományok kandidátusává, továbbá, hogy adja meg NAGY KÁZMÉR számára azt a jogot, hogy egy következő jelentős dolgozatával határidőtől függetlenül, közvetlenül pályázhassék a fizikai tudományok doktori minősítésére".

Ladányi Károly,
a fizikai tudományok kandidátusa

Szépfalusy Péter „A Fermi-gáz statisztikus tárgyalásának továbbfejlesztése" című kandidátusi dolgozat nyilvános vitája

A *Tudományos Minősítő Bizottság* 1957. szeptember 20-án tartotta meg Szépfalusy Péter *„A Fermi-gáz statisztikus tárgyalásának továbbfejlesztése"* című kandidátusi disszertációjának vitáját. A disszertáció opponensei HORVÁTH JÁNOS és KÓNYA ALBERT, a fizikai tudományok kandidátusai, a bíráló bizottság tagjai: elnök: NOVOBÁTZKY KÁROLY akadémikus, titkár: BERENCZ FERENC, a fizikai tudományok kandidátusa, tagok: GÁSPÁR REZSŐ és HOFFMAN TIBOR, a fizikai tudományok doktorai, NAGY KÁROLY, a fizikai tudományok kandidátusa.

Az elnök megnyitó szavai után a bíráló bizottság titkára ismertette a jelölt tudományos munkásságát, amely 7 dolgozatot ölel fel, majd a jelölt előadta dolgozatának téziseit.

A disszertáció első részében a szerző rövidre fogott tárgyalását adja azoknak a dolgozatoknak, amelyek az utóbbi időben a statisztikus elmélet továbbfejlesztése tárgykörében megjelentek. Ismerteti THEIS eljárását, aki DIRAC módszerét teszi két vonatkozásban is pontosabbá és ezáltal exponenciálisan csökkenő sűrűségeloszlást érhet el. Az inhomogenitási korrekciók közül mindenek előtt a Weizsäcker-korrekciót tárgyalja, majd összefoglalja GOMBÁS eredményeit a Fermi-féle energiatag és a Weizsäcker-energia együttes figyelembevétele esetére. PLASKETTnek egy, a hullámegyenletnek MILNEtől származó közelítő megoldására alapozott eljárás ismertetése és helyes kritikája után önálló elgondolását adta elő a Milne-módszer jobb felhasználására vonatkozóan. A disszertáció első része SWIATECKI munkájának ismertetésével zárul, aki az áthatolhatatlan falakkal határolt térfogatelemeken belül konstans helyett lineárisan változónak tekinti a potenciált.

A dolgozat második része a szerző elgondolásait tartalmazza. Feles spínű részecskékből álló rendszerek stacioner állapotát vizsgálva az inhomogenitási korrekció származtatásával egyidejűleg statisztikus modellt mutat be, amelyben az állapotokra való összegezés egzakt módon keresztülvihető és nem kell azt integrállal közelíteni. Ily módon a nullponti kinetikus energia FERMItől származó kifejezése következetesen továbbfejleszthető és megadja a kinetikus sajátenergia levonásának egy olyan módját, amely nincs már korlátozva a centrál-szimmetrikus potenciáltér esetére és mentes azon hiányosságoktól, amelyek a kvantumállapotokra való összegezésnek integrállal való közelítéséből származtak.

A tézisek ismertetése után az elnök felkérésére az opponensek adják elő opponensi véleményüket.

HORVÁTH JÁNOS rámutat arra, hogy az atom statisztikus elméletének továbbfejlesztése WEIZSÄCKER, GOMBÁS, PLASKETT, MILNE, ill. THEIS és SWIATECKI kezdeményezései és vizsgálatai révén az atomfizikai többtestprobléma igen aktuális kérdésévé vált. Ezekhez a vizsgálatokhoz szervesen csatlakozik SZÉPFALUSY kandidátusi értekezése. A dolgozat tárgyválasztása tehát igen szerencsésnek mondható és az elért szép eredményei alapján kandidátusi értekezésként elfogadható. A dolgozat első része a témakör eredményeit mérsékletes tömörséggel foglalja össze, amely tanúbizonyságot tesz arról, hogy a szerző e témakörben nemcsak kellő áttekintéssel rendelkezik, hanem képes arra is, hogy a feldolgozott irodalmat jó kritikai érzékkel ismertesse. Általában dicsérendő a fejezetek logikus és ugyanakkor jó didaktikai érzékkel feldolgozott felépítése, noha helyenként kisebb pontatlanságok előfordulnak benne.

