A MAGYAR
TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI OSZTÁLYÁNAK

KÖZLEMÉNYEI

IV. KÖTET 1. SZÁM

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
BUDAPEST, 1954.

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI OSZTÁLYÁNAK

KÖZLEMÉNYEI

A SZERKESZTŐBIZOTTSÁG TAGJAI:
ALEXITS GYÖRGY, BUDÓ ÁGOSTON, GYULAI ZOLTÁN,
NOVOBÁTZKY KÁROLY, TURÁN PÁL

SZERKESZTI:
RÉNYI ALFRÉD

IV. kötet 1. szám

Szerkesztőség: Budapest, V. Akadémiai-utca 2.
Kiadóhivatal: Budapest, V. Alkotmány-utca 21.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei változó terjedelmű füzetekben jelennek meg és az Akadémia III. osztályának felolvasóülésein bemutatott dolgozatokat, valamint egyéb dolgozatokat, referátumokat, továbbá az osztály munkájára vonatkozó közleményeket, könyvismertetéseket stb. közölnek. Évenként egy kötet jelenik meg (négy szám alkot egy kötetet).

Kéziratok a következő címre küldendők:

A Magyar Tudományos Akadémia
III. Osztályának Közleményei.
Budapest, V. Akadémiai-utca 2.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi levelezés.

Minden szerzőt 100 különlenyomat illet meg, megjelent munkájáért.

Közlésre el nem fogadott kéziratokat a szerkesztőség lehetőleg visszajuttat a szerzőhöz, de felelősséget a beküldött kéziratok megőrzéséért, vagy továbbításáért nem vállal.

A Közlemények előfizetési ára kötetenként belföldi címre 40 forint, külföldi címre 60 forint. Belföldi megrendelések az Akadémiai Kiadó, Budapest, V. Alkotmány-u. 21. (Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 04-878-111-48), külföldi megrendelések a „Kultúra" Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalat, Budapest, VI. Sztálin-út 21. (Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 45-790-057-50-032) útján eszközölhetők.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztálya a következő idegennyelvű folyóiratokat adja ki:

1. Acta Mathematica Hungarica,
2. Acta Physica Hungarica.

A MODERN FIZIKA FILOZÓFIAI PROBLÉMÁI ÉS A SZOVJET FIZIKUSOK FELADATAI AZ ÉLENJÁRÓ TUDOMÁNYÉRT VÍVOTT HARCBAN*

SZ. I. VAVILOV

Országunk egyre szélesebb területeket érintő és tudományos társaságaink kebelében végbemenő megmozdulásai, amelyek a filozófiai kérdések megvitatásával, valamint a *Lenin*ről elnevezett Mezőgazdasági Tudományok Összszövetségi Akadémiájának 1948 augusztusi ülésén a biológiai tudomány gyakorlati kérdéseinek megtárgyalásával vették kezdetüket, egymásután átcsapnak a tudományok többi területére s ezek között a fizikára is.

A külvilág legegyszerűbb és legáltalánosabb tulajdonságaira és jelenségeire vonatkozó tanítások valójában a fizikában összpontosulnak. Számunkra nem vitás, hogy a fizika a gyakorlatból és a gyakorlati szükségletek kielégítésére jött létre, mint számos emberi nemzedék huzamos, mindennapi megfigyeléseiből és tapasztalataiból levont absztrakciók eredménye. A fizika olyan alapvető fogalmai, mint amilyenek a tér, a hosszúság, a sebesség, az idő, az erő és a test, a mindennapi életből mentek át a fizika területére s ezzel nagy hatást gyakoroltak az egész fizikai tudomány jellegére.

A fizikai tudomány jelentős részének, a fizikai tényeknek és törvényeknek rendkívül általános jellege már eleve közeli rokonságba hozta tudományunkat a filozófiával. Az ókorban a fizikusok szinte kivétel nélkül filozófusok is voltak és megfordítva. A két tudomány hatása kölcsönös és igen erős volt egymásra s ezt a kölcsönhatást sok szempontból meghatározták az osztály- és a társadalmi feltételek. A „Timaios" idealista fizikája az arisztokrata *Platon* idealizmusának gyümölcse; *Demokritos*nak, az úgynevezett rabszolgatársadalmi demokratának materializmusából viszont egy mechanisztikus fizika bontakozott ki. A fizika és a filozófia kapcsolata évezredeken át megmaradt és a ma feltételei között is fennáll. A filozófia és a fizika elválaszthatatlanul átszövi egymást *Galilei, Gassendi, Descartes, Kepler, Newton, Lomonoszov, Mendelejev, Umov, Planck* és még igen sok más gondolkodó tudományos tevékenységében.

* Sz. I. Vavilovnak, a Szovjetunió Tudományos Akadémiája 1952-ben elhunyt elnökének ez a munkája 1953-ban jelent meg „A modern fizika filozófiai kérdései" címmel a Szovjetunió Tudományos Akadémiája által kiadott tanulmánykötetben. A kötet szerkesztősége a dolgozathoz a következő megjegyzést fűzte: „Sz. I. Vavilov ezt a tanulmányt 1949-ben írta. Munkáját a jelen tanulmánykötetben akarta elhelyezni és tervbe vette, hogy a dolgozatban említett kérdések egész sorát részletesebben kifejti. Időelőtti halála azonban megakadályozta tervének megvalósítását. Tanulmányának legfontosabb tételei azonban a megírása óta eltelt idő ellenére is aktuálisak maradtak. A tanulmány eredeti szövegét néhány rövidítéssel közöljük."

A fizikának — rendkívüli általánossága és széleskörü volta következtében, amellyel állandó hatást gyakorolt a filozófia fejlődésére, miközben maga is állandó hatásokat kapott a filozófiától — mindig nagy, sőt néha döntő jelentősége volt az emberek gyakorlati tevékenységére. Ez a tulajdonsága megint csak tartalmának általános és széleskörű voltával kapcsolatos. A fizika törvényei, fogalmai és következtetései rendszerezett és egységes, a természetet helyesen tükröző anyagot adnak a mérnök és a feltaláló kezébe.

Ha szemügyre vesszük a modern technikát, akkor nyilvánvalóvá válik előttünk, hogy annak igen nagy része létezését a fizikának köszönheti. Ilyen az egész szárazföldi, tengeri és légi gépesített szállítás, az egész elektrotechnika és hőtechnika, a fény technikai alkalmazásának egész területe, az egész automatika és telemechanika, valamint az építészeti technika jelentős része. A modern technikát ezért — a szó némileg szélesebb értelmében, mint ahogy az közönségesen használatos — „technikai fizikának" nevezhetnénk.

A fizikának a technika és ugyanakkor a filozófia szempontjából betöltött rendkívül fontos szerepe jelentős mérvű hatást gyakorolt tudományunk szakadatlan és gyors fejlődésére, valamint a tudományunk iránti igen nagymérvű érdeklődésre is. A fizika — a matematikával együtt — már igen régóta szerves alkotórésze még az elemi iskolai műveltségnek is. Nem vitás ezenkívül, hogy a fizika rendkívül mély és termékeny hatást gyakorolt a többi természettudomány — csillagászat, kémia, geológia, biológia, stb. — fejlődésére és kialakulására is. Mindazonáltal a tudományok rendszerében elfoglalt egyedülálló helyzetét speciálisan technikai és filozófiai jelentőségének köszönheti.

Ez volt az egyik legfőbb oka annak is, hogy az új fizika kérdéseire oly nagy figyelmet fordított *Lenin* is. *Lenin* tisztában volt azzal, hogy az új fizikából levont következtetéseknek mily nagy metodológiai szerepük van, s hogy a fizikának mily nagy hatása van a filozófiára s ezen keresztül a politikai szférára. *Lenin*nek a fizikával kapcsolatos gondolatai és megjegyzései, amelyek „Materializmus és empiriokriticizmus" és „Filozófiai füzetek" című műveiben vannak a leggazdagabban kifejtve, csodálatos éleslátással és mélységgel világítják meg a dialektikus materializmus fényével az új fizikának azokat a sötét zsákutcáit és sikátorait, amelyekben az idealizmus legkülönbözőbb válfajai el akarnak rejtőzni. Az anyagra vonatkozó világos, lenini dialektikus tanítás eloszlatta azt a ködöt, amelyet századunk elején néhány olyan filozofáló fizikus és filozófus fejlesztett, aki az elektronelmélet és a radioaktivitás abban az időben titokzatos fizikai tényeinek alapján új életre akarta kelteni az idealizmust.

A fizika mint egész az emberi társadalom fejlődésének egyik legjelentősebb eredménye. A fizika gyakorlati alkalmazásainak hatása a történelem jelenkori fázisában igen nagy. Nem kétséges, hogy a fizikának egészen különleges, egyedülálló jelentősége van a társadalmi fejlődésnek a kommunizmus felé vezető ama hatalmas tudatos történelmi folyamatában, amelynek mi, szovjet emberek részesei vagyunk. Ezzel kapcsolatban újból és újból hangsúlyoznunk kell a fizika hatásának mindkét területét: a filozófiai és technikai hatását. Ezért fizikai tudományunk, a szovjet fizikusok tevékenysége felé a filozófia és a gyakorlat mérővesszejével kell közelednünk.

* * *

A Szovjetunió Tudományos Akadémiája 1936 márciusában nagy ülésszakot rendezett, amely szinte teljesen a szovjet fizika kérdéseivel foglalkozott. A kongresszus feladata — amint azt bevezető beszédében *Komarov* akadémikus mondotta — hogy „megvilágítsa a szovjet fizika eredményeit a világ fizikai tudományával összehasonlítva." *Joffe*, *Rozsgyesztvenszkij*, valamint az én beszámolóm, ezenkívül *Tamm*, *Fok* és *Frenkel* referátumai az akkori idők fizikájának számos alapvető tudományos kérdését vetették fel; felvették a módszertani problémákat is és különösen részletes megvitatás tárgyát képezte a szovjet fizika és a technika viszonyával kapcsolatos kérdés. A széleskörben kibontakozott viták, valamint maguk a referátumok is állandó figyelmet fordítottak erre a kérdésre. A viták során megszólaltak az ipar képviselői is, akik kifejezésre juttatták a szovjet fizikusokkal szemben legégetőbb, jogos követeléseiket.

Ma, amikor az 1936. esztendő izzó vitái óta már sok esztendő telt el, s amikor ezeknek a vitáknak számunkra már csak történelmi, levéltári jelentőségük van, megelégedéssel állapíthatjuk meg, hogy a Tudományos Akadémia márciusi ülésszaka nem merült el teljesen nyomtalanul a multban. Különösen hasznosnak bizonyult az a nagy hatás, amelyet azzal gyakorolt, hogy fizikusaink határozott fordulatot tettek az ipar, a technika és a legszorosabban vett gyakorlat igényei felé. Ez megmutatkozott azokban az eredményekben, amelyeket a következő években fizikusaink a Tudományos Akadémián, a főiskolákon és a különféle tudományos intézetekben elértek. Kétségkívül fokozódott a fizikusok konkrét részvétele a sztálini ötéves tervek megvalósításában. A fizikusok segítsége különösen nyilvánvalóvá vált a honvédelmi munkálatok területén a Nagy Honvédő Háború éveiben. Ma, amennyire én tudom, elég nehéz a Szovjetunióban olyan laboratóriumot vagy fizikai kutatócsoportot találni, amelynek munkássága ne lenne kapcsolatos a gyakorlat követelményeivel s amely az úgynevezett „tiszta tudomány" birodalmába menekülne; emellett még különös örömmel kell megjegyeznünk, hogy ez a megállapítás nem csupán a kísérleti fizikusokra érvényes, hanem az elméleti fizikusokra is vonatkozik.

Ez az oka annak, hogy nem tartom annyira szükségesnek, hogy a ma már nyitott ajtókon kopogtassak és feleslegesen bizonyítgassam annak szükségszerűségét és elkerülhetetlenségét, hogy a szovjet fizikusoknak feleletet kell adniok országunk gyakorlati problémáira s hogy ebben az irányban kezdeményezőkként kell fellépniök. Ennek hasznáról magam már régen meggyőződtem az első világháború frontján, amikor mint az egyetemről éppen kikerült ifjúnak a katonai rádiós osztagokban a rádióállomásokat kellett javítanom és helyreállítanom s új eljárásokat kellett kidolgoznom a német rádióadóállomások működésének zavarására, új módszereket kellett kidolgoznom a rádióiránymérésre, stb. Már akkor beláttam s erről a fronton szolgáló fizikus elvtársaim is meggyőződtek, hogy a fizika bizonyos ismerete lehetővé teszi, hogy még nehéz körülmények között is gyorsan feltalálja magát az ember s hogy olyan megoldási módokat találjon, amelyek eltérnek a szokásos mérnöki eljárásoktól és szabványoktól. A technikának abban a fázisában, amelybe ma jutottunk, a fizikusok állandó részvétele és segítsége a fejlődés elengedhetetlen feltételévé vált. Ez munkánk minden egyes szakaszán újból és újból nyilvánvalóvá válik.

Az 1936 évi kongresszuson — amint már említettem — megvitattuk a fizika néhány filozófiai problémáját is, azonban — ellentétben a fizika és technika viszonyára vonatkozó kérdés akkori tisztázásával — ezen a területen a kongresszus munkásságának eredménye fogyatékos volt. A munkánk módszertani vonatkozásával kapcsolatos kérdést újból napirendre kell tűznünk.

A fizikus tudományos tevékenységének filozófiai alapja és filozófiai előfeltevései kettős jelentőségűek. Kétségkívül hatást gyakorolhatnak a konkrét kutatómunkára, a tudományos eredményekre, meggyorsíthatják, vagy — megfordítva — fékezhetik a fizikai tudomány haladását. A Demokritos—Epikuros-i vonal filozófiai materializmusa, képviselőinek következetes atomizmusával kétségkívül igen nagy mértékben elősegítette az egész természettudomány és speciálisan a fizika eredményes fejlődését. Ezzel szemben *Ostwald* machista-energetikai koncepciója az atomok fiktív és konvencionális jellegéről, az a hamis jóslat, amely szerint „az atomok csupán a könyvtárak porában lesznek jelen", — nyilvánvaló módon fékezte a múlt század végén a fizika és a kémia fejlődését. A tér és az idő idealista koncepciója visszatartotta a fizika fejlődését, hiábavaló erőfecsérlésre vezetett. Ezzel szemben a fizikai térre és időre vonatkozó materialista tanítás utat nyitott a fizika új fejlődési stádiuma számára. *Schelling, Hegel* és *Oken* természetfilozófiája a fizikusokat olykor teljesen fantasztikus ábrándvilágba csalogatta és többek között a pétervári *Bellanszkij* és a moszkvai *Pavlov* személyében az orosz fizikára is kézzelfoghatóan negatív hatást gyakorolt.

A fizika eredményeiből levont filozófiai következtetések hatása — pozitív és negatív értelemben egyaránt — igen nagy a világnézetre általában, valamint az egyes tudományokra is. Így például hatalmas hatást gyakorolt a XVIII. században *Newton* fizikája a kor világnézetére, a XVIII. századi materializmusra, amint az kifejezésre jutott *Helvetius, Holbach, Voltaire,* később pedig *Laplace* munkásságában. Azonban ugyanezt a newtoni fizikát, tér, idő, erő, vonzás, stb. fogalmának metafizikai jellege következtében *Bentley, Clarke* és *Newton* egyéb hasonló „bámulói" a térre vonatkozólag teljesen misztikus és vallásos képzetek terjesztésére, valamint isten létezésének bizonyítására használták fel, mivel — *Engels* szavai szerint — „*Newton* a maga naprendszerében még meghagyta neki (már mint a teremtőnek — Sz. V.) az „első lökést", de eltiltotta minden további beavatkozástól."*

Az energiamegmaradás és -átalakulás elvének végleges megszilárdulása a fizikában a mult század közepén a materialista filozófia nagy győzelmét jelentette és fontos állomás volt a dialektikus materializmus fejlődésében is. Ugyanakkor a formális termodinamikai módszer kidolgozása a fizikában, mint később kitűnt, előkészítette a talajt az energetika kibontakozása számára.

A fizikai állítások jellegüket tekintve néha olyanok, hogy nagyon nehéz azokat megkülönböztetni és elválasztani a filozófiai állításoktól és a fizikus kénytelen a filozófus szerepét vállalni. *Engels* nálunk gyakran idézett szavai szerint: „Bármilyen álláspontot foglalnak is el a természetkutatók, mégis a filozófia uralkodik felettünk. A kérdés csupán az, vajjon azt akarják-e, hogy valamilyen rossz divat-filozófia uralkodjék felettük, vagy pedig az elméleti gondolkodás olyan formája, amely a gondolkodás történetének és e történet vívmányainak ismeretén alapul."** *Engels*nek ezekhez a szavaihoz napjainkban csak annyit kell hozzátennünk, hogy bármire támaszkodjanak is a filozófusok, munkájukat jelentős mértékben — akár tudnak róla, akár nem — a fizikusok irányítják. A fizikus kénytelen filozófus is lenni, még pedig jó filozófus. A filozófusoknak oly módon kell a fizikusok segítségére sietniök, hogy közelebbről meg kell ismerkedniök a fizika konkrét tanításaival és munkatársi szerepet kell vállalniok a fizikusokkal.

* * *

A XIX. század vége kronológiailag összeesett a fizika sokévszázados története alatt átélt legsúlyosabb válságával. Kiderült, hogy hibás az a tétel, amely a testek tömegének mozgásuk közben való változatlanságát állítja; a testek tömege mozgási sebességük megnövekedésének mértékében nő. Ugyanakkor a fizikusok számára teljesen váratlanul kiderült, hogy a régi fizikának az a posztulátuma is hibás, amely a mozgás és a hatás folytonosságát állítja. Felfedezték a jelenségek kvantumszerű tulajdonságait, a fizika teljesen új korszaka vette kezdetét.

Mindeddig az ideig a fizikus a maga alapfogalmaival és képzeteivel elsősorban a mindennapi tapasztalatra támaszkodott. A mikroszkopikus világot, az anyag belső szerkezetét a makroszkopikus világ mintájára és hasonlatosságára, az általunk megszokott tárgyak világának analógiájára gondolta el. A régi idők fizikájának alapvető, állítólag „magától értetődő" posztulátuma az imént kifejtettekben rejlett.

A megfigyelési eszközök tökéletesedése, a kísérleti fizika új módszerei és a jelenségekre fordított nagyobb figyelem következtében megállapították,

* *Engels:* A természet dialektikája, Szikra 1952, 2110.

** I. m., 2200.

hogy a jelenségek éles eltérést mutatnak a megszokott, mindennapi szkémától.

Maguknak az új törvényszerűségeket felfedező fizikusoknak körében, akik a régi fizika tradícióiban nevelkedtek, az előbb kifejtettekkel kapcsolatban hosszú időn át nagy zavar és sok félreértés uralkodott. *Max Planck* például, a kvantumelmélet megalapítója, aki 1900-ban felfedezte a hatáskvantum létezését, majdnem 20 éven át lényegében véve a kvantumok ellen harcolt, s megpróbálta „menteni a helyzetet“, azaz megpróbált visszatérni a régi fizikához. A mai fizikusok fiatalabb nemzedéke nem mindig tudja, hogy *Planck* „Hősugárzás“ című alapvető könyvének második kiadása a fényelnyelés folytonos, azaz „klasszikus“ felfogása alapján íródott és a kvantumszerű jelleget *Planck* csak a fénysugárzással kapcsolatban tételezte fel. Ha példával akarunk szolgálni az akkori idők fizikusainak felfogására, megemlíthetjük, hogy a „Fény hatása“ című első könyvem, amely 1922-ben jelent meg, teljes egészében a fényelnyelés folytonos, „klasszikus“ felfogásának plancki szemlélete alapján íródott. A fizikusok azt is megpróbálták, hogy kétségbevonják a relativitáselmélet kísérleti következményeit, így például a mozgásban lévő testek tömegének a testek sebességétől való függését. A fizikusok harc nélkül régi megszokott erődjüknek egy talpalatnyi földjét sem adták fel.

Lenin a „Materializmus és empiriokriticizmus“-t 1908-ban írta, amikor a legnagyobb hévvel dühöngött a fizika régi pozicióiért vívott harc. Rendkívül jellemző, hogy *Lenin* határozottan elutasította, hogy ezeknek az „óhitűeknek“ pártjára álljon. *Lenin* könyvét a filozófusoknak és a filozófáló fizikusoknak ama állandóan megújuló kísérleteivel kapcsolatban írta, amelyekkel azok az új fizikai tényeket az idealizmus új életre támasztására akarták felhasználni. Az energetizmus és a hozzá hasonló áramlatok — amint a fentiekben már alkalmam volt megjegyezni — elsősorban a termodinamikai módszer formalizmusának alapján bontakoztak ki; a szóbanforgó módszer nagymértékben virágzott a múlt századvégi fizikusok körében. Az elméleti fizikának ezt az önmagában véve kifogástalan, sőt rendkívül hatékony módszerét *Mach*, *Ostwald*, *Avenarius* és mások filozófiája módszertanilag torz formában tükrözte, ugyanúgy, ahogy az *Newton* dinamikus szkémájával történt a *Bentley*- és *Clarke*-féle értelmezésben.

Ezen az alapon, mint már említettük, egyes filozófusok, sőt nemcsak filozófusok nagy lelkesedéssel üdvözölték az új fizika tényeit, amelyek szerintük az anyag „dematerializációját“ bizonyították. „... Lehetetlen — jegyzi meg *Lenin* — machista vagy machizmusról szóló irodalmat kézbevenni anélkül, hogy ne találnánk benne fontoskodó utalásokat az új fizikára, amely, úgymond, megcáfolta a materializmust, stb. stb.“* „A vizsgálatunk tárgyát képező új fizikai iskola alapeszméje — írja *Lenin*, könyvének egy másik

* *Lenin:* Materializmus és empiriokriticizmus. Szikra. 1949. 2. kiad. 254.

helyén [4] — az érzeteinkben adott és elméleteinkben visszatükröződő objektív valóság tagadása, vagy a valóság létezésének kétségbevonása."*

Lenin számos idézetet hoz tézisének bizonyítására. Az idealista áramlatok betörtek a forradalom előtti orosz irodalomba is; elég, ha csak szemlét tartunk az akkori idők elég széleskörű fizikai-filozófiai — eredeti orosznyelvű és fordított — irodalmán. A fizikai idealizmus megnyilvánulásainak két oka volt: először is ez az idealizmus éppen kapóra jött egyeseknek, más tudósoknál pedig az volt a helyzet, hogy az elemi mechanizmuson, a metafizikai materializmuson kívül a materializmus semmiféle más válfaját nem ismerték.

Mi már ismerjük a válságból kivezető utat, amelyet *Lenin* könyvében megmutatott számunkra. Ez az út a metafizikai materializmusról a dialektikus materializmusra való tudatos áttérés útja.

A klasszikus fizika változatlan mozgó tömegei egyáltalán nem jelentik az anyag egyedül lehetséges formáját, s ugyanúgy, a mechanikai materializmus sem jelenti a materializmus egyetlen válfaját.

„A machizmus tévedése — hogy *Lenin* szavait idézzük — abban van, hogy ... a metafizikus materializmus és a dialektikus materializmus közti különbséget nem veszi tudomásul." Valamilyen változhatatlan elemeknek, a „dolgok változhatatlan lényegének" s más efféléknek elismerése nem materializmus, hanem *metafizikus,* azaz dialektikaellenes materializmus... Ha a kérdést az egyetlen helyes, azaz dialektikus materialista szempontból akarjuk beállítani, akkor azt kell kérdezni: léteznek-e az elektronok, az éter *és a többi* az emberi tudaton kívül, mint objektív valóság, vagy nem? Erre a kérdésre a természetbúvároknak ingadozás nélkül épp úgy *igennel* kell felelniök és állandóan így felelnek is... A dialektikus materializmus azonban határozottán állítja, hogy az anyag szerkezetére és tulajdonságára vonatkozó minden tudományos tétel csak megközelítő, viszonylagos jellegű, hogy a természetben nincsenek abszolút határvonalak, hogy a mozgásban lévő anyag egyik állapotból egy másik, a mi szempontunkból látszólag összeférhetetlen állapotba megy át, stb."**

*Lenin*nek ez a következtetése döntő és útmutató jelentőségű számunkra, még pedig nem csupán a századeleji fizikával, hanem napjaink fizikájával kapcsolatban is. *Lenin* állandóan hangsúlyozza könyvében, hogy a „változatlan szubsztanciák" valamennyi válfaja csupán „a dialektika nemismerésének gyümölcse"; ezzel kapcsolatban megfogalmazza az elektron és az atom *kimeríthetetlenségére* „az anyag végtelen mélységére" vonatkozó állítását. (Ez utóbbi kifejezése a *Hegel* „Logika tudományáról" készített jegyzetének lapjain olvasható.)

* * *

Lenin a századeleji fizika anyaga alapján teljes világossággal felfedte azokat a zsákutcákat és szakadékokat, amelyekbe elkerülhetetlenül beleesik a

* I. m. 310.
** I. m. 264—265.

fizikus vagy a filozófus, ha a dialektikus materializmus útjáról a mechanizmus és idealizmus területére téved.

Az új fizika múlt századvégi és jelen századeleji meglepetései azonban csupán csak előjátékai voltak annak, ami a fizika területén szemünk láttára az elmúlt évtizedben zajlott le. Jelenleg nincs módomban és nem is akarok kitérni a XX. századi fizika történetének napjainkig terjedő legfigyelemreméltóbb stádiumaira. Csupán arra szorítkozom, hogy megemlítsek néhány olyan alapvető új tényt, amelyeknek minden vitán felülálló rendkívül mélyreható elvi jelentőségük van. Ilyenek:

1. A molekulák, atomok és atommagok szerkezetét a kvantumtörvények határozzák meg.

2. Az atommag alkotórészeit (a neutronokat és protonokat) összetartó erőknek speciális, ez ideig még fel nem derített természetük van, amely különbözik az elektromágneses és gravitációs erők természetétől.

3. A fénynek hullámszerű és korpuszkuláris tulajdonságai vannak.

4. Az anyag részecskéinek, ugyanúgy mint a fénynek, kettős — korpuszkuláris és hullámszerű — természetük van.

5. Az anyag részecskéi fénnyé alakulhatnak át és megfordítva.

A fizikusok előtt világos, hogy ezt a felsorolást jelentős mértékben kibővíthetnénk, azonban az sem kétséges, hogy a fentiekben felsorolt tényeknek mind alapvető jelentőségük van.

Ezt a felsorolást látva a XIX. század fizikusa kővé meredt volna. Hát nem abszurd dolog az anyag korpuszkuláris és hullámszerű tulajdonságainak egysége? Hogyan alakulhat át a fény anyaggá?

Nagyfokú koncentrációra és a mindennapi gondolkodás meggyökeresedett szokásaival vívott harcra van szükség ahhoz, hogy az elénk táruló jelenségeket nyugodtan áttekintsük és végiggondoljuk s arra az eredményre jussunk, hogy semmiféle abszurd dologgal nem állunk szemben, hanem a valóságos természet áll előttünk teljes dialektikus bonyolultságában és mozgékonyságában. Az elénk táruló látvány nem félemlítheti meg az olyan fizikust, aki valóban szilárdan megvetette lábát a dialektikus materializmus talaján. Mindenekelőtt az elénk táruló világkép váratlansága, különös volta éppen e világ objektív voltának egyik legkomolyabb bizonyítéka. Az idealista természetfilozófiai rendszerek *Schelling*től *Eddington*ig feltételezik, hogy a világot megértheti egy úgyszólván sötét szobába zárt fizikus és filozófus gondolkodása. Az idealistáknak ebben a világában minden előre ki van gondolva, minden megfelel a gondolkodásnak. Azonban a váratlan tulajdonságokat mutató világ összedönti az ilyen idealista elképzeléseket. „... A materialista természetszemlélet — mondja *Engels* — egyszerűen azt jelenti, hogy a természetet olyannak vesszük, mint amilyen anélkül, hogy valamit is hozzáadnánk...“ *

* *Engels:* A természet dialektikája. Id. kiad. 2090.

A mechanistáknak azok a reményei, amelyek szerint a természet a mikroszkopikus világban is alapjában véve ugyanolyannak fog mutatkozni, mint a mindennapi jelenségek világában, *Engels* szavaival szólva természetesen ilyen „hozzáadásnak" bizonyultak. A mikroszkopikus világ lényegesen különbözőnek mutatkozott a makroszkopikus világgal szemben. Fogalmainkat meg kellett változtatnunk, hozzá kellett igazítanunk ehhez az elénk táruló új világhoz. Ezeknek a fogalmaknak — ha alkalmazni akarjuk rájuk *Lenin*nek a „Filozófiai füzetek"-ben olvasható megjegyzéseit — „szintén csiszoltaknak, kerekdedeknek, rugalmasaknak, mozgékonyaknak, relatívaknak, kölcsönösen összefüggőknek, az ellentétekben egységeseknek kell lenniök, hogy átfogják a világot."*

Képesek voltunk-e mi fizikusok arra, hogy ekként viszonyuljunk a természet dialektikájának elénk táruló új megnyilvánulásaihoz? El kell ismernünk, hogy sajnos sok esetben nem voltunk képesek.

Szilárdan meg vagyunk győződve arról, hogy a mechanisták felfogása téves, amikor a makroszkopikus világ szokásos modelljeivel és következtetéseivel akarnak behatolni a mikrovilágba, mindazonáltal mi is rá vagyunk kényszerülve arra, akárcsak ők, hogy a mikroszkopikus világ tanulmányozására a régi fizika olyan fogalmait használjuk, mint amilyenek a részecske, a sebesség, az erő, stb. fogalmai. Erre pedig azért kényszerülünk, mivel nincsenek még az új világ jelenségeink megfelelő adekvát és megszokott fogalmaink.

Természetesen világos, hogy ha a fényáram vagy az elektronáram egyidejűleg a rendezetlenül váltakozó részecskék tulajdonságaival és a szabályos hullámok ismérveivel is rendelkezik, akkor a fény és az elektronok a valóságban nem lehetnek sem részecskék, sem hullámok, hanem valamilyen „ellentmondásaiban egységes" dialektikus képződménynek kell lenniök. Ugyanakkor a mai fizikusnak szinte kivétel nélkül elszigetelt részecskékkel és hullámokkal kapcsolatos fogalmi készletet kell használnia.

* * *

A modern fizika fejlődési nehézségeit külföldön a legkülönbözőbb tudománytalan nézetek, az idealizmus és a misztika becsempészésére használják fel.

Az idealizmus legkülönbözőbb válfajainak és formációinak meghonosítását a rothadó kapitalista társadalom reakciós osztályai egyenesen támogatják.

Néhány példát hozok fel arra, hogy miként használják fel az új fizika tényeit az idealizmus, a miszticizmus és a velük rokon egyéb áramlatok új életre ébresztésére és felnövesztésére.

Egy elég régi, 1935-ben megjelent könyvvel kezdem. Címe: „Az ember szabadsága", szerzője *Arthur Compton*, a valamennyiünk által ismert „Compton-effektus" felfedezője. A könyv vezéreszméje az említett Compton-effektus,

* *Lenin:* Filozófiai füzetek. Szikra, 1954, 123.

azonban a könyv a szóbanforgó effektust nem annyira fizikai, mint inkább teológiai szempontból tárgyalja. A szerző az általa felfedezett jelenséget a határozatlansági reláció kisérleti alapjának tekinti. A szóbanforgó relációt viszont mint az elemi jelenségek indeterminizmusának kifejezését értelmezi. *Compton,* a kísérletező megfeledkezik közben a filozófiai és fizikai exaktságnak és pontosságnak a fizikusok második természetévé vált követelményeiről. Az okozati kapcsolat jelenlétét, vagy megfordítva, hiányát az elemi fizikai jelenségek sorában csak akkor lehet megállapítani, ha a tökéletesen azonos kezdeti feltételek megegyezése esetén azonos eredményre jutunk, vagy nem jutunk. *Compton* elfeledkezik arról, hogy a határozatlansági reláció azt állítja, hogy a kezdeti feltételek (klasszikus mechanikai értelemben) az elemi részecskékre nézve sohasem állapíthatók meg exakt módon. Következőleg magából a határozatlansági relációból logikai úton csak az következik, hogy nem lehetséges igazolni vagy megcáfolni a szigorú kauzalitást ebben az esetben, vagy helyesebben: semmi értelme sincs, hogy erről beszéljünk, ha az anyagot és a fényt következetesen és elejétől végig részecskéknek vagy hullámoknak tekintjük. *Arthur Comptont*, miként az indeterminizmus többi lovagját, ez a logikai körülmény igen kevéssé nyugtalanítja. A lehetetlenséget egyszerűen úgy tekinti, mintha az indeterminizmust jelentene. Ebből az állítólag bizonyítottnak tekinthető indeterminizmusból most már tisztán teológiai jellegű következtetések folynak, amelyek jellegét teljes mértékben megítélhetjük a könyv tartalomjegyzéke alapján: 1. Szabadság és törvényszerűség: az évszázados viszály. 2. Mi határozza meg hatásainkat? 3. Az értelem a természet világában. 4. Az ember helye az isteni világban. 5. Örök halál vagy örök élet?

Ily módon *Compton* a röntgensugarak szóródására vonatkozó kísérletek alapján a lélek halhatatlanságát bizonyítja! *Compton* könyve verses vallásos himnuszokkal végződik s jellegét tekintve a legszélesebb olvasóközönséghez szól. Ez a könyv tehát ritka szemléletes példája annak, hogy hogyan alakul át az új fizika kísérleti eredménye a legleplezetlenebb idealista és vallásos propaganda eszközévé.

Áttérek most egy másik, hozzánk időben közelebb eső példára. 1940-ben Philadelphiában megjelent *Gustav Stromberg* svéd csillagász könyve, aki állampolgárságot szerzett az Egyesült Államokban és a *Mount Wilson* obszervatóriumban dolgozik. Könyvének címe: „A világegyetem szelleme“. A könyvhöz *Adams* ismert amerikai asztrofizikus részletes előszót írt. A szerző könyvének bevezetésében megjegyzi, hogy különös hálára van kötelezve *Einstein*nek támogatásáért és tárgyilagos bírálatáért. Szerző könyvében a modern fizika, biológia és csillagászat eredményei alapján megkísérli, hogy úgyszólván keresztmetszetét adja az egész világegyetemnek. A könyvből látható, hogy a szerző, visszaélve a modern fizika eredményeivel, teljesen megalapozatlanul és önkényesen átviszi azokat a biológia területére s megfordítva, a sejttani megfigyelések eredményeit ki akarja terjeszteni az egész világegyetemre. A szerző könyvének bevezetését a következő szavakkal kezdi: „A jelenkori kutatás legfontosabb eredményét az adja, hogy az egyéni emlékezet valószínűleg elpusztíthatatlan és hogy az élő elemek lényege valószínűleg halhatatlan. A kutatások elkerülhetetlenül arra az eredményre vezetnek, hogy létezik a világszellem, vagyis az isten." *Stromberg* könyvében sűrített formában keverednek az állítólagosan az új fizika eredményeiből levont legsilányabb idealista következtetések, és a morgani biológia a csillagászat eredményeivel. S mindez együtt a legszélesebbkörű olvasóközönség számára van feltálalva.

Áttérek most a hozzánk még közelebb eső időszakra. 1946-ban Írországban megjelent *Edmund Whittaker,* az ismert filozófus és fizikus kicsiny, de rendkívül jellemző könyve: „A tér és a szellem". A könyvecske a szerzőnek 1946-ban a dublini egyetemen tartott előadásait foglalja össze. A könyv a következő szavakkal kezdődik: „Isten létezésének legerősebb bizonyítékai *Aquinoi Szent Tamás* úgynevezett „öt trópusában" találhatók, amelyek kiindulópontja a külvilág létezése, s amelyek különböző utakon mind az istenség gondolatához vezetnek. . . ." *Whittaker* könyvének tartalma nem egyéb, mint az új fizika, a relativitáselmélet és a kvantumelmélet alapján a XIII. századbeli teológia koncepciójának restaurálása. „Könyvem célja — mondja a szerző az előszó befejezéseképpen —, hogy megmutassam a természettudományokkal nem foglalkozó teológusok számára, hogy milyen akadályokkal kell még szembenéznünk, a tudós kutatóknak viszont, hogy ezek az akadályok kevésbbé jelentősek, mint ahogy azt olykor feltételezik. A természet, az anyagi világegyetem mélyebb értelmezése, amelyhez a tudományos felfedezések eredményeként jutottunk el, új perspektívákat és lehetőségeket tárt a hit és isten hirdetése számára."

Az általam idézett könyvek azért jellegzetesek, mert közvetlenül nevén nevezik a gyermeket. Ezeknek a találomra választott példáknak alapján teljes világossággal megérthetjük, hogy a kapitalista országokban az új fizikát mindenekelőtt egyes fizikusok, s velük együtt a filozófusok, no meg természetesen a teológusok, milyen „filozófia" felé akarják irányítani. Ugyanez a tendencia és ugyanez az idealizmus a legkülönbözőbb formákban, de leplezetten jelentkezik még gyakrabban nem annyira a nagyközönség számára szóló könyvekben, mint inkább a szakfolyóiratokban publikált cikkekben. A külföldi tudományos folyóiratokat olvasó fizikusok jól ismerik a legkiemelkedőbb fizikusok és csillagászok — különösen az elméleti emberek — ilyenfajta számos nyilatkozatát. A nyilvánvalóan idealista jellegű idézetek egész sorát idézhetnénk (amint az többször is megtörténik sajtónkban) az elemi folyamatok indeterminizmusáról, azután arról, hogy tér és idő fogalmait nem alkalmazhatjuk azokra a területekre, ahol a határozatlansági reláció uralkodik, továbbá a világ véges voltáról, stb. Az ilyenféle idézetek *Bohr*tól, *Heisenberg*től, *Dirac*tól, *Schrödinger*től, *Eddington*tól, *Jeans*tól és még igen sok más tekintélyes fizikustól és csillagásztól származnak. Ilyen jellegű idézeteket könnyen találhatunk a legutóbbi két évtizedben megjelent idegennyelvű könyvek és tanulmányok orosz fordításaiban is. Most csak *Schrödinger* „Mi az élet?“ című brosúrájának nemrég megjelent orosz fordítását említem meg, amely széleskörű vita tárgyát képezte a biológiai tudományokkal kapcsolatos vita során. 1948-ban az „Acta Physica Austriaca“ című új ausztriai folyóiratban „A természettudomány világképének sajátosságai“ címen *Schrödinger*nek egy nagy történetfilozófiai tanulmánya jelent meg. Ebben a tanulmányban sok olyan kijelentés található, amely látszólag materialista szempontból is elfogadható, de elég csak belepillantani a tanulmány „A természettudomány ateizmusa“ című befejező részébe, hogy észrevegyük a szerző elleplezett törekvéseit. Ezek a törekvések ugyanazok, mint a „Mi az élet?“ című brosúra utolsó fejezetének tendenciái. „A személyes istennek — olvashatjuk itt — nincs helye a világképben, amelyet csak úgy alkothatunk meg, ha kizárunk belőle mindent ami személyes.“ Tudjuk, hogy ha istent átéljük, ez ugyanolyan reális élményt jelent, mint közvetlen érzeteink, mint a saját én. De ugyanúgy, mint az én, isten sem létezhetik térben és időben. Én nem találom istent, mondja a becsületes természettudományos gondolkodó, és ezért csak azok ragadják meg őt, akiknek kátéjában meg van írva, hogy „isten szellem.“

Az általam közölt példákból — úgy gondolom — teljes bizonyossággal következik, hogy a fizika és a természettudomány fejlődését a kapitalista világban jelenleg teljes egészében jelentős veszély fenyegeti.

* * *

Áttérek most tárgyam legfontosabb részére, a szovjet fizika helyzetére, elsősorban a szovjet fizika módszertanára és a szovjet fizikusok előtt álló feladatok kérdésére.

A szovjethatalom éveiben fizikai tudományunk a forradalom előtti Oroszország fizikájához képest hatalmas fejlődésen ment át. A modern fizika legkülönbözőbb ágaival foglalkozó fiatal specialisták egész sora nőtt fel, akik kiválóan oldják meg a számukra kitűzött tudományos és technikai feladatokat. A sztálini ötéves tervek esztendei és a Nagy Honvédő Háború időszaka komoly próbakövét jelentették tudományunknak. S tudományunk a legsúlyosabb feladatok közepette is megmutatta, hogy megállja a helyét.

A szovjet fizika nagyszámú figyelemreméltó, általánosan elismert eredményre mutathat rá.

Most csak egy dolgot akarok megjegyezni: a szovjet fizikusok előtt igen nagy feladat áll, amelyet 1946 február 9-én, a választás előtti beszédében *Sztálin* tűzött a szovjet tudomány elé, tudniillik, hogy a legközelebbi jövőben tudományunk olyan helyzetbe kerüljön, hogy az első helyet foglalja el a világon. Ennek a célnak az elérésére törekszünk mi, szovjet fizikusok. Munkánknak azonban még számos fogyatkozása van. A fizika területén még kevés olyan eredményünk van, amely csúcsteljesítményt, kiindulópontot jelentene egy újabb, széleskörű fejlődés számára, amely megjelölné igen fontos, eddig még nem vizsgált irányokban a további kutatások távlatait. Hogy a fizikának vannak ilyen eredményei, az magának a fizikának lényegéből fakad, és a szovjet fizikának számos példát kell adnia — hiszen tud is adni — az ilyen munkára. Ismeretesek ezenkívül munkánk másfajta fogyatékosságai is, módszereink tökéletlensége és számos esetben a kívánatos technikai alkalmazások hiánya, stb. A megfelelő káderek hiánya miatt vannak még nálunk „fehér foltok" a fizika térképén, végül pedig — amit különösen kellemetlen elismernük — még igen erős nálunk a külföldi tudomány tekintélye előtti hajbókolás. Ez ellen a hajbókolás ellen már *Lomonoszov* is felvette a harcot, ez a magatartás azonban — nyiltan vagy lappangva — napjainkig is megmaradt.

Ennek a hajbókolásnak, illetőleg a külföldi tekintély megalapozatlan és vak elismerésének formái igen változatosak. Számos fizikus számára például mind a legutóbbi időkig különös jelentősége volt annak, ha munkáikat az angol, amerikai és német folyóiratokban idézték, noha az ilyen idézet gyakran egyáltalán nem jelentette azt, hogy az idéző ismerte volna magát az idézett munkát, hanem csak azt, hogy a munkát a megfelelő bibliográfiai kézikönyv megemlítette. Sok fizikus azt a tényt, hogy ha valamely szovjet tanulmányt egy külföldi folyóirat leközölt, de jure a szóbanforgó munka tudományos érdemének elismeréséül vette, noha a külföldi folyóirat számos esetben boríték-lapján megjegyezte, hogy a szerkesztőség nem vállal felelősséget a leközölt tanulmányok tartalmáért, és az is ismeretes volt, hogy számos, állítólag tekintélyes folyóirat gyakran igen kétes értékű anyagot is leközölt. Azonban ilyen vagy olyan okból egy külföldi cikket, még ha annak a színvonala igen alacsony volt is, tudósaink bizonyos becsben tartottak, sokszor csak azért, mivelhogy az külföldi volt.

A külföldi tudomány tekintélye előtt való alázatos meghajlásnak egy másik formája az volt, hogy egyesek a hazai tudományos irodalmat lekicsinyelték, sőt bizonyos esetekben figyelembe sem vették. Saját tudományos folyóiratainkat csak igen kis mértékben olvastuk és tanulmányoztuk. A tudományos igazság és tekintély sokunk számára mintegy hozzá volt kötve a külföldi irodalomhoz. Ez a méltatlan autoszuggesztio egyre visszataszítóbbá és türhetetlenebbé vált, amint tudományunk mennyiségileg és minőségileg is mind jobban kibontakozott. Mintegy 1935-ig tudományos termelésünk jelentős részét külföldön publikáltuk. Ennek a helyzetnek eredményei ma már, a széleskörű társadalmi vita eredményeként eléggé ismeretesekké váltak. Tudósaink minden komoly ok nélkül maguk segítették elő tudományunk eredményeinek lebecsülését és maguk szoktatták hozzá a külföldieket ahhoz, hogy az orosz tudósokról és az orosz tudományról általában dölyfösen, leereszkedő vállveregetéssel beszéljenek.

A XX. század eleje óta a Nobel-díjasok hosszú jegyzékében, amelyben valóban kiváló személyek mellett néha közepes tudósok is szerepelnek, egyetlen orosz fizikus nevét sem olvashatjuk. Nem kapott például Nobel-díjat *A. Sz. Popov*, noha *Marconi*t és *Brown*t kitüntették vele. Nem szerepel a Nobel-díjasok között *Mendelejev*, noha sorukban igen sok, jóval kisebb tudományos jelentőségű személy is megtalálható. Nem kapott azután Nobel-díjat *P. N. Lebegyev* sem, aki elismerten a legjobb kísérletező fizikusa volt a világnak századunk elején. A fény kombinált szóródásának felfedezéseért Nobel-díjat kapott az indus *Raman*, mindazonáltal hiányzik a Nobel-díjasok jegyzékéből *Mandelstam* és *Landszberg* neve, akik a jelenséget *Raman*nal egyidejűleg fedezték fel, amint azt a világ tudományos sajtója megállapította és elismerte. A felsorolt példák alapján aligha kételkedhetünk abban, hogy tudományunk képviselőit a Nobel-díjak odaítélésekor szándékosan figyelmen kívül hagyják.

Ez a példa önmagában is teljesen elegendő annak megítélésére, hogy milyen eredményre vezet fizikusainknak a nyugati tudományos tekintély előtti, olykor — sajnos — előforduló hajbókolása. De vannak ennek a magatartásnak egyéb siralmas következményei is. Ezek közé tartozik tudósaink sok esetben veszendőbe ment fontos prioritása, amelyet ma már csak nagy nehezen, levéltári adatok alapján tudunk rekonstruálni. Ha csak a fizikára szorítkozunk, elég, ha csupán *Lomonoszov, Polzunov, Petrov, Silling, Jakobi, Lodigin, Popov, Umov, Rozing*, stb. nevét említjük meg.

A hajbókolás ellen vívott harc problémája nem újkeletű. Közismert, hogy a kérdést két évszázaddal ezelőtt teljes jelentőségében felvetette *Lomonoszov* és a XIX., valamint a XX. században is újból meg újból felvetették. Így például beszéltünk róla tudományos akadémiánk 1936 évi márciusi ülésszakán is. Ezen az ülésszakon referátumom zárószavaiban nekem is alkalmam nyílott, hogy kitérjek erre a kérdésre. Amikor megemlítettem, hogy a külföldiek bizalmatlanul tekintenek a szovjet tudományra, a következőket kellett megjegyeznem: „De lényegbevágó-e ez a bizalmatlanság? Meg kell szoknunk, hogy mi magunk legyünk önmagunk legszigorúbb bírái." Ugyanezekkel a szavakkal fordulhatok most is a fizikusokhoz. Sajnos az a helyzet, hogy „a nyugat előtt való hajbókolás" még most is ott parázslik a kihamvadóban lévő rabszolgalelkűség hamuja alatt.

Az a fontos feladat áll előttünk, hogy alaposan átértékeljük tudományunk régebbi eredményeit, s hogy a múlt elfelejtett, s annakidején nem értékelt egyes figyelemreméltó eredményeit új életre keltsük. A legfontosabb azonban a jelenben és a jövőben is, hogy a lehető legnagyobb figyelemmel és tisztelettel forduljunk elvtársaink munkája felé, és hogy levessük magunkról azt a rabszolgaszokást, amely a külföldi tudomány eredményeit túlozza, csak azért, mert az külföldi. Mi nagyrabecsüljük és elismerjük *Newton, Fresnel, Planck* és mások nagy és teremtő hatását, de itt az ideje, hogy ugyanakkor teljes mértékben megbecsüljük a mi *Lomonoszov*unkat, *Lobacsevszkij*ünket *Mendelejev*ünket és *Lebegyev*ünket. Országunknak, amely a világtörténelemben elsőnek építi fel *Lenin* és *Sztálin* nagy tudományos gondolatának terve szerint a szocializmust, országunknak, amely új, szocialista kultúrát teremt, megvan a maga hatalmas tudománya is.

* * *

A külföldi tudomány tekintélye előtti vak meghajlás egyik legveszélyesebb és legmérgezőbb következménye az, hogy a külföldi tudomány gyakran igen fontos és hasznos konkrét eredményeivel együtt mélyen behatol tudományos irodalmunkba a mai kapitalista világ ideológiája is.

A tudomány meg nem hamisított története arról tanúskodik — amint a fentiek során már alkalmam volt megjegyezni, — hogy a fizika fejlődésének majdnem miden egyes újabb alapvető lépését a kapitalista társadalomban nyomon követik azok a próbálkozások, amelyek a tudományos eredményeket hozzá akarják igazítani az idealista, vagy egész egyszerűen a nyiltan vallásos konstrukciókhoz. Tekintettel állításom fontosságára, néhány tényt újból csak fel kell sorolnom.

A newtoni gravitációs elmélet a XVIII. századi Angliában azt a szolgálatot tette *Bentley* számára, hogy teológiai előadásokat tartson annak alapján, sőt hogy vallásos mozgalmat szervezzen. A termodinamikát Európában a világ időbeli véges létének bizonyítására, a továbbiak során pedig a machista filozófia kialakítására használták fel. Az elektromosságra és a mágnességre vonatkozó tanítás az egész világon táplálékot szolgáltatott a meszmerizmus, a médiumizmus, valamint a XVIII. század végi, sőt a XIX. századra is kiterjedő misztikus sarlatanizmus valamennyi egyéb fajtája számára is. A többdimenziós geometriákra vonatkozó tanítást a fizikusok, csillagászok és kémikusok egész sora, Angliában, Németországban és Oroszországban a spiritiszta jelenségek értelmezésére használta fel. Az elektronelmélet, a radioaktivitás és a relativitáselmélet bizonyos következményei azt az idealista hullámot idézték elő, amelyet *Lenin* könyve tárt elénk és leplezett le. Az imperializmus feltételei között fokozott erőre kapott az a fajta kísérlet, amely a tudomány és annak legújabb eredményeit az idealizmus megújult támadására, a tudományellenes ideológia meghonosítására akarta felhasználni.

Semmi szükség sincs arra, hogy elmélyedjünk annak a „mechanizmusnak" tanulmányozásába, amely a tudomány legújabb eredményeit a tudománytól teljesen idegen célok szolgálatába akarja állítani. Az esetek többségében durván, vagy ellenkezőleg, ravaszul az olyan fogalmak lompos és pontatlan alkalmazására támaszkodnak, mint amilyenek az anyag, a tömeg, az energia, az erő, az ok, stb. Nem csekély jelentőségű magának a fizikai eredmény szerzőjének filozófiai álláspontja sem. Egy látszólag egyáltalán nem filozófiai jellegű, hanem fizikai igazság, mint amilyen a testek esésének, vagy felmelegedett tárgyak fokozatos lehűlésének ténye, megfelelő filozófiai állásfoglalás mellett misztikus konstrukciók alapjául szolgálhat.

Tökéletesen helytelen és ténybelileg téves lenne, ha a fizikai eredményekkel való ilyenfajta visszaéléseket, valamint tudományunk fogalmainak pontatlanságait a fizikán kívül álló személyek számlájára írnánk csupán. Amint erről már a fentiekben is megemlékeztünk, maguknak a fizikai elméleteknek megalkotói és más fizikusok a hibásak ebben. Maga *Newton* is teológiai kitéréseiben, amelyek a „Principia Mathematica"-ban és az „Optica"-ban találhatók, a fizikai tényeket, következtetéseket vallásos eszmefuttatásokra használta fel. *Bohr, Schrödinger* és *Heisenberg,* a modern kvantummechanika megteremtői tudatosan vetették fel az olyan kérdéseket, amelyek az elemi jelenségek indeterminizmusára, az akaratszabadság fizikai értelmezésére és térbeli-időbeli képzeleteinknek a fizikai jelenségek egész sorára való alkalmazhatatlanságára vonatkoznak.

A forradalomelőtti orosz fizikában, az akkori tudósok sorában helyet foglaltak nyiltan deklarált idealisták, akik nyilvánosan és a sajtóban hitet tettek idealizmusuk mellett. Nem csekély volt a számuk az empiriokriticizmus követőinek sem. Figyelemreméltó azonban, hogy az idealizmus legkülönbözőbb árnyalatait számos esetben külföldről importálták, a külföldi tudósoktól kölcsönözték. Az orosz fizikusok tőrőlmetszett filozófiája *Lomonoszov* kora óta materialista jellegű volt. Ez világosan felismerhető *Lomonoszov, Lobacsevszkij, Petrov, Lenc, Mendelejev, Sztoletov, Umov, Lebegyev* és mások tevékenységének példáján. Ez a materializmus határozottan és szilárdan szembenállt az idealizmussal.

Az októberi forradalom után, mint ismeretes, széles körben és gyorsan hozzáfogtak nálunk a dialektikus materializmus tanulmányozásához. Azonban nem állíthatjuk, hogy a dialektikus materializmusnak a szovjet fizikusok tudatába való behatolása minden ellenállás nélkül ment volna végbe. A dialektikus materializmussal mind a leplezett idealisták, mind pedig a deklarált és leplezett mechanisták nyilt vagy leplezett harcot folytattak. Jól megismerkedhetünk ennek a harcnak egyes fázisaival például a „Под знащенем Марксизма" című folyóirat lapjaiból, valamint a többi időszaki és nem időszaki kiadványból is.

Azonban fizikusaink többsége, még ha magáévá tette is a dialektikus materializmust, úgyszólván sohasem nyilatkozott meg elvi jelentőségű fizikai-filozófiai problémákról.

Ugyanakkor azonban a kapitalista országok fizikusai egyáltalán nem hallgatnak. A burzsoa nyugaton számos könyv jelenik meg a fizikával összefüggő filozófiai problémákról. Ezenkívül szakmonográfiák és kézikönyvek szerzői filozófiai nézeteiket, még ha tömören is, de világosan kifejezésre juttatják. Az olyan szerzők tudományos emlékiratai, mint amilyenek *Schrödinger, Heisenberg, Eddington* és mások, gyakran filozófiai részt is tartalmaznak. A szovjet fizikusok részben az eredeti alapján és részben fordításokból ismerik ezt a széleskörű irodalmat és semmi kétségünk nem lehet arra nézve, hogy a külföldi fizikusok által kifejezésre juttatott filozófiai vélemények és nézetek nem maradnak egészen hatástalanok a fizikai elméletek fejlődésére sem. Ez a filozófia, amely az esetek többségében nyiltan idealista jelleget visel magán, végzetes hatást gyakorol a fizika fejlődésére.

De hogyan reagálnak a szovjet fizikusok a külföldi fizikai irodalomban megnyilvánuló idealista filozófiai állásfoglalásokra? Az esetek többségében nem utasítják azokat vissza. Erről meggyőződhetünk, ha szemlét tartunk, nyomtatásban megjelent fizikai termésünk, sőt az alapvető jellegű művek felett is, amelyekben nyilvánvaló módon és szükségszerűen elvi jellegű filozófiai állásfoglalásoknak kellene kifejezésre jutniok, — ha nem kerülnék el azt tudatosan a szerzők. Itt van például az elméleti fizika nagy tankönyve, amelyet *L. D. Landau* és *E. M. Lifsic* írtak. A tankönyv öt kötetre terjed; ezek: Mechanika, Statisztikai fizika, A kontinuumok mechanikája, A tér elmélete és a Kvantummechanika. A tankönyv rendkívül részletesen tárgyalja a modern fizika elsőrendű módszertani jelentőségű, alapvető kérdéseinek többségét. Azonban a napvilágot látott kötetek egyikében sem találkozunk a kötetben tárgyalt alapvető fizikai problémák elfogadható filozófiai megvilágításával. A szerzők szabálynak fogadták el, hogy bármely általános és széleskörű kérdés megtárgyalásakor az alapvető előfeltevéseket a lehető leggyorsabban megfogalmazzák, hogy azután nyugodtan haladhassanak tovább a konkrét feladatok és alkalmazások vágányain. A szerzők még a bevezető, első kötetben is, az elméleti fizika feladatainak meghatározásakor elfogadhatónak tartják, hogy a következő, lényegében véve tautologikus mondatra támaszkodjanak: „Az elméleti fizika azt a célt tűzi maga elé, hogy fizikai törvényeket állítson fel, azaz, hogy megállapítsa a fizikai mennyiségek közötti összefüggéseket." Ezt az igen keveset jelentő mondatot akár a szerzők machista, pozitivista állásfoglalásának deklarációjaként is tekinthetjük. Az elméleti fizika bevezetésében egyetlen szót sem találunk a materialista dialektika szempontjáról, a világ objektivitásáról és arról a megfelelésről, amely az elméleti fizika matematikai struktúrája és a természeti jelenségek tényleges lényege közt fennáll. A térelmélettel foglalkozó kötetben a szerzők elkerülik, hogy beszámoljanak a térre vonatkozó tanítások fejlődésének bonyolult történetéről, az úgynevezett „távolbahatásról", stb. Ugyanígy tárgyalják a statisztikai fizikát is, tehát teljesen formálisan, anélkül, hogy rávilágítanának arra a bonyolult fizikai-filozófiai küzdelemre, amely egyrészt *Boltzmann,* másrészt *Ostwald* neve körül kristályosodott ki. Ugyanilyen formálisan tárgyalják a kvantummechanikát is. Hogyan értelmezzük a szerzők hallgatását? Talán mint annak az óhajnak a kifejezésre juttatását, amellyel el akarják választani a fizikát a filozófiától? Azonban — amint erről a fentiekben röviden már megemlékeztünk — ezt a legjobb szándék mellett sem lehet elérni. A filozófia, még ha majdnem teljesen tudattalanul is, mindazonáltal átcsillan a szerzők formalizmusán. A térelméletben például a szerzők arra a következtetésre jutnak, hogy „az elemi részecskéknek nem lehet véges méretük, hanem azokat geometriai pontoknak kell tekintenünk."* Az ilyen a la *Boskovics* következtetés fizikai és filozófiai szempontból aligha fogadható el és mindenesetre fizikai és filozófiai magyarázatot igényel, különösen egy tankönyvben. Különben a könyv fizikus és filozófus olvasója teljes joggal vonhatja le azt a következtetést, hogy *Landau* és *Lifsic* számára „a tér megszűnik az anyag létezési formája lenni" vagy, hogy az elemi részecske egyszerűen nem létezik, minthogy egy matematikai pontban egyáltalán semmi sem tartózkodhatik. A szovjet fizikusnak az a kötelessége, hogy megfogalmazásaiban nem csupán fizikai, hanem filozófiai szempontból is figyelmes és gondos legyen.

Áttérek most egy másik példára, *J. I. Frenkel* „Statisztikai fizika" című nagy tankönyvére, amely 1948-ban új kiadásban jelent meg. Ebben a hatalmas kötetben, amelynek terjedelme mintegy 50 ívre rúg, és amelyben az előszó szavai szerint a szerző „a fizikai lényeget nem akarta bonyolult matematikai apparátussal elfedni", nagy és igen érdekes tudományos anyag található. Ugyanakkor azonban akárcsak *Landau* és *Lifsic* tankönyvében, a kérdések filozófiai vonatkozásait a szerző valószínűleg szándékosan megkerüli, mint hogy ha valamilyen „tabu" volna a modern fizika legégetőbb kérdéseinek filozófiai megvilágítása. Azt mondottam, hogy „valószínüleg szándékosan", mivel *J. I. Frenkel* régebbi könyveiben gyakran kitért filozófiai kérdésekre, amikor nem is olyan ritkán durva, idealista jellegű filozófiai hibákba esett, amint azt a sajtónkban megjelent bírálatok többizben meg is jegyezték.

A statisztikai fizika kérdései módszertani szempontból a nehéz problémák egész tömegét ölelik fel. Természetesen annál fontosabb lenne a kérdésnek éppen ezt a vonatkozását tisztázni.

Azt szokták mondani — és így beszél maga *Frenkel* is — hogy a gázokra vonatkozó tanításba a valószínűség fogalma csupán annak a gyakorlati nehézségnek következtében tör be, hogy nem lehet pontosan leírni a vizsgált rendszer kezdeti állapotát, ugyanakkor, amikor az atomfizikában a leírás elvi jellegű lehetetlenségével állunk szemben, amely azzal kapcsolatos, hogy nem lehet egyidejűleg megállapítani a részecskék koordinátáit és sebességét. Azonban a gázok statisztikája és az atomon belüli jelenségek statisztikája közti különbség egyáltalán nem abban rejlik, hogy az első esetben a valószínűség fogalmát csupán gyakorlati jellegű meggondolások alapján vezetik be, a második esetben pedig elvi alapon. A valószínűségi törvényeket a gázokkal kapcsolatban azért kellett bevezetni, mivel nem kétséges, hogy a molekulák kezdeti állapotai, tekintettel azok nagy számára, statisztikus törvényszerűségek alapján oszlanak el; de vajjon nem ugyanilyen meggondolások alapján kell-e bevezetni a statisztikus törvényeket az atomon belüli jelenségek leírásával kapcsolatban is? Ha a fény vagy az elektronok diffrakciójának jelenségét figyeljük meg, akkor nem tudjuk megmondani, hogy valamely foton vagy elektron

* *D. L. Landau* és *M. Lifsic:* A tér elmélete, 1948. 34. Oroszul.

miért esett éppen a diffrakciós kép egy meghatározott pontjába; de nemtudásunk foka ebben az esetben is ugyanolyan, mint akkor, amikor nem tudjuk megmondani, hogy miért van egy meghatározott molekulának ilyen és ilyen koordinátája és impulzusa. Más szavakkal, nekem úgy tűnik, hogy a két feladat mélyreható különbsége ellenére, módszertani szempontból elvileg mindkét esetben ugyanolyan helyzettel találjuk magunkat szemben.

Ezekre a kérdésekre azért kellett most röviden kitérnem, mert ezeket rendszerint hallgatással szokták mellőzni. Így tesz könyvében *Frenkel* is. A szerző, anélkül, hogy bármiféle filozófiai magyarázatot adna, egyszerűen elbújik a „viselkedés" terminusa mögé, ezzel a fogalommal akarja ugyanis helyettesíteni az elemi részecskék viszonylatában a „mozgás" fogalmát (548. o.). Ennek a filológiai receptnek a használatával *Frenkel* állítólag el tudja kerülni a nehézségeket; ezután rendkívül nagyterjedelmű könyvének két oldalán már meglepő szűkszavúsággal végez a határozatlansági reláció módszertani szempontból annyira súlyos problémájával (549. o.).

Frenkel „Statisztikai fiziká"-jának új kiadásában a „Hullámmechaniká"-jának régebbi kiadásaiban található számos hibás filozófiai állítását kiküszöbölte. Azonban tudományunk szempontjából sokkal előnyösebb lett volna, ha a hibákat nem a kérdés filozófiai aspektusával kapcsolatos hallgatással küszöbölte volna ki, hanem ha a szerző új álláspontját világosan kifejtette volna.

Annak a ténynek, hogy fizikusaink a filozófiai jellegű kérdéseket hallgatással mellőzik, természetes következményeiként foghatjuk fel számos fizikai tárgyú könyv és tanulmány azzal kapcsolatos fogyatékosságát, hogy a szerzők filozófiai szempontból megengedhetetlen nemtörődömséget tanusítanak az általuk használt fogalmak iránt. Ebben igen sokan hibásak vagyunk, így többek közt magam is; könyveimben és a régebbi évekből származó fordításaimban példa található tömeg és anyag helytelen azonosítására, valamint egyéb módszertani hibákra is. *Volkenstejn* „A molekulák szerkezete" című nemrégiben megjelent könyvében szembeállítja a fényt az anyaggal, ami a szó betűszerinti értelmében filozófiai értelmetlenséget jelent. Ez a hiba azonban igen gyakran előfordul más szerzőknél is. *D. A. Frank-Kamenyeckij* „Az energia a természetben és a technikában" című, 1948-ban megjelent könyvében többször is arról beszél, hogy a tömeg energiává vagy az anyag energiává változik. Ez a hiba is igen elterjedt és hosszú sorát idézhetnénk a különböző munkáknak és tankönyveknek, amelyekben ugyanerre a nyelvbotlásra bukkanunk. Rendkívül elterjedt ezenkívül az anyag fénnyé való átalakulási folyamatának megjelölésére az „annihiláció" terminusa is. Ebben a terminusban is egy idealista mag lappang, mivel a nihil szó tudvalévőleg annyit jelent, hogy „semmi."

Meg kell jegyeznünk, hogy filozófiai nyelvünk idealista bemocskolását egyáltalán nem szabad jelentéktelen dolgoknak tartanunk. Ez igen gyakran akaratlanul is idealista jellegű következtetésekre csábít.

Ennél is nagyobb hiba, amelyben különösen ludasak fizikusaink, fordítóink és kiadóink, hogy *Dirac, Heisenberg, Eddington,* és mások műveinek kiadásakor nem tartják szükségesnek, hogy kifejtsék álláspontjukat az említett tudósok számos, nyíltan idealista jellegű elgondolásával kapcsolatban. Éppen megfordítva, a fordítók és kiadók által az ilyen könyvek elé írt előszók — különösebben a régebbi években — azt fejtették ki, hogy a szóbanforgó munkákkal az előszó írói teljes egészében egyetértenek.

Ily módon meg kell állapítanunk, hogy fizikusaink túlnyomó többsége — legalább is nyomtatásban megjelent munkáiban — igen ritkán nyilvánítja ki filozófiai állásfoglalását az új fizika által felfedezett, rendkívül fontos jelenségek egész sorával kapcsolatban. Rendkívül gyenge a konkrét tudományos eredményekkel együtt behatoló és fizikusainkat az esetek egész sorában észrevétlenül hipnotizáló ellenséges ideológia ellen folytatott harc is. A modern fizika filozófiai vonatkozásai ugyanakkor annyira komoly jelentőségűek mind *magára a fizikára,* mind pedig a filozófiára és a többi tudományra is, hogy ezen a területen feltétlenül igen nagy aktivitásra van szükség.

* * *

A szovjet fizikusok egész sorában a modern fizikai elméletekkel szemben — sajnos — egy dogmatikus álláspont vált uralkodóvá. Fizikusaink úgy tekintik a dolgot, hogy tudományuk eljutott szinte az abszolút igazsághoz, a természettudomány bizonyos „felső szintjéhez", ha nem beszélünk a részletekről, a másodrendűen kicsiny mennyiségekről. *Dubois Raymond* Ignorabimusa helyett ma azt a kánont hirdetik, amely szerint állítólag már elujtottunk a teljes igazsághoz s ennek már csak bizonyos részleteit kell tökéletesítenünk.

Ezt a felfogást elfogadni és ezzel megbékélni mindenekelőtt már csak azért sem lehet, mivel — *Lenin* szavaival szólva — az anyag „végtelenül mély" és „kimeríthetetlen". A dogmatizmus, a viszonylagos igazság abszolút igazságként való elfogadása tudományunk fejlődésében többször is felütötte a fejét. A XVIII. és XIX. században például azt tartották, hogy a jelenségek elvi jellegű törvényeit a newtoni fizika egyszersmindenkorra megállapította. A termodinamika fénykorának korszakában, a XIX. század második felében, sokan azt hitték, hogy a makroszkopikus fogalmak — az energia, az entrópia, a szabad energia és a többi termodinamikai függvény — alapján felépített fizika kifogástalanul és „teljesen" leír minden fizikai jelenséget, hogy elmélet és kisérlet között teljes az összhang. Mint jól tudjuk, *Newton* fizikája az elektrodinamikai jelenségek területén, különösen a mozgó közegek elektrodinamikájában elvi jelentőségű vereséget szenvedett. A befejezettség és teljesség látszólagosnak bizonyult. S pontosan ugyanilyen elvi jellegű kapitulációt kellett végrehajtania a termodinamikai jellegű makroszkopikus fizikának is a statisztikus jellegű, fluktuációs tények előtt.

Mindezekkel kapcsolatban lényegesen megváltozott a korábban megállapított fizikai törvények jellegének felfogása is.

A modern elméleti fizikusok jelentős részének dogmatizmusát tehát semmi sem igazolja. Nyilvánvaló, hogy még csak azt sem állíthatjuk, hogy a jelenleg fennálló elméletek minden belső ellentmondástól mentesek lennének. Az elektron hatásának problémájában felmerülő végtelenségekkel kapcsolatos nehézségek az olyan feladatokban, mint a hidrogénatom elmélete, önmagukban is arra kényszerítik a fizikusokat, hogy megalapozatlan műveletekhez folyamodjanak, amelyek hasonlóak az olyan eljáráshoz, amikor egy divergens sorban az első tag kivételével az összes többi tagot elhanyagoljuk. Az ilyenfajta eljárásokat csupán eredményeiknek a tapasztalattal való megegyezése igazolja, azonban már ezen a területen is kezdenek rések mutatkozni.

A „leírás" elképzelt „teljességétől" lényegében véve már nincs is olyan messzire a kanti megismerhetetlen „magánvaló" és az ál-abszolút igazság egyszerre Ignorabimus-szá változik.

Térjünk ki most azonban az elmélet és kísérlet közötti „harmónia" kérdésére, amelyet egyes fizikusok oly nagy hangon hirdetnek. Ez az összhang meglehetősen sajátos jellegű, mivel az elmélet statisztikus jellegű jóslatokat ad, a kísérlet pedig az elmélet számára — statisztikai adatokat szolgáltat. Az elmélet például előre megmondja, hogy bizonyos valószínűsége van annak a ténynek, hogy az elektron vagy a foton a diffrakciós kép meghatározott világos foltjára esik, azonban az elmélet nem tudja teljes bizonyossággal, hogy az elektron vagy a foton a meghatározott időközben ténylegesen is odakerül az adott világos foltra. Szokásunkká vált szemléleti módunk szerint — amely szerintem az egyedül helyes felfogás — a statisztikai tudás sohasem jelent teljes tudást. Ugyanakkor a modern kvantummechanika, vagy helyesebben a vele foglalkozó fizikusok, dogmatikusan azt állítják, hogy ez a statisztikai tudás a tudomány „felső szintjét" jelenti. Azt a törekvést, amely ezen a „felső szinten" túl akar jutni, egész egyszerűen értelmetlennek nyilvánítják.

A fentiekben már érintettem azt a kérdést, amely szerint állítólag rendkívül mélyreható különbség van a klasszikus fizikai statisztika — például a gázokra vonatkozó tanítás — és a kvantumfizikai statisztika — például az atommagra vonatkozó tanítás — között. Amint már említettem, az a véleményem, hogy a két eset közötti különbség arra vezethető vissza, hogy a klasszikus feladatban a koordináták és sebességek rendszertelenségével van dolgunk, a kvantumelméleti feladatban viszont jelenleg még nem tudjuk, hogy milyen tulajdonságnak kell tulajdonítanunk a megfigyelt jelenségek rendezetlen jellegét, pontosan ugyanúgy, mint ahogyan abban az időben, amikor a botanikus *Brown* felfedezte a róla elnevezett mozgást, még senki nem tudta, hogy mitől függ a folyadékban lebegő részecskék kaotikusan rendezetlen mozgása.

Ezt az atomon belüli jelenségek területére vonatkozó nem-tudásunkat formálisan összekapcsolják a határozatlansági relációval, azonban az mindennél világosabban és nyilvánvalóbban beszél anyag- és fény- „modelljeink" fogyatkozásairól, amelyek egyszerre rendelkeznek a szabályos hullámok és a kaotikus korpuszkulaáramok tulajdonságaival. *Paul Langevin* „Pozitivista és realisztikus törekvések a filozófiában és fizikában" című, 1938-ban tartott előadásában a következőket mondta: „Azt gondolom, hogy azt kérdezni, milyen egyidejűleg a korpuszkula impulzusa és helye, annyit jelent, mint helytelen kérdést feltenni. Azt gondolom, hogy ha erre a kérdésre nem kapunk választ, akkor nem arra kell következtetnünk, hogy a természeti törvényeknek van valamilyen határozatlansági elvük, hanem csak arra, hogy az atom tartományán belül nincs olyan dolog, amely végtelen kicsiny lenne és megfelelne a klasszikus mechanika által bevezetett individualizált tárgy eszméjének."

A különféle „tudásszintek"-kel és Ignorabimusokkal kapcsolatban nemcsak hogy igen óvatosaknak kell lennünk, hanem azokat egyszerűen és határozottan el kell utasítanunk. A fizika története ebben a vonatkozásban igen tanulságos. A megfelelő kísérletek végrehajtása előtt egyetlen elméleti fizikusnak sem volt sejtelme a radioaktivitás létezéséről; a természet kvantumszerű tulajdonságait is csak a kísérletek alapján fedezték fel az elméleti fizikusok. A fizikusnak remélnie kell, sőt meg kell győződve lennie arról, hogy az anyag természetét a jövőben jóval mélyebben fogjuk ismerni, mint ahogy azt ma ismerjük.

* * *

Áttérek most a gyakorlati jellegű konklúziók levonására. Azt gondolom, hogy közülük egyesek az előbbiekben kifejtettek alapján jóval nyilvánvalóbbak lesznek.

Konkrét munkásságunk elengedhetetlen feltétele, hogy tudományos kutatómunkánk, oktatómunkánk és a fizikai ismeretek népszerűsítése alkalmával levonjuk a helyes és tisztán megfogalmazott filozófiai következtetéseket. Ez tudományunk szovjet módra való, pártos jellegű fejlődésének egyik előfeltétele. A fizika filozófiai kérdéseivel kapcsolatos közömbösségnek, részvétlenségnek, gondatlanságnak és „hallgatag megegyezésnek" meg kell végre szűnnie. Kötelességünk eljutni odáig, hogy minden egyes általános és speciális fizikai tankönyvben — de nemcsak a nyomtatásban megjelent tankönyvekben, hanem az előadásokban is — világos kifejezésre jusson a filozófiai alap. Az olvasónak szüksége van arra, hogy a konkrét anyagot mélyrehatóan és szervesen itassa át a helyes filozófia. Ezért nem elegendő, ha a szerzők a szóbanforgó könyvekben egy filozófiai jellegű bevezető fejezetre szorítkoznak, amely a szerző kredo-jának egyszerű deklarációját tartalmazza, hanem a tárgyalt anyagot a lehető legszorosabban és a lényeget érintő módon kapcsolatba kell hozni a filozófiai alappal. Tagadhatatlan, hogy ez nem jelent egyszerű és könnyű feladatot. Mindazonáltal a feladatot meg kell oldani.

Egy másik feladat, amit meg kell oldaniok a szovjet fizikusoknak, a fizika filozófiai kérdéseinek területén végzett konkrét tudományos munka. Amint már többször is említettem, Nyugaton gyakran jelennek meg a sajtóban — mind tanulmányok, mind pedig könyvek formájában — filozófiai fejtegetéseket tartalmazó, idealista alapon megkonstruált fizikai művek. Válaszunk erre rendszerint arra szorítkozik, hogy filozófusaink (nem pedig fizikusaink) publikációikban mellesleg megemlékeznek ezekről az idealista kirohanásokról, miközben megemlékezésüket a nyugati fizikusok címére küldött, kevéssé hízelgő kitételekkel kísérik. Az idealizmust természetesen nem kell dicsőítenünk, de magukkal az említett kitételekkel kétségkívül még nem intéztük el a dolgot. Komoly, részletes és konkrét kritikára van szükség, amely ténylegesen is szétzúzza a nyugati idealista fizikusok előfeltevéseit és következtetéseit. Ugyanakkor gondoskodni kell arról, hogy ezt a kritikát Nyugaton is tudomásul vegyék. Állandó ideológiai jellegű tudományos harcot kell folytatnunk, egyetlen csatára szorítkozni céltalan dolog. *Lenin* „Materializmus és empiriokriticizmus" című könyvével klasszikus példát hagyott ránk arra nézve, hogy miként kell igazi ideológiai harcot folytatni a filozófiai kérdések területén. A szovjet fizikusoknak, mind az elméleti, mind pedig a kísérleti kutatóknak már régóta meg kellett volna kezdeniök a harcot ezen a területen. Ez az egyik legfontosabb feltétele annak, hogy módszertani pozícióink a fizika területén megszilárduljanak.

Irodalmunkban úgyszólván ismeretlenek az olyan könyvek, amelyeket a fizika filozófiai kérdéseiről fizikusok írtak volna a fizikusok számára. Ezt a hiányosságot a legközelebbi jövőben fel kell számolni, mind egyéni, mind pedig kollektív munkák formájában. Olyan könyvekre és tanulmányokra van szükségünk, amelyek a dialektikus materializmus és a modern tudományos eredmények nézőpontjából elemzik a modern fizika számos kérdését. Következetes elemzés tárgyává kell tenni a filozófia és a fizika olyan alapvető fogalmait, mint amilyenek a tér és idő, anyag, tömeg, energia, töltés, spin és így tovább. Ilyen elemzéssel mindez ideig nem rendelkezünk és a fizikai tankönyvek minden egyes olvasójának ebből a szempontból „fel kell fedeznie Amerikát", ami persze gyakran igen kétséges, sőt egész egyszerűen hibás eredményekre vezet. Halaszthatatlanul szükséges ezenkívül a fizikai törvény, az okság, a dinamikus és statisztikus törvényszerűség fogalmának részletes, fizikai és filozófiai szempontból való megvitatása. Az említett fogalmak területén uralkodó tisztázatlanság mélyreható filozófiai és fizikai hibákat eredményez. Halaszthatatlanul szükséges ezenkívül az alapvető kvantumos jelenségek, valamint a relativitáselmélet törvényeinek és struktúrájának mélyreható, dialektikus-materialista elemzése. Rendkívül jelentős lenne továbbá, ha elemzés tárgyává tennék a fizika területén alkalmazott tudományos kutatómódszereket. A kísérleti módszer, a mechanikai modellek módszere és az elvek módszere mellett — amelyeket a fizikusok számos évszázadon át használtak — a modern fizikában különleges jelentőségre tett szert a matematikai hipotézis vagy a matematikai extrapoláció módszere. Ezt az eljárást filozófiai szempontból különösen meg kell világítani, mivel egyes kutatók gyakran teljesen helytelenül viszonyulnak hozzá s megfeledkeznek annak hatalmas, alkotó jellegű szerepéről.

Különösen komoly figyelmet érdemel a folytonos és ugrásszerű eszméjének összefüggésével kapcsolatos probléma a fizika területén, mivel a fizika dialektikusan, két úton fejlődik.

Mindezekben a fentiekben felsorolt, de még sok más nem említett kérdésben is nagyfokú tisztázatlanság és határozatlanság uralkodik. Ezt pedig nemcsak a filozófia sínyli meg, hanem vele együtt a fizika területén végzett konkrét jellegű kutatómunka is.

Amint a szovjet fizikusok előtt álló, módszertani vonatkozású feladatok tömör és rövid felsorolásából is kiderül, egy rendkívül nagyméretű munka programmja bontakozik ki előttünk, amelyet a fizikusok alapjaiban nem háríthatnak át a filozófusokra, hanem azt nekik maguknak kell megoldaniok. A leghelyesebb természetesen, ha ezeket a feladatokat a filozófusokkal szoros együttműködésben oldják meg.

Mindezekkel azonban még nem értek véget a módszertani kérdésekhez közeleső területen előttünk álló feladatok. Elodázhatatlan kötelességünk, hogy elvégezzük a honi fizikai tudomány multjának átértékelését is. A társadalom legszélesebb köreinek a honi tudomány multjával kapcsolatos kérdések iránti fokozott érdeklődése a legutóbbi években multunk igen sok, érdemtelenül elfeledett emlékét napvilágra hozta. Olykor még fáradságos levéltári munkát is kell végeznünk, hogy a honi fizika történetének dicső multját új életre támasszuk.

De még az sem elegendő, ha a multtal kapcsolatos hiányainkat jóvátesszük. Nem kevésbbé fontos, hogy helyesen és idejében értékeljük saját munkánkat, elvtársaink munkáját, a különböző szovjet intézmények munkáját. Egymás megbecsülésén alapuló, kölcsönös és tárgyilagos elvtársi kritikára van szükség. Nem szabad kételkednünk abban, hogy ezeknek a követelményeknek a teljesítése közös munkánk termelékenységét fokozni fogja.

A fizika jelentősége a szovjet állam életében évről-évre növekszik. Tudományunk a szovjet technika és kultúra egyik legfontosabb lánc szemévé vált. Módszertani alapjainak megszilárdítása segítséget fog nyújtani fizikai tudományunk továbbfejlődéséhez és újabb eredményeink megszületéséhez. Egész országunk bizalommal tekint a szovjet tudományra. Sikereit figyelemmel kíséri *Sztálin* elvtárs is, aki fáradhatatlanul hatalmas segítséget nyújt ahhoz, hogy tudományunk továbbfejlődhessék.

Legyünk méltóak ahhoz a nagy néphez, amelynek fiai vagyunk, munkánk speciális területén is. Teljesítsük zseniális vezérünk és tanítónk, *Sztálin* elvtárs parancsát és tegyük a szovjet fizikát a lehető leggyorsabban az egész világ élenjáró fizikájának élcsapatává.

CSOPORTOK ÉS GYŰRŰK HOLOMORFELMÉLETE

RÉDEI LÁSZLÓ

1. §. Bevezetés

Az algebra különböző ágai egymástól többé-kevésbbé függetlenül fejlődtek és csak az utóbbi időben észlelhető bizonyos céltudatos törekvés a fogalmilag összetartozó részek egységesítésére, mindenesetre azonban ebben a vonatkozásban még sok a tennivaló. Ennek az egységesítésnek egyik fontos eszköze analóg elméletek kiépítése a különböző területeken.

Dolgozatunkban egy új csoportelméleti analógiáról lesz szó, amely a *csoportoknak* már kész *holomorfelmélete* és a *gyűrűknek* itt kidolgozandó *holomorfelmélete* közt áll fenn. A csoportok holomorfelméletén a csoportelmélet azon részét értjük, amely elsősorban két, egymással szorosan összefüggő fogalommal, tudniillik valamely csoport karakterisztikus részcsoportjának és holomorfjának fogalmával foglalkozik, valamint az ezekkel nemkevésbbé szorosan összefüggő teljes csoport fogalmával. Ennek megfelelően a gyűrűk „holomorfelméletében" is a három analóg fogalom fog szerepelni. E fogalmak közül az első kettőt a gyűrű *karakterisztikus részgyűrűjének* ill. *holomorfjainak*[1] fogjuk nevezni (definíciójukat később fogjuk megadni.) Meglepetés lesz, hogy az említett harmadik csoportelméleti fogalom, a „teljes csoport" gyűrűelméleti analogonjaként az „egységelemes gyűrű" fog fellépni.[2]

Most még a következőt kívánjuk megjegyezni. Ismeretes, hogy bizonyos leképezések, mégpedig a homo-, izo-, auto-, endo- és meroforfizmusok az algebra minden ágában vezetőszerepet játszanak. Kutatásaink fontos részleteképpen ehhez az öt fogalomhoz (kizárólag gyűrűk esetében) egy hatodik, nemkevésbbé fontos fog csatlakozni. Ez a gyűrű önmagába való leképezéseiből alkotott bizonyos párokat fog jelenteni; egy ilyen leképezéspárt *duplahomote-*

[1] A „holomorfok" többesszám nem sajtóhiba! Ki fog ugyanis derülni, hogy ellentétben a csoport holomorfjának egyértelműségével, a gyűrűnek általában több holomorfja van. Ez — mint látni fogjuk — teljesen a dolog természetében rejlik, és bizonyára annak a körülménynek köszönhető, hogy a gyűrű fogalma összetettebb, mint a csoporté.

[2] Az egységelemes gyűrűk mindig is különösen fontos szerepet játszottak az összes gyűrűk között (pl. az oszthatóság kérdésében, az ideálelméletben, a lineáris algebrában stb.). Ez a különös fontosság formális magyarázatát természetesen abban leli, hogy az egységelem létezése jelentős számolásbeli egyszerűsödést okoz. Ezzel szemben a fenti analógiában az egységelemes gyűrűk fontos helyzetének mintegy *belső okát* látjuk. Ezeket a jövőben tulajdonképpen „teljes gyűrűknek" kellene neveznünk, ezt mégsem tesszük, javasoljuk azonban az olvasónak, hogy „egységelemes gyűrű" helyett mindenütt „teljes gyűrűt" is értsen.

tizmusnak fogunk nevezni. Mint látni fogjuk, a duplahomotetizmusok nemcsak a holomorfelméletben szerepelnek, hanem más, gyűrűkkel kapcsolatos kérdésekben is, és bármilyen hihetetlenül hangzik, a csoport automorfizmusainak analogonját alkotják.

Miután az eddigiekben röviden vázoltuk dolgozatunk tartalmát, most néhány megjegyzést kívánunk tenni a csoport- és gyűrűelméleti fogalmak analógiáját illetően.[3]

Γ és P mindenütt csoportot, ill. gyűrűt jelöl.

P^+ a P modulusát, vagyis a P elemeiből álló modulust jelenti.

$A \therefore B$ azt jelenti, hogy A és B analóg fogalmak, éspedig A csoportelméleti, B gyűrűelméleti.

Egyik legfontosabb ilyen analógia

$$\Gamma \text{ homomorfizmusa} \therefore P \text{ homomorfizmusa.} \tag{1}$$

Ezzel szorosan összefügg:

$$\Gamma \text{ faktorcsoportja} \therefore P \text{ faktorgyűrűje,}^4, \tag{2}$$

minthogy lényegében (vagyis izomorfiától eltekintve) a baloldalon Γ, a jobboldalon pedig P összes homomorf képei állnak.

(2) következtében fennáll a következő, szintén nagyon erős analógia:

$$\Gamma \text{ normálosztója} \therefore P \text{ ideálja,} \tag{3}$$

mert a faktorcsoportok és faktorgyűrűk az ismert módon megadhatók a normálosztók, ill. ideálok segítségével. A

$$\Gamma \text{ részcsoportja} \therefore P \text{ részgyűrűje} \tag{4}$$

analógia kevésbbé erős, mivel helyette gyakran a (mindenesetre gyengébb)

$$\Gamma \text{ részcsoportja} \therefore P \text{ részmodulusa,} \tag{5}$$

$$\Gamma \text{ részcsoportja} \therefore P \text{ egyoldali ideálja} \tag{6}$$

analógiák valamelyike lép fel, továbbá bizonyos kutatásokban (6) helyett az ugyancsak gyengébb

$$\Gamma \text{ normálosztója} \therefore P \text{ egyoldali ideálja} \tag{7}$$

analógia jut érvényre.

Látszólag

$$\Gamma \text{ automorfizmusa} \therefore P \text{ automorfizmusa} \tag{8}$$

ugyanolyan erős analógia, mint (1). Ha azonban figyelembe vesszük (3)-at és meggondoljuk, hogy Γ normálosztói úgy jellemezhetők, mint bizonyos (t. i. a belső) automorfizmusokkal szemben megengedett részcsoportok, míg P ideál-

[3] Természetesen mindig ízlés dolga, hogy az ember bizonyos fogalmakat analógoknak tekint-e, és ha igen, mennyire. Mikor tehát analógiáról beszélünk és esetleg annak fokát is megjelöljük („pontos, erős, gyenge" stb.), akkor ez mindig csak „felfogást" jelent.

[4] „Maradékosztálygyűrű" helyett „faktorgyűrűt" mondunk.

jainak automorfizmusokkal való hasonló jellemzése nem lehetséges,[5] akkor indokoltnak látszik lemondani a (8) analógiáról. A (8) analógia egy másik „gyengéje“, hogy míg minden, kettőnél több elemű csoportnak, mint ismeretes, vannak nemidentikus automorfizmusai, addig számos olyan gyűrű van, amely csupán egy (az identikus) automorfizmussal rendelkezik.[6] Már ebből is látszik, hogy (8) jobboldala nem játszhat ugyanolyan fontos szerepet, mint a baloldal, és tapasztalatból is tudjuk, hogy — ellentétben az automorfizmusok állandó alkalmazásával a csoportelméletben — gyűrűk automorfizmusairól nagyon ritkán esik szó.[7] Végül a (8) analógia ellen szól az is, hogy míg Γ automorfizmusai csoportot alkotnak, addig P automorfizmusai nem alkotnak gyűrűt: az előbbi miatt létezik „Γ Schreier-féle bővítése teljes automorfizmuscsoportjával“, az utóbbi miatt P számára nincs olyan analóg fogalom,[8] amely szintén P és teljes automorfizmuscsoportja által volna meghatározható.

Másrészt a gyűrű modulusának endomorfizmusai hasonlóan gyakori szerepet játszanak a gyűrűelméletben, mint a csoport automorfizmusai a csoportelméletben. Ezért

$$\Gamma \text{ automorfizmusa } \therefore \mathrm{P}^{+} \text{ endomorfizmusa} \tag{9}$$

bizonyos fokig az előbbiek alapján nagyon gyenge (8) analógia pótlásának tekinthető. Mindenesetre a (9) analógiát is gyengének kell tekintenünk, már csak azért is, mert (9) jobboldala általában a P-ban definiált szorzástól független.

Egyes esetekben ez mégsincs így, hiszen a

$$\varrho \to \alpha\varrho, \quad \varrho \to \varrho\alpha \qquad (\varrho \in \mathrm{P}) \tag{10}$$

leképezések minden $\alpha(\in \mathrm{P})$-ra P^{+} két endomorfizmusát definiálják. Ezeket *Bourbaki* [1][9] nyomán így nevezzük: P-nak α által indukált *belső bal- illetve jobb homotetizmusa.*[10] Röviden mindkettőt *belső homotetizmusnak* nevezzük. Akkor

[5] Csoportok belső automorfizmusainak egységelem nélküli gyűrű automorfizmusain belül egyáltalán nincs analogonja. (Erre csakhamar visszatérünk).

[6] Például az egész számok I gyűrűjének csak identikus automorfizmusa van. Tekintsük továbbá az I [x] polinomgyűrűt. Ennek magának, mint ismeretes, végtelen sok automorfizmusa van, éspedig összes automorfizmusai $x \to x + c$ és $x \to -x + c$ ($c \in$ I) alakban adhatók meg. Ha azonban $f(x)$ ($\in$ I [x]) olyan polinomot jelent, amelyre az összes $\pm f(\pm x + c)$ különböző, akkor az $f(x)$ I [x] gyűrűnek nyilvánvalóan csak identikus automorfizmusa van. Hasonlóan áll a dolog az $\{f^{-1}(x), \mathrm{I}(x)\}$ gyűrűvel. — Mind itt, mind később $\{\ldots\}$ a zárójelben levő elemek által generált (algebrai) struktúrát jelöli.

[7] Egyes speciális esetekben (mindenesetre nem sokban), így elsősorban bizonyos testek és ferdetestek esetében az automorfizmusok mégis rendkívül fontosak, pl. a *Galois*-elméletben. Mindazonáltal ezek a különleges esetek nem befolyásolják a fentebb mondottakat.

[8] Ezt a most még hiányzó analóg fogalmat később mégis meg fogjuk találni.

[9] A [ ] jellel a dolgozat végén elhelyezett irodalomjegyzékre hivatkozunk.

[10] Maga *Bourbaki* az „homothétie a gauche“, illetve „a droite“ kifejezéseket használja. E szerint „homotetizmus“ helyett „homotétiát“ kellene mondanunk, nekünk azonban jobban tetszik az „-izmus“ végződés például a homo-, izo-, automorfizmushoz való hasonlósága miatt.

a gyenge (9) analógia „része“ :[11]

$$\Gamma \text{ belső automorfizmusa } \therefore \text{ P belső homotetizmusa} \tag{11}$$

már erős analógiát képez. Valóban (11) jól összeillik (3)-mal, mivel egyrészt (mint már említettük) Γ normálosztói éppen a Γ összes belső automorfizmusaival szemben megengedett részcsoportok, másrészt P ideáljai hasonlóan éppen a P összes belső homotetizmusaival szemben megengedett részgyűrűk (lásd [5]).

Ezzel be is fejezzük a csoport- és gyűrűelméleti alapfogalmak közt fennálló, lényegében ismert analógiák felsorolását, amelyek számát még szaporíthatnánk, de célunkhoz, a későbbiek megvilágításához, elégséges az eddigi.

Most néhány újabb kutatásról kívánunk említést tenni, amelyekben a csoport- és gyűrűelmélet közti analógiák kiépítése történt.

Everett [3] kidolgozta a *Schreier*-féle bővítéselméletet gyűrűkre.[12] Ez a két analóg elmélet (a *Schreier*-féle és az *Everett*-féle) teljes egészében a (3) analógiára épül és a csoport- illetve gyűrűelmélet igen fontos részét alkotja.

Fuchs [4] a fontos *Frattini*-részcsoportok fogalmát kiterjesztette operátorcsoportokra, és kimutatta, hogy egységelemes P esetében P *Jacobson*-féle radikálja azonos P^+ *Frattini*-féle részcsoportjával, ha P belső jobbhomotetizmusait, mint P^+-on megadott operátorokat fogjuk fel.

Rédei [9], [10] a *Hamilton*-féle csoportok két különböző gyűrűelméleti analogonját vizsgálta (a második kutatás még befejezetlen).[13]

Az utóbbi két példával eltértünk tulajdonképpeni tárgyunktól, de most visszatérünk rá, éspedig megkíséreljük a gyenge (8) analógia helyett a baloldal megtartása mellett és a jobboldal megfelelő változtatásával egy erős analógia felállítását. Abból a fenti megjegyzésből indulunk ki, hogy (11) erős analógia. Célunk elérésére (11)-et úgy szándékozunk „kibővíteni“, hogy ez által megkapjuk a kívánt analógiát, ami már (11) „helyes“ általánosításának tekinthető. Mármost ez az általánosítás kézenfekvő olymódon, hogy (10)-ben az $\alpha(\in P)$ elem helyére egy P-t tartalmazó $\bar{P}$ gyűrű valamely a elemét helyettesítjük, amelyet azonban alávetünk annak a feltételnek, hogy az $a\varrho, \varrho a$ szorzatok P-ban feküdjenek, ami által valóban P-nak önmagába való leképezéseit nyerjük. Minthogy a mondott feltétel azt jelenti, hogy $\bar{P}$ a P gyűrűt mint

[11] (11)-et abban az értelemben nevezzük (9) részének, hogy (11) mindkét oldala (9) két oldalának speciálls esetét alkotja.

[12] A *Schreier*-féle bővítések elméletének alapjait illetően mindig *Rédei* [6]-hoz tartjuk magunkat. — Egyöntetűség kedvéért *Schreier*-féle bővítési gyűrűről fogunk beszélni *Everett*-féle helyett, valamint „*Schreier*-féle bővítési csoport“ és „*Schreier*-féle bővítési gyűrű“ helyett mindkét esetben röviden „*Schreier*-féle bővítést“ fogunk mondani, amennyiben ebből nem származhat félreértés.

[13] Mint ismeretes, egy csoportot akkor nevezünk *Hamilton*-félének, ha minden részcsoportja normális. A (3), valamint a (4), (5), (6) analógiák alapján három különböző gyűrűelméleti analogon definiálható, amelyek közül az első kettőt *Rédei* [10], [9] „bővebb értelemben vett teljesideálgyűrűnek“, illetve „teljesideálgyűrűnek“ nevezte.

ideált tartalmazza, vagyis $\bar{P}$ a P *Schreier*-féle bővítése, azért a következő definícióhoz jutunk:

Ha a a P valamely Schreier-féle bővítésének eleme, akkor a

$$\varrho \rightarrow a\varrho, \quad \varrho \rightarrow \varrho a \tag{12}$$

leképezéseket az a által indukált *bal-*, illetve *jobbhomotetizmusnak* nevezzük.[14] Röviden mindkettőt *homotetizmusoknak* is nevezzük. Világos, hogy a belső homotetizmusok valóban a homotetizmusok speciális esetei. P azon homotetizmusait, amelyek nem belsők, P *külső bal-*, illetve *jobbhomotetizmusainak* nevezzük.[15]

Továbbá a (12)-ben definiált két homotetizmus rendezett rendszerét így nevezzük: P-nak a által indukált *duplahomotetizmusa*.[16] Ha a a P-ban van, akkor P *belső duplahomotetizmusáról* beszélünk, míg P *külső duplahomotetizmusán* olyan duplahomotetizmust értünk, amely nem belső. (A 2. §-ban (30)—(33)-mal a duplahomotetizmusoknak egy másik, ekvivalens definícióját fogjuk adni.)

Mint azt már jóval előbb megjegyeztük, a duplahomotetizmusok számunkra nagy fontossággal fognak birni. Erre vonatkozólag mindenekelőtt megjegyezzük, hogy (11) helyett a még erősebb

$$\Gamma \text{ belső automorfizmusa} \therefore \text{P belső duplahomotetizmusa} \tag{13}$$

analógia sokkal hasznosabbnak fog bizonyulni. Egyrészt ugyanis a (11)-re vonatkozó megjegyzés érvényes (13)-ra is. Másrészt P belső duplahomotetizmusai — mint látni fogjuk — egyszerű műveleti szabályokkal rendelkező gyűrűt alkotnak, amely Γ belső automorfizmuscsoportja pontos analogonjának tekinthető. (Az utóbbihoz hasonló állítás (11)-re nem igaz.)

Fennáll továbbá (általánosabban mint (13)) a véleményünk szerint nagyon erős

$$\Gamma \text{ automorfizmusa} \therefore \text{P duplahomotetizmusa} \tag{14}$$

analógia, amelyet már előre jeleztünk; ezt tekintjük helyes analógiának a nagyon gyenge (8) analógia helyett, éspedig még sokkal több joggal mint (9)-et. Ennek a felfogásnak tulajdonképpeni igazolása későbbi vizsgálataink során fog kialakulni, itt megelégszünk néhány rövid megjegyzéssel.

[14] Nyilvánvaló általánosítás áll elő úgy, hogy a (12) leképezésekről csak azt tesszük fel, hogy a olyan gyűrű eleme, amelyik P-t bal-, illetve jobbideálként tartalmazza.

[15] *Bourbaki* [1] lényegesen eltérő értelemben „külső homotétiáról" (= homothétie externe) beszél, mégpedig ezen a P^+-nak olyan A endomorfizmusát érti, amelyre $A\alpha\beta = (A\alpha)\beta = \alpha(A\beta)$ teljesül. (Ezek az egyenletek az algebrák esetében szokásos „operátorfeltételeket" jelentik.) A P-nak két „külső homotétiája" általában nem alkot duplahomotétizmust.

[16] A duplahomotetizmus tehát egy-egy bal- és jobbhomotetizmusból áll, amelyek azonban nem tetszőlegesek, hanem mindkettő *egy* elem által indukálható, amint azt fent félreérthetetlenül megmondtuk.

Mint ismeretes, Γ összes automorfizmusai (és csak ezek) úgy nyerhetők, mint a Γ *Schreier*-féle bővítéseinek a elemei által meghatározott

$$\varrho \rightarrow a^{-1}\varrho a \qquad (\varrho \in \Gamma)$$

leképezések. Ennek a definíciónak a duplahomotetizmusokéval való analógiája szembeötlő.

Ellentétben a P automorfizmusairól mondottakkal (lásd [6]) $P \neq 0$ esetén P-nak mindig legalább két duplahomotetizmusa van. Ebben az esetben ugyanis mindig létezik a *triviális* és az *identikus duplahomotetizmus;* így nevezzük azt a két speciális esetet, amikor minden ϱ elemre az $a\varrho$, ϱa képelemek egyenlők 0-sal, illetve ϱ-val.[17]

A duplahomotetizmusok (hasonlóan a belsőkhöz) egyszerű szabályok szerint egymással összeadhatók és szorozhatók lesznek. Jóllehet P összes duplahomotetizmusainak halmaza az általános esetben nem alkot gyűrűt, de ez a halmaz tartalmaz bizonyos gyűrűket, amelyek P-val kapcsolatban hasonló szerepet játszanak mint Γ teljes automorfizmuscsoportja, s ezért ezen csoport (pontos) gyűrűelméleti analogonjának tekinthetők. Az említett gyűrűket arra fogjuk felhasználni, hogy P bizonyos *Schreier*-féle bővítéseit képezzük velük, amire már [8] alatt utaltunk; ezek a bővítések lesznek P holomorfjai.

Jegyezzük meg végül, hogy amint a normálosztók és ideálok a (11) vagy (13) analogiával állnak kapcsolatban, hasonlóképpen a karakterisztikus részcsoportok és -gyűrűk a (14) analógiával fognak összefüggeni.

Dolgozatunk hátralevő része a következőképpen tagozódik:

A 2. §-ban néhány előkészületet végzünk.

A 3. §-ban a csoportok holomorfelméletének lényegében ismert alapjait célunknak megfelelő formában állítjuk össze.

A 4. §-ban következik az analóg elmélet megalapozása gyűrűkre.

Az 5. §-ban speciális esetként megvizsgáljuk az egységelemes gyűrűket (mint a teljes csoportok analogonját).

A 6. §-ban néhény további speciális esettel foglalkozunk.

Bár főként gyűrűelméletről lesz szó, némi ujdonságot a csoportelméletben is fogunk nyerni.[18]

[17] Az előbbi esetet nyerjük, ha (12)-ben $a = 0$. Az utóbbi eset is lehetséges, tudniillik úgy, hogy (12)-ben a számára P-nak egy alkalmas *Schreier*-féle bővítéséből az egységelemet vesszük; ilyen bővítés, mint ismeretes, mindig létezik. Még megjegyezzük, hogy P triviális duplahomotetizmusa mindig belső, viszont az identikus akkor és csak akkor belső ha P egységelemes.

[18] Ezen dolgozat főproblémája — a holomorfelmélet kidolgozása gyűrűkre — *Steinfeld Ottó* aspiránsommal folytatott megbeszélés alkalmával merült fel bennem. Ő és *Fuchs László, Pollák György, Szendrei János,* továbbá *Kalmár László, Szele Tibor* professzorok hasznos megjegyzéseikkel hozzájárultak munkám végleges összeállításához, amiért őszinte köszönetet mondok nekik.

2. §. Előkészületek

Az első paragrafusban bevezetett Γ, P, P^+ jelöléseken kívül bevezetjük még a következő állandó jelöléseket:

$\alpha, \beta, \ldots$ a Γ, illetve P tetszőleges elemeit jelölik aszerint, amint csoportokról vagy gyűrűkről lesz szó. Ezen belül ε a Γ vagy P egységelemét jelöli, az utóbbit természetesen csak akkor, ha P egységelemes gyűrű.

Γ_*, P_* jelölik Γ centrumát, illetőleg P annullátorát. Ez utóbbi azon ν elemekből álló ideál, amelyekre $\nu P = P\nu = 0$. A hasonló Γ_*, P_* jelöléseket azért alkalmazzuk, mert ((14)-gyel összefüggésben) tapasztalni fogjuk, hogy fennáll a

$$(\Gamma_* =)\Gamma \text{ centruma } \therefore (P^* =)P \text{ annullátora} \tag{15}$$

erős analógia.[19]

α_* jelöli a Γ/Γ_* faktorcsoport, illetve a P/P_* faktorgyűrű α által reprezentált elemét, tehát az $\alpha\Gamma_*$, illetve $\alpha + P_*$ osztályt.

$X < Y$ vagy azt jelöli, hogy X és Y csoportok, s X az Y részcsoportja, vagy azt, hogy gyűrűk és X az Y részgyűrűje.

$X \lhd Y$ azt jelöli, hogy $X < Y$ és X normális[20] Y-ban.

$X \blacktriangleleft Y$ azt jelöli, hogy $X < Y$ és X karakterisztikus[21] Y-ban.

$a, b, \ldots$-vel vagy Γ-nak önmagába való leképezéseit jelöljük, vagy P-nak önmagába való rendezett leképezéspárjait, röviden P-nak önmagába való *duplaleképezéseit*. Pontosabban szólva P-nak önmagába való duplaleképezésén P két önmagába való leképezésének egy rendszerét értjük. E két leképezést a *duplaleképezés első,* illetve *második alkatrészének* nevezzük.

e a Γ-nak önmagába való identikus leképezését jelöli, illetve P-nak (két identikus leképezéséből álló) *identikus duplaleképezését,* aszerint amint Γ-ról vagy P-ről beszélünk.

Γ-nak valamely önmagába való a leképezése esetén az α-nak megfelelő képet α^a-val jelöljük. E szerint a nem egyéb mint az $\alpha \rightarrow \alpha^a$ leképezés. E leképezések halmazában az ab szorzatot úgy definiáljuk mint a halmaz azon elemét, amelyre

$$\alpha^{ab} = (\alpha^a)^b. \tag{16}$$

P-nak valamely önmagába való a duplaleképezése esetén az α-nak megfelelő két képet $a\alpha$-val, illetve αa-val jelöljük, így a az $\alpha \rightarrow a\alpha, \alpha \rightarrow \alpha a$ leképezésekből áll (ebben a sorrendben). E duplaleképezések halmazában az

[19] Ezzel szemben a

$$\Gamma \text{ centruma } \therefore P \text{ centruma}$$

analógiát nagyon gyengének kell neveznünk.

[20] Részgyűrűt akkor nevezünk normálisnak, ha ideál. Az „$X \lhd Y$" jelölés más szóval azt jelenti, hogy Y az X *Schreier*-féle bővítése (tetszésszerinti Y/X faktorstruktúrával).

[21] A karakterisztikus részgyűrűt azonban majd csak a 4. §-ban definiáljuk.

$a+b$ összeget és az ab szorzatot a következőképpen definiáljuk:

$$(a+b)\alpha = a\alpha + b\alpha, \qquad \alpha(a+b) = \alpha a + \alpha b, \tag{17}$$

$$ab\alpha = a(b\alpha), \qquad \alpha(ab) = (\alpha a)b.^{22} \tag{18}$$

Γ illetve P egyik H részhalmaza esetén a H^a illetve aH, Ha képeken szokás szerint a H-beli elemek megfelelő képeinek halmazát értjük.

Aszerint hogy Γ leképezéseinek illetve P duplaleképezéseinek egy M halmazáról lesz szó, megengedettnek fogjuk nevezni Γ illetve P valamely H részhalmazát, ha $H^a \subseteq H$ illetve $aH, Ha \subseteq H$ $(a \in M)$.

Egyébként pedig Γ összes önmagába való leképezései közül csak az automorfizmusokat fogjuk tekinteni. Ezek a (16) alatt definiált szorzásra nézve csoportot alkotnak, *Γ teljes automorfizmuscsoportját.* E csoport részcsoportjait röviden Γ automorfizmuscsoportjainak nevezzük.

Továbbá P összes duplaleképezései közül csak azokkal lesz dolgunk, amelyek P^+ két endomorfizmusából állnak. Ezeket P^+ *duplaendomorfizmusainak* nevezzük. A (12) definíció szerint ezeknek további speciális esetei a P duplahomotetizmusai. Később minket csak ez a speciális eset fog érdekelni, mégis az általános esettel is röviden foglalkoznunk kell.

E célból jelöljük egy pillanatra R-rel P^+ teljes endomorfizmusgyűrűjét. Ezt szokás szerint úgy értjük, hogy R két A, B elemének a szorzatát $AB\alpha = A(B\alpha)$-val definiáljuk. R'-vel jelöljük R inverz gyűrűjét, amelyet ugyanis R-ből úgy kapunk, hogy az AB szorzásról a BA inverz szorzásra térünk át. (17) és (18) alapján rögtön belátható, hogy P^+ összes *duplaendomorfizmusai* gyűrűt alkotnak, amelyet P^+ *teljes duplaendomorfizmusgyűrűjének* nevezünk, és hogy ez P^+ teljes endomorfizmusgyűrűjének és az ehhez inverz gyűrűnek direkt összege.[23] Itt egyszersmindenkorra megjegyezzük, hogy P minden később fellépő duplahomotetizmusgyűrűje P^+ teljes duplaendomorfizmusgyűrűjének részgyűrűje lesz.

Folytatjuk az előkészületeket és most már két esetet különböztetünk meg:

Γ eset:

Ha A a Γ-nak valamely automorfizmuscsoportja (nem szükségképpen a teljes automorfizmuscsoport), akkor az összes

$$(a, \alpha) \qquad (a \in A, \alpha \in \Gamma) \tag{19}$$

párok halmazában a szorzatot így definiáljuk:

$$(a, \alpha)(b, \beta) = (ab, \alpha^b \beta). \tag{20}$$

[22] Ha $ab\alpha\beta$-t vagy $\alpha\beta ab$-t írunk, azon $(ab)(\alpha\beta)$-t illetve $(\alpha\beta)(ab)$-t értünk. A (18) egyenletek baloldalát is így kell érteni.

[23] Jegyezzük meg, hogy P^+ duplaendomorfizmusgyűrűjének fogalma nem függ a P-ban értelmezett szorzástól (tehát P^+ helyett bármely modulusra is van értelme).

Így (16) miatt csoportot kapunk, amelynek egységeleme (e, ε). E csoportot

$$A \cdot \Gamma \tag{21}$$

-val jelöljük. Ez a csoport ugyanis (lásd *Rédei* [6] 1. tétel 1 korolláriuma 260. oldal) Γ-nak A-val való faktormentes (tehát széteső) *Schreier*-féle bővítése, amelyet ezért röviden így nevezünk: *Γ-nak A-hoz tartozó széteső bővítése.*[24] Ebben az (e, α) elemek Γ-val izomorf normálosztót alkotnak, ezért a szokásos $(e, \alpha) \to \alpha$ beágyazást rendesen elvégzettnek tekintjük, aminek következtében teljesül:

$$\Gamma \lhd (A \cdot \Gamma) \tag{22}$$

Ha A speciálisan *belső automorfizmuscsoport* (tudniillik belső automorfizmusokból álló csoport), akkor a (21) csoportnak explicitebb alakot adhatunk. E célból tekintsük Γ-nak α által meghatározott

$$\varrho \to \alpha^{-1} \varrho \alpha \tag{23}$$

belső automorfizmusát. Ez csak az $\alpha_* = \alpha \Gamma_*$ osztálytól függ, s e miatt hozzárendelhetjük ehhez az osztályhoz. Ez a hozzárendelés megfordítva is egyértelmű. E miatt (23)-at „α_* automorfizmusnak" is nevezhetjük és α_*-gal jelölhetjük, anélkül hogy ebből félreértés származnék. Ekkor

$$\varrho^{\alpha_*} = \alpha^{-1} \varrho \alpha, \tag{24}$$

továbbá a (16)-nak megfelelő $\varrho^{\alpha_* \beta_*} = (\varrho^{\alpha_*})^{\beta_*}$ feltétel is teljesül. Következésképpen a megadott hozzárendelés izomorfizmus a Γ/Γ_* faktorcsoport és *Γ teljes belső automorfizmuscsoportja* között; utóbbin Γ összes belső automorfizmusainak csoportját értjük. Ezt tehát a megfelelő elemek azonosítása után egyszerűen Γ/Γ_*-gal jelölhetjük. E szerint fenti A megadható, mint a Γ/Γ_* tetszőleges részcsoportja. Akkor $A \cdot \Gamma$ az

$$(\alpha_*, \beta) \qquad (\alpha_* \in A \subseteq (\Gamma/\Gamma_*), \quad \beta \in \Gamma) \tag{25}$$

elemekből áll, és a szorzásszabály (20) és (24) alapján

$$(\alpha_*, \beta)(\gamma_*, \delta) = (\alpha_* \gamma_*, \gamma^{-1} \beta \gamma \delta), \tag{26}$$

ahol a jobboldalon γ helyében a γ_* osztály tetszőleges reprezentánsát kell érteni.

Ha e mellett Γ centrummentes (vagyis $\Gamma_* = \varepsilon$), akkor $\Gamma/\Gamma_* = \Gamma$, $\alpha_* = \alpha$ írható. Ennek megfelelően (25), (26) alapján az $A \cdot \Gamma$ csoport elemei és szorzásszabálya most

$$(\alpha, \beta) \qquad (\alpha \in A \subseteq \Gamma, \beta \in \Gamma), \tag{27}$$

$$(\alpha, \beta)(\gamma, \delta) = (\alpha\gamma, \gamma^{-1} \beta \gamma \delta) \tag{28}$$

alakban adhatók meg.

[24] Vegyük észre, hogy Γ-nak A-val általában több, lényegesen különböző széteső *Schreier*-féle bővítése lehetséges, hiszen ide tartozik többek közt A és Γ direkt szorzata is, de a (21) csoport A és Γ által egyértelműen meg van határozva.

Kimutatjuk azt is, hogy $A\cdot\Gamma$ ebben az esetben direkt szorzat:

$$A\cdot\Gamma\approx A\otimes\Gamma, \tag{29}$$

ahol „$\approx$", „$\otimes$" az izomorfia, illetve a direkt szorzat jele. Ehhez segítségül vesszük $A\cdot\Gamma$ elemeinek

$$(\alpha,\beta)\to\Pi(\alpha,\beta)=(\alpha,\alpha\beta)$$

permutációját és (28)-ról az új

$$(\alpha,\beta)\times(\gamma,\delta)=\Pi(\Pi^{-1}(\alpha,\beta)\,\Pi^{-1}(\alpha,\delta))$$

szorzásra térünk át. A jobboldal $\Pi^{-1}(\alpha,\beta)=(\alpha,\alpha^{-1}\beta)$ és (28) miatt:

$$\Pi((\alpha,\alpha^{-1}\beta)(\gamma,\gamma^{-1}\delta))=\Pi(\alpha\gamma,\gamma^{-1}\alpha^{-1}\beta\delta)=(\alpha\gamma,\beta\delta).$$

Ebből következik (29) (l. *Rédei* [8] 2. §).

P eset:

Itt az előbbiekkel analóg előkészületeket akarunk végezni. Ebből a célból legkényelmesebben úgy járunk el, hogy egyelőre figyelmen kívül hagyjuk a duplahomotetizmusok (12) alatti definícióját és helyette a következő definícióból indulunk ki, amelyről később ki fogjuk mutatni, hogy ekvivalens a fentivel.[25]

P duplahomotetizmusán P-nak olyan önmagába való a duplaleképezését értjük, amely a következő tulajdonságokkal bir:

$$a(\alpha+\beta)=a\alpha+a\beta,\qquad (\alpha+\beta)a=\alpha a+\beta a, \tag{30}$$

$$a\alpha\beta=(a\alpha)\beta,\qquad \alpha\beta a=\alpha(\beta a), \tag{31}$$

$$(\alpha a)\beta=\alpha(a\beta), \tag{32}$$

$$(a\alpha)a=a(\alpha a). \tag{33}$$

(30) miatt P minden duplahomotetizmusa P$^+$-nak duplaendomorfizmusa. Ennek megfelelően P valamely duplahomotetizmusgyűrűjén mindig P$^+$, teljes duplaendomorfizmusgyűrűjének olyan részgyűrűjét értjük, amely P duplahomotetizmusaiból áll. Mármost P összes duplahomotetizmusai, mint azt már az 1. §-ban említettük, általában véve nem alkotnak gyűrűt. Ezt csak a 6. §-ban fogjuk látni (ez nem sürgős). Első tájékozódásképpen azonban már most kimutatjuk a következőt:

P-nak két a, b duplahomotetizmusára nézve $a+b$ akkor és csak akkor P-nak duplahomotetizmusa, ha teljesül az

$$(a\alpha)b+(b\alpha)a=a(\alpha b)+b(\alpha a) \tag{34}$$

feltétel.

Tudjuk ugyanis, hogy $a+b$ mindenesetre P$^+$ duplaendomorfizmusa, tehát (30) teljesül $a+b$-re. (17) miatt az is világos, hogy (31), (32) a-val és b-vel

[25] Ez a „második" definíció inkább összhangban van Γ automorfizmusainak szokásos definíciójával és explicitebb, viszont fogalmilag nem olyan egyszerű, mint a (12) alatti „első" definíció.

együtt $a+b$-re is teljesül. Ahhoz tehát, hogy $a+b$ duplahomotetizmus legyen, szükséges és elegendő, hogy (33) teljesüljön $a+b$-re. Ez a feltétel így szól:

$$((a+b)a)(a+b)=(a+b)(a(a+b)).$$

Ez (33) és a hozzá hasonló, b-re vonatkozó egyenlet, valamint (17) miatt a (34) alakra hozható s ezzel állításunkat bebizonyítottuk.

Az imént nyert (34) kritérium azonban figyelmen kívül fog maradni, mert (szerencsére) egyidejüleg P-nak csak olyan a, b duplahomotetizmusaival lesz dolgunk, amelyekre teljesül az

$$(a\alpha)b=a(\alpha b),\qquad (b\alpha)a=b(\alpha a) \tag{35}$$

feltétel; P-nak két a, b duplahomotetizmusát, amelyek ezzel a (35) tulajdonsággal bírnak, *barátságosnak* nevezzük.[26] Továbbá P *barátságos duplahomotetizmusainak egy halmazán* vagy *gyűrűjén* P páronként barátságos duplahomotetizmusaiból álló halmazt illetve gyűrűt értünk. Bennünket (P összes duplahomotetizmusainak halmazából) főként P barátságos duplahomotetizmusainak gyűrűi fognak érdekelni. Következő célunk ezekről áttekintést nyerni.

Mivel (35) $a=b$ esetén (33)-ba megy át, azért mindenekelőtt azt látjuk, hogy P minden duplahomotetizmusa barátságos sajátmagával, vagyis már önmagában P barátságos duplahomotetizmusainak egyik (egy elemből álló) halmazát képezi. Éppen ez biztosítja P barátságos duplahomotetizmusai halmazainak létezését.

Fontos, hogy *P barátságos duplahomotetizmusainak minden halmaza része egy ugyanilyen maximális*[27] *halmaznak.*

Ha ugyanis $M_1\subset M_2\subset\ldots$ a P gyűrű barátságos duplahomotetizmusai halmazainak egy végtelen lánca, akkor világos, hogy $M_1, M_2,\ldots$ egyesítési halmaza is P barátságos duplahomotetizmusainak egy halmaza. Ebből *Zorn* lemmája szerint következik az állítás helyessége.

Kimutatjuk továbbá, hogy *P barátságos duplahomotetizmusainak valamely M halmaza által generált $\{M\}$ gyűrű mindig P barátságos duplahomotetizmusainak egy gyűrűje.*

Mindenekelőtt ugyanis $\{M\}$, mint tudjuk, P^+ teljes duplaendomorfizmusgyűrűjének részgyűrűje. Az állítás hátralévő részének bizonyítása céljából nevezzük P^+ duplaendomorfizmusai valamely M halmazának egy tulajdonságát permanensnek, ha ezzel a tulajdonsággal az $\{M\}$ gyűrű elemeinek halmaza is bír. Mármost (17), (18) miatt indukcióval következik, hogy az M halmaz összes a elemeiről, illetve összes a, b elempárjairól feltételezett (31), (32), (35)[28] egyenletek csupa permanens tulajdonságot fejeznek ki. Ezzel állításunkat igazoltuk.

[26] A fenti definíció jelentősége abban áll, hogy — amint később látni fogjuk — két duplahomotetizmus akkor és csak akkor barátságos, ha P-nak egyugyanazon *Schreier*-féle bővítésébe tartozó elemek által indukálhatók. — Mivel (34) következik (35)-ből, azért a fentiek szerint mindenesetre igaz, hogy P két a, b barátságos duplahomotetizmusának $a+b$ összege is duplahomotetizmus. Ezt az eredményt a későbbiek túl fogják haladni.

[27] A „maximális" szót mindig a szokásos halmazelméleti értelemben használjuk.

[28] (33)-ról nem kell külön beszélni, mivel azt (35) már tartalmazza.

P barátságos duplahomotetizmusainak minden maximális halmaza gyűrűt alkot, ezeket a gyűrűket P *barátságos duplahomotetizmusai maximális gyűrűinek nevezzük.*

Ha ugyanis M a P barátságos duplahomotetizmusainak egy maximális halmaza, akkor $\{M\}$ az előbbiek szerint P barátságos duplahomotetizmusainak egy gyűrűje. Minthogy azonkívül $M \subseteq \{M\}$, azért M maximális voltából következik az $M = \{M\}$ egyenlőség, vagyis az állítás helyessége.

A fentiekből az is következik, hogy P *barátságos duplahomotetizmusainak minden gyűrűje (sőt minden halmaza) legalább egy ugyanilyen maximális gyűrűnek része.*

Tekintsük mármost P barátságos duplahomotetizmusainak egy tetszésszerinti (nem feltétlenül maximális) D gyűrűjét. Ismételjük, hogy ez (17), (18), (30), (31), (32), (35)[28] szerint azt jelenti, hogy D a P duplaleképezéseinek olyan gyűrűje, amely a következő tulajdonságokkal bír:

$$a(\alpha+\beta)=a\alpha+a\beta, \qquad (\alpha+\beta)a=\alpha a+\beta a, \tag{36}$$

$$(a+b)\alpha=a\alpha+b\alpha, \qquad \alpha(a+b)=\alpha a+\alpha b, \tag{37}$$

$$a\alpha\beta=(a\alpha)\beta, \qquad \alpha\beta a=\alpha(\beta a), \tag{38}$$

$$ab\alpha=a(b\alpha), \qquad \alpha ab=(\alpha a)b, \tag{39}$$

$$(\alpha a)\beta=\alpha(a\beta), \tag{40}$$

$$(a\alpha)b=a(\alpha b), \tag{41}$$

ahol $a, b \in D$ és $\alpha, \beta \in$ P.

Minden ilyen D gyűrűre az összes

$$(a, \alpha) \qquad (a \in D, \alpha \in \mathrm{P}) \tag{42}$$

párok halmazában definiálunk két műveletet (összeadást és szorzást):

$$(a, \alpha)+(b, \beta)=(a+b, \alpha+\beta), \quad (a, \beta)(b, \beta)=(ab, \alpha b+a\beta+\alpha\beta). \tag{43}$$

Így *Rédei* [6] 4. tétel és korolláriuma[29] értelmében előáll P-nak egy D-vel való faktormentes (tehát széteső) *Schreier*-féle bővítése, amelyet

$$D \cdot \mathrm{P} \tag{44}$$

-val jelölünk és így nevezzük: P-*nak D-hez tartozó széteső bővítése.*[30] Ebben a gyűrűben a $(0, \alpha)$ elemek egy P-val izomorf ideált alkotnak, aminek megfelelően a $(0, \alpha) \to \alpha$ beágyazást rendesen elvégzettnek tekintjük, s ez által

$$\mathrm{P} \lhd (D \cdot \mathrm{P}) \tag{45}$$

teljesül.[31]

[29] Kijavítjuk a fentebb idézett korollárium szembeszökő hibáját, éspedig az ottani (56)—(60) feltételeket ki kell egészíteni a következőkkel:

$$ab\gamma=a(b\gamma), \quad \alpha bc=(\alpha b)c.$$

[30] Mutatis mutandis a [24] megjegyzés itt is érvényes.

[31] Már a fentiekből látható a duplahomotetizmusok jelentősége különösen a *Schreier*-féle bővítések elméletével kapcsolatban. Lényegében a duplahomotetizmusok (külön elnevezés nélkül) már *Rédei* [7] 2. tételben is szerepeltek.

Itt iktatjuk be annak bizonyítását, hogy a duplahomotetizmusok (12), illetve (30)—(33) által megadott definíciói ekvivalensek. Ezeket a definíciókat röviden mint első, illetve második definíciót különböztetjük meg.

A bizonyítás céljából legyen először a a P-nak duplahomotetizmusa az első definícó értelmében. Ez (12) szerint azt jelenti, hogy van egy $\bar{P}$ gyűrű, amelyre $P \lhd \bar{P}$, és ennek egy olyan $\bar{a}$ eleme, amelyre

$$a\alpha = \bar{a}\alpha, \quad \alpha a = \alpha\bar{a}. \tag{46}$$

(A jobboldalak a $\bar{P}$-beli közönséges szorzást jelentik.) Mármost (30)—(33) a-ra triviális módon teljesül. Következésképpen a a P-nak olyan duplaleképezése, amelyre (46) miatt (30)—(33) teljesül s így a második definíció értelmében is P-nak duplahomotetizmusa.

Megfordítva, jelentsen most a duplahomotetizmust az utóbbi értelemben. Akkor a benne van P barátságos duplahomotetizmusainak egy D maximális gyűrűjében. (Egyébként D helyett az $\{a\}$ gyűrű is megfelelne.) Segítségül vesszük a (44) gyűrűt, amelyben most a $(0, \alpha) \to \alpha$ beágyazást egyelőre nem végezzük el. Ebben a gyűrűben a $(0, \alpha)$ elemek egy P_1 ideált alkotnak. Ezért (44) $(a, 0)$ eleme P_1-nek duplahomotetizmusát indukálja az első definíció értelmében, amelynek alkatrészei (12) szerint a

$$(0, \varrho) \to (a, 0)(0, \varrho), \quad (0, \varrho) \to (0, \varrho)(a, 0)$$

leképezések. E helyett (43_2) alapján írhatjuk:

$$(0, \varrho) \to (0, a\varrho), \quad (0, \varrho) \to (0, \varrho a).$$

Ez a beágyazás után éppen (12)-be megy át, s ezzel kimutattuk, hogy a az első definíció értelmében is P-nak duplahomotetizmusa. Ezzel igazoltuk a duplahomotetizmusok két definíciójának ekvivalenciáját.

(36)—(41)-ből világos, hogy P összes belső duplahomotetizmusai P barátságos duplahomotetizmusainak egyik gyűrűjét alkotják, amelyet röviden P *teljes belső duplahomotetizmusgyűrűjének* fogunk nevezni.

Ha D a P-nak *belső duplahomotetizmusgyűrűje,* amin az előbbinek tetszőleges részgyűrűjét értjük, akkor a (44) gyűrűnek explicitebb alakot adhatunk. E célból tekintsük P-nak α által indukált (belső) duplahomotetizmusát, amely tehát a

$$\varrho \to \alpha\varrho, \quad \varrho \to \varrho\alpha \tag{47}$$

leképezésekből áll. Ez nyilván csak az $\alpha_* = \alpha + P_*$ osztálytól függ, azért hozzárendelhetjük ehhez az α_* osztályhoz. Ez a hozzárendelés fordítva is egyértelmű. Ezért (47)-et „α_* duplahomotetizmusnak" nevezhetjük és α_*-gal jelölhetjük. Akkor

$$\alpha_*\varrho = \alpha\varrho, \quad \varrho\alpha_* = \varrho\alpha. \tag{48}$$

Ezenkívül az említett hozzárendelés izomorfizmus a P/P_* faktorgyűrű és P teljes belső duplahomotetizmusgyűrűje közt, miértis az utóbbit a megfelelő elemek azonosítása után egyszerűen P/P_*-gal jelölhetjük. Tehát a jelenlegi D mint

P/P_* tetszőleges részgyűrűje adható meg. Akkor $D\cdot P$ az

$$(\alpha_*, \beta) \qquad (\alpha_* \in D \subseteq P/P_*, \beta \in P) \tag{49}$$

elemekből áll és (43), (48) szerint műveleti szabályokul

$$(\alpha_*, \beta)+(\gamma_*, \delta)=(\alpha_*+\gamma_*, \beta+\delta), \quad (\alpha_*, \beta)(\gamma_*, \delta)=(\alpha_*\gamma_*, \alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta) \tag{50}$$

szolgálnak, ahol a második egyenlet jobboldalán az α_*, γ_* maradékosztályok tetszőleges α, illetve γ reprezentánsa veendő.

Ha e mellett P *annullátormentes* (vagyis $P_*=0$), akkor $P/P_*=P$, $\alpha_*=\alpha$ írható. Ennek megfelelően ilyenkor a $D\cdot P$ gyűrű elemei és műveleti szabályai (49), (50) szerint

$$(\alpha, \beta) \qquad (\alpha \in D \subseteq P, \beta \in P), \tag{51}$$

$$(\alpha, \beta)+(\gamma, \delta)=(\alpha+\gamma, \beta+\delta), \quad (\alpha, \beta)(\gamma, \delta)=(\alpha\gamma, \alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta) \tag{52}$$

által adhatók meg.

Most kimutatjuk, hogy ebben az esetben $D\cdot P$ direkt összeg:[32]

$$D\cdot P \approx D \oplus P, \tag{53}$$

ahol „$\oplus$" a direkt összeget jelöli. Ebből a célból vesszük $D\cdot P$ elemeinek

$$(\alpha, \beta) \rightarrow \Pi(\alpha, \beta)=(\alpha, \alpha+\beta)$$

permutációját és (52)-ről a következő új szorzásra térünk át:

$$(\alpha, \beta) \times (\gamma, \delta)=\Pi(\Pi^{-1}(\alpha, \beta)\,\Pi^{-1}(\gamma, \delta)).$$

A jobboldal $\Pi^{-1}(\alpha, \beta)=(\alpha, -\alpha+\beta)$ és (52_2) miatt

$$\Pi((\alpha, -\alpha+\beta)(\gamma, -\gamma+\delta))=\Pi(\alpha\gamma, -\alpha\gamma+\beta\delta)=(\alpha\gamma, \beta\delta).$$

Minthogy továbbá (52_1) a hasonló „transzformációval" szemben invariáns, azért következik (53) (l. *Rédei* [8] 2. §).

3. §. A csoportok holomorfelméletének alapjai

Itt a csoport karakterisztikus részcsoportjaira és holomorfjára vonatkozó ismert definíciókat és tételeket gyűjtjük össze:

1_0 definíció. *A Γ csoport Γ' részcsoportját karakterisztikusnak nevezzük, ha Γ' a Γ valamennyi Schreier-féle bővítésében normális.* (Jelekben: $\Gamma' \blacktriangleleft \Gamma$ azt jelenti, hogy $\Gamma' < \Gamma$ és hogy $\Gamma \lhd \bar{\Gamma}$-ból mindig következik $\Gamma' \lhd \bar{\Gamma}$.)

1_0 tétel. (A karakterisztikus részcsoportok első kritériuma.) *A Γ csoport Γ' részcsoportja akkor és csak akkor karakterisztikus, ha Γ' a Γ valamennyi automorfizmusával szemben megengedett.*[33]

[32] Erre *Szendrei János* hívta fel a figyelmemet, s ezután figyeltem fel (29)-re is.

[33] Vagyis Γ minden a automorfizmusára $\Gamma'^a \subseteq \Gamma'$. Mivel a^{-1} is Γ automorfizmusa, azért ez a feltétel azt jelenti, hogy $\Gamma'^a=\Gamma'$ minden a-ra teljesül, azaz Γ' invariáns Γ minden automorfizmusával szemben. Az 1_0 tétel miatt tehát kiindulhatunk ebből a tulajdonságból is mint definícióból, amint ez az irodalomban szokásos, és akkor az 1_0 definíció tétellé válik. A definíciónak és tételnek általunk végzett megcserélése teljesen jogos, s a 4. §-ban hasznosnak fog bizonyulni.

2_0 definíció. *A Γ csoport holomorfján Γ-nak teljes A automorfizmus-csoportjához tartozó $A \cdot \Gamma$ széteső bővítését értjük.*[34]

2_0 tétel. (A karakterisztikus részcsoportok második kritériuma.) *A Γ csoport Γ' részcsoportja akkor és csak akkor karakterisztikus, ha Γ' a Γ holomorfjában normális.*

Az 1_0, 2_0 tételek bizonyítását illetően a tankönyvekre hivatkozunk.

4. §. A gyűrűk holomorfelméletének alapjai

Az 1_0 definícióhoz hasonlóan definiáljuk a következőt;[35]

1. Definíció. *A P gyűrű P′ részgyűrűjét karakterisztikusnak nevezzük, ha P′ a P valamennyi Schreier-féle bővítésében normális (vagyis ideál).* (Jelekben: $P' \blacktriangleleft P$ azt jelenti, hogy $P' < P$ és hogy $P \lhd \bar{P}$-ból mindig következik $P' \lhd \bar{P}$.)

Megjegyzés. Ezek szerint minden karakterisztikus részgyűrű ideál, amint-hogy minden karakterisztikus részcsoport is normálosztó. Ezt az analógiát joggal el is várhattuk, mivel — mint már említettük — normálosztó és ideál teljesen analóg fogalmak. Ha azonban a karakterisztikus részcsoportoknak az 1_0 tételben foglalt tulajdonságához csatlakoztunk volna (amellyel ezeket — mint [33] alatt említettük — definiálni szokás), akkor P azon részgyűrűihez jutottunk volna el, amelyek P összes automorfizmusaival szemben megengedettek, azaz (lásd [33] elejét) invariánsok. Mármost jóllehet ezek az „invariáns részgyűrűk" igen fontos fogalmakat képeznek, mindazonáltal semmiképpen sem tekinthetők a karakterisztikus részcsoportok analogonjának, már csak azért sem, mert az invariáns részgyűrűk nem szükségképpen ideálok. Ez megmagyarázza, miért döntöttünk a fenti 1 definíció mellett. Ezekből a magyarázatokból az is látható, hogy a csoport-gyűrűelméteti analógiák nem mindig magától értetődők, hanem gyakran meglehetősen rejtettek.

1. tétel. (A karakterisztikus részgyűrűk első kritériuma.) *A P gyűrű P′ részgyűrűje akkor és csak akkor karakterisztikus, ha P′ a P valamennyi duplahomotetizmusával szemben megengedett.*[36]

[34] Γ holomorfját úgy szokás definiálni, mint Γ elemeinek egy permutációcsoportját (l. *Zassenhaus* [14], 46.), de az olvasó könnyen beláthatja, hogy a két definíció lényegileg megegyezik. A fenti definíció fogalmilag egyszerűbb s azt minden célra alkalmasabbnak tartjuk, mint a régebbit. Az irodalomban nem találkoztunk vele, de *Fuchs László* levélbeli közlése szerint ő is felfedezte. — E dolgozat megfogalmazása után vettük észre, hogy a csoport holomorfjának miénkhez hasonló definíciója már a következő dolgozatban is szerepel: W. H. Mills, On the non-izomorphism of certain holomorphs, Transactions of the Amer. Math. Soc.. *74* (1953), 428—443.

[35] Az analóg csoport- és gyűrűelméleti tételeket $1_0, 2_0 \ldots$ illetve $1, 2 \ldots$ sorszámokkal fogjuk ellátni.

[36] Vagyis P minden a duplahomotetizmusára $aP', P'a \subset P'$.

Megjegyzés. Az 1_0, 1. tételek szemmellátható analógiája újra megerősíti a (14) analógiát is.

Az 1. tétel bizonyítása céljából tekintsük P-nak egy P′ karakterisztikus részgyűrűjét és egy a duplahomotetizmusát. Az utóbbit a duplahomotetizmusok két definíciójának ekvivalenciája miatt P egy $\overline{\mathrm{P}}$ *Schreier*-féle bővítésének valamely $\bar{a}$ eleme indukálja. Az 1 definíció miatt igaz $\mathrm{P}' \lhd \overline{\mathrm{P}}$, tehát

$$\bar{a}\mathrm{P}', \mathrm{P}'\bar{a} \subseteq \mathrm{P}'. \tag{54}$$

E helyett

$$a\mathrm{P}', \mathrm{P}'a \subseteq \mathrm{P}' \tag{55}$$

írható, s ezzel a feltétel szükségességét bebizonyítottuk.

Az elegendőség bizonyítása céljából legyen (55) igaz valamely $\mathrm{P}'(<\mathrm{P})$-re és P összes a duplahomotetizmusaira. Tekintsünk egy $\overline{\mathrm{P}}$-t, amelyre $\mathrm{P} \lhd \overline{\mathrm{P}}$. Minthogy $\overline{\mathrm{P}}$ minden a eleme P-nak egy duplahomotetizmusát indukálja, azért (55)-ből (54) következik. Ez azt jelenti, hogy fennáll $\mathrm{P}' \lhd \overline{\mathrm{P}}$. Ezzel az 1. tételt bebizonyítottuk.

A 2_0 definícióhoz hasonlóan definiáljuk a következőt:

2. definíció. *A* P *gyűrű holomorfjain a* P *barátságos duplahomotetizmusainak maximális D gyűrűihez tartozó D·*P *széteső bővítéseket értjük.*

Megjegyzés. A „gyűrű holomorfja" elnevezést az alább következő, a 2_0 tétel analogonját képező 2. tétel is indokolja. — Egy $D \cdot \mathrm{P}$ holomorf könnyen megalkotható P-ból és D-ből (43) alapján. Ha tehát P összes holomorfjait meg akarjuk találni, akkor ehhez P barátságos duplahomotetizmusainak valamennyi maximális D gyűrűjét kell meghatároznunk. Ennek a kérdésnek a kikutatása speciális P gyűrűk esetére érdekes és nehéz feladat, amellyel még alig foglalkoztunk. (A nagyon egyszerű „egységelemes P" esetre vonatkozólag lásd a 3. tételt.) Az általános esetről a következőt jegyezzük meg. (35)-ből rögtön következik, hogy P két duplahomotetizmusa barátságos, ha legalább egyikük belső vagy indentikus. Jelölje $D_0(\approx \mathrm{P}/\mathrm{P}_*)$ a P-nak teljes belső duplahomotetizmusgyűrűjét és e (mint P-val kapcsolatosan mindig) P identikus duplahomotetizmusát. (Tudjuk, hogy e nem tartozik bele D_0-ba, ha P-nak nincs egységeleme.) A mondottak szerint minden D-nek tartalmaznia kell $\{e, D_0\}$-t, sőt ha P-nak $\{e, D_0\}$-n kívül van legalább még egy duplahomotetizmusa, akkor valódi módon kell tartalmaznia. Nyilvánvaló továbbá, hogy akkor és csak akkor van egynél több D (azaz P-nak egynél több) holomorfja, ha P-nak van két (külső) nembarátságos duplahomotetizmusa. Megjegyezzük még, hogy $e \in D$-ből és (43)-ból következik, hogy P minden holomorfjának van egységeleme, éspedig $(e, 0)$.

2. tétel. (A karakterisztikus részgyűrűk második kritériuma). *A* P *gyűrű* P′ *részgyűrűje akkor és csak akkor karakterisztikus, ha* P′ *a* P *összes holomorfjaiban normális (vagyis ideál).*

A szükségesség rögtön következik az 1, 2. definíciókból.

Az elegendőség bizonyítása céljából tegyük fel, hogy a 2. tételben megadott feltétel teljesül, és tekintsük P-nak egy a duplahomotetizmusát. A 2. § szerint a-t tartalmazza P barátságos duplahomotetizmusainak egy D maximális gyűrűje. A feltevés szerint $D \cdot \mathrm{P}$ holomorf ideálként tartalmazza a P′ részgyűrűt. Másrészt a $D \cdot \mathrm{P}$-nak $(a, 0)$ eleme, mint láttuk, éppen az a duplahomotetizmust indukálja. Ebből következik (55). Az 1. tétel értelmében tehát $\mathrm{P}' \lhd \overline{\mathrm{P}}$, s ezzel a 2. tételt bebizonyítottuk.

5. §. Teljes csoportok. Egységelemes gyűrűk

A csoport- és gyűrűelmélet közötti analógia, amelyet az eddigiekben kifejtettünk, tovább is kiépíthető. Így látni fogjuk, hogy az egységelemes gyűrűk a teljes csoportokkal[37] analóg módon viselkednek.

3_0 tétel. *Egy csoport akkor és csak akkor teljes, ha minden Schreier-féle bővítésének direkt tényezője. Ha egy csoport saját holomorfjában direkt tényező, akkor a csoport vagy teljes, vagy egy teljes csoport és egy másodrendű csoport direkt szorzata.*

Megjegyzés. A „csak akkor" állítás ismert (l. *Speiser* [11], 110. tétel, ahol csak véges csoportokról van szó). Az „akkor" állítás lényegében *Baer* [1] tétele. A 3_0 tétel második fele tudomásunk szerint új. A 3_0 tételt teljes egészében be fogjuk bizonyítani.

3. tétel. *Egy gyűrűnek akkor és csak akkor van egységeleme, ha minden Schreier-féle bővítésének direkt összeadandója. Az egységelemes gyűrűk úgy is jellemezhetők, mint olyanok, amelyeknek csak belső duplahomotetizmusai vannak.*[38] *Következésképpen minden ideáljuk karakterisztikus, továbbá csak egy holomorfjuk van.*[39] *Megfordítva, ha egy gyűrű valamelyik holomorfjában direkt összeadandó, akkor egységelemes* (következésképpen csak egy holomorfja van).[40]

[37] Mint ismeretes, egy csoportot teljesnek nevezünk, ha csak belső automorfizmusai vannak és nincs centruma (l. *Speiser* [11] 125. oldal). Tehát minden teljes csoport izomorf teljes automorfizmuscsoportjával.

[38] Mivel az egységelemes gyűrű annullátormentes, azért elemei csupa különböző belső duplahomotetizmust indukálnak, tehát izomorf saját „teljes duplahomotetizmusgyűrűjével" (v. ö. [37] végével). — Általában, ha P „összes" duplahomotetizmusai gyűrűt alkotnak, úgy ezt P teljes duplahomotetizmusgyűrűjének nevezhetjük. Ez természetesen akkor is létezhet, ha P-nak nincs egységeleme.

[39] Egységelemes P gyűrű holomorfja egyszerűen $\mathrm{P} \cdot \mathrm{P}$ alakban adható meg (l. (51), (52) $D = \mathrm{P}$ esetét).

[40] Világosabban szólva: ha egy gyűrűnek nincs egységeleme, akkor egy holomorfjában sem direkt összeadandó, ha van egységeleme, akkor csak egy holomorfja van és ebben direkt összeadandó.

Megjegyzés. A 3. tétel elejének „akkor" állítása *Szendrei János* tétele, erről szóló dolgozata előkészületben van. Egyébként pedig a 3. tétel utolsó állítása *Szendrei* tételének élesítése. A „csak akkor" állítás egy speciális esetben már *Csebotarjev* [15] számára is ismert volt.[40a] A 3_0, 3. tételek alapján a teljes csoportok és az egységelemes gyűrűk egymás pontos analogonjának tekinthetők.[2] Figyelemreméltó, hogy a 3. tétel egészében sokkal tartalmasabb, mint a 3_0 tétel.[41]

A 3_0 tétel bizonyítása. Ezt a „csak akkor" állítással kezdjük. Tekintsünk egy Γ teljes csoportot és ennek $\bar{\Gamma}$ *Schreier*-féle bővítését. Ki kell mutatnunk, hogy $\bar{\Gamma}$ direkt tényezőként tartalmazza Γ-t. A feltevés miatt $\bar{\Gamma}$ minden $\bar{\alpha}$ elemére a

$$\varrho \rightarrow \bar{\alpha}^{-1}\varrho\bar{\alpha}$$

leképezés Γ belső automorfizmusa. Minthogy továbbá Γ centrummentes, azért $\bar{\alpha}$-hoz Γ-nak egyetlen olyan $\bar{\alpha}'$ eleme található, amely ezt az automorfizmust indukálja. Akkor $\bar{\alpha}^{-1}\bar{\alpha}'$ a Γ összes elemeivel felcserélhető, következésképpen $\bar{\Gamma}$-nak minden Γ szerinti maradékosztályában egyetlen olyan elem van, amely Γ összes elemeivel felcserélhető. Ezek az elemek $\bar{\Gamma}$-nak egy Γ_0 részcsoportját alkotják, továbbá Γ_0 a Γ szerinti maradékosztályoknak egy reprezentánsrendszere. Ezért $\bar{\Gamma}$ a Γ, Γ_0 csoportok direkt szorzata, s ezzel a „csak akkor" állítás bizonyítást nyert.

Most bebizonyítjuk a 3_0 tétel utolsó állítását. Ebből a célból tegyük fel, hogy a Γ csoport az $A \cdot \Gamma$ holomorfnak direkt faktora, ahol A-val Γ teljes automorfizmuscsoportját jelöljük. (20) és *Rédei* [6] 3. tétel szerint a feltevés miatt A-nak van olyan

$$a \rightarrow a'$$

leképezése Γ-ba, amelyre

$$(ab)'^{-1}a'b' = \varepsilon, \quad a'^{-1}\varrho a' = \varrho^{a}. \tag{56}$$

(56_2)-ből következik, hogy A csupa belső automorfizmusból áll. Akkor $A = \Gamma\Gamma_*$ írható, továbbá (56_1)-ből következik

$$(\alpha_*\beta_*)' = \alpha_*'\beta_*', \quad \alpha_*'^{-1}\varrho\alpha_*' = \varrho^{\alpha_*}, \tag{57}$$

ahol

$$\alpha_* \rightarrow \alpha_*'$$

Γ/Γ_*-nak leképezése Γ-ba. (57_2)-ből és $\varrho^{\alpha_*} = \alpha^{-1}\varrho\alpha$-ból következik, hogy α_*'

[40a] A korrektúra alkalmával vettük észre, hogy a 3. tétel „csak akkor" állítása teljes általánosságban szerepel már a következő dolgozatban: *B. Brown* and *N. H. McCoy*. The maximal regular ideal of a ring, Proceedings of the Amer. Math. Soc., *1* (1950), 165—171 (Lemma 3).

[41] Az egységelemes gyűrűk egyébként is bizonyos tekintetben eltérően viselkednek a teljes csoportoktól. Például triviális, hogy minden gyűrűnek van egységelemes *Schreier*-féle bővítése, sőt a 2. definíció utáni megjegyzés vége szerint egy gyűrű minden holomorfja egységelemes gyűrű, ezzel szemben nincs tudomásunk róla, hogy minden csoport teljes csoporttá volna bővíthető *Schreier* értelmében.

az $\alpha_* = \alpha\Gamma_*$ osztályban van. Minthogy továbbá az α'_*-elemek (57_1) miatt Γ-nak egy Γ' részcsoportját alkotják, azért Γ felbomlik a $\Gamma'\Gamma_*$ szorzatra, amin azt értjük, hogy Γ minden eleme egyértelműen felírható egy $\varrho\sigma(\varrho \in \Gamma', \in \varrho\Gamma_*)$ szorzat alakjában. Mivel azonban Γ_* a Γ centruma, azért ebből következik

$$\Gamma = \Gamma' \otimes \Gamma_*,$$

továbbá, hogy Γ' centrummentes. Ha egy direkt szorzatnak csak belső automorfizmusai vannak, amint ez a fentiek alapján Γ-ra fennáll, akkor ugyanez igaz a tényezőkre is. Ebből következik, hogy Γ' teljes és Γ_* (mint *Abel*-féle csoport) legfeljebb két elemből áll. Ezzel a 3_0 tétel utolsó állítását bebizonyítottuk.

A 3_0 tételből még csak az „akkor" állítás bizonyítása van hátra. Minthogy a holomorf *Schreier*-féle bővítés, elegendő bebizonyítani a következőt: Ha egy

$$\Gamma = \mathrm{A} \otimes \mathrm{B} \tag{58}$$

csoport két A, B részcsoportjának direkt szorzata, amelyek közül $\mathrm{A}(\neq \varepsilon)$ *Abel*-féle és véges, akkor Γ-nak van olyan $\bar{\Gamma}$ *Schreier*-féle bővítése, amelyben Γ nem direkt tényező. Vegyünk egy $\bar{\mathrm{A}}$ *Abel*-féle csoportot, amely A-t valódi módon tartalmazza és amelynek nincs A-val izomorf direkt tényezője, s legyen

$$\bar{\Gamma} = \bar{\mathrm{A}} \otimes \mathrm{B}. \tag{59}$$

E mellett feltehetjük, hogy $\Gamma < \bar{\Gamma}$, s akkor $\Gamma \triangleleft \bar{\Gamma}$ is igaz. Elegendő bebizonyítani, hogy Γ nem direkt tényező $\bar{\Gamma}$-ban. Tegyük fel, hogy Γ direkt tényező $\bar{\Gamma}$-ban. Akkor (58) miatt

$$\bar{\Gamma} = \mathrm{A}_1 \otimes \mathrm{A} \otimes \mathrm{B}, \tag{60}$$

ahol A_1 a $\bar{\Gamma}$ részcsoportja. (59), (60) miatt fennáll az

$$\bar{\mathrm{A}} \approx \mathrm{A}_1 \otimes \mathrm{A}$$

izomorfia.[42] Ez az ellenmondás teljessé teszi a 3_0 tétel bizonyítását.

A 3. tétel bizonyítása. Kezdjük a második állítással. Tekintsünk egy P gyűrűt és tegyük fel először, hogy P tartalmazza az ε egységelemet. Akkor (31)-ből P-nak minden a duplahomotetizmusára következik:

$$a\varrho = a\varepsilon\varrho = (a\varepsilon)\varrho, \quad \varrho a = \varrho\varepsilon a = \varrho(\varepsilon a).$$

Másrészt (32) miatt

$$(\varepsilon a)\varepsilon = \varepsilon(a\varepsilon),$$

vagyis $a\varepsilon = \varepsilon a$. Ezért a azonos P-nak $a\varepsilon (= \varepsilon a)$ által indukált duplahomotetizmusával.

Megfordítva, ha P-nak csak belső duplahomotetizmusai vannak, akkor az identikus is ilyen, amiből következik olyan α elem létezése, amelyre $\alpha\varrho = \varrho, \varrho\alpha = \varrho$. Akkor α éppen P egységeleme. Ezzel a 3. tétel második állítását bebizonyítottuk. A 3. tétel közepén említett következmények is fennáll-

[42] Ha ugyanis $G = A \otimes B = A' \otimes B$, ahol A, A', B a G csoport részcsoportja akkor $A \approx A'$.

nak, részben az 1. tétel miatt, részben mert a belső duplahomotetizmusok páronként barátságosak.

A 3. tétel „csak akkor" állításának igazolása céljából tegyük fel, hogy P-ban létezik ε egységelem és tekintsük P-nak egy $\bar{\mathrm{P}}$ *Schreier*-féle bővítését. Azt kell bizonyítanunk, hogy P direkt összeadandó $\bar{\mathrm{P}}$-ban. $\bar{\mathrm{P}}$ minden $\bar{\alpha}$ elemével a

$$\varrho \rightarrow \bar{\alpha}\varrho, \quad \varrho \rightarrow \delta\bar{\alpha}$$

leképezések duplahomotetizmust képeznek. Következésképpen a feltétel és a már bebizonyítottak miatt van olyan $\alpha(\in \mathrm{P})$, amelyre

$$\bar{\alpha}\varrho = \alpha\varrho, \quad \varrho\bar{\alpha} = \varrho\alpha. \tag{61}$$

A feltevés miatt igaz $\mathrm{P}_* = 0$ is, ezért $\bar{\alpha}$ egyértelműen meghatározza α-t. Ezután (61)-et

$$(\bar{\alpha}-\alpha)\varrho = \varrho(\bar{\alpha}-\alpha) = 0$$

alakban írva látjuk, hogy

$$\bar{\alpha} = \alpha + \bar{\nu},$$

ahol $\bar{\nu}(\in \bar{\mathrm{P}})$ a

$$\bar{\nu}\mathrm{P} = \mathrm{P}\bar{\nu} = 0 \tag{62}$$

tulajdonsággal bír. Az összes (62) tulajdonságú $\bar{\nu}$ elemek $\bar{\mathrm{P}}$-ban egy $\mathfrak{n}$ ideált alkotnak („P-nak $\bar{\mathrm{P}}$-beli annullátorát"), amelynek a feltevés miatt nincs 0-tól különböző közös eleme P-val. Azt kaptuk, hogy $\bar{\mathrm{P}}$ a P, $\mathfrak{n}$ ideálok direkt öszszege, s ezzel a 3. tétel „csak akkor" állítását bebizonyítottuk.

A 3. tétel utolsó állításának bizonyítása céljából tekintsünk egy P gyűrűt és ennek egy $D \cdot \mathrm{P}$ holomorfját, ahol D a P barátságos duplahomotetizmusainak egy maximális gyűrűje. Feltesszük, hogy $D \cdot \mathrm{P}$ direkt összeadandóként tartalmazza P-t; bizonyítandó, hogy P egységelemes. A feltétel miatt (43) és *Rédei* [6] 6. tétel szerint D-nek van olyan

$$a \rightarrow a'$$

leképezése P-ba, amelyre[43]

$$a'+b'-(a+b)' = 0, a'b+ab'+a'b'-(ab)' = 0, \alpha b+\alpha b' = 0, a\beta+a'\beta = 0$$

$$(a, b \in D,\ \alpha, \beta \in \mathrm{P}). \tag{63}$$

$(63_{3,4})$-ből következik, hogy D csupa belső duplahomotetizmusból áll. Minthogy ezek, mint már említettük, P minden duplahomotetizmusával barátságosak, azért D maximális voltából következik, hogy P-nak egyáltalán csak belső duplahomotetizmusai lehetnek. A 3. tétel fentebb bebizonyított részének alapján ez azt jelenti, hogy P-ban van egységelem, s ezzel a 3. tétel utolsó állítását is bebizonyítottuk.

Mivel minden holomorf *Schreier*-féle bővítés, azért ebből a 3. tétel „akkor" állítása is következik, amivel a tétel bizonyítását befejeztük.

[43] Helyesbítjük az idézett tételben levő sajtóhibát, ahol tudniillik (74)-ben az első $(ab)'$ helyett $(a+b)'$ olvasandó.

6. §. További alkalmazások. Példák

A 3. tétel szerint egységelemes gyűrű minden ideálja karakterisztikus. Ezzel közel rokon *Nagata* [5][44] egy újabb tétele, amely azt mondja ki, hogy ha $\mathfrak{p}$ prímideál[45] P-ban és $P \lhd \bar{P}$, akkor $\mathfrak{p} \lhd \bar{P}$, tehát így is kimondható:

4. tétel. *A prímideálok karakterisztikusok.*

Az 1. tételen alapuló rövid bizonyítást adunk. Jelöljük $\mathfrak{p}$-vel P valamely prímideálját és a-val P valamely duplahomotetizmusát. $\mathfrak{p} = P$ esetén a tétel igaz, ezért a $\mathfrak{p} \neq P$ esetre szorítkozhatunk. (32) miatt $P(a\mathfrak{p}) \subseteq \mathfrak{p}$, tehát

$$P(\mathfrak{p} + a\mathfrak{p}) \subseteq \mathfrak{p},$$

$$\mathfrak{p} + a\mathfrak{p} \lhd P.$$

Ebből és a feltevésből adódik

$$\mathfrak{p} + a\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p},$$

tehát $a\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}$. Ugyanígy kapjuk: $\mathfrak{p}a \subseteq \mathfrak{p}$. Ez az 1. tétel szerint igazolja a 4. tételt.

A 4. tételben figyelemreméltó, hogy (véleményünk szerint) nincs csoportelméleti analogonja. A 3, 4. tételek alapján a karakterisztikus részgyűrűket gyakoribb jelenségnek kell tartanunk, mint a karakterisztikus részcsoportokat.

Vannak-e egyáltalán nemkarakterisztikus ideálok? Erre a kérdésre egy példával adunk igenlő választ. Legyen p prímszám, I az egész számok gyűrűje. A

$$p^2 f(x) + pxg(x) \qquad (f(x), g(x) \in I[x])$$

és

$$p^2 h(x) + pxk(x^2) \qquad (h(x), k(x) \in I[x])$$

polinomok $I[x]$-nek egy-egy P, illetve P′ részgyűrűjét alkotják. Ezekre nyilván fennáll $P' \lhd P$, $P \lhd I[x]$, viszont $P' \lhd I[x]$ már nem igaz. E szerint P′ valóban P olyan ideálja, amely nem karakterisztikus részgyűrű.

Bebizonyítjuk a következő figyelemreméltó tételt, amelynek, úgy látszik, szintén nincs csoportelméleti analogonja:

5. tétel. *Kommutatív zérusosztómentes gyűrű minden holomorfja kommutatív.* (V. ö. a 6. tétellel.)

Jelöljünk ugyanis egy ilyen gyűrűt P-val. (32) szerint P minden a duplahomotetizmusára $(\alpha a)\alpha = \alpha(a\alpha)$, amiből a feltevés miatt $\alpha(\alpha a) = \alpha(a\alpha)$,

[44] L. még *Steinfeld* [12]. Ez a dolgozat is, amelyet már kéziratban ismertem, hozzájárult a „gyűrűk holomorfelméletének" létrejöttéhez.

[45] Mint újabban szokás, valamely P gyűrű prímideálján P-nak olyan ideálját értjük, amelyre abból, hogy $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p}$ $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \lhd P)$, mindig következik $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$ vagy $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p}$. A „régi értelemben vett primideált" ma (teljes vagy) komplett prímideálnak hívjuk; ezeket, mint ismeretes, azzal a tulajdonsággal definiáljuk, hogy ha $\alpha\beta \in \mathfrak{p}$, akkor $\alpha \in \mathfrak{p}$ vagy $\beta \in \mathfrak{p}$. A komplett prímideálok a prímideálok speciális esete, s kommutatív gyűrűk esetén a két fogalom egybeesik.

vagyis

$$\alpha a = a\alpha \tag{64}$$

következik. (E szerint most P minden duplahomotetizmusa P két egyenlő endomorfizmusából áll.) Ha mármost a, b a P-nak barátságos duplahomotetizmusai, akkor (18), (64), (35) miatt

$$ab\alpha = a(b\alpha) = a(\alpha b) = (a\alpha)b = b(a\alpha) = ba\alpha,$$

vagyis

$$ab = ba. \tag{65}$$

Mivel (43_2) szerint P valamely holomorfjának elemei

$$(a, \alpha)(b, \beta) = (ab, \alpha b + a\beta + \alpha\beta)$$

szabály szerint szorzódnak, amiből

$$(b, \beta)(a, \alpha) = (ba, \beta a + b\alpha + \beta\alpha)$$

is következik, azért (64), (65) igazolják az 5. tételt.

Egynél több holomorffal rendelkező gyűrűre a zérógyűrűk[46] szolgáltatnak példát. Igaz ugyanis a következő:

6. tétel. *Egy* P *zérógyűrűnek akkor és csak akkor van csak egy holomorfja, ha* P^+ *teljes endomorfizmusgyűrűje kommutatív.*[47] *Ha van több holomorfja, akkor ezek között nemkommutatív is előfordul.*

A bizonyítás céljából előrebocsátjuk a következőt: A feltétel miatt $\alpha\beta = 0$ korlátlanul igaz, tehát (31), (32) azonosan teljesülnek. Következésképpen most (30), (33) szerint P duplahomotetizmusai P^+ azon duplaendomorfizmusaival egyeznek meg, amelyek P^+ két felcserélhető endomorfizmusából állnak.

Ha mármost P^+ teljes endomorfizmusgyűrűje kommutatív, akkor a (35) feltétel teljesül. Ez azt jelenti, hogy P összes duplahomotetizmusai páronként barátságosak, vagyis gyűrűt alkotnak, amely most P egyetlen maximális duplahomotetizmusgyűrűje, tehát P-nak csak egy holomorfja van.

Megfordítva, ha P teljes endomorfizmusgyűrűje nemkommutatív, akkor tekintsük P^+-nak két nemfelcserélhető A, B endomorfizmusát. Jelölje a, b (a fenti megjegyzés alapján) P két duplahomotetizmusát úgy, hogy a mindkét alkatrésze A, és b mindkét alkatrésze B legyen. Minthogy a, b (35) miatt nem barátságosak, azért P barátságos duplahomotetizmusainak két különböző maximális gyűrűjében vannak. Mivel utóbbiak P-nak két különböző holomorfját határozzák meg, azért a 6. tétel első felét bebizonyítottuk. Ha az előbbi A, B endomorfizmusokhoz egy-egy 0 triviális endomorfizmust hozzáveszünk, akkor nyilván két $a = (A, 0)$, $b = (B, 0)$ barátságos duplahomotetizmus áll elő,

[46] Zérógyűrű olyan P gyűrűt jelent, amelyre $P^2 = 0$ (vagyis $P_* = P$).

[47] Azt az érdekes problémát, hogy egy modulus teljes endomorfizmusgyűrűje mikor kommutatív, *Szele* és *Szendrei* [13] vetették fel nemrég és részben megoldották. Eredményük szerint aránylag kevés ilyen modulus van.

s ezekre $ab \neq ba$ teljesül. Következőleg a, b beletartoznak P barátságos duplahomotetizmusainak egy nemkommutatív maximális gyűrűjébe. Ehhez P-nak egy nemkommutatív holomorfja tartozik, amivel a 6. tétel bizonyítását befejeztük.

Megjegyezzük, hogy a karakterisztikus sorozatok fogalma magától értetődően átvihető gyűrűkre. Éspedig P *karakterisztikus sorozatán* olyan nemfinomítható véges

$$P = P_0, P_1, \ldots, P_r = 0$$

sorozatot értünk, amelyben P_{i+1} a P_i valódi részgyűrűje $(i = 0, 1, \ldots, r-1)$ és $P_i \blacktriangleleft P (i = 0, \ldots, r)$. Lényegében tehát P^+ (additív) csoportjának kompozíciósorozatáról van szó, ha operátorokként P összes duplahomotetizmusait adjuk meg. Ennek megfelelően alkalmazhatók *Schreier* és *Jordan—Hölder* ismert tételei.

Az 1. § kiegészítéséül ideírjuk még a következő (nagyon erős) analógiákat, amelyekre vizsgálataink során bukkantunk:

Γ karakterisztikus részcsoportja $\therefore$ P karakterisztikus részgyűrűje,

Γ holomorfja $\therefore$ P holomorfjai,

teljes csoport $\therefore$ egységelemes gyűrű,

Γ karakterisztikus sorozata $\therefore$ P karaszterisztikus sorozata,

Γ teljes automorfizmuscsoportja $\therefore$ P barátságos duplahomotetizmusainak maximális gyűrűi.

IRODALOM

[1] *R. Baer,* Absolute retracts in group theory, *Bull. of the Amer. Math. Soc., 52* (1946), 501—506.

[2] *N. Bourbaki, Éléments de Mathématique,* premiere partie, Livre II: *Algébre,* Chap. I. (Paris, 1942), 1—165.

[3] *C. I. Everett,* An extension theory for rings, *American Journal of Math., 64* (1942), 363—370.

[4] *L. Fuchs,* A remark on the Jacobson radical, *Acta Sci. Math. Szeged, 14* (1952), 167—168.

[5] *M. Nagata,* On the theory of radicals in a ring, *Journal of the Math. Soc. of Japan, 3* (1951), 330—344.

[6] *L. Rédei,* Die Verallgemeinerung der Schreierschen Erweiterungstheorie, *Acta Sci. Math. Szeged, 14* (1952), 252—273.

[7] *L. Rédei,* Über gewisse Ringkonstruktionen durch schiefes Produkt, *Acta Math. Acad. Sci. Hung., 2* (1951), 185—189.

[8] *L. Rédei,* Die Anwendung des schiefen Produktes in der Gruppentheorie, *Journal f. d. reine u. angew. Math., 188* (1950), 201—227.

[9] *L. Rédei,* Die Vollidealringe, *Monatshefte f. Math., 56* (1952), 89—95.

[10] *L. Rédei,* Vollidealringe im weiteren Sinn, I, *Acta Math. Acad. Sci. Hung., 3* (1952), 243—268.

[11] *A. Speiser,* Die Theorie der Gruppen, dritte Aufl. (Berlin, 1937).

[12] *O. Steinfeld,* Über Idealquotienten und Primideale, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* (megjelenés alatt).

[13] *T. Szele* and *J. Szendrei,* On abelian groups with commutative endomorphism ring, *Acta Math. Acad. Sci. Hung., 2* (1951), 309—323.

[14] *H. Zassenhaus, Lehrbuch der Gruppentheorie* (Leipzig und Berlin, 1937).

[15] Н. Г. Чеботарёв: Введение в теорию алгебр (Москва, 1949).

KÉT GYŰRŰELMÉLETI STRUKTÚRATÉTEL GEOMETRIAI BIZONYÍTÁSA

SZELE TIBOR

1. §. Bevezetés

Az ú. n. első és második *Wedderburn—Artin*-féle struktúratétel a modern gyűrűelmélet legfontosabb és legszebb eredményei közé tartozik. Fontos tulajdonságokkal jellemzett gyűrűosztályok teljes leírását és explicit megadását teszik lehetővé, úgyhogy gyűrűelméleti jelentőségük nyilvánvaló. Ezen túlmenően azonban a matematika számos más ágának legújabb fejlődési irányát is döntő módon befolyásolta ez a két tétel, mert ezek az eredmények rendkívül ösztönzőleg hatottak azokra az általános vizsgálatokra, amelyek gyűrűk tágabb kategóriáinak lineáris transzformációk útján való előállítására irányultak, s ismeretes, hogy ez az egyik legfontosabb segédeszköz, amelyet a modern algebra a matematika egyéb ágainak nyújt.

A két említett gyűrűelméleti struktúratétel története már majdnem fél évszázadra tekint vissza, s ez alatt az idő alatt számos különböző bizonyítást adtak rájuk a gyűrűelmélet kutatói. A tételek legelső, még *Wedderburn*től származó alakja ú. n. algebrákra, más szóval hiperkomplex rendszerekre vonatkozott [14]*. Az algebrák elméletében alakultak ki azok a klasszikus módszerek is (idempotens elemek konstruálása, *Peirce*-féle felbontás, stb.), amelyek segítségével *Wedderburn* az algebrákra vonatkozó korszakalkotó jelentőségű eredményeit bebizonyította. *Artin*nak köszönhető az a nagyfontosságú felfedezés [1], hogy az algebrák elméletének főeredményeit sokkal tágabb területen is be lehet bizonyítani, s hogy ezeknek az eredményeknek természetes talaját a gyűrűknek éppen ez a tágabb osztálya alkotja: nevezetesen az ú. n. *minimumkövetelménynek elegettevő gyűrűk.* ** Ez a fontos felfedezés nemcsak elmélyítését jelentette az algebrák elméletének, hanem éppen a legfontosabb tételek bizonyításánál lényeges technikai egyszerűsítéseket is tett lehetővé. Így maga *Artin, E. Noether* és iskolájuk több tagja olyan bizonyításokat nyertek a *Weddernburn—Artin*-féle struktúratételekre is, amelyek egyre mélyebb bepillantást nyújtottak a probléma lényegébe, s egyre egyszerűbb technikai apparátust igényeltek [2], [3], [6], [8], [12], [13], [14]. Így ma már e tételek megfogalmazásában és bizonyításában nem is szerepel a hiperkomplex rendszerek

* A szegletes zárójelbe tett számok a dolgozat végén található irodalomra utalnak.

** A használt fogalmakat és elnevezéseket a további §-okban részletesen definiáljuk ill. megmagyarázzuk.

fogalma. Viszont a fejlődésnek ezen a fokán azért még nélkülözhetetlen volt az a fogalomrendszer, amely *Wedderburn* eredeti bizonyításának gerincét alkotja, és ezek a bizonyítások még abban is hasonlók a *Wedderburn*-féléhez, hogy a vizsgált gyűrű bizonyos értelemben önkényesen kitüntetett, nem-invariáns elemeivel illetve részgyűrűivel operálnak, bár kétségtelenül lényegesen egyszerűbb technikával.

Az a legutóbbi évek során bekövetkezett újabb nagyszabású fejlődés, amely a *Wedderburn—Artin*-féle struktúratételek lényegének teljes feltárásához vezetett, s lehetővé tette e tételek elvben annyira egyszerű, közvetlenül célhoz vezető bizonyítását, hogy a megelőző bizonyításokban használt fogalomrendszer és technikai apparátus teljesen mellőzhetőnek bizonyult, csírájában szintén *Emmy Noether*nek köszönhető. Ő ismerte fel az említett struktúratételek mélyreható kapcsolatát a vektorterek lineáris transzformációival, és ő dolgozta ki az alapjait annak a nagyfontosságú modern elméletnek, amelynek lényege abban áll, hogy a gyűrűelmélet problémáit vektorterekkel kapcsolatos kérdésekre fogalmazza át. Ennek a felfedezésnek felbecsülhetetlenül nagy az elvi jelentősége is — a jelek szerint ma még csupán kezdetén állunk a benne rejlő óriási lehetőségek kiaknázásának, — de ezenfelül még azzal a rendkívül kedvező következménnyel is járt, hogy eleven szemléletességgel telített geometriai intuiciót vitt bele a kutatásokba, s ily módon friss, új lendületet adott ezeknek a vizsgálatoknak. *Noether* életében azonban még nem bontakozott ki ennek a rendkívüli jelentőségű gondolatnak az a legmélyebbre ható konzekvenciája, amelynek azt köszönhetjük, hogy ma már nemcsak olyan út áll rendelkezésünkre a *Wedderburn—Artin*-féle struktúratételek bizonyításához, mely mindegyik megelőző bizonyításnál jóval egyszerűbb és sokkal mélyebben feltárja a problémák lényegét, hanem az említett tételek messzemenő általánosításához is vezetett. A matematika fejlődése során más esetekben is gyakran tapasztalható ama jelenség mutatkozott meg ebben az örvendetes tényben, hogy egy probléma legmélyebb gyökerének megtalálása egyszerre ad lehetőséget a tárgyalás egyszerűsítésére és általánosítására. A gyűrűelmélet *Wedderburn—Artin*-féle struktúratételeivel kapcsolatos eme nagy felfedezést a második világháború alatt egymástól függetlenül *J. Dieudonné* és *N. Jacobson* tette [7], [9]. Az általánosítás lényege az, hogy míg a *Wedderburn—Artin*-féle tételek a *minimumkövetelményt* kielégítő egyszerű, ill. féligegyszerű gyűrűk szerkezetét írják le, addig *Dieudonné* és *Jacobson* tételei csupán minimális féloldali ideál létezését posztulálják a tekintett gyűrűkben. Ennek megfelelően a *Wedderburn—Artin*-féle tételekben véges rangú vektorterek lineáris transzformációinak gyűrűi szerepelnek, viszont *Dieudonné* és *Jacobson* tételeiben a fellépő vektorterek rangja tetszőleges.

Legújabban *Artin* egyik cikkében, amely *Wedderburn* munkásságának a modern algebra fejlődésére való mély hatását méltatja, megmutatta, hogy *Jacobson* egyik tételén keresztül igen szép, egyszerű és geometriai szemléletességű bizonyítás adható a második *Wedderburn—Artin*-féle struktúratételre. Ez az *Artin*-féle bizonyítás, csupán a vektorterek elméletének elemeit használva fel, igazolja *Jacobson* egyik eredményét, s ebből igen rövid úton, közvetlenül levezeti a második *Wedderburn—Artin*-féle tételt [4]. *Artin* lényeges észrevétele abban áll, hogy nem szükséges a minimumkövetelmény-nélküli egyszerű gyűrűk *Jacobson*-féle „nagy elméletét" felépíteni (amelyből speciális esetben természetesen kiadódik a minimumkövetelményt kielégítő egyszerű gyűrűk struktúráját leíró második *Wedderburn—Artin*-féle tétel), hanem elegendő ebből az elméletből csak az egyik eredményt kiemelni és igazolni. Ezt a *Jacobson*-féle tételt mi is igazoljuk az alábbi 5. §-ban, a [4]-ben található *Artin*-féle bizonyítást némileg tovább egyszerűsítve. A jelen dolgozat főcélja annak megmutatása, hogy *Jacobson* említett tételéből a második *Wedderburn—Artin*-féle struktúratételnél általánosabb első *Wedderburn—Artin*-féle tétel is, (amely a minimumkövetelményt kielégítő féligegyszerű gyűrűk szerkezetét adja meg) közvetlenül levezethető, éspedig alig több fáradsággal, mint amennyit a második struktúratétel *Artin*-féle levezetése igényel. Ezt a 6. §-ban mutatjuk meg. Mivel a második struktúratétel [4]-beli bizonyítása lényegesen egyszerűbb bármely más, az eddigi irodalomban szereplő bizonyításnál, kombinálva ezt a féligegyszerű gyűrűk struktúraproblémájának az egyszerű gyűrűkre való szokásos visszavezetésével (lásd pl. [3], 27—31. old.), ugyancsak olyan igazolását nyerjük az első struktúratételnek, amely a klasszikus utakon haladó bizonyítások bármelyikénél számottevő mértékben egyszerűbb. Másfelől sikerült *Jacobson*nak a féligegyszerű gyűrűk struktúraelméletét az ú. n. *primitív* gyűrűk tőle származó mély elméletéből is levezetnie modern eszközökkel [10]. Az első *Wedderburn—Artin*-féle struktúratétel alábbi bizonyítása azonban (amely az 5. és 6. § anyagát alkotja) egyszerűbb és közvetlenebb mindkét említett módszernél. Speciális esetként természetesen megkapjuk a második *Wedderburn—Artin*-féle tételt is, sőt arra is rá kell mutatnunk, hogy a *Jacobson*-féle módszer segítségével nyert alábbi, közvetlenül célhoz vezető tárgyalásmód végeredményéből triviális következményként adódnak mindazok a jellemző tulajdonságok ill. részleteredmények, amelyek az eléggé körülményes klasszikus bizonyítás során megtett út egyes állomásai voltak (pl. az a tény, hogy a féligegyszerű gyűrű baloldalilag és jobboldalilag teljesen redukálható s van egységeleme, stb.)

A 2. és 3. §-ban a szükséges alapfogalmakat és az ezekre vonatkozó legfontosabb alaptényeket ismertetjük, a *Wedderburn—Artin*-féle struktúratételeket pedig a 4. §-ban fogalmazzuk meg.

2. §. Operátormodulusok, vektorterek

Vizsgálatainkban a szereplő gyűrűket Abel-féle csoportok endomorfizmusgyűrűjeként állítjuk elő, s ezért mindenekelőtt csoportelméleti megalapozást kell adnunk meggondolásainknak.

Moduluson olyan Abel-féle csoportot értünk, amelyben az alapművelet az összeadás. Ennek megfelelően a modulus neutrális elemét 0-val jelöljük, az a elem inverzét pedig $-a$-val. Modulus jelölésére latin nagybetűt, modulusok elemeinek jelölésére latin kisbetűket használunk. Az A, B, C, D, E, F betűket azonban endomorfizmusok jelölésére tartjuk fenn. *Endomorfizmuson* valamely modulus önmagába való homomorf leképezését értjük. Részletezve: ha M tetszőleges modulus, A pedig olyan

$$x \to xA \qquad (x \in M,\ xA \in M)$$

egyértelmű leképezése M-nek önmagába, amelyre

$$(x+y)A = xA + yA,$$

akkor azt mondjuk, hogy A az M modulusnak endomorfizmusa. Az M modulus összes endomorfizmusai gyűrűt alkotnak, s e gyűrűt M *endomorfizmusgyűrűjének* nevezzük. E gyűrűben a tetszőleges A, B endomorfizmusok összege, ill. szorzata a következőképpen van értelmezve:*

$$x \to x(A+B) = xA + xB;$$

$$x \to \quad x(AB) = (xA)B.$$

A gyűrűaxiómák teljesülése minden nehézség nélkül igazolható. Az endomorfizmusgyűrű általában nem kommutatív gyűrű (amin azt értjük, hogy e gyűrűben a szorzás nem mindig kommutatív művelet), és tartalmazhat nullosztókat (azaz két olyan endomorfizmus szorzata is lehet zérus, amelyek egyike sem zérus). Az endomorfizmusgyűrű zéruseleme az az endomorfizmus, amely az M modulus valamennyi elemét 0-ra képezi le. Egységeleme is mindig van az endomorfizmusgyűrűnek: az az endomorfizmus, amely M bármely elemét önmagára képezi le. Ha A az M modulus egyik endomorfizmusa, akkor az összes xA elemek halmaza (ahol x befutja az egész M halmazt) M-nek részmodulusa; e részmodolust MA-val jelöljük, és az A endomorfizmushoz tartozó *képmodulusnak* hívjuk. M mindamaz x elemei, amelyekre $xA = 0$, szintén részmodolust alkotnak, amelyet $K(A)$-val jelölünk, s az A endomorfizmus *magvának* nevezünk. Nyilvánvaló, hogy A akkor és csak akkor *automorfizmusa* (azaz önmagára való kölcsönösen egyértelmű és művelettartó leképezése) M-nek, ha A magva 0, képmodulusa pedig M. Az automorfizmusok pontosan azok az elemei az endomorfizmusgyűrűnek, amelyeknek van reciprok eleme az endomorfizmusgyűrűben (azaz amelyek alkalmas endomorfizmussal megszorozva az endomorfizmusgyűrű egységelemével egyenlők). Számos fontos gyűrű előállítható endomorfizmusgyűrűként. Így pl. a rac. egész számok gyűrűje a végtelen ciklikus csoport endomorfizmusgyűrűjével, e gyűrű modulo m vett maradékosztályainak gyűrűje pedig az m elemű ciklikus csoport endo-

* Az endomorfizmusok szorzásának értelmezéséből tűnik ki, miért célszerű jobbról írni az endomorfizmus jelét (a függvényeknek az analízisben szokásos jelölésmódjával ellentétben). Ha balról írnánk az endomorfizmus jelét, akkor az A és B endomorfizmusok AB szorzata az $x \to B(Ax)$ leképezés volna.

morfizmusgyűrűjével izomorf; a racionális számok teste a test additív csoportjának endomorfizmusgyűrűjével izomorf. Mindeme példákban a szereplő modulus teljes endomorfizmusgyűrűjéről van szó. Az endomorfizmusgyűrűk igazi jelentősége azonban akkor domborodik ki, ha a modulusok teljes endomorfizmusgyűrűjének részgyűrűit is tekintjük. A gyűrűk struktúraelméletében legfontosabbak a modulusok teljes endomorfizmusgyűrűjének azok a részgyűrűi, amelyeket a következőképpen kapunk: tekintsük valamely M modulus tetszőlegesen kiszemelt endomorfizmusait; M mindamaz endomorfizmusai, amelyek a kiszemelt endomorfizmusok bármelyikével (a szorzásra nézve) felcserélhetők, mint közvetlenül beláthatjuk, gyűrűt alkotnak: az M modulus teljes endomorfizmusgyűrűjének egyik részgyűrűjét. Világos, hogy a teljes endomorfizmusgyűrűk így nyert részgyűrűi is mindig egységelemes gyűrűk, hiszen a teljes endomorfizmusgyűrű egységeleme bármely endomorfizmussal felcserélhető. De könnyen bebizonyítható ennek a ténynek a megfordítottja is: bármely egységelemes gyűrű izomorf valamely modulus (éspedig éppen a tekintett gyűrű additív csoportja) teljes endomorfizmusgyűrűjének egyik, az előbbi módon nyert részgyűrűjével. Ez a tétel már mutatja az endomorfizmusgyűrűk nagy jelentőségét a gyűrűk struktúraelméletében, de nekünk a továbbiakban ennek a tételnek csak arra a speciális esetére lesz szükségünk, amely a mátrixgyűrűk ilyen módon való előállíthatóságát mondja ki.

Most rátérünk az *operátormodulus* fogalmának ismertetésére. Ez a fogalom alapvető fontosságú további meggondolásainkban. Legyen M tetszőleges modulus, Ω pedig tetszőleges gyűrű. Ω elemeinek jelölésére görög kisbetűket használunk. Az Ω gyűrűről akkor mondjuk, hogy *baloldali operátortartománya* az M modolusnak, ha Ω bármely α és M bármely x eleméhez egyértelműen hozzá van rendelve az M modulus egy eleme, amelyet αx-szel jelölünk, s az α, x elempár szorzatának nevezünk, és ha ezenfelül ez a hozzárendelés olyan tulajdonságú, hogy mindig teljesülnek az alábbi követelmények:

$$\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y, \tag{1}$$

$$(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x, \tag{2}$$

$$(\alpha\beta)x=\alpha(\beta x), \tag{3}$$

ahol α, β tetszőleges Ω-beli, x, y pedig tetszőleges M-beli elemek. (Klasszikus példaként gondoljunk a jól megszokott háromdimenziós euklideszi térre, amelynek összes vektorai a közönséges vektor-összeadásra nézve operátormodulust alkotnak, ha az Ω operátortartománynak a valós számok halmazát választjuk, amely ebben a speciális esetben nemcsak gyűrű, hanem test is). Nézzük meg közelebbről a felírt követelmények jelentését. Az (1) követelmény azt fejezi ki, hogy az

$$x \to \alpha x \qquad (\alpha \in \Omega, \quad x \in M) \tag{4}$$

leképezés bármely Ω-beli rögzített α elem esetén M-nek endomorfizmusa. Ezt az endomorfizmust *az α operátor által indukált endomorfizmusnak* nevezzük.