A bevezető résszel kapcsolatban az opponensnek az a kérdése, hogy THEIS eljárásánál nem célszerűbb-e az eloszlásfüggvénnyel a sűrűségmátrix helyett a BLOHINCEV által bevezetett $R(p, x)$ mátrixot összehasonlítani.

A dolgozat érdemi részében a szerző a Hilbert-térnek az alapállapotához tartozó alterében a szokott orthonormált bázisvektorok helyett normált, de nem ortogonális bázisrendszert vezet be, amelynek az elemei egy alkalmasan megválasztott differenciálegyenlet-rendszernek tesznek eleget. Ezt a szerzőnek jobban elő kellett volna késziteni. Sokat segített volna, ha pusztán az ismert klasszikus mechanikai analógiára hivatkozik.

A dolgozat igen jelentős eredményének minősíthető, hogy a statisztikus atommodell esetében a Weizsäcker-féle inhomogenitási korrekciót, ill. annak finomított alakját, valamint a sajátfüggvények ortogonalizálását helyettesítő Gombás-féle taszító potenciált a kinetikus energia korrekciójaként jelentkező közös alapra vezeti vissza és igen kézen fekvő módon alapozza meg. Különbséget téve páros és páratlan számú elektront tartalmazó atomi rendszerek közt, új kifejezést vezet be a Fermi-féle kinetikus energia-sűrűségre, amely páros számú elektron esetében visszaadja a régi kifejezést, páratlan számú elektron esetében pedig korrigálja azt. Végül eredményei alapján igen frappánsan mutatott rá a Plaskett-féle elmélet egyik hiányosságára.

Végül az opponens két kérdést tesz fel:

Milyen lehetőséget lát a szerző a dolgozatában elért, szép, elméleti eredményeinek alkalmazására?

Milyen mértékben tekinthető a szerző elmélete még szoros értelemben vett statisztikus elméletnek és milyen mértékben minősíthető hullámmechanikai közelítő módszernek?

KÓNYA ALBERT rámutat arra, hogy az atom elektronhéjának statisztikus elmélete — s vele párhuzamosan a statisztikus magelmélet is — néhány évvel ezelőtt meglehetősen lezártnak látszott, és sokoldalú sikeres alkalmazást talált, de ugyanakkor néhány vonásában jellegzetes eltérést mutatott a hullámmechanikai eredményektől. Az utóbbi években azonban külföldi és hazai szerzők számos dolgozata új fejlődést jelez. E kutatások célja a sűrűségeloszlás további javítása, közelítése az exaktabb hullámmechanikai eredményekhez — s egyuttal az energiaszámítás megjavítása mindenek előtt az erőtér inhomogenitásának figyelembevételével. Az ebbe az irányba folyó kutatásokhoz tartozik SZÉPFALUSY érdekes disszertációja, amelynek témaválasztását igen szerencsésnek kell mondani, mert a szakirodalomban élő, viszonylag sokat szereplő témát választ, s sikerül abban az eddig elért eredményeket túlhaladnia. Vizsgálatának vezető gondolata, hogy a sűrűségeloszlás és a kinetikus energiakifejezés együttes javítását olyan irányban keresse, hogy a statisztikus modell és a hullámmechanika kapcsolata még szorosabbá váljék.

Az opponens hiányolja, hogy a szerző nem mutatott rá a dolgozat első részében: a Weizsäcker-tag szereplése maga már együtt jár azzal, hogy a sűrűségeloszlás a mag helyén is, s attól nagy távolságokban is a hullámmechanikainak megfelelő lesz.

A dolgozat második részében a szerző saját elgondolásait tárgyalja dicséretesen tömören és logikusan. Szemben PLASKETT és SWIATECKI munkáival nemcsak a sűrűségre, hanem az energiára is levezeti a megfelelő kifejezéseket. Az opponens kiemelkedőnek tartja a Fermi-energiatag továbbfejlesztését a közelítő integrálás helyett pontos összegezés révén és a kinetikus energia kettős figyelembevételének elkerülését, valamint, hogy ezen eredmények az egydimenziós $V(x)$ potenciálra kirótt bármiféle szimmetriafeltétel nélkül érvényesek.

Végül a következő kérdéseket intézi a szerzőhöz:

Hogyan alakul a tárgyalás és fennmaradnak-e minden változás nélkül az eredmények, ha elejtjük azt a kikötést, hogy az alapállapotban a lehetséges egyrészecske állapotok száma páros részecske szám esetén egyezzék meg a részecskék számával, páratlan részecske szám esetén pedig legyen annál 1-gyel több?

Milyen esetekben látja lehetségesnek eljárása alkalmazását konkrét problémák megoldására?

A dolgozatról az opponens összefoglaló véleménye, hogy érdekes problémát tárgyal s ebben szép eredményeket ér el. Feltétlenül alkalmasnak találta arra, hogy a szerző általa a fizikai tudományok kandidátusa fokozatot elnyerje.

Ezután SZÉPFALUSY PÉTER adta meg válaszát az opponensi véleményekre.

HORVÁTH JÁNOS észrevételével kapcsolatban véleménye a következő:

THEIS eljárásánál a Dirac-féle sűrűségmátrix szerepel, tehát az $R(p, x)$ mátrix nem vezethető be.

A Hilbert-térben ortogonális bázisrendszerről nem ortogonális bázisrendszerre való áttérés nem állítható párhuzamba a klasszikus mechanikában az általános koordináták bevezetésével; az esetleges analógiák formálisak, nem rendelkeznek fizikai tartalommal. Ugyanis ezen Hilbert-térbeli transzformáció szoros kapcsolatban van az azonos részecskék megkülönböztethetetlenségi elvével, amelynek — mint ismeretes — nem található klasszikus megfelelője.

A nullponti kinetikus energiasűrűség páros részecskeszám esetében is csak akkor adja vissza az eredeti Fermi-féle kifejezést, ha a benne előforduló összegezést integrálással közelítjük. A továbbfejlesztés lényege viszont az, hogy ezt az approximációt elkerülve az összegezést a szerző egzaktul végrehajtotta.

A disszertációban bemutatott statisztikus modell alkalmas bármilyen feles-spinű részecskékből álló rendszer stacionárius állapotának vizsgálatára. A szerző először kölcsönhatás nélküli részecskékből álló rendszernek viselkedését kívánja megvizsgálni pl. oszcillátor potenciál esetében.

A *Hartree—Fock* módszer nulladik közelítésben éppen azokat az egyenleteket szolgáltatja, amelyeket a Fermi—Dirac statisztika alapján felírhatunk.

KÓNYA ALBERT megjegyzéseivel kapcsolatban a szerző véleménye a következő:

Olyan konfiguráció esetében, amikor zárt csoporton kívül több mint egy részecskénk van, nem egyetlen energiaszintet, hanem multiplett termszerkezetet kapunk és ezen termek bármelyike számára a hullámfüggvény Slater-determinánsok lineárkombinációja. Az egyes determinánsok szimmetriatulajdonságai nem azonosak, ami azonban számottevő mértékben csak a kicserélődési energiát befolyásolja. Természetesen ennek az effektusnak a magyarázata meghaladja a statisztikus elmélet teljesítőképességét, mivel a kicserélődési energia félklasszikus közelítése nagyobb hibát eredményez, mint ez az effektus.

A módszer alkalmazására vonatkozólag a feleletet lásd HORVÁTH opponensnél.

Az opponensek elfogadták SZÉPFALUSY PÉTER válaszát.