Jól vigyázzunk azonban arra, hogy az Ω operátorgyűrű α elemét általában nem azonosíthatjuk egyszerűen az általa indukált (4) alatti endomorfizmussal, mert Ω különböző elemei is indukálhatják ugyanazt az endomorfizmust. (Példát szolgáltat erre bármely véges M modulus, ha Ω-nak az összes rac. egész számok gyűrűjét választjuk, az αx szorzaton $|\alpha|$ számú x ill. $-x$ elem öszszegét értve aszerint, hogy $\alpha > 0$ ill. $\alpha < 0$, a $0 . x$ szorzaton pedig a modulus 0 elemét értve.) Nyilvánvalóan következik (1)-ből az is, hogy az Ω gyűrű zéruselemének az M modulus bármely elemével való szorzata egyenlő az M modulus zéruselemével. — A (2) követelmény azt jelenti, hogy két Ω-beli elem összege által indukált endomorfizmus mindig megegyezik a két elem által indukált endomorfizmusok összegével, (3) pedig az jelenti, hogy két Ω-beli elem szorzata által indukált endomorfizmus a második és az első elem által indukált endomorfizmusok (ebben a sorrendben vett!) szorzatával egyezik meg. Az (1)—(3) követelményeket tehát összefoglalva, együtt így fejezhetjük ki: az Ω operátortartomány mindegyik eleme az M modulus egy endomorfizmusát indukálja, és Ω-nak így adódó leképezése az indukált endomorfizmusok gyűrűjére *antihomomorfizmus.* Ez a kifejezés arra utal, hogy a szorzat képe a képelemek ellenkező sorrendben vett szorzatával egyenlő. A szorzással kapcsolatban észlelt eme bonyadalom nyilván megszűnnék akkor, ha az M modulus elemeihez jobbról írnánk oda az Ω-beli elemeket mint szorzótényezőket, azaz ha Ω *jobboldali operátortartománya* volna az M modulusnak (az (1)—(3) előírások mintájára közvetlenül felírható követelményekkel). Ilyen szempontból tehát a jobboldali operátormodulusok kényelmesebben kezelhetők, mint a baloldaliak, mert jobboldali operátormodulus esetében az operátortartománynak *homomorf képét* alkotják az operátorok által indukált endomorfizmusok. Nem rekeszthetjük ki azonban e miatt az alapjábanvéve nem lényeges komplikáció miatt tárgyalásaink köréből a baloldali operátormodulusokat, mert a dolog úgy áll, hogy nem mindig pusztán formális megállapodáson múlik az, hogy melyik oldalról írjuk az operátorokat a modulus elemei mellé; sőt gyakran megtörténik, hogy az előttünk álló problémából folyó adottság a szereplő operátortartomány baloldali vagy jobboldali volta. Az is előfordul, hogy ugyanaz a modulus egyidejűleg el van látva baloldali és jobboldali operátortartománnyal egyaránt: látni fogjuk ennek egy nagyfontosságú esetét az 5. §.-ban. — Végül megjegyezzük, hogy ha az Ω operátorgyűrűben van ε egységelem, akkor többnyire megkívánjuk az (1)—(3) követelményeken kívül még azt is, hogy ε identikus operátor legyen, azaz $\varepsilon x = x$ teljesüljön bármely $x \in M$ elemre.

Az operátormodulussal kapcsolatban felmerülő további fogalmakat is csak abban az esetben ismertetjük részletesen, ha az alapul vett modulus baloldali operátormodulus. A megfelelő megállapítások jobboldali operátormodulus esetére közvetlenül nyerhetők. Az Ω operátortartománnyal ellátott M modulus — röviden Ω-modulus — részmodulusai (azaz alcsoportjai) között a dolog természeténél fogva különös fontosságuk van azoknak, amelyek maguk is *Ω-modulusok,* vagy amint mondani szokás, az Ω operátortartomány szempontjából *megengedhető részmodulusok.* Az M modulus valamely N részmodulusa akkor rendelkezik ezzel a tulajdonsággal, ha tetszőleges Ω-beli α és N-beli x elem esetén az αx szorzat eleme N-nek. Ezt a követelményt rövid jelekkel így fejezhetjük ki:

$$\Omega N \subseteq N, \tag{5}$$

ahol ΩN az összes olyan αx szorzatok halmaza, amelyekre $\alpha \in \Omega$ és $x \in N$. (Hogy egy Ω-modulusnak lehetnek olyan részmodulusai, amelyek nem Ω-modulusok, azaz nem megengedhetők, azt a háromdimenziós tér vektorainak modulusa által szolgáltatott példa is mutatja, ahol mint már említettük, Ω a valós számok testének vehető. Ekkor pl. az origóból a csupa egész szám koordinátájú pontokba húzott vektorok halmaza részmodulus, de ez a részmodulus az említett operátortartomány szempontjából nem megengedhető. A megengedhető modulusok vektorhalmazai éppen az ú. n. lineáris altereket töltik ki; ezek: az egész tér, az origón átmenő síkok, az origón átmenő egyenesek, és a zérusvektor, mint egyelemű részmodulus.) Bármely Ω-modulusnak van legalább két Ω-részmodulusa: maga a teljes modulus és az egyetlen elemből álló 0 részmodulus. (Ez a kettő csak abban a triviális esetben esik egybe, ha maga az alapul vett M modulus is csupán a 0 elemet tartalmazza.) Ha az M modulusnak az Ω operátortartományra nézve csak ez a két megengedhető részmodulusa van, akkor azt mondjuk, hogy az M modulus az Ω operátortartományra nézve *irreducibilis.* (Alább látunk példát irreducibilis operátormodulusra.)

Amint az alapul vett Ω-modulus összes részmodulusai közül természetszerűen ki vannak tüntetve az Ω-részmodulusok, ugyanúgy az M modulus endomorfizmusai közül is ki vannak tüntetve az Ω-endomorfizmusoknak nevezett endomorfizmusok. Az M Ω-modulusnak valamely önmagába való

$$x \to xA \qquad (x \in M, \quad xA \in M) \tag{6}$$

egyértelmű leképezését akkor nevezzük *Ω-endomorfizmus*nak, ha a közönséges értelemben endomorfizmus, azaz M tetszőleges x, y elemei esetén

$$(x+y)A = xA + yA \tag{7}$$

és ezenfelül még az

$$(\alpha x)A = \alpha(xA) \tag{8}$$

követelményt is teljesíti bármely Ω-beli α operátor és M-beli x elem mellett. Ez az utóbbi követelmény azt jelenti, hogy ha az M modulus x elemét előbb megszorozzuk az α operátorral, s az így kapott elemnek vesszük a képét a (6) alatti A endomorfizmusnál, akkor ugyanahhoz az elemhez kell jutnunk, mint hogyha az x elemnek előbb vesszük az xA képét, s az így nyert elemet azután szorozzuk meg az α operátorral. Ennélfogva a (8) követelmény pontosan annyit jelent, hogy az A endomorfizmus *felcserélhető* az Ω-beli α operátorok által indukált endomorfizmusokkal (vagy rövidebben: az α operátorokkal, ha t. i. a felcserélhetőség szempontjából egyértelműnek vesszük az operátort az általa indukált endomorfizmussal, amit nyilván nyugodtan megtehetünk). Megállapíthatjuk tehát, hogy *az M Ω-modulusnak valamely endomorfizmusa akkor és csak akkor Ω-endomorfizmus, ha felcserélhető az Ω-beli operátorok mindegyikével.* (A már ismételten szereplő példa, a tér vektorainak modulusa esetében, ahol Ω a valós számtest, Ω-endomorfizmust kapunk pl. oly módon, hogy a tér bármely vektorához ennek egy rögzített síkra eső vetületét rendeljük hozzá képelemként.)

Igen fontos, és az alábbiakban is lényeges szerepet betöltő fogalom az operátormodulusok direkt összegre való felbonthatósága is. Ez is természetes módon adódik a tetszőleges részmodulus fogalmának Ω-részmodulussal való helyettesítése útján. Akkor mondjuk, hogy *az M Ω-modulus felbontható az $N_1, \ldots, N_k$ Ω-részmodulusok direkt összegére,* e tényt így jelölve:

$$M = N_1 + \cdots + N_k, \tag{9}$$

ha M bármely x eleme pontosan egyféleképpen előállítható

$$x = x_1 + \cdots + x_k \qquad (x_1 \in N_1, \ldots, x_k \in N_k) \tag{10}$$

alakban. Világos, hogy ennek szükséges és elegendő feltétele a következő: M bármely x eleme legyen előállítható (legalább egyféleképpen) $x = x_1 + \cdots + x_k$ $(x_i \in N_i)$ alakban, — ezt úgy szokás kifejezni, hogy az $N_1, \ldots, N_k$ részmodulusok *generálják* az M modulust, — és $0 = x_1 + \cdots + x_k$ csak $x_1 = \cdots = x_k = 0$ esetén teljesüljön. (Ez az utóbbi követelmény biztosítja a (10) előállítás egyértelműségét.) A $k = 2$ speciális esetben, azaz ha

$$M = N_1 + N_2, \tag{11}$$

érvényes a következő, gyakran alkalmazott és fontos tény:

$$N_1 \cong M/N_2,$$

azaz N_1 operátorizomorf (Ω-izomorf) az M/N_2 faktormodulussal. Nyilvánvaló ugyanis, hogy egyrészt az M/N_2 faktormodulus is Ω-modulus, hiszen bármely Ω-beli α operátor és M-nek az x elemet tartalmazó N_2 szerinti mellékosztálya (mint M/N_2 tetszőleges eleme) esetén az α operátornak az említett mellékosztállyal való szorzata *egyértelműen* meg van határozva az αx elemet tartalmazó mellékosztályként; (világos, hogy ez utóbbi nem függ attól, hogy mely x elemét tekintettük az $N_2 + x$ mellékosztálynak;) másrészt N_1 bármely x_1 eleméhez hozzárendelve M-nek N_2 szerinti $N_2 + x_1$ mellékosztályát, olyan izomorfizmust adtunk meg N_1 és M/N_2 között, amely egyszersmind Ω-izomorfizmus, azaz αx_1-hez az x_1-et tartalmazó $N_2 + x_1$ mellékosztály α-szorosa van hozzárendelve.

Hogy miért alkalmazhatók igen hatékonyan az operátormodulusokra vonatkozó vizsgálatok és eredmények a gyűrűk struktúraelméletében, azt már az is mutatja, hogy bármely R gyűrű operátormodulusnak tekinthető, önmagával, mint operátortartománnyal ellátva. Ekkor tehát az M modulus szerepét maga R mint additív csoport tölti be, másfelöl az Ω operátorgyűrű is egybeesik az R gyűrűvel. Egy operátorelemnek valamely moduluselemmel való szorzata az R gyűrűben definiált szorzás eredménye (hiszen mindkét elem R-ben van). Nyilvánvaló azonban, hogy éles különbséget kell tennünk ama két lehetőség között, hogy R-et mint baloldali R-modulust, vagy mint jobboldali R-modulust tekintjük. Ha R nem kommutatív gyűrű, akkor ez a két operátormodulus nem megegyező, hiszen az $\alpha \in R$ operátorelemhez és az $x \in R$ moduluselemhez a baloldali esetben αx, a jobboldali esetben $x\alpha$ van hozzárendelve operátorszorzatként. Ez a fontos példa is mutatja, hogy miért nem rekeszthetjük ki vizsgálataink köréből sem a baloldali, sem a jobboldali operátormodulusokat (oly módon, hogy tárgyalásainkat csak a másik esetre korlátozzuk). Ha R kommutatív gyűrű, akkor természetesen azonos a két eset, és pusztán célszerűségi szempontok alapján áll módunkban eldönteni, hogy R-et baloldali vagy jobboldali operátormodulusnak tekintsük. — Az általános esetben, azaz ha R nem szükségképpen kommutatív gyűrű, akkor R-et mint önmagával ellátott baloldali operátormodulust tekintve, a megengedhető részmodulusok a *baloldali ideálok.* Ezek tehát a következő követelményekkel vannak értelmezve: H akkor és csak akkor baloldali ideálja az R gyűrűnek, ha egyrészt additív alcsoport, másrészt $RH \subseteq H$, azaz R bármely r és H bármely h elemének rh szorzata bennevan H-ban. Hasonlóan vannak értelmezve az R gyűrű J *jobboldali ideáljai,* mint az önmagával jobboldali operátortartományként ellátott R operátormodulus megengedhető részmodulusai, azaz R-nek olyan J additív alcsoportjai, amelyekre $JR \subseteq J$ teljesül. Ha az R gyűrűnek valamely részhalmaza baloldali ideál is, jobboldali ideál is R-ben, akkor kétoldali ideálnak, vagy röviden *ideál*nak nevezzük. — Az Ω gyűrű *ferdetest* (vagy más elnevezéssel: *divíziógyűrű*), ha az összeadáson, kivonáson és szorzáson kívül még a (baloldali és jobboldali) osztás is mindig elvégezhető benne, amennyiben természetesen az osztó nem zérus, azaz ha bármely Ω-beli $\alpha \neq 0$ és β elemekhez van olyan ξ és ξ' elem Ω-ban, amelyekre $\alpha\xi = \beta$ és $\xi'\alpha = \beta$ teljesül. A ferdetest zérustól különböző elemei csoportot alkotnak a szorzásra, mint alapműveletre nézve, s ez a követelmény (azonfelül, hogy Ω gyűrű legyen) jellemzi is a ferdetestet. Ennélfogva a ferdetest mindig egységelemes gyűrű, és bármely 0-tól különböző α elemének van reciproka, azaz olyan α^{-1} elem, amelyre $\alpha \cdot \alpha^{-1} = \alpha^{-1} \cdot \alpha = 1$. Másrészt a ferdetest úgy is definiálható, mint olyan egységelemes gyűrű, amelyben bármely 0-tól különböző elemnek van reciproka. Ha a ferdetest kommutatív, akkor *test*nek nevezzük. Ha az Ω gyűrű ferdetest, akkor Ω, mint operátortartományként önmagával ellátott (akár baloldali, akár jobboldali) operátormodulus példát szolgáltat irreducibilis operátormodulusra. Igen könnyen beláthatjuk ugyanis, hogy ferdetestnek önmagán és 0-on kívül sem baloldali, sem jobboldali ideálja nincsen.

A V operátormodulust akkor nevezzük *vektortérnek*, ha operátortartománya ferdetest. Ezt a fontos tényt, hogy t. i. az operátortartomány ebben az esetben ferdetest, azzal is kidomborítjuk, hogy az operátortartományt Ω helyett (a diviziógyűrű kezdőbetűjére emlékeztető) Δ-val jelöljük, míg a vektortér V jele a „vektortér" szó kezdőbetűjére utal. Megállapodunk abban, hogy a vektortér Δ operátortartományát, amelyet a közönséges háromdimenziós térrel kapcsolatban megszokott elnevezés analógiájára *skaláris tartománynak* is hívnak, mindig baloldali operátortartományként írjuk. Ez a megállapodás azonban természetesen nem zárja ki azt, hogy a vektortérhez egy jobboldali operátortartományt is megadjunk, ha ez célszerű lesz.

Mármost annak a ténynek, hogy a V vektortér Δ operátortartománya nem akármilyen egységelemes gyűrű, hanem ferdetest, igen nagyjelentőségű következményei vannak. Ez teszi ugyanis lehetővé, hogy a közönséges háromdimenziós vektortér egész affingeometriája átvihető, illetve kiterjeszthető az általunk definiált absztrakt vektortér esetére is, és ennek a rendkívül általános, mégis geometriai szemléletességű tulajdonságokkal felruházott fogalomnak igen messzeható és nagyjelentőségű alkalmazásai vannak a gyűrűk modern struktúraelméletében.

Alapvető fontosságú a következő fogalomalkotás: *a Δ skaláris tartománnyal ellátott V vektortér véges számú $x_1, \ldots, x_k$ elemét akkor nevezzük lineárisan függetlennek, ha*

$$\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_k x_k = 0 \qquad (\alpha_i \in \Delta, \quad i = 1, \ldots, k) \quad (12)$$

alakú összefüggés kizárólag csak $\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0$ esetén teljesül. V-nek végtelen sok elemét akkor mondjuk lineárisan függetlennek, ha közülük bármely véges számú vektor lineárisan független. (A továbbiakban a V vektortér elemeit röviden csak vektoroknak, Δ elemeit pedig skalárisoknak nevezzük.) Világos, hogy lineárisan független vektorok közül egyik sem lehet zérus. Ha az $x_1, \ldots, x_k$ vektorok nem lineárisan függetlenek, akkor azt mondjuk, hogy *lineárisan függők*. Ez esetben, előbbi definíciónk értelmében, van olyan (12) alakú összefüggés, amelyben az egyik α_i skaláris nem zérus. Minthogy az $x_1, \ldots, x_k$ vektorok sorrendje lényegtelen, az általánosság korlátozása nélkül feltehetjük, hogy $i = k$, azaz, hogy $\alpha_k \neq 0$. (Ez megkönnyíti az írásmunkát a most következő néhány sorban.) Ekkor α_k^{-1}-gyel való szorzás útján az következik (12)-ből, hogy

$$x_k = -\alpha_k^{-1}\alpha_1 x_1 - \cdots - \alpha_k^{-1}\alpha_{k-1} x_{k-1} = \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_{k-1} x_{k-1}, \quad (13)$$

amit úgy szokás kifejezni, hogy x_k *lineáris kombinációja az* $x_1, \ldots, x_{k-1}$ *vektoroknak.* Minthogy megfordítva: abból, hogy véges számú vektor közül az egyik lineáris kombinációja a többinek, nyilvánvalóan következik, hogy a tekintett vektorok nem alkotnak lineárisan független rendszert, azt kaptuk, hogy *a V vektortér véges számú vektora akkor és csak akkor nem lineárisan független, ha van közöttük olyan vektor, amely lineáris kombinációja a többinek.*

A $\varDelta$ operátortartománnyal ellátott V vektortér, mint operátormodulus megengedhető részmodulusait (azaz $\varDelta$-részmodulusait) röviden *V altereinek* nevezzük. Ennélfogva a W halmaz akkor és csak akkor altere V-nek, ha egyrészt additív alcsoportja, másrészt bármely $\alpha \in \varDelta$ és $x \in W$ esetén $\alpha x \in W$, azaz

$$\varDelta W \subseteq W. \tag{14}$$

A V vektortér valamely alteréhez jutunk a következő konstrukció útján. Tekintsük V tetszőleges (nem okvetlenül lineárisan független) $x_1, \ldots, x_k$ vektorait, és alkossuk meg minden lehetséges $\beta_1, \ldots, \beta_k$ skaláris rendszerrel e vektorok

$$\beta_1 x_1 + \cdots + \beta_k x_k$$

lineáris kombinációit. Ezek halmaza V-nek nyilván egyik W altere, éspedig a lehető legszűkebb olyan altér (t. i. bármely olyan altérnek részhalmaza), amely a kiszemelt $x_1, \ldots, x_k$ vektorok mindegyikét tartalmazza. Ezért az íly módon konstruált W alteret *az $x_1, \ldots, x_k$ vektorok által generált altérnek nevezzük,* és így jelöljük:

$$W = \{x_1, \ldots, x_k\}. \tag{15}$$

A $k = 1$ speciális esetben az egyetlen x_1 vektor által generált

$$\{x_1\} = \varDelta x_1 \tag{16}$$

alteret kapjuk, amely az összes αx_1 vektorok halmaza (α befutja a teljes $\varDelta$ skaláris tartományt). Ez az altér az egyetlen elemű 0 altér, ha $x_1 = 0$; ha azonban $x_1 \neq 0$, akkor az x_1 vektorral meghatározott *egyenes*, vagy *egydimenziós* altér.

Mivel a (15) altér a véges számú $x_1, \ldots, x_k$ vektorral van generálva, az ilyen módon kapott altereket *végesen generált altereknek* nevezzük. Számunkra a továbbiakban az az eset fontos, amikor maga az alapul vett V vektortér is végesen generált, azaz megadható benne véges számú vektor úgy, hogy azok lineáris kombinációjaként V bármely elemét előállíthatjuk. Ezért a továbbiakban (egészen a 4. § végéig) feltételezzük, hogy V végesen generált vektortér.

E § további részében főcélunk annak megmutatása, hogy egy vektortér bármely végesen generált alterének (s így legutóbbi kikötésünk szerint magának az alapul vett V vektortérnek is) egyértelműen meghatározott dimenziószáma van, amelyet az altér rangjának is nevezünk. Ez a fogalom szoros kapcsolatban van az altér bázisának fogalmával.

Ha a (15) alatti W altér $x_1, \ldots, x_k$ generátorrendszere nem lineárisan független, akkor, mint előbb láttuk, e vektorok egyike, pl. x_k, lineáris kombinációja a többi $x_1, \ldots, x_{k-1}$ vektornak. Ez azonban azt jelenti, hogy

$$W = \{x_1, \ldots, x_{k-1}\},$$

hiszen ekkor az $x_1, \ldots, x_k$ vektorok bármely lineáris kombinációja egyszersmind lineáris kombinációja az $x_1, \ldots, x_{k-1}$ vektoroknak is. Amennyiben még az $x_1, \ldots, x_{k-1}$ vektorok sem lineárisan függetlenek, akkor hasonló meggondolás arra az eredményre vezet, hogy még legalább egy további vektor is „törölhető" közülük anélkül, hogy az így csökkentett vektorrendszer által generált altér megváltoznék. Az ilyen módon feleslegesnek bizonyuló vektorok törlését a generátorrendszerből mindaddig folytathatjuk, míg a megmaradó $x_1, \ldots, x_r$ vektorok már lineárisan függetlenek lesznek. Azt a fontos eredményt nyertük tehát, hogy *bármely végesen generált altérnek van lineárisan független generátorrendszere*, vagy rövidebben: *bázisa*. Ha továbbá $b_1, \ldots, b_r$ bázisa a W altérnek, akkor a direkt összeg és a lineáris függetlenség értelmezéséből következőleg W *előállítható*

$$W = \{b_1, \ldots, b_r\} = \{b_1\} + \cdots + \{b_r\} = \Delta b_1 + \cdots + \Delta b_r \tag{17}$$

alakban, azaz *egydimenziós alterek direkt összegeként*, ahol a szereplő egydimenziós altereket éppen a tekintett bázisban szereplő vektorok határozzák meg. Ugyanannak az altérnek lehetnek különböző vektorrendszerek is bázisai (gondoljunk a közönséges háromdimenziós tér példájára), de megmutatjuk, hogy végesen generált altér esetében *az altér bármely bázisa ugyanannyi elemből áll.* A bázis elemeinek száma tehát, amelyet az altér *dimenziószám*ának vagy *rang*jának nevezünk, az altérnek invariánsa.

Állításunk igazolása céljából elegendő azt megmutatnunk, hogy *olyan W altérben, amelynek van r elemű bázisa, $r+1$ vektor sohasem lehet lineárisan független.* Ebből ugyanis már következik, hogy r-nél több elemű bázisa nincsen a tekintett W altérnek; másrészt r-nél kevesebb elemű bázisa sincsen W-nek, mert ha volna, akkor egy ilyen bázisból kiindulva, ellentmondást jelent igazolásra kitűzött legutóbbi (dőltbetűs) állításunkkal az a tény, hogy W-nek van r elemű bázisa.

Mármost legutóbbi állításunkat, mely szerint r elemű bázissal rendelkező W altérben $r+1$ vektor sohasem lineárisan független, r szerinti teljes indukcióval igazoljuk. Az $r=1$ esetben állításunk helyessége közvetlenül világos: ekkor $W = \{b_1\} = \Delta b_1$, úgyhogy W két eleme $y_1 = \alpha_1 b_1$, $y_2 = \alpha_2 b_1$ alakban vehető fel, s e két vektor nyilván nem lineárisan független, mert vagy $y_1 = 0$ vagy $\alpha_2 \alpha_1^{-1} y_1 - y_2 = 0$. Tegyük fel tehát, hogy igazolandó állításunk r helyett $r-1$ esetén már helyes. Legyen továbbá W olyan altér, melynek $b_1, \ldots, b_r$ bázisa, azaz amelyre (17) teljesül. Tekintsünk $r+1$ tetszőleges vektort a W altérben, amelyek előállítása az említett bázis segítségével:

$$\begin{aligned} y_1 &= \alpha_{11} b_1 + \cdots + \alpha_{1r} b_r \\ y_2 &= \alpha_{21} b_1 + \cdots + \alpha_{2r} b_r \\ &\vdots \\ y_{r+1} &= \alpha_{r+1,1} b_1 + \cdots + \alpha_{r+1,r} b_r. \end{aligned}$$

Indukciós feltevésünk alapján bebizonyítjuk, hogy a felírt vektorok lineárisan függők. Elegendő azt az esetet vennünk, amikor az egyenletrendszer jobboldalán az r-edik oszlopban álló $\alpha_{1r}, \ldots, \alpha_{r+1,r}$ skaláris együtthatók nem mindegyike zérus, mert ellenkező esetben azzal a helyzettel állanánk szemben, hogy a felírt, $y_1, \ldots, y_{r+1}$ vektorok mind benne vannak már egy $r-1$ elemű bázissal rendelkező altérben is, s ekkor indukciós feltevésünk értelmében a felírt vektorok közül már bármely r számú is lineárisan függő (ami természetesen maga után vonja azt, hogy a felírt $r+1$ számú vektor is lineárisan függő). Mivel az $y_1, \ldots, y_{r+1}$ vektorok sorrendje nem lényeges, feltehetjük még azt is, hogy $\alpha_{1r} \neq 0$. Ekkor a felírt egyenletek közül az első

$$\alpha_{1r}^{-1} y_1 = \alpha_{1r}^{-1} \alpha_{11} b_1 + \cdots + b_r$$

alakban írható, s így ennek megfelelő skalárisokkal szorzott oldalait az egyenletrendszer többi egyenleteinek megfelelő oldalaiból kivonva, azt találjuk, hogy az

$$y_2 - \alpha_{2r} \alpha_{1r}^{-1} y_1, \quad y_3 - \alpha_{3r} \alpha_{1r}^{-1} y_1, \ldots, y_{r+1} - \alpha_{r+1,r} \alpha_{1r}^{-1} y_1$$

vektoroknak a $b_1, \ldots, b_r$ bázis segítségével való előállításában a b_r elem már seholsem szerepel. Ez azonban annyit jelent, hogy e legutóbb felírt r számú vektor benne van a $\{b_1\} + \cdots + \{b_{r-1}\}$ altérben, úgyhogy indukciós feltevésünk szerint e vektorok lineárisan függők. Bármely olyan reláció, amely mutatja e vektorok lineáris függőségét, nyilván ugyanezt mutatja az $y_1, \ldots, y_{r+1}$ vektorokra vonatkozólag is. Ezzel megmutattuk, hogy a W altérben bármely $r+1$ számú vektor lineárisan függő, és így állításunk bizonyítását befejeztük.

Minthogy feltételeztük, hogy maga az alapul vett V vektortér is végesen generált, V-nek is van véges bázisa, s ha $a_1, \ldots, a_n$ bázisa V-nek, akkor V n rangú vektortér, és érvényes a

$$V = \{a_1\} + \cdots + \{a_n\} = \Delta a_1 + \cdots + \Delta a_n \tag{18}$$

direkt felbontás. *Ez másszóval azt jelenti, hogy V bármely v eleme előállítható*

$$v = \varrho_1 a_1 + \cdots + \varrho_n a_n$$

alakban egy és csak egy $\varrho_1, \ldots, \varrho_n$ skaláris együtthatórendszerrel.

A továbbiakban fontos lesz még számunkra a következő megjegyzés: *a V vektortér bármely W alterének bármely bázisa kiegészíthető V-nek egy bázisává.* Tekintsük ugyanis a (17)-ben szereplő W alteret, amelynek $b_1, \ldots, b_r$ tetszőleges bázisa. Ha $W = V$, akkor nem kell kiegészítenünk a $b_1, \ldots, b_r$ bázist, mert ez már maga is bázisa a $V = W$ vektortérnek. Ha viszont W valódi részhalmaza V-nek, akkor legyen $c_{r+1} \in V$ olyan vektor, amelyre $c_{r+1} \notin W$. Ekkor a $b_1, \ldots, b_r, c_{r+1}$ rendszer lineárisan független, mert ellenkező esetben fennállna közöttük egy olyan reláció, amelyben c_{r+1} együtthatója nem zérus, s így ennek az együtthatónak reciprokával szorozva, a reláció azt mutatná, hogy $c_{r+1} \in W$, ellentmondásban feltevésünkkel. Ha még a $b_1, \ldots, b_r, c_{r+1}$ rendszer sem bázisa V-nek, akkor hasonló módon továbbfolytathatjuk a bázis kibővítését tetszőleges olyan vektorral, amely nem eleme a $W + \{c_{r+1}\}$ altérnek. Így végül a V vektortér $b_1, \ldots, b_r, c_{r+r}, \ldots, c_n$ bázisához jutunk, amely, mint állítottuk, a tetszőleges W altér tetszőleges $b_1, \ldots, b_r$ bázisának kiegészítésével jött létre. Nyilván pontosan akkor ér véget kiegészítő eljárásunk, amikor már n tagja van a kibővített lineárisan független rendszernek, mert a dimenziószám igazolt invarianciája miatt V bármely bázisa n elemű.

Az előbbi meggondolásból következik az is, hogy ha W valódi altere V-nek, és $z \in V$, $z \notin W$, akkor V előállítható

$$V = W + \{z\} + U \tag{19}$$

alakú direkt összegként, ahol U alkalmas altér.

Ugyancsak az altér bázisának bármely bővebb altér bázisává való kiegészíthetőségéből következik az, hogy ha a V vektortér W_1 és W_2 altereire $W_1 \subseteq W_2$ teljesül, akkor ekvivalens a következő két állítás:

W_1 valódi része W_2-nek;

W_1 rangja kisebb W_2 rangjánál.

Ebből, valamint az altér rangjának invarianciájából közvetlenül nyerjük az alábbi tételt:

Az n dimenziós V vektortér altereinek bármely

$$W_1 \subset W_2 \subset W_3 \subset \cdots \tag{20}$$

szigorúan növekvő lánca legfeljebb $n+1$ tagot tartalmazhat. Az előbbiek szerint ugyanis az alterek eme szigorúan növő láncához a rangszámok szigorúan növő sorozata tartozik, de a rangszámok csak 0-tól n-ig emelkedhetnek.

Végül megjegyezzük, hogy tetszőleges (nem okvetlenül végesen generált) vektortérre vonatkozólag is kimutatható a következő tétel: vektortérnek mindig van lineárisan független generátorrendszere, azaz bázisa és ugyanannak a vektortérnek két bázisa mindig megegyező számosságú. Ezt az invariáns (véges vagy végtelen) számosságot az általános esetben is a vektortér dimenziószámosságának, vagy rangjának nevezzük. Nekünk azonban erre a tételre a továbbiakban csak végesen generált vektortér esetében lesz szükségünk, úgyhogy elegendő volt a fenti bizonyítást csak erre az esetre végezni el.

3. §. Lineáris transzformációk. A teljes mátrixgyűrű

Vizsgálataink alapja ebben a §-ban is egy Δ ferdetesttel, mint skaláris tartománnyal ellátott n rangú V vektortér lesz. Tekintsük e vektortér Δ-endomorfizmusait, azaz az olyan önmagába való $x \to xA$ egyértelmű leképezéseit, amelyek teljesítik a (7) és (8) követelményt V tetszőleges x, y vektorai és tetszőleges $\alpha \in \Delta$ skaláris esetén. Idézzük emlékezetünkbe, hogy a (8) követelmény jelentése a következő: az A endomorfizmusnak bármely Δ-beli skalárissal felcserélhetőnek kell lennie. Mint az előző §-ban láttuk, a V vektortér összes Δ-endomorfizmusai gyűrűt alkotnak, s ez a gyűrű részgyűrűje a V modulus teljes endomorfizmusgyűrűjének.

A V vektortér Δ-endomorfizmusait V *lineáris transzformáció*inak fogjuk nevezni. (Indokolttá teszi ezt az elnevezést az a tény, hogy ha Δ a valós számtest, akkor ilyen módon éppen az n dimenziós V euklideszi tér jól ismert lineáris transzformációit kapjuk meg, amelyeket affin leképezéseknek is szokás nevezni.) A V vektortér összes lineáris transzformációiból álló gyűrűt Δ_n-el fogjuk jelölni, ami szokott jelölési mód a Δ ferdetest elemeiből felépíthető n-szer n-es mátrixok gyűrűjére, s rögtön látni fogjuk, hogy ez az utóbbi gyűrű lényegében ugyanaz, mint a lineáris transzformációk gyűrűje.

Tekintsük a V vektortér (18) alatti előállításában szereplő $a_1, \ldots, a_n$ bázisát, éspedig a báziselemeknek ebben a *rögzített sorrendjében*. Legyen A tetszőleges lineáris transzformációja V-nek. Világos, hogy a tekintett rendezett bázis elemeinek

$$\left.\begin{aligned} a_1 A &= \alpha_{11} a_1 + \ldots + \alpha_{1n} a_n = c_1 \\ a_2 A &= \alpha_{21} a_1 + \ldots + \alpha_{2n} a_n = c_2 \\ &\vdots \\ a_n A &= \alpha_{n1} a_1 + \ldots + \alpha_{nn} a_n = c_n \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

képei teljesen meghatározzák az A lineáris transzformációt, hiszen a (7) és (8) követelmények teljesülése következtében a V vektortér tetszőleges

$$v = \varrho_1 a_1 + \ldots + \varrho_n a_n$$

elemének képe az A transzformációnál

$$\begin{aligned} vA &= (\varrho_1 a_1 + \ldots + \varrho_n a_n)A = (\varrho_1 a_1)A + \ldots + (\varrho_n a_n)A = \\ &= \varrho_1(a_1 A) + \ldots + \varrho_n(a_n A) = \varrho_1 c_1 + \ldots + \varrho_n c_n, \end{aligned} \tag{22}$$

azaz valóban meg van határozva az $a_1 A = c_1, \ldots, a_n A = c_n$ képvektorokkal. Másfelől az is nyilvánvaló, hogy a (21) összefüggések jobboldalán szereplő $c_1, \ldots, c_n$ vektorokat egészen tetszőlegesen írva elő a V vektortér elemei közül, van a vektortérnek olyan A lineáris transzformációja, amely az $a_1, \ldots a_n$ bázis elemeit rendre ezekbe a tetszőlegesen előírt vektorokba viszi át, vagyis amelyre a (21) alatti összefüggések teljesülnek. Ezt az A lineáris transzformációt egyszerűen úgy nyerjük, hogy a V vektortér bármely

$$v = \varrho_1 a_1 + \ldots + \varrho_n a_n$$

vektorának vA képét a (22) összefüggés szerint így adjuk meg:

$$vA = \varrho_1 c_1 + \ldots + \varrho_n c_n.$$

Minthogy pedig az A lineáris transzformációt ilyen módon egyértelműen jellemző $a_1 A = c_1, \ldots, a_n A = c_n$ képvektorokat (21) alapján n^2 számú α_{ik} skaláris elem határozza meg, amelyeket az alábbi mátrix által adott elrendezésben tekinthetünk át, meggondolásaink a következő eredményhez vezettek: *Az*

$$A \longleftrightarrow \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} \tag{23}$$

hozzárendelés kölcsönösen egyértelmű leképezést jelent a V vektortér összes *lineáris transzformációinak rendszere és a Δ ferdetest (a V vektortér skaláris tartománya) elemeiből felépülő összes lehetséges n-szer n-es mátrixok rendszere között. E hozzárendelés alapjául a V vektortér egy tetszőlegesen kijelölt, de a továbbiakban sorrend szerint is rögzített $a_1, \dots, a_n$ bázisa szolgál, éspedig azzal a megállapodással, hogy a tetszőleges A lineáris transzformációhoz hozzárendelt mátrix i-edik sorában az a_iA képvektornak az alapul vett bázis szerinti (21) előállításában fellépő skaláris együtthatók állanak; s megfordítva, egy tetszőlegesen előírt (23) alatti mátrix ahhoz a lineáris transzformációhoz van hozzárendelve, amelynél az a_i bázisvektor képe a mátrix i-edik sora által meghatározott $\alpha_{i1}a_1 + \dots + \alpha_{in}a_n$ vektor. Világos, hogy ilyen módon bármely lineáris transzformációhoz pontosan egy mátrix van hozzárendelve, és bármely mátrix pontosan egy lineáris transzformációhoz van hozzárendelve. Az így megállapított kölcsönösen egyértelmű leképezés izomorfizmussá válik, ha a lineáris transzformációk gyűrűjében értelmezett összeadást és szorzást éppen e kölcsönösen egyértelmű leképezés szerint átvisszük a mátrixok halmazára. Az endomorfizmusok (tehát egyszersmind a lineáris transzformációk) összegének, ill. szorzatának a 2. § elején adott definíciója szerint ez az átvitel a következő eredményre vezet. Két mátrix összegén azt a mátrixot értjük, amelynek i-edik sorában és k-adik oszlopában az összeadott mátrixok ugyanezen helyén álló elemek összege áll. Két mátrix szorzatát pedig úgy nyerjük, hogy a szorzatmátrix i-edik sorában és k-adik oszlopában álló elem a baloldali tényezőmátrix i-edik sorának (balról jobbra haladva) és a jobboldali tényezőmátrix k-adik oszlopának (felülről lefelé haladva) „belső szorzata" lesz.* — E legutóbbi megállapítás helyességét így láthatjuk be. Ha a B lineáris transzformációhoz hozzárendelt mátrix általános eleme β_{ik}, akkor a lineáris transzformációk szorzatának értelmezése szerint

$$\begin{aligned} a_i(AB) &= (a_iA)B = (\alpha_{i1}a_1 + \dots + \alpha_{in}a_n)B = \alpha_{i1}(a_1B) + \dots + \alpha_{in}(a_nB) = \\ &= \alpha_{i1}(\beta_{11}a_1 + \dots + \beta_{1n}a_n) + \dots + \alpha_{in}(\beta_{n1}a_1 + \dots + \beta_{nn}a_n) = \\ &= (\alpha_{i1}\beta_{11} + \alpha_{i2}\beta_{21} + \dots + \alpha_{in}\beta_{n1})a_1 + \dots + (\alpha_{i1}\beta_{1n} + \dots + \alpha_{in}\beta_{nn})a_n, \end{aligned}$$

s látjuk innen, hogy az $a_i(AB)$ vektornak az $a_1, \dots, a_n$ bázis szerinti előállításában a_k együtthatója

$$\alpha_{i1}\beta_{1k} + \alpha_{i2}\beta_{2k} + \dots + \alpha_{in}\beta_{nk},$$

azaz éppen a fentebb említett „belső szorzat"; s minthogy ennek a skaláris elemnek éppen az AB szorzatmátrix i-edik sorában és k-adik oszlopában kell állania, ilyen módon legutóbbi megállapításunk helyességét is igazoltuk.

A nyert eredmény alapján nem kell lényeges különbséget tennünk a V vektortér lineáris transzformációinak gyűrűje és a Δ ferdetest elemeiből felépülő n-szer n-es mátrixok imént értelmezett teljes gyűrűje között. A két gyűrű azonosnak tekinthető a V vektortér egy rendezett bázisának megadása alapján. Ezért a továbbiakban a lineáris transzformációk gyűrűjét is a teljes mátrixgyűrű szokásos Δ_n jelével jelöljük.

E dolgozatban főcélunk a gyűrűelmélet *Wedderburn—Artin*-féle struktúratételeinek bizonyítása. E tételekben tetszőleges ferdetestből felépülő teljes mátrixgyűrűk szerepelnek. A tételek bizonyítása éppen azáltal válik a klasszikus módszerekkel dolgozó bizonyításoknál jóval egyszerűbbé, s azáltal nyer geometriai szemléletességet, hogy módunkban lesz a továbbiakban a teljes mátrixgyűrű helyett egy vektortér lineáris transzformációinak gyűrűjéről beszélni.

E § további részét arra használjuk fel, hogy áttekintést szerzünk a Δ_n teljes mátrixgyűrű jobboldali ideáljainak rendszeréről. Ezek a vizsgálatok nem nélkülözhetetlenek a *Wedderburn—Artin*-féle struktúratételek bizonyításához (mert az, hogy Δ_n eleget tesz a minimumkövetelménynek jobboldali ideálokra, másképpen is bizonyítható) de teljesség kedvéért érdemes lesz részletesen foglalkozni velük, mivel a vektortérhez kapcsolódó szemléletes módszert szépen illusztrálják, és lényegesen több felvilágosítást nyujtanak a Δ_n gyűrű jobboldali ideáljairól, mint a klasszikus módszerek. Főcélunk annak bizonyítása, hogy *a Δ_n gyűrű egyszerű,* azaz nincsen Δ_n-től és 0-tól különböző ideálja, és hogy *a Δ_n gyűrű eleget tesz a minimumkövetelménynek jobboldali ideálokra nézve,* amin azt értjük, hogy Δ_n jobboldali ideáljainak bármely

$$J_1 \supset J_2 \supset J_3 \supset \dots \tag{24}$$

szigorúan fogyó lánca csak véges számú tagból állhat. Ennél azt az élesebb eredményt fogjuk nyerni, hogy egy ilyen lánc legfeljebb $n+1$ tagot tartalmazhat.

Hogy az alábbi bizonyítás egyszerűen áttekinthető legyen, előrebocsátunk néhány alkalmazásra kerülő fogalmat, és egy ezekre vonatkozó tételt. Legyen $A \in \Delta_n$ tetszőleges lineáris transzformációja a V vektortérnek. Jelöljük VA-val az összes xA vektorok halmazát, ha x befutja V-t. Ez a VA halmaz nyilván altere V-nek, s ezt A képterének, a VA altér rangját pedig egyszersmind az *A lineáris transzformáció rangjának* is nevezzük. Idézzük emlékezetünkbe, hogy VA pontosan megegyezik a V modulusnak az A endomorfizmushoz tartozó és a 2. § elején értelmezett képmodulusával. Ugyanott értelmeztük az A endomorfizmus magvát. Ezt a V vektortér esetében az A lineáris transzformáció *magterének* nevezzük s $K(A)$-val jelöljük. $K(A)$ mindazon $x \in V$ vektorok halmaza, amelyekre $xA = 0$. Nyilvánvaló, hogy $K(A)$ is altere V-nek, s e $K(A)$ altér rangját az A lineáris transzformáció *nullitásának* nevezzük. Fontos és önmagában is érdekes tény az, hogy *bármely lineáris transzformáció rangjának és nullitásának összege megegyezik a V vektortér n rangjával.*

Ennek bizonyítása céljából legyen az A lineáris transzformáció rangja r, nullitása pedig m. Ekkor

$$K(A) = \Delta b_1 + \dots + \Delta b_m, \tag{25}$$

ahol $b_1, \dots, b_m$ a $K(A)$ magtér egyik bázisa. Ezt az előző § egyik eredménye szerint kiegészíthetjük a V vektortér egyik

$$b_1, \dots, b_m, c_{m+1}, \dots, c_n \tag{26}$$

bázisává, úgyhogy a

$$b_1A, \dots, b_mA, c_{m+1}A, \dots, c_nA \tag{27}$$

képvektorok az A lineáris transzformáció VA képterének generátorrendszerét alkotják. E vektorok közül azonban az első m számú (25) miatt zérus. Így a (27) alatti utolsó $n-m$ számú vektor is generálja a VA képteret. Másrészt e vektorok már lineárisan függetlenek, mert

$$\beta_{m+1}(c_{m+1}A)+\dots+\beta_n(c_nA)=(\beta_{m+1}c_{m+1}+\dots+\beta_nc_n)A=0 \qquad (\beta_j \in \Delta)$$

esetén

$$\beta_{m+1}c_{m+1}+\dots+\beta_nc_n \in K(A)=\Delta b_1+\dots+\Delta b_m$$

(lásd (25)), ami a (26) alatti vektorok lineáris függetlensége miatt csak úgy lehetséges, hogy

$$\beta_{m+1}=\dots=\beta_n=0.$$

Megmutattuk ezzel, hogy a (27) alatti utolsó $n-m$ számú vektor lineárisan független generátorrendszere, azaz bázisa a VA képtérnek. Ez azt jelenti, hogy az A lineáris transzformáció r rangja megegyezik az $n-m$ számmal, azaz $r+m=n$, s éppen ezt kellett igazolnunk.

Most már rátérhetünk annak a tételnek bizonyítására, amely a Δ_n gyűrű jobboldali ideáljainak teljes rendszerét feltárja előttünk. Legyen W a V vektortér tetszőleges altere, és tekintsük a V vektortér mindazon D lineáris transzformációit, amelyekre $WD=0$, azaz amelyek magtere tartalmazza W-t. Az összes ilyen tulajdonságú B lineáris transzformációk nyilván jobboldali ideált alkotnak a Δ_n gyűrűben, s ezt a J jobboldali ideált röviden a W altér *annihilátorának* nevezzük. Bebizonyítjuk, hogy ilyen úton megkapjuk a Δ_n gyűrű valamennyi jobboldali ideálját, azaz: *Δ_n bármely jobboldali ideálja V egyik alterének annihilátora.* Ezzel egyidejűleg azt a szintén nem érdektelen eredményt is nyerjük, hogy *a Δ_n teljes mátrixgyűrű jobboldali főideálgyűrű*, amin azt értjük, hogy a Δ_n gyűrű bármely J jobboldali ideálja főideál, azaz van J-ben olyan A elem, amelyre $J=A\cdot\Delta_n$. (Az $A\cdot\Delta_n$ szorzat az összes $A\cdot F$ lineáris transzformációk halmazának jele, ahol F befutja Δ_n összes elemeit.)

Állításaink igazolása céljából tekintsük a Δ_n gyűrű valamely J jobboldali ideálját. A V vektortér mindama v elemei, amelyekre bármely, J-be tartozó B lineáris transzformáció esetén $vB=0$, egy W alteret alkotnak. Ezt a J jobboldali ideállal egyértelműen meghatározott alteret *a J által annullált altér*nek nevezzük. Nyilvánvaló, hogy ez a W altér része bármely olyan B lineáris transzformáció magterének, amelyre $B \in J$. Legyen W rangja r. Ekkor

$$W=\{b_1\}+\dots+\{b_r\}=\Delta b_1+\dots+\Delta b_r, \tag{28}$$

ahol $b_1, \dots, b_r$ a W altér egyik bázisa. A következőkben megmutatjuk, hogy *van J-ben olyan A lineáris transzformáció, amelynek rangja $n-r$.* Ebből az előrebocsátott állításunkból, mint rögtön látni fogjuk, közvetlenül adódik, hogy

$$J \subset W \text{ annihilátora} \subseteq A\cdot\Delta_n \subseteq J. \tag{29}$$

Ebben pedig már benne van mindkét előbbi tétel, hogy t. i. J megegyezik a V vektortér egyik alterének annihilátorával, és $J=A\cdot\Delta_n$, azaz J főideál. A (29) alatti állítások közül csupán az szorul indokolásra, hogy a W altér annihilátora része az $A\cdot\Delta_n$ transzformációhalmaznak (hiszen az, hogy J része W annihilátorának, a W altér definíciójából, $A\cdot\Delta_n\subseteqq J$ pedig a jobboldali ideál definíciójából nyilvánvaló, minthogy föltevésünk szerint $A\in J$). Az egyedül indokolásra szoruló állítást is könnyen beláthatjuk, felhasználva azt az előrebocsátott állításunkat, hogy van J-ben $n-r$ rangú A lineáris transzformáció.

Azt kell megmutatnunk, hogy a W altér annihilátora része az $A\cdot\Delta_n$ halmaznak, ami egyértelmű azzal az állítással, hogy *bármely olyan D lineáris transzformáció felírható*

$$D=A\cdot F \tag{30}$$

alakban (Δ_n alkalmas F elemével), amely eleme W annihilátorának, azaz amelyre (lásd (28))

$$b_1D=\ldots=b_rD=0 \tag{31}$$

teljesül. Ennek igazolása céljából legyen D tetszőleges olyan lineáris transzformáció, amely kielégíti (31)-et. Egészítsük ki a W altér $b_1,\ldots,b_r$ bázisát a V vektortér

$$b_1,\ldots,b_r,b_{r+1},\ldots,b_n \tag{32}$$

bázisává. Tudjuk, hogy bármely lineáris transzformáció egyértelműen meg van határozva a V vektortér egy bázisának képével. Ennélfogva (30) helyessége következik olyan F lineáris transzformáció létezéséből, amelyre

$$b_1D=b_1AF,\ \ldots,\ b_nD=b_nAF \tag{33}$$

teljesül. Emez egyenlőségek közül azonban az első r számú (31) miatt bármely $F\in\Delta_n$ lineáris transzformáció esetén teljesül, hiszen feltevésünk szerint $A\in J$, s így W definíciója értelmében $WA=0$, azaz $b_1A=\ldots=b_rA=0$. Eszerint csak olyan F lineáris transzformáció létezését kell bebizonyítanunk, amelynél a (33) alatti utolsó $n-r$ egyenlőség ki van elégítve. De ez már egészen könnyen megy. Mivel ugyanis a (32) alatti vektorok V bázisát alkotják, és $A\in J$ miatt $b_1A=\ldots=b_rA=0$, világos, hogy a

$$b_{r+1}A,\ldots,b_nA \tag{34}$$

vektorok generálják az $n-r$ rangú VA képteret. Ekkor azonban ezek a vektorok lineárisan függetlenek (mert ellenkező esetben $(n-r)$-nél kevesebb vektor, t. i. a (34) alatti vektorok egy valódi részhalmaza alkotná a VA képtér egyik bázisát, ami a rang invariancája miatt, és amiatt, hogy A rangja $n-r$, lehetetlen). Mármost mivel a (34) alatti vektorok lineárisan függetlenek, a V vektortér valamely bázisává egészíthetők ki, s így van olyan F lineáris transzformáció, amely az így nyert bázis elemeit (ezek között tehát a (34) alatti elemeket is) tetszőlegesen előírt elemekbe viszi át; ha az említett bázis elemei közül a (34) alatti elemekhez előírt képelemeknek rendre a

$$b_{r+1}D,\ldots,b_nD$$

vektorokat választjuk, akkor az ilyen módon megadható F lineáris transzformációra teljesül a (33) alatti utolsó $n-r$ egyenlőség. Így (29) bizonyítását befejeztük.

Csupán annak az előrebocsátott állításunknak igazolása van még hátra, hogy *amennyiben a Δ_n gyűrű J jobboldali ideálja által annullált* (28) *altér rangja r, van J-ben $n-r$ rangú lineáris transzformáció.* Ez pedig nyilvánvalóan következik az alábbi állításból: *Ha a J-beli B lineáris transzformáció rangja kisebb $n-r$-nél, akkor van J-ben olyan F lineáris transzformáció, amelynek rangja nagyobb B rangjánál.* Ennek bizonyítása céljából legyen a J-beli B lineáris transzformáció rangja k, és legyen $k<n-r$. Ekkor

$$VB=\Delta v_1'+\ldots+\Delta v_k' \qquad (k<n-r), \tag{35}$$

és

$$V=\Delta v_1'+\ldots+\Delta v_k'+\Delta v_{k+1}'+\ldots+\Delta v_n', \tag{36}$$

ahol $v_1',\ldots,v_k'$ a VB képtér bázisa, a legutóbbi egyenlet szerint pedig ezt a bázist kiegészítettük V egyik bázisává. Legyenek $v_1,\ldots,v_k$ inverz képei a $v_1',\ldots,v_k'$ vektoroknak a B lineáris transzformációnál, azaz olyan vektorok, amelyekre

$$v_1B=v_1',\ldots,v_kB=v_k'. \tag{37}$$

Szögezzük le, hogy $v_1,\ldots,v_k$ *lineárisan független vektorok,* mert csak ekkor lehetnek e vektorok képei B-nél lineárisan függetlenek. — Mármost mivel $v_1',\ldots,v_k',v_{k+1}',\ldots,v_n'$ bázisa V-nek (lásd (36)), van olyan $B_1\in\Delta_n$ lineáris transzformáció, amelyre

$$v_1'B_1=v_1,\ldots,v_k'B_1=v_k,\ v_{k+1}'B_1=\ldots=v_n'B_1=0 \tag{38}$$

teljesül. Ekkor azonban a $B\in J$ miatt szintén J-beli

$$D=BB_1\in J, \tag{39}$$

lineáris transzformáció (37) szerint kielégíti a

$$v_1D=v_1,\ldots,v_kD=v_k, \quad \text{és} \quad VD=\Delta v_1+\ldots+\Delta v_k \tag{40}$$

összefüggéseket, ahol az utóbbi a $v_1,\ldots,v_k$ vektorok előbb leszögezett lineáris függetlenségéből következik, valamint abból, hogy (38) miatt $VB_1=\{v_1,\ldots,v_k\}$ és így egyszersmind $VD=\{v_1,\ldots,v_k\}$ (lásd (39)). Minthogy D rangja (40) szerint k, a lineáris transzformációk rangjának és nullításának összegére vonatkozó tétel értelmében D nullitása $n-k$. Másrészt $k<n-r$, tehát D nullitása $>n-(n-r)=r$, úgyhogy D magtere nem része a (28) alatti r rangú W altérnek. Ez azt jelenti, hogy van olyan x vektor, amely eleme D magterének, de nem eleme W-nek:

$$xD=0, \qquad x\notin W, \tag{41}$$

azaz amelyhez van olyan

$$E\in J \tag{42}$$

lineáris transzformáció, hogy

$$xE=x'\neq 0.$$

(W értelmezése szerint ugyanis csak a W altér elemeit annullálják az összes J-beli lineáris transzformációk, úgyhogy a (41) szerint W-n kívüleső x vektorhoz található olyan J-beli E lineáris transzformáció, amely x-et nem nullára képezi le.) De ekkor (az x' vektor kiegészíthető V egy bázisává, azaz) alkalmas $E_1 \in \Delta_n$ lineáris transzformáció esetén $x'E_1 = x$, és így

$$xEE_1 = xC = x. \tag{43}$$

Minthogy másfelől (39) szerint $D \in J$, és (42) miatt $EE_1 = C \in J$, azt nyertük, hogy egyszersmind

$$D + C - DC = F \in J. \tag{44}$$

De ekkor az így előállított F lineáris transzformációra (40), (41) és (43) alapján

$$v_i F = v_i D + v_i C - v_i DC = v_i + v_i C - v_i C = v_i \qquad (i = 1, \ldots, k),$$

és

$$xF = xD + xC - xDC = 0 + x - 0 = x$$

teljesül. Ennélfogva a (44) szerint J-beli F lineáris transzformáció képtere tartalmazza a $k+1$ számú és (40), (41) miatt nyilván lineárisan független $v_1, \ldots, v_k, x$ vektorokat, s ilyen módon sikerült megmutatnunk, hogy van J-ben olyan F lineáris transzformáció, amelynek rangja nagyobb a B transzformáció k rangjánál. — Ezzel legutóbb kitűzött állításunkat igazoltuk, s így egyszersmind a fenti tételek bizonyítását valamennyi részletében befejeztük.

Nyert eredményeinket a következő tételben rögzíthetjük: *Ha a Δ_n gyűrű tetszőleges J jobboldali ideáljának annulált altere W, akkor W annihilátora éppen J.* — Ehhez hozzáfűzhetjük teljesség kedvéért a következő, sokkal könnyebben adódó megfordítást: *Ha a V vektortér tetszőleges W alterének annihilátora a Δ_n gyűrű J jobboldali ideálja, akkor a J által annulált altér éppen W.* Ennek helyessége abból következik, hogy ha W a V vektortér tetszőleges altere, és J a W altér annihilátora, akkor J annulálja W-t, de egyetlen W-n kívüleső z vektort sem annullál (ami azt jelenti, hogy van J-ben olyan A lineáris transzformáció, amelyre $zA \neq 0$). Amennyiben ugyanis z a V vektortérnek tetszőleges W-n kívüleső vektora (s ilyen van, mert nyilván szorítkozhatunk arra az esetre, amikor W valódi része V-nek, minthogy a $W = V$ esetben az előző mondat állítása semmitmondó), akkor a V vektortér (19) alatti előállítása szerint van V-nek olyan A lineáris transzformációja, amelyre $WA = UA = 0$, de $zA = z$. Ez az A lineáris transzformació eleme J-nek (hiszen annullálja W-t), s így megmutattuk, hogy V-nek bármely W-n kívüleső z vektorához található z-t nem annulláló J-beli lineáris transzformáció. Ezzel a fenti tétel megfordítása is bizonyítást nyert. — Mindezzel a következő tételt igazoltuk:

Az n dimenziós V vektortér összes altereinek rendszere és e vektortér lineáris transzformációból álló Δ_n gyűrű összes jobboldali ideáljainak rendszere között kölcsönösen egyértelmű vonatkozás áll fenn. E kölcsönösen egyértelmű vonatkozás által V bármely W alteréhez Δ_n-nek az a jobboldali ideálja van *hozzárendelve, amely éppen W annihilátora, Δ_n bármely J jobboldali ideáljához pedig V-nek J által annullált altere van hozzárendelve. Ez a kölcsönösen egyértelmű vonatkozás kiterjeszkedik V összes alterére és Δ_n összes jobboldali ideáljára, s ezenfelül szimmetrikus: Δ_n tetszőleges J jobboldali ideáljához hozzárendelt W altérnek éppen J a hozzárendelt jobboldali ideálja, és V tetszőleges W alteréhez hozzárendelt J jobboldali ideálnak éppen W a hozzárendelt altere.*

Külön kiemeljük, hogy *ha a Δ_n gyűrű J_1 és J_2 jobboldali ideáljaira $J_1 \supset J_2$, azaz ha J_2 valódi része J_1-nek, akkor a megfelelő alterekre $W_1 \subset W_2$ teljesül.* Ez a fentebb bebizonyított legsúlyosabb eredményből következik, mely szerint J_1 is, J_2 is annihilátora a V vektortér bizonyos, jól meghatározott W_1 ill. W_2 alterének. Mármost $J_1 \supset J_2$ miatt nyilvánvaló, hogy $W_1 \subseteq W_2$. De $W_1 = W_2$ lehetetlen, mert ebből $J_1 = J_2$ következnék, minthogy bármely altér egyértelműen meghatározza annihilátorát, s így megegyező altereknek az annihilátora is megegyező. — Ezzel egyszersmind igazoltuk azt is, hogy *a Δ_n teljes mátrixgyűrű eleget tesz a minimumkövetelménynek jobboldali ideálokra nézve,* azaz Δ_n jobboldali ideáljainak bármely (24) alatti szigorúan fogyó lánca csak véges számú tagból állhat. Ennél többet is kaptunk: nevezetesen azt, hogy a (24) alatti láncnak legfeljebb $n+1$ tagja lehet. Előbbi megjegyzésünk szerint ugyanis a (24) alatti jobboldali ideálok bármelyike a V vektortér egyik alterének annihilátora, és e megfelelő alterek egy (20) alatti szigorúan növekvő láncot alkotnak. Az utóbbi láncról azonban már tudjuk az előző §-ból, hogy legfeljebb $n+1$ tagja lehet.

Abból a fentebb bebizonyított tételből, amelyet e § főeredményének tekinthetünk, s mely szerint a Δ_n gyűrű bármely jobboldali ideálja V egyik alterének annihilátora, nyomban következik az is, hogy *a Δ_n teljes mátrixgyűrű egyszerű,* azaz nincsen Δ_n-től és 0-tól különböző (kétoldali) ideálja. Legyen ugyanis P tetszőleges kétoldali ideál a Δ_n gyűrűben. Minthogy P jobboldali ideál, P a V vektortér W alterének annihilátora. Ha $W=0$, akkor $P=\Delta_n$, mert a 0 altér annihilátora az egész Δ_n gyűrű. Legyen a továbbiakban $W \neq 0$. Ekkor W-ben van $y \neq 0$ vektor, s erre

$$y\Delta_n = V \tag{45}$$

érvényes. (Egy zérustól különböző vektort ugyanis a V vektortér bármely vektorába átvisz alkalmasan választott lineáris transzformáció.) Mármost minthogy P baloldali ideál is, $\Delta_n P \subseteq P$, és így (45) szerint azt kapjuk, hogy

$$0 = yP \supseteq y(\Delta_n P) = (y\Delta_n)P = VP.$$

($yP=0$ abból következik, hogy P a W altér annihilátora és $y \in W$.) Eszerint a P transzformációhalmaz bármely eleme annullálja az egész V vektorteret. Ekkor azonban P csak a zérustranszformációt tartalmazhatja, azaz $P=0$, mert bármely nem-zérus transzformáció V-nek valódi alterét annullálja. Ezzel megmutattuk, hogy a Δ_n gyűrű tetszőleges P ideálja vagy Δ_n, vagy 0, azaz Δ_n valóban egyszerű gyűrű.

Megemlítjük, hogy e § főeredménye, mely szerint Δ_n bármely jobboldali ideálja V egyik alterének annihilátora, valamint az ebből nyert kölcsönösen egyértelmű vonatkozás V altereinek rendszere és Δ_n jobboldali ideáljainak rendszere között, részletesen tárgyalva van az [5] és [11] művekben is. A mi fenti bizonyításunk azonban lényegesen egyszerűbb, és kisebb technikai apparátust igényel.

Megemlítjük továbbá, hogy a fentebb kifejtetthez hasonló elmélet építhető fel a Δ_n teljes mátrixgyűrű baloldali ideáljaira is, amelynek lényege az, hogy a V vektortér altereinek rendszere és a Δ_n gyűrű baloldali ideáljainak rendszere között ugyancsak kölcsönösen egyértelmű, mindkét rendszert kimerítő és szimmetrikus vonatkozás áll fenn a következő alapon: Mindama lineáris transzformációk, amelyek a V vektorteret egy kijelölt W altérbe képezik le (azaz amelyeknél a képtér $\subset W$) a Δ_n gyűrű egy meghatározott H baloldali ideálját alkotják, s ez lesz a W altérhez hozzárendelt baloldali ideál; tetszőlegesen megadott H baloldali ideálhoz pedig az összes VF képterek egyesítési halmazaként értelmezett altér tartozik hozzá ebben a hozzárendelésben, ahol F befutja a H-t alkotó összes lineáris transzformációkat. A Δ_n gyűrű baloldali ideáljainak emez elméletéből a fentiekhez hasonló úton következik, hogy Δ_n minimumkövetelménynek tesz eleget baloldali ideálokra nézve is, sőt: Δ_n baloldali ideáljainak szigorúan fogyó lánca legfeljebb $n+1$ tagot tartalmazhat.

4. §. Egyszerű és féligegyszerű gyűrűk

V-vel ebben a §-ban is mindig olyan n dimenziós vektorteret jelölünk, amelynek skaláris tartománya a Δ ferdetest, és Δ_n-nel továbbra is e vektortér összes lineáris transzformációinak gyűrűjét jelöljük. E gyűrűre a teljes mátrixgyűrű elnevezést is fogjuk használni. Ha egyszerre több $\Delta_{n_1}^{(1)}, \ldots, \Delta_{n_k}^{(k)}$ teljes mátrixgyűrű szerepel, akkor ezek közül bármelyik $\Delta_{n_i}^{(i)}$ egy $\Delta^{(i)}$ ferdetesttel mint skaláris tartománnyal ellátott n_i dimenziójú vektortér összes lineáris transzformációiból álló gyűrűt, vagy (ami lényegében ugyanaz) a $\Delta^{(i)}$ ferdetest elemeiből felépíthető n_i-szer n_i-s mátrixok teljes gyűrűjét jelöli. Az $i=1,\ldots,k$ esetekben mind a $\Delta^{(i)}$ ferdetestek, mind az n_i rangszámok különbözők lehetnek. (Az értelmezésből következik, hogy $n_i=1$ esetén $\Delta_{n_i}^{(i)}=\Delta^{(i)}$.)

Mielőtt továbbmennénk, mindenekelőtt egy gyűrű direkt összegként való előállításának fogalmát kell bevezetnünk. Ez speciális esetként benne van abban az általánosabb fogalomban, amelyet a 2. §-ban értelmeztünk (lásd a (9) és (10) egyenleteket), s amely az operátormodulus direkt összegre való felbontását illeti. A számunkra most szükséges fogalom úgy jön létre az ottaniból, hogy a tetszőleges R gyűrűt önmagával mint baloldali és jobboldali operátortartománnyal egyaránt ellátott operátormodulusnak tekintjük. Ennélfogva *az R gyűrű akkor és csak akkor bontható fel*

$$R=P_1+\ldots+P_k \tag{46}$$

alakban direkt összegre, ha R mint modulus (azaz additív Abel-féle csoport) *felbontható $P_1, \ldots, P_k$ additív alcsoportjainak direkt összegére, s az itt szereplő P_i additív alcsoportok* valamennyien megengedhető részmodulusok a baloldali R operátortartományra és a jobboldali R operátortartományra nézve egyaránt, azaz: *valamennyien kétoldali ideálok R-ben.* Közvetlenül belátható, hogy mindez ekvivalens az alábbi követelménnyel: *Az R gyűrű akkor és csak akkor bontható fel a* (46) *alatti direkt összegre, ha az R gyűrű $P_1, \ldots, P_k$ részhalmazai olyan tulajdonságúak, hogy R bármely r eleme előállítható, mégpedig pontosan egyféleképpen*

$$r = r_1 + \ldots + r_k \qquad (r_i \in P_i) \tag{47}$$

alakban, és emez előállítás mellett a gyűrűelemek összeadása és szorzása „komponensenként" végezhető, azaz ha

$$r' = r'_1 + \ldots + r'_k \qquad (r'_i \in P_i)$$

ugyancsak tetszőleges elem R-ben, akkor $r + r'$ illetve rr' egyértelmű felbontása a (46)*-nak megfelelő komponensekre*

$$r + r' = (r_1 + r'_1) + \ldots + (r_k + r'_k) \qquad (r_i + r'_i \in P_i)$$

illetve

$$rr' = r_1 r'_1 + \ldots + r_k r'_k \qquad (r_i r'_i \in P_i)$$

alakban adható meg. Közvetlenül látható, hogy az utóbbi követelmény maga után vonja azt, hogy a (46)-ban szereplő P_i részhalmazok additív alcsoportok, sőt kétoldali ideálok legyenek R-ben, s a (47) alatti előállítás akkor és csak akkor egyértelmű, ha az R gyűrű zéruseleme csak $0 = 0 + \ldots + 0$ alakban állítható elő a (47) szerint előírt módon. Ennek a követelménynek ismét van egy ekvivalens formája: *bármelyik P_i részmodulusnak a többi által generált $\{P_1, \ldots, P_{i-1}, P_{i+1}, \ldots, P_k\}$ részmodulussal közös eleme csak a zérus legyen.* (A $P_1, \ldots, P_s$ részmodulusok által generált részmodulus az összes $r_1 + \ldots + r_s$ elemek halmaza, ahol $r_i \in P_i$.)

Könnyen beláthatjuk azt is, hogy ha $P'_1, \ldots, P'_k$ tetszőleges gyűrűk, akkor mindig konstruálható olyan R gyűrű, amely tartalmaz mindegyik P'_i-höz egy azzal izomorf P_i gyűrűt kétoldali ideálként, éspedig oly módon, hogy R (46) szerint felbontható e $P_1, \ldots, P_k$ ideálok direkt összegére. Az így konstruált R gyűrűről azt mondjuk, hogy *a tetszőlegesen megadott $P'_1, \ldots, P'_k$ gyűrűk direkt összegeként* állítottuk elő. — Hogy mindig van ilyen R gyűrű, azt így mutathatjuk meg. Adva vannak a tetszőleges $P'_1, \ldots, P'_k$ gyűrűk, s definiáljuk R-et az összes $(x_1, \ldots, x_k)$ alakú rendszerek halmazaként, ahol $x_i \in P'_i$ $(i = 1, \ldots, k)$. Az összes így képezhető rendszereket tekintve az R halmaz elemeinek, R-ben egyenlőséget, összeadást és szorzást definiálhatunk a következőképpen:

$$(x_1, \ldots, x_k) = (y_1, \ldots, y_k) \qquad (x_i, y_i \in P'_i)$$

akkor és csak akkor álljon, ha $x_i = y_i$ $(i = 1, \ldots, k)$. Legyen továbbá

$$(x_1, \ldots, x_k) + (y_1, \ldots, y_k) = (x_1 + y_1, \ldots, x_k + y_k),$$
$$(x_1, \ldots, x_k)(y_1, \ldots, y_k) = (x_1 y_1, \ldots, x_k y_k).$$

Ilyen módon gyűrűvé lett az R halmaz, s világos, hogy R mindama

$$(0, \ldots, 0, x_i, 0, \ldots, 0) \qquad (x_i \in P_i') \quad (48)$$

elemei, amelyek i-edik komponense P_i' tetszőleges eleme, az összes többi komponense viszont zérus, a P_i' gyűrűvel izomorf P_i (kétoldali) ideált alkotnak R-ben. Az így értelmezett P_i $(i = 1, \ldots, k)$ kétoldali ideáloknak mármost nyilvánvalóan direkt összege az R gyűrű, a (46) összefüggéssel kapcsolatban megadott értelmezés szerint. Ezzel befejeztük legutóbbi állításunk bizonyítását. — Megemlítjük még, hogy a (48) alatti elemet természetesnek látszik azonosítani az x_i elemmel, amivel azt érjük el, hogy maguk az egymástól függetlenül megadott $P_1', \ldots, P_k'$ gyűrűk is beágyazást nyernek az előbb konstruált R gyűrűbe, mint R részgyűrűi (sőt ideáljai). Ennélfogva (P_i' helyett a vele azonosított P_i gyűrűt írva) megállapodhatunk abban, hogy az egymástól függetlenül, teljesen tetszőlegesen (tehát pl. nem okvetlenül egy közös, tartalmazó gyűrű részgyűrűiként) megadott $P_1, \ldots, P_k$ gyűrűknek az előbb leírt módon „külsőleg" konstruált direkt összege már részgyűrűiként (sőt ideáljaiként) tartalmazza e $P_1, \ldots, P_k$ gyűrűket, és így egyszersmind megegyezik e részgyűrűk (46) alatti értelemben definiált „belső" direkt összegével.

Ez a konstrukció számunkra abban az esetben szükséges, amikor

$$R = \Delta_{n_1}^{(1)} + \cdots + \Delta_{n_k}^{(k)}, \quad (49)$$

azaz, ha az R gyűrű k számú teljes mátrixgyűrű direkt összege. Következik a fentiekből, hogy k számú $\Delta^{(1)}, \ldots, \Delta^{(k)}$ ferdetest, illetve $n_1, \ldots, n_k$ pozitív egész szám tetszésszerinti előírása esetén mindig van olyan R gyűrű, amely előállítható (49) alakban, azaz amely a $\Delta_{n_1}^{(1)}, \ldots, \Delta_{n_k}^{(k)}$ teljes mátrixgyűrűk direkt összege. Most megmutatjuk, hogy ez *az R gyűrű minimumkövetelménynek tesz eleget jobboldali ideálokra nézve,* közben csak azt használva fel, hogy mindegyik $\Delta_{n_i}^{(i)}$ direkt komponens egységelemes gyűrű és kielégíti a minimumkövetelményt (amit már tudunk az előző §-ból).

Állításunk igazolása céljából tekintsük a (49) alatti R gyűrű jobboldali ideáljainak valamely

$$J_1 \supset J_2 \supset \cdots \supset J_s \supset \cdots \quad (50)$$

szigorúan fogyó láncát. Megmutatjuk, hogy e lánc bármely J_s tagja (mint gyűrű) előállítható olyan

$$J_s = J_s^{(1)} + \cdots + J_s^{(k)} \quad (51)$$

direkt összeg alakjában, ahol $J_s^{(i)}$ a $\Delta_{n_i}^{(i)}$ gyűrűnek jobboldali ideálja $(i = 1, \ldots, k)$. Ebből már nyilvánvalóan következik, hogy az (50) alatti lánc csak véges számú, sőt legfeljebb

$$(n_1 + 1)(n_2 + 1) \cdots (n_k + 1)$$

számú tagból állhat, hiszen $J_{s-1} \supset J_s$ miatt az (51) alatti direkt komponensek egyike, pl. $J_s^{(i)}$, valódi része a J_{s-1} jobboldali ideál megfelelő $J_{s-1}^{(i)}$ direkt komponensének, és ez a „fogyás" az i index esetében legfeljebb n_i+1 számú alkalommal következhetik be, minthogy $J_{s-1}^{(i)}$ is, $J_s^{(i)}$ is jobboldali ideálok a $\Delta_{n_i}^{(i)}$ teljes mátrixgyűrűben, amelyről már tudjuk az előző § alapján, hogy jobboldali ideáljainak bármely szigorúan fogyó lánca legfeljebb n_i+1 tagú lehet. — Végül azt, hogy *a* (49) *alatti R gyűrű bármely J_s jobboldali ideálja előállítható az* (51) *direkt összeg alakjában,* így láthatjuk be. A J_s jobboldali ideál része az R gyűrűnek, tehát bizonyos

$$x = x_1 + \cdots + x_k \qquad (x_i \in \Delta_{n_i}^{(i)}) \tag{52}$$

elemek halmaza. Világos, hogy J_s összes x elemeinek (52) alatti alakjában szereplő x_i (i-edik) komponensei a $\Delta_{n_i}^{(i)}$ gyűrű egy $J_s^{(i)}$ jobboldali ideálját alkotják. Azt kell belátnunk, hogy $x_i \in J_s$, mert ebből

$$J_s^{(i)} \subseteq J_s,$$

és így (51) helyessége következik. De ha a $\Delta_{n_i}^{(i)}$ gyűrű egységelemét e_i-vel jelöljük, akkor ennek (mint R elemének) a (49) alatti direkt felbontás szerinti előállítása

$$e_i = 0 + \cdots + 0 + e_i + 0 \cdots + 0, \tag{53}$$

és így a direkt összeg egyik tulajdonsága következtében az (52) és (53) alatti elemek szorzata

$$xe_i = x_1 \cdot 0 + \cdots + x_i e_i + \cdots + x_k \cdot 0 = x_i e_i = x_i.$$

Ám $x \in J_s$, és J_s jobboldali ideálja az R gyűrűnek. Ennélfogva $xe_i \in J_s$, azaz $x_i \in J_s$. Ezzel a bizonyítást befejeztük.

Most még egy másik fontos tulajdonságát igazoljuk a (49) alatti R gyűrűnek. Ennek értelmezéséhez azonban szükséges előbb az ideálok szorzatát definiálnunk. Ha H és J tetszőleges jobboldali ideálok valamely R gyűrűben, akkor ezek $H \cdot J$-vel jelölt *szorzatán* az összes (véges tagszámú)

$$h_1 j_1 + \cdots + h_r j_r$$

alakú összegek halmazát értjük, ahol $h_1, \ldots, h_r$ a H jobboldali ideál, $j_1, \ldots, j_r$ pedig a J jobboldali ideál tetszőleges elemei. Nyilvánvaló, hogy *ha H és J jobboldali ideálok R-ben, akkor $H \cdot J$ is jobboldali ideálja R-nek; ha viszont H baloldali, J pedig jobboldali ideál, akkor a fenti módon értelmezett $H \cdot J$ szorzat kétoldali ideál az R gyűrűben.* Ebből speciális esetként következik, hogy kétoldali ideálok szorzata is kétoldali ideál. — Az adott értelmezésből minden további nélkül következik, hogy kettőnél több (féloldali vagy kétoldali) ideál szorzata is meg van határozva a sorrend szerint megadott ideálokkal, mert az ideálok szorzása asszociatív művelet. Több ideál szorzatának speciális esete az *ideál hatványa.* Az R gyűrű valamely J jobboldali ideálját akkor nevezzük *nilpotens*nek, ha J-nek van olyan hatványa, amely (az egyetlen elemből) álló zérusideál, azaz ha van olyan m természetes szám, amelyre $J^m = (0)$.

Mármost bebizonyítjuk, hogy *a (49) alatti R gyűrűben nincsen (0)-tól különböző nilpotens jobboldali ideál.* Ennek igazolása céljából legyen J tetszőleges olyan jobboldali ideál az R gyűrűben, amely nem a zérusideál. Megmutatjuk, hogy ekkor

$$J^m \neq (0) \tag{54}$$

teljesül bármely m természetes számra. Láttuk az előbb, hogy J előállítható ((51)-nek megfelelően) olyan

$$J = J^{(1)} + \cdots + J^{(k)} \tag{55}$$

direkt összegként, amelynek $J^{(i)}$ komponense a $\varDelta_{n_i}^{(i)}$ gyűrű valamely jobboldali ideálja ($i = 1, \ldots, k$). Mivel $J \neq (0)$, van olyan i, amelyre az (55) jobboldalán szereplő $J^{(i)}$ komponens nem a zérusideál:

$$J^{(i)} \neq (0). \tag{56}$$

Elég azt megmutatnunk, hogy bármely m-re

$$J^{(i)m} \neq (0) \tag{57}$$

teljesül, mert ebből nyilvánvalóan következik (54) helyessége, minthogy $J^{(i)m}$ része J^m-nek ((55) és az ideálok szorzatára előbb adott definíció értelmében). Mármost mivel $J^{(i)}$ jobboldali ideál a $\varDelta_{n_i}^{(i)}$ gyűrűben, az előbbiek szerint *a $\varDelta_{n_i}^{(i)} J^{(i)}$ szorzat kétoldali ideálja ugyanennek a gyűrűnek.* Világos az is, hogy (56) miatt $\varDelta_{n_i}^{(i)} J^{(i)} \neq (0)$, mert $\varDelta_{n_i}^{(i)}$ egységelemes gyűrű, és így a $\varDelta_{n_i}^{(i)} J^{(i)}$ kétoldali ideálban szerepelnek elemekként $J^{(i)}$ elemei. Ezért szükségképpen

$$\varDelta_{n_i}^{(i)} J^{(i)} = \varDelta_{n_i}^{(i)}$$

teljesül, mivel megmutattuk az előző §-ban, hogy $\varDelta_{n_i}^{(i)}$ egyszerű gyűrű, azaz (0)-tól különböző kétoldali ideálja csak egy van: önmaga. Legutóbbi egyenlőségünk mindkét oldalát ismételten szorozva $J^{(i)}$-vel, és ismételten alkalmazva is azt,

$$\varDelta_{n_i}^{(i)} J^{(i)2} = \varDelta_{n_i}^{(i)} J^{(i)} = \varDelta_{n_i}^{(i)}, \ \varDelta_{n_i}^{(i)} J^{(i)3} = \varDelta_{n_i}^{(i)} J^{(i)} = \varDelta_{n_i}^{(i)}, \ldots$$

azaz általában

$$\varDelta_{n_i}^{(i)} J^{(i)m} = \varDelta_{n_i}^{(i)}$$

adódik bármely m-re. Ebből pedig (57) helyessége nyilvánvaló.

Az eddigiek alapján már meg tudjuk fogalmazni az első *Wedderburn—Artin*-féle struktúratételt, amely azt mondja ki, hogy a (49) alatti R gyűrű imént igazolt két tulajdonsága jellemző a (49) alatti alakban előállítható gyűrűkre. A tétel könnyebben fogalmazható meg, ha bevezetjük a következő értelmezést: az olyan gyűrűt, amely teljesíti a jobboldali minimumkövetelményt, és nem tartalmaz 0-tól különböző nilpotens jobboldali ideált, *féligegyszerűnek* nevezzük. (Ezt az elnevezést éppen az alábbi tétel indokolja, amely szerint az említett tulajdonságokkal rendelkező gyűrűk közel állanak az egyszerű gyűrűkhöz, amennyiben véges számú egyszerű gyűrű direkt összegére bonthatók.) E fogalmat felhasználva, így mondható ki az

Első Wedderburn—Artin-féle struktúratétel: *Egy gyűrű akkor és csak akkor féligegyszerű, ha véges számú teljes mátrixgyűrű direkt összege.*

Mivel az előbb már megmutattuk, hogy a (49) alatti R gyűrű féligegyszerű, az alábbiakban a tétel „csak akkor" állítását kell már csupán igazolnunk. Ezen van a tétel igazi súlya, s ezt az 5. és 6. §-ban bizonyítjuk be.

Az előbb megfogalmazott tételnek speciális esete a

Második Wedderburn—Artin-féle struktúratétel: *Jobboldali ideálokra vonatkozó minimumkövetelménynek eleget tevő gyűrű akkor és csak akkor egyszerű, ha izomorf egy teljes mátrixgyűrűvel, vagy egy prímszám rendű zérógyűrűvel.*

Itt meg kell jegyeznünk, hogy e helyen gyűrű rendjén a gyűrű elemeinek számosságát értjük, *zérógyűrűnek* pedig az olyan gyűrűt nevezzük, amelyben bármely két elem szorzata zérus. Nyilvánvaló, hogy prímszámrendű zérógyűrű mindig egyszerű. Az előző §-ban azt is láttuk, hogy a teljes mátrixgyűrű egyszerű. Ennélfogva az utóbbi tétel esetében is elegendő a továbbiakban a tétel „csak akkor" állítását igazolnunk, amely könnyen fog következni az első struktúratételből.

Végül megemlítjük, hogy ha a jobboldali ideálokra kimondott követelményeket következetesen baloldali ideálokra fogalmazzuk át (azaz ha pl. féligegyszerűnek a baloldali ideálokra nézve minimumkövetelményt kielégítő és nilpotens baloldali ideál nélküli gyűrűt nevezzük), a fenti két struktúratétel akkor is szóról-szóra érvényes, és a bizonyítás is lényegében hasonló módon végezhető. Mégis valamivel egyszerűbb technikailag a jobboldali ideálokkal dolgozni, mert akkor közvetlenül azt kapjuk, hogy egy féligegyszerű gyűrű teljes mátrixgyűrűk direkt összegével izomorf. Viszont baloldali ideálokra megfogalmazott követelmények esetén izomorfizmus helyett antiizomorfizmus jön ki, s az ebből eredő csekély nehézséget még külön kell leküzdeni. Ezért fogalmaztuk mi e dolgozatban az említett követelményeket jobboldali ideálokra.

5. §. Jacobson tétele

Ebben a §-ban *Jacobson* ama nevezetes tételét bizonyítjuk be, amely rendkívül nagy mértékben megkönnyíti a *Wedderburn—Artin*-féle struktúratételek bizonyítását a régebbi bizonyításokhoz képest, s egyúttal geometriai szemléletessége által a legmélyebb betekintést is adja a tárgyalt problémák lényegébe. *Jacobson* eredeti bizonyítása megtalálható [9]-ben és [11]-ben. Mi az alábbiakban az *Artin* és *Tate* által egyszerűsített bizonyítást tárgyaljuk (lásd [4]), néhány technikai részlet tekintetében még tovább egyszerűsítve ezt a bizonyítást.

A tétel megfogalmazása előtt felhívjuk a figyelmet azokra az alapfogalmakra, amelyeket az operátormodulusokkal kapcsolatban a 2. §-ban részletesen megbeszéltünk. A tételben egy tetszőleges V modulus (additív Abel-féle csoport) szerepel, amelynek egy R gyűrű jobboldali operátortartománya. Nem kívánjuk meg, hogy R egységelemes gyűrű legyen, csak annyit kötünk ki, hogy $VR \neq 0$ teljesüljön, azaz hogy R „ne triviálisan operáljon" a V moduluson. Ez azt jelenti, hogy van olyan $v \in V$ és $a \in R$, amelyekre $va \neq 0$. Megkívánjuk továbbá, hogy a V modulus irreducibilis legyen az R operátortartományra nézve, ami — mint tudjuk — azt jelenti, hogy V-nek nincsen más megengedhető részmodulusa (azaz R-részmodulusa), mint V és 0.

Szerepelnek az alábbiakban a V modulusnak azok az endomorfizmusai is, amelyeket az R operátorgyűrű elemei indukálnak. Azt az endomorfizmust, amelyet az $a \in R$ elem indukál, a megfelelő latin nagybetűvel jelöljük, azaz a szóbanforgó endomorfizmus esetében így:

$$x \to xA = xa \qquad (x \in V;\ a \in R). \tag{58}$$

Újból hangsúlyozzuk azonban, hogy az R operátorgyűrű a elemét nem azonosíthatjuk az általa indukált A endomorfizmussal, mert R különböző elemei is indukálhatják ugyanazt az endomorfizmust. Ezért *az* (58) *szerinti*

$$a \to A \qquad (a \in R) \tag{59}$$

leképezés általában nem izomorfizmus, hanem csak *homomorfizmus az R operátorgyűrű és az R elemei által indukált endomorfizmusok gyűrűje között.*

A tétel kimondása előtt még egy fontos fogalmat kell bevezetnünk. A tétel egyik állítása szerint a V modulus egyszersmind vektortérnek is tekinthető egy jól meghatározott Δ ferdetestre mint skaláris tartományra nézve. (A V tér dimenziószáma nem szükségképpen véges.) Legyen n tetszőleges természetes szám, s tekintsünk n számú

$$x_1, \ldots, x_n \tag{60}$$

lineárisan független vektort, továbbá ugyancsak n számú teljesen tetszésszerinti

$$y_1, \ldots, y_n \tag{61}$$

vektort a V vektortérben. Mármost a V vektortér lineáris transzformációinak bizonyos rendszerét *n-szeresen tranzitív*nak nevezzük, ha V bármely (61) alatti vektoraihoz és bármely (60) alatti lineárisan független vektoraihoz van olyan A lineáris transzformáció a tekintett rendszerben, amelyre

$$x_1 A = y_1, \ldots, x_n A = y_n. \tag{62}$$

Ha pedig egy lineáris transzformáció-rendszer n-szeresen tranzitív a $n = 1, 2, 3, \ldots$ értékek mindegyikére, akkor e rendszert *sűrű*nek nevezzük. Világos, hogy véges dimenziójú vektortér lineáris transzformációinak valamely rendszere akkor és csak akkor sűrű, ha a rendszer a vektortér bármely lineáris transzformációját tartalmazza. (Ha a vektortér m dimenziós, akkor összes lineáris transzformációinak rendszere a fenti definíció szerint $n > m$ esetén is n-szeresen tranzitív, hiszen ekkor nincsen n számú lineárisan független vektor, úgyhogy a teljesítendő követelmény „üres".) Viszont olyan vektortérben, amelyben van végtelen sok lineárisan független vektor, lineáris transzformációknak nem teljes rendszere is lehet sűrű.

Az alábbiakban félreérthetőség elkerülése céljából a V modulus elemeit mindig (esetleg indexelt) x, y betükkel, az R gyűrű elemeit pedig az a, b, c betűkkel jelöljük. — Ezek előrebocsátása után a következőképpen szól

Jacobson tétele: *Legyen V irreducibilis R-modulus az R gyűrűre mint jobboldali operátortartományra nézve, és legyen $VR \neq 0$. Ekkor:*

1. *a V modulus összes R-endomorfizmusai egy Δ ferdetestet alkotnak, amely operátortartománya V-nek;*

2. *a V modulus e Δ ferdetestre mint skaláris tartományra nézve vektortér, és az R operátorgyűrű elemei által indukált* (58) *alatti endomorfizmusok e V vektortér lineáris transzformációinak sűrű rendszerét alkotják.*

3. *Ha R kielégíti a minimumkövetelményt a jobboldali ideálokra nézve, akkor V véges dimenziójú vektortér.*

Bizonyítás. A tétel 1. állítása tulajdonképpen *Schur* lemmájának tartalma, és így ennek bizonyításánál nincsen szükségünk a $VR \neq 0$ kikötésre, csak arra, hogy V irreducibilis modulus R-re nézve. Mint a 2. §-ból tudjuk, a V modulus összes R-endomorfizmusai egységelemes Δ gyűrűt alkotnak. Így csupán azt kell bebizonyítanunk, hogy e Δ gyűrű bármely zérustól különböző elemének van reciproka, vagyis mással azt, hogy ha $x \to xD$ a V modulusnak 0-tól különböző R-endomorfizmusa, akkor ez az $x \to xD$ endomorfizmus automorfizmus. Ehhez két dolgot kell belátnunk. Egyik az, hogy a D endomorfizmusnál a VD képmodulus a teljes V modulus; másik az, hogy a D endomorfizmus magva (azaz az $xD = 0$ követelményt kielégítő $x \in V$ elemek halmaza) a 0 modulus. Ami az előbbit illeti, világos, hogy a VD képtér megengedhető részmodulus az R operátorgyűrűre nézve, mert abból, hogy $x \to xD$ R-endomorfizmus (azaz az R operátortartomány elemeivel felcserélhető endomorfizmus),

$$(VD)a = (Va)D \subseteq VD$$

következik bármely $a \in R$ elemre. Minthogy pedig V irreducibilis R-modulus, $VD = V$, hiszen VD nem lehet egyenlő a másik megengedhető részmodulusával V-nek (t. i. 0-val), mert ezt a lehetőséget kizártuk azzal a kikötéssel, hogy $x \to xD$ nem a zérusendomorfizmus. — Ami viszont a tekintett endomorfizmus magvát illeti, ugyancsak világos, hogy ez is megengedhető részmodulus, mivel $xD = 0$ esetén $0 = xDa = (xa)D$ is teljesül bármely $a \in R$ elemre, úgyhogy a mag valamely x elemével együtt xa is mindig benne van a magban. A mag azonban nem lehet a teljes V modulus, mert ez az eset csak a zérusendomorfizmusnál következhetik be, úgyhogy a mag csak a 0 modulus lehet. Ezzel befejeztük annak bizonyítását, hogy a V modulus összes R-endomorfizmusai egy Δ ferdetestet alkotnak.

Mármost az így nyert Δ ferdetest természetesen adódó módon operátortartománya a V modulusnak (hiszen az xD szorzat bármely $x \in V$ és $D \in \Delta$ esetén eleve definiálva van, minthogy D endomorfizmusa V-nek). Ezért V a továbbiakban nemcsak R-modulusnak tekinthető, hanem vektortérnek is, mégpedig olyan vektortérnek, amelynek skaláris tartománya az imént nyert Δ ferdetest. Egyszerűbb áttekinthetőség és a 2. §-ban már megszokott jelölésmód kedvéért célszerű lesz a továbbiakban a Δ ferdetest elemeit, mint skalárisokat görög kisbetűkkel jelölni, s *Δ-t baloldali operátortartományként* írni. (Pontosan meggondolva a dolgot, ez tulajdonképpen azt is maga után vonja, hogy az eredeti Δ ferdetest helyett egy vele antiizomorf ferdetestre térünk át, mert ezzel a módosítással együttjár az, hogy két Δ-beli elem szorzataként mindig az ellenkező sorrendben vett tényezők szorzata lép fel. Ez azonban nem okoz semmi bajt, mert ferdetestnek antiizomorf képe is ferdetest, és mi a továbbiakban azt a ferdetestet jelöljük Δ-val, amely a fentebb nyert ferdetestnek antiizomorf képe.)

Eddigi eredményeinket abban foglalhatjuk össze, hogy a V modulust a továbbiakban nem csak jobboldali R-modulusnak, hanem egyszersmind baloldali Δ-modulusnak is tekinthetjük egy jól meghatározott Δ ferdetestre nézve. Δ elemei a V modulus R-endomorfizmusai, azaz az R-beli operátorokkal felcserélhető endomorfizmusai. Minthogy megállapodásunk szerint Δ elemeit baloldali operátorokként írjuk és görög kisbetűkkel jelöljük, bármely $\alpha \in \Delta$, $x \in V$, $a \in R$ elemekre évényes az

$$(\alpha x)a = \alpha(xa)$$

összefüggés, vagy az R-beli a operátorok helyett az általuk indukált A endomorfizmusokat szerepeltetve (lásd (58)):

$$(\alpha x)A = \alpha(xA). \tag{63}$$

Ebből következik, hogy az R gyűrű elemei által indukált (58) alatti endomorfizmusok *lineáris transzformációi* V-nek, mint a Δ skaláris tartománnyal ellátott vektortérnek. — Hangsúlyozzuk másfelől, hogy *a V modulus bármely olyan endomorfizmusa, amely az R elemei által indukált* (58) *alatti lineáris transzformációk mindegyikével felcserélhető, egy Δ-beli α elemmel létesített*

$$x \to \alpha x \qquad (x \in V) \tag{64}$$

leképezés. Ez Δ definíciójából következik.

Most rátérünk a *Jacobson* tételében kimondott 2. és 3. állítás bizonyítására. Ezeket a következő segédtétel alapján igazolhatjuk legegyszerűbben:

Segédtétel. *Ha $x_1, \ldots, x_n$ lineárisan független vektorok a Δ skaláris tartománnyal ellátott V vektortérben, akkor van olyan $a \in R$, amelyre*

$$x_1 a = \cdots = x_{n-1} a = 0, \tag{65}$$

de

$$x_n a \neq 0. \tag{66}$$

E segédtétel bizonyítása előtt megmutatjuk, hogy egyszerűen következik ebből *Jacobson* tételének 2. és 3. állítása.

R mindamaz elemei, amelyekre (65) teljesül, nyilván egy J jobboldali ideált akotnak az R gyűrűben, és a segédtétel szerint van olyan $a \in R$ elem, amelyre (66) érvényes. De akkor $x_n J \neq 0$ ($x_n J$-vel jelölve az $x_n a$ elemek halmazát, ha a befutja J összes elemeit). Másfelől $x_n J$ nyilván megengedhető részmodulusa V-nek R-re nézve (hiszen ha $a \in J$, akkor $x_n a$-val együtt $x_n ab$ is eleme $x_n J$-nek tetszőleges $b \in R$ esetén, minthogy J jobboldali ideál R-ben), s így V irreducibilis R-modulus volta miatt $x_n J = V$. Ennélfogva tetszőlegesen előírt $y_n \in V$ elemhez van olyan $a_n \in J$, amelyre

$$x_n a_n = y_n \quad \text{és} \quad x_1 a_n = \cdots = x_{n-1} a_n = 0$$

teljesül. Hasonlóan következik a segédtételből (az n index helyett i-t véve) olyan $a_i \in R$ elem létezése, amelyre

$$x_i a_i = y_i, \quad x_1 a_i = \cdots = x_{i-1} a_i = x_{i+1} a_i = \cdots = x_n a_i = 0, \tag{67}$$

$(i = 1, 2, \ldots, n)$. Az így kapott $a_1, \ldots, a_n$ elemek

$$a = a_1 + \cdots + a_n$$

összege által indukált (58) alatti lineáris transzformációja a V vektortérnek (67) szerint kielégíti (62)-t. Ezzel *Jacobson* tételének 2. állítása bizonyítást nyert.

A 3. állítás bizonyítása céljából azt mutatjuk meg, hogy ha a V vektortér nem véges dimenziójú, akkor az R operátorgyűrű nem elégíti ki a jobboldali minimumkövetelményt. Tegyük fel tehát, hogy V nem véges dimenziójú vektortér. Ekkor megadható benne végtelen sok

$$x_1, x_2, x_3 \ldots, x_n, \ldots$$

lineárisan független vektor. Jelöljük J_{n-1}-gyel az R gyűrű összes olyan a elemeinek halmazát, amelyre (65) teljesül ($n = 2, 3, 4, \ldots$). J_{n-1} nyilván jobboldali ideál R-ben, és (66) miatt J_n valódi része J_{n-1}-nek (hiszen a (65)-öt és (66)-ot kielégítő a elemre $a \in J_{n-1}$, de $a \notin J_n$). Ennélfogva a

$$J_1 \supset J_2 \supset J_3 \supset \cdots \supset J_n \supset \cdots$$

szigorúan fogyó jobboldali ideál-lánc végtelen sok tagú, tehát R valóban nem teljesíti a jobboldali minimumkövetelményt.

Így már csak az előrebocsátott segédtételt kell igazolnunk, s ezt n szerinti teljes indukcióval végezhetjük. Legyen először $n = 1$. Ekkor $x_1 \neq 0$ (hiszen egyetlen vektort tartalmazó rendszer akkor és csak akkor lineárisan független, ha a vektor $\neq 0$). Ebben az egyszerű esetben a (65) alatti állítás „üres", és így csupán (66)-ot kell igazolnunk (alkalmas $a \in R$ elemre). (66) helyessége következik abból, hogy $x_1 R \neq 0$. Ez viszont azért igaz, mert $x_1 R = 0$ esetén az összes ilyen tulajdonságú x_1 vektorok halmaza a V modulusnak R-re nézve megengedhető részmodulusát alkotnák, amely $= V$, minthogy tartalmazna zérustól különböző elemet; ez azonban azt jelentené, hogy $VR = 0$, ami ellentmondást jelent *Jacobson* tételének azzal a kikötésével, hogy $VR \neq 0$.

Legyen a továbbiakban $n > 1$, és tegyük fel, hogy a segédtétel állítása n helyén $(n-1)$-re már igazolást nyert. Tekintsük az összes olyan $a \in R$ elemek J halmazát, amelyekre

$$x_1 a = \cdots = x_{n-2} a = 0 \tag{68}$$

érvényes. (Ha $n = 2$, akkor a (68) kikötés semmitmondó, és $J = R$ veendő.) Nyilvánvaló, hogy J jobboldali ideál az R gyűrűben. Ezért $x_{n-1}J$ megengedhető részmodulusa V-nek R-re nézve. Minthogy indukciós feltevésünk szerint van olyan $a \in R$ elem, amelyre (68) teljesül, azaz $a \in J$, de $x_{n-1} a \neq 0$, az $x_{n-1}J$ megengedhető részmodulus $\neq 0$, és így V irreducibilis volta miatt

$$x_{n-1} J = V. \tag{69}$$

Mármost J definíciója értelmében (lásd (68)) célunkat elértük, ha megmutatjuk, hogy *van olyan $a \in J$ elem, amelyre*

$$x_{n-1} a = 0, \qquad x_n a \neq 0 \tag{70}$$

teljesül.

Tegyük fel, hogy ez nem igaz. Ekkor azt az ellentmondást fogjuk nyerni, hogy a segédtételben szereplő $x_1, \ldots, x_n$ vektorok nem lineárisan függetlenek (noha így választottuk ezeket). Ez az ellentmondás a bizonyítás befejezését fogja jelenteni. — Amennyiben előbbi állításunk nem igaz, akkor ez annyit jelent, hogy *bármely olyan a elemre, amelyre*

$$a \in J \quad \text{és} \quad x_{n-1} a = 0 \tag{71}$$

érvényes, szükségképpen

$$x_n a = 0 \tag{72}$$

is teljesül. De ekkor, mint azonnal belátjuk, az

$$x = x_{n-1} a \to x_n a \qquad (a \in J,\ x \in V) \tag{73}$$

alakban megadható leképezés a V modulusnak R-endomorfizmusa. Valóban, (69) miatt V bármely x eleme előállítható $x_{n-1}a$ alakban (alkalmas $a \in J$ elemmel), úgyhogy a (73) alatti leképezés a teljes V modulust képezi le önmagába. Most megmutatjuk, hogy a leképezés egyértelmű, azaz V bármely eleméhez pontosan egy elemet rendel hozzá. Ha ugyanis különböző $a_1, a_2 (a_1, a_2 \in J)$ elemekre teljesül $x = x_{n-1} a_1 = x_{n-1} a_2$, akkor $x_{n-1}(a_1 - a_2) = 0$, s minthogy a fentiek szerint (71) szükségképpen maga után vonja (72) fennállását, egyszersmind $x_n(a_1 - a_2) = 0$, azaz

$$x \to x_n a_1 = x_n a_2.$$

Ezzel megmutattuk a (73) leképezés egyértelműségét. A leképezés homomorf tulajdonsága egészen nyilvánvaló: ha $x' = x_{n-1} a'$, $x'' = x_{n-1} a''$, akkor

$$x' + x'' = x_{n-1}(a' + a''),$$

és így a (73) szerint $(x' + x'')$-höz hozzárendelt elem

$$x_n(a' + a'') = x_n a' + x_n a'',$$

azaz az x'-höz és x''-höz hozzárendelt képelemek összege. Végül ha b tetszőleges eleme az R gyűrűnek, akkor (73)-ból

$$xb = x_{n-1}ab \to x_n ab \qquad (ab \in J)$$

adódik, ami mutatja, hogy xb képe x képének (jobboldali) b-szerese. Mindezzel megmutattuk, hogy a (73) alatti leképezés a V modulus egyik R-endomorfizmusa. Minthogy azonban V-nek bármely R-endomorfizmusa (Δ definíciójából következőleg) egy (64) alatti leképezés, azt találtuk, hogy van olyan $\alpha \in \Delta$ elem, amelyre a (73) alatti leképezés megegyezik a (64) alattival, azaz amelyre

$$x_n a = \alpha(x_{n-1}a),$$

$$(x_n - \alpha x_{n-1}) a = 0 \tag{74}$$

teljesül bármely $a \in J$ elem esetén. Ekkor azonban az $n-1$ számú

$$x_1, \ldots, x_{n-2}, x_n - \alpha x_{n-1} \tag{75}$$

vektor nem lehet lineárisan független a V vektortérben. Ha ugyanis ezek a vektorok lineárisan függetlenek volnának, az indukciós feltevésünk szerint $n-1$ vektor esetére már igaznak talált segédtétel értelmében volna olyan $a \in R$ elem, amelyre (68) érvényes, azaz $a \in J$, de (74) nem teljesül. Ennélfogva (74) következtében a (75) alatti vektorok nem lineárisan függetlenek, azaz fennáll egy

$$\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_{n-2} x_{n-2} + \alpha_{n-1}(x_n - \alpha x_{n-1}) = 0$$

alakú reláció, nem csupa zérus értékű $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ Δ-beli skalárissal. Ez viszont azt jelenti, hogy az $x_1, \ldots, x_n$ vektorok nem lineárisan függetlenek, azaz a fentebb előre jelzett ellentmondáshoz jutottunk, s így a bizonyítás befejeződött.

6. §. A Wedderburn—Artin-féle struktúratételek bizonyítása

Előbb az *első Wedderburn—Artin*-féle struktúratételt bizonyítjuk be. Mint a 4. §-ban már megjegyeztük, elegendő azt megmutatnunk, hogy bármely R féligegyszerű gyűrű előállítható (49) alakban, véges számú mátrixgyűrű direkt összegeként. Ezt *Jacobson* tétele alapján igazoljuk.

Legyen R tetszőleges féligegyszerű gyűrű. Ekkor van R-ben minimális jobboldali ideál, azaz olyan, (0)-tól különböző jobboldali ideál, amely már nem tartalmazza valódi részeként R-nek egyetlen (0)-tól különböző jobboldali ideálját sem. Ez a jobboldali minimumkövetelményből következik, mert ha R nem tartalmazna minimális jobboldali ideált, akkor megadható volna R jobboldali ideáljainak végtelen sok tagú, szigorúan fogyó lánca. Legyen V *minimális jobboldali ideál* R-ben. Ekkor V nyilvánvalóan irreducibilis jobboldali R-modulus. Világos az is, hogy $VR \neq 0$, mert $VR = 0$-ból $V \cdot V = V^2 = 0$ következnék, amit kizár az a föltevésünk, hogy R féligegyszerű gyűrű. Ennélfogva a tekintett V irreducibilis R-modulusra teljesülnek *Jacobson* tételének feltételei, s minthogy R kielégíti a jobboldali minimumkövetelményt, *Jacobson* tételéből közvetlenül nyerjük a következő eredményt:

A V modulus egy jól meghatározott Δ ferdetestre, mint skaláris tartományra nézve véges m dimenziójú vektortér, és az R gyűrű elemei által indukált (58) *alatti endomorfizmusok e V vektortér összes lehetséges lineáris transzformációit kimerítik.*

Mivel a V vektortér összes lineáris transzformációi a Δ_m teljes mátrixgyűrűvel izomorf gyűrűt alkotnak, eredményünk az (58), (59) alatt már megállapított homomorfizmus figyelembevétele alapján azt jelenti, hogy az R gyűrűnek homoform képe Δ_m, azaz

$$R/K \sim \Delta_m. \tag{76}$$

Itt K a homomorfizmus magva, vagyis az a kétoldali ideál R-ben, amelyet az (59) szerint 0-ra leképezett elemek alkotnak; másszóval: *K a V modulus összes jobboldali annihilátorainak halmaza* (V jobboldali annihilátorán olyan $a \in R$ elemeit értve, amelyre $Va = 0$).

Mármost megmutatjuk, hogy az R gyűrű előállítható a K ideálnak és egy másik (alkalmasan választott) R_1 ideáljának direkt összegeként:

$$R = R_1 + K. \tag{77}$$

Ezzel egyszersmind készen is leszünk. (77) és (76) alapján ugyanis (lásd a (11)-gyel kapcsolatban tett megállapítást) azt nyerjük, hogy $R_1 \cong R/K \cong \Delta_m$, és így (77) azt mondja, hogy R előállítható egy teljes mátrixgyűrű és egy másik K gyűrű direkt összegeként. Minthogy R-el együtt a (77)-ben fellépő K direkt komponens is nyilvánvalóan féligegyszerű gyűrű, amennyiben $K \neq 0$, hasonló úton K-t is felbonthatjuk egy teljes mátrixgyűrű és egy másik gyűrű direkt összegére, s. í. t. Ez az eljárás azonban véges számú lépés után megszakad, és így a kívánt (49) előállításhoz vezet, mert ellenkező esetben R nem teljesítené a jobboldali minimumkövetelményt.

A már egyedül hátralevő (77) összefüggés helyességét az $R_1 = RV$ gyűrűre mutatjuk meg, amely nyilván kétoldali ideál R-ben. Az mindenekelőtt világos, hogy RV és K közös része $S = 0$, úgyhogy RV és K az

$$RV + K \tag{78}$$

direkt összegként állítja elő R-nek általuk generált részgyűrűjét. Az S közös rész ugyanis kétoldali ideál R-ben, amelyre

$$S^2 = S \cdot S \subseteq (RV) \cdot K = R(VK) = R \cdot (0) = (0)$$

adódik (K definíciója szerint ugyanis $VK = (0)$), s így S, mint nilpotens jobboldali ideálja a féligegyszerű R gyűrűnek, csak 0 lehet. Így most már csak azt kell belátnunk, hogy (78) nem lehet valódi része R-nek. Mivel azonban (78) ideál R-ben, az $(RV+K)/K$ maradékosztálygyűrű is ideál R/K-ban. De R/K (76) szerint izomorf egy teljes mátrixgyűrűvel, tehát R/K egyszerű gyűrű. Ennélfogva összes ideáljai: zérus és önmaga. $(RV+K)/K$ azonban nem lehet a zérusideál R/K-ban, mert az azt jelentené, hogy $RV \subseteq K$; ebből pedig (minthogy RV és K közös része az előbbiek szerint 0) $RV = (0)$, azaz $V^2 \subseteq RV = (0)$ következnék, ami R féligegyszerű volta miatt lehetetlen. Így csak az a lehetőség áll fenn, hogy $(RV + K)/K = R/K$, ami viszont azt jelenti, hogy a (78) alatti gyűrű éppen R, s ezzel bebizonyítottuk (77) teljesülését $R_1 = RV$-re.

Az ilyen módon igazolt első *Wedderburn—Artin*-féle struktúratételből könnyen levezethetjük a másodikat. Azt kell megmutatnunk, hogy ha az R gyűrű egyszerű és eleget tesz a minimumkövetelménynek jobboldali ideálokra, akkor R izomorf egy teljes mátrixgyűrűvel, vagy egy p elemű zérógyűrűvel, ahol p tetszőleges prímszám.

Mindenekelőtt könnyen beláthatjuk a következőt: *Bármely egyszerű gyűrű vagy zérógyűrű, vagy nem tartalmaz* (0)*-tól különböző nilpotens jobboldali ideált.* Legyen ugyanis S olyan egyszerű gyűrű, amely nem zérógyűrű, és legyen $J \neq (0)$ tetszőleges jobboldali ideál S-ben. Mivel SJ kétoldali ideálja S-nek, vagy $SJ = (0)$, vagy $SJ = S$. Az első lehetőség azonban ki van zárva, mert az azt jelentené, hogy az S gyűrűnek vannak (0)-tól különböző jobboldali annihilátorai (pl. J összes elemei), s egy gyűrű jobboldali annihilátorai nyilvánvalóan kétoldali ideált alkotnak a gyűrűben. Ez az ideál most (S egyszerű volta miatt) egybeesik S-sel, s így azt kapnánk, hogy S valamennyi eleme jobboldali annihilátora S-nek. De ez azt jelentené, hogy S zérógyűrű, amit kizártunk. — Ennélfogva $SJ = S$, $SJ^2 = SJ = S, \ldots$, s általában $SJ^m = S$ bármely m kitevőre. Ezzel megmutattuk, hogy a J jobboldali ideál nem nilpotens, és így előbbi megjegyzésünket igazoltuk.

Legyen mármost R olyan egyszerű gyűrű, amely eleget tesz a minimumkövetelménynek jobboldali ideálokra. Ha R nem zérógyűrű, akkor előbbi megjegyzésünk szerint R nem tartalmaz (0)-tól különböző nilpotens jobboldali ideált. Ekkor tehát R féligegyszerű gyűrű, és így az első struktúratétel szerint izomorf véges számú teljes mátrixgyűrű direkt összegével. Minthogy azonban R egyszerű gyűrű, ez azt jelenti, hogy R izomorf egyetlen teljes mátrixgyűrűvel. — Ha viszont R zérógyűrű, akkor bármely additív alcsoportja egyszersmind ideálja a gyűrűnek. Ebben az esetben tehát R p elemű zérógyűrű, ahol p prímszám, mert csak a p elemű csoportnak van meg az a tulajdonsága, hogy bármely alcsoportja vagy önmaga, vagy az egyelemű csoport.

Így a második *Wedderburn—Artin*-féle struktúratétel bizonyítását is befejeztük.

IRODALOM

[1] *E. Artin,* Zur Theorie der hyperkomplexen Zahlen. *Abh. Hamburg 5* (1927), 251—260.

[2] *E. Artin* and *G. Whaples,* The theory of simple rings. *Amer. J. Math. 65* (1943), 87—107.

[3] *E. Artin, C. J. Nesbitt* and *R. M. Thrall,* Rings with minimum condition. (Ann. Arbor, Mich., 1948.)

[4] *E. Artin,* The influence of J. H. M. Wedderburn on the development of modern algebra. *Bull. Amer. Math. Soc. 56* (1950), 65—72.

[5] *R. Baer,* Linear algebra and projective geometry. (New York, N. Y., 1952.)

[6] *M. Deuring,* Algebren. *Ergebnisse der Math. u. ihrer Grenzgebiete,* IV., 1. (Berlin, 1935.)

[7] *J. Dieudonné,* Sur le socle d'un anneau et les anneaus simples infinis. *Bull. Soc. Math. de France 70* (1942), 46—75.

[8] *N. Jacobson,* The theory of rings. *Math. Surveys,* 2. (New York, N. Y., 1943.)

[9] *N. Jacobson,* Structure theory of simple rings without finiteness assumptions. *Trans. Amer. Math. Soc. 57* (1945), 228—245.

[10] *N. Jacobson,* The radical and semi-simplicity for arbitrary rings. *Amer. J. Math. 67* (1945), 300—320.

[11] *N. Jacobson,* Lectures in abstract algebra. II. Linear algebra. (New York, N. Y., 1953.)

[12] *E. Noether,* Hyperkomplexe Grössen und Darstellungstheorie. *Math. Z. 30* (1929), 641—692.

[13] *B. L. van der Waerden,* Moderne Algebra. II. (Berlin, 1940.)

[14] *J. H. M. Wedderburn,* On hypercomplex numbers. *Proc. London Math. Soc.* (2) *6* (1908), 77—118.

AZ IDEÁLELMÉLET FŐTÉTELÉRŐL

FUCHS LÁSZLÓ

I. Ideálok a matematikában először a véges algebrai számtestek egész számainak oszthatósági vizsgálatai során léptek fel. Az első lépést *E. Kummer* tette meg, mikor a körosztási testek egészeinek kanonikus felbontását az általa bevezetett „ideális számok" segítségével valósította meg. A mai értelemben vett ideál fogalmát *R. Dedekind* vezette be, hogy a véges algebrai számtestek egészeire bebizonyítsa az elemi számelmélet alaptételével analóg tételt: minden ideál egyértelműen felbontható prímideálok szorzatára. Az algebrai számelmélettel párhuzamosan az algebrai geometriában is felmerül az ideál fogalmának szükségessége s hamarosan megvetik a polinomideálok elméletét (*E. Lasker, F. S. Macaulay*). Az ideálok elméletének ezt a két, addig egymástól teljesen elszigetelten álló ágát egyesíti *Emmy Noether* egy magasabb fokon: az absztrakt ideálelméletben. *Noether*nek ez az alapvető munkája[1] messze túlnő a kommutatív gyűrűk ideálelméletén, hiszen e munkával indulnak meg intenzív módon az addig komoly jelentőséggel nemigen bíró gyűrűelméleti kutatások, amelyeknek nagy influáló hatása az egész modern algebrára közismert. Ezen munkájából kiindulva axiomatizálta *Noether* azokat az R kommutatív gyűrűket, amelyekben érvényes az ideálelmélet főtétele, vagyis a nem-triviális ideálok felbontása egyértelműen meghatározott maximális (prím-) ideálok szorzatára.[2] A *Noether* által adott szükséges és elégséges feltételek a következők:

1. *Nullosztómentesség;*[3] más szóval: az R gyűrű integritási tartomány.
2. *Egységelem létezése* (az egységelemet e-vel fogjuk jelölni).
3. *Maximum-feltétel:* R ideáljainak tetszőleges nem-üres halmaza tartalmaz legalább egy maximális ideált, vagyis oly ideált, mely nem valódi részideálja egyetlen, a szóbanforgó halmazhoz tartozó ideálnak sem. (Ez a feltétel ekvivalens azzal, hogy R minden ideáljának véges bázisa van.)

[1] *Noether* [9]. — A szögletes zárójelbe foglalt számok a dolgozat végén található irodalomjegyzékre utalnak.

[2] *Noether* [10]. — Az egyes fogalmakra vonatkozóan utalunk a jelen dolgozat II alatti részére.

[3] A nullosztómentesség szükségességének igazolására *Noether* a prímideálok szorzatára való egyértelmű felbonthatóságon kívül azt is megkövetelte, hogy $P^{\nu} = P^{\nu+1}$ ne lehessen (itt P maximális ideál). E nélkül u. i. nem következik a nullosztómentesség, amint ezt a következő példa illusztrálja: Legyen R a racionális egészek gyűrűjének modulo 8 vett maradékosztálygyűrűje. Itt az összes ideálok: (1), (2), (4), (0), s mivel itt (2) prímideál, érvényes a nem-triviális ideáloknak egyértelmű felbontása; de itt $(2)^3 = (2)^4$.

4. *Minimum-feltétel modulo tetszőleges nem-zérus A ideál:* egy fix $A \neq 0$ ideált tartalmazó ideálok tetszőleges nem-üres halmaza tartalmaz legalább egy minimális ideált (tehát ennek valódi részideálja már nem tartozhatik a szóbanforgó halmazhoz).

5. *A gyűrű integrálisan zárt kvocienstestében:* ha R kvocienstestének valamely x eleme kielégít egy $x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$ $(a_i \in R)$ alakú egyenletet (vagyis x egész elem R-re vonatkozóan), akkor x már R-hez tartozik.

Noether e munkájának előfutárja *M. Sono* vizsgálatai;[4] *Sono* az ideálelmélet főtételét szintén bizonyos axiómák felvétele után bizonyította be. Ő 3. és 4. helyett azt követeli meg, hogy minden $A \neq 0$ ideálra az R/A maradékosztálygyűrűnek legyen Jordan-féle kompoziciós-lánca; ez a feltétel — miként ezt *Noether* megmutatta — ekvivalens 3. és 4. együttes teljesülésével. *Sono*nál 5. helyett az a követelmény áll, hogy semilyen P primideálra se essék P és P^2 közé ezektől különböző ideál.

Noether eredményeit kétféle irányban sikerült élesíteni.

Az egyik irány az axiómák csökkentése. Az egységelem létezését megkövetelő axióma feleslegessé válik, ha az 5. axiómában szereplő egyenlet helyett (a bizonyos okokból indokoltabb) $x^n + (a_1 x^{n-1} + \nu_1 x^{n-1}) + \cdots + (a_{n-1} x + \nu_{n-1} x) + a_n = 0$ egyenletet vesszük alapul $(a_x \in R,$ ν_x racionális egészek); ekkor u. i. a kvocienstest e egységeleme kielégíti az $x^2 - x = 0$ egyenletet, s így R-hez kell tartoznia. Továbbá *Y. Akizuki*[5] (nem-kommutatív esetben pedig *Ch. Hopkins*[6]) kimutatta, hogy egységelemes gyűrűkben a minimum-feltételből, s így a gyengébb 4. axiómából is, már következik a maximum-feltétel. Ezek szerint már az 1., 4. és 5. axiómák is elégségesek.

Az élesítés másik iránya a feltételek szükségességével kapcsolatos; e vizsgálatoknál előre fel szokás tenni a gyűrű nullosztómentességét. *Noether,* axiómáinak szükségességét bizonyítva, a felbontásban szereplő primideáloktól megkövetelte, hogy azok maximális ideálok legyenek. *K. Kubo* megmutatta,[7] hogy ezt felesleges külön kikötni. *K. Matusita*[8] továbbmenőleg azt is bebizonyította, hogy még az egyértelműség követelménye is elhagyható: elegendő csupán a primideálszorzatra való felbonthatóságot feltenni az összes nemtriviális ideálokra vonatkozóan, már abból is következnek az axiómák.[9]

Túl messze vezetne, ha itt a *Noether* említett vizsgálataihoz kapcsolódó nagyszámú eredményt bővebben ismertetni akarnók.[10] Legyen szabad mind-

[4] *Sono* [11].

[5] *Akizuki* [1], egyszerűbb bizonyítás: *Cohen* [2]. *Akizuki* többet bizonyít, mint amit fent említettünk, t. i. nála nincs feltéve egységelem létezése, hanem csupán olyan elemé, mely nem nullosztó.

[6] *Hopkins* [4]. (Eredménye fontos szerepet játszik a Wedderburn—Artin-féle struktúratételeknél.)

[7] *Kubo* [7].

[8] *Matusita* [8].

[9] Ezekre egyszerű bizonyítást *Cohen* adott [2].

[10] *Krull* munkájában [6] bő irodalomjegyzék található.

össze annak említésére szorítkoznunk, hogy gyakran a 4. axióma helyett annak azt a következményét veszik fel axiómának, hogy R-ben minden primideál ($\neq R, 0$) maximális. Így jár el pl. *B. L. van der Waerden* is ismert könyvében. Ebben az esetben azonban a maximum-követelmény nem hagyható el az axiómák közül.

A jelen közleményben szintén a primideálok szorzatára való egyértelmű felbonthatóságot vizsgáljuk, de ezt nem a gyűrűnek *összes* nem-triviális ideáljaira, hanem a gyűrűnek csak *egyetlen* kiszemelt A ideáljára tesszük. Vizsgálatainkban ezen A ideálra vonatkozóan nem elég csak azt a tulajdonságot megkövetelni, hogy A egyértelműen meghatározott primideálok szorzatára legyen bontható, hanem még azt is kell — ami automatikusan teljesül, ha a felbonthatóság minden nem-triviális ideálra teljesül, — hogy A tetszésszerinti B osztójának ($A \subset B$)[11] felbontása A felbontásának része legyen. Viszont A felbontásának egyértelműségét csak a felbontásban szereplő primideálhatványokra vonatkozóan fogjuk megkövetelni. Ez más szóval azt jelenti, hogy megengedjük azt a lehetőséget is, hogy $P^{\varkappa} = P^{\lambda}$ teljesüljön különböző $\varkappa$ és λ mellett, vagyis hogy a P primideál hatványai között a $P \supset P^2 \supset \cdots \supset P^{\lambda} = P^{\lambda+1} = \cdots$ ($\lambda \geqq 1$) reláció álljon fenn (ezek szerint pl. a [2] lábjegyzetben említett gyűrűt nem zárjuk ki vizsgálatainkból). Ekkor A felbontásában a primideálok hatványainak kitevői csak az esetben lesznek egyértelműen meghatározva, ha tőlük *minimalitást* is megkövetelünk.[12] Pontosabban szólva:

azt fogjuk mondani, hogy az R gyűrű A ideáljára teljesül az ideálelmélet főtétele, ha

$$A = P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2} \cdots P_{\nu}^{\alpha_{\nu}}$$

egyértelműen meghatározott $P_{\varkappa}$ primideálokkal és egyértelműen meghatározott minimális természetes egész $\alpha_{\varkappa}$ kitevőkkel; továbbá $A \subseteq B \subset R$ esetén B ilyen alakú:

$$B = P_1^{\beta_1} P_2^{\beta_2} \cdots P_{\nu}^{\beta_{\nu}},$$

ahol $0 \leqq \beta_{\varkappa} \leqq \alpha_{\varkappa}$.

E dolgozatban annak szükséges és elégséges feltételét fogjuk megadni, hogy az A ideálra teljesüljön az ideálelmélet főtétele. Az R gyűrű tetszőleges kommutatív gyűrű lehet (nullosztókkal vagy azok nélkül), csupán *egységelem létezését kötjük ki.* Egyik korábbi dolgozatomban [3] már adtam erre egy elégséges feltételt, de az nem okvetlenül szükséges feltétel, s azonfelül a gyűrű összes ideáljaira ki volt kötve a maximum-feltétel, ami az általánosság jelentős megszorítását jelenti. Most semmi olyan kikötés nem fog szerepelni, ami a

[11] A $\subseteq$-jel tartalmazást, a $\subset$-jel valódi tartalmazást jelöl.

[12] A fentebb mondottakból kitűnik, hogy ha a gyűrű nullosztómentes és ha az összes ideálra vonatkozóan vizsgálnók az ideálelmélet főtételének teljesülését, akkor a minimalitási megszorítás elveszti értelmét, hiszen ekkor a felbonthatóságból már következik az egyértelműség a kitevőkre vonatkozóan is.

gyűrű összes ideálját érintené, hanem csupán olyanok, amelyek A-ra és annak osztóira vonatkoznak.

Mielőtt a részletes diszkusszióba bocsátkoznánk, megjegyezzük, hogy az ismeretes eredményekből nem következik közvetlenül problémánk megoldása. Igaz ugyan, hogy lényegileg az R/A maradékosztálygyűrű ideáljait fogjuk vizsgálni, de ezekre nem alkalmazható a *Noether* és követői által kidolgozott elmélet, minthogy e maradékosztálygyűrűben általában bőven vannak nullosztó ideálok is.[13] Sőt, az R/A maradékosztálygyűrű nullideáljának (A/A-nak) primideálhatványok szorzataként való előállításából egyáltalán nem következik a megfelelő előállítás érvényessége A-ra, hanem csak A valamely részideáljára. Ennélfogva az R/A maradékosztálygyűrű ideálelméletéből nem tudnánk visszafelé következtetni teljes mértékben az A-t tartalmazó R-beli ideálok elméletére. — Az az út, amelyen problémánk megoldásához eljutunk, nagyrészt ismert módszerekből tevődik össze, de nem támaszkodik ismeretes eredményekre. Mivel arra törekedtünk, hogy az olvasótól minél kevesebb tárgyi előismeretet kívánjunk meg, a használandó módszereket részletesen kifejtjük, csupán a legalapvetőbb fogalmak (ideál, műveletek ideálokkal) ismeretét tételezzük fel.[14] Tárgyalásmódunk elemi lesz abból a szempontból is, hogy transzfinit módszerek használatára nem lesz szükségünk.

II. A továbbiakban jelentsen R tetszőleges egységelemes kommutatív gyűrűt. R elemeit latin kis betűkkel, ideáljait latin nagy betűkkel jelöljük, míg a görög betűket racionális egészek számára tartjuk fenn.

*Primideál*nak nevezünk olyan P ideált, melyre $ab \in P$-ből $a \in P$ vagy $b \in P$ következik. Célszerűnek mutatkozik a továbbiakban az egész gyűrűt nem tekinteni primideálnak. Könnyen belátható, hogy P primideálra $AB \subseteq P$-ből $A \subseteq P$ vagy $B \subseteq P$ következik. Valóban, ha $AB \subseteq P$ és sem A, sem B nem tartoznék P-hez, akkor lenne olyan $a \in A$ és $b \in B$, melyre $a \notin P, b \notin P$. De ekkor P prim-tulajdonsága folytán $ab \notin P$ következnék, ellentétben az $AB \subseteq P$ feltétellel.

*Maximális ideál*on olyan M ideált értünk, melyre $M \subset R$, de nincs olyan N ideál, mely kielégíti az $M \subset N \subset R$ feltételt. Jól ismert tény, hogy egységelemes gyűrűben minden maximális ideál prim, megfordítva azonban általában nem.

Az A, B ideálok (A, B) legnagyobb közös osztójára és $A \cap B$ legkisebb közös többesére teljesül a számelméletből jólismert formula analogonja: $(A, B) = R = (e)$ esetén $A \cap B = AB$. Valóban: az $AB \subseteq A \cap B$ tartalmazási reláció a definíciók triviális következménye, az ellenkező irányú pedig a követ-

[13] *Kubo* vizsgálatai [7] bizonyos fajtájú, nem szükségképpen nullosztómentes gyűrűkre is érvényesek, de ezek a jelen problémára csak akkor lennének alkalmazhatók, ha A maga primideálhatvány lenne.

[14] Az egészen alapvető fogalmak értelmezését lásd pl. *van der Waerden* könyvében [12].

kezőképpen látható be:

$$A \cap B = (A, B)(A \cap B) = (A(A \cap B), B(A \cap B)) \subseteq (AB, BA) = AB.$$

Az A, B ideálokra $A:B$ jelöli R azon x elemeinek halmazát, melyekre $xB \subseteq A$. A definícióból tüstént folyik, hogy $A:B$ ismét ideál lesz, mely A-t tartalmazza és rá nézve teljesül:

$$(A:B):C = A:BC = (A:C):B; \quad A:B = A:(A, B).$$

Az A ideálnak legyen P primosztója, $A \subseteq P$. A-nak P-hez tartozó $A(P)$ *főkomponensén*[15] értjük mindazon x gyűrűelemekből álló halmazt, amelyekhez található oly $c \notin P$ elem, hogy $cx \in A$. $A(P)$ ismét ideál lesz, mert ha $x \in A(P)$ és $c \notin P$-re teljesül $cx \in A$, akkor tetszőleges $r \in R$-re $c(rx) = r(cx) \in A$, vagyis $rx \in A(P)$; továbbá, ha $y \in A(P)$ és $d \notin P$-re $dy \in A$, akkor $cd(x \pm y) \in A$ és $cd \notin P$ miatt $x \pm y \in A(P)$. Az $A(P)$ főkomponensre nyilván fennáll: $A \subseteq A(P)$. Hogy $A \subseteq P$ esetén $A(P) \subseteq P$ is áll, azt a következő okoskodás mutatja: ha $x \in A(P)$, van $c \notin P$, hogy $cx \in A$, így annál inkább $cx \in P$, ahonnan $c \notin P$ miatt valóban $x \in P$ adódik. Az is könnyen látható, hogy $A(P) \subseteq B(P)$, feltéve, hogy $A \subseteq B$. Csakugyan: ha $x \in A(P), c \notin P$ és $cx \in A$, akkor $cx \in B$ is, tehát $x \in B(P)$.

III. Az a tétel, amit be kívánunk bizonyítani, a következő.

Tétel. *Az R kommutatív egységelemes gyűrű A ideáljára akkor és csak akkor teljesül az ideálelmélet főtétele, ha*

(i) *érvényes a minimum-feltétel modulo A, és*

(ii) *A minden olyan P primosztójára, melyre az $A(P)$ főkomponens P-nek valódi többszöröse, igaz az, hogy R-ben nem létezik a $P^2 \subset M \subset P$ tulajdonságú M ideál (vagyis P^2 közvetlen többszöröse P-nek).*

Az (i) és (ii) feltételek *szükségessége* könnyen adódik. Ha az $A = P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2} \cdots P_\nu^{\alpha_\nu}$ ideálra érvényes az ideálelmélet főtétele, akkor A-nak csak véges-sok különböző osztója van, tehát modulo A okvetlenül érvényes a minimum-feltétel (sőt, a maximum-feltétel is). Ekkor pedig az alább bizonyítandó 1. lemmából következik, hogy a $P_\varkappa$ ($\varkappa = 1, 2, \ldots, \nu$) primideálok maximálisak R-ben. Továbbá $A(P_\varkappa) = P_\varkappa^{\alpha_\varkappa}$ kell, hogy fennálljon. U. i.: hogy $P_\varkappa^{\alpha_\varkappa} \subseteq A(P_\varkappa)$, az onnan folyik, hogy $P_1^{\alpha_1} \cdots P_{\varkappa-1}^{\alpha_{\varkappa-1}} P_{\varkappa+1}^{\alpha_{\varkappa+1}} \cdots P_\nu^{\alpha_\nu}$ tartalmaz P_λ maximalitásánál fogva $P_\varkappa$-hoz nem tartozó elemet is, és ennek $P_\varkappa^{\alpha_\varkappa}$ tetszőleges elemével vett szorzata A-ba tartozik. Viszont a $P_\varkappa^{\alpha_\varkappa} \subseteq A(P_\varkappa)$ tartalmazás nem lehet valódi, mert ellenkező esetben $A(P_\varkappa)$-ban lenne oly x elem, mely $P_\varkappa^{\alpha_\varkappa - 1}$-hez hozzátartozik, de $P_\varkappa^{\alpha_\varkappa}$-hoz nem.[16] Ha $c \notin P_\varkappa$ és $cx \in A \subseteq P_\varkappa^{\alpha_\varkappa}$, akkor $P_\varkappa x \subseteq P_\varkappa^{\alpha_\varkappa}$ tekintetbe vételével: $x \in Rx = (P_\varkappa, c)x = (P_\varkappa x, cx) \subseteq P_\varkappa^{\alpha_\varkappa}$, ellentmondás. — Ha ármost $A(P_\varkappa) = P_\varkappa^{\alpha_\varkappa} \subset P_\varkappa$, akkor $\alpha_\varkappa \geqq 2$. P^2 és P közé nem eshetik tőlük különböző ideál, mert ez A-nak olyan osztója lenne, mely nem állítható elő primideál-

[15] A főkomponens fogalmát *Krull* vezette be [5].

[16] Itt $\alpha_\varkappa$-ról feltételeztük, hogy minimálisnak van választva.

hatványok szorzataként. Ennélfogva (ii) is teljesül, s így a szükségesség igazolva van.

Megjegyzés. A bizonyításból látható, hogy a szükségesség igazolásánál nem használtuk ki a felbontás egyértelműségét.

IV. A feltételek *elégségességének* kimutatásához szükségünk van néhány lemmára. Előbb ezeket fogjuk bizonyítani.

1. *lemma.* Ha modulo A érvényes a minimum-feltétel, akkor A-nak minden P primosztója maximális ideál R-ben.

Legyen $a \notin P$; ekkor a prim-tulajdonság miatt egyszersmind $a^\nu \notin P$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$. Kimutatjuk, hogy $(P, a) = R$, amiből már következik P maximális volta. A minimum-követelmény miatt az A-t tartalmazó

$$(P, a) \supseteq (P, a^2) \supseteq \cdots \supseteq (P, a^\nu) \supseteq \cdots$$

ideálok között van minimális, tehát valamilyen természetes egész ν-re $(P, a^\nu) = (P, a^{\nu+1})$. Így $a^\nu \in (P, a^{\nu+1})$, vagyis $a^\nu = p + ra^{\nu+1}$ $(p \in P, r \in R)$, ahonnan $a^\nu(e - ra) = p \in P$. Minthogy P primideál és $a^\nu \notin P$, ezért $e - ra \in P$, tehát $e \in (P, a)$. Más szóval: $(P, a) = R$, q. e. d.

2. *lemma.*[17] Ha teljesül a minimum-követelmény modulo A és $A \subseteq B \subset R$, akkor van oly P primideál, $B \subseteq P \subset R$, melyre $B : P \supset B$.

Azon C $(C \supset B)$ ideálok halmaza, melyekre $B : C \neq R$, nem-üres, mert pl. R e halmazhoz tartozik. Legyen C_0 e halmaz egy minimális ideálja. Ekkor $P = B : C_0$ primideál, mert ha $a \notin P, b \notin P, ab \in P$ lenne, akkor $P \subset P : a$ (hiszen $b \in P : a$), viszont $P : a \subset R$ tekintettel arra, hogy $Ra = (a) \subseteq P$ nem lehet. Ennélfogva $P : a = (B : C_0) : a = B : (aC_0) = B : (aC_0, B)$ tekintetbe vételével $B : C_0 \subset B : (aC_0, B) \subset R$, ami ellentmond C_0 minimalitásának. Így P prim és mivel $B : P \supseteq C_0$, ezért $B : P = B$ nem lehet s állításunk igazolva van.

3. *lemma.* Ha modulo A érvényes a minimum-feltétel, akkor A-nak végessok primosztója van. (Megjegyezzük: az, hogy egyáltalán van primosztója A-nak ($A \neq R$ esetén), a 2. lemmából következik.)

Ha $P_1, P_2, \ldots$ A-nak összes különböző primosztói, akkor a minimumfeltétel következtében a

$$P_1 \supseteq P_1 \cap P_2 \supseteq P_1 \cap P_2 \cap P_3 \supseteq \cdots \supseteq P_1 \cap P_2 \cap \cdots \cap P_\nu \supseteq \cdots$$

láncban valamely ν-re

$$P_1 \cap P_2 \cap \cdots \cap P_\nu = P_1 \cap P_2 \cap \cdots \cap P_\nu \cap P_{\nu+1}$$

teljesül, innen pedig

$$P_1 P_2 \cdots P_\nu \subseteq P_1 \cap P_2 \cap \cdots \cap P_\nu \subseteq P_{\nu+1},$$

ill. $P_{\nu+1}$ prim volta miatt: $P_\varkappa \subseteq P_{\nu+1}$ valamely $\varkappa = 1, 2, \ldots, \nu$-re. Ez pedig különböző primideálokra lehetetlen, mert ezek az 1. lemma miatt maximális ideálok R-ben.

[17] E lemma (bizonyításával együtt) *Cohen*től való [2].

4. *lemma.* Ha érvényes a minimum-feltétel modulo A, továbbá $A \subset P$ és $A(P)$ az A-nak P-hez tartozó főkomponense, akkor van oly λ kitevő, hogy $P^\lambda \subseteq A(P)$.

Mivel $A(P) \subseteq P$ folytán e főkomponens különbözik R-től, a 2. lemma alapján arra következtethetünk, hogy létezik oly P^* primideál, hogy $A(P):P^* \supset \supset A(P)$. Itt $P^* \neq P$ nem lehet, mert ha $x \in A(P):P^*$, akkor $xP^* \subseteq A(P)$ és oly c-t véve, hogy $c \in P^*, c \notin P$, adódik: $cx \in A(P)$. A főkomponens definíciója folytán van oly $d \notin P$, melyre $cdx \in A$. Innen $cd \notin P$ miatt $x \in A(P)$, tehát $A(P):P^* = A(P)$ lenne. Kaptuk tehát, hogy $A(P):P \supset A(P)$.

Ha $A(P):P^\mu$ még különbözik R-től, akkor legyen neki P^* oly primosztója, hogy $A(P):P^\mu \subset (A(P):P^\mu):P^* = (A(P):P^*):P^\mu$. Innen $A(P) \subset A(P):P^*$, tehát a megelőző bekezdés értelmében $P^* = P$, s így $A(P):P^\mu \subset A(P):P^{\mu+1}$. Mármost ha az

$$(A(P), P) \supseteq (A(P), P^2) \supseteq \cdots$$

csökkenő ideálláncban $(A(P), P^\lambda)$ minimális ideál, akkor

$$(A(P), P^\lambda) = (A(P), P^{\lambda+1})$$

miatt

$$A(P):P^\lambda = A(P):(A(P), P^\lambda) = A(P):(A(P), P^{\lambda+1}) = A(P):P^{\lambda+1},$$

s így az imént mondottak alapján csak $A(P):P^\lambda = R$ lehet, ami éppen azt fejezi ki, hogy $P^\lambda \subseteq A(P)$.

5. *lemma.* Ha az A-t tartalmazó ideálok eleget tesznek a minimum-követelménynek, akkor A előállítható (véges-sok) főkomponensének szorzataként.

A-nak összes primosztói legyenek: $P_1, P_2, \ldots, P_\nu$. Mindenekelőtt kimutatjuk az

$$A = A(P_1) \cap A(P_2) \cap \cdots \cap A(P_\nu)$$

előállítás helyességét. Minthogy $A(P_\varkappa) \supseteq A$ s így A benne van főkomponensei közös részében, elegendő azt verifikálni, hogy ha $x \in A(P_1) \cap \cdots \cap A(P_\nu)$, akkor $x \in A$ is. Tekintsük az $A:x$ ideált. Ez nem lehet benne egyik $P_\varkappa$-ban sem ($\varkappa = 1, \ldots, \nu$), mert $x \in A(P_\varkappa)$-hoz található oly $c_\varkappa \notin P_\varkappa$, hogy $c_\varkappa x \in A$, azaz $c_\varkappa \in A:x$. Ennélfogva $A:x$ nem lehet osztható A-nak egyetlen primosztójával sem, ami $A \subseteq A:x$ és a 2. lemma tekintetbe vételével csak úgy lehet, ha $A:x = R$, azaz $x \in A$.

Hogy a szorzatelőállítást is kimutassuk, vegyük figyelembe, hogy

$$(A(P_1) \cdots A(P_{\varkappa-1}), A(P_\varkappa)) = R \qquad (\varkappa = 2, \ldots, \nu)$$

teljesül, hiszen a baloldalon álló ideálnak nem lehet egyetlen P primosztója sem, mert ebből a 4. lemma miatt $P_1^{\lambda_1} \cdots P_{\varkappa-1}^{\lambda_{\varkappa-1}} \subseteq A(P_1) \cdots A(P_{\varkappa-1}) \subset P$ és $P_\varkappa^{\lambda_\varkappa} \subseteq P$, innen pedig $P_\mu \subseteq P$ és $P_\varkappa \subset P$ következnék valamilyen $\mu = 1, 2, \ldots, \varkappa - 1$-re, ami az 1. lemmával ellenkezésben van. Minthogy pedig $(A, B) = R$ esetén $A \cap B = AB$, ezért rendre kapjuk:

$$A(P_1) \cap A(P_2) = A(P_1) \cdot A(P_2), \quad A(P_1)A(P_2) \cap A(P_3) = A(P_1)A(P_2)A(P_3) \text{ stb.}$$

Így tehát valóban: $A = A(P_1)A(P_2) \cdots A(P_\nu)$.

6. *lemma.* Ha P maximális ideál, továbbá P és P^2 közé nem esik ezektől különböző ideál, akkor minden B ideál, melyre $P^\lambda \subseteq B \subseteq P$, P-nek valamilyen hatványa.

Ha P és P^2 $(\subset P)$ közé nem esik újabb ideál és c a $c \in P$, $c \notin P^2$ követelményeknek eleget tevő tetszőleges elem, akkor $(c, P^2) = P$. Teljes indukcióval következik, hogy ekkor minden természetes egész μ-re:

$$P^\mu = (c^\mu, P^{\mu+1}). \tag{1}$$

Valóban, ha ez μ-re igaz, akkor

$$P^{\mu+1} = (c^\mu P, P^{\mu+2}) = (c^\mu(c, P^2), P^{\mu+2}) = (c^{\mu+1}, c^\mu P^2, P^{\mu+2}) = (c^{\mu+1}, P^{\mu+2}).$$

Legyen mármost B egy a feltételt kielégítő ideál és legyen μ az a legnagyobb, ill. $\varkappa$ az a legkisebb kitevő, melyre[18]

$$P^\varkappa \subseteq B \subset P^\mu.$$

Ha $\varkappa = \mu$, készen vagyunk. Kimutatjuk, hogy $\varkappa > \mu$ ellentmondásra vezet. Legyen $b \in B$, de $b \notin P^{\mu+1}$. Ez esetben $b \in P^\mu$ és (1) miatt létezik olyan $r \in R$, hogy $b \equiv rc^\mu \pmod{P^{\mu+1}}$. Itt $r \notin P$, ellenkező esetben u. i. $rc^\mu \in P^{\mu+1}$, $b \notin P^{\mu+1}$ ellentmondás lenne. Az utóbbi kongruenciából

$$rc^\mu \equiv 0 \pmod{(B, P^{\mu+1})},$$

ahonnan $Pc^\mu \subseteq P^{\mu+1}$ miatt $c^\mu \in Rc^\mu = (P, r)c^\mu = (Pc^\mu, rc^\mu) \subseteq (B, P^{\mu+1})$. Innen azt kapjuk, hogy

$$c^{\varkappa-1} = c^\mu c^{\varkappa-\mu-1} \in (B, P^{\mu+1})P^{\varkappa-\mu-1} \subseteq (B, P^\varkappa) = B,$$

s így (1) miatt

$$P^{\varkappa-1} = (c^{\varkappa-1}, P^\varkappa) \subseteq B.$$

ellentétben $\varkappa$ minimalitásával.

V. Ezek után rátérhetünk a tételben foglalt feltételek elégségességének igazolására. Tegyük fel, hogy az (i) és (ii) feltételek teljesülnek; bebizonyítjuk, hogy ekkor A-ra érvényes az ideálelmélet főtétele.

Az 5. lemmából következik, hogy A előállítható (véges-sok) főkomponensének szorzataként. Ki kell mutatnunk, hogy mindegyik főkomponens primideálhatvány. Nyilván csak azt az esetet kell tekintenünk, mikor $A(P_\varkappa) \neq P_\varkappa$. Ekkor a 4. lemma szerint $P_\varkappa^\lambda \subseteq A(P_\varkappa) \subset P_\varkappa$, és így a 6. lemma felhasználásával arra az eredményre jutunk, hogy $A(P_\varkappa)$ a $P_\varkappa$ primideálnak valamely hatványa:

$$A = P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2} \cdots P_\nu^{\alpha_\nu}.$$

Vegyük most tekintetbe, hogy A-nak más primosztója, mint $P_1, P_2, \ldots, P_\nu$, nem lehet, továbbá, hogy $A(P_\varkappa) = P_\varkappa^{\alpha_\varkappa}$ egyértelműen meg van határozva P által. Ha még az $\alpha_\varkappa$ kitevőt a lehető legkisebbnek választjuk (amennyiben

[18] Az az eset, midőn a kívánt tulajdonságú μ nem létezik, triviális, t. i. ekkor B megegyezik P-nek (tovább már nem csökkenő) hatványával. Így $\varkappa \geq \mu$.

egyáltalán mód van választásra), akkor világos, hogy A-nak ez az előállítása egyértelmű.

Hátra van még az A osztóira vonatkozó állítás igazolása. Legyen $A \subseteq B \subset R$. Mindenekelőtt világos, hogy a minimum-feltétel modulo B is érvényes; ennélfogva B szintén főkomponenseinek szorzatával egyenlő (5. lemma). Továbbá tekintettel arra, hogy $P_\varkappa^{\alpha_\varkappa} = A(P_\varkappa) \subseteq B(P_\varkappa)$ teljesül minden $\varkappa$-ra, ezért a 6. lemma szerint $B(P_\varkappa)$ csak R-rel vagy $P_\varkappa^{\beta_\varkappa}$-val lehet egyenlő $(0 < \beta_\varkappa \leqq \alpha_\varkappa)$.

Ezzel tételünk bizonyítását befejeztük.

Végezetül megjegyezzük, hogy ha az $\alpha_\varkappa$ kitevők egyértelműségét is biztosítani akarnók, akkor az (i) és (ii) feltételekhez még hozzá kellene venni a következőt is:

(iii) $A(P).P$ *különbözik* P-*től.*

Ezen állításunk bizonyítása egészen kézenfekvő.

IRODALOM

[1] *Yasuo Akizuki,* Teilerkettensatz und Vielfachenkettensatz, *Proceedings of the Phys. Math. Soc. of Japan, 17* (1935), 337—345.

[2] *I. S. Cohen,* Commutative rings with restricted minimum condition, *Duke Math. Journal, 17* (1950), 27—41.

[3] *L. Fuchs,* A note on the idealizer of a subring, *Publicationes Math. Debrecen, 1* (1950), 160—161.

[4] *Charles Hopkins,* Rings with minimum condition for left ideals, *Annals of Math., 40* (1939), 712—730.

[5] *W. Krull,* Idealtheorie in Ringen ohne Endlichkeitsbedingung, *Math. Annalen, 101* (1929), 729—744.

[6] *W. Krull, Idealtheorie,* Ergebnisse d. Math. u. Grenzgeb., *4,* (Berlin, 1935).

[7] *Keizi Kubo,* Über die Noetherschen fünf Axiome in kommutativen Ringen, *Journal of Sci. Hiroshima Univ., 10* (1940), 77—84.

[8] *Kameo Matusita,* Über ein bewertungstheoretisches Axiomensystem für die Dedekind—Noethersche Idealtheorie, *Japanese Journal of Math., 19* (1944), 97—110.

[9] *Emmy Noether,* Idealtheorie in Ringbereichen, *Math. Annalen, 83* (1921), 24—66.

[10] *Emmy Noether,* Abstrakter Aufbau der Idealtheorie in algebraischen Zahl- und Funktionenkörpern, *Math. Annalen, 96* (1927), 26—61.

[11] *M. Sono,* On congruences, I—IV, *Mem. Coll. Sci. Kyoto, 2* (1917), 203—226; *3* (1918), 113—149, 189—197 és 229—308.

[12] *B. L. van der Waerden, Moderne Algebra.* II (Berlin, 1940).

AZ ASSZOCIATIVITÁSFELTÉTELEK FÜGGETLENSÉGÉNEK KÉRDÉSE KOMMUTATÍV SZORZÁS ESETÉN

SZÁSZ GÁBOR

1. §. Bevezetés

Egy előző dolgozatomban* általános multiplikatív struktúrákra** vonatkozóan meghatároztam az asszociativitásfeltételek független teljes részrendszereit. Ebben a dolgozatban a hasonló problémát fogjuk megtárgyalni arra az esetre nézve, amikor kizárólag kommutatív struktúrákra szorítkozunk. Problémánk pontos megfogalmazásához néhány definíciót és jelölést előre kell bocsátanunk.

Legyen S_ν adott ν-elemű halmaz (ν lehet véges vagy végtelen). Ha az S_ν-ben definiálva van egy szorzás, akkor azt mondjuk, hogy S_ν erre a szorzásra nézve egy $S_\nu^\times$ *multiplikatív struktúrát* alkot. Egy S_ν-ben természetesen többféle szorzás is definiálható; ha különlegesen a szorzás kommutatív, akkor $S_\nu^\times$-et *kommutatív multiplikatív struktúrának* nevezzük.

Tekintsük az S_ν halmaz elemeiből képezett valamely (x, y, z) elemhármast. Ha erre az elemhármasra valamely $S_\nu^\times$-ben $(xy)z = x(yz)$ áll fenn, akkor azt mondjuk, hogy *az (x, y, z) elemhármas asszociatív $S_\nu^\times$-ben;* ha pedig $(xy)z \neq x(yz)$, akkor (x, y, z) *nemasszociatív $S_\nu^\times$-ben.*

Az összes

$$(xy)z = x(yz) \qquad (x, y, z \in S_\nu) \tag{1}$$

egyenleteket *az S_ν halmaz asszociativitásfeltételeinek,* különlegesen az $(xy)z = x(yz)$ egyenletét *az (x, y, z) elemhármashoz tartozó asszociativitásfeltételnek* nevezzük. Ha valamely $S_\nu^\times$-re az (1) összes egyenletei teljesülnek, akkor $S_\nu^\times$-et *félcsoportnak* nevezzük.

Az asszociativitásfeltételek rendszere az általános multiplikatív struktúrákra vonatkozóan az asszociativitás axiómarendszerét képezi. Magától értetődik tehát, hogy mint minden axiómarendszer esetén, úgy az asszociativitásfeltételekre nézve is fontos kérdés a rendszer függetlenségének kérdése.

Fentebb idézett dolgozatomban kimutattam, hogy $\nu \geqq 4$ esetén az S_ν halmaz asszociativitásfeltételei függetlenek; vagyis, $\nu \geqq 4$ esetén az asszociativitásfeltételek halmazának nincs olyan valódi részhalmaza, amely azzal a tulajdon-

* *Szász Gábor:* Az asszociativitásfeltételek függetlensége, A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai és Fizikai Osztályának Közleményei, III. kötet *4* (1953)

** Az idézett dolgozatban használt definíciókat alább megismételjük.

sággal bírna, hogy a részhalmaz elemeinek asszociativitásából bármely $S_\nu^\times$ esetén a többi asszociativitásfeltételek teljesülése is következzék. Gyakorlatilag ez azt jelenti, hogy ha egy legalább négy elemű multiplikatív struktúra asszociativitását ki akarjuk mutatni, akkor általában minden egyes elemhármas asszociativitásáról külön meg kell győződni. A $\nu \leqq 3$ esetekben az asszociativitásfeltételek nem függetlenek; ezekben az esetekben megadtam az asszociativitásfeltételek összes független teljes részrendszereit*.

Másképp alakul a helyzet, ha csak az S_ν halmazból képezhető kommutatív $S_\nu^\times$-eket tekintjük. Ebben az esetben az asszociativitásfeltételek egyetlen ν esetén sem függetlenek egymástól. A kommutativitás miatt ugyanis az

$$(xy)z = x(yz) \tag{2. 1}$$

és

$$(zy)x = z(yx) \tag{2. 2}$$

egyenletek egyidejűleg teljesülnek, illetve nem teljesülnek. Vizsgálataink célja eszerint az lesz, hogy minden ν-re meghatározzuk a ν-elemű kommutatív multiplikatív struktúrákra vonatkozóan az asszociativitásfeltételek összes független teljes részrendszereit. Részletesen megfogalmazva, minden S_ν-re meg fogjuk határozni az asszociativitásfeltételek összes olyan részrendszereit, amelyek a következő két tulajdonsággal bírnak:

1. A részrendszerhez tartozó asszociativitásfeltételek teljesüléséből már bármely kommutatív $S_\nu^\times$ esetén következik a többi asszociativitásfeltételek teljesülése is (teljesség);

2. A részrendszerhez tartozó bármely asszociativitásfeltételt kiszemelve, található olyan $S_\nu^\times$ kommutatív struktúra, amelyben a kiszemelt asszociativitásfeltétel nem teljesül, a részrendszer többi asszociativitásfeltételei azonban mind teljesülnek (függetlenség).

Tárgyalásunk során külön foglalkozunk a $\nu \geqq 4$, a $\nu = 2$ és $\nu = 3$ esettel. A $\nu \geqq 4$ esetre a következő eredményt fogjuk kapni:

1. tétel. *Az $S_\nu(\nu \geqq 4)$ halmazból képezhető kommutatív multiplikatív struktúrákra vonatkozóan az asszociativitásfeltételek összes független teljes részrendszereit a következő eljárással kapjuk:*

1°. *Az $S_\nu(\nu \geqq 4)$ halmaz elemeiből álló valamennyi*

$$(a, a, b), (b, a, a) \qquad (a, b \in S_\nu;\ a \neq b)$$

elemhármaspárból tetszésszerinti módon kiválasztjuk az egyik elemhármast.

2°. *Továbbá, tekintjük az S_ν elemeinek összes*

$$a, b, c \qquad (a, b, c \in S_\nu \text{ és mind különbözők})$$

* Egy axiómarendszer valamely részrendszerét *független teljes részrendszer*nek nevezzük, ha a részrendszer rendelkezik a következő két tulajdonsággal: 1. A részrendszer axiómáinak egyike sem következik a részrendszer többi axiómáiból (függetlenség); 2. A részrendszer axiómáinak teljesülése esetén az axiómarendszer többi axiómái is teljesülnek (teljesség).

ismétlés nélküli kombinációit, s minden egyes esetben az a, b, c elemek permutációjával előálló hat elemhármast. Ezek közül bármelyik kettőt kiválasztjuk, csupán azzal a megszorítással, hogy a kiválasztott két elemhármasban az elemek sorrendje nem lehet éppen fordított.*

*Alkossuk meg ezután az asszociativitásfeltételeknek összes olyan részrendszereit, amelyek az 1° és 2° szerint kiválasztott elemhármasokhoz tartozó asszociativitásfeltételekből állnak. Az asszociativitásfeltételek így kapott részrendszerei adják az asszociativitásfeltételek összes független teljes részrendszereit az $S_\nu (\nu \geqq 4)$ halmazból képezhető kommutatív multiplikatív struktúrákra nézve**.*

A $\nu = 2$ esetben igen egyszerűen fog adódni, hogy

2. tétel. *Az $S_2 = \{a, b\}$ halmazból képezhető kommutatív multiplikatív struktúrákra vonatkozóan az asszociativitásfeltételek bármely független teljes részrendszere az*

$$(a, a, b),\ (a, b, b),\ (b, a, a),\ (b, b, a)$$

elemhármasok valamelyikéhez tartozó egyetlen asszociativitásfeltételből áll.

Végül, az előbbieknél lényegesen hosszadalmasabban fogjuk kapni a $\nu = 3$ esetre vonatkozó eredményünket:

3. tétel. *Az S_3 halmazból képezhető kommutatív multiplikatív struktúrákra vonatkozóan az asszociativitásfeltételek összes független teljes részrendszereit a következőképpen kapjuk:*

1°. *Az S_3 halmaz elemeiből álló valamennyi*

$$(a, a, b),\ (b, a, a) \qquad (a, b \in S_3,\ a \neq b)$$

elemhármaspárból tetszésszerinti módon kiválasztjuk az egyik elemhármast.

2°. *Továbbá, tekintjük azt az S_3 halmazból képezhető hat elemhármast, amelynek elemei mind különbözők, s közülük tetszésszerinti módon pontosan egyet kiválasztunk.*

*Alkossuk meg ezután az asszociativitásfeltételeknek összes olyan részrendszereit, amelyek az 1° és 2° szerint kiválasztott elemhármasokhoz tartozó asszociativitásfeltételekből állnak. Az így kapott részrendszerek adják az asszociativitásfeltételek összes független teljes részrendszereit az S_3 halmazból képezhető kommutatív multiplikatív struktúrákra nézve***.*

* Azaz, pl. az (a, b, c) elemhármas mellé nem választhatjuk a (c, b, a) elemhármast.

** Könnyű látni, hogy véges $\nu (\geqq 4)$ esetén az 1° szerint kiválasztott elemhármasok száma $\nu(\nu - 1)$, a 2° szerint kiválasztottaké pedig $2\binom{\nu}{3} = 2 \cdot \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)}{1.2.3}$. Egy független teljes részrendszer tehát véges $\nu \geqq 4$ esetén összesen $\frac{\nu^3 - \nu}{3}$ egyenletből áll.

*** Ebben az esetben tehát bármely független teljes részrendszer 7 asszociativitásfeltételből áll.

A felsorolt tételek bizonyításának megkezdése előtt a felvetett problémát redukáljuk: megvizsgáljuk, melyek azok az asszociativitásfeltételek, amelyek a kommutativitás miatt figyelmen kívül hagyhatók. A további viszgálatokat ezután a megmaradt részrendszerrel folytatjuk.

2. §. A probléma redukálása

A továbbiakban „szorzás"-on mindig kommutatív szorzást, s ennek megfelelően „struktúrá"-n mindig kommutatív multiplikatív struktúrát értünk. Ennek megfelelően „az asszociativitásfeltételek független teljes részrendszere" kifejezéshez is mindig hozzáértjük, hogy „a kommutatív multiplikatív struktúrákra vonatkozólag". Megállapodunk továbbá abban, hogy az adott S_ν halmaz tetszésszerinti (tehát nem feltétlenül különböző) elemeit x, y, z betűkkel, az S_ν tetszésszerinti, de különböző elemeit pedig a, b, c, d betűkkel fogjuk jelölni (mint az eddigiekben is).

A bevezetésben említettük már, hogy bármely $x, y, z (\in S)$ esetén az

$$(xy)z = x(yz) \qquad (2.1)$$

és

$$(zy)x = z(yx) \qquad (2.2)$$

egyenletek egyidejűleg teljesülnek, illetve nem teljesülnek. Ennek megfelelően két (2. 1), (2. 2) alakú asszociativitásfeltételt (a kommutatív struktúrákra vonatkozóan) *ekvivalensnek* nevezhetünk. Bármely asszociativitásfeltételt önmagával is ekvivalensnek mondunk, és bevezetjük a következő definíciót:

D e f i n í c i ó. *Az asszociativitásfeltételek két részrendszerét a kommutatív struktúrákra vonatkozóan ekvivalensnek mondjuk, ha a bennük szereplő asszociativitásfeltételek páronként ekvivalensek.*

Nyilvánvaló, hogy az asszociativitásfeltételek egy olyan rendszere, amely valamely független teljes részrendszerrel ekvivalens, szintén független teljes részrendszert alkot. Ennek megfelelően elegendő az összes nem-ekvivalens független teljes részrendszereket meghatározni.

A könnyebb kifejezésmód kedvéért jelöljük az S_ν halmaz elemeiből képezhető összes elemhármasok halmazát $S_\nu^{(3)}$-mal. Az S_ν halmazból képezett két (x, y, z), (x', y', z') elemhármast *azonos típusúnak* fogunk mondani, ha egymásból az S_ν elemeinek valamely permutációjával állnak elő. Az azonos típusú elemhármasokat egy osztályba sorozva, az $S_\nu^{(3)}$-nak egy osztályozását nyerjük. Ebben az osztályozásban az $S_\nu^{(3)}$ elemei (a $\nu \leq 2$ esettől eltekintve) öt osztályt képeznek, mégpedig az egyes osztályok elemei rendre az összes

$$(a, a, a),\ (a, b, a),\ (a, a, b),\ (b, a, a),\ (a, b, c)$$

típusú elemhármasok. Az öt típus közül az utolsó természetesen a $\nu = 2$ esetben nem fordul elő. Ezt az osztályozást átvisszük az asszociativitásfeltételekre is: egy asszociativitásfeltételt olyan típusúnak mondunk, mint amilyen a benne szereplő elemhármas.

Foglalkozzunk külön-külön az egyes típusokkal. Az (a, a, a)-típus és (a, b, a)-típus elemhármasaira a kommutativitás folytán

$$(aa)a = a(aa)$$

és

$$(ab)a = a(ba)$$

korlátlanul érvényes, tehát ennek a két típusnak minden elemhármasa bármely struktúrában asszociatív.

Továbbá, az

$$(aa)b = a(ab)$$

és

$$(ba)a = b(aa)$$

asszociativitásfeltételek ekvivalenciája miatt bármely (b, a, a)-típusú asszociativitásfeltétel ekvivalens egy (a, a, b)-típusúval, s így — mivel csak az összes nemekvivalens független teljes részrendszereket keressük — pl. a (b, a, a)-típusú asszociativitásfeltételekkel nem kell törődnünk.

Vizsgáljuk meg végül az (a, b, c)-típusú asszociativitásfeltételeket. A (2. 1), (2. 2) egyenletek ekvivalenciája folytán ezek páronként ekvivalensek, s így ezeknek is fele elhagyható. A megtartandók pontos meghatározása végett egy további osztályozást fogunk végezni az (a, b, c)-típusú elemhármasok halmazában.

Tekintsük az S_ν halmaz elemeiből képezhető összes ismétlés nélküli kombinációkat. Ezután az (a, b, c)-típusnak azt a hat elemhármasát, amelyek éppen az a, b, c elemekből állnak, soroljuk egy osztályba. Az így kapott osztályt jelöljük $C[a, b, c]$-vel. Nyilvánvaló, hogy miközben a, b, c befutják az S_ν összes elemeit (úgy hogy közben a, b, c különbözők), az előálló $C[a, b, c]$ osztályok éppen az (a, b, c)-típus osztályozását adják. Különlegesen, egy $C[a, b, c]$ osztály elemei az

$$(a, b, c),\ (b, c, a),\ (c, a, b) \tag{3. 1}$$

és

$$(c, b, a),\ (a, c, b),\ (b, a, c) \tag{3. 2}$$

elemhármasok.

Látjuk, hogy a (3. 2) bármely elemhármasához tartozó asszociativitásfeltétel ekvivalens a felette lévő (3. 1)-beli elemhármashoz tartozóval. Eszerint az összes nemekvivalens független teljes részrendszerek meghatározásához minden egyes $C[a, b, c]$ osztályból (ahol az a, b, c elemeket tetszés szerint rendezhetjük el) elegendő pl. a (3. 1)-ben felsorolt elemhármasokat tekinteni.

Jelöljük a továbbiakban $S_{\nu k}^{(3)}$-mal az $S_\nu^{(3)}$-nak azt a részhalmazát, amely az összes (a, a, b)-típusú elemhármasokból és az (a, b, c) típus minden egyes

$C[a, b, c]$ osztályának (3. 1) alakú elemhármasaiból áll. A fentiek szerint világos, hogy az asszociativitásfeltételek összes olyan független teljes részrendszerei, amelyek kizárólag az $S_{\nu k}^{(3)}$ elemeihez tartozó asszociativitásfeltételekből állnak, *ekvivalenciától eltekintve* máris az *összes* független teljes részrendszereket adják.

3. §. Egy segédtétel

Az 1. és 3. tételek 1° állításának bizonyításához kimutatjuk a következő segédtételt:

Segédtétel. *Az $S_\nu (\nu \geqq 3)$ halmaz asszociativitásfeltételeinek a kommutatív multiplikatív struktúrákra vonatkozó minden olyan független teljes részrendszere, amely kizárólag az $S_{\nu k}^{(3)}$ elemhármasaihoz tartozó asszociativitásfeltételekből áll, tartalmazza az összes (a, a, b)-típusú asszociativitásfeltételeket.*

Bizonyítás. Tekintsük az $S_\nu^{(3)}$ $(\nu \geqq 3)$ valamely tetszésszerinti (a, b, c) elemhármasát. A segédtétel bizonyítására meg fogunk adni egy olyan $S_\nu^\times$ kommutatív multiplikatív struktúrát, amelyben az $S_{\nu k}^{(3)}$ elemhármasai közül egyedül (a, a, b) nemasszociatív. Ezzel ki lesz mutatva, hogy az (a, a, b) elemhármas asszociativitása nem következik az $S_{\nu k}^{(3)}$ összes többi elemhármasainak asszociativitásából.

Ebből a célból tekintsük azt az $S_\nu^\times$-et, amelyben a szorzás az

$$\begin{cases} ab(=ba)=bb=b, \\ xy=c \text{ minden más esetben} \end{cases}$$

egyenletekkel van definiálva (ahol c az S_ν-nek valamelyik tetszésszerinti további eleme).

Könnyű látni, hogy azokra az (x, y, z) elemhármasokra, amelyekben x, y, z egyike sem a vagy b, korlátlanul $(xy)z=x(yz)=c$ érvényes, tehát az ilyen (x, y, z) elemhármasok mind asszociatívok. Elegendő tehát azokat az $S_{\nu k}^{(3)}$-hoz tartozó (x, y, z) elemhármasokat vizsgálni, amelyekben x, y, z mindegyike az a, b közül valók, vagyis az (a, a, b) és (b, b, a) elemeket. Azonban

$$(aa)b=cb=c, \quad a(ab)=ab=b;$$

$$(bb)a=ba=b, \quad b(ba)=bb=b.$$

Vagyis (a, a, b) nemasszociatív, (b, b, a) pedig asszociatív. Ezzel a segédtételt bebizonyítottuk.

4. §. Az 1. tétel bizonyítása ($\nu \geqq 4$ eset)

A 2. §-ban mondottak szerint az 1. tétel bizonyításához elegendő kimutatni a következő állítás helyességét:

Az $S_\nu (\nu \geqq 4)$ halmazból képezhető kommutatív multiplikatív struktúrákra vonatkozóan az asszociativitásfeltételek összes olyan részrendszereit, amelyek *kizárólag az* $S_{\nu k}^{(3)}$ *elemhármasaihoz tartozó asszociativitásfeltételekből állnak, a következő módon kaphatjuk:*

1°. *Kiválasztjuk az* $S_\nu(\nu \geqq 4)$ *halmaz összes* (a, a, b)*-típusú asszociativitásfeltételeit;*

2°. *Az így kapott részrendszerhez hozzávesszük még az* (a, b, c)*-típus minden egyes* $C[a, b, c]$ *osztályának* (3. 1)*-alakú elemhármasaihoz tartozó asszociativitásfeltételek közül kettőt-kettőt, tetszésszerinti módon*.*

Látjuk, hogy ezek közül az 1° állítás benne foglaltatik a 3. §-ban bebizonyított segédtételben, s így a továbbiakban már csak a 2° állítással kell foglalkoznunk.

A 2° állítás a következő két részletállításból adódik:

2. 1°. Bármely $C[a, b, c]$ osztály esetén az $S_{\nu k}^{(3)}$-ba tartozó (azaz (3. 1) alakú) elemhármasok közül kettőnek az asszociativitásából a harmadiké is következik;

2. 2°. Bármely $C[a, b, c]$ osztály esetén az illető osztály egy (3. 1) alakú elemhármasának és az $S_{\nu k}^{(3)}$ nem $C[a, b, c]$ osztálybeli összes elemhármasainak (beleértve az (a, b, c)-típusúakat is) asszociativitásából nem következik a $C[a, b, c]$ osztály másik két (3. 1) alakú elemhármasának asszociativitása.

A 2. 1° állítás igazolására tegyük fel például, hogy a $C[a, b, c]$ osztály (a, b, c) és (b, c, a) elemhármasai asszociatívok, azaz, hogy

$$(ab)c = a(bc) \tag{4}$$

és

$$(bc)a = b(ca). \tag{5}$$

Ezekből a kommutativitás felhasználásával

$$c(ab) = (ab)c = a(bc) = (bc)a = b(ca) = (ca)b,$$

azaz

$$(ca)b = c(ab) \tag{6}$$

következik, ami éppen (c, a, b) asszociativitását jelenti. Hasonlóan látható be, hogy (5)-ből és (6)-ból következik (4), valamint (6)-ból és (4)-ből következik (5).

A 2. 2° állítás bizonyítására megmutatjuk, hogy az S_ν elemeinek bármely a, b, c kombinációjához megadható olyan $S_\nu^\times$, amelyben a $C[a, b, c]$ osztály három (3. 1) alakú elemhármasa közül tetszésszerint kiválasztott kettő nemasszociatív, bár az $S_{\nu k}^{(3)}$ minden más eleme asszociatív. Tekintsük ehhez azt a kommutatív $S_\nu^\times (\nu \geqq 4)$ struktúrát, amelyben a szorzás az

$$\left.\begin{aligned} &ac = bb = b \\ &xy = d \text{ minden más esetben} \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

* A tétel 2° állításának végén szereplő megszorítás ebben a fogalmazásban önmagától elesik, mert a (3. 1) alakú elemhármasok között nincs két olyan, amelyben az elemek sorrendje éppen fordított lenne.

egyenletekkel van definiálva (ahol d az S_ν valamely tetszésszerinti további eleme).

Mivel az adott $S_\nu^\times$-ben (7) szerint két elem szorzata sem a, sem c nem lehet, ezért $(xy)z=b$ akkor és csak akkor, ha $xy=b$, $z=b$, azaz ha az

$$x=a,\ y=c,\ z=b \tag{8. 1}$$
$$x=c,\ y=a,\ z=b \tag{8. 2}$$
$$x=b,\ y=b,\ z=b \tag{8. 3}$$

esetek egyike áll fenn; különben $(xy)z=d$. A (8. 1)-ben szereplő (a,c,b) elemhármas azonban a $C[a,b,c]$ osztálynak (3. 2) alakú eleme, a (8. 3) elemhármasa pedig (a,a,a)-típusú. Ezek tehát nem tartoznak az $S_{\nu k}^{(3)\prime}$ elemei közé, s így kívül esnek vizsgálatunk körén. A (8. 2)-ben fellépő (c,a,b) viszont $S_{\nu k}^{(3)}$-beli elem. Ezek szerint az $S_{\nu k}^{(3)}$ elemeire

$$\left.\begin{array}{ll} (ca)b=b, & \text{de} \\ (xy)z=d & \text{minden más}\quad (x,y,z)\in S_{\nu k}^{(3)}\text{-ra.} \end{array}\right\} \tag{9}$$

Ezzel szemben, $x(yz)=b$ akkor és csak akkor, ha $x=b$, $yz=b$, azaz ha az

$$x=b,\ y=a,\ z=c \tag{10. 1}$$
$$x=b,\ y=c,\ z=a \tag{10. 2}$$
$$x=b,\ y=b,\ z=b \tag{10. 3}$$

esetek egyike áll fenn; különben $x(yz)=d$. A (10. 1), (10. 3)-ban fellépő elemhármasok most sem elemei $S_{\nu k}^{(3)}$-nak (előbbi (3. 2) alakú, utóbbi (a,a,a) típusú), a (10. 2)-beli (b,c,a) ellenben $S_{\nu k}^{(3)}$-beli elem. Az $S_{\nu k}^{(3)}$ elemeire tehát

$$\left.\begin{array}{ll} b(ca)=b, & \text{de} \\ x(yz)=d & \text{minden más}\quad (x,y,z)\in S_{\nu k}^{(3)}\text{-ra.} \end{array}\right\} \tag{11}$$

A (9) és (11) összehasonlításával adódik, hogy a (7) által definiált $S_\nu^\times$-ben az $S_{\nu k}^{(3)}$ elemei közül (b,c,a) és (c,a,b) nemasszociatív, minden más elem viszont asszociatív, amivel a 2° állítás, s vele az 1. tétel bizonyítását befejeztük.

5. §. A 2. és 3. tételek bizonyítása ($\nu \leqq 3$ eset)

Tekintsük először a $\nu=1$ esetet. Mivel az egyetlen $S_1^\times$ triviálisan asszociatív, ezért a „független teljes rendszer" üres (sőt már $S_{1k}^{(3)}$ is).

Legyen ezután $\nu=2$. Az olvasó igen könnyen meggyőződhetik arról, hogy a nyolc kommutatív $S_2^\times$ közül csupán az

$$\begin{array}{c|cc} & a & b \\ \hline a & b & a \\ b & a & a \end{array} \qquad \text{és} \qquad \begin{array}{c|cc} & a & b \\ \hline a & b & b \\ b & b & a \end{array}$$

Cayley-táblákkal megadott két struktúra nem félcsoport. Ezekben az $S_2^\times$-ekben pedig az

$$(a, a, b),\ (a, b, b),\ (b, a, a),\ (b, b, a) \tag{12}$$

egyike sem asszociatív. Vagyis, ha egy (kommutatív) $S_2^\times$-ben a (12) egyik elemhármasa asszociatív, akkor az összes többi is; ez pedig éppen a 2. tétel helyességét jelenti.

Végül rátérünk a $\nu = 3$ eset tárgyalására, azaz a 3. tétel bizonyítására. A tétel 1° állítása ugyanazt mondja ki $\nu = 3$ esetre, amit az 1. tétel 1° állítása $\nu \geqq 4$ esetre. Mivel a 3. § segédtétele $\nu = 3$ esetre is szól, ezért a 3. tétel 1° állítása ugyanúgy következik belőle, mint az 1. tétel 1° állítása.

Marad tehát a 3. tétel 2° állításának igazolása. Ez az állítás, hasonlóan az 1. tétel 2° állításához, két részre bontható:

2. 1°. Az asszociativitásfeltételek minden független teljes részrendszerének ($\nu = 3$ esetén is) tartalmaznia kell (a, b, c)-típusú asszociativitásfeltételt, mert csupán az összes (a, a, b)-típusú elemek asszociativitásából még nem következik az (a, b, c)-tipusúak egyetlen elemének asszociativitása sem.

2. 2°. Az asszociativitásfeltételek bármely független teljes részrendszere $\nu = 3$ esetén csak egy (a, b, c)-típusú asszociativitásfeltételt tartalmaz, mert az összes (a, a, b)-típusú elemek és egyetlen (a, b, c)-típusú elem, pl. (c, a, b) asszociativitásából már következik $S_{3k}^{(3)}$ (s vele együtt $S_3^{(3)}$) összes többi elemének asszociativitása is.

A 2. 1° kimutatásához tekintsük az

$$\begin{array}{c|ccc} & a & b & c \\ \hline a & a & a & c \\ b & a & b & b \\ c & c & b & c \end{array} \tag{13}$$

Cayley-táblával megadott struktúrát. Ebben az a, b, c elemek közül bármelyik kettő egy-egy kételemű részstruktúrát alkot, mégpedig ezek a részstruktúrák nyilvánvalóan asszociatívok. Ez azt jelenti, hogy ebben a struktúrában minden olyan elemhármas asszociatív, amely S_3-nak legfeljebb két különböző eleméből áll. Ezzel szemben az $S_{3k}^{(3)}$ három (a, b, c)-típusú elemére (13) szerint

$$\begin{array}{ll} (ab)c = ac = c & a(bc) = ab = a \\ (bc)a = ba = a & b(ca) = bc = b \\ (ca)b = cb = b & c(ab) = ca = c \end{array}$$

áll fenn, amivel a 2. 1°-ben foglalt állítást kimutattuk.

A 2. 2° állítás igazolása indirekt úton fog történni. Legyenek az $S_3 = \{a, b, c\}$ halmazból képezett valamely kommutatív $S_3^\times$-ben az $S_{3k}^{(3)}$ összes (a, a, b)-típusú elemei és (c, a, b) asszociatív, és tegyük fel, hogy (a, b, c),

(b, c, a) mégsem asszociatívok, azaz

$$(ab)c \neq a(bc), \tag{14}$$

$$(bc)a \neq b(ca). \tag{15}$$

Az $(ab)c, a(bc), (bc)a, b(ca)$ szorzatok értékének különböző megválasztása révén eseteket fogunk megkülönböztetni. A kommutativitás és $(ca)b = c(ab)$ miatt azonban a négy szorzat értékét nem választhatjuk akárhogyan. Mert, már a kommutativitás miatt

$$a(bc) = (bc)a; \tag{16}$$

továbbá, a $(ca)b = c(ab)$ egyenletet is figyelembe véve

$$b(ca) = (ca)b = c(ab) = (ab)c. \tag{17}$$

A (14)—(17) szerint az alábbi hat esetet kell megkülönböztetnünk:

	1.	2.	3.	4.	5.	6.
$(ab)c =$	a	b	b	c	c	a
$a(bc) = (bc)a =$	b	a	c	b	a	c
$b(ca) =$	a	b	b	c	c	a

Látjuk, hogy a b és c szerepének felcserélésével az 1 és 6, 2 és 5, 3 és 4 esetek feltételi egyenletei egymásba mennek át. Eszerint elegendő ellentmondást megállapítani az 1, 2 és 3 esetekben.

1. eset. Ebben az esetben

$$(ab)c = a, \tag{18. 1}$$

$$a(bc) = b, \tag{18. 2}$$

$$b(ca) = a. \tag{18. 3}$$

Aleseteket különböztetünk meg aszerint, hogy $ab = a$, $ab = b$ vagy $ab = c$.

1. 1. Ha $ab = a$, akkor (18. 1)-ből $ac = a$ következik, s így (18. 2) folytán bc értéke sem b, sem c nem lehet. Tehát $bc = a$, amiből ismét (18. 2) miatt $aa = b$. De akkor

$$(aa)c = bc = a, \quad a(ac) = aa = b,$$

tehát (a, a, c) nemasszociatív. Ez pedig ellentmondás a feltevéseinkkel.

1. 2. Ha $ab = b$, akkor (18. 1)-ből

$$bc = a, \tag{19}$$

ebből pedig (18. 2) szerint $aa = b$ következik. Ezekből az (a, a, b) típus asszociatívitása folytán

$$bb = (aa)b = a(ab) = ab = b$$

adódik. Utóbbiból a (19) figyelembevételével

$$(bb)c = bc = a, \quad b(bc) = ba = ab = b,$$

vagyis (b, b, c) nemasszociativitása adódik, ami ismét ellentmondás.

1.3. Ha végül $ab = c$, akkor (18. 1)-ből

$$cc = a, \tag{20}$$

(18. 2)-ből

$$bc \neq b \tag{21}$$

(18. 3)-ból pedig

$$ca = ac \neq a \tag{22}$$

adódik. De a (c, c, b) asszociativitása miatt (20)-ból

$$c(cb) = (cc)b = ab = c, \tag{23}$$

ebből pedig (20) miatt $cb (= bc) \neq c$ adódik. Ez (21)-gyel együtt azt jelenti, hogy

$$bc = a.$$

Ezért a (18. 2) figyelembevételével

$$aa = b. \tag{24}$$

Fentiek szerint

$$b(ba) = bc = a.$$

Kimutatjuk, hogy ezzel szemben

$$(bb)a \neq a.$$

Ugyanis:

Ha $bb = a$, akkor (24) szerint $(bb)a = aa = b$.
Ha $bb = b$, akkor az $ab = c$ feltevés miatt $(bb)a = ba = c$.
Ha $bb = c$, akkor (22) szerint $(bb)a = ca \neq a$.

Mindhárom esetben (b, b, c) nemasszociatív, azaz megint ellentmondásra jutottunk.

2. eset. Most

$$(ab)c = b, \tag{25. 1}$$

$$a(bc) = a, \tag{25. 2}$$

$$b(ca) = b. \tag{25. 3}$$

Ismét három alesetet különböztetünk meg az ab értéke szerint.

2. 1. Ha $ab = a$, akkor (25. 1)-ből

$$ac = b. \tag{26}$$

Ebből (25, 2) miatt

$$bc \neq c$$

következik. Eszerint bc értéke a vagy b.

2. 1. 1. Ha most $bc = a$, akkor (25. 2) szerint $aa = a$, s így (26) figyelembevételével

$$(aa)c = ac = b, \quad a(ac) = ab = a,$$

ami ellentmondás.

2. 1. 2. Tekintsük tehát azt az esetet, amikor $bc = b$. Az (a, a, c) asszociativitása és (26) miatt

$$(aa)c = a(ac) = ab = a. \tag{27}$$

Vizsgáljuk az aa szorzat értékét. Az előzők szerint ez sem a, sem b nem lehet. Mert $aa = a$ esetén (27)-ből $ac = a$ következnék, ellentétben (26)-tal; $aa = b$ esetén pedig (27)-ből $bc = a$ következnék, ellentétben a 2. 1. 2-re vonatkozó $bc = b$ feltevéssel. Tehát

$$aa = c.$$

Fentiek szerint azonban

$$(aa)b = cb = b, \quad a(ab) = aa = c,$$

ami megint ellentmondás.

2. 2. Ha $ab = b$, akkor (25. 1)-ből $bc = b$, ebből pedig (25. 2) szerint $ab = a$ következik, ami ellentmondásban van az $ab = b$ kiindulási feltétellel.