A vita lezárása után a bíráló bizottság a következő határozatot hozta:

SZÉPFALUSY PÉTER „A Fermi-gáz statisztikus tárgyalásának továbbfejlesztése" című kandidátusi értekezésének nyilvános vitájára kiküldött bíráló bizottság megállapította, hogy a választott témát igen szerencsésnek kell mondani, mert egy a szakirodalomban élő, viszonylag sokat szereplő tárgykörről van szó és sikerült abban az eddig elért eredményeket túlhaladni. A jelölt új statisztikus modellt vezet le, megadva annak sűrűség és energia kifejezéseit, a *Fermi*-féle kinetikus energia kifejezést továbbfejleszti annak révén, hogy az állapotokra való integrálás helyett pontos összegezést tud elvégezni. Módszeréből következik a kinetikus sajátenergia kétszeres figyelembevételének elkerülése is, anélkül, hogy a potenciálra bármiféle különleges feltevést kellene tennie. Hasznos lett volna, ha módszere hatásosságát disszertációjában legalább egy konkrét probléma tárgyalásán is bemutatja. A dolgozat tárgyalásmódja tömör, logikus, kidolgozása gondos. Észrevehető, hogy a jelöltnek már 5 önálló és 2 társszerzővel írt dolgozata jelent meg. Mivel a jelölt az opponensek kérdéseire kielégítő választ adott, a dolgozatban elért eredmények alapján a bizottság egyhangúlag javasolja a *Tudományos Minősítő Bizottságnak*, hogy SZÉPFALUSY PÉTERT nyilvánítsa a fizikai tudományok kandidátusává.

Berencz Ferenc,
a fizikai tudományok kandidátusa

KÖNYVISMERTETÉSEK

L. V. Grosev—I. Sz. Sapiro: Atommagspektroszkópia

(Akadémiai Kiadó, Budapest, 1958)

Az atomok törvényszerűségeinek felismerésében nagy szerepet játszottak az atomok optikai és röntgenspektrumának megismerésével foglalkozó kísérletek. Ma a „klasszikusnak" nevezhető spektroszkópia, az optikai és röntgenspektroszkópia már főként a gyakorlat segítő tudománya, anyagok elemzésének, szerkezetük megismerésének a nélkülözhetetlen segédtudománya.

Az atommagból kilépő sugárzások, az α-, β- és γ-sugárzás sajátságainak, törvényszerűségeinek a vizsgálata az atommagok belső szerkezetére vonatkozóan ad felvilágosítást. Egy atommagnak az atomokhoz hasonlóan különböző energiaállapotai, alapállapota és gerjesztett állapotai vannak. Ezeket az állapotokat a következő paraméterek jellemzik: az állapot energiája, impulzus, mágneses és kvadrupól nyomatéka, valamint paritása. Az atommagspektroszkópiának az a feladata, hogy a sugárzások tanulmányozásával az összes atommag összes gerjesztett állapotának mind az öt jellemző adatát megállapítsa, és az adatok ismeretében az atommagállapotokat meghatározó törvényeket megismerje.

A fenti feladatot természetesen csak akkor lehet elvégezni, ha a vizsgálandó atommagok valóban sugároznak. A természetben előforduló különböző atommagoknak (izotópoknak) azonban csak nagyon kis hányada (kb. 300-ból kb. 40 izotóp) sugároz. A természetesen sugárzó (természetes radioaktív) izotópok vizsgálata csak az alapvető módszerek tisztázására, egy-két egyszerűbb atommag adatainak megismerésére nyújtott lehetőséget. A magspektroszkópia tudománya nagyobb lendülettel csak a mesterséges radioaktivitás felfedezése (1934) után, és méginkább a mesterséges radioaktív anyagokat a precíz magspektroszkópiai vizsgálatokhoz nagyobb mennyiségben előállító atommáglyák felépítése után indult meg (1945—46).