2. 3. Ha végül $ab = c$, akkor (25. 2)-ből

$$bc \neq b, \tag{28}$$

(25. 3)-ból pedig

$$ac = ca \neq a$$

következik. A (25. 3) és (28) folytán továbbá

$$ac \neq c.$$

Következőleg

$$ac = b.$$

Ebből (25. 3) szerint

$$bb = b, \tag{29}$$

(25. 2) szerint pedig

$$bc \neq c$$

következik. Utóbbi eredményünket (28)-cal összevetve kapjuk, hogy

$$bc = a. \tag{30}$$

A (29), (30) és az $ab = c$ feltevés miatt azonban

$$(bb)c = bc = a, \quad b(bc) = ba = c,$$

s így újból ellentmondásra jutottunk.

3. eset. Ebben az esetben

$$(ab)c = b, \tag{31. 1}$$

$$a(bc) = c, \tag{31. 2}$$

$$b(ca) = b. \tag{31. 3}$$

Ismét három alesetet különböztetünk meg az ab értéke szerint.

3. 1. Ha $ab = a$, akkor (31. 1)-ből $ac = b$ adódik. A kettőből együtt (31. 2) folytán következik, hogy bc értéke sem b, sem c nem lehet, tehát $bc = a$. Ebből ismét (31. 2) szerint $aa = c$. De akkor

$$(aa)b = cb = a, \quad a(ab) = aa = c,$$

vagyis (a, a, b) nemasszociatív, a feltevéseinkkel ellentétben.

3. 2. Ha $ab = b$, akkor (31. 1)-ből $bc = b$, ebből pedig (31. 2) folytán $ab = c$ következnék, ellentétben az $ab = b$ feltevéssel.

3. 3. Ha végül $ab=c$, akkor (31. 1) szerint

$$cc=b, \tag{32}$$

(31. 3) szerint pedig

$$ac=ca\neq a. \tag{33}$$

Ezért az ac értéke b vagy c.

3. 3. 1. Ha $ac=c$, akkor (32) és a $ba=c$ feltevés figyelembevételével

$$(cc)a=ba=c, \quad c(ca)=cc=b$$

következik, ellentmondásban (c, c, a) asszociativitásával.

3. 3. 2. Ha viszont $ac=b$, akkor (31. 3) szerint

$$bb=b,$$

(31. 2) szerint pedig

$$bc\neq c.$$

Ezekből és az $ab(=ba)=c$ feltevésből azonban

$$(bb)a=ba=c, \quad b(ba)=bc\neq c,$$

tehát (b, b, a) nemasszociatív.

A kapott ellentmondásokkal a 2. 2° állítás igazolását, s vele együtt a 3. tétel bizonyítását befejeztük.

Szegedi Tudományegyetem
Bolyai Intézete.

ABEL-FÉLE TORZIÓCSOPORTOK

KERTÉSZ ANDOR

1. §. Bevezetés

A végtelen Abel-féle csoportok struktúraelméletében alapvető fontosságú az a kérdés, hogy egy csoport milyen feltételek mellett teljesen felbontható, azaz direkt összege direkt felbonthatatlan csoportoknak. A kérdés azért lényeges, mert egy ilyen csoportot, a direkt felbonthatatlan csoportok ismeretében, strukturális szempontból teljesen leírtnak tekinthetünk. Az összes véges Abel-féle csoport teljes leírását is az ú. n. alaptétel tette lehetővé, mely szerint bármely véges Abel-féle csoport egyértelműen meghatározott prímszámhatvány rendű ciklikus csoportok direkt összege. A végtelen Abel-féle csoportok elmélete még jelenleg is igen messze van a lezártságtól. Legfejlettebb a torziócsoportok elmélete, hiszen ezek a csoportok, minthogy csupa véges rendű elemet tartalmaznak, legközelebb állnak a véges csoportokhoz. Ismeretes, hogy az Abel-féle torziócsoportok között csak a $C(p^m)$ $(0 \leqq m \leqq \infty)$ csoportok direkt felbonthatatlanok [4], [10].[1])[2]) Ennélfogva teljesen felbontható Abel-féle torziócsoport mindig ciklikus és kváziciklikus csoportok direkt összege. Minthogy bármely Abel-féle torziócsoport egyértelműen meghatározott p-csoportok direkt összege, ezért a torziócsoportok szerkezetével kapcsolatos vizsgálatokban elegendő p-csoportokra szorítkozni. A megszámlálható Abel-féle p-csoportok szerkezetét teljesen feltárja *Prüfer* [7], *Ulm* [11] és *Zippin* [12] elmélete. Ebben az elméletben alapvető fontosságú *Prüfer*nek ama tétele, mely szerint egy megszámlálható Abel-féle p-csoport akkor és csak akkor ciklikus csoportok direkt összege, ha nem tartalmaz végtelen magasságú elemet [7]. Jól ismert tény, hogy ez a tétel nem vihető át nem-megszámlálható csoportok esetére, azaz léteznek olyan megszámlálhatónál nagyobb számosságú, végtelen magasságú elem nélküli Abel-féle p-csoportok, amelyek nem bomlanak fel ciklikus csoportok direkt összegére. Ilyen csoportokra egy különösen egyszerű példát legújabban *Szele Tibor* [9] konstruált. *Prüfer* után hosszú ideig nem sikerült kritériumot adni tetszőleges számosságú Abel-féle p-csoport ciklikus csoportok direkt összegére

[1]) Másfelől már *Prüfer* óta jólismert tény, hogy vannak nem teljesen felbontható Abel-féle csoportok (lásd a jelen dolgozat 8. §-át).

[2]) A szögletes zárójelbe tett számok a dolgozat végén megadott irodalomra utalnak. — A jelölésekre és elnevezésekre nézve lásd a 2. §-t.

való bonthatóságára. *Kulikov* volt az első, akinek sikerült ilyen kritériumot találnia [5], s ezzel jelentős lendületet adott az ilyen irányú kutatásoknak.

Jelen dolgozatban egy igen általános, új kritériumot bizonyítunk be tetszőleges számosságú Abel-féle p-csoport teljes felbonthatóságára. Ez a kritérium úgy tekinthető, mint az összes idevágó eredmények egy mélyebben fekvő közös forrása. Belőle könnyen levezethető számos nevezetes tétel, mint pl. *Prüfer* és *Kulikov* már említett tétele, *Dieudonné* [2] egy új tétele, mely általánosítása *Kulikov* tételének, *Baer* [1] egyik tétele, a véges Abel-féle csoportok alaptétele és így tovább.

A dolgozat 2. §-a a használt jelöléseket és elnevezéseket tartalmazza. A 3. §-ban bebizonyítjuk a főkritériumot (1. tétel), majd ennek alkalmazásaként egy kritériumot a teljesen felbonthatóságra, továbbá egy kritériumot a ciklikus csoportok direkt összegére való bonthatóságra. Ez utóbbi két kritériumnak az alkalmazások szempontjából van fontos szerepe. A 4—7. §-okban a főkritérium alkalmazásait tárgyaljuk; éspedig a 4. §-ban teljesen felbontható Abel-féle p-csoportokat, az 5. §-ban ciklikus csoportok direkt összegére bontható csoportokat, a 6. és 7. §-ban pedig további alkalmazásokat. Végül a 8. §-ban azt is megmutatjuk, hogy eredményünk tovább már nem élesíthető.

Megjegyezzük, hogy bizonyításainkban csak a csoportelmélet alapvető fogalmaira és tényeire támaszkodunk. Seholsem használunk továbbá rendszámokat és transzfinit indukciót. Ezek szerepét a jelen dolgozatban *Zorn* lemmája (illetve a vele ekvivalens *Tukey*-féle lemma) tölti be, amelynek alkalmazása elvben is és gyakorlatban is jóval egyszerűbb.

2. §. Jelölések és elnevezések

A továbbiakban kizárólag Abel-féle csoportokat tekintünk és additív írásmódot használunk. A csoportokat és a csoportelemek halmazait nagybetűkkel jelöljük. Az $x, a, b, \ldots, g$ betűk csoportelemeket jelölnek, a többi latin kisbetű racionális egész számokat, speciálisan p törzsszámot jelent. A ν görög betű tetszőleges (általában nem rendezett) indexhalmaz valamely eleme. $O(a)$-val jelöljük az a csoportelem rendjét. Egy olyan csoportot, amelyben bármely elem rendje véges, *torziócsoportnak* nevezünk. Egy Abel-féle csoportot *p-csoportnak* mondunk, ha bármely elemének rendje a p törzsszámnak hatványa. Jól ismert, hogy egy Abel-féle torziócsoport egyértelműen meghatározott különböző (p törzsszámokhoz tartozó) p-csoportok direkt összege.

A p-csoportok vizsgálatában fontos szerepet játszik egy elem *magasságának* fogalma. Azt mondjuk, hogy a G p-csoport egy $a \neq 0$ elemének magassága $h = H(a)$, ha a $p^n x = a$ egyenlet $n \leq h$ esetén G-ben megoldható, de $n > h$ esetén nem oldható meg. Ha a $p^n x = a$ egyenletnek minden n természetes szám esetén van megoldása, akkor az a elemet végtelen magasságúnak mondjuk és a $H(a) = \infty$ jelölést használjuk. Hangsúlyozzuk, hogy a magasság fogalma csak zérustól különböző a elemre van definiálva[3]). Vizsgálatainkban igen lényeges, hogy a végtelen magasságú elemek között a következő megkülönböztetést tegyük. Azt mondjuk, hogy a G p-csoportnak egy végtelen magasságú a eleme *belsőleg végtelen magasságú*, ha a $p^t x = a$ egyenletnek bármely t természetes szám esetén van végtelen magasságú $x \in G$ megoldása. Ellenkező esetben, vagyis ha van olyan t, amelyre a $p^t x = a$ egyenletnek csak véges magasságú $x \in G$ megoldása van, az a elemet *külsőleg végtelen magasságú* elemnek nevezzük. Megjegyezzük, hogy ha G a $B_1, B_2, \ldots,$ alcsoportok direkt összege és $g = b_1 + b_2 + \cdots$ $(b_\nu \in B_\nu)$, akkor nyilvánvaló, hogy $H(g) \leq H(b_\nu)$ $(\nu = 1, 2, \ldots,)$.

A G csoport $a_1, a_2, \ldots, a_n$ elemeit függetleneknek mondjuk, ha bármely $r_1 a_1 + r_2 a_2 + \cdots + r_n a_n = 0$ relációból következik, hogy $r_1 a_1 = r_2 a_2 = \cdots = r_n a_n = 0$. A G csoport elemeinek egy tetszőleges S halmaza független, ha S-nek bármely véges részhalmaza független. Az így definiált függetlenség ennélfogva *„véges jellegű" tulajdonság*, s ezért *Zorn* lemmája (vagy a vele ekvivalens *Tukey*-féle lemma) szerint a G csoport bármely R részhalmaza tartalmaz egy S maximális független elemrendszert. Ha $R = G$, akkor azt mondjuk, hogy S maximális független elemrendszere G-nek.

Az $a, b, \ldots,$ elemekből generált alcsoportot $\{a, b, \ldots,\}$-vel jelöljük. Nyilvánvaló, hogyha $a, b, \ldots,$ függetlenek, akkor $\{a, b, \ldots,\} = \{a\} + \{b\} + \cdots$. $C(p^m)$-mel jelöljük $m < \infty$ esetén a p^m rendű ciklikus csoportot. $C(p^\infty)$-nel az ú. n. kváziciklikus csoportot jelöljük, azaz a p-hatvány nevezőjű racionális számok additív csoportját mod 1. Ez a csoport absztrakt előállításban az

$$\{a_1, a_2, a_3, \ldots,\}$$

csoport, amely az

$$a_1 \neq 0, pa_1 = 0, pa_2 = a_1, pa_3 = a_2, \ldots \tag{1}$$

definiáló relációkkal van meghatározva.

3. §. Felbonthatósági kritériumok

Mielőtt főeredményünket tétel formájában kimondanánk, előrebocsátjuk a következő definíciót:

Definíció. A G Abel-féle p-csoport valamely B alcsoportjának P maximális független elemrendszerét B *tartórendszerének* mondjuk (G-re vonatkozólag), ha P-nek egyetlen eleme sem cserélhető ki nagyobb magasságú B-beli elemmel a függetlenség megsértése nélkül[3])[4]). Abban a speciális esetben, amikor $B = G$, azt mondjuk, hogy P a G csoport tartórendszere.

[3]) A G csoport valamely a elemének magasságán mindig a G-beli magasságot, azaz $H(a)$-t fogjuk érteni olyankor is, amikor a-t pillanatnyilag G valamely alcsoportjának elemeként tekintjük.

[4]) Egy végtelen magasságú elemet természetesen bármely véges magasságú elemnél nagyobb magasságúnak tekintünk.

Megjegyzés. A fenti definícióval kapcsolatban hangsúlyoznunk kell, hogy a G csoport B alcsoportjának (G-re vonatkozó) P tartórendszere általában súlyosabb követelménynek tesz eleget, mintha csupán a B csoport egy tartórendszere volna (tekintet nélkül arra, hogy B a G csoportba van beágyazva). A B alcsoport (G-re vonatkozó) P tartórendszerétől ugyanis azt kívánjuk meg, hogy a függetlenség megsértése nélkül P egyetlen elemét se lehessen kicserélni olyan B-beli elemmel, amelynek *G-ben vett magassága* nagyobb volna. Ezért lényeges a zárójelbe tett kiegészítés, hogy P a B alcsoport „G-re vonatkozó" tartórendszere. A továbbiakban tartórendszeren mindig G-re vonatkozó tartórendszert értünk, még abban az esetben is, ha ezt a zárójelbe tett kiegészítés útján külön nem juttatjuk kifejezésre.

Egy P tartórendszer bármely véges magasságú eleme p rendű; ha ugyanis $a \in P$ és $O(a) = p^k$ $(k > 1)$ volna, akkor az a elemet kicserélhetnénk a nála nagyobb magasságú $p^{k-1}a$ elemmel. — Másrészt egy végtelen magasságú elem nyilván mindig kicserélhető p rendű végtelen magasságú elemmel (t. i. a tekintett elem alkalmas többszörösével) a függetlenség megsértése nélkül. Ezért a következőkben feltesszük, hogy *egy tartórendszer csupa p rendű elemekből áll.*

Most bebizonyítjuk a következő, vizsgálataink szempontjából alapvető tételt:

1. tétel. *Egy G Abel-féle p-csoport akkor és csak akkor teljesen felbontható, azaz ciklikus és kváziciklikus csoportok direkt összege, ha*

1) *G-nek nincs külsőleg végtelen magasságú eleme;*

2) *G tartalmaz olyan B alcsoportot, amelynek van tartórendszere (G-re vonatkozólag); s végül*

3) *a G/B faktorcsoport ciklikus csoportok direkt összege.*

B i z o n y í t á s. Az 1), 2) és 3) feltételek szükségességét könnyen beláthatjuk. Legyen ugyanis G a C_ν ciklikus és kváziciklikus csoportok direkt összege, és legyen $B = G$. Ekkor 1) és 3) nyilvánvalóan érvényes. Hogy 2) teljesülését is igazolhassuk, válasszunk ki a $B = G$ csoport minden C_ν direkt komponenséből egy p rendű a_ν elemet. Megmutatjuk, hogy az a_ν elemek P összessége G-nek tartórendszere. P először is maximális független elemrendszer G-ben. Továbbá egy tetszőleges p^k rendű $b \in G$ elemre érvényes egy

$$p^{k-1}b = r_1 a_1 + \cdots + r_n a_n$$

alakú reláció, ahol $a_1, \ldots, a_n$ alkalmasan választott elemek a P rendszerből. Világos, hogy a függetlenség megsértése nélkül legfeljebb az $a_1, \ldots, a_n$ elemek valamelyike cserélhető ki a b elemmel. Minthogy pedig $H(b) \leq H(p^{k-1}b) \leq \leq H(a_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$, a P rendszer egyetlen eleme sem cserélhető ki nagyobb magasságú G-beli elemmel. P tehát G-nek valóban tartórendszere.

Hogy az 1) — 3) feltételek elegendőségét bebizonyítsuk, tekintsünk egy tetszőleges, külsőleg végtelen magasságú elemek nélküli G Abel-féle p-csoportot. Legyen továbbá B a G-nek olyan alcsoportja, amelynek van $P=(a_\nu)$ tartórendszere (G-re vozatkozólag), és tegyük fel, hogy a $G/B=\bar{G}$ faktorcsoport ciklikus csoportok direkt összege:

$$\bar{G}=\sum_{k=1}^{\infty}\bar{A}_k,$$

ahol $\bar{A}_k$ direkt összege $C(p^k)$ csoportoknak (az $\bar{A}_k=0$ esetet is megengedve). Jelöljük D_k-val G azon alcsoportját, amelynek elemei épp az $\bar{A}_1+\cdots+\bar{A}_k$ csoport elemeit alkotó B szerinti mellékosztályokba esnek ($k>0$), legyen továbbá $D_0=B$. Állítjuk, hogy *a D_k csoport B-n kívül eső bármely elemének magassága*[3]) $\leqq k-1$ (tetszőleges $k>0$ egész számra). Ha ugyanis $g_k \in D_k$, $g_k \notin B$, akkor a G csoport g_k-t tartalmazó B szerinti mellékosztálya $\neq 0$, és így a $p^n\bar{x}=\bar{g}_k$ egyenlet legfeljebb $n\leqq k-1$-re oldható meg $\bar{G}=G/B$-ben. Ekkor azonban a $p^n x=g_k$ egyenletre is nyilván ugyanez áll G-ben.

Most a B megadott $P=P_0$ tartórendszerét kibővítjük a G csoport egy P^* maximális független elemrendszerévé a következőképpen. A $P=P_0$ rendszerhez vegyük hozzá a D_1 csoport bizonyos p rendű (és 0 magasságú) elemeit úgy, hogy a keletkezett P_1 rendszer D_1-nek egy maximális független elemrendszere legyen. Hasonló módon bővítsük ki P_1-et a D_2 egy P_2 maximális független elemrendszerévé úgy, hogy előbb vegyük P_1-hez G_2 p rendű és 1 magasságú elemeinek maximális független rendszerét („1-réteg"), majd pedig G_2 p rendű és 0 magasságú elemeinek maximális független rendszerét („0-réteg"). A D_3 maximális független P_3 elemrendszeréhez úgy jutunk, hogy a P_2 rendszert bővítjük a D_3 „2-rétegével", „1-rétegével", majd pedig „0-rétegével". Ezzel az eljárással lépésről-lépésre konstruáljuk meg a $P_4, P_5, \ldots$ rendszereket, ahol bármely P_n maximális független elemrendszere D_n-nek. Nyilvánvaló, hogy az összes $P=P_0, P_1, P_2, \ldots$ rendszer P^* egyesítési halmaza csupa p rendű elemekből álló maximális független rendszer G-ben.

Mindenekelőtt megmutatjuk, hogy P^* rendelkezik a következő tulajdonsággal:

Ha $a_1, \ldots, a_j$ P^*-nak tetszőleges elemei és

$$a'=s_1a_1+\cdots+s_ja_j, \tag{2}$$

akkor

$$H(a')\leqq H(a_i) \qquad (i=1,\ldots,j). \tag{3}$$

Ezt így láthatjuk be. Rendezzük el (2)-ben az $a_1, \ldots, a_j$ elemeket úgy, hogy

$$\text{ha } a_i \in D_m, \text{ akkor } a_{i-t}\in D_m \qquad (t=1,\ldots,i-1). \tag{4}$$

Most tegyük fel, hogy állításunkkal ellentétben (3) nem teljesül, és legyen i a legnagyobb index $1, \ldots, j$ között, amelyre

$$H(a')>H(a_i). \tag{5}$$

Ekkor

$$H(a_{i+u})\geqq H(a')>H(a_i) \qquad (u=1,\ldots,j-i). \tag{6}$$

Továbbá (2)-ből

$$g' = a' - (s_{i+1}a_{i+1} + \cdots + s_j a_j) = s_1 a_1 + \cdots + s_i a_i.$$

Ez a g' elem (4) miatt a_i-vel együtt benne van D_m-ben, továbbá $H(g') > H(a_i)$ (lásd (5), (6)). Az a_i elem tehát a P_m függetlenségének megsértése nélkül kicserélhető a nála nagyobb magasságú g' elemmel, ami ha $m > 0$, ellentmondást jelent a P_m rendszer konstrukciójával (pontosabban azzal a ténnyel, hogy P_m „$H(g')$-rétege“ maximális, az $m = 0$ esetben pedig a $P = P_0$ rendszer definíciójával jutunk ellentmondásba.[5]) Ezzel előbbi állításunkat igazoltuk.

Most megmutatjuk, hogy a G csoport teljesen felbontható. Ha a_ν a P^*-nak végtelen magasságú eleme, akkor minthogy ez 1) miatt belsőleg végtelen magasságú, G-ben létezik olyan $a_\nu^{(1)}, a_\nu^{(2)}, \ldots$ végtelen elemsorozat, amelyre

$$pa_\nu^{(1)} = a_\nu, \quad pa_\nu^{(2)} = a_\nu^{(1)}, \ldots.$$

Ekkor azonban (lásd (1))

$$\{a_\nu^{(1)}, a_\nu^{(2)}, \ldots\} = C_\nu = C_\nu(p^{m_\nu}) \qquad (m_\nu = \infty)$$

G-nek olyan kváziciklikus alcsoportja, amely tartalmazza a_ν-t. Másrészt, ha a_ν P^*-nak véges,

$$H(a_\nu) = h_\nu < \infty$$

magasságú eleme, akkor határozzunk meg olyan $c_\nu \in G$ elemet, amelyre

$$p^{h_\nu} c_\nu = a_\nu. \tag{7}$$

Ebben az esetben a_ν eleme a

$$\{c_\nu\} = C_\nu = C_\nu(p^{m_\nu}) \qquad (m_\nu = h_\nu + 1)$$

ciklikus csoportnak. Azt állítjuk, hogy G direkt összege az összes így nyert C_ν csoportnak. Valóban, a P^* rendszer függetlenségéből következik, hogy a G csoport C_ν-k által generált K alcsoportja direkt összege eme csoportoknak:

$$K = \sum_\nu C_\nu.$$

Tehát már csak azt kell bebizonyítanunk, hogy $K = G$.

Mielőtt azonban ennek bizonyítását elvégeznénk, lássuk be a következő megjegyzés helyességét: *Egy*

$$pg = d_1 + \cdots + d_m \qquad (g \in G,\ d_i \in C_i) \tag{8}$$

alakú relációból következik, hogy $d_i = pd_i'$ $(d_i' \in C_i, i = 1, \ldots, m)$. Tegyük fel ugyanis ennek ellenkezőjét. Ekkor van olyan

$$pg = r_1 c_1 + \cdots + r_k c_k \qquad (g \in G) \tag{9}$$

reláció is, ahol $p \nmid r_j$ $(j = 1, \ldots, k)$. (8)-ból ugyanis (9) alakú relációhoz juthatunk, ha (8) mindkét oldalához hozzáadjuk ama d_i elemek negatívját, amelyek $d_i = pd_i'$ $(d_i' \in C_i)$ alakban fejezhetők ki.[6]) A (9)-ben szereplő $c_1, \ldots, c_k$

[5]) Felhívjuk a figyelmet arra, hogy abban az esetben, amikor $m = 0$, g' (4) miatt $D_0 = B$-ben van.

[6]) d_i mindig ilyen, ha C_i kváziciklikus csoportnak eleme.

elemeknek feleljenek meg az $a_1, \ldots, a_k$ P^*-beli elemek, és legyen a_1 egyike a maximális magasságúaknak eme k számú elem között:

$$h_1 = H(a_1) \geqq H(a_j) \qquad (j = 1, \ldots, k).$$

Így (7)-ből és (9)-ből következik, hogy

$$a' = p^{h_1+1} g = r_1 a_1 + \cdots.$$

Ez azt mutatja, hogy $H(a') > H(a_1)$, s ez ellentmondásban van P^* fentebb igazolt tulajdonságával.

Most már könnyen bizonyíthatjuk, hogy $K = G$. Tegyük fel, hogy K valódi alcsoportja G-nek. Ekkor van olyan $g \in G$ elem, hogy

$$g \notin K, \quad pg \in K, \tag{10}$$

azaz érvényes egy (8) alakú reláció. Így $d_i = pd_i'$ $(d_i' \in C_i, i = 1, \ldots, m)$, tehát

$$p(g - d_1' - \cdots - d_m') = 0.$$

Minthogy pedig a ((10) miatt zérustól különböző)

$$g' = g - d_1' - \cdots - d_m' \tag{11}$$

elem rendje p, ez a g' elem a P^* rendszer maximális voltánál fogva bizonyos a_ν-k, azaz (7) szerint egyszersmind bizonyos c_ν-k lineáris kombinációjaként áll elő. Ekkor azonban (11) mutatja, hogy $g \in K$, ellentétben (10)-zel. Ez az ellentmondás az 1. tétel bizonyításának befejezését jelenti.

Az 1. tétel számos korolláriumai közül ebben a paragrafusban két kritériumot fogalmazunk meg, amelyeknek az alkalmazások szempontjából fontos szerepük van.

A $B = G$ speciális esetben az 1. tételből a következő tételt kapjuk:

2. tétel. *Egy G Abel-féle p-csoport akkor és csak akkor teljesen felbontható, ha G-nek nincs külsőleg végtelen magasságú eleme és tartalmaz tartórendszert.*[7])

Tegyük fel, hogy G nem tartalmaz végtelen magasságú elemet. Ekkor a 2. tételből arra kapunk szükséges és elegendő feltételeket, hogy egy Abel-féle p-csoport ciklikus csoportok direkt összege legyen:

3. tétel. *Egy G Abel-féle p-csoport, amelynek nincs végtelen magasságú eleme, akkor és csak akkor ciklikus csoportok direkt összege, ha G-nek van tartórendszere.*

[7]) A tételben megadott feltételeknek csak az elegendősége következik az 1. tételből, szükségességét azonban már az 1. tétel bizonyításánál beláttuk, mert ott éppen a $B = G$ speciális esetet használtuk. Felhívjuk a figyelmet arra, hogy a kritérium jellegű korolláriumoknál a továbbiakban is csak a feltételek elegendőségének bizonyításával foglalkozunk, mert a szükségesség többnyire nyilvánvaló, illetve igazolása az 1. tétel bizonyításában megadott eljárás szerint nyerhető.

4. §. Teljesen felbontható Abel-féle p-csoportok

Ebben a paragrafusban az 1. tételnek olyan alkalmazásait fogjuk látni, amelyek egy Abel-féle p-csoport teljes felbonthatóságára adnak meg kritériumot.

4. tétel. *Egy G Abel-féle p-csoport akkor és csak akkor teljesen felbontható, ha*

1. *G nem tartalmaz külsőleg végtelen magasságú elemeket,*

2. *G-nek van olyan B alcsoportja, hogy a G/B faktorcsoport ciklikus csoportok direkt összege, és*

3. *B egyesítési halmaza*

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots \subseteq A_n \subseteq \cdots$$

alcsoportok növekvő láncának, ahol minden A_n tartalmaz a véges magasságú elemek között maximális h_n magasságú elemet.

A 4. tétel feltételeinek szükségessége nyilvánvaló. Az elegendőség bizonyítása céljából az 1. tétel alapján csupán egy tartórendszert kell konstruálnunk B-ben (G-re vonatkozólag). Ez a következőképpen történhetik:

Tekintsük A_1 végtelen magasságú elemeinek egy maximális független rendszerét. Vegyük ehhez A_1 h_1 magasságú elemeinek maximális független rendszerét, majd A_1 h_1-1 magasságú elemeinek maximális független rendszerét, és így tovább, oly módon, hogy a keletkező P_1 rendszer az A_1 csoport maximális független elemrendszere legyen. Most bővítsük P_1-et az előbbi módon A_2-nek végtelen magasságú, majd $h_2, h_2-1, \ldots$ magasságú elemeivel A_2-nek egy maximális független P_2 elemrendszerévé. Ezt az eljárást folytatva, lépésről-lépésre a $P_3, P_4, \ldots, P_n, \ldots$ rendszerekhez jutunk, ahol P_n az A_n csoport maximális független elemrendszere. Azt állítjuk, hogy a $P_1, P_2, \ldots$ rendszerek P egyesítési halmaza B-nek tartórendszere (G-re vonatkozólag). Először is nyilvánvaló, hogy P maximális független rendszere B-nek, továbbá, hogy P minden eleme p rendűnek választható. A G csoport egy tetszőleges p^k rendű g elemére érvényes egy

$$a' = p^{k-1}g = s_1a_1 + \cdots + s_ja_j \tag{12}$$

alakú előállítás, ahol $a_1, \ldots, a_j$ P-nek alkalmasan választott elemei. Ez az egyenlet mutatja, hogy a P rendszer függetlenségének megsértése nélkül a g elemmel legfeljebb az $a_1, \ldots, a_j$ elemek valamelyike cserélhető ki. Másrészt azonban a 3. §-ban beláttuk, hogy a (12) egyenletből következik (3), s még inkább a

$$H(g) \leqq H(a_i) \qquad (i = 1, \ldots, j)$$

egyenlőtlenség érvényessége. Ezzel bebizonyítottuk, hogy P a B alcsoportnak tartórendszere (G-re vonatkozólag), s így az 1. tétel alkalmazásával a 4. tétel bizonyítását nyertük.

A 4. tétel abban a speciális esetben, amikor $B = G$, a következő tételt adja:

5. tétel. *Egy G Abel-féle p-csoport akkor és csak akkor teljesen felbontható, ha nem tartalmaz külsőleg végtelen magasságú elemet, és G egyesítési halmaza*

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots \subseteq A_n \subseteq \cdots$$

alcsoportok növekvő láncának, ahol minden A_n tartalmaz a véges magasságú elemek között maximális magasságú[3]*) elemet.*

Minthogy egy megszámlálható Abel-féle p-csoport olyan véges csoportok megszámlálható növő láncának egyesítési halmaza, amelyek mindegyike (minthogy véges csoport) a véges magasságú elemek között tartalmaz maximális magasságú elemet, az 5. tételből következik a

6. tétel. *Egy megszámlálható Abel-féle p-csoport akkor és csak akkor teljesen felbontható, ha nem tartalmaz külsőleg végtelen magasságú elemet.*

A 6. tétel más megfogalmazása *Prüfer* [7] következő tételének:

7. tétel. *Egy megszámlálható G Abel-féle p-csoport akkor és csak akkor ciklikus és kváziciklikus csoportok direkt összege, ha G bármely végtelen magasságú eleme benne van G-nek valamely $C(p^\infty)$ alcsoportjában.*

5. §. Ciklikus csoportok direkt összegére bontható Abel-féle p-csoportok

Minthogy ciklikus csoportok direkt összege nem tartalmaz végtelen magasságú elemet, továbbá egy végtelen magasságú elem nélküli teljesen felbontható Abel-féle p-csoport mindig ciklikus csoportok direkt összege, a ciklikus csoportok direkt összegére való bonthatóság legfontosabb kritériumait nyerhetjük, ha az előző paragrafusokban bebizonyított 1., 4., 5. és 6. tételekben a „külsőleg végtelen magasságú" elemek kizárását a „végtelen magasságú" elemek kizárásával helyettesítjük.

8. tétel. *Egy G Abel-féle p-csoport akkor és csak akkor direkt összege ciklikus csoportoknak, ha nincs végtelen magasságú eleme, és van olyan B alcsoportja, amely tartalmaz tartórendszert (G-re vonatkozólag), s amelyre a G B faktorcsoport ciklikus csoportok direkt összege.*

Megjegyezzük, hogy a fenti tételben elegendő azt megkívánni, hogy B ne tartalmazzon végtelen magasságú elemet, mert ebből a többi feltétellel együtt következik, hogy G-nek sincs végtelen magasságú eleme.

9. tétel. *(Dieudonné* tétele [2]). *Legyen G Abel-féle p-csoport és B olyan alcsoportja G-nek, hogy a G B faktorcsoport ciklikus csoportok direkt összege. G akkor és csak akkor direkt összege ciklikus csoportoknak, ha a B csoport*

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots \subseteq A_n \subseteq \cdots$$

alcsoportok növekvő láncának egyesítési halmaza, ahol minden A_n alcsoport tartalmaz maximális $h_n < \infty$ magasságú[3]*) elemet.*

Dieudonné tétele a $B = G$ speciális esetben *Kulikov* következő tételébe megy át:

10. tétel. (*Kulikov* tétele [5], [6]). *Egy G Abel-féle p-csoport akkor és csak akkor ciklikus csoportok direkt összege, ha G egyesítési halmaza*

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots \subseteq A_n \subseteq \cdots$$

alcsoportok növő láncának, ahol mindegyik A_n tartalmaz maximális $h_n < \infty$ magasságú[3]) *elemet.*

Kulikov tételének közvetlen következménye *Prüfer* nagyfontosságú tétele, amely kiinduló pontja volt a végtelen csoportok szerkezetére vonatkozó modern kutatásoknak és amelyen a megszámlálható Abel-féle torzió-csoportok *Prüfer—Ulm—Zippin*-féle elmélete is alapszik:

11. tétel. (*Prüfer* tétele [7]). *Egy megszámlálható Abel-féle p-csoport akkor és csak akkor direkt összege ciklikus csoportoknak, ha nem tartalmaz végtelen magasságú elemet.*

6. §. Alcsoportokra vonatkozó vizsgálatok

Hosszabb időn át nyílt kérdés volt, hogy ciklikus csoportok direkt öszszegére bontható csoport alcsoportjai is mindig ilyen tulajdonságúak-e. *Kulikov*nak sikerült 1945-ben először bebizonyítania, hogy ez valóban így van. *Kulikov* bizonyításának súlya a p-csoportokra esik, mert a tételnek eme speciális esete után már könnyen adódik a tétel bizonyítása az általános esetben. Az említett speciális eset igazolása nevezetes alkalmazásként nyerhető a 10. tételből:

12. tétel. (*Kulikov* [5], [6]) *Ciklikus csoportok direkt összegére bontható Abel-féle p-csoportnak minden alcsoportja szintén ciklikus csoportok direkt összege.*

Legyen ugyanis G olyan Abel-féle p-csoport, amely ciklikus csoportok direkt összege. Jelöljük A_k-val a G csoport ama ciklikus direkt komponenseinek direkt összegét, amelyeknek rendje $\leqq p^k$. A G csoport ekkor az $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots \subseteq A_k \subseteq \cdots$ alcsoportok egyesítési halmaza. Legyen mármost H tetszőleges alcsoportja G-nek, és $H_k = A_k \cap H$. Ekkor H a $H_1 \subseteq H_2 \subseteq \cdots \subseteq H_k \subseteq \cdots$ alcsoportok növekvő sorozatának egyesítési halmaza, s minthogy mindegyik A_k csoportnak van maximális magasságú eleme, méginkább áll ez a H_k csoportokra. Ennélfogva a 10. tétel alapján H valóban ciklikus csoportok direkt összege.

Minthogy a jelen dolgozatban kifejezetten Abel-féle torziócsoportokkal foglalkozunk, nem tárgyaljuk *Kulikov* említett tételének végtelen rendű elemeket tartalmazó csoportokra vonatkozó speciális esetét, amely lényegében a következő, a 12. tételnél jóval egyszerűbben bizonyítható állításból következik:

szabad Abel-féle csoport bármely alcsoportja is szabad Abel-féle csoport[8]). Ilyen módon *Kulikov* bizonyítása két, lényegesen eltérő módszerekkel elintézett esetre (t. i. a p-csoportok és a szabad csoportok esetére) vezeti vissza annak a tételnek igazolását, mely szerint ciklikus csoportok direkt összegének alcsoportjai is mindig ciklikus csoportok direkt összegére bonthatók. Ezzel szemben *Fuchs László*nak sikerült legújabban egységes bizonyítást adnia *Kulikov* eme nagyfontosságú tételére, amely tehát nem teszi szükségessé eltérő természetű alesetek megkülönböztetését [3]. *Fuchs* vizsgálataiban ciklikus csoportok direkt összegére bontható tetszőleges csoportokkal foglalkozik, és a mi módszerünk ötletes általánosítása útján olyan típusú, de nemcsak torziócsoportok esetére vonatkozó kritériumot bizonyít be, mint a jelen dolgozat 3. tétele.

Kulikov utóbb említett tétele tulajdonképpen azt mondja ki, hogy a ciklikus csoportok direkt összegére való bonthatóság csoportoknak olyan tulajdonsága, amely egy csoportról mindig „öröklődik" annak összes alcsoportjaira. Hogy ez a tétel milyen mélyenfekvő tényt fejez ki és mennyire nem magától értetődő, azt jól mutatja az a körülmény is, hogy a jelen dolgozat vizsgálatainak fő tárgyát alkotó teljes felbonthatóság tulajdonságára (amely pedig — mint láttuk — több szempontból rokonságot mutat a ciklikus csoportok direkt összegére való bonthatósággal) hasonló tétel nem érvényes. Nem igaz ugyanis az, hogy teljesen redukálható Abel-féle csoport bármely alcsoportja is teljesen redukálható. Ez következik abból a tételből, mely szerint bármely Abel-féle p-csoport alcsoportja egy teljesen felbontható Abel-féle csoportnak, amely elegendő sok $C(p^\infty)$ csoport direkt összege [8]. Másfelől jól ismert tény, hogy már a megszámlálható Abel-féle p-csoportok között is vannak nem teljesen felbonthatók. A *Prüfer*től származó legegyszerűbb példa ilyen csoportokra a 8. § (13) alatti egyenleteivel definiált Abel-féle csoport.

7. §. Abel-féle torziócsoportok, amelyekben a véges magasságú elemek magasságai korlátosak

Mint a 3. § 2. tételének első alkalmazását, bebizonyítjuk a következő tételt:

13. tétel. *Ha egy G Abel-féle p-csoportban a véges magasságú elemek magasságai korlátosak, akkor G teljesen felbontható, azaz ciklikus és kváziciklikus csoportok direkt összege.*

Bizonyítás. Először is megmutatjuk, hogy egy olyan G-csoport, amelyben bármely véges magasságú elem magassága $\leq h$ $(h < \infty)$ nem tartalmaz külsőleg végtelen magasságú elemet. E célból elegendő azt belátnunk, hogy egy ilyen G csoport tetszőleges végtelen magasságú eleme szükség-

[8]) Szabad Abel-féle csoporton végtelen ciklikus csoportok direkt összegét értjük.

képpen belsőleg végtelen magasságú G-ben. Valóban, ha a tetszőleges végtelen magasságú eleme G-nek, akkor van olyan $y \in G$, amelyre

$$p^{n+h+1}y = p^{n}(p^{h+1}y) = a$$

érvényes. Ezért a $p^{n}x = a$ egyenletnek bármely n-re van G-ben $x = p^{h+1}y$ végtelen magasságú megoldása, minthogy $p^{h+1}y$ nyilván végtelen magasságú elem[9]).

Most G-ben tartórendszert konstruálunk. Tekintsük G végtelen magasságú elemeinek maximális független rendszerét. Bővítsük ki ezt a rendszert G-beli h magasságú elemek maximális független rendszerével, majd a $h-1$ magasságú elemek maximális független rendszerével, és így tovább, G egy maximális független rendszerévé. A keletkezett rendszer G-nek nyilván tartórendszere. Ezzel — a 2. tétel alkalmazásával — a 13. tételt bebizonyítottuk.

A magasság fogalmának következő általánosításával a 13. tétel érvényességét tetszőleges torziócsoportra is kiterjeszthetjük. Legyen a a G torziócsoportnak tetszőleges eleme és $O(a) = p_1^{s_1} \dots p_r^{s_r}$ ($p_1, \dots, p_r$ különböző törzsszámok és $s_1, \dots, s_r > 0$). Ha az $n = p_1^{t_1} \dots p_r^{t_r}$ ($t_i \geqq 0$) alakú számok között, amelyekre a $nx = a$ egyenletnek van $x \in G$ megoldása, van legnagyobb n_0 szám, akkor ezt az n_0 számot mondjuk az a elem magasságának. Ellenkező esetben, vagyis ha az $nx = a$ egyenletnek bármely $n = p_1^{t_1} \dots p_r^{t_r}$ ($t_i \geqq 0$) alakú n-re van $x \in G$ megoldása, akkor azt mondjuk, hogy az a elem végtelen magasságú.[10])

Ennek a definíciónak alkalmazásával a 13. tételből a következő tételt kapjuk:

14. tétel. *Ha egy G Abel-féle torziócsoportban a véges magasságú elemek magasságai korlátosak, akkor G teljesen felbontható, azaz ciklikus és kváziciklikus csoportok direkt összege.*

A 14. tétel abban a speciális esetben, amikor G nem tartalmaz véges magasságú elemet, a következő jól ismert tételt adja:

15. tétel. *Ha egy G Abel-féle torziócsoportnak bármely eleme végtelen magasságú, akkor G kváziciklikus csoportok direkt összege (Prüfer* [7]*).*

A 14. tétel további alkalmazásaként *Baer* tétele [1] adódik:

16. tétel. *Bármely Abel-féle torziócsoport, amelynek van maximális rendű eleme, ciklikus csoportok direkt összegére bontható.*

Ha ugyanis egy csoportban az elemek rendjei korlátosak, akkor nyilván ugyanez áll a magasságokra is és természetesen a csoportban nincs végtelen magasságú elem.

[9]) Ezért az ötletért *Fuchs Lászlónak* mondok köszönetet.

[10]) Felhívjuk az olvasó figyelmét arra a tényre, hogy p-csoportok esetében a magasság fogalmának fenti definíciója nem egyezik meg azzal a definícióval, amelyet a 2. §-ban adtunk meg. Az eltérés azonban elvi szempontból lényegtelen, és végtelen magasságú elemekre a két definíció megegyezik.

A 16. tétel közvetlen következménye a véges Abel-féle csoportok alaptétele:

17. tétel. *Bármely véges Abel-féle csoport ciklikus csoportok direkt összege.*

8. §. A főkritérium élessége

Ebben a §-ban megmutatjuk, hogy az 1. tétel tovább már nem élesíthető. Először is azt mutatjuk meg, hogy az 1) feltétel az 1. tételben nem hagyható el. Tekintsük ugyanis a $G=\{a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$ Abel-féle csoportot, amely a következő relációkkal van definiálva:

$$a_0 \neq 0, \quad pa_0 = 0, \quad a_0 = pa_1 = p^2 a_2 = \cdots = p^n a_n = \cdots \tag{13}$$

és amelynek egy nevezetes tulajdonságára már *Prüfer* rámutatott [7]. E csoport bármely g eleme *egyértelműen* felírható

$$g = k_0 a_0 + k_1 a_1 + \cdots + k_n a_n + \cdots$$

alakban, ahol $0 \leqq k_0 \leqq p-1$, $0 \leqq k_n \leqq p^n - 1$ $(n = 1, 2, \dots)$, és csak véges számú k_n együttható $\neq 0$. A G csoport nem teljesen felbontható, minthogy tartalmaz külsőleg végtelen magasságú elemet, pl. az a_0 elemet. Az 1. tétel 2) és 3) feltétele mégis teljesül. Az

$$a_0, \; a_1 - pa_2, \; pa_2 - p^2 a_3, \dots, p^{n-1} a_n - p^n a_{n+1}, \dots \tag{14}$$

elemekből álló P rendszerről ugyanis könnyen beláthatjuk, hogy $B = G$-nek tartórendszere.

Először is nyilvánvaló, hogy a P rendszer csupa p rendű elemből áll, s ezen elemek magasságai rendre

$$\infty, 0, 1, \dots, n-1, \dots . \tag{15}$$

— A P rendszer *független* elemrendszer. Egy

$$r_0 a_0 + r_1(a_1 - pa_2) + r_2(pa_2 - p^2 a_3) + \cdots + r_n(p^{n-1} a_n - p^n a_{n+1}) = 0,$$
$$(0 \leqq r_i \leqq p-1, \; i = 0, \dots, n-1; \; 1 \leqq r_n \leqq p-1)$$

alakú relációból ugyanis az

$$r_0 a_0 + r_1 a_1 + (r_2 - r_1) pa_2 + (r_3 - r_2) p^2 a_3 + \cdots - r_n p^n a_{n+1} = 0$$

egyenlet adódnék, ami $1 \leqq r_n \leqq p-1$ miatt lehetetlen.

A P rendszer *maximális* független elemrendszer. Ennek igazolása céljából megmutatjuk, hogy a G csoport tetszőleges p rendű b eleme felírható

$$s_0 a_0 + s_1(a_1 - pa_2) + s_2(pa_2 - p^2 a_3) + \cdots \tag{16}$$

alakban, ahol $0 \leqq s_n \leqq p-1$. Legyen ugyanis

$$b = k_n a_n + k_{n-1} a_{n-1} + \cdots + k_2 a_2 + k_1 a_1 + k_0 a_0$$

p rendű eleme G-nek. Ekkor

$$pb = k_n pa_n + k_{n-1} pa_{n-1} + \cdots + k_2 pa_2 + k_1 a_0 = 0.$$

Ebből az következik, hogy

$$\left.\begin{aligned} k_n = p^{n-1}k'_n,\ \ k_{n-1} = p^{n-2}k'_{n-1}, \ldots, k_2 = pk'_2 \ \ \text{és} \\ k'_n + k'_{n-1} + \cdots + k'_2 + k_1 = pl. \end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

Ennélfogva

$$\begin{aligned} b &= k'_n p^{n-1} a_n + k'_{n-1} p^{n-2} a_{n-1} + \cdots + k'_2 p a_2 + k_1 a_1 + k_0 a_0 = \\ &= k'_n (p^{n-1} a_n - p^{n-2} a_{n-1}) + (k'_n + k'_{n-1})(p^{n-2} a_{n-1} - p^{n-3} a_{n-2}) + \cdots + \\ &+ (k'_n + k'_{n-1} + \cdots + k'_3 + k'_2)(pa_2 - a_1) + (k'_n + \cdots + k'_2 + k_1) a_1 + k_0 a_0, \end{aligned}$$

azaz b valóban (16) alakú elem, minthogy a két utolsó tag összege (17) alapján $(l + k_0) a_0$.

Már csak azt kell belátnunk, hogy a (14) alatti P rendszer egyetlen eleme sem cserélhető ki nagyobb magasságú G-beli elemmel a függetlenség megsértése nélkül. Legyen e célból g tetszőleges, p^{m+1} rendű eleme G-nek. Ekkor a P rendszer maximális voltánál fogva érvényes egy

$$g' = p^m g = s_0 a_0 + s_1(a_1 - pa_2) + s_2(pa_2 - p^2 a_3) + \cdots \quad (0 \leqq s_i \leqq p-1) \qquad (18)$$

összefüggés. Ez azt mutatja, hogy g-vel a függetlenség megsértése nélkül legfeljebb a (18)-ban *valóban* fellépő (azaz zérustól különböző együtthatójú) elemei cserélhetők ki P-nek. Minthogy pedig $H(g) \leqq H(g')$, elegendő azt megmutatnunk, hogy $H(g')$ *legfeljebb akkora, mint a* (18) *jobboldalán valóban fellépő P-beli elemek közül a legkisebb magasságúnak a magassága.* Ha (18) jobboldalán csak az $s_0 a_0$ tag szerepel egyedül, akkor igazolandó állításunk nyilvánvalóan igaz, mivel $H(a_0) = \infty$. Ellenkező esetben (18) így írható:

$$g' = s_0 a_0 + p^{i-1} s_i a_i + p^i (s_{i+1} - s_i) a_{i+1} + p^{i+1}(s_{i+2} - s_{i+1}) a_{i+2} + \cdots \qquad (19)$$

ahol i a (18) jobboldalán valóban fellépő legkisebb pozitív indexű s_n együttható indexe, s azt kell megmutatnunk, hogy $H(g') \leqq i-1$, minthogy a (18) relációban valóban szereplő P-beli elemek közül a legkisebb magasságúnak $i-1$ a magassága (lásd a (15) alatti magasságsorozatot). Ez azonban nyilvánvaló, mert az ellenkező $H(g') \geqq i$ esetben (19) szerint $p^{i-1} s_i a_i$ egyenlő volna egy G-beli elem p^i-szeresével, ami $1 \leqq s_i \leqq p-1$ miatt lehetetlen. — Ezzel megmutattuk, hogy a G csoport eleget tesz az 1. tételbeli 2) és 3) követelményeknek, 1)-nek viszont nem.

Most azt mutatjuk meg, hogy 1. tétel 2) követelménye sem hagyható el. Következik ez abból, hogy van olyan Abel-féle p-csoport, amely nem tartalmaz végtelen magasságú elemet, s nem teljesen felbontható. Egy ilyen G csoport ugyanis eleget tesz az 1. tétel 1) és 3) követelményének ($B = G$-vel). Legújabban *Szele Tibor* adott meg igen egyszerű példát ilyen G csoportra: Tekintsük a $\{b_n\} = C(p^n)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ ciklikus csoportok komplett direkt összegét, azaz az összes

$$c = \langle m_1 b_1, m_2 b_2, \ldots, m_n b_n, \ldots \rangle$$

„vektorok" halmazát. Ez a halmaz nyilván csoport a vektorok komponensenkénti összeadására nézve. E csoportban a véges rendű elemek egy olyan G

Abel-féle p-csoportot alkotnak, amely nyilván nem tartalmaz végtelen magasságú elemet, s amely, mint könnyen belátható, nem bontható fel ciklikus csoportok direkt összegére [9], s így egyszersmind nem teljesen felbontható.

Végül megmutatjuk, hogy a 3) követelmény sem hagyható el az 1. tételből. Sőt, még az is igaz, hogy ez a követelmény nem helyettesíthető a következő gyengébb feltétellel: G/B legyen teljesen felbontható, azaz ciklikus és kváziciklikus csoportok direkt összege. Megadható ugyanis olyan G Abel-féle p-csoport, amelyben nincsen végtelen magasságú elem, de tartalmaz olyan B alcsoportot, amelynek van tartórendszere (G-re vonatkozólag) és amelyre G/B teljesen felbontható. Ilyen tulajdonságú G csoport pl. az, amelyet az előző bekezdésben konstruáltunk. Minthogy ez nem tartalmaz végtelen magasságú elemet és nem teljesen felbontható, elegendő azt megmutatnunk, hogy ez a G csoport tartalmaz olyan B alcsoportot, amelynek van tartórendszere (G-re vonatkozólag) s amelyre G/B teljesen felbontható. Az utóbbi viszont könnyen adódik *Kulikov* egy fontos tételéből, amely így szól: Egy G Abel-féle p-csoport mindig tartalmaz olyan B alcsoportot, amely direkt összege $\{c_\nu\} = C(p^{k_\nu})$ ciklikus csoportoknak, továbbá G/B kváziciklikus csoportok direkt összege, és B bármely elemének ugyanaz a magassága G-ben, mint B-ben [5], [6]. Alkalmazva ezt a tételt az általunk tekintett G csoportra, beláthajuk, hogy B-nek van tartórendszere (G-re nézve), mégpedig az összes $a_\nu = p^{k_\nu-1}c_\nu$ elemek P halmaza ilyen rendszer. Egyfelől ugyanis világos, hogy P maximális független rendszer B-ben. Másfelől legyen g a B csoportnak tetszőleges p^k rendű eleme. Ekkor érvényes egy

$$p^{k-1}g = r_1a_1 + \cdots + r_na_n$$

alakú reláció (ahol $a_1, \ldots, a_n$ a P rendszer alkalmasan választott elemei), mely mutatja, hogy a g elemet a P rendszer függetlenségének megsértése nélkül legfeljebb az $a_1, \ldots, a_n$ elemek valamelyikével lehet kicserélni. Minthogy továbbá

$$H(g) \leqq H(p^{k-1}g) \leqq H(a_i) \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

ahol $H(x)$ az $x \in B$ elemnek B-re és G-re vonatkozó közös magasságát jelenti, P-nek egyetlen eleme sem cserélhető ki nagyobb magasságú B-beli elemmel a függetlenség megsértése nélkül. Ezért P valóban tartórendszere B-nek.

Debreceni Tudományegyetem
Matematikai Intézete.

IRODALOM

[1] *R. Baer*, Der Kern, eine charakteristische Untergruppe, Compositio Math., *1* (1935), 254—283.

[2] *J. Dieudonné*, Sur les p-groupes abéliens infinis, Portugaliae Math. *11* (1952), 1—5.

[3] *Fuchs L.*, The direct sum of cyclic groups, Acta Math. Acad. Sci. Hung., *3* (1952), 177—195.

[4] Л. Я. Куликов, К теории абелевых групп произвольной мощности, Мат. Сборник, *9* (51), (1941), 165—182.

[5] Л. Я. Куликов, К теории абелевых групп произвольной мощности, Мат. Сборник, *16* (58), (1945), 129—162.

[6] А. Г. Курош, Теория групп, Москва, 1953.

[7] *H. Prüfer*, Untersuchungen über die Zerlegbarkeit der abzählbaren primären Abelschen Gruppen, Math. Zeitschrift, *17* (1923), 35—61.

[8] *Szele T.*, Ein Analogon der Körpertheorie für Abelsche Gruppen, Journal f. d. reine u. angew. Math., *188* (1950), 167—192.

[9] *Szele T.*, On non-countable abelian p-groups, Publ. Math., Debrecen, *2* (1952), 300—301.

[10] *Szele T.*, On direct decompositions of abelian groups, J. London Math. Soc. *28* (1953), 247—250.

[11] *H. Ulm*, Zur Theorie der abzählbar-unendlichen Abelschen Gruppen, Math. Ann., *107* (1933), 774—803.

[12] *L. Zippin*, Countable torsion groups, Ann. of Math., *36* (1935), 86—99,

A VÉGES OSZTÁLYÚ CSOPORTOK ELMÉLETE

ERDŐS JENŐ

Bemutatta Rédei László lev. tag az 1954. február 8-án tartott felolvasó ülésen

1. §. Bevezetés

A végtelen csoportok szerkezetére vonatkozó kutatásokban a legmélyebb eredményeket eddig olyan csoportok többé-kevésbbé tág köreire sikerült nyerni, amelyek bizonyos jellegzetes tulajdonságaiknál fogva közel állanak vagy a véges csoportokhoz, vagy az (tetszőleges számosságú) Abel-féle csoportokhoz. A csoportoknak egy ilyen kategóriáját alkotják azok a csoportok, amelyekben bármely elemnek véges számú konjugáltja van, és amelyeket az alábbiakban röviden *véges osztályú* csoportoknak fogunk nevezni. Minthogy egyfelől minden véges csoport, másfelől minden Abel-féle csoport véges osztályú csoport, a véges osztályú csoportok közös általánosítását szolgáltatják a véges csoportoknak és az Abel-féle csoportoknak. Triviális példákat kapunk még véges osztályú csoportokra tetszőleges Abel-féle csoport és tetszőleges véges csoport direkt szorzatának képzése útján is. Látni fogjuk azonban (8. §), hogy már két elemmel generált véges osztályú csoport is van, amely nem állítható elő ilyen triviális konstrukcióval.

A véges osztályú csoportok részletes és egységes elméletét először *B. H. Neumann* [8] dolgozta ki, bár néhány, a jelen dolgozatban is szereplő eredmény már *Neumann* dolgozatát megelőzően is szerepelt az irodalomban e csoportokra vonatkozólag [2], [5]. *B. H. Neumann* dolgozata nemcsak a véges osztályú csoportok önmagában is fontos és érdekes elméletét tartalmazza és vizsgálja ki messzemenően, hanem számos alkalmazást is tárgyal, amelyek más irányú kutatásokban is nagy jelentőségűeknek bizonyultak. Így megemlíthetjük pl., hogy *Neumann* egyik eredménye a rendezett csoportok elméletében talált számottevő alkalmazásra [4], másfelől *R. Baer* egyik újabb tétele is [1], [3], amely sok fontos alkalmazása révén az utóbbi évek csoportelméleti kutatásaiban elért egyik legjelentősebb eredménynek bizonyult, *Neumann* elméletének keretében bizonyítható be legegyszerűbben. *Baer* eme tétele azt mondja ki, hogy ha egy tetszőleges csoportban a centrum indexe véges, akkor a csoport kommutátorcsoportja véges. Jelen dolgozatunk egyik főeredménye ennek a tételnek még a *Neumann*-félénél is egyszerűbb eszközöket igénylő bizonyítása lesz (6. §), továbbá e tétel alkalmazása *Ju. G. Fjodorov* egy egészen új eredményének igen egyszerű és rövid bizonyítására (7. §). *Fjodorov* tétele úgy szól, hogy ha egy végtelen csoport bármely egynél több elemű alcsoportja véges indexű, akkor a csoport ciklikus [7]. *Fjodorov* ezt a rendkívül szép tételt

O. Ju. Smidt egy igen mély tételének felhasználásával bizonyítja, úgyhogy a jelen dolgozatban adott bizonyítás *Fjodorov* tétele első elemi bizonyításának tekinthető. Egyébként *Fjodorov* tétele számos éven át mint *O. Ju. Smidt* által bizonyításra kitűzött sejtés szerepelt, és „duálisa" még most sincsen bebizonyítva. Ez a sejtés úgy szól, hogy ha egy végtelen csoport bármely valódi alcsoportja véges, akkor a csoport $C(p^\infty)$ típusú csoport, azaz izomorf az összes p^n-edik komplex egységgyökök multiplikatív csoportjával, ahol p rögzített törzsszám, míg n az összes pozitív egész szám értékét felveszi. Amenynyire nagy átütőerejűnek bizonyult a véges osztályú csoportok elmélete *Fjodorov* eredményével kapcsolatban, annyira sajnálatos az említett duális sejtés bizonyításához vezető megfelelő elmélet hiánya. A sejtés még Abel-féle csoportok esetében sem triviális. Erre az esetre *Szélpál István*nak sikerült bebizonyítania a sejtést [10].

A jelen dolgozat egyrészt tartalmazza a véges osztályú csoportok *B. H. Neumann*-féle elméletét nagymértékben egyszerűsített és elemivé tett formában, másrészt újabb eredményekkel is egészíti ki ezt az elméletet. Ami *Neumann* tárgyalásának egyszerűsítését, illetve elemivé tételét illeti, megemlítjük, hogy *Neumann* tárgyalása két ponton vesz igénybe nem elemi eszközöket. Egyik ilyen mozzanat *Neumann* tárgyalásában *Schreier* egy mély tételének alkalmazása, amely azt mondja ki, hogy végesen generált csoport centruma is végesen generált, amennyiben a centrum indexe véges. Mi a jelen dolgozatban el tudjuk kerülni e tétel alkalmazását, mert e tétel véges osztályú csoportokra vonatkozó speciális esetére igen egyszerű bizonyítást adunk (2. §). A másik nem elemi mozzanat *Neumann* bizonyításaiban az, hogy kénytelen kibővíteni az alapulvett csoportot, mégpedig „azonosított alcsoporttal bíró direkt szorzat" konstrukciója útján. Ez egy nagyfontosságú csoportelméleti konstrukció, amely a legutóbbi évek irodalmában számos jelentős alkalmazásra talált, azonban nem mondható elemi jellegűnek, és csoportelméleti könyvekben eddig még nem hozzáférhető. A jelen dolgozatban egészen más úton tárgyaljuk az elméletnek ezt a részét, és sikerül elkerülnünk mind az alapulvett csoport kibővítését, mind általában a bonyolultabb csoportkonstrukciókat. Az említett egyszerűsítések *Neumann* tárgyalásának olyan nagymértékű átalakítását tették lehetővé, hogy a két tárgyalási mód között az egyetlen lényeges közös mozzanatot *I. Schur* egy klasszikus módszerének alkalmazása jelenti [9], amelyet mi a 3. §-beli 3. 3. segédtétel bizonyításánál alkalmazunk. Így a jelen dolgozat a csoportelmélet legegyszerűbb alapfogalmainak ismeretében teljesen megérthető.

Fjodorov tételének már említett bizonyítása mellett (7. §) új eredményeket tartalmaznak a jelen dolgozatban azok a vizsgálatok, amelyek tisztázzák a szereplő tételek megfordításának, illetve élesítésének lehetőségeit (8. §).

Annak, hogy egy csoport mennyire áll közel az Abel-féle csoportokhoz, bizonyos értelemben „mértéke" a csoport centruma, illetve kommutátorcsoportja. Éspedig annál közelebb esik egy csoport az Abel-féle csoportokhoz, minél

„kisebb" a kommutátorcsoportja (magához a csoporthoz viszonyítva), illetőleg minél „nagyobb" a centruma, azaz minél kisebb a centrum indexe a csoportban. Ezért várható, hogy a véges osztályú csoportok bizonyos tulajdonságai tükröződnek a csoport centrumára, illetve kommutátorcsoportjára vonatkozó tételekben. Valóban, látni fogjuk, hogy egy csoport mindig véges osztályú, ha centrumának indexe véges, vagy ha kommutátorcsoportja véges (2. §, 6. §). A 8. §-ban azonban megmutatjuk, hogy e két elegendő feltétel egyike sem szükséges. Az említett állítások ugyanis csak végesen generált csoportok esetén fordíthatók meg. Másrészt az is kiadódik *Neumann* elméletéből, hogy véges osztályú csoport kommutátorcsoportjában minden elem véges rendű (3. §). A 8. §-ban megmutatjuk, hogy ez a szükséges feltétel általában nem elegendő ahhoz, hogy egy csoport véges osztályú csoport legyen. Ezek az eredmények kézenfekvővé teszik azt is, hogy milyen alapon lehetséges a véges osztályú csoportok elméletében annak a nagyfontosságú *Baer*-féle tételnek igazolása, mely szerint hogyha egy csoport centrumának indexe véges, akkor a csoport kommutátorcsoportja véges (6. §). A 8. §-ban azt is megmutatjuk, hogy *Baer* eme tétele nem fordítható meg; a tétel megfordítása csak végesen generált csoportokra bizonyítható (6. §).

A. G. Kuros nyomán *lokálisan végesnek* nevezünk minden olyan csoportot, amelynek véges számú eleme mindig benne van a csoport egy véges alcsoportjában [6]. Ez a fogalom rendkívül nagyfontosságú a végtelen csoportok modern struktúraelméletében, és ezzel kapcsolatban fennáll *Burnside* ama híres, mindmáig igazolatlan sejtése, hogy minden olyan csoport lokálisan véges, amely csak véges rendű elemeket tartalmaz. Azt, hogy a véges osztályú csoportok közel állanak az Abel-féle csoportokhoz, mutatja az a tétel is, mely szerint véges osztályú csoportban a véges rendű elemek mindig alcsoportot, mégpedig lokálisan véges alcsoportot alkotnak (4. §).

A véges osztályú csoportok elméletének fontos alkalmazásaként nyerjük majd az 5. §-ban *Dicman* következő tételét: Egy tetszőleges csoport elemeinek valamely véges részhalmaza akkor és csak akkor van benne a csoport egy véges normálosztójában, ha a részhalmaz csak véges rendű elemekből áll, és ezen elemek mindegyikének csak véges számú konjugáltja van a csoportban [5].

Most még röviden vázoljuk azt az utat, amelyen haladva a jelen dolgozatban felépítjük a véges osztályú csoportok elméletét (2—4. §). A mi tárgyalásunkban az elmélet középpontját az a tétel alkotja, mely szerint véges osztályú csoportban a kommutátorcsoport csak véges rendű elemeket tartalmaz (lásd a főtételt a 3. §-ban). Ehhez a főtételhez a következő úton jutunk. Először megmutatjuk, hogy a főtételt elegendő végesen generált csoportokra bebizonyítani. Egy végesen generált véges osztályú G csoport centrumában mindig van olyan csupa végtelen rendű elemekből álló A alcsoport, amelynek G-beli r indexe véges. Ekkor G bármely elemének r-edik hatványa A-ban van. A 3. §-ban (lásd 3.3 segédtétel) bebizonyítjuk, hogy G-beli elemek tetszőleges szorzatát szabad úgy emelni r-edik hatványra, hogy a szorzat minden tényezőjét külön r-edik hatványra emeljük. Ez a leglényegesebb új mozzanat *Neumann* elméletének általunk adott felépítésében, és ebből már világos, hogy G kommutátorcsoportjában bármely elem r-edik hatványa egyenlő az egységelemmel, hiszen G bármely elemének r-edik hatványa már G centrumában van.

2. §. Előzmények

Ebben a §-ban összefoglaljuk azokat az alapvető tényeket, amelyekre a véges osztályú csoportok elméletét a 3. és 4. §-ban felépítjük. A bármely csoportelméleti könyvből ismert legegyszerűbb segédtételeket csupán megemlítjük, bizonyítás nélkül.

Mindenekelőtt a használt jelöléseket és elnevezéseket soroljuk fel. Csoportokat latin nagybetűkkel, csoportok elemeit pedig az $a, b, \dots, g$ kisbetűkkel fogjuk jelölni; az utóbbiakat gyakran indexekkel ellátva is alkalmazzuk. A többi latin kisbetű racionális egész számot jelöl. Abel-féle csoporton kommutatív csoportot értünk. Egy csoportot akkor nevezünk *végesen generált*nak, ha megadható véges számú elem a csoportban úgy, hogy ezek egyidejűleg nincsenek benne a csoport egyetlen valódi alcsoportjában sem. A jelen §-ban alkalmazni fogjuk a végesen generált Abel-féle csoportok jólismert alaptételét, mely szerint egy ilyen csoport mindig előállítható véges számú ciklikus csoport direkt szorzataként. Ebből a tényből mi annyit használunk fel, hogy bármely végesen generált Abel-féle csoport egy véges csoport és egy torziómentes csoport direkt szorzata. *Torziómentes*nek az olyan csoportot nevezzük, amelyben nincsen az egységelemtől különböző véges rendű elem. Az olyan csoportot viszont, amelyben bármely elem véges rendű, *torziócsoport*nak hívjuk. *Vegyes csoport* az olyan csoport, amely nem torziócsoport, de nem is torziómentes csoport. Egy csoport mindazon elemei, amelyek egy adott elemmel felcserélhetők, alcsoportot alkotnak, s ezt az alcsoportot az adott elem *normalizátorá*nak nevezzük. Egy csoport *centruma* a csoportnak azokból az elemeiből áll, amelyek a csoport bármely elemével felcserélhetők. Ha a, b tetszőleges elemei a G csoportnak, akkor az

$$[a, b] = a^{-1}b^{-1}ab$$

elemet az a, b elemek *kommutátorá*nak nevezzük. A G csoport G'-vel jelölt *kommutátorcsoportja* az az alcsoport G-ben, amelyet G összes kommutátorai generálnak. Egy csoportban a centrum és a kommutátorcsoport mindig normálosztó. Az összes szereplő csoportok egységelemét (félreérthetőség veszélye nélkül) 1-gyel jelöljük.

Az elemekből ismeretes a következő

2. 1. segédtétel. *Egy csoport valamely eleme konjugáltjainak számosságát az elem normalizátorának indexe adja meg.*

Ebből következik, hogy a véges osztályú csoportok azzal a tulajdonsággal jellemezhetők, hogy bármely elemük normalizátora véges indexű a csoportban. Minthogy egy csoport centruma megegyezik az összes elemek normalizátorainak közös részével, nyilvánvaló a következő tétel helyessége, amely elegendő feltételt ad arra, hogy egy csoport véges osztályú csoport legyen:

2. 2. segédtétel. *Ha egy csoport centrumának indexe véges, akkor a csoport véges osztályú csoport.*

Ez az elegendő feltétel azonban általában nem szükséges, amint a 8. §-ban látni fogjuk. A 2. 2. segédtétel állítását csupán végesen generált csoportok esetén tudjuk megfordítani:

2. 3. segédtétel. *Végesen generált véges osztályú csoport centruma véges indexű.*

Bizonyítás. Legyen G végesen generált véges osztályú csoport, és tekintsük G egy véges generátorrendszerét. Világos, hogy G centruma a tekintett generátorrendszer elemeihez tartozó normalizátorok közös része. Minthogy G véges osztályú csoport, ezek a normalizátorok véges indexű alcsoportok G-ben. Másfelől véges számú véges indexű alcsoport közös része is véges indexű alcsoport, mivel a közös rész indexe nem lehet nagyobb a szereplő alcsoportok indexeinek szorzatánál. Ezért a 2. 3. segédtétel helyes.

2. 4. segédtétel. *Végesen generált véges osztályú csoport bármely véges indexű alcsoportja végesen generált csoport.*

Bizonyítás. Legyen G végesen generált véges osztályú csoport, és legyen H véges r indexű alcsoport G-ben. Ha G valamely rögzített véges generátorrendszeréhez hozzávesszük az abban szereplő elemek inverzeit, majd az így kibővített elemrendszerhez hozzávesszük még valamennyi abban szereplő elem összes konjugáltját is, akkor, minthogy G véges osztályú csoport, még mindig véges

$$g_1, g_2, \ldots, g_n \tag{1}$$

generátorrendszert kapunk, amely azonban már bármely elemével együtt annak inverzét és valamennyi konjugáltját is tartalmazza. Alkossuk meg az összes olyan legfeljebb r tényezős

$$a_1 a_2 \ldots a_k \qquad (a_i = g_j;\ k \leqq r) \tag{2}$$

szorzatokat, amelyeknek bármely a_i tényezője az (1) alatti elemek közül való. (Ugyanaz az elem többször is szerepelhet tényezőként, és a tényezők sorrendje lényeges.) Az így megalkotott (2) alatti szorzatok halmazát jelöljük K-val. K nyilván véges halmaz. A 2. 4. segédtételt úgy bizonyítjuk be, hogy megmutatjuk: *a K halmaz H-ba tartozó elemei generálják a H alcsoportot.*

Ennek igazolása céljából tekintsük a H alcsoport tetszőleges b elemét. Mivel ez eleme a G csoportnak, felírható olyan

$$b = b_1 b_2 \ldots b_s \qquad (b \in H) \tag{3}$$

szorzatként, amelynek valamennyi b_i tényezője az (1) alatti elemek közül való. Azt, hogy a (3) alatti b elem előállítható a K halmazból vett elemek szorzataként, s szerinti teljes indukcióval bizonyítjuk be, feltételezve tehát az előállíthatóságot olyan (3) alatti szorzatokra, amelyek s-nél kevesebb tényezőt tartalmaznak. Nyilván elegendő az $s > r$ esettel foglalkoznunk, hiszen $s \leqq r$ esetén a H-ba tartozó (3) alatti b elem már maga is a K halmaz egyik eleme. Minthogy $s > r$, az s számú

$$b_1, b_1 b_2, \ldots, b_1 b_2 \ldots b_s$$

elem között van két olyan, amely G-nek a H alcsoport szerinti kifejtésében ugyanabba a jobboldali mellékosztályba esik. Ennélfogva ha $b_1 b_2 \ldots b_u$ és $b_1 b_2 \ldots b_{u+v}$ ilyen elemek, akkor a

$$c = b_{u+1} \ldots b_{u+v} \in H \tag{4}$$

szorzat H-beli elem. A (3) alatti b elemet így is írhatjuk:

$$\begin{aligned} b &= b_1 \ldots b_u \cdot c \cdot b_{u+v+1} \ldots b_s = \\ &= c[(c^{-1} b_1 c) \ldots (c^{-1} b_u c) \cdot b_{u+v+1} \ldots b_s]. \end{aligned} \tag{5}$$

Minthogy b és c a H alcsoport elemei, a szögletes zárójelbe tett szorzat is H-ba tartozó elem. Másfelől e szorzat s-nél kevesebb (1) alatti tényező szorzata, hiszen nemcsak mindegyik b_i, hanem valamennyi $c^{-1} b_i c$ elem is előfordul az (1) alatti elemrendszerben. Ezért indukciós feltevésünk alapján a szögletes zárójelbe tett szorzat előállitható a K halmaz bizonyos elemeinek szorzataként. Ugyanez áll az s-nél szintén kevesebb tényezőt tartalmazó (4) alatti c elemre is, azaz egyszersmind (5) alapján a H-ból tetszőlegesen kiszemelt b elemre is. Ezzel a 2. 4. segédtétel bizonyítását befejeztük.

A 2.4. segédtételt végesen generált véges osztályú csoport centrumára alkalmazva nyerjük a következőt:

2. 5. segédtétel. *Bármely végesen generált véges osztályú G csoportnak van olyan véges indexű torziómentes A alcsoportja, amely G centrumába esik.*

Bizonyítás. Legyen G végesen generált véges osztályú csoport. A 2. 3. segédtétel szerint a G csoport Z centrumának G-beli r indexe véges. Ezért a 2. 4. segédtétel értelmében Z végesen generált Ábel-féle csoport. Mint ilyen, a végesen generált Abel-féle csoportok alaptétele szerint Z előállítható egy véges csoportnak és egy A torziómentes csoportnak direkt szorzataként. Ha az említett véges csoport rendje s, akkor a G csoport centrumában fekvő A torziómentes csoport G-beli indexe nyilván rs, azaz véges. Így a 2. 5. segédtételt bebizonyítottuk.

A 2. 5. segédtétel fontos lépést jelent a következő §-ban tárgyalandó főtétel bizonyításában. Az alábbi segédtétel más irányból készíti elő a véges osztályú csoportok elméletének felépítését.

2.6. segédtétel. *Egy tetszőleges csoport kommutátorcsoportja akkor és csak akkor torziócsoport, ha a csoport bármely végesen generált alcsoportjának kommutátorcsoportja torziócsoport.*

Bizonyítás. Nyilván elegendő a segédtételnek azt az állítását igazolni, hogy amennyiben egy G csoport bármely végesen generált alcsoportjának kommutátorcsoportja torziócsoport, akkor G' is torziócsoport. Ez azonban nyilvánvaló, hiszen G' bármely eleme véges számú kommutátor szorzata, s így benne van G egyik végesen generált alcsoportjának kommutátorcsoportjában.

Az így igazolt segédtétel alapján a 3. §-ban tárgyalandó főtételt tetszőleges véges osztályú csoportok helyett elegendő lesz végesen generált véges osztályú csoportokra bizonyítanunk.

2.7. segédtétel. *Ha egy G csoport kommutátorcsoportja torziócsoport, akkor G véges rendű elemei csoportot alkotnak.*

Bizonyítás. Legyen a G csoport G' kommutátorcsoportja torziócsoport, és tekintsük a G csoport két tetszőleges a és b véges rendű elemét. Elég azt megmutatnunk, hogy $a \cdot b$ véges rendű elem, mert az nyilvánvaló, hogy véges rendű elem inverze is véges rendű. Jelöljük m-mel az a és b elemek rendjének legkisebb közös többszörösét. Ekkor

$$(ab)^m = a^m b^m c = c,$$

ahol c a G' kommutátorcsoport eleme, minthogy az $(ab)^m$ szorzat tényezőinek az $a^m b^m$ alakhoz vezető átcsoportosításánál bármely két szomszédos elem felcserélésekor egy kommutátor-elem lép fel, amelyet a felcserélt elempár után írhatunk. Másfelől feltevésünk szerint G' torziócsoport, azaz van olyan n természetes szám, amelyre $c^n = 1$. Ennélfogva

$$(ab)^{mn} = c^n = 1,$$

s ezzel a 2.7. segédtétel bizonyítását befejeztük.

Minden további nélkül világos, a következő segédtétel helyessége:

2.8. segédtétel. *Ha egy G csoportban a véges rendű elemek a H alcsoportot alkotják, akkor H karakterisztikus alcsoportja G-nek, és a G/H faktorcsoport torziómentes.*

Könnyen bizonyítható a következő segédtétel is:

2.9. segédtétel. *Egy csoport akkor és csak akkor véges osztályú csoport, ha van olyan generátorrendszere, amelynek bármely eleme véges számú konjugálttal bír a csoportban.*

Bizonyítás. Minthogy egy véges osztályú csoport összes elemei a csoportnak olyan generátorrendszerét alkotják, amely rendelkezik a segédtételben megfogalmazott tulajdonsággal, elegendő azt megmutatnunk, hogy egy ilyen tulajdonságú generátorrendszer létezése esetén a csoport véges osztályú csoport. Ez viszont nyilvánvaló abból, hogy a csoport tetszőleges eleme felírható olyan (véges számú tényezőt tartalmazó) szorzatként, amelyben mindegyik tényező a tekintett generátorrendszer eleme, vagy generátorelem inverze. Minthogy pedig szorzat konjugáltja megegyezik a tényezők megfelelő konjugáltjainak szorzatával, és a tényezők konjugáltjai föltevésünk szerint csak véges számban vannak, nyilvánvaló, hogy a kiszemelt elemnek is csak véges számú konjugáltja van a csoportban, azaz a csoport véges osztályú csoport.

3. §. A főtétel

Ebben a §-ban az eddigi segédtételekre támaszkodva az 1. § végén vázolt úton bebizonyítjuk azt a tételt, amely tárgyalásunkban főtétel jelentőségével bír, s amely azt mondja ki, hogy *véges osztályú csoport kommutátorcsoportja mindig torziócsoport.* (Lásd az alábbi 3. 5. tételt.) Ezt először arra az esetre igazoljuk, amikor a csoport végesen generált csoport. Ebből már könnyen adódik a tétel helyessége tetszőleges véges osztályú csoportokra.

Jelöljön G e § folyamán mindvégig tetszőleges végesen generált véges osztályú csoportot. A 2. 5. segédtétel alapján tudjuk, hogy van G-ben olyan véges m indexű A torziómentes alcsoport, amely G centrumába esik. Közvetlen célunk annak kimutatása, hogy G-beli elemek tetszőleges szorzatát szabad úgy emelni m-edik hatványra, hogy a szorzat mindegyik tényezőjét külön m-edik hatványra emeljük. Ezt az alábbi első három segédtételben bizonyítjuk be.

Minthogy az A alcsoport G centrumában van, A normálosztója G-nek. Az m elemű G/A faktorcsoport elemeit jelöljük görög kisbetűkkel. E faktorcsoport elemei G-nek A szerinti mellékosztályai, és ha G valamely g eleme a ϱ mellékosztályba esik, akkor az elemet jelölő g betűt a ϱ indexszel látjuk el. Legyenek g_ϱ és g_σ tetszőleges elemei G-nek. Mivel G bármely elemének m-edik hatványa A-ba tartozó elem, a

$$(g_\varrho g_\sigma)^m = a_{\varrho,\sigma} g_\varrho^m \cdot g_\sigma^m \tag{6}$$

egyenlettel definiált $a_{\varrho,\sigma}$ elem is eleme A-nak. Megmutatjuk, hogy ez az $a_{\varrho,\sigma}$ elem kizárólag a ϱ, σ mellékosztályoktól függ, s független attól, hogy e mellékosztályokból melyik g_ϱ, illetve g_σ elemet választottuk ki. Amennyiben ugyanis az említett mellékosztályokból g_ϱ és g_σ helyett a $g'_\varrho = a_1 g_\varrho$, ill. $g'_\sigma = a_2 g_\sigma$ elemeket választjuk ki (itt a_1 és a_2 az A alcsoport alkalmas elemei, azaz G centrumában vannak), akkor a

$$(g'_\varrho g'_\sigma)^m = a'_{\varrho,\sigma} g'^m_\varrho g'^m_\sigma$$

egyenletet kielégítő $a'_{\varrho,\sigma}$ elemre vonatkozólag azt találjuk, hogy

$$\begin{aligned} a'_{\varrho,\sigma} &= (g'_\varrho g'_\sigma)^m \cdot g'^{-m}_\sigma g'^{-m}_\varrho = (a_1 g_\varrho \cdot a_2 g_\sigma)^m \cdot (a_2 g_\sigma)^{-m} \cdot (a_1 g_\varrho)^{-m} = \\ &= a_1^m a_2^m (g_\varrho g_\sigma)^m \cdot a_2^{-m} \cdot g_\sigma^{-m} \cdot a_1^{-m} \cdot g_\varrho^{-m} = \\ &= a_1^m a_2^m a_2^{-m} a_1^{-m} \cdot (g_\varrho g_\sigma)^m \cdot g_\sigma^{-m} \cdot g_\varrho^{-m} = a_{\varrho,\sigma}, \end{aligned}$$

azaz $a_{\varrho,\sigma}$ valóban csupán ϱ-tól és σ-tól függ. A most következő három segédtétel az így értelmezett $a_{\varrho,\sigma}$ elemekből álló (nyilvánvalóan véges) „faktorrendszerre" vonatkozik. Célunk annak igazolása, hogy valamennyi $a_{\varrho,\sigma}$ elem megegyezik a G csoport egységelemével. Ebből ugyanis (6) alapján már közvetlenül adódik a G-beli elemek szorzatának m-edik hatványra való emelésével kapcsolatos fentebb említett törvényszerűség. Az alábbi segédtételek bizonyításában igen lényeges lesz az a tény, hogy az előbb bevezetett *faktorrendszer $a_{\varrho,\sigma}$ elemei valamennyien az A alcsoportban vannak, s ebből következőleg egyfelől centrum-elemei G-nek, másfelől amennyiben valamelyikük nem egységelem, akkor végtelen rendű.*

3. 1. segédtétel. *A G/A faktorcsoport bármely ϱ, σ, τ elemeire érvényes az*

$$a_{\varrho,\sigma} \cdot a_{\varrho\sigma,\tau} = a_{\varrho,\sigma\tau} \cdot a_{\sigma,\tau} \tag{7}$$

összefüggés.

A bizonyítás közvetlenül adódik a

$$(g_\varrho g_\sigma g_\tau)^m = ((g_\varrho g_\sigma) g_\tau)^m = a_{\varrho\sigma,\tau} \cdot (g_\varrho g_\sigma)^m \cdot g_\tau^m =$$
$$= a_{\varrho\sigma,\tau} \cdot a_{\varrho,\sigma} g_\varrho^m \cdot g_\sigma^m \cdot g_\tau^m$$

és

$$(g_\varrho g_\sigma g_\tau)^m = (g_\varrho (g_\sigma g_\tau))^m = a_{\varrho,\sigma\tau} \cdot g_\varrho^m \, (g_\sigma g_\tau)^m =$$
$$= a_{\varrho,\sigma\tau} \cdot g_\varrho^m \cdot a_{\sigma,\tau} \cdot g_\sigma^m \cdot g_\tau^m = a_{\varrho,\sigma\tau} \cdot a_{\sigma,\tau} \cdot g_\varrho^m \cdot g_\sigma^m \cdot g_\tau^m$$

egyenletek összehasonlításából.

3. 2. segédtétel. *Ha ϱ és σ felcserélhető elemei a G/A faktorcsoportnak, akkor $a_{\varrho,\sigma} = 1$.*

Bizonyítás. A (6) alapján azt kell megmutatnunk, hogy $\varrho\sigma = \sigma\varrho$ esetén

$$g_\varrho g_\sigma = g_\sigma g_\varrho. \tag{8}$$

Minthogy $\varrho\sigma = \sigma\varrho$, van olyan A-beli a elem, amelyre

$$g_\varrho g_\sigma = a g_\sigma g_\varrho \tag{9}$$

teljesül. Ennélfogva

$$g_\varrho g_\sigma g_\varrho^{-1} = a g_\sigma,$$

azaz

$$(g_\varrho g_\sigma g_\varrho^{-1})^m = (a g_\sigma)^m,$$
$$g_\varrho g_\sigma^m g_\varrho^{-1} = a^m g_\sigma^m,$$
$$g_\sigma^m = a^m g_\sigma^m,$$
$$a^m = 1,$$

mivel a és g_σ^m az A alcsoportba, s ezért G centrumába eső elemek. Az így nyert $a^m = 1$ egyenletből $a = 1$ következik, mivel A egyetlen véges rendű eleme az egységelem. Így (9)-ből (8) helyessége nyilvánvaló, ami egyszersmind a 3. 2. segédtétel bizonyítását jelenti.

3. 3. segédtétel. *Az összes $a_{\varrho,\sigma}$ elem megegyezik a csoport egységelemével.*

Bizonyítás. Legyen ϱ tetszőleges rögzített eleme a G/A faktorcsoportnak, τ pedig fussa be e faktorcsoport összes elemeit. Az így adódó m számú $a_{\varrho,\tau}$ elem szorzatát jelöljük $a(\varrho)$-val:

$$a(\varrho) = \prod_{\tau} a_{\varrho,\tau}. \tag{10}$$

(E szorzat tényezőinek sorrendje nem jön számításba, hiszen az összes tényezők G centrumának elemei.) Írjuk fel rögzített ϱ, σ elemek esetén a G/A faktorcsoport valamennyi τ elemére a (7) összefüggést. Ezek megfelelő oldalait összeszorozva és a (10) jelölést alkalmazva azt találjuk, hogy

$$a_{\varrho,\sigma}^{m} \cdot a(\varrho\sigma) = a(\varrho) \cdot a(\sigma), \tag{11}$$

minthogy τ-val együtt $\sigma\tau$ is befutja a G/A faktorcsoport összes elemeit, mindegyiknek értékét pontosan egyszer véve fel. A (11) összefüggésből a 3. 2. segédtétel felhasználásával azt a következtetést vonhatjuk le, hogy a G/A faktorcsoport felcserélhető ϱ, σ elemeire mindig

$$a(\varrho\sigma) = a(\varrho) \cdot a(\sigma).$$

Alkalmazzuk ezt rendre a $\sigma = \varrho$, $\sigma = \varrho^2, \ldots$ esetekben; azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} a(\varrho^2) &= a(\varrho)^2; \\ a(\varrho^3) &= a(\varrho \cdot \varrho^2) = a(\varrho) \cdot a(\varrho^2) = a(\varrho)^3; \\ &\vdots \\ a(\varrho^m) &= a(\varrho)^m. \end{aligned} \tag{12}$$

Mivel pedig $\varrho^m = 1$, és a 3. 2. segédtétel, valamint (10) figyelembevételével azt nyerjük, hogy a (1) megegyezik a G csoport egységelemével, a (12) egyenletből következőleg a G/A faktorcsoport bármely ϱ elemére $a(\varrho)^m = 1$. Ekkor viszont $a(\varrho) = 1$, minthogy $a(\varrho)$ az A alcsoport eleme, és ebben egyedül az egységelem véges rendű. Az így nyert eredményt a (11) összefüggésre alkalmazva

$$a_{\varrho,\sigma}^{m} = 1$$

adódik, amiből az következik, hogy $a_{\varrho,\sigma}$ megegyezik a G csoport egységelemével, mivel $a_{\varrho,\sigma}$ a torziómentes A csoport eleme. Ezzel a 3. 3. segédtétel bizonyítása befejezést nyert.

Az eddigiekből már könnyen adódik a

3. 4. segédtétel. *Végesen generált véges osztályú csoport kommutátorcsoportja torziócsoport.*

Bizonyítás. Tekintsük az előbbiekben már szereplő végesen generált véges osztályú G csoportot, és tartsuk meg a jelen § többi jelöléseit is. A 3. 3. segédtételből (6) figyelembevételével az következik, hogy a G csoport bármely g_ϱ, g_σ elemeire

$$(g_\varrho \cdot g_\sigma)^m = g_\varrho^m \cdot g_\sigma^m$$

áll. Ennek az összefüggésnek érvényessége a tényezők száma szerinti teljes indukcióval kiterjeszthető akárhány tényezőjű szorzatra is, úgyhogy igaz a következő állítás: *a G csoport tetszőleges elemeinek szorzatát szabad úgy emelni m-edik hatványra, hogy a szorzat tényezőit külön-külön m-edik hatványra emeljük.* Alkalmazzuk ezt a szabályt a G' kommutátorcsoport tetszőleges

$$c = [a_1, b_1] \ldots = a_1^{-1} b_1^{-1} a_1 b_1 \ldots$$

elemére. Azt találjuk, hogy ennek az elemnek m-edik hatványa, azaz

$$c^m = a_1^{-m} b_1^{-m} a_1^m b_1^m \ldots$$

egyenlő a G csoport egységelemével, minthogy a G centrumába eső $a_1^{-m}, b_1^{-m}, \ldots$ m-edik hatványok egymással felcserélhetők. Ennélfogva a G' csoportban bármely elem m-edik hatványa az egységelemmel egyenlő, s ezzel a 3. 4. segédtételt bebizonyítottuk.

3. 5. tétel. *Bármely véges osztályú csoport kommutátorcsoportja torziócsoport.*

Bizonyítás. Tekintsünk egy tetszőleges véges osztályú csoportot. Minthogy ennek bármely végesen generált alcsoportja szintén véges osztályú csoport, a tétel helyessége minden további nélkül következik a 3. 4. és 2. 6. segédtételekből.

4. §. A véges osztályú csoportok tulajdonságai

A jelen §-ban az előrebocsátott segédtételek alkalmazásával levezetjük a főtételből a véges osztályú csoportok legfontosabb tulajdonságait.

4. 1. tétel. *Bármely torziómentes véges osztályú csoport Abel-féle.*

A bizonyítás azonnal adódik a 3. 4. főtételből, minthogy annak következtében véges osztályú torziómentes csoport kommutátorcsoportja egyelemű.

4. 2. tétel. *Véges osztályú csoportban a véges rendű elemek egy karakterisztikus alcsoportot alkotnak, mely szerint képezett faktorcsoport torziómentes Abel-féle csoport.*

Bizonyítás. Legyen G tetszőleges véges osztályú csoport. A 3. 5. főtétel, továbbá a 2. 7. és 2. 8. segédtételek alapján nyilvánvaló, hogy G véges rendű elemei G-nek valamely H karakterisztikus alcsoportját alkotják, és a G H faktorcsoport torziómentes. Minthogy továbbá a 3. 5. főtétel szerint $G' \subseteq H$, világos, hogy G H Abel-féle csoport.

4. 3. tétel. *Véges rendű elemekkel generált véges osztályú csoport mindig torziócsoport.*

Bizonyítás. Tekintsünk egy véges rendű elemekkel generált véges osztályú csoportot. Ebben a véges rendű elemek a 4. 2. tétel szerint alcsoportot alkotnak, amely nem lehet valódi alcsoportja az egész csoportnak, minthogy az utóbbi generálva van az összes véges rendű elemekkel.

4. 4. tétel. *Végesen generált véges osztályú csoportban a véges rendű elemek véges alcsoportot alkotnak.*

Bizonyítás. Legyen G végesen generált, véges osztályú csoport. Elegendő azt megmutatnunk, hogy G-nek csak véges számú, véges rendű eleme van, az ugyanis, hogy ezek alcsoportot alkotnak, már következik a 4. 2. tételből. A 2. 5. segédtétel szerint van G-nek olyan véges indexű torziómentes A alcsoportja, amely G centrumába esik. Azt fogjuk megmutatni, hogy G-nek A szerinti bármely mellékosztályába legfeljebb egy véges rendű elem esik. E célból tegyük fel, hogy c és d olyan véges rendű elemei G-nek, amelyek ugyanabba az A szerinti mellékosztályba tartoznak. Ekkor $c = ad$, ahol a alkalmas A-beli elem. Ha az n természetes szám közös többszöröse c és d rendjének, akkor $c^n = d^n = 1$, s így a $c = ad$ egyenlet alapján azt kapjuk, hogy $c^n = a^n d^n$, azaz

$$a^n = 1, \qquad (13),$$

mivel a a G csoport centrumának eleme. Másfelől azonban A-ról azt is tudjuk, hogy torziómentes csoport, és így (13)-ból $a = 1$ következik. Ennélfogva azt nyertük, hogy $c = d$, s ezzel bebizonyítottuk, hogy G-nek A szerinti bármely mellékosztályába legfeljebb egy véges rendű elem esik. Minthogy pedig A indexe G-ben véges, így G csak véges számú véges rendű elemet tartalmazhat. Ezzel a 4. 4. tétel bizonyítását befejeztük.

4. 5. tétel. *Véges számú, véges rendű elemmel generált véges osztályú csoport mindig véges.*

A bizonyítás ugyanúgy történik, mint a 4. 3. tétel bizonyítása.

4. 6. tétel. *Véges osztályú csoportban a véges rendű elemek lokálisan véges alcsoportot alkotnak.*

Bizonyítás. Azt kell megmutatnunk, hogy véges osztályú csoportban véges számú, véges rendű elem mindig benne van egy véges alcsoportban. Ez azonban nyilvánvalóan következik a 4. 5. tételből, minthogy véges osztályú csoport bármely alcsoportja szintén véges osztályú csoport.

5. §. Csoportok véges normálosztói

Ebben a §-ban bebizonyítjuk *Dicman* említett tételét, s e tétel néhány alkalmazását. *Dicman* tétele a következő [5]:

5. 1. tétel. *Egy csoport elemeinek valamely véges részhalmaza akkor és csak akkor van benne a csoport egy véges normálosztójában, ha a részhalmaz csak véges rendű elemekből áll, és emez elemek mindegyikének csak véges számú konjugáltja van a csoportban.*

Bizonyítás. Minthogy az említett feltételek szükségessége nyilvánvaló, csupán ezek elegendőségét kell bizonyítanunk. E célból tekintsük egy G csoport elemeinek olyan V véges részhalmazát, amely csupa véges rendű elemből áll, és a részhalmaz mindegyik elemének csak véges számú konjugáltja van a csoportban. Ekkor a V halmazhoz hozzávéve elemeinek összes konjugáltjait, olyan V' véges elemhalmazt kapunk, amelyben bármely elem rendje véges. Ennélfogva a V' halmaz elemei a 4. 5. tétel szerint egy véges H alcsoportot generálnak a G csoportban, minthogy H a 2. 9. segédtétel alapján nyilván véges osztályú csoport. Másfelől az is világos, hogy H normálosztó G-ben. Ezzel *Dicman* tételét bebizonyítottuk.

5. 2. tétel. *Egy G csoport bármely eleme akkor és csak akkor tartozik véges normálosztóhoz a csoportban, ha G véges osztályú torziócsoport.*

Bizonyítás. Az előző tételt egyelemű részhalmazra alkalmazva, azt nyerjük, hogy a G csoport bármely eleme akkor és csak akkor van benne G véges normálosztójában, ha G mindegyik eleme véges rendű, és mindegyik elemnek csak véges számú konjugáltja van G-ben, azaz ha G véges osztályú torziócsoport.

5. 3. tétel. *Legyen n rögzített természetes szám. Ha valamely G csoport véges számú n-edrendű elemet tartalmaz, akkor ezek G-nek egy véges karakterisztikus alcsoportját generálják.*

A bizonyítás közvetlenül adódik az 5. 1. tételből, minthogy egy csoport összes n-edrendű elemeinek halmaza nyilván tartalmazza bármely elemmel együtt annak valamennyi konjugáltját is. Hogy a csoport n-edrendű elemei által generált véges normálosztó karakterisztikus alcsoportja a csoportnak, abból következik, hogy n-edrendű elemet a csoport bármely automorfizmusa ismét n-edrendű elembe visz át.

Végül ugyancsak az 5. 1. tétel alkalmazásaként kapjuk a következőt:

5. 4. tétel. *Ha a G csoport véges számú véges rendű elemet tartalmaz, akkor ezek az elemek egy H karakterisztikus alcsoportot alkotnak G-ben, és a G/H faktorcsoport torziómentes.*

Bizonyítás. A G csoport összes véges rendű elemei olyan halmazt alkotnak, amely bármely elemével együtt annak összes konjugáltját is tartalmazza. Ha tehát ez a halmaz véges, akkor a halmaz által generált H alcsoport az 5. 1. tétel szerint véges, s így ez a H alcsoport szükségképpen egybeesik G összes véges rendű elemeinek halmazával. — Nyilvánvaló, hogy H karakterisztikus alcsoportja G-nek, és G/H torziómentes.

6. §. Csoportok centrumának és kommutátorcsoportjának kapcsolata

E § főcélja *R. Baer* említett nagyfontosságú tételének bizonyítása. Előbb azonban igazoljuk a következő tételt, amely elegendő feltételt ad meg arra, hogy egy csoport véges osztályú csoport legyen.

6. 1. tétel. *Ha egy G csoport kommutátorcsoportja véges, akkor G véges osztályú csoport.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy a G csoport kommutátorcsoportja véges, és legyen a tetszőleges rögzített eleme a G csoportnak. Megmutatjuk, hogy a-nak csak véges számú konjugáltja van G-ben. Az a elem bármely konjugáltja

$$g^{-1}ag = a(a^{-1}g^{-1}ag) = a[a, g]$$

alakban írható, ahol g végigfut G összes elemein. Minthogy azonban az $[a, g]$ kommutátor-elem feltevésünk szerint csak véges számú elemen fut át, világos, hogy a kiszemelt a elemnek csak véges számú konjugáltja van.

Végesen generált csoportokra a 6. 1. tétel állítása megfordítható, azaz a benne szereplő feltétel szükségesnek is bizonyul ahhoz, hogy egy csoport véges osztályú legyen:

6. 2. tétel. *Végesen generált véges osztályú csoport kommutátorcsoportja véges.*

A bizonyítás közvetlenül adódik a 3. 5. és 4. 4. tételből.

Most bebizonyítjuk *Baer* tételét [1], [3]:

6. 3. tétel. *Ha egy csoportban a centrum indexe véges, akkor a csoport kommutátorcsoportja véges.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy a G csoport centruma véges indexű. Ekkor a 2. 2. segédtétel szerint G véges osztályú csoport. Így a 3. 5. tételt alkalmazva, azt nyerjük, hogy a G' kommutátorcsoport torziócsoport, s minthogy G' alcsoportja a véges osztályú G csoportnak, G' maga is véges osztályú csoport. Ennélfogva csak azt kell még megmutatnunk, hogy G' végesen generált csoport, mert akkor a 4. 5. tételből közvetlenül következik G' végessége. Azt viszont, hogy a G' kommutátorcsoportot véges számú elem generálja, könnyen beláthatjuk. Ha ugyanis G centrumának indexe r, és $g_1, g_2, \ldots, g_r$ egy teljes reprezentánsrendszere G-nek a centrum szerint, akkor nyilván legfeljebb r^2 számú különböző $[g_i, g_k]$ kommutátor alkotható e rendszer elemeiből. De ezek már kimerítik G összes lehetséges kommutátorelemeit, mert a $[g_i, g_k]$ kommutátor nyilván nem változik meg, ha a g_i vagy a g_k elemet kicseréljük olyan elemmel, amely az illető elemmel megegyező mellékosztályba tartozik a centrum szerint. Ezzel *Baer* tételének bizonyítását befejeztük.

Baer tétele is megfordítható végesen generált csoportokra:

6. 4. tétel. *Ha a végesen generált G csoport G' kommutátorcsoportja véges, akkor G centrumának indexe G-ben véges.*

Bizonyítás. Legyen a végesen generált G csoport kommutátorcsoportja véges. Ekkor a 6. 1. tétel szerint G véges osztályú csoport. Így az igazolandó állítás helyessége közvetlenül következik a 2. 3. segédtételből.

7. §. Fjodorov tétele

E § egyetlen célja *Ju. G. Fjodorov* következő tételének [7] bizonyítása:

7. 1. tétel. *Ha egy végtelen G csoport bármely egynél többelemű alcsoportja véges indexű, akkor G ciklikus csoport.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy G olyan végtelen csoport, amelyben bármely egynél többelemű alcsoport véges indexű. Ekkor bármely elem normalizátora véges indexű G-ben, úgyhogy a 2. 1. segédtétel szerint G véges osztályú csoport. Másfelől G torziómentes csoport, mert az egységelemtől különböző bármely eleme végtelen rendű, hiszen ellenkező esetben az illető elem által generált ciklikus csoport nem lehetne véges indexű a végtelen G csoportban. Ennélfogva G torziómentes véges osztályú csoport, s így a 4. 1. tétel szerint Abel-féle. Minden további nélkül világos az is, hogy G végesen generált csoport, hiszen bármely, az egységelemtől különböző eleme véges indexű ciklikus alcsoportját generálja. Így a jólismert alaptétel szerint a végesen generált torziómentes Abel-féle G csoport véges számú végtelen ciklikus csoport direkt szorzata. De csak egyetlen végtelen ciklikus csoportból állhat G emez előállítása, mert ha egynél több végtelen ciklikus csoport direkt szorzata volna G, akkor tartalmazna végtelen idexű végtelen alcsoportot. Ezzel *Fjodorov* tételének bizonyítását befejeztük.

8. §. Az eredmények élessége

Ebben a §-ban megmutatjuk, hogy a megelőző §-ok eredményei nem élesíthetők. Legelőször azonban példát konstruálunk olyan véges osztályú csoportra, amely nem állítható elő Abel-féle csoport és véges csoport direkt szorzataként. Tekintsük az a és b elemekkel generált $G = \{a, b\}$ csoportot, amely az

$$a^{-1}b^{-1}ab = c, \quad c^2 = 1, \quad ac = ca, \quad bc = cb \tag{14}$$

definiáló relációk alapján van meghatározva. Ebben a G csoportban a véges rendű elemek a kételemű $\{c\}$ ciklikus csoportot alkotják. Nyilvánvaló, hogy $\{c\}$ egyszersmind a G csoport kommutátorcsoportja is. Minthogy (14) szerint

$$b^{-1}ab = ac,$$

azaz

$$b^{-1}a^2b = (b^{-1}ab)^2 = (ac)^2 = a^2c^2 = a^2,$$

azt találtuk, hogy a^2 a G csoport centrumában van. Ugyanígy láthatjuk be, hogy b^2 is G centrumához tartozó elem. Ebből következik, hogy a G csoport centruma két végtelen ciklikus csoport direkt szorzata, t. i. az

$$\{a^2\} \times \{b^2\}$$

direkt szorzat, s így a centrum indexe G-ben 4. Eszerint G véges osztályú csoport. G azonban nem állítható elő véges csoport és Abel-féle csoport direkt szorzataként, mert ez annyit jelentene, hogy G maga is Abel-féle csoport, hiszen G véges rendű elemei egyik előbbi megjegyzésünk szerint Abel-féle csoportot alkotnak.

E példával kapcsolatban természetszerűen felmerül az a probléma, hogy milyen módon lehetne bizonyos fokú áttekintést szereznünk az összes végesen generált véges osztályú csoport szerkezetéről. Eredményeink a végesen generált véges osztályú csoportok kétféle leírását teszik lehetővé, a Schreier-féle csoportbővítés fogalmának segítségével, s ezek mindegyike elég mély bepillantást nyújt e csoportok szerkezetébe. Mivel a 2. 5. segédtételben szereplő A csoport végesen generált torziómentes Abel-féle csoport, azaz véges számú végtelen ciklikus csoport direkt szorzata, vagy — mint mondani szokás — véges rangú szabad Abel-féle csoport, e segédtétel szerint a végesen generált véges osztályú csoportok leirhatók a következőképpen: *Bármely végesen generált véges osztályú csoport egy véges rangú szabad Abel-féle csoport centrális Schreier-féle bővítése egy véges csoporttal.* A 4. 2. és 4. 4. tételekből viszont az következik, hogy *bármely végesen generált véges osztályú csoport egy véges csoport Schreier-féle bővítése egy véges rangú szabad Abel-féle csoporttal.* [Az, hogy egy végesen generált véges osztályú csoportnak a csoport véges rendű elemeiből álló karakterisztikus alcsoport szerinti faktorcsoportja véges rangú szabad Abel-féle csoport, onnan következik, hogy ez a torziómentes Abel-féle faktorcsoport (lásd a 4. 2. tételt) végesen generált csoport homomorf képe, azaz maga is végesen generált.]

Mint láttuk, ahhoz, hogy egy csoport véges osztályú csoport legyen, elegendő, ha centruma véges indexű, vagy ha kommutátorcsoportja véges (2. 2. segédtétel, 6. 1. tétel). Láttuk azt is, hogy ezek bármelyike szükséges feltétel is, ha végesen generált csoportokra szorítkozunk (2. 3. segédtétel, 6. 2. tétel). Most ellenpélda segítségével megmutatjuk, hogy az említett feltételek *csak végesen generált csoportok esetén szükségesek* ahhoz, hogy a tekintett csoport véges osztályú legyen, *általában nem.* Tekintsük e célból nem-Abel-féle véges egyszerű csoportok szigorúan növekvő rendű

$$G_1, G_2, G_3, \dots$$

végtelen sorozatát (pl. az n-edfokú A_n alternáló csoportokat $n = 5, 6, 7, \dots$ esetén). E végtelen sok csoport D direkt szorzatának centruma egyelemű, kommutátorcsoportja viszont egybeesik az egész csoporttal, minthogy ugyanezek a megállapítások érvényesek a G_k direkt faktorokra. A D csoport centruma tehát nem véges indexű, s a D' kommutátorcsoport nem véges, sőt tartalmaz tetszőlegesen előírt természetes számnál nagyobb rendű elemeket. D azonban véges osztályú csoport. Ez abból következik, hogy D bármely eleme benne van már véges számú G_k direkt faktor direkt szorzatában, s így a tekintett elem normalizátora tartalmazza a „többi“ G_m direkt szorzatát, azaz véges indexű.

Végül megmutatjuk, hogy a *Baer*től származó 6. 3. tétel is csak végesen generált csoportokra fordítható meg (6. 4. tétel). E célból olyan végtelen G

csoportot konstruálunk, amelyben a centrum indexe nem véges, a G' kommutátorcsoport viszont véges. Sőt példánk olyan lesz, hogy a G csoport centruma és kommutátorcsoportja ugyanaz a véges alcsoport. Legyen p rögzített törzsszám, és tekintsük a végtelen sok $b, a_1, a_2, a_3, \ldots$ elem által generált csoportot a következő definiáló relációkkal:

$$b^p = a_1^p = a_2^p = \cdots = a_n^p = \cdots = 1;$$

$$a_i b = b a_i; \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots);$$

$$a_{i+k} a_i = b a_i a_{i+k}; \qquad (i, k = 1, 2, 3, \ldots).$$

Minden további nélkül világos, hogy e G csoport kommutátorcsoportja a p elemű $\{b\}$ ciklikus csoport. De könnyen beláthatjuk azt is, hogy G centruma is $\{b\}$, mert G bármely $\{b\}$-n kívüleső eleméhez található vele fel nem cserélhető elem G-ben.

Debreceni Tudományegyetem
Matematikai Intézete.

IRODALOM

[1] *R. Baer,* Representations of groups as quotient groups. II. Minimal central chains of a group. Trans. Amer. Math. Soc. *58* (1945), 348—389.

[2] *R. Baer,* Finiteness properties of groups. Duke, Math. J. *15* (1948), 1021—1032.

[3] *R. Baer,* Endlichkeitskriterien für Kommutatorgruppen. Math. Ann. *124* (1952), 161—177.

[4] *J. L. Britton—J. A. H. Shepperd,* Almost ordered groups. Proc. London Math. Soc. *1* (3. Ser.), (1951), 188—199.

[5] А. П. Дицман, О p-группах. Докл. Акад. наук. СССР, *15* (1937), 71—76.

[6] А. Г. Курош, Теория групп. (Москва, 1953.)

[7] Ю. Г. Федоров, О бесконечных группах, все нетривиальные подгруппы которых имеют конечный индекс. Успехи мат. наук, *6 : 1* (1951), 187—189.

[8] *B. H. Neumann,* Groups with finite classes of conjugate elements. Proc. London Math. Soc. *1* (3. Ser.), (1951), 178—187.

[9] I. *Schur,* Über die Darstellung der endlichen Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen. J. reine angew. Math. *127* (1904), 20—50.

[10] *I. Szélpál,* Die unendlichen Abelschen Gruppen mit lauter endlichen echten Untergruppen. Publ. Math. (Debrecen) *1* (1949), 63—64.

MEGJEGYZÉS N. H. McCOY EGYIK DOLGOZATÁHOZ[1]

STEINFELD OTTÓ

McCoy egyik dolgozatában[2] többek között a primideálnak[3] különböző kritériumokkal való definiálásával foglalkozik.

Ebben a dolgozatunkban *McCoy* eredményét újabb kritériumokkal egészítjük ki. Továbbá a komplett primideálok[3] definiálására analóg kritériumokat adunk meg.

Érvényes a következő

1. tétel. Ha $\mathfrak{p}$ *ideál az R gyűrűben, akkor a következő feltételek ekvivalensek:*

(I) *Ha* $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ *olyan ideálok R-ben, hogy* $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p}$, *akkor* $\mathfrak{a}$ *vagy* $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p}$.

(I′) *Ha* $(\alpha), (\beta)$ *olyan főideálok R-ben, hogy* $(\alpha)(\beta) \subseteq \mathfrak{p}$, *akkor* (α) *vagy* $(\beta) \subseteq \mathfrak{p}$.

(II) *Ha* $\mathfrak{l}_1, \mathfrak{l}_2$ *olyan balideálok R-ben, hogy* $\mathfrak{l}_1\mathfrak{l}_2 \subseteq \mathfrak{p}$, *akkor* $\mathfrak{l}_1$ *vagy* $\mathfrak{l}_2 \subseteq \mathfrak{p}$.

(II′) *Ha* $(\alpha)_b$ *és* $(\beta)_b$ *olyan baloldali főideálok R-ben, hogy* $(\alpha)_b(\beta)_b \subseteq \mathfrak{p}$, *akkor* $(\alpha)_b$ *vagy* $(\beta)_b \subseteq \mathfrak{p}$.

(III) *Ha* $\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2$ *olyan jobbideálok R-ben, hogy* $\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2 \subseteq \mathfrak{p}$, *akkor* $\mathfrak{r}_1$ *vagy* $\mathfrak{r}_2 \subseteq \mathfrak{p}$.

(III′) *Ha* $(\alpha)_j$ *és* $(\beta)_j$ *olyan jobboldali főideálok R-ben, hogy* $(\alpha)_j(\beta)_j \subseteq \mathfrak{p}$, *akkor* $(\alpha)_j$ *vagy* $(\beta)_j \subseteq \mathfrak{p}$.

(IV) *Ha* $\mathfrak{r}$ *és* $\mathfrak{l}$ *olyan jobb-, illetve balideál R-ben, hogy* $\mathfrak{r}\mathfrak{l} \subseteq \mathfrak{p}$, *akkor* $\mathfrak{r}$ *vagy* $\mathfrak{l} \subseteq \mathfrak{p}$.

(IV′) *Ha* $(\alpha)_j$ *és* $(\beta)_b$ *olyan jobboldali, illetve baloldali főideál R-ben, hogy* $(\alpha)_j(\beta)_b \subseteq \mathfrak{p}$, *akkor* $(\alpha)_j$ *vagy* $(\beta)_b \subseteq \mathfrak{p}$.

(V) *Ha* $\alpha R \beta \subseteq \mathfrak{p}$, *akkor* α *vagy* $\beta \in \mathfrak{p}$ $(\alpha, \beta \in R)$.[4]

[1] Ezen dolgozat a szerző: Remark on a paper of N. H. McCoy, dolgozatának magyarnyelvű kivonata.

[2] *N. H. McCoy:* Prime ideals in general rings, Amer. Journ. Math., *71* (1949), 823—833.

[3] A primideál, illetve komplett primideál definícióját lásd alább.

[4] *M. Nagata:* On the Theory of Radicals in a Ring, Journ. Math. Soc. Japan *3* (1951), 330—344. dolgozatában a következőképpen általánosítja ezt a kritériumot: Annak szükséges és elégséges feltétele, hogy $\mathfrak{p}$ primideál legyen, az, hogy ha α és β két olyan eleme az R-nek, hogy $R^i \alpha R^j \beta R^k \subseteq \mathfrak{p}$ fennáll valamely (e miatt bármely) j pozitív és i, k nem negatív egész számok kombinációira, akkor α vagy $\beta \in \mathfrak{p}$.

Tudvalévő dolog, hogy újabban az (I) feltételnek eleget tevő ideálokat *primideáloknak* szokás nevezni.[5] E szerint az 1. tétel úgy is kimondható, hogy az (I), (I'), . . ., (V) feltételek valamennyien a primideálokat karakterizálják.

McCoy említett dolgozatában az (I), (I') (II), (III), (V) feltételek ekvivalenciáját mutatja ki. Ennek az eredménynek felhasználásával az állításnak bizonyítását a következő bizonyítási séma[6] szerint rendezzük be:

$$\begin{tikzcd}
 & (\mathrm{II}) \arrow[r] \arrow[rrr, bend left, ""] & (\mathrm{II}') \arrow[dr] & & \\
(\mathrm{V}) \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & (\mathrm{III}) \arrow[r] & (\mathrm{III}') \arrow[r] & (\mathrm{I}') \arrow[lll, bend left=80] & (\mathrm{I}) \arrow[l] \\
 & (\mathrm{IV}) \arrow[r] & (\mathrm{IV}') \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

ahol az irányítással ellátott vonalak azt jelentik, hogy az (a) feltételből következik a (b). *McCoy* bizonyításában kimutatja az (I) → (I'), (I') → (V), (V) → (II), (V) → (III), (II) → (I) állításokat. Minthogy továbbá a bizonyítási sémában szereplő állítások az (V) → (IV) kivételével triviálisak, ezért csak az (V) → (IV) állítás kimutatása van hátra.

E célból tegyük fel (V) érvényességet és legyen $\mathfrak{r}$ és $\mathfrak{l}$ olyan jobb-, illetve balideál, hogy $\mathfrak{r}\mathfrak{l} \subseteq \mathfrak{p}$ és $\mathfrak{r}$ nem része $\mathfrak{p}$-nek. Tekintsük $\mathfrak{r}$-nek egy ϱ elemét, mely nincs a $\mathfrak{p}$-ben. Az $\mathfrak{l}$-nek összes λ elemére

$$\varrho R \lambda \subseteq \mathfrak{r}\mathfrak{l} \subseteq \mathfrak{p}$$

teljesül. De (V) szerint $(\varrho \in R, \notin \mathfrak{p})$ miatt $\lambda \in \mathfrak{p}$, tehát $\mathfrak{l} \subseteq \mathfrak{p}$. Az $\mathfrak{r}\mathfrak{l} \subseteq \mathfrak{p}$ és $\mathfrak{l}$ nem része $\mathfrak{p}$-nek esetén hasonló módon nyerjük, hogy $\mathfrak{r} \subseteq \mathfrak{p}$. Ezzel kimutattuk, hogy (V)-ből következik (IV).

Megjegyzés. Tekintsük az $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ szorzatokat a következő feltételek mellett:

$$\mathfrak{a} \text{ jobbideál, } \mathfrak{b} \text{ jobbideál,} \tag{1}$$

$$\mathfrak{a} \text{ „ , } \mathfrak{b} \text{ balideál,} \tag{2}$$

$$\mathfrak{a} \text{ balideál , } \mathfrak{b} \text{ balideál,} \tag{3}$$

$$\mathfrak{a} \text{ „ , } \mathfrak{b} \text{ jobbideál.} \tag{4}$$

Látjuk, hogy az $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ szorzatok az (1), (2), (3) esetekben alkalmasak a $\mathfrak{p}$ primideál definiálására (lásd a (II), (III), (IV) feltételeket).

Érdemes megjegyezni a (4) esetnek a többitől elütő szerepét. Ugyanis egyrészt ebben az esetben az $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ szorzat mindig ideál, másrészt a továbbiakban azt fogjuk kimutatni, hogy az $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ szorzat a (4) esetben nem a primideál,

[5] Régebben egy olyan $\mathfrak{q}$ ideált neveztek primideálnak, melyre az $\alpha\beta \in \mathfrak{q}$ $(\alpha, \beta \in R)$ fennállásából α vagy $\beta \in \mathfrak{q}$ következik. (Lásd az (A) feltételt.) Az ilyen $\mathfrak{q}$ ideált több szerző kezdeményezésére *komplett primideálnak* nevezzük. Könnyű kimutatni, hogy a komplett primideál mindig primideál, hogy a megfordítás általában nem érvényes és hogy kommutatív R gyűrűben a két fogalom azonos.

[6] Az elnevezéssel kapcsolatban lásd L. Rédei: Über die Kantenbasen für endliche vollständige gerichtete Graphen, Acta Math. Acad. Sci. Hung., *5* (1954), sajtó alatt.

hanem a komplett primideál (lásd[5]) definiálására alkalmas. Mégpedig érvényes a következő, az 1. tételhez analóg, de a komplett primideálokra vonatkozó

2. tétel. Ha $\mathfrak{q}$ ideál az R gyűrűben, akkor a következő feltételek ekvivalensek:

(A) *Ha α, β olyan elemek R-ben, hogy $\alpha\beta \in \mathfrak{q}$, akkor α vagy $\beta \in \mathfrak{q}$.*

(B) *Ha $\mathfrak{l}$ és $\mathfrak{r}$ olyan bal-, illetve jobbideál R-ben, hogy $\mathfrak{l}\mathfrak{r} \subseteqq \mathfrak{q}$, akkor $\mathfrak{l}$ vagy $\mathfrak{r} \subseteqq \mathfrak{q}$.*

(B′) *Ha $(\alpha)_b$ és $(\beta)_j$ olyan baloldali, illetve jobboldali főideál R-ben, hogy $(\alpha)_b(\beta)_j \subseteqq \mathfrak{q}$, akkor $(\alpha)_b$ vagy $(\beta)_j \subseteqq \mathfrak{q}$.*

Bizonyítás.[7] Kimutatjuk, hogy (A)-ból folyik (B). Ugyanis tegyük fel, hogy (A) teljesül. Ha (A)-ból nem következne (B), akkor létezne olyan $\mathfrak{l}, \mathfrak{r}$ bal-, illetve jobbideál, hogy $\mathfrak{l}\mathfrak{r} \subseteqq \mathfrak{q}$ és $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{r}$ nem része $\mathfrak{q}$-nak. Akkor találunk olyan $\lambda \in \mathfrak{l}$ és $\varrho \in \mathfrak{r}$ elemeket, hogy $\lambda, \varrho \notin \mathfrak{q}$ és $\lambda\varrho \in \mathfrak{q}$, ami ellentmond az (A) feltétel teljesülésének.

(B)-ből triviálisan folyik (B′). Ezután tegyük fel (B′) teljesülését és tekintsünk olyan $\alpha, \beta (\in R)$ elemeket, hogy

$$\alpha\beta \in \mathfrak{q}. \tag{5}$$

Alkossuk meg az $(\alpha)_b = R\alpha + I\alpha$ és $(\beta)_j = \beta R + I\beta$ baloldali, illetve jobboldali főideálokat, ahol I az egész számok gyűrűjét jelenti. Minthogy (5) miatt

$$(\alpha)_b(\beta)_j = (R\alpha + I\alpha)(\beta R + I\beta) = R\alpha\beta R + IR\alpha\beta + I\alpha\beta R + I\alpha\beta \subseteqq \mathfrak{q}, \tag{6}$$

ezért (B′) szerint $(\alpha)_b$ vagy $(\beta)_j \subseteqq \mathfrak{q}$, és így $\alpha(\in (\alpha)_b)$ vagy $\beta(\in (\beta)_b)$ eleme a $\mathfrak{q}$-nak. Qu. e. d.

* * *

Meleg köszönetemet fejezem ki *Rédei László* professzornak, aki szíves érdeklődésével a dolgozat létrejöttét elősegítette.

[7] Az (A) és (B) feltételek ekvivalenciájára *Pollák György* a következő elegáns bizonyítást adta:

Tegyük fel, hogy van olyan $\mathfrak{l}$ bal- és $\mathfrak{r}$ jobbideál, hogy $\mathfrak{l}\mathfrak{r} \subseteqq \mathfrak{q}$, $\mathfrak{l}$ nem része $\mathfrak{q}$-nak, $\mathfrak{r}$ nem része $\mathfrak{q}$-nak. Akkor nyilvánvaló, hogy $\mathfrak{q}$ nem komplett primideál. Megfordítva, ha $\mathfrak{q}$ nem komplett prim, azaz van olyan $\alpha \notin \mathfrak{q}$, $\beta \notin \mathfrak{q}$, hogy $\alpha\beta \in \mathfrak{q}$, akkor mindazon λ elemek összessége, melyekre

$$\lambda\beta \in \mathfrak{q},$$

egy $\mathfrak{l}$ balideált alkot ($\mathfrak{l}$ nem része $\mathfrak{q}$-nak). Ugyanígy mindazon ϱ elemek összessége, amelyekre

$$\mathfrak{l}\varrho \subseteqq \mathfrak{q},$$

egy $\mathfrak{r}$ jobbideált alkot ($\mathfrak{r}$ nem része $\mathfrak{q}$-nak, mert $\beta \in \mathfrak{r}$). Ezekre tehát

$$\mathfrak{l}\mathfrak{r} \subseteqq \mathfrak{q}.$$

IDEÁLHÁNYADOSOKRÓL ÉS PRIMIDEÁLOKRÓL [1]

STEINFELD OTTÓ

Bemutatta Rédei László lev. tag az 1954. február 8-án tartott felolvasó ülésen

1. Előrebocsátjuk a következő fogalmakat: Legyen adva az R gyűrűben egy $H(\subseteq R)$ részhalmaz és egy $\mathfrak{b}(\subseteq R)$ ideál. Az R azon β elemei, melyekre

$$\beta H \subseteq \mathfrak{b} \tag{1}$$

teljesül, baloldali ideált alkotnak R-ben, [2] ezt baloldali ideálhányadosnak fogjuk nevezni, és $(\mathfrak{b}:H)_b$-vel jelöljük. Hasonlóan a $(\mathfrak{b}:H)_j$ jobboldali ideálhányados azon β elemekből áll, melyekre

$$H\beta \subseteq \mathfrak{b} \tag{2}$$

teljesül. Természetesen $(\mathfrak{b}:H)_j$ jobboldali ideál R-ben. Az (1) és (2) feltételeket egyidejűleg kielégítő β elemek halmazát ideálhányadosnak fogjuk nevezni, és $\mathfrak{b}_H = \mathfrak{b}:H$-val jelöljük. [3] Nyilvánvaló, hogy $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{b}:H$, $(\mathfrak{b}:H)_b$, $(\mathfrak{b}:H)_j$ mindig fennáll, és

$$\mathfrak{b}_H = \mathfrak{b}:H = (\mathfrak{b}:H)_b \cap (\mathfrak{b}:H)_j. \tag{3}$$

Speciálisan, ha $\mathfrak{b} = H$, akkor $\mathfrak{b}:\mathfrak{b} = R$. Kommutatív R esetén nyilván $(\mathfrak{b}:H)_b = (\mathfrak{b}:H)_j = \mathfrak{b}:H$, és ekkor $\mathfrak{b}:H$ megegyezik a klasszikus ideálhányados fogalommal. [4]

Dolgozatunkban elsősorban azokkal az esetekkel fogunk foglalkozni, amikor H ideál, vagy egyoldali ideál, vagy adott ideálnak egyik eleme.

Az R-beli $\mathfrak{p}$ ideált szokás szerint *primideálnak* nevezzük, ha $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p}$ ($\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ R-beli ideálok) fennállásából $\mathfrak{a}$ vagy $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p}$ következik. [5]

Az R gyűrűben *komplett primideálon* olyan $\mathfrak{q}$ ideált értünk, melyre érvényes: ha $\alpha\beta \in \mathfrak{q}$, akkor α vagy $\beta \in \mathfrak{q}$ $(\alpha, \beta \in R)$.

[1] Ez a dolgozat a szerző: On ideal-quotients and prime ideals, *Acta Math. Hung.* dolgozatának magyarnyelvű kivonata.

[2] Ez az állítás abból folyik, hogy ha $\varrho H \subseteq \mathfrak{b}$ és $\sigma H \subseteq \mathfrak{b}$, akkor $(\varrho - \sigma)H \subseteq \mathfrak{b}$ és $R\varrho . H \subseteq \mathfrak{b}$. Ha speciálisan H balideál az R-ben, akkor $\varrho R H \subseteq \mathfrak{b}$ is teljesül, ezért most $(\mathfrak{b}:H)_b$ ideál.

[3] Ha $H = \mathfrak{a}$ ideál az R-ben, akkor $\mathfrak{b}:\mathfrak{a}$ is ideál R-ben.

Általában tetszőleges H halmaz esetén a $\mathfrak{b}_H$ ideálhányados modulus, továbbá $R\mathfrak{b}_H \cap \mathfrak{b}_H R \subseteq \mathfrak{b}_H$ is teljesül. (R-nek olyan M modulusát, melyre $MR \cap RM \subseteq M$ teljesül, kvázi-ideálnak nevezzük. Reméljük, hogy a kvázi-ideálokra egy más alkalommal még vissza fogunk térni.)

[4] Lásd pl. *B. L. van der Waerden:* Moderne Algebra II. (Berlin 1931); 81. §.

[5] A primideálra vonatkozó egyéb definíciókat lásd *N. H. McCoy* [1] és *O. Steinfeld* [5] dolgozatokban.

Nyilvánvaló, hogy a komplett primideál primideál; de a megfordítása nem érvényes. Továbbá könnyű belátni, hogy kommutatív gyűrű esetén a két fogalom egybeesik.[6]

Természetesen az R gyűrűben R mindig komplett primideál (méginkább primideál). Általában az R gyűrűnek $\mathfrak{a}$ ideálját *valódinak* fogjuk nevezni, ha $R \neq \mathfrak{a}$.

M. Nagata [2]-ben többek között bebizonyítja a következő tételt:

Legyen S az R gyűrűnek részgyűrűje és $\mathfrak{p}_1$ primideál S-ben. Az R-ben akkor (és csak akkor) létezik egy olyan $\mathfrak{p}$ primideál, melyre $\mathfrak{p} \cap S = \mathfrak{p}_1$, ha létezik R-ben egy olyan $\mathfrak{a}$ ideál, melyre $\mathfrak{a} \cap S = \mathfrak{p}_1$. Az utolsó feltétel teljesül, ha S ideál R-ben.

I. megjegyzés. Ha S ideál R-ben, és $\mathfrak{p}_1 \neq S$, akkor nincs $\mathfrak{p}$-nek olyan valódi ideálbővítése, melynek meglenne az állításunkban szereplő tulajdonsága.

II. megjegyzés. Ha S ideál R-ben, akkor S összes fél-primideálja az R-ben is ideál.[7]

Dolgozatunkban azzal az esettel foglalkozunk, amikor S ideál R-ben. **2.**-ben a következő eredmények ismertetésére térünk ki. A $\mathfrak{p}_1 : S$ ideálhányados egy a *Nagata* tételében szereplő $\mathfrak{p}$ primideál. Továbbá az $S \neq \mathfrak{p}_1$ esetben egy adott $\mathfrak{p}_1$-hez egyetlen olyan primideál tartozik, melyre $S \cap \mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1$. Ez a $\mathfrak{p}$ már $\mathfrak{p}_1$ és S-nek egy $\mathfrak{l}$ (nem része $\mathfrak{p}_1$-nek) balideálja által egyértelműen $\mathfrak{p} = (\mathfrak{p}_1 : \mathfrak{l})_b$ alakban is felírható. Tételünkből korolláriumként adódik annak szükséges és elégséges feltétele, hogy az R gyűrűnek valódi primideálja legyen, melynek alapján az R összes valódi primideáljairól jó áttekintést nyerünk. Végezetül szükséges és elégséges feltételt adunk arra vonatkozóan, hogy (0) primideál legyen az R-ben.

A **3.**-ban analóg eredményeket mondunk ki arra az esetre, amikor $\mathfrak{p}_1$ komplett primideál S-ben.

Végül **4.**-ben a fenti eredményeket a Schreier-féle gyűrűbővítésre alkalmazzuk.

2. Érvényes a következő:

1. tétel: Legyen adva az R gyűrűnek egy $\mathfrak{a}(\neq (0), R)$ ideálja és ennek egy $\mathfrak{p}$ primideálja.[8] *A $\mathfrak{p}_\mathfrak{a} = \mathfrak{p} : \mathfrak{a}$ ideálhányados primideál R-ben és*

$$\mathfrak{p}_\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a} = \mathfrak{p}. \tag{4}$$

Ha $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{a}$, akkor $\mathfrak{p}_\mathfrak{a}$ az egyetlen olyan primideál R-ben, melynek $\mathfrak{a}$-val való metszete $\mathfrak{p}$. Ebben az esetben $\mathfrak{p}_\mathfrak{a}$ még a következő négy módon is

[6] Lásd pl. *B. L. van der Waerden:* Moderne Algebra II. (Berlin 1931); 82. §.

[7] *M. Nagata* [2] fél-primideálnak nevez egy olyan ideált, mely primideálok metszete. E meglepő tételnek, melyet fél-primideálok helyett nyilván elegendő primideálokra kimutatni, az 1. lemmában egy közvetlenül a definíción alapuló bizonyítását adjuk. Erre vonatkozóan általános tételt mutat ki *L. Rédei* [3].

[8] Általában az R gyűrű $\mathfrak{a}$ ideáljának ideálja, $\mathfrak{a}$-nak, mint gyűrűnek ideálját jelenti.

megadható:

$$\mathfrak{p}_\mathfrak{a} = (\mathfrak{p}:\mathfrak{a})_b = (\mathfrak{p}:\mathfrak{a})_j = (\mathfrak{p}:\mathfrak{l})_b = (\mathfrak{p}:\mathfrak{r})_j, \qquad (5)$$

ahol $\mathfrak{l}$, *illetve* $\mathfrak{r}$ $\mathfrak{a}$*-nak egyik tetszőleges olyan baloldali, illetve jobboldali ideálja, hogy* $\mathfrak{l}, \mathfrak{r}$ *nem része* $\mathfrak{p}$*-nek.*

Érvényesek még:

1. korollárium: Tekintsük az R gyűrűnek egyik tetszésszerinti $\mathfrak{a}(\neq(0))$ ideálját. Az R-nek akkor és csak akkor van valódi primideálja, ha $\mathfrak{a}$ vagy $R/\mathfrak{a}$ tartalmaz valódi primideált.

1. megjegyzés: Adott $\mathfrak{a}(\neq(0))$ ideál esetén R összes különböző valódi primideáljait a következőképpen kapjuk meg. Egyrészt megalkotjuk az összes $\mathfrak{p}:\mathfrak{a}=\mathfrak{p}_\mathfrak{a}$ ideálhányadosokat, ahol $\mathfrak{p}$ befutja az $\mathfrak{a}$-nak összes valódi primideáljait, ezek az R azon primideáljai lesznek, melyek az $\mathfrak{a}$-t nem tartalmazzák. Másrészt az $R/\mathfrak{a}$ faktorgyűrű mindenegyes valódi primideálját, mint R-beli elemhalmazt tekintjük; így az R-nek $\mathfrak{a}$-t tartalmazó valódi primideáljait kapjuk meg.

A bizonyításhoz a következő lemmákat használtuk fel:

1. lemma (hasonlítsd *Nagata* idézett II. megjegyzéséhez): Ha S balideál, illetve jobbideál az R gyűrűben, akkor S-nek összes *valódi* $\mathfrak{p}$ primideálja (méginkább komplett primideálja) jobbideál illetve balideál az R-ben. Ha pedig S ideál R-ben, akkor az S összes primideálja (komplett primideálja) ideál az R-ben is.

2. lemma (*McCoy*): Ha $\mathfrak{p}$ primideál az R gyűrűben, akkor R bármelyik $\mathfrak{a}$ ideáljára $\mathfrak{a}\cap\mathfrak{p}$ primideál $\mathfrak{a}$-ban. (Lásd *McCoy* [1] 2. lemma.)

3. lemma: Legyen adva az R gyűrűnek egy $\mathfrak{a}(\neq(0), R)$ ideálja, ennek egy $\mathfrak{p}(\neq\mathfrak{a})$ primideálja. Jelölje $\mathfrak{l}$ az $\mathfrak{a}$-nak egyik tetszőleges $\mathfrak{l}$ nem része $\mathfrak{p}$-nek ideálját. Ha egy $\mathfrak{b}$ R-beli ideálra

$$\mathfrak{b}\mathfrak{l}\subseteq\mathfrak{p} \text{ vagy } \mathfrak{l}\mathfrak{b}\subseteq\mathfrak{p} \qquad (\mathfrak{l} \text{ nem része } \mathfrak{p}\text{-nek}) \quad (6)$$

teljesül, akkor az $\mathfrak{a}$ összes $\mathfrak{m}$ ideáljára

$$\mathfrak{m}\mathfrak{b}, \mathfrak{b}\mathfrak{m}\subseteq\mathfrak{p}$$

is teljesül.

4. lemma: Legyen $\mathfrak{a}$ ideál az R gyűrűben és $\mathfrak{p}$ valódi primideál az $\mathfrak{a}$-ban. Jelölje α az $\mathfrak{a}$-nak egyik tetszőleges $\mathfrak{p}$-n kívüli elemét. Ha egy $\varrho(\in R)$ elemre

$$\varrho\mathfrak{a}\alpha\subseteq\mathfrak{p} \qquad (\alpha\in\mathfrak{a}, \notin\mathfrak{p}) \quad (7)$$

teljesül, akkor $\varrho\mathfrak{a}, \mathfrak{a}\varrho\subseteq\mathfrak{p}$ is fennáll.

A továbbiakhoz szükségünk lesz a következő definícióra: Az R gyűrűt *majdnem-zérusosztómentesnek* nevezzük, ha benne a (0) primideál.[9] E definí-

[9] *McCoy* [1] az ilyen gyűrűt primgyűrűnek nevezi. Mi indokoltabbnak tartjuk a fenti elnevezést, hiszen minden zérusosztómentes gyűrű majdnem-zérusosztómentes; továbbá egy R majdnem-zérusosztómentes gyűrűben $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}(\subseteq R)$ ideálokra $\mathfrak{a}\mathfrak{b}=(0)$ fennállásából $\mathfrak{a}$ vagy $\mathfrak{b}=(0)$ következik; végül $\alpha, \beta(\in R)$ elemekre, ha $\alpha R\beta=(0)$, akkor α vagy $\beta=0$, erre vonatkozóan lásd az [5] alatt idézett dolgozatokat.

ciónak megfelelőleg az $\mathfrak{a}$ ideált majdnem-zérusosztómentesnek fogjuk nevezni, ha $\mathfrak{a}$ mint gyűrű majdnem-zérusosztómentes. Nyilván, ha $\mathfrak{p}$ primideál az R gyűrűben, akkor $R/\mathfrak{p}$ majdnem-zérusosztómentes.

2. korollárium: Az R gyűrű akkor és csak akkor majdnem-zérusosztómentes, ha az R egyik $\mathfrak{a}$ majdnem-zérusosztómentes ideáljának létezik egy olyan $\alpha(\neq 0)$ eleme, melyre a

$$\beta\mathfrak{a}\alpha = (0) \qquad (0 \neq \alpha \in \mathfrak{a}; \beta \in R) \quad (8)$$

egyenletnek csak $\beta = 0$ megoldása van.

3. Érvényes az 1. tétellel analóg

1'. tétel: Legyen adva az R gyűrűnek egy $\mathfrak{a}(\neq (0), R)$ ideálja és $\mathfrak{a}$-nak egy $\mathfrak{q}$ komplett primideálja. A $\mathfrak{q}_\mathfrak{a} = \mathfrak{q} : \mathfrak{a}$ ideálhányados komplett primideál R-ben és

$$\mathfrak{q}_\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a} = \mathfrak{q}. \qquad (9)$$

Ha $\mathfrak{q} \neq \mathfrak{a}$, akkor $\mathfrak{q}_\mathfrak{a}$ az egyetlen olyan primideál R-ben melynek $\mathfrak{a}$-val való metszete $\mathfrak{q}$. Ebben az esetben $\mathfrak{q}_\mathfrak{a}$ még a következő négy módon is megadható:

$$\mathfrak{q}_\mathfrak{a} = (\mathfrak{q} : \mathfrak{a})_b = (\mathfrak{q} : \mathfrak{a})_j = (\mathfrak{q} : \alpha)_b = (\mathfrak{q} : \alpha)_j, \qquad (10)$$

ahol α az $\mathfrak{a}$-nak egyik tetszőleges $\mathfrak{q}$-n kívüli eleme.

Az analóg 1'. korolláriumot és 1'. megjegyzést itt nem fogalmazzuk meg, hanem csak az 1'. tétel bizonyításához felhasznált 2'. és 4'. lemmákat, továbbá a 2'. korolláriumot említjük.

2'. lemma: Ha $\mathfrak{q}$ komplett primideál az R-ben, akkor az R-nek bármelyik S gyűrűjére $S \cap \mathfrak{q}$ komplett primideál az S-ben.

4'. lemma: Legyen $\mathfrak{a}$ ideál az R gyűrűben és $\mathfrak{q}$ valódi komplett primideál $\mathfrak{a}$-ban. Jelölje α az $\mathfrak{a}$-nak egyik tetszésszerinti $\mathfrak{q}$-n kivüli elemét. Ha egy $\beta(\in R)$ elemre

$$\beta\alpha \in \mathfrak{q} \text{ vagy } \alpha\beta \in \mathfrak{q} \qquad (\alpha \in \mathfrak{a}, \notin \mathfrak{q}; \beta \in R) \quad (11)$$

teljesül, akkor minden $\xi(\in \mathfrak{a})$ elemre $\beta\xi, \xi\beta \in \mathfrak{q}$ is fennáll. Vagyis $(\mathfrak{q} : \alpha)_b$, $(\mathfrak{q} : \alpha)_j \subseteq (\mathfrak{q} : \mathfrak{a})_b, (\mathfrak{q} : \mathfrak{a})_j$.

Tudvalevő dolog, hogy ha egy gyűrűben a (0) komplett primideál, akkor a gyűrű zérusosztómentes.

A $\mathfrak{q} = (0)$ speciális esetben az 1. tételből korolláriumként nyerjük [4] dolgozatom eredményeit, melyek közül itt csak [4] 2. tételt fogalmazzuk meg:

2'. korollárium: Az R gyűrű akkor és csak akkor zérusosztómentes, ha az R egyik $\mathfrak{a}$ zérusosztómentes ideáljának létezik egy $\alpha(\neq 0)$ eleme, mely nem baloldali zérusosztó az R-ben.

4. A P gyűrűnek R gyűrűvel való Schreier-féle gyűrűbővítésén egy olyan $\mathfrak{R}$ gyűrűt értünk, mely tartalmaz egy P' ideált úgy, hogy

$$\mathfrak{R}/\mathsf{P}' \simeq R, \quad \mathsf{P}' \simeq \mathsf{P} \qquad (12)$$

izomorfiák teljesülnek. Nyilvánvaló, hogy P azonosítható P′-vel, ezért az előző eredmények alkalmazhatók az $\mathfrak{R}$ gyűrűre, P ideálra és ($\mathfrak{R}/\mathrm{P} \cong$) R faktorgyűrűre. Itt most csak arra szorítkozunk, hogy az előbbi eredmények egy részét megfogalmazzuk a Schreier-féle gyűrűbővítés esetére.

2. tétel: A P *gyűrűnek az R gyűrűvel való valamely* $\mathfrak{R}$ *Schreier-féle bővítési gyűrűje akkor és csak akkor tartalmaz valódi (komplett) primideált, ha vagy a* P *vagy az R gyűrű tartalmaz valódi (komplett) primideált.*

Továbbá az $\mathfrak{R}$ *gyűrű összes valódi (komplett) primideáljai meghatározhatók* P*-nak és R-nek összes valódi (komplett) primideáljai által.*[10]

3. tétel: A P *gyűrűnek az R gyűrűvel való valamely* $\mathfrak{R}$ *Schreier-féle bővítési gyűrűje akkor és csak akkor majdnem-zérusosztómentes, ha* P *majdnem-zérusosztómentes és* P*-nak létezik egy* $\alpha(\neq 0)$ *eleme, melyre a*

$$\beta \mathrm{P} \alpha = (0) \qquad (\beta \in \mathfrak{R};\ \alpha \neq 0,\ \in \mathrm{P})$$

egyenletnek csak a $\beta = 0$ *megoldása van.*[11]

IRODALMI JEGYZÉK

[1] *N. H. McCoy:* Prime ideals in general rings, *Amer. Journ. Math., 71* (1949), 823—833.

[2] *M. Nagata:* On the theory of radicals in a ring, *Journ. Math. Soc. Japan, 3* (1951), 330—344.

[3] *L. Rédei:* Holomorphentheorie für Gruppen und Ringe, *Acta Math. Hung., 5* (1954).

[4] *O. Steinfeld:* Über die Nullteilerfreiheit von Ringen, *Publ. Math. 2* (1952), 281—285.

[5] *O. Steinfeld:* Remark on a paper of N. H. McCoy, *Publ. Math.*

[10] A meghatározás részletesebb ismertetésére itt nem térünk ki, mert az a Schreier-féle bővítéselmélet részletes kidolgozását tenné szükségessé.

[11] Ez a tétel lényegében analóg *Steinfeld* [4] 3. tétellel, de a konkrétebb bővítéselméleti kidolgozást itt mellőzzük.

GYÖKÖK LINEÁRIS KOMBINÁCIÓIRÓL

FRIED ERVIN

Érdekes probléma azt megvizsgálni, hogy a racionális számokból vont gyökök között milyen összefüggés állhat fenn. E kérdéssel már többen is foglalkoztak;[1] mi a következőkben egy ennél általánosabb problémát fogunk tekinteni, amennyiben nem korlátozzuk vizsgálatainkat a racionális számtestre, mindössze azt a megszorítást fogjuk tenni a szóbanforgó testekről, hogy ne tartalmazzanak más egységgyököt, mint ± 1-et (ilyen pl. minden formálisan valós test). Megjegyezzük, hogy az itteni bizonyítás nemcsak hogy nem egyszerűsödik, ha csupán a racionális számtestet tekintjük, hanem nem is vihető keresztül. Eredményünknek alkalmazását is adjuk egy *W. Sierpinski* által felvetett problémára.

1. Be fogjuk bizonyítani a következő tételt:

1. tétel. Legyen adva egy K test; tekintsük a

$$c_1 \sqrt[n_1]{a_1} + \cdots + c_k \sqrt[n_k]{a_k} = \alpha \neq 0 \qquad (c_\nu, a_\nu \in K) \qquad (1)$$

kifejezést, amely α-nak legrövidebb előállítása abban az értelemben, hogy kevesebb $c_\nu \sqrt[n_\nu]{a_\nu}$ tag összege már nem lehet α. Amennyiben $K(\sqrt[n_1]{a_1}, \ldots, \sqrt[n_k]{a_k})$ nem tartalmaz ± 1-től különböző egységgyököt, akkor $\sqrt[n_\nu]{a_\nu} \in K(\alpha)$, $(\nu = 1, \ldots, k)$.

2. A tétel bizonyításához előrebocsátunk négy lemmát.

1. lemma. Legyen $a \in K$, és $K(\sqrt[n]{a})$ ne tartalmazzon ± 1-től különböző egységgyököt. Ha az $x^n - a$ polinom reducibilis a K felett, akkor létezik n-nek oly $k > 1$ osztója, hogy $\sqrt[k]{a} \in K$.

Ez esetben azt fogjuk mondani, hogy $\sqrt[n]{a}$ a K-ban *redukálható.*

Bizonyítás. A $\vartheta = \sqrt[n]{a}$ jelöléssel a reducibilitás alapján

$$x^n - a = \prod_{\nu=1}^{n} (x - \varepsilon^\nu \vartheta) = g(x) \cdot h(x),$$

[1] Ehhez vonatkozó irodalom megtalálható *Obláth Richárd* cikkében: Gyökmennyiségek aritmetikai sajátságairól, *Az Első Magyar Matematikai Kongresszus Közleményei* (1952), 445—450.

ahol $g(x), h(x) \in K[x]$, $\operatorname{gr} g(x) \geqq 1$, $\operatorname{gr} h(x) \geqq 1$, $\varepsilon^{n} = 1$. Nyilván

$$g(x) = \Pi'(x-\varepsilon^{\nu}\vartheta), \quad h(x) = \Pi''(x-\varepsilon^{\nu}\vartheta),$$

ahol $\Pi'(x-\varepsilon^{\nu}\vartheta)\,\Pi''(x-\varepsilon^{\nu}\vartheta) = \prod_{\nu=1}^{n}(x-\varepsilon^{\nu}\vartheta)$. A konstans tagok egybevetéséből:

$$\varepsilon_1\vartheta^{u} = g(0) = b \in K, \quad \varepsilon_2\vartheta^{v} = h(0) = c \in K, \text{ ahol } \varepsilon_1^{n} = \varepsilon_2^{n} = 1 \text{ és } u+v = n.$$

Mivel $K(\vartheta)$ nem tartalmaz ± 1-től különböző egységgyököt, ezért $\varepsilon_1 = \dfrac{b}{\vartheta^{u}}$ és $\varepsilon_2 = \dfrac{c}{\vartheta^{v}}$ csak ± 1 lehet. Ha s és t olyan egészek, melyekre $(u, v) = us + vt = n'$, ahol $n'|n$ és $n' < n$, akkor $\vartheta^{u} = \pm b = b' \in K$, $\vartheta^{v} = \pm c = c' \in K$ alapján $d = b'^{s} \cdot c'^{t} \in K$. Azonban $kn' = n$, ahol $k|n$, $k > 1$, és így $d = \vartheta^{n'} = \sqrt[k]{a} \in K$.

2. *lemma.* Ha $L = K(\sqrt[n]{a})$ nem tartalmaz ± 1-től különböző egységgyököt és $x^{n} - a$ irreducibilis K felett, akkor minden Δ test, melyre $K \subseteq \Delta \subseteq L$, $\Delta = K(\sqrt[k]{a})$ alakú, ahol $k|n$.

Bizonyítás. Legyen $\vartheta = \sqrt[n]{a}$, és s az a legkisebb természetes szám, melyre $\vartheta^{s} \in \Delta$. Nyilván ekkor $K(\vartheta^{s}) \subseteq \Delta$ is fennáll. $\Lambda = K(\vartheta^{s})$-re igaz, hogy[2] $[L:\Lambda] = s$, hiszen $[\Lambda : K] = \dfrac{n}{s}$. Az $x^{s} - \vartheta^{s}$ egyenlet irreducibilis kell hogy legyen Δ felett, mert, ha reducibilis lenne, akkor az 1. lemma alapján lenne oly $k > 1$ szám, melyre $k|s$ és $\vartheta^{\frac{s}{k}} \in \Delta$, ami ellentmond s minimális voltának. Így azonban $[L:\Delta] = s = [L:\Lambda]$, és $\Lambda \subseteq \Delta$ miatt $\Lambda = \Delta$, amivel állításunkat igazoltuk.

3. *lemma.* Legyen $\sqrt[n]{a} \in K(\sqrt[m]{b})$, és $K(\sqrt[m]{b})$ ne tartalmazzon ± 1-től különböző egységgyököt. Amennyiben $x^{n} - a$ és $x^{m} - b$ egyike sem reducibilis K felett, akkor $\sqrt[n]{a} \in K(\sqrt[n]{b})$.

Bizonyítás. A 2. lemma alapján $K(\sqrt[n]{a}) = K(\sqrt[n']{b})$ $(n'|m)$; és a testfok egyértelműsége folytán — mivel $x^{n} - a$ és $x^{m} - b$ irreducibilis a K felett — $n' = n$. Vagyis $\sqrt[n]{a} \in K(\sqrt[n]{b})$.

4. *lemma.* A 3. lemma feltételei mellett $\sqrt[n]{a} = c(\sqrt[m]{b})^{l}$, ahol $c \in K$ és $0 < l < m$.

[2] $[L:K]$ az L testnek a K testre vonatkozó fokát jelenti.

Bizonyítás. A 3. lemma alapján $\sqrt[n]{a} \in K(\sqrt[n]{b})$. Ha erre az esetre ki tudjuk mutatni, hogy $\sqrt[n]{a} = c(\sqrt[n]{b})^l$ $(c \in K,\ 0 < l < n)$, akkor a 4. lemma esetével is kész leszünk, mert $\sqrt[n]{a} = c(\sqrt[m]{b})^{l\frac{m}{n}}$, ahol $c \in K$ és $0 < l\frac{m}{n} < m$. Itt $\frac{m}{n}$ egész, mivel az elem foka osztója a test fokának (ez egyébként a 3. lemma bizonyításából is kiderül).

Mindenekelőtt arra az esetre bizonyítjuk lemmánkat, mikor $n = p$ prímszám. Most $\sqrt[p]{a} \in K(\sqrt[p]{b})$ miatt

$$\sqrt[p]{a} = f(\sqrt[p]{b}), \qquad \text{ahol } f(x) \in K[x],\ \operatorname{gr} f(x) < p.$$

Ha $f(x) = cx^l$ $(c \in K, 0 < l < p)$, készen vagyunk. Kimutatjuk, hogy $f(x) \neq cx^l$ nem állhat fenn. Ugyanis $\sqrt[p]{b}$ gyöke az $[f(x)]^p - a$ polinomnak, és így

$$[f(x)]^p - a = (x^p - b)\, g(x), \qquad (g(x) \in K[x]).$$

Ha x helyébe εx-et teszünk $(\varepsilon^p = 1)$:

$$[f(\varepsilon x)]^p - a = (x^p - b)\, g(\varepsilon x),$$

amiből

$$[f(\varepsilon \sqrt[p]{b})]^p - a = 0, \text{ ill. } [f(\sqrt[p]{b})]^p = [f(\varepsilon \sqrt[p]{b})]^p,$$

mivel $[f(\sqrt[p]{b})]^p = a$. Ennélfogva

$$\varepsilon^l f(\sqrt[p]{b}) = f(\varepsilon \sqrt[p]{b}).$$

Mármost, ha $f(x) \neq cx^l$, akkor $h(x) = \varepsilon^l f(x) - f(\varepsilon x) \neq 0$, ahol $h(x) \in K(\varepsilon)[x]$, $\operatorname{gr} h(x) < p$ és $h(\sqrt[p]{b}) = 0$. Ez pedig azt jelenti, hogy az $x^p - b$ polinom a $K(\varepsilon)$ test felett reducibilis. Azonban $K(\varepsilon)$ a K-nak Galois-bővítése, és így $x^p - b$ csupa azonos fokú faktorra esik szét $K(\varepsilon)$-ban. Tekintettel arra, hogy p prímszám, a faktorok csak lineárisak lehetnek, amiből következik, hogy $\sqrt[p]{b} \in K(\varepsilon)$. Ez azonban lehetetlen, hisz $\operatorname{gr} \sqrt[p]{b} = p$ és $[K(\varepsilon) : K] < p$. Így $n =$ prímszám esetére a lemma bizonyítva van.

Legyen most n összetett szám, és tegyük fel, hogy n valódi osztóira az állítást már bizonyítottuk. n ilyen alakban írható: $n = pv$, ahol $p < n, v < n$ és p prímszám.

$\sqrt[n]{a} \in K(\sqrt[n]{b})$ miatt $\sqrt[v]{a} \in K(\sqrt[n]{b})$ is igaz. De akkor a 3. lemma alapján kapjuk:

$$\sqrt[v]{a} \in K(\sqrt[v]{b}),$$

ahonnan n valódi osztóira vonatkozó feltételünk alapján arra jutunk, hogy

$$\sqrt[n]{a} = d(\sqrt[v]{b})^s, \qquad \text{ahol } d \in K \text{ és } 0 < s < v.$$

Mindkét oldalból p-ik gyököt vonva:

$$\sqrt[n]{a}=\sqrt[p]{d}(\sqrt[n]{b})^s,$$

ahol $\sqrt[p]{d}$ értéke a lehetséges p számú érték közül egyértelműen meg van határozva, mert

$$\sqrt[p]{d}=\frac{\sqrt[n]{a}}{(\sqrt[n]{b})^s}\in K(\sqrt[n]{b})$$

és ez utóbbi test nem tartalmaz ± 1-től különböző egységgyököt. Innen a 3. lemma alapján $\sqrt[p]{d}\in K(\sqrt[p]{b})$ adódik. Ha $\sqrt[p]{d}\in K$, készen vagyunk. Ha nem, akkor x^p-d szintén irreducibilis K felett, és így a primszám esetére bizonyítottak alapján:

$$\sqrt[p]{d}=c(\sqrt[p]{b})^t, \qquad \text{ahol } c\in K,\ 0<t<p.$$

Ekkor azonban

$$\sqrt[n]{a}=c(\sqrt[p]{b})^t\cdot(\sqrt[n]{b})^s=c(\sqrt[n]{b})^{vt+s},$$

ahol $0<t\leqq p-1$ miatt $0<vt\leqq vp-v$, és így $0<s<v$ alapján $0<vt+s<pv$, vagyis:

$$\sqrt[n]{a}=c(\sqrt[n]{b})^l, \qquad \text{ahol } c\in K,\ 0<l<n.$$

Ezzel a 4. lemmát is bebizonyítottuk.

3. Ezekután a tételt k-ra, vagyis a gyökök számára vonatkozó teljes indukcióval fogjuk bizonyítani.

$k=1$-re az állítás helyessége nyilvánvaló.

Tegyük fel, hogy k tagra igaz az állítás, $(k+1)$-re nem $(k\geqq 1)$. Ez esetben (1) így alakul:

$$c_1\sqrt[n_1]{a_1}+\cdots+c_{k+1}\sqrt[n_{k+1}]{a_{k+1}}=\alpha\neq 0 \qquad (c_\nu,a_\nu\in K). \quad (2)$$

Feltehetjük, hogy a gyökök $K'=K(\alpha)$-ban már nem redukálhatók. Ekkor (2) így írható:

$$c_2\sqrt[n_2]{a_2}+\cdots+c_{k+1}\sqrt[n_{k+1}]{a_{k+1}}=\alpha-c_1\sqrt[n_1]{a_1} \qquad (c_\nu,a_\nu\in K').$$

A tétel feltételei nyilván a jelen esetben is érvényben maradnak.

Ekkor azonban a teljes indukciós feltétel alapján:

$$\sqrt[n_i]{a_i}\in K'(\sqrt[n_1]{a_1}) \qquad (i=2,\ldots,k+1).$$

Mivel feltettük, hogy K'-ben már egyik gyök sem redukálható, így a 4. lemma alapján:

$$\sqrt[n_i]{a_i}=c_i'(\sqrt[n_1]{a_1})^{l_i}, \qquad \text{ahol } c_i'\in K' \text{ és } 0\leqq l_i<n_1.$$

A $c_1'' = c_1$ és $l_1 = 1$ jelölés mellett (2) ekkor a következő alakban írható:

$$\sum_{i=1}^{k+1} c_i''(\sqrt[n_1]{a_1})^{l_i} - \alpha = 0, \qquad \text{ahol } c_i'' = c_i c_i' \in K' \text{ és } 0 \leq l_i < n_1.$$

Tekintsük ezek után a $\varphi(x) = \sum_{i=1}^{k+1} c_i'' x^{l_i} - \alpha$ polinomot. Nyilván $\varphi(x) \in K'[x]$, $\varphi(\sqrt[n_1]{a_1}) = 0$ és $\mathrm{gr}\, \varphi(x) < n_1$. Ezenkívül, mivel $\varphi(x)$-ben elsőfokú tag szerepel ($i = 1$ esetén) és ennek együtthatója nem lehet 0 (hiszen feltettük, hogy az (1) előállítás a legrövidebb), ezért $\varphi(x) \neq 0$ is igaz. Ezekből azonban következik, hogy $x^{n_1} - a_1$ reducibilis K' felett, ami az 1. lemma alapján ellentmond a (2) utáni feltevésnek.[3,4] Q. e. d.

4. Most pedig megoldjuk az említett feladatot, melyet *W. Sierpinski* vetett fel.

A feladat a következő: Meghatározandó az $\alpha = 1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \cdots + \sqrt[n]{n}$ algebrai számnak a racionális számtest feletti foka. (Itt $\sqrt[i]{i}$ mindig az $x^i - i = 0$ egyenlet pozitív valós gyökét jelöli.) Be fogjuk bizonyítani:

2. tétel. Az $\alpha = 1 + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt[n]{n}$ *algebrai szám foka:*

$$\mathrm{gr}\, \alpha = \prod_{\substack{p<n \\ p=\text{prím}}} p^{\mu(p)},$$

ahol $\mu(p) = \sum_{k=1}^{\infty} \pi\left(\frac{n}{p^k}\right) + \delta_p$, $\pi(x)$ *az x-nél nem nagyobb prímszámok száma;* $\delta_p = 0$, *ha* $p \,\Big|\, \left[\frac{\log n}{\log p}\right]$ *és* $\delta_p = 1$ *máskor.*

5. Először is kimutatjuk, hogy α benne van abban a testben, melyet úgy kapunk, hogy a racionális számtesthez a következő algebrai számokat adjun-

[3] Az $\alpha = 0$ esetben egészen kis változtatással kapjuk, hogy $\sqrt[n_i]{a_i} = d_i \sqrt[n_1]{a_1}$, ahol $\sum_{i=1}^{k} c_i d_i = 0$, vagyis, hogy bármely két gyök lineárisan összefügg.

[4] Tekintettel arra, hogy a tétel feltételei igazak maradnak, ha a szereplő testek formálisan valósak, így minden formálisan valós testre igaz a tétel. Igaz viszont az $R(\sqrt[2^n]{-2})$ testre is, hol R a racionális számtest, bár e test nem formálisan valós, mint ezt $(\sqrt[2^n]{-2})^{2} + 1^2 = -1$ mutatja.

Megemlítjük az első tételnek azt a következményét is, hogy a tétel állításaiból könnyen leolvasható feltétel mellett (pl. a valós számok körében maradva) lineárisan független gyökök adjunkciója helyettesíthető tetszőleges lineáris kombinációjuk adjungálásával.

gáljuk (p, q primek):

$$\begin{cases} \sqrt[p^k]{q}, & \text{ahol } qp^k \leqq n < qp^{k+1} \text{ és } p \neq q; \\ \sqrt[q^{k+1}]{q}, & \text{ahol } q^{k+1} \leqq n < q^{k+2} \text{ és } q \nmid k+1; \\ \sqrt[q^k]{q}, & \text{ahol[5] } q^{k+1} \leqq n < q^{k+2} \text{ és } q \mid k+1. \end{cases} \tag{3}$$

Nyilván elegendő bizonyítani, hogy ekkor $\sqrt[i]{i}$ is adjungálódik ($i = 1, 2, \ldots, n$). Legyen $p_1^{s_1} \cdots p_r^{s_r}$ az i kanonikus előállítása. Ekkor elegendő annak a bizonyítása, hogy a (3) alatti számok adjungálásával $\sqrt[i]{p_j^{s_j}}$ $(j = 1, \ldots, r)$ is adjungálódik, hisz ekkor ezek szorzata: $\sqrt[i]{i}$ is adjungálódni fog.

Legyenek $c_1, \ldots, c_r$ olyan racionális egészek, melyekre $[(c_l, p_l = 1)$ és$]$ $\dfrac{1}{p_1^{s_1} \cdots p_r^{s_r}} = \dfrac{c_1}{p_1^{s_1}} + \cdots + \dfrac{c_r}{p_r^{s_r}}$. Ebből könnyen látható, hogy a $p_j^{\frac{s_j c_l}{p_l^{s_l}}}$ $(j, l = 1, 2, \ldots, r)$ algebrai számok adjungálásával keletkező test tartalmazza $\sqrt[i]{i}$-t. Ezek a számok pedig benne vannak a (3) alatti számokat tartalmazó testben. Ugyanis, ha $j \neq l$, tekintsük az adjungált $\sqrt[p_l^{k_l}]{p_j}$-t, ahol $p_l^{k_l} \cdot p_j \leqq n < p_l^{k_l+1} p_j$. Tekintettel arra, hogy $p_j p_l^{s_l} \mid i$ és $i \leqq n$, így $p_j p_l^{s_l} \leqq p_j p_l^{k_l}$, vagyis $s_l \leqq k_l$, továbbá $p_j^{\frac{s_j c_l}{p_l^{s_l}}}$ a $\sqrt[p_l^{k_l}]{p_j}$-nek hatványa, ezért $p_j^{\frac{s_j c_l}{p_l^{s_l}}}$ valóban adjungálódott.

Vizsgáljuk most azt az esetet, amikor $l = j$. Ha p_j olyan primszám, melyre $p_j^{k_j+1} \leqq n < p_j^{k_j+2}$ és $p_j \nmid k_j + 1$, akkor $\sqrt[p_j^{k_j+1}]{p_j}$-t adjungáltuk. Mivel $p_j^{s_j} \mid i$ és $i \leqq n$, így $p_j^{s_j} \leqq n$, amiből $s_j \leqq k_j + 1$ következik. Ez esetben azonban $p_j^{\frac{s_j c_j}{p_j^{s_j}}}$ ismét $\sqrt[p_j^{k_j+1}]{p_j}$-nek hatványa, tehát eleme a szóbanforgó testnek.

Marad végül az az eset, mikor $l = j$, de p_j olyan primszám, melyre $p_j^{k_j+1} \leqq n < p_j^{k_j+2}$ és $p_j \mid k_j + 1$. Ekkor ismét igaz, hogy $p_j^{s_j} \leqq n$. Amennyiben $s_j < k_j + 1$, az okoskodás ugyanúgy történik, mint az előbb. Ha pedig $s_j = k_j + 1$, akkor $p_j^{\frac{s_j c_j}{p_j^{s_j}}}$-nél a kitevőben p_j-vel egyszerűsíthetünk. Ezáltal visszajutottunk arra az esetre, mikor $s_j < k_j + 1$. Tehát evvel állításunkat maradéktalanul bebizonyítottuk.

[5] Ez az egyenlőtlenség a $q . q^k \leqq n < q q^{k+1}$ alakban is írható.

6. Most bebizonyítjuk, hogy ha a racionális számtesthez adjungáljuk α-t, akkor az így kapott testben a (3) alatt említett gyökök mindegyike szerepelni fog.

A gyökök pozitivitása alapján könnyen meggyőződhetünk arról, hogy α előállítására érvényesek az első tétel feltételei. Ekkor az 1. tételt (ha $c_i = 1$, $a_i = n_i = i$) alkalmazva, kapjuk, hogy $\sqrt[i]{i} \in R(\alpha)$ $(i \leqq n)$.

Válasszuk i-t p^k-nak, ekkor $\sqrt[p^k]{p^k} \in R(\alpha)$ $(p^k \leqq n)$. Legyen most $i = qp^k \leqq n < qp^{k+1}$ $(p \neq q)$. Ekkor $\sqrt[qp^k]{qp^k} \in R(\alpha)$ és annál inkább $\sqrt[p^k]{qp^k} \in R(\alpha)$. De $p^k \leqq n$ miatt $\sqrt[p^k]{p^k} \in R(\alpha)$, így a kettő hányadosa $\sqrt[p^k]{q} \in R(\alpha)$, ahol $qp^k \leqq n < qp^{k+1}$.

Ha a $p^k \leqq n < p^{k+1}$ által definiált k-ra $(k, p) = 1$, akkor $\sqrt[p^k]{p^k} \in R(\alpha)$ alapján t-edik hatványra emelve következik, hogy $\sqrt[p^k]{p} \in R(\alpha)$, ahol t a $kx \equiv 1 \pmod{p^k}$ kongruencia gyöke. Amennyiben $(k, p) = p$, akkor $(k-1, p) = 1$ és $\sqrt[p^{k-1}]{p^{k-1}} \in R(\alpha)$ is fennáll, ebből pedig analóg módon $\sqrt[p^{k-1}]{p} \in R(\alpha)$ adódik.

Így tehát kimutattuk, hogy α adjunkciója helyettesíthető a (3) alatti kifejezések adjungálásával.

7. Most bebizonyítjuk, hogy ezen gyökök adjunkciójánál a fokszámok összeszorzódnak. Először azt igazoljuk, hogy azonos alapú gyökök adjunkciója ugyanazt eredményezi, mintha azt a gyököt adjungáljuk, melynek alapja a szóbanforgó alap, és gyökkitevője a szereplő gyökkitevők szorzata:

$$K(\sqrt[r_1]{p}, \ldots, \sqrt[r_s]{p}) = K(\sqrt[r_1 \cdots r_s]{p}) \qquad (K \text{ tetszőleges test}).$$

Ez rögtön következik abból, hogy a szereplő gyökkitevők páronként relatív primek. Tehát $\sqrt[m_j]{p_j}$ alakú gyököket kell adjungálni, ahol p_j $(j = 1, 2, \ldots)$ végigfut az n-ig terjedő összes primszámokon.

Tegyük fel, hogy $R_{j-1} = R(\sqrt[m_1]{p_1}, \ldots, \sqrt[m_{j-1}]{p_{j-1}})$ és $[R_{j-1} : R] = m_1 \cdots m_{j-1}$, de $R_j = R_{j-1}(\sqrt[m_j]{p_j})$-re $[R_j : R_{j-1}] < m_j$. Ekkor az $x^{m_j} - p_j$ polinom reducibilis az R_{j-1} test felett, és így az 1. lemma szerint létezik olyan m egész, melyre $m | m_j$, $m > 1$ és $\sqrt[m]{p_j} \in R_{j-1}$. Mivel R_{j-1}-nek egy bázisa az $\sqrt[m_l]{p_l}$ számok $(l \leqq j-1)$ hatványszorzataiból áll, ezért $\sqrt[m]{p_j} = c_0 + \sum\limits_{\nu} c_\nu \sqrt[n_\nu]{a_\nu}$ alakban írható, ahol az a_ν egészek primtényezői $p_1, p_2, \ldots, p_{j-1}$ közül valók és c_ν-k racionális számok.

Feltehetjük, hogy ez $\sqrt[m]{p_j}$-nek a „legrövidebb" ilyen előállítása, és ekkor (feltehetjük, hogy $\sqrt[n_\nu]{a_\nu}$ nem redukálható a racionális számtestben) az 1.

tételt alkalmazva kapjuk, hogy $\sqrt[n_\nu]{a_\nu} \in R(\sqrt[m]{p_j})$. Ennélfogva a 4. lemma alapján

$$\sqrt[n_\nu]{a_\nu} = c(\sqrt[m]{p_j})^l, \qquad \text{ahol } c \in R \text{ és } 0 < l < m.$$

Emeljük mindkét oldalt $n_\nu m$-ik hatványra, majd távolítsuk el a törteket. Vizsgáljuk meg most p_j kitevőjét mindkét oldalon. Közvetlenül belátható, hogy p_j kitevője a baloldalon $\equiv 0 \pmod{n_\nu m}$ (a_ν nem tartalmazza p_j-t!), a jobboldalon $\equiv n_\nu l \pmod{n_\nu m}$, ami $0 < l < m$ miatt lehetetlen.

8. Megállapítottuk tehát, hogy α foka egyenlő a (3) alatti gyökkitevők szorzatával.

Vizsgáljuk meg most, hogy egy a gyökkitevőben szereplő p primszám milyen hatványon fordul elő.

Legalább az első hatványon annyiszor fog szerepelni, ahány q primszámra igaz, hogy $pq \leq n$, vagyis ahány primszám $\frac{n}{p}$-ig található: $\pi\left(\frac{n}{p}\right)$-szer. Legalább a második hatványon $\pi\left(\frac{n}{p^2}\right)$-szer, s. i. t.

Az [5] lábjegyzet alapján ezen q primszámok közé a $p|k+1$ esetben maga a p primszám is beszámítható, míg, ha $p \nmid k+1$, a p kitevője egy esetben még 1-gyel nagyobb lesz. Így egy fix p primszám kitevője $\mu(p) = \sum_{k=1}^{\infty} \pi\left(\frac{n}{p^k}\right) + \delta_p$, ahol $\delta_p = 0$, ha $p \,\Big|\, \left[\frac{\log n}{\log p}\right]$, és $\delta_p = 1$ máskor, mint azt állítottuk.[6, 7]

[6] Ha $p^{k+1} \leq n < p^{k+2}$, akkor $k+1 = \left[\frac{\log n}{\log p}\right]$.

[7] Megemlítjük, hogy érdekes a hasonlatosság ezen α szám foka, és $n!$ Legendre-féle alakja között. Az utóbbiban ugyanis az x-nél nem nagyobb primszámok száma: $\pi(x)$ helyébe az x-nél nem nagyobb számok száma: $[x]$ lép (a δ_p-től eltekintve).

MOMENTUMPROBLÉMA ÖNADJUNGÁLT OPERÁTOROKRA*

SZŐKEFALVI-NAGY BÉLA lev. tag

Előadta az 1953. január 27-én tartott felolvasó ülésen

1. Bevezetés

R. V. KADISON nemrég egy, általa „általánosított Schwarz-féle egyenlőtlenség"-nek nevezett tételt bizonyított be [1]. Ez a tétel egy egyszerűbb, de ekvivalens alakjában a következőképpen szól:

Legyen X a valós számegyenes pontjainak kompakt részhalmaza és legyen $C(X)$ az X-en értelmezett $f(x)$ (valós értékű) folytonos függvények tere. Legyen adva $C(X)$-nek a H Hilbert-tér korlátos önadjungált operátoraira való $f(x) \to B_f$ leképezése, amely lineáris, nagyságrend-tartó és 1-nél nem nagyobb normájú, azaz amelyre

a) $B_{c_1 f_1 + c_2 f_2} = c_1 B_{f_1} + c_2 B_{f_2}$,

b) *ha* $f_1(x) \geqq f_2(x)$ *az X minden x pontjában, akkor* $B_{f_1} \geqq B_{f_2}$,**

c) $\|B_f\| \leqq \|f\|$.***

Ekkor az x és x^2 függvényeknek megfelelő operátorok eleget tesznek a következő egyenlőtlenségnek:

$$B_x^2 \leqq B_{x^2}. \tag{1}$$

Minthogy az állítás csak az x és x^2 függvényekre vonatkozik, természetesebb csak azt feltételezni, hogy a leképezés eleve csak az x^n függvényekre és valós együtthatós lineáris kapcsolataikra, azaz az x változó valós polinomjaira van megadva. Minthogy ezek a $p(x)$ polinomok a $C(X)$ térben mindenütt sűrűn feküsznek, és minthogy a $\|p_n - p_m\| < \varepsilon$ egyenlőtlenség az a) és c) feltételek következtében maga után vonja a $\|B_{p_n} - B_{p_m}\| < \varepsilon$ egyenlőtlen-

* Angolnyelvű változata "A moment problem for self-adjoint operators" címmel megjelent: *Acta Math. Hung.* 3 (1952), 285—292.

** Két korlátos önadjungált operátorra, A-ra és B-re, $A \geqq B$ azt jelenti, hogy $(Au, u) \geqq (Bu, u)$ a H tér minden u elemére.

*** Önadjungált B operátorra

$$\|B\| = \sup_{\|u\|=1} \|Bu\| = \sup_{\|u\|=1,\ \|v\|=1} |(Bu, v)| = \sup_{\|u\|=1} |(Bu, u)|;$$

a $C(X)$ függvénytér $f(x)$ elemére pedig

$$\|f\| = \max_{x \in X} |f(x)|,$$

ez a maximum eléretik, mert az X halmaz kompakt, az $f(x)$ függvény pedig folytonos.

séget, könnyű megmutatni, hogy a leképezés kiterjeszthető a polinomokról az egész $C(X)$ térre úgy, hogy az a)—c) feltételek továbbra is kielégüljenek.

Vegyük észre, hogy a c) feltételt elég az $f(x) \equiv 1$ függvényre megkövetelni, azaz elég azt feltenni, hogy

c′) $\|B_1\| \leqq 1$.

Valóban, tetszés szerinti $f(x)$ esetében a $\pm f(x) \leqq \|f\|$ egyenlőtlenségekből következik az a) és b) feltételek alapján, hogy

$$\pm B_f \leqq \|f\| B_1,$$

ebből pedig c′) alapján következik, hogy

$$\|B_f\| \leqq \|f\| \, \|B_1\| \leqq \|f\|.$$

Mindezek alapján, B_{x^k} helyett A_k-t írva, *Kadison* tételét a következő általánosabb alakban is kimutathatjuk:

1. tétel. *Legyen X a valós számegyenes pontjainak kompakt részhalmaza, és legyen $A_0, A_1, A_2, \ldots$ a H Hilbert-tér korlátos önadjungált operátorainak olyan sorozata, amely eleget tesz a következő feltételeknek:*

$$(\alpha_X) \begin{cases} \text{ha } c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n \geqq 0 \text{ az } X \text{ halmazon,} \\ \text{akkor } c_0 A_0 + c_1 A_1 + c_2 A_2 + \cdots + c_n A_n \geqq O, \end{cases}$$

(β) $\|A_0\| \leqq 1$.

Ekkor fennáll a

$$A_1^2 \leqq A_2 \tag{2}$$

egyenlőtlenség.

Ebben a dolgozatban ezt a tételt egy olyan, a *Kadison*étól egészen különböző módszerrel fogjuk bebizonyítani, amely nemcsak a (2) egyenlőtlenség bebizonyítását teszi lehetővé, hanem egyben lehetővé teszi az összes olyan $\{A_k\}$ sorozatok meghatározását, amelyek a fenti feltételeknek eleget tesznek. E feltételek közül egyébként (β) csak normalizálást jelent; ha az $\{A_k\}$ sorozat csak az (α_X) feltételnek van alávetve és $A_0 \neq O$, akkor az $\left\{\frac{1}{\|A_0\|} A_k\right\}$ sorozat mindkét feltételnek eleget tesz. Tehát, ha a (β) feltételt elejtjük, akkor (2) helyett a

$$A_1^2 \leqq \|A_0\| A_2 \tag{3}$$

egyenlőtlenségre jutunk, legalább is akkor, ha $A_0 \neq O$. Minthogy azonban (α_X) alapján a $\pm x \leqq \|x\|$ egyenlőtlenségekből következnek a $\pm A_1 \leqq \|x\| A_0$ egyenlőtlenségek, azért, ha $A_0 = O$, akkor egyben $A_1 = O$, tehát a (3) egyenlőtlenség az $A_0 = O$ esetben is érvényes.

2. Az egyenlőtlenség bizonyítása

Először is azt vegyük észre, hogy (β) alapján

(4) $$A_0 \leqq I.$$

Válasszunk most egy tetszőleges u elemet a H Hilbert-térből és tekintsük az

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^k \, dm(x) = \mu_k \qquad (k=0,1,2,\ldots)$$

momentumproblémát, ahol a μ_k mennyiségek a következőképpen vannak megadva:

$$\mu_k = (A_k u, u).$$

Minthogy (α_X) szerint

$$c_0\mu_0 + c_1\mu_1 + \cdots + c_n\mu_n = ((c_0A_0 + c_1A_1 + \cdots + c_nA_n)u, u) \geqq 0,$$

ha

$$c_0 + c_1x + \cdots + c_nx^n \geqq 0 \text{ az } X \text{ halmazon},$$

azért ennek a momentumproblémának van egy $m(x)$ megoldása; ez egy olyan sehol sem fogyó függvény, amelynek a növekedési helyei az X halmazba esnek, tehát amely az X halmaz kiegészítő intervallumai mindegyikében állandó. Ha $[a, b]$ a legkisebb azok közül a zárt intervallumok közül, amelyek az X halmazt tartalmazzák, akkor tehát $m(x)$ többek között állandó az egész $-\infty < x < a$ félegyenesen és az egész $b < x < \infty$ félegyenesen is. Ez a megoldás egyértelműen van meghatározva, ha kikötjük még, hogy az $x < a$ pontokban $m(x) = 0$ legyen, és hogy $m(x)$ mindenütt jobbról folytonos legyen. Az ilyen módon normalizált megoldást, feltüntetve az u elemtől való függését is, jelöljük $m(u; x)$-szel.

A H tér minden u, v elempárjához rendeljük most hozzá az x következő függvényét:

$$m(u, v; x) = \frac{1}{4}[m(u+v; x) - m(u-v; x) + im(u+iv; x) - im(u-iv; x)].$$

Minthogy az $(A_k u, v)$ bilineáris alak és az $(A_k u, u)$ kvadratikus alak között hasonló összefüggés érvényes, azért tehát

(5) $$\int_{-\infty}^{\infty} x^k \, dm(u, v; x) = (A_k u, v) \qquad (k=0,1,\ldots).$$

Az $m(u, v; x)$ függvények hasonló módon vannak normálva, mint az $m(u; x)$ függvények (t. i. 0-val egyenlők, ha $x < a$, és jobbról folytonosak) és ennélfogva az u, v elemek által egyértelműen meg vannak határozva; speciálisan $m(u, u; x) = m(u; x)$. Az (5) egyenlet jobboldalán (a k minden rögzített értéke mellett) az u-ban és v-ben (Hermite-féle) szimmetrikus bilineáris alak állván, az $m(u, v; x)$ függvény egyértelmű meghatározottságából következik, hogy az x minden rögzített értéke mellett $m(u, v; x)$ az u-ban és v-ben szintén szimmetrikus bilineáris alak. Minthogy továbbá az $m(u;x)$ függvény nem csökkenő, azért a (4) alapján

$$0 \leqq m(u;x) \leqq m(u;\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} dm(u;x) = (A_0 u, u) \leqq (u,u),$$

tehát az $m(u,v;x)$ bilineáris alakhoz tartozó kvadratikus alaknak az $\|u\|=1$ egységgömbön a 0 alsó és az 1 felső korlátja.

Mindezek alapján következik, hogy x minden értékéhez tartozik egy $F(x)$ korlátos önadjungált operátor H-ban úgy, hogy

$$m(u,v;x) = (F(x)u, v) \qquad (u, v \in H),$$

$$F(x) \leqq F(x') \text{ ha } x < x', \; F(x+0) = F(x), \; F(-\infty) = 0, \; F(\infty) = A_0.$$

Az (5) összefüggések szimbolikusan a következő alakban írhatók:

$$A_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k \, dF(x) \qquad (k = 0, 1, \ldots). \tag{6}$$

Legyen

$$\bar{F}(x) = \begin{cases} F(x), & \text{ha } x < 0, \\ F(x) + I - A_0, & \text{ha } x \geqq 0. \end{cases}$$

Minthogy $I - A \geqq 0$ (lásd (4)), azért

$$\bar{F}(x) \leqq \bar{F}(x') \text{ ha } x < x', \; \bar{F}(x+0) = \bar{F}(x), \; \bar{F}(-\infty) = O, \; \bar{F}(\infty) = I, \tag{7}$$

azaz az $\bar{F}(x)$ operátorok serege hasonló tulajdonságokkal rendelkezik, mint a spektrálseregek (másszóval: egységfelbontások), azzal a különbséggel, hogy az $\bar{F}(x)$ operátorok nem vetítések (vetítésen mindig merőleges vetítést értve); $\bar{F}(x)$-ről mindössze azt tudjuk, hogy az x minden értékére a H tér önadjungált operátora. Minthogy az $\bar{F}(x) - F(x)$ különbség az $x < 0$ és az $x \geqq 0$ félegyeneseken állandó, és minthogy a $k \geqq 1$ esetben az x^k függvény az $x = 0$ pontban 0-val egyenlő, azért a (6) egyenletek a $k \geqq 1$ esetben érvényesek maradnak akkor is, ha $F(x)$-et $\bar{F}(x)$-szel helyettesítjük:

$$A_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k \, d\bar{F}(x) \qquad (k = 1, 2, \ldots). \tag{8}$$

Most M. A. NAJMARK egy tételére hivatkozunk [2], amely szerint önadjungált operátoroknak minden olyan $\{F(x)\}$ serege, amely eleget tesz a (7) alatti feltételeknek, előállítható a következő alakban:

$$\bar{F}(x) = \boldsymbol{P}\boldsymbol{E}(x), \tag{9}$$

ahol $\boldsymbol{E}(x)$ egy, az eredeti H Hilbert-teret altereként tartalmazó, alkalmasan megszerkesztett $\boldsymbol{H}$ Hilbert-térben értelmezett közönséges (tehát merőleges vetítésekből álló) spektrálsereg, $\boldsymbol{P}$ pedig $\boldsymbol{H}$-ban a H altérre való merőleges vetítés operátora.* Feltehető, hogy $\boldsymbol{E}(x)$-nek mint x függvényének ugyanazok a növekedési pontjai, mint az $\bar{F}(x)$ függvénynek.

* A (9) és az összes többi hasonló típusú egyenlőség a következőkben úgy értendő, hogy a két oldalt álló operátorok egyenlők, ha az eredeti H tér elemeire alkalmazzuk őket.

Egy ilyen előállítást felhasználva, (8)-ból adódik, hogy

$$(10) \qquad A_k = \boldsymbol{P}\int_{-\infty}^{\infty} x^k \, d\boldsymbol{E}(x) \qquad (k=1,2,\ldots),$$

vagy,

$$\boldsymbol{A} = \int_{-\infty}^{\infty} x \, d\boldsymbol{E}(x)$$

téve,

$$(11) \qquad A_k = \boldsymbol{P}\boldsymbol{A}^k \qquad (k=1,2,\ldots).$$

$\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{H}$ tér egy önadjungált operátora; spektruma, $\sigma(\boldsymbol{A})$, az $\bar{F}(x)$ függvény növekedési pontjaiból áll, azaz az $F(x)$ függvény növekedési pontjaiból és, ha $A_0 \neq I$, akkor még az $x=0$ pontból. Ennélfogva

$$\sigma(\boldsymbol{A}) \subseteqq X, \text{ ha } A_0 = I, \qquad \sigma(\boldsymbol{A}) \subseteq X + \{0\}, \text{ ha } A_0 \neq I.$$

Az $\boldsymbol{A}$ spektrumára vonatkozó megjegyzéseink egyébként csak a következő pontban tárgyalt probléma szempontjából bírnak jelentőséggel, jelenlegi feladatunk, azaz az „általánosított Schwarz-féle egyenlőtlenség" bizonyítása szempontjából ezekre nincs szükségünk.

Valóban, a (2) egyenlőtlenség közvetlenül folyik a (11) előállításából, hiszen ha $u \in H$, akkor

$$(A_2 u, u) = (\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}^2 u, u) = (\boldsymbol{A}^2 u, u) = \|\boldsymbol{A} u\|^2 \geqq$$
$$\geqq \|\boldsymbol{P}\boldsymbol{A} u\|^2 = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\boldsymbol{A} u, u) = (\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\boldsymbol{A} u, u) = (A_1^2 u, u).$$

Sőt azt is látjuk, hogy csakis akkor lesz $(A_2 u, u) = (A_1^2 u, u)$, ha $\boldsymbol{P}\boldsymbol{A} u = \boldsymbol{A} u$, azaz ha $\boldsymbol{A} u \in H$. Ebből következik, hogy csakis akkor lesz $A_2 = A_1^2$, ha $\boldsymbol{A}$ H-t önmagában képezi le. (11) szerint ebben az esetben $A_1 = \boldsymbol{A}$ (H-ban), következésképpen $A_k = A_1^k$ $(k=1,2,\ldots)$.

Ezzel bebizonyítottuk a (2) egyenlőtlenséget és egyben az 1. tétel következő kiegészítését nyertük:

Az 1. tétel feltevései mellett akkor és csak akkor lesz

$$A_1^2 = A_2,$$

ha

$$A_k = A_1^k \qquad (k=1,2,\ldots).$$

3. Az összes $\{A_k\}$ sorozatok megszerkesztése

Ha $A_0 = I$, akkor a (11) előállítás a $k=0$ esetben is érvényes, és ekkor $\sigma(\boldsymbol{A}) \subseteq X$.

Fordítva, ha a H Hilbert-tér operátorainak valamely $\{A_k\}$ sorozata előállítható a (11) képlet szerint valamely $\boldsymbol{H} \supset H$ Hilbert-tér valamely olyan $\boldsymbol{A}$ önadjungált operátora által, amelyre $\sigma(\boldsymbol{A}) \subseteq X$, akkor ez a sorozat kielégíti az 1. tétel feltételeit. Ekkor ugyanis $A_0 = I$ és, ha $p(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n$

tetszésszerinti olyan polinom, amely $\geqq 0$ az X-en és ennélfogva $\sigma(\boldsymbol{A})$-n, akkor

$$((c_0 A_0 + \cdots + c_n A_n) u, u) = (\boldsymbol{P} p(\boldsymbol{A}) u, u) = (p(\boldsymbol{A}) u, u) =$$
$$= \int_X p(x)\, d(\boldsymbol{E}(x) u, u) \geqq 0.$$

Így egy „parametrikus előállítását" nyertük önadjungált operátorok összes olyan $\{A_k\}$ sorozatainak, amelyek kielégítik az (α_X) feltételt és amelyekre $A_0 = I$.

Most térjünk át az *összes* olyan $\{A_k\}$ sorozatok megszerkesztésének a problémájára, amelyek kielégítik az (α_X) feltételt; az A_0-ról semmit nem tételezünk fel külön (a (β)-t sem). Az mindenesetre következik (α_X)-ből, hogy

$$A_0 \geqq O.$$

Tételezzük egyelőre fel azt, hogy A_0 definit pozitív, azaz hogy $A_0 u \neq 0$, ha $u \neq 0$. Jelöljük az A_0 pozitív négyzetgyökét, $A_0^{\frac{1}{2}}$-t, röviden R-rel. Minthogy

$$\|Ru\|^2 = (R^2 u, u) = (A_0 u, u) > 0,$$

ha $u \neq 0$, azért R^{-1} létezik; ez önadjungált, de nem szükségképpen korlátos operátor, értelmezési tartományát jelöljük D-vel (D a H-ban sűrű lineáris sokaság).

Legyen $M_k = \|x^k\| = \max_{x \in X} |x^k|$; minthogy $\pm x^k \leqq M_k$ az X halmazon, azért az (α_X) feltétel következtében $\pm A_k \leqq M_k A_0$, azaz

$$|(A_k u, u)| \leqq M_k (A_0 u, u) \tag{12}$$

a H minden u elemére. Ebből:

$$|(A_k R^{-1} v, R^{-1} v)| \leqq M_k (A_0 R^{-1} v, R^{-1} v) = M_k (R^2 R^{-1} v, R^{-1} v) = M_k (v, v) \tag{13}$$

a D minden v elemére. Tekintsük a

$$(v|w)_k = (A_k R^{-1} v, R^{-1} w)$$

szimmetrikus bilineáris alakot ($v, w \in D$). Szimmetrikus bilineáris alakok ismeretes tulajdonsága következtében a $(v|w)_k$ és a $(v|v)_k$ bilineáris, ill. négyzetes alakok abszolút értékeinek a $\|v\| = 1$, $\|w\| = 1$ feltételek mellett ugyanazok a pontos felső korlátjaik. Minthogy (13) szerint a $\|v\| = 1$ feltétel mellett $|(v|v)_k| \leqq M_k$, azért a $\|v\| = 1$, $\|w\| = 1$ feltételek mellett $|(v|w)_k| \leqq M_k$. Következésképpen a D minden v, w elemére

$$|(v|w)_k| \leqq M_k \|v\| \, \|w\|.$$

Rögzített v mellett $(v|w)_k$ tehát a D-n értelmezett korlátos konjugált-lineáris alak. Minthogy R^{-1} önadjungált, azért ebből az következik, hogy $A_k R^{-1} v$ az R^{-1} értelmezési tartományában van; (13) következtében továbbá

$$|(R^{-1} A_k R^{-1} v, v)| \leqq M_k (v, v).$$

Eszerint a

$$B_k = R^{-1} A_k R^{-1} \qquad (k = 0, 1, \ldots)$$

szimmetrikus operátorok mindegyikének az értelmezési tartománya D, és a D-n mindegyikük korlátos. De akkor mindegyik B_k értelmezése folytonos folytatással kiterjeszthető az egész H térre; B_0 folytatása nyilván az I operátor lesz. A kiterjesztés után a B_k operátorok kielégítik az (α_X) feltételt: ha $c_0+c_1x+\cdots+c_nx^n \geqq 0$ az X-en, akkor

$$((c_0B_0+c_1B_1+\cdots+c_nB_n)v, v)=((c_0A_0+c_1A_1+\cdots+c_nA_n)R^{-1}v, R^{-1}v)\geqq 0$$

a D minden v elemére, és így folytonossági okokból $c_0B_0+c_1B_1+\cdots+c_nB_n \geqq O$ egész H-n. Alkalmazva fenti eredményeinket a $\{B_k\}$ sorozatra, azt kapjuk, hogy

$$B_k=\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}^k \qquad (k=0, 1, \ldots),$$

ahol $\boldsymbol{A}$ egy bizonyos $\boldsymbol{H}\supseteq H$ Hilbert-tér önadjungált operátora, $\sigma(\boldsymbol{A})\subseteq X$.

Minthogy a H tetszőleges u elemére $Ru\in D$, azért ebből

$$R^{-1}A_ku=R^{-1}A_kR^{-1}Ru=B_kRu=\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}^kRu,$$

tehát

$$(14)\qquad A_k=A_0^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}^kA_0^{\frac{1}{2}} \qquad (k=0, 1, \ldots).$$

Könnyű látni, hogy fordítva, minden olyan $\{A_k\}$ sorozat, amely az adott A_0-ból és egy tetszés szerint választott önadjungált $\boldsymbol{A}$-ból ilyen módon nyerhető, kielégíti az (α_X) feltételt, hacsak $\sigma(\boldsymbol{A})\subseteq X$.

Végül szabadítsuk meg magunkat attól a kikötéstől is, hogy A_0 definit pozitív. Legyen $\mathfrak{M}$ a H-nak azon u elemeiből álló altere, amelyre $A_0u=0$, és legyen $\mathfrak{N}$ az $\mathfrak{M}$ ortogonális kiegészítője.

Ha valamely u-ra $A_0u=0$, akkor (12) szerint $(A_ku, u)=0$ és így $((M_kA_0-A_k)u, u)=0$; minthogy $M_kA_0-A_k \geqq O$, azért ekkor szükségképpen $(M_kA_0-A_k)u=0$, tehát $A_ku=0$. Eszerint az $\mathfrak{M}$ alteret az A_k operátorok mindegyike a 0 elembe viszi át.

Ha $v\in\mathfrak{N}$, akkor az $\mathfrak{M}$ minden u elemére

$$(A_kv, u)=(v, A_ku)=(v, 0)=0,$$

tehát $A_kv\in\mathfrak{N}$. Eszerint az $\mathfrak{N}$ alteret is mindegyik A_k operátor önmagába képezi le.

Összegezve: az $\mathfrak{M}$ és $\mathfrak{N}$ alterek mindegyik A_k operátort redukálják, és $A_kM=(0)$ $(k=0, 1, \ldots)$.

Az $\mathfrak{N}$ altérben tekintve, A_0 definit pozitív, és így $\mathfrak{N}$-ben érvényes egy (14) típusú előállítás; $\boldsymbol{A}$ valamely $\boldsymbol{H}\supseteq\mathfrak{N}$ Hilbert-tér önadjungált operátora, $\sigma(\boldsymbol{A})\subseteq X$. Feltételezhetjük azt is, hogy $\boldsymbol{H}\supseteq H$. Ellenkező esetben ugyanis mindössze $\boldsymbol{H}$-t $\boldsymbol{H}'=\boldsymbol{H}\oplus\mathfrak{M}$-mel kellene helyettesítenünk, $\boldsymbol{A}$-t pedig $\boldsymbol{A}'=\boldsymbol{A}\oplus C$-vel, ahol C az $\mathfrak{M}$ tér tetszésszerint választott önadjungált operátora, $\sigma(C)\subseteq X$; valóban, ha $\boldsymbol{P}$, ill. $\boldsymbol{P}'$ a $\boldsymbol{H}$, ill. $\boldsymbol{H}'$ terekben az $\mathfrak{N}$ altérre való vetítés operátora, akkor az $\mathfrak{N}$ minden v elemére $\boldsymbol{P}'\boldsymbol{A}'^kv=\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}^kv$.

Ezek után már csak azt kell észrevennünk, hogy a kapott (14) előállítás nem csak az $\mathfrak{N}$ altérben, hanem az $\mathfrak{M}$ altérben is érvényes, és így érvényes az egész H térben is. Valóban, ha $u \in \mathfrak{M}$, akkor egyrészt $A_k u = 0$, másrészt $\|A_0^{\frac{1}{2}} u\|^2 = (A_0 u, u) = 0$, $\|A_0^{\frac{1}{2}} u\| = 0$, tehát

$$A_0^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{P} \boldsymbol{A}^k A_0^{\frac{1}{2}} u = 0 \qquad (k = 0, 1, \ldots).$$

Fordítva, könnyű belátni, hogy a H operátorainak minden olyan $\{A_k\}$ sorozata, amely a (14) alakban előállítható valamely $\boldsymbol{H} \supset H$ Hilbert-tér valamely $\boldsymbol{A}$ önadjungált operátorának segítségével, korlátos operátorokból áll és eleget tesz az (α_X) feltételeknek, hacsak $\sigma(\boldsymbol{A}) \subseteq X$.

Összefoglalva eredményeinket, kimondhatjuk a következő tételt:

2. tétel. *A H Hilbert-tér korlátos önadjungált operátorainak azok és csakis azok az $\{A_k\}$ sorozatai elégítik ki az (α_X) feltételeit, amelyek a következőképpen állíthatók elő. Választunk H-ban egy tetszésszerinti korlátos önadjungált A_0 operátort, $A_0 \geqq O$, és egy tetszésszerinti, a H-t altereként tartalmazó $\boldsymbol{H}$ Hilbert-térben választunk tetszésszerint egy olyan $\boldsymbol{A}$ önadjungált operátort, amelynek a spektruma az X halmazba esik. $\boldsymbol{P}$-vel jelölve a H altérre való vetítés operátorát, az $\{A_k\}$ sorozat így áll elő:*

$$(15) \qquad A_k = A_0^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{P} \boldsymbol{A}^k A_0^{\frac{1}{2}} \qquad (k = 1, 2, \ldots);$$

ez a képlet érvényes nyilván a $k = 0$ esetben is.

Tekintsük azt a különös esetet, amikor $X = [0, 1]$. S. BERSTEJN egy ismert tétele szerint [3] minden olyan polinom, amely a $[0, 1]$ szakaszon > 0, előállítható a

$$p_{m,n}(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} x^{m+k} \equiv x^m (1-x)^n \qquad (m, n = 0, 1, \ldots)$$

polinomok valós, nem-negatív együtthatós lineáris kapcsolataiként; e polinomok a $[0, 1]$ szakaszon nyilvánvalóan nem-negatívok. Ha tehát az (α_X) feltételt csupán e $p_{m,n}(x)$ polinomokra nézve kötjük ki, következik a feltétel teljesülése minden olyan $p(x)$ polinomra, amely a $[0, 1]$ szakaszon > 0. De akkor teljesül e feltétel minden olyan $p(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n$ polinomra is, amely a $[0, 1]$-en nem-negatív. Ha ugyanis ε tetszésszerinti kis pozitív szám, akkor $p(x) + \varepsilon > 0$ a $[0, 1]$-en, és így $c_0 A_0 + c_1 A_1 + \cdots + c_n A_n + \varepsilon A_0 \geqq O$; az ε-t 0-hoz tartatva következik abból, hogy $c_0 A_0 + c_1 A_1 + \cdots + c_n A_n \geqq O$. Ezzel beláttuk a következőt:

A H Hilbert-tér korlátos önadjungált operátorainak $\{A_k\}$ sorozata akkor és csak akkor totálisan monoton, azaz akkor és csak akkor tesz eleget az

$$A_m - \binom{n}{1} A_{m+1} + \binom{n}{2} A_{m+2} - \cdots + (-1)^n A_{m+n} \geqq O \qquad (m, n = 0, 1, \ldots)$$

feltételeknek, ha ez a sorozat a (15) alakban állítható elő valamely olyan önadjungált A operátor segítségével, amelynek a spektruma $[0, 1]$ szakaszba esik.

IRODALOM

[1] R. V. KADISON, A generalized Schwarz inequality and algebraic invariants for operator algebras, *Annals of Math.*, **56** (1952), 494—503.

[2] M. A. НАЙМАРК, Спектральные функции симметрического оператора, Известия Акад. Наук СССР, сер. матем., **4** (1940), 277—309 (angol kivonat: 309—318); Об одном представлении аддитивных операторних функций множеств, Доклады Акad. Наук СССР, **41** (1943), 373—375.

[3] С. Н. БЕРНШТЕЙН, О наилучшем приближении пепрерывных функций посредством многочленов данной степени, Сообщ. Харьковского Матем. Общества, сер. 2, **13** (1912), 49—194, különösen a 97. § [= Собраные сочинении. I (1952), 81—83]. Lásd még F. HAUSDORFF Summationsmethoden und Momentfolgen. I, *Math. Zeitschrift*, **2** (1921), 74—109.

SZ. G. MIHLIN „INTEGRLÁEGYENLETEK ÉS ALKALMAZÁSUK A MECHANIKA, A MATEMATIKAI FIZIKA ÉS A TECHNIKA EGYES PROBLÉMÁIRA“ CÍMŰ KÖNYVÉNEK ISMERTETÉSE

Nemrégen hagyta el a sajtót *Sz. G. Mihlin:* „Integrálegyenletek és alkalmazásuk a mechanika, a matematikai fizika és a technika egyes problémáira“ c. monográfia 2. kiadásának magyar nyelvű fordítása. Ez az első magyar nyelvű integrálegyenletekről szóló könyv és a Magyar Tudományos Akadémia határozata *Mihlin* művének megjelentetéséről komoly hiányosságot pótol szakirodalmunkban.

Fontos volt egy ilyen munka megjelentetése több szempontból is. Az integrálegyenletek elmélete — bár aránylag fiatal tudományág — ma már a matematika fontos, központi fejezete, mely a matematikai analízis minden ágával a legszorosabb kapcsolatban van. Különösen szoros a kapcsolat a differenciálegyenletek és az ortogonális függvénysorok elméletével, valamint a matematika egyik legmodernebb ágával, a funkcionálanalízissel. Így tehát az előttünk fekvő könyv tárgyköre szinte minden matematikus érdeklődésére számot tart. De egyenesen nélkülözhetetlen azoknak, akik a matematikai fizikával foglalkoznak, hiszen az integrálegyenletek elmélete a mai matematikai fizika jellegzetes és nélkülözhetetlen módszerévé vált.

Fontos *Mihlin* könyve a szükebb értelemben vett alkalmazott matematika szempontjából is. Ismeretes, hogy ma mind több és több matematikus fordul a matematika alkalmazásai felé és számos tehetséges, fiatal matematikus választja élethivatásának az alkalmazott matematikát. Igen sok technikai feladat, mechanikai, aero- és hidrodinamikai, potenciálelméleti, valószínűségszámítási és matematikai statisztikai probléma megoldása vezet integrálegyenletekre. Ma már meglehetősen nagyszámú alkalmazott matematikusunk hathatós segítséget kapott *Mihlin* könyvének lefordításával.

Végül halaszthatatlan volt egy integrálegyenletekről szóló magyarnyelvű könyv megjelentetése azért is, mert az alkalmazott matematikusok egyetemi tanulmányi rendjében ez a tudományág mint kötelező tantárgy szerepel, ily módon egyetemi hallgatóink egy kitűnő segédkönyvet kaptak kezükbe.

A matematikai irodalom számos kiváló monográfiát ismer, mely integrálegyenletekkel foglalkozik. Ezek közül, mind tárgyválasztásával, mind tárgyalásmódjával kitűnik *Mihlin* munkája. Az az elhatározás tehát, hogy a számos rendelkezésre álló mű közül a választás éppen *Mihlin* könyvére esett mindenképpen szerencsésnek mondható.

Mihlin előttünk fekvő monográfiája több szempontból lényegesen eltér a közismert integrálegyenlet tankönyvektől és monográfiáktól.

A legszembetűnőbb tárgyválasztásának eltérése a közismert könyvektől. Különleges hangsúllyal szerepelnek az integrálegyenletek alkalmazásai. A könyv már címében is kifejezi ezt a törekvést és a mű második — nagyobbik — része kizárólag alkalmazásokkal foglalkozik. Míg a legtöbb tankönyv csak utal az alkalmazásokra, vagy pedig az alkalmazásokat csupán illusztrálásra használja, addig ez a könyv szisztematikusan és részletesen foglalkozik az elmélet gyakorlati vonatkozásaival.

De a feldolgozott elméleti anyag is (mely a könyv első részében van) sok tekintetben eltér a szokásostól. Először is elejti a mag folytonosságára vonatkozó, tankönyvekben szinte tradicionális feltevést és ezt azzal az általánosabb kikötéssel helyettesíti, hogy a mag egyszeres négyzetintegrálja korlátos legyen. Ez mind az elmélet, mind az alkalmazások igényeihez sokkal jobban alkalmazkodik. Természetesen ezáltal az olvasótól nagyobb előismereteket kíván, többek között a Lebesgue-féle integrál ismeretét.

Nagyon figyelemreméltó az, hogy nagy teret szán a szerző a szinguláris integrálegyenletek elméletének. Különösen az utóbbi évtizedekben vált világossá, hogy az alkalmazások tekintetében éppen ezek bírnak nagy jelentőséggel. Részletesen kifejti az ú. n. gyengén szinguláris integrálegyenletek elméletét (gyengén szingulárisnak olyan magot nevez, melynek valamelyik iterált magja már olyan, hogy rá a klasszikus elmélet alkalmazható), melyre aztán bőségesen hoz alkalmazásokat a könyv második részében. Ugyancsak behatóan foglalkozik a Cauchy- és Hilbert-típusú szinguláris magokkal biró integrálegyenletekkel és tudomásunk szerint ez az első könyv, melyben rendszeresen össze vannak foglalva az ilyen egyenletekre vonatkozó ismereteink.

Hogy mennyire fontosak ezek az egyenlettípusok, arra bőséges példaanyag szolgál bizonyítékul a könyv második részében.

E könyv nemcsak abban tér el a legtöbb hasonló könyvtől, hogy az elméleti részben, tankönyvben eddig még fel nem dolgozott anyagot hoz és, hogy különösen bő teret ad az alkalmazásoknak, hanem az alkalmazások eredeti kiválasztásában is. Nem szorítkozik csupán a közismert potenciálelméleti és rezgéstani (Sturm—Liouville-típusú) alkalmazásokra, hanem számos áramlástani, hőtani és rugalmasságtani feladatot is megold. Külön ki kell emelni, hogy bő teret enged elsősorban szovjet szerzők által kidolgozott módszerek ismertetésének, melyek a legtöbb érdeklődő számára nehezen hozzáférhetők. E tekintetben az is nagyon figyelemreméltó, hogy a kétdimenziós feladatok mellett a nehezebb, háromdimenziós problémáknak is figyelmet szentel.

Külön kell beszélni a megoldási módszerekről. Mindenütt megemlíti a numerikus számolási módszereket, elég részletesen ismerteti azok *elvét,* anélkül azonban, hogy e tekintetben részletekbe bocsátkozzék. Nagyon helyesnek tartjuk, hogy sok módszert ismertet a sajátértékek és sajátfüggvények numerikus meghatározására. A numerikus számítások elrendezésének kérdésébe, a kivitelezés részleteibe ezen a téren sem bocsájtkozik. Ezzel szemben több exisztencia-bizonyítást úgy végez, hogy az a módszer nem csupán a kimondott állítás bizonyítását adja, hanem egyúttal alkalmas a numerikus számítás keresztülvitelére is.

A könyv nem kis terjedelmének (csaknem 28 ív) ellenére számos, a tárgykörbe vágó problémát nem tárgyal. Így például kizárólag a másodfajú egyenletekkel foglalkozik és az elsőfajú integrálegyenletek csak mint Cauchy és Hilbert magú egyenletek fordulnak elő. Nem tárgyalja például a végtelen határú szinguláris integrálegyenleteket, holott ezeknek rendkívül nagy gyakorlati jelentőségük van és ugyancsak kimaradtak a gyakorlatilag fontos speciális magokra vonatkozó fejtegetések is. Ezeket a kimaradásokat nem lehet a szerző hibájául felróni, hiszen nem tűzte ki célul az integrálegyenletek elméletének enciklopédiáját megírni, hanem bevezetőt és tájékoztatót az elmélet és annak alkalmazásait illetően. A könyvben nem szereplő fejezetek elsajátítását és a továbbtanulást a mű végén található nagyon bő irodalmi tájékoztató nagyban megkönnyíti.

A szerző mondanivalóját világos, egyszerű módon és nagyon könnyen érthetően adja elő, a tételek megfogalmazása mindenütt szabatos. Bizonyításai szellemesek és a dolgok lényegére utalnak. Az olvasótól feltételezi a differenciál- és integrálszámításban való jártasságon kívül a Lebesgue-integrál fogalmának, valamint a komplex függvénytan elemeinek ismeretét. Nagyon megkönnyíti az olvasó dolgát az, hogy a legtöbb felhasznált fogalmat röviden összefoglalja, valamint a sok kidolgozott példa.

Ami a magyar kiadást illeti meg kell jegyezni, hogy a fordító és a szerkesztő munkáját nehezítette az, hogy integrálegyenletekről szóló magyar nyelvű irodalom rendkívül kicsi, számos fogalomnak nincsen kialakult magyar neve. Ilyen például a „Spur", amit a fordító szószerint „nyom"-nak nevez. A sajátérték kifejezést — a szerző eredeti intencióinak megfelelően — a fordító abban az értelemben használja, ahogyan ezt differenciálegyenleteknél és lineáris operátoroknál szokásos használni, ennek reciprokját karakterisztikus számnak vagy karakterisztikus értéknek nevezi (számos szerző ezt nevezi az integrálegyenlet sajátértékének). Eszerint tehát a másodfajú Fredholm-féle homogén integrálegyenletben szereplő azon paraméterértéket, mely mellett az egyenletnek van nemtriviális megoldása az egyenlet karakterisztikus értéke. Ennek reciprokja szerepel e könyvben mint sajátérték. Egyet kell érteni ezzel, a nálunk talán még meg nem honosodott kifejezésmóddal, mert ez jobban alkalmazkodik ahhoz az értelemhez, amit a mechanikában és a fizikában szokásos a sajátérték szónak tulajdonítani.

Meg vagyunk győződve arról, hogy ez a kiváló szovjet szakkönyv nagy hasznára lesz matematikusainknak. Általa számosan megszeretik ezt a szép elméletet és haszonnal alkalmazzák mind elméleti, mind gyakorlati kutatásaikban.

Fenyő István

P. SZ. ALEKSZANDROV „BEVEZETÉS A HALMAZOK ÉS FÜGGVÉNYEK ÁLTALÁNOS ELMÉLETÉBE“ CÍMŰ KÖNYVÉNEK ISMERTETÉSE

A halmazelmélet a XIX. század második felében fejlődött matematikai diszciplinává. Kialakulására nagy hatással volt több kiváló matematikusnak az analízis megalapozása során kifejtett munkássága, amelyet az akkori sorelméletben felmerült ellentmondások váltottak ki. Ezeket az ellentmondásokat a végtelen fogalmának tisztázatlan volta okozta. A végtelen kicsi és végtelen nagy homályos fogalmát elvetették és szerepét a végtelen sorozat fogalma vette át.

Ugyancsak nagy szerepe volt a halmazelmélet kialakulásánál a függvényfogalom fejlődésének, amelynek során más és más szerkezetű halmazok léptek fel. E halmazok szerkezetének vizsgálata nagy fontosságú volt a függvényfogalom és ezzel az analízis további fejlődésére. *Cantor* az analízis fejlődése során fellépő végtelen halmaz fogalmát következetesen továbbépítette és a halmazelméletet a matematika önálló fejezetévé tette.

A halmazelmélet nagy hatással lett az egész matematika további fejlődésére. A halmazelméleti módszerek áthatották a matematika különböző ágait és egységes rendszerbe foglalták azokat.

Éppen ezért igen fontos a halmazelméleti módszerek ismerete. Ezen ismeretek széles körében való elterjesztésére nagyon alkalmas *P. Sz. Alekszandrovnak* a világhírű szovjet matematikusnak, aki két alkalommal is járt hazánkban, a könyve, amely *Alexits György* akadémikus szerkesztésében és előszavával jelent meg magyar fordításban. A magyar matematikai szakirodalom számára igen nagy nyereség ennek a kitűnő könyvnek a lefordítása. Annak ellenére, hogy a könyv az olvasótól csak kevés alapismeretet követel, elvezeti az olvasót a halmazelmélet legmodernebb kutatási területeire. A könyvet *Alekszandrov* világosan és egyszerűen írta meg. A feldolgozott anyag tárgyalására a koncentrikusság jellemző, amely fokozatos általánosításban nyilvánul meg. A koncentrikus tárgyalásnak pedagógiai szempontból van nagy jelentősége, ugyanis az általánosítás pedagógiailag csak akkor célszerű — amint erre *Alekszandrov* és *Kolmogorov* a bevezetésben rámutatnak — ha az olvasó fel van arra készülve, hogy az általánosítás természetes. A könyv megértését nagyban elősegíti emellett az a körülmény, hogy az absztrakt fogalmakat jól megválasztott példákkal igyekszik a szerző megvilágítani.

A könyv mintaszerű felépítését *Alexits György* a magyar fordításhoz írt előszavában a következőképpen jellemzi:

„Végigvezeti az olvasót azokon a szemléletes jellegű részeken, amelyek vizsgálatából megszületett a modern halmazelméleti geometria, és csak ezután, fokozatos absztrakció eredményeként tér rá a metrikus, majd végül a topologikus tér halmazi szerkezetének a vizsgálatára. Ilyen módon az absztrakt tér fogalma a könyvben — a történeti fejlődésnek megfelelően — genetikusan jön létre, éppen ezért az olvasó világosan látja a fejlődés fokozatosságát és a nagyfokú absztrakció ellenére is megmarad benne annak a materiális alapnak a tudata, amely a halmazelmélet absztrakt fogalomalkotásait a fejlődés során létrehozta."

Alekszandrov könyve egy kétkötetes műnek az első kötete. A második kötetet *A. N. Kolmogorov írja.* Ez speciálisabb problémakörrel fog foglalkozni: mértékelmélettel, a Lebesgue-integrál elméletével és ezek alkalmazásaival.

Alekszandrov könyve hét fejezetből és három függelékből áll. Az első fejezet halmazokra vonatkozó alapvető fogalmak definícióival és jelölések bevezetésével kezdődik. Ezután leképezésekkel és halmazok osztályokra való felbontásával foglalkozik. Ezután megszámlálható halmazokra vonatkozó tételeket és a rendezett halmaz fogalmát ismerteti, végül rátér a számosságok összehasonlíthatóságának kérdésére és ennek kapcsán a Cantor—Bernstein-féle tételre is, amely azt állítja, hogy ha két halmaz mindegyike ekvivalens a másiknak valamely részhalmazával, akkor a két halmaz egymással is ekvivalens. (Két halmazt akkor nevezünk ekvivalensnek, ha közöttük kölcsönösen egyértelmű leképezés létesíthető.) A fejezet a következő tétel bizonyításával zárul: minden halmazhoz található egy nála nagyobb számosságú halmaz. A tétel bizonyítása a Cantor-féle diagonális eljárással történik.

A második fejezetben a valós számok Dedekind-féle elméletét, ezután a valós számok diadikus törtekbe fejtését és végül a valós számok elemi tulajdonságait ismerteti.

A harmadik fejezetben rendezett és jólrendezett halmazok alaptulajdonságaival, továbbá jólrendezett halmazokra vonatkozó alaptételekkel foglalkozik. Ezután a megszámlálható transzfinit számokra vonatkozó fontosabb tételeket tárgyalja. Majd a kiválasztás axiómájával, — amely szerint páronkínt idegen M_α halmazoknak bármilyen G halmazához található egy olyan M halmaz, amelynek minden m_α eleme egy M_α halmazból való és bármely M_α halmazzal pontosan egy közös eleme van — és ennek néhány alkalmazásával, a fejezet további részében pedig a Zermelo-féle jólrendezési tétellel foglalkozik. Eszerint minden halmaz jólrendezhető. A jólrendezési tétel itt adott bizonyítása megegyezik *Zermelo* harmadik bizonyításával. A fejezet a kardinális számok osztályozásával és a kardinális számokra vonatkozó alapvető tételek bizonyításával zárul.

A negyedik fejezet az egyenes és a sík topologiáját vizsgálja. Ez alapvető definíciókkal, példákkal és ponthalmazokra vonatkozó tételek ismertetésével kezdődik. Ezután megismerkedünk a Cantor-féle perfekt halmazzal, továbbá egyenesen levő perfekt halmazokra vonatkozó általános tételekkel. Ugyanebben a fejezetben szerepelnek még a Bolzano—Weierstrass, a Cantor, a Borel—Lebesgue-tétel, a Cauchy-féle konvergencia-elv, a G_δ és F_σ típusú, valamint az első és második kategóriájú halmazokra vonatkozó fontosabb tételek.

Az ötödik fejezetben az egy valós változós folytonos függvények tulajdonságait ismerteti, majd rátér a monoton és korlátos változású függvények tárgyalására. Ezután függvénysorok egyenletes és nem egyenletes konvergenciájával, a függvények analitikus előállításának problémájával és az egyenes valamely zárt $[a, b]$ intervallumában értelmezett Baire-féle függvényekkel foglalkozik, azaz azon legkisebb függvényosztály elemeivel, amely tartalmaz minden $[a, b]$-ben folytonos függvényt és minden olyan függvényt, amely e függvényosztály elemeiből alkotott $[a, b]$-ben konvergens sorozat határértékeként jön létre. Ezek kapcsán kerül sor a Weierstrass-féle approximációs tételre, amely szerint minden olyan függvény, amely folytonos egy $[a, b]$ zárt intervallumban, határértéke egy $[a, b]$-ben egyenletesen konvergens polinom-sorozatnak. A tételnek a könyvben közölt bizonyítása *Sz. N. Bernsteintől* származik. A fejezet a differenciálhatóság kérdésének tárgyalásával zárul. Itt találkozunk *van der Waerden* egyik példájával, amely azt mutatja, hogy van olyan folytonos függvény, amely seholsem differenciálható.

A hatodik fejezet a metrikus terek értelmezésével és a ponthalmazelmélet alapvető definícióinak metrikus terekre való átvitelével és alapvető tételeinek ismertetésével kezdődik. Ezután a metrikus tér Borel-féle halmazainak, azaz azon legkisebb halmazosztály elemeinek a tárgyalására kerül sor, amely az adott tér zárt halmazait tartalmazza, és amelyből két halmazra alkalmazott különbségképzés és a véges és megszámlálható sok halmazra alkalmazott egyesítésképzés műveletei nem vezetnek ki. A fejezet következő része a mindenütt sűrű és seholsem sűrű halmazok tulajdonságaival és az összefüggés kérdésével foglalkozik. Ezután olyan terek vizsgálatára tér rá, amelyek azáltal nyerhetők, hogy a metrikus terekre megszorítást teszünk. Ilyen megszorítás az, hogy legyen az adott térben mindenütt sűrű megszámlálható halmaz (azaz egy olyan megszámlálható halmaz, amelynek a lezárása megegyezik az adott térrel). Ezzel szoros kapcsolatban van az a kikötés, hogy legyen a térnek megszámlálható bázisa — azaz a tér nyitott halmazainak olyan rendszere, amelynek megvan az a tulajdonsága, hogy a térnek bármely nyitott halmaza előállítható a rendszerbe tartozó halmazok összegeként —, ugyanis metrikus terek esetén igazolható az a tétel, hogy valamely metrikus térnek akkor és csakis akkor van megszámlálható bázisa, ha van a térben mindenütt sűrű megszámlálható halmaz. A megszámlálható bázisú terek tárgyalása kapcsán megismerkedünk Lindelöf tételével, a Baire—Hausdorff-féle, és a Cantor—Bendixson-féle tétellel. A fejezet folytonos leképezésekre vonatkozó tételekkel és zárt halmazon értelmezett folytonos függvény folytatásáról szóló tétellel zárul.

A hatodik fejezethez csatolt kiegészítésben az általános topologikus terekkel ismerkedünk meg. Ennek definíciójához azon megfigyelés vezet el, hogy a metrikus terek halmazai tulajdonságainak vizsgálatánál lényegében a környezet fogalma volt kihasználva és ezen épültek fel a többi fogalmak. Igen sok olyan fogalom, amely metrikus terekre vonatkozik, megtartja értelmét topologikus terekben is. Emiatt sok tétel, amelyet a metrikus terek tárgyalásánál láttunk, bizonyításával együtt átvihető topologikus terekre. Az általánosítás folytán természetesen lesznek olyan tételek is, amelyek érvényüket vesztik. Példát találunk többek között olyan topologikus terekre, amelyekben van mindenütt sűrű megszámlálható halmaz, de megszámlálható bázis nincs. Ezután a topologikus tereknek a szétválaszthatósági axiómák szerinti osztályozásával ismerkedünk meg. A kiegészítés a metrizáció problémájának tárgyalásával zárul. Ez a következő: Mi a szükséges és elégséges feltétele annak, hogy egy adott topologikus tér metrizálható legyen, vagy homeomorf legyen egy metrikus térrel. Ezzel kapcsolatban bebizonyítja *Uriszon* beágyazási tételét, amely szerint minden megszámlálható bázisú normált tér homeomorf a Hilbert-féle koordináta-tér alapparallelepipedonjának valamely részhalmazával. Ebből azonnal következik *Uriszon* első metrizációs tétele: Megszámlálható bázisú topologikus tér akkor és csakis akkor metrizálható, ha normált.

A hetedik fejezetben a kompakt metrikus terek és ezek folytonos leképezéseinek tárgyalása után rátér a teljes metrikus tér értelmezésére és alaptulajdonságainak ismertetésére, majd a kompaktság és a teljesség viszonyának vizsgálatára. A fejezet hátralevő része a lokálisan kompakt terekkel és kompakt metrikus terekben egyszerre F_σ és G_δ-típusú halmazokkal foglalkozik. A hetedik fejezethez két kiegészítést csatol. Az elsőben a bikompakt terekkel ismerkedünk meg. Topologikus teret akkor nevezünk bikompaktnak, ha nyílt halmazainak bármely olyan rendszere, amely az egész teret befedi, tartalmaz olyan véges részrendszert, amely szintén befedi az egész teret. Megszámlálható bázisú terekre a kompaktság és a bikompaktság fogalma azonos. Bebizonyítja a következő tételt is: Minden bikompakt tér kompakt. A kiegészítést *Uriszon* második metrizációs tétele és *Tyihonov* két nevezetes tétele zárja be. A könyv a hetedik fejezet második kiegészítésével fejeződik be, amely a kvázi egyenletes konvergencia kérdésével foglalkozik.

Fodor Géza.

M. A. LAVRENTYEV ÉS L. A. LJUSZTYERNYIK „VARIÁCIÓSZÁMÍTÁS“ C. KÖNYVÉNEK ISMERTETÉSE

A variációszámítás történetileg első feladata: az izoperimetrikus probléma kb. egykorú a kvadratúra-problémával. *Lavrentyev* és *Ljusztyernyik* „Variációszámítás“ c. magyarra fordított, az Akadémiai Kiadónál megjelent 229 oldal terjedelmű egyetemi tankönyve a variációszámítási problémák: Dido problémájától a Dirichlet-feladatig és a lineáris variációszámítási problémákig terjedő széles skáláját tárja az olvasó elé.

A könyv anyagelrendezése általában a történelmi fejlődést követi. Felépítése fokozatos: a természetszerűen kínálkozó, az alkalmazások sugallta általánosítások sorozatán keresztül a már tárgyalt, illetőleg felvetett kérdések egyre újabb és behatóbb megvilágításba kerülnek.

A könyvnek az olvasótól leginkább figyelmet követelő fejezete a mezőelméletről szól. Ennek beállítása rendkívül szemléletes, az olvasó pillanatra sem felejti el azt, hogy pl. *Kneser* elmélete a geodetikus vonalakra vonatkozó bizonyos tételeknek az extremálisokra való általánosítása. A fejtegetéseket követik speciális esetekre vonatkozó példák: így a centrális extremális mező és a hozzá tartozó transzverzális mező speciális esetben görbült felület egy pontjából kiinduló geodetikus vonalak, ill. e pont körül leírt geodetikus körök seregébe megy át.

A számos kidolgozott példa geometriai feladatokon kívül a fénytörés feladatával, szabad és ideális kényszernek alávetett pontrendszer mozgását meghatározó variációs elvekkel stb. foglalkozik. Több példa tárgyalja egyméretű rugalmas deformált közeg egyensúlyát. Ha még megemlítjük, hogy a megoldási módszerek között direkt módszerekről is szó esik, akkor látjuk, hogy a könyv a rugalmasságtan kérdéseinek variációszámítási módszerekkel való tárgyalásába és konkrét problémáinak gyakorlati kezelésébe is bizonyos betekintést nyújt.

A tankönyv első fejezete megadja a variációszámítás helyét a funkcionálanalízisben. Definiálja az (x_1, x_2) szakaszon a

$$J[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')\, dx$$

operáció fogalmát és értelmezési tartományát, és a brachisztochron valamint a fénytörés feladata nyomán felveti a variációszámítás alapproblémáját: van-e a $J[y(x)]$ operációnak megadott értelmezési tartományban szélsőértéke.

Ha — *Euler* nyomán — az (a, b) szakaszban keresett $y(x)$ függvény görbéjét az $n+1$ szögpontú $\Pi_n(x_i, y_i)$, $(x_i = a + i\Delta x, i = 0, 1, \ldots, n)$, $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, poligonnal közelítjük, akkor a feladat többváltozós függvény szélsőértékének meghatározásaként jelentkezik és a szélsőérték feltételére differenciálegyenletet nyerünk.

Rétegről rétegre számtani haladvány szerint haladó törésmutatójú, egyenlő vastag planparallel lemezből álló optikai közegben haladó fénysugár útját írja le pl. ilyen differenciálegyenlet.

Ha most $n \to \infty$, akkor a differenciaegyenlet az Euler-féle differenciálegyenletbe megy át.

A brachisztochron és a fénytörés-probléma egymás mellé állítása alkalmat ad a szerzőknek arra, hogy rámutassanak a Fermat-elv és Maupertuis-elv, vagyis az optika legrövidebb érkezés-elve s a mechanika legkisebb hatás-elve közötti analógiára.

A véges differenciákon alapuló közelítő módszert (másképpen poligonmódszer) fel lehet fogni, mint a variációszámítási problémák közelítő megoldásának módszerét. E mellé sorakoztatják a szerzők a végtelen sok változó módszerét, s e módszert az izoperimetrikus feladat *Hurwitz*tól származó megoldásán mutatják meg.

A végtelen sok változó módszere általában nehéz feladatokra vezet. *Fubini* és *Ritz* vetették fel a variációs probléma véges számú ismeretlent tartalmazó véges számú egyenlet megoldásával történő approximálásának gondolatát. A könyv nem terjeszkedik ki a minimizáló függvénysorozat határfüggvényének létezésével kapcsolatos súlyos kérdésre és becslésekkel sem foglalkozik, csak utal *Krilov* ez irányú alapvető munkáira.

Ugyancsak e fejezet utal *Csebisev* módszerére és ennek *Krilov* által történt megalapozására.

A II. fejezet az operáció értelmezési tartományával foglalkozik. Rámutat a megengedett vonalak osztályának a feladat geometriai, mechanikai stb. természetéből folyó, ill. függvénytani szempontból történő megszorítására (pl. az utóbbi abból folyik, hogy a vonal egyenlete az x abszcissza egyértékű függvénye.)

Majd az abszolút és relatív, erős és gyenge szélsőérték megkülönböztetése után rámutat a könyv a variációszámítási feladatok nehézségére: amíg zárt intervallumban folytonos függvény az intervallum valamely helyén felveszi maximumát és minimumát, addig lehetséges, hogy valamely, a megengedett függvények osztályán értelmezett $J[y(x)]$ operáció folytonos ugyan, de a megengedett függvények között nincs olyan, amelyre az operáció alsó, ill. felső határát fel is venné. *Bogoljubov*nak és *Szigalov*nak vannak eredményei egyszeres és többszörös integrálok abszolút minimumára vonatkozólag.

Többváltozós függvények totális differenciáljának lehetséges értelmezéseit előrebocsátva vezetik be a szerzők a

$$J[y(x)]=\int_a^b F(x,y,y')\,dx$$

integrál δJ első variációját. És pedig mint a

$$J[y(x)+\eta(x)]-J[y(x)]$$

különbség főrészét, vagy mint a $J[y(x)+t\eta(x)]$ t szerinti deriváltjának a $t=0$ helyen vett értékét. Az első variáció Lagrange-féle és Du Bois Reymond-féle átalakítása megadja az Euler-egyenletet, ill. az Euler-egyenlet Du Bois-Reymond-féle integrál alakját.

Megmutatják végül, hogy az Euler-féle egyenlet baloldala a $J[y(x)]$ operáció funkcionálderiváltja; az Euler-egyenlet tehát azt fejezi ki, hogy extremálisokra a funkcionálderivált zérus.

Az utóbbi értelmezésből rögtön adódik az Euler-egyenlet invarianciája. Ebből következik pl. a mechanika másodfajú Lagrange-féle differenciálegyenletrendszerének invarianciája koordinátatranszformációval szemben.

Az integrál második variációja és a Legendre-féle feltétel zárja e fejezetet.

A III. fejezet a legegyszerűbb probléma általánosításaival foglalkozik. Keresendő az $n+1$ dimenziós tér $A(x_0, y_{01}, y_{02}, \ldots, y_{0n})$, $B(x_1, y_{11}, y_{12}, \ldots, y_{1n})$ rögzített pontjait összekötő azon ív, amelyre a

$$J[y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)]=\int_{x_1}^{x_2} F(x, y_1 y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n')\,dx$$

operáció szélső értéket vesz fel. Alkalmazásként a Hamilton-elvet mutatják be a szerzők konzervatív erőtérben mozgó szabad pontrendszerre vonatkozólag. (Megjegyezzük, hogy a formulákban szereplő G függvény a rendszer erőfüggvénye, nem pedig potenciálja.)

Az általánosítás egy másik lehetséges iránya a következő: keresendő a

$$J[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)})\,dx$$

operáció szélső értéke az

$$y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y_0',\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}$$
$$y(x_1)=y_1,\ y'(x_1)=y_1',\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_1)=y_1^{(n-1)}$$

feltételek mellett. Az extremális most a $2n$-edrendű Euler—Poisson-differenciálegyenletet elégíti ki.

Ha pedig a

$$J[\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)]=\int\int_{(T)}\cdots\int F\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial\varphi}{\partial x_n}\right)dx_1 dx_2 \ldots dx_n$$

operáció szélső értékét (vagy stacionárius értékét) keressük azzal a feltétellel, hogy a T tartomány határának A pontjaiban φ értéke elő van írva:

$$\varphi(A) = f(A),$$

akkor J első variációjának eltűnése másodrendű parciális differenciálegyenletre, az Euler—Osztrogradszkij-egyenletre vezet.

Speciálisan a

$$D[\varphi] = \int\int_{(T)} \cdots \int \sum_i \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)^2 dx_1 dx_2 \ldots dx_n$$

integrált minimizáló φ függvény eleget tesz a

$$\sum_i \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i^2} = 0$$

Laplace-egyenletnek.

A IV. fejezet változtatható végpontokkal bíró megengedett vonalakon értelmezett operációkkal foglalkozik. A transzverzalitási feltételekből azután a tört extremálisok törési pontjaira vonatkozó Weierstrass—Erdmann-feltételek is kiadódnak.

Az V. fejezet azon feladatokat tárgyalja, melyekben a megengedett vonal egyenlete (a három vagy többdimenziós térben) megadott egyenletet kell, hogy kielégítsen (a megengedett vonal megadott felületen fekszik); ez a Lagrange-féle probléma. Ennek általánosítása a Mayer-féle probléma: a megkötési egyenlet az ismeretlen függvények deriváltját is tartalmazza. Végül izoperimetrikus problémával állunk szemben, ha a megengedett vonalak sokasága azon vonalakra van korlátozva, melyeken egy másik határozott integrál konstans értékkel bír. (Pl. megadott kerületű maximális területű idom problémája.)

A paraméteres alakban megadott integrálokról szóló fejezetet a mezőelméletről szóló fejezetek követik.

Ha valamely γ síkgörbe egyenlete $y = y(x)$, és az e görbe mentén vett

$$J(\gamma) = \int_{(\gamma)} F(x, y, y')\, dx$$

integrál értékét a γ görbe J-„hossz"-ának nevezzük, akkor az extremálisok bizonyos feltételeket kielégítő egyparaméteres serege, az ú. n. extremális mező és a hozzátartozó transzverzális mező egy görbült felület geodetikus vonalai egyparaméteres seregének, ill. e sereg trajektóriáinak tekinthető.

Kneser tételeinek gondolatkörében mozogva nyer bizonyítást *Jacobi* azon tétele, hogy ha a Hamilton-féle kanonikus alakban írjuk fel az Euler-egyenleteket, akkor ezek általános integráljából nyerhető a Hamilton-féle parciális differenciálegyenlet teljes integrálja és viszont. E nevezetes tényt egyszerű példákkal illusztrálja a könyv.

A VIII. fejezet az erős és gyenge minimumra vonatkozó elégséges feltételekkel foglalkozik.

Hilbert tétele alapján igen egyszerűen fejezhető ki a J operáció növekménye a Weierstrass-féle E függvény segítségével; a nyert formulából azonnal adódik az erős szélső érték Weierstrass-féle kritériuma.

E fejezet végén a szélső érték szükséges és elégséges feltételeinek összefoglalása után a szerzők újra szemlét tartanak a már korábban tárgyalt geometriai, optikai és mechanikai problémákon.

A IX. fejezet a

$$\frac{d}{dx}(Ry')+(\lambda-P)y=0$$

Sturm—Liouville-differenciálegyenletet, mint a következő izoperimetrikus probléma Euler-egyenletét mutatja be: keresendő a

$$K[y]=\int_a^b[P(x)y^2+R(x)y'^2]\,dx$$

egyenlet minimuma az

$$\int_a^b y^2dx=1$$

feltétel mellett. Ha az $a\leqq x\leqq b$ intervallum végpontjaiban pl. a legegyszerűbb $y(a)=0$, $y(b)=0$ kerületi feltételeket írjuk elő, akkor a sajátértékek szélsőérték-elmélete szerint a legkisebb sajátérték a $K[y]$ operáció minimuma, az a függvény pedig, amelyre K ezt az értéket felveszi, a legkisebb sajátértékhez tartozó sajátfüggvény. Az n-edik sajátérték és sajátfüggvény is izoperimetrikus feladat megoldásaként jelentkezik: λ_n a $K[y]$ operáció minimuma az

$$\int_a^b y_n y_i\,dx=\delta_{ni}\qquad (i=1,2,\ldots,n),$$

$$y_n(a)=y_n(b)=0$$

feltételekkel. A Sturm-féle oszcillációs tétel stb. is megkapja itt a maga variációszámítási beállítását.

A *Csebisev*-féle legjobb polinomközelítés problémájáról és a sajátértékek minimax elméletéről szóló fejezet zárja le a könyvet.

Lavrentyev és Ljusztyernyik kitűnő tankönyve az első magyar nyelven megjelent variációszámításról szóló könyv. Olvasásához elegendő a differenciál- és integrálszámításban s a differenciálegyenletek elméletének elemeiben való jártasság. Elsősorban tudományegyetemi matematikus és alkalmazott matematikus hallgatók számára írott bevezető jellegű munka, de mintaszerűen fokozatos felépítése, geometriai, mechanikai, szilárdságtani, optikai alkalmazásokra való számos utalása s nem utolsó sorban gördülékeny stílusa folytán fizikusok és mérnökök is élvezettel és haszonnal fogják lapjait forgatni.

Körmendi István

FELOLVASÓ ÜLÉSEK

1953. október 5-én

1. *Rédei László* lev. tag: Karakterisztikus részgyűrűk és gyűrűk holomorfjai.
2. *Rédei László* lev. tag: Ekvivalens állítások bizonyítás-szkémája.
3. *Rényi Alfréd* lev. tag: Bimolekuláris reakciók valószínűségszámítási tárgyalása.
4. *Rényi Alfréd* lev. tag: Újabb kritériumok két minta összehasonlítására.
5. *Szőkefalvi-Nagy Béla:* Pozitív definit operátorfüggvények.
6. *Szőkefalvi-Nagy Béla* lev. tag bemutatja *Pukánszky Lajos:* „Radon—Nicodym-féle tétel operátorgyűrűkre" című dolgozatát.

1953. november 2-án

1. *Jánossy Lajos* r. tag bemutatja *Szamosi Géza:* „Taszító erők az atommagban" című dolgozatát.
2. *Hajós György* r. tag bemutatja *Szász Pál:* „A kör, a horiciklus és a távolságvonalrektifikációjáról", „A hiperbolikus geometria Hilbert-féle megalapozásáról" és „A hiperbolikus síkgeometria Poincaré-féle körmodelljének trigonometriájáról" című dolgozatát.
3. *Turán Pál* r. tag bemutatja *Aczél János:* „A klasszikus ortogonális polinomok jellemzése" című dolgozatát.

1953. november 23-án

1. *Jánossy Lajos* r. tag és *Kiss Dezső:* GM-számlálócsövek megszólalási valószínűségének mérése.
2. *Rényi Alfréd* lev. tag: A valószínűség fogalmának általánosítása.
3. *Hajós György* r. tag bemutatja *Fejes Tóth László:* „Horiciklusok legsűrűbb elhelyezése" című dolgozatát.
4. *Rényi Alfréd* lev. tag bemutatja *Vincze István:* „Eloszlások meghatározása középértékeik segítségével", *Sarkadi Károly:* „Egy dualitási elv a matematikai statisztikában" és *Prékopa András:* „Additív sztochasztikus folyamatokról" című dolgozatát.

Ára: 36·— Ft.

TARTALOMJEGYZÉK

TUDOMÁNYOS KÖZLEMÉNYEK

KÖNYVISMERTETÉSEK

Technikai szerkesztő: Erdős Lajosné

A kiadásért felelős: Mestyán János. Műszaki felelős: Tóth Ferenc.
A kézirat beérkezett: 1953. XI. 11. — Példányszám: 500. — Terjedelem: $16^{1}/_{2}$ (A/5) ív.

Csongrádmegyei Nyomdaipari Vállalat, Szeged 53-5166 Felelős vezető: Vincze György

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI OSZTÁLYÁNAK

KÖZLEMÉNYEI

IV. KÖTET 2. SZÁM

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA

BUDAPEST, 1954.

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI OSZTÁLYÁNAK

KÖZLEMÉNYEI

A SZERKESZTŐBIZOTTSÁG TAGJAI:
CSÁSZÁR ÁKOS, DETRE LÁSZLÓ, GYULAI ZOLTÁN, HAJÓS GYÖRGY, NOVOBÁTZKY KÁROLY, RÉNYI ALFRÉD, TURÁN PÁL

FŐSZERKESZTŐ:
ALEXITS GYÖRGY

IV. kötet 2. szám

Szerkesztőség: Budapest, V. Széchenyi rakpart 3.
Kiadóhivatal: Budapest, V. Alkotmány-utca 21.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei változó terjedelmű füzetekben jelennek meg és az Akadémia III. osztályának felolvasóülésein bemutatott matematikai dolgozatokat, valamint egyéb dolgozatokat, referátumokat, továbbá az osztály munkájára vonatkozó közleményeket, könyvismertetéseket stb. közölnek. Évenként egy kötet jelenik meg (négy szám alkot egy kötetet).

Kéziratok a következő címre küldendők:

A Magyar Tudományos Akadémia
III. Osztályának Közleményei.
Budapest, V. Széchenyi rakpart 3.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi levelezés.

Minden szerzőt 100 különlenyomat illet meg, megjelent munkájáért.

Közlésre el nem fogadott kéziratokat a szerkesztőség lehetőleg visszajuttat a szerzőhöz, de felelősséget a beküldött kéziratok megőrzéséért, vagy továbbításáért nem vállal.

A Közlemények előfizetési ára kötetenként belföldi címre 40 forint, külföldi címre 60 forint. Belföldi megrendelések az Akadémiai Kiadó, Budapest, V. Alkotmány-u. 21. (Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 04-878-111-48), külföldi megrendelések a „Kultúra" Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalat, Budapest, VI. Sztálin-út 21. (Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 45-790-057-50-032) útján eszközölhetők.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztálya a következő idegennyelvű folyóiratokat adja ki:

1. Acta Mathematica Hungarica,
2. Acta Physica Hungarica.

KONTRAKCIÓK ÉS POZITÍV DEFINIT OPERÁTORFÜGGVÉNYEK A HILBERT-TÉRBEN*

SZŐKEFALVI-NAGY BÉLA lev. tag

Előadta az 1953. október 5-én tartott felolvasó ülésen

1. Bevezetés. Tételek a kontrakciókról

A H Hilbert-tér *kontrakció*ján a H olyan T lineáris transzformációját értjük, amely az elemek normáját nem növeli, azaz amelyre

$$\|Tf\| \leqq \|f\|,$$

bármely elemét jelentse is f a H térnek, vagyis amelyre

$$\|T\| \leqq 1.$$

Speciális kontrakciók az izometrikus transzformációk (amelyekre $\|Tf\| = \|f\|$) és még speciálisabbak az unitér transzformációk, azaz az olyan izometrikus transzformációk, amelyek a H teret a maga teljes egészére képezik le.[1]

Az unitér transzformációk aránylag egyszerű szerkezetűek, amit legjobban az bizonyít, hogy (komplex tér esetében) érvényes rájuk a spektrálfelbontás tétele. Ennek következtében az unitér transzformációkra aránylag egyszerű módon számos tulajdonságot lehetett kimutatni.

A későbbi vizsgálatok során, eléggé meglepetésszerűen, kitünt, hogy az unitér transzformációk egyik-másik olyan tulajdonsága, amely addig az unitér transzformációk sajátosságának látszott, érvényes tetszőleges T kontrakcióra is. Említsünk meg ezek közül néhányat:

a) *Invariáns elemek*[2]. Ha a T transzformáció a H tér egy f elemét önmagába viszi át, akkor f-et a T^* adjungált transzformáció is önmagába viszi át.

b) *Ergodikus tétel*[2]. A H tér bármely f elemére létezik az

$$f^* = \lim_{\substack{n > m \geqq 0 \\ n-m \to \infty}} \frac{1}{n-m} \sum_{m}^{n-1} T^k f$$

határérték.

---

* E dolgozat eredményeit a szerző két francia nyelvű cikkben is közölte: „Sur les contractions de l'espace de Hilbert", *Acta Sci. Math. Szeged,* **15** (1953), 87—92, és „Transformations de l'espace de Hilbert, fonctions de type positif sur un groupe", *u. ott,* 104—114.

[1] *Unitér* transzformációról rendszerint csak *komplex* Hilbert-tér esetében szokás beszélni, míg *valós* Hilbert-tér esetében ehelyett *ortogonális* transzformációt mondanak. Az egyöntetűség kedvéért mi a valós esetben is *unitért* fogunk mondani.

[2] F. RIESZ—B. SZ.-NAGY, Über Kontraktionen des Hilbertschen Raumes, *Acta Sci. Math. Szeged,* **10** (1943), 202—205.

c) *Neumann tétele*[3]. Legyen $u(z)$ a z komplex változónak olyan függvénye, amely a komplex síknak a $|z| \leqq 1$ egységkörlemezt magában foglaló valamely tartományán holomorf; az $u(z)$ hatványsora legyen

$$u(z)=c_0+c_1z+\cdots+c_nz^n+\cdots.$$

Legyen

$$u(T)=c_0I+c_1T+\cdots+c_nT^n+\cdots.^4$$

Ha a $|z| \leqq 1$ egységkörlemezen $|u(z)| \leqq 1$, akkor $\|u(T)\| \leqq 1$, azaz ekkor $u(T)$ szintén kontrakció.

d) *Heinz tétele*[5]. Az $u(z)$ függvény legyen olyan, mint előbb, azzal a különbséggel, hogy a $|z| \leqq 1$ egységkörlemezen az $|u(z)| \leqq 1$ feltétel helyett a $\mathrm{Re}\, u(z) \geqq 0$ feltételt kötjük ki. Ekkor $\mathrm{Re}\, u(T) \geqq O$.[6]

A következőkben bebizonyítjuk, hogy az általános típusú kontrakciók és az unitér transzformációk közt szoros kapcsolat áll fenn; e kapcsolat alapján a fent felsorolt tények könnyen folynak az unitér transzformációkra vonatkozó megfelelő tényekből. E kapcsolatot a következő tétel fejezi ki:

I. TÉTEL. *Legyen T a H Hilbert-tér egy kontrakciója. Létezik ekkor egy, H-t altereként tartalmazó $\mathbf{H}$ Hilbert-tér és ennek egy $\mathbf{U}$ unitér transzformációja úgy, hogy ha $\mathbf{P}$-vel jelöljük a H-ra való merőleges vetítést, akkor álljanak a következő egyenlőségek:*

$$(1) \qquad T^k=\mathbf{P}\mathbf{U}^k, \quad (T^*)^k=\mathbf{P}\mathbf{U}^{-k} \qquad (k=0,1,2,\ldots)^{7\,8}$$

Mutassuk meg, hogyan következnek e tétel segítségével a kontrakciókra fent felsorolt tények.

a) Ha $Tf=f$, akkor $\mathbf{P}\mathbf{U}f=f$, és minthogy $\|\mathbf{U}f\|=\|f\|$, $\mathbf{P}f=f$ (hiszen $f \in H$), azért

---

[3] J. VON NEUMANN, Eine Spektraltheorie für allgemeine Operatoren eines unitären Raumes, *Math. Nachrichten*, 4 (1951), 258—281. — Ez és a következő tétel természetesen csak komplex Hilbert térben érvényes (hiszen a c_k együtthatók általában komplex számok).

[4] Minthogy $|c_n| \leq M/r^n$, ahol $r > 1$, azért ez a transzformációsor normában konvergens.

[5] E. HEINZ, Ein v. Neumannscher Satz über beschränkte Operatoren im Hilbertschen Raum, *Nachrichten Akad. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Klasse*, Abt. IIa, 1952, 5—6.

[6] Bármely A lineáris transzformációra $\mathrm{Re}\, A=\frac{1}{2}(A+A^*)$, ahol A^* az A adjungáltja. A H tér minden f elemére

$$((\mathrm{Re}\, A)f,f)=\frac{1}{2}[(Af,f)+(A^*f,f)]=\frac{1}{2}[(Af,f)+(f,Af)]=\mathrm{Re}\,(Af,f).$$

[7] Az (1) alatti egyenlőségeket és a következőkben előforduló hasonló alakú egyenlőségeket is úgy kell érteni, hogy a két oldalt szereplő transzformációk akkor egyenlők, ha az eredeti H tér elemeire alkalmazzuk őket.

[8] A $T=PU$ előállítás lehetősége már előbb ismeretes volt, lásd P. R. HALMOS, Normal dilations and extensions of operators, *Summa Brasiliensis Math.*, 2 (1950), 125—134. Az U unitér transzformáció azonban, amelyet HALMOS megszerkeszt, nem tesz eleget az (1) egyenlőségeknek a $k \geqq 2$ esetben.

$$\|Uf-f\|^2 = \|Uf\|^2 - 2\operatorname{Re}(Uf,f) + \|f\|^2 = 2[\|f\|^2 - \operatorname{Re}(Uf, \boldsymbol{P}f)] =$$
$$= 2[\|f\|^2 - \operatorname{Re}(\boldsymbol{P}Uf,f)] = 2[\|f\|^2 - \operatorname{Re}(f,f)] = 0,$$

tehát $Uf=f$. De akkor $f=U^{-1}f$ és így $T^*f=\boldsymbol{P}U^{-1}f=\boldsymbol{P}f=f$.

b) Minthogy

$$\sum_m^{n-1} T^k f = \boldsymbol{P}\sum_m^{n-1} U^k f,$$

azért a T kontrakcióra az ergodikus tétel következik az U unitér transzformációra vonatkozó ergodikus tételből.

c)—d) Az (1) egyenlőségekből nyilván következik, hogy

$$u(T) = \boldsymbol{P}u(U).$$

Ha

$$U = \int_0^{2\pi} e^{i\lambda} d\boldsymbol{E}_\lambda$$

az U unitér transzformáció spektrálelőállítása, akkor a H tér minden f elemére érvényesek a következő összefüggések:

$$\|u(T)f\|^2 = \|\boldsymbol{P}u(U)f\|^2 \leqq \|u(U)f\|^2 = \int_0^{2\pi} |u(e^{i\lambda})|^2 d\boldsymbol{E}_\lambda f, f),$$

$$(u(T)f,f) = (\boldsymbol{P}u(U)f,f) = (u(U)f,f) = \int_0^{2\pi} u(e^{i\lambda}) d(\boldsymbol{E}_\lambda f,f),$$

és ezekből a c) és d) tételek közvetlenül adódnak.

Az I. tételnek „folytonos" analogonjaként be fogjuk bizonyítani a következő tételt is:

II. TÉTEL. *Legyen T_t $(0 \leqq t < \infty)$ a H Hilbert-térnek a t paramétertől függő kontrakciója, és tegyük fel, hogy*

$$T_0 = I, \quad T_s T_t = T_{s+t} \qquad (s, t \geqq 0),$$

továbbá, hogy $(T_t f, g)$ a H tér bármely két f, g elemére a t paraméter folytonos függvénye. Röviden: legyen $\{T_t\}$ kontrakciókból álló, egy-paraméteres, „gyengén" folytonos félcsoport. Létezik ekkor egy, a H teret altereként tartalmazó $\boldsymbol{H}$ Hilbert-tér, és ennek egy unitér transzformációkból álló, egy-paraméteres, „erősen" folytonos[9] *$\{U_t\}$ csoportja $(-\infty < t < \infty)$ úgy, hogy*

(2) $$T_t = \boldsymbol{P}U_t, \quad T_t^* = \boldsymbol{P}U_{-t} \qquad (0 \leqq t < \infty),$$

ahol $\boldsymbol{P}$ ismét a H-ra való merőleges vetítést jelenti.

E tételből azonnal következik, hogy a $\{T_t\}$ félcsoport erősen is folytonos. Következik továbbá az, hogy $f \in H$ esetén

$$\frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2} T_t f\,dt = \boldsymbol{P}\left(\frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2} U_t f\,dt\right)$$

[9] Azaz a $\boldsymbol{H}$ bármely f elemére $U_s f$ erősen tart $U_t f$-hez, ha $s \to t$.

(az integrálokat Riemann-összegek határértékeiként értelmezzük), és így az ergodikus tétel „folytonos" változatának unitér félcsoportokra való érvényességéből folyik e tétel érvényessége tetszőleges kontrakciókból álló félcsoportokra is.

A II. tétel alapján NEUMANN és HEINZ tételeinek bizonyos analogonjait is nyerhetjük:

e) Ha a $p(\theta)=\sum_{k=1}^{n} a_k e^{it_k\theta}$ (általánosított) trigonometrikus polinom (ahol a t_k számok tetszőleges valós számok) eleget tesz a $|p(\theta)|\leqq 1$ egyenlőtlenségnek $(-\infty<\theta<\infty)$, akkor

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} a_k T_{t_k}\right\|\leqq 1,$$

feltéve, hogy negatív t esetén T_t-n T^*_{-t}-ot értjük.

f) Ha $\operatorname{Re} p(\theta)\geqq 0$, akkor

$$\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{n} a_k T_{t_k}\geqq O.$$

A II. tétel alapján ugyanis

$$\Sigma a_k T_{t_k}=\boldsymbol{P}\,\Sigma a_k \boldsymbol{U}_{t_k},$$

és minthogy Stone tétele szerint

$$\boldsymbol{U}_t=\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\theta}\,d\boldsymbol{E}_\theta,$$

azért

$$\Sigma a_k T_{t_k}=\boldsymbol{P}\int_{-\infty}^{\infty} p(\theta)\,d\boldsymbol{E}_\theta.$$

Ebből az összefüggésből c) és f) ugyanúgy következnek, mint ahogy fentebb c)-t és d)-t nyertük.

Véges (általánosított) trigonometrikus polinomokról — bizonyos konvergenciakikötésekkel — végtelen (általánosított) trigonometrikus sorokra, sőt trigonometrikus integrálokra is átvihetők az e)—f) tételek.

Az I. és II. tételben szereplő bővített $\boldsymbol{H}$ terek természetesen nincsenek egyértelműen meghatározva. Az I. tételben szereplő $\boldsymbol{H}$ térnek mindenesetre tartalmaznia kell az összes $\boldsymbol{U}^k f$ alakú elemeket, ahol $f\in H$ és $k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots$, a II. tételben szereplő $\boldsymbol{H}$ térnek pedig tartalmaznia kell az összes $\boldsymbol{U}_t f$ alakú elemeket, ahol $f\in H$ és $-\infty<t<\infty$. A $\boldsymbol{H}$ teret *minimális*nak fogjuk nevezni, ha az $\boldsymbol{U}^k f$, ill. az $\boldsymbol{U}_t f$ alakú elemek kifeszítik $\boldsymbol{H}$-t. Be fogjuk bizonyítani, hogy a $\boldsymbol{H}$ tér mindig választható minimálisnak, és ebben az esetben $\boldsymbol{H}$ és $\boldsymbol{U}$, ill. $\boldsymbol{H}$ és $\boldsymbol{U}_t$, *izomorfia* erejéig egyértelműen meg vannak határozva.

Tekintsük speciálisan azt az esetet, amikor a T transzformáció izometrikus (de nem unitér, azaz a H teret egy valódi alterére képezi le). Ekkor a H

minden f elemére

$$\|f\| = \|Tf\| = \|PUf\|$$

és, minthogy $\|Uf\| = \|f\|$, azért szükségképpen $PUf = Uf$, azaz $Uf \in H$. Ha tehát T izometrikus, akkor H minden f elemére

$$T^k f = U^k f \qquad (k = 0, 1, \ldots).$$

Hasonló a helyzet izometrikus transzformációk T_t félcsoportjára: ekkor a H tér minden f elemére

$$T_t f = U_t f \qquad (t \geqq 0).$$ [10]

2. Két lemma

A következő két lemmára az I. és II. tétel bizonyításában lesz szükségünk.

1. LEMMA. *Legyen T a H (valós, vagy komplex) Hilbert-tér kontrakciója. Alkossuk meg a két irányban végtelen*

$$\ldots, T_{-n}, \ldots, T_{-2}, T_{-1}, T_0, T_1, T_2, \ldots, T_n, \ldots$$

sorozatot a következőképpen:

$$T_n = T^n, \quad T_{-n} = T^{*n} \qquad (n = 0, 1, \ldots).$$

Ekkor $T_0 = I$, $T_{-n} = T_n^*$ és

$$\sum_{m,\, n=-\infty}^{\infty} (T_{n-m} g_n, g_m) \geqq 0 \tag{3}$$

minden olyan H-ból vett $\{g_n\}_{-\infty}^{\infty}$ elemsorozatra, amelynek legfeljebb véges sok tag kivételével mindegyik tagja 0-val egyenlő.

Bizonyítás. Tekintsük először *komplex* H tér esetét. Értelmezzük a $T(r, \theta)$ transzformációt ($0 \leqq r < 1$, $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$) a következőképpen:

$$T(r, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in\theta} T_n;$$

minthogy T-vel együtt nyilván mindegyik T_n is kontrakció, azaz $\|T_n\| \leqq 1$, azért ez a sor konvergál (mégpedig a legerősebb módon: normában). A $z = re^{i\theta}$ jelölést használva a következő összefüggésre jutunk:

$$T(r, \theta) = \left(\frac{1}{2} I + \sum_{n=1}^{\infty} z^n T^n\right) + \left(\frac{1}{2} I + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{z}^n T^{*n}\right) =$$

$$= 2 \operatorname{Re}\left(\frac{1}{2} I + \sum_{n=1}^{\infty} z^n T^n\right) = \operatorname{Re}\,(I + zT)(I - zT)^{-1}.$$

[10] Erre a speciális esetre a tételt már előzőleg, egészen más eszközökkel, J. L. B. COOPER is bebizonyította: One-parameter semigroups of isometric operators in Hilbert space, *Annals of Math.*, 48 (1947), 827—842.

Ennélfogva, ha

$$g=(I-zT)^{-1}f \qquad (f\in H),$$

akkor

$$(T(r,\theta)f,f)=\mathrm{Re}((I+zT)(I-zT)^{-1}f,f)=\mathrm{Re}\,((I+zT)g,(I-zT)g)=$$
$$=\mathrm{Re}[(g,g)+z(Tg,g)-\bar{z}(g,Tg)-z\bar{z}(Tg,Tg)]=$$
$$=\|g\|^2-|z|^2\|Tg\|^2\geqq 0,$$

hiszen $|z|<1$ és $\|T\|\leqq 1$. Minthogy ez a H tér minden f elemére érvényes, azért igaz speciálisan a következő egyenlőtlenség:

$$p(r,\theta)=(T(r,\theta)g(\theta),g(\theta))\geqq 0,$$

ahol

$$g(\theta)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-in\theta}g_n$$

($\{g_n\}$ a tételben szereplő tetszőleges sorozat, $g_n\in H$). Beírva $T(r,\theta)$ és $g(\theta)$ sorfejtéseit, azt kapjuk, hogy

$$p(r,\theta)=\sum_{k,m,n=-\infty}^{\infty}r^{|k|}e^{i(k+m-n)\theta}(T_kg_n,g_m)=$$
$$=\sum_{l=-\infty}^{\infty}e^{il\theta}\sum_{m,n=-\infty}^{\infty}r^{|l+n-m|}(T_{l+n-m}g_n,g_m)\geqq 0,$$

és ebből

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}p(r,\theta)\,d\theta=\sum_{m,n=-\infty}^{\infty}r^{|n-m|}(T_{n-m}g_n,g_m)\geqq 0.$$

Ha r-et 1-hez tartatjuk, ennek az egyenlőtlenségnek határeseteül a bizonyítandó (3) egyenlőtlenséghez jutunk.

Ezzel a lemmát komplex tér esetében bebizonyítottuk.

Valós H tér esetében a bizonyítást a komplex tér esetére való visszavezetéssel fogjuk elvégezni. Evégből vezessük be a H_c teret, amelynek elemei a H tér elemeiből alkotott $\{g,h\}$ párok, és amelyben az összeadást, komplex $a+ib$ számmal való szorzást, a belső szorzatot és a normát a következőképpen értelmezzük:

$$\{g,h\}+\{g',h'\}=\{g+g',h+h'\},$$
$$(a+ib)\{g,h\}=\{ag-bh,bg+ah\} \quad (a \text{ és } b \text{ valós számok}),$$
$$(\{g,h\},\{g',h'\})=(g,g')+(h,h')+i(h,g')-i(g,h'),$$
$$\|\{g,h\}\|^2=(\{g,h\},\{g,h\})=\|g\|^2+\|h\|^2;$$

könnyen ellenőrízhető, hogy ezen értelmezések mellett H_c komplex Hilbert-tér. A

$$\bar{T}\{g,h\}=\{Tg,Th\}$$

transzformáció ekkor a H_c tér kontrakciója, hiszen egyrészt $\bar{T}$ lineáris:

$$\overline{T}\{g+g', h+h'\} = \{T(g+g'), T(h+h')\} = \{Tg, Th\} + \{Tg', Th'\} = \\ = \overline{T}\{g, h\} + \overline{T}\{g', h'\},$$

$$\overline{T}(a+ib)\{g, h\} = \overline{T}\{ag-bh, bg+ah\} = \{aTg-bTh, bTg+aTh\} = \\ = (a+ib)\{Tg, Th\} = (a+ib)\overline{T}\{g, h\},$$

másrészt

$$\|\overline{T}\{g, h\}\|^2 = \|\{Tg, Th\}\|^2 = \|Tg\|^2 + \|Th\|^2 \leqq \|g\|^2 + \|h\|^2 = \|\{g, h\}\|^2.$$

Könnyű látni továbbá, hogy $\overline{T}^*\{g, h\} = \{T^*g, T^*h\}$, és így

$$\overline{T}^n\{g, h\} = \{T^ng, T^nh\}, \quad \overline{T}^{*n}\{g, h\} = \{T^{*n}g, T^{*n}h\} \qquad (n = 0, 1, \dots),$$

következésképpen

$$\overline{T}_n\{g, h\} = \{T_ng, T_nh\} \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Minthogy a (3) egyenlőtlenséget komplex tér esetében már bebizonyítottuk, azért igaz, hogy

$$(4) \qquad \sum_{m, n=-\infty}^{\infty} (\overline{T}_{n-m}\varphi_n, \varphi_m) \geqq 0),$$

ha $\varphi_n = \{g_n, h_n\} \in H_c$ (ahol legfeljebb véges sok n kivételével minden n-re $g_n = 0, h_n = 0$). Ha éppen $h_n = 0$ minden n-re, akkor

$$(\overline{T}_{n-m}\varphi_n, \varphi_m) = (T_{n-m}g_n, g_m),$$

és így ekkor a (4) egyenlőtlenség a bizonyítandó (3) egyenlőtlenségre redukálódik.

Ezzel a lemmát valós Hilbert-tér esetére is bebizonyítottuk.

2. LEMMA. *Legyen $\{T_t\}$ $(0 \leqq t < \infty)$ a (valós, vagy komplex) H Hilbert-tér kontrakcióinak egy-paraméteres, gyengén folytonos félcsoportja, azaz legyen $T_0 = I$, $T_sT_t = T_{s+t}$ $(s, t \geqq 0)$ és (T_tf, g) legyen a t folytonos függvénye, bármely f, g elempárra H-ból. Értelmezzük T_t-t negatív t-kre is a következőképpen:*

$$T_{-t} = T_t^*.$$

Ekkor T_t a t paraméternek az egész $-\infty < t < \infty$ egyenesen gyengén folytonos függvénye, és fennáll a

$$(5) \qquad \sum_{s, t=-\infty}^{\infty} (T_{t-s}g_t, g_s) \geqq 0$$

egyenlőtlenség, ahol g_t a H térnek tetszőleges olyan t-től függő eleme, amely t-nek csak legfeljebb véges sok értékére különbözik 0-tól; az (5) baloldalán álló összegeknek így szintén csak véges sok 0-tól különböző tagja van.

Bizonyítás. T_t gyenge folytonossága nyilvánvaló negatív t-re is, hiszen $(T_tf, g) = (f, T_t^*g) = (f, T_{-t}g)$.

Legyenek $t_1, \dots, t_r$ azok a t-értékek, amelyre $g_t \neq 0$. Válasszuk a

$$t_{n\nu} \qquad (n = 1, \dots, r;\ \nu = 1, 2, \dots)$$

racionális számokat úgy, hogy

$$\lim_{\nu\to\infty} t_{n\nu} = t_n \qquad (n = 1, \ldots, r).$$

legyen. Minthogy T_t gyengén folytonos függvénye t-nek, azért (az

$$f_n = g_{t_n} \qquad (n = 1, \ldots, r)$$

jelöléssel)

$$(6) \qquad \sum_{s,\, t=-\infty}^{\infty} (T_{t-s} g_t, g_s) = \sum_{m,\, n=1}^{r} (T_{t_n - t_m} f_n, f_m) = \lim_{\nu\to\infty} \sum_{m,\, n=1}^{r} (T_{t_{n\nu} - t_{m\nu}} f_n, f_m).$$

Rögzített ν mellett a $t_{n\nu}$ $(n = 1, \ldots, r)$ racionális számok összemérhetők, azaz felírhatók a

$$t_{n\nu} = \tau_{n\nu} d_\nu$$

alakban, ahol $d_\nu > 0$ és a $\tau_{n\nu}$-k egész számok. De akkor

$$T_{t_{n\nu} - t_{m\nu}} = T_{(\tau_{n\nu} - \tau_{m\nu}) d_\nu} = \begin{cases} (T_{d_\nu})^{\tau_{n\nu} - \tau_{m\nu}} & \text{ha } \tau_{n\nu} \geqq \tau_{m\nu}, \\ (T^*_{d_\nu})^{\tau_{m\nu} - \tau_{n\nu}} & \text{ha } \tau_{n\nu} \leqq \tau_{m\nu}. \end{cases}$$

Tehát, a $T^\nu = T_{d_\nu}$ jelölést bevezetve,

$$(7) \qquad \sum_{m,\, n=-\infty}^{\infty} (T_{t_{n\nu} - t_{m\nu}} f_n, f_m) = \sum_{m,\, n=-\infty}^{\infty} (T^{(\nu)}_{\tau_{n\nu} - \tau_{m\nu}} f_n, f_m).$$

Ha most az 1. lemmát a $T^{(\nu)}$ kontrakcióra alkalmazzuk, azt kapjuk, hogy a (7) jobboldala $\geqq 0$, és (6) alapján akkor (5) is áll.

Ezzel a 2. lemmát is bebizonyítottuk.

3. Pozitív definit operátorfüggvények

A lemmákban bebizonyított (3), (5) egyenlőtlenségek emlékeztetnek a pozitív definit függvények definíciójára. Mint ismeretes, a valamely Γ csoporton értelmezett komplex számértékű $p(\gamma)$ $(\gamma \in \Gamma)$ függvényt akkor mondjuk pozitív definitnek, ha

$$\sum_{\delta,\, \gamma \in \Gamma} p(\delta^{-1}\gamma) x(\gamma) \overline{x(\delta)} \geqq 0$$

bármely olyan, Γ-n értelmezett, komplexértékű $x(\gamma)$ függvényre, amelynek az értéke véges sok γ kivételével mindenütt 0; az összegezést természetesen csak erre a véges sok csoportelemre kell kiterjeszteni. A definícióból könnyen következik, hogy pozitív definit függvényre $p(\gamma^{-1}) = \overline{p(\gamma)}$.

Valós értékű $p(\gamma)$ függvény esetében elég a fenti egyenlőtlenséget a valós értékű $x(\gamma)$ függvényekre megkövetelni, feltéve, hogy külön feltesszük még, hogy $p(\gamma^{-1}) = p(\gamma)$.

Természetesen kinálkozik a pozitív definit függvények fogalmának a következő kiterjesztése:

Értelmezés. Legyen T_γ a H (valós vagy komplex) Hilbert-tér korlátos lineáris transzformációja, amely a Γ csoport változó γ elemének függvénye.

Akkor mondjuk, hogy T_γ, mint γ függvénye, *pozitív definit* Γ-n, ha

$$T_{\gamma^{-1}} = T_\gamma^* \tag{8}$$

minden $\gamma \in \Gamma$ elemre,[11] és ha

$$\sum_{\delta, \gamma \in \Gamma} (T_{\delta^{-1}\gamma} g_\gamma, g_\delta) \geqq 0, \tag{9}$$

ahol g_γ a H-nak tetszőleges olyan, γ-tól függő eleme, amely legfeljebb véges sok γ-ra különbözik 0-tól (a (9) összeg ennélfogva csak véges sok 0-tól különböző tagot tartalmaz).

Az 1. lemmában a Γ csoport az egész számok additív csoportja, a 2. lemmában pedig Γ az összes valós számok additív csoportja.

Be fogjuk a következő tételt bizonyítani.

III. TÉTEL. *Legyen T_γ a H (valós, vagy komplex) Hilbert-tér korlátos transzformációja, amely a Γ topologikus csoport változó γ elemének pozitív definit függvénye; tegyük fel továbbá, hogy T_γ γ-nak gyengén folytonos függvénye, azaz hogy $(T_\gamma f, g)$ a H bármely f, g elempárjára γ-nak folytonos függvénye; legyen végül*

$$T_\varepsilon = I \qquad (\varepsilon \text{ a } \Gamma \text{ csoport egységeleme}).$$

Létezik ekkor egy olyan, H-t altereként tartalmazó $\mathbf{H}$ Hilbert-tér, és ebben a Γ csoportnak unitér $\mathbf{U}_\gamma$ transzformációkkal való olyan (erősen) folytonos előállítása, hogy a

$$T_\gamma = \mathbf{P}\mathbf{U}_\gamma \qquad (\gamma \in \Gamma) \tag{10}$$

összefüggés érvényes; $\mathbf{P}$ itt a H-ra való merőleges vetítést jelenti. Megkövetelhető, hogy $\mathbf{H}$ minimális legyen, azaz hogy az $\mathbf{U}_\gamma f$ $(f \in H, \gamma \in \Gamma)$ alakú elemek kifeszítsék; ebben az esetben $\mathbf{H}$ és $\{\mathbf{U}_\gamma\}$ izomorfia erejéig meg vannak határozva.

Az I. és II. tétel a két lemma felhasználásával nyilván következményei a III. tételnek. (Az egész számok additív csoportját az ú. n. diszkrét topologiával[12], a valós számok additív csoportját pedig természetes topologiájával kell ellátnunk.)

A III. tételt GELFAND és RAJKOV nevezetes tétele általánosításának tekinthetjük[13]. E tétel szerint a Γ topologikus csoporton értelmezett minden pozitív definit, folytonos, komplexszám-értékű $p(\gamma)$ függvény előállítható a

$$p(\gamma) = (U_\gamma f_0, f_0)$$

---

[11] Komplex H tér esetében (8) következménye (9)-nek.

[12] Azaz amelynél a csoport egy γ elemének „környezeteit" Γ mindazon részhalmaza alkotják, amelyeknek γ elemük.

[13] J. GELFAND—D. RAIKOV, Irreducible unitary representations of arbitrary locally bicompact groups, *Recueil math. Moscou (Mat. Sbornik),* N. S. **13** (1943), 301—316. Lásd még: R. GODEMENT, Les fonctions de type positif et la théorie des groupes, *Transactions Amer. Math. Soc.,* **63** (1948), 1—84, különösen 21—22.

alakban, ahol $\{U_\gamma\}$ a Γ csoportnak valamely H Hilbert-tér unitér transzformációval való folytonos előállítása, és f_0 a H egy rögzített eleme; megkövetelhető, hogy H-t az $U_\gamma f_0$ $(\gamma \in \Gamma)$ alakú elemek kifeszítsék, H és U_γ ekkor izomorfia erejéig meg vannak határozva.

4. A III. tétel bizonyítása

A Γ csoport minden γ eleméhez rendeljük hozzá a H tér valamely f_γ elemét. Az összes ilyen módon kapható

$$\mathfrak{f} = \{f_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$$

„elem-családok" összességét jelöljük $\boldsymbol{F}$-fel. f_γ-t az $\mathfrak{f}$ γ-indexű „összetevőjének" nevezzük és ezt a következő jelöléssel fejezzük ki:

$$f_\gamma = (\mathfrak{f})_\gamma.$$

$\boldsymbol{F}$-ben értelmezzük az összeadást és a számmal való szorzást (valós, ill. komplex számmal, aszerint, hogy a H tér valós, ill. komplex) a következőképpen:

$$\{f_\gamma\} + \{f'_\gamma\} = \{f_\gamma + f'_\gamma\}, \quad c\{f_\gamma\} = \{cf_\gamma\}.$$

Ha még $\boldsymbol{F}$-ben nullaelemet is értelmezünk: $\mathfrak{f} = 0$ ha $\mathfrak{f}$ minden összetevője 0, akkor $\boldsymbol{F}$ (valós, ill. komplex) *lineáris* térré lesz.

Tekintsük $\boldsymbol{F}$-nek azt a nyilván szintén lineáris $\boldsymbol{H}_0$ részhalmazát, amely azokból az $\mathfrak{f} = \{f_\gamma\}$ elemekből áll, amelyekhez található olyan, *legfeljebb véges sok 0-tól különböző összetevővel bíró* $\mathfrak{g} = \{g_\gamma\} \in \boldsymbol{F}$, hogy minden γ-ra $(\in \Gamma)$ álljon:

$$f_\gamma = \sum_{\delta \in \Gamma} T_{\gamma^{-1}\delta} g_\delta;$$

az $\mathfrak{f}$ és $\mathfrak{g}$ közt fennálló ezt a kapcsolatot jelben röviden így fejezzük ki:

$$\mathfrak{f} = \hat{\mathfrak{g}}.$$

$\boldsymbol{H}_0$-ban egy kétváltozós $(\mathfrak{f}, \mathfrak{f}')$ függvényt fogunk értelmezni, amelyről azután megmutatjuk, hogy a belső szorzat szokásos tulajdonságaival rendelkezik. Ha $\mathfrak{f} = \hat{\mathfrak{g}}$, $\mathfrak{f}' = \hat{\mathfrak{g}}'$, legyen

$$(\mathfrak{f}, \mathfrak{f}') = \sum_\gamma (f_\gamma, g'_\gamma) = \sum_{\gamma, \delta} (T_{\gamma^{-1}\delta} g_\delta, g'_\gamma) = \tag{11}$$

$$= \sum_{\gamma, \delta} (g_\delta, T_{\delta^{-1}\gamma} g'_\gamma) = \sum_\delta (g_\delta, f'_\delta) \tag{12}$$

(itt felhasználtuk azt, hogy $T_{\alpha^{-1}} = T_\alpha^*$). (11)-ből látható, hogy $(\mathfrak{f}, \mathfrak{f}')$ nem függ attól, hogy az $\mathfrak{f} = \hat{\mathfrak{g}}$ előállításában $\mathfrak{g}$-t milyen speciális módon választjuk, (12)-ből pedig látható, hogy $(\mathfrak{f}, \mathfrak{f}')$ nem függ az $\mathfrak{f}'$-t előállító $\mathfrak{g}'$ speciális választásától sem. Így hát $\mathfrak{f}$ és $\mathfrak{f}'$ egyértelműen meghatározzák $(\mathfrak{f}, \mathfrak{f}')$-t. Az is látható továbbá az értelmezésből, hogy $(\mathfrak{f}, \mathfrak{f}')$ a valós esetben szimmetrikus bilineáris függvény, a komplex esetben pedig az első változóban lineáris, a a másodikban pedig konjugált-lineáris és Hermite-féle: $(\mathfrak{f}', \mathfrak{f}) = \overline{(\mathfrak{f}, \mathfrak{f}')}$. A T_γ

pozitív definitásából következik továbbá, hogy

$$(\mathfrak{f}, \mathfrak{f}) \geqq 0.$$

Nem maradt más hátra, mint azt megmutatnunk, hogy itt egyenlőség csak az $\mathfrak{f} = 0$ esetben lehetséges. A már eddig beigazolt tulajdonságokból következik a Schwartz-féle egyenlőtlenség:

$$|(\mathfrak{f}, \mathfrak{f}')|^2 \leqq (\mathfrak{f}, \mathfrak{f})(\mathfrak{f}', \mathfrak{f}').$$

Ennek alapján az $(\mathfrak{f}, \mathfrak{f}) = 0$ egyenlőség maga után vonja az $(\mathfrak{f}, \mathfrak{f}') = 0$ egyenlőséget bármely $\mathfrak{f}' \in \boldsymbol{H}_0$ esetében. Legyen speciálisan $\mathfrak{f}' = \hat{\mathfrak{g}}'$, ahol $\mathfrak{g}'$-nek minden összetevője, az α-adik kivételével, 0-val egyenlő. Ekkor

$$(\mathfrak{f}, \mathfrak{f}') = (f_\alpha, g) = 0,$$

ahol $f_\alpha = (\mathfrak{f})_\alpha$ és ahol $g = (\mathfrak{g}')_\alpha$ a H tér tetszőleges eleme lehet. Ez csak úgy lehetséges, ha $f_\alpha = 0$; és minthogy ez minden α-ra áll, azért valóban $\mathfrak{f} = 0$.

$(\mathfrak{f}, \mathfrak{f}')$ tehát a belső szorzat minden tulajdonságával rendelkezik. Ha tehát $\boldsymbol{H}_0$-ban a belső szorzatot e forma segítségével értelmezzük, akkor $\boldsymbol{H}_0$ Hilbert-térré válik, amely azonban általában még nem *teljes*. Legyen $\boldsymbol{H}$ a $\boldsymbol{H}_0$-ból az ismert lezáró eljárással nyert *teljes* Hilbert-tér.

Az eredeti H tér a $\boldsymbol{H}$, sőt a $\boldsymbol{H}_0$ zárt alterének fogható fel, ha a H tér f elemét azonosítjuk a $\boldsymbol{H}_0$ tér azon $\mathfrak{f} = \hat{\mathfrak{g}}$ elemével, amelyre $(\mathfrak{g})_\varepsilon = f$ és $(\mathfrak{g})_\gamma = 0$ $(\gamma \neq \varepsilon)$, azaz ha azonosítjuk az

$$f \in H \quad \text{és az} \quad \mathfrak{f} = \{T_{\gamma^{-1}} f\} \in \boldsymbol{H}_0$$

elemeket. Ezt az azonosítást az teszi jogossá, hogy, mint könnyen látható, H bármely két f, f' elemének belső szorzata egyenlő a $\boldsymbol{H}_0$-ból nekik megfeleltetett $\mathfrak{f}, \mathfrak{f}'$ elemek belső szorzatával:

$$(\mathfrak{f}, \mathfrak{f}') = (f, f').$$

Számítsuk ki egy $\mathfrak{f} \in \boldsymbol{H}_0$ elemnek a H altérre való merőleges vetületét, $\boldsymbol{P}\mathfrak{f}$-et. A

$$(\boldsymbol{P}\mathfrak{f}, h) = (\mathfrak{f}, h)$$

egyenletnek minden H-ba tartozó h-ra állnia kell. Tehát

$$(\boldsymbol{P}\mathfrak{f}, h) = ((\mathfrak{f})_\varepsilon, h)$$

a H minden h elemére, következésképpen

$$\boldsymbol{P}\mathfrak{f} = (\mathfrak{f})_\varepsilon. \tag{13}$$

A Γ csoport tetszőleges α elemére legyen

$$\boldsymbol{U}_\alpha \{f_\gamma\} = \{f_{\alpha^{-1}\gamma}\};$$

ezzel $\boldsymbol{H}_0$-nak önmagára való transzformációját értelmeztük, hiszen ha $\mathfrak{f} = \hat{\mathfrak{g}}$, akkor

$$f_{\alpha^{-1}\gamma} = \sum_\delta T_{\gamma^{-1}\alpha\delta} g_\delta = \sum_\eta T_{\gamma^{-1}\eta} g_{\alpha^{-1}\eta},$$

tehát $\boldsymbol{U}_\alpha \mathfrak{f} = \widehat{\mathfrak{g}^\alpha}$, ahol $\mathfrak{g}^\alpha = \{g_{\alpha^{-1}\gamma}\}$. $\boldsymbol{U}_\alpha$ a $\boldsymbol{H}_0$-at a teljes $\boldsymbol{H}_0$-ra képezi le, mégpedig nyilván lineáris és kölcsönösen egyértelmű módon. $\boldsymbol{U}_\alpha$ továbbá *izomet-*

rikus: ha $\mathfrak{f} = \hat{\mathfrak{g}}$, $\mathfrak{f}' = \hat{\mathfrak{g}}'$, akkor

$$(U_\alpha \mathfrak{f}, U_\alpha \mathfrak{f}') = \sum_\gamma (f_{\alpha^{-1}\gamma}, g'_{\alpha^{-1}\gamma}) = \sum_\eta (f_\eta, g'_\eta) = (\mathfrak{f}, \mathfrak{f}').$$

U_α értelmezését folytonos folytatással $\boldsymbol{H}_0$-ról egész $\boldsymbol{H}$-ra kiterjeszthetjük, és így $\boldsymbol{H}$-nak a teljes $\boldsymbol{H}$-ra való izometrikus, tehát unitér transzformációját nyerjük.

Az

$$U_\varepsilon = \boldsymbol{I}, \quad U_\alpha U_\beta = U_{\alpha\beta}$$

összefüggések nyilvánvalóan érvényesek $\boldsymbol{H}_0$-ban, és akkor folytonossági okokból érvényesek egész $\boldsymbol{H}$-ban is. Tehát az U_α unitér transzformációk a Γ csoportnak egy előállítását szolgáltatják. Ez az előállítás gyengén folytonos, azaz

$$(U_\alpha \mathfrak{f}, \mathfrak{f}')$$

a $\boldsymbol{H}$ bármely rögzített $\mathfrak{f}, \mathfrak{f}'$ elempárjára α-nak folytonos függvénye. Ez közvetlenül látható, ha $\mathfrak{f}, \mathfrak{f}' \in \boldsymbol{H}_0$: ha ugyanis $\mathfrak{f} = \hat{\mathfrak{g}}$, $\mathfrak{f}' = \hat{\mathfrak{g}}'$, akkor

$$(U_\alpha \mathfrak{f}, \mathfrak{f}') = \sum_{\delta, \gamma} (T_{\gamma^{-1}\alpha\delta} g_\delta, f'_\gamma),$$

és a jobboldalt álló összeg 0-tól különböző mindegyik tagja (ilyen véges sok van) α-nak folytonos függvénye, mert feltevés szerint T_γ a γ-nak gyengén folytonos függvénye. $\boldsymbol{H}$ bármely két, $\mathfrak{f}, \mathfrak{f}'$ elemére azután az állítást úgy bizonyíthatjuk be, hogy választunk $\boldsymbol{H}_0$-ból egy $\mathfrak{f}_n$ és egy $\mathfrak{f}'_n$ elemsorozatot úgy, hogy $\mathfrak{f}_n \to \mathfrak{f}$, $\mathfrak{f}'_n \to \mathfrak{f}'$ és észrevesszük, hogy ekkor $(U_\alpha \mathfrak{f}_n, \mathfrak{f}'_n)$ mint az α függvénye Γ-n *egyenletesen* tart $(U_\alpha \mathfrak{f}, \mathfrak{f}')$-höz.

Minthogy unitér transzformációkról van szó, a gyenge folytonosságból következik az *erős* folytonosság is, azaz $\boldsymbol{H}$ bármely $\mathfrak{f}$ elemére $\|U_t \mathfrak{f} - U_s \mathfrak{f}\| \to 0$, ha $t \to s$. Valóban, a gyenge folytonosság miatt $t \to s$ esetében $(U_t \mathfrak{f}, U_s \mathfrak{f}) \to (U_s \mathfrak{f}, U_s \mathfrak{f}) = (\mathfrak{f}, \mathfrak{f}) = \|\mathfrak{f}\|^2$, és így

$$\|U_t \mathfrak{f} - U_s \mathfrak{f}\|^2 = \|U_t \mathfrak{f}\|^2 + \|U_s \mathfrak{f}\|^2 - 2\mathrm{Re}(U_t \mathfrak{f}, U_s \mathfrak{f}) = \|\mathfrak{f}\|^2 + \|\mathfrak{f}\|^2 - 2\mathrm{Re}(U_t \mathfrak{f}, U_s \mathfrak{f}) \to 0.$$

Ha $\mathfrak{f} \in \boldsymbol{H}_0$, akkor (13) szerint

$$\boldsymbol{P} U_\alpha \mathfrak{f} = (U_\alpha \mathfrak{f})_\varepsilon = (\mathfrak{f})_{\alpha^{-1}}.$$

Speciálisan, ha $\mathfrak{f} = f \in H$, azaz ha $\mathfrak{f} = \{T_{\gamma^{-1}} f\}$, akkor tehát

$$\boldsymbol{P} U_\alpha f = T_\alpha f.$$

Ezzel bebizonyítottuk a tételben állított (10) alakú előállítás lehetőségét.

Mutassuk most meg, hogy az általunk megszerkesztett $\boldsymbol{H}$ tér *minimális*, azaz hogy az $U_\alpha g$ alakú elemek ($g \in H, \alpha \in \Gamma$) kifeszítik. Ehhez először is vegyük észre, hogy ha $g \in H$, akkor

$$U_\alpha g = U_\alpha \{T_{\gamma^{-1}} g\} = \{T_{\gamma^{-1}\alpha} g\},$$

és így, ha $\mathfrak{f} = \hat{\mathfrak{g}}$, $\mathfrak{g} = \{g_\gamma\}$, akkor

$$(\mathfrak{f})_\gamma = \sum_\delta T_{\gamma^{-1}\delta} g_\delta = \sum_\delta (U_\delta g_\delta)_\gamma = (\sum_\delta U_\delta g_\delta)_\gamma,$$

tehát

$$\mathfrak{f} = \sum_\delta U_\delta g_\delta.$$

Eszerint a H_0 minden eleme előállítható $U_\alpha g$ alakú elemek összegeként ($g \in H$, $\alpha \in \Gamma$), ebből pedig már következik, hogy az ilyen alakú elemek kifeszítik $\boldsymbol{H}$-t.

Hátra van még azt megvizsgálnunk, hogy a $\boldsymbol{H}$ tér és benne az $\{\boldsymbol{U}_\gamma\}$ unitér csoportelőállítás mennyire vannak meghatározva. Tekintsük evégből Γ-nak két unitér csoportelőállítását, $\{\boldsymbol{U}'_\gamma\}$-t a $\boldsymbol{H}'$ térben és $\{\boldsymbol{U}''_\gamma\}$-t a $\boldsymbol{H}''$ térben; tegyük fel, hogy $\boldsymbol{H}'$ és $\boldsymbol{H}''$ a H-t alterükként tartalmazzák és hogy H-ban

$$T_\gamma = \boldsymbol{P}'\boldsymbol{U}'_\gamma, \quad T_\gamma = \boldsymbol{P}''\boldsymbol{U}''_\gamma;$$ [14]

tegyük továbbá fel, hogy $\boldsymbol{H}'$ és $\boldsymbol{H}''$ minimálisak abban az értelemben, hogy $\boldsymbol{H}'$-t az $\boldsymbol{U}'_\gamma f$, $\boldsymbol{H}''$-t pedig az $\boldsymbol{U}''_\gamma f$ alakú elemek kifeszítik (ahol $f \in H$, $\gamma \in \Gamma$).

Legyen $\Phi' = \sum_\gamma \boldsymbol{U}'_\gamma f_\gamma$ és $\Psi' = \sum_\gamma \boldsymbol{U}'_\gamma g_\gamma$ ($f_\gamma, g_\gamma \in H$). Ekkor

$$(\Phi', \Psi') = \sum_{\gamma,\delta} (\boldsymbol{U}'_\gamma f_\gamma, \boldsymbol{U}'_\delta g_\delta) = \sum_{\gamma,\delta} (\boldsymbol{U}'_{\delta^{-1}} \boldsymbol{U}'_\gamma f_\gamma, \boldsymbol{P}' g_\delta) = \sum_{\gamma,\delta} (\boldsymbol{P}' \boldsymbol{U}'_{\delta^{-1}\gamma} f_\gamma, g_\delta) =$$
$$= \sum_{\gamma,\delta} (T_{\delta^{-1}\gamma} f_\gamma, g_\delta).$$

Ebből látszik, hogy (Φ', Ψ') csak H-beli adatoktól függ. Ennélfogva a

$$\Phi' = \sum_\gamma \boldsymbol{U}'_\gamma f_\gamma \leftrightarrow \sum_\gamma \boldsymbol{U}''_\gamma f_\gamma = \Phi''$$

megfelelkezés lineáris és izometrikus, és így folytonosan folytatható a $\boldsymbol{H}'$ és $\boldsymbol{H}''$ terek közti lineáris, izometrikus megfelelkezéssé. Minthogy

$$\boldsymbol{U}'_\alpha \Phi' = \sum_\gamma \boldsymbol{U}'_{\alpha\gamma} f_\gamma = \sum_\eta \boldsymbol{U}'_\eta f_{\alpha^{-1}\eta} \leftrightarrow \sum_\eta \boldsymbol{U}''_\eta f_{\alpha^{-1}\eta} = \sum_\gamma \boldsymbol{U}''_{\alpha\gamma} f_\gamma = \boldsymbol{U}''_\alpha \Phi'',$$

ez a megfelelkezés a $\{\boldsymbol{H}', \boldsymbol{U}'_\gamma\}$ és $\{\boldsymbol{H}'', \boldsymbol{U}''_\gamma\}$ „struktúrák“ közötti *izomorfizmust* létesít.

Ezzel a III. tételt bebizonyítottuk.

5. Najmark tétele

A III. tételből levezethető NAJMARK egy fontos tétele. E tétel így szól:[15]

Legyen $\{F_\lambda\}$ ($-\infty < \lambda < \infty$) a H (komplex) Hilbert-térben egy ú. n. általánosított spektrálsereg, azaz F_λ legyen korlátos önadjungált transzformáció a következő tulajdonságokkal:

$$F_\lambda \leqq F_\mu \text{ ha } \lambda < \mu, \quad F_{\lambda+0} = F_\lambda, \quad F_\lambda \to O \text{ ha } \lambda \to \infty, \quad F_\lambda \to I \text{ ha } \lambda \to \infty.$$

Van ekkor egy olyan, a H teret altereként tartalmazó $\boldsymbol{H}$ Hilbert-tér, és ebben

---

[14] $\boldsymbol{P}'$ jelenti $\boldsymbol{H}'$-ben a H altérre való merőleges vetítést; $\boldsymbol{P}''$ jelentése ugyanez $\boldsymbol{H}''$-ben.

[15] М. А. Наймарк, Спектральные функции симметрического оператора, Известия Акад. Наук СССР, сер. матем., 4 (1940), 227—309; Об одном представлении аддитивных операторных функций множеств, Доклады Акад. Наук СССР, 41 (1943), 373—375.

egy közönséges (merőleges vetítésekből álló) $\{E_\lambda\}$ *spektrálsereg úgy, hogy az*

$$F_\lambda = \boldsymbol{P} E_\lambda$$

összefüggés érvényes, ahol $\boldsymbol{P}$ *a H-ra való merőleges vetítést jelenti.*

Bizonyítás. Tekintsük a

$$T_t = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} dF_\lambda$$

transzformációt, erről könnyen látható, hogy a valós t paraméternek gyengén folytonos függvénye. Igaz továbbá, hogy $T_{-t} = T_t^*$ és

$$\sum_{m,n=1}^{r} (T_{t_n - t_m} g_n, g_m) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m,n=1}^{r} \exp[i(t_n - t_m)\lambda] d(F_\lambda g_n, g_m) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (F(d\lambda) g(\lambda), g(\lambda)) \geqq 0,$$

ahol

$$g(\lambda) = \sum_{n=1}^{r} \exp(i t_n \lambda)\, g_n.$$

T_t tehát a valós t paraméter pozitív definit függvénye. A III. tétel szerint T_t-t előállíthatjuk a

$$T_t = \boldsymbol{P} \boldsymbol{U}_t$$

alakban, ahol $\{\boldsymbol{U}_t\}$ a valós számok additív csoportjának egy $\boldsymbol{H} \supseteqq H$ térben való folytonos, unitér előállítása. STONE tétele szerint létezik $\boldsymbol{H}$-ban egy $\{\boldsymbol{E}_\lambda\}$ spektrálsereg úgy, hogy

$$\boldsymbol{U}_t = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} d\boldsymbol{E}_\lambda.$$

De akkor

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} dF_\lambda f = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} d\boldsymbol{P}\boldsymbol{E}_\lambda f \quad (f \in H),$$

ahonnan következik, hogy $F_\lambda f = \boldsymbol{P}\boldsymbol{E}_\lambda f$, amivel a bizonyítást befejeztük.

Ha $\{F_\lambda\}$ lényegében a $(0, 2\pi)$ intervallumra van szorítva, azaz ha a $\lambda \leqq 0$ értékekre $F_\lambda = O$ és a $\lambda \geqq 2\pi$ értékekre $F_\lambda = I$, akkor a pozitív definit T_t függvény helyett a

$$T_n = \int_0^{2\pi} e^{in\lambda} dF_\lambda \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

pozitív definit „sorozat"-tal is okoskodhatunk; ebben az esetben Stone tétele helyett ennek egyszerűbb, „diszkrét" analogonjára kell hivatkoznunk, amely szerint

$$\boldsymbol{U}^n = \int_0^{2\pi} e^{in\lambda} d\boldsymbol{E}_\lambda \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Egyébként az általános eset mindig visszavezethető erre a speciális esetre azáltal, hogy a λ paramétert egy olyan $\mu = \varphi(\lambda)$ paraméterrel helyettesítjük, amely λ-nak folytonos és szigorú értelemben növekvő függvénye, és amely értékkészlete a $(0, 2\pi)$ intervallumba esik.

6. Tetszőleges Banach-tér kontrakciói

Az I. és II. tétel részben átvihetők tetszőleges Banach-tér kontrakcióinak esetére is. Az alábbiakban az I. tétel egy ilyen részbeni kiterjesztését közöljük:

IV. TÉTEL. *Legyen T a (valós vagy komplex) B Banach-tér kontrakciója. Létezik ekkor a B teret altereként tartalmazó olyan $\mathbf{B}$ Banach-tér, és $\mathbf{B}$-nek önmagára való olyan izometrikus $\mathbf{U}$ leképezése, hogy B-nek minden f elemére érvényes a*

$$T^n f = \mathbf{P}\mathbf{U}^n f \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

előállítás; $\mathbf{P}$ itt $\mathbf{B}$-nek a B altérre való olyan párhuzamos vetítése, amelynek normája 1.

Bizonyítás. Legyen $\mathbf{B}$ a B elemeiből alkotott mindazon

$$\mathfrak{f} = \{f_n\}_{-\infty}^{\infty}$$

sorozatok halmaza, amelyekre

$$|\mathfrak{f}| = \sum_{-\infty}^{\infty} \|f_n\| < \infty.$$

Ha $\mathbf{B}$-ben az összeadást és a skalárisokkal való szorzást a természetes módon értelmezzük:

$$\{f_n\} + \{f_n'\} = \{f_n + f_n'\}, \quad c\{f_n\} = \{cf_n\},$$

az előbb értelmezett $|\mathfrak{f}|$ mennyiséget pedig $\mathfrak{f}$ normájának tekintjük, akkor ezzel $\mathbf{B}$ maga is Banach-térré válik. Az $f \in B$ elemet azonosítjuk azzal az $\mathfrak{f} = \{f_n\} \in \mathbf{B}$ elemmel, amelyre $f_0 = f$ és $f_n = 0$ $(n \neq 0)$; ezzel B-t beágyazzuk $\mathbf{B}$-be, mint ennek alterét.

Ha $\mathfrak{f} = \{f_n\} \in B$, legyen

$$\mathbf{P}\mathfrak{f} = \sum_{0}^{\infty} T^n f_n;$$

minthogy $\|T^n f_n\| \leqq \|f_n\|$, ez a sor konvergens és

$$\|\mathbf{P}\mathfrak{f}\| \leqq \sum_{0}^{\infty} \|f_n\| \leqq |\mathfrak{f}|.$$

Így $\mathbf{B}$-nek egy B-be való olyan $\mathbf{P}$ lineáris transzformációját értelmeztük, amelynek normája 1-gyel egyenlő.

Értelmezzük a következő transzformációt:

$$\mathbf{U}\{f_n\} = \{f_{n-1}\},$$

$\boldsymbol{U}$ a $\boldsymbol{B}$ térnek az egész $\boldsymbol{B}$ térre való izometrikus leképezése. Érvényesek ekkor a

$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{U}^m\{f_n\}=\boldsymbol{P}\{f_{n-m}\}=\sum_{n=0}^{\infty}T^n f_{n-m} \qquad (m=0,\pm 1,\pm 2,\ldots)$$

összefüggések. Speciálisan, ha $\{f_n\}=f\in\boldsymbol{B}$, azaz ha $f_0=f$ és $f_n=0$ $(n\neq 0)$, akkor

$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{U}^m f=T^m f \qquad (m=0,1,2,\ldots),$$

amivel a tételt bebizonyítottuk. (Az m negatív egész értékeire $\boldsymbol{P}\boldsymbol{U}^m f=0$.)

EGY HARDY—LITTLEWOOD-FÉLE TÉTEL ÉLESÍTÉSE*

SZÜSZ PÉTER

Bemutatta Turán Pál r. tag az 1953. február 2-án tartott felolvasó ülésen

Jelen dolgozatban bebizonyítjuk a következő *tételt:* Legyen ω irracionális, k természetes szám és $[n^k\omega]=n^k\omega-\{n^k\omega\}$. Akkor, ha $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ tetszésszerinti 0 és 1 között fekvő számok és ε adott pozitív szám, úgy létezik egy csak ε, k-tól és ω-tól függő m úgy, hogy tetszőleges ν mellett legalább egy egész n-re fennállnak a következő relációk:

$$|\{n^\varkappa\omega\}-\alpha_k|<\varepsilon \qquad (\varkappa=1,2,\ldots,k),$$

ahol $\nu \leqq n \leqq \nu+m$.

Ez a tétel HARDY—LITTLEWOOD egy tételének élesítése. HARDY és LITTLEWOOD tétele azt mondja ki, hogy tetszőlegesen megadott $\varepsilon>0$ mellett létezik oly n, hogy a

$$|\{n^\varkappa\omega\}-\alpha_\varkappa|<\varepsilon \qquad (\varkappa=1,2,\ldots,k)$$

relációk teljesülnek; azon n-ek gyakoriságára, amelyekre e relációk teljesülnek, nem mond ki semmit. Fenti tételt segédtételként használtam fel annak az ismert ténynek elemi (vagyis a Weyl-féle trigonometrikus összegek felhasználása nélküli) bizonyítására, hogy az $\{n^k\omega\}$ számok a $(0, 1)$ intervallumban egyenletes eloszlásúak. Bizonyításomat nem közöltem, mert, mint arról már bizonyításom kidolgozása után értesültem, V. BERGSTRÖM [2], [3] egy, bár a számítás részleteiben különböző, de az alapgondolatokban hasonló bizonyítást már 1935-ben publikált.

BIZONYÍTÁS: A bizonyítás k-szerinti teljes indukcióval történik. Legyen ω és ε adott. Tételünk $k=1$-re fennáll. ω többszöröseinek törtrészei ugyanis a $(0, 1)$-ben mindenütt sűrűn fekszenek. Válasszunk egy a természetes számot, melyre $\{a\omega\}=\varepsilon_a<\varepsilon$ teljesül és a következőkben csak az $\{x\varepsilon_a\}$ számokat vizsgáljuk. Tetszőleges ν és $0\leqq\alpha<1$ mellett legalább egy egész x-re fennáll $|\{x\varepsilon_\alpha\}-\alpha|<\varepsilon$, ahol $\nu<x<\nu+[\varepsilon_a^{-1}]$. Ezzel tételünket $k=1$ esetre bebizonyítottuk. Most végezzük el a $k-1$-ről k-ra való átmenetet.

Legyenek az $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ számok adottak. Válasszunk egy ν' számot, melyre fennállnak a

$$(1) \qquad |\{\nu'^\varkappa\omega\}-\alpha_\varkappa|<\frac{\varepsilon}{3} \qquad (\varkappa=1,2,\ldots,k)$$

egyenlőtlenségek. (Ez HARDY—LITTLEWOOD [1] szerint lehetséges.) Ezután

* E dolgozat német nyelven megjelent az *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* 3 1953.

további $\left[\frac{3}{\varepsilon}+1\right]=N$ egész számot választunk: $S_r(r=1,2,\ldots,N)$-et, melyek a következő tulajdonságokkal bírnak:

(2) $$\{S_r^k\omega\}\in J_r \qquad (r=1,2,\ldots,N),$$

ahol J_r a $\left(\frac{r-1}{N},\frac{r}{N}\right)$ intervallumot jelenti;

(3) $$\{S_r^\varkappa\omega\}<\frac{\varepsilon}{3\cdot 3^k\nu'^{k-1}} \qquad (r=1,2,\ldots,N;\ \varkappa=1,2,\ldots,(k-1)).$$

Ez HARDY—LITTLEWOOD [1] szerint szintén lehetséges.

Tegyük fel, hogy tételünket $k-1$-ig már bebizonyítottuk; ebből speciálisan következik, hogy tetszőleges $\varepsilon'>0$-hoz megadható egy $m'=m'(\omega,\varepsilon',k)$ oly módon, hogy tetszőleges ν mellett legalább egy egész n számra, ahol $\nu\leqq n\leqq\nu+m'$, a

$$\{n^\varkappa\omega\}<\varepsilon' \qquad (\varkappa=1,2,\ldots,(k-1))$$

relációk egyidejűleg fennállnak. Tehát létezik a $\nu_\varrho(\varrho=1,2,\ldots,)$ egész számok egy olyan sorozata, melynek valamennyi tagjára érvényesek a

(4) $$\{\nu_\varrho^\varkappa\omega\}<\varepsilon' \qquad (\varkappa=1,2,\ldots,(k-1);\ \varrho=1,2,\ldots)$$

és

(5) $$\nu_\varrho-\nu_{\varrho-1}\leqq m' \qquad (\varrho=1,2,\ldots)$$

relációk. Írjunk

(6) $$\varepsilon'\leqq\frac{\varepsilon}{3\cdot 3^k\max\left(\nu'^{k-1},S_1^{k-1},\ldots,S_N^{k-1}\right)}$$

-et; ε'-hez az indukciós feltétel értelmében tartozik egy m', melyre (5) érvényes.

Tekintsük most adott ϱ mellett $\{\nu_\varrho^k\omega\}$-t. Legyen S_r azon szám, melyre J_r tartalmazza az $1-\{\nu_\varrho^k\omega\}$ pontot.

Bebizonyítjuk, hogy

(7) $$\{(\nu'+S_r+\nu_\varrho)^\varkappa\}=\alpha_k+\vartheta\varepsilon, \qquad (\varkappa=1,2,\ldots,k),$$

ahol $|\vartheta|\leqq 1$. (Itt és a következőkben ϑ mindig egy -1 és $+1$ között fekvő számot jelent. Különböző formulákban ϑ-nak nem kell ugyanazt a számot jelentenie.) Ha (7)-et bebizonyítottuk, akkor egyúttal tételünket is bebizonyítottuk, mert akkor (5) és a $\nu', S_1,\ldots,S_n$ számok véges volta miatt

$$m=m'+\max(S_1,S_2,\ldots,S_N)$$

-et írhatunk.

(7) bebizonyítása most már a következőképpen történhetik: $(\nu'+S_r+\nu_\varrho)^\varkappa$ polinomiális kifejtése „vegyes" tagjainak járuléka, vagyis azoknak a tagoknak a járuléka, amelyek nem tiszta $\varkappa$-dik hatványok,

$$\{(\nu'+S_r+\nu_\varrho)^\varkappa\omega\}$$

-ban kisebb, mint $\frac{\varepsilon}{3}$. Ugyanis

$$(\nu' + S_r + \nu_\varrho)^\varkappa = \sum_{\substack{0 \leqq a, b, c \leqq \varkappa \\ a+b+c=\varkappa}} \frac{\varkappa!}{a!\,b!\,c!} \nu'^a S_r^b \nu_\varrho^c;$$

(4) és (6) miatt minden „vegyes" tagra, amelyre $c \neq 0$, fennáll

$$\left\{\frac{\varkappa!}{a!\,b!\,c!} \nu'^a S_r^b \nu_\varrho^c \omega\right\} = \left\{\frac{\varkappa!}{a!\,b!\,c!} \nu'^a S_r^b \{\nu_\varrho^c \omega\}\right\} <$$

$$< \left\{\frac{\varkappa!}{a!\,b!\,c!} \max(\nu_1'^{k-1}, S_1^{k-1}, \ldots, S_N^{k-1})\varepsilon'\right\} \leqq \frac{\varkappa!}{3^\varkappa a!\,b!\,c!} \cdot \frac{\varepsilon}{3};$$

($\frac{\varkappa!}{3^\varkappa a!\,b!\,c!}$ a $\{\ \}$ jel elé kiemelhető, mert $x < 1, u < 1$ esetén nyilván $\{ux\} = u\{x\}$.) ha $c = 0$, akkor $a \neq 0$, $b \neq 0$ mert különben nem lehetne „vegyes" tagról szó. Ezen tagokra (3) miatt érvényes

$$\left\{\frac{\varkappa!}{a!\,b!} \nu'^a S_r^b \omega\right\} = \left\{\frac{\varkappa!}{a!\,b!} \nu'^a \{S_r^b \omega\}\right\} < \left\{\frac{\varkappa!}{a!\,b!} \nu'^a \frac{\varepsilon}{3 \cdot 3^k \nu'^{k-1}}\right\} \leqq \frac{\varkappa!}{3^\varkappa a!\,b!} \cdot \frac{\varepsilon}{3}.$$

Tehát az összes „vegyes" tagok járuléka kisebb, mint

$$\frac{\varepsilon}{3 \cdot 3^\varkappa} \sum_{\substack{0 \leqq a, b, c \leqq \varkappa \\ a+b+c=\varkappa}} \frac{\varkappa!}{a!\,b!\,c!} = \frac{\varepsilon}{3}.$$

Ezért

$$\{(\nu' + S_r + \nu_\varrho)^\varkappa \omega\} = \left\{(\nu'^\varkappa + S_r^\varkappa + \nu_\varrho^\varkappa)\omega + \vartheta \frac{\varepsilon}{3}\right\} \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, k)$$

(1), (3), (4) és (6) miatt $\varkappa = 1, 2, \ldots, (k-1)$-re érvényes

$$\left\{(\nu'^\varkappa + S_r^\varkappa + \nu_\varrho^\varkappa)\omega + \vartheta \frac{\varepsilon}{3}\right\} = \left\{\nu'^\varkappa \omega + \vartheta_1 \frac{\varepsilon}{9} + \vartheta_2 \frac{\varepsilon}{9} + \vartheta \frac{\varepsilon}{3}\right\} = \alpha_\varkappa + \vartheta_3 \varepsilon$$

(ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3 itt ugyanazt jelentik, mint ϑ). $\varkappa = k$-ra nyerjük

$$\left\{(\nu'^k + S_r^k + \nu_\varrho^k)\omega + \vartheta \frac{\varepsilon}{3}\right\} = \left\{\alpha_k + \vartheta_1 \frac{\varepsilon}{3} + 1 - \nu_\varrho^k \omega + \nu_\varrho^k \omega + \vartheta_2 \frac{\varepsilon}{3} + \vartheta \frac{\varepsilon}{3}\right\} =$$

$$= \alpha_k + \vartheta_3 \varepsilon,$$

amivel tételünket bebizonyítottuk.

Megjegyezzük még, hogy a fenti bizonyítási eljárás változtatás nélkül átvihető több lineárisan független irracionális szám esetére is. Így nyerjük a következő tételt: Legyenek $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_l$, 1 lineárisan függetlenek, legyenek továbbá

$$\begin{array}{c} \alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{1k} \\ \alpha_{21}, \alpha_{22}, \ldots, \alpha_{2k} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \alpha_{l1}, \alpha_{l2}, \ldots, \alpha_{lk} \end{array}$$

tetszőleges 0 és 1 között fekvő számok és $\varepsilon > 0$; akkor létezik egy $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_l$-től és ε-től független m szám, oly módon, hogy tetszőleges ν mellett legalább egy n-re $\nu \leqq n \leqq \nu + m$ érvényesek a

$$|\{n^{\varkappa}\omega_\lambda\} - \alpha_{\varkappa\lambda}| < \varepsilon \quad (\varkappa = 1, 2, \ldots, k; \lambda = 1, 2, \ldots, l)$$

relációk. Ebből ismét triviálisan következik, hogy ha $P(x) = \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + + \cdots + \alpha_2 x^k$ legalább egy irracionális koefficienssel bíró polinom, akkor tetszőleges ν mellett legalább egy n-re ($\nu \leqq n \leqq \nu + m$) fennáll

$$|P(n) - \alpha| < \varepsilon \qquad (0 < \alpha < 1\,;\ \varepsilon > 0)$$

Magyar Tudományos Akadémia
Alkalmazott Matematikai Intézete.

IRODALOM

[1] G. H. Hardy and E. J. Littlewood, Some problems on diophantine approximation, *Acta Math.*, **37** (1914), 156—239.

[2] V. Bergström, Beiträge zur Theorie der endlichdimensionalen Moduln und der diophantischen Approximationen. Diss. Lund, 1935.

[3] V. Bergström, Einige Bemerkungen zur Theorie der diophantischen Approximationen, *Comm. de l'Université de Lund* **4** (1939).

ERDŐS PÁL ÉS TURÁN PÁL EGY TÉTELÉRŐL

FREUD GÉZA

Bemutatta Turán Pál r. tag az 1953. június 8-án tartott felolvasó ülésen

Bevezetés

Legyen $\{P_n(x)\}$ a nemnegatív $w(x) \in L$ súlyfüggvényre a $(-1, +1)$ intervallumban ortogonális polinomok sorozata, $P_n(x)$-ben x^n együtthatója legyen pozitív. A $P_n(x)$ polinom gyökei legyenek $x_{1n}, x_{2n}, \ldots, x_{nn}$. ERDŐS és TURÁN egy tétele szerint, ha a $(-1, +1)$ ortogonális intervallum egy (a, b) belső részintervallumában

$$0 < m \leqq w(x) \leqq M \qquad (a \leqq x \leqq b) \tag{1}$$

akkor rögzített ε mellett a $P_n(x)$ polinom két $(a+\varepsilon, b-\varepsilon)$-ba eső szomszédos x_{kn} és $x_{k+1,n}$ gyökére

$$\frac{c_1}{n} \leqq x_{k+1,n} - x_{kn} \leqq \frac{c_2}{n}, \tag{2}$$

ahol c_1, c_2 (és a továbbiakban $c_3, c_4 \ldots$) csak a-tól, b-től, m és M-től és ε-tól függ, de k-tól és n-től független. (ERDŐS és TURÁN [1], VIII. tétel 538.) Ugyanott ERDŐS és TURÁN megjegyzik, hogy ha azt az erősebb kikötést tesszük, hogy

$$\frac{m}{\sqrt{1-x^2}} \leqq w(x) \leqq \frac{M}{\sqrt{1-x^2}} \tag{3}$$

akkor az összes szomszédos $\vartheta_{kn} = \arccos x_{kn}$ értékekre érvényes egy (2) alakú egyenlőtlenség.

Az alábbiakban megmutatjuk, hogy a (2) egyenlőtlenség nemcsak a $P_n(x)$ gyökeire, hanem a

$$Q_n(x) = P_n(x) + AP_{n-1}(x) + BP_{n-2}(x), \; B \leqq 0 \tag{4}$$

polinom $(-1, +1)$-be eső gyökeire is teljesül, feltéve, *ha $Q_n(x)$ összes gyökei valósak és egymástól különbözőek.* Ez utóbbi feltétel biztos kielégül, ha $B=0$. $Q_n(x)$-nek legalább $n-2$ gyöke a $(-1, +1)$ ortogonalitási intervallumba esik, mert $Q_n(x)$ minden $n-3$-ad fokú polinomra ortogonális. (Szegő [2], 3. 3. 4. tétel, 45.)

A (4) polinom gyökeit, mint mechanikus kvadratúra alappontokat, FEJÉR [3], majd ERDŐS és TURÁN [4] vizsgálták. Néhány figyelemreméltó speciális esetet jelen dolgozat végén részletesen fogunk tárgyalni. Bizonyításomban én is a (4) gyökeihez tartozó mechanikus kvadratúra eljárás sajátosságait használom fel; az több helyen eltér ERDŐS és TURÁN bizonyításától az $A=B=0$ esetre is.

Bizonyításom lényegét $A=B=0$ esetén röviden vázolni szeretném. CSEBISEV, MARKOV és STIELTJES klasszikus szeparációs tétele szerint

$$\sum_{i=1}^{k-1}\lambda_{in} < \int_a^{x_{kn}} w(x)\,dx < \sum_{i=1}^{k}\lambda_{in}$$

ahol λ_{in} az x_{in} alapponthoz tartozó Cotes-féle szám; ebből leolvasható, hogy

$$\int_{x_{kn}}^{x_{k+1,n}} w(x)\,dx < \lambda_{kn}+\lambda_{k+1,n}. \tag{5}$$

Mármost ERDŐS és TURÁN egy nevezetes segédtétele szerint $\lambda_{kn}=O\left(\frac{1}{n}\right)$, tehát

$$x_{k+1,n}-x_{kn} < \frac{1}{m}\int_{x_{kn}}^{x_{k+1,n}} w(x)\,dx = O\left(\frac{1}{n}\right). \tag{5a}$$

A (2) egyenlőtlenség baloldala ugyanazzal a gondolatmenettel bizonyítható, mint ERDŐS és TURÁN bizonyítása az $A=B=0$ esetében. A továbbiakban (3) feltétel mellett becsléseinket úgy egészítjük ki, hogy a szomszédos gyökök távolságának becslésében numerikus állandókat tudunk megadni.

Az alábbiakban bebizonyítjuk, hogy az (5) egyenlőtlenség a $Q_n(x)$ gyökeihez tartozó mechanikus kvadratúra Cotes-számaira is teljesül. Ilyen módon a szomszédos gyökök távolságára a numerikus állandót tekintve is igen jó felső becsléshez jutunk. Ennek alkalmazásaként becsléseket vezetünk le olyan ortogonális polinomok gyökeinek eloszlására, melyek súlyfüggvénye vagy a (33), vagy a (35), vagy a (37) egyenlőtlenségnek tesz eleget.

Ha nem vagyunk tekintettel a numerikus korlát pontosabb értékére, akkor a felső becslés bizonyítása nagymértékben lerövidíthető. Három szomszédos ortogonális polinom közt

$$P_n(x)=(A_n x+B_n)\,P_{n-1}(x)-C_n P_{n-2}(x)$$

alakú összefüggés áll fenn, ahol $C_n>0$. Vagyis $B\leqq 0$ esetén $Q_n(x)$ a $P_{n-1}(x)$ polinom gyökhelyein ugyanolyan előjelű, mint $P_n(x)$. A $P_n(x)$ polinom viszont ismert tétel szerint jelet vált $P_{n-1}(x)$-nek két szomszédos $x_{k,n-1}$ és $x_{k+1,n-1}$ gyökhelye között. Tehát $Q_n(x)$-nek legalább egy gyöke esik minden $(x_{k,n-1}, x_{k+1,n-1})$ intervallumba. Ilyen módon $Q_n(x)$-nek a két $x_{k,n-1}$-gyel szomszédos gyöke nincs messzebb egymástól, mint $x_{k+1,n-1}-x_{k-1,n-1}$, ami (12) szerint $O\left(\frac{1}{n}\right)$. Ez utóbbi bizonyítás gondolatmenete SZŰSZ PÉTER kartársamtól származik.

Segédtételek.

Legyenek $Q_n(x)$ gyökei, amelyekről feltételeztük, hogy valósak és különbözőek

$$\xi_{1n} < \xi_{2n} < \cdots < \xi_{nn}.$$

Legyen $l_{kn}(x)$ a $\{\xi_{in}\}$ alappontsorozat ξ_{kn} alappontjához tartozó Lagrange-féle interpolációs alapfüggvény, vagyis az a legfeljebb $n-1$-edfokú polinom, melyre

$$l_{kn}(\xi_{in}) = \delta_{ik} \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Akkor a $\{\xi_{kn}\}$ alappontokhoz tartozó $w(x)$-el súlyozott mechanikus kvadratúra Cotes-féle számai

$$\lambda_{kn} = \int_{-1}^{+1} l_{kn}(x)\, w(x)\, dx. \tag{6}$$

I. Segédtétel: Tetszőleges $2n-3$-ad fokú $\pi_{2n-3}(x)$ polinomra,

$$\int_{-1}^{+1} \pi_{2n-3}(x)\, w(x)\, dx = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{kn} \pi_{2n-3}(\xi_{kn}). \tag{7}$$

Ennek bizonyítása Jacobi [6] egy nevezetes gondolatára van alapítva:

$$\varrho_{n-1}(x) = \sum_{k=1}^{n} \pi_{2n-3}(\xi_{kn})\, l_{kn}(x) \tag{8}$$

az a legfeljebb $n-1$-edfokú polinom, amely a $\{\xi_{kn}\}$ alappontok helyén ugyanazokat az értékeket veszi fel mint $\pi_{2n-1}(x)$. Akkor nyilván

$$\pi_{2n-3}(x) - \varrho_{n-1}(x) = [P_n(x) + A P_{n-1}(x) + B P_{n-2}(x)]\, \pi^*_{n-3}(x), \tag{9}$$

ahol $\pi^*_{n-3}(x)$ legfeljebb $n-3$-adfokú polinom. (9)-ből a $\{P_n(x)\}$ polinomok ortogonalitása következtében

$$\int_{-1}^{+1} [\pi_{2n-3}(x) - \varrho_{n-1}(x)]\, w(x)\, dx = 0 \tag{10}$$

és így (10), (8), (6) felhasználásával

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} \pi_{2n-3}(x)\, w(x)\, dx &= \int_{-1}^{+1} \varrho_{n-1}(x)\, w(x)\, dx = \\ = \sum_{k=1}^{n} \pi_{2n-3}(\xi_{kn}) \int_{-1}^{+1} l_{kn}(x)\, w(x)\, dx &= \sum_{k=1}^{n} \lambda_{kn} \pi_{2n-3}(\xi_{kn}). \end{aligned} \tag{11}$$

Q. e. d.

II. Segédtétel: Ha az összes ξ_{kn} számok $(k = 1, 2, \ldots, n)$ valósak, akkor

$$\lambda_{kn} \geqq \int_{-1}^{+1} [l_{kn}(x)]^2\, w(x)\, dx > 0 \qquad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{12}$$

Ez a tétel Fejér-től származik [3] (v. ö. Erdős-Turán [4], 149.) Bizonyítása ugyanúgy történik, mint az alábbiakban a (16) egyenlőtlenségé.

III. SEGÉDTÉTEL: ξ_{kn} és $\xi_{k+1,n}$ legyen $Q_n(x)$-nek két szomszédos, a $(-1, +1)$ ortogonalitási intervallumba eső gyöke. Akkor

$$\int_{\xi_{kn}}^{\xi_{k+1,n}} w(x)\,dx < \lambda_{kn} + \lambda_{k+1,n}. \tag{13}$$

Bizonyítás: ERDŐS és TURÁN egy lemmája szerint ([5], IV. Lemma, 529.)

$$l_{kn}(x) + l_{k+1,n}(x) \geqq 1, \quad \text{ha} \quad \xi_{kn} \leqq x \leqq \xi_{k+1,n}. \tag{14}$$

(14)-hez felhasználtuk, hogy az összes $\{\xi_{in}\}$ alappontok valósok. Most a II. segédtétel FEJÉR-től [3] származó bizonyításának egy változatát használjuk fel: Az

$$\{l_{kn}(x) + l_{k+1,n}(x)\}^2 - l_{kn}(x) - l_{k+1,n}(x)$$

legfeljebb $2n-2$-edfokú polinom az összes ξ_{in} alappontokon $i=1,2,\ldots,n$ eltűnik, tehát ez a polinom osztható $Q_n(x) = P_n(x) + AP_{n-1}(x) + BP_{n-2}(x)$-vel:

$$\begin{aligned} &\{l_{kn}(x) + l_{k+1,n}(x)\}^2 - l_{kn}(x) - l_{k+1,n}(x) = \\ &= [P_n(x) + AP_{n-1}(x) + BP_{n-2}(x)][\alpha_{n-2}P_{n-2}(x) + \pi_{n-3}(x)], \end{aligned} \tag{15}$$

ahol $\pi_{n-3}(x)$ legfeljebb $n-3$-adfokú polinom, tehát $P_n(x)$, $P_{n-1}(x)$ és $P_{n-2}(x)$-re ortogonális. (15)-ben x^{2n-2} együtthatóját összehasonlítva, miután $P_n(x)$-ben és $P_{n-2}(x)$-ben a legmagasabb fokú tag együtthatója pozitív, a baloldalon pedig a négyzetreemelés következtében x^{2n-2} együtthatója pozitív, kapjuk, hogy $\alpha_{n-2} > 0$, tehát $B\alpha_{n-2} \leqq 0$. Ennek következtében (15)-ből

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} \{l_{kn}(x) + l_{k+1,n}(x)\}^2 w(x)\,dx &= \int_{-1}^{+1} l_{kn}(x) w(x)\,dx + \int_{-1}^{+1} l_{k+1,n}(x) w(x)\,dx + \\ &+ B\alpha_{n-2} \int_{-1}^{+1} [P_{n-2}(x)]^2 w(x)\,dx \leqq \lambda_{kn} + \lambda_{k+1,n} \end{aligned} \tag{16}$$

(14) és (16)-ból

$$\int_{\xi_{kn}}^{\xi_{k+1,n}} w(x)\,dx < \int_{-1}^{+1} \{l_{kn}(x) + l_{k+1,n}(x)\}^2 w(x)\,dx \leqq \lambda_{kn} + \lambda_{k+1,n}.$$

Q. e. d.

IV. SEGÉDTÉTEL: Az egész $(-1, +1)$ intervallumban legyen $w(x) \leqq \leqq M(1-x^2)^{-1/2}$. Akkor minden $(-1, +1)$-be eső alapponthoz tartozó λ_{kn} Cotes-féle számra

$$\lambda_{kn} \leqq \frac{2\pi M}{2n-3-\sin^{-1}\dfrac{\pi}{2n-3}} \tag{17}$$

és ha $\xi_{kn} = \cos\theta_{kn}$, $\dfrac{\pi}{2} - \alpha \leqq \theta_{kn} \leqq \dfrac{\pi}{2} + \alpha$, akkor

$$\lambda_{kn} \leqq \frac{2\pi M}{2n-3-\cos^{-1}\alpha}. \tag{18}$$

Bizonyítás: Ismeretes, hogy ha $\pi_{n-2}(x)$ végigfut az összes olyan legfeljebb $n-2$-edfokú polinomon, melyekre $\pi_{n-2}(\xi_{kn})=1$, akkor

$$\min_{\pi_{n-2}(\xi_{kn})=1} \int_{-1}^{+1} \frac{[\pi_{n-2}(x)]^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{2\pi}{2n-3+\dfrac{\sin(2n-3)\theta_{kn}}{\sin\theta_{kn}}} \tag{19}$$

és ezt a minimumot a baloldali integrál $\pi_{n-2}(x)$ megfelelő választásával fel is veszi. (Lásd ERDŐS és TURÁN [5], 539.) Legyen az alábbiakban $\pi_{n-2}(x)$ éppen az az $n-2$-edfokú polinom, amelyre a (18) integrál a minimumát felveszi. Akkor tekintettel (7), (12), és (19)-re

$$\begin{aligned} \lambda_{kn} &\leqq \sum_{i=1}^{n} \lambda_{in}[\pi_{n-2}(x)]^2 = \int_{-1}^{+1} [\pi_{n-2}(x)]^2 w(x)\,dx \leqq \\ &\leqq M \int_{-1}^{+1} \frac{[\pi_{n-2}(x)]^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{2\pi M}{2n-3+\dfrac{\sin(2n-3)\theta_{kn}}{\sin\theta_{kn}}} \end{aligned} \tag{20}$$

(20)-ból (18) azonnal leolvasható. Hogy (17)-et bebizonyítsuk, ki kell mutatnunk, hogy

$$\frac{\sin(2n-3)\varphi}{\sin\varphi} \geqq -\frac{1}{\sin\dfrac{\pi}{2n-3}} \qquad 0 \leqq \varphi \leqq \pi. \tag{21}$$

Ez az egyenlőtlenség $0 \leqq \varphi \leqq \dfrac{\pi}{2n-3}$-ra triviális, mert a baloldal pozitív; $\dfrac{\pi}{2n-3} \leqq \varphi \leqq \dfrac{\pi}{2}$ esetén $|\sin(2n-3)\varphi| \leqq 1$ és

$$\sin\varphi > \sin\frac{\pi}{2n-3}$$

miatt teljesül; miután (21) baloldala a φ és $\pi-\varphi$ helyeken ugyanazt az értéket veszi fel, ezzel (21)-et bebizonyítottuk, amivel a IV. segédtétel bizonyítását befejeztük.

Becslés $x_{k+1,n}-x_{kn}$-re

I. TÉTEL: A $w(x)$ súlyfüggvény az egész $(-1, +1)$ ortogonalitási intervallumon tegyen eleget a (3) egyenlőtlenségnek. Ha most $\xi_{kn}=\cos\theta_{kn}$ és $\xi_{k+1,n}=\cos\theta_{k+1,n}$ a (4) polinom két szomszédos $(-1, +1)$-be eső gyöke, akkor

$$\theta_{kn}-\theta_{k+1,n} \leqq \frac{M}{m}\,\frac{4\pi}{2n-3-\sin^{-1}\dfrac{\pi}{2n-3}} \tag{22}$$

és ha $\dfrac{\pi}{2}-\alpha \leqq \theta_{k+1,n} < \theta_{kn} \leqq \dfrac{\pi}{2}+\alpha$, ahol $\alpha < \dfrac{\pi}{2}$, akkor

$$(23) \qquad \theta_{kn}-\theta_{k+1,n} \leqq \frac{M}{m}\frac{4\pi}{2n-3-\cos^{-1}\alpha}.$$

Bizonyítás: tekintettel (3) és (13)-ra

$$(24) \qquad \theta_{kn}-\theta_{k+1,n} = \int_{\xi_{kn}}^{\xi_{k+1,n}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \leqq \frac{1}{m}\int_{\xi_{kn}}^{\xi_{k+1,n}} w(x)dx \leqq \frac{1}{m}(\lambda_{kn}+\lambda_{k+1,n})$$

(17) és (24), ill. (18) és (24)-ből következik (22), ill. (23), Q. e. d.

II. TÉTEL: A $w(x)$ súlyfüggvényre teljesüljön a (3) egyenlőtlenség. Ha $\xi_{kn}=\cos\theta_{kn}$ és $\xi_{k+1,n}=\cos\theta_{k+1,n}$ a (4) polinom két szomszédos $(-1,+1)$-be eső gyöke, akkor

$$(25) \qquad \theta_{kn}-\theta_{k+1,n} \geqq \frac{1}{40}\frac{m}{M}\frac{1}{n}.$$

Bizonyítás: Tekintettel arra, hogy

$$\lambda_{kn} = \int_0^\pi [l_{kn}(\cos\theta)]^2 w(\cos\theta)\sin\theta d\theta$$

és (3) következtében

$$m \leqq w(\cos\theta)\sin\theta \leqq M$$

és így

$$\frac{1}{M}\lambda_{kn} \leqq \int_0^\pi [l_{kn}(\cos\theta)]^2 d\theta = \Lambda_{kn} \leqq \frac{1}{m}\lambda_{kn},$$

amiből

$$-\frac{1}{m}\lambda_{kn} \leqq -\frac{1}{\pi m}\lambda_{kn}+\frac{1}{M}\lambda_{kn} \leqq \int_0^\vartheta \left\{[l_{kn}(\cos\theta)]^2-\frac{1}{\pi}\Lambda_{kn}\right\}d\theta = F(\vartheta) \leqq \frac{1}{m}\lambda_{kn}.$$

Miután $F(\vartheta)$ $2n$-nél alacsonyabbfokú trigonometrikus polinom, BERNSTEJN tételének kétszeri alkalmazásával, tekintettel (17)-re:

$$(26) \qquad \left|\frac{d}{d\theta}[l_{kn}(\cos\theta)]^2\right| \leqq \frac{(2n)^2}{m}\lambda_{kn} \leqq \frac{4n^2}{m}\frac{2\pi M}{2n-3-\sin^{-1}\frac{\pi}{2n-3}}.$$

Már most Lagrange-féle középértéktétel szerint

$$\begin{aligned} 1 &= [l_{kn}(\cos\theta_{kn})]^2-[l_{kn}(\cos\theta_{k+1,n})]^2 \leqq \\ &\leqq (\theta_{kn}-\theta_{k+1,n}) \max_{\theta_{k+1,n}\leqq\theta\leqq\theta_{kn}} \left|\frac{d}{d\theta}[l_{kn}(\cos\theta)]^2\right| \leqq \\ &\leqq (\theta_{kn}-\theta_{k+1,n})\frac{4n^2}{m}\frac{2\pi M}{2n-3-\sin^{-1}\frac{\pi}{2n-3}} \leqq \\ &\leqq (\theta_{kn}-\theta_{k+1,n})\,40\frac{M}{m}n, \end{aligned}$$

amiből (25) leolvasható.

III. TÉTEL: A $w(x)$ súlyfüggvény tegyen eleget a (3) egyenlőtlenségnek; $\xi^* = \cos\theta^*$, ill. $\xi^{**} = \cos\theta^{**}$ legyen a (4) polinomnak legnagyobb, ill. legkisebb $(-1, +1)$ belsejébe eső gyöke, akkor $n > 2$ esetén

$$(27)\quad \theta^* \leqq \frac{M}{m}\frac{4\pi}{2n-3-\sin^{-1}\dfrac{\pi}{2n-3}} \quad \text{és} \quad \pi-\theta^{**} \leqq \frac{M}{m}\frac{4\pi}{2n-3-\sin^{-1}\dfrac{\pi}{2n-3}}.$$

Bizonyítás: Nyilván elegendő (27)-ből a baloldali egyenlőtlenséget bizonyítani. Tekintsük először azt az esetet, amikor $Q_n(x)$-nek a nyilt $(-1, +1)$ intervallumon kívül sincs ξ^*-nál nagyobb gyöke, azaz $\xi^* = \xi_{nn}$. Tekintsük az $l_{nn}(x)$ alapfüggvényt. Ez olyan $n-1$-edfokú polinom, amelynek $n-1$ darab ξ_{nn}-től balra eső gyöke van, tehát differenciálhányadosa $\frac{dl_{nn}}{dx}$ jelet vált az (ξ_{1n}, ξ_{2n}), $(\xi_{2n}, \xi_{3n}), \ldots, (\xi_{n-2,n}, \xi_{n-1,n})$ intervallumokban és tekintettel a fokszámára, több jelváltása nem is lehet.

Miután $l_{nn}(\xi_{n-1,n}) = 0$ és $l_{nn}(\xi_{nn}) = 1$, $l_{nn}(x)$ $x > \xi_{n-1,n}$-től kezdve monoton növekvő és így

$$(28)\qquad l_{nn}(x) \geqq 1, \quad \text{ha} \quad x \geqq \xi_{nn}.$$

Ennek következtében (3), (12) és (17) alapján

$$(29)\qquad \begin{aligned} \theta^* = \theta_{nn} &< \frac{1}{m}\int_0^{\theta_{nn}} [l_{nn}(\cos\vartheta)]^2 w(\cos\vartheta)\sin\vartheta\, d\vartheta < \\ &< \frac{1}{m}\int_0^{\pi} [l_{nn}(\cos\vartheta)]^2 w(\cos\vartheta)\sin\vartheta\, d\vartheta \leqq \frac{1}{m}\lambda_{nn} \leqq \frac{M}{m}\frac{2\pi}{2n-3-\sin^{-1}\dfrac{\pi}{2n-3}}. \end{aligned}$$

Másodszor, tekintsük azt az esetet, amikor $Q_n(x)$-nek van ξ^*-nál nagyobb gyöke; a legkisebb ilyen gyök legyen ξ^{***}. A ξ^*, ill. ξ^{***} alapponthoz tartozó Lagrange-féle interpolációs alapfüggvény legyen l_n^*, ill. l_n^{***}, az ezekhez tartozó Cotes-féle számok legyenek λ_n^* és λ_n^{***}. Tekintettel (14) és (16)-ra, (17) felhasználásával

$$(30)\qquad \begin{aligned} \theta^* &\leqq \frac{1}{m}\int_0^{\theta^*} [l_n^*(\cos\theta) + l_n^{***}(\cos\theta)]^2 w(\cos\theta)\sin\theta\, d\theta = \\ &= \frac{1}{m}\int_{-1}^{+1} [l_n^*(x) + l_n^{***}(x)]^2 w(x)\, dx \leqq \frac{1}{m}(\lambda_n^* + \lambda_n^{***}) \leqq \\ &\leqq \frac{M}{m}\frac{2\pi}{2n-3-\sin^{-1}\dfrac{\pi}{2n-3}} + \frac{1}{m}\lambda^{***}. \end{aligned}$$

λ_n^{***} becslése céljából tekintsük a $\psi_{n-2}(x) = \frac{1}{n-1}U_{n-2}(x)$ polinomot, ahol

$U_{n-2}(x)$ az $n-2$-edfokú másodfajú Csebisev-polinom. $\psi_{n-2}(1)=1$ és így $\xi^{***}\geqq 1$ következtében

$$\psi_{n-2}(\xi^{***})\geqq 1. \tag{31}$$

Ilyen módon, tekintettel (12)-re, hacsak $w(x)\leqq M(1-x^2)^{-1/2}$

$$\begin{aligned}\lambda_n^{***} &\leqq \sum_{k=1}^{n}\lambda_{kn}[\psi_{n-2}(\xi_{kn})]^2=\int_{-1}^{+1}[\psi_{n-2}(x)]^2 w(x)dx\leqq \\ &\leqq \frac{M}{(n-1)^2}\int_{-1}^{+1}[U_{n-2}(x)]^2\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{M\pi}{n-1}\end{aligned} \tag{32}$$

(29), ill. (30) és (32) alapján következik (27)-ből az első egyenlőtlenség.

Alkalmazások

IV. TÉTEL: Legyen $p_n(x)$ a $w(x)$ súlyfüggvényhez tartozó n-edfokú ortogonális polinom, és

$$m\sqrt{1-x^2}\leqq w(x)\leqq M\sqrt{1-x^2}, \tag{33}$$

$p_n(x)$ gyökei legyenek $x_{1n}<x_{2n}<\cdots<x_{nn}$, végül $x_{0n}=-1$, $x_{n+1,n}=1$, akkor $x_{kn}=\cos\theta_{kn}$ jelöléssel

$$\frac{1}{40}\frac{m}{M}\frac{1}{n+2}\leqq\theta_{kn}-\theta_{k+1,n}\leqq\frac{M}{m}\frac{4\pi}{2n+1-\sin^{-1}\dfrac{\pi}{2n+1}} \tag{34}$$

és ha $\frac{\pi}{2}-\alpha\leqq\theta_{k+1,n}<\theta_{kn}<\frac{\pi}{2}+\alpha$; $\alpha<\frac{\pi}{2}$ akkor a nevező utolsó tagjában $\cos^{-1}\alpha$ írható.

BIZONYITÁS: A $W(x)=(1-x^2)^{-1}w(x)$ súlyfüggvényhez tartozó ortogonális polinomok sorozata legyen $\{P_n(x)\}$. Fejtsük ki $(x^2-1)p_n(x)$-et a $\{P_n(x)\}$ ortogonális rendszer szerint:

$$(x^2-1)p_n(x)=\sum_{k=0}^{n+2}c_kP_k(x),$$

ahol

$$c_k=\int_{-1}^{+1}(x^2-1)p_n(x)P_k(x)W(x)dx=-\int_{-1}^{+1}p_n(x)P_k(x)w(x)dx.$$

Ebből azonnal leolvasható, hogy $c_k=0$, ha $k<n$. Továbbá, ha $\varkappa_n$-nel jelöljük $p_n(x)$-ben x^n együtthatóját és hasonlóan k_n-nel jelöljük $P_n(x)$-ben x^n együtthatóját, akkor együttható összehasonlítással

$$c_{n+2}=\frac{\varkappa_n}{k_{n+2}}>0$$

és másrészt

$$c_n = -\int_{-1}^{+1} p_n(x) P_n(x) w(x)\,dx = -\int_{-1}^{+1} p_n(x)\left[\frac{k_n}{\varkappa_n} p_n(x) + \cdots\right] w(x)\,dx = -\frac{k_n}{\varkappa_n} < 0.$$

Mindezek alapján

$$(x^2-1)\,p_n(x) = \frac{\varkappa_n}{k_{n+2}}\,[P_{n+2}(x) + A P_{n+1}(x) + B P_n(x)], \quad \text{ahol} \quad B < 0.$$

Tekintettel arra, hogy $W(x) = (1-x^2)^{-1} w(x)$ (33) következtében kielégíti a (3) egyenlőtlenséget, tételünk az I. és II. tételekből következik, Q. e. d.

V. TÉTEL: Legyen $p_n(x)$ a $w(x)$ súlyfüggvényhez tartozó n-edfokú ortogonális polinom és

$$m\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \leqq w(x) \leqq M\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}, \tag{35}$$

$p_n(x)$ gyökei legyenek növekvő sorrendben $x_{kn} = \cos\theta_{kn}$ és $x_{n+1,n} = +1$; akkor fennáll a következő egyenlőtlenség

$$\frac{1}{40}\frac{m}{M}\frac{1}{n+1} \leqq \theta_{kn} - \theta_{k+1,n} \leqq \frac{M}{m}\,\frac{4\pi}{2n-1-\sin^{-1}\dfrac{\pi}{2n-1}}. \tag{36}$$

Analóg tétel érvényes, ha $w(x)$ súlyfüggvény az

$$m\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \leqq w(x) \leqq M\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \tag{37}$$

egyenlőtlenséget elégíti ki.

Bizonyítás: Legyen most $\{P_n(x)\}$ a $W(x) = (1-x)^{-1} w(x)$ súlyfüggvényhez tartozó ortogonális polinomok sorozata. Akkor a IV. tétel bizonyításához hasonlóan kapjuk, hogy

$$(1-x)\,p_n(x) = -\frac{\varkappa_n}{k_{n+1}} P_{n+1}(x) + \frac{k_n}{\varkappa_n} P_n(x)$$

ilyen módon a IV. tétel is az I. és II. tételre vezethető vissza.

Magyar Tudományos Akadémia
Alkalmazott Matematikai Intézete.

IRODALOM

[1] P. Erdős—P. Turán: On interpolation, III. *Annals of Math.* **41** (1940), 510—533.
[2] G. Szegő: Orthogonal polynomials, *Amer. Math. Soc. Coll. Publ.* XXIII. kötet (1939).
[3] L. Fejér: Mechanische Quadraturen mit positiven Cotesschen Zahlen.
[4] P. Erdős—P. Turán: On interpolation, I, *Annals of Math.* **38** (1937), 142—155.
[5] P. Erdős—P. Turán: On interpolation, III, *Annals of Math.* **41** (1940), 510—553.
[6] C. G. J. Jacobi: Ueber Gauss's neue Methode, die Werthe der Integrale näherungsweise zu finden. *Journal für die reine und angewandte Math.* **1** (1826), 301—308.

KEPLER VILÁGNÉZETE ÉS SZEREPE A TERMÉSZETTÖRVÉNY-FOGALOM KIALAKÍTÁSÁBAN.

NÁDOR GYÖRGY

KOPERNIKUS, BRUNO és az új világnézet más nagy előharcosainak működése ellenére a *17. század elején a hivatalos tudomány és a közműveltség európaszerte még a régi világnézet jegyében alakul,* amelynek sarkalatos öszszetevői: a geocentrikus világkép, az arisztoteleszi fizika, a skolasztikus filozófia.[1]) A teleológikus világszemlélet elleni harc terén csak GALILEI, BACON, DESCARTES, SPINOZA működése hozza meg majd a győzelmet. Az egyház és Arisztotelesz tekintélyét a reneszánsz megtépázta ugyan, de a hivatalos tudományon belül — amint ezt GALILEI esete mutatja — e tekintélyek nimbusza sértetlen maradt. Emellett a mágiának, az asztrológiának és más áltudományoknak — vagy ezek egyes elemeinek — elterjedtsége nemcsak, hogy nem szünt meg a 15—16. században, hanem *átmenetileg* mintha még megnövekedett volna: a platonizmus és a pythagoreizmus divatja bizonyos fokig a misztikus gondolkodást is terjesztette. Ebben a világnézeti közszellemben természetesen nem volt hely a természettörvény számára sem — annak tudományos, tisztázott formájában: hiszen hiányzott számára a szükséges elvi bázis: a kauzális-racionális gondolkodás, a világ egységének elve, a mennyiségi vizsgálatok módszere.[2])

Ha KEPLER gondolatait helyesen akarjuk értékelni, állandóan szem előtt kell tartanunk kora világnézeti közszellemét, azt a világnézeti atmoszférát, amely körülvette és amely azt a közeget alkotta, amelyen keresztül — és gyakran ellenére! — kellett gondolatait kifejeznie. KEPLER világnézetén belül a régi és új harcban áll egymással. Nem kétséges, hogy KEPLER írásaiban számos misztikus, pythagoreus, kabbalisztikus elem és részlet is található: a természet törvényszerűségéről vallott nézetei is gyakran pythagoreus-platonista köntösben jelentkeznek. Mégis: mi sem hamisabb és tudománytalanabb, mint

[1]) Az egyetemeken a 17. század elején még teljesen a skolasztika szellemében folyt a filozófiai oktatás; de nemcsak az oktatás módszere volt középkori, hanem az oktatás anyagát is a skolasztika szolgáltatta.

[2]) A reneszánsz természetfilozófiájában, annak panteista jellege következtében a természettörvény gondolata csak homályosan, misztikus burokban merülhetett fel. A természetfilozófia egy késői képviselője CAMPANELLA, a 17. században már világosabban beszél; a sorsfogalmat úgy értelmezi, hogy ez nem más, mint az *okok láncolata* (fatum est series causarum). CAMPANELLA levélben üdvözli GALILEIT és nagy érdemének mondja a törvény (természettörvény) felfedezését. (CAMPANELLA: Lettere.—Bari 1927. — 176 ff.)

Keplert misztikusnak kinevezni[3]) vagy mint EDDINGTON teszi — a mai idealista természetfilozófia ősének megtenni. A mai idealista természetfilozófia a *tudománytól* a miszticizmus és a vallás felé vezet. KEPLER filozófiája a miszticizmustól és vallástól a *tudomány felé* vezetett. Ha EDDINGTON arra hivatkozik, hogy a mai idealista természettudósok valami olyasmihez tértek vissza, mint KEPLER világszemlélete[4]) akkor azt az összehasonlítást történetietlennek és megtévesztőnek kell tartanunk: KEPLER nem egyszer *élesen elítélte* a miszticizmust, a vallást, a tudománytalan irányokat és bátran kiállt a kor leghaladóbb tudományos irányzatai (pl. a kopernikuszi világkép stb.) mellett.

KEPLER gondolkodásában központi helyet foglal el a világ harmóniája, a világban érvényesülő *számszerű harmónia* eszméje. Tudjuk, hogy e gondolat már az ókori pythagoreusi iskola felvetette: KEPLERnél is — különösen kezdetben — sok pythagoreusi elem keveredett e gondolathoz. De KEPLERnél a számokkal való játék, a szférák zenéjére való hivatkozás stb. csak eszköz, gondolati ugródeszka, gondolati játék, amelynek segítségével keresi, kutatja az égi jelenségek *matematikai* törvényeit.

Felvetődhet persze a kérdés: jogosult-e KEPLER „pythagoreus" fejtegegetéseit puszta gondolati játéknak tartani, amelynek maga KEPLER sem tulajdonított tárgyi érvényt, vagy azoknak a szerzőknek kell-e igazat adni, akik — mint MAX CASPAR és más idealista Kepler-kutatók — a nagy német csillagász miszticizmusáról beszélnek. A kérdéssel szorosan összefügg egy másik probléma: a számmisztika vezetett-e el matematikai természettörvények megfogalmazásához, vagy ellenkezőleg a természettörvények koncepciója racionális megfontolásokban gyökerezik és a pythagoreizmusnak, a misztikus elemeknek csak esetleges, mellékes szerepük volt benne. A kérdés mind a *tudományos kategóriák* kialakulástörténete, mind pedig a *tudományos megismerés* módszertana szempontjából igen jelentős.

Hallgassuk meg magát KEPLERt. *Harmonices mundi* című művében (1619), amelyben a bolygómozgás 3. törvényét is közzéteszi, visszatekintve gondolatai genezisének történetére KEPLER ezeket írja: *„Amit 22 évvel ezelőtt már megsejtettem, még mielőtt* megtaláltam az 5 szabályos alapalakulatot az égi pályákban; amiről magamban *teljesen* meg voltam győződve, még mielőtt PTOLEMAIOS *Harmoniá*ját olvastam; amit... barátaimnak már jeleztem, *mielőtt a dologban teljesen biztos voltam;* amit 16 évvel ezelőtt egy nyomtatott írásban kikutatandó problémának jelöltem meg; aminek *csillagászati kutatások útján való kinyomozására* életem javát áldoztam; ami arra késztetett, hogy felkeressem *Tycho Brahet* és Prágát válasszam lakhelyemül — azt végre lét-

[3]) Ilyen „értékelés" alapján került KEPLER művének megcsonkított kiadása az Insel Verlag által kiadott *Német misztikusok* sorozatba.

[4]) EDDINGTONnak a KEPLER halálának 300. évfordulóján rendezett ünnepségen mondott beszédéből. — Idézi MAX CASPAR: Joh. Keplers wissenschaftliche und philosophische Stellung. München—Berlin—Zürich. 1935. 30. old.

rehoztam és sikerült élesebben megfogalmaznom, mint bármikor is reméltem volna. Ezáltal megtaláltam a harmónia mivoltát összefüggésében ép úgy, mint részleteiben... *Feladatomat nem azon a módon oldottam meg, amely előttem lebegett, hanem attól teljesen különböző módon*, azonban olyan eljárásmóddal, amely rendkívül alkalmas és tökéletes.[5]) (Az én kiemeléseim. — N. Gy.)

Ez az autobiografiai jellegű írás igen sokat árul el KEPLER munkamódszeréről és kutatásainak metódikájáról. A mi kérdésünk szempontjából fontos ez önvallomásnak az az utalása, hogy KEPLER *megsejtètte* a bolygók mozgásának törvényszerűségét *még mielőtt* ez az eszme plátói-pythagoreusi gondolatokhoz és képzetekhez kapcsolódott volna nála. KEPLER elmondja továbbá, hogy kezdeti hipotézisei, valamint ehhez kapcsolódó „pythagoreus" képzetei csak azért juttatták exakt tudományos eredményekhez, mert élete javát tényleges csillagászati kutatásoknak szentelte. Ennek eredménye volt az, hogy bár a maga elé tűzött feladatot megoldotta — a világ törvényszerű rendjéről kialakított meggyőződését konkrét tudományos eredményekre váltotta — de *nem olyan módon*, sőt teljesen különbözően attól, ahogyan eredetileg elképzelte. KEPLER tehát a legkevésbbé sem ragaszkodott a plátói és pythagoreusi képzetekhez, nem azok szerint alakította eleve kutatása irányát vagy adatait, hanem ellenkezőleg a kutatás eredményei alapján módosította eredeti elképzeléseit. Teljes joggal állapította meg APELT már a mult század derekán: KEPLER a világharmóniát, eltérőleg a pythagoreusoktól, nem a számok természetéből olvasta ki, hanem a megfigyelésekből nyerte a számok segítségével.[6])

Már a kortársak között akadtak olyanok, akik azt gondolták, hogy KEPLERnél a fantázia dominál, hogy eredményeit nem a tények lelkiismeretes kutatásával, hanem meg nem alapozott hipotézisek felállításával, gondolatai „szabad" csapongásával érte el. KEPLER egyik igen érdekes levelében elutasította az ilyen tévképzeteket munkásságával kapcsolatban és rámutatott arra, hogy a *természeti harmónia* gondolata nem apriori formula nála, hanem olyan feltevés, amely a *számszerű összefüggések, törvények lelkiismeretes kutatására mozgósítja őt:* „Ön azt gondolja — írta 1603-ban FABRIZIUSnak — hogy én először kigondolok valamely tetszetős hipotézist és azzal tetszelgek magamnak, hogy felcicomázom azt és csak azután vetem alá a megfigyelés próbájának. Ön azonban nagyon téved ebben. Ellenben az az igazság, hogy miután megfigyelések útján felállítottam és megalapoztam egy hipotézist, utána különös kívánságot érzek, hogy megvizsgáljam, nem fedezhetek-e fel abban valamely természetes, jóleső összefüggést. De sohasem állítok fel előre végleges ítéletet. Másfél évvel ezelőtt álmodozásokat szőttem az excentricitás felezéséről, de teljesen szakítottam azzal, mert a várt 1800 helyett 2300-at kaptam eredményként. A hiba forrása azonban a megfigyelésekben volt, amelyeket nem

[5]) KEPLER: Zusammenklänge der Welten (Diederichs Verlag Jena 1918. 53.)
[6]) APELT: Die Epochen der Geschichte der Menschheit (Jena 1855.) I. kötet 255.

helyesen az ekliptikára redukáltam; erre csak hosszú idő eltelte után jöttem rá. A hiba kiküszöbölése után nyomban 1800 jött ki eredményként, éspedig az összes kísérleteknél: én t. i. nem kevesebb, mint hat kísérletet hajtottam végre, éspedig úgy, hogy minden esetben bizonyos mértékig hatszori rotációra támaszkodhattam. Ezáltal ténylegesen felismertem e csodálatos harmóniát, mivel megfigyelések és racionális megfontolások szemmelláthatóan megfelelnek egymásnak a fizikában."[7])

Egyes mai burzsoa tudománytörténészek a mágikus gondolkodást és a pythagoreusi számmisztikát hangsúlyozzák KEPLER gondolkodásában. KOYRÉ pl. ilyen meggondolások alapján mondja hogy KEPLER, bár működésének javarésze a 17. századra esik, gondolkodásának jellegét tekintve nem a tudományos 17. századhoz, hanem még a „mágikus és misztikus szellemű" reneszánszhoz tartozik.[8]) Hallgassuk meg azonban ismét magát KEPLERt, hogyan nyilatkozik saját „pythagoreizmusáról": „Magam is játszottam a szimbólumokkal és ki is ötlöttem egy művet, amelynek „Cabbala geometrica" lesz a cime és amely a dolgok eszméiről fog szólni, amennyiben azok a geometriában megtalálhatók. *De úgy játszom, hogy sohasem feledkezem meg arról, hogy csak játékról van szó. Mert szimbólumokkal semmit sem lehet bizonyítani: a természet egyetlen titkát sem lehet geometriai szimbólumok útján feltárni és napfényre hozni.* Csak olyan eredményeket hoznak, amelyek már megelőzőleg ismeretesek; — hacsak biztos érvek alapján nem nyer igazolást, hogy azok nem puszta hasonlatok, hanem a két egymással összehasonlított dolog összekapcsolásának módját és okait fejezik ki."[9]) (Az én kiemelésem. — N. Gy.)

KEPLER rendkívül tudatosan és élesen állította szembe a maga tudományos-racionális álláspontját, világszemléletét és módszerét az alkémisták és paracelzisták eljárásával. Míg amazok szimbólumokkal és hasonlatokkal dobálódznak és ezáltal elhomályosítják a valódi összefüggéseket, addig „én arra törekszem — írja KEPLER — hogy a homályba merített dolgokat is az értelem fényére hozzam."[10])

Az eddig kifejtettek lehetővé teszik, hogy helyesen értelmezzük KEPLER felfogását a világharmóniáról, hogy felismerjük KEPLER „pythagoreus" színezetű fejtegetéseinek racionális magvát és tendenciáját: a természet törvényszerű rendjének megsejtését, azt a gondolatot, hogy a világ matematikai tör-

[7]) KEPLER in seinen Briefen (München—Berlin 1930) I. köt. 187. és köv. — KEPLER levele FABRIZIUShoz 1603. július 4-én.

[8]) V. ö. KOYRÉ előadását (Revue de Synthèse 1950. január—június, 35.)

[9]) KEPLER levele JOACHIM TANCKHOZ 1608 május 12-én. (Közli CASSIRER Das Erkentnissproblem in der Philosophie und Wissenschaft der neueren Zeit. (Berlin 1906) I. 266. és 560.) „Nihil enim probatur symbolis, nihil abstrusi eruitur in naturali philosophia per symbolas geometricas, tantum ante nota accomodantur, nisi certis rationibus evincatur, non tantum esse symbolica, sed esse descriptos connexionis rei utriusque modos et causas."

[10]) „ego res ipsas obscuritate involutas in lucem intellectus proferre nitear" (Harmonices mundi. Ap. ad. libr. quintam.)

vények szerint rendezett kozmosz.[11]) KEPLER a természet rendjének eszméjét konkrét kutatásokkal vitte diadalra abban a korban, amelyben a természeti törvényszerűség gondolata még a legkevésbbé sem volt általános. EINSTEIN éppen ebben látja KEPLER művének nagy történeti jelentőségét: „Olyan korban élt, amelyben a természeti folyamatok általános törvényszerűségének eszméje még egyáltalában nem volt biztosítva. Mily nagy kellett, hogy legyen az ő hite e törvényszerűségben, amely oly erővel ruházta fel őt, hogy évtizedek türelmes, nehéz munkáját áldozta a bolygómozgás empirikus kutatásának és e mozgás matematikai törvényszerűségei vizsgálatának — egyedül, senkitől sem támogatva és kevéssé méltányolva!"[12]

KEPLER hosszantartó kutatómunkával, empiria és racionális megfontolások, induktív vizsgálat és hipotézisek alkotó kombinálásával állította fel a bolygók mozgásának róla elnevezett 3 törvényét. E munkája azért hozhatott ragyogó eredményeket, mert képes volt szakítani számos előítélettel, régiekkel és újabbakkal egyaránt. KOPERNIKUS nagyszerű elméletének felállításakor, amelylyel számos régi előítéletet összezúzott, még szilárdan hitt abban az ARISZTOTELESZ által megalapozott előítéletben, hogy az ideális mozgás a körmozgás és a bolygók egyenletes mozgással körpályákon keringenek. KEPLER volt az első, aki felismerte, hogy a *bolygók nem az ideálisnak tartott körpályán,* hanem ellipszisalakú pályán *keringenek* és hogy a *bolygók mozgása nem egyenletes,* hanem sebességük a pálya különböző pontjain más és más (1. és 2. Kepler-féle törvény). KEPLER 3. törvénye *matematikai képletben* kifejezett összefüggést állapít meg a bolygók naptól mért távolsága és keringési ideje között. E törvények felállításával — amelyeket ma is megközelítően pontosaknak tartunk — a csillagászat elérte fejlődése első szakaszának, a *leíró szakasznak* legmagasabb pontját.[13])

KEPLER volt az *első természettudós,* aki a modern értelemben vett természeti törvény *fogalmát* felismerte.

Mindenekelőtt szakítania kellett a törvényszerűségnek és harmóniának azzal a hagyományos felfogásával, amely csak az egyenletes és szabályos mozgásokban ismerte fel a törvényszerűt. Ez a felfogás roppant káros volt, mert oda vezetett, hogy a törvényszerűségeket nem a természetben, az anyagi világban keresték, hanem apriori konstruálták meg és az apriori kialakított geometriai sémákat akarták a természeti jelenségekre ráerőszakolni. KEPLER a leghatározottabban elutasítja a természetvizsgálatnak ezt a helytelen, idealista

[11]) Alapjában így értelmezte KEPLER harmónia-fogalmát már CASSIRER is a megismerés történetéről írott nagy munkájában. Ugyanakkor nem lehet egyetérteni CASSIRERrel KEPLER ismeretelméletének *általános* értékelésében, mivel ő — mint sok más idealista filozófiatörténész — platonista vonásokkal igyekszik felruházni az újkori természettudósokat és ezzel eltorzítja valóságos filozófiai arculatukat.

[12] EINSTEIN: Mein Weltbild, Amsterdam 1934. 187.

[13]) V. ö. INFELD: KOPERNIKUSZ elmélete és a gravitáció kérdése a mai fizikában. (Természet és társadalom 1954. január.)

módszerét: „Ezért arra törekszem — írja — hogy csak olyan dolgokat tételezzek fel, amelyekre vonatkozólag nem kételkedem abban, hogy reálisak és így fizikaiak... Ha én elvetem a tökéletes excentereket és epiciklusokat, azt azért teszem, mert ezek pusztán geometriai feltételezések, amelyeknek megfelelő test nincsen az égen."[14]) Amíg a törvényszerűség fogalma egyet jelentett az egyenletességgel, (egyenletes mozgás, körpálya stb.) addig nem volt elkerülhető fiktív konstrukciók beletolása a tudományokba. A valóságos törvények felismerése előfeltételezte az apriori kialakított, fiktív „törvények" *elutasítását*" és egyben a törvényszerűség, a természeti rend és harmónia fogalmának *mélyebb*, bizonyos értelemben *dialektikusabb* megfogalmazását.

KEPLER megállapítja, hogy a fizikai valóságban az egyenlőtlenségekben is törvényszerűségek nyilvánulhatnak meg: ilyen *törvényszerű egyenlőtlenség* érvényesül például a bolygók mozgásában.[15]) A törvényszerű egyenlőtlenség (regelmässige Ungleichförmigkeit) koncepciójával KEPLER kiszabadította a törvényfogalmat a hagyományos harmónia-képzetek bilincseiből, a platonizmus és általában a matematikai idealizmus erőszakos sematizmusából, és lényegében *materialista alapokra* fektette.

Az idealista tudománytörténészek és filozófiatörténészek úgyszólván teljesen egyetértenek abban, hogy KEPLER idealista-platonista ismeretelméleti álláspontot képviselt. Ez a beállítás valójában eltorzítja KEPLER ismeretelméleti pozícióját, elhallgatja azt, hogy KEPLER filozófiájában — e filozófia ellentmondásossága ellenére — igen *erőteljes materialista vonások* találhatók; a visszatükrözés elméletének egyes vonásai, a világ megismerhetőségének elve, a természet objektív törvényszerűségének gondolata.

Hogy magyarázzák KEPLER idealista értelmezői azt a tényt, hogy KEPLER határozottan szembefordult a korabeli matematikai (geometriai) idealistákkal, valamint a szubjektívista fikcióelmélet képviselőivel, akik azt vallották, hogy a tudományos elméletek és hipotézisek nem objektív jellegűek, hanem puszta fikciók.[16])

KEPLER állást foglalt amellett, hogy a tudományos elméletek, a tudományos kategóriák — amennyiben a valóságos, fizikai világ valóságos viszonyait tükrözik — objektív érvényűek. Ennek megfelelően KEPLER szerint különbséget lehet — és kell — tenni *igazságértékük* szerint az egyes elméletek, az egyes hipotézisek között.[17]) Az áltudományokat pedig, amelyek *nem az igazi törvényeket* keresik, hanem álösszefüggéseket konstruálnak — pl. az asztrológiát, alkémiát stb. — határozottan elutasítja, leleplezi.

14) KEPLER levele MÄSTLINHEZ 1616 okt. 1-én (Kepler in seinen Briefen II. k. 66.)

15) KEPLER id. levelében (uo.).

16) V. ö. KEPLER in seinen Briefen (II. köt.) 65. KEPLER levele MÄSTLINHEZ 1616. okt. 1-én.

17) „Én azt állítom, hogy minden asztronómus valami igazat vesz fel, de az egyik nagyobb mértékben, mint a másik" (KEPLER idézett hely.)

A természeti törvények — KEPLER felismerése szerint — az *anyagi világ* törvényei.[18]) Ez a felismerés már BRUNO monista filozófiájában *benne rejlett.* KEPLER félreérthetlen világossággal *meg is fogalmazta* ezt a gondolatot; hozzáfűzve azt a rendkívül jelentős materialista elvet, hogy a világ törvényszerűségeit az emberek *teljes mértékben* megismerhetik: „Isten számára — írja KEPLER egyik levelében teológiai terminológiába öltöztetve nagyjelentőségű gondolatát — *az egész anyagi világban anyagi törvények, számok és viszonyok állanak* fenn éspedig igen jelentős és a legjobban elrendezett törvények... E törvények az emberi megismerőképesség határain belül esnek... Mert mi más is rejlik az emberi szellemben, mint számok és mennyiségek? Csak ezeket vagyunk képesek megfelelően megragadni, és e műveletnél — ha a jámborság sérelme nélkül elmondhatjuk — *a mi megismerésünk ugyanolyan jellegű,* mint *az isteni megismerés,* legalább is annyiban, amennyiben e földi világban meg tudunk belőle ragadni valamit. *Csak az ostobák félnek attól, hogy ezáltal az embert istenné magasítjuk;* mert isten határozatai ugyan kifürkészhetetlenek, de nem földi művei.[19]) (Az én kiemeléseim. — N. Gy.)

KEPLER *materialista* törvénykoncepciója szoros kapcsolatban van oksági világszemléletével, amelyet a régi arisztoteleszi-skolasztikus teleológia helyére állít. E kérdésben is el kell hárítani azokat az idealista tudománytörténeti beállításokat, amelyek szerint KEPLER a teleológikus világszemlélet híve lett volna.[20]) Nem arról van szó természetesen, mintha KEPLERnél a teleológiának már semmi nyoma sem volna. Ahogy megvan még nála a teológiai terminológia, úgy megtalálhatók írásaiban bizonyos teleológikus maradványok is. A döntő azonban az, hogy tudományos módszerében teljesen a *kauzális világnézet alapján* és az általa megkövetelt racionális eszközökkel járt el és ennek megfelelően konkrét eredményei is a teleológia és a *hamis célszerűségi világszemlélet befolyása alól is felszabadult*[21]) újító tudományt képviselik. Maga KEPLER is tudatában volt ennek — sokkalta inkább, mint mai idealista interpretálói! „Én megalkottam az égi jelenségek filozófiáját, vagy fizikáját az égi jelenségeknek ARISZTOTELESZ által kidolgozott teológiája, vagy metafizikája helyett.[22])

A tudomány feladata tehát KEPLER szerint abban áll és fejlődésének útja afelé halad, hogy a teológiai vagy metafizikai szemléletet felcserélje a filozófiai, illetve fizikai szemlélettel: az oksági kapcsolatok kutatásával. Éppen ebben, az igazi okok *kutatásában* látta KEPLER *kora nagy tudományos vív-*

[18]) V. ö. KEPLER in seinen Briefen I. kötet, 103.

[19]) KEPLER in seinen Briefen (i. k.) I. 103. — KEPLER levele HERWARThoz 1599. ápr. 10-én.

[20]) MAX CASPAR: J. Keplers wissenschaftliche und phil. Stellung (i. m.) 30.

[21]) Ebben a kérdésben CASSIRER helyesen foglal állást (L. CASSIRER: Das Erkenntnissproblem (i. m.) I. 268.

[22]) KEPLER in seinen Briefen (i.m.) I. 293. KEPLER levele BRENGGERhez 1607 okt. 4-én.

mányát és szembeállította vele a horoszkópok és asztrológiai jövendölések divatját, az álokok és áltörvények hajszolását.[23])

KEPLER több vonatkozásban igen mélyen és helyesen látta meg a természettörvény logikai szerkezetét és ismeretelméleti funkcióját:

a) A tudományos törvények, általában a tudományos elméletek, hipotézisek stb. *objektív érvényűek*, szemben az áltudományok hamis tanaival. Az egyes tudományos álláspontok több-kevesebb pontossággal tükrözik az igazságot.

b) A természeti törvények a valóság *kvantitatív összefüggéseit* tükrözik. Az arisztoteleszi fizika minőségi szemléletmódjával (a rejtett kvalitások hajszolásával) szemben KEPLER az újkori tudomány álláspontját hangsúlyozza: a *mennyiségi* vizsgálat szempontját, *„a több és a kevesebb"* kutatásának szükségességét. Ez pedig csak a matematika segítségével lehetséges, mert *ubi materia ibi geometria,*[24]) *a valóság a matematika törvényei szerint van rendezve.*[25])

c) Tudományos törvények felállításához olyan módszer alkalmazása szükséges, amelyben az empíria (megfigyelés) és a racionális tényező (elméleti gondolkodás) egységbe fonódik.

Az elméleti szempontokat a kutatónak a *valóságból* kell merítenie. KEPLER elítéli az olyan elméleti meggondolásokat, amelyek nem a vizsgált tárgy természetéből adódnak, hanem a szubjektív önkényéből fakadnak. Mikor KEPLERrel szemben azt a kifogást emelték, hogy munkásságában nem tartotta szem előtt azt a szempontot, hogy az igazságnak egyszerűnek kell lennie, így válaszolt: „Ön túlságosan messziremenő filozofálásokat folytat az igazság egyszerűségéről. A természet egyszerű, de egyben sokrétű is. *Nem szabad a természet egyszerűségét a mi képzeletünk szerint mérni,* hanem önmagából kell megítélnünk azt.[26] (Az én kiemelésem. — N. Gy.)

d) A helyes módszerrel felismert természettörvények *biztosak és meg nem változtathatók* (certa et immutabilis lex). Éppen e tudományos törvények felismerése teszi valóban tudománnyá a tudományt és teszi képessé az előrelátásra: „Vitán kívül van, hogy a bolygók mozgása szabályos, azaz rendezett s biztos és változhatatlan törvény szerint van leírva. Ha ugyanis nem így volna, semmiféle csillagászat nem volna lehetséges és nem lehetne előrelátni az égi mozgásokat."[27])

[23]) Kepler in seinen Briefen II. 64. — KEPLER levele FABRIZIUShoz 1616. okt. 1-én.