GROSEV és SAPIRO könyve 1952-ben jelent meg Moszkvában. A könyv azonban csak az 1950-ig megjelent munkákra támaszkodik. Ebből következik, hogy a könyv a magspektroszkópiai adatgyűjtésnek csak a kezdeti módszereit és eredményeit tárgyalhatja, az adatgyűjtésen alapuló elméleti összefoglalás (héjmodell alkalmazása a magspektroszkópiában, kollektív modell, paritás nem megmaradás) később következtek. Módszer szempontjából is lényeges fejlődés következett be 1—2 évvel később (szcintillációs számláló elterjedése, gyors koincidencia körök, amplitudó analizátorok). Ebből következik, hogy GROSEV és SAPIRO könyvét ma nagyon fontos, áttekintő történeti munkának és a magspektroszkópiai kutatások alapvető készülékeit, elveit nagyon világosan, könnyen érthetően tárgyaló monográfiának kell tartanunk és nem az ismereteinket korszerűen összefoglaló műnek. Azt mondhatjuk, hogy a könyv anyagát a magspektroszkópiával foglalkozni kívánóknak feltétlenül ismerniök kell, de ezenfelül a megírástól eltelt 8—9 évben elért eredményt is át kell tekinteniök. A könyv fordítója ezt az áttekintést azzal igyekszik megkönnyíteni, hogy a megírás óta eltelt időben megjelent összefoglaló dolgozatokról, könyvekről, irodalmi összeállítást mellékelt.

A könyv öt nagy részt tartalmaz. Az első részben a szerzők bevezetésképpen körülhatárolják a magspektroszkópia területét, és foglalkoznak egy, a minden magfizikus számára egyaránt fontos tudnivalóval, a sugárzások anyaggal való kölcsönhatásával.

A második rész ismerteti azokat a módszereket, amelyeknek a segítségével töltött részecskék energiáját mérhetjük. Az energia meghatározásra mind a könnyű (β)-részecskék, mind a nehéz (α)-részecskék esetén két, lényegében különböző módszer áll rendelkezésünkre: a mágneses térben való elhajlítás és a részecskék által különböző anyagokban keltett ionizáció, illetve fény, számláló csövekkel, vagy fotoelektronsokszorozókkal való mérése. A könyv részletező alapossággal tárgyalja a módszerek speciális vonásait, a különböző típusú spektrométereket.

A harmadik rész címe γ-spektroszkópia. A γ-sugárzás energiáját abszorpció, külső-elektronkeltés és diffrakció útján mérhetjük. A γ-sugarak belső-konverziójának, szögkorrelációjának és az atommagok metastabil állapotának az ismertetése képezi még ennek a résznek a tárgyát.

A negyedik, illetve ötödik rész az α- és β-spektroszkópiával foglalkozik. A kísérleti adatok áttekintése után azok elméleti értelmezésével foglalkozik. Az utolsó fejezetben, kb. 10 oldalon találhatunk előzetes eredményeket és elgondolásokat az atommag héjmodelljének a magspektrumok értelmezésében való alkalmazására vonatkozóan.

A függelék hasznos táblázatokat tartalmaz: belső konverziós koefficiensek, árnyékolási korrekciók β spektrumok esetén.

A könyv fordítását Berényi Dénes végezte, aki maga is szakavatott művelője a magspektroszkópiának. Ilyen módon a nyelvtudás és a szakismeret együttes eredményeképpen világosan érthető, hogy szakmailag hibamentes fordítást kapunk. Egy-két szakkifejezés magyar nevével (pl. orbitális nyomaték impulzusnyomaték helyett) a recenzens nem ért egyet.

Keszthelyi Lajos
Központi Fizikai Kutatóintézet

M. V. Pentkovszkij: Nomográfia

(Akadémiai Kiadó, Budapest, 1959)

A magyar nyelvű matematikai irodalomban eddig megjelent, nomográfiával foglalkozó könyvek általában speciális ipari alkalmazásra való nomogramtervezést tárgyaltak. A nomogram transzformálásának részletes ismertetését többnyire elhanyagolták, vagy gyakorlatilag nem könnyen kezelhető formában adták meg. Hiányzott tehát nomográfiai irodalmunkból egy olyan könyv, amely a gyakorlati nomogramszerkesztést részletesen tárgyalja. Az utóbbi hiányon kívánt az Akadémiai Kiadó segíteni, amikor közreadta M. A. PENTKOVSZKIJ: *Nomográfia* könyvének magyar nyelvű fordítását.