[24]) KEPLER Opera Omnia. — Frankfurt — Erlangen 1858.

[25]) „Isten a világban mindent a kvantitás normája szerint alapozott meg..." KEPLER levele MÄSTLINhez. — J. Kepler in seinen Briefen I. 44.

[26]) KEPLER in seinen Briefen I. 292.

[27]) „Regulares esse motus planetarum, id est ordinatos adque certam et immutabilem legem descriptos, id est extra controversiam. Hoc enim nisi esset, nulla astronomia esset, nec praedici possent motus coelestes." KEPLER: Epitome. Lib. IV. — Idézi CASSIRER: Erkenntnissproblem I. 565.

e) A természeti törvény az *általános összefüggéseket* tükrözi és olyképpen kell megfogalmazni, hogy az egyes jelenségek az általános törvény alá legyenek foglalhatók, hogy a törvény átfogjon *valamennyi* egyes jelenséget, a látszólag szabálytalan jelenségeket is beleértve: „ez utóbbit (a bolygók második szabálytalanságát, amely minden bolygónál más és más) a legszívósabb erőfeszítéssel oly sokáig vizsgáltam, hogy az eredmény végülis a természeti törvényhez igazodott. Erre vonatkozóan tehát azzal dicsekedhetem, hogy hipotézisek nélküli asztronómiát alkottam,"[28] — írta KEPLER 1605-ben egyik levelében.

JOHANNES KEPLER működése jelentős fordulatot hozott a természettörvény-fogalom fejlődéstörténetében. Elméletileg helyesen ismerte fel a természettörvények objektív jellegét, változtathatatlanságát, matematikai megformulázásuk jelentőségét stb. A természettörvények kutatását a *kauzális világszemlélet* alapjaira helyezte és harcosan szembefordult az áltudományok áltörvényeivel.

KEPLER a természettörvény problémáját a *materializmus* szellemében oldotta meg. KEPLER, GALILEI, DESCARTES, SPINOZA törvényfogalmukkal szilárd alapot teremtettek a tudományok fejlődése számára, — természetesen a *mechanikus materializmus* keretén belül. Minőségi ugrást jelent e világnézeti határain és korlátain belül a *newtoni fizika*, amely már nem egymástól független törvényeket állapít meg, hanem feltárja a világ fizikai törvényszerűségének összefüggő rendszerét.

[28]) J. Kepler in seinen Briefen (i. m) I. 246. — KEPLER levele HEYDONUSHOZ.

ALGEBRAILAG ZÁRT ÉS SZABAD CSOPORTOK

KERTÉSZ ANDOR

1. §. Bevezetés

A csoportelméleti vizsgálatokban alapvetően fontos szerepet tölt be az alcsoport és a homomorf kép fogalma, továbbá a direkt összeadandó fogalma, amely közös speciális esete mindkettőnek. *Szele Tibor, Fuchs László* és a *szerző* egy dolgozat-sorozatban vizsgálták azt a kérdést, hogy ezek a fontos fogalmak Abel-féle csoportok esetében hogyan függnek össze egymással [7], [8], [9], [10], [11].[1] A jelen dolgozat is hasonló irányú, de más természetű vizsgálatokat tartalmaz. Ha csak az Abel-féle csoportok esetére szorítkozunk, az alcsoport és homomorf kép fogalma között egy bizonyos dualitást állapíthatunk meg. Ebben a dualitásban algebrailag zárt Abel-féle csoportoknak szabad Abel-csoportok[2] felelnek meg, míg a direkt összeg és direkt összeadandó fogalma „önduális" fogalmak. Lássunk néhány példát erre a dualitásra [13]:

Bármely Abel-féle csoport alcsoportja valamely algebrailag zárt Abel-féle csoportnak (*Baer*-tétele; lásd [2] és [17]).	Bármely Abel-féle csoport homomorf képe valamely szabad Abel-féle csoportnak.
Egy algebrailag zárt Abel-féle csoport bármely homomorf képe is algebrailag zárt.	Egy szabad Abel-féle csoport bármely alcsoportja is szabad Abel-féle csoport ([12], 128. old. és [18]).
Ha egy A algebrailag zárt csoport alcsoportja valamely G Abel-féle csoportnak, akkor A direkt öszszeadandója G-nek (*Baer* tétele; lásd [1], [2]).	Ha egy F szabad Abel-féle csoport homomorf képe valamely G Abel-féle csoportnak, akkor G-nek van F-fel izomorf direkt összeadandója.
Algebrailag zárt Abel-féle csoportok direkt összege is algebrailag zárt.	Szabad Abel-féle csoportok direkt összege is szabad Abel-féle csoport.

[1] A szegletes zárójelbe tett számok a dolgozat végén megadott irodalomjegyzékre utalnak.

[2] A jelölésekre és elnevezésekre nézve lásd e paragrafus utolsó bekezdését.

Ebben a dolgozatban olyan tételeket fogunk bebizonyítani, amelyek az alcsoport, a homomorf kép és a direkt összeadandó fogalmának újabb kapcsolatait tárják fel s amelyek további illusztrációi a fenti dualitásnak.

A továbbiakban azt mondjuk, hogy egy H csoport

P_1-tulajdonságú, ha $G \sim H$ érvényes minden olyan G csoportra, amely alcsoportként tartalmazza a H csoportot;

P_2-tulajdonságú, ha $G \sim H$-ból mindig következik, hogy a G csoportban van H-val izomorf alcsoport;

P_3-tulajdonságú, ha bármely olyan G csoport, amelynek H endomorf képe, tartalmaz H-val izomorf direkt összeadandót.

Az 1., 2., ill. 3. tételben meghatározzuk mindazokat az Abel-féle csoportokat, amelyek a P_1, P_2, ill. P_3-tulajdonsággal rendelkeznek (lásd a 2. §-t). Az 1. és 2. tétel a fenti dualitás szerint egymásnak megfelelő tételek, míg a 3. tétel „önduális". Az 1. és az 1*. tétel az algebrailag zárt Abel-féle csoportok új jellemzését adják, amelyek bizonyos szempontból *Baer* egy nagy fontosságú eredményének élesítései. *Baer* eme tétele szerint egy Abel-féle csoport akkor és csak akkor algebrailag zárt, ha direkt összeadandója minden olyan Abel-féle csoportnak, amelynek alcsoportja [2]. — A 2. tétel a szabad Abel-féle csoportok osztályát karakterizálja. — Minthogy egy G csoport valamely direkt összeadandója egyidejűleg alcsoportja is, és homomorf képe is G-nek, az első két probléma kombinálásából természetesen merül fel az összes P_3-tulajdonsággal rendelkező Abel-féle csoport meghatározásának kérdése. Ennek megfelelően azt várhatjuk, hogy bármely P_3-tulajdonságú Abel-féle csoport direkt összege egy P_1 és P_2 tulajdonságú Abel-féle csoportnak. Bebizonyítjuk, hogy ez így is van.

A 3. §-ban megmutatjuk, hogy nem-kommutatív csoportok esetén ez a szép dualitás elveszti érvényességét. Végül a 4. §-ban megemlítünk néhány, e kérdéskörrel kapcsolatos s egyelőre nyilt problémát.

Jelölések és elnevezések. Csoporton mindig additive írt Abel-féle csoportot értünk (kivéve a 3. és 4. §-t, amelyekben nehány megjegyzést teszünk a nem-kommutatív csoportok esetére is). Egy F csoportot *szabad Abel-féle csoportnak* nevezünk, ha direkt összege végtelen ciklikus csoportoknak. Egy A csoportot *algebrailag zárt Abel-féle csoportnak* mondunk, ha minden $nx = a$ egyenletnek van A-beli x megoldása bármely $a \in A$ elem és bármely n természetes szám esetén. Ezzel a definícióval ekvivalens — mint könnyű belátni — az $nA = A$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ feltétel teljesülése. (Itt nA az összes na elemek halmazát jelenti, ahol $a \in A$.) Ismeretes, hogy bármely (egynél több elemű) algebrailag zárt Abel-féle csoport $C(p^\infty)$ és R csoportok direkt összege, ahol $C(p^\infty)$ a p^∞ típusú kváziciklikus csoportot, azaz p-hatvány nevezőjű racionális számok additív csoportjának az egész számok alcsoportja szerinti faktorcsoportját jelöli (p prímszám), és R az összes racionális szám additív csoportja ([12], 150. old., és [17]). Egy tetszőleges G csoport összes algebrailag zárt alcsoportjainak egyesítési halmaza szintén algebrailag zárt, és ezt nevezzük a G csoport maximális algebrailag zárt alcsoportjának. Minthogy *R. Baer* egy jólismert tétele szerint ([1], 766. old.) egy csoport bármely algebrailag zárt alcsoportja direkt összeadandója a csoportnak, G-nek a

$$G = A + B$$

direkt felbontását nyerjük, ahol B olyan alcsoportja G-nek, amely (A definíciója szerint) nem tartalmaz 0-tól különböző algebrailag zárt alcsoportot. Egy ilyen B csoportot *redukált csoportnak* mondunk.

2. §. Az algebrailag zárt és szabad Abel-féle csoportok duális jellemzése

Az összes P_1-tulajdonsággal rendelkező Abel-féle csoportot a következő tétel adja meg:

1. tétel. *Egy H Abel-féle csoport akkor és csak akkor P_1-tulajdonságú, ha H algebrailag zárt.*

Bizonyítás.[3] Legyen H P_1-tulajdonságú csoport és G olyan algebrailag zárt Abel-féle csoport, amely H-t alcsoportként tartalmazza. Ekkor a P_1-tulajdonság miatt H homomorf képe G-nek, tehát maga is algebrailag zárt. — Megfordítva, legyen H algebrailag zárt csoport és G egy olyan tetszőleges csoport, amelynek H alcsoportja. Ekkor *Baer* tétele szerint $G = H + K$ és így $G \sim H$.

Az 1. tétel dualizálásából adódik a

2. tétel. *Egy H Abel-féle csoport akkor és csak akkor P_2-tulajdonságú, ha H szabad Abel-féle csoport.*

E tétel bizonyítását is úgy nyerhetjük, hogy dualizáljuk az 1. tétel bizonyítását.

Az összes P_3-tulajdonsággal rendelkező Abel-féle csoportot a következő tétel karakterizálja:

3. tétel. *Egy H Abel-csoport akkor és csak akkor P_3-tulajdonságú, ha direkt összege egy algebrailag zárt Abel-féle csoportnak és egy szabad Abel-féle csoportnak (ezek bármelyike esetleg a zérus-alcsoporttal egyenlő).*

Bizonyítás. Legyen H egy P_3-tulajdonságú csoport; legyen továbbá A olyan algebrailag zárt csoport, amelynek H alcsoportja, F pedig olyan szabad csoport, amelynek H homomorf képe. Ekkor H endomorf képe a $G = A + F$ csoportnak, és így a P_3-tulajdonság miatt.

(1) $$G = A + F = H' + K,$$

[3] Bizonyításainkban ismételten alkalmazni fogjuk azokat a tételeket, amelyeket példaként adtunk meg az 1. §-ban, anélkül, hogy ezekre az utalásokra külön hivatkoznánk.

ahol H' a G csoport H-val izomorf alcsoportja. Jelöljük A_1-gyel ill. A_2-vel a H' ill. a K csoport maximális algebrailag zárt alcsoportját. Ekkor

$$(2) \qquad H \cong H' = A_1 + U_1 \text{ és } K = A_2 + U_2,$$

ahol U_1 és U_2 redukált csoportok. Ebből (1) alapján azt kapjuk, hogy

$$(3) \qquad G = A + F = (A_1 + A_2) + (U_1 + U_2).$$

$A_1 + A_2$ algebrailag zárt csoport, míg $U_1 + U_2$, mint redukált csoportok direkt összege, redukált csoport.[4] Így (3) azt mutatja, hogy $A_1 + A_2$ az (egyértelműen meghatározott) maximális algebrailag zárt alcsoportja G-nek, azaz $A_1 + A_2 = A$. Következésképpen (3)-ból nyerjük, hogy

$$F \cong G/A = G/(A_1 + A_2) \cong U_1 + U_2,$$

ami mutatja, hogy U_1 szabad csoport alcsoportja. Ezért U_1 maga is szabad csoport, s (2) szerint H direkt összege egy algebrailag zárt és egy szabad Abel-féle csoportnak.

Megfordítva legyen

$$(4) \qquad H = A + F,$$

ahol A algebrailag zárt csoport és F szabad csoport. Továbbá legyen G tetszőleges olyan csoport, amely alcsoportként tartalmazza H-t és amelyre

$$(5) \qquad G \sim H.$$

(4) és $H \subseteq G$ alapján $A \subseteq G$ adódik és így

$$(6) \qquad G = A + V.$$

Másrészt (6), (5) és (4)-ből következik, hogy $A + V \sim H = A + F$, azaz

$$(7) \qquad A + V \sim F.$$

Minthogy algebrailag zárt csoport bármely homomorf képe is algebrailag zárt, és minthogy az F szabad csoport egyetlen algebrailag zárt alcsoportja 0, a (7) homomorfizmus az A alcsoportot 0-ra képezi le. Így (7)-ből következik, hogy

$$V \sim F.$$

Ez viszont azt jelenti, hogy V-nek van F-fel izomorf F_1 direkt összeadandója, azaz

$$(8) \qquad V = F_1 + W; \quad F_1 \cong F.$$

(6) és (8) alapján

$$G = A + F_1 + W.$$

[4] Ez utóbbi állítás érvényességét a következőképpen láthatjuk be. Legyen A_0 az $U_1 + U_2$ csoport maximális algebrailag zárt alcsoportja. A_0 elemeinek a megfelelő U_1-beli komponensekre való leképezése A_0-nak az U_1 redukált csoportba való homomorf leképezése. Minthogy továbbá algebrailag zárt csoport homomorf képe is algebrailag zárt és U_1 algebrailag zárt alcsoportja csupán a 0, azt kaptuk, hogy A_0 bármely elemének U_1-beli komponense 0. Hasonló állítás érvényes az U_2-beli komponensekre is, amiből következik, hogy $A_0 = 0$, azaz $U_1 + U_2$ redukált csoport.

Azt kaptuk tehát, hogy G-nek van $A+F=H$-val (lásd (4)) izomorf $A+F_1$ direkt összeadandója, tehát H P_3-tulajdonságú csoport. Ezzel a tétel bizonyítását befejeztük.

E tétel alkalmazásaként az algebrailag zárt csoportok következő jellemzését kapjuk:

1*. tétel. *Egy Abel-féle csoport akkor és csak akkor algebrailag zárt, ha direkt összeadandója minden olyan Abel-féle csoportnak, amelynek endomorf képe.*

Ha ugyanis a H csoport direkt összeadandója minden olyan G csoportnak, amelynek endomorf képe, akkor H a 3.* tétel szerint $H=A+F$ alakú, ahol A algebrailag zárt, F pedig szabad Abel-féle csoport. F azonban szükségképpen 0. Ha ugyanis F zérustól különböző szabad Abel-féle csoport volna, akkor mint végtelen ciklikus csoportok direkt összegét (természetes módon) beágyazhatnánk R-rel izomorf csoportok A' direkt összegébe. Ekkor a $G=A+A'+F'$ csoportnak, ahol $F'\simeq F$, a $H=A+F$ csoport (amely $A+A'$-nek alcsoportja) endomorf képe volna, noha nem direkt összeadandója.

Másrészt *Baer* tételéből következik, hogy algebrailag zárt csoport direkt összeadandója minden olyan csoportnak, amelynek endomorf képe.

3. §. A nem-kommutatív eset

Ebben és a következő paragrafusban csoporton mindig egy tetszőleges multiplikative írt csoportot értünk, amely tehát nem szükségképpen kommutatív. Látni fogjuk, hogy ebben az általános esetben a fenti dualitás elveszti érvényességét.

Tetszőleges csoportok esetében is felmerül a P_1, P_2, ill. P_3-tulajdonságú csoportok meghatározásának kérdése. Az 1. tételnek megfelelő állítás ebben az esetben a következő:

P_1-tulajdonsággal rendelkező csoport csak az egyelemű csoport.

Állításunk bizonyításához *W. R. Scott* és *B. H. Neumann* eredményeit használjuk fel. *Scott* és *Neumann* bevezette a nem-kommutatív algebrailag zárt csoport fogalmát a következőképpen: egy G csoportot *algebrailag zárt csoportnak* nevezünk, ha minden olyan végesszámú

$$f_i(g_1, g_2, \ldots, g_r, x_1, x_2, \ldots, x_s) = 1$$

egyenletből álló egyenletrendszernek (ahol a g elemek G-nek elemei, és az x-ek ismeretlenek) van megoldása G-ben, amelynek van megoldása valamely G-t alcsoportként tartalmazó K csoportban. *Scott* megmutatta, hogy bármely csoport beágyazható algebrailag zárt csoportba, *Neumann* pedig bebizonyította, hogy bármely algebrailag zárt csoport egyszerű ([16], [14]). Mármost legyen H egy tetszőleges P_1-tulajdonságú csoport, H_1 pedig egy olyan csoport, amely H-t alcsoportként tartalmazza s amelynek számossága nagyobb a H számosságánál. Jelöljünk G-vel egy olyan algebrailag zárt csoportot, amelynek H_1 alcsoportja. A H csoport P_1-tulajdonsága miatt $G \sim H$; mivel továbbá G egyszerű csoport és H-nál nagyobb számosságú, ebből következik, hogy $H = 1$, s éppen ezt akartuk bebizonyítani.

A P_2-tulajdonságra vonatkozólag a 2. tétel pontos analogonja érvényes:

Egy H csoport akkor és csak akkor P_2-tulajdonságú, ha H szabad csoport.

Ennek igazolására a következő tényeket használjuk fel:

a) bármely H csoport homomorf képe valamely G szabad csoportnak;

b) szabad csoport bármely alcsoportja is szabad csoport (*Schreier* tétele [15]);

c) bármely szabad csoporttal való Schreier-féle bővítés széteső bővítés.

Legyen mármost H P_2-tulajdonságú csoport, és G olyan szabad csoport, amelynek H homomorf képe. Ekkor a P_2-tulajdonság miatt G-nek van H-val izomorf alcsoportja. Ez azonban b) szerint szabad csoport s így H szintén szabad csoport. — Megfordítva, legyen H szabad csoport. Ekkor minden olyan G csoport, amelyre $G \sim H$, úgy tekinthető, mint egy H-val való Schreier-féle bővítés, s így c) alapján következik, hogy G-nek van H-val izomorf alcsoportja.

Ami a P_3-tulajdonságot illeti, megmutatjuk, hogy

P_3-tulajdonsággal csak az egyelemű csoport rendelkezik.

Valóban legyen H tetszőleges P_3-tulajdonságú csoport, és alkossuk meg a $G = H * H_1$ szabad szorzatot, ahol H_1 egy tetszőleges, H-nál nagyobb számosságú csoport. Ekkor mint ismeretes, H endomorf képe G-nek ([12], 211. old.). Másrészt *Baer* és *Levi* egy tétele ([5] és [12], 223. old.) szerint a G csoport mint szabad szorzat, nem bontható fel két valódi alcsoportjának direkt szorzatára. A P_3-tulajdonságból tehát következik, hogy $H = 1$.

4. §. Zárómegjegyzések és további problémák

Baer e dolgozatban már többször idézett tételének analogiájára felvethető az a kérdés, hogy melyek azok a csoportok, amelyek direkt faktorai minden olyan csoportnak, amelynek alcsoportjai. Mint ismeretes ilyen tulajdonságú csoport csak az egyelemű csoport. A direkt faktornak ugyanis normálosztónak kell lennie s bármely H csoport beágyazható olyan G csoportba, amelyben H nem normálosztó; sőt az is igaz, hogy bármely csoport beágyazható egyszerű csoportba.

Természetesebb tehát úgy felvetni a kérdést, hogy melyek azok a csoportok, amelyek direkt faktorai minden olyan csoportnak, amelyben normálosztók. *R. D. Carmichael* [6] és *R. Baer* [4] eredményeiből adódik, hogy ez a tulajdonság egy fontos csoport-osztályt, a *komplett csoportok* osztályát jellemzi. Egy csoportot akkor nevezünk *komplettnek,* ha centruma egyelemű és bármely automorfizmusa belső automorfizmus. — Ha H normálosztója G-nek, akkor G-t a H csoport Schreier-féle bővítésének tekinthetjük. Ezért *Carmichael* és *Baer* eredménye így fogalmazható:

Egy csoport akkor és csak akkor komplett, ha direkt faktora bármely Schreier-féle bővítésének.

Hasonlóképpen felvethetjük a következő problémát:

1. p r o b l é m a. Melyek azok a csoportok, amelyek bármely Schreier-féle bővítésüknek homomorf képei?

Azt sejtjük, hogy ez a tulajdonság szintén a komplett csoportok osztályát jellemzi. Hogy egy komplett csoport homomorf képe bármely Schreier-féle bővítésének, következik abból a tényből, hogy egy ilyen bővítésnek mindig direkt faktora is. Most egy olyan bizonyítást mutatunk be, amely nem támaszkodik erre a tényre:

Legyen a H komplett csoport normálosztója a G csoportnak. Ha g tetszőleges eleme G-nek, akkor a g elem által létesített belső automorfizmus H-ban is automorfizmust indukál. Mivel H-ban bármely automorfizmus belső, ezt az automorfizmust egy $a \in H$ elemmel való transzformálás hozza létre. Továbbá, minthogy H centruma egyelemű, adott g elemhez ily módon csak egy a elem tartozhat, tehát az így definiált $g \rightarrow a$ leképezés a G csoportnak H-*ra*[5] való *egyértelmű* leképezése. Másrészt nyilvánvaló, hogy ez a leképezés homomorfizmus, s ezzel állításunkat bebizonyítottuk.

Az, hogy egy olyan csoport, amely bármely Schreier-féle bővítésének homomorf képe, szükségképpen komplett csoport-e, pillanatnyilag nyílt és igen nehéz probléma. *Baer* [4] dolgozatában csak azt mutatja meg, hogy egy csoport komplett, ha bármely Schreier-féle bővítésének projekciója. Egy G csoport valamely $g \rightarrow \eta g$ endomorfizmusát akkor nevezzük projekciónak, ha $\eta(\eta g) = \eta g$ teljesül bármely $g \in G$ elemre. Az előző bekezdésben általunk megadott leképezés például G-nek projekciója (a H alcsoportra).

Ezen az úton haladva még további három problémát vetünk fel.

2. p r o b l é m a. Melyek azok a csoportok, amelyek normálosztóként beágyazhatók minden olyan csoportba, amelynek homomorf képei?

3. p r o b l é m a. Meghatározandó az összes olyan H csoport, amely ha normálosztója is, homomorf képe is valamely G csoportnak, akkor G-nek van H-val izomorf direkt faktora.

3*. p r o b l é m a. Melyek azok a csoportok, amelyek ha normálosztói is és homomorf képei is valamely csoportnak, akkor egyszersmind direkt faktorai is?

[5] Ha g eleme H-nak, akkor $g \rightarrow g$, ami mutatja, hogy e leképezésben H minden eleme szerepel képelemként.

Végül megjegyezzük, hogy a jelen dolgozat problémaköre tárgyalható abban az esetben is, ha kizárólag véges csoportokra szorítkozunk. Ebben az esetben további nyílt kérdések adódnak.

Jól ismert tény, hogy bármely véges csoport alcsoportja valamely véges egyszerű csoportnak. Ebből következik, hogy a véges csoportok esetében egy P_1-tulajdonságú csoport szükségképpen egyelemű. Sokkal nehezebbnek látszik az összes P_2 ill. P_3-tulajdonságú véges csoport meghatározása. Ami a P_2-tulajdonságot illeti, a probléma így fogalmazható: vannak-e a véges ciklikus csoportokon kívül P_2-tulajdonságú véges csoportok? Megjegyezzük még, hogy azt sejtjük, hogy véges csoportokra szorítkozva, csak az egyelemű csoport tehet eleget a P_3-tulajdonságnak.

Az 1., 2., 3. és 3*. problémák, véges csoportokat véve alapul, további problémáknak tekinthetők.

DEBRECENI TUDOMÁNYEGYETEM
MATEMATIKAI INTÉZETE

IRODALOM

[1] R. Baer, The subgroup of the elements of finite order of an abelian group. *Ann. of Math.* (Princeton) (2), **37** (1936), 766—781.

[2] R. Baer, Abelian groups that are direct summands of every containing abelian group. *Bull. Amer. Math. Soc.* **46** (1940), 800—806.

[3] R. Baer, Representations of groups as quotient groups. I. *Trans. Amer. Math. Soc.* **58** (1945), 295—347.

[4] R. Baer, Absolute retracts in group theory. *Bull. Amer. Math. Soc.* **52** (1946), 501—506.

[5] R. Baer and F. Levi, Freie Produkte und ihre Untergruppen. *Compositio Math.* **3** (1936), 391—398.

[6] R. D. Carmichael, Introduction to the theory of groups of finite order (Boston, 1937).

[7] L. Fuchs, A. Kertész and T. Szele, On a special kind of duality in group theory. I. *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **4** (1953), 169—178.

[8] L. Fuchs, On a special kind of duality in group theory. II. *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **4** (1953), 299—314.

[9] A. Kertész, On groups every subgroup of which is a direct summand. *Publ. Math. Debrecen,* **2** (1951), 74—75.

[10] A. Kertész and T. Szele, On abelian groups every multiple of which is a direct summand. *Acta Sci. Math. Szeged* **14** (1952), 157—166.

[11] A. Kertész and T. Szele, Abelian groups every finitely generated subgroup of which is an endomorphic image. *Acta Sci. Math. Szeged* **15** (1953), 70—76.

[12] A. G. Kuros, Tyeorija grupp, 2. kiadás (Moszkva, 1953).

[13] S. MacLane, Duality for groups. *Bull. Amer. Math. Soc.* **56** (1950), 485—516.

[14] B. H. Neumann, A note on algebraically closed groups. *Journal London Math. Soc.* **27** (1952), 247—249.

[15] O. Schreier, Die Untergruppen der freien Gruppen. *Abh. Hamburg* **5** (1927), 161—183.

[16] W. R. Scott, Algebraically closed groups. *Proc. Amer. Math. Soc.* **2** (1951), 118—121.

[17] T. Szele, Ein Analogon der Körpertheorie für Abelsche Gruppen. *Journal für die reine u. angew. Math.* **188** (1950), 167—192.

[18] E. Witt, Über freie Ringe und ihre Unterringe. *Math. Z.* **58** (1953), 113—114.

A CSOPORT HOLOMORFJÁNAK ÉS A GYŰRŰ HOLOMORFJAINAK ÚJABB DEFINICIÓJA*

SZENDREI JÁNOS

A csoport- és gyűrűelméleti analóg problémák tárgyalása nagy mértékben járult hozzá a két elmélet közös vonásainak feltárásához, ugyanakkor azonban mindinkább kidomborodott a két struktúra erősen különböző volta. Legújabban RÉDEI LÁSZLÓ professzor bevezette a csoportelméletben olyan fontos karakterisztikus részcsoportnak, valamint az ehhez szorosan kapcsolódó csoport-holomorfnak megfelelő gyűrűelméleti fogalmakat, továbbá megvizsgálta a csoport holomorfjával kapcsolatos alapvető tételek gyűrűelméleti analogonjait [4][1,2]. Ezzel megvetette a gyűrűkre vonatkozó holomorfelmélet alapjait. A két holomorfelmélet között sarkalatos különbség, hogy a csoport holomorfjával ellentétben a gyűrűnek általában egynél több holomorfja van.

Ebben a dolgozatban ki fogjuk mutatni, hogy megadható a csoport holomorfjának és a gyűrű holomorfjainak egy-egy új, fogalmilag egyszerű definíciója, amely definíciók egyszersmind egy újabb szempontból világítják meg ezeknek a fogalmaknak analóg voltát. Az itt adott definíciók kevésbbé explicitek, azonban a már ismert explicit definíciókkal való ekvivalenciájuk — mint látni fogjuk — könnyen kimutatható.

1.

Mint ismeretes, a csoport holomorfja többek között a következőképpen is definiálható (W. H. MILLS [1], RÉDEI L. [4]):

A_0 DEFINÍCIÓ. *A Γ csoport holomorfján értjük a Γ-nak a teljes A^* automorfizmuscsoportjához tartozó $A^* \circ \Gamma$ széteső Schreier-féle bővítését.*[3]

RÉDEI említett dolgozatában a gyűrű holomorfjait így definiálja:

B_0 DEFINÍCIÓ. *A P gyűrű holomorfjain értjük a P-nak a maximális D^* barátságos duplahomotetizmusgyűrűihez tartozó $D^* \circ \mathrm{P}$ széteső Schreier-féle bővítéseit.*

* Ezen dolgozat Eine neue Definition des Holomorphes der Gruppe und der Holomorphe des Ringes címmel az Acta Math. Academiae Scientiarum Hungaricae folyóiratban jelenik meg.

[1] A szögletes zárójelbe tett számok a dolgozat végén található irodalmi jegyzékre utalnak.

[2] Ebben a dolgozatban használt fogalmak részletes tárgyalása és további analógiák RÉDEI [4] dolgozatában találhatók.

[3] Lásd RÉDEI [4].

2.

Legyen A egy egységelemes multiplikatív struktúra (azaz olyan halmaz, amelyben nem szükségképpen asszociatív szorzás van értelmezve). Γ pedig legyen egy tetszésszerinti csoport. Latin és görög kisbetűk jelölik az A, illetve a Γ elemeit, e és ε pedig azok egységelemeit. Tekintsük az (a, α) $(a \in A, \alpha \in \Gamma)$ elempárok halmazát, amelyben az $(a, \alpha), (a', \alpha')$ elemek egyenlőségét az $a = a'$, $\alpha = \alpha'$ egyenlőségekkel definiáljuk. Ebben a halmazban értelmezzük az

$$(1) \qquad (a, \alpha)(b, \beta) = (ab, \alpha^b \beta)$$

szorzást, ahol α^b az $\alpha(\in \Gamma), b(\in A)$ elemeknek egy Γ-beli függvényét jelöli, amely teljesíti az

$$(2) \qquad \alpha^e = \alpha \qquad (\alpha \in \Gamma)$$

„kezdőfeltételt". Az így nyert multiplikatív struktúrát így jelöljük: $A \circ \Gamma$.

Bebizonyítjuk a következő segédtételt:

A. SEGÉDTÉTEL. *Az $A \circ \Gamma$ multiplikatív struktúra akkor és csakis akkor csoport, ha A csoport és*

$$(3) \qquad \alpha^{bc} = (\alpha^b)^c,$$

$$(4) \qquad (\alpha\beta)^c = \alpha^c \beta^c$$

érvényes minden $b, c(\in A)$, $\alpha, \beta(\in \Gamma)$ elemre. Ezek a csoportok a Γ csoportnak az A csoporttal való összes faktormentes (tehát széteső) Schreier-féle bővítései.

A (1) szorzás nyilván akkor és csakis akkor asszociatív, ha A asszociatív és

$$(\alpha^b \beta)^c = \alpha^{bc} \beta^c$$

teljesül. Ez az utóbbi feltétel ekvivalens az (1) és (2) feltételekkel. (4)-ből speciális esetként

$$(5) \qquad \varepsilon^a = \varepsilon$$

is következik minden $a(\in A)$ elemre. (2) és (5) figyelembevételével látható, hogy (e, ε) az $A \circ \Gamma$ struktúrának egységeleme. Továbbá könnyen belátható, hogy az $(a, \alpha)(\in A \circ \Gamma)$ elem baloldali inverzének létezése az $a(\in A)$ elem baloldali inverzének létezésével ekvivalens. Az A. segédtétel utolsó állítása a [3] dolgozatban szereplő 1. tétel 1. korolláriumának következménye.

Jelöljön D egy kétműveletes struktúrát (azaz olyan halmazt, amelyben összeadás és szorzás van értelmezve), amelynek van zéruseleme s ezt $\underline{0}$-sal jelöljük. P legyen egy tetszésszerinti gyűrű. D és P elemeit $\underline{0}, a, b, \ldots$, illetve $0, \alpha, \beta, \ldots$ jelölik. Az $(a, \alpha)(a \in D, \alpha \in \mathrm{P})$ elempárok halmazában az $(a, \alpha), (a', \alpha')$ elemeket akkor és csakis akkor tekintjük egyenlőnek, ha $a = a', \alpha = \alpha'$. Az (a, α) elempároknak ebben a halmazában így definiáljuk az összeadást és a szorzást:

$$(6) \qquad (a, \alpha) + (b, \beta) = (a + b, \alpha + \beta),$$

$$(7) \qquad (a, \alpha)(b, \beta) = (ab, \alpha b + a\beta + \alpha\beta),$$

ahol az $\alpha b, a\beta (a, b \in D; \alpha, \beta \in \mathrm{P})$ P-beli függvények kielégítik a

$$0\alpha = \alpha 0 = 0 \qquad (\alpha \in \mathrm{P}) \tag{8}$$

„kezdőfeltételeket". (D a P gyűrű kétoldali operátortartományaként fogható fel.) Az így kapott struktúrát $D \circ \mathrm{P}$ jelöli.

Érvényes a következő, lényegében RÉDEItől [2], [3] származó

B. SEGÉDTÉTEL. *A $D \circ \mathrm{P}$ kétműveletes struktúra akkor és csakis akkor gyűrű, ha D gyűrű és*

$$(a+b)\gamma = a\gamma + b\gamma, \qquad \alpha(b+c) = \alpha b + \alpha c, \tag{9}$$

$$ab\gamma = a(b\gamma), \qquad \alpha(bc) = (\alpha b)c, \tag{10}$$

$$a(\beta+\gamma) = a\beta + a\gamma, \qquad (\alpha+\beta)c = \alpha c + \beta c, \tag{11}$$

$$a\beta\gamma = a(\beta\gamma), \qquad \alpha\beta c = \alpha(\beta c), \tag{12}$$

$$(a\beta)c = a(\beta c), \tag{13}$$

$$(\alpha b)\gamma = \alpha(b\gamma) \tag{14}$$

teljesül minden $a, b, c (\in D)$ és $\alpha, \beta, \gamma (\in \mathrm{P})$ elemre. Ezek a gyűrűk a P gyűrűnek a D gyűrűvel való összes faktormentes (tehát széteső) Schreier-féle bővítései.

A *B.* segédtétel bizonyítása RÉDEI [2] és [3] dolgozatában szereplő 2. tételnek, illetve 4. tétel 1. korolláriumának bizonyításából egyszerű módosítással nyerhető.

3.

Jelölje most az előbbi paragrafusban szereplő A a Γ csoportnak összes önmagába való leképezéseinek a halmazát. Az $\alpha (\in \Gamma)$ elem képét az $a (\in A)$ leképezésnél így jelöljük: α^a. A Γ csoport önmagába való leképezéseinek A halmaza a szokásos (azaz a (3) alatti) szorzás értelmezése szerint egységelemes félcsoportot alkot és (1) a definíció szerint teljesül. Az (a, α) $(a \in A, \alpha \in \Gamma)$ elempárok halmazában értelmezzük a szorzást (1) szerint, az így kapott multiplikatív struktúrát jelöljük most is $A \circ \Gamma$-val.

Ezekután értelmezzük a Γ csoport holomorfját.

A_1 DEFINÍCIÓ. *A Γ csoport holomorfján értjük az $A \circ \Gamma$ multiplikatív struktúra Γ-t tartalmazó maximális részcsoportját.*

Az $A \circ \Gamma$ multiplikatív struktúra Γ-t tartalmazó bármely részcsoportja az A. segédtétel szerint a Γ-nak egy alkalmas automorfizmuscsoporttal való faktormentes Schreier-féle bővítése. Ezért nyilvánvaló, hogy az $A \circ \Gamma$ multiplikatív struktúrának van Γ-t tartalmazó maximális részcsoportja, mégpedig ez a maximális részcsoport a Γ-nak az A^* teljes automorfizmuscsoportjához tartozó faktormentes (tehát széteső) Schreier-féle bővítése. Ezért érvényes a következő

A. TÉTEL. *Az A_1 definíció ekvivalens az A_0 definícióval.*

A P gyűrű önmagába való duplaleképezésein értjük RÉDEI [4] szerint a P gyűrűnek önmagába való $\alpha \to a\alpha, \alpha \to \alpha a$ $(\alpha \in \mathrm{P})$ (rendezett) leképezéspárjait, ahol $a\alpha$ és αa az a képeit jelölik. Jelölje most D a P gyűrű összes önmagába való duplaleképezéseinek a halmazát, amelyben az összeadást és a szorzást (9), illetve (10) szerint értelmezzük. A P gyűrű triviális önmagába való duplaleképezését $\underline{0}$-sal jelöljük, ez azt a duplaleképezést jelenti, amely a P minden elemét a 0-ra képezi le, (8) tehát a definíció szerint teljesül. Az (a, α) $(a \in D, \alpha \in (\mathrm{P}$ elempárok halmazában értelmezzük az összeadást és a szorzást (6), illetve (7) szerint, az így kapott kétműveletes struktúrát jelölje $D \circ \mathrm{P}$.

A P gyűrű holomorfjai a következőképpen definiálhatók:

B_1 DEFINÍCIÓ. *A* P *gyűrű holomorfjain értjük a* $D \circ \mathrm{P}$ *kétműveletes struktúra* P*-t tartalmazó maximális részgyűrűit.*

A B. segédtétel szerint a $D \circ \mathrm{P}$ struktúra P-t tartalmazó bármely részgyűrűje P-nak egy alkalmas barátságos duplahomotetizmusgyűrűvel való faktormentes Schreier-féle bővítése. RÉDEI [4] szerint minden barátságos duplahomotetizmusgyűrű része legalább egy ugyanilyen maximális D^* gyűrűnek, ezért következik, hogy létezik a $D \circ \mathrm{P}$ struktúrának maximális P-t tartalmazó részgyűrűje. Ezek a P-t tartalmazó maximális részgyűrűk nyilván a P gyűrűnek a maximális D^* barátságos duplahomotetizmusgyűrűihez tartozó faktormentes (tehát szétesö) Schreier-féle bővítések. Érvényes tehát a következő

B. TÉTEL. *A* B_1 *definíció ekvivalens a* B_0 *definícióval.*

Szegedi Tudományegyetem
Bolyai Intézete

IRODALOM

[1] W. H. MILLS, On the non-isomorphism of certain holomorphs, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 74 (1953), 428—443.

[2] L. RÉDEI, Über gewisse Ringkonstruktionen durch schiefes Produkt, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, 2 (1951) 185—188.

[3] L. RÉDEI, Die Verallgemeinerung der Schreierschen Erweiterungstheorie, *Acta Sci. Math.*, 14 (1952) 252—273.

[4] RÉDEI LÁSZLÓ, Csoportok és gyűrűk holomorfelmélete, *A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai és Fizikai Osztályának Közleményei*, 4 (1954), 25—48.

RADON—NIKODYM-TÉTEL OPERÁTORGYŰRŰKRE *

PUKÁNSZKY LAJOS

Bemutatta Szőkefalvi-Nagy Béla az 1952. október 5-én tartott felolvasó ülésen

A dolgozat célja a Hilbert-térnek az egységoperátort tartalmazó, adjungáltképzéssel szemben invariáns és a gyenge topológiában zárt operátorgyűrűin értelmezett pozitív lineáris operációk jellemzése. Ez a jellemzés bizonyos pótlólagos feltevéseknek elegettevő, unitér ekvivalenciával szemben invariáns pozitív lineáris operációk, ú. n. nyomoperációk segítségével történik, amelyek általánosítják a végesdimenziós mátrixok nyomoperációját. Ilyenek létezését — a vizsgálat tárgyát képező gyűrűk osztályának egy algebrai feltétellel való megszorítása mellett, amelyet a jelen dolgozat is kénytelen átvenni — NEUMANN JÁNOS, majd részben az ő módszereire támaszkodva sokkal általánosabban J. DIXMIER mutatta ki egy újabb dolgozatában. Ha el akarjuk kerülni a további algebrai megszorítások alkalmazását, ezek az operációk a vizsgált M gyűrűnek csak egy, az erős topológiában sűrű kétoldali ideálján értelmezhetők. A dolgozat első tétele értelmében minden pozitív ϱ lineáris operációhoz egy rögzített φ nyomoperáció segítségével egy (általában nemkorlátos) pozitív lineáris $H=\int\limits_0^\infty \lambda dE_\lambda$ operátor rendelhető hozzá ($E_\lambda \in M$) úgy, hogy minden $A \in M$ operátorra $\varrho(A)=\varphi(AH)$, ahol nemkorlátos H esetében $\varphi(AH)$-n $\lim\limits_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \eta\to\infty}} \varphi\Big(A \int\limits_\varepsilon^\eta \lambda dE_\lambda\Big)$ értendő.

A tétel elnevezését indokolja az, hogy a klasszikus Radon—Nikodym-tétel belőle egyszerűen levezethető.

Legyen ugyanis μ és ν az X halmaz részhalmazainak egy Borel-féle halmaztestén értelmezett két nem-negatív értékű, teljesen additív halmazfüggvény, legyen $\mu(X)<+\infty, \nu(X)<+\infty$ és legyen ν a μ-re nézve abszolút folytonos. Képezzük a μ mérték segítségével az $L^2_\mu(X)$ teret és tekintsük ebben az

$$Af=\alpha(x)f(x)$$

operátorokat, ahol $\alpha(x)$ az $L^2_\mu(X)$ tartozó korlátos függvény; az így kapott A operátorok összessége kommutatív M operátorgyűrűt alkot, amelyről belátható, hogy a gyenge topológiában zárt. Minthogy ν a μ-re nézve teljesen folytonos, azért a μ mértékre vonatkozólag ekvivalens függvények a ν mér-

* Megjelent az Acta Scientiarum Mathematicarum 15 (1954), 149—156.

tékre vonatkozólag is ekvivalensek s így a

$$\mu(A)=\int_X \alpha(x)\,d\mu(x); \quad \nu(A)=\int_X \alpha(x)\,d\nu(x)$$

integrálképletek által az M gyűrűn egyértelmű módon értelmeztünk két nemnegatív lineáris operációt. A fenti általános tételt alkalmazva, a

$$\nu(A)=\mu(AH)$$

relációhoz jutunk, ahol a H operátorról belátható, hogy maga is egy, általában nem korlátos μ-mérhető $h(x)\geqq 0$ függvénnyel való szorzás. Ennélfogva

$$\int_X \alpha(x)d\nu(x)=\int_X \alpha(x)h(x)\,d\mu(x),$$

ahonnan bármely $Y\in S$ halmazra

$$\nu(Y)=\int_Y h(x)\,d\mu(x),$$

ami éppen a Radon—Nikodym-tétel állítása.

A tétel módszere lényegében a spektrálelméletben és a mértékelméletben klasszikussá vált gondolatmenetek általánosításából áll, azonban a probléma nemkommutatív jellege gyakran lényeges nehézséget okoz. Így pl. a használt módszer egy mellékeredményeképpen kiadódik a változó előjelű mértékek szétbontására vonatkozó Hahn—Jordan tétel egy általánosítása operátorgyűrűkre.

A dolgozat második tétele H. A. DYE egy tételének egyszerű bizonyítását tartalmazza az első tétel segítségével. Ez a tétel az ú. n. véges osztályú gyűrűk esetén egy az előbbinél általánosabb formáját adja meg a Radon—Nikodym tételnek (véges osztályúnak nevezünk egy olyan operátorgyűrűt, amelyben minden izometrikus transzformáció szükségképpen unitér). Legyen adva egy ilyen gyűrűn két pozitív lineáris operáció, σ és ϱ, és nevezzük σ-t abszolút folytonosnak ϱ-re nézve, akkor, ha σ értéke zérus minden olyan projekciójára a vizsgált gyűrűnek, amelyre ϱ zéró. Akkor meghatározható egy sűrű definíciótartománnyal rendelkező zárt lineáris T operátor olyan módon, hogy minden A-ra M-ből

$$\sigma(A)=\varrho(T^*AT),$$

ahol nem korlátos T esetén a jobboldalt mint $\lim\limits_{n\to\infty}\varrho(T_n^*AT_n)$-t értelmezzük, ahol

$T_n=WH_n$, $T=WH$, W parciálisan izometrikus, $H=\int_0^\infty \lambda dE_\lambda$, $H_n=\int_0^n \lambda dE_\lambda$.

Az első tétel szerepel I. E. SEGAL egy 1953-ban megjelent dolgozatában is, mint az általa felépített ú. n. nemkommutatív integrációelmélet egy fontos eredménye. A szerző által SEGALtól függetlenül talált módszer azonban egyszerűbb.

Szegedi Tudományegyetem
Bolyai Intézete

REGULÁRIS CARTAN-FÉLE TEREK OSZKULÁLÓ RIEMANN-TEREI

MOÓR ARTUR

Bemutatta Varga Ottó lev. tag az 1954. január 4-én tartott felolvasó ülésen

(A következő vizsgálatok és tételek teljes bizonyítása az Acta Math. Acad. Sci. Hung.-ban az 5. kötetben található.)

Az általános differenciálgeometriai terek elsősorban abban különböznek egymástól, hogy az alapeleme mindegyiknek más és más jellegű mennyiség, ami azt jelenti, hogy egy koordinátatranszformációnál különbözőképpen transzformálódnak. Így pl. a Finsler-geometria alapeleme: a vonalelem egy kontravariáns vektor jellegű mennyiség, míg a Cartan-geometria alapeleme a hiperfelületelem egy kovariáns vektorsűrűség jellegű mennyiség. A legegyszerűbb alapeleme a Riemann-geometriának van: t. i. a pont.

Ennek megfelelően az általános differenciálgeometriai terek alaptenzorai bonyolultabb szerkezetűek lesznek, mint a Riemann-geometria megfelelő tenzorai. Éppen ezért nagyfontosságú probléma, hogy mennyiben lehet egy általános differenciálgeometriai tér egyes mennyiségeit egy úgynevezett oszkuláló Riemann-tér megfelelő mennyiségeivel kifejezni, és ezáltal a teret egy egyszerűbb szerkezetű tér segítségével jellemezni.

Finsler-tér esetében az oszkuláló Riemann-teret VARGA OTTÓ konstruálta meg egy vonalelemsorozat mentén. A most következőkben egy Cartan-térben fogunk egy adott hiperfelületelemsorozat mentén oszkuláló Riemann-teret megszerkeszteni. Az oszkuláló tér alapmennyiségei általában csak az adott hiperfelületelemsorozat mentén egyeznek meg a Cartan-tér megfelelő alapmennyiségeivel, ez azonban általában nem jelent lényeges korlátozást az egyes térbeli problémák tárgyalásánál, tekintve, hogy az egyes geometriai és fizikai alkalmazásoknál úgyis csak egyes felületelemsorozatok mentén vizsgáljuk a teret jellemző mennyiségeket.

Ezen vizsgálatokban a Cartan-tér egy oly metrikus teret jelent, amelynek — mint már említettük — alapeleme a felületelem, amely az x^i pontban az u_i homogén koordinátákkal van meghatározva, és amelyben egy $F(x, u)$ alapfüggvény által definiálva van a hiperfelületek felszínének mértéke a

$$dO = \frac{F(x, u)}{u_n} dx^1 \dots dx^{n-1}$$

felszínelem által.

Az F alapfüggvényből levezethetők a tér jellemző mennyiségei, mégpedig elsősorban a metrikus alaptenzor, az invariáns differenciált meghatározó mennyiségek, a görbületi és torziótenzorok.

Legyen mármost adva a Cartan-térben az

$$x^i = x^i(v), \qquad u_i = u_i(v) \tag{1}$$

egyenletekkel egy egyparaméteres hiperfelületelemsorozat, és tegyük fel továbbá, hogy a térben minden irányban léteznek hipersíkok. Ez a követelmény tenzori alakban a

$$R_{i0jk} = 0 \tag{2}$$

egyenlettel fejezhető ki. Fektessünk át az (1) hiperfelületelemsorozat minden egyes hiperfelületén egy hipersíkot és tételezzük fel, hogy ezek egy bizonyos $\mathfrak{B}$ ponttartományt az $x^i(v)$ görbe körül egyrétűen lefednek. Ekkor $\mathfrak{B}$-nek minden x^i pontjához egyértelműen hozzárendelhető egy $u_i(x)$ hiperfelületelem, ugyanis azon hipersík hiperfelületeleme, amely éppen az x^i ponton megy át. Ha az $u_i(x)$ mennyiségeket a Cartan-tér $g_{ik}(x, u)$ metrikus tenzorába helyettesítjük, akkor egy oly tenzort kapunk, amely egyedül a helytől függ, s így egy Riemann-tér metrikus tenzorának tekinthető. Ezt a Riemann-teret nevezzük oszkuláló Riemann-térnek.

Az oszkuláló Riemann-tér affinösszefüggési paraméterei az (1) hiperfelületelemsorozat mentén megegyeznek a Cartan-tér affinösszefüggési paramétereivel. Ebből következik az

I. TÉTEL: *Egy $\xi^i(x, u)$ vektor invarians differenciálja az* (1) *hiperfelületelemsorozat mentén megegyezik az* (1) *mentén oszkuláló Riemann-térben meghatározott invariáns differenciáljával.*

A Cartan-tér és az oszkuláló Riemann-tér görbületi tenzorai közötti összefüggés a

$$\overset{(\varrho)}{R}_{ijkl} = \overline{R}_{ijkl} + R^*_{ijkl}$$

relációval adható meg, ahol R^*_{ijkl} a két tér görbületi tenzorainak eltérését határozza meg. Ebből következik a

II. TÉTEL: *Ha az* (1) *hiperfelületelemsorozat mentén eltűnik az R^*_{ijkl} tenzor, akkor* (1) *mentén megegyezik a Cartan-tér és az oszkuláló Riemann-tér görbületi tenzora.*

Végül egy explicit esetet adunk meg, amelyben az R^*_{ijkl} tenzor identikusan eltűnik. Ha az (1) egyenletben az u_i hiperfelületelemeket úgy választjuk, hogy az u_i irányába eső l_i egységvektorra teljesüljön a

$$\frac{\partial l_i}{\partial x^k} - \Gamma^*_{i0k}(x, l(x)) = 0 \tag{3}$$

parciális differenciálegyenlet, akkor $R^*_{ijkl} = 0$ mindig fennáll.

A vizsgált terekben a (3) differenciálegyenletrendszer mindig megoldható lesz, mert a (2) reláció éppen azt jelenti, hogy az integrálhatósági feltételek teljesítve vannak. Ez a következő tétellel fejezhető ki.

III. TÉTEL: *Ha a* (3) *egyenlet a térben identikusan teljesül, akkor megadható az* (1) *sorozat úgy, hogy az R^*_{ijkl} tenzor eltünjék.*

Debreceni Tudományegyetem
Matematikai Intézete

MEGJEGYZÉS A KLASSZIKUS ORTOGONÁLIS POLINOMOK JELLEMZÉSÉHEZ*

A JACOBI-, LAGUERRE- és HERMITE-polinomokat és csak ezeket együttesen jellemző tulajdonságok megadása: ortogonalitás, másodrendű homogén lineáris differenciálegyenlet és Rodrigues-formula létezése. Pontosabban: E polinomok előállíthatók, mint egy $u_n(x)$ függvény n-edik deriváltjának és a $p(x)$ súlyfüggvénynek hányadosai, $u_n(x)$-nek minden 0-nál nagyobb n-re két közös valós (véges vagy végtelen) gyöke van és eleget tesz egy elsőrendű homogén lineáris differenciálegyenletnek, melynek első együtthatója legfeljebb másodfokú, második együtthatója legfeljebb elsőfokú polinom. A kérdéskörbe vágó egyéb eredmények is ismertetésre kerülnek, továbbá az a sejtés, hogy csak ezek az ortogonális polinomok tesznek eleget másodrendű Sturm—Liouville-típusú egyenletnek.

Aczél János
a matematikai tudományok kandidátusa

Debreceni Tudományegyetem
Matematikai Intézete

* A dolgozat megjelent az Acta Math. Hung. 4 (1953), 315—321.

KÖNYVANKÉT

A Magyar Tudományos Akadémia III. osztálya Matematikai Főbizottsága 1954. március 2-án ankétet rendezett, mely a matematikai könyvkiadás eddigi eredményeit és jövő feladatait tárgyalta. Elnökölt: *Alexits György* akadémikus. Referált: *Szőkefalvi-Nagy Béla* lev. tag. Az alábbiakban közöljük az ankét anyagát.

SZŐKEFALVI-NAGY BÉLA lev. tag

A Magyar Tudományos Akadémia 1949-ben bekövetkezett újjászervezése fordulópontot jelent az Akadémia könyvkiadási tevékenységében is. A régi akadémiai könyvkiadás mind a kiadott művek számát, mind a példányszámot tekintve igen kisméretű volt, kevesekhez szólott, jóformán minden tervszerűséget nélkülözött, s majdnem kizárólag a nyelv-, irodalom- és történettudományok körére szorítkozott. A természettudományok és a matematika területén jóformán teljesen a külföldi könyvekre voltunk utalva. Egészen ritkaság számba ment, ha pl. a matematikából egy tudományos munka itthon jelenhetett meg, az Akadémia támogatásával. Igaz, az akkori körülmények között, szűk keretek közé szorítkozott tudományos életünkben, még ez is luxusnak tűnt fel (gondolok itt például *Kerékjártó Bélá*nak a geometria alapjairól szóló két könyvére). Olyan műveknek, mint *Riesz Frigyes* könyve a végtelen sok ismeretlenes lineáris egyenletrendszerekről, vagy *Kerékjártó Béla* könyve a topológiáról, vagy *Pólya György* és *Szegő Gábor* kétkötetes tétel- és feladatgyűjteménye az analízisből, külföldön lehetett csak megjelenniök.

Az a kultúrforradalom, amely felszabadulásunk óta hazánkban megindult, megteremtette a hazai tudományos könyvkiadás reális szükségletét is, s a szocializmust építő államunk hatalmas támogatásban részesíti tudományos életünket minden téren, így a könyvkiadás fontos terén is. Akadémiánk számára is megnyílt a lehetősége az eddiginél összehasonlíthatatlanul nagyobb terjedelmű, tervszerű és szervezett tudományos könyvkiadásra, a tudományok minden területén. Ezzel a lehetőséggel mennél jobban, eredményesebben élni Akadémiánk felelősségteljes kötelessége. Igyekeznie kell a könyvkiadásban arányosan felölelnie a tudományok minden ágát, különös figyelmet fordítva azoknak a tudományágaknak tervszerű fejlesztésére, amelyek területén nálunk viszonylag elmaradottság észlelhető. Gondosan kell őrködnie kiadványainak színvonala felett, mégpedig mind a tartalom, mind a nyelvhelyesség tekintetében. Súlyos hiba lenne, ha nem eléggé indokolt könyvek kiadására költenénk a rendelkezésünkre bocsátott pénzt és papirt. Arra is vigyázni kell, hogy a könyvek méltó nyomdai kiállításban jelenjenek meg.

A kiadás technikai részéért az Akadémia kiadóvállalata felelős, az elvi részéért azonban maga az Akadémia, az Elnökség, az Osztályok, az állandó bizottságok, és végső fokon az Akadémia minden tagja és funkcionáriusa felelős. A könyvkiadás színvonalának biztosítását szolgálja az előzetes lektorálások rendszere. De nagy fontossága van az utólagos kritikának is. Mindinkább szokássá válik, hogy egy-egy könyv megjelenését ismertetések, ankétek követik, amelyek egyrészt felhívják az olvasóközönség figyelmét az új könyvre, másrészt felfedik annak érdemeit és hibáit, s így igen tanulságosak mind a könyv olvasótábora, mind a szerző számára, s egyben az Akadémia könyvkiadó tevékenységének további megjavítását teszik lehetővé.

Mai ankétunk is ilyen feladatokat van hivatva szolgálni az Akadémia könyvkiadásának egyik területén: a matematikai könyvkiadásban. Nem egyik, vagy másik mű megvitatására szorítkozunk most, hanem áttekintjük az Akadémia által újjászervezése óta kiadott egész matematikai könyvirodalmat, valamint a készülőfélben levő, vagy tervezett könyveket. Reméljük, hogy a vita során számos olyan megállapítás és javaslat merül fel, amely hasznosítható lesz a további munkában.

Bizonyára fognak kívánságok elhangzani ilyen meg ilyen tárgyú könyvek iratására, vagy fordítására. Bírálni fogják az eddig kiadott, vagy készülőfélben levő és tervezett könyvek eloszlását az egyes matematikai diszciplinák között. Meg fogják vitatni, indokolt volt-e teljesen egy-egy könyv kiadása, vagy példányszáma. Megfelelő volt-e a szerzők, fordítók, lektorok és szerkesztők munkája, a könyvek kiállítása. Szeretnénk hallani arról is, mely könyvek nyerték meg leginkább olvasóink tetszését, melyeket tudnak legeredményesebben felhasználni tanulmányaikban, kutató- és oktatómunkájukban. Minden konstruktív szándékú megjegyzés, dicséret és bírálat egyaránt, hasznos lehet Akadémiánk könyvkiadó munkájának szempontjából.

* * *

A) Legyen szabad először is a már megjelent műveket felsorolnom megjelenésük sorrendjében, néhány adat és megjegyzés kíséretében.

Az első matematikai könyv, amelyet Akadémiánk újjászervezése óta kiadott, 1951. februárjában jelent meg. Ez a könyv „A statisztikai mechanika analítikus módszerei" címmel *Hincsin* szovjet akadémikus két munkájának fordítását tartalmazza, *Gacsályi Sándor* fordításában és *Fényes Imre* szerkesztésében. (Ismertetése megjelent az Osztályközlemények II/2 számában, *Fényes Imre* és *Rényi Alfréd* tollából.) *Hincsin* kiváló munkái, amelyekben mind a klasszikus mechanikai, mind a kvantumstatisztikák szigorú megalapozását nyujtja a valószínűségszámítás modern módszereivel, kétségtelenül igen értékesek és nálunk is érdeklődésre tarthattak számot, mind a matematikusok, mind a fizikusok részéről. Sajnos, az érdeklődés nem volt egészen olyan mértékű, mint várták:

a megjelent 1000 példányból három év alatt csak 571 fogyott el.* A könyv igen szép nyomdai kiállításban jelent meg, bosszantó hiányosságai is vannak azonban a kiadó és szerkesztő hibájából: a szerzőnek csak a vezetéknevét írták ki, nem adták meg az eredeti munkák bibliográfiai adatait, nincs tartalomjegyzék, stb. (Kiadónk és az Osztály e hibákon okult, azóta ilyen durva hibák nem történtek többé.)

1951. márciusában jelent meg *Péter Rózsa* német nyelven írt könyve: „Rekursive Funktionen". (Lektor *Kalmár László.*) A német nyelven való kiadást az indokolta, hogy egyrészt a könyv speciális tárgyánál fogva itthon csak szűkebb olvasókörre számíthatott, másrészt a kézirat egy külföldi kiadó felkérésére német nyelven már előbb el is készült, azonban ez a kiadó a könyv megjelentetését húzta-halasztotta. Ez volt az első kísérlet arra, hogy világviszonylatban érdeklődésre számító matematikai könyvet itthon valamely világnyelven adjuk ki. A kísérlet teljes mértékben beváltotta a hozzá fűzött reményeket: bár a külföldön való terjesztésben az illetékes szervek még meglehetős tapasztalatlanságot árultak el, a könyv külföldön is kedvező fogadtatásban részesült s mind az 1000 példánya elfogyott. (Itthon az Osztályközlemények II/2 és a szegedi Acta XIV/3 számába *Kalmár László* írt ismertetést a könyvről.) A Szovjetunióban most oroszra fordítják. Ez volt egyébként az első matematikai könyv, amely szerzőjének Kossuth-díjat hozott. Kár, hogy nyomdai kiállítása messze elmaradt a Szegeden előállított Hincsin-féle könyvtől.

Ugyancsak nagy érdeklődést váltott ki a következő, 1951. májusában megjelent könyv: *Gutenmaher*-nek, a matematikai gépek kiváló szovjet szakértőjének magyarra fordított könyve, az „Elektromos modellek". A könyv az analógiás elvű elektromos működésű matematikai gépeknek a Szovjetunióban magas színvonalra fejlesztett elméletét ismerteti s sok konkrét útmutatást ad ilyen gépek építésére. Természeténél fogva szélesebb olvasókörhöz szól a könyv: matematikusokhoz, fizikusokhoz és mérnökökhöz. El is fogyott hamarosan mind az 1000 példánya. (Ismertetést *Fenyő István* írt róla az Osztályközlemények I/2—4 és *Náray Zsolt* a Matematikai Lapok II/3—4 számában.) A fordítást *Rényi Artur* végezte, lektor és szerkesztő *Tarján Rezső* volt. Sajnos sok értelemzavaró sajtóhiba maradt a könyvben, több szakkifejezést nem a magyarban szokásos alakban fordítottak le és általában magyartalan a könyv nyelvezete, ami akadémiai kiadványnál különösen súlyos hiba.

A valószínűségszámítás területéről jelent meg a következő könyv, 1951. augusztusában: *Gnyegyenko* és *Kolmogorov* oroszból fordított könyve: „Független valószínűségi változók összegeinek határeloszlásai". E könyv a valószínűségszámítás alapvető jelentőségű fejezetének legújabb eredményeit mesteri összefoglalásban dolgozza fel. A fordító *Földes István* és a lektor és szerkesztő *Rényi Alfréd* igen jó munkát végeztek, s a szegedi nyomda a tőle megszokott

---

* 1953. december 31-re vonatkozó számadatok.

gondos kiállításban készítette el a könyvet. *Szentmártony Tibor* az Osztályközlemények I/2—4 számában tanulságos ismertetést írt róla. A nyomott 600 példányból eddig 421 fogyott el. Tekintve, hogy a valószínűségszámítás tanulmányozóinak száma nálunk az utóbbi időben örvendetesen gyarapszik, még számos vevőre számíthatunk.

1951. decemberében jelent meg *Petrovszkij* szovjet akadémikus könyvének fordítása: „Előadások a közönséges differenciálegyenletekről" címmel, *Koncz Károly* fordításában és *Varga Ottó* lektorálásában és szerkesztésében. 1500 példány készült, ebből 887 fogyott el. Ismertette *Seres Iván* az Osztályközlemények III/4 számában.

Az 1951. év változatos könyvtermésének utolsó darabjaként jelent meg *Ahijezer* szovjet matematikus könyvének fordítása: „Előadások az appróximáció elméletéről". A fordítást *Varga Tamás*, a lektorálást és szerkesztést *Szőkefalvi-Nagy Béla* végezte, a könyvhöz *Fejér Lipót* írt előszót. A könyv igen magas színvonalú, tömör előadásmodorú könyv: nem könnyű olvasmány. Az 1000 példányból eddig 504 fogyott el. Az Osztályközlemények II/2 számában *Tandori Károly* ismertette.

Az 1952-es év, a „Bolyai-év" első könyve márciusban jelent meg: *Lobacsevszkij* klasszikus művének fordítása: „Geometriai vizsgálatok a párhuzamosok elméletének köréből". A fordítás az után a kiadás után készült, amely a Szovjetunióban 1945-ben jelent meg, *Kagan* professzor bevezetésével, magyarázatával és az ő általa írt függelékkel. A szerkesztő *Kárteszi Ferenc* még egy függeléket írt hozzá, ebben röviden ismerteti a két *Bolyai* életét és matematikai munkásságát, és megismertet azzal a két bírálattal, amelyeket *Lobacsevszkij* művéről külön-külön írtak. *Bizám György* fordítása jól sikerült. A könyv példányszáma, 1500, túlságosan magasnak bizonyult, eddig mindössze 678 fogyott el belőle. *Szász Pál* érdekes ismertetést írt a könyvről az Osztályközlemények II/2 számába.

Áprilisban jelent meg *Riesz Frigyes* és *Szőkefalvi-Nagy Béla* könyve, a „Leçons d'Analyse Fonctionnelle". A könyv francia nyelven való kiadásának hasonló okai voltak, mint a *Péter Rózsa* könyvének esetében. A lektori feladatot, igen gondosan, *Császár Ákos* végezte el, nyelvi szempontból *Grenet Henri* nézte át. A kiállításában is minden kritikát kiálló könyv kedvező fogadtatására talált világszerte. Különösen részletes, és nagyon elismerő az az ismertetés, amelyet *E. R. Lorch*, a newyorki Columbia-egyetem tanára írt az Amerikai Matematikai Társulat Bulletinjében. Itthon az Osztályközlemények III/1, a Matematikai Lapok IV/1 számában, továbbá a szegedi Actában és debreceni Publicationesben jelentek meg ismertetések a könyvről. Az első kiadás 1500 példánya hamarosan elfogyott s így már 1953-ban második kiadásra került sor, ebben mód nyílt az észrevett néhány hiányosság kijavítására és némely kiegészítésre. A második kiadás 2000 példányban készült, ebből eddig 400-nál több példány fogyott el. A szerzők Kossuth-díjat kaptak. A könyvnek jelenleg orosz és német kiadása készül a Szovjetunióban, ill. a Német Demokratikus Köztársaságban.

1952. szeptemberében hagyta el a sajtót *P. Sz. Alekszandrov* könyvének fordítása: „Bevezetés a halmazok és függvények általános elméletébe" címmel, *Bizám György* fordításában és *Alexits György* szerkesztésében. Az 1500 példányból eddig 607 fogyott el. A kitűnő könyv, amelynek magyar fordítása is minden tekintetben sikerültnek mondható, bizonyára még sok olvasót fog évek során át találni. Ismertetése az Osztályközlemények IV/1 számában jelent meg *Fodor Gézától.*

Ugyancsak *Bizám György* fordításában és *Alexits György* szerkesztésében, továbbá *Kárteszi Ferenc* lektorálásával jelent meg 1952. novemberében *Janovszkaja* kis könyve: „Lobacsevszkij élenjáró eszméi — az idealizmus elleni harc eszközei a matematikában". *Soós Gyula* ismertette az Osztályközlemények III/2 számában. 1000 példányából eddig 489 fogyott el.

A Bolyai-év ünnepségeire, a „Bolyai-hétre" elkészült *Bolyai János* „Appendix"-ének új kiadása, *Kárteszi Ferenc* szerkesztésében. Az Appendix latin facsimiléjén és új magyar fordításán kívül, amelyeket a szerkesztő megjegyzésekkel és kiegészítésekkel látott el, tartalmaz ez a könyv, ugyancsak a szerkesztő tollából, egy bevezető részt *Bolyai* felfedezésének előzményeiről és egy részt a geometriának *Bolyai* és *Lobacsevszkij* felfedezésének hatása alatt végbement további fejlődéséről, végül egy függeléket, amely *Hilbert*nek a Bolyai—Lobacsevszkij-féle geometria új megalapozásáról írt cikkének a fordítása. A szerkesztőnek *Alexits György, Hajós György* és *Varga Ottó* lektorok voltak munkájában segítségére. A szép kiállításban megjelent könyv egy-kettőre elfogyott, mind az 1000 példánya. *Szász Pál* írt róla ismertetést az Osztályközlemények III/2 számában.

1952. decemberében jelent meg még *Natanszon* szovjet professzor „Konstruktív függvénytan"-ának magyar fordítása, *Rényi Artur* fordításában, *Szőkefalvi-Nagy Bélá*nak és *Tandori Károly*nak a lektorálásával, *Szőkefalvi-Nagy Béla* szerkesztésében. A terjedelmes munka igen részletes és jól követhető módon tárgyalja e diszciplinának klasszikus és modern fejezeteit. Bár az 1500 példányból eddig mindössze 681 fogyott el, bizonyára sok olvasóra fog még találni ez a könyv és a jövőben jelentősen hozzá fog járulni ahhoz, hogy az e diszciplinában elért nagy magyar sikerek sorozata tovább folytatódjék. A könyvről *Freud Géza* írt ismertetést az Osztályközlemények III/1 számába.

Az 1953. év könyveinek sorát egy régóta esedékes kiadvány nyitja meg: sok technikai akadályt legyőzve, végre megjelentek az 1950-ben tartott I. Magyar Matematikai Kongresszus Közleményei, *Császár Ákos* fáradhatatlan szerkesztői munkájában. Ez a testes kötet méltó kiállításban ad számot nagysikerű kongresszusunk munkájáról. Többnyelvű kiadvány lévén, bizonyára jelentős külföldi érdeklődés fog megnyilvánulni iránta. Az 1000 példánynak eddig kb. a fele fogyott el, de a Mathematical Reviews-ban csak most kezdték referálni s így a nagyobb külföldi kereslet csak ezutánra várható.

Márciusban jelent meg *Mihlin* szovjet matematikus könyvének fordítása: „Integrálegyenletek és alkalmazásaik a mechanika, a matematikai fizika és a technika egyes problémáira“ címmel. Fordította *Rényi Artur,* lektorálta *Aczél János* és *Békéssy András,* szerkesztette az utóbbi. Az integrálegyenleteknek ez a világos előadásmodorban megírt tankönyve, amely a szinguláris integrálegyenleteknek a Szovjetunióban olyan sikerrel vizsgált problémáiról is beszámol, s amelyben egy sereg érdekes alkalmazás van összegyűjtve, nagy olvasóközönségre számíthat. A nyomott 1500 példányból 1019 máris elfogyott. Ismertetése az Osztályközlemények IV/1 számában jött *Fenyő Istvántól.*

Júliusban jelent meg *Turán Pál* „Az analízis egy új módszeréről és annak egyes alkalmazásairól“, c. könyve, novemberben ugyanez németül „Eine neue Methode in der Analysis und deren Anwendungen“ címmel. Mindkét kiadás lektorai *Rényi Alfréd* és *Földes István* voltak, *Surányi János* volt a szerkesztő. A magyar kiadás 300 példányban jelent meg s el is fogyott, a német kiadás 800 példányából 271 fogyott el. Biztosra vehető, hogy a jelentős új eredményeket tartalmazó könyv iránt, amelyért szerzője Kossuth-díjat kapott, nagy külföldi érdeklődés fog megnyilvánulni és a német kiadás példányszáma igen alacsonynak fog bizonyulni. Kérdés, hogy egy ilyen könyvnél, amely új kutatások eredményeit közli és nem tankönyv, vagy monográfia jellegű, indokolt-e a két nyelven való megjelentetés. A nyomdaköltségek magas volta miatt véleményem szerint nem indokolt.

Májusban jelent meg *Lavrentyev* és *Ljuszternyik* szovjet matematikusok könyvének fordítása: „Variációszámítás“ címmel. A két kiváló szovjet szerző jól megírt tankönyve nálunk is nagy érdeklődést keltett: a 800 példányból 766 máris elfogyott. A Kiadónak előre kellett volna látnia, hogy ez a példányszám igen alacsony lesz egy olyan könyvnél, amely bevezető jellegű s amely matematikust és fizikust egyaránt érdekel. A fordító *Varga Tamás,* a lektor *Prékopa András* és a szerkesztő *Aczél János* egyaránt jó munkát végeztek. A könyv ismertetése az Osztályközlemények IV/1-ben jelent meg *Körmendi Istvántól.*

Egy régóta munkában levő könyv jelent meg végre augusztusban: *Kantorovics* és *Krilov* szovjet matematikusok könyvének fordítása: „A felsőbb analízis közelítő módszerei“ címmel. Fordította *Rényi Artur,* lektorálta *Pukánszky Lajos,* szerkesztette *Fenyő István.* Ez a sok tekintetben eredeti, terjedelmes könyv, úgy látszik, nem keltett eddig nálunk nagyobb érdeklődést: 1500 példányából 548 fogyott el. (A könyv ismertetése ebben a füzetben jelenik meg *Frei Tamástól. Szerk.*)

Az AMI első évkönyve is ez évben jelent meg, 1000 példányban. Ez a nagy lelkesedéssel szerkesztett kiadvány bizonyára nagymértékben fog ahhoz hozzájárulni, hogy a matematika alkalmazásainak nálunk régebben annyira elhanyagolt területe népszerűsödjék. A második évkönyv is rövidesen megjelenik.

1954-ben még nem jelent meg könyvünk.

B) Most áttérek a munkában lévő könyvek rövid ismertetésére:

Dlin: „Matematikai statisztika a technikában" (oroszból). Fordította *Rényi Artur,* lektor *Székely Gábor,* szerkesztő *Vincze István.* A könyv egyes részei kissé elavultak, ezeket a részeket az AMI-ban egy munkaközösség átdolgozza; márciusra elkészülnek.

Petrovszkij: „Előadások a parciális differenciálegyenletekről" (oroszból). Fordította *Bizám György,* lektorok *Egervárý Jenő* és *Koncz Károly,* szerkesztő *Pál Sándor.* Már csak a nyomdai munka van hátra.

Rédei László: „Algebra I." A háromkötetesre tervezett mű az absztrakt algebra egész területét fel kívánja dolgozni. Ha kész lesz, bizonyára az algebrai tankönyvirodalom egyik sztandard munkájának fogják tekinteni s idegen nyelvre való fordítása is kívánatos lesz. Az I. kötet már nyomdában van. Lektorai *Kalmár László, Szele Tibor* és *Steinfeld Ottó* voltak, szerkesztő *Szele Tibor.*

Kuros: „Csoportelmélet" (oroszból). Miután az I. kiadás alapján a fordítást *Gacsályi Sándor* elvégezte, megjelent 1953-ban az átdolgozott és kiegészített II. kiadás. Ezért a fordítást is át kellett dolgozni. Jelenleg már a lektoroknál van a kézirat (Fuchs László és Kertész Andor). A könyv szerkesztője *Szele Tibor.* A könyvhöz csatolva lesz *B. H. Neumann* német matematikusnak a németnyelvű fordításhoz függelékként írt cikkének fordítása.

Pontrjagin: „Kombinatorikus topológia" (oroszból). Fordította *Varga Tamás,* lektorálta *Bognár Mátyás.* Jelenleg a kézirat a szerkesztő *Hajós György*nél van munkában.

Tyihonov—Szamarszkij: „A matematikai fizika egyenletei" (oroszból). Ennek a könyvnek is elkészült már a fordítása (*Bizám György*től), mikor 1953-ban javított és bővített II. kiadása jelent meg az eredetinek. A fordítás kiegészítése azóta megtörtént és most *Horváth János* lektorálja. A szerkesztő *Földes István.* Tekintettel a várható érdeklődésre, remélhetőleg elég sok példányt fog a Kiadó nyomtatni belőle.

Pentkovszkij: „Nomográfia" (oroszból) *Weidinger László* fordította, *Aczél János* lektorálta, jelenleg *Hajós György*nél van szerkesztés alatt.

Gelfand: „Lineáris algebra" (oroszból). A lineáris algebrának ez a tankönyve érdekes azért is, mert a lineáris egyenletrendszerek közelítő megoldásának, valamint a perturbációszámításásnak is szentel egy-egy részt. *Gacsályi Sándor* fordította, *Szőkefalvi-Nagy Béla* lektorálta és szerkeszti, jelenleg a kézirat útban van a nyomda felé.

Gelfond: „Differenciaszámítás" (oroszból). Fordította *Lovas György,* lektorálta *Aczél János* és *Gyires Béla.* Jelenleg a szerkesztő *Kővári Tamás* dolgozik rajta, áprilisra a kézirat nyomdába kerülhet.

*Kerékjártó Bélá*nak a geometria alapjairól szóló kétkötetes magyar nyelvű munkájának első kötete, amely az elemi geometriát tartalmazza, francia nyelven fog megjelenni. A fordítást *Csernyák Tira* végezte, rosszul, *Grenet Henrik* azután mint lektor újrafordította. Jelenleg a kézirat újragépelés utáni átolvasásra *Grenet*nél, ill. *Császár Ákos* lektor-szerkesztőnél van. Reméljük, hogy már ebben az évben elkészülnek munkájukkal.

C) Végül tekintsük át azokat a könyveket, amelyek írása, ill. fordítása tervbe van véve. Ezek a következők:

Delone: „Matematikai gépek" (oroszból). Fordítását *Bodor Aladárné* rövidesen megkezdi.

Rédei László: „Euklides, Bolyai—Lobacsevszkij és Riemann geometriája". A szerzőnek a geometria alapjairól szóló egyetemi előadásai alapján készül, a kézirat ez év végére meglesz.

Csebotarjov: „Bevezetés az algebrák elméletébe" (oroszból). Fordítására az engedélyt a Szovjetunióból még nem adták meg.

Alexits György: „Ortogonális sorokkal való függvényapproximációk". Magyar kutatók, elsősorban a szerző idevonatkozó eredményeit kívánja könyvalakban feldolgozni. Magyar nyelvű és idegennyelvű kiadásban is megjelennék. A kézirat az év végére elkészül.

Egerváry Jenő: „Bevezetés a matrixok elméletébe és alkalmazásaiba". Két részből fog állani: elmélet—alkalmazások. Az első rész kéziratát a szerző ez év végéig elkészíti.

Rényi Alfréd: „Sztochasztikus folyamatok elmélete és alkalmazásai". Az elmélet alapjait, a szerzőnek idevágó saját eredményeit, továbbá ezek fizikai és technikai alkalmazásait fogja tárgyalni. A jövő év elejére elkészül.

Rédei László: „Algebra II", 1956. közepére igérve.

Turán Pál: „Analitikus számelmélet", 1956. végére.

Szele Tibor: „Végtelen Abel-féle csoportortok", 1956. végére.

Surányi János: „A matematikai logika eldöntésproblémája" (angol nyelven), 1956. elejére.

Varga Ottó: „Differenciálgeometria" (elkészültének időpontja bizonytalan).

Szőkefalvi-Nagy Gyula: „Geometriai szerkesztések elmélete".

Haar Alfréd: „Összegyűjtött munkák".

(Utóbbi két könyv kiadásának időpontja attól függ, hogy a referens a szerkesztői munkára hogyan fog ráérni.)

A tervezett munkák címei természetesen még nincsenek véglegesen megállapítva.

Összefoglalva: Eddig megjelent 16 könyv (Riesz—Sz.-Nagy két kiadását, Turán két kiadását egyszer-egyszer számítva, és az AMI évkönyvét nem számítva). Közeli jövőben megjelenik 10 könyv. Távolabbi jövőben (de két-három éven belül) elkészül előrelátólag még egy tucatnyi.

Azt hiszem joggal mondhatjuk, hogy ilyen méretű és iramú matematikai könyvkiadásról régebben még álmodni sem mertünk volna. Pedig könyvtárunknak az Akadémia által kiadott könyveken kívül még néhány más olyan értékes darabja is van, amelyet más hazai kiadók adtak ki a matematika területéről (Tankönyvkiadó, Művelt Nép Kiadó), és tudomásunk van több könyvről, amely e kiadóknál készült, vagy tervbe van véve.

Az eddig kiadott könyveink többsége fordítás. Ezt indokolja, hogy a Szovjetunióban megjelenő kiváló könyvek lefordítása által a leghamarább és legmagasabb nívón sikerült olyan területeken fennálló könyvhiányunkon enyhíteni, amelyeken szakember, vagy idő hiányában itthon írt könyvre egyhamar nem számíthattunk. De örvendetesen szaporodnak most már a hazai szerzők könyvei is. Reméljük, hogy azon a két könyvön kívül, amelynek oroszra való fordításáról már tudunk, számos olyan itthon írt könyvünk lesz, amelyet szovjet kollegáink oroszra való lefordításra fognak ajánlani, s ilyen módon viszonozhatjuk a tőlük kapott segítséget. Természetesen semmi elvi akadálya nincs kiváló másnyelvű munkák magyar fordítása kiadásának. A népi demokratikus országok esetében ennek eddig főleg nyelvi akadályai voltak, mert nincs pl. aki csehből, vagy lengyelből megfelelően fordítana. A nyugati országok esetében pedig a kiadói jogok megszerzése ütközik nehézségekbe.

A kezdeten, a nagy nekilendülés időszakán, amikor rövid időn belül kívántunk enyhíteni a könyvkiadás terén fennálló lemaradottságunkon, már túl jutottunk. Ez alatt az idő alatt tapasztalatlanságunkból származó jónéhány hibát ejtettünk, mind a tervezésben, mind a végrehajtásban. Kell, hogy ezekből okuljunk. Nem szabad, hogy a jövőben olyan könyv jelenjen meg az Akadémia égisze alatt, amely akár tartalmában, akár nyelvezetében, akár külső formában kifogásolható lenne. Jobban kell az egyes matematikai tárgyak közti arányos megoszlásra ügyelnünk, nem szabad elhanyagolnunk a matematika történelmére vonatkozó könyvek kiadását, sorra kell vennünk legkiválóbb matematikusaink összegyűjtött, vagy válogatott műveinek kiadását, stb.

Olyan célkitűzések ezek, amelyek minden magyar matematikust legközelebbről érdekelnek. Reméljük, hogy ez a mai vitaülés hozzá fog járulni ahhoz, hogy célkitüzéseinkhez közelebb jussunk.

* * *

A bevezető referátum után számos hozzászólás hangzott el. *Riesz Frigyes* felvilágosítást kért arra nézve, hogyan történik a magyar szerzők munkáinak idegen nyelvre való lefordítására vonatkozó engedélyek megadása s felvetette, hogy helyes volna, ha a fordítást a szerző ellenőrizhetné. *Seres Iván* javasolta speciális függvényekről szóló munkák kiadását, *Medgyessi Pál* pedig számos valószínűségszámítási tárgyú munka lefordítására tett javaslatot. *Vincze István* a matematikai könyvkiadás lehetséges szempontjai közül kiemelte haladó hagyományaink ápolását, a matematikának az alkalmazásokhoz közelebb hozását és a matematikai műveltség színvonalának emelését. *Rényi Alfréd* rámutatott arra, hogy a matematika számos területéről még mindig nem jelent meg magyar nyelvű munka; ilyen tárgyú könyveket s esetleg cikkeket kisebb példányszámban sokszorosítva lehetne terjeszteni. Felhívja a figyelmet *Jordan Károly* kiadatlan valószínűségszámítási tárgyú kéziratára s ennek kiadását javasolja. *Bardócz Árpád* helyesnek tartaná, ha a matematikai könyveket nemcsak matematikai, hanem fizikai és műszaki folyóiratokban is ismertetnék, javasolja továbbá különféle függvények ábráit tartalmazó munkák kiadását. *Császár Ákos* rámutatott azokra a nehézségekre, amelyeket egyes könyvek kiadásakor nem-matematikus fordító által készített fordítás számos szakmai hibája okozott, javasolja továbbá, hogy matematikai munkákat csak megfelelően felszerelt nyomdában szedjenek. Nehezen hozzáférhető idegennyelvű munkák lefordítása helyett esetleg fotokópia útján való sokszorosítást is elegendőnek tart. *Rényi Alfréd* kifogásolta, hogy kiadványaink propagandája sem belföldön, sem külföldön nem kielégítő. A magyarnyelvű kiadványokat a környező népi demokráciákban is kellene terjeszteni. *Szabó Lajosné* megjegyezte, hogy a kiadványok propagálását a Kultúra könyvterjesztő vállalat végzi, azonban igen hiányosan és rosszul. *Tóth Ferenc* kívánatosnak tartotta a matematikai munkák kiállításának megjavítása céljából matematikai szedési szabványok mielőbbi életbeléptetését. *Bizám György* javasolta, hogy a fordítások utolsó korrektúráját valaki olyan is átolvassa, aki a kéziratot és a korrekturáját addig még nem látta; az esetleges sajtóhibákat így könnyebb észrevenni és kijavítani. *Szabó Lajosné* megjegyezte, hogy ez csak a korrektúrára szánt idő jelentékeny megnövelésével volna lehetséges. *Rényi Alfréd*, magyarnyelvű kiadványaink külföldi terjesztésére visszatérve, a prágai és bukaresti magyar könyvesboltok felhasználását javasolta, ezek ugyanis nem esnek a kereskedelmi szerződések korlátozásai alá.

A felszólalásokra *Alexits György* válaszolt. Hangsúlyozta, hogy a rendelkezésre álló papírmennyiség nem sok s hogy kis példányszámban kiadott, nehéz szedési munkát kívánó könyvek előállítási költsége igen magas, azért nagyon alaposan meg kell gondolnunk, milyen könyveket adjunk ki a jövőben. Eddig főként fordításokat adtunk ki, ezután elsősorban hazai szerzők munkáinak kiadása legyen a cél s csak kisebb számban szerepeljenek fordítások. Kérte, hogy az elhangzott könyvkiadási javaslatokat nyújtsák be irásban. Riesz Frigyesnek válaszolva megjegyezte, hogy minden egyes fordításnak a szerző által való átnézése hosszúra nyújtaná a mű kiadását, viszont határozatnak javasolja, hozza az Akadémia az érdekelt külföldi kiadók tudomására, hogy a szerzők szükség esetén készséggel nyújtanak segítséget munkáik lefordításakor. Megállapította, hogy a megjelent könyvek ismertetése az egyes folyóiratok szerkesztőbizottságainak hatáskörébe tartozik. A fordításoknak az utolsó korrektúra alkalmával való átnézését helyesnek tartja, erről megfelelő ütemezéssel gondoskodni lehetne. A matematikai szedési szabványok elkészítéséhez a matematikai főbizottság nevében készséggel ajánlotta fel segítségét.

CSILLAGÁSZATI ANKÉT

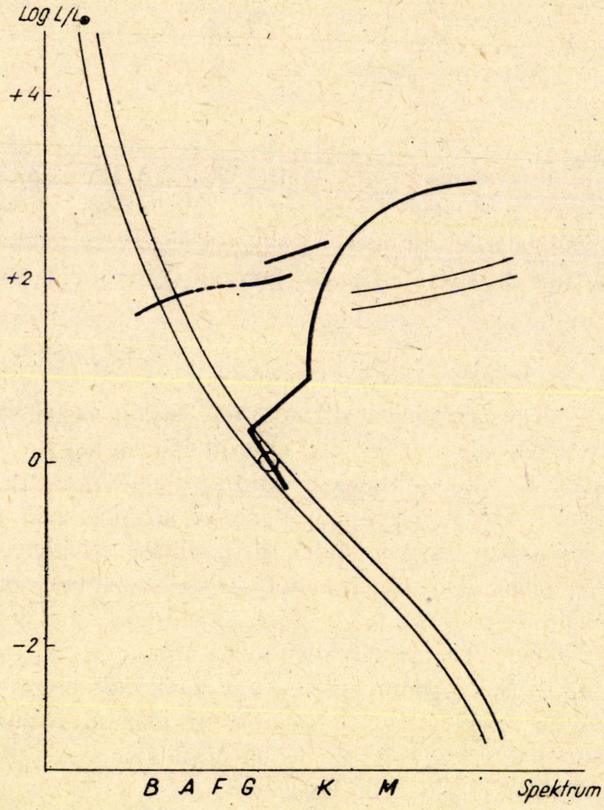
A Magyar Tudományos Akadémia III. Osztálya 1954. március hó 29-én csillagászati ankétet rendezett „A csillagok keletkezése, különös tekintettel Ambarcumjan vizsgálataira“ címmel. Az ankéten Egerváry Jenő r. tag elnökölt, a bevezető előadást dr. Detre László tartotta. Az alábbiakban közöljük az ankét anyagát.

DETRE LÁSZLÓ, a matematikai tudományok doktora:

A kozmogónia egészen a jelen század 30-as éveiig tisztán spekulatív tudomány volt, amely önkényes modellekkel dolgozott és nem nagyon törődött azzal, hogy ezek a modellek meg vannak-e valósítva a természetben. Így a mult században és a jelen század első negyedében a kozmogóniai kutatások túlnyomó részt a különböző forgási modellek stabilitásával, illetve instabilitásával foglalkoztak. Matematikai szempontból szép eredmények születtek, de közben igen kérdéses volt például, hogy előfordulnak-e egyáltalán a természetben olyan gyorsforgású égitestek, amelyekben instabilitás lép fel. Mikor pedig a 30-as években spektroszkópiai megfigyelésekből kiderült, hogy vannak ilyenek, akkor a csillagok szerkezetéről való ismereteink már arra mutattak, hogy a csillagokra az eddigi kozmogóniai modellek egyáltalán nem alkalmazhatók.

Ugyanígy nem sikerült ezeknek az elméleteknek alkalmazása a csillagrendszerek fejlődésére. *Jeans*nek ilyen irányú vizsgálatai szerint a csillagrendszerek fejlődésének útja a gömbalakú csillagrendszerekkel kezdődik és a nyitott spirálisokkal végződik. Az utóbbi évek megfigyelési eredményei azonban megmutatták, hogy a gömbalakú csillagrendszerekből nem fejlődhetnek ki spirális csillagrendszerek.

Amikor a csillagok állapothatározóiról már megfelelő számú adat állt rendelkezésre, igen sok kozmogóniai spekuláció alapját képezte az ú. n. Russell-diagramm. Ez a csillagok eloszlását adja az aránylag legkönnyebben meghatározható két állapothatározó, a valódi fényesség és a spektráltípus szerint (lásd ábrát). Ebben a diagrammban a Nap körüli csillagok túlnyomó része egy vonal, az ú. n. főág mentén helyezkedik el, mely a nagy hőmérsékletű és nagy fényességű szuperóriás csillagoknál kezdődik és a csillagok növekvő gyakoriságával halad a kis hőmérsékletű és kis fényességű vörös törpékig. A két véglet között a fényesség aránya 10^{10}. Ennek az ágnak felső részébe nyúlik be az óriás csillagok ága, amely mentén a Napnál kb. százszor fényesebb vörös és sárga csillagok helyezkednek el. Külön csoportot képeznek a diagrammban az ú. n. fehér törpék. Ezek nagy hőmérsékletű és kis fényességű csillagok (az ábrán nincsenek feltüntetve).



A csillagok Russell-diagrammja. Vastag fekete vonal jelzi a II. populációjú, két vékony vonal közti rész pedig az I. populációjú csillagok eloszlását. Az ordináta log $L/L_{\odot}$, ahol L a csillag által másodpercenként kisugárzott energia-mennyiség, $L_{\odot}$ ugyanez a Napra. Az abszcissza a spektráltípus; ez egyúttal kifejezi a csillag felületi hőmérsékletét, amely az *O* csillagoknál kb. 20000°, az *M* típusnál 3000°. A II. populációjú csillagoknál szaggatott vonal jelzi a rövidperiódusú Delta Cephei csillagok helyét. A Nap helyét karika jelzi.

A Russell-diagramm ágait sokáig tekintették a csillagok fejlődési útjának. Ez az interpretáció addig, amíg a csillagsugárzás forrásának a gravitációs energiát tekintették, sikeresnek látszott. Amikor kiderült, hogy a csillagok tömege a főág mentén lefelé csökken, azt tételezték fel, hogy az anyag a csillagok belsejében teljesen át tud alakulni sugárzássá és így a csillag fejlődése folyamán, bár igen hosszú idő alatt, változtatja tömegét. Ma már biztosra vehetjük, hogy magreakciók (elsősorban hidrogénnek héliummá alakulása) szolgáltatják a csillagok sugárzási energiáját. Ez nem jár lényeges tömegveszteséggel. Tehát a csillagok túlnyomó részének tömege fejlődése közben csak jelentéktelenül csökken. Ez alól kivételt csak azok a csillagok képeznek, melyeknek korpuszkuláris sugárzása jelentékeny. A korpuszkuláris sugárzás kozmogóniai jelentőségére *Feszenkov* hívta fel a figyelmet. [1].

Ten *Bruggencate* kísérelte meg először [2], hogy különböző csillaghalmazok Russell-diagrammjának összehasonlításából empirikusan határozza meg a csillagfejlődés útjait. Úgy gondolta, hogy mivel a csillaghalmazok idővel a Tejútrendszer árapály-erői következtében feloszlanak, a halmazok korát, legalább is statisztikailag, feloldottságuk mértéke árulja el. Eszerint a nyílthalmazok sokkal korosabbak lennének, mint a gömbhalmazok. Ma már tudjuk, hogy ennek éppen az ellenkezője igaz.

A Russell-diagrammok helyes interpretációjára akkor kaptunk először útmutatást, amikor *Baade* [3] különböző csillagrendszerek diagrammjait hasonlította össze. Kiderült, hogy lényegében csak két egészen különböző Russell-diagramm fordul elő. A gömbalakú csillagrendszerekben, a gömbhalmazokban, a spirális csillagrendszerek magjában, továbbá az ezeket szintén gömbalakban körülvevő csillagok esetében a Russel-diagramm legfényesebb csillagai a vörös óriások, míg a fehér szuperóriások hiányoznak. A spirális karokban, a nyílthalmazokban, ezzel szemben a legfényesebb csillagok a fehér szuperóriások. Utóbbi csillagfajtákat *Baade* I. populációjú, az előbbieket pedig II. populációjú rendszereknek nevezte el (lásd ábrát).

A két populációt megfigyelésileg legkönnyebben a változócsillagok segítségével lehet megkülönböztetni. Rövidperiódusú δ Cephei csillagok, RV Tauri-változók a II. populációhoz, a klasszikus δ Cephei csillagok az I. populációhoz tartoznak.

Kozmogóniai szempontból a leglényegesebb különbség a kétfajta csillagtípus között az, hogy az I. populáció mindig intersztelláris gáz- és porfelhőkkel együtt jelentkezik, míg a II. populációjú rendszereket ilyen anyagok teljes hiánya jellemzi. Minthogy a Világegyetem jelenlegi állapotában csillagok képződése csak ilyen anyagok kondenzációjaként képzelhető el, ebből az is következik, hogy a II. populációjú csillagrendszerekben új csillagok képződése ma már lehetetlen.

De képződnek-e még csillagok az I. populációjú rendszerekben, ahol ehhez az alapfeltétel, az intersztelláris anyagok jelenléte megvan? Már az, hogy az I. populációt igen nagy hőmérsékletű *O* és *B* színképű szuperóriások jellemzik, ezt igen valószínűvé teszi. Mert ilyen csillagok, legalább is jelenlegi fényességükben, nem sugározhatnak nagyon régóta, hiszen így már kb. 10 millió év alatt elhasználnák összes hidrogénjüket. Ez az idő igen kicsi a Föld korához (2—3 milliárd év) képest.

Azonban elképzelhető, hogy ezek a csillagok régebben is megvoltak, kisebb fényességgel vagy sötéten, és csupán jelenlegi állapotuk nem régi. *Ambarcumjan* kutatásai [4] azonban bebizonyították ennek ellenkezőjét. Ezeknek a vizsgálatoknak lényege, hogy az *O* és *B* csillagok csoportokban, ú. n.

társulásokban találhatók. *Ambarcumjan* kimutatta, hogy e társulások dinamikailag erősen instabilisak és így gyorsan feloszlanak. Az tehát, hogy ennek ellenére még mindig sok társulás létezik, e társulások és egyúttal az őket alkotó csillagok fiatal korát bizonyítja.

Ambarcumjan és munkatársai kimutatták, hogy a társulások legtöbbször *O*- és *B*-típusú csillagokat tartalmazó csillaghalmazok körül találhatók. Mivel a legtöbb társulás gömbalakú, holott a Tejútrendszer differenciális rotációja a társulásokat a forgás irányába szétnyújtani igyekszik, *Ambarcumjan* feltételezte, hogy a társulásoknak van valami eredeti expanziós sebessége és a társulások alakját hosszú időn át ez határozza meg, már 1 km/sec nagyságrendű expanziós sebesség esetén is.

A legújabb kutatások *Ambarcumjan*nak ezt a feltevését fényesen igazolták. *Blaauw* holland csillagász a hozzánk legközelebb lévő társulás, a ζ Persei körüli társulás csillagainak mozgását vizsgálta [5], mert esetleges kitágulást közelsége miatt ennél a társulásnál lehet a legkönnyebben kimutatni. A társulás tágulása esetén csillagainak sajátmozgása az égen egy ponttól elirányított és annál nagyobb, minél távolabb van a csillag ettől a ponttól. Ez a jelenség a *Blaauw* által meghatározott sajátmozgásokon jól látszik éspedig a tágulás mértéke az égre vetítve

$0''.00236 \pm .00025$ (valószínű hiba) évenként 1°-ra a divergencia ponttól;

a térben ennek megfelel 11 km/sec tágulási sebesség. Ha a tágulás mértéke az idővel nem változott, ebből az következik, hogy a társulás másfél millió évvel ezelőtt kezdett expandálni. Ez az idő egyben a társulás csillagainak valószínű kora, ha azt attól az időtől számítjuk, amikor a csillagok mozgásukat mint független egységek megkezdték.

Hasonló expandáló társulást talált *Blaauw* és *Morgan* a Lacerta csillagképben. A kiterjedési koefficiens itt $0''.0086$/év, illetve 8 km/sec. A társulás kora ebből 4.2 millió év [6].

A Cepheus II asszociációra *Markarjan* $0''.008$/év, illetve 8 km/sec expanziót kapott, amiből a társulás csillagainak korára 4.5 millió év adódik [4]. Hasonló eredményt kapott ettől függetlenül *Herczeg Tibor.*

Ez a három társulás még olyan fiatal, hogy kiterjedésüket a keletkezéskor kapott expanziós sebesség határozza meg. De ilyen expandáló csillagcsoportosulásra, ha idősebb lesz 10 millió évnél, már számottevően kezd hatni a Tejútrendszer perturbációja. A differenciális rotáció következtében alakja a Tejút síkjában mind elnyúltabb ellipszis lesz és ennek legnagyobb átmérője fokozatosan közeledik a Tejútrendszer forgási irányához. Az ellipszis méretei függnek a kezdeti expanziós sebességtől, de a nagytengely iránya ettől független és csupán a csillagok korától függ.

Ilyen idősebb, elnyúlt társulásokat is találtak. A *B*-típusú csillagoknak Scorpio—Centaurus csoportja *Blaauw* részletes vizsgálatai szerint [7] a Tejút síkjában 290×100 parsec kiterjedésű, a nagytengely 45°-ot zár be a forgási iránnyal, amiből a társulás korára 72 millió év adódik, az expanzió sebességére pedig 0.7 km/sec. Hasonlóképpen ilyen elnyúlt társulás az Ursa Maior halmaz. Ennek korára 45 millió év adódik.

A további hasonló vizsgálatoknak határt szab a többi társulás nagyobb távolsága, aminek következtében a sajátmozgások igen kicsinyek. Így csak a sajátmozgásokra vonatkozó megfigyelési anyag lényeges bővítése után lehet ezeket az empirikus kormeghatározásokat további társulásokra kiterjeszteni.

Ambarcumjan az expanziós sebességet egy nagytömegű ú. n. protocsillag szétrobbanásával magyarázta. *Blaauw*nak és *Morgan*nak egy érdekes észrevétele [8] azonban sokkal kielégítőbb magyarázatra vezetett, amely egyúttal *Ambarcumjan* azon eredményére is felvilágosítást ad, hogy miért van a legtöbb *O*- és *B*-társulás közepében *O*- és *B*-csillagokat tartalmazó, nem expandáló, stabilis csillaghalmaz.

A HD 34078 a Napnál többezerszer erősebben sugározó *O*-típusú csillag, amelynek térsebessége feltűnően nagy: 128 km/sec, holott az *O*-típusú csillagok térsebessége különben mind igen kicsi. Már most a sebesség iránya pontosan olyan, mintha a csillag az Orion csillagképben levő *O*—*B*-típusú nagy csillagcsoportosulásból eredne. A csillaggal együtt mozog egy általa világításra gerjesztett, őt körülvevő, diffuz köd is. A megfigyelt sebességgel számítva a csillag 2.7 millió évvel ezelőtt került volna ki az Orion társulásból. De valószínű, hogy ez a csillag ennél későbben keletkezett az Oriontársulás *O*- és *B*-típusú csillagainak nagy sugárnyomása következtében kidobott ködben, mert ha a csillag a köd kidobásakor már meglett volna, azóta a köd az intersztelláris felhőkkel való találkozások következtében elmaradt volna a csillagtól.

Ez a példa arra mutat, hogy nagy *O*- és *B*-típusú csillaghalmazok közelében lévő ködökben bizonyos körülmények között egyes csillagok képződhetnek. Ez általánosságban nem lehetséges. Csillagtömegnyi gázfelhők nem tudnak csillaggá kontrahálódni, mert a Tejút gáztömegeinek hőmérséklete általában 100°K körül van. Gázrészecskéinek ebből eredő kinetikus energiája csak többezer naptömegnyi felhő gravitációs kontrakcióját engedi meg. Ilyenek összesűrűsödéséből csillaghalmazok keletkezhetnek. Ha ebben néhány igen nagy hőmérsékletű és nagy tömegű *O*-csillag is keletkezik, akkor ezek megjelenésével a környező maradék intersztelláris anyagban gyökeres változások állnak be. A csillagok óriási sugárzása ionizálja a környező gázfelhőket és azok hőmérséklete 10—20 ezer fokra nő. A távolabbi, már nem ionizált gázfelhőrészlet a belső ionizált részekből eredő nagy nyomástól komprimálódik. Ez a nagy kompresszió elősegítheti új csillagok keletkezését. Minthogy az összenyomott felhők nagy sebességgel kifelé lökődnek, a bennük keletkező csillagok expandáló csoportot (társulást) fognak képezni. A felhőnek az a része, amelyből nem képződött csillag, részekre szakadva távolodik el. Ez a gondolat *Spitzer*-től és *Oort*-tól származik [9].

O- és *B*-típusú csillagokat tartalmazó nyílt halmazok környezetében található gázködökről készített felvételek megerősíteni látszanak ezt az elgondolást. Ilyen ködökben sok helyen találhatók kicsi köralakú sötét helyek ú. n. globulák, amelyek teljesen átlátszatlanok. Ez az átlátszatlanság nagy sűrűségükre vall és nem lehetetlen, hogy ezek a globulák a csillagok kezdeti állapotát jelentik.

Természetesen egyáltalán nem valószínű, hogy az *O*- és *B*-típusú csillaghalmazok körüli ködben keletkező csillagok között minden esetben lesz nagytömegű *O*- és *B*-csillag is. Lehet, hogy csak kisebb tömegű csillagok fejlődnek ki. Ezzel kapcsolatban érdemes megemlíteni, hogy ismerünk ú. n. *T*-társulásokat is. Ezeket *G, K, M*-típusú törpecsillagok alkotják, amelyeket azonban a hasonló, nem társulásokhoz tartozó és így idősebb hasonló színképtípusú csillagoktól könnyen meg lehet különböztetnünk, mert fényességük szabálytalanul változik (a *T* Tauri-változócsillag is ilyen és innén van a *T*-társulás elnevezés is), és színképükben emissziós vonalak is fellépnek. Ezek a *T*-társulások is, akárcsak az *O*- és *B*-társulások, többnyire intersztelláris felhőkben találhatók.

Befejezésül röviden szeretném megemlíteni az Akadémia Csillagvizsgáló Intézetében végzett kozmogóniai vizsgálatokat. Az Intézet Pozícióasztronómiai és Sztellárstatisztikai Osztályán *Herczeg* kutató feldolgozta a Cepheus II. asszociációt. Eredményéről itt fog majd beszámolni. Azt hiszem, ez annyiból is hasznos lesz, hogy betekintést enged az ilyenfajta kutatások módszereibe és felvilágosítást ad az eredmények megbízhatóságáról.

Az Intézet általános Asztrofizikai Osztályán a II. populáció legfontosabb csillagfajtájáról, a rövidperiódusú δ Cephei változócsillagokról (RR Lyrae-csillagok) folyó kutatásoknak van kozmogóniai jelentősége. Ezen csillagok fényváltozásának periódusa igen rövid, 1,3—20 óra. Így a periódus már rövid idő alatt olyan pontosan határozható meg, mely pontosság 5—6 nagyságrenddel felülmúl minden más csillagadat meghatározásánál elérhető pontosságot. Ennek következtében e csillagok állapothatározóiban a fejlődésük következtében beálló változásokat először periódusuk megváltozásában kell észrevennünk. Azonkívül ezek a csillagok instabilis alakzatok, a pulzációjuk következtében a légkörükben kifejlődő lökéshullámok erős anyagveszteséget okoznak és így fejlődésük menete nyilván gyorsabb, mint a stabilis csillagoké. Így van remény arra, hogy periódusuk progresszív változását pontos fotometriai megfigyelésekből már rövid idő alatt ki tudjuk mutatni. Erre mutatott az az észrevételünk is, hogy a gömbhalmazokban nagy számban előforduló RR Lyrae csillagok perióduseloszlása halmazról-halmazra igen különböző. Az volt a feltevésünk, hogy ezek a különbségek a fejlődés különböző szakaszait mutatják. Ennek bizonyítására kezdtük meg kb. 20 évvel ezelőtt nagyobb számú olyan izolált RR Lyrae csillag periódusváltozásának vizsgálatát, amelyekre már régebbi észlelési anyagot is fel lehetett használni. Ezt a vizsgálatot később kiterjesztettük a gömbhalmazok RR Lyrae csillagaira is. Bár a progresszív periódusváltozások megállapítását igen megnehezítette periódikus periódusváltozások (3—20 évi periódussal) fellépése, ma már 12 csillagra kimutattuk a periódusnak szekuláris változását, mely *minden esetben* a periódus hosszának növekedésében mutatkozott. (Éppen ez bizonyítja, hogy ezek a változások nem lehetnek egy igen hosszú periódusú periódusváltozás növekvő szakaszai.) A periódus növekedésére 1—2 mp/100 év adódott. Ezzel az eredménnyel tényleg könnyen interpretálni lehetett a halmazok között a periódusgyakoriság szempontjából fennálló különbségeket, mint fejlődési fokozatokat. Különösen érdekes lesz majd ezeknek az eredményeknek az összehasonlítása a halmazok Russell-diagrammjával, melyek vizsgálata a Mt Palomar 5 m-es tükörteleszkópjával jelenleg folyik. Így a közeljövőben már meglehetősen sok empirikus adatunk lesz a II. populáció csillagainak fejlődésére is. E csillagok keletkezésére természetesen, minthogy az a régmultban befejeződött, nem lehet olyan empirikus adatokat gyűjteni, mint az I. populáció csillagaira.

IRODALOM:

[1] V. G. Feszenkov: La radiation corpusculaire comme facteur de l'évolution du Soleil et des étoiles. *Moszkva* 1952.

[2] P. ten Bruggencate: Die Sternhaufen. 1927.

[3] W. A. Baade: Galaxies — present day problems. *Publ. Obs. Univ. Michigan* X. 7. 1951. és
Basic facts of stellar evolution. *Symposia, Roma,* 1952.

[4] Ambarcumjan: Discours introductif on Symposium sur l'évolution des étoiles. Moszkva 1952. (Itt összefoglalás található az összes eddigi szovjet vizsgálatokról, amelyek a csillagtársulásokról megjelentek).

[5] A. Blaauw: The age and evolution of the ζ Persei group of *O*- and *B*-type stars. B. A. N. XI. 405. 1952. és XII. 42. 1953.

[6] J. H. Oort: Expanding motions in groups of early-type stars. *Symposia, Roma,* 1952.

[7] A. Blaauw: The evolution of expanding stellar associations; the age and origin of the Scorpio-Centaurus group B. A. N. XI. 414. 1952.

[8] A. Blaauw and W. W. Morgan: Note on the motion and possible origin of the O-type star BD 34078 = AE Aurigae. B. A. N. XII. 76. 1953.

[9] J. H. Oort: Moderne Untersuchungen über die Struktur der Milchstrasse. *Die Naturw.* 41. 73. 1954.

[10] J. L. Greenstein and M. Schwarzschild: The chemical composition of the stars and its relation to stellar evolution. *Symposia, Roma,* 1952.

[11] P. Jordan: Fortschritte im Problem der Sternentstehung. Die Naturw. 40. 541. 1953.

[12] C. F. v. Weizsäcker: Zur Kosmogonie. Z. f. Ap. 24. 181. 1948.

[13] O. Struve: Stellar evolution. *Princeton University Press.* 1950.

HOZZÁSZÓLÁSOK

CSADA IMRE:

A csillagok fejlődésének elméletében igen fontos szerepet játszanak az intersztelláris anyagok. Hozzászólásomban az intersztelláris gázok mozgási törvényeire és néhány más fontos sajátságára szándékozom rámutatni.

Az intersztelláris gázfelhők mozgását a hidrodinamika egyenleteivel írhatjuk le. A hidrodinamikai folyamatoknak két alapvető típusa van: a lamináris és a turbulens. Legelső feladatunk tehát annak eldöntése, hogy az intersztelláris gázfelhők, melyik mozgási állapotban vannak. A kérdés eldöntéséhez ismernünk kell mind a lamináris, mind a turbulens mozgások jellegzetesebb sajátságait. A következőkben összefoglalom a két mozgástípus legfontosabb tulajdonságait.

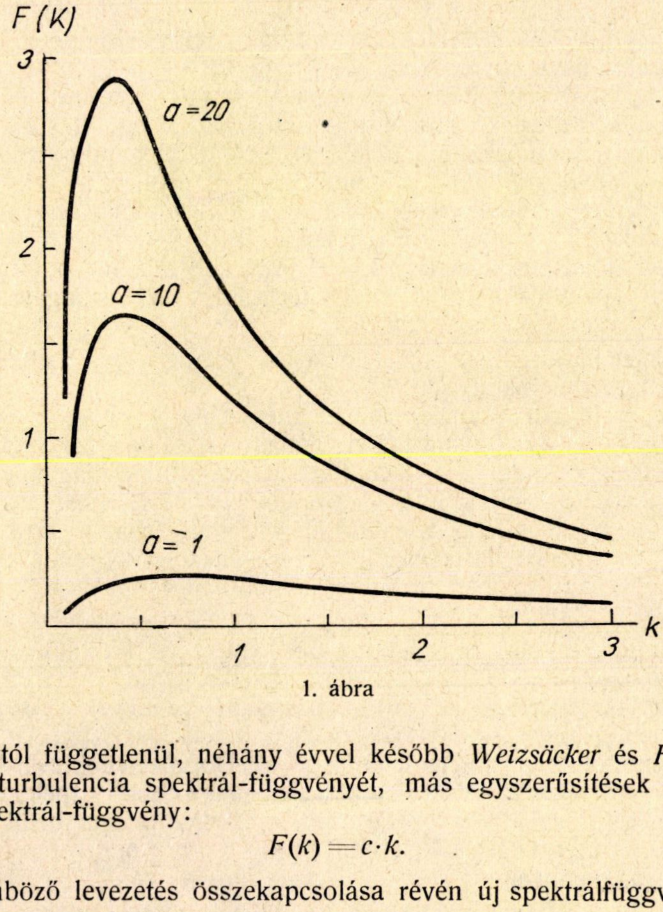
A lamináris mozgási állapotot a rendezettség jellemzi. A sebesség trajektóriái jól definiált áramvonalas rendszert alkotnak, melyek a klasszikus hidrodinamika egyenleteivel leírhatók. A lamináris mozgási állapotnak azonban igen szűk érvényességi területe van, érvényességi határát az ú. n. Reynolds-féle számmal adhatjuk meg. Ennek egy kritikus értékénél megszűnik a mozgás rendezettsége, eltűnnek az áramvonalak és helyüket örvények kaotikus tömege foglalja el. Elméletileg kimutatható, hogy e változás oka a lamináris mozgási állapot stabilitásának megszűnése. Megszűnik a sebesség kötöttsége és a folyadék áramlása a tér bármely pontjában minden irányú lehet. Értékét így nem adhatjuk meg, csak azt, hogy egy térfogatelemben bizonyos sebességnek mekkora valószínűsége van. E kaotikus, stabilitását vesztett mozgásban a viszonylag stabil örvénymozgás hamarosan fellép, s így az egész teret hamarosan nagyszámú, különböző méretű és élettartamú örvények töltik be.

A turbulencia matematikai tárgyalásánál a sebességnek, nyomásnak, sűrűségnek, stb. az átlagértékét képezzük, olyan nagyméretű térfogatelemekből, amelyekben nagyszámú örvény van. A térfogatelemek mérete tehát nagy a legnagyobb örvényekhez képest. Célunk az, hogy az átlagértékekre vezessünk le a klasszikus mozgásegyenletekhez hasonló egyenleteket. Az ilyen dinamikai egyenlet azonban nemcsak pusztán az átlagértéket tartalmazza, hanem a sebességnek az átlagtól való eltéréseinek másodrendű szorzatait is. Jelöljük a sebességet U-val, az átlagértéket $\bar{U}$-val, úgy az átlagtól való eltérés, a sebességfluktuáció: $U' = U - \bar{U}$. A fellépő másodrendű szorzatok a sebességkorrelációk:

$$U'_i U'_k$$

(ahol U'_i, U'_k a sebességfluktuáció két komponense). Maga a korreláció tehát másodrendű tenzor. A turbulencia-elmélet egyik legfontosabb problémája az, hogy a korreláció-tenzor elemeit kifejezi a középértékekkel. Ez elvileg úgy érhető el, hogy a korreláció-tenzor elemeire differenciálegyenletet vezetünk le, melyek együtthatói csak az átlagértékeket tartalmazzák. Az ilyen módon kapott differenciálegyenlet azonban annyira bonyodalmas, hogy azt közvetlenül diszkutálnunk majdnem teljesen lehetetlen. *Taylor* mutatott rá legelőször arra, hogy a fluktuációk helyett célszerűbb azoknak Fourier-transzformáltját vizsgálni, mert erre egyszerűbb egyenletek vezethetők le. A Fourier-transzformáltnak, vagy a Fourier-spektrumnak fontos jelentése is van: megadja a különböző méretű fluktuációk, vagy, ami ezzel egyértelmű, a különböző méretű örvények viszonylagos számát. A spektrál-függvény hullámszám paramétere pedig az örvények méreteinek reciprok értékét adja. A spektrál-függvényt legelőször bizonyos elfogadható egyszerűsítések mellett (homogén izotrop turbulencia) *Kolmogorov* szovjet akadémikus határozta meg. Ha a sebesség ingadozásai túlságosan nagyok a közepes sebességhez képest, továbbá a korreláció-tenzor elemeinek csak diagonális elemei nem zérusok, a diagonális elemek viszont egyenlők (izotrópia), úgy a spektrál-függvény:

$$F(k) = c \cdot k^{-5/3}.$$



1. ábra

Kolmogorovtól függetlenül, néhány évvel később *Weizsäcker* és *Heisenberg* is levezette a turbulencia spektrál-függvényét, más egyszerűsítések mellett. Szerintük a spektrál-függvény:

$$F(k) = c \cdot k.$$

A két különböző levezetés összekapcsolása révén új spektrálfüggvényt lehetett felírni:

$$F(k) = \frac{ak}{[1 + b \cdot k^{4/3}]^2},$$

melynek érvényességi határa lényegesen nagyobb, mint a Kolmogorov, vagy mint a Heisenberg-féle spektrál-függvény (1. ábra).

A természetben a turbulens mozgás igen gyakori. A folyók áramlása, levegő mozgása, stb., majdnem mindig turbulens. Régi eredetű az a gondolat, hogy a csillagok légkörének és az intersztelláris gázoknak a mozgása is turbulens. Az intersztelláris gázok turbulenciájának kimutatásánál a következő problémák merülnek fel:

1. Mi okozhatja azt, hogy az intersztelláris gázok turbulens állapotban vannak?

A Tejútrendszer erős differenciális rotációja azt eredményezi, hogy a Reynolds-szám igen nagy lesz. Hozzávetőleges számítások azt mutatják, hogy a kritikus értéknél több nagyságrenddel nagyobb, így a turbulencia fellépése az elmélet szerint szükségszerű.

2. Megközelíthető-e az intersztelláris anyagok turbulenciája az nkompresszibilis folyadékok homogén izotrop turbulencia elméletével?

A Tejútrendszer differenciális rotációja miatt, az elmélet szerint a turbulencia nem lehet izotróp, valószínű azonban, hogy a nagy kiterjedésű felhők kisebb centrális területének turbulenciája homogén és izotróp.

Az intersztelláris gázok sűrűsége igen kicsi [10^{-24} gr/cm^3] és nem tekinthetők inkompresszibilisnek. A sebességfluktuációkkal együtt sűrűség, nyomás és hőmérsékleti fluktuációk is fellépnek. Nem elegendő tehát pusztán a mechanikai folyamatokra korlátozódnunk, hanem figyelembe kell venni azt is, hogy az egyidejűleg fellépő termodinamikai folyamatok, hogyan és milyen mértékben módosítják a mechanikai jelenségeket.

3. Milyen elméleti és statisztikai eljárást kell alkalmaznunk a korreláció-tenzor és a spektrál-függvény meghatározására a csillagászati észlelési anyagból?

Az intersztelláris gázok turbulenciájára jelenleg két észlelési módszer alapján következtethetünk:

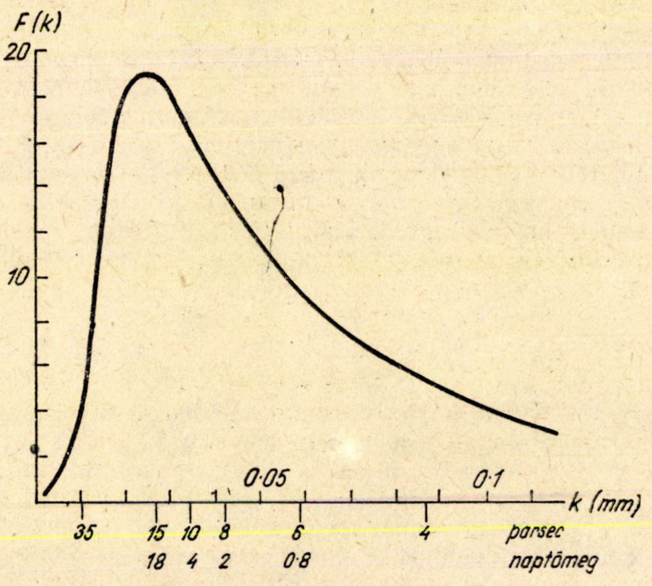
a) egyes csillagok színképében az intersztelláris anyagok, mint elnyelési vonalak jelentkeznek. A Wilson-hegyi csillagvizsgálóban készített spektroszkópikus felvételekből *Adams* összeállította azoknak a csillagoknak a listáját, amelyek színképében intersztelláris eredetű elnyelési vonal van. Az egyes csillagok színképében fellépő vonalak Doppler-effektusából arra következtethetünk, hogy az intersztelláris gázok sebességének erős, rendezetlen ingadozása van, vagyis valószínűleg turbulens állapotban vannak.

Kaplan és *Pronyik* szovjet csillagászok a Lvov-i csillagvizsgálóban rámutattak arra, hogy ezekből az effektusokból csak jól kidolgozott statisztikai vizsgálatok alapján lehet a turbulenciára következtetnünk. Helytelenül alkalmazott statisztikai eljárás a különböző nagyságú örvények önkényes szelekciójára vezethet. *Kaplan* és *Pronyik* csillagpárokat választottak ki, amelyek látszó távolságából és az intersztelláris gázok Doppler-effektusából (sebességéből) meghatározták a korreláció-tenzor elemeit és ebből a spektrál-függvényt. Kimutatták, hogy a spektrál-függvény az észlelési hibákon belül független a helytől és a csillagpár irányától, e mellett jó egyezést mutatott a Kolmogorov-féle spektrál-függvénnyel.

Kaplan és *Pronyik* vizsgálatai tehát a spektroszkópikus észlelések alapján azt mutatják, hogy az intersztelláris gázok turbulens állapotban vannak és ez az inkompresszibilis folyadékokra kidolgozott izotrop turbulencia-elmélettel jól közelíthető.

b) Az intersztelláris gázfelhőket a Palomar-hegyi csillagvizsgáló 120 cm-es Schmidt-kamarájával (vörös szűrővel) sikerült közvetlenül is lefényképezni. A környező csillagok ugyanis megvilágítják az intersztelláris anyagokat. A felvételeken a köd képe igen hasonlít a földi légkör felhőihez. A fényességfluktuációk a sűrűségfluktuációktól származnak, melyek inkompresszibilis gázokban mindig fellépnek. A sűrűségfluktuációk viszont a turbulenciaelmélet szerint a sebességfluktuációktól függnek. A Palomar-hegyi felvételekről fotometrikus úton *Aller* határozta meg a felhők fényességfluktuációjából a korreláció-függvényt és a spektrál-függvényt, mely jó egyezést mutat a Kolmogorov—Heisenberg-féle spektrál-függvénnyel.

Aller dolgozatában a spektrál-függvényt csupán tabellárisan közli, adatai alapján készült a 2. ábra.



2. ábra

A Szimeisz-i csillagvizsgáló 64 cm-es nagy fényerejű távcsövével *Pikelner* és *Sájn* szovjet csillagászok ugyanarról a Cygnus-felhőről készítettek felvételt, amelyet *Aller* dolgozott fel. Főképpen azt vizsgálták meg, hogy a turbulencia izotrop sajátsága mennyiben teljesül, mert *Aller* vizsgálataiban erre nem tért ki. Az egymásra merőleges fotometriai keresztmetszetekből meghatározott spektrál-függvények azonban nem voltak egyformák, ami világosan mutatja azt, hogy a turbulencia nem izotrop. Fejtegetésükben rámutattak arra, hogy a kiválasztott terület két különböző sebességű felhő találkozási frontjára emlékeztet, ami önmagában is kizárja azt, hogy ott izotrop turbulencia legyen.

Aller, Pikelner és *Sájn* eredményei azonban lényegében azonosak. Kozmogóniai szempontból igen fontos az az eredmény, hogy a 10 parszek átmérőjű felhők gyakorisága a legnagyobb. E felhők tömege nagyságrendben egyezik a Nap tömegével. Ez az eredmény igen figyelemreméltó perspektivában tünteti fel azt a körülményt, hogy a csillagok tömege közel egyenlő. Ha elfogadjuk azt a kozmogóniai elméletet, mely szerint a csillagok intersztelláris felhőkből alakulnak ki, ebből az következik, hogy azoknak a csillagoknak a száma lesz a legnagyobb, melyeknek tömege egyezik a Napéval.

Jeans számításai szerint gravitációs erők következtében csak kb. 100 parszek átmérőjű gáztömeg tud annyira kondenzálódni, hogy belőle csillagok alakulhassanak ki, s ha ez így van, akkor a 10 parszek átmérőjű felhőknek egy nagyobb méretű gázfelhőhöz kell tartozniok. Ha egy ilyen felhőben a kondenzációs folyamat egyáltalában megindul, úgy nyilvánvaló, hogy egyszerre több csillagnak kell keletkeznie.

Végezetül rá szeretnék mutatni az Orion-köd turbulencia vizsgálataira. Ez a köd, mely a csillagok fejlődése szempontjából igen fontos, szintén turbulens állapotban van. Spektroszkópikus észlelések alapján a turbulenciát legelőször *Hoerner* mutatta ki Göttingában, fényességfluktuációk alapján pedig *Pikelner* és *Sájn*. Mind a két vizsgálat arra vezetett, hogy a turbulencia jól közelíthető az inkompresszibilis folyadékok homogén izotrop turbulenciaelméletével. *Pikelner* és *Sájn* vizsgálataiban rámutattak arra, hogy nemcsak a gázok, de az intersztelláris porfelhők is turbulens sűrűségfluktuációkat mutatnak. Ez arra mutat, hogy a gázok a gázfelhőket magukkal sodorják.

Az elmondottakból következik, hogy a kozmogóniai elméletek fejlesztésében fontos szerephez jut a turbulenciaelmélet. A megfigyelési anyagok egyrészt azt mutatják, hogy az intersztelláris gázok turbulens állapotban vannak, másrészt, ez a mozgási állapot jól diszkutálható egy kidolgozott hidrodinamikai elmélettel.

MARX GYÖRGY:

A Föld egyes kőzeteinek kora legpontosabban a radioaktív anyagok bomlástörvényének felhasználásával határozható meg. Mivel a csillagok korára vonatkozó becslések közvetett jellegűek, felmerül a kérdés, nem volna-e itt is alkalmazható a pontosabb radioaktív kormeghatározási módszer. Sajnos, kvantitatív koncentrációmeghatározásra és izotópok szétválasztására az egyedül rendelkezésre álló spektroszkópiai megfigyelések nem elegendők. Ezért csak olyan elemek jöhetnek számításba, melyeknek nincsen stabil izotópjuk. Ha ilyen spontán elbomló elem vonalai a csillag színképében előfordulnak, akkor pusztán az elem számottevő koncentrációban való jelenléte a csillag korára vonatkozólag útbaigazítással szolgálhat. A természetes radioaktív elemek azonban a periódusos rendszer végén fordulnak elő. Az ilyen nagy atomsúlyú elemek viszont a csillagok légkörében igen ritkák. Ezért ilyen irányú megfigyelésekre kevés lehetőség van.

Az elmondottak után érthető, hogy nagy feltűnést keltett a technecium nevű elem színképvonalainak egyes csillagok spektrumában való felfedezése. A 43 rendszámú technecium a periódusos rendszer első felébe esik, de atommagszerkezeti okok miatt nem stabilis. (A technecium volt az első mesterségesen előállított elem, 1937-ben molibdénből neutronbombázással hozták létre.) A leghosszabb élettartamú izotópja a 99-es atomsúlyú ${}_{43}Tc^{99}$, ennek felezési ideje 470 000 év. 1950-ben mesterségesen előállított anyagmintán tanulmányozták a technecium-atom színképét. Nem sokkal utána *Merill* a Mt. Wilson-i és *Meggers* a palomarhegyi reflektorok segítségével a technecium-atom egyes színképvonalait azonosította egyes S-típusú csillagok színképében.

Tekintettel arra, hogy a technecium-atommag élettartama 1 millió évnél rövidebb, a technecium-előfordulásnak csak két magyarázata lehet:

1) Technecium-atommagok állandóan képződnek egyes állócsillagok belsejében.

2) A csillagban található technecium a csillag keletkezésekor került bele és még nem bomlott el. Ekkor viszont a csillag nem lehet egy-két millió évnél idősebb.

A csillagokban lefolyó termonukleáris reakciók elméletét *Gamow* és *Bethe* dolgozták ki magfizikai ismereteink alapján. Az elmélet következtetései a megfigyelésekkel összhangban állnak, így nincs okunk kételkedni abban, hogy az a csillagok belső viszonyairól helyes képet ad. Jelenlegi legjobb tudásunk szerint a csillagok belsejében végbemenő magreakciók csak a legkönnyebb elemek közt folynak le, oxigénnél nagyobb rendszámú elemek atommagjainak egyesülését a Coulomb taszítás nem engedi meg. Ma nem tudunk elképzelni olyan folyamatot, mely az állócsillagok belsejében uralkodó 1—100 millió fokos hőmérsékleten technecium és más nehezebb elem keletkezéséhez vezetne számottevő mértékben.

Marad tehát a második feltevés, az, hogy a technecium az anyagnak csillaggá tömörülése előtt keletkezett, így a csillag rendkívül fiatal, néhány millió éves, annyi idős, mint a társulások fiatal csillagjai. E mellett szól az is, hogy a techneciumot tartalmazó csillagok legtöbbje változócsillag, tehát instabilis alakzat. Ha tehát a gondolatmenet helyes, a technecium-előfordulás is a csillagok napjainkban való keletkezése mellett bizonyít.

Az elmondottak után igen meglepőnek látszanak azok a híradások, melyek egyes technecium-vonalaknak a Nap színképében való felfedezéséről szólnak. Először 1950-ben *Charlotte Moor* következtetett az ionizált technecium egy-két gyenge vonalának lehetséges felléptére a Nap-spektrumban. Egy 1953-as jelentés ismét az egyik ultraibolyába eső színképvonal megfigyeléséről tudósít. Amennyiben ezek a megfigyelések reálisaknak bizonyulnának, vagyis sikerülne a technecium-ion több színképvonalát felfedezni, akkor ez újabb problémákat vetne fel. Ha csak nyomokban fordul elő a technecium, annak keletkezése elképzelhető a Napon, elsősorban maghasadás következtében. (Laboratóriumi kísérletek bizonyítják, hogy uránium-magok hasadásakor technecium keletkezik.) Ez azonban csak technecium-nyomokat produkálhat, számottevő koncentrációt nem. Ha a technecium a Napon és más „idősebb" csillagokban előfordulna, akkor számolni kell azzal, hogy ott ilyen középnehéz elemeknek folyamatos keletkezése folyamatban van, ami az atommagreakciókra vonatkozó ismereteink gyökeres átalakítását hozhatná magával.

Látható, hogy ezen a területen a csillagászat és az atommagfizika kapcsolata kölcsönös. A technecium-előfordulás felvilágosítással szolgál az állócsillagok korára vonatkozólag. Ha azonban a Napon jelentékeny technecium-koncentrációt sikerülne kimutatni — ez azonban nem valószínű — akkor a termonukleáris reakció elmélete szorulna döntő revízióra. Különösen fontos volna az intenzív technecium-vonalakat mutató csillagok korának más módszerrel való meghatározása. Pl. meg kellene vizsgálni, hogy azok nem tartoznak-e szétszóródóban levő társulásokhoz.

FÖLDES ISTVÁN:

Ambarcumjan máris klasszikusnak nevezhető vizsgálataiból kézzelfoghatóan következik, hogy a csillagok kora igen különböző; több milliárd éves csillagok mellett, melyek közé tartozik a mi Napunk is, olyan csillagok is léteznek, melyek legfeljebb mindössze néhányszor tízmillió évesek. *Ambarcumjan* ilyen, viszonylag fiatal csillagok exisztenciájára az általa a bjurakani obszervatóriumban felfedezett és asszociációknak elnevezett instabilis csillaghalmazok alapján következtetett, melyeknek a közvetlen megfigyelésből megállapítható dilatációja is kétséget kizáróan mutatja, hogy ezek a halmazok nem jöhettek létre már korábban is létezett csillagok összeállása, vagyis kaptációs folyamatok eredményeképpen, tehát a hozzájuk tartozó csillagok sem lehetnek idősebbek, mint az egész rendszer, melyet a maga részéről nagyfokú bomlékonyság jellemez. Az asszociációkra vonatkozó megfigyelések során olyan jelenségeket is fedeztek fel, melyek a csillagképződés folyamatával közvetlen vonatkozásban állanak, sőt annak mechanizmusára is bizonyos fényt vetnek. Nevezetesen egyes gáz- és porködök környezetében két szomszédos csillagot összekötő vékony fonalakat találtak, melyek egyes kivételes esetekben halvány csillagoknak egy szoros láncolatává bomlottak széjjel; a csillagok kölcsönös távolságai a láncban egyes esetekben nem nagyobbak 7—8 ezer csillagászati távolságegységnél. Az ilyen csillagláncok igen nagy mértékben instabilisek, úgy hogy egy ilyen lánc nem régen jöhetett létre a diffuz anyagnak egy fonalából. A gáz- és porködök fonalainak különálló kondenzációkká, csillagokká való szétbomlását *Feszenkov* és *Rozskovszkij* 1952-ben minden kétséget kizáró módon kimutatták egy tipikus csillaglánc, illetve egy fonal átlagos sűrűségének összehasonlítása által.

Vessük fel először általában a csillagok és a környező intersztelláris közeg kölcsönhatásának kérdését. Az alma-atai obszervatórium nagy fényerejű *Makszutov*-teleszkópjával gáz- és porködökről készült felvételek azt mutatják, hogy a köd tartományába eső egyes csillagok körül kisméretű köralakú sötét zóna mutatkozik; ez a jelenség a legtermészetesebben az által magyarázható meg, hogy a ködben tartózkodó csillag sugárzása eltaszítja az erősen szóró porrészecskéket, minek következtében a csillag egy viszonylag üres gömbalakú tartomány által van körülvéve, ahol a csillag fénye kevésbbé szenved szórást, mint ott, ahol a köd sűrűsége nagyobb. *Gurzadjan* 1949-ben kimutatta, hogy az összes spektráltipusokhoz tartozó csillagok sugárzása neutrális *H*-atomokra is jelentékeny taszítóerőt fejt ki; ionizált *H*-atomok esetében természetesen számításba kell venni a csillag elektromágneses terét is. Az imént említett megfigyelési eredmények, valamint *Gurzadjan* számításai azt bizonyítják, hogy egy csillag nem képes tömegét számottevő módon megnövelni az intersztelláris közeggel való kölcsönhatása révén; azok a feltevések, melyeket *Hoyle, Lyttleton, Bondi, Weizsäcker* és *Gold* a csillagok tömegének gyarapodását illetően felállítottak, szerzőik számításai szerint is csak abban az esetben vezethetnek egy csillag tömegének növekedésére, ha a tömege a Nap tömegének legalább tízszerese és a környező közeghez képest a sebessége nem nagyobb másodpercenként 1 km-nél; a szovjet megfigyelési eredmények azt mutatják, hogy ezek a feltételek általában nincsenek realizálva. Mondhatjuk azonban, hogy nemcsak a csillag tömegének növekedését, vagy csökkenését, hanem általában fejlődésének menetét nem a környező közeggel való kölcsönhatása szabja meg, hanem belső sajátságai determinálják azt; ezek folyományának tekintendő a csillag fejlődésében fundamentális szerepet betöltő korpuszkuláris sugárzás is, melynek jelentőségére *Feszenkov* mutatott rá.

A csillag fejlődésében az energiaforrásokat, vagyis bizonyos hidrogénből héliumot termelő nukleáris reakciókat tekinthetjük domináló tényezőként; tudjuk, hogy az evolució a *H*-tartalom csökkenésének és a *He*-tartalom egyidejű növekedésének irányában folyik le. A csillagok belső szerkezetének elméletéből következik, hogy állandó tömeg mellett a *H*-nek *He*-má való átalakulása a luminozitás szüntelen növekedését vonja maga után. Ebből következik, hogy egyenlő tömegű, de különböző korú és ezért feltehetően különböző *H*-tartalmú csillagok különböző fényességűek tartoznak lenni, ami ellentmond a tapasztalati tényeknek, nevezetesen az empirikus tömeg-fényességrelációnak. Mivel pedig másrészt *Ambarcumjan* vizsgálatai megmutatták, hogy a csillagok valóban különböző korúak, csak egyetlen lehetőség kínálkozik arra, hogy az elméletet összhangba hozzuk a megfigyelések eredményeivel: fel kell tennünk, hogy a fejlődés folyamán a csillagok tömegei nem maradnak állandók, hanem minden csillag kialakulása után tömegéből veszíteni kezd kisebb, vagy nagyobb mértékben; a kisugárzott elektromágneses energia is előidézi a tömegnek egy bizonyos sebességgel bekövetkező csökkenését, *Feszenkov* azonban feltételezi, hogy a csillag tömegének egy ennél sokkal gyorsabban bekövetkező csökkenése származik az ú. n. korpuszkuláris sugárzástól, vagyis anyagi részecskék kidobásától.

A korpuszkuláris sugárzásra vonatkozólag *Feszenkov* a következő posztulátumokat állítja fel: 1) A tömeg-fényesség-reláció érvényessége abban az alakban, hogy a fényesség arányos a tömegnek egy bizonyos (kb. 4-ik) hatványával és abban az értelemben, hogy egy csillag fényessége és tömege egész fejlődése során úgy változik, hogy mindig teljesül az említett reláció; 2) A csillag tömegvesztesége arányos fényességével; empirikus tény, hogy a nagy fényességű csillagoknak van erős korp. sugárzásuk; 3) A Nap eddigi létezése folyamán *H*-tartalma számottevő mértékben csökkent; ezt alátámasztják egyrészt a Nap, másrészt egyes B típusú csillagok *H*-tartalmára vonatkozó meghatározások; 4) A Nap kora a Földével megegyező nagyságrendű. E négy feltevés alapján kalkulálni lehet a csillag tömegének, fényességének és *H*-tartalmának változását, tehát le lehet vezetni a csillagok fényességük szerinti eloszlását és azt, hogy miképpen oszlanak el a Russel-diagramm főága mentén; megállapíthatjuk a csillag fejlődésének általános jellegét, a fejlődés tempójának változását, nevezetesen azt, hogy a változás kezdetben igen rohamos, majd erősen lelassul.

A csillagnak a korpuszkuláris sugárzás okozta tömegvesztesége együtt jár az impulzusnyomatékának és forgási sebességének csökkenésével; ebben a tekintetben a korpuszkuláris sugárzás sokkal hatékonyabb, mint az elektromágneses sugárzás. Erre vonatkozó számításokat *Martinov* és *Krat* végeztek, megállapítást nyert, hogy e nagy tömegű és nagy fényességű csillagok forgása létezésük első stádiumában erős fékezést szenved annak következtében, hogy a nagy intenzitással kiáramló korpuszkulák magukkal viszik a csillag impulzusnyomatékának jelentékeny részét; később azonban a forgás sebessége állandósul. Ha a Nap korát 4 milliárd évnek vesszük, akkor a számítások szerint impulzusnyomatéka 2 milliárd évvel ezelőtt csak 2,53 szorosa, 3 milliárd évvel ezelőtt azonban 17-szerese volt a jelenleginek és minél távolabbi multba tekintünk vissza, az impulzusnyomatéknak annál rohamosabb változását találjuk, mely messze felülmúlja a tömeg változásának gyorsaságát.

Mindebből megállapítható, hogy a korpuszkuláris sugárzás, melynek létezése nem hipotétikus, hanem egy bizonyos mértékben a megfigyelési eredmények által igazolható, a csillagok fejlődésének menetét kétségtelenül lényegesen befolyásoló, reális folyamat, melynek működésével minden kozmogóniai elméletnek számolnia kell és amelynek felfedezése számos bonyolult kérdés közvetlen megoldását tette lehetővé.

HERCZEG TIBOR:

A csillagtársulások vizsgálata ma főképpen az *O*-társulásokra, azok tulajdoságainak megállapítására irányul. Ezek a társulások ugyanis mind szuperóriás és óriás csillagokból állanak, így aránylag nagy távolságról is megfigyelhetjük őket. Míg a törpe csillagokból álló *T*-társulások közül alig kettőt-hármat fedeztek eddig föl, *O*-asszociációt már mintegy 25-öt ismerünk.

Közülük néhánynak közelebbi vizsgálata azt mutatta, hogy a különböző asszociációk tulajdonságai nem mindenben egyeznek meg, ezért érdemes minél több *O*-társulás tulajdonságait lehetőleg részletesen megállapitani, hogy összeállíthassuk legfontosabb közös fizikai jellemzőiket.

Az ilyen munka lényege abban áll, hogy a társulások irányába eső, néhány négyzetfoknyi területet az éggömbön sztellárstatisztikailag lehetőleg részletesen feldolgozunk. Rendszerint elegendő az első tájékozódásra a különböző, már publikált adatok gondos összeállítása és kritikája. Ezek alapján először el kell döntenünk azt, hogy mely csillagok tartoznak a társuláshoz, tehát mintegy el kell végeznünk az asszociáció cenzusát, azután pedig, amenynyiben ennek során a társulás reális csillagcsoportosulásnak bizonyul, sorra meg kell vizsgálnunk tulajdonságait.

Egy-egy társulás közelebbi, individuális vizsgálata ugyanis már csak azért is érdekes lehet, mert esetről-esetre eldönti azt, hogy valóban fizikailag összetartozó csillagcsoportról, ténylegesen asszociációról van-e szó, vagy pedig csak egy irányban látszó, de össze nem tartozó égitestek csoportjáról, mondjuk „optikai" társulásról. Ez a kérdés egyáltalán nem jogosulatlan, *Voroncov-Veljaminov* fel is vetette ezt a problémát és — mint ismeretes — ennek alapján *Ambarcumjan*nak az *O*-társulásokra vonatkozó egész koncepcióját kétségbe vonta. Véleménye szerint az állítólagos asszociációk irányában a csillagközti anyag sűrűsége kisebb, mintegy „átlátszósági korridorok" jönnek létre és ezekben az irányokban mi a nagyfényességű, szuperóriású csillagok bizonyos csoportjait látjuk. Ezek azonban szerinte nem valódi asszociációk, csak egy irányban látszó csillagok csoportjai, amelyeknek belül azonban a távolságok igen különbözőek lehetnek. A közelebbi vizsgálatok azonban azt mutatták, hogy *Voroncov-Veljaminov*nak ez az alapvető természetű ellenvetése lényegében véve nem állja meg a helyét. Ennek tisztázásához az a munka is hozzájárul, amelyet, elsősorban a szovjet kutatók, az egyes társulások individuális tulajdonságainak feldolgozásával végeztek.

Ilyen „feldolgozó jellegű" vizsgálat során tisztázták egy sereg *O*-asszociáció tulajdonságait: így többek között *Markarjan* az NGC 2244 körüli társulás esetében, *Ambarcumjan* és *Markarjan* a P Cygni körüli társulás esetében, *Markarjan*, majd később részletesebben *Holopov* az NGC 6231 körüli asszociációra, *Gurzadjan* az Orion-asszociációra stb. Ezekhez a vizsgálatokhoz csatlakozott még 1952-ben az Akadémiai Csillagvizsgáló Intézetének poziciós-asztronomiai osztálya is, a Cepheus II asszociáció feldolgozásával. Ennek során igyekeztünk az eddigieknél részletesebben, több szempont és teljesebb adatok alapján összeállítani a társulás főbb tulajdonságait. Így az eddigieknél több távolságkritériumot használtunk fel, tekintetbe vettük az intersztelláris abszorbció ingadozásait és kitértünk a mozgásviszonyok tárgyalására. Ugyanazzal a módszerrel, mellyel *Blaauw* megállapította a Perseus II asszociáció tágulását, ennél a társulásnál is konstatálni lehetett a csillagok divergáló sajátmozgását és ebből az asszociáció korát is meg lehetett határozni. Időközben *Ambarcumjan*nak az 1952. évi római csillagászati kongresszuson tartott referátumát közzétették és ebből megtudtuk, hogy éppen ennek az asszociációnak feldolgozásával *Markarjan* is foglalkozott. Ezért a mult év folyamán kiegészítettük vizsgálatainkat, például az Astronomische Gesellschaft közben publikált megfelelő zóna-katalógusa alapján. *Markarjan* eredményei általában nem ismeretesek, mert tudomásom szerint vizsgálatai külön cikk formájában még nem láttak napvilágot. Néhány eredményét azonban *Ambarcumjan* megemlíti és ezek alapján úgy látszik, hogy a két feldolgozás eredményei lényegében megegyeznek. Némi különbség van a két kormeghatározás adata között és abban, hogy a μ Cephei nevezetes változócsillagot *Markarjan* az asszociációhoz sorolja, ami azonban nem látszik megengedhetőnek, mivel ennek a csillagnak radiális sebessége elég nagy, mintegy 30 km/sec-nyi értékkel különbözik a társulás átlagos mozgásától.

A divergáló mozgás, az asszociáció „tágulásának" megállapítására — mint említettem — ugyanazt az eljárást alkalmaztuk, mint *Blaauw*. Külön ábrázolva a sajátmozgás két komponensét, mint a koordináták függvényét, ennek divergáló mozgás esetén a centrum és az egyes csillagok (előjellel vett) koordináta-különbségével közelítőleg lineárisan kell változnia. A grafikonban kapott egyenes emelkedése a divergáló mozgás sebességét jellemzi, az iránytangens reciprok értékéből pedig a kor adódik.

Az ilyen vizsgálatok adalékkal szolgálhatnak a társulások belső mozgására. Mint a bevezető előadásban hallottuk, lényeges, hogy *Ambarcumjan* feltételezett egy „eredendő" divergáló mozgást, az asszociációk bizonyos tágulását. Egyik-másik társulásnál így ezt sikerült is megtalálni és úgy látszik, hogy legalább is a társulások egy részénél ez a tágulás igen fontos, jellemző empirikus tény. Rögtön fölmerül az a probléma, hogy nem lehetne-e ezt a divergáló mozgást a radiális sebességekből kimutatni. Mindenesetre számítanunk kell arra, hogy, mivel a radiális sebesség csak a mozgás egyik komponensét tartalmazza, a sajátmozgás pedig kettőt, a tágulást a radiális sebességekből csak nagyszámú csillag tekintetbevételével lehetne megbízhatóan kimutatni. Egyetlen társuláson belül azonban a csillagok száma aligha elegendő erre. Ezért azok a próbálkozások, amelyeket ez irányban *E. Mendoza* és *E. Chavira* a Tonanzintla-obszervatóriumban (Mexikó), a Perseus I asszociáció esetében tettek, aligha tekinthetők reális értékűeknek.

Erre a kérdésre vonatkozik *H. Waever* vizsgálata is. *Waever* a korai színképtípusú szuperóriás csillagok radiális sebességének diszperzióját vizsgálta, külön az asszociáció-csillagokra és külön valamennyi ilyen csillagra. Eredménye az volt, hogy e két esetben a radiális sebességek diszperziója lényegében megegyezik, ami nem erősíti meg az asszociációk tágulására vonatkozó feltevést.

Mindezek a vizsgálatok azonban e tekintetben nem a leginkább célravezető utat követték. Ezért a csillagvizsgáló pozíciós-asztronómiai osztályán elkezdtük a radiális sebességek feldolgozását, éspedig a sebességeknek asszociációnbelüli eloszlását vizsgálva és az összes (közel gömbalakú) társulást gondolatban egyetlen tipikus asszociációvá egyesítve (ez által statisztikai feldolgozáshoz már elegendő anyag áll rendelkezésre). Tágulás esetén a radiális sebességek legnagyobb diszperzióját az aszszociációk centruma irányában várhatjuk, a legkisebbet pedig a társulások peremén.

Természetes kérdésként adódik még a következő probléma: milyen kapcsolatban állnak az asszociációk és a Tejútrendszer kétféle csillagpopulációja? Mindenek előtt le kell szögeznünk, hogy a populációk kérdése még szinte felvetve sincs a szükséges általánosságban, hiszen például fontos csillagfajtáknak, így a fehér-törpéknek szerepe egyáltalán nincs tisztázva a populációkkal kapcsolatban. *Kukarkin* moszkvai professzor pedig a Tejútrendszer csillagait nem is annyira két populációba, mint inkább háromfajta alrendszerbe, a sík, az „átmeneti" és a szférikus alrendszerek csoportjába osztotta be.

Az asszociációk és a csillagpopulációk kérdésének vizsgálatánál figyelembe kell még vennünk egy fontos heurisztikus elvet, melyet *Ambarcumjan* is következetesen alkalmaz és amelyik azon alapszik, hogy a Tejutrendszer relaxációs ideje nagy a csillagok életkorához képest. A Galaxis relaxációs ideje az az időtartam, ami alatt a csillagok közeli találkozásai során bekövetkezett energia-változások összege a csillagok mozgási energiájával nagyságrendben egyenlővé lesz. A csillagok mozgásviszonyai tehát a relaxációs idő elteltével, lényegesen megváltoznának, mivel azonban a csillagok átlagos életkora ennél határozottan kisebb, azt mondhatjuk, hogy a csillagok életútja alatt az egyes csillagcsoportok mozgásviszonyai lényegesen nem változnak meg. Ebből pedig adódik az a fontos kritérium, hogy genetikus kapcsolatban lévő csillagok esetében hasonló mozgás- és eloszlásviszonyokat várhatunk a Tejútrendszerben. Így lehet meglehetős biztonsággal megállapítani azt, hogy az RR-Lyrae és a δ Cephei csillagok nem jelentik egyazon csillagfajta fejlődésének különböző stádiumait, hanem a csillagfejlődés két különböző, egymáshoz nem kapcsolódó ágához tartoznak. Ezt az elvet alkalmazva feltétlenül észre kell vennünk, hogy az *O*-társulásokban eddig felismert csillagfajták mozgásviszonyai mindig sík alrendszerek csillagainak mozgásviszonyaival egyeznek meg. *Ambarcumjan* bizonyos — mindenesetre eléggé hozzávetőleges becslések alapján — úgy véli, hogy az egész sík alrendszer, esetleg az egész első populáció csillagainak összessége *O*-asszociációkban jött az idők folyamán létre.

A *T*-társulások helyzete e szempontból nem tisztázott. Mozgásuk alapján inkább átmeneti alrendszert jelentenének, az ilyen alrendszerek kapcsolata azonban a populációkkal nem eléggé tisztázott. Bonyolítja a helyzetet az a tapasztalat, hogy egyes esetekben, például az Orion irányába eső gazdag égtájon *O*- és *T*-társulások együtt fordulnak elő.

E probléma és más hasonló kérdések megoldására azonban bizonyára célravezető az az „empirikus“ metodika, amely az asszociációk felfedezéséhez és fontos tulajdonságaik tisztázásához vezetett.

DETRE LÁSZLÓ:

Csada Imre hozzászólásában a turbulenciaelmélettel olyan problémakört érintett, amelynek kozmogóniai fontossága egyre nagyobb lesz. Mint említettem, az intersztelláris anyagból csak a Naphoz képest igen nagy tömegű részek kondenzálódhatnak. Nyilván a kondenzálódó gáztömeg turbulens állapota az oka, hogy a kondenzálódás végeredményeképpen nem egy nagy égitest, hanem csillaghalmaz keletkezik. Érdemes volna megvizsgálni, hogy a keletkező csillagok tömegszerinti eloszlása mutat-e analógiát a turbulencia spektrálfüggvényével. Lehet, hogy a turbulenciával jobban meg lehet magyarázni a csillagok tömegének felső határát is, mint a sugárnyomással.

Valószínű, hogy a csillagok tengelyforgása is az intersztelláris anyag turbulenciájából ered. Érdemes ezzel kapcsolatban megemlíteni, hogy a „fiatal“ *O*- és *B*-csillagok tengelyforgása igen gyors. Sőt, amíg az „öreg“ főágbeli csillagok (mint pl. a Nap) tengelyforgása lassú, a *T*-társulások fiatal főágbeli csillagai, mint spektrálvonalaik szélessége elárulja, gyors forgásúak. Valószínűleg a gyors forgás miatt lépnek fel színképükben az emissziós vonalak is, mint a gyors forgással járó instabilitásuk miatt fellépő anyagkidobás jelei. Nyilván a csillag fejlődésével a tengelyforgás lassabbodik, részben belső súrlódás folytán, részben az intersztelláris anyaggal való kölcsönhatás miatt. Ami egyes csillagokra érvényes, azt elmondhatjuk a csillagrendszerekre is: a II. populációjú rendszereket a gömbalak, tehát a forgás hiánya, az I. populációjú csillagrendszereket lapult alak, azaz a gyors forgás jellemzi.

Van azonban példa a turbulencia-elmélet óvatosság nélküli kozmogóniai alkalmazására is. Ilyen *Weizsäcker*nek a bolygók keletkezéséről szóló elmélete. Ebben az a hiba, hogy a turbulens elemeknek igen nagy stabilitását tételezte fel, holott ez ellentmond a turbulencia lényegének.

Marx György is igen érdekes problémát vetett fel a techneciummal kapcsolatban. Persze, ha a techneciumnak a Napban való előfordulása beigazolódik, csak az a választás marad, hogy a technecium csillagokban valami még előttünk ismeretlen módon tud mindig újra képződni. De, ha a technecium fellépése csak az *S*-csillagokra korlátozódik is, akkor is arra kell következtetni, hogy legalább is az intersztelláris térben van lehetőség technecium képződésére. Az *S*-csillagok fiatalságának feltételezésével aligha oldhatjuk meg a problémát, hiszen a Tejútrendszer néhány millió évvel ezelőtt nem volt lényegesen más, mint ma. Talán érdemes megemlíteni, hogy az *S*-csillagok légkörében más érdekesség is van: *Zr, Y, Nb* sokkal nagyobb mennyiségben van jelen, mint más csillagokban. Érdekes, hogy ugyanez áll más színképű erős mágnesesterű csillagokra is. Ha az *S*-csillagok is erősen mágnesesek, lehet, hogy ebben kell keresnünk a technecium képződésének okát.

Földes István által érintett anyagi sugárzás kozmogóniai fontossága, azt hiszem, szélesebb körű, mint azt *Feszenkov* feltételezi. A *T*-társulás csillagai azt mutatják, hogy az anyagi sugárzás nemcsak a szuperóriásoknál lehet erős. Sőt az sem biztos, hogy a *Feszenkov* által feltételezett $\frac{dM}{dt} \sim L$ összefüggés fennáll. A főágon levő régi csillagok esetében ugyanis a középen elhelyezkedő csillagok (mint a Nap) anyagi sugárzása aránylag kicsi. De úgy látszik, hogy a kis fényességű *M*-törpék anyagi sugárzása néha igen erős, mint azt a flare-csillagok mutatják. Sőt erős anyagi sugárzás jeleit figyelhetjük meg a W Ursae Maioris típusú szoros kettőscsillagoknál is.

Herczeg Tibor hozzászólása, azt hiszem, megnyugtató volt abból a szempontból, hogy az asszociációk kormeghatározása ma már némileg exakt alapokon nyugszik. A Cepheus II-asszociáció két teljesen független feldolgozása lényegében ugyanarra az eredményre vezetett. Az újabb vizsgálatok alapján azonban nem érthetek vele egyet abban a véleményben, hogy az *O*-, *B*-, illetve a *T*-társulásokból két egészen különböző mozgású alrendszer képződik. *Herbig* új eredményei szerint *O*-, *B*-társulásokban vannak *T*-csillagok is. Ez az eredmény igen megnyugtató, hiszen azt nehezen lehetett volna elhinni, hogy az *Oort—Spitzer*-féle elképzelés szerint kizárólag igen nagy tömegű *O*-, *B*-csillagok alakuljanak ki a komprimált intersztelláris felhőkből. *Herbig* eredménye szerint a *T*-társulásokat most már nem kell lényegesen más alakzatoknak tekinteni, mint az *O*-, *B*-társulásokat. Persze a *T*-csillagok, kicsi tömegük miatt, nagyobb expanziós sebességet kapnak, mint az *O*-, *B*-csillagok és így végül is érthető a törpe csillagok nagyobb térsebessége a szuperóriásokhoz képest. De az eltérés a tömegtől függően fokozatos, nem pedig egészen más nagyságrendű, mint azt *Kukarkin* gondolta.

L. V. KANTOROVICS—V. I. KRILOV „A FELSŐBB ANALÍZIS KÖZELÍTŐ MÓDSZEREI" CÍMŰ KÖNYVÉNEK ISMERTETÉSE

FREI TAMÁS

A matematikai fizika elliptikus differenciálegyenleteinek kerületértékproblémáinál alkalmazott közelítő módszereket ismerteti KANTOROVICS és KRILOV könyve — éspedig szinte kizárólag a síkbeli feladatok esetére szorítkozva. Részletesen foglalkoznak viszont a szerzők az analízis azon fejezeteivel kapcsolatos közelítő módszerekkel, amelyek gyakran szerepelnek segédeszközként a kerületértékproblémák megoldásánál. Számos gyakorlati alkalmazás numerikus kidolgozásával könnyítik meg a szerzők e módszerek megismerését.

Az első fejezet a kerületértékfeladatok megoldásának végtelen sor alakjában történő előállításával, illetve azoknak a módszereknek ismertetésével foglalkozik, amelyek alapján e soralakban kapott megoldást numerikus számításokra is alkalmas alakban tudjuk felírni. Bevezetőül a Fourier-féle módszert ismerteti, pontosabban a Laplace egyenlet DIRICHLET, ill. NEUMANN-féle feladatát oldja meg, derékszögű négyszög és körgyűrű esetében. Rámutat arra, hogy a Poisson-egyenlet megoldása visszavezethető a függő változó transzformációja segítségével a Laplace-egyenletre és példakép a téglalapkeresztmetszetű hasáb torziójára vonatkozó feladatot oldja meg.

Ki kell emelnünk e bevezető fejezet második paragrafusát, amely a végtelen sok ismeretlenes lineáris egyenletek megoldásával foglalkozik; közelítő módszereink nagyrésze ugyanis végül is erre a feladatra vezet. Az egyenletrendszert

$$x_i = \sum_{k=1}^{\infty} c_{i,k} x_k + b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

alakba rendezve vizsgáljuk. Elsősorban a megoldás létezésére ad elegendő feltételt. E célból definiálja eredeti egyenletrendszerünk u. n. majorizáló rendszerét:

$$X_i = \sum_{k=1}^{\infty} C_{i,k} X_k + B_i \qquad (i = 1, 2, \ldots),$$

ahol

$$C_{i,k} \geqq |c_{i,k}|, \quad B_i \geqq |b_i|$$

és igazolja, hogy ha a majorizáló rendszernek van egy nemnegatív $X_i \geqq 0$ megoldásrendszere, akkor az eredeti egyenletrendszernek is van legalább egy olyan x_i megoldásrendszere, amelyre

$$X_i \geqq |x_i|.$$

Megjegyezzük, hogy szukcessziv approximációval oldva meg egyenletrendszereinket, az $x_i^{(0)}=0$ ill. $X_i^{(0)}=0$ kezdeti értékek alapján kapott x_i^*, ill. X_i^* megoldásrendszereket alapmegoldásnak nevezi, s igazolja, hogy ha a majorizáló egyenletrendszernek van $X_i \geqq 0$ megoldásrendszere, akkor mindkét egyenletrendszernek van alapmegoldása és

$$|x_i^*| \leqq X_i^* \leqq X_i.$$

Ezután áttér az alapmegoldás unicitásának bizonyítására. Igazolja t. i., hogy csak egy olyan megoldásrendszer létezik, amelyre

$$|x_i| \leqq PX_i^* \qquad (P \geqq 1;\ \text{tetszőleges})$$

s ez éppen az alapmegoldás — feltéve, hogy a majorizáló egyenletrendszer (X_i^*) alapmegoldása létezik.

A numerikus számítások szempontjából alapvető a harmadik tétel, amely annak elégséges feltételeit rögzíti, hogy az eredeti egyenletrendszerhez konvergáló egyenletrendszer-sorozat:

$$x_i = \sum_{k=1}^{\infty} \overset{s}{c}_{i,k} x_k + \overset{s}{b}_i \qquad (i, s = 1, 2, \ldots)$$

$(\overset{s}{x}{}_i^*)$ alapmegoldásainak sorozata az eredeti rendszer alapmegoldásához konvergáljon. A konvergenciát így kell értenünk:

$$\lim_{s\to\infty} \overset{s}{c}_{i,k} = c_{i,k};\quad \lim_{s\to\infty} \overset{s}{b}_i = b_i;\quad \lim_{s\to\infty} \overset{s}{x}{}_i^* = x_i^*.$$

A gyakorlati számítások szempontjából ugyanis sokkal előnyösebb a harmadik tétel alapján bizonyos véges lineáris egyenletrendszerek „alapmegoldásai"-val közelíteni a keresett alapmegoldást, mint a szukcessziv approximáció módszerével.

Ezután két szűkebb, de a gyakorlat szempontjából nagyon fontos egyenletrendszer-típus, az ú. n. reguláris, ill. teljesen reguláris egyenletrendszerek vizsgálatára tér át. Regulárisnak nevezzük az egyenletrendszert, ha a matrixsorokra a

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_{i,k}| = 1 - \theta_i \qquad (\theta_i > 0),$$

teljesen regulárisnak, ha a

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_{i,k}| \leqq 1 - \theta \qquad (\theta > 0)$$

reláció teljesül. E típusokra is megfogalmazza, ill. részben élesíti is a fentebb megfogalmazott tételeket. A harmadik tétel alapján itt két — algebrai úton megoldható — egyenletrendszersorozatot épít fel, amelyek közül az első sorozathoz tartozó megoldásrendszerek felülről, míg a másikhoz tartozóak alulról közelítik a keresett alapmegoldást. Az így adódó hibabecslés javítása céljából ismerteti KOJALOVICS vizsgálatait. A paragrafust a végtelen egyenletrendszerre vonatkozó egyéb kutatások eredményeinek ismertetésével és néhány numerikusan kidolgozott példával zárja.

A harmadik ill. negyedik paragrafus a Fourier-módszer továbbfejlesztésével foglalkozik: először azt mutatja meg, hogy ha az adott lineáris elliptikus (és változó-transzformációval homogénné redukált) differenciálegyenlet partikuláris megoldásainak egy seregét ismerjük (amelyek persze általában a kerületi feltételeket nem elégítik ki) hogyan és milyen feltételek mellett tudjuk egy — a fenti seregből alkotott — végtelen sor segítségével megoldani a peremérték-feladatot. A következőkben az adott kerületértékproblémában (a függő változó) lineáris transzformációja segítségével a határfeltételeket alakítja homogénné (ekkor persze a differenciálegyenlet lesz inhomogén). Ez esetben a függvények olyan seregéből alkotott végtelen sorral elégítjük ki a differenciálegyenletet, amely sereg valamennyi függvénye kielégíti a homogén határfeltételeket. Az első módszer kapcsán egy adott görbe mentén ortogonális függvényrendszer konstruálását kell megoldanunk (vagy alkalmas módon megkerülnünk), míg a második módszer felveti egy tartományban ortogonális függvények problémáját.

Az ötödik paragrafus ismét alapvető jelentőségű a numerikus számítások szempontjából. Az eddig ismertetett közelítő módszerek alkalmazásánál ugyanis minden alkalommal felmerült az a feladat, hogy bizonyos függvények Fourier-sorát (tágabb értelemben) kell meghatároznunk és a megoldást is Fourier-sor alakjában kaptuk. Döntő jelentőségű tehát az a kérdés, hogy milyen gyorsan konvergálnak ezek a sorok. Ismeretes, hogy ezt — ha az ortogonális függvényrendszer maga rögzítve van — a sorbafejtendő függvény strukturális tulajdonságai határozzák meg: mennél többször differenciálható folytonosan a kérdéses függvény, annál gyorsabban konvergálnak Fourier-sorának szeletei. Mármost azt a feladatot, hogy adott — tehát adott szakadásokkal rendelkező — függvényt Fourier-sorának már kis indexű szeletei is jól közelítsenek — pontosabban, hogy lehetőleg kevés Fourier-együtthatót kelljen kiszámítanunk ahhoz, hogy az ezek segítségével előállított összeg jól approximáljon — viszonylag könnyen megoldhatjuk, ha a függvény végesszámú pont kivételével (ahol a függvénynek ill. deriváltjainak elsőfajú szakadásai vannak) elég sokszor folytonosan differenciálható. Ekkor t. i. olyan függvények kivonásával, amelyeknek Fourier-együtthatóit már ismerjük és amelyek egy-egy pontban elsőfajú szakadást szenvednek valamelyik deriváltjukban, pontrólpontra megszüntetjük a sorbafejtendő függvény szakadásait. Ha a kapott függvény már elég sokszor differenciálható folytonosan az egész alapintervallumon, Fourier-sorának szeletei elég gyorsan approximálnak; most már csak a levont függvények (ismert) Fourier-sorának elég magas indexű szeleteit kell a kapott összeghez hozzáadnunk, hogy kevés számolással is jó approximációt érjünk el. Lényegesen nehezebb a másik feladat megoldása; a megoldásnak ugyanis csak a Fourier-sorát ismerjük, s így az előbb leírt utat fordítva kellene bejárnunk; ezt azonban általában nem tudjuk megtenni. Ehelyett „preventív" módszerrel elérjük, hogy a kapott Fourier-sor elég gyorsan konvergáljon. T. i. az inhomogén differenciálegyenlet jobboldalán és a kerületi feltételekben szereplő elsőfajú szakadásokat igyekszünk megszüntetni (az adott differenciálegyenletet olyan jobboldallal ill. kerületi feltételek mellett oldjuk meg, amelyek ugyanazon típusú szakadásokkal rendelkeznek, mint az eredeti függvények, egyébként azonban megfelelően választhatók; a tartományoknak sem kell teljesen megegyezniök; így tehát az utóbbi feladat általában lényegesen egyszerűbb). Utóbbi feladat megoldásának és az eredeti függő változónak a különbségét vezetve be, az új kerületi-értékfeladat maga, s így megoldása is „regulárisabb". Néhány példán bemutatják a szerzők, hogy ez a „preventív" módszer tulajdonképpen egybeesik azzal az eljárással amit fentebb mutattunk be, de aminek a megfordítását *közvetlenül* nem tudjuk elvégezni.

A második fejezet a Fredholm-féle integrálegyenletek néhány közelítő megoldási módszerét mutatja be. A legegyszerűbb közelítés alapgondolata: az integrál-operációt valamely kvadratúra formulával közelítve, lineáris egyenletrendszert kapunk a kvadratúra-csomópontokban felvett függvényértékek közelítései számára. E módszer alkalmazását különböző nehézségek, szingularitások gátolhatják. Részletesen foglalkozik a fejezet ezek megkerülésével, továbbá a hibák becslésével. A másik lehetőség a közelítő megoldásra: a magot elfajuló maggal helyettesítjük. Igen fontos kérdés az így adódó hiba lehető pontos becslése, amit a szerzők a szokásostól eltérő nagyon elegáns módszerrel végeznek.

A harmadik fejezetben egy univerzálisnak mondható módszert ismertetnek a szerzők, amely különösen arra alkalmas, hogy kevés számolással is áttekintő képet kapjunk a megoldás viselkedéséről. A módszer alapgondolata: a kerületi feltételek által meghatározott tartomány belsejében és kerületén bizonyos számú pontot véve fel, a megoldásfüggvény e pontokban felvett értékét tekintjük ismeretlennek. Az adott pontokon átfektetett interpoláló polinomok differenciálásával közelítő kifejezéseket kapunk a csomópontokban a megoldásfüggvény differenciahányadosaira — éspedig az eredetileg felvett ismeretlen függvényértékek lineáris kombinácójaként. Ezek között a differenciálegyenlet előír egy relációt, amelyet minden csomópontban teljesíteni akarunk. Így a csomópontok számától függően bizonyosszámú egyenletet kapunk, amely rendszert kiegészítjük a határfeltételeknek megfelelő egyenletekkel. Ilymódon általában elegendőszámú egyenletet tudunk felírni az ismeretlenek meghatározására. A módszert egyébként differenciaegyenletek módszerének szokták nevezni, mert legegyszerűbb (de általában legdurvább) módon a differenciálhányadosokat a differenciahányadosokkal helyettesíthetjük. Részletesen foglalkozik a fejezet a hibabecslés elvégzésével, de nem emlékezik meg a módszer újabb, igen hatékony javításairól, ill. általánosításairól.

A negyedik fejezet az ú. n. variációs módszereket ismerteti. Ezeknek Ritz-től származó alapgondolata a következő: Az adott differenciálegyenlet bizonyos feltételek mellett egy variációs probléma Euler—Lagrange egyenletének tekinthető. Kézenfekvő tehát ez esetben a differenciálegyenletet és a kerületi feltételeket kielégítő megoldás közelítő meghatározása helyett az adott variációs problémát minimalizáló (és a kerületi feltételeket kielégítő) megoldás közelítését keresni. Utóbbit ugyanis egy többparaméteres függvénysereg függvényei közül választhatjuk ki; a minimumfeladat a paraméterekre vonatkozó minimumfeladatra, azaz közönséges egyenletrendszerre redukálódik. A függvénysereget itt célszerű úgy megválasztani, hogy a paraméterek bármely értékéhez tartozó függvény kielégítse a kerületi feltételeket. E módszerrel kapcsolatban igen nehéz feladatot jelent a hibabecslés, és rengeteg a még nyitott kérdés. Ezekről széleskörűen tájékoztatnak a szerzők. Ismerteti a fejezet a Ritz-módszernek KANTOROVICStól eredő szellemes javítását; KANTOROVICS ugyanis a függvénysereget nem paraméterekkel, hanem csak az egyik változótól függő, tetszőleges függvényekkel építi fel. Így a minimumfeladat nem egyenletrendszerre, hanem (közönséges) differenciálegyenletrendszerre vezet, amit ugyan általában nehezebben tudunk megoldani, viszont a kiindulásul választott függvénysereg lényegesen tágabb KANTOROVICS módszerénél és így a minimalizáló függvény a megoldást általában sokkal jobban közelíti. Nem foglalkoznak a szerzők TREFFTZ-módszerével, amely szintén variációs elven alapul; ez különösen azért hiányzik, mert a variációs módszerekkel kapcsolatos hibabecslések igen nehézkesek és általánosságban nincsenek megoldva; megfelelően választott függvénysereg minimalizálásával viszont el lehet érni, hogy a TREFFTZ-módszerrel kapott minimalizáló függvény alulról, míg a RITZ-eljárással kapott felülről közelíti a megoldást, amivel közvetlen hibabecslést kaphatunk.

Az eddig felsorolt módszerek csak addig használhatóak, amíg az adott kerületértékproblémához meg tudjuk találni a hozzátartozó variációs feladatot. Ezért ismerteti a fejezet GALJERKIN módszerét is, amely mindig alkalmazható. Alapelve: a RITZ-módszerhez hasonlóan egy n-paraméteres $w(x, y; a_1, \dots, a_n)$ függvényseregből keresünk közelítő megoldást, ahol a függvénysereg valamennyi függvénye kielégíti a kerületi feltételeket. Ha ezt a függvénysereget helyettesítjük a homogénre redukált differenciálegyenletbe, eredményül egy $\varepsilon(x, y; a_1, \dots, a_n)$ függvényt kapunk. Ha meg tudnók határozni a paraméterek egy olyan $a_1^0, a_2^0, \dots, a_n^0$ rendszerét, amelynél $\varepsilon \equiv 0$ lenne, akkor a pontos megoldással rendelkeznénk. Ehelyett egy lineárisan független függvényrendszert választva, azt a követelményt tűzzük ki a paraméterekre vonatkozóan, hogy ε legyen ortogonális a kerületi feltételek által határolt tartományban a függvényrendszer első n függvényére. A paraméterek így kapott értékei által meghatározott függvényt tekintjük a megoldás közelítésének. GALJERKIN módszere természetesen minden peremértékprobléma esetében használható. Azért ismertetik a szerzők e módszert is a negyedik fejezetben, mert olyan problémák esetében, amikor a RITZ-módszer is alkalmazható, közös és megfelelően választott függvényseregből kiindulva (és a lineárisan független rendszert is megfelelően választva) a két módszer azonos eredményt szolgáltat. Erre számos példa hívja fel figyelmünket, de elméletileg is könnyen magyarázható e tény.

Az ötödik fejezet tartományok konformis leképzését szolgáltató függvények közelítő meghatározásával foglalkozik. Ez a könyv legnagyobb és módszerekben legbővebb fejezete.

A hatodik fejezet mutatja meg, hogy az elliptikus differenciálegyenletek kerületértékfeladatai szempontjából miért nagyjelentőségű a konformis leképzések elmélete. Ismeretes ugyanis, hogy minden lineáris másodrendű, kétváltozós elliptikus differenciálegyenlet

$$\Delta f + a(x, y) f_x + b(x, y) f_y + c(x, y) f = h(x, y)$$

alakra transzformálható, ahol $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ az ú. n. Laplace-operátor. Ha a $\xi = \xi(x, y)$; $\eta = \eta(x, y)$ relációk segítségével új független változókat vezetünk be és $\xi + i\eta = g(x + iy) = g(z)$ a z változó analitikus függvénye a kerületi feltételek által meghatározott tartományban, akkor a differenciálegyenlet új alakja:

$$f_{\xi\xi} + f_{\eta\eta} + a^*(\xi, \eta) f_\xi + b^*(\xi, \eta) f_\eta + c^*(\xi, \eta) f = h^*(\xi, \eta),$$

azaz a Δ operátor a $(\xi, \eta; x, y)$ transzformációval szemben ez esetben invariáns. Ha tehát a $g(z)$ analitikus függvényt úgy választjuk meg, hogy a kerületi feltételek által meghatározott tartomány olyan tartományra transzformálódjék, amelyre a lineáris elliptikus differenciálegyenlet megoldása ismeretes, a peremértékfeladatot sikerült megoldanunk.

A negyedrendű elliptikus differenciálegyenletek közül a műszaki alkalmazásokban (elsősorban rugalmasságtanban) kiemelkedő szerepet játszik az ú. n. biharmonikus differenciálegyenlet.

$$\Delta\Delta u = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 0.$$

Az ezzel kapcsolatos peremértékfeladatok nagyrészét meg tudjuk oldani bizonyos egyszerű tartományok esetén. Itt is meg tudjuk tehát oldani az általános problémát, ha ismerjük azt a transzformációs függvénypárt, amelyre a $\Delta \cdot \Delta$ biharmonikus operátor invariáns és amely az adott tartományt egy előbb említett egyszerű tartományba viszi át. GOURSAT kimutatta, hogy e feladat megoldásánál is sikerrel alkalmazhatjuk a komplex változós függvényeket, bár nem olyan közvetlenül, mint a Laplace-operátor esetében. Szerzők ezt, továbbá a biharmonikus differenciálegyenlet rugalmasságtani jelentőségét több példával illusztrálják.

A következőkben — ez, az eddig mondottakból természetszerűen következik — a VI. fejezet a másodrendű lineáris elliptikus differenciálegyenlettel ill. a biharmonikus egyenlettel kapcsolatos első, másod és harmadfajú peremértékfeladatokat tárgyalja — éspedig a legegyszerűbb tartományokra: körre, körgyűrűre, félsíkra stb.

A VII. fejezet a SCHWARZ- és a SCHWARZ—NEUMANN-féle alternáló eljárást mutatja be; a szerzők felhívják a figyelmet arra, hogy az alternáló módszer eszközeiben és a számítások tekintetében egyszerű, a feladatok igen széles osztályára alkalmazható, a hibabecslések viszonylag egyszerűen végrehajthatók; az eljárás ennek ellenére nem nagyon terjedt el. A módszer alapgondolata a következő: Valamely függvényegyenlet vagy differenciálegyenlet megoldását keressük egy olyan tartományban, amely egyesítése (SCHWARZ) vagy közös része (NEUMANN) két, esetleg több olyan tartománynak, amelyekben az egyenlet megoldását tetszőleges kerületi feltételek mellett meg tudjuk adni. Ha a függvény-, vagy differenciálegyenlet bizonyos — alább ismertetendő — feltételeknek eleget tesz, akkor a kérdéses tartományra vonatkozó kerületértékfeladatot iterációs eljárással meg tudjuk oldani olymódon, hogy egymásután megoldjuk a feladatot az egyes összetevő tartományokban olyan kerületi feltételek mellett, amelyeket egyrészt a kitűzött feladat, másrészt az előző (valamelyik másik tartományra vonatkozó) iterációs lépés megoldásának az adott tartomány határa egy részén felvett értékkészlete határoz meg.

Az $F[u]=0$ alakban felírt egyenlettől a következőket kívánjuk meg ahhoz, hogy az eljárás tartományok egyesítése révén kapott tartományokra alkalmazható legyen:

1. (Unicitás): Két olyan u és u^* megoldása az $F[u]=0$ egyenletnek, amelyek egy tetszőleges D tartományban korlátosak és D határán (esetleg végesszámú pont kivételével) azonos határértékkel rendelkeznek, D-ben mindenütt legyenek egyenlőek.

2. Ha az előző feltételek mellett a D tartomány határgörbéjén, Γ-án mindenütt

$$u^* \geqq u,$$

akkor D-ben is mindenütt teljesüljön az

$$u^* \geqq u$$

egyenlőtlenség.

3. Ha a D tartományban az $F[u]=0$ egyenlet megoldásainak monoton csökkenő vagy növekvő és egyenletesen korlátos $\{u_n\}$ sorozatát tekintjük, akkor e sorozat határfüggvénye is ki kell, hogy elégítse $F[u]=0$-t.

4. Az $F[u]=0$ egyenlet bármely D-ben korlátos és D határán, Γ-n határértékekkel rendelkező megoldása sem pozitív maximumát, sem negatív minimumát D belsejében nem veheti fel.

5. Az $F[u]=0$ egyenlet valamely a D tartományban korlátos megoldása rendelkezzék a D tartomány Γ határgörbéjének valamely P_0 pontja környezetében mindenütt határértékkel. Ha a Γ határgörbén P_0-hoz közelítve, a kerületen felvett értékeknek van határértéke, bármelyik oldalról közelítünk is Γ-n P_0-hoz, és ezen határértékek egymással megegyeznek, akkor a megoldásnak is ezzel megegyező határértékének kell lennie, bárhogy is közelítünk a D tartomány belsejéből P_0-hoz.

Ezen öt feltétel teljesülése elégséges ahhoz, hogy a SCHWARZ-féle módszer segítségével exponenciális nagyságrendben közelítsük a helyes megoldást; adott feladatnál a közelítés rendje effektív is számítható elég könnyen, sőt, felülről, ill. alulról közelítő függvények sorozatát is könnyen elkészíthetjük. Meg kell jegyezni, hogy a módszer alkalmazásakor tulajdonkép csak az egyes approximációk kerületi értékeire van szükségünk, ami különösen egyszerűsíti a numerikus munkát. Ezután verifikálják a szerzők, hogy a lineáris elliptikus differenciálegyenletek általában kielégítik a fenti 5 elégséges feltételt, s így a módszer esetükben alkalmazható. A Laplace-egyenlet esetében a konvergencia sebességének becslését is megtaláljuk.

Részletesen tárgyalja a fejezet a SCHWARZ—NEUMANN módszer alkalmazásának elégséges feltételeit, azaz tartományok közös részére vonatkozó peremfeladatok megoldását is diszkutálja. A megfogalmazott elégséges feltételek lényegében azonosak fenti feltételeinkkel, csakhogy azokat egy továbbival is ki kell egészítenünk. E módszer esetében is becsülni tudjuk a konvergencia sebességét (szintén exponenciális rendű) és könnyen tudunk felülről, ill. alulról approximáló sorozatot készíteni.

Példakép a Laplace-egyenlet szögprofilokra vonatkozó DIRICHLET feladatának részletes numerikus kidolgozását adják a szerzők.

Ki kell emelnünk a számos irodalmi utalást és a még meg nem oldott problémákkal kapcsolatos világos feladatkitűzést, amellyel a szerzők segítséget és ösztönzést adnak mindazoknak, akik e feladatkörrel a könyv anyagán túlmenően kívánnak foglalkozni.

A TUDOMÁNYOS MINŐSÍTŐ BIZOTTSÁG HÍREI

A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai és Fizikai Osztályának Közleményei a jövőben közölni fogják a matematikai, fizikai és csillagászati tárgyú doktori, illetőleg kandidátusi értekezések nyilvános vitájáról a bíráló bizottságok titkárai által elkészített jelentéseket. 1954. április 30-ig az említett tudományok területéről egy matematikai doktori értekezés (Fuchs László) és két matematikai kandidátusi értekezés (Freud Géza és Tandori Károly) megvédésére került sor.

A vitákról befutott jelentéseket az alábbiakban közöljük:

Fuchs László doktori disszertációjának nyilvános vitája

Tudományos életünk jelentős eseményének voltunk tanúi 1954. március 18-án. Ezen a napon került sor első ízben magyar matematikus doktori disszertációjának nyilvános vitában való megvédésére. A disszertáns *Fuchs László,* a matematikai tudományok kandidátusa, az ifjabb magyar matematikus nemzedék egyik legkiválóbb tagja, aki nevét az absztrakt algebra különböző területein elért szép eredményeivel már eddig is ismertté tette a világirodalomban.

„A végtelen Abel-csoportok struktúraproblémájáról" című disszertációjának eredményeit *Fuchs László* rendkívül szabatosan, más kutatási területen működő matematikus számára is érthetően és élvezetesen adta elő. Utalt a csoportelméletnek, a modern matematika egyik legátfogóbb fejezetének rendkívüli fontosságára, amely gazdag alkalmazási lehetőségeivel benyomult a matematikának úgyszólván minden területére. A csoportok általános elméletének legfontosabb fejezete a kommutatív, vagy Abel-féle csoportok elmélete. Az Abel-csoportok közül a véges csoportok teljes leírását adja a *Frobenius* és *Stickelberger* által a mult század vége felé bizonyított alaptétel, amely szerint minden véges (additív) Abel-csoport ciklikus csoportok direkt összegére bontható. Ez a tétel képezi kiindulási pontját a végtelen Abel-csoportok struktúraproblémájának, amelynek végső célja e csoportok szerkezetének teljes feltárása.

E cél elérésére irányuló vizsgálatok *Fuchs* megállapítása szerint két mederben folynak. Az egyik a direkt út, amely a végtelen Abel-csoportok elég széles osztályainak szerkezetét igyekszik megadni. A másik az indirekt probléma vizsgálata, amely abból áll, hogy jellemezni törekszünk mindazokat a csoportokat, amelyek struktúrája megegyezik a véges Abel-csoportokéval abban, hogy ciklikus csoportok direkt összegére bonthatók.

A direkt irányban előzően elért legnagyobb eredményt *Prüfer, Ulm* és *Zippin* tételei jelentik, amelyek teljesen elintézik a megszámlálható ú. n. torziócsoportok struktúra-kérdését. Felmerült mármost a kérdés, miként lehetne ezeket az alapvető tételeket megszámlálhatónál nagyobb számosságú csoportokra kiterjeszteni. Ebben a problémában kezdetben mutatkozó rendkívüli nehézségeken *Kulikov* szovjet matematikusnak sikerült először új fogalmak és módszerek segítségével utat törni.

Ezen a ponton kapcsolódik a kérdésbe *Fuchs László,* aki *Kulikov* eredményeire támaszkodva sorra veszi *Prüfer, Ulm* és *Zippin* tételeinek tetszőleges számosságú torziócsoportokra való átvihetőségének lehetőségeit. A disszertáció legkimagaslóbb eredménye az, hogy sikerült megtalálnia *Zippin* tételének általánosítását tetszőleges számosságú torziócsoportokra. Ezt az általánosítást legújabban *Kulikov* is megtalálta és azt egy két részből álló, összesen 163 oldalnyi terjedelmű dolgozat fő eredményeként nyeri valamivel általánosabb alakban. *Fuchs Kulikov* ezen eredményéről nem tudva, annak teljes publikálása előtt oldotta meg a *Zippin*-tétel általánosításának problémáját. A disszertációjában adott bizonyítás *Kulikov*étól lényegesen különbözik, annál jóval egyszerűbb és áttekinthetőbb, amit meggyőzően mutat az a tény, hogy *Kulikov* terjedelmes dolgozatával szemben (amelynek jelentős részét a szóbanforgó tétel bizonyítása tölti ki) *Fuchs* bizonyítása csupán 8—10 oldalra terjed.

Az általánosított *Zippin*-tétel felhasználásával *Fuchs* példákat konstruál arra a *Kulikov* által már előzőleg felismert tényre, hogy *Ulm* tétele megnemszámlálható csoportokra nem igaz.

Prüfer tétele — amely az alaptételnek végtelen magasságú elemet nem tartalmazó megszámlálható torziócsoportokra való érvénybenmaradását mondja ki — eredeti alakjában szintén nem vihető át megnemszámlálható csoportokra. Fennáll azonban *Kulikov* egy tétele, amely a nagyobb számosságú csoportokra való kiterjesztést a bázis-alcsoport fogalmának segítségével éri el. A direkt összeg helyett a tágabb „interdirekt" összeget szerepeltetve, *Fuchs* erre a tételre új bizonyítást ad és kiegészíti azáltal, hogy az interdirekt öszszegre tett (mindig realizálható) megszorítással az összeadandók rendjének egyértelműségét is biztosítja.

Az indirekt problémára térve, több feltétel volt ismeretes ciklusösszegként előállítható csoportokra. Ezek azonban vagy csak torziócsoportokra, vagy csak torziómentes csoportokra vonatkoznak. A disszertáció *Kertész* egyik idevágó tételének átfogalmazásából kiindulva két szükséges és elégséges kritériumot is ad semminemű megkötést sem tartalmazó Abel-csoportok ciklusösszegre való bonthatóságára. Ezek a szépen hangzó feltételek egymásnak duálisai s közülük az elsőből korolláriumként nyerhető az összes eddig ismert feltétel.

Fuchs beszámolója után következett a kijelölt opponensek: *Hajós György, Rédei László* és *Szele Tibor* bírálata. *Hajós* hangsúlyozta, hogy az absztrakt algebra elvontsága révén élesen elkülönül a matematika többi fejezetétől. Az absztrakt algebrának e különleges jellegéből következik, hogy ilyen munkák értékelésénél is különleges szempontokat kell érvényesíteni. A matematika többi fejezetében többnyire a már kikristályosodott fogalmakkal jutunk eredményhez, új fogalomalkotásra ritkábban van szükség. Az absztrakt algebrában viszont igen gyakran új fogalmak bevezetése az előrehaladás kulcsa. Ugyanekkor az indokolatlan fogalomalkotások és a mesterkélt fogalmakkal való gyakorlatozás a tudomány továbbépítése helyett könnyen elszakíthatja a kutatót a tudományos realitástól. A fejlődés egészséges útja az, ha az új fogalom valamely természetes probléma boncolgatásából vagy megoldásából születik. *Fuchs* disszertációja e tekintetben az egészséges irányzatú, a tudományt továbblendítő munka példája. Különösen értékessé teszi a munkát az, hogy olyan problémában ér el eredményeket, amelyik a matematikusok érdeklődésének homlokterében áll.

A továbbiakban az opponensek élénk és tanulságos képet adtak a struktúra-probléma történeti fejlődéséről és egyhangú elismeréssel méltatták a disszertáns által bevezetett új fogalmakat és az elért eredményeket. *Rédei* párhuzamot von a kommutatív testek *Steinitz* által megalapozott és lezártnak tekinthető elmélete és a kommutatív csoportok elmélete között, amely ma még a mozaikszerűség állapotában van és hézagtalan felépítése távoli vágyálomnak tűnik. Utalt arra az eredményes együttműködésre, amely az absztrakt algebra terén szovjet és magyar matematikusok között kialakult. *Szele* értékes, több új szempontot tartalmazó bírálatában kiemeli, milyen kiválóan ismeri *Fuchs László* a kérdéses tárgykört és annak gazdag irodalmát.

Az első két opponens bizonyos „hibákra" is rámutatott. *Hajós* szerint a disszertáció nem egységes mű, fejezeteit csak a szerző személye, nem pedig a tárgy rendszeres taglalása köti össze. *Fuchs*nak a vegyes csoportok struktúrájára vonatkozó tételét *Hajós* és *Rédei* egyaránt bonyolultan hangzónak és a disszertáció többi eredményéhez viszonyítva csekély jelentőségűnek tartja. *Hajós* szerint helyesebb lett volna ezt a tételt a disszertációból elhagyni. Az indirekt probléma *Fuchs*-féle definícióját *Rédei* szűknek találja, amennyiben a ciklusösszegekre bontható csoportok mellett felmerül más adott struktúrájú csoportok felismerésének és áttekintésének problémája is. Kifogásolta a disszertáció bevezetését, majd néhány terminológiai és nyelvi észrevételét közölte.

Mindhárom opponens hangsúlyozta a műnek tömör s a könnyedségig világos szerkezetét. Megállapították, hogy a disszertáció rendkívül értékes, új tudományos eredményekkel gazdagítja a modern matematika egyik fontos területét és a legmesszebbmenően alkalmas arra, hogy szerzője e dolgozat alapján a matematikai tudományok doktora fokozatot elnyerje.

Kertész Andor, Surányi János, Kalmár László, Rényi Alfréd, Szele Tibor és *Rédei László* hozzászólásaikban egyrészt több értékes új szempontra és újabb kutatási területekre hívták fel a figyelmet, másrészt — *Fuchs* válaszát megelőzve — igyekeztek *Hajós* és *Rédei* egyes ellenvetéseire megfelelni.

Fuchs gondosan felépített, mindenre kiterjedő válasza újabb tanulságot jelentett a hallgatóság számára. Bizonyára mindenkiben megragadt például az a szemléletes kép, amellyel a struktúra-probléma túlbecsülésének helytelenségét szemléltette: „A struktúra-tétel birtoklása még nem jelenti az összes problémák megoldását, hanem csak azt, hogy lényegileg ismerjük azt a terepet, amelyen dolgozunk". A kiváló szakember biztonságát tükröző válasz részletezésébe nem bocsátkozhatunk.

A bírálóbizottság határozata megerősítette az opponenseknek a disszertáció érdemeit méltató megállapításait és a Tudományos Minősítő Bizottságnak javasolta a doktori fokozat *Fuchs Lászlónak* való odaítélését.

A komoly élményt és tanulságot nyujtó vita során *Fuchs László*ban egy szerény, de felfedezéseinek jelentőségével tisztában lévő fiatal tudóst ismerhettünk meg. Szívből kívánunk szépen induló pályafutásához további sikereket.

Fejes Tóth László
a matematikai tudományok doktora.

Freud Géza „Tauber-típusú tételek maradéktaggal" című kandidátusi értekezésének vitája

1954. január 19-én rendezte a Tudományos Minősítő Bizottság *Freud Géza* aspiráns „Tauber-típusú tételek maradéktaggal" című kandidátusi értekezésének vitáját. Az értekezés opponensei *Turán Pál* akadémikus és *Szőkefalvi-Nagy Béla* levelező tag volt, a vitában *Fejér Lipót* akadémikus elnökölt.

A vita elején *Freud Géza* ismertette disszertációjának téziseit. Kiemelte, hogy nézete szerint a sorelmélet fejlődése négy szakaszra bontható; az elsőt a végtelen sorokkal való képletszerű formális számolás jellemzi, a másodikban történt a végtelen sor konvergenciájának és összegének szabatos értelmezése, a harmadik szakaszban a sor konvergenciája mellett annak különféle módszerekkel való szummálása került előtérbe, végül a negyedik, kialakulófélben levő szakaszban a puszta konvergencia, illetőleg szummabilitás megállapítása helyett az összegtől, illetőleg szummától való eltérésnek, az ú. n. maradéktagnak minél pontosabb megbecslése a főcél. A disszertáció tárgya ehhez a negyedik kutatási irányhoz kapcsolódik, amennyiben a Laplace-transzformációval kapcsolatos Tauber-típusú tételek maradéktagos élesítésével foglalkozik. A fő segédeszközt ehhez a következő segédtétel szolgáltatja, amely egy *Karamata*-féle approximációtételnek általánosított alakja:

$f(x)$ legyen egy az $[a, b]$ intervallumban korlátos változású függvény m-edik határozatlan integrálja. Ekkor találhatók olyan legfeljebb N-edfokú

$P_N(x)$ és $p_N(x)$ polinomok, melyekre

$$p_N(x) \leq f(x) \leq P_N(x)$$

és

$$\int_a^b [P_N(x)-p_N(x)] \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = O(N^{-m-1}).$$

Ha a fenti integrált $(x-a)^{-1/2}(b-x)^{-1/2}$ helyett egy olyan, (a, b) minden belső részintervallumában korlátos $w(x)$ súlyfüggvénnyel képezzük, amelynek valamelyik (vagy mindkét) végpont környezetében ennél rohamosabban emelkedő értékei vannak, akkor ugyanez a becslés érvényes marad, hacsak $f^{(m)}(x)$ a megfelelő végpont egy kis egyoldalú környezetében 1 exponensű Lipschitz-feltételnek tesz eleget. A maradéktag nagyságrendje nem javítható.

E tétel bizonyításához a *Karamata*-féle módszer lényeges továbbfejlesztésére van szükség.

A disszertáció eredményei magukban foglalják *Korevaar* és *Posztnyikov* tételeit, melyeket a szerzővel egyidőben, tőle függetlenül találtak. Bemutatja a disszertáció az említett approximációtételek egyéb alkalmazásait is, nevezetesen a mechanikus kvadratúra és az ortogonális polinomsorok konvergenciájának elméletében nyer segítségükkel érdekes eredményeket.

Ezután *Turán Pál* akadémikus és *Szőkefalvi-Nagy Béla* levelező tag olvasta fel opponensi bírálatát. Mindketten hangsúlyozták, hogy a disszertációból kitűnik a szerző alapos olvasottsága, a témakörben használatos technikának magas színvonalú ismerete, s nem utolsó sorban sok eredeti gondolatot felmutató, erős analitikus készsége. Ezek alapján mindketten alkalmasnak tartották a disszertációt arra, hogy megvédésével a szerző a kandidátusi fokozatot elnyerje. Ugyanakkor *Turán Pál* rámutatott arra, hogy a következtetések alapjául szolgáló approximációtétel bizonyításában lényeges, bár valószínűleg kijavítható hézag van; *Szőkefalvi-Nagy Béla* kifogásolta, hogy a szerző nem határolja körül elég szabatosan azt a függvényosztályt, amelyre fejtegetései vonatkoznak, s javaslatot tett e hiány pótlására. Mindkét opponens szóvá tette továbbá, hogy a disszertáció kiállítása rendkívül gondatlan és pongyola, számos sajtóhiba található benne s ez a megértést sok helyen igen megnehezíti. *Turán Pál* felhívta még a figyelmet néhány egyszerűsítési lehetőségre is, továbbá a szerző által felsoroltakon kívül egyéb alkalmazási területeket is jelölt meg a disszertáció módszerei számára.

Az opponensek bírálatára ezután *Freud Géza* válaszolt. Egyetértve a bírálóknak a kiállítás fogyatékosságaira vonatkozó megjegyzéseivel, kijelentette, hogy közlés előtt a dolgozatot a bírálók észrevételeinek felhasználásával átdolgozza. Egyetértett *Szőkefalvi-Nagy Bélának* a szereplő függvényosztály helyesebb körülhatárolására vonatkozó észrevételeivel is. Majd részletesen előadta, miképpen lehet a bizonyítás megváltoztatásával a *Turán Pál* bírálatában említett hézagot megszüntetni.

Szünet után először *Kalmár László* szólalt fel. Kifogásolta, hogy a tézisek kinyomtatott szövegében számos sajtóhiba volt; kapott ugyan egy olyan példányt is a tézisekből, amelyben a hibák kézzel ki voltak javítva, de ebben a példányban is akadt még hiba. Egyébként is, ha a tézisek csak a tételek szövegét tartalmazzák bizonyítások nélkül, a bírálóbizottság tagjai a tézisek alapján nem tudnak megfelelően felkészülni a vitára. Hangsúlyozta azután, hogy mennyire helyes a szerzőnek az a megállapítása, hogy a sorelmélet fejlődésének új szakaszát jelenti a maradéktagbecslések előtérbe helyezése, s rámutatott arra, hogy ebben az irányban elsőrangú gyakorlati jelentőséggel az ismert konstansokkal történő megbecslések bírnak, s kevésbbé értékesek a pusztán nagyságrendet szolgáltató ordó-becslések, amilyenek a disszertációban is szerepelnek. Nem értett egyet a szerzőnek azzal a megjegyzésével, hogy maradéktagos Tauber-típusú tételeket a számelméletben először *Landau* és *Heilbronn* alkalmazott, ilyenek — szerinte — már régebben is szerepeltek, legfeljebb nem mondták ki azokat explicit alakban. Kiemelte végül a disszertációban követett bizonyítási módszernek azt a tanulságát, hogy az igazán mély tételek mindig a kétoldalról való megközelítésből adódnak, amely történetileg is sokkal előbb jelentkezett, mint a konvergencia-fogalom.

Ezután *Rényi Alfréd* aspiránsvezető szólalt fel. Az előbbi hozzászólóval szemben elegendőnek tartotta, ha a kinyomtatott tézisek a tételek pontos szövegét tartalmazzák s a bizonyítások módszerére csak utalnak; a teljes bizonyítások közlését nem látja kivihetőnek. Fontos azonban, hogy a tézisekhez a vita minden részvevője hozzájusson: esetleg a vita előtt néhány nappal a disszertációt a vidéki egyetemek könyvtárainak is el lehetne küldeni.

Alexits György azt kérdezte a szerzőtől, hogy ha egyoldali Tauber-feltétel helyett kétoldali feltételt használ, nem adódik-e módszerével valamilyen a konvergenciánál erősebb állítás is, mint ahogyan az más Tauber-típusú tételeknél lenni szokott. A tézisek kérdésével kapcsolatban inkább *Kalmár László* álláspontja felé hajlik, a bizonyításoknak legalább is vázlatos közlését a disszertáció tartalmának helyes értékelése szempontjából nélkülözhetetlennek tartja.

Egerváry Jenő azt a kérdést intézte a szerzőhöz, hogy vajjon az általa használt kétoldali polinom-approximáció helyett nem volna-e elegendő a legjobban közelítő Csebisev-féle polinommal nyerhető becslés, bár valószínűnek tartja, hogy ezáltal gyengébb maradéktag adódik.

Turán Pál megjegyezte, hogy a disszertáció gondolatkörébe vágó fontos feladat volna *Wiener* Tauber-típusú tételének maradéktagos élesítése.

Szőkefalvi-Nagy Béla kifogásolta, hogy a mult év áprilisában benyújtott disszertáció csak januárban kerül megvédésre; ennek többek között esetleges prioritási kérdésekben is hátrányos következményei lehetnek. Ehhez a megjegyzéshez *Fejér Lipót* is csatlakozott.

Ezután *Freud Géza* válaszolt a hozzászólásokra. Megemlítette, hogy a nagyságrendi becsléseknek numerikus állandókkal való megbecslésekké való élesítése irányában az első lépést sikerült megtennie. Azt az állítását, hogy a számelméletben *Landau* és *Heilbronn* használ először Tauber-típusú becslést, azzal indokolja, hogy ők az elsők, akik világosan megmondják, hogy a szereplő sor által kielégített sokféle Tauber-típusú feltétel közül melyiket használják fel okoskodásukban. *Turán Pál* és *Alexits György* kérdéseire nem tud még válaszolni, a felvetett szempontok további vizsgálatok tárgyát kell, hogy képezzék. *Egerváry Jenő* kérdésére megjegyzi, hogy az általa javasolt becslési módszer az elérteknél jelentősen gyengébb következményeket szolgáltatna. A téziseket illetően úgy érzi, hogy a bizonyítási módszerekre vonatkozóan azokban elég sok támpont van; kiállításuk fogyatékossága annak a következménye, hogy ő csak egy korrektúrát kapott, s ez matematikai szövegnél kevésnek bizonyult.

A bíráló bizottság a szerző válaszát elfogadta s határozathozatalra vonult vissza. Szünet után *Fejér Lipót* elnök hirdette ki a bizottság döntését:

„A Tudományos Minősítő Bizottság által kiküldött bíráló bizottság Freud Géza: „Tauber-típusú tételek maradéktaggal" című kandidátusi disszertációjáról megállapította, hogy az irodalom széleskörű ismeretéről tanuskodik és értékes önálló eredményeket tartalmaz. Vizsgálatainak tárgya olyan témakör, amely a század eleje óta a kor kiváló matematikusait foglalkoztatta. A jelölt e témakörben lényegesen új eredményeket ért el. A dolgozat lényegét alkotó harmadik fejezet világosan mutatja a szerző kifinomult technikáját és analitikus erejét. Dolgozata — eredményei mellett — további érdekes kérdéseket is felvet.

A dolgozat két helyrehozható hibát tartalmaz. Az egyik hiba egy szereplő függvényosztály nem eléggé szabatos körülhatárolása; a másik pedig egy hézag a majoráns polinom megszerkesztésében. A jelölt az opponensek véleményének birtokában az előbbit a tétel szabatos megfogalmazásával, az utóbbit a bizonyítás módosításával, tudniillik alkalmas majoráns polinom megadásával a vita során helyrehozta.

A bizottság megállapítja, hogy a dolgozat értékes tartalmával éles ellentétben áll a gondatlan fogalmazás és külalak.

Mindezek figyelembe vételével a bizottság úgy találja, hogy a jelölt dolgozatával a matematikai tudomány továbbfejlesztésére való alkalmasságát megmutatta.

A bizottság az elhangzott indokok alapján egyhangúlag javasolja a Tudományos Minősítő Bizottságnak, hogy *Freud Gézát* nyilvánítsa a matematikai tudományok kandidátusává."

Császár Ákos
a matematikai tudományok doktora.

Tandori Károly kandidátusi disszertációjának nyilvános vitája

1954. január 19-én rendezte a Tudományos Minősítő Bizottság *Tandori Károly* kandidátusi disszertációjának vitáját a budapesti Eötvös Loránd Tudományegyetem Fizikai Intézetében. A vita elnöke *Riesz Frigyes* akadémikus volt, a disszertáció opponenseiül a TMB *Turán Pál* akadémikust és *Szőkefalvi Nagy Béla* levelező tagot kérte fel.

Tandori Károly disszertációjának címe: Ortogonális polinomsorok Cesàro-szummációja. A benyujtott mű 10 §-ból áll, részletes irodalomjegyzéket tartalmaz, terjedelme 55 gépelt oldal.

A szóbanforgó disszertáció a következő témával foglalkozik. Közismert, hogy a matematikai analízisben és a matematikai fizikában a Fourier-sorok igen jelentős szerepet játszanak; ennek köszönhető, hogy függvényeknek Fourier-sorokkal való előállítása kérdését igen részletesen és behatóan tanulmányozták.

A Fourier-sorok mellett az ortogonális polinomok szerint haladó függvénysorozatokkal való előállítás is számos, részletes vizsgálat és kutatás tárgya volt. Ennek oka megint csak e sorok széleskörü alkalmazásában keresendő. E vizsgálatokat megkönnyítette az, hogy az alkalmazásokban leggyakrabban használt Jacobi-, Laguerre- és Hermite-polinomoknak számos, jól kezelhető előállítása ismert, amelyekből jó nagyságrendi becslések és asszimptotikus formulák vezethetők le. Az előbb említett ú. n. klasszikus polinomok szerint haladó sorokkal való előállításra vonatkozó kutatásoknál szinte nélkülözhetetlennek bizonyult, hogy a részletösszegek magját zárt alakban lehet előállítani a Christoffel—Darboux-féle formula segítségével.

Tudott tény, hogy folytonos függvény Fourier- vagy ortogonális polinomok szerint haladó sora divergens lehet, ezért a Fourier-sorokhoz hasonlóan felmerült az ortogonális polinomok szerinti kifejtések szummálhatóságának a kérdése is. Az ezzel kapcsolatos első eredmény *Fejér Lipót* nevéhez fűződik, aki 1908-ban bebizonyította, hogy abszolut integrálható függvény Laplace-sora a függvény minden folytonossági pontjában (C, 2) szummálható.

Fejér Lipót eredménye óta számosan foglalkoztak a klasszikus polinomok szerint haladó sorok szummálhatóságának kérdésével és ezen a téren sok értékes eredménnyel rendelkezünk. Ezzel szemben az általános ortogonális polinomok szerint haladó sorok szummálhatóságára vonatkozó ismereteink eddig igen hiányosak voltak. A fő nehézséget e téren az okozta, hogy a szummáció magjának zárt alakban való előállítása nem ismeretes.

Tandori Károly disszertációja ezzel az eddig ki nem derített kérdéssel foglalkozik. Alapgondolata abban áll, hogy *Hardy* és *Littlewood* bizonyítási módszerét, mellyel a Fourier-sorok erős szummációjára vonatkozó közismert tételeiket bizonyítják — bizonyos megszorítások mellett — általános ortogonális polinomok szerinti kifejtésekre viszi át. Módszerében a szummációs magot sehol sem használta fel, csupán a részletösszegek magjának bizonyos tulajdonságaira van szüksége. Ez utóbbiakra érvényes a Christoffel—Darboux-féle formula, mely lehetővé teszi a részletösszegek magfüggvényeinek zárt formában való előállítását.

Jelölje $\{p_n(x)\}$ az $[a, b]$ intervallumon definiált $w(x) \geqq 0$ súlyfüggvény által egyértelműen meghatározott ortogonális és normált polinomrendszert. Legyen $L^p_w(a, b)$ azon függvények osztálya, melyekre

$$\int_a^b |f(x)|^p w(x) dx < \infty$$

és $s_\nu(f; x)$ az $f(x)$ függvény $\{p_n(x)\}$ szerinti kifejtésének ν-edik részletösszege.

Tandori dolgozatának legfőbb eredményét a következő tétel fejezi ki:

Legyen $1 < p \leqq 2$ és $a \leqq c < d \leqq b$, és tegyük fel, hogy $f(x) \in L^2_w(a, c)$; $f(x) \in L^p_w(c, d)$; $f(x) \in L^2_w(d, b)$.

Ha a $p_n(x)$ polinomok a $[c, d]$ részintervallumon közös korlát alatt maradnak, akkor bármely $r > 0$ számra

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=0}^{n} |s_\nu(f; x) - f(x)|^r = 0 \tag{1}$$

érvényes majdnem mindenütt $[c, d]$-ben. (1) teljesül minden olyan $x \in (c, d)$ pontban, melyre

$$\int_0^h |fx \pm t) - f(x)|^p w(x \pm t) dt = o(h).$$

Ha a w súlyfüggvény a $[c, d]$ szakaszon lényegében korlátos, akkor az (1) reláció $f(x)$ minden folytonossági helyén teljesül. Ha $f(x)$ a (c_1, d_1) intervallumon folytonos ($(c_1, d_1) \subset [c, d]$), akkor (1) bármely $[c_1 + \delta, d_1 - \delta]$ ($\delta > 0$) intervallumon egyenletesen fennáll.

E tételt $p = 2$ esetre *Tandori* már disszertációjának benyujtása előtt közzétette (Acta Math. Acad. Sci. Hung. 3. kötet. 1952. 73—81. old.).

Az említett tételből következtet a közönséges (C, α) szummálhatóságra: $f(x)$ tartozzék az előbbi tétel megkövetelte függvényklasszishoz; ha a p_n polinomok a $[c, d]$ részintervallumon közös korlát alatt maradnak, akkor

$$\lim_{n \to \infty} \binom{n+\alpha}{n}^{-1} \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n-\nu+\alpha-1}{n-\nu} |s_\nu(f; x) - f(x)|^r = 0 \tag{2}$$

majdnem mindenütt $[c, d]$-n bármely $\alpha > 0$ és $r > 0$ mellett.

A (2) reláció minden olyan x-re fennáll, melyre

$$\int_0^h |f(x \pm t) - f(x)|^p w(x \pm t) dt = o(h).$$

Ha továbbá a $w(x)$ súlyfüggvény még lényegében korlátos is, akkor (2) az $f(x)$ minden folytonossági helyén érvényes.

E tételből levezeti a szummáció Lebesgue-függvényeinek korlátosságát, éspedig ha a $p_n(x)$ polinomok a $[c, d]$ részintervallumon közös korlát alatt maradnak és $w(x)$ lényegében korlátos, akkor a (C, α) szummáció Lebesgue-függvényei bármely $[c+\delta, d-\delta]$ szakaszon egyenletesen korlátosak:

$$L_n^\alpha(x)=\int_a^b \binom{n+\alpha}{n}^{-1}\left|\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n-\nu+\alpha-1}{n-\nu}\left\{\sum_{k=0}^{\nu}p_k(x)p_k(t)\right\}\right|w(t)dt=o(1).$$

Így tehát a szummáció magfüggvényeinek és Lebesgue-függvényeinek zárt alakban való előállítása nélkül sikerült bebizonyítania a szummáció Lebesgue-függvényeinek korlátosságát. Ezáltal megnyílt az út a (C, α) szummálhatóság közvetlen megállapításához. Figyelemreméltó a következő tétel, mely L_w^1 függvényosztályba tartozó függvényekre is vonatkozik:

Ha $a \leqq c < d \leqq b$ és

$$f(x)\in L_w^2(a, c);\ f(x)\in L_w^1(c, d);\ f(x)\in L_w^2(d, b),$$

továbbá $w(x)$ lényegében korlátos és a $p_n(x)$-ek közös korlát alatt maradnak $[c, d]$-ben, akkor a (c, d) számköz minden folytonossági helyén

$$\lim \binom{n+\alpha}{n}^{-1}\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n-\nu+\alpha-1}{n-\nu}s_\nu(f; x)=f(x).$$

A szerző az előbbi tételeket átviszi arra az esetre, amikor az integrálokban szereplő $w(x)dx$ differenciálok helyett $d\alpha(x)$ Stieltjes-differenciálokat szerepeltet (8. §).

Meg kell még említeni, hogy *Alexits György* gondolatai nyomán tételeit ortogonális polinomoknál általánosabb kifejtésekre is kiterjeszti (9. §).

Mindkét opponens kiemelte bírálatában, hogy *Tandori Károly* dolgozata lényeges és fontos témakört tárgyal és a kérdéskör vizsgálatát komoly lépéssel viszi előre. Az opponensi vélemények kiemelik azt, hogy a dolgozat értékes eredményei a jelölt alkotóképességéről tesznek bizonyságot.

Turán Pál akadémikus külön hangsúlyozta, mint pozitívumot, hogy a dolgozat első része (1., 2. és 3. §-a) a tárgykör történelmével foglalkozik és azt átgondoltan és helyesen adja, súlyt fektetve *Fejér Lipót* és magyar iskolája szerepénék kidomborítására. Felhívja a szerző figyelmét két egészen lényegtelen hibára, illetve elírásra, továbbá rámutat arra, hogy egy *Jackson*tól eredő és a dolgozatban felhasznált segédtétel egy *Jackson*énál már jóval korábbi, *Szegő*től származó tételből következik. *Tandori Károly* válaszában elismerte a *Turán* által kifogásolt két kisebb elírást.

A disszertáció feletti vitában *Alexits György* akadémikus — aki különben *Tandori Károly* aspiránsvezetője volt — a disszertációban két gondolatot talál különösen értékesnek és újnak, melyekkel a kérdések megoldása lehetővé vált.

Az egyik az, hogy bizonyos körülmények mellett a nullarendű szummáció magjából (vagyis a részletösszegek magjából) a nullánál magasabbrendű szummációra lehet következtetést vonni. A másik az, hogy *Tandori* észrevette a Fourier-sorok erős szummációjára vonatkozó, Hardy—Littlewood féle apparátusnak ortogonális polinomsorokra való alkalmazhatóságát, ami által könnyebbé válik a nehezebben elérhető erős szummációt vizsgálni, mint a belőle következő egyszerűbb, közönséges szummációt. Kiemelte, hogy *Tandori* eredményei igen sokat mondanak ahhoz képest, ami előtte ismeretes volt és ezzel a további vizsgálatoknak új távlatot nyitott.

A kiküldött bizottság egyhangúan elfogadta *Tandori Károly* disszertációját. A bizottság határozata leszögezte, hogy a megbírált dolgozat igen alapos és elmélyült munka eredménye. Kiemelte azt, hogy míg az ortogonális polinomokra vonatkozó addig ismert sorfejtési tételek igen erős kikötéseket tesznek a polinomokra, vagy a súlyfüggvényre, addig *Tandori*nak sikerült olyan módszert találnia, mely igen általános feltételek mellett lehetővé teszi a nullamértékű halmaz kivételével való szummáció vizsgálatát. A disszertáció fogalmazása tömör, világos és szabatos.

Ami a vita külsőségeit illeti, meg kell jegyezni, hogy az igen nagy érdeklődés mellett folyt le. *Tandori Károly* disszertációját érthető, világos előadásban ismertette. Az opponensek véleményére adott válasza is nagy tárgyi felkészültségről és szabatos kifejezőkészségéről tett bizonyságot. A szónak szűkebben vett értelmében vita nem alakult ki, aminek — azt gondoljuk — az az oka, hogy *Tandori* értekezése a választott témát igen alaposan dolgozta ki, gondolatait érthető módon, szabatosan adta elő, nem volt tehát egyetlen olyan pont sem, amivel ne lehetett volna egyetérteni, vagy amit lényeges hiányként lehetett volna felhozni.

A disszertáció és a vita, valamint a jelölt korábbi dolgozatai alapján matematikusaink komoly reményeket fűznek *Tandori Károly* további működéséhez.

Fenyő István
a matematikai tudományok kandidátusa.

A III. OSZTÁLY HÍREI

Pályázati felhívás tudományos ösztöndíjakra és kutatási prémiumokra

1. Havi ösztöndíjak. Havi ösztöndíjra pályázhat minden olyan szakember, aki tudományos kutatással nem hívatásszerűen foglalkozik (üzemi mérnökök, kórházi orvosok, pedagógusok, stb.).

Ösztöndíjra az Akadémia által kitűzött vagy szabadon választott témákkal lehet pályázni.

A kitűzött matematikai, fizikai, csillagászati témákat alább közöljük.

Az egyetemi tanszemélyzet tagjai, egyetemi és főiskolai hallgatók, valamint kutatóintézeti dolgozók ösztöndíjban nem részesülhetnek.

A havi ösztöndíj összege 150—400 Ft-ig terjed, amelynek folyósítása a pályázó által elért részleteredmények bemutatása, ill. elbírálása után január 1-től visszamenőleg történik. A havi ösztöndíjakra vonatkozó pályázatokat 1953. december 31-ig kellett az Akadémia illetékes osztályához benyújtani.

A havi ösztöndíj megvonható, ha az Akadémia az ösztöndíjas munkáját nem tartja megfelelőnek.

2. Kutatási prémium. Kutatási prémiumra a kutató munkában elért eredmények, ill. részleteredmények alapján lehet pályázni.

A kutatási prémiumok összege 5000 Ft-ig terjed.

A kutatási prémium nem lehet újítás vagy műszaki ötlet jutalmazása. Kutatási prémiumban egyetemi hallgatók, havi ösztöndíjasok (egészen kiváló eredménytől eltekintve), aspiránsok, kutatóintézetek dolgozói nem részesülhetnek. A III. osztály kitűzött témái:

a) Matematika

1. A tömeggyártás minőségellenőrzésének matematikai statisztikai módszerei.

(Jutalmazható ilyen tárgyú önálló tudományos eredményt tartalmazó munka, továbbá az említett módszereknek a magyar iparban való bevezetését és eredményes alkalmazását szolgáló összefoglaló jellegű munka is.)

2. A számfogalom kialakítása az iskolában különös tekintettel az egyetemi oktatás igényeire.

3. Reformtörekvések a matematika tanítása terén a Szovjetunióban és a népi demokratikus országokban kiadott matematikai tankönyvek alapján kritikailag feldolgozva.

4. Nagykapacitású gépek alkalmazása matematikai problémák megoldására. (Jutalmazható: matematikai feladatok gépi megoldásával kapcsolatos, új eredményeket tartalmazó munka, továbbá olyan munka is, mely a vonatkozó irodalom valamely részének alapos kritikai feldolgozását tartalmazza, és ilyen gépek hazai építését és felhasználását elősegíti.)

5. Kőnig Gyula élete és munkássága.

6. Önálló vizsgálat bármelyik akadémiai téma köréből.

(Az akadémiai témákra vonatkozólag szóban, vagy írásban felvilágosítást nyújt a Magyar Tudományos Akadémia III. Osztálya, Bp. V., Széchenyi-rakpart 3.)

b) Fizika

1. Önálló tudományos vizsgálatok a kísérleti atommagkutatás köréből.

2. Radioaktív izotópok nyomjelzőként való alkalmazása segítségével készült kísérleti kutató munka.

3. Könnyű atommagok gerjesztett energia állapotainak meghatározását eredményező eredeti kísérleti vizsgálatok.

4. Mesterséges atommagfolyamatokat kísérő neutron sugárzás energia eloszlására vonatkozó eredeti kísérleti vizsgálatok fotoemulziós vagy más módszer segítségével.

5. Radioaktív anyagok hazai nyom-előfordulásaira vonatkozó eredeti kísérleti vizsgálatok.

6. Mesterséges atommagfolyamatoknak mesterségesen gyorsított bombázó részecskékkel való előállítása.

7. Humusz savaknak kation megkötő képességére vonatkozó adszorbciós vizsgálatok, eredeti kísérletek és mérések alapján.

8. A magkutatás kísérleti eredményeinek összefoglaló kritikai ismertetése (irodalmi adatokkal).

9. Az atommáglya méretezése az irodalomban fellelhető adatok kritikus kiértékelése alapján.

10. Nagyintenzitású neutronforrások előállítása.

11. Infravörös spektrométer regisztráló berendezésének (stabilizátor, vezérlő berendezés, regisztráló rész) megtervezése.

12. A napsugárzás biológiai komponensének terepen való mérésére alkalmas hordozható spektrográf szerkesztése.

13. Félvezetőkkel kapcsolatos kutatások olyan irányokban, hogy az irodalomban ismertetett anyagokon kívül még milyen más anyagokon mutatható ki a tranzisztor hatás.

14. Félvezetőkkel kapcsolatos kutatások olyan irányokban, hogy az irodalomban ismertetett anyagokon kívül még milyen más anyagoknál mutatható ki elektronlumineszcens hatás.

15. Elméleti és kísérleti vizsgálatok a kolorimetria köréből.

16. Az üveg fizikai tulajdonságainak vizsgálata.

17. Lángok sugárzásának és hőátadásának vizsgálata.
18. Nagyobb kénkristályok előállítása.
19. Tűkristályok előállítása nem alkálihalogenid kristályokból.
20. Alkálihalogenid foszforok előállítása rekristallizációs módon.
21. Elméleti és kisérleti vizsgálatok a ferritekre vonatkozóan.
22. Különböző vasipari ötvözetek ferromágneses vizsgálata.
23. A ferroelektromos jelenségek különböző fajai és jelentőségük a technika szempontjából.
24. A szilárd testek szerkezetére vonatkozó elméleti kutatások.
25. Kvantum-kémiai vizsgálatok.
26. Szilárd testek elmélete és annak alkalmazása technikai problémákra.
27. Tanulmányok a magyar fizika haladó hagyományai köréből.

c) Csillagászat

1. Az intersztelláris anyagok és a csillagok kölcsönhatása.
2. A Hold okozta légköri ár-apály vizsgálata a hazai adatok alapján.
3. Napfoltcsoportok területváltozása és mozgása közötti korrelációk.

(Bővebb felvilágosítást a Csillagvizsgáló Intézet Napfizikai Osztálya ad.)

PRÉMIUMOK

A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai és Fizikai Osztálya (III. osztály) a Matematikai, ill. Fizikai Főbizottság javaslatára a következőket részesítette jutalomban.

Matematikusok

Hosszú Miklós miskolci műegyetemi tanársegéd, a prémium pályázatra beküldött két dolgozatában a függvényegyenletek tranzitivitásával és néhány asszociatív függvényegyenlettel foglalkozik. Dolgozatai komoly elmélyülést igénylő témáknak alapos tárgyalásai. Egyik dolgozatában *J. G. Mikusinski* lengyel matematikus által régebben felvetett problémát old meg. 1500 Ft jutalomban rézeszült.

2. *Szendrei János* a szegedi egyetem adjunktusa, dolgozatában önállóan felvetett problémával foglalkozik a Schreier-féle gyűrűbővítés Jacobson-féle radikálját illetően; a felvetett problémát megoldja. Tárgyalása ügyes és fordulatos. 2000 Ft jutalomban részesült.

3. *Szász Gábor* a szegedi egyetem adjunktusa, dolgozatában az asszociativitás feltételek függetlenségének kérdését vizsgálta meg régebbi dolgozatától eltérően abban az esetben, amikor a kommutivitást eleve megköveteljük. A felvetett problémát maradéktalanul megoldotta. 1500 Ft jutalomban részesült.

4. *Freud Géza* aspiráns, kandidátusi disszertációját már féléve benyújtotta, itt említett tudományos eredményei attól teljesen függetlenek, illetőleg

annak benyújtása után keletkeztek. Négy dolgozatot nyújtott be, három ezek közül az akadémiai Osztályközleményekben megjelent. Két dolgozata az interpoláció elmélettel, kettő pedig általános sorelméleti kérdésekkel foglalkozik, valamennyi komoly felkészültséget bizonyít és határozott tudományos értéket képvisel. 3500 Ft jutalomban részesült.

5. *Tandori Károly* aspiráns továbbfolytatta önálló vizsgálatait és azokat új irányban is kiterjesztette. *Fagyajev* tételének egy lényegesen új bizonyítását adta, erről az eredményről múlt év novemberében Egerben tartott matematikai vándorgyűlés keretében számolt be. *Tandori* folytatta az ortogonális polinomsorokra vonatkozó vizsgálatait is, amelyekben több új részleteredményt ért el. Ezeket az eredményeket kandidátusi disszertációjának benyújtása után érte el. 1000 Ft jutalomban részesült.

6. *Szász Pálnak* a matematikai tudományok kandidátusának három igen értékes dolgozata jelent meg az Osztályközleményekben a hiperbolikus trigonometria új előállításával kapcsolatban. 2500 Ft jutalomban részesült.

Fizika

1. *Almássy Gyula* a Debreceni Kísérleti Fizikai Intézet tudományos munkatársa benyújtott dolgozatában az Uran (VI) kolorimetriás meghatározásával foglalkozik, a hazai szénhamukban igen szép eljárással értékes és nagyjelentőségű eredményekhez jut. 2000 Ft jutalomban részesült.

2. *Nagy János* a Debreceni Kísérleti Fizikai Intézet adjunktusa bór gerjesztési függvényeivel foglalkozik, eredményét Szalay Sándor az I. Magyar Fizikus Kongresszuson tartott összefoglaló előadásában ismertette. A dolgozat hazai viszonylatban igen méltányolandó eredményt ért el. 2000 Ft jutalomban részesült.

3. *Marx György,* a fizikai tudományok kandidátusa, adjunktus az Eötvös Loránd Tudományegyetem Fizikai Intézetben, 4000 Ft és

4. *Györgyi Géza* tanársegéd az Eötvös Loránd Tudományegyetem Fizikai Intézetében, 1000 Ft jutalomban részesültek „Az elektromágneses tér energia-impulzus-tenzora és a ponderomótoros erő dielektrikumban“ című közös dolgozatukban elért eredményükért.

FELOLVASÓ ÜLÉSEK

1954. január hó 4-én

1. *Varga Ottó* lev. tag: Affinösszefüggő vonalelemsokaságok metrizálhatóságának feltétele.
2. *Jánossy Lajos* r. tag bemutatja *Faragó Péter—Groma Géza:* „Reflex oszcillátorok és *Faragó Péter—Marx György:* „Kvantumos jelenségek szabad elektronok és cm hullámhosszú elektromágnes erőtér kölcsönhatásánál" című dolgozatát.
3. *Rényi Alfréd* lev. tag bemutatja *Fenyő István:* „A többszörös Fourier-transzformáció elméletéhez" című dolgozatát.
4. *Varga Ottó* lev. tag bemutatja *Moór Artur:* „Reguláris Cartan-terek simuló Riemann-terei" és *Soós Gyula:* „Finsler terek affin- és mozgáscsoportjáról" című dolgozatát.

1954. február hó 8-án

1. *Hajós György* r. tag bemutatja *Fejes Tóth László:* „Horociklusok legsűrűbb elhelyezése" című dolgozatát.
2. *Rédei László* lev. tag bemutatja *Fuchs László, Kertész Andor* és *Szele Tibor:* „Egy dualitási probléma a csoportelméletben I.", *Fuchs László:* „Egy dualitási probléma a csoportelméletben II.", *Steinfeld Ottó:* „Ideálhányadosokról és prímideálokról", *Fuchs László:* Abel-féle p-csoportok struktúrájáról" és *Erdős Jenő:* „Csoportok, melyekben a konjugált elemek osztályai végesek" című dolgozatát.

1954. május hó 3-án

1. *Jánossy Lajos* r. tag és *Nagy Kázmér:* Az Einstein-paradoxon egy következménye.
2. *Turán Pál* r. tag és *Erdős Pál:* A Lagrange interpolációról.
3. *Gombás Pál* r. tag bemutatja *Pál Lénárd:* „A ferromágneses kristályok energia anizotropiájának kvantumelméletéhez" című dolgozatát.
4. *Jánossy Lajos* r. tag bemutatja *Kiss Dezső:* „μ-mezon közepes élettartamának mérése", *Szamosi Géza:* „Nukleonok kvantumstatisztikájáról" és *Ziegler Mária:* „Párenergia számítása Yukava-típusú saját függvényekkel" című dolgozatát.
5. *Turán Pál* r. tag bemutatja *Szüsz Péter:* „S. Hartmann egy problémájáról" című dolgozatát.

Ára: 21,— Ft.

TARTALOMJEGYZÉK

TUDOMÁNYOS KÖZLEMÉNYEK

KIVONATOK

ANKÉTEK

KÖNYVISMERTETÉS

Technikai szerkesztő: Erdős Lajosné

A kiadásért felelős: Mestyán János. Műszaki felelős: Tóth Ferenc.

A kézirat beérkezett: 1954. V. 24. — Példányszám: 450. — Terjedelem: 10 (A/5) ív.

Csongrádmegyei Nyomdaipari Vállalat, Szeged 54-3214 Felelős vezető: Vincze György

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI OSZTÁLYÁNAK

KÖZLEMÉNYEI

IV. KÖTET 3. SZÁM

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
1954. ÉVI NAGYGYŰLÉSÉNEK ANYAGA

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
BUDAPEST, 1954.

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI OSZTÁLYÁNAK

KÖZLEMÉNYEI

IV. kötet 3. szám

Szerkesztőség: Budapest, V. Széchenyi rakpart 3.
Kiadóhivatal: Budapest, V. Alkotmány utca 21.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei változó terjedelmű füzetekben jelennek meg és az Akadémia III. osztályának felolvasóülésein bemutatott matematikai dolgozatokat, valamint egyéb dolgozatokat, referátumokat, továbbá az osztály munkájára vonatkozó közleményeket, könyvismertetéseket stb. közölnek. Évenként egy kötet jelenik meg (négy szám alkot egy kötetet).

Kéziratok a következő címre küldendők:

A Magyar Tudományos Akadémia
III. Osztályának Közleményei.
Budapest, V. Széchenyi rakpart 3.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi levelezés.

Minden szerzőt 100 különlenyomat illet meg, megjelent munkájáért.

Közlésre el nem fogadott kéziratokat a szerkesztőség lehetőleg visszajuttat a szerzőhöz, de felelősséget a beküldött kéziratok megőrzéséért, vagy továbbításáért nem vállal.

A Közlemények előfizetési ára kötetenként belföldi címre 40 forint, külföldi címre 60 forint. Belföldi megrendelések az Akadémiai Kiadó, Budapest, V. Alkotmány u. 21. (Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 04-878-111-48), külföldi megrendelések a „Kultúra" Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalat, Budapest, VI. Sztálin út 21. (Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 45-790-057-50-032) útján eszközölhetők.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztálya a következő idegennyelvű folyóiratokat adja ki:

1. Acta Mathematica Hungarica,
2. Acta Physica Hungarica.

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI OSZTÁLYÁNAK

KÖZLEMÉNYEI

FŐSZERKESZTŐ:
ALEXITS GYÖRGY

A Magyar Tudományos Akadémia III. Osztályának az 1954. évi Nagygyűlés alkalmából rendezett előadásai:

Nyilvános Osztályülés

JÚNIUS 16-ÁN, SZERDÁN DÉLELŐTT 9 ÓRAKOR

Hajós György akadémikus:
Beszámoló az osztály munkájáról és feladatairól
Gombás Pál akadémikus:
A statisztikus atommodell és a hullámmechanika közötti kapcsolat

JÚNIUS 17-ÉN, CSÜTÖRTÖKÖN DÉLUTÁN 4 ÓRAKOR

Szalay Sándor lev. tag:
Vizsgálatok nagy atomsúlyú és több vegyértékű kationok adszorpciójára humuszkolloidokon. (Székfoglaló)
Hozzászóló: *Szádeczky-Kardos Elemér* akadémikus

JÚNIUS 18-ÁN, PÉNTEKEN DÉLELŐTT 10 ÓRAKOR

L. Csakalov akadémikus (Szófia):
Az algebrai egyenletek elméletében fellépő faktorsorozatok
K. Kuratowski akadémikus (Varsó):
Beszámoló a Lengyel Tudományos Akadémia Matematikai Intézete Topológiai Csoportjának munkájáról*
T. Popoviciu akadémikus (Bukarest):
Folytonos függvények középértéktételeiről
T. Popoviciu akadémikus bemutatja:
Bal Lascu—Radó Ferenc—Rusu János „Többváltozós egyenletek változóinak szétválasztásáról" című dolgozatát

JÚNIUS 18-ÁN, DÉLUTÁN 3 ÓRAKOR

Turán Pál akadémikus:
A Riemann-féle zetafüggvény gyökeiről. (Székfoglaló)
Rényi Alfréd lev. tag:
A valószínűségszámítás új axiomatikus felépítése
Hozzászóló: Császár Ákos, a matematikai tudományok doktora
Vincze István, a matematikai tudományok kandidátusa:
A tömeggyártás minőségellenőrzésének matematikai statisztikai módszereiről
Hozzászólók: Sarkadi Károly, Tallián Tibor

* K. Kuratowski előadását egy későbbi számban közöljük.

Technikai szerkesztő: Erdős Lajosné

A kiadásért felelős: az Akadémiai Kiadó igazgatója. Műszaki felelős: Tóth Ferenc.
A kézirat beérkezett: 1954. VIII. 3.—IX. 2. — Példányszám: 650. — Terjedelem: 12½ (A/5) ív, 7 ábra.

Csongrádmegyei Nyomdaipari Vállalat, Szeged 54-4987 Felelős vezető: Vincze György

BESZÁMOLÓ AZ OSZTÁLY MUNKÁJÁRÓL ÉS FELADATAIRÓL*

Beszámolómban szempontok szerint csoportosítva igyekszem sorra venni az osztály életének eseményeit, az utolsó Nagygyűlés óta végzett munkát és annak bírálatát. Beszámolóm természetesen nem tarthat számot teljességre.

A mult Nagygyűlés célként jelölte meg az elmélet és gyakorlat kapcsolatának szorosabbá tételét. E téren az osztály tudományterületein lényeges fejlődés állapítható meg. Az elmélet és a gyakorlat helyes kapcsolatának kialakítására főként a Fizikus Főbizottság tett nagy erőfeszítéseket. A Fizikus Főbizottság az Elnökség határozatának megfelelően a mult év áprilisában kidolgozta az ötéves terv utolsó két évére vonatkozó részletes, valamint a fizika távlati kutatási tervét. E terv egyik lényeges pontja a műszaki tudományokkal és az iparral való kapcsolat kialakítása volt. A Fizikus Főbizottság ennek megfelelően az 1953. év második felében és az 1954. első felében több ipari kutatóintézet meglátogatása után a hazai spektroszkópiai, elektronikai, valamint félvezető- és lumineszcenciai kutatások koordinálását végezte el, illetőleg a kutatások összehangolása terén a kezdő lépéseket megtette. A Központi Fizikai Kutató Intézetben kidolgozott és előállított műszereknek az ipar céljaira való átadása most van folyamatban.

Kétségkívül az elmélet és a gyakorlat szoros kapcsolata kialakításának ezek csak első lépései, azonban jelentős haladásnak tekinthetjük az előző évekhez viszonyítva. Bár kisérleti fizikai kutatásunk lényeges fejlesztésére van még szükség, mégis meg kell állapítani, hogy kísérleti fizikai eredményeink gyakorlati hasznosítása több esetben elmaradt. Így pl. a *Gyulai Zoltán* és *Tarján Imre* által elért mesterséges kristálynövesztési eredmények mind a mai napig ipari felhasználásra nem kerültek, bár az eredményeknek üzemi mértékben való alkalmazása jelentős devizamegtakarítást jelentene népgazdaságunknak. A mesterséges kristálynövesztési eredmények a hiradástechnikai ipar szempontjából volnának igen jelentősek.

A matematikai kutatások és a gyakorlat kapcsolata főként az Alkalmazott Matematikai Intézet útján valósul meg. Az intézet közvetlen kapcsolatot tart fenn számos ipari kutatóintézettel, üzemmel és tervező irodával. Az Alkalmazott Matematikai Intézet azonban sokkal hatékonyabb segítséget tudna adni a gyakorlat számára, ha az említett közvetlen, iparnak adott segítségnyujtás

* A távollevő Hajós György osztálytitkár helyett bemutatta Alexits György akadémikus.

mellett a műszaki tudományok művelőivel volna minél jobb kapcsolata. Ennek a kapcsolatnak a kialakítására az Alkalmazott Matematikai Intézet részéről állandó törekvés van, nem mondható ez azonban a legtöbb esetben a műszaki tudományos intézményekről.

Az Alkalmazott Matematikai Intézetnek a termeléssel való jelenlegi szoros kapcsolata ellenére is számos olyan jelentős eredménye van, amely még nem nyert gyakorlati alkalmazást (pl. az üzemek energiaszükségletének megállapítása, a minőségellenőrzésre, kompresszorok méretezésére vonatkozó eredmények, stb.). Bár az intézet ezen eredmények gyakorlati jelentőségére felhívta az illetékes szervek figyelmét, az elért eredményeket több esetben nem vették figyelembe.

A hazai csillagászati kutatások és a gyakorlat kapcsolatáról ma még keveset lehet mondani. Csillagászaink most terveznek közös kutatást az ionoszférára vonatkozóan, s az itt remélt eredmények a távprognózis szempontjából lesznek jelentősek.

Az új kormányprogram megjelenése óta az osztály legfontosabb feladatának tekinti a kutatási terveknek és ezen keresztül a kutatásoknak a reális lehetőségekhez való méretezését. Ez azt jelenti, hogy szemben a kormányprogram megjelenése előtti időszakkal, amikor az a törekvés nyilvánult meg, hogy pl. a fizikai kutatásokat minden irányban fejleszteni kell, a cél az, hogy a fizika egyes ágaiban induljanak meg erőteljesebb kutatások. Ilyen törekvés már előzőleg is megnyilvánult, aminek eredménye pl. az, hogy az osztály megszüntette a Központi Fizikai Kutató Intézetben az akusztikai és ultrahang-kutatásokat, az ívgerjesztők építésével kapcsolatos kutatásokat, ugyanakkor azonban jobban igyekezett támogatni a kísérleti fizikai kutatásokat és ezen belül is azon irányokat, amelyek a népgazdaság szempontjából is jelentősek (pl. a félvezetőkkel kapcsolatos kutatások, a Központi Fizikai Kutató Intézetben mágnességi kutatások stb.). A fizika nagy perspektivikus feladata az atomenergia kihasználásának biztosítása. E cél érdekében most van megalakulóban a Magyar Tudományos Akadémia Debreceni Fizikai Kutató Intézete, amely kísérleti atommagkutatásokat fog folytatni. Jelentős eredmény az izotopokkal való kutatások előkészítése és rövid időn belül való megindítása. Az izotopokkal való kutatások minőségileg új módszert jelentenek és számos fontos alkalmazásuk van az iparban (pl. a roncsolásmentes anyagvizsgálat) és a mezőgazdaságban, valamint az orvosi és kémiai kutatásokban.

A kormányprogram után az osztály első feladatának az elkészítendő távlati tudományos terv szempontjainak kidolgozását tartotta. A kidolgozás alatt álló terv különös súllyal fogja tartalmazni az olyan alapvető kutatásokat, amelyek ideológiai szempontból is jelentősek (pl. a matematikában a formalizmus elleni harc, a fizikában a fizika alapvető kérdéseinek tisztázása, a fizikai idealizmus elleni harc, a csillagászatban a kozmógóniai elméletek ideológiai szempontból való megvilágítása). A fokozottabb vitaszellem kialakítása érdekében az osztály távlati tudományos terve vita tárgyául a fejlődő tudománynak tisztázatlan kérdéseit tűzi ki és főként azokat a kérdéseket, amelyek ideológiai szempontból is fontossággal bírnak.

Az elmult évben az osztály az 1953. II. félévi és az 1954. I. félévi munkatervében jelölte meg a feladatait. Az elmult naptári év második felében az osztály egyik legfontosabb feladatának a rokontudományokkal (elsősorban a műszaki és kémiai tudományokkal) való további kapcsolatok kiépítését tartotta. Erről már említést tettem. Ez a munka 1954. első felében tovább folytatódott. Ugyancsak fontos feladatul tűzte ki a munkaterv az osztályhoz tartozó akadémiai intézetekben folyó kutatások nagyobbfokú irányítását és ellenőrzését, valamint az osztály tudományterületein a vitaszellem további fokozását, az ideológiai problémák feltárását és megvitatását.

Az osztályhoz jelenleg 3 akadémiai intézet tartozik, az Alkalmazott Matematikai Intézet, a Központi Fizikai Kutató Intézet és a Csillagvizsgáló Intézet. Megszervezés alatt áll a Debreceni Fizikai Kutató Intézet és előkészületben van a Központi Fizikai Kutató Intézet Elméleti Fizikai Osztályának kiválásával egy önálló Elméleti Fizikai Kutató Csoport létrehozása.

Az Alkalmazott Matematikai Intézet munkáját a beszámolási időszakban a munka tervszerűségének fokozódása és a tulajdonképpeni kutatómunka fokozottabb előtérbe kerülése jellemzi. Az intézetnek azonban még erősen törekednie kell e célok teljesebb megvalósítására. Az intézet az elmult évben jelentős eredményeket ért el a mátrixszámítás elméletében, a valószínűségszámítás és gyakorlati alkalmazása, valamint a minőségellenőrzés matematikai módszerei területén. Az intézet tudományos munkáját rendkívüli módon akadályozza jelenlegi elhelyezkedése, ez egyben lehetetlenné teszi az intézet további fejlesztését, amire pedig feltétlenül szükség van. A meglévő osztályok mellett ugyanis szükség volna elméleti osztályok létesítésére és az intézetnek Központi Matematikai Kutató Intézetté való fejlesztésére. Az új kormányprogrammal kapcsolatban az intézet a mezőgazdaság számos matematikai problémáját oldotta meg, illetőleg tette kutatás tárgyává.

A Központi Fizikai Kutató Intézet az elmult év második felében és még ebben az évben is súllyal a kijelölt tudományos feladatok megvalósításához szükséges anyagi, technikai és káderelőfeltételek biztosításán, illetőleg megteremtésén munkálkodott. Meg lehet azonban állapitani, hogy a feltételek biztosítása mellett az intézet határozottan törekszik önálló kutatásokra. Az eddig elért részleteredmények után joggal remélhetjük, hogy rövidesen az intézet több önálló kutatási eredményről is beszámolhat. Az intézetnek sok tennivalója van még az ilyen eredmények elősegítése, a kutatómunka irányitása és ellenőrzése, a reális tervezés, az iparral és az ipari kutató intézetekkel való szorosabb együttműködés terén.

A Csillagvizsgáló Intézetben csak az Asztrofizikai Osztály számolhat be kutatómunkájának érdemleges eredményeiről. A másik két osztályon a tudományos kutatómunkát részben a tervek túlméretezése, részben a kutatók másirányú terhelése akadályozza. Az intézet munkáját nagymértékben hátráltatta, hogy az osztályok elkülönültek egymástól és pl. osztályvezetői értekezletet az intézet nem tartott. Nagyon kivánatos, hogy ezek az akadályok minél hamarabb megszünjenek.

A hazai kísérleti atommagkutatás erőteljesebb megindítása érdekében az osztály keretében most van megszervezés alatt a Debreceni Fizikai Kutató Intézet. Az intézet előreláthatóan ez év második felében megkezdi működését.

Az osztály szakterületén ez évben *Rényi Alfréd* részesült 30 000 Ft-os Kossuth-díjban a valószínűségszámítás elmélete és gyakorlati alkalmazása terén elért eredményeiért. A beszámoló időszakában az osztály tudományterületein 25 000 Ft akadémiai elnöki jutalom, 50 000 Ft-nál több kutatási prémium és 20 000 Ft ösztöndíj került kiosztásra.

Az elmult évben az osztály legjelentősebb rendezvénye az 1953. augusztus 23—30. között megtartott *I. Magyar Fizikus Kongresszus* volt. A kongresszuson két szovjet, három lengyel, három csehszlovák és két bolgár tudós vett részt. A kongresszus általában sikeres és eredményes volt. Egyrészt képet adott a magyar fizikai kutatások helyzetéről, másrészt a baráti országok fizikusaival való kapcsolat kiépítése terén ért el eredményeket. Különösen szoros kapcsolat alakult ki a kongresszuson és az ezt követő időszakban a csehszlovák és lengyel fizikusokkal. A kongresszus programja túlzsúfolt volt. A sok és hosszú előadás miatt kevés idő és lehetőség volt a problémák megvitatására. Helyesebb lett volna a plenáris ülések mellett szekció-üléseket is tartani.

1954. március 2-án a *matematikai könyv*kiadásról rendezett *ankét*ot az osztály. Az ankéton számos hozzászólásban értékes javaslatok és birálatok hangzottak el. E javaslatok alapján állította össze a Matematikus Főbizottság 1955. évi könyvkiadási tervét.

1954. március 26—27. között az osztály is résztvett *a debreceni akadémiai napokon*. A debreceni akadémiai napok keretében az osztálytitkári beszámolón kívül négy matematikai és négy fizikai előadás hangzott el. Ugyanakkor az akadémiai napok résztvevői meglátogatták a debreceni Tudományegyetem Matematikai és Kísérleti Fizikai Intézetét.

1954. március 29-én az osztály *„A csillagok keletkezése* különös tekintettel Ambarcumjan vizsgálataira" címmel *ankétot* rendezett. Az ankétot nagy érdeklődés kisérte.

1954. márciusában résztvett az osztály *Novobátzky Károly* akadémikus 70. születésnapjának megünneplésében. *Novobátzky Károlyt* ez alkalommal a Népköztársaság Elnöki Tanácsa kormánykitüntetésben részesítette.

Az osztály a mult évi Nagygyűlés óta hét felolvasó ülést tartott, amelyen nyolc matematikai és két fizikai előadás hangzott el, illetőleg 25 matematikai és 15 fizikai dolgozat került bemutatásra. A felolvasó ülések meglehetősen formálisak voltak. Látogatottság általában csekély volt. Érdemleges viták nem alakultak ki.

Az elmult év második felében a Bolyai János Matematikai Társulattal karöltve az osztály valószínűségszámítási kollokviumot rendezett Balatonföldvárott, illetve konstruktív függvénytani és geometriai kollokviumot Egerben. Mindhárom kollokvium igen eredményesnek volt mondható, mivel számos probléma felvetésére és megvitatására kerülhetett sor.

1954. májusától négy matematikai és három fizikai tárgyú könyv jelent meg. Ezek közül kiemelkedő *Riesz Frigyes* és *Szőkefalvi-Nagy Béla:* „Leçons d'Analyse Fonctionelle" című könyvének második kiadása és *Turán Pál:* „Az analízis egy új módszeréről és annak alkalmazásairól" című könyv, amely magyar és német nyelven jelent meg. Jelentős esemény *Eötvös Loránd* összegyűjtött munkáinak kiadása is. Az elmult hónapban jelent meg az Akadémia kiadásában első izben magyar szerzőtől fizikai könyv: *Faragó—Pócza:* „Elektronfizika" című könyve. Az osztály tudományterületein megjelent könyvek terjesztése nem megfelelő, sok vásárolni szándékozó nem értesül egy-egy könyv megjelenéséről, másrészt a könyvek magas ára is hozzájárul ahhoz, hogy sok akadémiai kiadvány hever a Könyvterjesztő Vállalat raktáraiban.

Az osztálynak két idegen nyelvű folyóirata van: az Acta Mathematica és az Acta Physica. E folyóiratok megjelentetésénél nehézségeket okozott a lektorálások elhúzódása. De hiányosságok vannak a külföldi terjesztés terén is. Az Osztályközlemények rendszeresen megjelennek. Az Osztályközlemények főként matematikai tárgyú cikkeket tartalmaznak, amióta a Magyar Fizikai Folyóirat kiadására is sor került. Az Osztályközleményekben egyes idegen nyelven közölt dolgozatok és olyan önálló eredményeket tartalmazó dolgozatok jelennek meg, amelyek külföldi érdeklődésre nem tartanak számot. 1953. decemberében jelent meg a Magyar Fizikai folyóirat, a III. osztály fizikai közleményeinek első kötete. Ez év februárjában a II. kötet 1—2. száma is megjelent. Az új folyóirat megindítása sokkal nagyobb publikálási lehetőséget biztosít, főleg a fiatal fizikusok részére.

Az osztály nemzetközi kapcsolatai az utolsó Nagygyűlés óta rendkívüli módon megerősödtek. Héttagú matematikus küldöttség vett részt az elmult év szeptemberében tartott lengyel Matematikus Kongresszuson. 2—3 tagú fizikus delegációk vettek részt ez év márciusában és áprilisában a Német Demokratikus Köztársaságban tartott fizikai napokon és a Cambridge-ben tartott lumineszcenciai konferencián. *Riesz Frigyes* és *Alexits György* akadémikusok résztvettek Párizsban a *Poincaré*-ünnepségen, *Turán Pál* Kínában tartózkodik és jelenleg is 9 tagú delegációnk van kint a Szovjetunióban, amely résztvett a pulkovói obszervatórium ujbóli megnyitásán, az ezzel kapcsolatosan tartott Csillagászati Konferencián és kinn maradt a június 30-i napfogyatkozás megfigyelésén. Összesen 10 esetben került sor matematikus, illetve fizikus és 1 esetben csillagászok külföldi kiküldésére. E 21 kiküldetés keretében összesen 38 akadémikus és tudományos fokozattal biró kutató járt külföldön.

Az I. Magyar Fizikus Kongresszus alkalmával 10 külföldi fizikust láthattunk vendégül, ezenkivül két lengyel és egy cseh matematikus és *J. D. Bernal* angol fizikus látogatott el Magyarországra. Mind a külföldi utazások, mind pedig a külföldi tudósok magyarországi látogatása nagymértékben elősegítette a tudományos kapcsolatok kiépítését és továbbfokozását. Számos esetben közös kutatási problémák adódtak a látogatások során.

Az osztály tudományterületein eddig két matematikus és egy fizikus aspiráns védte meg disszertációját és nyerte el a tudományok kandidátusa fokozatot. Matematikai doktori disszertáció megvédésére két izben került sor. A disszertációk, az opponensek bírálatai és a viták igen magas színvonalúak voltak. Az elkövetkező hónapokban további számos doktori és kandidátusi disszertáció megvédésére kerül sor.

Az osztályhoz jelenleg 22 matematikus, 19 fizikus és 2 csillagász aspiráns tartozik. A Szovjetunióban 2 matematikus és 1 fizikus aspiráns tanul. A legtöbb aspiránsvezető igen nagy gonddal és lelkiismeretességgel foglalkozik a hozzá beosztott aspiránssal. Ugyanakkor az aspiránsok legtöbbje eredményesen és komolyan végzi tanulmányait. Számos aspiráns már az eddigiek során is önálló eredményeket ért el. Az eredményekről különben tanúskodnak a kandidátusi vizsgák jegyei, illetőleg értékelései is.

Az Osztályvezetőség munkája az elmult évben jelentősen megjavult. Az Osztályvezetőség munkáját félévekre kidolgozott munkaterv alapján végzi és az osztály tudományterületeit érintő problémákat a főbizottságok, illetőleg a Csillagászati Tudományos Tanács előzetes javaslatai alapján vitatja meg. Különösen helyes az Osztályvezetőség azon törekvése, hogy mind behatóbban foglalkozik az osztályhoz tartozó kutatóintézetek problémáival, ezen a téren azonban még sok javitani való van, mivel egyes kérdések megvitatása és a határozathozatal sokszor formális.

A szaktitkárság munkáját főként a bizottságok, illetőleg az Osztályvezetőség munkaterve határozza meg. A szaktitkárság dolgozói nagy szorgalommal végzik munkájukat. Az egyes ülések előkészitése és a szervezési munkák terén a multhoz viszonyítva lényeges javulás tapasztalható. A munkának ebben a megjavulásában jelentős része van az osztály szaktitkárának. Javítani való még az egyes főbizottsági, illetőleg osztályvezetőségi határozatok pontosabb és gyorsabb végrehajtása, valamint az akadémiai intézetek adminisztratív jellegű problémáinak gyorsabb és érdemleges elintézése terén van.

Kérem az osztályülés résztvevőit, hogy felszólalásukban mutassanak rá olyan szempontokra, amelyek beszámolómban nem szerepeltek. A végzett munka bírálatával és a további munka megjavítását célzó javaslatokkal segítsék elő az osztály munkájának minél eredményesebbé tételét.

HOZZÁSZÓLÁSOK

KOVÁCS ISTVÁN lev. tag:

A Központi Fizikai Kutató Intézet megalakulása után az első periódusában alapvető célnak azt tekintette, hogy megteremtse a kutatás gazdasági, technikai feltételeit. A munka elsősorban adminisztratív munka volt, amenynyiben a beruházások helyes irányítására, valamint a vezetés szerveinek kialakítására irányult. Az első periódusban elkezdődött azoknak a berendezéseknek építése, melyeknek segítségével jelenleg és a jövőben is a tudományos feladatokat hajtjuk végre.

Hangsúlyozni kívánjuk, hogy a fizikai kutatás természete olyan, hogy igen sok munkát, időt és fáradságot kíván, különösen így van ez akkor, amikor a kutatás legelső lépése az építkezés, az anyagi feltételek biztosítása stb. van soron. Így tehát kellő türelemmel kell lenni a tényleges kutatás megkezdéséig. A külföldi tapasztalatok is azt mutatják, hogy egy intézet, amikor az épület, műszerek, a szükséges anyagok mind rendelkezésre állnak, még távolról sem tudományos kutató intézet. A tudományos kutatás kialakításához hosszú idő szükséges, mert a műszerek és az épület fejlett káderek nélkül nem sokat jelentenek.

Felmerülhet az a kérdés, hogy helyes-e az anyagi és technikai feltételeket megteremteni (műszerekkel, anyagokkal a még tapasztalatlan kutatókat ellátni) akkor, amíg a kutatáshoz szükséges szakemberek nincsenek meg kellő létszámban. Azt hisszük, hogy helyes, mert ha nem biztosítunk kielégítő technikai és anyagi feltételeket, akkor kevésbé remélhető, hogy egyáltalában szakképzett kutatók kifejlődjenek.

Mind a fizikusok, mind a nem fizikusok körében gyakran felmerül az a vád, hogy a Központi Fizikai Kutató Intézet tudományos perspektíva nélkül dolgozik és lényegében „öncélú műszergyártással" foglalkozik. Éppen ezért tartjuk szükségesnek hangsúlyozni, hogy a fizikai kutatás megindításának első szakasza feltétlenül időtrabló műszerépítés a tudományos célok érdekében.

A jelenlegi szakaszt az jellemzi, hogy a megépült műszerek és berendezések a legtöbb helyen kipróbálás alatt állnak. Ez a szakasz szintén nélkülözhetetlen, mivel először bizonyosságot kell szereznünk arról, hogy berendezéseinkkel el tudjuk érni ugyanazokat az eredményeket, melyeket az irodalomban mások már közzétettek és csakis ezeknek a feladatoknak elvégzése után térhetünk rá az új problémák megoldására. A fejlődésnek ezek a fázisai természetesen nem határolhatók el egymástól mereven és ma már a Központi Fizikai Kutató Intézet egyes osztályain, pl.: a Kozmikus Sugárzási Osztályon, valamint a Spektroszkópiai Osztályon már új problémák megoldása is napirenden van.

Alá kívánjuk húzni, hogy intézetünkben biztosítva vannak a kutatás gazdasági és technikai előfeltételei, és jelen helyzetünket úgy jellemezhetnénk, hogy a központi kérdés a meglévő adottságok minél jobb kihasználása, kevés, de alaposan átgondolt kutatási területen.

Most, amikor az elmúlt három év tapasztalatai nyomán könnyebb helyzetben vagyunk, végül is elérkezettnek látjuk az időt, hogy pontosabban meghatározzuk a Központi Fizikai Kutató Intézet feladatát és jövő perspektíváit. Jóllehet, hogy a Központi Fizikai Kutató Intézet profiljával a Központi Vezetőség Titkársága 1952. év végén foglalkozott, mégis szükséges ezt a kérdést újonnan felvetni, egyrészt azért, hogy a feladatokat és célkitűzéseket konkrétabban meghatározzuk, másrészt érvényesítsük azokat a szempontokat, melyeket a Párt és Kormány mult évi júniusi határozata tartalmaz.

Nem kétséges, hogy a fizikai tudományoknak az utóbbi pár évtized alatt elért legdöntőbb eredménye az atomenergia felszabadítása volt. Meg vagyunk arról győződve, hogy az elkövetkezendő idők egyik legfontosabb kérdése lesz az atomenergia békés felhasználása. Helytelen volna ezt a körülményt nem figyelembe venni, akkor, amikor a Központi Fizikai Kutató Intézet faladatát és jövő perspektíváit vizsgáljuk. Természetesen az atomenergia békés felhasználása nem egyszerűen tudományos kérdés, és így szó sem lehet arról, hogy ilyen feladattal a Központi Fizikai Kutató Intézet, mint a Magyar Tudományos Akadémia egyik kutató intézete, fő feladatként foglalkozzon. Az atomenergia békés felhasználása az egész népgazdaságot érinti és az arra való felkészülés óriási nemzetgazdasági feladat. Ennek az óriási nemzetgazdasági feladatnak a végrehajtásához azonban feltétlenül szükséges, hogy a kérdés tudományos vonatkozásaival foglalkozzunk. Helytelen volna azt gondolni, hogy a magfizikai kutatások önmagukban megoldják erre a nagy programra való felkészülés kérdését. Az atomenergia békés felhasználásának korszakában szükség van a modern fizika valamennyi jelentős ágának (szilárd testek fizikája, rádiófizika, spektroszkópia stb.) fejlesztésére. Mi azonban nem engedhetjük meg azt, hogy erőinket felaprózzuk, éppen ezért azokon a területeken kívánunk felkészülni erre az új korszakra tudományosan, amely területen tradícióink, szakkádereink és gazdasági lehetőségeink vannak. Az atomenergia békés felhasználása lényegileg három nagy problémakört ölel fel. Az első a nyersanyag problémája, a második a rendkívüli nagy technikát kívánó ipari háttér biztosítása, és végül a harmadik a modern kísérleti fizika (magfizika, kozmikus sugárzások fizikája, spektroszkópia, radiológia, szilárd testek fizikája, rádiófizika) fejlesztése.

A Központi Fizikai Kutató Intézetnek csupán a kérdés harmadik részével kapcsolatban van feladata. Az első két kérdéssel kapcsolatban az a helyzet, hogy országunk viszonyait figyelembe véve minden valószínűség szerint csakis más országokkal, elsősorban a Szovjetunióval való együttműködés alapján tudjuk megoldani a felmerülő problémákat.

Ezek alapján könnyen megfogalmazhatjuk a Központi Fizikai Kutató Intézet alapvető feladatait.

1. A Központi Fizikai Kutató Intézet feladata elvi kutatások végzése a modern kísérleti fizika azon ágaiban, ahol tradíciók, szakemberek és gazdasági lehetőségek vannak.

2. Nagyképzettségű tudományos munkások nevelése a tudományos kutatás, az egyetemi oktatás, az ipari kutatóintézetek és ipari üzemek számára.

3. Végül az elvi kutatások gyakorlati eredményeinek átadása a népgazdaság különböző területein.

Az első kérdéssel kapcsolatban megjegyezzük, hogy a Központi Fizikai Kutató Intézetben kozmikus sugárzási, spektroszkópiai, atomfizikai, radiológiai, mikrohullámú és mágneses kutatásokkal kívánunk foglalkozni. Ezek azok a területek, amelyeken az adott viszonyok figyelembe vételével a leghamarabb tudunk tudományos eredményeket elérni. A jelenlegi helyzetet azzal jellemezhetjük, hogy az első tudományos részleteredmények már megszülettek és ezekről az intézet tudományos folyóiratában, a „Központi Fizikat Kutató Intézet Kiadványaiban“ már folyamatosan beszámoltunk. Az eredményesebb kutatómunka kibontakozásához nagyon fontos, hogy fejlettebb tudományos középkáderekkel rendelkezzünk.

Munkánk végzéséhez irányító, vezető káderek rendelkezésre állnak, hasonlóképpen eredményeket értünk el kezdő kutatók képzésében is. Munkánk szempontjából azonban igen súlyos nehézségeket jelent a középkádereknek a vezető káderekhez képest nagyfokú elmaradottsága. Ilyen módon felső kádereink irányító tevékenységüket az egyes osztályok munkájában sok esetben csak saját tudományos munkájuk rovására tudják végezni.

Meg kell jegyezni, hogy a káderképzés akadálya sok tekintetben intézetünknek a multban alkalmazott nem helyes munkamódszerében gyökerezett. Fejlődésünk első periódusa után a támadások hatására tudományos eredményeket túlságosan hamar akarva elérni, bizonyos vonatkozásban szakmai munkánkban idegesség és kapkodás mutatkozott. Ez utóbbi tény eredményezte, hogy elért eredményeink nem kerülnek megfelelően feldolgozásra és ismertetésre, nem vizsgáljuk meg azoknak kihatásait sem intézeti, sem intézeten kívüli vonatkozásban. Ezen a jövőben változtatnunk kell.

Különös súly fektetendő intézetünk perspektívikus munkatervének kidolgozására. Ezzel egyidőben gondoskodnunk kell ennek a tervnek a dolgozóink előtt legszélesebb körben történő ismertetéséről is. Intézetünk eddigi munkája során is számos eredményt ért el. Ki kell emelni azt a tényt, hogy osztályainkon éppen a kádernevelés szempontjait figyelembe véve, számos reprodukciós mérés került elvégzésre. Ez utóbbiak kapcsán országos mértékben, viszonylag rövid idő alatt szép eredményeket értünk el. A továbbiakban azonban önálló eredmények elérése kell legyen a cél. Meg kell jegyezni azt is, hogy az önálló eredmények nagymértékben az eddigi kísérletekből fejlesztendők ki és ezért az eddigi technikai berendezéseink gondos felülvizsgálása szükséges, hogy a reprodukciós mérések befejezése után ismét egy általános műszerépítési stádiumba ne jussunk. Ebben a vonatkozásban éppen viszonylag nagy anyagi lehetőségeink bizonyos veszélyt jelentenek, miután kutatóink hajlamosak a készüléképítés problémái felé eltolódni. Szükségesnek látszik a második fejlődési periódus végeztével — előreláthatóan az év végén — az intézeten belüli speciális mérőberendezések és tapasztalatok felmérése és ennek alapján a jövő évi tudományos terv konkrét kidolgozása.

A második kérdéssel kapcsolatban elvként kívánjuk leszögezni, hogy feltétlenül szükséges bizonyos egészséges, nem nagy létszámra terjedő kicserélődési folyamat biztosítása a Központi Fizikai Kutató Intézet és az ipari üzemek, kutató laboratóriumok, valamint az egyetemek között.

Az intézeten belüli szakképzéssel kapcsolatban a következőket kívánjuk megjegyezni. Az intézetekbe bekerülő fiatal kutatók az egyetemi képzés hiányosságai folytán gyakran a fizika alapvető kérdéseiben sem járatosak. Így az első pár év ezeknek a kutatóknak önállóságra való nevelésével telik el. Az önálló munkára való nevelés egyik legjobb formája a tudományos szemináriumok szervezése.

Az ilyen típusú szemináriumoknak több feladata van. Legelőször is bővíti a kezdők ismereteit. Az egyetemen hallgatott és elsajátítható anyagon túl egy, már módszereiben is fejlettebb út, éspedig az önálló olvasás, vizsgálódás nyújt újabb ismereteket. Ez tehát az első lépést jelenti a szakmai téren való fejlődésben. Van azoban még más jelentősége is. Az egyetemi oktatás tárgyi ismeretek nyújtásán felül csak kis mértékben jut el odáig, hogy problémákra is rámutasson. Ha ezek után egy kezdő valamilyen kutatási feladatot kap, akkor szűkreszabott feladat esetén nem tudja, hogy milyen oldalról fogjon hozzá.

Ilyen szemináriumok az Intézet valamennyi osztályán jó sikerrel folytak. A szemináriumi előadásokra való felkészülés a legjobb próba arra, hogy miként tud a kezdő kutató eredményeket áttekinteni, összefoglalni és kritika tárgyává tenni. Éppen ezért hangsúlyozom, hogy a szemináriumi előadásoktól meg kell követelni, hogy ne puszta ismertető jellegűek legyenek, hanem az előadó kritikai szempontokat is érvényesítsen. A szemináriumok keretében kínálkozik mód arra, hogy az indokolatlan tekintélytiszteletet egészséges kritikai szellemmé alakítsuk és a nyomtatott betű tisztelete mellett kiküszöböljük az idegen eredmények előtti politikai szempontból is, de főleg szakmai szempontból veszedelmes hódolatot.

Minden kutatómunkának a józan kritika a kiindulópontja. Éppen ezért konkrét kutatási feladatok megkezdésekor a feladat kapcsán előzetes tanulmányt és összefoglalót kell megkövetelni, más szóval a kutatási tervet meg kell védeni. Ez ismét több szempontból lényeges. Egyfelől le kell szögezni, hogy a kutatási témák túlnyomó többsége nem minden vitán felüli nagy horderejű probléma, tehát eleve helyes megvitatni azt a kérdést, hogy a programra tűzése kívánatos-e. Nem egyszer csak a kérdés irodalmának és állásának kellő áttanulmányozása után lehet ezt a kérdést eldönteni. Ezen felül okvetlenül el kell dönteni a kutatás elkezdése előtt azt, hogy a témával megbízott munkatárs munkájától eredmény remélhető-e? Ez a terv megvédése során okvetlenül elbírálható. A megvédésre kerülő kutatási tervnek nemcsak a probléma fizikai oldalával kell foglalkoznia, hanem ki kell terjeszkednie a gazdasági és műszaki szempontokra is. Más szóval meg kell mutatnia, hogy a rendelkezésre álló anyagi eszközök és technikai feltételek mellett a tervezett vizsgálat keresztülvihető, végül — ha ilyen szempont az illető témával kapcsolatban felmerül — foglalkozni kell azzal a kérdéssel, hogy az elvi eredményeken túl várható-e valamilyen népgazdasági felhasználás, s ha igen, milyen.

Külön érdemes megfontolnunk, hogy milyen jellegű feladatot tűzzünk ki a kezdő kutatóink elé. Mindenek előtt meg kell állapítani, hogy az Intézetbe újonnan bekerülő kezdő kutató pályáját nem kell, hogy önálló feladattal kezdje. Fél éven át a kezdő önálló téma nélkül csatlakozzék valamelyik fejlettebb kutatóhoz segítségül és munkája kísérleti téren vezetőjének alkalomról-alkalomra adott utasításai szerint történjék, tehát a kezdő mintegy „inaskodjék“ egy fejlettebb kutató mellett. Ez alatt az időpont alatt végezzen a kutató mindenféle manuális munkát, beleértve olyan műszerészi munkákat is, amelyet egyébként az Intézet fizikusai már később sajátkezűleg nem végeznek. Ez alatt az idő alatt a kezdő vezetője adjon irodalmat beosztottjának, amelyből képet kaphat arról a területről, amelybe a folyó kutatásai során „belesegít“. Ez az időszak a legalkalmasabb arra, hogy a vezető mint egy nevelő, előkészítse beosztottját valódi hivatására.

Egy ilyen féléves „inaskodás“ után fokozatos fejlődéssel kell a fizikusnak önálló kutatóvá nőnie, amely fejlődés menetét a fejlettebb kutatóknak és végső fokon az osztályvezetőknek igen gondosan szemmel kell tartani. Az inaskodás után az első lépés az első önálló feladat kitűzése. A feladatnak nyilvánvalóan olyannak kell lennie, hogy hozzon új eredményt, de még előbbre való szempont, hogy biztosítsa a kutató fejlődését és a nagy feladatok megoldására kellő előkészítést jelentsen. Ebből következik, hogy a feladat kicsi és konkréten megfogalmazott, körülhatárolt legyen, lehetőleg valamelyik fejlettebb kutató feladatából kihasított részlet. Ezzel vesszük elejét ugyanis annak, hogy a kezdő kutató kellő tájékozódó képesség hiányában a tárgytól messze elkalandozhat, de annak is elejét vesszük, hogy kis feladaton dolgozva problémáját elszigetelten látja, annak perspektívái nélkül. Minthogy fizikusokról van szó, a feladat lehetőleg fizikai és ne technikai természetű legyen, bár ez a kívánság, fejlődése kezdetén lévő intézetben sokszor alig teljesíthető.

A fiatal káderek nevelésének itt említett elvei szerint történik a Központi Fizikai Kutató Intézet legtöbb osztályán a fizikusok nevelése. Meg kell jegyeznünk azonban, hogy ezen a téren még igen sok tennivaló vár ránk.

A harmadik kérdéssel kapcsolatban, mely az elvi kutatási eredményekkel kapcsolatos gyakorlati eredmények értékesítésére vonatkozólag megemlítendő, hogy intézetünk eddigi munkájában a műszerépítés következtében számos olyan értékesíthető eredmény van, mely az ipari vonatkozásában jelentős támogatásnak számíthat. Az intézet ui. munkájának kezdetén azért kényszerült műszerépítéssel foglalkozni, mert a magyar műszer- és alapanyagipar a szükséges készülékek kidolgozására megfelelő fejlesztési kapacitással nem rendelkezett. Amennyiben eddigi eredményeinknek az ipar felé való átadását elmulasztjuk, úgy annak fejlődését nem segítve elő, a továbbiakban is kényszerülünk saját céljainkra egyes műszertipusoknak nagyobb mértékben történő előállítására, ami kivitelezési kapacitásunkat igen nagy mértékben terheli meg. Így tehát éppen saját tudományos munkánk elősegítésére gondoskodnunk kell az intézeten belüli készülékek kísérleti példányainak alapján azoknak a Központi Műhelyben nullszériában történő legyártásáról, hogy ezzel az Intézeten belüli igényeket részben kielégíthessük, részben pedig a készüléket az ipar felé továbbíthassuk. A műszerekre vonatkozó megállapításokon túlmenően felül kell vizsgálni eddigi eredményeinket, azoknak ipari felhasználhatósága szempontjából. Ezzel kapcsolatban nehézségként jelentkezik az a tény, hogy intézetünk kutatói előtt az ipar problémái általában nem ismeretesek és így egy ilyen felülvizsgálat során esetleg nem lesz megállapítható minden esetben, hogy melyek azok a kutatási eredmények, melyek az iparban alkalmazásra kerülhetnek. A fenti probléma megoldására szükségesnek látszik, hogy intézetünk kutatói egyes üzemekkel szoros kapcsolatot tartsanak fenn. Ez a kapcsolat elsősorban az ipar munkamódszerének perspektívikus problémáinak megismerésére vonatkozzék. Célszerűnek látszik, ha az ipari kapcsolatok felvételénél elsősorban az intézet kutatásai profiljához közelálló, illetve kutatási eszközeinek gyártásával foglalkozó ipari üzemekkel vegyszük fel a kapcsolatot. Ennek megfelelően nemrégen kötötte meg az intézet az eddigi legnagyobb arányú szocialista szerződését öt kutató intézettel, illetve vállalattal: Távközlési Kutató Intézet, Remix, Elektromos Mérőműszerek Gyára, Akkumulátor Gyár, Kábelgyár.

Befejezésül hangsúlyozni szeretnénk azt a tényt, hogy a felszabadulás előtti állapothoz képest Pártunk és Kormányunk a fizika ugrásszerű fejlődését tette lehetővé és soha nem látott lehetőségeket nyitott meg Magyarországon a fizikai kutatás számára. A fizikai kutatás igen sokba kerül, különösen akkor, hogy ha teljesen elmaradt állapotból kiindulva kívánunk megteremteni modern kutatást. Ezt a szempontot gyakran szem elől tévesztve azt szokás mondani, hogy a fizikai kutatás Magyarországon nagyon sokba került. Ez a megállapítás annyiban igaz, hogy olyan összegeket, mint aminőket Pártunk és Kormányunk a Központi Fizikai Kutató Intézetre költött, soha még ebben az országban felszabadulás előtt elvi kutatásokra nem költöttek. Azonban veszélyes abból a szempontból, hogy nem mutat rá arra, hogy a fizikai kutatásokkal kapcsolatos későbbi kormányfeladatok (itt elsősorban az atomenergia békés felhasználásával kapcsolatos kérdésekre, a szocialista társadalom gazdasági megerősödésében nagy szerepet játszó automatizálási és távvezérlési problémákra gondolunk) még sokkal nagyobb beruházásokat kívánnak. Hogy ezeknek a beruházásoknak legyen értelme, tudományosan jól elő kell készülni a ránk váró feladatokra.

Végezetül hangsúlyozni szeretnénk, hogy a fizikai kutatásoknak és így a Központi Fizikai Kutató Intézetnek közvetve óriási jelentősége van az ország technikai és szellemi kultúrájának fejlesztésében.

A Központi Fizikai Kutató Intézet dolgozói előtt világos az a feladat, hogy az elkövetkezendő néhány év alatt a modern kísérleti fizika nálunk művelt területein világviszonylatban is jelentős tudományos eredményeket kell elérni.

KALMÁR LÁSZLÓ lev. tag:

Tisztelt akadémiai Osztály! *Alexits György* akadémikus felszólítására élek a kritika jogával. Olyan kérdést szeretnék szóvá tenni, amelyben nagyon nehéz konkréten kimutatni, kik és hol követtek el hibát, de amelyben nyilvánvaló, hogy nincs minden rendjén. Ez a kérdés az algebrai kutatások megbecsülésének kérdése hazánkban. Hangsúlyozom, hogy csak hazánkban nem részesülnek kellő megbecsülésben a magyar algebrai kutatások, mert külföldön súlyuknak megfelelő mértékben értékelik ezeket a kutatásokat. Ennek bizonyítékául legyen szabad egy részletet felolvasnom abból az előszóból, amelyet *Alekszandr Gennagyijevics Kuros* szovjet akadémikus, a mai szovjet algebrai iskola vezetője, Akadémiánk kiadásában magyar fordításban megjelenendő *Csoportelmélet* c. könyve elé írt: „... könyvemben sajnos úgyszólván egyáltalán nem nyertek figyelembevételt a magyar algebristák vizsgálatai. Ezek a vizsgálatok számos kérdésben, különösen pedig az Abel-féle csoportok elméletében, nagy lendületet vettek az utóbbi évek során, és tanúi vagyunk, miként alakul ki Magyarországon az algebrai kutatásnak egy új, nagy központja."

Hogy az algebrai kutatások hazai megbecsülése nem áll arányban azzal a megbecsüléssel, amely többek között *Kuros* akadémikus fenti szavaiból is kicsendül, nyilvánvaló, ha pl. a magyar algebrista kutatók külföldi kiküldetéseinek, vagy az algebrista aspiránsoknak számát összehasonlítjuk a matematika más ágaira vonatkozó megfelelő számadatokkal. Természetesen azt lehet erre válaszolni, hogy sem a külföldi kiküldetésekről, sem az aspiránsok felvételéről nem az Osztályvezetőség dönt. Mégis befolyással vannak az ilyen kérdésekre is az Osztályvezetőség tagjainak különböző — néha csak elejtett, néha tréfás formában elhangzó — nyilatkozatai. Így pl. bizonyára nem járult hozzá az algebra hazai megbecsüléséhez *Hajós György* osztálytitkár opponensi véleménye *Fuchs László* doktori értekezéséről, amelyben úgyszólván elmarasztalta a mai algebrai kutatásokat és *Fuchs Lászlót* külön mondatokban felmentette azok alól a vádak alól, amelyekkel a mai algebrai kutatásokat illette.

Kérem az Osztályvezetőség tagjait, hogy az ehhez hasonló, az algebra megbecsülése tekintetében rossz hatást kelthető nyilatkozatoktól a jövőben tartózkodjanak és éppen ellenkezőleg, akár az Akadémián belül, akár pedig azokban a testületekben, ahol működnek, tegyenek meg mindent annak érdekében, hogy a magyar algebrai kutatások hazánkban is a külföldi elismerésnek megfelelő méltánylásban részesüljenek.

ALEXITS GYÖRGY r. tag:

Megköszönöm a hozzászólásokat, amelyek legnagyobb részükben az osztálytitkári beszámolót egészítették ki. Elismerem, hogy az elmélet és a gyakorlat megvalósítása terén még sok a tennivaló, ami *Kovács István* levelező tag hozzászólásából is kitűnt. Az itt elhangzott problémákra persze a legrövidebb időn belül meg kell találni a helyes megoldást.

Kalmár László felszólalásával kapcsolatban megjegyzem, hogy éppen az algebristák megbecsülését jelenti *Rédei László, Hajós György, Fuchs László* és *Szele Tibor* Kossuth-díjjal való kitüntetése, külföldi kiküldetéseik, eredményeik nemzetközi elismerése. Véleményem szerint e téren bizonyos fokú érzékenység tapasztalható az utóbbi időben, s *Hajós György* kérdéses hozzászólását *Fuchs László* disszertációjával kapcsolatban sokan félreértették. A felszólalás lényege abban állott, hogy *Hajós György* általánosságban megjegyezte, miszerint a modern algebrában sokan eltévednek, hiszen rendkívül általános fogalmakkal dolgoznak, amelyek a realitástól teljesen elszakadtak, *Fuchs László* ezt nem teszi, ellenkezőleg, igen reális kérdéseket tárgyal és old meg. Legutóbbi párizsi kiküldetésem alkalmával is arról győződtem meg, hogy a magyar algebristákat, például *Rédei Lászlót* és *Fuchs Lászlót* is jól ismerik, sőt az aspiránsok némelyikét is idézik. Valamely tudós munkásságának értéke nem a küldetések és az aspiránsok számával mérendő fel; példa *Fejér Lipót* professzor, aki aránylag keveset járt külföldön, mégis nemzetközi megbecsülése nem vitatható.

Végezetül azt javasolom, hogy rendezzenek vitát az algebristák a fenti témakörből, amelynek referense a fiatal és tehetséges algebrista, *Fuchs László* legyen.

A STATISZTIKUS ATOMMODELL ÉS A HULLÁMMECHANIKA KÖZTI KAPCSOLAT

GOMBÁS PÁL r. tag

Előadta az 1954. június 17-én tartott nyilvános osztályülésen

A statisztikus atommodell és a hullámmechanika közti kapcsolatot először *Dirac,* majd *Brillouin* tették vizsgálat tárgyává. *Dirac* megmutatta, hogy az atomot a sajátfüggvények helyett az ú. n. sűrűségmatrixszal lehet leírni és erre egy ú. n. mozgásegyenletet vezetett le. Ha a térbeli és impulzuskoordináták közti felcserélési relációktól eltekintünk és csak azt vesszük figyelembe, hogy a fázistér h^3 nagyságú elemi cellájában legfeljebb két elektron foglalhat helyet, akkor a hullámmechanikai Hartree, ill. Hartree—Fock-egyenletekből a statisztikus Thomas—Fermi, ill. Thomas—Fermi—Dirac-egyenlet adódik. *Dirac* ebben a dolgozatában tehát nemcsak egy igen lényeges oldalról világítja meg a statisztikus atommodell és a hullámmechanika közti kapcsolatot, hanem le is vezeti a statisztikus alapegyenleteket, ill. legalább is azok egy részét. *Brillouin* főképpen a hullámmechanikai Wentzel—Kramers—Brillouin-féle közelítő eljárás alapján teszi vizsgálat tárgyává az említett kapcsolatot. *Fényes* szintén a Wentzel—Kramers—Brillouin módszer alapján vizsgálja meg a statisztikus atommodell és a hullámmechanika közti kapcsolatot és egy igen egyszerű módon sikerül levezetnie nemcsak a Thomas—Fermi-egyenletet, hanem a bővített egyenleteket is.

Itt szeretném megemlíteni — jóllehet nem tartozik szorosan előadásom tárgyához —, hogy *Gáspár* a hullámmechanika és a statisztikus elmélet közti kapcsolatot felhasználta a Hartree és Hartree—Fock módszerek igen nagyfokú egyszerűsítésére, ill. self-consistent field-potenciálok és sűrűségeloszlások előállítására és ezzel ezeket az igen nagy számolási munkát igénylő módszereket a speciális számológépekkel nem rendelkező fizikus számára is hozzáférhetővé tette.

Míg az említett szerzők a hullámmechanikából kiindulva közelítették meg a statisztikus atommodellt, én itt a fordított utat szeretném követni. Vagyis kiindulok a statisztikus alapegyenletből, ill. azok egyikéből és azt szeretném bizonyos szempontból párhuzamba állítani a hullámmechanikai Schrödinger-egyenlettel.

A továbbiak szempontjából lényeges, hogy említést tegyek egy a hullámmechanika és a statisztikus atommodell közötti kapcsolatról, melynek lényege az, hogy a statisztikus atomelmélet alapján lehetségessé vált a Pauli-elvből származó betöltési elvnek teljesen betöltött kvantumállapotok esetén egy nem-klasszikus eredetű taszító erővel való helyettesítése, mely erő egy egyszerű alakú potenciállal rendelkezik. Ezt a potenciált egy régebbi dolgozatomban levezettem és erről akadémiai előadásaimban töbizben szó volt, úgyhogy nem szeretnék ismétlésekbe bocsátkozni és ezért csak röviden annyit említek meg, hogy a valenciaelektrons-kvantumállapotai, vagyis gömbszimmetrikus kvantumállapotok esetén ennek az erőnek a potenciálja a következő alakú

$$F=\gamma_F \varrho^{2/3}, \tag{1}$$

ahol ϱ az elektronsűrűség és γ_F a következő univerzális állandó

$$\gamma_F=\frac{3}{10}(3\pi^2)^{2/3} e a_0. \tag{2}$$

e a pozitív elemi töltés és a_0 a legkisebb Bohr-féle H-rádiusz. Ha az elektrosztatikus potenciált ezzel a járulékos potenciállal kiegészítjük, tehát ha a

$$\Phi = V+F \tag{3}$$

modifikált potenciált vezetjük be, akkor a valenciaelektronra vonatkozó azon mellékfeltételektől, amelyek szerint a valenciaelektron sajátfüggvényének az elektronokkal teljesen betöltött kvantumállapotok sajátfüggvényeire ortogonálisnak kell lennie, eltekinthetünk.

Ha figyelembe vesszük az elektronoknak kicserélődési kölcsönhatását, mely egy tipikusan kvantummechanikai effektus, akkor ehhez a potenciálhoz még egy további kis korrektív tag járul, mely a valenciaelektronnak az összes többi elektronnal való kicserélődési kölcsönhatásából származik és mely a statisztikus elmélet alapján szintén egy egyszerű potenciállal, mégpedig a következő kifejezéssel írható le

$$-\gamma_a \varrho^{1/3}, \tag{4}$$

ahol γ_a a következő univerzális állandó

$$\gamma_a=\frac{3}{4}\left(\frac{3}{\pi}\right)^{1/3} e. \tag{5}$$

Tehát a kicserélődési kölcsönhatás figyelembevételével a fenti módifikált potenciált még ezzel a taggal ki kell egészíteni.

A továbbiak szempontjából teljesen hasonlóan, mint a Fizikus Kongresszuson tartott előadásomban, célszerű kiindulni az atom statisztikus energiakifejezéséből, mely a következő tagokból tevődik össze: az eletrongáz Fermi-féle kinetikus energiája, az elektronoknak Weizsäcker-féle kinetikus energiája, az atommagnak az elektronokkal való elektrosztatikus kölcsönhatásából származó potenciális energiája, az elektronoknak egymás közötti elektrosztatikus kölcsönhatásából származó potenciális energiája és végül az elektronoknak a kicserélődési kölcsönhatásból származó energiája. Ezek az energiatagok sorra a következők:

$$E_F=\gamma_F e\int \varrho^{5/3}\, dv, \tag{6}$$

(7) $$E_W = \varkappa_W \int \frac{(\operatorname{grad} \varrho)^2}{\varrho} dv,$$

(8) $$E_p^k = -\int \frac{Ze^2}{r} \varrho \, dv,$$

(9) $$E_p^e = \frac{1}{2} \int V_e e \varrho \, dv,$$

(10) $$E_a = -\gamma_a e \int \varrho^{4/3} dv,$$

ahol ϱ jelenti az elektronsűrűséget, V_e az elektronok elektrosztatikus potenciálját, Z a rendszámot, e a pozitív elemi töltést, r a magtól való távolságot és dv a térfogatelemet; $\varkappa_W$ a következő univerzális állandó

(11) $$\varkappa_W = \frac{1}{8} e^2 a_0.$$

A statisztikus alapegyenlet az atom összenergiájának, tehát az

(12) $$E = E_F + E_W + E_p^k + E_p^e + E_a$$

kifejezésnek az elektronsűrűség szerinti variációjából adódik a következő mellékfeltétellel

(13) $$\int \varrho \, dv = N,$$

ahol N az elektronok száma az atomban és a mellékfeltétel azt fejezi ki, hogy a variációt úgy kell végrehajtani, hogy az atomban lévő elektronok száma ne változzon meg. A variációs elvből a következő alapegyenlethez jutunk

(14) $$4\varkappa_W \Delta\psi - \frac{5}{3} \gamma_F e \psi^{7/3} + \frac{4}{3} \gamma_a e \psi^{5/3} + (V - V_0) e \psi = 0,$$

melyben V az atom teljes elektrosztatikus potenciálja, $\psi = \varrho^{1/2}$ és V_0 egy Lagrange-féle multiplikátor, melyet úgy kell meghatározni, hogy a fenti mellékfeltétel teljesítve legyen. Ennek az egyenletnek a bevezetésben említett általam végrehajtott korrekciója abban áll, hogy az egyenletben még egy tag lép fel, mely a magtól való távolságtól és a sűrűségtől függ és amelyet $g(\psi, r)$-el fogok itt jelölni. Ezt a tagot, minthogy a továbbiakban nem lesz rá szükségünk, itt nem akarom részletezni, hanem csak azt említem meg, hogy ennek a tagnak az eredete — amint ezt a Fizikus Kongresszuson tartott előadásomon részletesen kifejtettem — abban keresendő, hogy az elektronok Fermi-féle és Weizsäcker-féle kinetikus energiájának egyszerű összeadása esetén az ember egy hibát követ el, mert az elektronoknak ún. saját kinetikus energiáját, amelyet úgy a Fermi-féle, mint a Weizsäcker-féle kinetikus energiatag tartalmaz, duplán számoljuk; az innen származó hiba korrekcióját adja a $g(\psi, r)$ tag.

A kinetikus sajátenergián a kinetikus energiának azt a részét értjük, mely a kinetikus energiából fennmarad, ha a kinetikus energiának a sajátfüggvények orthogonalizálásától származó részét levonjuk. Vagyis a kinetikus sajátenergia lényegében azzal a kinetikus energiával egyenlő, melyet csomópont nélküli sajátfüggvények esetén kapnánk.

Ezt a $g(\psi, r)$ korrekciót figyelembe véve az alapegyenlet a következőképpen alakul

$$(15) \qquad 4\varkappa_w \Delta\psi - \frac{5}{3}\gamma_F e\psi^{7/3} + g(\psi, r) + \frac{4}{3}\gamma_a e\psi^{5/3} + (V - V_0)e\psi = 0.$$

Ha az

$$(16) \qquad \varepsilon = -V_0 e$$

és

$$(17) \qquad W = -\left(V - \frac{5}{3}\gamma_F\psi^{4/3} - \frac{1}{\psi e}g(\psi, r) + \frac{4}{3}\gamma_a\psi^{2/3}\right)e$$

jelöléseket vezetjük be, akkor ez az egyenlet átmegy a következőbe

$$(18) \qquad 4\varkappa_w \Delta\psi + (\varepsilon - W)\psi = 0.$$

A fentebbi alapegyenletnek ebből az alakjából azonnal nyilvánvalóvá válik ennek az egyenletnek a hullámmechanikai Schrödinger-egyenlettel való analógiája, ha figyelembe vesszük, hogy

$$(19) \qquad 4\varkappa_w = \frac{1}{2}e^2 a_0 = \frac{h^2}{8\pi^2 m},$$

ahol h a Planck-féle állandó és m az elektron tömege. Azonban ellentétben a Schrödinger-egyenlettel, mely egyszerű problémák esetén lineáris, a fenti egyenlet, hasonlóan pl. a többtestprobléma Hartree—Fock-féle egyenleteihez, melyek tágabb értelemben vett Schrödinger-egyenletek, nem lineáris, ugyanis az elektron potenciális energiája W függ ψ-től.

Ez a W potenciális energia az, amely itt bennünket közelebbről érdekel. W kifejezésében a zárójelben levő rész vagyis a

$$(20) \qquad \Phi' = V - \frac{5}{3}\gamma_F\psi^{4/3} - \frac{1}{\psi e}g(\psi, r) + \frac{4}{3}\gamma_a\psi^{2/3}$$

kifejezés, eltekintve az $\frac{1}{\psi e}g(\psi, r)$ korrekciós tagtól és a kicserélődési korrekciótól, figyelembe véve a $\psi = \varrho^{1/2}$ relációt, azonos a bevezetésben említett és teljesen más úton levezetett modifikált potenciállal, Φ-vel. A korrekciós tag szerepe igen lényeges, mert ez gondoskodik arról, hogy a kinetikus sajátenergia ne legyen kétszer számítva.

A fentebbi (18) egyenlet alapján a problémát úgy is megfogalmazhatjuk, hogy meghatározandó az elektron sajátfüggvénye ψ és sajátenergiája ε a Φ' modifikált potenciáltérben azzal a mellékfeltétellel, hogy

$$(21) \qquad \int \psi^2\, dv = N$$

legyen.

A modifikált potenciált a teljes elektronsűrűséggel, tehát $\varrho = \psi^2$-el kell képezni, amiből következik, hogy $-\Phi'e$ a legmagasabb energiaállapotban levő elektron modifikált potenciális energiája. Innen következik, hogy a (18) egyenlet a legmagasabb energiaállapotra vonatkozó Schrödinger-egyenlet és ε az ezen energiaállapotnak megfelelő energia. Röviden még rá szeretnék mutatni arra, hogy abban a körülményben, hogy a (18) egyenlet a legmagasabb energiájú állapot sajátfüggvényét szolgáltatja, mellyel a $\psi^2 = \varrho$ összefüggés alapján ki lehet számítani az atom elektronsűrűségét — ami első pillanatra meglepő — nincsen semmi ellentmondás, mert amennyiben az ember a statisztikus atomelméletben az elektronokhoz sajátfüggvényeket rendel, akkor az összes elektronokat ugyanazzal az átlagsajátfüggvénnyel, $\psi = \varrho^{1/2}$-el írja le. Az, hogy ezt az átlagsajátfüggvényt melyik állapotra vonatkozó egyenletből határozzuk meg, természetesen mellékes; a részletesebb vizsgálat azt mutatja, hogy a legegyszerűbb az egyenlet felírása a legmagasabb energiájú állapotra.

Az eddigiekből azt a konkluziót vonhatjuk le, hogy a modifikált potenciál segítségével a statisztikus alapegyenletet egy Schrödinger-egyenlet alakjában azonnal felírhatjuk, sőt az alapegyenletet, ill. a statisztikus elmélet alapproblémáját egy Schrödinger-féle sajátértékproblémához analóg probléma gyanánt foghatjuk fel.

Ha a korrelációtól eltekintünk, a (18) alapegyenlet a legáltalánosabb statisztikus alapegyenlet. Érdekes megvizsgálni, hogy ebből az egyenletből, mely alakjára nézve egy Schrödinger-egyenlet, milyen elhanyagolással nyerhetők az egyszerűbb statisztikus modellek, a Thomas—Fermi—Dirac, ill. a Thomas—Fermi-modell alapegyenletei. A lényeges elhanyagolás mindkét esetben az, hogy a (18) alapegyenletben elhagyjuk a differenciáloperátort tartalmazó első tagot. Mivel ekkor elhanyagoltuk a Weizsäcker-féle kinetikus energiarészt — ha konzekvensek akarunk maradni — el kell hanyagolnunk a kinetikus sajátenergiára vonatkozó korrekciót, tehát a Φ' modifikált potenciálban az $\frac{1}{\psi e} g(\psi, r)$ korrekciós tagot, ami azt jelenti, hogy a Φ' helyébe a Φ lép. A kinetikus sajátenergiának a korrekciója ugyanis kizárólag annak a következménye, hogy a Fermi-féle kinetikus energia mellett még a Weizsäcker-féle kinetikus energiát is figyelembe vettük, ami által a kinetikus sajátenergiát duplán számítottuk. Ha tehát a Weizsäcker-féle tagot elhagyjuk, el kell hagynunk az $\frac{1}{\psi e} g(\psi, r)$ korrekciós tagot is. Ezekkel az elhanyagolásokkal tehát az alapegyenleteink a következő alakot öltik

$$\varepsilon - \Phi e = 0,$$

vagyis

$$\frac{5}{3} \gamma_F e \psi^{4/3} - \frac{4}{3} \gamma_a e \psi^{2/3} - Ve + \varepsilon = 0.$$

Ez éppen a Thomas—Fermi—Dirac-féle alapegyenlet. Ha az elektronok kicserélődésétől eltekintünk, ami $\gamma_a = 0$-nak felel meg, akkor pedig a következő összefüggéshez jutunk

$$\frac{5}{3}\gamma_F e \psi^{4/3} - Ve + \varepsilon = 0.$$

Ez a Thomas—Fermi-féle alapegyenlet. Mindkét esetben $\psi^2 = \varrho$ a potenciállal egyszerűen határozható meg, ϱ-t behelyettesítve a Poisson-egyenletbe, vagyis a

$$\Delta V = 4\pi e \varrho$$

egyenletbe, adódnak a potenciáleloszlást meghatározó egyenletek.

Befejezésül még rá szeretnék térni arra, hogy a (18) alapegyenlet megoldása hogyan vihető keresztül. Mivel a potenciális energia függ ψ-től, az egyenletet egy Hartree-féle szukcesszív approximációs módszerrel lehet megoldani. Evégből kiindulunk egy ψ_1 közelítő megoldásból, melyet pl. a variációs módszerrel határozunk meg, ezzel kiszámítjuk a Φ' potenciált, ill. a W potenciális energiát. Ezt behelyettesítve a fenti (18) egyenletbe, ebből egy ψ_2 megoldást határozhatunk meg és így tovább. Az eljárást addig kell folytatni, míg a W-be behelyettesített és az egyenletből nyert megoldások praktice megegyeznek egymással. A rendelkezésünkre álló gépekkel a megoldást így csak az atom belsejében tudtuk meghatározni, a magtól nagyobb távolságban a megoldást ezen az úton nem tudtuk előállítani. Ugyanis a megoldás a magtól nagyobb távolságban rendkívül érzékeny a kezdeti iránytangens értékére. Így pl. nehezebb atomok esetén a kezdeti iránytangenst már több mint 10 jegy pontossággal kell megadni. Lényegesen kedvezőbb a helyzet, ha az ember az egyenlet integrálásánál nem a magtól, hanem $r = \infty$-től, vagyis praktice igen nagy r értékektől indul ki és meghatározza az itt számbajövő azon megoldást, amely keresztülmegy az origón. Íly módon az egyenlet megoldását az összes nemesgázokra előállítottuk. Az így nyert elektronsűrűségek az atom belsejében a Hartree-féle elektronsűrűségeknek igen jó átlagértékét adják, nagy távolságban az atommagtól pedig praktice megegyeznek a Hartree-féle sűrűségekkel.

Végül még megemlítem, hogy a fentebb említett és a Fizikus Kongreszszuson tartott előadásomon részletesen tárgyalt kinetikus energiakorrekción valószínűleg még egy csekély módosítást kell végrehajtani, ugyanis a kinetikus energiának radiális és azimutális részeinek a súlyfaktorai nem 1 és 1, amint én azt túlságosan klasszikus elképzelésekre támaszkodva feltételeztem, hanem rendre 1 és 2. Erre a napokban *Macke* a sao-paoloi egyetem fizika professzora volt szíves figyelmemet felhívni. Az eredményekben az atomok energiájában és sűrűségeloszlásában a súlyfaktorok megváltozása csak igen csekély változást fog előidézni, az energiánál a tapasztalattal való egyezés egész kevéssé rosszabbodni fog, de a sűrűségeloszlásban előálló változás a tapasztalattal való egyezést, pl. a diamágneses szuszceptibilitásoknál, lényegesen meg fogja javítani.

IRODALOM

[1] P. A. M. Dirac. Proc. Cambridge Phil. Soc. **26**, 376, 1930.
[2] L. Brillouin, L'atome de Thomas—Fermi, Actualités scientifiques et industrielles, **160**, Hermann u. Cie, Paris, 1934.
[3] I. Fényes, Csillagászati Lapok (Budapest) **6**, 49. 1943; Múzeumi Füzetek (Kolozsvár) *III*, 3, 1945.
[4] R. Gáspár, Acta Phys. Hung. **2**, 151, 1952.

Műszaki Egyetem
Fizikai Intézete, Budapest

HOZZÁSZÓLÁSOK

HOFFMANN TIBOR a fizikai tudományok kandidátusa:

Gombás akadémikus előadása alatt felmerült bennem egy probléma. A statisztikus modell alapegyenlete így írható:

$$\Delta\psi + f(\psi) + (V - V_0)\psi = 0,$$

ahol $f(\psi)$ ismert függvény. A fenti egyenlet a $\Delta\psi + (\varepsilon - V)\psi = 0$ Schrödinger-egyenlettel lett analógiába hozva.

Egy pontra hívom fel a figyelmet. A Schrödinger-egyenletben a V potenciál tartalmazza a ψ-t, de nem túl komplikált módon. Ezt *Gombás* professzor is kihangsúlyozta, s ez csak matematikai nehézséget okoz. Itt azonban a V komplikált módon tartalmazza a ψ-t, t. i. a Poisson-egyenlet összefüggésében. Így a $\Delta(V - V_0) \approx \psi^2$ Poisson-egyenlet tekintetbe vételével a következő bikvadratikus egyenletet nyerjük:

$$\Delta\left(-\frac{\Delta\psi}{\psi} - \frac{f(\psi)}{\psi}\right) \approx \psi^2.$$

Ez nem analóg a Schrödinger-egyenlettel. Viszont ugyanezzel az eljárással lehet az első tag elhagyásával a Thomas—Fermi—Dirac-egyenletet megkapni. Meg kellene nézni, hogy milyen viselkedést mutat egy ilyen bikvadratikus egyenlet, mennyiben változtatja meg az egész probléma képét.

FÉNYES IMRE a fizikai tudományok kandidátusa:

Nem túl hosszan, de néhány szónál többet szeretnék mondani az itt szereplő kérdésekről. Az elhangzott előadás a két elmélet olyan szoros kapcsolatára mutat rá, amelynek fennállására eddig gondolni sem mertünk. Ezáltal a statisztikus atommodell jelentősége óriási mértékben megnövekedett, amire külön rá kell mutatni.

A tárgyalt problémát — bár itt látszólag „tisztán" elvi kérdésről van szó — gyakorlati jelentősége teszi érdekessé. Ami különben egyáltalán nem is meglepő, hiszen a valóban elvi jelentőségű megállapítások szokták a legnagyobb gyakorlati hasznot is nyujtani. Azért tartom szükségesnek a statisztikus atommodellről szóló elmélet jelentőségének aláhúzását, mert egyrészt: néhány évvel ezelőtt még úgy látszott, hogy ez az elmélet elöregedőben, kimerülőfélben van, másrészt azt is lehetett gondolni, hogy a számológépek tökéletesedése fokozatosan fölöslegessé teszi az ilyen relatíve egyszerű közelítő elméletet. Mind az elhangzott előadás, mind ennek közvetlen előzményei, azonban, az ellenkezőjét mutatják. Nyugodtan állíthatjuk, hogy a statisztikus atommodellnek nem fejlődése, hanem csupán fejlődésének első szakasza van lezárulóban. És talán az igazán érdekes és szép eredmények még csak most következnek, ide számítva a jelenleg hallott előadás megállapításait is. Ezt szeretném most néhány konkrét ténnyel és néhány plauzibilisnek látszó megállapítással újabb oldalról is alátámasztani.

Ami a nagy teljesítőképességű számológépek szerepét illeti, erről egész röviden a következőket lehet mondani. Az exakt hullámmechanikai és a közelítő jellegű statisztikus elmélet komplikáltságát tekintve, a viszony kb. olyan, mint a komplikált számoló automata és a logarléc viszonya. Csodálatos módon azonban a két elmélet hatóképességének viszonyában koránt sincs meg ez a nagy aránytalanság, sőt sokszor (bizonyos finomságoktól eltekintve) az arány szinte egy az egyhez. Ez pedig óriási jelentőségű tény, mely a fent említett egyik aggályt teljes mértékben megcáfolja. Ez a körülmény mutatja, amint azt *Gombás* professzor is hangsúlyozta, hogy itt nem csupán egy ad hoc elgondolásról van szó, hanem valójában a hullámmechanikai többtestproblémának igen jó közelítésű megoldásáról. A következő feladat nyilván az, hogy ezt a kapcsolatot ne csak kvalitatíve, hanem kvantitatíve is feltárjuk, és ezen az alapon hibabecslési eljárást lehessen megadni. A hullámmechanikából a statisztikus modell felé történő átmenet már régebben ismeretes, ezt az utat most *Gombás* professzor fordítva csinálta meg és ilyen módon kvalitatíve ekvivalenciát mutatott ki a két elmélet között. A visszafelé menő út ismeretének birtokában (tudván most már, hogy itt mit kell kihozni) az approximációs matematika eszközeivel bizonyára kvantitatíve is megfogalmazható a kapcsolat. Ezzel olyan elgondolás birtokába jutnánk, amely lényegesen egyszerűbb a hullámmechanikai elméletnél, viszont pontosság szempontjából vetekszik vele. Mint látjuk, a probléma jelentős, éppen ezért a statisztikus atommodellel foglalkozó kartársak felé is szeretném felvetni a kérdést, hogy a jövőben hathatósabb kooperációt kellene kifejteni.

A dolog szakmai részét illetően is rövid leszek. A kellő élességű hibabecslés igen nehéz feladat, de ha az elméleti fizikus ismeri a kiindulópontot és az eredményt, az áthidalást könnyebben meg tudja csinálni, mint akkor, ha a hídnak csak az egyik pillére ismeretes. A közelítő módszereket nagyobb biztonsággal lehet használni, ha tudjuk, hogy honnan induljunk el a közelítésnél. A *Gombás* akadémikus által talált analógia éppen ehhez nyujt segítséget. A statisztikus elmélet egyik hibája az volt, hogy az olyan elgondolásokat is szerepeltetett, amelyek bizonyos fokig idegenek a hullámmechanikától. A koordináta-impulzus-térbeli meggondolások olyan nézőpontot hoznak be, amelyeket nem lehet pontosan kvantitatíve megfogni. Úgy látszik azonban, hogy ennek (a hullámmechanikától idegen segédeszköz felhasználásának) van egy eliminálási lehetősége. A W. K. B. módszerből kell kiindulni, de némi módosítással. A

(1) $$\hbar^2 f'' + p^2 f = 0$$

egydimenziós Schrödinger-egyenlet sajátállapotai, mint ismeretes, visszavezethetők bizonyos nem-sajátállapotok szuperpoziciójára. (1) a

(2) $$\varphi = \exp \frac{i}{\hbar} \int y\, dx$$

nem-sajátállapotot jellemző függvénnyel mindig kielégíthető és a φ meghatározása a

(3) $$\frac{\hbar}{i} y' + y^2 - p^2 = 0$$

Riccati-egyenlet megoldására vezethető vissza. A W. K. B. módszer ebből a tényből indul ki és első közelítésben az exakt

$$f = \frac{a}{2}(\varphi^* + \varphi) = \frac{a}{u^{1/2}} \cos\left(\frac{1}{\hbar}\int u\, dx + \delta\right) \tag{4}$$

sajátfüggvényt (u az y valós része) a következő függvénnyel helyettesíti

$$f \approx \frac{a}{p^{1/2}} \cos\left(\frac{1}{\hbar}\int p\, dx + \delta\right). \tag{5}$$

Sajnos, a W. K. B. módszernek olyan hibái vannak, melyek eliminálása a szokásosan használt

$$y = \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{\hbar}{i}\right)^l y_l \tag{6}$$

sorfestés felhasználása mellett nem lehetséges. (Erre ez év januárjában az Eötvös Társulatban tartott előadásomban már rámutattam.) Mindezt azért említem, mert azok az előző vizsgálataim, melyekről itt *Gombás* professzor is megemlékezett, a W. K. B. módszeren alapulnak és a módszer hibái szükségszerűen a ráépített vizsgálatokban is jelentkeznek. Egyszerűen arról van szó, hogy a (6) sor általában nem exisztál, ti. y-nak $\hbar = 0$-nál lényeges szingularitása van. Illusztrálásul (*Lentei Ilona* számításai alapján) itt egy konkrét példát mutatok. A H-atom alapállapotában u (az y valós része) a következő formájú:

$$u = \hbar \frac{\frac{A^2}{f^2}}{1 + \left(\int\limits_{x_0} \frac{A^2}{f^2} dx\right)^2},$$

ahol f a radiális sajátfüggvény (a normálási tényezőtől eltekintve):

$$f = r \exp - \frac{me^2}{\hbar^2} r,$$

A és x_0 tetszőlegesek. (Meglepő, de így van.) Ebből konkréten is látszik, hogy az

$$y = u - \frac{1}{2} \frac{\hbar}{i} \frac{u'}{u}$$

függvénynek a $\hbar = 0$ helyen lényeges szingularitása van és így a (6) sorfejtés nem exisztál.

Szerencsére exisztáló sorfejtés is található és ily módon a statisztikus atommodell alapegyenleteinek levezetése az eddiginél konzekvensebben elvégezhető. Ezzel kapcsolatban csupán arra a körülményre akarok rámutatni, hogy a modifikált W. K. B. módszer a klasszikus impulzus-fogalmát teljesen mellőzi. Így a statisztikus atommodell hullámmechanikai levezetésénél nem lép fel és nincs szükség a koordináta-impulzus-térbeli eloszlás alkalmazására sem, mely a hullámmechanikával inkompatibilis. A vizsgálatoknak még a kezdetén vagyok, de remélhető, hogy az elhangzott előadás útmutatásai alapján a nehézségek elháríthatók.

Végül a többi felszólalásban felmerült egyik problémához szeretnék hozzászólni. Az a körülmény, hogy *Gombás* professzor által talált analógiában olyan sajátfüggvény szerepel, mely nemcsak komplex nem lehet, de előjelet sem válthat (holott ez sajátfüggvényeknél lehetséges), úgy látom: nem jelent lényeges nehézséget. Ha *Gombás* által levezetett Schrödinger-egyenlet-szerű egyenlethez még hozzávesszük a kontinuitási egyenletet is, akkor a két egyenletből szabályszerű Schrödinger-egyenlet állítható elő, melynek megoldása már minden tekintetben szabályszerű hullámmechanikai sajátfüggvény. Az eljárás lényegében ugyanaz, amit fentebb a W. K. B. módszerben szereplő nemsajátállapotokkal kapcsolatban említettem.

KALMÁR LÁSZLÓ lev. tag:

Azt a módszert, ahogyan *Gombás* akadémikus a statisztikus atommodell általa megjavított Thomas—Fermi—Dirac-féle alapegyenletéből levezetett egy, a Schrödinger-féle egyenlethez hasonló hullámegyenletet, nagyon érdekesnek tartom. Az, hogy a kapott hullámegyenlet nem teljesen azonos a Schrödinger-egyenlettel, természetes, hiszen a módszer lényegéhez tartozik hozzá az, hogy a kérdést, amely eredetileg, exakt módon tekintve, többelektron-probléma, egyelektron-problémára vezeti vissza (éppen ebben áll az az egyszerűsítés, amit a statisztikus atommodell alkalmazása jelent). Az azonban meggondolkodtató, hogy a kapott hullámegyenlet nem lineáris, tehát a benne szereplő ψ függvény interferencia szempontjából nem úgy viselkedik, mint a Schrödinger-egyenlet ψ-függvénye. Azonban ez is természetes, hiszen az elektromos sűrűség négyzetgyökét vezette be *Gombás* akadémikus ψ-függvény gyanánt, holott az exakt ψ-függvénynek csak az abszolút értéke jelent — megfelelő értelmezés esetén — elektromos sűrűséget. Ezért felvetődik az a kérdés, nem kaphatunk-e hasonló eljárással lineáris, vagy legalábbis a lineáristól kevésbé eltérő hullámegyenletet, ha az elektromos sűrűség négyzetgyöke helyett ennek alkalmas, 1 abszolút értékű, a helytől függő komplex tényezővel való szorzatát vezetjük be ψ-függvény gyanánt.

GOMBÁS PÁL r. tag:

A *Hoffmann* osztályvezető által említett negyedrendű differenciálegyenletet már régebben megvizsgáltam, de abból csak általános következtetéseket sikerült levonnom a megoldásra vonatkozóan. Úgy vélem, hogy a differenciálegyenlet megoldása megfelelő gépi berendezések nélkül reménytelen feladat.

A Hartree—Fock-egyenletekben szereplő általánosított potenciálfüggvény is tartalmazza az ismeretlen függvényt, amint azt az előadásban már ki is emeltem, úgyhogy az előadásban említett analógia kétségtelenül fennáll.

A *Fényes* docens hozzászólásában felvetett gondolatokat nagyon érdekesnek tartom. Nagyon örvendetes volna, ha a statisztikus modell esetén tényleg sikerülne egy hibabecslést végezni, ami rendkívül súlyos feladat.

Igen melegen üdvözlöm *Fényes* docensnek azt az óhaját, hogy azok a fizikusok, akik a statisztikus atommodellel foglalkoznak, kerüljenek egymással szorosabb nexusba, aminek alapján a problémák eredményesebb megoldása várható.

Kalmár professzornak azt válaszolom, hogy az a körülmény, hogy a kapott egyenlet nem lineáris, az analógiát nem zavarja, mert pl. a Hartree—Fock-féle egyenletek sem lineárisak.

VIZSGÁLATOK NAGY ATOMSÚLYÚ KATIONOK ADSZORPCIÓJÁRA HUMUSZ KOLLOIDOKON

SZALAY SÁNDOR lev. tag

Előadta az 1954. június 17-én tartott nyilvános osztályülésen

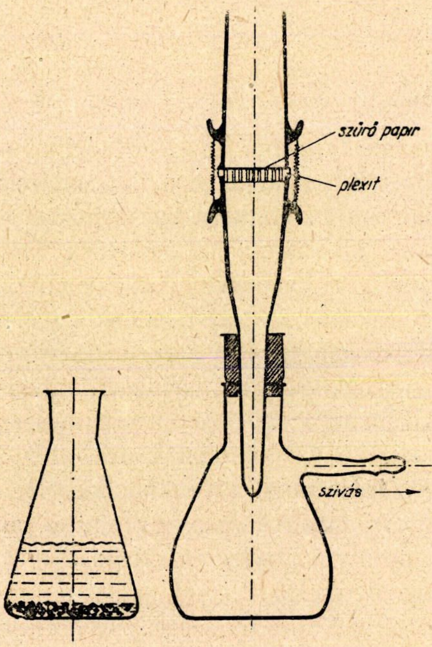
Bevezetés

Úgy érzem, hogy bevezetőül magyarázattal tartozom az előadásom megválasztott témájával kapcsolatban, mert azt címéből megítélve a fizikai-kémia vagy az agrártudományok körébe is lehetne sorolni. Humusz savak adszorpciós tulajdonságainak a vizsgálatához olyan úton jutottam, amelynek első lépései tisztán a fizikus, sőt atommagfizikus érdeklődéséből indultak el. Az atommagkutatás szempontjából oly fontos nyersanyagnak, az uránnak nyomai után kutattunk Magyarországon *Földvári Aladár* geológus professzorral együttműködésben [1], [2]. Mint ismeretes, hazai szenekben urán nyomelőfordulásokra bukkantunk [2] és érdeklődésemet felkeltette az az ismeretlen természeti törvény, amely az U-nak szenekben való feldúsulását okozhatja. Ha ezen a ponton feladtam volna a kutatást, akkor e kérdés még hosszabb ideig felderítetlen maradt volna. Rá kellett magam szánnom a kutatásnak egy olyan területen való folytatására, amely már nem nevezhető tiszta fizikának.

A természet nem ismeri a tudományok metafizikai elhatárolását, felosztását, ez utóbbi a rendszerező emberi elme terméke. A természeti jelenségek, törvényszerűségek a természetben gyakran nem nyilvánulnak meg olyan tiszta, elvont, idealizált formában, ahogy azokat a tankönyvekben tanítjuk és a laboratóriumban előállítjuk. A természetben gyakran szinte elválaszthatatlan egységbe olvadnak össze a fizikai, a kémiai és a jelen példa esetén a geokémiai, kolloidikai törvényszerűségek és vagy fel kell adnunk a reményt, hogy azokat kibogozzuk, vagy pedig a maguk egészében kell a jelenségeket vizsgálnunk, hogy a természeti törvényeket végül is tiszta, elvont formában felismerhessük. Én ez utóbbi utat választottam, egyrészt azért, mert megragadta az érdeklődésemet az urán feldúsulásának eddig megmagyarázatlan törvényszerűsége, másrészt mert reméltem, hogy ezen rendkívül fontosságú nyersanyag ilyen kis koncentrációjú előfordulásának gazdaságos kivonását és ezzel a magyar nép jövő energia ellátásának megalapozását csak a feldúsulás törvényszerűségének tudományos felderítése után remélhetjük.

Megelőző vizsgálatok

1951 nyarán és őszén vizsgáltam először a hazai szenekben és tőzegekben az U feldúsulásának az okát [3]. E vizsgálatokról az Akadémia VI. Osztályának 1951 decemberi nagygyűlésén számoltam be. Akkori kvalitatív és félkvantitatív vizsgálataim felderítették azt. A széntelepek keletkezésekor a víz alatt korhadó növényzetben nagy mennyiségben keletkező humusz savak az uránt még igen híg vizes oldatból is rendkívül mohón adszorbeálják. Az első ábrán látható egyszerű kísérleti berendezéssel megállapítható, hogy 1 g elporított tőzeg egy 100 ccm-es lombikban kb. 50 mg U-t tartalmazó uranil nitrát oldattal összerázva az U-t néhány másodperc alatt úgy kiadszorbeálja a folyadékból, hogy vákuum szűrés után a szürletben az U a legérzékenyebb kvalitatív módszerekkel sem mutatható ki, holott 6 μg jelenléte 1 ccm folyadékban még kimutatható lenne. Akkor csak kvalitatív vizsgálatokat végeztem, amelyek azt mutatták, hogy a tőzeg vagy lignitpor ezen U megkötő képessége véges, azaz telíthető. 1 g humusz tartalmú anyag által megköthető U maximális mennyisége az anyag eredete szerint változó, kedvező esetben 50—100 mg U volt. Ezen laboratóriumi kísérletek tényét logikusan egybevetve azzal a ténnyel, hogy hazai szénbányák közül azokban kaptunk U nyomokat, amelyek a dunántúli U tartalmú [1], [2] gránithegységeknek lepusztulási zónáiban fekszenek, sikerült az urán feldúsulására egy geokémiai hipotézist felállítanom, amelyik erre az esetre, tehát kőszenek U-nyomelem tartalmának esetére a jelenséget megmagyarázza [3], [4]. E hipotézist a következőkben foglaltam össze: Az uránium a kőszenekben azért dúsul fel, mert a víz alatt korhadó növényzetben keletkező humuszsavak az oldott urániumot kiadszorbeálják. Az adszorpció egy kationkicserélő folyamat.



1. ábra. Egyszerű vákuum szűrős szétválasztó készülék az adszorpciós izoterma felvételéhez.

Általánosítás biolitokra általában

Már akkor tisztában voltam azzal, hogy ez a törvényszerűség sokkal általánosabb kell, hogy legyen. Míg kőszenekben tudomásom szerint mi találtunk először U feldúsulásokat, addig régen ismeretes, hogy más biolitokban hasonló koncentrációban az U gyakran előfordul.

Biolitoknak nevezzük azokat az üledékes kőzeteket, amelyek jelentős mennyiségben tartalmazzák a vízben elhalt szerves élet fosszilis maradványait az üledékbe került szerves anyag formájában. Ide sorolhatjuk a különböző tengeri eredetű bitumenes palákat, olajpalákat, a szén, tőzeg, lignit telepeket stb., amelyekből a föld felületén sok helyütt igen nagy készletek találhatók. Ezek tartalmazzák az emberiség jövő legnagyobb U tartalékát kb. tonnánként 10—100 g koncentráció formájában.

Meg voltam győződve arról, hogy az összes biolitok U tartalma mind a humusz savakon történő adszorpció következménye. Az utóbbi vizsgálataim során arra törekedtem, hogy a törvényszerűség érvényességének határait megvizsgáljam, továbbá, hogy pontosabb laboratóriumi vizsgálatokkal több oldalról is bizonyítsam a törvény érvényességét.

Nyilvánvaló, hogy a törvény általánosabb érvényességének a bizonyítására két lényeges tényezőt kell megvizsgálni: az egyik az, hogy a tengerek vizéből lerakódott iszapnak, amelyikből azután a geológiai idők folyamán a biolitok keletkeznek, van-e számottevő humusz tartalma. A másik az, hogy ezen humusz adszorpciós tulajdonsága kvantitatíve elegendő-e ahhoz, hogy a tengervíz rendkívül híg U tartalmát kiadszorbeálja és az irodalomból ismeretes feldúsulási fok létrejöhessen. Az első kérdésre a feleletet az irodalomban *S. A. Waksman* a sztreptomicin felfedezőjének Humus című alapvető munkájában találtam meg [5]. Megállapítja, hogy partmenti öblök üledékeinél 10—12% széntartalomig (20% humusz tartalomig) változhat a tengerfenék üledékeinek humusz tartalma. Mint a fentiekből látható, a másik fontos feladat a humusz U-adszorpciós sajátságának pontos kivizsgálása volt. Régen ismeretes a talajtanból, hogy a humusz kationokkal szemben ion kicserélőként viselkedik [6]. A humusz abszorbeáló sajátsága adszorpciós izotermát mutat kationokkal szemben, amit a mezőgazdaságban fontos kisebb atomsúlyú kationokra (Ca^{++}, K^+, Na^+ $(H_4N)^+$ stb.) már régen megvizsgáltak [7]. Nagy atomsúlyú kationokra ilyen vizsgálatokat nem végeztek, mert ezeknek a növények élete szempontjából nincs olyan nagy jelentőségük. Sehol semmi adatot nem találtam az irodalomban U vagy más magas atomsúlyú kationokra. A fent felsorolt kis atomsúlyú kationokkal szemben a humusz távolról sem mutat olyan erős adszorpciót, mint amit az U esetén észleltem. Így érthető, ha a tengervíz aránylagos magas sótartalmát az iszap humusztartalma nem köti meg, ezzel szemben a nagy atomsúlyúakat megköti.

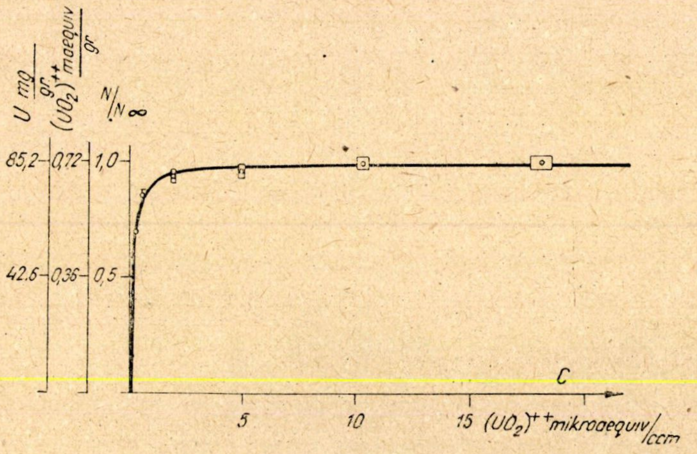
Az alábbiakban most szeretnék kvantitatív adszorpciós vizsgálataimról beszámolni, amelyek ezt a hipotézist igazolják. A vizsgálatokat kiterjesztettem más nagy atomsúlyú kationokra is, hogy lássam, hogy a fokozott mértékű adszorpció a nagy atomsúly következménye-e? E vizsgálatok meglehetősen szétágazóak és sokrétűek, így azokat vezetésem alatt nagyobbrészt munkatársaim végzik, akiket a továbbiakban név szerint megemlítek.

Elsősorban az eddigi számlálócsöves mérési módszer helyett be kellett rendezkednünk kvantitatív kémiai U analízisre. Az adszorpciós vizsgálatoknál használatos U analitikai módszert az irodalom alapján *Szabó Ilona* tanársegéd dolgozta ki. A módszer egy kolorimetriás meghatározás. Az uranyl ion savanyú közegben kaliumferrocianiddal erős barna színt képez, amely kellő elővigyázatosság esetén jól követi a *Lambert—Beer*-féle törvényt, így *Pulfrich* fotométerrel az U mennyisége pontosan meghatározható volt. Kivizsgáltuk az U adszorpcióját a koncentráció függvényében szilárd humusz-víz fázisok között, a szobahőmérsékleten cca $p_H = 5$ mellett. Az adszorpciós egyensúly tapasztalataim szerint másodpercek alatt beáll, ami az adszorpciós jelenség felületi természetére mutat. Biztonság okából egy lombikban kb. 1 óra hoszszat ráztuk a humusz-víz keveréket és azután az 1. ábrán látható egyszerű szűrőkészüléken vákuum szűréssel elválasztottuk azokat egymástól. A $p_H = 5$ érték mutatkozott célszerűnek, mert nagyobb p_H értéknél egyrészt az U hidrolizál, másrészt a humusz részben oldódik. Kisebb p_H-nál $p_H = 3—1$ között a magas *H* ion koncentráció az uranyl iont felszabadítja a humuszról. A szilárd fázis és a szűrlet szétválasztása után mindkét frakciót meganalizáltuk U-ra, miután a szilárd fázistól külön 1%-os sósavval szintén felszabadítottuk azt. A *2. ábra* mutatja az összefüggést az egyensúlyi U koncentrációk között különböző hozzá adagolt U mennyiség esetén. A függőleges koordináta a szilárd humusz (szárazon bemért) 1 g-ján adszorbeált uranyl $(UO_2)^{++}$ kation mennyiséget ábrázolja milligrammokban és milliekvivalensekben, az abszcissza az egyensúly beállta után a víz uranyl koncentrációját mikroekviv./cm^3-ben. Mint látjuk, a függvény egy adszorpciós izoterma tipikus tulajdonságait mutatja. Az U mennyisége jól meghatározott telítési értéket vesz fel humuszban, tovább nem emelkedhetik. Feltűnő a görbe rendkívül nagy meredeksége a 0 koncentrációjú hely közelében, itten kimutatható nyom nélkül eltűnik az U a vízből. Az első görbe felvételekor rögtön arra a meggyőződésre jutottam, hogy itt lényegében tipikusan felületi, monomolekuláris, helyesebben monoionos adszorpcióval (talán kemo-szorpcióval) van dolgunk, amelyet legjobban *Langmuir* adszorpciós hipotézise segítségével lehetne interpretálni. E hipotézist ő fémfelületeken adszorbeálódó egy atomos vagy molekulás gázrétegekre állította fel, azonban nem kétséges, hogy azoknak az alapvető feltételeknek, amelyekből az ő levezetése kiindul, itt erős analógiái joggal feltételezhetők. Elmélete lényegében két alap feltevésből indul ki:

Az első feltevés a felület véges voltát foglalja magában, azaz annyit mond, hogy a kiszemelt anyag mennyiségen véges kiterjedésű adszorpciós felület, vagy véges számú adszorpcióra alkalmas hely van jelen és a felületre csak egy atomos vagy egy molekulás réteg adszorbeálódhat, azaz az adszorpcióra alkalmas helyeket az oda adszorbeált atomok telítik.

Elméletének másik feltevése a reverzibilitást foglalja magában. Ez alatt azt kell értenünk, hogy az adott körülmények között nemcsak az adszorpció, hanem annak ellenkezője a felszabadulás is létrejöhet, és létrejön, és tulajdonképpen a kettő között dinamikai egyensúly áll be. Egyensúly esetén időegységenként a felület egységre adszorbeálódó atomok száma egyenlő a felületegységről eltávozó atomok számával.

Mindenekelőtt kísérleteket végeztünk arra vonatkozóan, hogy a megkötés valóban reverzibilis-e? Humusz preparátumot U-nal telítettünk, majd nagyobb mennyiségű (1 liter $p_H = 5$-re beállított) desztillált vízzel hosszabb időn át ráztunk. Ezután az U a desztillált vízben kimutatható volt, tehát deszorbeálódott. Az adszorpciós izoterma igen nagy meredeksége miatt a deszorbeálódott U mennyisége igen csekély. A mérési hibahatáron belül az adszorpciós görbét visszafelé reprodukálni technikailag rendkívül nehéz lenne, mert tonna mennyiségű vízzel kellene összerázni, hogy nagyobb mennyiségű U deszorbeálódjék.



2. ábra. Az $(UO_2)^{++}$-ion adszorpciós izotermája egy humusz-készítményen. Ordináta: az $(UO_2)^{++}$-ion egyensúlyi mennyisége 1 g humusz-készítményen milliekvivalensekben. Abszcissza: az egyensúlyi koncentráció a vízben, mikroekvivalens per ccm-ben.

Jelen esetben a következő analóg fogalmakat vezethetjük be: A 2. ábrából látható, hogy a humusz kationnal telítődik, tehát nyilvánvaló, hogy 1 g humusz preparátumban vagy véges nagyságú felület, vagy véges számú ion megkötésére alkalmas hely, vagy vegyérték vagy töltés van jelen. Legcélszerübb, ha nem elméleti, és elvont fogalmakban gondolkozunk, hanem a ténylegesen mért mennyiségekben fejezzük ki a humusz maximális adszorpciós kapacitását (N_∞ milliekvivalens) g-ban. A ténylegesen adott egyensúlyi koncentrációnál adszorbeálódott mennyiséget jelöljük N-nel, a szűrlet egyensúlyi koncentrációját jelöljük c-vel és fejezzük ki milliekvivalens/cm^3-ben. Most *Langmuir* után feltételezzük azt, hogy dt idő alatt 1 g humusz preparátumon adszorbeálódó milliekvivalensek (me) száma dN arányos a vizes fázisban lévő koncentrációval (c) és az adszorpcióban még le nem kötött helyek viszonylagos számával.

$$\frac{N_\infty - N}{N_\infty} = 1 - \frac{N}{N_\infty} = \text{a még szabad helyek viszonylagos száma.}$$

Ezek szerint tehát $dN = \alpha c \left(1 - \frac{N}{N_\infty}\right) dt.$

A reverzibilitás feltétele szerint viszont a dt idő alatt felszabaduló ionok száma (dN') arányos a már elfoglalt helyek viszonylagos számával $\frac{N}{N_\infty}$-nel. Az egyensúly beállta esetén

$$dN = dN'$$

$$\alpha c\left(1-\frac{N}{N_\infty}\right)dt = \beta\frac{N}{N_\infty}dt.$$

Legyen $\frac{\alpha}{\beta} = a$, akkor az egyenletet rendezve

$$ac - ac\frac{N}{N_\infty} = \frac{N}{N_\infty},$$

tehát

$$N = N_\infty\frac{ac}{1+ac}$$

vagy

$$\frac{N}{N_\infty} = \frac{ac}{1+ac}$$ ezt a redukált formának fogjuk nevezni.

Ez lényegében *Langmuir* adszorpciós formulája. Mint látjuk két adszorpciós állandó jellemzi a függvényt. Az egyik N_∞, amelyet nevezhetünk *„adszorpciós kapacitásnak"*, a másik a, amelynek értelmét az alábbiakban fogjuk látni, nevezhető *„redukált adszorpciós egyensúlyi állandónak."*

Igen kis koncentráció esetén, ha $c \to 0$, $ac \ll 1$ és a formula a következő alakot ölti

$$\frac{N}{N_\infty} = ac, \quad \text{azaz} \quad a = \frac{1}{c}\frac{N}{N_\infty} = tg\varphi.$$

Eszerint „a" nem más, mint az adszorpciós függvény érintőjének szögtangense (a függvény diff. hányadosa) a zéró koncentrációjú helyen. (3. ábra.) Itt a függvény egyenessel közelíthető.

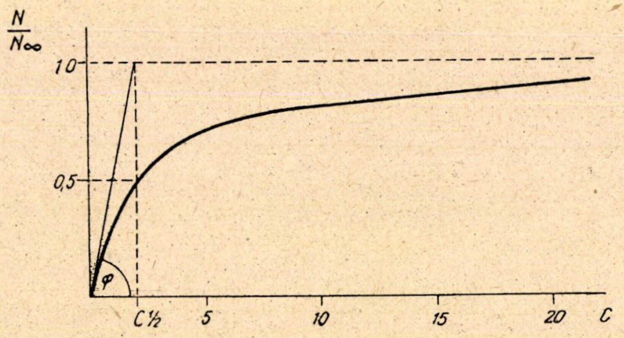
$N_\infty \cdot a = N/c$, ha $c \to 0$; $N_\infty \cdot a$ legyen az „adsz. egyensúlyi állandó".

Mint a kísérleti adszorpciós izotermát mutató 2. ábrából látható, a görbe kezdeti szakasza oly meredek és itt az oldat egyensúlyi koncentrációja olyan kicsi, hogy az a konstans meghatározása mérési hibák miatt itt alig lehetséges.

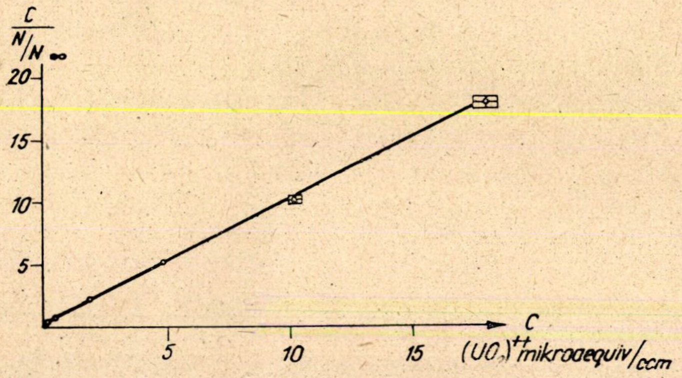
A következőkben vizsgáljuk meg azt a kérdést, hogy vajjon az empirikusan mért pontok milyen jól interpretálhatók a Langmuir formulával. E célból az egyenletet olyan alakba kell hozni, hogy a független változónak tekintett koncentrációban lineáris összefüggést adjon. Ilyen esetben a mérési pontoknak egy egyenesen kell feküdniök. Az egyenletet ilyen szempontból átalakítva a következő alakra hozhatjuk:

$$c\frac{N_\infty}{N} = \frac{1}{a} + c$$

A 4. ábra a mérési pontokat ebben az összefüggésben tünteti fel. Mint látható, a mérési pontok a hibahatárokon belül igen jól feküsznek egy egyenesen. Az egyenletből az várható, hogy az egyenes nem megy keresztül az origón. Az ábrából és a mérési pontok hibahatáraiból is látható azonban, hogy az a konstans pontos meghatározása grafikus módon nem lehetséges a mérési



3. ábra. A Langmuir-féle adszorpciós formula tulajdonságai, kiértékelése.



4. ábra. A Langmuir formula alkalmazhatóságának ellenőrzése.

hibák és a leolvasás pontatlansága miatt. Minthogy azonban a mérési pontok a fentiek értelmében jól interpretálhatók *Langmuir* formulájával, az a értékét közvetlenül kísérleti úton meghatározhatjuk, ahogyan ez ténylegesen történt.

Nevezzük $c_{\frac{1}{2}}$-nek azt az egyensúlyi oldat koncentrációt, amelynél a humusz preparátum a telítettségi értékének éppen a feléig adszorbeálódik. Az egyenletből következik, hogy

$$\frac{N}{N_\infty} = \frac{1}{2} = \frac{a c_{\frac{1}{2}}}{1 + a c_{\frac{1}{2}}}, \text{ azaz } a = \frac{1}{c_{\frac{1}{2}}}$$

Fél telítettségi állapotban az oldat egyensúlyi koncentrációja már jól mérhető és így a értéke pár százalék pontossággal meghatározható. Értéke a különböző humusz preparátumoknál 10^7 nagyságrendűnek adódott. A 2. ábrán feltüntetett preparátum esetén $N_\infty \cdot a = 8{,}6.10^3$ volt. Több preparátumot vizsgáltunk meg ilyen módon, ezek részben lignitből, (fiatal, barna kőszénben található, még felismerhetően fás struktúrájú darabokból), vagy mocsaras tavakból, víz alatt humifikálódó tőzegből készültek, amely utóbbit a debreceni egyetem Növénytani Intézete *Soó Rezső* professzor szíves intézkedésére gyűjtött be számunkra. Az adszorpciós kapacitásban különböző értékeket találtunk, de ezek nagyságrendje 1 milliekvivalens/gramm vagy ennél kisebb volt. Az adszorpciós konstans $N_\infty . a$ értéke is 10^4 körül mozgott.

Megemlítem, hogy mellesleg megvizsgáltuk vegyi behatások befolyását egy adott humusz preparátum adszorpciós kapacitására. E téren is tapasztalatokat nyertünk. Megállapítottuk, hogy az elporított humusz preparátum szabad levegőn állva hosszabb idő (hónapok) alatt feltehetően a levegő oxidáló hatása következtében veszít adszorpciós kapacitásából.

A fenti úton nyert ismereteink segítségével a következőkben igazoljuk, hogy az U feldúsulása híg oldatokból (tengervíz) biolitokban általában éppen a felvett adszorpciós izotermákra vezethető vissza.

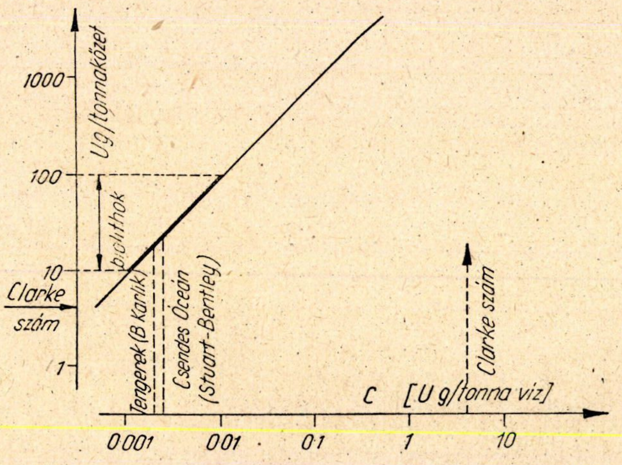
Ismeretes [8], hogy míg a földkéreg átlagos U tartalma tonnánként kb. 4 g (Clarke szám), addig a biolitok U tartalma ennél jóval magasabb, de mégis jól meghatározott koncentráció nagyságrendben (10—100 g között) mozog. A leggyakrabb a tonnánként 20—60 g körüli érték, 100 g/to-nál nagyobb érték nem igen fordul elő, vagy ha előfordul, akkor másodlagos feldúsulásra vezethető vissza [9]. Az ilyen kis koncentráció az adszorpciós izotermának a kezdeti szakaszára esne, ahol az még egy

$$\mathrm{tg}\,\varphi = a$$

hajlásszögű egyenessel közelíthető. Ismeretes továbbá, hogy jelenleg a tengervizek U tartalma milyen koncentráció körül mozog. *B. Karlik* és munkatársai [10] szerint az U koncentrációja a tengerek vizében 0,15 és 1,5 mg/to körül van. Ugyanezen szerzők [11] egy másik munkában az óceánok átlagos U tartalmát 2 mg/tonnában adják meg. *D. C. Stewart* és *W. C. Bentley* [12] a Csendes-óceánból vett néhány vízmintának U koncentrációját 2,5 mg/to-nak találták. Öblökben, sós tavakban jóval magasabb értékek is fellépnek. Ábrázoljuk most az adszorpciós egyenlet kezdeti szakaszát igen erősen felnagyítva, ezen koncentrációs tartományban (5. ábra). Az egyenes hajlásszögének tangenese legyen éppen egyenlő a 2. ábrán látható adszorpciós izoterma egyensúlyi állandójával.

$$\frac{N}{c} = N_\infty \cdot a = 8{,}6.10^3.$$

Mint láthatjuk az óceánok vizének U koncentrációja mellett az adszorpciós izoterma ismerete alapján kb. azt a koncentrációt várhatnánk a tengerek szerves anyag tartalmú iszapjában, mint amit ténylegesen találnak. A legmagasabb U tartalmú biolitok, kőszenek, U tartalma olyan tengervízből dúsulhatott fel, amelynek U koncentrációja nagyobb volt a nyilt óceánénál. Ilyen eset jön létre akkor, ha a tenger vagy öböl, laguna savanyú eruptív kőzetek lepusztulási vidékéről lefolyó vizekből táplálkozik. Látjuk, hogy itt kifogástalan nagyságrendi egyezés van, amelynek kritikájához össze kell hasonlítanunk az itt szereplő nagyságrendeket a természetben előforduló átlagos koncentráció nagyságrendekkel. Mint említettem a földkéreg átlagos U koncentrációja 4 g/to, amihez képest a biolitek U koncentrációja néhánytól



5. ábra. A tengervízben oldott és az üledék humusz-tartalmán adszorbeált Urán koncentrációk elhelyezkedése a felvett adszorpciós izoterma kezdeti szakaszán.

25-szörösig feldúsul. Ezzel szemben a tengervíz U koncentrációja mintegy 2000-szer kisebb a földkéreg átlagos koncentrációjánál. Ez a két — egymástól 4 nagyságrendben különböző — koncentrációs adat azonban az U-nak a föld felületén történő természetes körforgásában nagyságrendileg láthatóan egyensúlyban van egymással a természetes vizekben. Ez az egyensúly számszerűen is megegyezik a laboratóriumban kísérletileg is megállapított adszorpciós izoterma adszorpciós egyensúlyi állandójával, amelynek nagyságrendje 10^4.

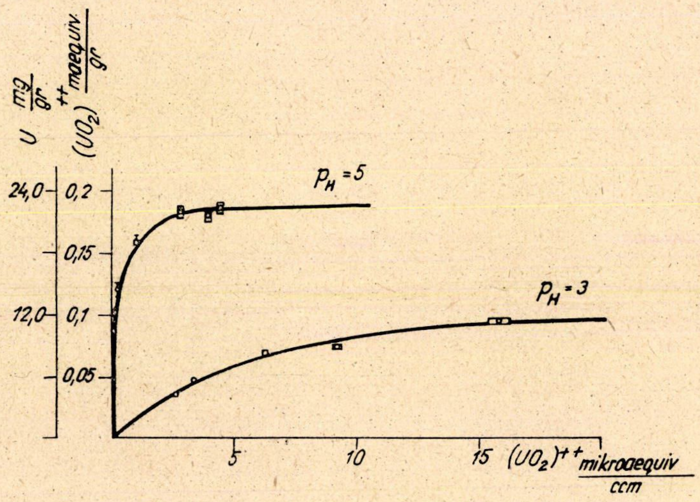
A fentiekkel azt hiszem eléggé bizonyítottnak látszik egy fontos, általánosabb geokémiai törvény, amelyet a következőképpen mondhatunk ki:

1. „Biolitok feldúsult U*-tartalmának oka az* U *adszorpciója a tengervizéből a humuszsav tartalmukon."*

2. „A Föld nagy állóvizei, tengerei U *tartalmuk szempontjából közelítőleg adszorpciós egyensúlyban vannak az üledékük humuszsav tartalmán adszorbeálódott* U*-val."*

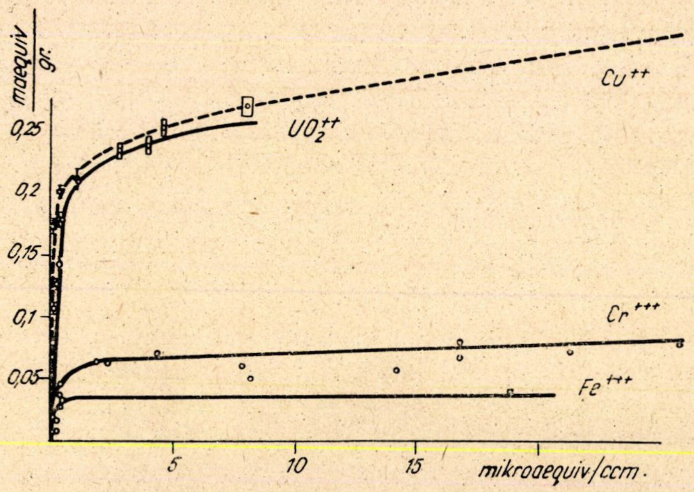
A fentiekkel az a hipotézis, melyet eredetileg egyes hazai barna kőszéntelepek U tartalmának feldúsulására vonatkozóan felállítottam, azt hiszem minden kritikát kiálló bizonyítást nyert, azonkívül sikerült annak általános érvényességét is bizonyítani a Földön előforduló különböző U tartalmú biolitokra vonatkozóan.

Ennek a törvényszerűségnek felismerése rendkívül fontosnak látszik, mert bár az ismert U előfordulások közül ez a típus aránylag kis koncentrációjú, mégis ebből a típusból gyakorlatilag szinte végtelen mennyiségek ismeretesek és ezek képviselik az emberiség jövő atomenergia tartalékát arra az időre, ha a jelenleg teljes erővel bányászott nagyobb koncentrációjú, de kis mennyiségű ércek kimerülnek. A gazdaságos kitermelhetőség lehetőségét a feldúsulás módjának tudományos felderítése feltétlenül megkönnyíti. Éppen ez a mi kutató munkánk gyakorlati célja.



6. ábra. A p_H befolyása az U-humusz adszorpciós izotermára. (*Szabó Ilona* vizsgálatai.)

A következőkben vessük alá szigorú kritikának a *Langmuir* egyenlet alkalmazását erre a jelenségre. Hangsúlyozni kívánom, hogy az elméletet csupán formai analógiaként alkalmaztam az empirikusan kétségtelenül észlelhető jelenség numerikus kezelésére. Felhasználtam a véges és jól mérhető adszorpciós kapacitást és a reverzibilitás feltételét. Nem tettem azonban semmiféle feltevést azon erők természetére, amelyek az U-t a humusz részecskéhez kötik. Jobb szakkifejezés híján adszorpcióról beszéltem anélkül azonban, hogy ezalatt közelebbi meghatározást értettem volna, azaz pl. az ún. „fizikai adszorpciót", ami többnyire *Van der Waals* erőkre vezethető vissza, vagy „kémiai adszorpciót" ami esetleg kémiai vegyérték kötéssel való megkötésre vonatkozna. Fiziko-kémikusok talán a kemoszorpció kifejezést használták volna. Kétségtelen, hogy a természeti jelenség maga a *Langmuir* elmélet analógiájára bevezetett formulával nagyon jól interpretálható. Próbáljunk most közelebbit a megkötés természetére megállapítani. Már az adszorpciós izoterma felvétele úgy történt, hogy az U-t a humuszból savval szabadítottuk fel utólag. Feltevésünk szerint ilyenkor *H* ion kerül az uranyl ion helyére, az utóbbi vizes oldatba kerül. *Szabó Ilona* tanársegéd munkatársam vizsgálatokat végzett a p_H-nak az adszorpciós izotermára való hatására. Megállapította azt, hogy csökkenő p_H-nál, tehát növekvő *H* ion koncentrációnál csökken az egyensúlyi állandó az U-val szemben. (6. ábra). Itt nyilvánvaló, hogy kevert adszorpcióról van szó, az egyensúlyban ilyenkor kétféle kation is résztvesz és a telíthető helyek számának egy részét a jóval nagyobb koncentrációban jelenlévő *H*



7. ábra. Különböző kationok adszorpciója humuszon.
(*Szabó Ilona* vizsgálatai.)

ionok foglalják le dinamikus egyensúlyban. A kötés az U megkötése szempontjából tehát határozottan úgy viselkedik, mint egy ion kicserélő kötés, amelyet különben humusz esetén a kisebb atomsúlyú kationoknál már régebben megállapítottak [6], [7].

Nem akarom most nem kémikusokból álló hallgatóságomat a humuszsav még nem teljesen tisztázott kémiai szerkezetével terhelni, csak annyit jegyzek meg, hogy a humusz-kolloidok savas karakterüket a szilárd poliaromás vázon lévő savanyú gyököktől (—COOH), fenol—OH stb. nyerik. E csoportokról a H^+-ion, — bár igen kis disszociációs állandóval — ledisszociál és a visszamaradó humusz-kolloid részecske negatív elektromos töltésű marad. A + kationok valószínűleg ionkötéssel kapcsolódnak a humuszsavra, vagy pedig csak lazább elektromos kapcsolat jön létre.

Az elmélet kiterjesztése más kationokra. Megvizsgáltuk azt, hogy más kationok is képesek-e az U-t a humuszból lecserélni. Megállapítottuk, hogy pl. a 4 vegyértékű Th, vagy a 3 vegyértékű Lanthán, az U-t kiszorítják a humusz telíthető helyeiről.

Simonyi Ágnes vegyésznövendék 1952-ben készített egyetemi pályamunkájában a lignit adszorpciós kation megkötő képességét vizsgálta. Azt találta, hogy az ion átmérő és az adszorpciós kapacitás között nincs semmi törvényszerű összefüggés. Az adott mennyiségű humuszra adszorbeálódó ionok számát tehát nem az ionok átmérője, azaz az általuk elfoglalt férőhely szabja meg. Másrészről azt találta, hogy az adszorbeált anyag mennyisége a növekvő egyenértéksúllyal monoton nő, bár egyes ionok (pl. Ag) erős kiugrást mutattak.

Szabó Ilona ugyanazon humusz preparátumon összehasonlította az uranyl, cupri, ferri és cobalti ionok adszorpciós izotermáit (7. ábra). Azt találta, hogy a két vegyértékű uranyl és réz ionokból a humusz egymással kb. kémiailag ekvivalens mennyiségeket köt meg. Ha a függőleges tengelyre az adszorbeált mennyiséget mindjárt milliekvivalens mennyiségekben tüntetjük fel, akkor a két görbe telítési határa ugyanaz. Érdekes azonban az, hogy ugyanakkor a 3 vegyértékű vas és kobalt ionból adszorbeált ionok egymás között nem ekvivalensek, de az uránból adszorbeált mennyiséggel sem ekvivalensek. Ennek okát ma még nem tudjuk. Ez lehet hidrolizis, vagy az, hogy ezen ionok a könnyen oxidálható humusszal valami oxi-redox rendszert képeznek. Mint érdekességet megemlítem, hogy egy lignitből készült humusz preparátum esetén *Szabó Ilona* részleges irreverzibilitást is észlelt. A megkötött U egy része nem szabadult fel 1 %-os sósav hatására.

Kovách Ádám tanárjelölt demonstrátor humusz preparátumból készített kation adszorpciós oszlopon ionkicserélő kísérleteket végzett annak megállapítására, hogy két kation összehasonlításakor melyiket köti erősebben ugyanaz a humusz preparátum. Amint várható volt, azt észlelte, hogy a megkötés erőssége (egyensúlyi állandó) elsősorban az ion vegyértékétől függ, tehát a legmagasabb vegyértékű kationoknál a legerősebb. Néhány azonos vegyértékű kation összehasonlításakor a nagyobb atomsúlyú kationok megkötése az erősebb. Ezen előzetes tájékozodó vizsgálatnak szánt és egyetemi pályadíjat nyert munkában megvizsgált néhány kationra a következő adszorpciós sorrendet találta:

$$Ag^{+} < Ni^{++} < Co^{+++} < Cu^{++} < Ba^{++} < Pb^{++} < UO_2^{++} < Fe^{+++} < Th^{++++}.$$

Lehetséges, hogy fogunk olyan kationokat találni, amelyek kiugranak a sorból. Ez esetben közvetlen ion kötésre lehet gondolni.

E vizsgálatok megerősítették azt a feltevésemet, hogy a fentebb megállapított adszorpciós geokémiai törvény nemcsak uránra vonatkozik, hanem sokkal általánosabb érvényű. Nyilvánvaló, hogy a humusz tengervízből nemcsak a rendkívül nagy hígítású U-t képes feldúsítani, hanem más igen nagy hígításban jelenlévő kationokat is. A fenti ismeretek alapján nyilvánvalóan elsősorban a magas (két vagy több) vegyértékű és főleg a nagy atomsúlyú kationokat dúsítja fel ilyen nagy arányban. *Goldschmidt* és munkatársai kutatásai nyomán [13] régen ismeretes, hogy a biolitek valóban tartalmaznak nagy atomsúlyú és magas vegyértékű kationokat nyomokban, azaz kb. hasonló koncentrációban mint az U. (Nyomelemek.) Ezek koncentrációja szintén a tonnánként 100—1000 g körüli nagyságrendben (0,01%—0,1%) mozog. Mint ilyenek általánosan ismertek pl. a következők: vanadium, nikkel, réz, kobalt, molibdén, ólom, króm stb. Ilyen nyomelem előfordulások a hazai barnakőszenekben is ismeretesek. Ide vonatkozóan kiterjedt és nagyértékű analitikai vizsgálatok vannak folyamatban, különösen *Szádeczky Kardoss Elemér* [14] akadémikus és *dr. Földvári Aladárné* részéről. Valószínűnek tartom, hogy ha nem is minden nagy atomsúlyú és magas vegyértékű kation feldúsulása vezethető vissza az U-hoz hasonlóan humuszsavon történő adszorpcióra, azonban legalább is egy részükre ez a talált törvény kiterjeszthető, általánosítható lesz.

Megbízásomból *Almássy Gyula* vegyész, tudományos munkatársam analitikai vizsgálatokat végzett a hazai U-tartalmú barnakőszenek elegy részein U és néhány más nagy atomsúlyú kation (Mo, V, Ti) tartalom együttes előfordulása szempontjából. E vizsgálatairól kandidátusi értekezésében számol be. Analízisei szintén megerősíteni látszanak a fenti hipotézist, ill. törvényszerűséget. Bár a hazai kőszenek az adszorpció megtörténte óta sok millió éven át különböző hatásoknak lehettek alávetve, mégis az U-ra és vele együtt megvizsgált néhány más kationra is a szétválasztott frakciók analíziseinek eredményei mindenben alátámasztják a fenti adszorpciós hipotézist.

Ezzel csak futólag említettem meg az utóbbi években végzett munkánk tulajdonképpeni sokkal nagyobb és fontosabb részét. Sajnos, minthogy az utóbbi vizsgálatok mind a gyakorlati kinyerés megteremtésének lehetősége felé irányulnak, ezekről részletesebben nem számolhatok be.

Befejezésül annak a reményemnek adok kifejezést, hogy munkánk nemcsak a természet megismeréséhez járult hozzá egy új és fontos geokémiai törvényszerűség felismerésével, hanem a magyar népgazdaság jövő fejlődése szempontjából sem érdektelen. Azt hiszem, hogy a barnakőszenek, amelyeket jelenleg csupán fűtőanyagnak használunk fel, a jövőben nemcsak az atomenergia szempontjából oly fontos fém, az urán egyelőre egyetlen forrását, hanem más értékes ipari fémek jelentős forrását fogják képezni. Itt és eddig nem közzétett vizsgálataink azt a reményt keltik, hogy ezen értékes anyagok kivonása megvalósítható lesz és a kivonás technikai megoldását éppen ezen elméleti vizsgálatok könnyítik meg.

IRODALOM

[1] *Szalay S.:* Magyar Áll. Földtani Int. évi jelentése, 1948. B. 5—21.
[2] *Szalay S.* és *Földvári Aladár:* MTA III. Oszt. Közl. I. köt. 1. 60—72. 1950.
[3] *Szalay S.:* MTA VI. oszt. (Műszaki) Közl. V. köt. 3. szám 167—185. 1951.
[4] *Szalay S.:* Hung. Geol. Acta, 1954. Tom. II. Fasc. 3—4, p. 299—311.
[5] *Selman A. Waksman:* Humus. (Baltimore 1938) 294—298.
[6] *Selman A. Waksman:* Humus. (Baltimore 1938) 313—323.
[7] *Selman A. Waksman:* Humus. (Baltimore 1938) 322—323.
[8] *K. Rankama, Th. G. Sahama:* Geochemistry. (Chicago, 1950.) 226.
[9] *K. Rankama. Th. G. Sahama:* Geochemistry. (Chicago, 1950.) 290.

[10] *E. Föyn, B. Karlik, H. Petterson, E. Róna:* The radioactivity of seawater. Göteborgs Kgl. Vetenskaps Vitterhetssammhäll. Handl. Bd. 6, No. 12.
[11] *E. Föyn, B. Karlik, H. Petterson, E. Róna:* Nature, 143, 245—246. (1939).
[12] *D. C. Stuart, W. C. Bentley:* Nucl. Sci. Abstracts, Vol. 8, 156, (1954).
[13] *K. Rankama, Th. G. Sahama:* Geochemistry (Chicago, 1950) 331—332.
[14] *Szádeczky-Kardoss Elemér* és *Földvári Aladárné:* Geokémiai vizsgálatok magyarországi kőszeneken, Földtani Közlöny 1954. (Sajtó alatt).

Debreceni Tudományegyetem
Kisérleti Fizikai Intézete.

HOZZÁSZÓLÁS

SZÁDECZKY-KARDOSS ELEMÉR r. tag:

Szalay Sándor lev. tag a kőszenek urán-tartalmára vonatkozó vizsgálatainak két év előtti akadémiai földtani főbizottsági előadásában bemutatott eredményeivel tisztázta annak az általa megállapított nagy jelentőségű ténynek geokémiai vonatkozásait, hogy az uránt a humuszanyagok adszorpciója köti meg a kőszenek és a rokon kőzetek számára.

Az azóta elért itt előadott értékes új eredményei két csoportba foglalhatók. Az egyik az, hogy az U és Th adszorpciója a humuszanyagokon főleg monomolekuláris ill. monoionos réteg alakjában történik és a Langmuir-féle adszorpciós izotermákhoz hasonló formulával számítható. Itt külön kiemelendő az adszorpciós állandó meghatározásának szellemes új eljárása. A másik annak vizsgálata, hogy mily mértékben történik hasonló adszorpció más nagy vegyértékű és nagy atomsúlyú elemek esetében. Mindkettőhöz szeretnék új szempontot felvetni.

Szalay professzor vizsgálatai szerint az U és Th-t a lerakó közegben, ti. a tőzegláp, vagy a tenger vizében, ill. annak fenekén jelenlévő humuszanyag köti meg. A tengeri üledékekre nézve meggyőzően kimutatta, hogy azok átlagos U-tartalma mennyiségileg is megfelel a tengervíz átlagos U-tartalmából és humusz-tartalmából az adszorpciós izoterma alapján számítható értéknek. A tengervízi humuszos, túlnyomóan többnyire agyagos üledék tömege a lerakódás után csak kis mértékben, csekély vízvesztéssel változik meg. Az üledék összes tömege és U-tartalma közti arány tehát a lerakódás utáni kőzettéformálódási (diagenetikus) és epigenetikus folyamatok által lényegesen nem változik meg.

Nem így a kőszeneket adó tőzeg. A tőzeg az összes többi üledéktől eltérően lerakódása után, barna-, majd feketekőszénné változása közben, tömegének túlnyomó részét elveszti. Elveszti ti. egyrészt az eredeti tőzegnek akár 90 %-át is kitevő víz-tartalmának jelentékeny részét, másrészt pedig a szerves vegyületek alkotórészeinek, elsősorban a C, H, O főelemeinek is egy jelentékeny részét. Az eredeti növényi vegyületek ui. jelentékeny részben folyékony és gáz halmazállapotú oxidációs termékekre bomlanak el, amelyek a visszamaradó szilárd kőzetből a vízzel együtt túlnyomóan eltávoznak, kioldódnak. Ez a rendkívül nagy víz- és C, H, O-veszteség viszonylagos dúsulást okoz a nem oldódó anyagokban. Minthogy az eredeti tőzeg-anyag mintegy 1/7-ére, — a növényi anyagra számítva még kisebbre — zsugorodik a zsírkőszén állapotú feketekőszén-jelleg eléréséig, ezért a ki nem oldódó anyagok epigenetikus dúsulása mintegy 7—10-szeres nagyságrendűre tehető. *Földvári Aladárné Vogl M.*-val 24 nyomelemnek a kőszén- és tőzegbeli előfordulására nézve végzett vizsgálataink szerint azok dúsulása valóban a kis eredeti kiindulási koncentráció utólagos epigenetikus, a tőzeg anyagveszteségéhez kapcsolódó kiválogatásának eredménye.

Ez az epigenetikus dúsulás nagyságrendileg nem áll távol a Th—U-dúsulásának a földkéreg átlagos Th—U-tartalmához viszonyított 4—25-szörös értékéhez, annak középértéke mintegy felére tehető. Meg kell különböztetni tehát a *Szalay* professzor által kimutatott lerakódás közbeni adszorptív hatású U—Th megkötést és az utólagos epigenetikus viszonylagos U—Th dúsulás lehetőségét.

A kérdés tehát az, hogy a még lényegesen át nem alakult tőzegek átlagos U—Th-tartalma nagyságrendileg megegyezik-e a hasonló eredetű kőszenek U—Th-tartalmával, vagy nem. Ha a tőzeg U—Th-tartalma lényegileg megegyezik a kőszenekével, vagy, — ami egyáltalán nem valószínű — esetleg annál is nagyobb, ez csak úgy lehetséges, ha a tőzeg saját tömegének többszörösét kitevő víz és oxidációs termék vesztesége mellett hasonló nagyságrendű veszteséget szenved U- ill. Th-ban is. Ez esetben az átalakuló tőzeg és barnakőszén környezete számára a földtani idők folyamán jelentékeny mennyiségű radioaktív anyagot szolgáltatna, valóságos U-forrásként viselkedne. Ez az eltávozó U-mennyiség feltételezhetőleg főleg a hasadékok, törések mentén kerülne elvezetésre és így a földtani törésvonalak, vetők ismert nagyobb radioaktivitásának egyik forrása lehetne.

Ha viszont a tőzeg U—Th-tartalma nagyságrendileg kisebb, mint a hasonló tőzegekből keletkezett kőszeneké, — és ezt látjuk valószínűbbnek — úgy a kőszénbeli U és Th dúsulásának kétféle tényezője van: a *Szalay*-féle humuszkolloid általi adszorpció a kőzetanyag lerakódásakor és az utólagos epigenetikus dúsulás a tőzegesedés — szénülés közben. Ennek megfelelően korlátozandó lenne a tétel, hogy a biolitok feldúsuló U-tartalmának oka az U adszorpciója a tengervízből a humuszsav tartalmukon.

Az első esetben (tőzeg és kőszén hasonló U—Th-tartalommal) feltételezhető, hogy az U—Th-anyag főleg a humuszsavakhoz kötődik, nem pedig a humuszsavakból kőszénné alakulás közben keletkező huminanyagokhoz. A második esetben (a kőszén U—Th-tartalma nagyobb a tőzegénél) az eredetileg adszorptive a humuszsavakhoz kötött U és Th később a humuszsavakból keletkező, de többé COOH csoportokat nem tartalmazó, nem savtermészetű huminanyagokban is valószínűleg kémiailag, ionosan vagy kovalensen megkötődik. Ezt a főleg huminanyagokból álló feketekőszenek sokszor jelentékeny U—Th-tartalma valószínűsíti is. Ezzel kapcsolatban továbbmenőleg érdekes lenne antracitanyagok urán-tartalmának meghatározásával megállapítani, vajjon ezekben a grafit-rétegrácsának megközelítésével az U-tartalom nem csökken-e lényegesen, beépítődhet-e az urán a grafit-rétegrácsos szerkezetbe. Itt nem részletezhető geokémiai meggondolásaink szerint ez kevéssé valószínű.

Szalay professzor eredményeinek másik csoportja a Th- és U-on kívül más nagy vegyértékű, nehéz kationok humusz általi megkötésének lehetőségére vonatkozik. Ilyen elemekként elsősorban a Co, Ni, Mo, W, Pb, Sn, Cr, V stb. jöhetnek számításba. Ezek kőszénbeli dúsulásának mértéke a földkéreg átlagához képest hasonló nagyságrendű — többnyire 6—10—20-szoros — mint az U- és Th-é. *Földvárinéval* végzett vizsgálataink alapján valószínűnek látszik, hogy az ilyen elemek többnyire viszonylag kisebb mértékben kötődnek meg a lerakódáskor adszorptive a tőzegek humuszanyaga által. Bizonyos nyomelemnyi mennyiségben ui. többnyire megjelennek már az eredeti növényi anyagban is és részben ez a mennyiség dúsul fel szelektíve a későbbi epigenetikus kőzetátalakulások során. Itt tehát a lerakódáskori adszorpciónak részben kisebb szerepe lehet. Ezt mutatja egyébként a *Szalay* által közölt adszorpciós sorozat is, mely szerint Pb, Ba, Cu, Co^3, Ni, Ag kevésbé erősen kötődnek meg, mint a Th és az (UO_2) ionok és csak a ferri-ion adszorpciója mutatkozott az uranil és thórium-ion közti értékűnek. A ferri-ion azonban a tőzegvizek kis redoxpotenciálú közegében csak elenyésző mennyiségben fordulhat elő a ferro-ionhoz képest.

Ez a megállapítás természetesen nem jelenti *Szalay*nak a humuszanyagok nehéz-kation megkötő-képességére vonatkozó elvi levezetésének kétségbevonását, csak annak gyakorlati hatályosságát érinti némileg a kőszénbeli dúsulás tekintetében.

Végül kiemelni szeretném, hogy elméletileg és gyakorlatilag igen figyelemreméltó az a *Szalay* professzor tanulmányában csak mellékesként felemlített megállapítás is, hogy az oxidált humuszsav az uránt kevésbé adszorbeálja. Anélkül, hogy ennek a kérdésnek vonatkozásaira itt rátérnék, megjegyzem, hogy e kérdéssel is érdemes lenne részletesebben foglalkozni.

Kívánom, hogy *Szalay* professzor vonatkozó vizsgálatait továbbra is sok szép eredmény koronázza és ezek a vizsgálatok az uránnak és esetleg egyéb nehéz fémeknek a kőszénből történő gyakorlati kinyerése óriási jelentőségű kérdésének megoldását is elősegítsék.