PENTKOVSZKIJt könyvének megírásakor gyakorlatilag jól használható nomogramszerkesztési eljárások ismertetésének szempontja vezette. A nomográfia elméletével csak a szerkesztési eljárások jobb megértéséhez szükséges mértékben foglalkozik. Jól használható nomogramok szerkesztésére azonban számos — a magyar olvasó előtt még bizonyára új — eljárást közöl. Ezek az eljárások a gyors és a megkövetelt pontosságot kielégítő nomogramtervezést hivatottak elősegíteni. Külön említést érdemelnek a nomogramszerkesztést megkönnyítő rácsok és vázak, valamint a skálakarakterisztika megállapítását szolgáló eljárások tárgyalása.

A könyv bevezetőben foglalkozik a nomogram fogalmával, gyakorlati alkalmazásával, és rövid történeti összefoglalást ad a nomográfiáról. Továbbiakban a könyv két részre tagolódik. Az első rész a nomogramszerkesztés elméletének elemeibe vezeti be az olvasót, a második részben a nomogram tervezésére és gyakorlati kivitelezésére alkalmas eljárásokat találhatjuk.

Az I. fejezet általánosságban ismerteti a pontsoros nomogramot. Ezen belül megtaláljuk a skálának — a nomogram egyik.leglényegesebb elemének — leírását. Megismerkedünk a pontsoros nomogramok használatával. Részletesen leírja itt a szerző a nomogram geometriai és egyéb hibáit, amelyek a nomogrammal végzett számítások pontosságát korlátozzák. Bevezeti a skála karakterisztikájának fogalmát, és támpontokat ad arra, hogy milyennek kell lennie a jó nomogramnak.

A II. fejezetben a pontsoros nomogramok elméletének elemeivel ismerkedünk meg. Megtaláljuk itt a skálaegyenletek meghatározásának módját a *Soreau*-féle egyenlet felírása útján. Röviden érinti a pontsoros nomogrammal való ábrázolhatóság általános problémáját. Ismerteti itt a szerző a nomogram transzformálásának elvét és a projektív transzformáció végrehajtásának módját. Osztályozza a pontsoros nomogrammal ábrázolható függvénykapcsolatokat. Ezután részletesen tárgyalja a harmadrendű kapcsolatok három kanonikus alakjának nomogramjait, valamint a kanonikus alakok között fennálló összefüggést. Foglalkozik még a negyed-, ötöd- és hatodrendű kanonikus alakok nomogramjaival.

A III. fejezet a görbesereges nomogramok elméletébe vezeti be az olvasót. Ismerteti a görbesereges nomogramokat és használatukat, a görbeseregek egyenleteit. Megmutatja a görbesereges nomogrammal végezhető számítások pontosságát, és megemlíti a görbesereg karakterisztikájának fogalmát. Külön paragrafust szentel a függvényrácsoknak, végül rámutat a pontsoros és görbesereges nomogramok közötti összefüggésre.

A IV. fejezet röviden foglalkozik a pontmezős nomogramokkal, az ilyen nomogramokkal meghatározott értékek pontosságával, továbbá a pontmezős nomogramokkal ábrázolható függvénykapcsolatokkal.

Az V. fejezetben példákon mutatja be a szerző a háromnál több változót tartalmazó függvénykapcsolatok ábrázolásának módját kapcsolt nomogramok segítségével. Így példát mutat pontsoros, pontmezőt is tartalmazó, görbesereges és ún. binér-skálás nomogramok kapcsolására.

A VI. fejezet ugyancsak példákkal mutat rá néhány speciális ábrázolási lehetőségre. Változóismétlés, Taylor-sorral közelített kapcsolat, szukcesszív közelítés módszerével történő ábrázolás, és egy kapcsolatrendszer ábrázolásának példái találhatók itt. Kár, hogy a fejezet csak illusztratív jellegű és nem tárgyalja részletesen az említett megoldási lehetőségeket.

A VII. fejezettel kezdődik a könyv nomogramtervezési eljárásokat tárgyaló része. Általános útmutatást kapunk itt a nomogram típusának megválasztásához, néhány szempontot a nomogram számításához és megrajzolásához.

Nomogramok transzformációjával foglalkozik a VIII. fejezet. A sík projektív és affin transzformációit, a szerző által bevezetett invariáns háromszöget, valamint a párhuzamos invariáns egyeneseket tartalmazó rácsokon végezhető transzformációkat találjuk ebben a fejezetben. Betekintést nyerünk a harmadrendű kapcsolatok — ugyancsak a szerző által javasolt — ún. nomogramvázon való transzformálásának lehetőségeibe. Részletesen foglalkozik még egyenesvonalú skálák optimális karakterisztikájának meghatározásával.