Szalay Sándor válasza után érdekes és értékes eszmecsere alakult ki, amelynek során felszólaltak *Sarkadi János, Hargittai László, Bárány Mihály, Kántor Károlyné* és *Gyulai Zoltán.*

AZ ALGEBRAI EGYENLETEK ELMÉLETÉBEN FELLÉPŐ KÉT FAKTORSOROZATRÓL

L. CSAKALOV (Szófia)

Előadta az 1954. június 18-án tartott nyilvános osztályülésen

A középértéktételeknek valós együtthatójú racionális polinomokra vonatkozó élesítésével kapcsolatban *J. Favard* a következő problémát vetette fel és oldotta meg:

Mi a szükséges és elégséges feltétele annak, hogy a valós számokból álló

(I) $$c_0, c_1, c_2, \ldots$$

végtelen sorozat a következő tulajdonsággal rendelkezzék: ha

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

valós polinom, melynek együtthatói a

(II) $$c_0 a_0 + c_1 a_1 + \cdots + c_n a_n = 0$$

feltételnek tesznek eleget, akkor $f(x)$-nek van legalább egy valós gyöke. E feladat megoldását *Favard* a Hamburger-féle momentum-problémára vezette vissza; megmutatta ugyanis, hogy az (I) számsorozatnak akkor és csak akkor van meg az említett tulajdonsága, ha létezik olyan, a $-\infty < x < +\infty$ intervallumban értelmezett, növekvő és végtelen sok növekvési hellyel rendelkező $\psi(x)$ függvény, melyre a következő végtelen sok egyenletből álló egyenletrendszer ki van elégítve:

$$c_n = \int_{-\infty}^{\infty} x^n d\psi(x), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

A jelen közleményben a valós számokból álló véges

(III) $$c_0, c_1, \ldots, c_n \qquad (n \geqq 1)$$

számsorozatokra vonatkozó analóg problémát oldjuk meg, éspedig tisztán algebrai segédeszközökkel, vagyis a momentumproblémával kapcsolatos eredmények felhasználása nélkül. Megvizsgáljuk ezenkívül olyan csak a (III) sorozattól függő véges intervallum létezésének és meghatározásának kérdését, amelyben minden a (II) feltételnek eleget tevő $f(x)$ polinomnak legalább egy valós jelváltási helye (azaz páratlan multiplicitású gyöke) van.

1. Elsőfajú faktorsorozatok

A valós együtthatójú

(1) $$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

racionális polinomról azt mondjuk, hogy *jelet vált,* ha egyes valós x helyeken pozitív, másokon negatív értéket vesz fel, vagyis ha legalább egy páratlan multiplicitású valós gyöke van. Egy valós számokból álló

(2) $$c_0, c_1, \ldots, c_n \qquad (n \geqq 1)$$

számsorozatot *elsőfajú faktorsorozat*nak nevezünk, ha teljesíti a következő feltételt: ha a legfeljebb n-edfokú, nem azonosan eltűnő valós (1) polinom együtthatói eleget tesznek a

(3) $$c_0 a_0 + c_1 a_1 + \cdots + c_n a_n = 0$$

egyenletnek, akkor (1) jelet vált. Elsőfajú faktorsorozatra egyszerű példát szolgáltatnak az $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n+1}$ számok, ami könnyen belátható, ha figyelembe vesszük, hogy ebben az esetben a (3) feltétel az

$$\int_0^1 f(x)\, dx = 0$$

alakban írható.

A fenti definíciókból könnyen folynak az elsőfajú faktorsorozatok következő tulajdonságai.

1. A (2) sorozat c_r számai nem tünhetnek el mind.

2: Ha egy elsőfajú faktorsorozat tagjait egy zérustól különböző λ állandóval megszorozzuk, ismét elsőfajú faktorsorozatot nyerünk. Ennek következtében a továbbiakban olyan elsőfajú faktorsorozatok vizsgálatára szorítkozhatunk, amelyeknek első el nem tűnő tagja pozitív; ezt ezentúl mindig feltesszük. Az ilyen sorozatot *normált*nak nevezzük.

3. Ha a (2) faktorsorozat normált, akkor c_0 pozitív. Ha ugyanis $c_0 = 0$ volna, akkor a (3) feltétel teljesülne az $f(x) \equiv 1$ polinomra, amely pedig nem vált jelet. Ugyanez áll egyébként az összes páros indexű c_r számokra. Valóban, ha páros $r > 0$ esetén $c_r \leqq 0$ volna, akkor az $f(x) = c_0 x^r - c_r$ polinomnak jelet kellene váltania, hiszen együtthatói a (3) feltételnek eleget tesznek; ez azonban nem áll, mert bármely valós x mellett $c_0 x^r - c_r \geqq 0$.

4. Ha (2) elsőfajú faktorsorozat és $n > 1$, akkor a $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$ sorozat is elsőfajú faktorsorozat. Ugyanez érvényes általánosabban az összes $c_0, c_1, \ldots, c_r$ alakú sorozatokra $(r = 1, 2, \ldots, n-1)$.

5. Ha n páratlan, akkor a (2) elsőfajú faktorsorozatból ugyanilyen sorozatot nyerünk, ha utolsó c_n tagját tetszőleges valós c_n' számmal helyettesítjük.

Mindezek a tulajdonságok csak szükséges feltételek arra nézve, hogy a (2) sorozat elsőfajú faktorsorozat legyen. A következő tétel ugyanerre szükséges és elégséges feltételt szolgáltat.

I. TÉTEL. *A valós $c_0, c_1, \ldots, c_n$ számsorozat akkor és csak akkor normált elsőfajú faktorsorozat, ha az*

$$F(u_0, u_1, \ldots, u_k) = \sum_{p,\,q=0}^{k} c_{p+q} u_p u_q \qquad \left(k = \left[\frac{n}{2}\right]\right) \tag{4}$$

kvadratikus alak pozitív definit.

BIZONYÍTÁS. *a)* Legyen (2) elsőfajú normált faktorsorozat s legyen (4) a megfelelő kvadratikus alak. Ha ez nem volna pozitív definit, akkor lehetne találni $k+1$ nem mind eltűnő valós $u_0, u_1, \ldots, u_k$ számot úgy, hogy a (4) kvadratikus alak megfelelő értéke zérus legyen. Akkor az

$$f(x) = (u_0 + u_1 x + \cdots + u_k x^k)^2 = \sum_{p,\,q=0}^{k} u_p u_q x^{p+q} = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{2k} x^{2k}$$

polinom nem tűnik el azonosan, s ugyanakkor

$$c_0 a_0 + c_1 a_1 + \cdots + c_{2k} a_{2k} = \sum_{p,\,q=0}^{k} c_{p+q} u_p u_q = 0,$$

tehát $f(x)$ jelet vált, ami nyilván lehetetlen.

b) Tegyük fel most, hogy a (4) kvadratikus alak pozitív definit és legyen

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

legfeljebb n-edfokú, nem azonosan eltűnő valós polinom, melynek a_r együtthatói a (3) egyenletet kielégítik. Tegyük fel továbbá, hogy az állítással ellentétben $f(x)$ nem vált jelet, hanem pl. $f(x) \geqq 0$ minden valós x-re. Ekkor az $f(x)$ polinom

$$f(x) = (\alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_k x^k)^2 + (\beta_0 + \beta_1 x + \cdots + \beta_k x^k)^2$$

alakban állítható elő, ahol $k = \left[\frac{n}{2}\right]$ és a valós α_r, β_r együtthatók nem tűnnek el mind; írható tehát

$$f(x) = \sum_{p,\,q=0}^{k} (\alpha_p \alpha_q + \beta_p \beta_q) x^{p+q},$$

úgyhogy a (3) feltétel a következő alakot nyeri:

$$\sum_{p,\,q=0}^{k} c_{p+q} \alpha_p \alpha_q + \sum_{p,\,q=0}^{k} c_{p+q} \beta_p \beta_q = 0.$$

Ez azonban lehetetlen, ami rögtön belátható, ha figyelembe vesszük, hogy a baloldali összegek mindketten nemnegatívok és legalább az egyik pozitív. Feltevésünk tehát helytelen volt, vagyis az $f(x)$ polinom jelet vált, amit bizonyítanunk kellett.

KÖVETKEZMÉNY. Az I. tétel bizonyitásából következik, hogy a $\sum_{0}^{n} c_r a_r$ összeg pozitív, ha $c_0, c_1, \ldots, c_n$ normált elsőfajú faktorsorozat, az $f(x)$ polinom pedig a valós tengelyen nemnegatív, de nem azonosan zérus.

1. megjegyzés. A (4) kvadratikus alak nem függ c_n-től, ha n páratlan. Ez ismét igazolja az elsőfokú faktorsorozatok fenti 5. tulajdonságát.

2. megjegyzés. Ismeretes, hogy a (4) kvadratikus alak akkor és csak akkor pozitív definit, ha a

$$D_0, D_1, D_2, \ldots, D_k \qquad \left(k = \left[\frac{n}{2}\right]\right) \tag{5}$$

determinánsok valamennyien pozitívok, ahol

$$D_r = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \ldots & c_r \\ c_1 & c_2 & \ldots & c_{r+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_r & c_{r+1} & \ldots & c_{2r} \end{vmatrix}.$$

Ennélfogva az I. tételt a következőképp is megfogalmazhatjuk: ahhoz, hogy a (2) sorozat normált elsőfajú faktorsorozat legyen, szükséges és elégséges, hogy az (5) determinánsok valamennyien pozitívok legyenek.

2. Másodfajú faktorsorozatok

*Másodfajú faktorsorozat*on a következő tulajdonsággal rendelkező valós számokból álló véges

$$c_0, c_1, \ldots, c_n \qquad (n \geqq 1) \tag{2'}$$

számsorozatot értünk: ha a valós és nem azonosan eltűnő

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

polinom együtthatói kielégítik a

$$c_0 a_0 + c_1 a_1 + \cdots + c_n a_n = 0$$

feltételt, akkor $f(x)$ jelet vált a $0 < x < +\infty$ intervallumban, vagyis van legalább egy páratlan multiplicitású *pozitív* gyöke. Ebből a definícióból rögtön következik, hogy valamely másodfajú faktorsorozat egyúttal elsőfajú faktorsorozat is. Ennek megfordítása természetesen nem igaz, amint azt a $c_r = \dfrac{(-1)^r}{r+1}$ $(r = 0, 1, \ldots, n)$ sorozat példája mutatja. A másodfajú faktorsorozatokra vonatkozóan érvényes a

II. TÉTEL. *A (2′) sorozat akkor és csak akkor másodfajú faktorsorozat, ha a*

$$c_0, 0, c_1, 0, c_2, 0, \ldots, c_{n-1}, 0, c_n \tag{6}$$

sorozat elsőfajú faktorsorozat.

BIZONYÍTÁS. *a)* Legyen (2′) másodfajú faktorsorozat,

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{2n} x^{2n}$$

pedig nem azonosan eltűnő valós polinom, melynek a_r együtthatói a

$$c_0 a_0 + 0\cdot a_1 + c_1 a_2 + 0\cdot a_3 + \cdots + 0\cdot a \quad + c_n a_{2n} = 0 \tag{7}$$

egyenletnek tesznek eleget. Minthogy (2') másodfajú faktorsorozat, azért a (7) egyenlőség következtében az

$$\frac{1}{2}\{f(x)+f(-x)\}=a_0+a_2x^2+\cdots+a_{2n}x^{2n}$$

polinom jelet vált a $0<x<+\infty$ intervallumban, hacsak nem tűnik el azonosan; ekkor azonban $f(x)$-nek is jelet kell váltania, hiszen ha pl. minden x helyen $f(x)\geqq 0$ volna, akkor egyúttal $\frac{1}{2}\{f(x)+f(-x)\}\geqq 0$ is fennállna minden valós x-re. Ha viszont $f(x)+f(-x)$ azonosan eltűnik, akkor $f(x)$ csak x-nek páratlan kitevőjű hatványait tartalmazhatja, s így az $x=0$ helyen vált előjelet. Ezáltal bebizonyítottuk, hogy a (6) sorozat elsőfajú faktorsorozat.

b) Tegyük fel most megfordítva, hogy (6) elsőfajú faktorsorozat és tekintsünk egy nem azonosan eltűnő

$$f(x)=b_0+b_1x+\cdots+b_nx^n$$

polinomot, melynek együtthatói a

$$c_0b_0+c_1b_1+\cdots+c_nb_n=0 \tag{8}$$

egyenletnek tesznek eleget. Ekkor $f(x)$-nek jelet kell váltania a $0<x<+\infty$ intervallumban; ellenkező esetben az

$$f(x^2)=b_0+b_1x^2+\cdots+b_nx^{2n}=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{2n}x^{2n}$$

polinom (ahol $a_{2r-1}=0, a_{2r}=b_r$) sem válthatna jelet a $-\infty<x<+\infty$ intervallumban, hiszen a (8) egyenlet azonos a

$$c_0a_0+0\cdot a_1+c_1a_2+0\cdot a_3+\cdots+0\cdot a_{2n-1}+c_na_{2n}=0$$

egyenlettel. Ezért a (2') sorozatnak másodfajú faktorsorozatnak kell lennie. Így a II. tételt teljesen bebizonyítottuk.

Ha

$$c_r=\gamma_{2r},\quad r=0,1,\ldots,n \quad \text{és} \quad \gamma_{2r-1}=0,\quad r=1,2,\ldots,n,$$

akkor a (6) sorozat megegyezik a

$$\gamma_0,\gamma_1,\ldots,\gamma_{2n}$$

sorozattal. Az I. és a II. tétel értelmében tehát ahhoz, hogy (2') normált másodfajú faktorsorozat legyen, szükséges és elégséges, hogy az

$$F=\sum_{p,\,q=0}^{n}\gamma_{p+q}u_pu_q \tag{9}$$

kvadratikus alak pozitív definit legyen. Minthogy a páratlan indexű γ_{p+q} együtthatók mind zérussal egyenlők, azért az összegezést (9) jobb oldalán elég azon p, q értékpárokra kiterjeszteni, melyekre $p+q$ páros, tehát p és q vagy mindketten párosak, vagy mindketten páratlanok. A (9) kvadratikus alak ennélfogva így is írható:

$$F=\sum_{r,\,s=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}c_{r+s}u_{2r}u_{2s}+\sum_{r,\,s=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}c_{r+s+1}u_{2r+1}u_{2s+1}.$$

Ily módon a (9) alak két kvadratikus alak összegeként áll elő, melyek közül az első csak páros indexű u_r változókat, a második csak páratlan indexű u_r változókat tartalmaz. Ennélfogva a (9) alak akkor és csak akkor pozitív definit, ha az

$$F_1 = \sum_{r,\,s=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} c_{r+s} v_r v_s, \quad F_2 = \sum_{r,\,s=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} c_{r+s+1} w_r w_s$$

kvadratikus alakok mind a ketten pozitív definit alakok. Kimondhatjuk tehát a következő tételt:

III. TÉTEL. *A $c_0, c_1, \ldots, c_n$ sorozat akkor és csak akkor normált másodfajú faktorsorozat, ha a*

$$D_r, \quad r = 0, 1, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right] \quad \textit{és} \quad D'_r, \quad r = 1, 2, \ldots, \left[\frac{n-1}{2}\right]$$

determinánsok mind pozitívok, ahol

$$D_r = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \cdots & c_r \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_{r+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_r & c_{r+1} & \cdots & c_{2r} \end{vmatrix}, \quad D'_r = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_r \\ c_2 & c_3 & \cdots & c_{r+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_r & c_{r+1} & \cdots & c_{2r-1} \end{vmatrix}.$$

3. Minimális intervallumok

Legyen megadva egy elsőfajú faktorsorozat:

(2) $$c_0, c_1, \ldots, c_n \qquad (n \geqq 1).$$

A következőkben azt fogjuk megvizsgálni, hogy lehetséges-e olyan véges (α, β) intervallum megadása, amelyben minden a

$$c_0 a_0 + c_1 a_1 + \cdots + c_n a_n = 0$$

feltételnek eleget tevő és nem azonosan eltűnő valós

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

polinomnak legalább egy páratlan multiplicitású gyöke van. Emellett az (α, β) intervallumot azon feltételnek vetjük alá, hogy egyetlen valódi részintervallumának se legyen meg az említett tulajdonsága. E feladat megoldásában fontos szerepet játszanak azok a racionális polinomok, melyeknek sorozata a

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 \\ 1 & x \end{vmatrix}, \quad P_2(x) = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & c_2 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ 1 & x & x^2 \end{vmatrix}, \quad \ldots$$

polinomokkal kezdődik és a

$$P_k(x) = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \cdots & c_k \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_{k+1} \\ . & . & . & . \\ c_{k-1} & c_k & \cdots & c_{2k-1} \\ 1 & x & \cdots & x^k \end{vmatrix}$$

polinommal végződik, ahol $k = \left[\frac{n}{2}\right]$. Mindenekelőtt e polinomoknak néhány tulajdonságát soroljuk fel.

1. Világos, hogy

$$P_r(x) = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \cdots & c_r \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_{r+1} \\ . & . & . & . \\ c_{r-1} & c_r & \cdots & c_{2r-1} \\ 1 & x & \cdots & x^r \end{vmatrix}$$

r-edfokú polinom és legmagasabb fokú tagjának D_{r-1} együtthatója pozitív.

2. Ha $\varphi(x) = p_0 + p_1 x + \cdots + p_s x^s$ tetszőleges $s < r$-edfokú polinom és

$$\varphi(x) P_r(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{r+s} x^{r+s},$$

akkor

$$c_0 a_0 + c_1 a_1 + \cdots + c_{r+s} a_{r+s} = 0.$$

Valóban, rendezzük $P_r(x)$-et x növekvő hatványai szerint:

$$P_r(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_r x^r;$$

ekkor

$$a_0 + a_1 x + \cdots + a_{r+s} x^{r+s} = \varphi(x) P_r(x) = \sum_{m=0}^{s} p_m (b_0 x^m + b_1 x^{m+1} + \cdots + b_r x^{m+r}),$$

úgyhogy a

$$c_0 a_0 + c_1 a_1 + \cdots + c_{r+s} a_{r+s}$$

lineáris kifejezés a

$$\sum_{m=0}^{s} p_m (b_0 c_m + b_1 c_{m+1} + \cdots + b_r c_{m+r})$$

alakban írható. A $b_0 c_m + b_1 c_{m+1} + \cdots + b_r c_{m+r}$ kifejezés azonban $m < r$ esetén eltűnik, mert a D_r determináns $(m+1)$-edik sorának az utolsó sorhoz tartozó előjeles aldeterminánsokkal való kompozíciója útján keletkezik. Ennélfogva

$$c_0 a_0 + c_1 a_1 + \cdots + c_{r+s} a_{r+s} = 0.$$

3. $r \geqq 1$ esetén $P_r(x)$-nek minden gyöke valós és egyszeres. Ennek igazolására jelöljük $x_1, x_2, \ldots, x_s$-sel a $P_r(x)$ polinom különböző páratlan multiplicitású *valós* gyökeit, $\varphi(x)$-szel pedig a megfelelő gyöktényezők

$$\varphi(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_s)$$

szorzatát ($s = 0$ esetén természetesen $\varphi(x) = 1$ értendő).

Ha a fentihez hasonlóan

$$\varphi(x) P_r(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{r+s} x^{r+s},$$

akkor 2. szerint az $s<r$ feltevésből

$$c_0a_0+c_1a_1+\cdots+c_{r+s}a_{r+s}=0$$

következnék, úgyhogy a $\varphi(x)P_r(x)$ polinomnak legalább egy páratlan multiplicitású valós gyöke volna, ami azonban nem igaz. Így tehát szükségképpen $s=r$; ez azonban csak úgy lehetséges, ha $P_r(x)$-nek csupa valós és egyszeres gyöke van, amit bizonyítanunk kellett.

4. $P_{r-1}(x)$ gyökei szétválasztják $P_r(x)$ gyökeit.

Ennek bizonyítása a

$$P_0(x)=1,\, P_1(x),\, P_2(x),\ldots$$

polinomsorozat három egymás után következő tagjára vonatkozó

$$D_{r-1}^2P_{r+1}(x)=(xD_rD_{r-1}-\bar{D}_rD_{r-1}+D_r\bar{D}_{r-1})P_r(x)-D_r^2P_{r-1}(x) \tag{10}$$

rekurziós képleten alapszik; itt D_r a már korábban (v. ö. 2. §) bevezetett $(r+1)$-edrendű determinánst jelenti, $\bar{D}_r$ pedig azt a determinánst, amely D_r-ből azáltal keletkezik, hogy az utolsó sor elemeinek indexeit eggyel megnöveljük. A (10) azonosságból mindenekelőtt könnyen adódik, hogy állításunk $r=1$ esetén helyes. Valóban, ha x_1 a $P_1(x)$ polinomnak (egyetlen) gyöke, akkor (10)-ből azonnal látszik, hogy $P_2(x_1)$ negatív; viszont $P_2(x)$ pozitív $|x|$-nek elég nagy értékeire, úgyhogy x_1 csakugyan $P_2(x)$ két gyöke között fekszik. Jelöljük most általában $P_r(x)$ gyökeit növekvő sorrendben $x_1,x_2,\ldots,x_r$-rel s tegyük fel, hogy $P_r(x)$ két szomszédos gyöke között $P_{r-1}(x)$-nek pontosan egy gyöke van, úgyhogy

$$\operatorname{sgn} P_{r-1}(x_l)=(-1)^{r-l} \qquad (l=1,2,\ldots,r).$$

(10)-ből látható, hogy

$$\operatorname{sgn} P_{r+1}(x_l)=(-1)^{r-l+1},$$

ami a $\operatorname{sgn} P_{r+1}(+\infty)=1$ relációval egybevetve mutatja, hogy $P_r(x)$ gyökei is szétválasztják $P_{r+1}(x)$ gyökeit. Ezzel állításunk be van bizonyítva.

A következőkben

$$c_0,c_1,\ldots,c_n \qquad (c_0>0)$$

rögzített elsőfajú faktorsorozatot jelent. Legyen K_n azon legfeljebb n-edfokú, nem azonosan eltűnő, valós

$$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$$

polinomok osztálya, amelyeknek a_r együtthatói a

$$c_0a_0+c_1a_1+\cdots+c_na_n=0$$

egyenletet kielégítik. Valamely (α,β) nyílt intervallumot nevezzünk *minimális intervallum*nak a K_n osztályra nézve, ha a következő két tulajdonsággal rendelkezik: 1. minden K_n osztálybeli polinom jelet vált (α,β)-ban; 2. az (α,β) intervallum egyetlen valódi részintervallumának sincs meg az 1. tulajdonsága.

IV. TÉTEL. *Legyen $n=2k-1$ 1-nél nagyobb páratlan szám. Ha α,β $(\alpha<\beta)$ $P_k(x)$-nek két szélső gyöke, akkor (α,β) minimális intervallum a K_n osztályra nézve.*

BIZONYÍTÁS. Tekintsük az

$$f(x)=(x-\xi)\left\{\frac{P_k^2(x)}{(x-\alpha)^2}+\varepsilon\right\}=\sum_0^{2k-1} a_\nu x^\nu \tag{11}$$

polinomot, ahol ε pozitív szám s az $f(x)$ polinom valós ξ gyökét úgy választjuk meg, hogy $f(x)$ a K_n osztályhoz tartozzék. E célból adjuk az $f(x)$ polinomnak a következő alakot:

$$f(x)=\frac{P_k^2(x)}{x-\alpha}+(\alpha-\xi)\frac{P_k^2(x)}{(x-\alpha)^2}+\varepsilon(x-\xi)$$

és rendezzük a $\dfrac{P_k^2(x)}{(x-\alpha)^2}$ és $\dfrac{P_k^2(x)}{x-\alpha}$ polinomokat x növekvő hatványai szerint:

$$\frac{P_k^2(x)}{(x-\alpha)^2}=p_0+p_1x+\cdots+p_{n-1}x^{n-1},\qquad \frac{P_k^2(x)}{x-\alpha}=b_0+b_1x+\cdots+b_nx^n.$$

Minthogy $P_k^2(x)/(x-\alpha)=P_k(x)\varphi(x)$ a $P_k(x)$ polinomnak egy alacsonyabb fokú polinommal való szorzata, azért ez a szorzat a K_n osztályhoz tartozik, következésképp

$$c_0b_0+c_1b_1+\cdots+c_nb_n=0.$$

Másrészt

$$M=c_0p_0+c_1p_1+\cdots+c_{n-1}p_{n-1}+c_n\cdot 0$$

zérustól különböző (mégpedig pozitív), hiszen $P_k^2(x)/(x-\alpha)^2$ nem vált jelet és a (2) faktorsorozat normált (v. ö. az I. tétel utáni következménnyel). Annak feltételét tehát, hogy az

$$f(x)=\sum_0^n b_\nu x^\nu+(\alpha-\xi)\sum_0^{n-1}p_\nu x^\nu+\varepsilon x-\varepsilon\xi$$

polinom a K_n osztályhoz tartozzék, az

$$(\alpha-\xi)M+c_1\varepsilon-c_0\varepsilon\xi=0$$

egyenlet fejezi ki, amely még így is írható:

$$(\xi-\alpha)M=c_0\varepsilon(x'-\xi),$$

ha x'-vel a $P_1(x)$ polinom c_1/c_0 gyökét jelöljük. $\varepsilon>0$, $M>0$ és (4. alapján) $\alpha<x'<\beta$ miatt az utóbbi egyenlet azt mutatja, hogy ξ α-tól x'-ig növekszik, miközben ε 0-tól $+\infty$-ig növekszik. Ezzel bebizonyítottuk, hogy $\alpha<\alpha'<x'$ esetén létezik a K_n osztályba tartozó (11) polinom, amely csak az $x=\alpha'$ helyen tűnik el, egyébként az egész valós tengelyen zérustól különbözik. Hasonló okoskodás mutatja, hogy létezik a K_n osztályba tartozó olyan

$$f_1(x)=(x-\xi)\left\{\frac{P_k^2(x)}{(x-\beta)^2}+\varepsilon\right\}\qquad(\varepsilon>0) \tag{12}$$

polinom, amelynek egyetlen, az (x',β) intervallumba eső és $\varepsilon\to 0$ esetén β-hoz tartó valós ξ gyöke van. Ha még figyelembe vesszük, hogy $P_1(x)=c_0x-c_1$ is a K_n osztályba tartozik és egyetlen gyöke $x=x'$, akkor a fenti meggondolásokból adódik, hogy bármely az (α, β) intervallumba eső ξ számhoz található a K_n osztályban olyan $f(x)$ polinom, melynek egyetlen valós gyöke ξ. Ebből következik azonban a definíció alapján, hogy a $P_k(x)$ $\left(k=\frac{n+1}{2}\right)$ polinom szélső gyökei által határolt (α, β) intervallum az egyetlen minimális intervallum a K_n osztályra nézve.

V. TÉTEL. *Legyen $n=2k-2$ 2-nél nagyobb páros szám. Ha α, β $(\alpha<\beta)$ a $P(x)=P_k(x)+cP_{k-1}(x)$ polinom szélső gyökei, ahol c tetszőleges valós állandó, akkor (α, β) minimális intervallum a K_n osztályra nézve.*

Ennek a tételnek a bizonyítása a IV. tételéhez hasonlóan végezhető, azzal a különbséggel, hogy most (11) és (12) helyett

$$f(x)=(x-\xi)(x-\xi')\left\{\frac{P^2(x)}{(x-\alpha)^2(x-\beta)^2}+\varepsilon\right\} \qquad (\varepsilon>0)$$

alakú polinomokat tekintünk.

Az $n=1$ és $n=2$ eset teljesen elemien elintézhető.

IRODALOM

1. *J. Favard,* Sur les zéros réels des polynomes. Bulletin de la Société Mathématique de France, **59** (1931), 229.

2. *J. Favard,* Les théorèmes de la moyenne pour les polynomes. Actualités scientifiques et industrielles, No **302**, Paris 1936.

3. *L. Tchakaloff,* Sur la structure des ensembles linéaires, définis par une certaine propriété minimale. Acta Mathematica, **63** (1934), 77—97.

4. А. К. Харадзе, Теоремы о среднем значении в применении к полиномам. Тбилиси, 1947.

FOLYTONOS FÜGGVÉNYEK KÖZÉPÉRTÉKTÉTELEIRŐL

TIBERIU POPOVICIU

Előadta az 1954. június 18-án tartott nyilvános osztályülésen

1. Valamely $f(x)$ függvény osztott differenciái a következő rekurziós képlettel értelmezhetők:

$$[x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f] = \frac{[x_2, x_3, \ldots, x_{n+1}; f] - [x_1, x_2, \ldots, x_n; f]}{x_{n+1} - x_1},$$

$$[x_1; f] = f(x_1).$$

Ekkor

(1) $$[x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f]$$

n-edrendű osztott differencia és az $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ pontok ennek *csomópont*jai. Ebben a definícióban az osztópontokat különbözőknek tételezzük fel s feltesszük, hogy növekvően vannak elrendezve:

(2) $$x_1 < x_2 < \cdots < x_{n+1}.$$

A különböző csomópontok esetéből kiindulva, határátmenetekkel és az $f(x)$ függvény egymás utáni deriváltjainak bevezetésével át lehet térni a részben egybeeső csomópontok esetére. Ebben az értelemben például az $[x, x, \ldots, x; f]$ n-edrendű osztott differencia $\frac{1}{n!} f^{(n)}(x)$-szel egyenlő, ahol $f^{(n)}(x)$ az $f(x)$ függvény n-edik deriváltja. Az osztott differenciák tehát a deriváltak általánosításainak tekinthetők.

Stieltjes óta tudjuk viszont, hogy ha $f(x)$ n-edik deriváltja az x_0 helyen folytonos, akkor az (1) osztott differencia $\frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)$-hoz tart, mikor $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1} \to x_0$.

Ha $f^{(n)}(x)$ létezik a csomópontokat tartalmazó legkisebb intervallumban, akkor

(3) $$[x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!},$$

ahol $\xi \in (x_1, x_{n+1})$; ez az $n = 1$ esetnek megfelelő klasszikus Lagrange-féle képletnek általánosítása.

A következőkben a (3) képletnek mutatjuk be néhány általánosítását.

2. Az osztott differenciák elmélete egy sereg teljesen elemi jellegű képletet tartalmaz, amelyek határátmenettel a függvény és deriváltjai között különféle kapcsolatokat szolgáltatnak. Ezek közül a továbbiakban egyet fogunk felhasználni.

Legyen

$$x_1 < x_2 < \cdots < x_m \qquad (m \geqq n+1) \tag{4}$$

m különböző pontból álló sorozat és vezessük be a

$$D_i^j[f] = [x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+j}; f] \tag{5}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, m-j, \quad j = 0, 1, \ldots, m-1)$$

jelölést. Ekkor $1 = i_1 < i_2 < \cdots < i_{n+1} = m$ esetén

$$[x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{n+1}}; f] = \sum_{i=1}^{m-n} A_i D_i^n[f], \tag{6}$$

ahol az A_i együtthatók nem függnek az $f(x)$ függvénytől és

$$\sum_{i=1}^{m-n} A_i = 1, \quad A_i > 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m-n).$$

A (6) képlet mutatja, hogy a (4) pontok közül választott bármely $n+1$ csomópontra vonatkozó osztott differencia a (4) sorozat $n+1$ egymás utáni pontjára vonatkozó osztott differenciáknak súlyozott számtani középértéke. Ez a középértéktétel szolgál a következő tételek alapjául.

3. Kimutatható mindenekelőtt a (3) képlet következő általánosítása:

1. TÉTEL. *Ha az $f(x)$ függvény folytonos egy a (2) csomópontokat tartalmazó intervallumban, akkor található oly $\xi \in (x_1, x_{n+1})$ hely, hogy ξ minden környezetében van $n+1$ különböző és ξ által kettéválasztott $x_1', x_2', \ldots, x_{n+1}'$ pont, melyekre az*

$$[x_1', x_2', \ldots, x_{n+1}'; f] = [x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f]$$

egyenlőség teljesül.

Az x_i' pontokról akkor mondjuk, hogy a ξ hely kettéválasztja őket, ha ξ az x_i' pontokat tartalmazó legkisebb intervallumnak belsejébe esik.

Az 1. tétellel kapcsolatban a következő megjegyzést tehetjük.

Ha a (2) csomópontok ekvidisztánsok:

$$x_i = c + (i-1)h \qquad (i = 1, 2, \ldots, n+1),$$

akkor

$$[c, c+h, \ldots, c+nh; f] = \frac{1}{n!\,h^n} \Delta_h^n f(c),$$

ahol

$$\Delta_h^n f(c) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} f(c+ih).$$

Kimutatható, hogy ha $f(x)$ folytonos egy a (2) csomópontokat tartalmazó intervallumban, akkor találhatók ebben az intervallumban olyan $c, \ldots, c+nh$ pontok, hogy

$$[x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f] = \frac{1}{n!\,h^n} \Delta_h^n f(c). \tag{7}$$

Innen adódik *Sz. N. Bernstein* és *D. Rajkov* következő tételének állítása:

Ha $f(x)$ folytonos egy a (2) csomópontokat tartalmazó intervallumban, akkor található egy $\xi \in (x_1, x_{n+1})$ pont úgy, hogy minden $\varepsilon > 0$-hoz tartozzék legalább egy c s egy $h \neq 0$, $\xi - \varepsilon < c < \xi < c + nh < \xi + \varepsilon$, melyekre (7) teljesül.

4. A (3) képletnek azonban még általánosabb kiterjesztése is adható. Ez az osztott differencia fogalmának megfelelő kiterjesztésén alapszik.

Tekintsük a (4) pontokat, ha m elég nagy, és használjuk az (5) jelöléseket. Képezzük nemnegatív egész k mellett az

$$U^{n,k}_{i_1, i_2, \dots, i_{n+1}}[f] = \| D^k_{i_j}[x^k] \; D^k_{i_j}[x^{k+1}] \dots D^k_{i_j}[x^{k+n-1}] \; D^k_{i_j}[f] \| \quad (j = 1, 2, \dots, n+1)$$

$(n+1)$-edrendű determinánst.

Ekkor

$$V^{n,k}_{i_1, i_2, \dots, i_{n+1}} = U^{n,k}_{i_1, i_2, \dots, i_{n+1}}[x^{k+n}] \tag{8}$$

a Vandermonde-féle determináns általánosítása,

$$D^{n,k}_{i_1, i_2, \dots, i_{n+1}}[f] = U^{n,k}_{i_1, \dots, i_{n+1}}[f] / V^{n,k}_{i_1, \dots, i_{n+1}} \tag{9}$$

pedig az ismételt osztott differenciák egy fajtája.

A (9) kifejezésnek természetesen csak akkor van értelme, ha a (8) determináns zérustól különböző. Ehhez szükséges, hogy az i_j indexek mind különbözők legyenek, amikor is feltehető, hogy

$$1 = i_1 < i_2 < \dots < i_{n+1} = m - k.$$

Ekkor kimutatható, hogy

$$U^{n,k}_{i_1, i_2, \dots, i_{n+1}}[f] = \sum_{i=1}^{m-k-n} B_i D^{n+k}_i [f],$$

ahol a B_i együtthatók nem függnek az $f(x)$ függvénytől és pozitívok. Ebből adódik, hogy

$$V^{n,k}_{i_1, i_2, \dots, i_{n+1}} = \sum_{i=1}^{m-k-n} B_i > 0.$$

Innen következik, hogy a (9) ismételt osztott differencia a

$$D^{n+k}_i[f] \qquad (i = 1, 2, \dots, m-k-n)$$

osztott differenciák számtani középértéke.

5. Megfordítva is kimutatható azonban, hogy legalább is abban az esetben, mikor a (4) csomópontok ekvidisztánsok, a (4) pontok közül választott csomópontokra vonatkozó bármely $(n+k)$-adrendű osztott differencia ismételt osztott differenciáknak számtani középértéke. Innen adódik végül a következő általános tétel:

2. TÉTEL. *Ha $f(x)$ folytonos egy a (2) csomópontokat tartalmazó intervallumban és ha k n-nél nem nagyobb természetes szám, akkor találhatók olyan $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{n-k} \in (x_1, x_{n+1})$, $\xi_0 < \xi_1 < \dots < \xi_{n-k}$ pontok, hogy ezeknek minden környezet-rendszerében van $(n-k+1)(k+1)$ számú*

$$x'_1 < x'_2 < \dots < x'_{(n-k+1)(k+1)} \tag{10}$$

pont, az

$$x'_{j(k+1)+1},\ x'_{j(k+1)+2},\ \ldots,\ x'_{(j+1)(k+1)}$$

pontokat a ξ_j *hely kettéválasztja* ($j=0, 1, \ldots, n-k$), *továbbá*

$$D^{n-k,\,k}_{1,\,(k+1)+1,\,2(k+1)+1,\,\ldots,\,(n-k)(k+1)+1}[f] = [x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f],$$

ahol az ismételt osztott differencia a (10) *pontsorozatra vonatkozik.*

A 2. tételből következik speciálisan, hogy ha $f(x)$ folytonos egy a (2) csomópontokat tartalmazó intervallumban és ha az $f^{(k)}(x)$ derivált létezik (x_1, x_{n+1})-ben, akkor található ebben az intervallumban $n-k+1$ számú különböző $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{n-k}$ pont úgy, hogy

$$[x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f] = \frac{1}{n(n-1)\ldots(n-k+1)}[\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{n-k}; f^{(k)}].$$

6. A felsorolt középértéktételeknek az ad fontosságot, hogy ezek lehetővé tesznek bizonyos, az analízis néhány közelítő képletének, éspedig interpolációs, továbbá numerikus deriválási és integrálási képleteknek maradéktagjával kapcsolatos vizsgálatokat. Az ilyen képletek maradéktagja mindig

$$A[\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n+1}; f] + B[\xi'_1, \xi'_2, \ldots, \xi'_{n+1}; f]$$

alakú, ahol egyrészt a ξ_i, másrészt a ξ'_i csomópontok különbözők és az A, B együtthatók nem függnek az $f(x)$ függvénytől. Bizonyos speciális esetekben ezenkívül az A és B együtthatók egyike eltűnik; ezekkel az esetekkel már előzőleg foglalkoztam.

A RIEMANN-FÉLE ZETAFÜGGVÉNY GYÖKEIRŐL

(Székfoglaló előadás)

TURÁN PÁL r. tag

Előadta az 1954. június 18-án tartott nyilvános osztálygyűlésen

1. Mint jól ismert, *Riemann* 1859-ben, tehát majdnem 100 éve, a prímszámokra vonatkozó klasszikus dolgozatát épp azon alkalomból publikálta, hogy a berlini Akadémia levelezőtagjai közé választotta. Jelen székfoglaló értekezés is azon vizsgálatok körébe tartozik, melyeket ez a 9 oldalas zseniális értekezés indított meg; lehetetlen, hogy pár szóval ne időzzem emlékénél. E dolgozatban vezette be *Riemann* a komplex $s=\sigma+it$ változónak azon $\zeta(s)$-sel jelölt függvényét, mely a $\sigma>1$ félsíkban a

$$(1)\qquad \zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$$

sor által van értelmezve. A kapcsolat a prímszámokkal a $\sigma>1$ félsíkban érvényes

$$(2)\qquad \zeta(s)=\prod_{p}\frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}$$

sorozatelőállítás alapján válik evidenssé, ahol p az összes prímeket futja be. Ebből logaritmikus deriválással rögtön adódik, hogy a $\sigma>1$ félsíkban

$$(3)\qquad -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}=\sum\frac{\Lambda(n)}{n^s}$$

ahol $\Lambda(n)$, az ú. n. Dirichlet-jel a

$$\Lambda(n)=\begin{cases}\log p, & \text{ha } n=p^{\alpha}\\ 0 & \text{ha } n\neq p^{\alpha}\end{cases}$$

által van értelmezve. Mindezen formulák *valós* $s>1$-re már *Euler*nél szerepeltek 100 évvel előbb, számelméleti célokra; *Riemann* gondolatának, mely szerint a $\zeta(s)$ függvény *komplex* s-értékre vizsgálandó, döntő jelentősége abban áll, hogy komplex s-ekre térve a (3) formula a

$$\Theta(x)=\sum_{n\leqq x}\Lambda(n)$$

együtthatóösszegre komplex vonalintegrálelőállításhoz vezet, mely az integrációs út deformálásával uralható. Ezen egyszerűen hangzó gondolattal, kombinálva azt további merész és alig alátámasztottakkal, *Riemann* eljutott *Gauss* azon ifjúkori sejtésének heurisztikus bizonyításához, mely szerint az x-et meg nem haladó prímek számát $\pi(x)$-szel jelölve $x \to \infty$-re

$$\frac{\pi(x)}{\int\limits_2^x \frac{dv}{\log v}} \to 1.$$

A sok vázlatos gondolat kidolgozása és folytatása olyan eredményekre vezetett, mint pl. az egész függvények, a Dirichlet-sorok és a majdnem periodikus függvények elmélete, a Jensen-formula stb.; egy mégis fennmaradt a bizonyítatlan állítások közül, melynek igazolása máig sem sikerült. Ez, az ú. n. Riemann-sejtés azt mondja ki, hogy az $(s-1)\zeta(s)$ függvény, mely transzcendens egész függvény, nem tűnik el a $\sigma > \frac{1}{2}$ félsíkban. E sejtés jelentősége abban áll, hogy helyessége esetén a $\pi(x)$ függvényt az egyszerű $\int\limits_2^x \frac{dv}{\log v}$ lényegileg $\sqrt{x}$-nyi hibával közelíti meg; hogy e tény milyen jelentőséggel bírna az egész számelméletre, azt nem kell magyarázni. A meglepő a dologban nyilván az, hogy a prímszámok eloszlása egy egész függvény gyökeinek eloszlásától függ; érthető tehát, hogy a Riemann-sejtés a matematikusok egész sorát faszcinálta; ezt talán a legfrappánsabban *Hilbert* fejezte ki mondván, hogy ha halála után 500 évvel felébredne, első kérdése az lenne, megoldották-e a Riemann-sejtést, vagy nem.

Amit eddig $\zeta(s)$ gyökeiről be lehetett bizonyítani, az elég kevés és elég sok. Elég kevés, mert még semmilyen $\vartheta < 1$ létezése nincs bizonyítva, hogy $\zeta(s) \neq 0$ a $\sigma > \vartheta$ félsíkban. Mégis elég sok, mert pl. a nyert eredmények segélyével olyan számelméleti tényeket lehetett bebizonyítani, mint *Ingham* azon tételét, hogy n^3 és $(n+1)^3$ közé esik prímszám, ha n elég nagy. Ez elsősorban kétirányú eredményeknek köszönhető. Az elsőfajtájúakról csak egy pár szót, ezeket a későbbiekben nem használjuk fel; *Vinogradov* kimutatta, hogy a

$$\sigma > 1 - \frac{c_1}{(\log|t| \log\log|t|)^{3/4}} \qquad |t| \geqq t_0$$

$$\sigma > 1 - \frac{c_1}{(\log t_0 \log\log t_0)^{3/4}} \qquad |t| < t_0$$

tartományban $\zeta(s) \neq 0$, ha c_1 és $\frac{1}{t_0}$ elég kis numerikus pozitív állandók. A második fajtájúak helyes értéséhez előrebocsátjuk *Riemann—Mangoldt* azon tételét, hogy ha $N(T)$ jelenti $\zeta(s)$ gyökei számát a

$$0 < \sigma < 1, \qquad 0 < t \leqq T$$

tartományban, akkor

(4) $$\left| N(T) - \frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi} + \frac{T}{2\pi} \right| < c_2 \log T,$$

azaz a $0 < \sigma < 1$ „kritikus" sávban T magasságig „kb." $T \log T$-nyi sok gyök van. Mármost *Bohr—Landau* és *Carlson* első eredményei után *Ingham* kimutatta, hogy ha

$$\frac{1}{2} \leqq \alpha \leqq 1,$$

akkor a

$$\sigma \geqq \alpha, \qquad 0 < t \leqq T$$

tartományba eső gyökök számát $N(\alpha, T)$-vel jelölve

(5) $$N(\alpha, T) < c_3 T^{\lambda(\alpha)(1-\alpha)} \log^6 T,$$

ahol c_3 numerikus állandó és $\lambda(\alpha)$-ra

(6) $$\lambda(\alpha) \leqq \frac{8}{3},$$

(7) $$\lambda(\alpha) \leqq \frac{3}{2-\alpha}.$$

Hogy e tétel *értelmét* világosabban lássuk, jegyezzük meg, hogy $\frac{1}{2} < \alpha \leqq 1$-re $\frac{3}{2-\alpha}(1-\alpha) < 1$; azaz tekintve (4)-et, a tétel azt adja, hogy a gyökök „javarésze" a $\sigma = \frac{1}{2}$ egyenes „közelébe" esik és ha $\alpha \to 1$, akkor (5)-ben T kitevője $\to 0$. Ezen Carlson-típusúnak nevezhető (5) egyenlőtlenség jelentősége abban áll egyéb alkalmazások mellett, hogy ez a második fősegédeszköz annak igazolásához, hogy elég nagy n-re n^3 és $(n+1)^3$ között van prímszám. Pontosabban szólva, ha az (5) egyenlőtlenség $\lambda(\alpha)$ függvényére

(8) $$\max_{\frac{1}{2} \leqq \alpha \leqq 1} \lambda(\alpha) = A,$$

akkor a p_n és p_{n+1} konzekutív prímek különbségére tetszőleges kis pozitív ε mellett

(9) $$p_{n+1} - p_n < c_4(\varepsilon) p_n^{1-\frac{1}{A}+\varepsilon}.$$

A definíciója alapján, tekintve (5)-öt és (4)-et, adódik, hogy $A \leqq \frac{8}{3}$ és

$$A \geqq 2.$$

Ha tehát tetszőleges kis pozitív ε mellett $A \leqq 2 + \varepsilon$, azaz az

$$\frac{1}{2} \leqq \alpha \leqq 1$$

közben

(10) $$N(\alpha, T) \leqq c_5(\varepsilon) T^{(2+\varepsilon)(1-\alpha)} \log^6 T,$$

akkor (9)-ből tetszőleges kis pozitív ε_1-gyel

$$(11) \qquad p_{n+1} - p_n < c_6(\varepsilon_1)\, p_n^{\frac{1}{2}+\varepsilon_1},$$

ami lényegileg az analitikai számelmélet Landau-féle 4. főproblémája. (10)-et *Ingham* bebizonyította az ú. n. Lindelöf-sejtés helyességének feltételezésével, mely szerint $\sigma \geqq \frac{1}{2}$-re és $|t| \geqq 1$-re tetszőleges kis pozitív ε_2 mellett

$$(12) \qquad |\zeta(\sigma + it)| \leqq c_7(\varepsilon_2)|t|^{\varepsilon_2}.$$

A későbbiekre való tekintettel jegyezzük meg mindjárt most azon könnyen belátható tényt, hogy a (11) egyenlőtlenség igazolásához elég (10)-et az

$$(13) \qquad \frac{1}{2} + \delta(\varepsilon) \leqq \alpha \leqq 1$$

közbe eső α-kra igazolni, ahol $\delta(\varepsilon) > 0$ és

$$(14) \qquad \lim_{\varepsilon \to 0} \delta(\varepsilon) = 0.$$

A következőkben *Ingham* tételét ezen alakban fogjuk idézni. Orientációképp jegyezzük meg, hogy a Riemann-sejtés helyességéből a Lindelöf-féléé következik; fordítva azonban nem és már az is meglepetés volt 1937-ben, hogy egyáltalán belőle levonható Carlson-típusú következtetés a gyökökre.

Néhány évvel ezelőtt bevezettem egy módszert a zétafüggvénnyel kapcsolatos kérdések vizsgálatára, melyet alkalmazásaival együtt egy könyvben ismertettem. A módszer lényegét az azóta tett tapasztalatok birtokában kissé általánosabban fogalmazva a következőképp lehet röviden kifejezni. Kronecker klasszikus tétele a diofantoszi approximációk elméletében ekvivalens azzal, hogy ha a z_ν komplex számok argumentumai lineárisan függetlenek, akkor az

$$(15) \qquad f(x) = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu z_\nu^x$$

kifejezéshez, (ahol $z_\nu^x = e^{x \log z_\nu}$ a logaritmus bármely rögzített értéke mellett) tetszőleges kis $\varepsilon > 0$ mellett van oly pozitív x_1, hogy

$$(16) \qquad \frac{|f(x_1)|}{\sum_{\nu=1}^{n} |a_\nu||z_\nu|^{x_1}} > 1 - \varepsilon.$$

Itt x_1 nem lokalizálható. Dirichlet klasszikus tétele, ha a (15) alatti $f(x)$-ben a z_ν-k argumentumaira semmit sem teszünk fel, de az a_ν együtthatók pozitívok, lényegileg ekvivalens (16)-tal és megad oly $x = x_2$-t, melyre,

$$(17) \qquad \frac{|f(x_2)|}{\sum_{\nu=1}^{n} |a_\nu||z_\nu|^{x_2}} = \frac{|f(x_2)|}{\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu |z_\nu|^{x_2}} > 1 - \varepsilon$$

és

$$1 \leqq x_2 \leqq \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{2n},$$

tehát x_2 már valamelyest lokalizálható. Mármost az analízis sok kérdése vezet $|f(x)|$ oly alsó becslésének kérdésére, ahol nem annyira a becslés élessége, mint a jó lokalizáció a fontos és az, hogy az exponensekre és együtthatókra semmilyen kikötés ne legyen. A módszer lényege abban áll, hogy először is a $\sum_{\nu=1}^{n} |a_\nu||z_\nu|^x$ kifejezést a feladat természetétől függő más pozitív kifejezéssel, a feladat „normájával" pótolja, továbbá alsó korlát gyanánt nem követel meg olyan értéket, [mint $(1-\varepsilon)$ a (16) és (17)-ben], mely nem függ sem az a_ν-től, sem a z_ν-ktől, sem n-től, csupán olyant, hogy vagy

(18) a) a z_ν-ktől legyen független,

vagy

(19) b) az a_ν-ktől legyen független.

Az így csökkentett követelmények árán nyerhető, (16)—(17)-szerű alsó becslésekben x értéke igen erősen lokalizált; az eddigi és újabb alkalmazások mutatják, hogy a (18)- és (19)-típusú eredmények mindegyike érdemleges eredmény. A következőkben lényeges lesz ezen tételek közül azon (18)-típusú tétel, mely szerint, ha $m>0$ előírott és

$$f_1(x)=\sum_{j=1}^{n} z_j^x, \tag{20}$$

akkor van oly egész ν, hogy

$$m \leqq \nu \leqq m+n$$

és

$$\frac{|f_1(\nu)|}{(\max\limits_{j=1,\dots,n} |z_j|)^\nu} > \left(\frac{1}{48e^2}\cdot\frac{n}{m+2n}\right)^n.$$

Ténylegesen azon módosított formában fogjuk alkalmazni ezt, mely szerint, ha $m>0$ előírott és $n \leqq N$ és $\max\limits_{j=1,\dots,n} |z_j| \geqq 1$, akkor van olyan egész ν_0, hogy

$$m \leqq \nu_0 \leqq m+N \tag{21}$$

és

$$|z_1^{\nu_0}+\cdots+z_n^{\nu_0}| \geqq \left(\frac{1}{48e^2}\cdot\frac{N}{m+2N}\right)^N. \tag{22}$$

A következőkben látni fogjuk többek közt, mint vezetnek további alkalmazási lehetőségek további (18)—(19)-cel bizonyos értelemben duális feladatokra.

A módszer különféle alkalmazásait mutattam meg eddig a zetafüggvény elméletében. Most egy további alkalmazásról szeretnék beszámolni e téren, a Lindelöf- és Riemann-sejtések viszonyának vizsgálatáról. Említettem *Ingham* meglepő tételét a Lindelöf-sejtés hatásáról a zeta-függvény gyökeloszlására. Ez rögtön felveti a kérdést, talán e sejtésből erősebb következtetés is levonható $N(\alpha, T)$ felső becslésére, tehát a Lindelöf-sejtés talán közelebb áll a

Riemann-sejtéshez, mint gondoltuk volna. Kézenfekvő volt azon bizonyítás módosítására gondolni, mellyel megmutattam, hogy van olyan numerikus pozitív c_9 és elég kis numerikus pozitív c_8, amelyre az

(23) $$1-c_8 \leqq \alpha \leqq 1$$

közben az

(24) $$N(\alpha, T) < c_9 T^{2(1-\alpha)+600(1-\alpha)^{\frac{101}{100}}} \log^6 T$$

becslés áll fenn, éspedig minden feltételezés nélkül; ezen becslés a ma ismert legerősebb. (Mint a korrektura alkalmával észrevettem, (24) helyett a még erősebb $N(\alpha, T) \leqq c_9 T^{2(1-\alpha)+(1-\alpha)^{1,14}}$ egyenlőtlenség is igaz. Analóg megjegyzés áll e dolgozat tételére is. Mindezekre másutt vissza fogok térni.) A következőkben megmutatom, hogy a módszer megfelelően alkalmazva a kívánt irányban tényleg tud eredményeket produkálni; kiadja kissé általánosabb formában Ingham (13)—(14) alatti tételét és látható lesz, milyen javítás remélhető a segédeszközök megfelelő módosításával.

Pontosabban szólva a következő tételt fogjuk kimutatni.

Tegyük fel, hogy van oly

(25) $$\frac{1}{2} < \vartheta < 1,$$

hogy a

(26) $$\sigma \geqq \vartheta, \quad t \geqq 1$$

tartományban valamely elég kis $\eta > 0$-val

(27) $$|\zeta(\sigma+it)| \leqq c_{10}(\eta) t^{\eta^{1000}}.$$

Ekkor

(28) $$(1 \geqq)\sigma_1 \geqq \vartheta + 4\eta, \quad T > c_{11}(\eta)$$

tartományban az

(29) $$N(\sigma_1, T) < c_{12}(\eta) T^{2(1+3\eta)(1-\sigma_1)} \log^5 T$$

becslés érvényes.

Könnyen látható (4) felhasználásával, hogy Ingham tétele ebben benne van. A bizonyítás Inghamétől lényegesen eltérő.

Térjünk rá a fősegédtétel bizonyításának vázlatos ismertetésére. Legyen

(30) $$\sigma > 1, \quad \xi \geqq e^{10};$$

a k egész szám egyelőre csupán a

(31) $$10 \leqq k \leqq 10 \log \xi$$

feltételt elégítse ki és legyen

(32) $$g_k(s) = \sum_{n \geqq \xi} \frac{\Lambda(n)}{n^s} \log^k \frac{n}{\xi}.$$

Könnyen látható, hogy ezen $g_k(s)$ a zetafüggvénnyel a

$$g_k(s) = \frac{(-1)^k k!}{2\pi i} \int\limits_{(\gamma)} \frac{\xi^w}{w^{k+1}} \cdot \frac{\zeta'}{\zeta}(s+w)\,dw \tag{33}$$

integrálformula által függ össze, ahol (γ) oly $\Re w = \gamma$ egyenesmenti integrációt jelöl, melyre

$$1 - \sigma < \gamma < 0.$$

(33)-ból kontúrintegrációval adódik, hogy $\sigma > 1$-re

$$g_k(s) = k! \left\{ \frac{\xi^{1-s}}{(1-s)^{k+1}} - \sum_\varrho \frac{\xi^{\varrho-s}}{(\varrho-s)^{k+1}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi^{-2n-s}}{(-2n-s)^{k+1}} \right\}, \tag{34}$$

ahol ϱ befutja $\zeta(s)$-nek a kritikus sávban levő gyökeit; ez adja meg a kulcsot, miért és hogyan függ össze $g_k(s)$ a zeta-gyökökkel $0 < \sigma < 1$-ben. Képezve $T \geqq 2$-vel és egyelőre határozatlan $\sigma_0 > 1$-gyel a

$$J_k(T) = \int\limits_T^{2T} |g_k(\sigma_0 + it)|^2\,dt \tag{35}$$

négyzetintegrált, erre $g_k(s)$ (32)-alatti alakjának helyettesítése után könnyen adódik numerikus c_{13} állandóval a

$$J_k(T) < c_{13}\left(1 + \frac{1}{(\sigma_0 - 1)^4}\right) k!^2 \sigma_0^3 \log^4 \xi \left\{ T \frac{\xi^{1-2\sigma_0}}{\left(\sigma_0 - \frac{1}{2}\right)^{2k+2}} + 4^{\sigma_0} \frac{\xi^{2(1-\sigma_0)}}{(\sigma_0 - 1)^{2k+2}} \right\} \tag{36}$$

becslés. Mivel könnyen láthatólag tetszőleges

$$0 < \beta < 1 \tag{37}$$

mellett $T \leqq t \leqq 2T$-ben fennáll az

$$|g_k(\sigma_0 + it)| \leqq T^{-\frac{\beta}{2}} J_k(T)^{1/2}$$

egyenlőtlenség, kivéve legfeljebb egy H_k-halmazt, melynek $m(H_k)$ mértékére

$$m(H_k) \leqq T^\beta, \tag{38}$$

tehát (36) és (34) alapján H_k komplementer halmazán numerikus c_{14}-gyel

$$\begin{aligned} &\left| \frac{\xi^{1-s}}{(1-s)^{k+1}} - \sum_\varrho \frac{\xi^{\varrho-s}}{(\varrho-s)^{k+1}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi^{-2n-s}}{(-2n-s)^{k+1}} \right| < \\ &< c_{14} \left\{ 1 + \frac{1}{(\sigma_0-1)^2} \right\} \left\{ \frac{\sigma_0^2 \log^2 \xi}{T^{\frac{\beta}{2}}} \right\} \left\{ \frac{\sqrt{T}\,\xi^{\frac{1}{2}-\sigma_0}}{\left(\sigma_0 - \frac{1}{2}\right)^{k+1}} + 2^{\sigma_0} \frac{\xi^{1-\sigma_0}}{(\sigma_0-1)^{k+1}} \right\}. \end{aligned} \tag{39}$$

Tájékozódás végett jegyezzük meg, hogy (39)-ben a lényeges a $T^{-\frac{\beta}{2}}$ faktor; nélküle az egyenlőtlenség triviálisan igaz a teljes $T \leqq t \leqq 2T$ közre. Ha még

$$\frac{1}{2} \log T \leqq k + 1 \leqq 2 \log T, \tag{40}$$

akkor a H_k halmazok egyesítését H-nak nevezve

(41) $$m(H) < 2T^{\beta} \log T$$

és H komplementer halmazán $\overline{H}$-on, (39) fennáll *minden* (40) alatti egész k-ra. Mérjünk fel a komplex sík $(\sigma_0 + iT, \sigma_0 + 2iT)$ szakaszára $(\sigma_0 + iT)$-tól kezdve $\frac{1}{\log^3 T}$-hosszú szakaszokat; az utolsó szakasz esetleg kisebb. A szakaszok végpontjain a szakaszokra húzott merőlegesek a valós tengellyel parallel sávokat határoznak meg; nevezzünk egy sávot jó ill. rossznak, aszerint, hogy tartalmazza $\overline{H}$-nak pontját, ill. nem. (41)-ből következik, hogy legfeljebb

(42) $$2T^{\beta} \log^4 T$$

-nyi sok rossz sáv van. Ez a fősegédtétel.

E megjegyzés értelme nyilván az, hogy a vizsgált szakaszon azon pontok, melyekre a $|g_k(s)|$ függvények mind „nem túl nagyok", „elég sűrűn" fekszenek. Ezen értékeloszlási tétel javítása döntően fontos mozzanat volna $N(\sigma_1, T)$ becslésének javításában. Erre két út kínálkozik. Az egyik annak megmutatása volna, hogy (39)-ben $\frac{\beta}{2}$ értékét növelve a rossz sávok száma még mindig a (42) alatti érték; ez valószínűleg elérhető lesz $J_k(T)$ helyett az

(43) $$\int_{T}^{2T} |g_k(\sigma_0 + it)|\, dt$$

integrál vizsgálatával. A másik út annak felismerése, hogy a kívánt értékeloszlási tételhez nem okvetlenül szükséges $m(H)$ becslése. A kérdés redukálható arra, hogy a (15) alatti $f(x)$ „gyakran" felvesz értékeket, melyek „nem túl *nagyok* egy bizonyos normára". E feladat a (18) alatti duáljának tekinthető, melynél azt kellett belátni, hogy $f(x)$ „gyakran" felvesz értékeket, melyek „nem túl *kicsik* egy bizonyos normára". Az a norma, mely a duál feladatnál leglényegesebbnek látszik, a

$$\left(\sum_{\nu=1}^{n} |a_\nu|^2 |z_\nu|^{2x}\right)^{1/2}$$

N. Wiener-norma. Ilyen tétel azonban a z_ν-kre vonatkozó minden megkötés nélkül nem várható; egy megfelelő premissza az, hogy a z_ν-vektorok ne legyenek bezárhatók „túl kis" szögtérbe. Egy (43)-ra alapozott, egyes pontokban még kellőképp alá nem támasztott okoskodással (39)-ben a $\frac{\beta}{2}$ exponens β-val helyettesíthető a kivételes H-halmaz mértékének (42)-alatti becslésével; ebből az alább közlendő módszerrel $\delta > 0$

$$\frac{1}{2} + \delta \leqq \sigma_1 \leqq 1$$

mellett a Lindelöf-sejtés helyességének feltételezésével az

$$N(\sigma_1, T) < c_{15}(\delta)\, T^{(1+c_{16}(\delta))(1-\sigma_1)} \log^5 T$$

becslés lesz levezethető, azaz $\sigma_1 = \frac{1}{2} + \delta$-ra olyan pozitív $c_{17}(\delta)$-val, amelyre $\lim_{\delta \to 0} c_{17}(\delta) = 0$

$$N\left(\frac{1}{2}+\delta, T\right) < c_{15}(\delta)\, T^{\frac{1}{2}+c_{17}(\delta)}$$

következik, ami (4)-gyel egybevetve a Lindelöf-sejtés mélységét már plasztikusan mutatja.

Térjünk rá a kimondott tétel igazolására. Ha $\frac{1}{2} < \vartheta < 1$, legyen η oly kicsi, hogy

$$\vartheta + 4\eta < 1 - \left(\frac{\eta}{100}\right)^{100} \tag{44}$$

$$\eta < \frac{1}{100} \tag{45}$$

$$\left(\frac{\eta}{100}\right)^{100} < c_8 \quad \text{(l. (23)-formula)} \tag{46}$$

$$\eta^{889} \log \frac{1440}{\eta^{990}} < \frac{1}{100^{101}} \tag{47}$$

$$\vartheta > \frac{1}{2} + 10\eta \tag{48}$$

és rögzítsünk egy ilyen η-t. Vizsgáljuk $N(\sigma_1, T)$-t. Ha

$$1 \geqq \sigma_1 \geqq 1 - \left(\frac{\eta}{100}\right)^{100},$$

akkor (24)-ből a tétel rögtön következik (éspedig bizonyítatlan feltevés nélkül). Feltehető tehát, hogy

$$\vartheta + 4\eta \leqq \sigma_1 < 1 - \left(\frac{\eta}{100}\right)^{100}. \tag{49}$$

Válasszuk a (39) és (42)-ben szereplő β gyanánt a

$$\beta = \frac{2}{1-2\eta}(1-\sigma_1) \tag{50}$$

értékét. Ekkor (49) és β definíciója alapján könnyen látható, hogy $0 < \beta < 1$ teljesül. Tekintve azon (4)-ből is következő tényt, hogy egy sáv (jó vagy rossz) legfeljebb $c_{18} \log T$-nyi sok gyököt tartalmazhat, valamint T helyett pl. $T^{1/8}$-nal *Ingham* (6) alatti becslését, könnyen adódik, hogy $N(\sigma_1, T)$-hez a rossz sávok adaléka legfeljebb

$$c_{18} T^{\beta} \log^5 T = c_{19}\, T^{\frac{2}{1-2\eta}(1-\sigma_1)} \log^5 T < c_{19}\, T^{2(1+3\eta)(1-\sigma_1)} \log^5 T.$$

Ha tehát sikerül igazolni, hogy a jó sávok viszont nem tartalmaznak zeta-gyököt a $\sigma \geqq \sigma_1$, vagy, ami (50) miatt ugyanaz, a

$$\sigma \geqq 1 - \left(\frac{1}{2} - \eta\right)\beta \tag{51}$$

félsíkban, tételünk be lesz bizonyítva.

Utóbbi igazolására (39)-ből fogunk kiindulni, σ_0, k és ξ megfelelő definíciója után. Legyen

$$\sigma_0 = 1 + \frac{1}{\eta}, \tag{52}$$

tehát „messze jobbra" a $\sigma = 1$ egyenestől. Tegyük fel, hogy (51) nem volna igaz és volna oly l „jó" sáv, hogy ebben volna oly $\varrho^* = \sigma^* + it^*$ zetagyök, melyre

$$\sigma^* \geqq 1 - \left(\frac{1}{2} - \eta\right)\beta. \tag{53}$$

Rögzítsük e sávot és ebben egy $s_0 = \sigma_0 + it_0$ $\bar{H}$-beli pontot. A k egész számra csak azt kössük ki most, hogy

$$\frac{1-(1-\eta)\beta}{1-(1-2\eta)\beta} \log T \leqq k + 1 \leqq \frac{1-\eta}{1-2\eta+\eta\left(1-\frac{3}{2}\eta\right)} \log T \tag{54}$$

legyen; értékét pontosan épp a (21)—(22) tétel alkalmazásával fogjuk megadni. (44)—(48) alapján könnyen belátható, hogy ez valóban intervallum, $T > c_{20}(\eta)$-ra tartalmaz egészet és az alsó határ > 10. Legyen végül

$$\xi = e^{k+1}. \tag{55}$$

Rögtön látható, hogy (30), (31) és (40) ki vannak elégítve, azaz (39) alkalmazható $s = s_0$-lal. Mindjárt mindkét oldalon

$$|\xi^{s_0-\varrho^*}(s_0-\varrho^*)^{k+1}| < \xi^{\sigma_0-\sigma^*}\left\{(\sigma_0-\sigma^*)+\frac{1}{\log^3 T}\right\}^{k+1}$$

értékkel szorozva adódik, hogy

$$\begin{gathered}\left|\xi^{1-\varrho^*}\left(\frac{s_0-\varrho^*}{s_0-1}\right)^{k+1} - \sum_{\varrho} \xi^{\varrho-\varrho^*}\left(\frac{s_0-\varrho^*}{s_0-\varrho}\right)^{k+1} - \sum_{n=1}^{\infty} \xi^{-2n-\varrho^*}\left(\frac{s_0-\varrho^*}{s_0+2n}\right)^{k+1}\right| < \\ < c_{21}(\eta)\frac{\log^2\xi}{T^{\frac{\beta}{2}}}\left\{\sqrt{T}\,\xi^{\frac{1}{2}-\sigma^*}\left(\frac{(\sigma_0-\sigma^*)+\frac{1}{\log^3 T}}{\sigma_0-\frac{1}{2}}\right)^{k+1} + \xi^{1-\sigma^*}\left(\frac{(\sigma_0-\sigma^*)+\frac{1}{\log^3 T}}{\sigma_0-1}\right)^{k+1}\right\}.\end{gathered} \tag{56}$$

Ez lesz a kiinduló egyenlőtlenség.

Először hozzuk a jobboldali tagokat egyszerűbb formára. ξ definíciója, valamint k-nak (54) alatti limitációja alapján nyerhető, hogy az (56) jobb oldalán álló kifejezés kisebb mint

$$c_{22}(\eta)T^{-\frac{\eta\beta}{2}}\log^2 T.$$

A baloldali kifejezések közül, mivel a k exponens $\log T$-rendű, az első tag és az utolsó összeg egész triviálisan, a középső összegnek a

$$|t-t_0|>3\sigma_0$$

feltételt kielégítő része könnyen láthatólag „kicsi" éppúgy, mint az

$$|t-t_0|\leqq 3\sigma_0,\quad (0\leqq)\sigma\leqq 1-\frac{\beta}{2}$$

téglalapba eső rész adaléka. Beírva ezeket és $\xi=e^{k+1}$-et, adódik (56)-ból, hogy, ha $\varrho=\sigma_\varrho+it_\varrho$, akkor

$$(57)\qquad Z\equiv\left|\sum_{|t_\varrho-t_0|\leqq 3\sigma_0,\ \sigma_\varrho\geqq 1-\frac{\beta}{2}}\left(e^{\varrho-\varrho^*}\frac{s_0-\varrho^*}{s_0-\varrho}\right)^{k+1}\right|<c_{23}(\eta)T^{-\frac{\eta\beta}{2}}\log^2 T.$$

Az ellentmondás ebből azáltal jön ki, hogy k értékét alkalmasan választva Z-t alulról megbecsüljük. Erre (21)—(22) tétel ad módot. A z_j-k szerepét az

$$e^{\varrho-\varrho^*}\frac{s_0-\varrho^*}{s_0-\varrho}$$

számok játsszák; ezek maguk és számuk k-tól nyilván nem függ, azaz Z hatványösszeg jellegű. Mivel (53) alapján a ϱ^*-nak megfelelő tag benne maradt az összegben, az ennek megfelelő $z_j=1$. Válasszuk m-nek az (54) köz alsó határát. Szükség van N-re, a z_j-k számának felső becslésére. Ez jelen esetben tehát a zetagyökök számának felső becslését kívánja a

$$\sigma\geqq 1-\frac{\beta}{2},\quad |t-t_0|\leqq 3\sigma_0$$

tartományban. Könnyen belátható, hogy e tartomány a

$$\sigma\geqq\vartheta+\eta^3$$

félsíkba esik, azaz a Lindelöf-sejtésnek megfelelő gyengébb (27)-feltétel itt (és e bizonyításban csak itt) felhasználható. A Jensen-egyenlőtlenség ebből simán kiadja, hogy N gyanánt

$$(58)\qquad N=\eta^{990}\log T$$

választható. Könnyen belátható, hogy az $(m, m+N)$ köz teljesen benne van az (54) közben, azaz $k+1$ gyanánt választható a (21)—(22) tétel ν_0 egésze. Ebből és (57)-ből $T>c_{24}(\eta)$-ra

$$(59)\qquad T^{-\eta^{990}\log\frac{1440}{\eta^{990}}}<c_{25}(\eta)\,T^{-\frac{\eta\beta}{2}}\log^2 T.$$

De (49) és (50)-ből

$$\beta \geqq \frac{2}{1-2\eta}\left(\frac{\eta}{100}\right)^{100};$$

azaz (59)-ből $T > c_{26}(\eta)$-ra könnyen láthatólag

$$\eta^{889} \log \frac{1440}{\eta^{990}} > \frac{1}{100^{101}},$$

ami pedig (47)-nek ellentmond. Tehát (53) ellentmondásra vezetett, a tétel be van bizonyítva.

A VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS ÚJ AXIOMATIKUS FELÉPÍTÉSE

RÉNYI ALFRÉD lev. tag

Előadta az 1954. június 18-án tartott osztályülésen

Bevezetés

A valószínűségszámítás axiomatikus megalapozása, melyet A. N. KOLMOGOROV adott meg 1933-ban megjelent munkájában [1], új korszakot nyitott meg a valószínűségszámítás fejlődésében és rendkívül fejlesztőleg hatott a valószínűségszámításra és annak a különböző természettudományokban való alkalmazásaira, továbbá lehetővé tette a valószínűségszámításnak a matematika különböző fejezeteiben való alkalmazását is. Az alkalmazások során azonban felmerültek olyan problémák is, melyek vagy egyáltalán nem, vagy csak igen bonyolultan tárgyalhatók a KOLMOGOROV-féle axiomatikus felépítés kereteiben. Gondolunk itt elsősorban arra, hogy a fizikában (pl. a kvantummechanikában és másutt), továbbá a valószínűségszámítás elméleti problémáival kapcsolatban, pl. a MARKOV-láncok és a sztochasztikus folyamatok elméletében és a valószínűségszámításnak az integrálgeometriában, a számelméletben és egyebütt való alkalmazásainál gyakran előfordulnak olyan valószínűségeloszlások, amelyek „nem normálhatók"*, vagyis nem korlátos mértékek lépnek fel. Ilyen eloszlások a KOLMOGOROV-féle elméletben nem értelmezhetők: például nincsen értelme az egész n-dimenziós euklideszi térben egyenletes valószínűségeloszlásról beszélni; hasonlóképpen nincsen értelme annak a kijelentésnek, hogy „találomra választunk egy természetes egész számot úgy, hogy minden természetes egész szám egyenlő valószínűséggel jön tekintetbe." Első pillanatra úgy tűnik, hogy ezen nem is lehet változtatni, hiszen 1-nél nagyobb valószínűségeknek elvileg nincs értelme. Ez kétségtelenül így van, azonban itt arról van szó, hogy a szóbanforgó — valójában értelmetlen — nem-normálható eloszlások segítségével bizonyos *feltételes* valószínűségekre teljesen észszerű — a fizikai alkalmazásokban a tapasztalatokkal megegyező — értékeket nyernek. Ez az oka annak, hogy ilyen nem-létező eloszlásokat használnak és így felmerül annak a szükségessége, hogy a valószínűségszámítás elméletét oly mó-

* A fizikai szakirodalomban meghonosodott az a nem szerencsés szokás, hogy a valószínűség-eloszlások sűrűségfüggvényét nem normálják, vagyis csak egy konstans faktortól eltekintve határozzák meg. Amennyiben ennek a függvénynek az egész térre kiterjesztett integrálja véges, úgy ezzel elosztva a nem normált sűrűségfüggvényt, azt normálhatjuk, vagyis ilyen módon a tényleges sűrűségfüggvényt nyerjük. Ha azonban a „sűrűségfüggvény" integrálja nem véges, akkor „nem normálható" és így igy nem tekinthető a közönséges értelemben vett valószínűség-sűrűségfüggvénynek: az említett szokás miatt egyes szerzőknek ez néha elkerüli a figyelmét.

don fejlesszük tovább, hogy az említett számítások jogosságát (ahol az valóban fennáll) meg tudjuk alapozni.* Jelen dolgozat kísérletet jelent ebbe az irányba. Mindenekelőtt két elvi jellegű megjegyzést kívánunk tenni. Először is hangsúlyozni kívánjuk, hogy a jelen dolgozatban közölt elmélet felépítésénél nem KOLMOGOROV-tól eltérő úton járunk, hanem ugyanazon az úton igyekszünk egy szerény lépéssel tovább menni.** Axiomatikus elméletünk KOLMOGOROV elméletét mint a legfontosabb speciális esetet tartalmazza. Másik megjegyzésünk, hogy az új elmélet még igen távol áll attól, hogy befejezett, lezárt elmélet legyen; ennek ellenére, úgy hisszük, nem felesleges jelen formájában már ismertetni, mivel az új elmélet kidolgozása közben néhány olyan részleteredményre jutottunk, amelyek önmagukban — az új elmélettől elvonatkoztatva — is bizonyos érdeklődésre tarthatnak számot. Gondolunk itt például a valószínűségszámítás centrális határeloszlástételének bizonyos gyengén függő változósorozatokra való kiterjesztésére, amivel a 3. § foglalkozik, továbbá BOREL normális számokra vonatkozó tételének egy általánosítására, amelyet a 2. §-ban közlünk. További alkalmazási lehetőségeket a Markov-láncok elméletében és a sztochasztikus folyamatok elméletében a 4. §-ban említünk meg. Az 1. §-ban kifejtett elméletben az alapvető fogalom a feltételes valószínűség fogalma; ennek megfelelően módosítjuk a valószínűségszámítás KOLMOGOROV-féle axiomatikus elméletét. KOLMOGOROV elmélete, mint ismeretes, abból indul ki, hogy adva van egy tetszőleges H absztrakt halmaz, amelyet eseménytérnek nevezünk, továbbá adva van H részhalmazainak egy $\mathbf{T}$ BOREL-féle halmazteste, amely tartalmazza elemként magát a H halmazt, és amelynek elemeit eseményeknek nevezzük, végül pedig adva van egy, a $\mathbf{T}$ halmaztest elemeire értelmezett $\mathbf{P}(A)$ nem negatív és teljesen additív halmazfüggvény ($\mathbf{P}(A)$ az A esemény valószínűsége), amelyre $\mathbf{P}(\mathrm{H})=1$. A H halmazt a $\mathbf{T}$ halmaztesttel és a $\mathbf{P}(A)$ halmazfüggvénnyel együtt KOLMOGOROV-féle valószínűségi mezőnek nevezzük és röviden $[\mathrm{H}, \mathbf{T}, \mathbf{P}(A)]$-val jelöljük. KOLMOGOROV elméletében az A eseménynek a B eseményre vonatkozó $\mathbf{P}(A|B)$ feltételes valószínűsége a

$$\mathbf{P}(A|B)\,\mathbf{P}(B)=\mathbf{P}(AB) \tag{1}$$

összefüggéssel van *definiálva* ($\mathbf{P}(B)$ ill. $\mathbf{P}(AB)$ a B esemény valószínűségét,

* Többször előfordult a matematika történetében, hogy matematikailag nem szabatos eljárásoknak, melyek a fizikában beváltak, a jogosult voltát egy új matematikai elmélet kidolgozásával sikerült kimutatni. Ezt tette pl. L. SCHWARTZ a DIRAC-féle δ-függvénnyel.

** Jelen dolgozatban foglaltakat előadtam 1954. jún. 28-án a Prágában rendezett matematikai statisztikai konferencián is. A konferencián résztvett B. V. GNYEGYENKO professzor, aki volt szíves közölni velem, hogy néhány évvel ezelőtt A. N. KOLMOGOROV egy előadásában felvetette azt a gondolatot, hogy kívánatos volna a valószínűségszámításnak egy olyan axiomatikus elméletét kidolgozni, amelyben a feltételes valószínűség az alapvető fogalom. A. N. KOLMOGOROV azonban erre vonatkozó gondolatait nem publikálta. B. V. GNYEGYENKOnak ebből a közléséből utólag értesültem, hogy az általam kidolgozott és jelen dolgozatban foglalt axiomatikus elmélet nemcsak, hogy KOLMOGOROV elméletének logikus továbbfejlesztése (aminek előzőleg is tudatában voltam), hanem olyan úton jár, amelyet maga KOLMOGOROV jelölt ki.

illetve A és B együttes bekövetkezésének valószínűségét jelöli). Az (1) összefüggés a valószínűségszámítás KOLMOGOROV előtti elméletében *tétel*ként szerepelt. Ugyanez az összefüggés, kissé általánosított formában, az 1. §-ban kifejtett elméletben mint *axióma* szerepel.*

Az 1. §-ban közölt axiómarendszer a $\mathbf{P}(A|B)$ feltételes valószínűségre, tehát egy kétváltozós halmazfüggvényre vonatkozik. Természetszerűleg felmerül a kérdés, milyen feltételek mellett állítható elő ez a függvény a $\mathbf{P}(A|B) = \frac{\mathbf{P}^*(AB)}{\mathbf{P}^*(B)}$ alakban egy $\mathbf{P}^*(C)$ egyváltozós halmazfüggvény segítségével (AB az A és B halmazok közös részét jelenti). Erre a kérdésre válaszolnak — bizonyos feltételek mellett — a 13. és 14. tételek. Ezeken túlmenőleg a kérdést CSÁSZÁR ÁKOS messzemenően tisztázta és erre vonatkozólag szükséges és elégséges feltételeket adott meg.

Arra, hogy nem normálható valószínűségi mezők előfordulnak az alkalmazásokban és ezekre vonatkozólag a valószínűségszámítás egyes tételei átvihetők, az utóbbi időben több szerző (pl. DOOB [3] 80. o.) rámutatott, de nem vonta le ennek a konzekvenciáit.

Feltételes valószínűségekre vonatkozó axiómarendszert tudomásom szerint H. REICHENBACH [15] adott meg elsőnek; az ő axiómarendszere azonban egyrészt nem halmazelméleti, hanem logikai jellegű (eseményeknek nem halmazokat, hanem állításokat feleltet meg), másrészt nála a teljes additivitás nincs feltéve és elmélete erősen MISES hatása alatt áll. Ennek következtében a valószínűségszámítás szabatos matematikai megalapozására REICHENBACH elmélete nem alkalmas; ezt csak KOLMOGOROV elmélete képes megadni. Éppen ezért dolgozatunkban KOLMOGOROV elméletét követtük, és azt igyekeztünk egy újabb lépéssel továbbfejleszteni. Ugyanakkor REICHENBACH elméletében a feltételes valószínűség csak formálisan primér fogalom, ugyanis olyan eseteket, ahol közönséges valószínűségekről nem is lehet beszélni, REICHENBACH nem tárgyal. Ez vonatkozik tudomásunk szerint az összes többi szerzőre is, akik a feltételes valószínűség fogalmát axiomatikusan vezették be.

Az 1. §-ban közöljük az axiómákat, és azok közvetlen következményeivel foglalkozunk. A 2. § a nagy számok törvényeinek általánosításával foglalkozik; ez a fejezet fényt vet a feltételes valószínűség és a feltételes relatív gyakoriság kapcsolatára, és ezen keresztül az axiómáknak a valósághoz való viszonyára. A 3. § a centrális határeloszlástétel általánosításával, a 4. § az új elméletnek a MARKOV-féle láncok és a sztochasztikus folyamatok elméletében való alkalmazásával foglalkozik. Az elmélet további kidolgozására vissza kívánunk még térni.

* A matematika történetében nem ez az első eset, hogy tételek idővel axiómákká válnak; gondoljunk pl. a DESARGUES- ill. PASCAL-féle tételekre (a geometria HILBERT-féle axiomatikus felépítésében) vagy PTOLEMAEUS tételére (a metrikus terek elméletében).

CSÁSZÁR ÁKOS és LIPTÁK TAMÁS voltak szívesek a dolgozatot átnézni és több értékes megjegyzést tettek, amelyekért ez úton is köszönetet mondok.

Kívánatos volna a valószínűségszámítás olyan tankönyvének megírása, amely konzekvensen a jelen dolgozatban foglalt elméletre épül fel. Jelen dolgozat szerzője tervbevette, hogy „Valószínűségszámítás" c. tankönyvét [5] egy későbbi időpontban ilyen értelemben átdolgozza.

1. §. Az axiómarendszer és közvetlen következményei.

A következőkben ha A és B két halmaz, egyesítésüket $A+B$-vel, közös részüket AB-vel, az $A_1, A_2, \dots, A_n \dots$ halmazok egyesített halmazát $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$-nel jelöljük, az üres halmazt O jelöli, az A és B halmazok halmazelméleti különbségét, tehát A azon elemeinek halmazát, melyek B-nek nem elemei, $A-B$-vel jelöljük; azt, hogy az A halmaz részhalmaza B-nek, a következőképpen jelöljük: $A \subseteq B$. A következő definíciókból és axiómákból indulunk ki:

Legyen adva egy H *halmaz, melyet eseménytérnek nevezünk, továbbá* H *részhalmazainak egy* $\mathbf{T}_1$ BOREL-*féle halmazteste, melynek elemeit nagy betűkkel:* $A, B, C \dots$*-vel jelöljük, és eseményeknek nevezzük. A* $\mathrm{H}-A$ *halmazt* $\bar{A}$*-sal jelöljük; feltételezzük, hogy* $\mathrm{H} \in \mathbf{T}_1$; *legyen továbbá adva egy* $\mathbf{T}_2$ *halmazrendszer, amely* $\mathbf{T}_1$*-nek része, és tegyük fel, hogy értelmezve van egy* $\mathbf{P}(A|B)$ *kétváltozós halmazfüggvény, hacsak* $A \in \mathbf{T}_1$ és $B \in \mathbf{T}_2$. *A* $\mathbf{P}(A|B)$ *számot az* A *eseménynek a* B *eseményre, mint feltételre vonatkozó feltételes valószínűségének nevezzük.*

Tegyük fel, hogy teljesülnek a következő axiómák:

I. $\mathbf{P}(A|B) \geqq 0$ *és* $\mathbf{P}(B|B)=1$, *ha* $A \in \mathbf{T}_1$ *és* $B \in \mathbf{T}_2$.

II. $\mathbf{P}(A|B)$ *rögzített,* $\mathbf{T}_2$*-höz tartozó* B *mellett az* $A \in \mathbf{T}_1$ *halmaznak teljesen additív halmazfüggvénye, vagyis, ha* $A_k \in \mathbf{T}_1$ $(k=1,2,\dots)$ *és* $A_j A_k = 0$ *ha* $j \neq k$ $(j,k=1,2,\dots)$, *akkor*

$$\mathbf{P}\left(\sum_{k=1}^{\infty} A_k \middle| B\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_k|B).$$

III. $\mathbf{P}(A|BC)\mathbf{P}(B|C) = \mathbf{P}(AB|C)$, *ha* $A \in \mathbf{T}_1$, $B \in \mathbf{T}_1$, $C \in \mathbf{T}_2$ *és* $BC \in \mathbf{T}_2$.

Az I. II. *és* III. *axiómák teljesülése esetén a* H *eseményteret a* $\mathbf{T}_1$ BOREL-*halmaztesttel és a* $\mathbf{T}_2$ *halmazrendszerrel, valamint az azokon értelmezett* $\mathbf{P}(A|B)$ *kétváltozós halmazfüggvénnyel együtt feltételes valószínűségi mezőnek nevezzük és röviden* $[\mathrm{H}, \mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \mathbf{P}(A|B)]$*-vel jelöljük.*

Nyilvánvaló, hogy ha $\mathbf{P}^*(A)$ egy, a $\mathbf{T}_1$ BOREL-féle halmaztesten értelmezett teljesen additív és nemnegatív halmazfüggvény, melyre $\mathbf{P}^*(\mathrm{H})=1$, vagyis ha $[\mathrm{H}, \mathbf{T}_1, \mathbf{P}^*(A)]$ egy KOLMOGOROV-féle valószínűségi mező és $\mathbf{P}^*(A|B) = \dfrac{\mathbf{P}^*(AB)}{\mathbf{P}^*(B)}$, hacsak $\mathbf{P}^*(B)>0$, akkor $\mathbf{T}_2^*$-gal jelölve $\mathbf{T}_1$ azon B elemeinek halmazát, amelyekre $\mathbf{P}^*(B)>0$, egy $[\mathrm{H}, \mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2^*, \mathbf{P}^*(A|B)]$ feltételes valószínűségi mezőt nyerünk, amelyet a $[H, \mathbf{T}_1, \mathbf{P}^*(A)]$ KOLMOGOROV-féle valószínűségi mező által generált feltételes valószínűségi mezőnek nevezünk.

Néhány egyszerű tételt fogunk bebizonyítani. Mindig, amikor a tételekben bizonyos A ill. B halmazokra $\mathbf{P}(A|B)$ szerepel, feltesszük, hogy $A \in \mathbf{T}_1$ és $B \in \mathbf{T}_2$.

1. TÉTEL:

$$\mathbf{P}(A|B) = \mathbf{P}(AB|B).$$

BIZONYÍTÁS: Legyen III-ban $C = B$, akkor I-ből az 1. tétel állítása azonnal következik, figyelembe véve, hogy $BB = B$.

2. TÉTEL. *Ha* $B \subseteq B'$, *akkor* $\mathbf{P}(AB'|B) = \mathbf{P}(A|B)$.

BIZONYÍTÁS. Az 1. tétel kétszeri alkalmazásával kapjuk, hogy

$$\mathbf{P}(AB'|B) = \mathbf{P}(AB'B|B) = \mathbf{P}(AB|B) = \mathbf{P}(A|B).$$

3. TÉTEL:

$$\mathbf{P}(A|B) \leqq 1.$$

BIZONYÍTÁS: Az 1. tétel szerint $\mathbf{P}(A|B) = \mathbf{P}(AB|B)$; II. szerint $\mathbf{P}(AB|B) + \mathbf{P}(\bar{A}B|B) = \mathbf{P}(B|B)$, mivel $AB + \bar{A}B = B$ és $AB \cdot \bar{A}B = O$; tekintve, hogy I. szerint $\mathbf{P}(\bar{A}B|B) \geqq 0$ és $\mathbf{P}(B|B) = 1$, a 3. tétel állítása következik.

4. TÉTEL:

$$\mathbf{P}(O|B) = 0.$$

BIZONYÍTÁS: II. szerint $\mathbf{P}(A|B) = \mathbf{P}(A + O|B) = \mathbf{P}(A|B) + \mathbf{P}(O|B)$ és így $\mathbf{P}(O|B) = 0$.

5. TÉLEL: *Ha* $AB = O$, *akkor* $\mathbf{P}(A|B) = 0$.

BIZONYÍTÁS: Az 1. tétel szerint $\mathbf{P}(A|B) = \mathbf{P}(AB|B)$, tehát ha $AB = O$, akkor $\mathbf{P}(A|B) = \mathbf{P}(AB|B) = \mathbf{P}(O|B)$ és így a 4. tétel szerint $\mathbf{P}(A|B) = 0$.

6. TÉTEL: *Ha* $A \subseteq B \subseteq C$, *akkor*

$$\mathbf{P}(A|B) \geqq \mathbf{P}(A|C).$$

BIZONYÍTÁS: a III. axióma szerint

$$\mathbf{P}(A|BC)\mathbf{P}(B|C) = \mathbf{P}(AB|C).$$

Mivel itt $BC = B$ és $AB = A$, következik, hogy

$$\mathbf{P}(A|B)\mathbf{P}(B|C) = \mathbf{P}(A|C),$$

s így a 3. tétel szerint valóban

$$\mathbf{P}(A|B) \geqq \mathbf{P}(A|C).$$

KOROLLÁRIUM: tetszőleges $A \in \mathbf{T}_1$ esetén, hacsak $AC \subseteq B \subseteq C$,

$$\mathbf{P}(A|B) \geqq \mathbf{P}(A|C).$$

BIZONYÍTÁS: minthogy ekkor $AB = AC$, a fenti reláció az 1. tételen keresztül közvetlenül következik a 6. tételből.

7. TÉTEL:

$$\mathbf{P}(A|BC)\mathbf{P}(B|C) = \mathbf{P}(B|AC)\mathbf{P}(AC).$$

BIZONYÍTÁS: A 7. tétel közvetlenül következik III-ból, ha abban A és B szerepét felcseréljük és a kapott relációk baloldalait összevetjük (természetesen a 7. tétel csak abban az esetben érvényes, ha nemcsak C és BC, hanem AC is $\mathbf{T}_2$-höz tartozik).

8. TÉTEL: $\mathbf{P}(\mathrm{H}|B) = 1$.

BIZONYÍTÁS: $\mathbf{P}(\mathrm{H}|B) = \mathbf{P}(\mathrm{H}B|B) = \mathbf{P}(B|B) = 1$ az 1. tétel és I. következtében.

9. TÉTEL: *Ha* $A_1 \subseteq B_1 B_2$ *és* $A_2 \subseteq B_1 B_2$, *továbbá* $B_1 \in \mathbf{T}_2, B_2 \in \mathbf{T}_2$ *és* $B_1 B_2 \in \mathbf{T}_2$, *akkor**

$$\mathbf{P}(A_1|B_1)\mathbf{P}(A_2|B_2) = \mathbf{P}(A_1|B_2)\mathbf{P}(A_2|B_1). \tag{1}$$

BIZONYÍTÁS:

$$\mathbf{P}(A_1|B_1B_2)\mathbf{P}(B_1|B_2) = \mathbf{P}(A_1B_1|B_2) = \mathbf{P}(A_1|B_2) \tag{2}$$

és

$$\mathbf{P}(A_2|B_1B_2)\mathbf{P}(B_1|B_2) = \mathbf{P}(A_2B_1|B_2) = \mathbf{P}(A_2|B_2). \tag{3}$$

Szorítkozhatunk arra az esetre, amikor $\mathbf{P}(A_1|B_1B_2) > 0$ és $\mathbf{P}(A_2|B_1B_2) > 0$, továbbá $\mathbf{P}(B_1|B_2) > 0$ és $\mathbf{P}(B_2|B_1) > 0$; ellenkező esetben ugyanis (1) mindkét oldalán 0 áll. Ez esetben a (2) és (3) egyenlőséget elosztva egymással, nyerjük, hogy

$$\frac{\mathbf{P}(A_1|B_2)}{\mathbf{P}(A_2|B_2)} = \frac{\mathbf{P}(A_1|B_1B_2)}{\mathbf{P}(A_2|B_1B_2)}. \tag{4}$$

Hasonlóan következik, B_1 és B_2 szerepét felcserélve, hogy

$$\frac{\mathbf{P}(A_1|B_1)}{\mathbf{P}(A_2|B_1)} = \frac{\mathbf{P}(A_1|B_1B_2)}{\mathbf{P}(A_2|B_1B_2)}, \tag{5}$$

és így (4) és (5)-ből kapjuk, hogy

$$\frac{\mathbf{P}(A_1|B_2)}{\mathbf{P}(A_2|B_2)} = \frac{\mathbf{P}(A_1|B_1)}{\mathbf{P}(A_2|B_1)}.$$

Ezzel a 9. tételt bebizonyítottuk.

10. TÉTEL: *Ha a* $C \in \mathbf{T}_2$ *halmazt rögzítjük, akkor a* $\mathbf{T}_1$ *halmaztest elemei az azokon értelmezett* $\mathbf{P}^*(A) = \mathbf{P}(A|C)$ *halmazfüggvénnyel egy* KOLMOGOROV-*féle valószínűségi mezőt alkotnak. Ha* B $\mathbf{T}_1$*-nek olyan eleme, amelyre* $\mathbf{P}^*(B) > 0$, *továbbá* $BC \in \mathbf{T}_2$, *akkor ebben a valószínűségi mezőben értelmezve (a szokásos*

* Ha $\mathbf{P}(A_2|B_1)$ és $\mathbf{P}(A_2|B_2)$ pozitívek. (1)-et a következő áttekinthetőbb alakba írhatjuk:

$$\mathbf{P}(A_1|B_1):\mathbf{P}(A_2|B_1) = \mathbf{P}(A_1|B_2):\mathbf{P}(A_2|B_2) \tag{1*}$$

módon) a $\mathbf{P}^*(A|B)=\dfrac{\mathbf{P}^*(AB)}{\mathbf{P}^*(B)}$ *feltételes valószínűséget,* $\mathbf{P}^*(A|B)$ *megegyezik* $\mathbf{P}(A|BC)$*-vel.*

BIZONYÍTÁS: A tétel első állítása nyilvánvaló; hiszen $\mathbf{P}^*(A)$ nemnegatív és teljesen additív halmazfüggvény, amelyre a 9. tétel szerint $\mathbf{P}^*(\mathrm{H})=1$. A tétel második állítása III. egyenes következménye, hiszen III. szerint

$$\mathbf{P}^*(A|B)=\frac{\mathbf{P}^*(AB)}{\mathbf{P}^*(B)}=\frac{\mathbf{P}(AB|C)}{\mathbf{P}(B|C)}=\mathbf{P}(A|BC).$$

11. TÉTEL. *Ha* $\mathrm{H}\in\mathbf{T}_2$, *akkor a* $\mathbf{T}_1$ *halmaztest a* $\mathbf{P}^*(A)=\mathbf{P}(A|\mathrm{H})$ *halmazfüggvénnyel* KOLMOGOROV*-féle valószínűségi mezőt alkot és* $\mathbf{P}(A|B)=\dfrac{\mathbf{P}^*(AB)}{\mathbf{P}^*(B)}$, *hacsak* $\mathbf{P}^*(B)>0$.

MEGJEGYZÉS. Lehetséges, hogy $\mathbf{T}_2$ olyan B halmazokat is tartalmaz, amelyekre $\mathbf{P}^*(B)=0$, viszont $\mathbf{T}_2$ nem feltétlenül tartalmazza mindazokat a B halmazokat, amelyekre $\mathbf{P}^*(B)>0$, tehát $[\mathrm{H}, \mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \mathbf{P}(A|B)]$ nem szükségképpen azonos a $[\mathrm{H}, \mathbf{T}_1, \mathbf{P}^*(A)]$ KOLMOGOROV-féle valószínűségi mező által generált feltételes valószínűségi mezővel.

BIZONYÍTÁS: A 11. tétel a 10. tétel speciális esete.

Szükségünk lesz még a következő tételre, amely a teljes valószínűség tételének megfelelője.

12. TÉTEL: *Ha* $C\subseteq\sum_{k=1}^{\infty}B_k=B$ *és* $ACB_jB_k=O$, *ha* $j\neq k$ $(j,k=1,2,\ldots)$, *akkor*

$$\mathbf{P}(A|C)=\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{P}(A|B_kC)\mathbf{P}(B_k|C),$$

feltéve, hogy $C\in\mathbf{T}_2$ *és* $B_kC\in\mathbf{T}_2$ $(k=1,2,\ldots)$.

BIZONYÍTÁS: III. szerint

$$\mathbf{P}(A|B_kC)\mathbf{P}(B_k|C)=\mathbf{P}(AB_k|C),$$

és így

$$\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{P}(A|B_kC)\mathbf{P}(B_k|C)=\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{P}(AB_k|C)=\mathbf{P}\left(A\sum_{k=1}^{\infty}B_k\middle|C\right)=\mathbf{P}(ABC|C)=\mathbf{P}(A|C).$$

Most elégséges feltételt adunk arra, hogy a $\mathbf{P}(A|B)$ kétváltozós halmazfüggvény mikor állítható elő $\dfrac{\mathbf{Q}(AB)}{\mathbf{Q}(B)}$ alakban valamely egyváltozós $\mathbf{Q}(C)$ halmazfüggvény segítségével.

13. TÉTEL: *Tegyük fel, hogy* $\mathbf{T}_2$*-ben megadható egy olyan* $B_0, B_1, \ldots, B_n, \ldots$ *halmazsorozat, hogy*

1. $B_0\subseteq B_1\subseteq B_2\subseteq\cdots\subseteq B_n\subseteq\cdots$;
2. $\mathbf{P}(B_0|B_n)>0$ $(n=1,2,\ldots)$;
3. $\mathbf{T}_2$ *minden* B *eleméhez van olyan* B_n, *hogy* $B\subseteq B_n$ *és* $\mathbf{P}(B|B_n)>0$.

Az 1.—3. feltételek mellett létezik egy olyan nemnegatív és teljesen additív $\mathbf{Q}(C)$ halmazfüggvény, melynek értelmezési tartománya $\mathbf{T}_1$ mindazon C elemeiből áll, melyekhez van olyan B_n, amelyre $C \subseteq B_n$; ezenkívül $\mathbf{T}_2$ minden B elemére $\mathbf{Q}(B) > 0$ és a $\mathbf{P}(A|B)$ kétváltozós halmazfüggvény $\mathbf{Q}(C)$ segítségével kifejezhető a*

$$\mathbf{P}(A|B) = \frac{\mathbf{Q}(AB)}{\mathbf{Q}(B)}$$

alakban.

Bizonyítás: Jelöljük $\mathbf{T}_3$-mal azoknak a $C \in \mathbf{T}_1$ halmazoknak az összességét, amelyekhez van olyan B_n, hogy $C \subseteq B_n$. Nyilvánvaló, hogy $\mathbf{T}_2 \subseteq \mathbf{T}_3 \subseteq \mathbf{T}_1$. Legyen $A \in \mathbf{T}_3$ és legyen n egy olyan egész szám, amelyre $A \subseteq B_n$; definiáljuk $\mathbf{Q}(A)$ értékét a következőképpen:

$$\mathbf{Q}(A) = \frac{\mathbf{P}(A|B_n)}{\mathbf{P}(B_0|B_n)}. \tag{6}$$

Nyilvánvaló, hogy $\mathbf{Q}(A)$ definíciója nem függ n értékének választásától, ugyanis, ha $A \subseteq B_n \subseteq B_m$, akkor III.-ból következik, hogy

$$\mathbf{P}(A|B_nB_m)\mathbf{P}(B_n|B_m) = \mathbf{P}(AB_n|B_m)$$

és

$$\mathbf{P}(B_0|B_nB_m)\mathbf{P}(B_n|B_m) = \mathbf{P}(B_0B_n|B_m).$$

Figyelembe véve, hogy $AB_n = A$ és $B_0B_n = B_0$, továbbá, hogy $B_nB_m = B_n$, nyerjük, hogy

$$\mathbf{P}(A|B_n)\mathbf{P}(B_n|B_m) = \mathbf{P}(A|B_m) \tag{7}$$

és

$$\mathbf{P}(B_0|B_n)\mathbf{P}(B_n|B_m) = \mathbf{P}(B_0|B_m). \tag{8}$$

Mivel feltevésünk szerint $\mathbf{P}(B_0|B_n) > 0$, eloszthatjuk egymással a (7) és (8) egyenleteket, és így nyerjük, hogy

$$\frac{\mathbf{P}(A|B_n)}{\mathbf{P}(B_0|B_n)} = \frac{\mathbf{P}(A|B_m)}{\mathbf{P}(B_0|B_m)},$$

amit bizonyítani akartunk. A (6) alatt definiált $\mathbf{Q}(A)$ halmazfüggvényre valóban teljesül a $\mathbf{P}(A|B) = \dfrac{\mathbf{Q}(AB)}{\mathbf{Q}(B)}$ előállítás. Ugyanis (6)-ból, ha $B \subseteq B_n$ és $\mathbf{P}(B|B_n) > 0$, akkor $AB \subseteq B_n$ és így

$$\frac{\mathbf{Q}(AB)}{\mathbf{Q}(B)} = \frac{\mathbf{P}(AB|B_n)}{\mathbf{P}(B_0|B_n)} \cdot \frac{\mathbf{P}(B_0|B_n)}{\mathbf{P}(B|B_n)} = \frac{\mathbf{P}(AB|B_n)}{\mathbf{P}(B|B_n)},$$

* Itt és a következőkben, ha egy $\mathbf{Q}(A)$ halmazfüggvényről azt mondjuk, hogy teljesen additív ezen azt értjük, hogy ha $A_iA_j = O$, ha $i \neq j$ és az A_i halmazokra valamint a $\sum_{i=1}^{\infty} A_i = A$ halmazra $\mathbf{Q}(A)$ értelmezve van, akkor $\sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{Q}(A_i) = \mathbf{Q}(A)$.

s ebből a III. axióma és a $B \subseteq B_n$ reláció alkalmazásával kapjuk a kívánt előállítást. Könnyen beláthatjuk azt is, hogy $\mathbf{Q}(A)$ teljesen additív halmazfüggvény és hogy $\mathbf{Q}(B) > 0$, ha $B \in \mathbf{T}_2$. Ezzel a 13. tétel be van bizonyítva.

Legyen $\sum_{n=0}^{\infty} B_n = \mathrm{H}^*$. A 13. tétel feltevéseiből következik, hogy minden $\mathbf{T}_2$-höz tartozó B halmazra $B \subseteq \mathrm{H}^*$, ennélfogva a 2. tétel szerint

$$\mathbf{P}(A|B) = \mathbf{P}(A\mathrm{H}^*|B) = \mathbf{P}(A\mathrm{H}^*|B\mathrm{H}^*).$$

Ezért, ha H^* nem volna azonos H-val, tekinthetnénk azt, az adott feltételes valószínűségi mezővel izomorf mezőt, amelyben A-nak $A\mathrm{H}^*$ és B-nek $B\mathrm{H}^*$ felel meg, és amelyben már teljesül, hogy $\sum_{n=0}^{\infty} B_n$ a teljes eseménytérrel azonos. Ezért nem jelent megszorítást, ha feltesszük, hogy $\mathrm{H}^* = \mathrm{H}$. Ez esetben $\mathbf{Q}(A)$ a $\mathbf{T}_3$ halmazrendszerben értelmezett teljesen additív és σ-véges mérték, hiszen H befedhető a $B_n\bar{B}_{n-1}$ halmazokkal, és $\mathbf{Q}(B_n\bar{B}_{n-1})$ véges. $\mathbf{T}_3$ nyilvánvalóan halmaztest, azonban nem szükségképpen BOREL-féle halmaztest. Legyen $\mathbf{T}_4$ a $\mathbf{T}_3$ halmaztest legszűkebb BOREL-féle bővítése. Egy ismert tétel szerint (l. [2] III. §. 13. 1. tétel) $\mathbf{Q}(A)$ értelmezése kiterjeszthető $\mathbf{T}_4$-re oly módon, hogy teljesen additív, nemnegatív és σ-véges maradjon. Az így kiterjesztett halmazfüggvényt továbbra is $\mathbf{Q}(A)$-val jelöljük. Mivel $\mathbf{T}_4$ tartalmazza a $\sum_{n=0}^{\infty} B_n = \mathrm{H}$ halmazt is, két eset lehetséges: vagy $\mathbf{Q}(\mathrm{H}) < +\infty$, vagy $\mathbf{Q}(\mathrm{H}) = +\infty$. Mindkét esetben $\mathbf{Q}(\mathrm{H}) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{Q}(B_n)$. Mivel $\mathbf{Q}(B_n) \leq \mathbf{Q}(B_{n+1})$, tehát $\mathbf{Q}(\mathrm{H}) < \infty$ vagy $\mathbf{Q}(\mathrm{H}) = \infty$ aszerint, hogy $\mathbf{Q}(B_n)$ korlátos, vagy sem. Mivel továbbá $\mathbf{Q}(B_n) = \frac{\mathbf{P}(B_n|B_n)}{\mathbf{P}(B_0|B_n)} = \frac{1}{\mathbf{P}(B_0|B_n)}$, tehát $\mathbf{Q}(B_n)$ korlátos vagy nem, aszerint, hogy a $\mathbf{P}(B_0|B_n)$ monoton csökkenő sorozatnak a határértéke pozitív, vagy 0. Könnyen belátható továbbá, hogy $\mathbf{T}_4$ azonos $\mathbf{T}_1$-gyel. Ugyanis $\mathbf{T}_3 \subseteq \mathbf{T}_1$ és $\mathbf{T}_1$ BOREL-féle halmaztest, tehát mindenesetre $\mathbf{T}_4 \subseteq \mathbf{T}_1$. Másrészt legyen A egy tetszőleges eleme $\mathbf{T}_1$-nek, akkor

$$A = A\mathrm{H} = A\sum_{n=0}^{\infty} B_n = \sum_{n=0}^{\infty} AB_n\bar{B}_{n-1},$$

(itt $B_{-1} = O$ per def.) és így, mivel az $AB_n\bar{B}_{n-1} = (A\bar{B}_{n-1})B_n$ halmazok mind $\mathbf{T}_3$-hoz tartoznak, az A halmaz $\mathbf{T}_4$-hez tartozik; tehát $\mathbf{T}_1 \subseteq \mathbf{T}_4$, vagyis $\mathbf{T}_1 \equiv \mathbf{T}_4$. Jelentse $\mathbf{T}_2^*$ azoknak a $\mathbf{T}_1$-hez tartozó B halmazoknak az összességét, amelyekre $\mathbf{Q}(B) > 0$. Mivel a 13. tétel szerint $\mathbf{T}_2$ minden B elemére $\mathbf{Q}(B) > 0$, tehát $\mathbf{T}_2 \subseteq \mathbf{T}_2^*$. Nyilvánvaló, hogy $\mathbf{P}(A|B)$ értelmezése kiterjeszthető bármely, a $\mathbf{T}_2^*$ rendszerhez tartozó B halmazra is a következőképpen: ha $B \in \mathbf{T}_2^*$, legyen $\mathbf{P}(A|B) = \frac{\mathbf{Q}(AB)}{\mathbf{Q}(B)}$. Vizsgáljuk most azt az esetet, amikor $\mathbf{Q}(\mathrm{H}) < \infty$; bevezetve a $\mathbf{P}^*(A) = \frac{\mathbf{Q}(A)}{\mathbf{Q}(\mathrm{H})}$ jelölést, nyilvánvalóan fennáll a következő összefüggés:

$$\mathbf{P}(A|B) = \frac{\mathbf{P}^*(AB)}{\mathbf{P}^*(B)},$$

ahol $\mathbf{P}^*(A)$ a $\mathbf{T}_4 \equiv \mathbf{T}_1$ BOREL-féle halmaztesten értelmezett mérték, melyre $\mathbf{P}^*(\mathrm{H}) = 1$. Ezzel bebizonyítottuk a következő tételt:

14. TÉTEL. *Ha fennállnak a 13. tétel feltételei és ezen kívül teljesülnek a következő feltevések:*

4) $$\sum_{n=0}^{\infty} B_n = \mathrm{H},$$

5) $$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(B_0|B_n) > 0,$$

akkor megadható olyan, a $\mathbf{T}_1$-en értelmezett $\mathbf{P}^*(A)$ mérték, amelyre $\mathbf{P}^*(\mathrm{H}) = 1$, és amelynek segítségével $\mathbf{P}(A|B)$ a következőképpen állítható elő:

$$\mathbf{P}(A|B) = \frac{\mathbf{P}^*(AB)}{\mathbf{P}^*(B)}.$$

Ugyanezen összefüggés segítségével, $\mathbf{T}_2^*$-gal jelölve azon halmazok összességét, amelyekre $\mathbf{P}^*(B) > 0$, $\mathbf{P}(A|B)$ értelmezése kiterjeszthető arra az esetre, amikor $B \in \mathbf{T}_2^*$. Az ilyenmódon nyert $[\mathrm{H}, \mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2^*, \mathbf{P}(A|B)]$ feltételes valószínűségi mező azonos a $[\mathrm{H}, \mathbf{T}_1, \mathbf{P}^*(A)]$ KOLMOGOROV-féle valószínűségi mező által generált feltételes valószínűségi mezővel.

Jelentse most a a H halmaz egy tetszőleges elemét és legyen $\xi = \xi(a)$ egy a H halmazon értelmezett valós értékű függvény, amely $\mathbf{T}_1$-re vonatkozólag mérhető, vagyis amelyre azon a elemek A_x halmaza, amelyekre $\xi(a) < x$, ahol x egy tetszőleges valós szám, $\mathbf{T}_1$-hez tartozik. Egy ilyen $\xi = \xi(a)$ függvényt valószínűségi változónak nevezünk. Nyilván $\mathbf{T}_1$-hez tartoznak mindazon $A_{\mathcal{B}}$ halmazok is, amelyek H azon a elemeiből állnak, amelyekre $\xi(a) \in \mathcal{B}$, ahol $\mathcal{B}$ egy tetszőleges BOREL-halmaz a számegyenesen. Nyilvánvaló, hogy $\xi(a)$ egy feltételes valószínűségi mezőt indukál a számegyenesen: ha $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ két BOREL-halmaz a számegyenesen és $\mathcal{A}$-nak (ill. $\mathcal{B}$-nek) $\xi(a)$-ra vonatkozó „őksépe", vagyis azon a elemek halmaza, melyekre $\xi(a) \in \mathcal{A}$ (ill. $\xi(a) \in \mathcal{B}$) $\mathbf{T}_1$-hez (illetve $\mathbf{T}_2$-höz) tartozik, akkor a

$$\mathcal{P}(\mathcal{A}|\mathcal{B}) = \mathbf{P}(A|B)$$

összefüggéssel definiált halmazfüggvény (ahol A a $\xi(a) \in \mathcal{A}$ és B a $\xi(a) \in \mathcal{B}$ feltételeknek eleget tevő a elemek halmaza), eleget tesz az I.—III. axiómáknak. Ha $\mathcal{B}$ olyan halmaz, amelynek ősképe $\mathbf{T}_2$-höz tartozik és $\mathcal{A} = \mathcal{A}_x$ a $(-\infty, x)$ intervallum, úgy a $\mathcal{P}(\mathcal{A}_x|\mathcal{B}) = F(x|B)$ függvényt a ξ valószínűségi változó feltételes eloszlásfüggvényének nevezzük, a $\mathcal{P}(\mathcal{A}|\mathcal{B})$ kétváltozós halmazfüggvényt pedig ξ feltételes valószínűségeloszlás-rendszerének. Hasonlóképpen értelmezhető a H téren egy n-dimenziós $\vec{\xi} = (\xi_1(a), \xi_2(a), \ldots, \xi_n(a))$ valószínűségi vektorváltozó, amelyről tehát azt tesszük fel, hogy a H térnek mérhető leképezését létesíti az $\mathcal{R}_n$ n-dimenziós euklideszi térre. Ha H maga az $\mathcal{R}_n$

n-dimenziós euklideszi tér és $\mathbf{T}_1$ tartalmazza $\mathfrak{R}_n$ összes BOREL-halmazait, úgy a $\xi(a)=a$ függvény, amely az $\mathfrak{R}_n$ teret azonosan képezi le önmagára, szintén valószínűségi változó és így $\mathbf{P}(A|B)$ nem más, mint a $\xi(a)=a$ változó feltételes valószínűségeloszlás rendszere. Ennélfogva ebben az esetben feltételes valószínűségi mező helyett feltételes valószínűségeloszlás rendszerről fogunk beszélni. Ezt a kifejezést általánosabb értelemben is használni fogjuk.

Nyilvánvaló, hogy két valószínűségi változóra vonatkozólag értelmezhető a *feltételes függetlenség* fogalma: a $\xi=\xi(a)$ és $\eta=\eta(a)$ valószínűségi változókat a C feltételre ($C\in\mathbf{T}_2$) vonatkozólag függetlennek nevezzük, ha $\mathbf{P}(A_xB_y|C)=\mathbf{P}(A_x|C)\mathbf{P}(B_y|C)$, x és y minden valós értékére, ahol A_x jelenti a $\xi(a)<x$ és B_y az $\eta(a)<y$ feltételekkel definiált halmazt. Hasonlóképpen értelmezhető több valószínűségi változó függetlensége is.

A $\xi(a)$ valószínűségi változó B-re ($B\in\mathbf{T}_2$) vonatkozó *feltételes várható értékét* a következőképpen definiáljuk:

$$\mathbf{M}(\xi|B)=\int_H \xi(a)d\mathbf{P}(A|B) \tag{9}$$

ahol (9) jobboldalán a rögzített B mellett vett $\mathbf{P}(A|B)$ mértékre vonatkozó LEBESGUE-integrál áll. Hasonlóképpen értelmezhető a *feltételes szórás*, a *feltételes magasabb momentumok*, ξ *feltételes eloszlásának karakterisztikus függvénye*, stb.

Vannak a valószínűségszámításnak olyan tételei, amelyek érvényesek abban az esetben is, ha $\mathbf{Q}=\mathbf{Q}(A)$ egy nem normálható mérték. Ha ugyanis $\mathbf{Q}(A)$ egy tetszőleges mérték, akkor be lehet vezetni az

$$\mathfrak{J}(\xi|H)=\int_H \xi(a)d\mathbf{Q}$$

integrált és $\mathfrak{J}(\xi|H)$-ra hasonló tételek érvényesek, mint a várható értékre (l. pl. [3] 80. o.). Ezzel a fogalommal mi itt nem foglalkozunk.

Vizsgáljunk most meg néhány példát:

1. Legyen H az $\mathfrak{R}_n$ euklideszi tér, H pontjait jelöljük x-szel, ($x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$); legyen $\mathbf{T}_1$ a $H=\mathfrak{R}_n$ tér mérhető részhalmazainak összessége, legyen $f(x)$ egy mérhető, nemnegatív függvény $H=\mathfrak{R}_n$-ben, amely $\mathfrak{R}_n$ minden korlátos résztartományában integrálható; jelentse $\mathbf{T}_2$ az $\mathfrak{R}_n$ azon mérhető $\mathfrak{B}$ részhalmazainak összességét, amelyekre $\int_{\mathfrak{B}} f(x)\,d(x)$ pozitív és véges, és legyen

$$\mathfrak{P}(\mathfrak{A}|\mathfrak{B})=\frac{\int_{\mathfrak{A}\mathfrak{B}} f(x)\,dx}{\int_{\mathfrak{B}} f(x)\,dx},$$

akkor $[\mathfrak{R}_n,\mathbf{T}_1,\mathbf{T}_2,\mathfrak{P}(\mathfrak{A},\mathfrak{B})]$ egy feltételes valószínűségi mező. Ha $\int_{\mathfrak{R}_n} f(x)\,dx<\infty$, akkor egy KOLMOGOROV-féle valószínűségi mező által generált feltételes valószínűségi mezőt nyerünk, ezzel szemben, ha $\int\limits_{\mathcal{R}_n} f(x)dx = \infty$, akkor nem. Speciálisan, ha $f(x) \equiv 1$, akkor a kapott feltételes valószínűségeloszlás rendszert az egész $\mathfrak{R}_n$ térben egyenletes feltételes eloszlásrendszernek nevezzük; ez esetben

$$\mathfrak{P}(\mathfrak{A} \mid \mathfrak{B}) = \frac{m(\mathfrak{A}\mathfrak{B})}{m(\mathfrak{B})},$$

ahol $m(C)$ a C halmaz LEBESGUE-féle mértékét jelöli.

2. Legyen H a természetes számok halmaza, $\mathbf{T}_1$ H összes részhalmazainak összessége, $p_1, p_2, \ldots, p_k, \ldots$ egy tetszőleges, nemnegatív számokból álló számsorozat, továbbá $\mathbf{T}_2$ álljon H összes olyan B részhalmazaiból, amelyekre $\sum\limits_{k \in B} p_k$ pozitív, és véges, és legyen

$$\mathbf{P}(A \mid B) = \frac{\sum\limits_{k \in AB} p_k}{\sum\limits_{k \in B} p_k},$$

akkor $[\mathrm{H}, \mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \mathbf{P}(A \mid B)]$ egy feltételes valószínűségi mező. Ha $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k$ konvergens, úgy egy KOLMOGOROV-féle valószínűségi mező által generált feltételes valószínűségi mezőt nyertünk, ha $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k$ divergens, akkor viszont nem. Ha speciálisan $p_1 = p_2 = \cdots = p_k = \cdots = 1$, akkor

$$\mathbf{P}(A \mid B) = \frac{\nu(AB)}{\nu(B)},$$

ahol $\nu(C)$ jelenti a C halmaz elemeinek számát. Ha most a $\xi = \xi(a)$ valószínűségi változót úgy értelmezzük, hogy $\xi(a) = a$ $(a = 1, 2, \ldots)$, úgy ξ jellemezhető a következőképpen: ξ egy találomra választott természetes egész szám, amely egyenlő valószínűséggel vehet fel minden természetes egész értéket. Pontosabban ezen azt kell érteni, hogy akárhogyan választjuk is H-nak egy véges, nem üres B részhalmazát, azon feltevés mellett, hogy $\xi \in B$, ξ egyforma valószínűséggel veszi fel B összes elemeit.

3. Legyen H az $\mathfrak{R}_n$ n-dimenziós euklideszi tér, $\mathfrak{T}_1$ legyen $\mathfrak{R}_n$ BOREL-halmazainak összessége, legyen továbbá $\mathfrak{T}_2^{(k)}$ $\mathfrak{R}_n$ azon $\mathfrak{B} \in \mathfrak{T}_1$ részhalmazainak összessége, amelyeknek $m_k(\mathfrak{B})$ k-dimenziós mértéke* pozitív és véges, és legyen $\mathfrak{T}_2 = \sum\limits_{k=1}^{n} \mathfrak{T}_2^{(k)}$. Nyilvánvaló, hogy a $\mathfrak{T}_2^{(j)}$ és $\mathfrak{T}_2^{(k)}$ halmazrendszernek nincs közös elemük, ha $1 \leqq j < k \leqq n$. Ha mármost $\mathfrak{B} \in \mathfrak{T}_2$, akkor tehát van egy olyan egyértelműen meghatározott k pozitív egész szám, $(1 \leqq k \leqq n)$, hogy $\mathfrak{B} \in \mathfrak{T}_2^{(k)}$, ez esetben legyen

$$\mathfrak{P}(\mathfrak{A} \mid \mathfrak{B}) = \frac{m_k(\mathfrak{A}\mathfrak{B})}{m_k \mathfrak{B}}.$$

* Lásd pl. [18] 106. o.

Könnyen belátható, hogy $[\mathfrak{R}_n, \mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2, \mathfrak{P}(\mathfrak{A}|\mathfrak{B})]$ feltételes valószínűségi mező, vagyis hogy az I.—III. axiómák teljesülnek.

Legyen például $[H, \mathbf{T}, \mathbf{P}(A)]$ egy KOLMOGOROV-féle valószínűségi mező és legyenek $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ valószínűségi változók, amelyek együttes eloszlásának sűrűségfüggvénye $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, az egész $\mathfrak{R}_n$ térben pozitív és folytonos. Az ezen változók $\mathfrak{R}_n$-beli valószínűségeloszlása által generált feltételes valószínűségeloszlás kiterjeszthető oly módon, hogy létezzék a $\mathfrak{P}(\mathfrak{A}|\mathfrak{B})$ feltételes valószínűség, ha $\mathfrak{B}$ például a $\xi_{i_1} = x_1, \xi_{i_2} = x_2, \ldots, \xi_{i_k} = x_k$ $(k < n)$ feltétellel definiált $(n-k)$-dimenziós halmaz, $\mathfrak{A}$ pedig egy tetszőleges BOREL-halmaz $\mathfrak{R}_n$-ben. Ez a példa mutatja, hogy előfordulhat, hogy H $\mathbf{T}_2$-höz tartozik és a $[\mathrm{H}, \mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \mathbf{P}(A|B)]$ feltételes valószínűségi mező mégsem azonos a $[\mathrm{H}, \mathbf{T}_1, \mathbf{P}(A|\mathrm{H})]$ KOLMOGOROV-féle valószínűségi mező által generált feltételes valószínűségi mezővel, mivel $\mathbf{T}_2$ olyan B halmazokat is tartalmaz, amelyekre $\mathbf{P}(B|\mathrm{H}) = 0$. Általában igaz a következő tétel:

15. TÉTEL: *Legyen* H *egy tetszőleges halmaz,* $\mathbf{T}_1$ *legyen* H *részhalmazainak egy* BOREL-*féle halmazteste,* $\mathbf{T}_2$ *legyen részhalmaza* $\mathbf{T}_1$-*nek, továbbá teljesüljön az alábbi feltétel:*

1. $\mathbf{T}_1$ *felbontható*

$$\mathbf{T}_1 = \sum_{\gamma \in \Gamma} \mathbf{T}_1^{(\gamma)}$$

alakban elemidegen osztályokra úgy, hogy a γ *indexek* Γ *halmaza rendezett halmaz és minden* $\gamma \in \Gamma$ *indexhez tartozik egy* $\mathbf{T}_1$-*en értelmezett* $\mu^{(\gamma)}(A)$ *mérték, amely a* $+\infty$ *értéket is felveheti, úgy, hogy ha* $B \in \mathbf{T}_2^{(\gamma)} \equiv \mathbf{T}_1^{(\gamma)}\mathbf{T}_2$, *akkor* $0 < \mu^{(\gamma)}(B) < +\infty$.

2. *ha a* Γ *halmaz rendezési relációja szerint* $\alpha < \beta$ *és* $\mu^{(\alpha)}(A) < +\infty$, *akkor* $\mu^{(\beta)}(A) = 0$.

Ezen feltételek mellett a

$$\mathbf{P}(A|B) = \frac{\mu^{(\gamma)}(AB)}{\mu^{(\gamma)}(B)} \quad \textit{ha} \quad B \in \mathbf{T}_2^{(\gamma)}$$

relációval értelmezett halmazfüggvény feltételes valószínűségi mezőt alkot a H *halmaz* $\mathbf{T}_1$, *illetve* $\mathbf{T}_2$ *részhalmaz-rendszerein.*

BIZONYÍTÁS: Az I. és II. axióma nyilván teljesül. Vizsgáljuk meg a III. axiómát. Ha $C \in \mathbf{T}_1^{(\alpha)}$ és $BC \in \mathbf{T}_1^{(\beta)}$, két esetet kell megkülönböztetnünk. Az első esetben, mikor $\alpha = \beta$, III. triviálisan teljesül. Ha viszont $\alpha \neq \beta$, csak $\beta < \alpha$ jöhet számításba; ugyanis nyilván $\mu^{(\alpha)}(BC) \leqq \mu^{(\alpha)}(C) < +\infty$ az α definíciója szerint s így abban az esetben, ha $\alpha < \beta$ lenne, a 2. feltétel miatt $\mu^{(\beta)}(BC) = 0$ és így $BC \overline{\in} \mathbf{T}^{(\beta)}$ lenne. Elegendő tehát csak azzal az esettel foglalkozni, mikor $\beta < \alpha$. Tekintve, hogy $BC \in \mathbf{T}_2^{(\beta)}$, $\mu^{(\beta)}(BC) < +\infty$ és így $\beta < \alpha$ miatt $\mu^{(\alpha)}(BC) = 0$ és ezért $\mathbf{P}(B|C) = \dfrac{\mu^{(\alpha)}(BC)}{\mu^{(\alpha)}(C)} = 0$; továbbá $\mathbf{P}(AB|C) = 0$ is fennáll, mivel

$$\mathbf{P}(AB|C)=\frac{\mu^{(\alpha)}(ABC)}{\mu^{(\alpha)}(C)}\leqq\frac{\mu^{(\alpha)}(BC)}{\mu^{(\alpha)}(C)}=0.$$

A $\beta<\alpha$ esetben tehát a III. axiómában szereplő egyenlőség mindkét oldalán 0 áll és így III. ebben az esetben is teljesül.

A 15. tételre E. MARCZEWSKI volt szíves a figyelmemet felhívni. CSÁSZÁR ÁKOS megtalálta annak szükséges és elégséges feltételét, hogy egy feltételes valószínűségi mező a 15. tételben leírt módon legyen előállítható egy $\mu^{(\alpha)}(B)$ mértékrendszer segítségével; ez a feltétel a következő: ha n tetszőleges természetes egész szám, $A_i\in T_1, B_i\in T_2$ és $A_i\subseteq B_iB_{i+1}$ $(i=1,2,\ldots,n;\ B_{n+1}=B_1$ per def.), akkor teljesül a

$$\prod_{i=1}^{n}\mathbf{P}(A_i|B_i)=\prod_{i=1}^{n}\mathbf{P}(A_i|B_{i+1}) \tag{10}$$

azonosság. Ha $n=2$, ez az összefüggés következik a III. axiómából, ha $B_1B_2\in\mathbf{T}_2$ (lásd a 9. tételt). Egyébként a (10) feltétel erősebb megszorítást jelent a $\mathbf{P}(A|B)$ halmazfüggvényre vonatkozólag, mint a III. axióma.

CSÁSZÁR ÁKOS azt is bebizonyította, hogy $\mathbf{P}(A|B)$ akkor és csak akkor állítható elő $\mathbf{P}(A|B)=\dfrac{\mathbf{Q}(AB)}{\mathbf{Q}(B)}$ alakban, egyetlen $\mathbf{Q}(A)$ mérték segítségével, ha (10)-en kívül teljesül még a következő (C) feltétel is:

(C) Ha $B_1\in\mathbf{T}_2$ és $B_2\in\mathbf{T}_2$ akkor a $\mathbf{P}(B_1B_2|B_1)$ és $\mathbf{P}(B_1B_2|B_2)$ számok közül vagy mind a kettő 0, vagy egyik sem.

Megjegyzendő, hogy ha $\mathbf{P}(A|B)$ előállítható $\mathbf{P}(A|B)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\mathbf{Q}_n(AB)}{\mathbf{Q}_n(B)}$ alakban, ahol $\mathbf{Q}_n(A)$ A-nak nemnegatív és teljesen additív halmazfüggvénye, akkor a (10) összefüggés nyilvánvalóan fennáll. Erre a megjegyzésre a 4. §-ban lesz szükségünk.

Foglalkozzunk most feltételes valószínűségi mezők szorzásával. Legyen adva feltételes valószínűségi mezőknek egy $[\mathrm{H}^{(k)},\mathbf{T}_1^{(k)},\mathbf{T}_2^{(k)},\mathbf{P}^{(k)}(A^{(k)}|B^{(k)})]$ véges vagy végtelen sorozata $(k=1,2,\ldots)$. Véges sok feltételes valószínűségi mező szorzatát a következőképpen definiáljuk: legyen $\mathrm{H}=\mathrm{H}^{(1)}*\mathrm{H}^{(2)}*\ldots*\mathrm{H}^{(N)}$ a $\mathrm{H}^{(1)},\mathrm{H}^{(2)},\ldots,\mathrm{H}^{(N)}$ eseményterek DESCARTES-szorzata, vagyis H álljon az $(a^{(1)},a^{(2)},\ldots,a^{(N)})$ elem-N-esekből, ahol $a^{(k)}\in H^{(k)}$. Jelentse $\mathbf{T}_2$ a H tér azon részhalmazainak összességét, amelyek $B=B^{(1)}*B^{(2)}*\ldots*B^{(N)}$ alakban állíthatók elő, ahol $B^{(k)}\in\mathbf{T}_2^{(k)}$ $(k=1,2,\ldots,N)$ és $B^{(1)}*B^{(2)}*\ldots*B^{(N)}$ H azon $(a^{(1)},a^{(2)},\ldots,a^{(N)})$ elemeinek halmazát jelenti, amelyekre $a^{(k)}\in B^{(k)}$ $(k=1,2,\ldots,N)$. A rövidség kedvéért jelöljük $\mathbf{T}_2$-t a következőképpen: $\mathbf{T}_2=\mathbf{T}_2^{(1)}*\mathbf{T}_2^{(2)}*\ldots*\mathbf{T}_2^{(N)}$. Hasonlóképpen legyen $\mathbf{T}_1=\mathbf{T}_1^{(1)}*\mathbf{T}_1^{(2)}*\ldots*\mathbf{T}_1^{(N)}$. Ha $A\in\mathbf{T}_1$ és $B\in\mathbf{T}_2$, akkor tehát $A=A^{(1)}*A^{(2)}*\ldots*A^{(N)}$ és $B=B^{(1)}*B^{(2)}\ldots*B^{(N)}$ alakú, ahol $A^{(k)}\in\mathbf{T}_1^{(k)}$ és $B^{(k)}\in\mathbf{T}_2^{(k)}\subseteq\mathbf{T}_1^{(k)}$. Definiáljuk a $\mathbf{P}(A|B)$ feltételes valószínűséget a következőképpen:

$$\mathbf{P}(A|B)=\prod_{k=1}^{N}\mathbf{P}^{(k)}(A^{(k)}|B^{(k)})\quad\text{ha}\quad A\in\mathbf{T}_1\ \text{és}\ B\in\mathbf{T}_2$$

és terjesszük ki a szokásos módon a $\mathbf{P}(A|B)$ mérték definícióját minden rögzített B mellett a $\mathbf{T}_1$ halmazrendszer $\mathbf{T}_1^*$ legszűkebb BOREL-féle bővitésére. Más szóval adott $B^{(1)}, B^{(2)}, \ldots, B^{(N)}$ mellett képezzük a $[\mathrm{H}^{(k)}, \mathbf{T}_1^{(k)}, \mathbf{P}^{(k)}(A^{(k)}|B^{(k)})]$ KOLMOGOROV-féle valószínűségi mezők szorzatát és ezt a műveletet $B^{(1)}, B^{(2)}, \ldots, B^{(N)}$ összes lehetséges választása mellett végezzük el.

Ugyanígy járunk el végtelen sok feltételes valószínűségi mező szorzásánál: a $[\mathrm{H}^{(k)}, \mathbf{T}_1^{(k)}, \mathbf{T}_2^{(k)}, \mathbf{P}^{(k)}(A^{(k)}|B^{(k)})]$ feltételes valószínűségi mezők szorzatát $(k=1, 2, \ldots)$ úgy definiáljuk, hogy képezzük a $\mathrm{H} = \mathrm{H}^{(1)} * \mathrm{H}^{(2)} * \ldots * \mathrm{H}^{(N)} * \ldots$ szorzat-teret és választunk egy $B = B^{(1)} * B^{(2)} * \ldots * B^{(N)} * \ldots$, halmazt; a $\mathbf{P}(A|B)$ feltételes valószínűséget először a H tér ú. n. „hengerhalmazaira" definiáljuk, vagyis az $A = A^{(1)} * A^{(2)} * \ldots * A^{(N)} * \mathrm{H}^{(N+1)} * \mathrm{H}^{(N+2)} * \ldots$ alakú halmazokra, mégpedig a következőképpen: $\mathbf{P}(A|B) = \prod_{k=1}^{N} \mathbf{P}^{(k)}(A^{(k)}|B^{(k)})$. Ezután kiterjesztjük $\mathbf{P}(A|B)$ értelmezését az összes A hengerhalmazok halmazának $\mathbf{T}_1^*$ BOREL-féle bővítésére, és ezt az összes számbajövő $B = B^{(1)} * B^{(2)} * \ldots$ halmazokra elvégezzük. Nyilvánvaló, hogy az így definiált $\mathbf{P}(A|B)$ függvény eleget tesz az I. és II. axiómáknak, csak a III. axióma teljesülését kell külön megvizsgálnunk.

Jelentse $\mathbf{T}_2$ az összes $B^{(1)} * B^{(2)} * \ldots * B^{(k)} * \ldots$ alakú halmazok összeségét, ahol $B^{(k)} \in \mathbf{T}_2^{(k)}$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Ha $C \in \mathbf{T}_2$ és $BC \in \mathbf{T}_2$, akkor tehát

$$C = C^{(1)} * C^{(2)} * \ldots * C^{(k)} * \ldots$$

és

$$BC = (BC)^{(1)} * (BC)^{(2)} * \ldots * (BC)^{(k)} * \ldots$$

alakú, ahol $C^{(k)}$ és $(BC)^{(k)}$ $\mathbf{T}_2^{(k)}$-hoz tartoznak. Nyilvánvaló, hogy a III. axióma ekvivalens a

$$\mathbf{P}(A|BC)\,\mathbf{P}(BC|C) = \mathbf{P}(ABC|C) \tag{11}$$

összefüggéssel, mivel a $\mathbf{P}A|B) = \mathbf{P}(AB|B)$ összefüggés a szorzattérben is érvényes*; ezért III. helyett (11)-et fogjuk bebizonyítani. Ha most A egy hengerhalmaz,

$$A = A^{(1)} * A^{(2)} * \ldots * A^{(N)} * \mathrm{H}^{(N+1)} * \mathrm{H}^{(N+2)} * \ldots,$$

akkor definíció szerint

$$\mathbf{P}(A|BC) = \prod_{k=1}^{N} \mathbf{P}^{(k)}(A^{(k)}|(BC)^{(k)}).$$

Mivel a

$$p_N = \prod_{k=1}^{N} \mathbf{P}^{(k)}((BC)^{(k)}|C^{(k)})$$

* Ez ha A hengerhalmaz, közvetlenül $P(A|B)$ értelmezéséből következik; mivel $P(A|B) = P(AB|B)$, ha A hengerhalmaz, következik, hogy ez az összefüggés érvényes bármely T_1^*-hoz tartozó A halmazra is, mivel ha két teljesen additív halmazfüggvény megegyezik egy halmazrendszeren, akkor megegyeznek ennek a halmazrendszernek a legszűkebb Borel-féle bővítésén is.

számsorozat nemnegatív és monoton nem-növekvő, $\lim_{N\to\infty} p_N = p$ létezik és két eset lehetséges: $p>0$ vagy $p=0$. Ha $p=0$, akkor $\mathbf{P}(BC|C)=0$ és így $\mathbf{P}(A\cdot BC|C)=0$, tehát (11) teljesül; ha $p>0$, akkor viszont

$$\mathbf{P}(A\cdot BC|C)=\prod_{k=1}^{N}\mathbf{P}^{(k)}(A^{(k)}(BC)^{(k)}|C^{(k)})\cdot\prod_{k=N+1}^{\infty}\mathbf{P}^{(k)}((BC)^{(k)}|C^{(k)}),$$

és így

$$\mathbf{P}(A|BC)\mathbf{P}(BC|C)=\prod_{k=1}^{N}\mathbf{P}^{(k)}(A^{(k)}|(BC)^{(k)})\prod_{k=1}^{k}\mathbf{P}^{(k)}((BC)^{(k)}|C^{(k)})=$$

$$=\prod_{k=1}^{N}\mathbf{P}^{(k)}(A^{(k)}(BC)^{(k)}|C^{(k)})\prod_{k=N-1}^{\infty}\mathbf{P}((BC)^{(k)}|C^{(\lambda)})=\mathbf{P}(ABC|C),$$

tehát (11) és így a III. axióma érvényes minden A hengerhalmazra, tehát tetszőleges, a hengerhalmazok összességének $\mathbf{T}_1^*$ BOREL-féle bővítéséhez tartozó A halmazra is.*

Most vizsgáljuk azt a speciális esetet, amikor $\mathcal{H}^{(k)}$ a valós számegyenes és $T_1^{(k)}$ $\mathcal{H}^{(k)}$ BOREL-halmazainak egy BOREL-féle halmazteste $(k=1,2,\ldots)$. Jelölje $x=(x_1,x_2,\ldots,x_k,\ldots)$ a H tér pontjait $(\mathrm{H}=\mathcal{H}^{(1)}*\mathcal{H}^{(2)}*\ldots)$ és definiáljuk a $\xi_k=\xi_k(x)$ valószínűségi változókat a következőképpen: $\xi_k(x)=x_k$ $(k=1,2,\ldots)$. Ha most

$$A=\mathcal{A}^{(1)}*A^{(2)}*\ldots*\mathcal{A}^{(k)}*\ldots \quad \text{és} \quad B=\mathcal{B}^{(1)}*\mathcal{B}^{(2)}*\ldots*\mathcal{B}^{(k)}*\ldots,$$

ahol $\mathcal{A}^{(k)}$ ill. $\mathcal{B}^{(k)}$ a valós számegyenes részhalmazai, amelyek $T_1^{(k)}$-hoz illetve $T_2^{(k)}$-hoz tartoznak, akkor nyilván

$$\mathbf{P}(\xi_k\in A|B)=\mathcal{P}^{(k)}(\mathcal{A}^{(k)}|\mathcal{B}^{(k)});\qquad (k=1,2,\ldots)$$

Ha tehát $\mathcal{H}^{(k)}$ a valós számegyenes és így $\mathcal{P}^{(k)}(\mathcal{A}^{(k)}|\mathcal{B}^{(k)})$ a számegyenesen értelmezett feltételes eloszlásrendszer, akkor a H térben a fenti módon értelmezett ξ_k valószínűségi változók $(k=1,2,\ldots)$ feltételes eloszlásrendszere éppen $\mathcal{P}^{(k)}(\mathcal{A}^{(k)}|\mathcal{B}^{(k)})$. Könnyen belátható az is, hogy ezekre a ξ_k változókra

$$\mathbf{P}(\xi_1\in\mathcal{A}^{(1)},\ \xi_2\in\mathcal{A}^{(2)},\ldots,\xi_n\in\mathcal{A}^{(n)}|B)=\prod_{k=1}^{n}\mathcal{P}^{(k)}(\mathcal{A}^{(k)}|\mathcal{B}^{(k)}),$$

vagyis a $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n$ változók $B\in\mathbf{T}_2$ minden választása mellett B-re nézve feltételesen függetlenek; ezt úgy is kifejezhetjük, hogy a ξ_k változók $\mathbf{T}_2$-re nézve függetlenek.

Ilyen módon a következő tételt bizonyítottuk be:

16. TÉTEL. *Legyen $\mathcal{P}^{(k)}(\mathcal{A}^{(k)}|\mathcal{B}^{(k)})$ a $\mathcal{H}^{(k)}$ valós számegyenes* BOREL-*halmazainak bizonyos $T_1^{(k)}$ összességéhez tartozó $\mathcal{A}^{(k)}$ halmazokra és $T_1^{(k)}$ bizonyos $T_2^{(k)}$ részrendszeréhez tartozó $\mathcal{B}^{(k)}$ halmazokra értelmezett feltételes valószínűségeloszlásrendszereknek egy tetszőleges sorozata. Akkor, képezve a* $\mathrm{H}=\mathcal{H}^{(1)}*\mathcal{H}^{(2)}*\ldots$ *térben a $\mathbf{T}_1=T_1^{(1)}*T_1^{(2)}*\ldots$ halmazrendszer $\mathbf{T}_1^*$ legszűkebb*

* Lásd az előző oldalon lévő lábjegyzetet.

BOREL-*féle bővítését és a* $\mathbf{T}_2 = T_2^{(1)} * T_2^{(2)} * \ldots$ *halmazrendszert, megadható egy olyan* $\mathbf{P}(A|B)$ $(A \in \mathbf{T}_1^*;\ B \in \mathbf{T}_2)$ *halmazfüggvény, hogy* $[\mathrm{H}, \mathbf{T}_1^*, \mathbf{T}_2, P(A|B)]$ *feltételes valószínűségi mezőt alkot; jelölje továbbá* $x = (x_1, x_2, \ldots)$ H *egy tetszőleges elemét és definiáljuk a* $\xi_k = \xi_k(x)$ *valószínűségi változókat a következőképpen:* $\xi_k(x) = x_k$; *akkor a* $\xi_1, \xi_2, \ldots$ *változók* $\mathbf{T}_2$*-re nézve függetlenek és ha* $B = \mathfrak{B}^{(1)} * \mathfrak{B}^{(2)} * \ldots$, *akkor* ξ_k *feltételes eloszlásrendszerét* $\mathfrak{F}^{(k)}(\mathfrak{A}^{(k)}|\mathfrak{B}^{(k)})$ *adja meg.*

A következőkben sokszor fogjuk alkalmazni a 16. tételben szereplő konstrukciót; különös figyelmet érdemel az az eset, amikor a $\mathfrak{F}^{(k)}(\mathfrak{A}^{(k)}|\mathfrak{B}^{(k)})$ feltételes valószínűségeloszlásrendszer nem függ k-tól, vagyis amikor a ξ_k változók egyforma eloszlásúak. A 16. tétel értelmében konstruált $[\mathbf{H}, \mathbf{T}_1^*, \mathbf{T}_2, \mathbf{P}(A|B)]$ feltételes valószínűségi mezőt a rövidség kedvéért $[\mathcal{H}, \mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2, \mathfrak{F}(\mathfrak{A}|\mathfrak{B})]^{\infty *}$-gal jelöljük; ha a $[\mathcal{H}^{(k)}, \mathfrak{T}_1^{(k)}, \mathfrak{T}_2^{(k)}, \mathfrak{F}^{(k)}(\mathfrak{A}^{(k)}|\mathfrak{B}^{(k)})]$ feltételes eloszlásrendszerek nem azonosak, a

$$[\mathrm{H}, \mathbf{T}_1^*, \mathbf{T}_2, \mathbf{P}(A|B)] = \prod_{k=1}^{\infty} [\mathcal{H}^{(k)}, T_1^{(k)}, T_2^{(k)}, \mathfrak{F}^{(k)}(\mathfrak{A}^{(k)}|\mathfrak{B}^{(k)})]$$

jelölést fogjuk használni és azt mondjuk, hogy a $[H, \mathbf{T}_1^*, \mathbf{T}_2, \mathbf{P}(A|B)]$ feltételes valószínűségi mező a $[\mathcal{H}^{(k)}, T_1^{(k)}, T_2^{(k)}, \mathfrak{F}^{(k)}(\mathfrak{A}^{(k)}|\mathfrak{B}^{(k)})]$ feltételes eloszlásrendszerek szorzata.

Szükségünk lesz még a következő tételre is:

17. TÉTEL: *A* $B_0, B_1, \ldots, B_n, \ldots$ *halmazok tartozzanak mind* $\mathbf{T}_2$*-höz, és legyen* $B_0 \subseteq B_1 \subseteq \ldots \subseteq B_n \subseteq B_{n+1} \subseteq \ldots$, *továbbá* $\mathbf{P}(B_n|B_{n+1}) > 0$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, *és legyen* $\prod_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(B_n|B_{n+1})$ *konvergens. Ha a* $B_\infty = \sum_{n=1}^{\infty} B_n$ *halmaz nem tartozik* $\mathbf{T}_2$*-höz, akkor kiterjeszthető a* $\mathbf{P}(A|B)$ *halmazfüggvény értelmezése* $B = B_\infty$*-re oly módon, hogy teljesüljön a*

$$\mathbf{P}(A|B_\infty) = \lim_{n \to \infty} \mathbf{P}(A|B_n)$$

összefüggés bármely $A \in \mathbf{T}_1$ *halmazra.*

BIZONYÍTÁS: Ha $AB_\infty \subseteq B_N$ valamely N-re akkor a 6. tétel szerint ezen N-től kezdve $\mathbf{P}(A|B_n)$ monoton nem növekvő és így $\lim_{n \to \infty} \mathbf{P}(A|B_n)$ létezik, tehát ha B_∞ nem eleme $\mathbf{T}_2$-nek, akkor kiterjeszthető $\mathbf{P}(A|B_\infty)$ értelmezése olyan A halmazokra, amelyekre $AB_\infty \subseteq B_N$, N valamely értékére. Mível $AB_\infty = \sum_{n=0}^{\infty} AB_n$, tehát bevezetve az $A_n = AB_n$ és $A_{-1} = \bigcirc$ jelöléseket, $AB_\infty = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \bar{A}_{n-1}$ és $\bar{A}_{n-1} A_n B_\infty \subseteq B_n$, tehát $\mathbf{P}(A|B_\infty)$ definiálható bármely A-ra a

$$\mathbf{P}(A|B_\infty) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(A_n \bar{A}_{n-1}|B_\infty)$$

összefüggés segítségével. Mivel továbbá, ha $A \subseteq B_N$ és $\mathbf{P}(A|B_\infty) > 0$, akkor

$$\mathbf{P}(A|B_\infty) = \mathbf{P}(A|B_N) \prod_{n=N}^{\infty} \mathbf{P}(B_n|B_{n+1}),$$

tehát ha $A_k \subseteq B_N$ $(k = 1, 2, \ldots)$ és $A_j A_k = O$, ha $j \neq k$, akkor

$$\mathbf{P}\left(\sum_{k=1}^{\infty} A_k \middle| B_\infty\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_k|B_\infty),$$

és így, ha $A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(n)}, \ldots$ tetszőleges halmazsorozat, amelyre $A^{(n)} \in \mathbf{T}_1$ és $A^{(n)}A^{(m)} = O$, ha $n \neq m$, akkor bevezetve a $\sum_{n=1}^{\infty} A^{(n)} = A$ továbbá az $A^{(i)}B_N\overline{B}_{N-1} = A_{i,N}$ és $B_{-1} = O$ jelöléseket, következik, hogy

$$\mathbf{P}(A|B_\infty) = \mathbf{P}(AB_\infty|B_\infty) = \sum_{N=0}^{\infty} \mathbf{P}(AB_N\overline{B}_{N-1}|B_\infty) =$$

$$= \sum_{N=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_{i,N}|B_\infty) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{N=0}^{\infty} \mathbf{P}(A_{i,N}|B_\infty) = \sum_{i=1}^{\infty} \lim_{N\to\infty} \mathbf{P}(A^{(i)}B_N|B_\infty).$$

Mivel

$$\lim_{N\to\infty} \mathbf{P}(A^{(i)}B_N|B_\infty) = \lim_{N\to\infty} \mathbf{P}(A^{(i)}|B_N) \prod_{n=N}^{\infty} \mathbf{P}(B_n|B_{n+1}) = \mathbf{P}(A^{(i)}|B_\infty),$$

tehát

$$\mathbf{P}(A|B_\infty) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(A^{(i)}|B_\infty),$$

vagyis $\mathbf{P}(A|B_\infty)$ teljesen additív. $\mathbf{P}(A|B_\infty)$ teljes additivitásából következik, hogy a $\mathbf{P}(A|B_\infty) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(A|B_n)$ összefüggés bármely $A \in \mathbf{T}_1$ halmazra érvényes. Ugyanis a fenti jelölésekkel egyrészt

$$\overline{\lim_{N\to\infty}}\, \mathbf{P}(A|B_N) \leqq \sum_{n=0}^{\infty} \overline{\lim_{N\to\infty}}\, \mathbf{P}(A_n\overline{A}_{n-1}B_N) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(A_n\overline{A}_{n-1}|B_N) = \mathbf{P}(A|B_\infty)$$

másrészt M bármely értékére

$$\underline{\lim_{N\to\infty}}\, \mathbf{P}(A|B_N) \geqq \sum_{n=0}^{M} \underline{\lim_{N\to\infty}}\, \mathbf{P}(A_n\overline{A}_{n-1}|B_N) = \sum_{n=0}^{M} \mathbf{P}(A_n\overline{A}_{n-1}|B_\infty)$$

és így

$$\underline{\lim_{N\to\infty}}\, \mathbf{P}(A|B_N) \geqq \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(A_n\overline{A}_{n-1}|B_\infty) = \mathbf{P}(A|B_\infty).$$

Ebből a két egyenlőtlenségből már következik, hogy $\lim_{N\to\infty} \mathbf{P}(A|B_N) = \mathbf{P}(A|B_\infty)$. Bizonyításra szorul még, hogy $\mathbf{P}(B_\infty|B_\infty) = 1$. Ezt a következőképpen láthatjuk be:

$$B_\infty = B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n\overline{B}_{n-1}$$

és így

$$\mathbf{P}(B_\infty|B_\infty) = \mathbf{P}(B_0|B_\infty) + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(B_n\overline{B}_{n-1}|B_\infty) =$$

$$= \mathbf{P}(B_0|B_\infty) + \sum_{n=2}^{\infty} (\mathbf{P}(B_n|B_\infty) - \mathbf{P}(B_{n-1}|B_\infty)) = \lim_{N\to\infty} \mathbf{P}(B_N|B_\infty).$$

Mivel

$$\mathbf{P}(B_N|B_\infty) = \mathbf{P}(B_N|B_N) \prod_{n=N}^{\infty} \mathbf{P}(B_n|B_{n+1}) = \prod_{n=N}^{\infty} \mathbf{P}(B_x|B_{n+1}),$$

és a $\prod_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(B_n|B_{n+1})$ végtelen szorzat feltevésünk szerint konvergens, tehát $\lim_{N\to\infty} \mathbf{P}(B_N|B_\infty) = 1$ és így $\mathbf{P}(B_\infty|B_\infty) = 1$.

(Abban az esetben, ha $\prod_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(B_n|B_{n-1})$ divergens, vagyis

$$\lim_{N\to\infty} \prod_{n=0}^{N} \mathbf{P}(B_n|B_{n+1}) = 0,$$

a B_∞ halmaz azért nem csatolható $\mathbf{T}_2$-höz, mert $\mathbf{P}(A|B_\infty)$-nek azonosan 0-nak kellene lennie, ami ellentmond a $\mathbf{P}(B_\infty|B_\infty) = 1$ feltevésnek).

Könnyen belátható, hogy a III. axióma is teljesül. Ezzel a 17. tételt bebizonyítottuk.

Még egy fontos fogalmat kell bevezetnünk: feltételes valószínűségi mezők *beágyazásá*nak fogalmát.

Legyen $[\mathsf{H}, \mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \mathbf{P}(A|B)]$ egy feltételes valószínűségi mező. Ha H' egy olyan halmaz, amelyre $\mathsf{H} \subseteq \mathsf{H}'$, továbbá $\mathbf{T}_1'$ a H' részhalmazainak egy halmazteste, amelyre $\mathbf{T}_1 \subseteq \mathbf{T}_1'$, hasonlóképpen $\mathbf{T}_2'$ $\mathbf{T}_1'$-nek egy olyan részhalmaza, amelyre $\mathbf{T}_2 \subseteq \mathbf{T}_2'$ és végül $\mathbf{P}'(A'|B')$ egy olyan kétváltozós halmazfüggvény, hogy $[\mathsf{H}', \mathbf{T}_1', \mathbf{T}_2', \mathbf{P}'(A', B')]$ egy feltételes valószínűségi mező és ha $A \in \mathbf{T}_1$ és $B \in \mathbf{T}_2$ akkor

$$\mathbf{P}'(A|B) = \mathbf{P}(A|B),$$

ez esetben azt mondjuk, hogy a $[\mathsf{H}, \mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \mathbf{P}(A|B)]$ feltételes valószínűségi mező be van ágyazva a $[\mathsf{H}', \mathbf{T}_1', \mathbf{T}_2', \mathbf{P}(A'|B')]$ feltételes valószínűségi mezőbe, illetve, hogy a $[\mathsf{H}', \mathbf{T}_1', \mathbf{T}_2', \mathbf{P}'(A'|B')]$ feltételes valószínűségi mező a $[\mathsf{H}, \mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \mathbf{P}(A|B)]$ feltételes valószínűségi mező bővítése. Ha $[\mathsf{H}, \mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \mathbf{P}(A|B)]$ a $[\mathsf{H}, \mathbf{T}_1, \mathbf{P}(A)]$ KOLMOGOROV-féle valószínűségi mező által generált feltételes valószínűségi mező, a rövidség kedvéért azt a kifejezést is használjuk, hogy a $[\mathsf{H}, \mathbf{T}_1, \mathbf{P}(A)]$ KOLMOGOROV-féle valószínőségi mező be van ágyazva a $[\mathsf{H}', \mathbf{T}_1', \mathbf{T}_2', \mathbf{P}'(A'|B')]$ feltételes valószínűségi mezőbe. Végül akkor is beágyazásról fogunk beszélni, ha nem maga a $[\mathsf{H}, \mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \mathbf{P}(A|B)]$ feltételes valószínűségi mező, hanem annak egy izomorf képe van beágyazva a $[\mathsf{H}', \mathbf{T}_1', \mathbf{T}_2', \mathbf{P}'(A'|B')]$ feltételes valószínűségi mezőbe. Így például ha $[\mathsf{H}, \mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \mathbf{P}(A|B)]$ a

$[H^{(1)}, T_1^{(1)}, T_2^{(1)}, P^{(1)}(A^{(1)}|B^{(1)})]$ és a $[H^{(2)}, T_1^{(2)}, T_2^{(2)}, P^{(2)}(A^{(2)}|B^{(2)})]$ feltételes valószínűségi mezők szorzata, akkor $[H^{(1)}, T_1^{(1)}, T_2^{(1)}, P^{(1)}(A^{(1)}|B^{(1)})]$ és $[H^{(2)}, T_1^{(2)}, T_2^{(2)}, P^{(2)}(A^{(2)}|B^{(2)})]$ (illetve izomorf képeik) be vannak ágyazva a $[H, T_1, T_2, P(A|B)]$ feltételes valószínűségi mezőbe.

2. §. *A nagy számok törvényei.*

Ebben a §-ban a valószínűségszámítás jelen dolgozatban megadott elméletének a valósághoz való viszonyával és ezzel kapcsolatban a feltételes relatív gyakoriságnak a feltételes valószínűség körüli ingadozásait jellemző tételekkel, a nagy számok (feltételes) törvényeivel fogunk foglalkozni.

Egy kísérletnek, melynek kimenetele a véletlentől függ, összes lehetséges eredményei legyenek az $E_0, E_1, \ldots, E_n, \ldots$ egymást kizáró események. A valószínűségszámítás KOLMOGOROV-féle elmélete abból indul ki, hogy megadhatók olyan p_n nemnegatív számok ($n = 0, 1, \ldots$), amelyek összege 1-gyel egyenlő, úgy, hogy ha a szóbanforgó kísérletet N-szer egymástól függetlenül megismételjük és $\nu_n^{(N)}$-nel jelöljük azt, hogy az N kísérlet közül az E_n esemény hányszor következik be, akkor a $\frac{\nu_n^{(N)}}{N}$ hányados, hacsak N elég nagy, általában közel lesz p_n-hez. Ezt a tapasztalatok számos esetben valóban teljes mértékben alá is támasztják. Azonban sem tapasztalatilag, sem logikai alapon nem zárhatunk ki eleve olyan kísérleteket, amelyeknél a $\frac{\nu_n^{(N)}}{N}$ hányadosok mind általában annál kisebbek, minél nagyobb N, tehát minden egyes E_n eseménynek a relatív gyakorisága a kísérletek számának növelésével „sztochasztikusan" 0-hoz konvergál*. Azt, hogy ez egyáltalán nem abszurdum, mutatja, hogy ilyen jelenség a valószínűségszámítás KOLMOGOROV-féle elmélete szerint is előfordulhat, ha a kísérlet körülményei a kísérlet megismétlései során megváltoznak. Így például ha a ξ_k valószínűségi változó jelenti a k-adik kísérletnél bekövetkező esemény indexét, és ξ_k POISSON eloszlású λ_k várható értékkel, vagyis annak a valószínűsége, hogy a k-adik kísérlet eredménye az E_n esemény, $\frac{\lambda_k^n}{n!}e^{-\lambda_k}$-val egyenlő, és $\lambda_k \to \infty$, akkor az E_n esemény relatív gyakorisága az első N kísérlet során n minden értékére sztochasztikusan 0-hoz konvergál ha $N \to \infty$.

Az azonban, hogy ugyanez a jelenség akkor is bekövetkezzék, ha a kísérlet körülményei a kísérlet minden megismétlésénél ugyanazok, a KOLMOGOROV-féle elmélettel nem fér össze; a jelen dolgozatban közölt elmélet azonban megengedi ezt a lehetőséget is. Így pl. az 1. §-ban vizsgált 2. példában leírt

* A „sztochasztikus konvergencia" kifejezést itt e szó nem matematikai, hanem természettudományi értelmében használjuk; e kifejezés szabatos matematikai értelmet a nagy számok törvényeiben nyer.

„kísérlet" esetében, amikor találomra választunk egy természetes számot, úgy, hogy bármely természetes szám egyenlő (feltételes) valószínűséggel kerülhet kiválasztásra, mint látni fogjuk, éppen ez a helyzet.

Kézenfekvő az a kérdés, hogy a $\mathbf{P}(A|B)$ feltételes valószínűségek hogyan függnek össze a gyakoriságokkal? Nyilvánvaló, hogy ha csak azoknak a kísérleteknek a megfigyelésére szorítkozunk, amelyeknél a B esemény bekövetkezik, úgy ezeknek a kísérleteknek a sorozatában az A esemény relatív gyakorisága a $\mathbf{P}(A|B)$ szám körül fog ingadozni, vagyis *a $\mathbf{P}(A|B)$ feltételes valószínűség az a számérték, amely körül az A eseménynek a B feltétel melletti feltételes relatív gyakorisága véletlen ingadozásokat végez.* Ezt a tényt írják le szabatosan a következő tételek:

Egy $\mathcal{H}$ kísérlet k-adik végrehajtásának ($k=1,2,\ldots$) lehetséges eredményeihez rendeljük hozzá a valós számok $\mathcal{H}$ halmaza bizonyos BOREL-féle részhalmazainak egy $\mathcal{T}_1$ BOREL-féle halmaztestének halmazait, $\mathcal{T}_2$ legyen $\mathcal{T}_1$ egy részhalmaza és legyen $[\mathcal{H},\mathcal{T}_1,\mathcal{T}_2,\mathcal{P}(\mathcal{A}|\mathcal{B})]$ egy feltételes valószínűségi mező. Feltesszük, hogy $[\mathcal{H},\mathcal{T}_1,\mathcal{T}_2,\mathcal{P}(\mathcal{A}|\mathcal{B})]$ független k-tól, vagyis, hogy a kísérlet minden egyes végrehajtása azonos körülmények között történik. Képezhetjük a 16. tétel szerint ezen feltételes valószínűségi mezők $[\mathrm{H},\mathbf{T}_1^*,\mathbf{T}_2,\mathbf{P}(A|B)]=$ $=[\mathcal{H},\mathcal{T}_1,\mathcal{T}_2,\mathcal{P}(\mathcal{A}|\mathcal{B})]^{\infty *}$ szorzatát és abban definiálhatjuk a ξ_k változókat úgy, hogy $\mathbf{T}_2$-re nézve függetlenek legyenek és ξ_k feltételes eloszlásrendszere éppen $[\mathcal{H},\mathcal{T}_1,\mathcal{T}_2,\mathcal{P}(\mathcal{A}|\mathcal{B})]$ legyen; ξ_k értéke tehát a k-adik kísérlet eredményét jellemzi. Jelölje $\eta_N(\mathcal{A})$ a $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_N$ változók közül azok számát, amelyek az $\mathcal{A}$ halmazhoz tartoznak, ahol $\mathcal{A}$ egy tetszőleges $\mathcal{T}_1$-hez tartozó részhalmaz, akkor $\gamma_N(\mathcal{A}|\mathcal{B})=\dfrac{\eta_N(\mathcal{A}\mathcal{B})}{\eta_N(\mathcal{B})}$ $(\mathcal{B}\in\mathcal{T}_2)$ adja meg az $\mathcal{A}$ eseménynek a $\mathcal{B}$ eseményre vonatkozó feltételes relatív gyakoriságát az első N kísérlet során. $\eta_N(\mathcal{A})$ tehát azt fejezi ki, hogy a kísérlet N-szeri végrehajtása során hányszor következett be olyan esemény, amelyet az $\mathcal{A}$ halmaz jellemez. A rövidség kedvéért azt az eseményt, amelyet az $\mathcal{A}$ halmaz jellemez, azonosíthatjuk $\mathcal{A}$-val, tehát mondhatjuk, hogy $\eta_N(\mathcal{A})$ azt jelenti, hogy az első N kísérlet során hányszor következett be az $\mathcal{A}$ esemény.

Be fogjuk bizonyítani először a következő két tételt:

1. TÉTEL: *Legyen* $[\mathrm{H},\mathbf{T}_1^*,\mathbf{T}_2,\mathbf{P}(A|B)]=[\mathcal{H},\mathcal{T}_1,\mathcal{T}_2,\mathcal{P}(\mathcal{A}|\mathcal{B})]^{\infty *}$ *(a 16. tételhez fűzött megjegyzés értelmében), legyen* $\mathcal{A}\in\mathcal{T}_1$ és $\mathcal{B}\in\mathcal{T}_2$, *továbbá legyen* $\mathcal{B}\subseteq\mathcal{C}^{(N)}\in\mathcal{T}_2$ $(N=1,2,\ldots)$ *és* $C=\mathcal{C}^{(1)}*\mathcal{C}^{(2)}*\ldots\in\mathbf{T}_2$; *legyen* $\mathcal{P}(\mathcal{B}|\mathcal{C}^{(N)})=p_N$ $(N=1,2,\ldots)$ *és tegyük fel, hogy a* $\sum\limits_{N=1}^{\infty}p_N$ *sor divergens. Definiáljuk a* H *halmazon a* ξ_k *valószínűségi változókat a* 16. *tételben szereplő módon, vagyis úgy, hogy* ξ_k *feltételes eloszlásrendszere* $[\mathcal{H},\mathcal{T}_1,\mathcal{T}_2,\mathcal{P}(\mathcal{A}|\mathcal{B})]$ *legyen és a* ξ_k *változók függetlenek legyenek* $\mathbf{T}_2$*-re nézve. Jelölje* $\eta_N(\mathcal{D})$ *a* $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_N$ *változók közül azok számát, amelyek értéke* $\mathcal{D}$*-be esik,* $(\mathcal{D}\in\mathcal{T}_1)$, *és legyen* $\gamma_N(\mathcal{A}|\mathcal{B})=\dfrac{\eta_N(\mathcal{A}\mathcal{B})}{\eta_N(\mathcal{B})}$

(az $\mathfrak{A}$ eseménynek $\mathfrak{B}$-re vonatkozó feltételes relatív gyakorisága az első N kísérlet során) akkor, ha $\varepsilon > 0$ tetszőleges, fennáll, hogy

$$\lim_{N\to\infty} \mathbf{P}(|\gamma_N(\mathfrak{A}|\mathfrak{B}) - \mathcal{P}(\mathfrak{A}|\mathfrak{B})| > \varepsilon \mid C) = 0,$$

vagyis a C feltétel mellett $\mathfrak{A}$-nak $\mathfrak{B}$-re vonatkozó feltételes relatív gyakorisága sztochasztikusan konvergál $\mathcal{P}(\mathfrak{A}|\mathfrak{B})$-hez.

1. MEGJEGYZÉS. Ha $\mathfrak{C}^{(N)} = \mathfrak{C}$ nem függ N-tól, $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{C}$, és $\mathcal{P}(\mathfrak{B}|\mathfrak{C}) > 0$, akkor a tétel feltevései teljesülnek. Ha $\mathfrak{C} = \mathfrak{B}$, a tétel a nagy számok közönséges törvényére redukálódik.

2. MEGJEGYZÉS. A $\sum\limits_{N=1}^{\infty} p_N = \infty$ feltétel azért természetes, mert $\sum\limits_{N=1}^{\infty} p_N$ jelenti a $\mathfrak{B}$ eseménynek az egész kísérletsorozat során való bekövetkezései számának C-re vonatkozó feltételes várható értékét. Ennélfogva $\sum\limits_{N=1}^{\infty} p_N < \infty$ azt jelenti, hogy az esemény a C feltétel mellett általában csak véges sokszor következik be és ebben az esetben a relatív gyakoriság határértékéről nem érdemes beszélni.

2. a. TÉTEL. *Ha az 1. tétel feltevései teljesülnek, továbbá teljesül még a következő feltevés is:**

(1)
$$\lim_{N\to\infty} \frac{\sum\limits_{n=1}^{N} p_n}{\log N} = \infty$$

akkor

$$\mathbf{P}(\lim_{N\to\infty} \gamma_N(\mathfrak{A}|\mathfrak{B}) = \mathcal{P}(\mathfrak{A}|\mathfrak{B}) \mid C) = 1,$$

vagyis $\mathfrak{A}$-nak $\mathfrak{B}$-re vonatkozó feltételes relatív gyakorisága a C feltétel mellett 1 valószínűséggel konvergál $\mathcal{P}(\mathfrak{A}|\mathfrak{B})$-hez.

1. MEGJEGYZÉS. Ha $\mathfrak{C}^{(N)} = \mathfrak{C}$ nem függ N-től, $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{C}$ és $\mathcal{P}(\mathfrak{B}|\mathfrak{C}) > 0$, akkor a 2. a. tétel feltevései teljesülnek, hiszen $\frac{1}{\log N} \sum\limits_{1}^{N} p_n = \mathcal{P}(\mathfrak{B}|\mathfrak{C}) \frac{N}{\log N} \to \infty$. Ha $\mathfrak{B} = \mathfrak{C}$, akkor a 2. a. tétel a nagy számok közönséges erős törvényére redukálódik.

AZ 1. ÉS 2. a. TÉTELEK BIZONYÍTÁSA. Azt az eseményt, hogy az első N kísérlet közül a $\mathfrak{B}$ esemény az i_1-edik, i_2-edik, ..., i_n-edik kísérleteknél és csak ezeknél következett be, jelöljük $D^{(N)}_{i_1 i_2 \ldots i_n}$-nel. A $D^{(N)}_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ feltétel mellett

$$\gamma_N(\mathfrak{A}|\mathfrak{B}) = \frac{\vartheta_{i_1} + \vartheta_{i_2} + \cdots + \vartheta_{i_n}}{n},$$

* Az (1) feltevés nem szükséges a 2. a. tétel állításának teljesüléséhez; lásd a 2. b. tételt.

ahol a $\vartheta_k (k=1,2,\ldots,N)$ valószínűségi változók függetlenek és az 1 illetve 0 értéket veszi fel, aszerint, hogy a k-adik kísérletnél az $\mathcal{A}$ esemény bekövetkezik-e vagy sem; ennélfogva ϑ_k az 1 ill. 0 értéket $\mathcal{P}(\mathcal{A}|\mathcal{B})$ ill. $1-\mathcal{P}(\mathcal{A}|\mathcal{B})$ valószínűséggel veszi fel; bevezetve a $p=\mathcal{P}(\mathcal{A}|\mathcal{B})$ jelölést, annak a valószínűsége, hogy $|\gamma_N(\mathcal{A}|\mathcal{B})-\mathcal{P}(\mathcal{A}|\mathcal{B})|>\varepsilon$ legyen, éppen $B_N(\varepsilon,p)=\sum_{\left|\frac{k}{n}-p\right|>\varepsilon}\binom{n}{k}p_k(1-p)^{n-k}$

Ilyen módon a 12. tétel szerint

$$\mathbf{P}(|\gamma_N(\mathcal{A}|\mathcal{B})-\mathcal{P}(\mathcal{A}|\mathcal{B})|>\varepsilon|C)=\sum_{n=0}^{N}B_n(\varepsilon,p)\sum_{i_1 i_2\ldots i_n}\mathbf{P}(D^{(N)}_{i_1 i_2\ldots i_n}|C),$$

ahol a belső összegezés az $1,2,\ldots,N$ számok közül kiválasztható összes lehetséges $(i_1,i_2,\ldots,i_n)$ n-edrendű kombinációkra terjesztendő ki. Könnyen belátható, hogy

$$\mathbf{P}(D^{(N)}_{i_1 i_2\ldots i_n}|C)=\prod_{j=1}^{N}(1-p_j)\cdot\prod_{r=1}^{n}\frac{p_{i_r}}{1-p_{i_r}}.$$

Szükségünk lesz a következő egyszerű segédtételre:

1. LEMMA.* *Legyen* $0<p<1$, $q=1-p$, $\varepsilon>0$ *és*

$$B_n(\varepsilon,p)=\sum_{\left|\frac{k}{n}-p\right|>\varepsilon}\binom{n}{k}p^k q^{n-k};$$

akkor

$$B_n(\varepsilon,p)<2\varrho^n,$$

ahol $\varrho=\varrho(\varepsilon,p)$ *nem függ* n*-től és* $0<\varrho<1$, *ha* $0<\varepsilon<\frac{pq}{3}$.

BIZONYÍTÁS:** Mivel

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k q^{n-k}e^{\lambda(k-pn)}=(pe^{\lambda}+q)^n e^{-p\lambda n},$$

tehát

$$\Big(\sum_{\frac{k}{n}-p>\varepsilon>0}\binom{n}{k}p^k q^{n-k}\Big)e^{\lambda\varepsilon n}<(pe^{\lambda}+q)^n e^{-p\lambda n}$$

és

$$\Big(\sum_{\frac{k}{n}-p<-\varepsilon<0}\binom{n}{k}p^k q^{n-k}\Big)e^{\mu\varepsilon n}<(pe^{-\mu}+q)^n e^{p\mu n},$$

tehát

(1) $$B_n(\varepsilon,p)<(pe^{(q-\varepsilon)\lambda}+qe^{-(p+\varepsilon)\lambda})^n+(pe^{-(q+\varepsilon)\mu}+qe^{(p-\varepsilon)\mu})^n,$$

ahol $\lambda>0$ és $\mu>0$.

* Ez a lemma, valamint e § többi lemmája közönséges valószínűségszámítási tételeket fejeznek ki, míg a § tételei az új axiómarendszerre vonatkoznak.

** Ennek a bizonyításnak a gondolatmenete Sz. N. BERNSTEIN-től származik. l. [4].

Válasszuk most meg λ és μ értékét úgy, hogy az (1) jobboldalán álló első, ill. második tagot minimalizáljuk. Nyilvánvaló, hogy ez akkor következik, be, ha*

$$\lambda = \log \frac{1+\frac{\varepsilon}{p}}{1-\frac{\varepsilon}{q}} \quad \text{és} \quad \mu = \log \frac{1+\frac{\varepsilon}{q}}{1-\frac{\varepsilon}{p}}.$$

Így azt kapjuk, hogy

$$B_n(\varepsilon, p) < \left\{\left(\frac{q}{q-\varepsilon}\right)^{q-\varepsilon}\left(\frac{p}{p+\varepsilon}\right)^{p+\varepsilon}\right\}^n + \left\{\left(\frac{p}{p+\varepsilon}\right)^{p+\varepsilon}\left(\frac{q}{q+\varepsilon}\right)^{q+\varepsilon}\right\}^n.$$

Figyelembe véve, hogy ha $\varepsilon < \frac{pq}{3}$, akkor

$$\log \left(\frac{q}{q-\varepsilon}\right)^{q-\varepsilon}\left(\frac{p}{p+\varepsilon}\right)^{p+\varepsilon} \leqq -\frac{\varepsilon^2}{3pq}$$

és

$$\log \left(\frac{p}{p-\varepsilon}\right)^{p-\varepsilon}\left(\frac{q}{q+\varepsilon}\right)^{q+\varepsilon} \leqq -\frac{\varepsilon^2}{3pq},$$

következik, hogy

$$B_n(\varepsilon, p) < 2\varrho^n,$$

ahol

$$0 < \varrho = e^{-\frac{\varepsilon^2}{3pq}} < 1 \qquad \left(0 < \varepsilon < \frac{pq}{3}\right).$$

A fenti lemma segítségével nyerjük, hogy

$$\mathbf{P}(|\gamma_N(\mathcal{A}|\mathcal{B}) - \mathcal{P}(\mathcal{A}|\mathcal{B})| > \varepsilon | C) < 2\prod_{j=1}^{N}(1-p_j(1-\varrho)),$$

ahol $0 < \varrho < 1$.

Felhasználva az $1-x \leqq e^{-x}$ egyenlőtlenséget, következik, hogy

$$\mathbf{P}(|\gamma_N(\mathcal{A}|\mathcal{B}) - \mathcal{P}(\mathcal{A}|\mathcal{B})| > \varepsilon | C) < 2e^{-(1-\varrho)\sum\limits_{n=1}^{N} p_n}. \tag{2}$$

Mivel feltevésünk szerint $\sum\limits_{n=1}^{N} p_n \to \infty$, ha $N \to \infty$, (2)-ből az 1. tétel állítása azonnal következik. A 2. a. tétel bizonyításához egy jólismert bizonyítási gondolat szerint elegendő kimutatni, hogy a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(|\gamma_N(\mathcal{A}|\mathcal{B}) - \mathcal{P}(\mathcal{A}|\mathcal{B})| > \varepsilon | C)$$

sor az $\varepsilon > 0$ szám minden választása mellett konvergens. Ez azonban nyilvánvalóan teljesül, ha

* log mindenütt a természetes logaritmust jelenti.

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\sum_{n=1}^{N} p_n}{\log N}=\infty.$$

Ezzel a 2. a. tételt bebizonyítottuk.

Könnyen belátható, hogy elegendő, ha a $\mathfrak{B}\subseteq\mathfrak{C}^{(N)}$ feltevés $N\geqq N_0$-ra teljesül, nem szükséges, hogy $N_0=1$ legyen.

A 2. a. tételben az (1) feltevés valójában felesleges: a tétel érvényes pusztán azon feltétel mellett, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ divergens. Ennek bebizonyításához szükségünk lesz a következő segédtételre:

2. LEMMA: *Legyenek $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ teljesen független valószínűségi változók, $\mathbf{M}(\xi_n)=0$ és $\mathbf{D}(\xi_n)=D_n$ $(n=1,2,\ldots)$, legyen továbbá A_n $(n=1,2,\ldots)$, egy olyan pozitív tagú, monoton növekvő számsorozat, amelyre $\lim_{n\to\infty} A_n=+\infty$, $\frac{A_{n+1}}{A_n}\leqq c$, ahol $c>1$ állandó és*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{D_n^2}{A_n^2}<\infty; \tag{2}$$

legyen továbbá

$$\zeta_n=\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_n. \tag{3}$$

Akkor

$$\mathbf{P}\left(\lim_{n\to\infty}\frac{\zeta_n}{A_n}=0\right)=1.$$

BIZONYÍTÁS: A KOLMOGOROV-féle egyenlőtlenség* szerint, ha $\varepsilon>0$, akkor

$$\mathbf{P}\left(\max_{1\leqq n\leqq N}|\zeta_n|\geqq\varepsilon\right)\leqq\frac{\sum_{k=1}^{N} D_k^2}{\varepsilon^2}. \tag{4}$$

Ennélfogva, ha $N_0<N_1<\cdots<N_k<\cdots$ tetszőleges pozitív egész számokból álló számsorozat és $\varepsilon>0$, akkor

$$\mathbf{P}\left(\max_{N_k\leqq n\leqq N_{k+1}}\frac{|\zeta_n|}{A_n}\geqq\varepsilon\right)\leqq\mathbf{P}\left(\max_{n\leqq N_{k+1}}|\zeta_n|\geqq\varepsilon A_{N_k}\right)\leqq\frac{\sum_{j=1}^{N_{k+1}} D_j^2}{\varepsilon^2 A_{N_k}^2}. \tag{5}$$

Most válasszuk meg az N_k számsorozatot úgy, hogy teljesülnek az $A_1c^k<A_{N_k}\leqq\leqq c^{k+1}A_1$ $(k=0,1,2,\ldots)$ egyenlőtlenségek; hogy ez lehetséges, azt teljes indukcióval láthatjuk be. Mivel $A_1<A_2\leqq cA_1$, tehát N_0-nak választhatjuk az $N_0=2$ értéket; ha már $N_0, N_1, \ldots, N_k$ értékeit megválasztottuk, akkor, mivel

$$A_{N_k+1}\leqq cA_{N_k}\leqq c^{k+2}A_1,$$

tehát vannak olyan n értékek, amelyekre $n>N_k$ és $A_n\leqq c^{k+2}A_1$; legyen $n=N_{k+1}$ a legnagyobb szám, amely ezekkel a tulajdonságokkal bír, akkor $A_{N_{k+1}}\leqq$

* Lásd pl. [5]. XI. fej.

$\leqq c^{k+2}A_1$ és $A_{N_{k+1}+1} > c^{k+2}A_1$; ebből azonban következik, hogy $A_{N_{k+1}} \geqq c^{k+1}A_1$, mert ha $A_{N_{k+1}} < A_1 c^{k+1}$ volna, akkor $\dfrac{A_{N_{k+1}+1}}{A_{N_{k+1}}} > c$ volna, ami ellentmond feltevéseinknek.

Legyen $S_n = \sum_{j=1}^{n} D_j^2$; könnyen belátható, hogy

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{S_{N_{k+1}}}{A_{N_k}^2} < \infty; \tag{6}$$

ugyanis

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{S_{N_{k+1}}}{A_{N_k}^2} = \sum_{j=1}^{\infty} D_j^2 \left(\sum_{N_{i+1} \geqq j} \frac{1}{A_{N_i}^2} \right)$$

és ha $N_{k_j} < j \leqq N_{k_j+1}$, akkor

$$\sum_{N_{i+1} \geqq j} \frac{1}{A_{N_i}^2} \leqq \frac{1}{A_1^2} \sum_{i=k}^{\infty} \frac{1}{c^{2i}} = \frac{c^2}{c^2-1} \frac{1}{A_1^2 c^{2k}} \leqq \frac{c^6}{c^2-1} \frac{1}{A_{N_{k_j+1}}^2} \leqq \frac{c^6}{c^2-1} \frac{1}{A_j^2},$$

tehát

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{S_{N_{k+1}}}{A_{N_k}^2} \leqq \frac{c^6}{c^2-1} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{D_j^2}{A_j^2} < \infty.$$

Ennélfogva tetszőleges $\delta > 0$ számhoz található olyan $r = r(\delta)$, hogy $\sum_{k=r}^{\infty} \frac{S_{N_{k+1}}}{A_{N_k}^2} < \delta$ és így

$$\mathbf{P}\left(\sup_{n \geqq N_r} \frac{|\zeta_n|}{A_n} \geqq \varepsilon \right) \leqq \sum_{k=r}^{\infty} \mathbf{P}\left(\max_{N_k \leqq n < N_{k+1}} \frac{|\zeta_n|}{A_n} \geqq \varepsilon \right) \leqq \sum_{k=r}^{\infty} \frac{S_{N_{k+1}}}{A_{N_k}^2} < \delta,$$

vagyis

$$\mathbf{P}\left(\lim_{n \to \infty} \frac{\zeta_n}{A_n} = 0 \right) = 1. \tag{7}$$

A 2. lemma egy másik lehetséges bizonyítása az alábbi J. HAJEKtől származó egyenlőtlenségen alapszik*:

2. b. LEMMA: *Legyenek* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ *független valószínűségi változók* $\mathbf{M}(\xi_k) = 0$, $\mathbf{D}(\xi_k) = D_k$, A_n *legyen egy pozitív és monoton növekvő számsorozat és tegyük fel, hogy* $A_n \to \infty$ *továbbá, hogy* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{D_k^2}{A_k^2} < \infty$. *Legyen* $\zeta_n = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n$ *és* $\varepsilon > 0$, *akkor*

$$\mathbf{P}\left(\sup_{k \geqq n} \frac{|\zeta_k|}{A_k} \geqq \varepsilon \right) \leqq \frac{1}{\varepsilon^2} \left(\frac{\sum_{k=1}^{n} D_k^2}{A_n^2} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{D_k^2}{A_k^2} \right).$$

* J. HAJEK ezt az egyenlőtlenséget az 1954. júniusában Prágában tartott Matematikai Statisztikai Konferencián közölte velem, és azt szíves hozzájárulásával közlöm; az itt adott bizonyítás HAJEK eredeti bizonyításánál egyszerűbb.