A IX. fejezet részletes tárgyalásban ismerteti a párhuzamos invariáns egyeneseket tartalmazó rácson történő nomogramszerkesztést. A *Cauchy*-féle kapcsolatnak a rácson való transzformációját példával is illusztrálja. A harmadrendű kapcsolatok második és első kanonikus alakjának megszerkesztésével is foglalkozik. Itt találjuk a logaritmikus skálájú szorzó, ill. az ún. Z-nomogram szerkesztésének módját is. Utóbbi nomogramokat általában más módszerrel szokták tárgyalni, a szerző tárgyalásmódja azonban rávilágít az ilyen nomogramok transzformálási lehetőségeire, és természetesen a rács segítségével a transzformálás könnyű és gyors elvégezhetőségére.

A X. fejezet az invariáns háromszöget tartalmazó rácson történő nomogramszerkesztés gyakorlati módszerét tárgyalja. A *Cauchy*-típusú kapcsolatra, az előző fejezetben kidolgozott példát invariáns háromszöget tartalmazó rácson is kidolgozza. Ugyancsak példákkal illusztrálja a harmadrendű második és első kanonikus alakoknak megszerkesztését a rácson.

A XI. fejezet két kidolgozott példát ad a nomogramvázon történő nomogramszerkesztésre. A nomogramváz alkalmazását az ellipszisen és szelőjén mutatja be.

Befejezésül a könyv foglalkozik a függvénykapcsolatok ábrázolásának általános elméletével, amely az összes nomogramtípusokat felöleli. Itt említi meg a többváltozós kapcsolatok közül a merőleges-, párhuzamos-, derékszögű-, körívleolvasású típusokat, a *Gerszevanov*-féle nomogramokat, és rövid tájékoztatást ad a mozgólapos nomogramokról is.

A függelékben röviden vázolja a könyv a determinánsok elméletének a nomográfiában használatos elemeit.

Az ismertetésből kitűnik, hogy a könyv mindenütt a gyakorlati nomogramszerkesztés és nomogramhasználat célját szolgálja. A gyakorlatban ritkábban előforduló nomogramtípusokat, többváltozós függvénykapcsolatoknak bonyolultabb nomogramokkal való ábrázolását általában kerüli, a fősulyt inkább az egyszerű kapcsolatok ábrázolására, ill. a kapcsolat minél egyszerűbb és gyorsabb ábrázolására fekteti. A nomogram tervezését elősegítő eljárások, a transzformációk könnyű és gyors elvégzését biztosító rácsok és vázak tárgyalása révén mérnöki használatra kiválóan alkalmas könyvet kap kézbe az olvasó Pentkovszkij Nomográfiájával.

A magyar kiadás szerkesztőjének igen alapos munkáját tükrözi a magyar szakkifejezések gondos megválogatása, számos értékes szerkesztői megjegyzés, az előző kiadások hibáinak korrigálása. A szép kiállítás díszére válik a könyvnek. A könnyebb tájékozódást elősegítette volna az orosz és német kiadáshoz hasonlóan a fejezetek, ill. paragrafusok jelzése az élőfejek sorában. Sajnálatos tény, hogy az orosz kiadás egyes hibái elkerülték a szerkesztő figyelmét, és így néhány hiba benne maradt a könyvben. Újabb sajtóhibák is előfordulnak benne.

Tóth Károly
A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézete

Technikai szerkesztő: L. Ziermann Margit

A kiadásért felelős az Akadémiai Kiadó igazgatója Műszaki felelős: Farkas Sándor
A kézirat beérkezett: 1959. IX. 15. — Terjedelem: 9,25 (A/5) ív, 2 ábra

Szegedi Nyomda Vállalat 59-3893

Ára: 21,— Ft

TARTALOMJEGYZÉK

A TUDOMÁNYOS MINŐSÍTŐ BIZOTTSÁG HÍREI

KÖNYVISMERTETÉSEK