A 2. b. LEMMA BIZONYÍTÁSA: Legyen

$$\eta_n = \sum_{k=n}^{\infty} \zeta_k^2 \left(\frac{1}{A_k^2} - \frac{1}{A_{k+1}^2} \right).$$

Akkor

$$\mathbf{M}(\eta_n) = \frac{\sum_{k=1}^{n} D_k^2}{A_n^2} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{D_k^2}{A_k^2}. \tag{1}$$

Jelölje E_m $(m = n, n+1, \ldots)$ azt az eseményt, hogy a $\left|\frac{\zeta_k}{A_k}\right|$ számok közül $(k = n, n+1, \ldots)$ $\left|\frac{\zeta_m}{A_m}\right|$ az első, amely nagyobb (vagy egyenlő) mint ε. Legyen $E = \sum_{m=n}^{\infty} E_m$. Akkor

$$\mathbf{M}(\eta_n) = \sum_{m=n}^{\infty} \mathbf{M}(\eta_n | E_m) \mathbf{P}(E_m) + \mathbf{M}(\eta_n | \bar{E}) \mathbf{P}(\bar{E}) \geqq \sum_{m=n}^{\infty} \mathbf{M}(\eta_n | E_m) \mathbf{P}(E_m).$$

Mivel

$$\mathbf{M}(\eta_n | E_m) = \mathbf{M}\left(\sum_{k=n}^{\infty} \zeta_k^2 \left(\frac{1}{A_k^2} - \frac{1}{A_{k+1}^2} \right) \middle| E_m \right) \geqq \sum_{k=n}^{\infty} \mathbf{M}(\zeta_k^2 | E_m) \left(\frac{1}{A_k^2} - \frac{1}{A_{k+1}^2} \right).$$

Másrészt, ha $k \geqq m$, $\zeta_k = \zeta_m + \zeta_k - \zeta_m$, és így

$$\mathbf{M}(\zeta_k^2 | E_m) = \mathbf{M}(\zeta_m^2 + 2\zeta_m(\zeta_k - \zeta_m) + (\zeta_k - \zeta_m)^2 | E_m) \geqq$$
$$\geqq \mathbf{M}(\zeta_m^2 + 2\zeta_m(\zeta_k - \zeta_m) | E_m).$$

Mivel $\zeta_k - \zeta_m$ független a $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ változóktól, tehát $\zeta_k - \zeta_m$ független ζ_m-től, a csak a $\xi_1, \ldots, \xi_m$ változók értékeire vonatkozó E_m feltevés mellett is, ennélfogva $\mathbf{M}(\zeta_m(\zeta_k - \zeta_m) | E_m) = 0$ és így

$$\mathbf{M}(\zeta_k^2 | E_m) \geqq \mathbf{M}(\zeta_m^2 | E_m) \qquad \text{ha } k \geqq m.$$

Másrészt az E_m feltevés mellett $|\zeta_m| \geqq A_m \varepsilon$ és így

$$\mathbf{M}(\zeta_k^2 | E_m) \geqq \mathbf{M}(\zeta_m^2 | E_m) \geqq \varepsilon^2 A_m^2.$$

Ilyenmódon

$$\mathbf{M}(\eta_n | E_m) \geqq \varepsilon^2 A_m^2 \sum_{k=m}^{\infty} \left(\frac{1}{A_k^2} - \frac{1}{A_{k+1}^2} \right) = \varepsilon^2$$

tehát

$$\mathbf{M}(\eta_n) \geqq \varepsilon^2 \sum_{m=n}^{\infty} \mathbf{P}(E_m) = \varepsilon^2 \mathbf{P}(E) = \varepsilon^2 \mathbf{P}\left(\sup_{k \geqq n} \left| \frac{\zeta_k}{A_k} \right| \geqq \varepsilon \right) \tag{2}$$

(1)-ből és (2)-ből a 2b. lemma állítása már következik. Figyelembe véve, hogy ha $\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{D_k^2}{A_k^2} < \infty$ és $A_n \to \infty$, akkor $\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{D_k^2}{A_k^2} = 0$, a 2b. lemmából a 2. lemma állítása már következik.

A 2. lemma segítségével először kimutatjuk, hogy

$$\mathbf{P}\left(\lim_{N\to\infty}\frac{\eta_N(\mathcal{B})}{\sum\limits_{n=1}^{N}p_n}=1\,\middle|\,C\right)=1.$$

Ez a következőképpen látható be: a C feltétel mellett $\eta_N(\mathcal{B})=\eta_1+\eta_2+\cdots+\eta_N$, ahol az η_k változók függetlenek és $\mathbf{P}\,\eta_k=1)=p_k$, $\mathbf{P}(\eta_k=0)=1-p_k$; tehát $\mathbf{M}(\eta_k)=p_k$. Legyen $\eta_k^*=\eta_k-p_k$; akkor $\mathbf{M}(\eta_k^*)=0$ és $\mathbf{D}(\eta_k^*)=\sqrt{p_k(1-p_k)}$. Az η_k^* változókra alkalmazható a 2. lemma, ha abban $A_n=\sum\limits_{k=1}^{n}p_k$; ugyanis feltevésünk szerint $A_n=\sum\limits_{k=1}^{n}p_k\to\infty$ és $A_{n+1}\geqq A_n$, másrészt

$$\frac{A_{n+1}}{A_n}=1+\frac{p_n}{A_n}\leqq 1+\frac{1}{A_n}\leqq 1+\frac{1}{A_1}=c;$$

végül pedig

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{D_n^2}{A_n^2}=\sum_{n=1}^{n}\frac{p_n(1-p_n)}{A_n^2}\leqq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p_n}{A_n A_{n-1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{A_{n-1}}-\frac{1}{A_n}\right),$$

tehát a $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{D_n^2}{A_n^2}$ sor valóban konvergál; ennélfogva

$$\mathbf{P}\left(\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{1}^{n}\eta_k^*}{\sum\limits_{1}^{n}p_k}=0\,\middle|\,C\right)=1.$$

Mivel

$$\mathbf{P}\left(\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\eta_k^*}{\sum\limits_{k=1}^{n}p_k}=0\,\middle|\,C\right)=\mathbf{P}\left(\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\eta_k}{\sum\limits_{k=1}^{n}p_k}=1\,\middle|\,C\right)=$$

$$=\mathbf{P}\left(\lim_{n\to\infty}\frac{\eta_N(\mathcal{B})}{\sum\limits_{1}^{n}p_k}=1\,\middle|\,C\right),$$

tehát

$$\mathbf{P}\left(\lim_{n\to\infty}\frac{\eta_N(\mathcal{B})}{\sum\limits_{1}^{n}p_k}=1\,\middle|\,C\right)=1. \tag{8}$$

Hasonlóképpen látható be, a 2. lemma segítségével, hogy

$$\mathbf{P}\left(\lim_{N\to\infty}\frac{\eta_N(\mathcal{A}\mathcal{B})}{\mathcal{P}(\mathcal{A}|\mathcal{B})\sum\limits_{n=1}^{N}p_n}=1\,\middle|\,C\right)=1 \tag{9}$$

(8)-ból és (9)-ből azonban következik, hogy

$$\mathbf{P}\left(\lim_{N\to\infty}\frac{\eta_N(\mathfrak{A}\mathfrak{B})}{\eta_N(\mathfrak{B})}=\mathcal{P}(\mathfrak{A}\mid\mathfrak{B})\,\middle|\,C\right)=1. \tag{10}$$

Ilyenmódon a következő tételt bizonyítottuk be:

2. b. TÉTEL. *Az 1. tétel feltevései mellett*

$$\mathbf{P}(\lim_{N\to\infty}\gamma_N(\mathfrak{A}\mid\mathfrak{B})=\mathcal{P}(\mathfrak{A}\mid\mathfrak{B})\mid C)=1,$$

vagyis $\mathfrak{A}$-nak $\mathfrak{B}$-re vonatkozó feltételes relatív gyakorisága a C feltétel mellett 1 valószínűséggel konvergál $\mathfrak{A}$-nak $\mathfrak{B}$-re vonatkozó feltételes valószínűségéhez, hacsak $C=\mathfrak{C}^{(1)}*\mathfrak{C}^{(2)}*\cdots$, $\mathfrak{B}\subseteq\mathfrak{C}^{(N)}$ $(N=1,2,\ldots)$ és

$$\sum_{N=1}^{\infty}\mathcal{P}(\mathfrak{B}\mid\mathfrak{C}^{(N)})=\infty. \tag{11}$$

MEGJEGYZÉS. A bizonyításból látszik (lásd (8)-at), hogy a (11) feltevés azt jelenti, hogy a $\mathfrak{B}$ esemény a kísérletsorozat során 1 valószínűséggel végtelen sokszor következik be; ebben az értelemben a (11) feltétel természetes, hiszen, ha (11) nem teljesül, akkor a $\mathfrak{B}$ esemény a kísérletsorozat során 1 valószínűséggel csak véges sokszor következik be, és így a feltételes relatív gyakoriság határértékéről tulajdonképpen nem érdemes beszélni, mivel a $\gamma_N(\mathfrak{A}\mid\mathfrak{B})$ $(N=1,2,\ldots)$ számsorozat 1 valószínűséggel valahonnét kezdve állandó. Nyilvánvaló továbbá, hogy a 2. b. tétel állítása különösen abban az esetben figyelemreméltó, amikor $\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}p_n=0$; ez esetben ugyanis

$$\mathbf{P}\left(\lim_{N\to\infty}\frac{\eta_N(B)}{N}=0\,\middle|\,C\right)=1,$$

vagyis a B esemény relatív gyakorisága 1 valószínűséggel 0-hoz tart, és így a feltételes relatív gyakoriságra vonatkozó állítás nem pótolható a közönséges relatív gyakoriságra vonatkozó állítással.

Érdemes megemlíteni a 2. b. tétel egy számelméleti következményét.

Ismeretes, hogy a (0, 1) intervallumban fekvő x valós számok előállíthatók az

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon_n(x)}{q_1q_2\cdots q_n}$$

CANTOR-féle sorokkal,* ahol $q_n\geqq 2$ egész és $\varepsilon_n(x)$ a $0,1,\ldots,q_n-1$ értékeket veheti fel; az $\varepsilon_n(x)$ számok egyértelműleg meg vannak határozva, kivéve, ha x racionális szám, amely előállítható $x=\sum_{n=1}^{N}\frac{\varepsilon_n(x)}{q_1q_2\cdots q_n}$ alakban $(\varepsilon_n(x)>0)$; ez esetben lehetséges az

$$x=\sum_{n=1}^{N}\frac{\varepsilon_n(x)}{q_1q_2\cdots q_n}+\frac{\varepsilon_N(x)-1}{q_1q_2\cdots q_N}+\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{q_n-1}{q_1q_2\cdots q_n}$$

* L. pl. O. PERRON, Irrationalzahlen, W. de Gruyter, Berlin, 1921, 111—116.

előállítás is; állapodjunk meg, hogy ez esetben mindig a véges előállítást választjuk. Jelölje $\eta_N(x; k_1, k_2, \ldots, k_s)$ az $\varepsilon_1(x), \varepsilon_2(x), \ldots, \varepsilon_N(x)$ számok közül azok számát, amelyek a $k_1, k_2, \ldots, k_s$ nemnegatív egész számok valamelyikével egyenlők. A 2. b. tétel következményeképpen adódik, hogy ha teljesülnek a következő feltevések:

$$1) \qquad q_n \geqq \max(k_1, k_2, \ldots, k_s), \quad \text{ha} \quad n \geqq n_0;$$

és

$$2) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q_n} = +\infty,$$

akkor majdnem minden x-re

$$(12) \qquad \lim_{N\to\infty} \frac{\eta_N(x; k_i)}{\eta_N(x: k_1, k_2, \ldots, k_s)} = \frac{1}{s} \qquad (i = 1, 2, \ldots, s)$$

vagyis *a* $k_1, k_2, \ldots, k_s$ *számok feltételes relatív gyakoriságai majdnem minden valós szám* CANTOR-*féle sorában határértékben egyenlők, feltéve, hogy teljesülnek az* 1) *és* 2) *feltevések.*

Ez nyilvánvalóan BOREL híres tételének* az általánosítása: ha $q_n = q$ nem függ n-től, akkor speciális esetként nyerjük a BOREL-tételt.

Az előbb bebizonyított tételek messzemenően általánosíthatók, amennyiben érvényes a következő:

3. TÉTEL. *Legyenek* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ *tetszőleges, egyforma* $[\mathcal{H}, \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \mathcal{P}(\mathcal{A}|\mathcal{B})]$ *feltételes eloszlásrendszerű, ezen eloszlásrendszerek* $[\mathrm{H}, \mathbf{T}_1^*, \mathbf{T}_2, \mathbf{P}(A|B)]$ *végtelen szorozatterében a 1. §. 16. tétele értelmében* $\mathbf{T}_2$*-re nézve független valószínűségi változók. Legyen* $\mathcal{B} \in \mathcal{T}_2$ *és jelölje* $\mathbf{M}(\xi|\mathcal{B})$ *a* ξ_k *változók (közös) feltételes várható értékét a* $\mathcal{B}$ *feltétel mellett; legyen* $C = \mathcal{C}^{(1)} * \mathcal{C}^{(2)} * \ldots \in \mathbf{T}_2$ $(\mathcal{C}^{(k)} \in \mathcal{T}_2)$ *továbbá* $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}^{(k)}$ $(k = 1, 2, \ldots)$. *Legyen* $p_N = \mathcal{P}(\mathcal{B}|\mathcal{C}^{(N)})$ *és tegyük fel, hogy teljesül a* $\sum_{n=1}^{\infty} p_n = +\infty$ *feltétel. Jelölje* $\zeta_N(\xi|\mathcal{B})$ *a* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N$ *változók* $\mathcal{B}$*-re vonatkozó feltételes empirikus középértékét, vagyis legyen*

$$(13) \qquad \zeta_N(\xi|\mathcal{B}) = \frac{\xi_{i_1} + \xi_{i_2} + \cdots + \xi_{i_n}}{n} \qquad (n = \eta_N(\mathcal{B}))$$

ahol $\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \ldots, \xi_{i_n}$ *jelentik a* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N$ *változók közül azokat, amelyek értéke* $\mathcal{B}$*-be esik. Ha a* ξ_k *változók korlátosak,* $|\xi_k| \leqq K$ *és* $\varepsilon > 0$, *akkor*

$$\lim_{N\to\infty} \mathbf{P}(|\zeta_N(\xi|\mathcal{B}) - \mathbf{M}(\xi|\mathcal{B})| < \varepsilon | C) = 0.$$

4. a. TÉTEL: *A 3. tétel feltételei mellett, ha még teljesül a*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{\log N} \sum_{n=1}^{N} p_n = +\infty$$

* E. Borel, Les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques, Rend. Circ. Math. Palermo 27 (1909), 247—271.

feltétel is,

$$\mathbf{P}(\lim_{N\to\infty} \zeta_N(\xi|\mathfrak{B}) = \mathbf{M}(\xi|\mathfrak{B})|C) = 1.$$

MEGJEGYZÉS: *Ha a ξ_n változók csak a 0 és 1 értéket veszik fel, akkor a 3. és 4. a. tétel speciális eseteként az 1., ill. 2. a. tételek adódnak.*

BIZONYÍTÁS: Lényegében ugyanazzal az (Sz. N. BERNSTEIN-tól származó) gondolatmenettel, amellyel az 1. lemmát bebizonyítottuk, belátható a következő segédtétel is:

3. LEMMA: *Ha a $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ változók egyforma eloszlásúak, teljesen függetlenek és korlátosak, $\mathbf{M}(\xi_k) = M$, $|\xi_k - M| \leqq K$ $(k = 1, 2, \ldots)$ és szórásuk $\mathbf{D}(\xi_k) = D$ véges, akkor*

$$\mathbf{P}\left(\left|\frac{\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_n}{n} - M\right| > \varepsilon\right) < 2\varrho^n,$$

ahol

$$\varrho = e^{-\frac{\varepsilon^2}{2\left(D+\frac{\varepsilon K}{2D}\right)^2}}, \text{ ha } \varepsilon < pq.$$

A 3. lemma bizonyítása megtalálható pl. [5]-ben (XI. fejezet 4. §.) A 3. lemma segítségével a 3. és 4. a. tételek ugyanúgy bizonyíthatók, mint az 1. lemma segítségével az 1. és 2. a. tételek, ezért a bizonyítást nem részletezzük.

A 4. a. tételben szereplő $\lim_{N\to\infty} \frac{1}{\log N} \sum_{n=1}^{N} p_n = +\infty$ feltevés nem szükséges a tétel állításának teljesüléséhez, sőt a ξ_k változók korlátossága sem szükséges; elegendő feltenni, hogy $\mathbf{M}(\xi|\mathfrak{B})$ és $\mathbf{D}(\xi|\mathfrak{B})$ léteznek, vagyis érvényes a következő

4. b. TÉTEL *Az 1. tétel feltevései mellett (kivéve a ξ_k korlátosságára vonatkozó feltevést) ha $\mathbf{M}(\xi|\mathfrak{B})$ és $\mathbf{D}(\xi|\mathfrak{B})$ létezik, akkor*

$$\mathbf{P}(\lim_{N\to\infty} \zeta_n(\xi|\mathfrak{B}) = \mathbf{M}(\xi|\mathfrak{B})|C) = 1.$$

BIZONYÍTÁS: Legyen $\eta_n = 1$, ha $\xi_n \in \mathfrak{B}$ és $\eta_n = 0$, ha $\xi_n \overline{\in} \mathfrak{B}$, továbbá legyen $\xi_n^* = \eta_n \xi_n$, akkor $\mathbf{M}(\xi_n^*) = p_n \mathbf{M}(\xi|\mathfrak{B})$ és

$$\mathbf{D}^2(\xi_n^*) = p_n \mathbf{D}^2(\xi|\mathfrak{B}) + p_n(1-p_n)\mathbf{M}^2(\xi|\mathfrak{B}).$$

Ennélfogva, ha $A_n = \sum_{n=1}^{N} p_n$, akkor az $A_{n+1} \geqq A_n$, $\lim_{n\to\infty} A_n = \infty$, $\frac{A_{n+1}}{A_n} \leqq 1 + \frac{1}{A_1} = c$ feltételek teljesülnek és teljesül a $\frac{\Sigma \mathbf{D}^2(\xi_n^*)}{A_n^2} < +\infty$ feltevés is; vagyis alkalmazható a $\xi_n^{**} = \xi_n^* - \mathbf{M}(\xi_n^*)$ változókra és az A_n sorozatra a 2. lemma, és így kapjuk, hogy

$$\mathbf{P}\left(\lim_{N\to\infty} \frac{\sum_{n=1}^{N} \xi_n^{**}}{\sum_{n=1}^{N} p_n} = 0 \,\middle|\, C\right) = 1,$$

vagyis

$$\mathbf{P}\left(\lim_{N\to\infty}\frac{\sum_{n=1}^{N}\xi_n^*}{\sum_{n=1}^{N}p_n}=\mathbf{M}(\xi\,|\,\mathfrak{B})\,\middle|\,C\right)=1. \tag{14}$$

Mivel a (8) szerint

$$\mathbf{P}\left(\lim_{N\to\infty}\frac{\eta_N(\mathfrak{B})}{\sum_{n=1}^{N}p_n}=1\,\middle|\,C\right)=1 \tag{15}$$

(14)-ből és (15)-ből következik, hogy

$$\mathbf{P}\left(\lim_{N\to\infty}\frac{\sum_{n=1}^{N}\xi_n^*}{\eta_N(\mathfrak{B})}=\mathbf{M}(\xi\,|\,\mathfrak{B})\,\middle|\,C\right)=1. \tag{16}$$

Tekintve, hogy $\zeta_N(\xi\,|\,\mathfrak{B})=\dfrac{\sum_{n=1}^{N}\xi_n^*}{\eta_N(\mathfrak{B})}$, ezzel a 4. b. tételt bebizonyítottuk.

Nyilvánvaló, hogy ha $\mathfrak{C}^{(N)}=\mathfrak{B}$ ($N=1,2,\ldots$), akkor a 4. a., ill. 4. b. tételek speciális eseteként a nagy számok közönséges törvényeit kapjuk. Ha ξ_n csak az 1 és 0 értékeket veszi fel, mégpedig $\xi_n=\xi_n(a)=1$, ha $a\in\mathfrak{A}$, akkor a 4. b. tétel a 2. b. tételre redukálódik.

Ezen § tételeit mind feltételes valószínűségi mezők szorzataira mondottuk ki, mivel a tételek feltételei így a legszemléletesebbek, és e fogalmazás egyben evidenssé teszi, hogy a szóbanforgó tételek feltételeinek megfelelő valószínűségi mezők valóban léteznek. E tételek érvényességéhez azonban egyáltalán nem szükséges, hogy a szóbanforgó valószínűségi mező ilyen módon legyen megkonstruálva. E tételek bizonyításánál ugyanis ez a tény nincsen lényegesen kihasználva. Ilyenmódon e § tételei mind általánosíthatók. Nyilvánvalóan elegendő a 4. b. tételt kimondani ebben az általános alakban, mivel az e § összes többi tételeit tartalmazza. A 4. b. tétel szóbanforgó általánositása a következő:

4. c. TÉTEL: *Legyen* $[\mathrm{H},\mathbf{T}_1,\mathbf{T}_2,\mathbf{P}(A\,|\,B)]$ *egy feltételes valószínűségi mező, legyenek* $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n,\ldots$ *ezen a mezőn értelmezett, és* $\mathbf{T}_2$*-re nézve független valószínűségi változók, amelyek ugyanazzal a* $[\mathcal{H},\mathfrak{T}_1,\mathfrak{T}_2,\mathfrak{P}(\mathfrak{A}\,|\,\mathfrak{B})]$ *feltételes eloszlásrendszerrel bírnak, legyen* $\mathfrak{B}\in\mathfrak{T}_2$, *és legyen* $B_n\in\mathbf{T}_2$ *az a halmaz, amelyen* $\xi_n\in\mathfrak{B}$. *Legyen* $C\in\mathbf{T}_2$, *tegyük fel, hogy* $B_n\subseteq C$ $(n=1,2,\ldots)$; *legyen* $p_n=\mathbf{P}(B_n|C)$ *és tegyük fel, hogy teljesül a* $\sum_{n=1}^{\infty}p_n=+\infty$ *feltétel. Tegyük fel, hogy* $\mathbf{M}(\xi_k\,|\,B_k)=\mathbf{M}(\xi_k\,|\,\xi_k\in\mathfrak{B})=M$ *és* $\mathbf{D}(\xi_k\,|\,B_k)=\mathbf{D}(\xi_k\,|\,\xi_k\in\mathfrak{B})$ *léteznek. Akkor*

$$\mathbf{P}\left(\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{\substack{\xi_k\in\mathfrak{B}\\1\leq k\leq n}}\xi_k}{\sum\limits_{\substack{\xi\in\mathfrak{B}\\1\leq k\leq n}}1}=M\,\middle|\,C\right)=1.$$

MEGJEGYZÉS: *Ahelyett, hogy* $B_n\subseteq C$ $(n=1,2,\ldots)$ *elegendő feltenni, hogy ha* $\mathfrak{B}'\subseteq\mathfrak{B}$ *és* B'_n *az a halmaz amelyen* $\xi_n\in\mathfrak{B}'$, *akkor* $\mathbf{P}(B'_n|B_nC)=\mathbf{P}(B'_n|B_n)$ $(n=1,2,\ldots)$. *Ha így fogalmazzuk meg, a 4. c. tétel speciális esetként tartalmazza a 4. b. tételt.*

A 4. b. tétel bizonyításából az is látható, hogy ha a változók feltételes eloszlásrendszerei nem azonosak, de egyébként a 4. c. tétel feltételei teljesülnek, kivéve azt, hogy $\mathbf{D}(\xi_k|\mathfrak{B})=D_k$ nem függ k-tól, akkor a 4. c. tétel állításának érvényessége abban az esetben mutatható ki, ha a $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{p_kD_k^2}{\left(\sum\limits_{j=1}^{k}p_j\right)^2}$ sor konvergens. Ilyen módon tehát érvényes a következő

4. d. TÉTEL. *Ha a 4. c. tétel feltevései teljesülnek, kivéve azt, hogy a* ξ_k *változók egyforma feltételes eloszlásrendszerrel bírnak,* $\mathbf{M}(\xi_k|\mathfrak{B})=M$ *és* $\mathbf{D}(\xi_k|\mathfrak{B})=D_k$, *akkor a 4. c. tétel állítása érvényben marad, hacsak teljesül még a*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{p_kD_k^2}{\left(\sum\limits_{j=1}^{k}p_j\right)^2}<+\infty$$

feltétel.

3. §. *Határeloszlástételek*

Először a következő tételt bizonyítjuk be:

1. TÉTEL: *A* $[\mathrm{H},\mathbf{T}_1^*,\mathbf{T}_2\mathbf{P}(A|B)]=[\mathcal{H},\mathcal{T}_1,\mathcal{T}_2,\mathcal{P}(\mathfrak{A}|\mathfrak{B})]^{\infty*}$ *feltételes valószínűségi mezőn a 16. tétel értelmében értelmezett* $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n,\ldots$ *valószínűségi változókról, amelyek tehát egyforma* $[\mathcal{H},\mathcal{T}_1,\mathcal{T}_2,\mathcal{P}(\mathfrak{A}|\mathfrak{B})]$ *feltételes eloszlásrendszerrel bírnak, és* T_2*-re nézve függetlenek, tegyük fel, hogy* $\mathbf{M}(\xi_n|\mathfrak{B})=0$ *és* $\mathbf{D}(\xi_n|\mathfrak{B})=D$ *véges* $(n=1,2,\ldots)$; *továbbá legyen*

$$C=\mathcal{C}^{(1)}*\mathcal{C}^{(2)}*\ldots*\mathcal{C}^{(N)}*\ldots\in\mathbf{T}_2,$$

ahol $\mathfrak{B}\subseteq\mathcal{C}^{(N)}$ $(N=1,2,\ldots)$ $\mathcal{P}(\mathfrak{B}|\mathcal{C}^{(N)})=p_N$ *és* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}p_n=+\infty$. *Akkor képezve a*

$$\zeta_N(\xi|\mathfrak{B})=\frac{\sum\limits_{k=1}^{N}\vartheta_B(\xi_k)}{D\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{N}p_k}}$$

változót, ahol

$$\vartheta_{\mathfrak{B}}(x)=\begin{cases} x, & ha \quad x\in\mathfrak{B} \\ 0, & ha \quad x\bar{\in}\mathfrak{B}\end{cases}$$

(tehát $\sum_{k=1}^{N}\vartheta_{\mathfrak{B}}(\xi_k)$ a $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_N$ változók közül azok összegével egyenlő, amelyek értéke $\mathfrak{B}$-be esik), érvényes a

$$\lim_{N\to\infty}\mathbf{P}(\zeta_N(\xi|\mathfrak{B})<x|C)=\Phi(x)$$

reláció, ahol

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt \qquad (-\infty<x<+\infty).$$

BIZONYÍTÁS: Legyen $F(x)=F(x|\mathfrak{B})$ a ξ_k változók feltételes eloszlásfüggvénye a $\mathfrak{B}$ feltétel mellett, és $F_n(x)$ az $F(x)$ függvény önmagával való n-szeres kompozíciója; legyen a rövidség kedvéért $\sum_{n=1}^{N}p_n=Q_N$ $(N=1,2,\ldots)$; akkor $\zeta_N(\xi|\mathfrak{B})$ eloszlásfüggvénye

$$\sum_{n=0}^{N}\pi_n^{(N)}F_n(xD\sqrt{Q_N}) \qquad (F_0(x)\equiv 1 \text{ per. def.})$$

ahol

$$\pi_n^{(N)}=\prod_{k=1}^{N}(1-p_k)\sum_{i_1,i_2,\ldots,i_n}\prod_{r=1}^{n}\left(\frac{p_{i_r}}{1-p_{i_r}}\right)$$

annak a valószínűsége, hogy a $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_N$ változók közül pontosan n-nek az értéke esik $\mathfrak{B}$-be. Jelölje $\psi_N(t)$ a $\vartheta_N(\xi|\mathfrak{B})$ változó $\mathfrak{B}$ feltétel melletti (feltételes) karakterisztikus függvényét és $\varphi(t)$ a ξ_k változók $\mathfrak{B}$ feltétel melletti (feltételes) karakterisztikus függvényét, akkor

$$\psi_N(t)=\sum_{n=0}^{N}\pi_n^{(N)}\left(\varphi\left(\frac{t}{D\sqrt{Q_N}}\right)\right)^n$$

és így

$$\psi_N(t)=\prod_{k=1}^{N}\left(1+p_k\left(\varphi\left(\frac{t}{D\sqrt{Q_N}}\right)-1\right)\right).$$

Mivel feltevés szerint $\varphi'(0)=0$ és $\varphi''(0)=-\frac{D^2}{2}$ és $\lim_{N\to\infty}Q_N=\infty$, tehát

$$\psi_N(t)=e^{-\frac{t^2}{2}+o(1)}$$

és így

$$\lim_{N\to\infty}\psi_N(t)=e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Ebből a tétel állítása már következik.

A centrális határeloszlástétel érvényességéhez nem szükséges az a feltevés, hogy a ξ_k változók (feltételes) eloszlásai megegyezzenek. Érvényes ugyanis a következő

2. a. TÉTEL: *Legyen a* $[\mathrm{H}, \mathbf{T}_1^*, \mathbf{T}_2, \mathbf{P}(A|B)]$ *feltételes valószínűségi mező a* $[\mathcal{H}^{(k)}, \mathcal{T}_1^{(k)}, \mathcal{T}_2^{(k)}, \mathcal{P}^{(k)}(\mathcal{A}^{(k)}|\mathcal{B}^{(k)})]$ *feltételes valószínűség-eloszlásrendszerek szorzata, és a* ξ_k *változókat értelmezzük a 16. tételnek megfelelően, (tehát* ξ_k *feltételes eloszlásrendszere* $[\mathcal{H}^{(k)}, \mathcal{T}_1^{(k)}, \mathcal{T}_2^{(k)}, \mathcal{P}^{(k)}(\mathcal{A}^{(k)}|\mathcal{B}^{(k)})]$ *és a* ξ_k *változók* $\mathbf{T}_2$*-re nézve függetlenek). Legyen* $C = \mathcal{C}^{(1)} * \mathcal{C}^{(2)} * \ldots \in \mathbf{T}_2$, *ahol* $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}^{(N)} \in \mathcal{T}_2^{(N)}$ $(N = 1, 2, \ldots)$, *továbbá* $\mathcal{P}(\mathcal{B}|\mathcal{C}^{(N)}) = p_N$, $\mathbf{M}(\xi_k|\mathcal{B}) = 0$ *és* $\mathbf{D}(\xi_k|\mathcal{B}) = D_k$. *Vezessük be a*

$$\mathbf{M}(|\xi_k|^3|\mathcal{B}) = L_k^3$$

jelölést, és tegyük fel, hogy

$$\lim_{N \to \infty} \frac{\sum_{k=1}^{N} p_k L_k^3}{\left(\sum_{k=1}^{N} p_k D_k^2\right)^{3/2}} = 0.$$

Legyen

$$\vartheta_{\mathcal{B}}(x) = \begin{cases} x, & ha \quad x \in \mathcal{B} \\ 0, & ha \quad x \bar{\in} \mathcal{B} \end{cases}$$

akkor

$$\lim_{N \to \infty} \mathbf{P}\left(\frac{\sum_{k=1}^{N} \vartheta_{\mathcal{B}}(\xi_k)}{\sqrt{\sum_{k=1}^{N} p_k D_k^2}} < x \,\middle|\, C\right) = \Phi(x).$$

BIZONYÍTÁS: A $\vartheta_{\mathcal{B}}(\xi_k)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ változók nyilvánvalóan C-re nézve függetlenek egymástól, továbbá

$$\mathbf{M}(\vartheta_{\mathcal{B}}(\xi_k)|C) = 0$$
$$\mathbf{D}^2(\vartheta_{\mathcal{B}}(\xi_k)|C) = p_k D_k^2$$
$$\mathbf{M}(|\vartheta_{\mathcal{B}}(\xi_k)|^3|C) = p_k L_k^2$$

és így *Ljapunov* tételének összes* feltételei teljesülnek C-re nézve. Ebből a tétel állítása következik.

A most bebizonyított tétel *Ljapunov* tételének egyenes általánosítása feltételes valószínűségi mezőkre. Ez az általánosítás *Lindeberg* tételére vonatkozólag is elvégezhető. *Lindeberg* tételének ezt az általánosítását úgy fogalmazzuk meg, hogy függetlenítjük a szóban forgó valószínűségi mező szorzatként való konstrukciójától, ami itt ugyanúgy nem szükséges a tétel érvényességéhez, mint a nagy számok törvénye esetében. Így nyerjük a következő tételt:

2. b. TÉTEL: *Legyen* $[\mathrm{H}, \mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \mathbf{P}(A|B)]$ *egy feltételes valószínűségi mező, legyenek* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ *ezen értelmezett és* $\mathbf{T}_2$*-re nézve független valószínűségi változók,* ξ_k *feltételes eloszlásrendszere legyen* $[\mathcal{H}^{(k)}, \mathcal{T}_1^{(k)}, \mathcal{T}_2^{(k)}, \mathcal{P}^{(k)}(\mathcal{A}|\mathcal{B})]$. *Legyen* $\mathcal{B}$ *egy* BOREL*-halmaz, amely az összes* $\mathcal{T}_2^{(k)}$ *halmazrendszerekhez hozzátartozik, jelölje* $\mathcal{I}_x$ *a* $(-\infty, x)$ *intervallumot és legyen* $F_k(x|\mathcal{B}) = \mathcal{P}^{(k)}(\mathcal{I}_x|\mathcal{B})$ $(-\infty < x < \infty)$ ξ_k *feltételes eloszlásfüggvénye* $\mathcal{B}$*-re nézve. Tegyük fel, hogy*

* Lásd pl. [5]. XIII. fej.

$\mathbf{M}(\xi_k|\mathfrak{B})=0$ *és* $\mathbf{D}(\xi_k|\mathfrak{B})=D_k$ *létezik; legyen* $C\in\mathbf{T}_2$, *jelölje* B_k *azt a halmazt, amelyen* $\xi_k\in\mathfrak{B}$ *és tegyük fel, hogy* $\prod_{k=1}^{\infty} B_k\subseteq C$. *Legyen* $\mathbf{P}(B_k|C)=p_k$ *és vezessük be az*

$$S_n=\sqrt{\sum_{k=1}^{n} p_k D_k^2}$$

jelölést. Legyen $\zeta_n=\sum_{\substack{\xi_k\in\mathfrak{B}\\ 1\leq k\leq n}}\xi_k$. *Akkor annak szükséges és elégséges feltétele, hogy* $\frac{\zeta_n}{S_n}$ *C-re vonatkozó feltételes eloszlása a standardizált normális eloszláshoz konvergáljon, az, hogy minden pozitív ε-ra teljesüljön a*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{S_n^2}\sum_{k=1}^{n}p_k\int_{|x|>\varepsilon S_n}x^2\,dF_k(x|\mathfrak{B})=0$$

feltétel.

Ellentétben a 2. a. tétellel, (amelyből az 1. tétel nem következik, hiszen az 1. tétel feltételeiből $\mathbf{M}(|\xi_k|^3|\mathfrak{B})$ létezése sem következik), a 2. b. tétel tartalmazza speciális esetként az 1. tételt. Ugyanis ha $[\mathrm{H},\mathbf{T}_1,\mathbf{T}_2,\mathbf{P}(A|B)=$ $=[\mathcal{H},\mathcal{T}_1,\mathcal{T}_2,\mathcal{P}(\mathfrak{A}|\mathfrak{B})]^{\infty *}$ és $C=\mathfrak{C}^{(1)}*\mathfrak{C}^{(2)}*\ldots$, akkor a $\prod_{k=1}^{\infty}B_k\subseteq C$ feltétel azt jelenti, hogy $\mathfrak{B}\subseteq\mathfrak{C}^{(k)}$ $(k=1,2,\ldots)$, továbbá $p_k=\mathbf{P}(B_k|C)=\mathcal{P}(\mathfrak{B}|\mathfrak{C}^{(k)})$ $D_k=\mathbf{D}(\xi_k|\mathfrak{B})=D$ és $F_k(x|\mathfrak{B}=F(x|\mathfrak{B})$ nem függ k-tól és így

$$S_n=D\sqrt{\sum_{k=1}^{n}p_k}\,.$$

Ennélfogva ha $\varepsilon>0$, akkor

$$\frac{1}{S_n^2}\sum_{k=1}^{n}p_k\int_{|x|>\varepsilon S_n}x^2\,dF_k(x|\mathfrak{B})=\frac{1}{D^2}\int_{|x|>\varepsilon S_n}x^2\,dF(x|\mathfrak{B})\to 0$$

mivel $S_n\to\infty$. Az 1. tétel tehát így is bizonyítható. A közvetlen elemi bizonyítás, amelyet fentebb adtunk, azonban nyilvánvalóan egyszerűbb.

Tegyük fel, hogy a következőkben a szóban forgó feltételes valószínűségi mérték *tökéletes*, vagyis eleget tesz a következő feltevéseknek:*

1) Ha $A_1\subseteq A_2$ és $A_2\in\mathbf{T}_1$, továbbá $B\in\mathbf{T}_2$ és $\mathbf{P}(A_2|B)=0$, akkor $BA_1\in\mathbf{T}_1$ (és így $\mathbf{P}(A_1|B)=0$).

2) Ha $\xi=\xi(a)$ egy valószinűségi változó, a $\xi(a)\in\mathfrak{A}$ feltétellel definiált halmaz $\mathbf{T}_1$-hez tartozik, és $B\in\mathbf{T}_2$, akkor

$$\mathbf{P}(\xi(a)\in\mathfrak{A}|B)=\inf_{\mathfrak{A}\subseteq\mathfrak{N}}\mathbf{P}(\xi(a)\in\mathfrak{N}|B)$$

* A tökéletes Kolmogorov-féle valószínűségi mező fogalmára vonatkozólag lásd [6].

ahol $\mathfrak{N}$ nyílt halmaz; vagyis $\mathbf{P}(\xi\in\mathfrak{A}|B)$ egyenlő a $\mathbf{P}(\xi\in\mathfrak{N}|B)$ számok legnagyobb alsó korlátjával, ha $\mathfrak{N}$ végigfut az összes, az $\mathfrak{A}$ halmazt tartalmazó nyílt halmazokon.

Ez esetben érvényes a következő tétel:

3. TÉTEL: *Ha* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ a $[\mathrm{H}, \mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \mathbf{P}(A|B)]$ *tökéletes feltételes valószínűségi mezőn értelmezett és egy* $C\in T_2$ *halmazra nézve teljesen független változók,* $\zeta_n=\sum_{k=1}^{n}\xi_k$, $\mathbf{M}(\zeta_n|C)=M_n$ *és* $\mathbf{D}(\zeta_n|C)=D_n$ *léteznek, továbbá az* $\eta_n=\frac{\zeta_n-M_n}{D_n}$ *változók C-re vonatkozó feltételes eloszlása a normális eloszláshoz konvergál, vagyis*

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}(\zeta_n<x|C)=\Phi(x),$$

és B egy $\mathbf{T}_2$*-höz tartozó halmaz, amelyre* $B\subseteq C$ *és* $\mathbf{P}(B|C)>0$, *akkor az* η_n *változók feltételes eloszlása B-re nézve is a normális eloszláshoz konvergál.*

MEGJEGYZÉS. Ez a tétel azért is figyelemreméltó, mert B-re nézve a ξ_k változók általában nem függetlenek, továbbá általában $\mathbf{M}(\zeta_n|B)\neq M_n$ és $\mathbf{D}(\zeta_n|B)\neq D_n$.

BIZONYÍTÁS: A tétel közönséges valószínűségi mezőkre vonatkozólag, és egy speciális esetet illetőleg jelen dolgozat szerzőjétől származik ([7]); az általános esetre nézve a tételt A. N. KOLMOGOROV bizonyította be ([8]). A bizonyítás minden további nélkül átvihető a feltételes valószínűségi mezőkre, hiszen rögzített C mellett $[\mathrm{H}, \mathbf{T}_1, \mathbf{P}(A|C)]$ egy tökéletes KOLMOGOROV-féle valószínűségi mező.

A 3. tételt felhasználhatjuk a centrális határeloszlástétel gyengén függő változókra való kiterjesztésének bebizonyítására. Ha ugyanis $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ a B halmazon értelmezett valószínűségi változóknak egy olyan sorozata, hogy a ξ_n változók értelmezését a B halmazt tartalmazó alkalmasan választott C halmazra kiterjesztve elérhető, hogy azok a C halmazon függetlenek legyenek és alkalmazható legyen rájuk a centrális határeloszlástétel, akkor a B halmazon is érvényes lesz rájuk a centrális határeloszlástétel állítása, hacsak $\mathbf{P}(B|C)>0$. Általában minél lazább sztochasztikus kapcsolat áll fenn a ξ_n változók között, annál kevésbbé kell a B halmazt bővíteni, hogy a bővítés eredményeképpen nyert C halmazon a változók már függetlenné tehetők legyenek.

A szóbanforgó konstrukció azonban nem bármely feltételes valószínűségi mezőn végezhető el, csak ha teljesülnek az alábbi 3, 4 és 5 feltevések:

3) $\mathbf{P}(A|B)$ B-nek folytonos függvénye, a következő értelemben: ha $B_n\subseteq B_{n+1}$, $B_n\in\mathbf{T}_2$ $(n=1,2,\ldots)$ és $B=\lim_{n\to\infty}B_n=\sum_{n=1}^{\infty}B_n$, továbbá $\mathbf{P}(B_n|B_{n+1})>0$ $(n=1,2,\ldots)$, végül pedig $\prod_{n=1}^{\infty}\mathbf{P}(B_n|B_{n+1})$ konvergens, akkor, $B\in\mathbf{T}_2$ és

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}(A|B_n)=\mathbf{P}(A|B), \text{ ha } A\in\mathbf{T}_1.$$

MEGJEGYZÉS: Az a feltevés, hogy $\lim_{n\to\infty} B_n = B \in \mathbf{T}_2$, nem jelent erős megszorítást, mivel a 17. tétel szerint egy tetszőleges feltételes valószínűségi mező kiterjeszthető olymódon, hogy $\mathbf{T}_2$ tartalmazza az összes beletartozó olyan növekvő B_n halmazsorozatok összegeit, amelyekre $\prod_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(B_n|B_{n+1})$ konvergens.

Még két feltevést kell tennünk:

4) $\mathbf{P}(A|B)$ bármely $B \in \mathbf{T}_2$-re nem-atomikus mérték, vagyis ha $\mathbf{P}(A|B) > 0$ akkor van olyan $A' \subseteq A$ halmaz, amelyre $A' \in \mathbf{T}_1$ és $0 < \mathbf{P}(A'|B) < \mathbf{P}(A|B)$.

Ha a 4. feltevés teljesül, hacsak $AC = O$, ahol C egy rögzített halmaz, úgy azt mondjuk, hogy a 4) a C halmazon *kívül* teljesül.

Könnyen belátható, hogy 4)-ből következik, hogy $\mathbf{P}(A|B)$ bír az alábbi 4') tulajdonsággal:

4') Ha $A \in \mathbf{T}_1$ és $B \in \mathbf{T}_2$ továbbá $A \subseteq B$, $\mathbf{P}(A|B) > 0$ és $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ egy pozitív tagú számsorozat, amelyre $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$ akkor megadható A-nak egy olyan $A = \sum_{k=1}^{\infty} A_k$ felbontása, hogy $A_k \in \mathbf{T}_1$ és $A_j A_k = O$ ha $j \neq k$ $(j, k = 1, 2, \ldots)$, továbbá $\mathbf{P}(A_k|B) = p_k \mathbf{P}(A|B)$ $(k = 1, 2, \ldots)$.

4') abból az ismert FRÉCHET-től származó tételből következik, hogy egy nem-atomikus mérték bármely értéket felvesz 0 és értékeinek felső határa között.*

5) Ha $B \in T_2$ és α valós szám $(0 < \alpha < 1)$, akkor megadható olyan C halmaz, hogy $B \subseteq C$, $C \in \mathbf{T}_2$, és $\mathbf{P}(B|C) = \alpha$.

MEGJEGYZÉS: Az 5) feltevés nyilvánvalóan nem teljesülhet egy KOLMOGOROV-féle valószínűségi mező által generált feltételes valószínűségi mező esetében, hiszen ha $\mathbf{P}(A|B) = \frac{\mathbf{P}^*(AB)}{\mathbf{P}^*(B)}$ és minden $D \in \mathbf{T}_1$ halmazra $\mathbf{P}^*(D) \leqq 1$

* Lásd [17] és [18]. Megjegyzendő, hogy ha a 4') állítást csak véges $p_1, p_2, \ldots, p_N$ sorozatokra kívánjuk meg, ahol N rögzített pozitív egész szám, ez atomikus mértékekre is teljesülhet. Könnyen belátható ugyanis, hogy annak szükséges és elégséges feltétele, hogy tetszőleges $p_1, p_2, \ldots, p_N$ pozitív számokhoz, amelyekre $\sum_{k=1}^{N} p_k = 1$ megadható legyen a $\sum_{k=1}^{\infty} r_k$ pozitív és monoton nem növekvő tagú és 1 összegű sornak egy olyan felbontása N részsorra, hogy a k-adik részsor összege p_k legyen, az, hogy a $\sum_{k=1}^{\infty} r_k$ sorra teljesüljenek az alábbi feltételek:

$$r_n \leqq \frac{1}{N} \sum_{k=n}^{\infty} r_k \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

és ha $B \subseteq C$, továbbá $\mathbf{P}^*(B) > 0$ akkor

$$\mathbf{P}(B|C) = \frac{\mathbf{P}^*(BC)}{\mathbf{P}^*(C)} = \frac{\mathbf{P}^*(B)}{\mathbf{P}^*(C)} \geqq \mathbf{P}^*(B)$$

és így, ha

$$0 < \alpha < \mathbf{P}^*(B)$$

akkor nem létezhet olyan C halmaz, amelyre $B \subseteq C$ és $\mathbf{P}(B|C) = \alpha$. Az 5) feltétel nyilvánvalóan teljesül az 1. § 1. példájában tárgyalt esetben, ha $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ integrálja az egész E_n térre divergens.

5) teljesül továbbá például ha $\mathbf{P}(A|B) = \frac{\mathbf{Q}(AB)}{\mathbf{Q}(B)}$, ahol $\mathbf{Q}(C)$ egy nem automatikus és nem korlátos mérték.

Érdekes megjegyezni, hogy az 5) feltétel teljesülhet egy megszámlálható halmazon értelmezett feltételes valószínűségi mező esetében is. Például álljon H a (j, k) számpárokból $(j, k = 0, 1, 2, \ldots)$, legyen

$$P_{jk} = \frac{1}{2^j} \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots)$$

és álljon $\mathbf{T}_2$ a H halmaz azon B nem üres részhalmazaiból, amelyekre a $\sum_{(j,k) \in B} P_{jk}$ sor konvergens; álljon továbbá $\mathbf{T}_1$ a H halmaz összes részhalmazaiból és legyen

$$\mathbf{P}(A|B) = \frac{\sum\limits_{(j,k) \in AB} P_{jk}}{\sum\limits_{(j,k) \in B} P_{jk}}.$$

Legyen $B \in \mathbf{T}_2$ és $\gamma > 0$, legyen továbbá γ diadikus előállítása

$$\gamma = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_j(\gamma)}{2^j}$$

ahol $\varepsilon_0(\gamma)$ tetszőleges nemnegatív egész szám és $\varepsilon_j(\gamma)$ a 0 vagy 1 értéket veszi fel $(j = 1, 2, \ldots)$.

Mivel B a (j, k) számpárok közül j bármely rögzített értékére csak véges sokat tartalmazhat, mert ellenkező esetben $\sum_{(j,k) \in B} P_{jk}$ divergens volna, található $\varepsilon_0(\gamma)$ számú olyan $(0, k)$ számpár, amely nem tartozik B-hez és található j minden olyan értékére, amelyre $\varepsilon_j(\gamma) = 1$, egy olyan (j, k) számpár, amely nem tartozik B-hez. Az így kiválasztott (j, k) számpárok halmaza legyen D. Ekkor, bevezetve a $\sum_{(j,k) \in B} P_{jk} = \beta$ jelölést,

$$\mathbf{P}(B|B+D) = \frac{\beta}{\gamma + \beta}.$$

Ha most $0 < \alpha < 1$, és $\gamma = \frac{\beta(1-\alpha)}{\alpha}$, akkor $\frac{\beta}{\gamma + \beta} = \alpha$, és így bevezetve a $C = B + D$ jelölést,

$$\mathbf{P}(B|C) = \alpha,$$

vagyis a konstruált feltételes valószínűségi mező eleget tesz az 5) tulajdonságnak, annak ellenére, hogy H megszámlálható.

Most bebizonyítjuk a következő tételt:

4. TÉTEL: *Legyen* $[H, \mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \mathbf{P}(A|B)]$ *egy feltételes valószínűségi mező, amely eleget tesz a* 3) *és* 5) *feltevésnek, továbbá a* 4) *feltevésnek a* B *halmazon kívül, ahol* $B \in \mathbf{T}_2$ *és legyenek* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ *olyan, a* B *halmazon értelmezett diszkrét eloszlású valószínűségi változók, amelyekre teljesül a következő feltétel: ha az* x_{nk} $(k = 1, 2, \ldots)$ *számok alkotják* ξ_n *tényleges értékkészletét a* B *feltétel mellett, vagyis*

$$\mathbf{P}(\xi_n = x_{nk}|B) > 0 \ (n, k = 1, 2, \ldots) \text{ és } \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(\xi_n = x_{nk}|B) = 1 \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

akkor

$$(1) \qquad \lambda_n = \sup_{j_1, j_2, \ldots, j_n} \left\{ \frac{\mathbf{P}(\xi_1 = x_{1j_1}, \xi_2 = x_{2j_2}, \ldots, \xi_n = x_{nj_n}|B)}{\mathbf{P}(\xi_n = x_{nj_n}|B)\mathbf{P}(\xi_1 = x_{1j_1}, \ldots, \xi_{n-1} = x_{n-1,j_{n-1}}|B)} - 1 \right\}$$

véges $(n = 2, 3, \ldots)$ *és*

$$(2) \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \lambda_n$$

konvergens. Akkor megadható egy olyan C *halmaz, amelyre* $C \in \mathbf{T}_2$ *és* $B \subseteq C$, *továbbá* $\mathbf{P}(B|C) > 0$ *és a* ξ_n *változók értelmezése kiterjeszthető* C*-re olymódon, hogy a* ξ_n *változók* C*-re nézve teljesen függetlenek legyenek és* ξ_n *feltételes eloszlásfüggvénye* C*-re nézve ugyanaz legyen, mint* B*-re nézve* $(n = 1, 2, \ldots)$.

MEGJEGYZÉS: Könnyen belátható, hogy $\lambda_n \geqq 0$. Ez ugyanis azt jelenti, hogy vannak olyan $j_1, j_2, \ldots, j_n$ számok, amelyekre

$$(3) \qquad \frac{\mathbf{P}(\xi_1 = x_{1j_1}, \ldots, \xi_n = x_{nj_n}|B)}{\mathbf{P}(\xi_n = x_{nj_n}|B)\mathbf{P}(\xi_1 = x_{1j_1}, \ldots, \xi_{n-1} = x_{n-1,j_{n-1}}|B)} > 1 - \varepsilon$$

akármilyen kis pozitív szám is ε. Ezt a következőképpen láthatjuk be: ha (3) baloldala $j_1, j_2, \ldots, j_n$ minden értékére $\leq 1 - \varepsilon$ volna, akkor összeadva ezeket az egyenlőtlenségeket, $j_1, j_2, \ldots, j_n$ összes lehetséges értékeire, következnék, hogy $1 \leq 1 - \varepsilon < 1$, ami ellentmondás.

BIZONYÍTÁS: Először is könnyen belátható, hogy az (1) feltétel teljesüléséből következik, hogy ha A_k az x_{kj} $(j = 1, 2, \ldots)$ számsorozat tetszőleges, nem üres részhalmaza $(k = 1, 2, \ldots, n)$, akkor

$$(4) \qquad \frac{\mathbf{P}(\xi_1 \in A_1, \xi_2 \in A_2, \ldots, \xi_n \in A_n|B)}{\mathbf{P}(\xi_n \in A_n|B)\mathbf{P}(\xi_1 \in A_1, \ldots, \xi_{n+1} \in A_{n-1}|B)} - 1 \leq \lambda_n.$$

Ez a következőképpen látható be: ha az A_k halmaz elemei az x_{kj_i} számok $(i = 1, 2, \ldots, r_k < \infty;\ k = 1, 2, \ldots, n)$, akkor, bevezetve a rövidség kedvéért a

$$\frac{\mathbf{P}(\xi_1 = x_{1j_1}, \ldots, \xi_n = x_{nj_n}|B)}{\mathbf{P}(\xi_n = x_{nj_n}|B)\mathbf{P}(\xi_1 = x_{1j_1}, \ldots, \xi_{n-1} = x_{n-1,j_{n-1}}|B)} = q_n(j_1, j_2, \ldots, j_n)$$

és

$$\mathbf{P}(\xi_n = x_{nj_n}|B)\mathbf{P}(\xi_1 = x_{1j_1}, \ldots, \xi_{n-1} = x_{n-1,j_{n-1}}|B) = Q_n(j_1, j_2, \ldots, j_n)$$

jelöléseket,

$$(5) \qquad \frac{\mathbf{P}(\xi_1 \in A_1, \ldots, \xi_n \in A_n|B)}{\mathbf{P}(\xi_n \in A_n|B)\,\mathbf{P}(\xi_1 \in A_1, \ldots, \xi_{n-1} \in A_{n-1})} = \frac{\sum\limits_{j_1=1}^{r_1}\sum\limits_{j_2=1}^{r_2}\cdots\sum\limits_{j_n=1}^{r_n} q_n(j_1, \ldots, j_n)\, Q_n(j_1, \ldots, j_n)}{\sum\limits_{j_1=1}^{r_1}\sum\limits_{j_2=1}^{r_2}\cdots\sum\limits_{j_n=1}^{r_n} Q_n(j_1, \ldots, j_n)}.$$

(5)-ből (4) már következik, mivel (4) jobboldala $(1+\lambda_n)$-nél nem nagyobb számokból képezett súlyozott középérték lévén, maga sem lehet $1+\lambda_n$-nél nagyobb. Megjegyzendő, hogy az (1) feltétel nyilvánvalóan teljesül ($\lambda_n = 0$-val) és így (2) is teljesül, ha a $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ változók teljesen függetlenek, ennél azonban lényegesen kevesebbet követel meg, tehát (1) és (2) a ξ_n változók közötti sztochasztikus kapcsolat laza voltát megkövetelő feltevésnek tekinthető. *Ha a ξ_n változókra az* (1) *és* (2) *feltevések teljesülnek, azt mondjuk, hogy azok „majdnem függetlenek".*

A 4. tétel bizonyításához szükségünk lesz a következő segédtételre:

1. LEMMA. *Legyen* $[\mathrm{H}, \mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \mathbf{P}(A|B)]$ *egy feltételes valószínűségi mező, amelyre teljesül a* 4) *feltevés; legyenek* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ *a* $B \in \mathbf{T}_2$ *halmazon értelmezett diszkrét és B-re nézve független valószínűségi változók és legyen adva a* $\mathbf{P}(\xi = y_k) = p_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ *diszkrét valószínűségeloszlás. Akkor megadható a B halmazon egy olyan* η *valószínűségi változó, amelyre* $\mathbf{P}(\eta = y_k|B) = p_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ *és amelyre a* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ *és* η *valószínűségi változók teljesen függetlenek.*

BIZONYÍTÁS: Legyenek x_{kj} $(j = 1, 2, \ldots)$ ξ_k lehetséges értékei, tehát $\mathbf{P}(\xi_k = x_{kj}|B) > 0$ $(k, j = 1, 2, \ldots)$. Jelölje $A_{j_1 j_2 \ldots j_n}$ azt a halmazt, amelyen teljesülnek a $\xi_k = x_{kj_k}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ feltevések, akkor

$$\mathbf{P}(A_{j_1 j_2 \ldots j_n}|B) = \prod_{k=1}^{n} \mathbf{P}(\xi_k = x_{kj}|B) > 0$$

és így 4') szerint megadható az $A_{j_1 j_2 \ldots j_n}$ halmaznak egy olyan felbontása a páronként idegen $A^{(k)}_{j_1 j_2 \ldots j_n}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ $\mathbf{T}_1$-hez tartozó halmazokra, hogy $\mathbf{P}(A^{(k)}_{j_1 j_2 \ldots j_n}) = p_k \mathbf{P}(A_{j_1 j_2 \ldots j_n}|B)$ teljesüljön $(k = 1, 2, \ldots)$. Ha most az $\eta(a)$ $(a \in B)$ függvényt úgy definiáljuk, hogy $\eta(a) = y_k$, ha $a \in A^{(k)}_{j_1 j_2 \ldots j_n}$, akkor nyilvánvalóan $\eta = \eta(a)$ egy valószínűségi változó és

$$\mathbf{P}(\eta = y_k, \xi_1 = x_{1j_1}, \ldots, \xi_{nj_n}|B) = \mathbf{P}(A^{(k)}_{j_1 j_2 \ldots j_n}|B) = p_k \mathbf{P}(A_{j_1 \ldots j_n}|B) =$$
$$= p_k \prod_{n=1}^{n} \mathbf{P}(\xi_k = x_{kj_k}|B)$$

és $$\mathbf{P}(\eta = y_k|B) = \mathbf{P}(\sum_{j_1,\ldots,j_n} A^{(k)}_{j_1 j_2 \ldots j_n}|B) = \sum_{j_1,\ldots,j_n} \mathbf{P}(A^{(k)}_{j_1 j_2 \ldots j_n}|B) =$$
$$= p_k \sum_{j_1,\ldots,j_n} \mathbf{P}(A_{j_1 \ldots j_n}|B) = p_k \mathbf{P}(B|B) = p_k,$$
vagyis a $\xi_1, \ldots, \xi_n$ és η változók B-re nézve teljesen függetlenek.

Térjünk most át a 4. tétel bizonyítására. Először azt mutatjuk ki, hogy megadható olyan $C_n \in \mathbf{T}_2$ halmaz, amelyre $B \subseteq C_n$, $\mathbf{P}(B|C_n) > 0$ és amelyre az $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ változók értelmezése kiterjeszthető olymódon, hogy azok C_n-re nézve függetlenek legyenek és teljesüljön a $\mathbf{P}(B|C_n) = \prod_{k=2}^{n} \frac{1}{1+\lambda_k}$ feltétel. Ezt teljes indukcióval láthatjuk be. Az egyöntetűség kedvéért vezessük be a $C_1 = B$ jelölést. Legyen először $n = 2$. Legyen $\vartheta_2 = \frac{1}{1+\lambda_2}$ és legyen C_2 egy olyan halmaz, amelyre $C_1 \subseteq C_2$, $C_2 \in \mathbf{T}_2$ és $\mathbf{P}(C_1|C_2) = \vartheta_2$. Ilyen halmaz 5) szerint megadható.

Legyen B_{kl} B-nek az a részhalmaza, amelyen $\xi_1 = x_{1k}$ és $\xi_2 = x_{2l}$ és legyen
$$\mathbf{P}(B_{kl}|B) = \mathbf{P}(\xi_1 = x_{1k}, \xi_2 = x_{2l}|B) = p_{kl}$$
továbbá
$$\mathbf{P}(\xi_1 = x_{1k}|B) = p'_k$$
és
$$\mathbf{P}(\xi_2 = x_{2l}|B) = p''_l.$$
Legyen

(6) $$q_{kl} = \frac{p'_k p''_l - \vartheta_2 p_{kl}}{1-\vartheta_2}.$$

Feltevéseink szerint $q_{kl} \geqq 0$ $(k, l = 1, 2, \ldots)$; figyelembevéve, hogy
$$\sum_{l=1}^{\infty} p_{kl} = p'_k$$
és
$$\sum_{k=1}^{\infty} q_{kl} = p''_l,$$
továbbá, hogy
$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} q_{kl} = \sum_{k=1}^{\infty} p'_k = \sum_{l=1}^{\infty} p''_l = 1,$$
következik 4')-ből, hogy megadható a $C_2 \bar{C}_1$ halmaznak egy olyan felbontása, az A_{kl} halmazokra, hogy
$$\mathbf{P}(A_{kl}|C_2) = (1-\vartheta_2) q_{kl}.$$
Ha most a ξ_1 és ξ_2 változók értelmezését úgy terjesztjük ki, $C_2\bar{C}_1$-ra, hogy az A_{kl} halmazon $\xi_1 = x_{1k}$ és $\xi_2 = x_{2l}$ legyen, akkor a C_2 halmazon ξ_1 és ξ_2 eloszlása ugyanaz lesz, mint C_1-en, de C_2-ön függetlenek lesznek. Ugyanis
$$\mathbf{P}(\xi_1 = x_{1k}|C_2) = \vartheta_2 \mathbf{P}(\xi_1 = x_{1k}|C_1) + (1-\vartheta_2)\mathbf{P}(\xi_1 = x_{1k}|C_2\bar{C}_1) =$$
$$= \vartheta_2 p'_k + (1-\vartheta_2) p'_k = p'_k = \mathbf{P}(\xi_1 = x_{1k}|C_1)$$

hasonlóképpen
$$\mathbf{P}(\xi_2=x_{2l}|C_2)=\mathbf{P}(\xi_2=x_{2l}|C_1),$$
és
$$\mathbf{P}(\xi_1=x_{1k};\ \xi_2=x_{2l}|C_2)=\mathbf{P}(A_{kl}+B_{kl}|C_2)=\mathbf{P}(A_{kl}|C_2)+\mathbf{P}(B_{kl}|C_2)=$$
$$=(1-\vartheta_2)q_{kl}+\vartheta_2 p_{kl}=p'_k p''_l.$$
Ezzel állításunkat $n=2$-re bebizonyítottuk.

Tegyük fel, hogy a tétel n-re be van már bizonyítva. Legyen C_n az a halmaz, amelyre $B\subseteq C_n$, $C_n\in\mathbf{T}_2$,
$$\mathbf{P}(B|C_n)=\prod_{k=2}^{n}\frac{1}{1+\lambda_k}$$
és amelyre a $\xi_1,\ldots,\xi_n$ változók értelmezése úgy van kiterjesztve, hogy a $\xi_1,\ldots,\xi_n$ változók C_n-en függetlenek. Az $(x_{1k_1},x_{2k_2},\ldots,x_{nk_n})$ szám —n-eseket $(k_1,k_2,\ldots,k_n=1,2,\ldots)$ rendezzük el tetszőleges sorrendben, legyenek ezek közül $(x_{1k_1^{(s)}},x_{2k_2^{(s)}},\ldots,x_{nk_n^{(s)}})$ az s-edik $(s=1,2,\ldots)$ Definiáljuk a ξ valószínűségi változót a következőképpen: $\xi=s$, ha teljesülnek a $\xi_j=x_{jk_j^{(s)}}$ $(j=1,2,\ldots,n)$ feltételek. Nyilvánvaló, hogy ha egy η valószínűségi változó független ξ-től, akkor független a $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n$ változóktól és megfordítva. Terjesszük ki ξ_{n+1} értelmezését C_n-re olymódon, hogy $C_n\bar{C}_1$-on ξ_{n+1} és ξ függetlenek legyenek és ξ_{n+1} eloszlása C_n-en ugyanaz legyen, mint a C_1 halmazon. Ez az 1. lemma szerint lehetséges.

Ezután válasszunk egy olyan $C_{n+1}(C_n\subseteq C_{n+1})$ halmazt, amelyre
$$\mathbf{P}(C_n|C_{n+1})=\frac{1}{1+\lambda_{n+1}}=\vartheta_{n+1}.$$
Ez az 5) feltevés szerint lehetséges. Osszuk fel a $C_{n+1}\bar{C}_n$ halmazt az A_{rs} részhalmazokra olymódon, hogy

(7) $$\mathbf{P}(A_{rs}|C_{n+1})=\mathbf{P}(\xi_{n+1}=x_{n+1,r}|C_n)\,\mathbf{P}(\xi=s|C_n)-$$
$$-\vartheta_{n+1}\mathbf{P}(\xi_{n+1}=x_{n+1,r},\ \xi=s|C_n);\quad r,s=1,2,\ldots$$
Ez lehetséges 4') szerint, és azért, mivel feltevésünk szerint a (7) jobboldalán álló számok nemnegatívak és összegük $\mathbf{P}(C_{n+1}C_n|C_{n+1})=1-\vartheta_{n+1}$. Ugyanis könnyen belátható, hogy

(8) $$\frac{\mathbf{P}(\xi_{n+1}=x_{n+1,r},\ \xi=s|C_n)}{\mathbf{P}(\xi_{n+1}=x_{n+1,r}|C_n)\,\mathbf{P}(\xi=s|C_n)}\leq 1+\lambda_{n+1}.$$
A (8) egyenlőtlenség a következőképpen látható be:
$$\mathbf{P}(\xi_{n+1}=x_{n+1,r},\xi=s|C_n)=\mathbf{P}(B|C_n)\,\mathbf{P}(\xi_{n+1}=x_{n+1,r},\xi=s|B)$$
$$+(1-\mathbf{P}(B|C_n))\,\mathbf{P}(\xi_{n+1}=x_{n+1,r},\xi=s|C_n\bar{B}_n),$$
továbbá
$$\mathbf{P}(\xi_{n+1}=x_{n+1,r}|C_n)=\mathbf{P}(\xi_{n+1}=x_{n+1,r}|B)=\mathbf{P}(\xi_{n+1}=x_{n+1,r}|C_n\bar{B})$$
és
$$\mathbf{P}(\xi=s|C_n)=\mathbf{P}|\xi=s|B)\,\mathbf{P}(B|C_n)+\mathbf{P}(\xi=s|C_n\bar{B})(1-\mathbf{P}(B|C_n)),$$

és így, mivel $C_n\bar{B}$-on ξ_{n+1} és ξ függetlenek,

$$(9)\qquad \frac{\mathbf{P}(\xi_{n+1}=x_{n+1,r},\xi=s\,|\,C_n)}{\mathbf{P}(\xi_{n+1}=x_{n+1,r}\,|\,C_n)\,\mathbf{P}(\xi=s\,|\,C_n)}=\frac{\alpha\dfrac{\mathbf{P}(\xi_{n+1}=x_{n+1,r},\xi=s\,|\,B)}{\mathbf{P}(\xi_{n+1}=x_{n+1,r}\,|\,B)\,\mathbf{P}(\xi=s\,|\,B)}+\beta}{\alpha+\beta}$$

ahol $\alpha=\mathbf{P}(B\,|\,C_n)\,\mathbf{P}(\eta=s\,|\,B)$ és $\beta=\mathbf{P}(\eta=s\,|\,C_nB)\,(1-\mathbf{P}(\bar{B}\,|\,C_n))$, tehát (9) baloldala kisebb, vagy egyenlő, mint

$$\frac{\alpha\,(1+\lambda_{n+1})+\beta\cdot 1}{\alpha+\beta}$$

ahol α és β pozitív számok, tehát a fenti tört értéke legfeljebb

$$\max\,(1,\ 1+\lambda_{n+1})=1+\lambda_{n+1}.$$

Az A_{rs} halmazon legyen $\xi_{n+1}=x_{n+1,r}$ és $\xi_j=x_{jk_j}^{(s)}$ $(j=1,2,\ldots,n)$. Akkor nyilván $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{n+1}$ eloszlása C_{n+1}-en ugyanaz, mint a C_n halmazon, tehát ugyanaz, mint a B halmazon és a $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{n+1}$ változók a C_{n+1} halmazon függetlenek és végül

$$\mathbf{P}(C_n\,|\,C_{n+1})=\vartheta_{n+1}=\frac{1}{1+\lambda_{n+1}}$$

és így

$$\mathbf{P}(B\,|\,C_{n+1})=\prod_{k=1}^{n}\mathbf{P}(C_k\,|\,C_{k+1})=\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\lambda_{k+1}}.$$

Legyen mármost $C=\lim\limits_{n\to\infty}C_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}C_n$, akkor a 3. feltétel szerint $C\in\mathbf{T}_2$ és

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}(A\,|\,C_n)=\mathbf{P}(A\,|\,C).$$

Ebből következik, hogy a C halmazon a $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n,\ldots$ változók ugyanolyan eloszlásúak, mint a B halmazon, és függetlenek, továbbá

$$\mathbf{P}(B\,|\,C)=\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}(B\,|\,C_n)=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1+\lambda_{k+1}}$$

Abból, hogy $\sum\limits_{k=2}^{\infty}\lambda_k$ konvergens, következik, hogy $\prod\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{1+\lambda_{k+1}}$ konvergens és pozitív, tehát $\mathbf{P}(B\,|\,C)>0$.

Ezzel a 4. tételt bebizonyítottuk.

A 4. tételből azonnal következik az

5. TÉTEL: *A* $[\mathrm{H},\mathbf{T}_1,\mathbf{T}_2,\mathbf{P}(A\,|\,B)]$ *feltételes valószínűségi mezőről tegyük fel, hogy teljesülnek rá az* 1)—5) *feltételek. Legyen* $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n,\ldots$ *a* $B\in\mathbf{T}_2$ *halmazon értelmezett diszkrét valószínűségi változók egy majdnem független sorozata; jelölje* $F(x\,|\,B)$ ξ_n *eloszlásfüggvényét és az* $F_n(x\,|\,B)$ *eloszlásfüggvényekre teljesüljenek a* LINDEBERG*-féle tétel feltételei, vagyis létezzék*

$$m_n = \int_{-\infty}^{\infty} x dF_n(x|B)$$

és

$$d_n = \int_{-\infty}^{\infty} (x-m_n)^2 dF_n(x|B)$$

és bevezetve a $D_n = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} d_k^2}$ *jelölést, teljesüljön a*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{D_n^2} \sum_{k=1}^{n} \int_{|x-m_k| \geq \varepsilon D_n} (x-m_k)^2 dF_k(x|B) = 0$$

feltevés minden pozitív ε*-ra. Akkor a* ξ_n *változókra érvényes a centrális határeloszlástétel, vagyis ha* $\zeta_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$, $M_n = \sum_{k=1}^{n} m_k = \mathbf{M}(\xi_n|B)$, *akkor*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\frac{\xi_n - M_n}{D_n} < x \,\middle|\, B\right) = \Phi(x).$$

BIZONYÍTÁS: A 4. tétel szerint megadható egy olyan $C \in \mathbf{T}_2$ halmaz, hogy $B \subseteq C$ és $\mathbf{P}(B|C) > 0$, és a ξ_n változók értelmezése kiterjeszthető C-re olymódon, hogy a ξ_n változók C-re nézve függetlenek legyenek és ξ_n eloszlása a C halmazon ugyanaz legyen, mint a B halmazon. $(n = 1, 2, \ldots)$. Akkor tehát ξ_n változókra a C halmazon is teljesülnek a LINDEBERG-féle tétel feltételei, és így $\frac{\xi_n - M_n}{D_n}$ eloszlása C-re nézve a normális eloszláshoz konvergál. A 3. tételből azonban következik, hogy akkor $\frac{\xi_n - M_n}{D_n}$ eloszlása a B halmazra nézve is a normális eloszláshoz konvergál és így az 5. tétel be van bizonyítva.

Első pillanatra úgy tűnik, hogy az 5. tétel érvényességéhez lényeges, hogy a szóbanforgó valószínűségi mező rendelkezzék az 1)—5) tulajdonságokkal, ez azonban nincs így. Ugyanis a határeloszlástétel kizárólag a $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ változók együttes eloszlásfüggvényeire vonatkozó állítást tartalmaz és így nem függ a mértéktér sajátosságaitól. Ha tehát adva vannak a $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ majdnem független változók $F_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ eloszlásfüggvényei, akkor annak bebizonyításához, hogy a ξ_n változókra alkalmazható a centrális határeloszlástétel, elegendő, egy az 1) és 2) tulajdonságoknak eleget tevő tökéletes KOLMOGOROV-féle valószínűségi mezőt és azon olyan ξ_n^* valószínűségi változókat konstruálni, amelyek közül az első n változó együttes eloszlásfüggvénye $F_n(x_1, \ldots, x_n)$, továbbá ezt a valószínűségi mezőt beágyazni egy olyan feltételes valószínűségi mezőbe, amelyre a 3), 4) és 5) feltevések teljesülnek. Ha a ξ_n változók diszkrét eloszlásúak, ξ_n lehetséges értékei az $x_{nk} (k = 1, 2, \ldots)$ számok, akkor ez mindig elvégezhető, mégpedig a következőképpen:

Az $(x_{1k_1}, x_{2k_2}, \ldots, x_{nk_n}, \ldots)$ számsorozathoz rendeljük hozzá a $(0, 1)$ intervallum

$$x = \cfrac{1}{k_1 + \cfrac{1}{k_2 + \cdots}}$$

pontját. A $(0, 1)$ intervallum azon x számokból álló $E_{k_1, k_2, \ldots, k_n}$ részhalmazához, amely x számok lánctörtkifejtése $\cfrac{1}{k_1 + \cfrac{1}{k_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{k_n}}}}$ -nel kezdődik, rendeljük hozzá a $\mathbf{P}^*(E_{k_1, k_2, \ldots, k_n}) = \mathbf{P}(\xi_1 = x_{1k_1}, \ldots, \xi_n = x_{nk_n})$ valószínűséget és az így definiált $\mathbf{P}^*$ valószínűségi mértéket terjesszük ki a $(0, 1)$ intervallum összes mérhető halmazaira. Ilyen módon nyilvánvalóan egy nem atomikus LEBESGUE-mértéket kapunk*. Ezekután legyen H a $(-\infty, +\infty)$ számegyenes, $\mathbf{T}_1$ a H összes mérhető halmazainak összessége, $\mathbf{T}_2$ a H összes olyan mérhető B halmazainak összessége, amelyeket felbontva egy $(0, 1)$-ben fekvő B' és egy, a $(0, 1)$-en kívül fekvő B'' részre, $\mathbf{P}^*(B') + m(B'')$ pozitív és véges, ahol $m(A)$ az A halmaz közönséges LEBESGUE-mértékét jelöli. Legyen továbbá

$$\mu(A) = \mathbf{P}^*(A') + m(A'')$$

ha A' ill. A'' jelentik A-nak a $(0, 1)$-be eső, illetve azon kívül eső részét és legyen

$$\mathbf{P}(A|B) = \frac{\mu(AB)}{\mu(B)}.$$

Ilyen módon egy feltételes valószínűségi mezőt nyertünk, amely eleget tesz az 1), 2), 3) és 5) feltevéseknek**, továbbá a 4) feltevésnek is, a $(0, 1)$ intervallumon kívül.

Ilyen módon a következő tételt bizonyítottuk be:

6. TÉTEL: *Ha $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ valószínűségi változóknak egy tetszőleges* KOLMOGOROV*-féle valószínűségi mezőn értelmezett diszkrét és majdnem független sorozata, amelynek eloszlásaira teljesülnek a* LINDEBERG*-féle tétel feltételei, vagyis $m_n = \mathbf{M}(\xi_n)$ és $d_n = \mathbf{D}(\xi_n)$ léteznek és bevezetve az*

$$M_n = \sum_{k=1}^{n} m_k,\ D_n = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} d_k^2},\ F_n(x) = \mathbf{P}(\xi_n < x) \text{ és } \zeta_n = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n \ (n = 1, 2, \ldots),$$

jelöléseket, minden pozitív ε-ra teljesül a

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{D_n^2} \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{|x - m_k| > \varepsilon D_n} (x - m_k)^2 \, d F_k(x) = 0$$

reláció, akkor $\frac{\zeta_n - M_n}{D_n}$ eloszlása a standardizált normális eloszláshoz konvergál.

* A LEBESGUE mértékek elméletére nézve l. ROHLIN [9] dolgozatát.

** Könnyen belátható ugyanis, hogy minden, nem atomikus ROHLIN-féle értelemben LEBESGUE-féle mérték tökéletes és ebből állításunk könnyen következik.

A 6. tétel kiterjeszthető tetszőleges valószínűségi változókra is, vagyis nem lényeges az a feltevés, hogy $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ diszkrét valószínűségi változók legyenek. Ennek bizonyításához szükségünk lesz még két lemmára.

2. LEMMA: *Legyen* $F_{i_1, i_2, \ldots, i_n}(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n})$, *ahol* $i_1, i_2, \ldots, i_n$ *tetszőleges* n *különböző természetes egész szám* $(n = 1, 2, \ldots)$ *folytonos eloszlásfüggvényeknek egy kompatibilis rendszere, vagyis legyen* $F_{i_1, i_2, \ldots, i_n}(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n})$ *invariáns az* $i_1, i_2, \ldots, i_n$ *számok tetszőleges permutációjával szemben, és legyen*

$$F_{i_1, i_2, \ldots, i_n}(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}, +\infty, \ldots, +\infty) = F_{i_1, \ldots, i_k}(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}).$$

Akkor megadható a $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n, \ldots)$ *végtelen számsorozatok* V *terében* $(0 \leqq v_n \leqq 1, n = 1, 2, \ldots)$ *egy tökéletes* KOLMOGOROV*-féle valószínűségi mező és azon valószínűségi változóknak egy olyan* $\xi_n = \xi_n(v)$ *sorozata, hogy* $\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \ldots, \xi_{i_n}$ *együttes eloszlásfüggvénye az* $i_1, i_2, \ldots, i_n$ *index bármely választása mellett* $F_{i_1, i_2, \ldots, i_n}(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n})$ *legyen.*

BIZONYÍTÁS: KOLMOGOROV alaptétele ([1] 27. o.) szerint megadható az $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots)(-\infty < u_n < +\infty, n = 1, 2, \ldots)$ számsorozatok U terében egy olyan mérték, hogy ha $\xi_n(u) = u_n$, akkor $\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \ldots, \xi_{i_n}$ együttes eloszlásfüggvénye éppen $F_{i_1, i_2, \ldots, i_n}(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n})$. RYLL—NARDZEWSKI egy tétele [10] szerint ez a mérték (ha teljessé tesszük), tökéletes. Képezzük le az U teret a V térre a következő $\mathfrak{L}$ leképzéssel: az U-beli $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots)$ pontnak feleltessük meg a V-beli $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n, \ldots)$ pontot, ahol $v_n = F_n(u_n)$.* Ez a leképezés egy mértéket indukál a V térben. A $\xi_n = \xi_n(v)$ valószínűségi változókat következőképpen definiáljuk: ha v az u pont képe az L leképezésnél, vagyis $v = L(u)$, akkor legyen $\xi_n(v) = v_n$. Ez esetben a lemma összes feltételei teljesülnek. Megjegyzendő, hogy az ilyen módon definiált valószínűségi mérték nem más, mint egy, a $(0, 1)$ intervallumon definiál ROHLIN-féle értelemben LEBESGUE-féle mértéktér önmagával való megszámlálható sokszori DESCARTES-szorzata.

3. LEMMA: *Legyen* $[\mathsf{H}', \mathbf{T}'_1, \mathbf{T}'_2, \mathbf{P}'(A|B)]$ *egy feltételes valószínűségi mező,* $\mathcal{H}''$ *jelentse az* (a, b) *intervallumot,* $\mathcal{T}''_1$ *jelentse* $\mathcal{H}''$ *mérhető részhalmazainak összességét,* $\mathcal{T}''_2$ *jelentse* $\mathcal{H}''$ *pozitív mértékű részhalmazainak összességét és legyen* $\mathcal{P}''(\mathcal{A}|\mathcal{B}) = \dfrac{m(\mathcal{A}\mathcal{B})}{m(\mathcal{B})}$, *ahol* $\mathcal{B} \in \mathcal{T}''_2$ *és* $m(\mathcal{C})$ *a* $\mathcal{C} \in \mathcal{T}''_1$ *halmaz* LEBESGUE-*mértékét jelöli. Legyen* $[\mathsf{H}'', \mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \mathbf{P}(A|B)]$ *a* $[\mathsf{H}', \mathbf{T}'_1, \mathbf{T}'_2, \mathbf{P}'(A|B)]$ *és a* $[\mathcal{H}'', \mathcal{T}''_1, \mathcal{T}''_2, \mathcal{P}''(\mathcal{A}|\mathcal{B})]$ *feltételes valószínűségi mezők szorzata. Legyen* ξ'

* A $v = L(u)$ leképezés nem egy-egyértelmű, hiszen ha $F_n(x)$ az $a < x \leqq b$ intervallumban állandó, $F_n(x) = c$, ha $a < x \leqq b$, akkor az összes olyan $u = (u_1, \ldots, u_n, \ldots)$ U-beli pontoknak, amelyekre $a < u_n \leqq b$, az a V-beli $v = (v_1, \ldots, v_n, \ldots)$ pont felel meg, amelyre $v_n = c$. Ilyenmódon a $v = L(u)$ leképezés inverze nincs egyértelműen definiálva, azonban $\xi_n(v) = u_n$ ugyanazt az értéket veszi fel minden u pontban, amelyekre $L(u) = v$ és így $\xi_n(v)$ definíciója egyértelmű.

egy tetszőleges valószínűségi változó, amely a H' *téren van értelmezve és* $G(x|\mathfrak{B}'')$ *egy tetszőleges feltételes eloszlásrendszer* ($\mathfrak{B}'' \in \mathfrak{T}_2''$). *Ha* $x=(x',x'')$, *ahol* $x' \in \mathsf{H}'$ *és* $x'' \in \mathfrak{H}''$, *akkor legyen*

$$\xi=\xi(x)=\xi'(x').$$

Ez esetben megadható a H *esemény téren egy olyan* $\eta=\eta(x)=\eta''(x'')$ *valószínűségi változó, amely* $\mathbf{T}_2$*-re nézve független* ξ*-től és amelynek feltételes eloszlásrendszere* $G(x|\mathfrak{B}'')$.

A 3. lemma bizonyítása igen egyszerű. Legyen ugyanis $B \in \mathbf{T}_2$, $B=B' * \mathfrak{B}''$ ahol $B' \in \mathbf{T}_1'$ és $\mathfrak{B}'' \in \mathfrak{T}_2''$, továbbá legyen $G(x)=G(x|\mathfrak{H}'')$ és jelölje $G^{-1}(x)$ $G(x)$ inverz függvényét. Legyen most

$$\eta''(x'')=G^{-1}\left(\frac{x''-a}{b-a}\right),$$

akkor

$$\mathbf{P}(\eta''<y|B)=\mathbf{P}''\left(\frac{x''-a}{b-a}<G(y)|\mathfrak{B}''\right)=G(y|\mathfrak{B}'')$$

és nyilvánvalóan

$$\mathbf{P}(\xi<x,\eta<y|B)=\mathbf{P}(\xi'<x|B')\,\mathbf{P}(\eta''<y|\mathfrak{B}'').$$

Ezek után rátérünk a 4. tétel kiterjesztésére nem diszkrét változókra. A $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n,\ldots$ valószínűségi változókat realizáljuk a V téren, a 2. lemma értelmében. Legyen a V téren a 2. lemmának megfelelően konstruált KOLMOGOROV-féle valószínűségi mező által generált feltételes valószínűségi mező $[\mathsf{V},\mathbf{T}_1^*,\mathbf{T}_2^*,\mathbf{P}^*(A|B)]$. Legyen $\mathfrak{H}^{(n)}$ a valós tengely, $\mathfrak{T}_1^{(n)}$ a $\mathfrak{H}^{(n)}$ mérhető halmazainak összessége, $\mathfrak{T}_2^{(n)}$ a $\mathfrak{H}^{(n)}$ véges és pozitív mértékű halmazainak összessége és legyen $\mathfrak{P}^{(n)}(\mathfrak{A}|\mathfrak{B})=\dfrac{m(\mathfrak{A}\mathfrak{B})}{m(\mathfrak{B})}$, ahol $m(\mathfrak{C})$ a $\mathfrak{C}$ halmaz közönséges LEBESGUE-mértékét jelenti. Legyen $[\mathsf{H},\mathbf{T}_1,\mathbf{T}_2,\mathbf{P}(A|B)]$ a $[\mathfrak{H}^{(n)},\mathfrak{T}_1^{(n)},\mathfrak{T}_2^{(n)},\mathfrak{P}^{(n)}(\mathfrak{A}|\mathfrak{B})]$ feltételes valószínűségi mezők DESCARTES szorzata. RYLL-NARDZEWSKI említett tétele szerint $[\mathsf{H},\mathbf{T}_1,\mathbf{T}_2,\mathbf{P}(A|B)]$ eleget tesz az 1. és 2. feltételeknek, továbbá eleget tesz a $\mathsf{H}^*=\mathfrak{J}^{(1)}*\mathfrak{J}^{(2)}*\ldots$ halmazon kívül (ahol $\mathfrak{J}^{(n)}$ a (0, 1) intervallum) a 4. feltételnek és $[\mathsf{V},\mathbf{T}_1^*,\mathbf{T}_2^*,\mathbf{P}^*]$ a $[\mathsf{H},\mathbf{T}_1,\mathbf{T}_2\,\mathbf{P}]$ feltételes valószínűségi mezőbe beágyazott feltételes valószínűségi mező. Ha mármost teljesül a következő feltétel a $[\mathsf{V},\mathbf{T}_1^*,\mathbf{P}_{(A)}^*]$ KOLMOGOROV-féle valószínűségi mezőn értelmezett ξ_n valószínűségi változókra:

$$\sup_{x_1,\ldots,x_{n-1}}\frac{\mathbf{P}^*(a<\xi_n<b|\xi_1=x_1,\ldots,\xi_{n-1}=x_{n-1})}{\mathbf{P}^*(a<\xi_n<b)}-1\leqq\lambda_n\qquad(n=2,3,\ldots)$$

minden a és $b>a$-ra és $\sum_{n=2}^{\infty}\lambda_n<\infty$, akkor a ξ_n változók sorozatát majdnem függetlennek nevezzük. Ez esetben könnyen belátható, hogy a ξ_n változók értelmezése kiterjeszthető H egy olyan C halmazára, amelyre $\mathsf{V}\subseteqq C$

és $\mathbf{P}(V|C)<0$, úgy, hogy azon a ξ_n változók függetlenek legyenek. Ezt teljes indukcióval bizonyítjuk. Legyen x_1 tetszőleges, $\mathbf{P}(\xi_2<x_2)=F_2(x_2)$ és $\mathbf{P}(\xi_2<x_2|\xi_1=x_1)=F_2(x_2|x_1)$. Legyen

$$\vartheta_2=\frac{1}{1+\lambda_2} \quad \text{és} \quad G_{x_1}(x_2)=\frac{F_2(x_2)-\vartheta_2 F_2(x_2|x_1)}{1-\vartheta_2},$$

akkor $G_{x_1}(x_2)$ egy eloszlásfüggvény és a 3. lemma szerint megadható az $1\leqq x_2\leqq 1+\lambda_2$ intervallumon egy olyan $\xi_2(x_1,x_2)$ változó, amelynek eloszlásfüggvénye $G_{x_1}(x_2)$. Ilyen módon kiterjesztve ξ_2 értelmezését az $(1, 1+\lambda_2)$ intervallumra, ξ_2 független lesz ξ_1-től, mivel C_1-gyel jelölve a I_1*I_2 halmazt, és C_2-vel az $I_1*(0, 1+\lambda_2)$ halmazt

$$\mathbf{P}(\xi_2<y|\xi_1=x_1, C_2)=F_2(y|x_1)\vartheta_2+G_{x_1}(y)(1-\vartheta_2)=F_2(y).$$

Ezt az eljárást folytatva, kiterjeszthetjük a ξ_n változók értelmezését a $C=(0,1)*(0,1+\lambda_2)*\cdots*(0,1+\lambda_n)*\cdots$ halmazra, úgy, hogy azok függetlenek legyenek; mivel $\mathbf{P}(C_1|C)=\prod_{n=2}^{\infty}\frac{1}{1+\lambda_n}>0$ ezzel be van bizonyítva a következő

7. TÉTEL: *A 6. tétel érvényes azon megszorítás nélkül is, hogy a ξ_n változók diszkrét eloszlásúak.*

4. §. *Alkalmazások a* MARKOV*-láncok és a sztochasztikus folyamatok elméletében*

Az előzőkben kifejtett elméletnek érdekes alkalmazási lehetőségei vannak a MARKOV-láncok elméletében. Homogén, megszámlálhatóan végtelen sok állapottal biró MARKOV-féle láncok egy általános típusánál a szó közönséges értelmében vett stacionér eloszlás nem létezik, azonban létezik *nem normálható stacionér eloszlás*. Legyenek a MARKOV-lánc állapotai A_k $(k=1,2,\ldots)$ és P_{jk} jelentse az A_j állapotból az A_k állapotba való átmenet valószínűségét. Akkor mondjuk, hogy MARKOV-láncnak nem normálható stacionér határeloszlása van, ha megadhatók olyan $Q_k (k=1,2,\ldots)$ nemnegatív számok, amelyekre teljesülnek a

$$Q_k=\sum_{j=1}^{\infty} Q_j P_j \qquad (k=1,2,\ldots)$$

egyenletek és $\sum_{k=1}^{\infty} Q_k=\infty$. Erre a legegyszerűbb példa a következő*: egy rendszer lehetséges állapotait az $1,2,\ldots,n,\ldots$ számokkal jellemezzük, P_{jk} jelentse a rendszernek a j-edik állapotból a k-adik állapotba egy lépésben

* Lásd T. E. HARRIS és H. ROBBINS [11] továbbá C. DERMAN, *Proc. Amer. Math. Soc.* 5 (1954) 332—334.

való átmenetelének valószínűségét és legyen a

$$\Pi = (P_{jk})$$

végtelen mátrix duplán sztochasztikus, vagyis nemcsak sorösszegei, hanem oszlopösszegei is legyenek 1-gyel egyenlők. Ilyen például a következő mátrix:

$$\Pi = \begin{Bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & c_6 & c_7 & c_8 & \dots \\ c_2 & c_1 & c_4 & c_3 & c_6 & c_5 & c_8 & c_7 & \dots \\ c_3 & c_4 & c_1 & c_2 & c_7 & c_8 & c_5 & c_6 & \dots \\ c_4 & c_3 & c_2 & c_1 & c_8 & c_7 & c_6 & c_5 & \dots \\ c_5 & c_6 & c_7 & c_8 & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & \dots \\ c_6 & c_5 & c_8 & c_7 & c_2 & c_1 & c_4 & c_3 & \dots \\ c_7 & c_8 & c_5 & c_6 & c_3 & c_4 & c_1 & c_2 & \dots \\ c_8 & c_7 & c_6 & c_5 & c_4 & c_3 & c_2 & c_1 & \dots \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \end{Bmatrix}$$

ahol $c_n \geqq 0$ és $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = 1$.

Akkor ha $p_{jk} > 0$ $(j, k = 1, 2, \dots)$, az

$$x_k = \sum_{j=1}^{\infty} x_j p_{jk}$$

egyenletrendszernek nem lehet olyan megoldása, amelyre $x_k \geqq 0$ és $\sum_{k=1}^{\infty} x_k = 1$; ezzel szemben $x_k = c > 0$ $(k = 1, 2, \dots)$ egy megoldás; ugyanis, ha $\sum_{k=1}^{\infty} x_k = 1$, akkor $x_k \to 0$ és így van az x_k számok között maximális. Ha x_m egy ilyen, akkor ez csak úgy lehetséges, ha $x_k = x_m = c$ $(k = 1, 2, \dots)$; ez valóban megoldás, de nem tesz eleget a $\sum_{k=1}^{\infty} x_k = 1$ feltételnek.

Ebben az esetben az összes állapotok ú. n. visszatérő ritka állapotok (l. pl. [5] XIV. fejezet), tehát ha $P_{jk}^{(n)}$ jelenti a j-edik állapotból a k-adik állapotba n lépésben való átmenet valószínűségét, akkor

$$\lim_{n \to \infty} P_{jk}^{(n)} = 0 \qquad (j, k = 1, 2, \dots)$$

és bár bármely állapotba előbb vagy utóbb a rendszer 1 valószínűséggel visszatér, a visszatérés időtartamának (lépésszámának) várható értéke végtelen. Ez esetben tehát közönséges értelemben vett stacionér eloszlás nem létezik, de létezik nem normálható stacionér eloszlás, mégpedig az, amelynél az összes Q_k számok egyenlőek.

A nem normálható stacionér eloszlás bizonyos értelemben a MARKOV-lánc feltételes határeloszlásrendszerét szolgáltatja, abban az esetben, ha a

$$Q_k = \sum_{j=1}^{\infty} Q_j P_{jk}$$

egyenletrendszernek eleget tevő pozitív Q_k számokra teljesülnek a következő összefüggések is:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{P_{ij}^{(n)}}{P_{ik}^{(n)}}=\frac{Q_j}{Q_k}\qquad (j,k=1,2,\ldots;\quad i=1,2,\ldots)$$

Ez esetben a MARKOV-lánc feltételes határeloszlásrendszere

$$\mathcal{P}(\mathcal{A}\,|\,\mathcal{B})=\frac{\sum\limits_{j\in\mathcal{A}\mathcal{B}}Q_j}{\sum\limits_{j\in\mathcal{B}}Q_j}\,.$$

ahol $\mathcal{A}$ a természetes számok egy tetszőleges részhalmaza, $\mathcal{B}$ pedig a természetes számok halmazának olyan részhalmaza, amelyre $\sum\limits_{j\in\mathcal{B}}Q_j>0$.

Vizsgáljuk meg példaként közelebbről az egydimenziós bolyongás példáját. Egy, az egyenesen bolyongó pont koordinátáját a $t=n$ időpontban jelölje ζ_n $(n=0,1,2,\ldots)$; tegyük fel, hogy a $\xi_n=\zeta_n-\zeta_{n-1}$ $(n=1,2,\ldots)$ valószínűségi változók teljesen függetlenek és egyforma eloszlásúak; ebben az esetben a ζ_n változók időben homogén additiv MARKOV-láncot alkotnak. Tegyük fel, hogy a ζ_n változók lehetséges értékei mind egész számok és a ξ_n változók szimmetrikus eloszlásúak. Jelöljék $\pm k_1,\pm k_2,\ldots,\pm k_j,\ldots$ azokat az egész számokat, amelyeket ξ_n pozitív valószínűséggel felvesz és legyen

$$p_r=\mathbf{P}(\xi_n=k_r)=\mathbf{P}(\xi_n=-k_r)\,(r=1,2,\ldots);$$

tegyük fel, hogy a k_r és p_r számsorozatokra teljesülnek a következő feltételek:

1. a k_r számok legnagyobb közös osztója 1;
2. a k_r számok között van páros szám;
3. $\mathbf{D}^2(\xi_n)=2\sum\limits_{r=1}^{\infty}p_rk_r^2=D^2<\infty$.

Legyen

$$\varphi(t)=2\sum_{r=1}^{\infty}p_r\cos k_r t$$

a ξ_n változók karakterisztikus függvénye, akkor a feltevéseink szerint $\varphi(0)=1$, $|\varphi(t)|<1$ ha $t\not\equiv 0 \bmod 2\pi$,

$$\varphi'(0)=\mathbf{M}(\xi_n)=0,\quad \varphi''(0)=-D^2\quad \text{és}\quad \varphi(t+2\pi)=\varphi(t).$$

Mivel $\zeta_n-\zeta_0=\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_n$, ζ_n karakterisztikus függvénye a $\zeta_0=j$ feltétel mellett $\varphi^n(t)e^{itj}$ és így

$$P_{jk}^{(n)}=\mathbf{P}(\zeta_n=k\,|\,\zeta_0=j)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi^n(t)\cos(k-j)t\,dt \tag{1}$$

Mármost egy LAPLACE-tól származó módszerrel a jobboldalán álló integrálok aszimptotikus kifejezése egyszerűen megadható (l. pl. [5] V. fej. 1. §

1. tétel) és így azt kapjuk, hogy

$$P_{jk}^{(n)} \approx \frac{1}{D\sqrt{2\pi n}}$$

és így

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P_{jk}^{(n)}}{P_{jl}^{(n)}} = 1 \tag{2}$$

j, k és l tetszőleges rögzített értékeire.* (2)-ből következik, hogy bár ζ_n-nek a határeloszlása nem létezik, létezik ζ_n feltételes határeloszlása, amennyiben

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathbf{P}(\zeta_n = k_m | \zeta_0 = j)}{\sum_{h=1}^{r} \mathbf{P}(\zeta_k = k_h | \zeta_0 = j)} = \frac{1}{r} \qquad (m = 1, 2, \ldots, r) \tag{3}$$

akárhogyan is választjuk a $k_1, k_2, \ldots, k_r$ egymástól különböző egész számokat. (3) azonnal következik (2)-ből, mivel

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathbf{P}(\zeta_n = k_m | \zeta_0 = j)}{\sum_{h=1}^{r} \mathbf{P}(\zeta_n = k_h | \zeta_0 = j)} = \lim_{n\to\infty} \frac{P_{jk_m}^{(n)}}{\sum_{h=1}^{r} P_{jk_h}^{(n)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sum_{h=1}^{r} \frac{P_{jk_h}^{(n)}}{P_{jk_m}^{(n)}}} = \frac{1}{\sum_{h=1}^{r} 1} = \frac{1}{r}$$

Eredményünk interpretálására vezessük be a feltételes ergodicitás fogalmát. A ζ_n valószínűségi változók alkossanak MARKOV-láncot, és legyen

$$\mathcal{P}^{(n)}(\mathcal{A}|z) = \mathbf{P}(\zeta_n \in \mathcal{A} | \zeta_0 = z)\cdot$$

ha $\mathcal{A} \in \mathcal{F}_1$ ahol $\mathcal{F}_1$ a ζ_n változók $\mathcal{H}$ értékkészletének azon részhalmazaiból álló BOREL-féle halmaztest, amelyre vonatkozólag a ζ_n változók mérhetőek. *Ha megadható $\mathcal{F}_1$-nek egy olyan $\mathcal{F}_2$ részhalmaza, hogy amennyiben $\mathcal{A} \in \mathcal{F}_1$, $\mathcal{B} \in \mathcal{F}_2$ és $z \in \mathcal{H}$ akkor*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathcal{P}^{(n)}(\mathcal{A}\mathcal{B}|z)}{\mathcal{P}^{(n)}(\mathcal{B}|z)} = \mathcal{P}(\mathcal{A}|\mathcal{B})$$

ahol $\mathcal{P}(\mathcal{A}|\mathcal{B})$ nem függ z-től, és $[\mathcal{H}, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{P}(\mathcal{A}|\mathcal{B})]$ egy feltételes valószínűségi mező, akkor azt mondjuk, hogy a $\{\zeta_n\}$ MARKOV-lánc feltételesen ergodikus, és a $\mathcal{P}(\mathcal{A}|\mathcal{B})$ feltételes eloszlásrendszert a MARKOV-lánc feltételes határeloszlásrendszerének nevezzük. A fentebb tárgyalt példában $\mathcal{H}$ az egész számok halmaza, $\mathcal{F}_1$ a $\mathcal{H}$ halmaz összes részhalmazainak halmaza, $\mathcal{F}_2$ pedig $\mathcal{H}$ összes véges és nem üres részhalmazainak halmaza és $\mathcal{P}(\mathcal{A}|\mathcal{B}) = \frac{\nu(\mathcal{A}\mathcal{B})}{\nu(\mathcal{B})}$ ahol $\nu(\mathcal{C})$ jelenti a $\mathcal{C}$ halmaz elemeinek számát.

Megjegyzendő, hogy ha egy MARKOV-lánc feltételesen ergodikus, akkor feltételes határeloszlásrendszere mindenképpen előállítható a 1. §. 15. tételben szereplő módon. Ez következik az 1. §-ban CSÁSZÁR ÁKOS tételéhez fűzött

* ERDŐS PÁL és K. L. CHUNG [19] munkájukban (2) érvényességét általánosabb feltételek mellett mutatták ki: náluk a változók szórásának létezése nincsen kikötve.

megjegyzésből. Bizonyos feltételek mellett ennél több is igaz, mégpedig $\mathcal{P}(\mathcal{A}|\mathcal{B})$ előállítható egyetlen $\mathcal{Q}(\mathcal{A})$ mérték segítségével $\mathcal{P}(\mathcal{A}|\mathcal{B})=\frac{\mathcal{Q}(\mathcal{A}\mathcal{B})}{\mathcal{Q}(\mathcal{B})}$ alakban, ahol $\mathcal{Q}(\mathcal{A})$ egy nemnegatív és teljesen additív halmazfüggvény és $\mathcal{Q}(\mathcal{B})>0$ ha $\mathcal{B}\in\mathcal{T}_2$. Ez az eset áll fenn például a fentebb tárgyalt bolyongási problémáknál. CSÁSZÁR ÁKOS említett másik tételéből következik, hogy például ha a MARKOV-lánc állapotainak $\mathcal{H}$ halmaza megszámlálható, $\mathcal{T}_1$ $\mathcal{H}$ összes részhalmazaiból, $\mathcal{T}_2$ pedig $\mathcal{H}$ összes nem üres részhalmazaiból áll, és $\mathcal{P}(\mathcal{A}|\mathcal{B})>0$ ha $\mathcal{B}\in\mathcal{T}_2$ és $\mathcal{A}\mathcal{B}$ nem üres, akkor $\mathcal{P}(\mathcal{A}|\mathcal{B})=\frac{\mathcal{Q}(\mathcal{A}\mathcal{B})}{\mathcal{Q}(\mathcal{B})}$.

Bizonyos megszorítások mellett kimutatható a feltételes ergodicitás többdimenziós bolyongási problémák és általánosabb, nem additív MARKOV-láncok esetében is.

Úgy látszik, hogy itt igen sok fontos összefüggés vár még feltárásra.

Stacionér MARKOV-láncoknál más értelemben is beszélhetünk feltételes határeloszlásról. Tegyük fel, hogy a ζ_n $(n=0,1,2,\ldots)$ nemnegatív egész értékű változók stacionér MARKOV-láncot alkotnak, amely irreducibilis és amelynek összes állapotai visszatérők, és jelentse $\eta_N(\mathcal{A})$ azt, hogy a $\zeta_0,\zeta_1,\ldots,\zeta_N$ változók értékei közül hány esik a nemnegatív egész számokból álló $\mathcal{A}$ halmazba és legyen $\gamma_N(\mathcal{A}|\mathcal{B})=\frac{\eta_N(\mathcal{A}\mathcal{B})}{\eta_N(\mathcal{B})}$, ha $\eta_N(\mathcal{B})>0$ és $\gamma_N(\mathcal{A}|\mathcal{B})=0$, ha $\eta_N(\mathcal{B})=0$, vagyis jelentse $\gamma_N(\mathcal{A}|\mathcal{B})$ az $\mathcal{A}$ eseménynek a $\mathcal{B}$ eseményre vonatkozó feltételes relatív gyakoriságát a MARKOV-láncot alkotó kísérletsorozat első N kísérlete során, azon feltevés mellett, hogy $\zeta_0=i$. K. L. CHUNG egy tételéből [17] következik, hogy

$$\mathbf{P}(\lim_{N\to\infty}\gamma_N(\mathcal{A}|\mathcal{B}))=\mathcal{P}(\mathcal{A}|\mathcal{B})=1,$$

ahol

$$\mathcal{P}(\mathcal{A}|\mathcal{B})=\frac{\sum\limits_{j\in\mathcal{A}\mathcal{B}}E_{ij}}{\sum\limits_{j\in\mathcal{B}}E_{ij}}$$

és

$$E_{ij}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=0}^{n}P_{jj}^{(k)}}{\sum\limits_{k=0}^{n}P_{ii}^{(k)}} \tag{4}$$

és ezek a határértékek mindig léteznek és pozitívok*; ha az összes állapotok

* A fentebb tárgyalt bolyongási problémáknál $E_{ij}=1$. (4)-re vonatkozólag lásd A. N. KOLMOGOROV [20] munkáját, továbbá W. DOEBLIN [21] munkáját és végül K. L. CHUNG [22] közleményét, amely felhívja a figyelmet arra, hogy a $\lim\limits_{n\to\infty}P_{jj}^{(n)}/P_{kk}^{(n)}$ határértékek létezésének kérdése az általános esetben nincsen eldöntve.

visszatérő gyakori állapotok, akkor a $\sum_{j=i}^{\infty} E_{ij}$ sorok konvergensek és így a MARKOV-lánc határeloszlása létezik és $\mathcal{S}(\mathfrak{A}|\mathfrak{B})$ az ezen határeloszlás által származtatott feltételes eloszlásrendszer; ha az összes állapotok visszatérő ritka állapotok, akkor a $\sum_{j=1}^{\infty} E_{ij}$ sorok divergálnak és így a $\mathcal{S}(\mathfrak{A}|\mathfrak{B})$ feltételes eloszlásrendszer nem generálható egy közönséges eloszlás által.

K. L. CHUNG azt is bebizonyította, hogy az E_{ik} számok mindig eleget tesznek az

$$E_{ik} = \sum_{j=1}^{\infty} E_{ij} P_{jk}$$

egyenletrendszernek, vagyis az E_{ik} $(k=1,2,\ldots)$ számok a $\Sigma E_{ik} = +\infty$ esetben a MARKOV-lánc nem-normálható stacionér eloszlását alkotják.

Nézzünk most egy példát a sztochasztikus folyamatok elméletéből feltételes határeloszlásokra vonatkozólag. Vizsgáljunk egy olyan folyamatot, amelyben $\zeta_1 = \xi_1$, $\zeta_2 = \xi_1 + \xi_2, \ldots,$ $\zeta_n = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n + \cdots$ időpontokban történik egy-egy esemény, ahol $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ egyforma $F(x)$ eloszlásfüggvényű nemnegatív és független valószínűségi változók. Legyen $\tau > 0$ és legyen $\zeta_{n-1} < \tau < \zeta_n$, továbbá $\zeta_n - \tau = \vartheta(\tau)$. Mármost a τ pontot válasszuk ki találomra a $(0, t)$ intervallumon, vagyis legyen τ a $(0, t)$-ben egyenletes eloszlású valószínűségi változó és legyen $\delta_t = \vartheta(\tau)$. Számítsuk ki δ_t eloszlásfüggvényét. W. FELLER kimutatta, hogy ha

$$\int_0^{\infty} x\,dF(x) = \int_0^{\infty} (1 - F(x))\,dx = m$$

véges, akkor $\vartheta(t)$ és δ_t határeloszlásának eloszlásfüggvénye, ha $t \to \infty$

$$H(x) = \frac{1}{m} \int_0^x (1 - F(u))\,du.$$

TAKÁCS LAJOS [13] mutatott rá arra a paradox jelenségre, hogy ha σ az $F(x)$ eloszlásfüggvény szórása:

$$\sigma^2 = \int_0^{\infty} (x - m)^2 dF(x),$$

a $H(x)$ eloszlásfüggvény várható értéke $\frac{m^2 + \sigma^2}{2m}$, vagyis m-nél nagyobb is lehet, ha $\sigma > m$, sőt, ∞ is lehet, ha $\sigma = \infty$. Ezzel szemben, abban az esetben, ha $m = \infty$, δ_t-nek a határeloszlása nem létezik, pontosabban $\mathbf{P}(\delta_t < x) \to 0$, ha $0 < x < \infty$ és $t \to \infty$. Ezzel szemben δ_t feltételes eloszlásának létezik a határértéke, mégpedig fennáll a következő

1. TÉTEL. *Legyen* $G(x) = \int_0^x (1-F(t))dt$, *és tegyük fel, hogy*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{xG'(x)}{G(x)} = 0.$$

Akkor

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}(\delta_t < x | \delta_t < y) = \frac{G(x)}{G(y)}, \quad \text{ha} \quad 0 < x \leqq y.$$

BIZONYÍTÁS: Legyen $F_n(u)$ az $F(u)$ függvény n-szeres kompozíciója és

$$\sum_{n=1}^{\infty} F_n(u) = \Phi(u),$$

akkor

$$\mathbf{P}(\delta_t < x | \delta_t < y) = \frac{\alpha_x(t)}{\alpha_y(t)},$$

ahol

$$\alpha_x(t) = \int_0^t \beta_x(u)\,du \quad \text{és} \quad \beta_x(u) = \int_0^u \{F(v+x) - F(v)\}\, d_v\Phi(u-v).$$

Számítsuk ki $\beta_x(u)$ LAPLACE-transzformáltját, amelyet $\psi_x(s)$-sel jelöljünk. Legyen

$$\varphi(s) = \int_0^\infty e^{-sx}\, dF(x),$$

akkor

$$\psi_x(s) = \int_0^\infty e^{-st}\beta_x(t)\,dt = \varphi(s)\frac{e^{sx}-1}{s} + \frac{\varphi(s)}{1-\varphi(s)}\int_0^x e^{s(x-v)}(1-F(v))\,dv,$$

ennélfogva $\psi_x(s) \to \infty$, ha $s \to 0$, feltéve, hogy $m = \infty$. Mivel $\beta_x(t) \geqq 0$, $\alpha_x(t)$ monoton növekvő és

$$\psi_x(s) = \int_0^\infty e^{-ts}\beta_x'(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-ts}\,d\alpha_x(t).$$

Nyilvánvaló, hogy ha $s > 0$, $\psi_x(s)$ pozitív és monoton csökkenő függvény. Legyen $\psi_x(s) = \frac{1}{s} L_x\left(\frac{1}{s}\right)$; ekkor egy ismert TAUBER típusú tétel szerint (lásd: HARDY [14] 7. fej. 11. §. 108. tétel) ha teljesül az

$$L_x(cz) \approx L_x(z), \text{ ha } c > 0 \text{ és } z \to \infty$$

feltétel, akkor következik, hogy

$$\alpha_x(t) \approx L_x(t), \text{ ha } t \to \infty.$$

Az $L_x(cz) \approx L_x(z)$ feltétel teljesül, ha $\lim_{x\to\infty} \frac{xG'(x)}{G(x)} = 0$, Ugyanis

$$\frac{L_x(cz)}{L_x(z)} \approx \frac{1-\varphi\left(\frac{1}{z}\right)}{c\left[1-\varphi\left(\frac{1}{cz}\right)\right]},$$

másrészt viszont

$$\frac{1-\varphi\left(\frac{1}{z}\right)}{c\left[1-\varphi\left(\frac{1}{cz}\right)\right]}=\frac{\int\limits_0^\infty (1-F(t))e^{-\frac{t}{z}}\,dt}{\int\limits_0^\infty (1-F(t))e^{-\frac{t}{cz}}\,dt}$$

és így

$$\frac{e^{-\frac{A}{z}}}{1+\frac{czG'(A)e^{-\frac{A}{cz}}}{G(A)}}\leqq\frac{1-\varphi\left(\frac{1}{z}\right)}{c\left[1-\varphi\left(\frac{1}{cz}\right)\right]}\leqq\frac{1+\frac{e^{-\frac{A}{z}}G'(A)z}{G(A)}}{e^{-\frac{A}{cz}}}$$

ahol $A>0$ tetszőleges.

Legyen $A=\varepsilon z$ és végezzük el a $z\to\infty$ határátmenetet; figyelembevéve, hogy feltevéseink szerint $\lim\limits_{A\to\infty}\frac{AG'(A)}{G(A)}=0$, következik, hogy

$$e^{-\varepsilon}\leqq\varliminf_{z\to\infty}\frac{1-\varphi\left(\frac{1}{z}\right)}{c\left(1-\varphi\left(\frac{1}{cz}\right)\right)}\leqq\varlimsup_{z\to\infty}\frac{1-\varphi\left(\frac{1}{z}\right)}{c\left(1-\varphi\left(\frac{1}{cz}\right)\right)}\leqq e^{\frac{\varepsilon}{c}}.$$

Mivel $\varepsilon>0$ tetszőleges, következik, hogy

$$\lim_{z\to\infty}\frac{1-\varphi\left(\frac{1}{z}\right)}{c\left(1-\varphi\left(\frac{1}{cz}\right)\right)}=1.$$

Ilyen módon valóban teljesül az $L_x(cz)\approx L_x(z)$ feltétel, ha $c>0$ és $z\to\infty$, és így az említett TAUBER-tétel szerint $\alpha_x(t)\approx L_x(t)$. Hasonlóképpen látható be, hogy $\alpha_y(t)\approx L_y(t)$. Ennélfogva

$$\frac{\alpha_x(t)}{\alpha_y(t)}\approx\frac{L_x(t)}{L_y(t)},$$

és mivel

$$\lim_{t\to\infty}\frac{L_x(t)}{L_y(t)}=\frac{G(x)}{G(y)},$$

tételünk állítása azonnal következik.

Megjegyzendő, hogy abban az esetben, ha $m=\int\limits_0^\infty x\,dF(x)=G(\infty)$ létezik, akkor $G(x)$ korlátos és mivel

$$x(1-F(x))\leqq 2\int\limits_{\frac{x}{2}}^{x}(1-F(u))\,du,$$

tehát

$$\lim_{x\to\infty} xG'(x)=0,$$

és így a $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{xG'(x)}{G(x)}=0$ feltétel teljesül; mivel továbbá ez esetben $G(\infty)=$ $=m=-\varphi'(0)$, tehát a fenti bizonyításból következik, hogy ebben az esetben

$$\lim_{t\to\infty} L_x(t)=\frac{G(x)}{m}$$

és így

$$\lim_{t\to\infty} \alpha_x(t)=\frac{G(x)}{m}$$

vagyis speciális esetként nyerjük az ismert FELLER-féle eredményt.*

Megjegyzendő, hogy az előbb alkalmazott TAUBER-tétel alkalmazható magára $\Phi(t)$-re is. Abból, hogy

$$\int_0^\infty e^{-st}\,d\Phi(t)=\frac{\varphi(s)}{1-\varphi(s)}=\frac{1}{s}L\left(\frac{1}{s}\right)$$

ahol

$$L(z)=\frac{\varphi\left(\frac{1}{z}\right)}{z\left(1-\varphi\left(\frac{1}{z}\right)\right)} \quad \text{és} \quad L(cz)\approx L(z), \quad \text{ha} \quad c>0$$

és $z\to\infty$, továbbá figyelembe véve, hogy $\Phi(t)$ monoton nemcsökkenő, következik, hogy

$$\Phi(t)\approx\frac{1}{1-\varphi\left(\frac{1}{t}\right)}.$$

Mivel az is belátható, hogy $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{\Phi(t-u)}{\Phi(t)}=1$, ha u tetszőleges rögzített pozitív szám, következik, hogy

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t g(u)\frac{\Phi(t-u)}{\Phi(t)}\,du=\int_0^\infty g(u)\,du,$$

ha $g(u)$ nemnegatív és integrálható függvény, amelyre $\int\limits_0^\infty g(u)\,du$ véges.

* Abban az esetben, amikor $G(\infty)$ véges, több is igaz, mégpedig az, hogy $\lim\limits_{x\to\infty}\beta_x(t)=\dfrac{G(x)}{m}$ feltéve, hogy $F(x)$ nem rácsos eloszlású. Az $m=\infty$ esetben ennek megfelelő tétel érvényességének eldöntése igen érdekes volna.

Figyelembe véve, hogy

$$\int_0^t \left(\int_0^u \{F(x+v)-F(v)\}\, d_v \Phi(u-v) \right) du = \int_0^t (F(x+u)-F(u))\, \Phi(t-u)\, du,$$

következik, hogy

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}(\delta_t < x) \frac{t}{\Phi(t)} = G(x),$$

tehát

$$\mathbf{P}(\delta_t < x) \approx \frac{G(x)\Phi(t)}{t} \approx \frac{G(x)}{t\left(1-\varphi\left(\frac{1}{t}\right)\right)}$$

és így valóban

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}(\delta_t < x) = 0,$$

ha

$$G(\infty) = \infty,$$

tehát δ_t közönséges határeloszlása nem létezik.

Megjegyzendő, hogy ebből a meggondolásból egy újabb bizonyítást nyerhetünk az 1. tételre.

Magyar Tudományos Akadémia
Alkalmazott Matematikai Intézete

IRODALOM

[1] A. N. Kolmogoroff: Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Springer, Berlin, 1933.
[2] P. Halmos, Measure theory, van Nostrand, New-York, 1951.
[3] J. L. Doob, Stochastic processes, Wiley, New-York, 1953.
[4] С. Н. Бернштейн, Теория вероятностей, Гостехиздат, Москва—Ленинград, 1946. (4. kiadás.)
[5] Rényi A.: Valószínűségszámítás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1954.
[6] B. V. Gnyegyenko—A. N. Kolmogorov: Független valószínűségi változók összegeinek határeloszlásai, Akadémiai Kiadó, Budapest. 1951.
[7] Rényi A. К теорий предельных теории для сумм независимых случайных величин. Acta Math. Acad. Sci. Hung. 1 (1950) 99—108.
[8] A. N. Kolmogorov: Egy tétel a feltételes várható értékek konvergenciájáról és annak néhány alkalmazása. I. Magyar Matematikai Kongresszus Közleményei. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1952. 377—386.*
[9] В. А. Рохлин: Об основных понятиях теорий меры. Мат. Сборник 25 (67) (1949), 107—150.
[10] C. Ryll Nardzewski: On quasi-compact measures. Fund. Math. 40 (1953) 125—130.

* E. Marczewski volt szíves felhívni figyelmemet a következő dolgozatra: E. Sparre Andersen—B. Jessen: Some limit theorems on integrals in an abstract set, Kgl. Danske Vidensk. Selskab. Mat. Fys. Medd. 22. No. 14. (1946) 1—29., amely hasonló problémákkal foglalkozik, mint Kolmogorov [8] munkája.

[11] T. E. Harris—H. Robbins: Ergodic theory of Markov chains admitting an infinite invariant measure, Proc. Nat. Acad. Sci. 39 (1953) 860—864.
[12] W. Feller: On the integral equation of renewal theory. Ann. Math. Statistics. 12 (1941) 243—267. (l. még a következő dolgozatokat: S. Täcklind: Elementare Behandlung vom Erneuerungsproblem, Skandinavisk Aktuarietidskrift 1944, 1–15. és Fourier-analitische Behandlung vom Erneuerungsproblem, u. o. 1945. 101—105., továbbá J. L. Doob Renewal theory from the point of view of the theory of probability Trans. Amer. Math. Soc. 63 (1948) 422—438).
[13] Takács L.: Egy új módszer rekurrens sztochasztikus folyamatok tárgyalásánál. AMI Közleményei II. köt. (1953) 135—163. Budapest.
[14] G. H. Hardy: Divergent series. Oxford, 1949.
[15] H. Reichenbach, Wahrscheinlichkeitslehre, A. W. Sijthoff, Leiden, 1935.
[16] K. L. Chung, Contributions to the theory of Markov chains. Trans. Amer. Math. Soc. 76 (1954). 397—419.
[17] M. Fréchet, Des familles et fonctions additives d'ensemble abstraits, Fundamenta Mathematicae 4 (1923) 329—365, o. 48. tétel, 364.
[18] H. Hahn és A. Rosenthal, Set functions, New Mexico, 1948, 48.
[19] Erdős Pál és K. L. Chung, Probability limit theorems assuming only the firts moment I. Memoirs of the Amer. Math. Soc. No. 6. 1952.
[20] А. Н. Колмогоров, Цепы Маркова со счётным множеством возможных состояний, Бюлл. М. Г. У. 1 (1937).
[21] W. Doeblin, Sur deux problèmes de M. Kolmogoroff concernant les chaines denombrables, Bull. Soc. Math. de France 66 (1938) 210—220.
[22] K. L. Chung, An ergodic theorem for stationary Markov chains with a countable number of states, Proceedings International Congress of Math. Cambridge (USA) 1950, Amer. Math. Soc. 1952. I. kötet 568.

HOZZÁSZÓLÁS

CSÁSZÁR ÁKOS
a matematikai tudományok doktora:

A feltételes valószínűségi mezőkről

Legyen H tetszőleges halmaz, T_1 a H halmaz részhalmazaiból álló Borel-féle halmaztest, T_2 pedig T_1-nek egy részhalmaza. A $P(A|B)$ kétváltozós halmazfüggvény legyen értelmezve $A \in T_1$, $B \in T_2$ esetén.
Rényi Alfréd a következő három axiómát teszi fel:

I. $P(A|B) \geqq 0$ és $P(B|B) = 1$.
II. Rögzített $B \in T_2$ mellett $P(A|B)$ mint A függvénye teljesen additív.
III. $A \in T_1$, $C \in T_1$, $B \in T_2$, $BC \in T_2$ esetén

$$P(A|BC)\,P(B|C) = P(AB|C).$$

Rögtön látható, hogy I. és II. alapján III. egyenértékű a következő két axiómával:

III$_1$. $A \in T_1$, $B \in T_2$ esetén $P(A|B) = P(AB|B)$.
III$_2$. $A \in T_1$, $B \in T_2$, $B' \in T_2$, $A \subset B \subset B'$ esetén

$$P(A|B)\,P(B|B') = P(A|B').$$

A továbbiakban mindig feltesszük (anélkül, hogy külön említenők), hogy I., II. és III_1. fennáll.

Vezessük be a következő elnevezést: azt mondjuk, hogy a T_1 halmaztesten értelmezett mértékek $\{\mu_\alpha\}$ rendszere az adott feltételes valószínűségi mezőt *generálja*, ha $B \in T_2$ esetén legalább egy α-ra $0 < \mu_\alpha(B) < +\infty$ és $A \in T_1, B \in T_2, 0 < \mu_\alpha(B) < +\infty$ esetén $P(A|B) = \mu_\alpha(AB)/\mu_\alpha(B)$.

1. TÉTEL. III_2. szükséges és elégséges ahhoz, hogy létezzék az adott feltételes valószínűségi mezőt generáló mértékrendszer.

A továbbiakban nagy szerep jut a következő formulának:

$$(L) \qquad P(A_1|B_1)\,P(A_2|B_2)\ldots P(A_n|B_n) = P(A_1|B_2)\,P(A_2|B_3)\ldots P(A_n|B_1),$$

ahol $A_i \in T_1$, $B_i \in T_2$, $A_i \subset B_i B_{i+1}$ $(i = 1, \ldots, n;\ B_{n+1} = B_1)$. Azt a kikötést, hogy az utóbbi feltételek mellett az (L) formula mindig fennáll, IV. axiómának fogjuk nevezni.

A mértékek egy $\{\mu_\alpha\}$ rendszerét *dimenziószerűen rendezettnek* mondjuk, ha az $\{\alpha\}$ indexek rendezett halmazt alkotnak és $\alpha < \beta, \mu_\alpha(A) < +\infty$ esetén $\mu_\beta(A) = 0$.

2. TÉTEL. IV. szükséges és elégséges ahhoz, hogy létezzék az adott feltételes valószínűségi mezőt generáló dimenziószerűen rendezett mértékrendszer.

Az ilyen dimenziószerűen rendezett mértékrendszer még igen sok mértékből állhat s az indexek halmazának rendtípusa igen bonyolult lehet. Arra a kérdésre, hogy mikor lesz ez a rendtípus adott véges rendszám, a következő tétel ad választ:

3. TÉTEL. Ahhoz, hogy létezzék az adott feltételes valószínűségi mezőt generáló legfeljebb N mértékből álló dimenziószerűen rendezett mértékrendszer, szükséges IV. és a következő feltétel teljesülése: $B_i \in T_2 (i = 1, \ldots, n)$, $P(B_i B_{i+1}|B_i) > 0$ $(i = 1, \ldots, n-1)$ esetén az i indexnek legfeljebb $N-1$ értékére lesz $P(B_i B_{i+1}|B_{i+1}) = 0$.

Ebből speciális esetként adódik a feltételes valószínűségi mezők legfontosabb típusát jellemző

4. TÉTEL. Ahhoz, hogy létezzék az adott feltételes valószínűségi mezőt generáló egyetlen mértékből álló mértékrendszer, szükséges és elégséges IV. és a következő feltétel teljesülése: $B_1 \in T_2$, $B_2 \in T_2$ esetén vagy $P(B_1 B_2|B_1) = P(B_1 B_2|B_2) = 0$, vagy $P(B_1 B_2|B_1) > 0$, $P(B_1 B_2|B_2) > 0$.

Ha az (L) formula fennállását csak bizonyos megszorítások mellett kívánjuk meg, olyan feltételeket nyerünk, melyek biztosítják az adott feltételes valószínűségi mezőt generáló és a dimenziószerűen rendezettségnél valamivel kevesebb megszorítást jelentő feltételeknek alávetett mértékrendszer létezését.

Ha II. helyett a következő axiómát tesszük:

II_0. Rögzített $B \in T_2$ mellett $P(A|B)$ mint A függvénye végesen additív, akkor az összes tételek érvényben maradnak azzal a módosítással, hogy mérték helyébe mindenütt végesen additív mérték teendő.

A TÖMEGGYÁRTÁS MINŐSÉGELLENŐRZÉSÉNEK MATEMATIKAI STATISZTIKAI MÓDSZEREIRŐL

VINCZE ISTVÁN
a matematikai tudományok kandidátusa

Előadta az 1954. június 18-án tartott nyilvános osztályülésen

Az Akadémia Nagygyűlésének harmadik matematikai tárgyú előadása a tömeggyártás minőségellenőrzésének matematikai statisztikai módszereiről szól. Az a körülmény, hogy a Nagygyűlésen helyet kap a matematikai statisztikának speciális alkalmazási területe, annak köszönhető, hogy Akadémiánk igyekszik szorosra fűzni a kapcsolatot a népgazdasággal és különös figyelmet fordít azokra a területekre, ahol a tudomány népgazdaságunk hiányosságainak felszámolásában segítséget tud adni. Mai beszámolómban éppen ezért arra törekszem, hogy áttekintést adjak arról, ami ezen a területen elméleti és gyakorlati vonalon történt, és rámutassak a legsürgősebb tennivalókra.

Nem kell hangsúlyoznom a kérdés jelentőségét, hiszen a jó minőség és az önköltség csökkentése a szocialista termelésnek mindig alapvető törekvése, de talán kiemelhetjük, hogy az új kormányprogram különösen kiemeli a minőség emelésének szükségességét és azoknak az utaknak és módoknak a támogatását, amelyekkel ez elérhető.

Előadásom első része elméleti kérdésekkel foglalkozik, a minőségellenőrzés matematikai statisztikai módszereinek elvi és matematikai kérdéseivel, míg előadásom második részében a minőségellenőrzés statisztikai módszereinek bevezetésére irányuló gyakorlati munkáról adok rövid áttekintést.

A kérdés tudományos vonatkozásait illetően először a mintavételes végellenőrzés egy elvi kérdéséről beszélek, amelyet *A. N. Kolmogorov* vetett fel, és amely megvilágítja a sztochasztikus folyamatok elméletének a statisztikai minőségellenőrzés területén való felhasználásának szükségességét.* A második, amiről elméleti vonatkozásban beszélni fogok, a rendezett minták elméletének jelentősége a minőségellenőrzés terén. Az elméleti kérdéseket a statisztikai becsléseknek a minőségellenőrzés területén való felhasználásának kérdésével zárom.

A statisztikai minőségellenőrzés hazai gyakorlati elterjesztését illetően szólni kívánok az Intézetnek néhány üzemmel való kapcsolatáról, a Magyar Szabványügyi Hivatallal való együttműködéséről, és azokról a folyamatban lévő munkákról és intézkedésekről, amelyek a statisztikai minőségellenőrzés további elterjesztését hivatottak elősegíteni.

* *Rényi Alfréd* szóbeli közlése *A. N. Kolmogorov* akadémikussal folytatott beszélgetéséről az 1953. évben megtartott varsói Lengyel Matematikai Kongresszuson.

I.

Ismeretes, hogy nagy darabszámú tételek átvételekor a minőség ellenőrzése bizonyos darabszámú minta véletlen kiválasztása és egyenkénti megvizsgálása útján történik. Valamely mintavételi terv például előírja, hogy egy N darabszámú tételből n darabszámú mintát kell venni, és ha az abban foglalt selejtes darabok száma egy bizonyos c számot meghalad, akkor a tételt, mint nem megfelelőt vissza kell utasítani, ha c vagy annál kevesebb a mintában talált selejtes darabok száma, akkor a tétel megfelelő, át kell venni. Ennél az eljárásnál tehát az n darab gyártmány minőségi összetételéből következtetünk a $N-n$ számú meg nem vizsgált gyártmánydarab minőségi összetételére. A mintavételi tervet általában úgy dolgozzák ki, hogy annak sorozatos alkalmazásával egy bizonyos selejtszázalékú tételt, vagy annál jobbat igen nagy valószínűséggel átvegyük, viszont egy meghatározott, az előbbinél nagyobb selejtszázalékú tételt, vagy annál rosszabbat igen nagy valószínűséggel visszautasítsunk. (Például az 1% selejtet tartalmazó tételeket még 95% valószínűséggel átvegyük, de már a 4%, vagy azt meghaladó selejtet tartalmazó tételt 95% valószínűséggel visszautasítsuk.) Megjegyzem, hogy mind elméleti szempontok, mind a gyakorlat arra utalnak, hogy a mintavételi terveket az érkező tételek selejteloszlásának — az ún. a priori eloszlásnak — ismeretében helyes konstruálni. (Így a Dodge—Romig-féle kétfokozatú terv alkalmazása —, amelynek egyik feltétele, hogy e táblázat alapján meg nem felelőnek minősített tételt az átadó költségére teljes egészében át kell vizsgálni, — a gyártási átlagselejt ismeretét feltételezi. Ezt az átadónak kell megmondania, s ha közlésében eltér a valóságtól, akkor nem lesz gazdaságos rá nézve a szállítás.)

Vizsgáljuk meg tehát azt a kérdést, hogy a gyártási eljárásra vonatkozó bizonyos feltételezések alapján az eredetileg említett eljárásnál következtetésünk milyen természetű, mit várhatunk a $N-n$ meg nem vizsgált gyártmánydarab selejteloszlására nézve. Tegyük fel, hogy a gyártmánydarabok valamely automata gépből kerülnek ki, amely gépen az egymás utáni darabok *egymástól függetlenül* lesznek $1-p$ valószínűséggel megfelelőek és p valószínűséggel selejtesek. Ekkor a tétel azonos eloszlású, független kísérletsorozatokból vett N elemű mintának tekinthető, amelyet véletlenszerűen két részre osztunk, egy $N-n$ és egy n darabból álló mintára. A mondottak értelmében azonban ezt úgy is felfoghatjuk, hogy egy összességből, amelyben a selejtes darabok aránya p, véletlenszerűen két egymástól független mintát veszünk, $N-n$, ill. n darabszámmal. Ebből azonban az is következik, hogy az egyikben talált selejtes darabok számából a másikban található selejtes darabok számára nézve semmiféle következtetést levonni nem lehet, a selejtes darabok száma mindkettőben egymástól függetlenül binomiális eloszlást fog követni.

Azok számára, akik a kérdés elméleti hátterével tisztában vannak, természetesen ez a megállapítás nem mond újat, viszont akik a kérdés elméleti hátterével nem foglalkoztak, azok számára megnyugtatásként hozzátehetem, hogy az n darabszámú mintából mindenesetre az eredeti összesség selejtarányát ellenőriztük.

A mondottak arra vonatkoznak, amikor az egymás utáni gyártmánydarabokra nézve a selejtté válás valószínűségei egymástól függetlenek és egyenlők. Tudjuk, ez a valóságban a legritkább esetben fordul elő, leggyakrabban még közelítőleg sem áll fenn. Paradox állításunkat még jobban megvilágítja *Kolmogorov*nak egy másik érdekes példája.

Adva van a 100 darabból álló tételeknek egy sorozata, és a minőségellenőrzés módja az legyen, hogy kiveszünk a tételből véletlenszerűen 10 darabot, ha azok mindegyikét megfelelőnek találjuk, a többi 90-et átvesszük, ha pedig akár egyet is selejtesnek találunk, akkor a tételt visszautasítjuk. Tegyük fel történetesen, hogy mindegyik 100 darabból álló tétel pontosan egy selejtes darabot tartalmaz. Ekkor következtetésünk minden esetben helytelen lesz: ha a minta tartalmaz selejtes darabot, akkor 90 megfelelőt visszautasítunk, míg ha a minta megfelelő lesz, olyan tételt veszünk át, amely tartalmaz selejtes darabot is.

Bár e példa feltételei igen valószínűtlenek, mindenesetre gondolkodásra késztet és utal a megoldás módjára.

Mint említettem, a készárú mintavételes ellenőrzésének módszerei már eddig is olyan irányban fejlődtek, hogy azok tekintettel legyenek a vizsgált tételek gyártási körülményeire, a gyártás során mutatkozó selejtarányra. Az erre vonatkozó adatokat, tapasztalatokat az újabb és újabb átvételeknél a mintában található selejtes darabok számának feljegyzésével állandóan bővíthetjük. Indokolt tehát a mintavételes minőségellenőrzés elméletének és gyakorlatának olyan fejlesztése, amelynél a gyártás körülményeit tovább elemezzük, és a valóságnak legmegfelelőbb módon azt sztochasztikus folyamatnak fogjuk fel. E *Kolmogorov*tól származó okfejtés alapján mármost látjuk, hogy tétel és minta viszonyában háromféle eshetőség állhat fenn.* A tapasztalat eddig is igazolta, hogy a selejt-előfordulás igen gyakran tömegesen történik, ritkább eset a selejt egyenletes elhelyezkedése a tételben, míg a harmadik lehetőség a fentebb vázolt függetlenség. Ennek megfelelően az egyik eset az, hogy egy sokaságból vett két résztételben található selejtes darabok száma között negatív korreláció áll fenn, a második esetben, (az egyenletesség esetében) pozitív a korreláció, a harmadik eset, hogy nem áll fenn korreláció (pl. a függetlenség esetében). Érthető ugyanis, hogy ha a selejt — bizonyos értelemben és bizonyos szerkezeti sajátsággal — „csomókban“ jelenik meg, akkor valamely p selejtarányt tételezve fel átlagosan, ha két szomszédos tétel egyikében selejtes

* Az alábbi vizsgálatokra *Rényi Alfréd*nak — *Kolmogorov* meggondolásaihoz csatlakozó — további gondolatai ösztönöztek.

darabot találunk, az csökkenti a másikban található selejtes darabok számát. Az egyenletes eloszlás esetén az egyik tételből a legjobb következtetést kapjuk a másik tételre nézve, míg függetlenség esetén a konkrét tételre nézve nem kapunk felvilágositást. A kérdésnek különösen ott van jelentősége, ahol csak ritkán kerül átvételre sor, és ennélfogva nagy biztonsággal igyekszünk a mintavételi eljárást megkonstruálni.

Ebből a meggondolásból kiindulva megvizsgáltam azt az esetet, amikor az egymásután legyártott darabokra nézve a selejtelőfordulás valószínűségei ú. n. Pólya-folyamatot alkotnak.)* Ez lényegében annak feltételezése, hogy minden megfelelő darab után a megfelelő darabok valószínűsége növekszik, míg minden egyes selejtes darab előfordulása után a selejtes darab fellépésének valószínűsége növekszik. Pontosabban: legyen az első darab legyártásánál a selejtelőfordulás valószínűsége: $p_1 = p$, míg ha az első n számú legyártott darabban a selejtes darabok száma s_n, akkor az $n+1$-ik darabra nézve a selejtelőfordulás feltételes valószínűsége

$$p_{n+1} = \frac{p+s_n p'}{1+np'},$$

ahol $|p'| < 1$ (p' negatív is lehet, ez esetben feltesszük, hogy $p' > -\frac{p}{N}$ és a folyamatot csak az $n = 1, 2, \dots N$ értékekre vizsgáljuk.) Ekkor annak valószínűsége, hogy az első n darabban a selejtes darabok száma s, Pólya-eloszlást követ:

$$P(s_n = s) = \binom{n}{s} \frac{\prod\limits_{i=0}^{s-1} (p+ip') \prod\limits_{j=0}^{n-s-1} (q+jp')}{\prod\limits_{l=0}^{n-1} (1+lp')}, \tag{1}$$

ahol $q = 1-p$.

Tekintsük mármost az első N legyártott darabot, s vizsgáljuk azt a két esetet, amikor ebből véletlenszerűen választunk ki egy n elemű mintát, továbbá, amikor mintaként az utolsó n darabot vesszük ki. Mindkét esetben keressük a $N-n$ darabban a selejteloszlást azzal a feltétellel, hogy az n elemű mintában s számú selejtes darabot találtunk.

a) Az az esemény, hogy a $N-n$ darab x számú selejtest tartalmaz, feltéve, hogy az n darab között s a selejtes darabok száma, megegyezik azzal az eseménnyel, hogy a N elemű tételben $x+s$ a selejtes darabok száma, feltéve, hogy az n elemű véletlenszerűen választott mintában s selejtes

** Pólya-folyamatokat illetően diszkrét időparaméter esetében *W. Feller:* On the theory of stochastic processes, with particular reference to applications. Proceedings of the Berkeley Symposium. 1949. 411. oldal, folytonos időparaméter esetében *O. Lundberg:* On random processes and their application to sickness and accident statistics. Uppsala. 1940. c. munkájára utalunk.

darab van. *Bayes* tétele értelmében ennek az eseménynek a valószínűsége

$$(2)\qquad P(s_N=x+s|s_n^*=s)=\frac{P(s_n^*=s|s_N=x+s)P(s_N=x+s)}{\sum\limits_{y=0}^{N-n}P(s_n^*=s|s_N=y+s)P(s_N=y+s)}$$

(figyelembevéve, hogy az $N-n$ darab között legfeljebb $N-n$ selejtes lehet).

Itt az s^* jelöléssel azt juttatjuk kifejezésre, hogy nem n egymásután legyártott darabban található selejtes darabok számáról van szó. Ha viszont a N darabban $x+s$ a selejtes darabok száma, akkor a belőle véletlenszerűen választott n elemű mintában a selejtes darabok hipergeometrikus eloszlást alkotnak, vagyis

$$P(s_n^*=s|s_N=x+s)=\frac{\binom{x+s}{s}\binom{N-s-x}{n-s}}{\binom{N}{n}},$$

míg (1) értelmében

$$(3)\qquad P(s_N=x+s)=\binom{N}{x+s}\frac{\prod\limits_{i=0}^{x+s-1}(p+ip')\prod\limits_{j=0}^{N-x-s-1}(q+jp')}{\prod\limits_{l=0}^{N-s-1}(1+lp')}.$$

Egyszerű számítás alapján

$$\frac{\binom{x+s}{s}\binom{N-s-x}{n-s}}{\binom{N}{n}}\binom{N}{x+s}=\binom{n}{s}\binom{N-n}{x}.$$

Alakítsuk most át (3) jobboldalának második tényezőjét a következő módon:

$$\frac{\prod\limits_{i=0}^{s-1}(p+ip')\prod\limits_{j=0}^{n-s-1}(q+jp')}{\prod\limits_{l=0}^{n-1}(1+lp')}\cdot\frac{\prod\limits_{i=0}^{x-1}[p+sp'+ip']\prod\limits_{j=0}^{N-n-x-1}[q+(n-s)p'+jp']}{\prod\limits_{l=0}^{N-n-1}(1+np'+lp')}$$

E szorzat első tényezője (2) számlálójának és nevezőjének minden tagjában előfordul, hasonlóképpen az $\binom{n}{s}$ tényező is. A

$$p_1=\frac{p+sp'}{1+np'},\quad q_1=\frac{q+(n-s)p'}{1+np'}$$

és

$$p_1'=\frac{p'}{1+np'}$$

paraméterek bevezetésével a második tényezőt visszahelyettesítve (2)-be a következőt nyerjük:

$$(2')\qquad P(s_N=x+s|s_n^*=s)=\binom{N-n}{x}\frac{\prod\limits_{i=0}^{x-1}(p_1+ip_1')\prod\limits_{j=0}^{N-n-x-1}(q_1+jp_1')}{\prod\limits_{l=0}^{N-n-1}(1+lp_1')},$$

ugyanis a nevezőben ezen új paraméterekkel képezett Pólya-eloszlás valószínűségeinek összege, vagyis 1 áll. Eredményünk tehát az, hogy az a posteriori selejteloszlás is Pólya-féle, azonban most már az s-et tartalmazó paraméterrel. Ennek az eloszlásnak a várható értéke azonban

$$M(x|s)=(N-n)p_1=(N-n)\frac{p+sp'}{1+np'},$$

ami s-nek monoton növekvő függvénye, s így a *$N-n$ darabban található selejtes darabok száma az n elemű mintában található selejtes darabok s számával pozitíven korrelált.*

b) A második eset eredménye alapján felesleges a minta „véletlen" módon való kiválasztása. Ugyanis a tétel selejteloszlására nézve az előző esettel azonos eredményt nyerünk. A fentebbiekben alkalmazott átalakítások részletezésének mellőzésével, csupán a gondolatmenetet közöljük.

Annak valószínűsége, hogy az első $N-n$ darabban a selejtesek száma x, ha a következő n darabban s — Bayes-tétel alapján, bevezetve az $s_N-s_{N-n}=\delta_n$ jelölést

$$P(s_{N-n}=x|\delta_n=s)=\frac{P(\delta_n=s|s_{N-n}=x)P(s_{N-n}=x)}{\sum\limits_{y=0}^{N-s}P(\delta_n=s|s_{N-n}=y)P(s_{N-n}=y)}. \tag{4}$$

Itt

$$P(\delta_n=s|s_{N-n}=x)=\binom{n}{s}\frac{\prod\limits_{i=0}^{s-1}[p+xp'+ip']\prod\limits_{j=0}^{n-s-1}[q+(N-n-x)p'+jp']}{\prod\limits_{l=0}^{n-1}[1+(N-n)p'+lp']}$$

és

$$P(s_{N-n}=x)=\binom{N-n}{x}\frac{\prod\limits_{i=0}^{x-1}(p+ip')\prod\limits_{j=0}^{N-n-x-1}(q+jp')}{\prod\limits_{l=0}^{N-n-1}(1+lp')}.$$

Megkonstruálva ezek alapján a (4) kifejezést, s egyszerűsítve az

$$\binom{n}{s}\frac{\prod\limits_{i=0}^{s-1}(p+ip')\prod\limits_{j=0}^{n-s-1}(q+ip')}{\prod\limits_{l=0}^{n-1}(1+lp')} \tag{5}$$

kifejezéssel, megfelelő átalakítás után a (4) valószínűségre pontosan a (2')-ben kapott eredményt nyerjük.

Megemlítjük, hogy az (5) kifejezés jelentése az *a)* esetben az N elemből véletlenszerűen választott n elemű mintában a selejtes darabok feltétel nélküli eloszlását adja, míg a *b)* esetben az első $N-n$ után következő n darab közötti selejtes darabok feltétel nélküli eloszlását. Ez a két eloszlás azonban — N-től függetlenül — megegyezik az *első* n darabban található selejt eloszlásával. Tehát azt az érdekes megállapítást kaptuk, hogy egy diszkrét Pólya-folyamatból bárhol választott egymásutáni n konzekutív darabban a feltétel nélküli selejteloszlás azonos. Ebből speciálisan következik, hogy bárhányadik gyártmánydarabra nézve a selejt bekövetkezésének feltétel nélküli valószínűsége p, továbbá akármelyik n meghatározott sorszámú esemény együttes bekövetkezésének valószínűsége ugyanakkora, mégpedig $\prod_{r=0}^{n-1} \frac{p+rp'}{1+rp'}$, vagyis a Pólya-folyamatot alkotó események ekvivalensek.

Végül a nyert eredményeknek még egy következményét említem, t. i. azt, hogy példát nyertünk olyan folyamatra is, ahol a tétel és minta selejtarányának korrelációja negatív. Válasszuk ugyanis p'-t negatívnak a mondott $p+Np'>0$ feltétellel. Ekkor — mindkét tárgyalt esetben — a feltételes várható értékre az

$$M(x|s)=(N-n)p_1=(N-n)\frac{p+sp'}{1+np'}$$

monoton fogyó függvénye s-nek.

A $p'=0$ eset a már említett Bernoulli-folyamat, amelyre nézve számítás nélkül is igazoltuk a függetlenséget.

Arra a kérdésre vonatkozólag, hogy ha a gyártás Pólya-folyamatot követ p és p' paraméterekkel, akkor ez a választandó minta nagyságára nézve milyen következménnyel jár, csupán egy megjegyzést teszünk. Vegyük alacsony selejtszázalék esetét, amikor olyan mintavételi tervet konstruálunk, amelynél a mintában egyetlen selejtes darabot sem engedünk meg. Legyen továbbá p_1 az a selejtarány, amelyet még 95% valószínűséggel át akarunk venni. Jelöljük most az átvétel valószínűségét Pólya-folyamat esetén $\varphi_n(p,p')$-vel, Bernoulli-folyamat esetén $\psi_n(p)$-vel, akkor

$$\tag{6} \begin{aligned} \varphi_n(p,p') &= (1-p)\left(1-\frac{p}{1+p'}\right)\cdots\left(1-\frac{p}{1+(n-1)p'}\right), \\ \psi_n(p) &= (1-p)\left(1-\frac{p}{1-\frac{1}{N}}\right)\cdots\left(1-\frac{p}{1-\frac{n-1}{N}}\right). \end{aligned}$$

Ugyanis egyrészt (1) szerint

$$\varphi_n(p,p')=\binom{n}{0}\frac{\prod_{i=0}^{n-1}(q+ip')}{\prod_{i=0}^{n-1}(1+ip')}=\prod_{j=0}^{n-1}\frac{1+ip'-p}{1+ip'},$$

másrészt $\psi_n(p)=\frac{\binom{N-M}{n}}{\binom{N}{n}}$, ha M az N darabban található selejtes darabok száma.

Fenti követelmény szerint, ha a Pólya-folyamatra a mintanagyság n_1, akkor

$$\varphi_{n_1}(p_1, p') = 0{,}95,$$

míg a Bernoulli-folyamat n_2 mintanagyságára

$$\psi_{n_2}(p_1) = 0{,}95$$

kell fennálljon. Azonban (6) kifejezésekből közvetlenül következik, hogy, ha $p' > -\frac{1}{N}$, akkor

$$\psi_{n_2}(p_1) = \varphi_{n_1}(p_1, p') > \varphi_{n_2}(p_1, p'),$$

amiből $n_2 < n_1$ következik. Azonban $p' > -\frac{1}{N}$ mindig teljesül, mert feltevésünk szerint $1 + p'N > p + p'N > 0$.

Tehát az az eredmény adódik, hogy a mintát mindkét esetben nagyobbnak kell választani, mint Bernoulli-folyamat esetén.

A Pólya-féle modell gyártási eljárásokra való alkalmazhatóságával nem kívánok foglalkozni. Ez a feltételezés kétségtelenül nem elképzelhetetlen, esetleg némi módosítással, ezt a kérdést azonban csupán a gyártási eljárások konkrét vizsgálata döntheti el. Meggondolásaink azonban mindenesetre utalnak arra, hogy pozitív eredmény várható a gyártási folyamat további analízise alapján a felvetett típusú kérdések irányában.

A mondottak maguk is számos érdekes további elméleti és gyakorlati problémát vetnek fel. Ezek közül csupán azt a kérdést vetem fel, hogy a selejteloszlások mondott típusai milyen összefüggésben állnak a selejtes darabok egymástól való távolságának eloszlásával.

Megjegyzem, hogy a folyamatos gyártási eljárásoknál (folyékony anyagok, ömlesztett anyagok, huzalok) amelyeknek gyártásközi minőségellenőrzése eddig általában úgy történt, hogy azokat darabokra, egységekre képzelték felosztva, kínálkozik a folytonos sztochasztikus folyamatok elmélete, mint az ellenőrzés eszköze. *Tallián Tibor* mérnök nemrégen tett is javaslatot az ellenőrzés egy módjának végrehajtására bizonyos — eléggé természetes — leegyszerűsítő feltételek mellett. Örvendetes volna, ha üzemeink segítenék ennek a javaslatnak a keresztülvitelét, módot adnának az ellenőrzési módszer kikísérletézésére, mert ez igen nagy reményt nyújt arra, hogy a statisztikai minőségellenőrzés módszereinek alkalmazási területét olyan iparágakra terjesszük ki, amelyek eddig nem éltek e módszerrel, és amely területekre nézve a külföldi irodalomban is csak elvétve találunk utalásokat.

Megemlítem végül, hogy *Székely Gábor* az Intézet Közleményeinek most megjelenő 1953. évi kötetében foglalkozik a selejteloszlás meghatározásának kérdésével ellenőrzött gyártási folyamat esetén és a selejt felmerülésére nézve eléggé közelfekvő feltevéssel él.

A gyártásközi ellenőrzés kérdéseit illetően a rendezett minták elméletének ezen a területen való alkalmazását ragadom ki. Ismeretes, hogy ha valamely tételből egymástól független n elemű mintát veszünk, amely mintadarabok valamely méretüket tekintve azonos eloszlásúak, akkor, ha a mintaelemeket nagyság szerint rendezzük, e sorrendben a k-adik elem mérete $(k = 1, \ldots, n)$ határozott, az eredeti eloszlástól függő eloszlást követ. *Braginszkij* vetette fel az ötletet, hogy valamely kis (4—5) elemszámhoz tartozó mintaelemek valószínűségi határait meghatározza és azt ellenőrző kártyára felrajzolva időközönként vett ugyanannyi darabos minta adataival ellenőrizze a gyártás menetét. A mintaelemek nagyság szerinti elrendeződése ily módon automatikusan történik és könnyű ellenőrizni, hogy az egyes mintaelemek ellenőrző határaikon belül helyezkednek-e el, tehát a gyártás rendben van-e. Aszerint, hogy a mintaelemek elhelyezkedése milyen rendellenességeket mutat, következtetni lehet arra, hogy az átlag, vagy a szórás, esetleg mindkettő megváltozásáról van-e szó, és így arra, hogy a rendellenesség milyen természetű.

Rendkívüli előnye ennek a módszernek, hogy viszonylag sok felvilágosítást nyerünk kevés elemű mintából, ugyanakkor szemben más gyártásközi módszerekkel, semmiféle számítást — az ellenőrzés művelete közben — nem igényel. *Braginszkij* könyvében leírja e módszer alkalmazásának néhány módját, azonban számításaiban csak bizonyos közelítéseket alkalmaz, amelyek általában nem idokoltak. E gyakorlati módszer elméleti kérdéseinek kidolgozásával nálunk *Rényi Alfréd* foglalkozott, aki e kérdésből kiindulva új módszert adott a rendezett minták elméletének alapvető tárgyalására, az elméletet maga, majd *Hajós György*gyel együtt tovább fejlesztette.

Kezdeményezése nyomán az Intézet matematikai statisztikai osztálya kidolgozta a módszer alkalmazásához szükséges táblázatokat, ellenőrző kártyákat és a gyakorlati felhasználáshoz szükséges útmutatásokat. *Sarkadi Károly, Fontányi Ágota* és *Vas Éva* errevonatkozó cikke az Intézet Közleményeinek második kötetében fog megjelenni. A cikk tartalmazza *Sarkadi Károly* néhány eredményét is, elsősorban a módszernél alkalmazott biztonság meghatározására, továbbá a mintaelemek korrelációjának megállapítására vonatkozólag.

Fontányi Ágota és *Vas Éva* foglalkoztak e módszer gyakorlati bevezetésével és a Rákosi Mátyás Művek Kerékpárgyárában bíztató eredmények mutatkoztak. A selejt csökkenésénél jelentkező eredmény mellett a módszer egyszerűségének, számolásmentességének előnyei is észrevehetők. Kívánatos volna további üzemekben való bevezetése.

A rendezett minták elméletének hazai fejlesztése és gyakorlati felhasználása szép példája az elmélet és gyakorlat együttműködése eredményességének. Amellett, hogy jelentős tudományos eredmények születtek, a gyakorlati felhasználás is igen biztató képet mutat.

Harmadikként röviden említeném a sokat vitatott *Bayes*-féle problémakört. Kétségtelen, hogyha a keresett mennyiség nem valószínűségi változó, vagy annak a priori eloszlása nem ismeretes, ez a módszer közvetlenül nem alkalmazható, azonban azokban az esetekben, amikor alkalmazható, megnyugtatóbb, exaktabb, többetmondó, mint más módszerek. Különösen hangsúlyozni kell ezt teljesen önkényes, indokolatlan módszerekkel szemben, amelyekkel nem ritkán találkozunk.

Steinhaus és *Oderfeld* rámutatott arra, hogy a *Bayes*-féle módszer sokszor *lényegében* ott is alkalmazásra kerül, ahol az a priori eloszlás nem ismeretes; az ő vizsgálataik a készáru mintavételes ellenőrzésére vonatkoznak. Ezen az úton nálunk *Sarkadi Károly* ért el további értékes elvi és a gyakorlat irányába mutató eredményeket. Hozzászólásában ki fog térni e kérdéskör aktuális vonatkozásaira.

II.

Az Intézet a minőségellenőrzés statisztikai módszereinek üzemekben való bevezetése terén több, mint két éve végez munkát. 1952 közepén létesült egy csoport, melynek feladatát képezte a matematikai statisztika tudományos művelése mellett kezdeményezni és támogatni az üzemekben — elsősorban a gyártásközi — statisztikai módszerek alkalmazását. Ezt megelőzően az Ipari Minőségellenőrző Intézet foglalkozott e módszereknek üzemekben való bevezetésével. Az Intézet azért foglalkozik e módszereknek üzemekben való konkrét bevezetése munkájával, mert e módszerek alkalmazása nem mechanikus munka. Igen-igen sok apró fogás az, amelyet el kell sajátítani ahhoz, hogy a gyártásra vonatkozó minél több hasznos információt szerezzünk, és ugyanakkor e módszerek gyakorlati alkalmazása újabb és újabb tudományos problémákat vet fel.

Most, mikor az üzemekkel való együttműködésünkről beszélek, előre kell bocsátanom, hogy előadásomban egy kissé a hiányosságok fognak nagyobb hangsúllyal szerepelni, ami mellett úgy érzem, hogy az Intézet e téren nem eredménytelen munkát végzett az elmúlt időben, és meggyőződésem, hogy ez nem volt hiábavaló, amit a jövőnek, a még eredményesebb és szélesebbkörű alkalmazásoknak kell igazolni.

Az Intézet e munkája során szocialista együttműködési szerződést kötött a Csepel Autógyárral, a Telefongyárral, az Egyesült Izzóval és a Debreceni Gördülőcsapágygyárral és sok más üzem részére szolgált tanácsadással.

A Csepel Autógyárban sok fáradságos igyekezetünk után sem sikerült e módszereket meghonosítani. Ennek oka legfőképpen abban a másutt is fennálló hiányosságban rejlik, hogy nem sikerült elérni azt, hogy ebben a gyárban felelős személy vegye kezébe e módszerek irányítását, majdnem kizárólag ezzel a munkakörrel, aki az elméleti tudnivalókat is elsajátítja. Ez a probléma sajátságos módon másutt is fennforog, holott külföldi tapasztalatok is azt mutatják, hogy e módszerek alkalmazása csak olyan helyen honosodik meg, ahol van hozzáértő gazdája a statisztikai minőségellenőrzésnek, és ebben az esetben eredmény is mutatkozik nemcsak a selejt csökkenése, nemcsak a selejt megelőzése, hanem az ellenőrzés költségei tekintetében is. Kétségtelen, hogy a statisztikai módszerek bevezetése az első időszakban munkatöbbletet, tehát munkaerő-többletet jelent, továbbá bizonyos kiképzés szükségességét, azonban az sem vitatható, hogy a későbbi időben ez meghozza a maga gyümölcsét. Ezt a tapasztalatot kaptuk a Szovjetunióból, továbbá Csehszlovákiából, ahol már szép és eredményes multra tekinthet vissza a statisztikai ellenőrzési módszerek alkalmazása. Az Intézet amellett, hogy sok ízben felkereste a Csepel Autógyárnak néhány műhelyét, segítségre volt a minőségellenőrök részére előadások tartásában is. Sajnálatos, hogy mindezek ellenére nem sikerült e módszerek meghonosítása, és kívánatos volna a már egyszer elkezdett munka folytatása, a gyár vezetőségének részéről azonban sokkal nagyobb megértéssel.

A Telefongyárban huzamos idő óta alkalmazzák a minőségellenőrzés statisztikai módszereit, és mintegy másfél éven keresztül az Intézet is részt vett tanácsadással. Ez egyrészt segítségére volt a gyárnak, de alkalom volt arra is, hogy az Intézet munkatársai tapasztalatokat szerezzenek e téren. Az utolsó egy év során az összeköttetés az Intézet hibáján kívül megszakadt, reméljük azonban, hogy rövidesen ismét felvehetjük a kapcsolatot. Ezt annál inkább helyesnek látjuk, mert nézetünk szerint előnyt jelentene a gyár részére a rendezett minták elméletén alapuló statisztikai módszerek alkalmazása, amely — mint említettem — az ellenőrzés egyszerűségénél fogva is ajánlatos. Aggályosnak látjuk, hogy ma itt sincs felelőse e munkaterületnek, és félő, hogy e módszerek előrehaladásának nem fog kedvezni, sőt az elért eredményeket kockáztatja.

Az Egyesült Izzóban különösen a végellenőrzés néhány módszerét alkalmazzák. Látogatásaink során az a benyomásunk alakult ki, hogy itt is tágabb tere volna matematikai statisztikai módszerek alkalmazásának.

A statisztikai minőségellenőrzésnek nyilván tere van a gördülőcsapágy iparban. E téren azonban még nem indult meg az eredményes munka. A Debreceni Gördülőcsapágygyárral kötött együttműködési szerződés értelmében az Intézet több ízben szolgált tanáccsal, és állandóan együttműködik a gyárban dolgozó *Tallián Tibor*ral, aki a kérdéssel elméletileg is foglalkozik. Ma még nem tudunk közelebbi adatokat e módszerek tényleges felhasználásáról, esetleges eredményességéről. A Rákosi Mátyás Művek Gördülőcsapágygyára már tervbe vette és előkészítette a statisztikai módszerek bevezetését, azonban a bevezetésre még nem került sor, és az Intézet igyekszik közreműködésével a beindítást elősegíteni. Helyes volna, ha a diósdi gyár is foglalkoznék ezzel a kérdéssel.

A Rákosi Mátyás Művek Kerékpárgyárát már említettem, ott tudniillik már alkalmazzák a rendezett minták elméletén alapuló statisztikai ellenőrzés módszerét. E gyárban igyekezettel tanulmányozzák és alkalmazzák a statisztikai módszereket, reméljük, hogy további sikereket fognak elérni mind a selejt csökkentése, mind a módszerek további munkahelyeken való alkalmazása terén.

Amikor a minőségellenőrzés statisztikai módszereinél a felelős szakember kijelölésének hiányáról beszélek, meg kell említenem, hogy üzemeink — hasonlóan fejlett ipari államok gyakorlatához — általában nagyobb teret kell adjanak a matematikai módszereknek. Ma már üzemeink rendelkezésére állhatnak végzett alkalmazott matematikusok, akiknek reszortjává lehetne tenni a minőségellenőrzés statisztikai módszereinek alkalmazását, és akik ugyanakkor az üzem más matematikai problémáival is foglalkozhatnának. Így számtalan olyan alkalmazási területet, ahol matematikai módszerek sok gazdasági előnyt jelentenek, üzemeinkben ma még nem ismernek. Gondolok itt pl. raktárkészletek, energiaszolgáltató telelepek gazdaságos méretezésére, általában véletlen ingadozásokat mutató mennyiségek helyes tervezésére, de a mechanika, szilárdságtan, vegyipar, elektrotechnika számos olyan problémájára, ahol mélyebb matematikai tárgyalás sok előnyt jelent. Üzemeink ezt a lehetőséget azonban eddig nem használták fel kellően, és még csak kis számban foglalkoztatnak állandóan alkalmazott matematikusokat. Reméljük, ezen a téren a közeljövőben gyökeres fordulat fog bekövetkezni, és az illetékes állami szervek felismerik annak jelentőségét, hogy a nagyobb üzemekben matematikusok is dolgozzanak.

Az Intézetnek a statisztikai minőségellenőrzés módszereinek bevezetésére irányuló munkájából ki kell emelnem a Magyar Szabványügyi Hivatallal való együttműködését. Az Intézet tanácsadásával készül jelenleg egy szabvány, késztermék átvételének ellenőrzési módszereire, amely szabvány az irodalomban ismeretes táblázatokat a hazai viszonyoknak megfelelő átdolgozásban tartalmazza. Ezzel kapcsolatban a Szabványügyi Hivatal részéről *Dukáti Ferenc* tett javaslatot a kétfokozatú terveknél az első fokozat visszautasítási darabszámának csökkentésére olyan mértékben, amennyire az előírt követelmények megengedik. Az átdolgozást az Intézet elvégezte, és helyenként meglepő csökkentés vált lehetségessé. Ez az átdolgozás mindenesetre növeli a mintavételi terv gazdaságosságát, ugyanakkor szelektivitását is. — Az Intézet kidolgozott egy szabványtervezetet a gyártásközi statisztikai minőségellenőrzés céljára. A tervezet megvitatása folyamatban van. — Az Intézet részt vett több szabvány átdolgozásában, amelyek matematikai módszereket tartalmaznak, és amelyek elsősorban kis mintákkal történő ellenőrzésre szolgálnak.

A mondottak szerint is a Szabványügyi Hivatallal való együttműködés szépen fejlődik, a hivatal látja a matematikai módszerek szükségességét és tudományosan is felkészül problémák önálló megoldására.

A statisztikai minőségellenőrzés módszereinek bevezetésénél mutatkozó nehézségek egyik okaként kétségkívül a magyar statisztikai irodalom hiányát hozhatjuk fel. *Jordan Károly* könyve közel 30 éve jelent meg, s így nem is tartalmazhat olyan irányú alkalmazásokat, amelyek szinte azóta jöttek létre. Külföldi — elsősorban szovjet irodalom — továbbá amerikai és angol irodalom szórványosan megtalálható, de nem mindig hozzáférhetők a technikai szakemberek számára. Egyes szovjet technikai folyóiratok minőségellenőrzéssel foglalkozó állandó rovatot tartalmaznak, és ezek közül némelyik a statisztikai minőségellenőrzés kérdéseit is rendszeresen tárgyalja. Így a Vesztnyik Masinosztrojenije.

Kívánatos a magyar statisztikai irodalom mielőbbi elindítása, amely irányban ez ideig csak néhány egyetemi jegyzet és kevésszámú cikk jelent meg. Szükséges közelebbről a minőségellenőrzés statisztikai módszereire vonatkozó könyv megjelentetése és az irodalom fellendítése.

Ez irányban folyó munkából a következőket említem meg: az év során megjelenik *Rényi Alfréd* valószínűségszámításról szóló terjedelmes egyetemi tankönyve, amely igen nagy számban tartalmaz példákat is. Megjelent továbbá *Rényi Alfréd* matematikai statisztikai előadásainak egyetemi jegyzete is. Megemlítem még *Kollár Károly* néhány sokszorosított alakban megjelent munkáját a gyártásközi ellenőrzés néhány kérdéséről és a végellenőrzés matematikai módszereiről. Továbbá *Borbély Mihály* munkáját a textiliparban használatos matematikai statisztikai módszerekről.

Folyamatban van a minőségellenőrzés statisztikai módszereiről szóló kézikönyv megírása, amelyet egy munkaközösség állít össze, melyben az Intézet Matematikai Statisztikai Osztályának munkatársain kívül *Borbély Mihály, Kollár Károly* és *Tallián Tibor* vesznek részt. Reméljük, hogy e munkának a jövő év során való megjelenése nagy segítsége lesz mérnökeinknek és technikusainknak, továbbá gazdasági szakembereinknek e módszerek elsajátításában és alkalmazásában.

Azt hiszem, beszámolómból kitűnt, hogy a hazai matematikai statisztikai kutatás messze előljár a matematikai statisztikának a minőségellenőrzés terén való gyakorlati felhasználása előtt. Ez önmagában még nem hiba, és egyrészt nem jelenti azt, hogy az elméleti kérdések továbbfejlesztésében ne haladjunk előre, másrészt pedig határozottan azt jelenti, hogy a gyakorlati munkát e téren lényegesen előbbre kell vinni. A Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének Matematikai Statisztikai Osztálya — szerény létszámkeretei között — örömmel segíti a termelést e munkában, de feltétlenül szükséges, hogy ipari szakembereink kellő jelentőséget tulajdonítsanak e kérdésnek és gazdasági vezetőszerveink nagyobb támogatást adjanak üzemeinknek ez irányú munka folytatására. Hangsúlyozni szeretném, hogy a sikeres munka alapvető feltétele az illetékes minisztériumainkban a statisztikai minőségellenőrzés bevezetésével és irányításával foglalkozó szervek létesítése.

HOZZÁSZÓLÁSOK

SARKADI KÁROLY:

Az előadó említést tett előadásában a Bayes-módszer alkalmazására vonatkozó problémakörről. Hozzászólásomban az előadásnak ehhez a pontjához kapcsolódom.

Szorítkozzunk arra az esetre, amikor egy árutétel selejtarányára akarunk következtetni a belőle vett minta alapján. Ezzel a következtetéssel kapcsolatban a kérdés természetes módon így merül fel: ha az *n* elemű mintában *c* selejtes darabot találtam, milyen határok között lehet bizonyos valószínűséggel a tétel selejtaránya, amelyből a mintát vettem? A klasszikus Bayes-féle módszer erre a kérdésre közvetlenül feleletet tudott adni, még abban az igen gyakran előforduló esetben is, mikor az a priori eloszlás nem ismert. Utóbbi esetben azonban egy önkényes feltevésre, az a priori egyenletes eloszlás hipotézisére volt szükség a probléma megoldásához. Éppen ez az önkényes feltevés volt az, amiért sok és jogos kifogás merült fel a Bayes-módszer használatával szemben.

A modern módszerekben: a konfidencia határok ellenőrzésének módszerében és a hipotézisek összehasonlításának módszerében a probléma szabatos megoldása érdekében a kérdést megfordítják: megmondják, hogy adottnak feltételezett tétel-selejtarány esetén hány selejtes darab lehet a mintában. Erre a kérdésre exakt választ tudunk adni. Ez kétségtelenül előnye ezeknek a módszereknek a Bayes-módszerrel szemben. Hátrányuk azonban, hogy a kérdés megfordításával ugyancsak bizonyos fokú önkényességet követnek el.

Éppen ezért nem lehet a Bayes-módszert teljesen idejétmúlt módszernek tekinteni. Itt elsősorban arra az esetre gondolok, amikor mód van az a priori eloszlásnak tapasztalati úton való megállapítására. Ha sorozatosan vesszük át a tételeket, akkor viszont erre mód van.

A gyakorlatban bebizonyosodott, hogy ilyen esetben szükséges az elmúlt átvételek tapasztalatainak figyelembevétele. Míg azonban a mintavételi táblázatok használata esetén csak járulékos intézkedések formájában vehetjük figyelembe az elmult átvételek eredményét, addig a Bayes-módszernél ez a módszeren belül történik.

Éppen ezért érdemelnek figyelmet *Oderfeld* lengyel matematikusnak ilyen irányú vizsgálatai. Intézetünk statisztikai osztálya ezekhez a vizsgálatokhoz hozzákapcsolódott, hogy a módszer tökéletesítésével lehetővé tegyük annak alkalmazását arra az időre, amikor a statisztikai módszerek kellő körben elterjednek hazánkban.

Még az előadás gyakorlati részéhez is szeretnék egy rövid megjegyzést tenni. A matematikusnak nemcsak a kutatás a hivatása, hanem legalább olyan fontos, hogy segítségére legyen a gyakorlati szakembereknek a már meglévő eredmények, kidolgozott módszerek felhasználásában. Ennek az utóbbi feladatnak a matematikai statisztikában talán különleges jelentősége is van. Számtalan esetben tapasztaltuk, hogy a matematikai statisztika iránt érdeklődő műszaki szakemberek, még a matematikához jól értők is, a nekik szokatlan valószínűségi következtetésekben téves utakra futnak. Ettől csak a valószínűségszámítás alaposabb ismerete óvhat meg. Akiknek erre az alaposabb elsajátításra nincs módjuk és alkalmaznak matematikai statisztikai módszereket, azok helyesen teszik, ha a módszerek részleteit illetően is Intézetünktől segítséget kérnek.

TALLIÁN TIBOR:

Örömmel üdvözlöm az MTA III. osztályának azt a lépését, hogy nagygyűlési programjában teret adott a matematikai statisztikai minőségellenőrzés kérdéseinek. Remélem, hogy ezzel sikerül iparunk figyelmét a minőségellenőrzés ezen korszerű módszereire irányítani. Kétségtelen, hogy a statisztikai minőségellenőrzés elterjedése Magyarországon jelentős minőségjavulást, komoly megtakarításokat, és a termelőfolyamatok jellegzetességeinek sokkal alaposabb megismerését fogja eredményezni.

Az előadót, *Vincze István* kandidátust köszönet illeti azért, mert a kérdés elméleti tárgyalása mellett a statisztikai minőségellenőrzés alkalmazásának gyakorlati problémáit is részletesen ismertette. Ezzel is bebizonyította, hogy a Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézete súlyt vet a gyakorlattal való állandó szoros kapcsolat fenntartására és meg is teszi az ehhez szükséges konkrét kezdeményező lépéseket.

Az előadás elméleti részéhez már hozzászólt *Sarkadi Károly* elvtárs. Én csak a folytonos gyártási folyamatok statisztikai ellenőrzéséről mondottakat bővítem ki néhány szóval:

Folytonos gyártási folyamatról beszélek, ha a termék kontinuum, mely folyamatosan, rendszeres időbeli megszakítások nélkül keletkezik. Ilyen folytonos folyamatban termel a kohászat, a vegyiipar, a textilipar és pl. a malomipar az esetek túlnyomó részében. Tágabb értelemben ideérthetjük a nagy adagokban „szakaszosan" termelő kohászati és vegyi folyamatokat is, ha egy-egy nagy adagra összpontosítjuk figyelmünket, mely ugyancsak kontinuum.

Ezen folyamatok statisztikai minőségellenőrzése hazánkban — sőt amenynyire az idevágó irodalomból következtetni lehet, külföldön is — ritkaság, holott termelésük volumenje és értéke mindenképpen indokolnák a statisztikai módszerek alkalmazását.

Véleményem szerint a statisztikai minőségellenőrzés alkalmazását kiterjeszthetjük ezekre a döntő ipari folyamatokra, ha a „klasszikus" matematikai módszereket alkalmasan kiegészítjük. *Rényi Alfréd* levelező tag iránymutatása alapján végzett vizsgálataim azt látszanak mutatni, hogy sztochasztikus folyamatok, nevezetesen folytonos és stacionér Markov-folyamatok alkalmasak az itt észlelt jelenségek leírására. Egyszerű esetben használható modellként kínálkozik egy olyan Gauss jellegű folyamat, melynek korrelációs függvénye egyszerű, negatív kitevőjű exponenciális függvény. Ebből a folyamatból kell — akár pontszerű, akár véges időszakaszon integráló észlelési módszerrel — mintát venni. A mintabeli középértékek és szórások ismert fogalmaihoz még hozzávesszük egymáshozrendelt mintapárok korrelációját és ezekből az alapfolyamat feltételnélküli eloszlását, valamint a korrelációs függvényt jellemző időkonstanst is meghatározhatjuk. A jellemzők ekként történő meghatározása után időbeli állandóságukat az ellenőrzőkártyák szokott módszerével ellenőrizzük.

Az alapokból eddig ennyi tisztázódott, azonban a módszer megvalósításához szükséges matematikai apparátus még több probléma megoldását igényli.

Ennél is komolyabb akadály, hogy nagyszámú üzemi mérés volna szükséges a gyakorlatban előforduló folyamatok és a matematikai modell egyezésének megítélésére, és ezek a mérések még meg sem kezdődtek.

Áttérve Vincze István előadásának második, gyakorlati kérdésekkel foglalkozó részére, azt kívánom elmondani, hogy miben látom a statisztikai minőségellenőrzés magyarországi elterjedésének főbb akadályait. Mindjárt megjelölöm az orvoslás egy-egy olyan lehetőségét, melyről tudomásom van.

1. A statisztikai minőségellenőrzés magyarnyelvű irodalmából hiányzik egy olyan munka, mely az üzem műszaki szakemberei számára érthetően kifejti a statisztikai ellenőrzés üzemi vonatkozásait. Nemcsak a statisztikai módszereket, hanem azt is, hogy a nyert eredmények, statisztikai jellemzők, milyen technológiai tényeket tükröznek. A főhiba nálunk ugyanis az, hogy, ha egy-egy üzem tudja is a statisztikai módszerek alapjait, de nem tudja, hogy mihez fogjon a nyert eredményekkel.

A szovjet irodalom bővelkedik megfelelő szakmunkákkal. Remélhető, hogy az Alkalmazott Matematikai Intézet szerkesztésében most készülő magyar szakkönyv, melyet *Vincze* elvtárs említett, nálunk is pótolja ezt a hézagot.

2. Hiányoznak a statisztikai minőségellenőrzés módszereiben képzett üzemi MEO vezetőerők. Ezért az üzemek kénytelenek statisztikus szakemberekhez fordulni a minőségellenőrzés megszervezéséért. Ezek meg is szervezik az ellenőrzést, igen kitűnően, csak éppen az üzem technológiai sajátságainak megfelelő műszaki kiértékelés marad el.

3. Tudtommal műszaki egyetemeink tantervében nem szerepel a statisztikai minőségellenőrzés. Így a szakerők hiánya nehezen is fog megszünni, mert, megítélésem szerint, a matematikai statisztikát nehézségei miatt a műszakilag és matematikailag legképzettebb rétegnek, a mérnököknek kellene elsajátítaniok.

A kádernehézségek áthidalására szervez most a KGM statisztikai minőségellenőrzési tanfolyamot. Ez kétségkívül üdvös kezdő lépés, de a fent elmondottak értelmében szerintem csak kezdet.

4. Az ipari minisztériumok közül a KGM-ben nincs a statisztikai minőségellenőrzésnek függetlenített szakelőadója. Egyéb munkával erősen megterhelt előadók egyik feladata, hogy statisztikai minőségellenőrzést vezessenek be az üzemekben. Nézetem szerint ez erősen nehezíti a feladat megoldását.

Ezen a hiányon a KGM illetékes műszaki vezetői hivatottak segíteni.

Végül

5. Műszaki tudományos egyesületeink, a Gépipari Tudományos Egyesület, a Méréstechnikai és Automatizálási Egyesület munkaprogramjában legjobb tudomásom szerint a statisztikai minőségellenőrzés nem szerepel.

Egyik egyesület munkaprogramjába ezt a kérdést fel kellene venni.

Ezek voltak a jelen pillanat legégetőbb nehézségei. Legyőzésük után természetesen jelentkezni fognak újabbak, előreláthatólag akkor már az egyes üzemek különleges jellegéből folyó nehézségek. És jelentkezni fog az a nehézség, hogy az üzemekben széles dolgozó rétegeket kell a statisztikai ellenőrzés alkalmazására ránevelni.

A kormányprogram és a III. pártkongresszus határozatai az ipari termelés minőségére döntő súlyt vetnek. Ezért bízhatunk abban, hogy az üzemek pártirányítását és gazdasági vezetését ellátó szervek, és az üzemi műszaki kollektívák meg fogják adni a minőségjavítás minden módszeréhez, így a statisztikai ellenőrzéshez szükséges támogatást is. Így tehát tudósaink és tudományos intézményeink azon munkája, melyről az előadásban hallottunk, bizonyára eredményes lesz, nemcsak az elmélet, hanem a gyakorlati alkalmazás területén is.

Ára: 27,— Ft.

TARTALOMJEGYZÉK

TUDOMÁNYOS KÖZLEMÉNYEK

A MAGYAR
TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI OSZTÁLYÁNAK

KÖZLEMÉNYEI

IV. KÖTET 4. SZÁM

ÜNNEPI SZÁM:
BERNOULLI JAKAB
SZÜLETÉSÉNEK 300. ÉVFORDULÓJA ALKALMÁBÓL

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
BUDAPEST, 1954.

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI OSZTÁLYÁNAK

KÖZLEMÉNYEI

A SZERKESZTŐBIZOTTSÁG TAGJAI:
CSÁSZÁR ÁKOS, DETRE LÁSZLÓ, GYULAI ZOLTÁN, HAJÓS GYÖRGY,
NOVOBÁTZKY KÁROLY, RÉNYI ALFRÉD, TURÁN PÁL

FŐSZERKESZTŐ:
ALEXITS GYÖRGY

IV. kötet 4. szám

Szerkesztőség: Budapest, V., Széchenyi rakpart 3.
Kiadóhivatal: Budapest, V., Alkotmány utca 21.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei változó terjedelmű füzetekben jelennek meg és az Akadémia III. osztályának felolvasóülésein bemutatott matematikai dolgozatokat, valamint egyéb dolgozatokat, referátumokat, továbbá az osztály munkájára vonatkozó közleményeket, könyvismertetéseket stb. közölnek. Évenkint egy kötet jelenik meg (négy szám alkot egy kötetet).

Kéziratok a következő címre küldendők:

A Magyar Tudományos Akadémia
III. Osztályának Közleményei.
Budapest, V., Széchenyi rakpart 3.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi levelezés.

Minden szerzőt 100 különlenyomat illet meg megjelent munkájáért.

Közlésre el nem fogadott kéziratokat a szerkesztőség lehetőleg visszajuttat a szerzőhöz, de felelősséget a beküldött kéziratok megőrzéséért, vagy továbbításáért nem vállal.

A Közlemények előfizetési ára kötetenként belföldi címre 40 forint, külföldi címre 60 forint. Belföldi megrendelések az Akadémiai Kiadó, Budapest, V., Alkotmány u. 21. (Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 04-878-111-48), külföldi megrendelések a „Kultúra" Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalat, Budapest, VI., Sztálin út 21. (Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 45-790-057-50-032) útján eszközölhetők.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztálya a következő idegennyelvű folyóiratokat adja ki:

1. Acta Mathematica Hungarica,
2. Acta Physica Hungarica.

BERNOULLI JAKAB
(1654—1705)

A VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS TÖRTÉNETÉNEK RÖVID ÁTTEKINTÉSE

RÉNYI ALFRÉD lev. tag

1. §. A klasszikus valószínűségszámítás

A tudomány egy ágának megismerését, eredményeinek, módszereinek helyes értékelését nagymértékben elősegíti, ha az illető tudományágat fejlődésében vizsgáljuk, ha nemcsak mai fejlettségi fokán ismerjük, hanem tanulmányozzuk történetét is. Csak így kapunk helyes képet arról, honnan indult el, hol tart és merre halad az illető tudományág.

Ebben a tanulmányban, amelynek aktualitását az adja meg, hogy ez évben december 27-én ünnepeljük BERNOULLI JAKAB, a valószínűségszámítás történetének egyik legkiemelkedőbb alakja, a nagy számok törvényének felfedezője születésének 300. évfordulóját, rövid áttekintést igyekszünk adni a valószínűségszámítás történetéről, amely azonban nem törekszik teljességre, csak a főbb mozzanatok kiemelésére.*

A matematika egy ágának a története nem teljes, ha csak a matematika szóbanforgó ágának belső fejlődéséről ad számot. Világos képet a valószínűségszámítás fejlődéséről csak úgy nyerhetünk, ha azt az emberi gondolkodás, az emberiség fejlődésének részeként vizsgáljuk, tehát vizsgáljuk azokat a társadalmi szükségleteket, amelyek a valószínűségszámítás fejlődését megkívánták, ha foglalkozunk gyakorlati alkalmazásainak fejlődésével, továbbá a valószínűségszámításra vonatkozó nézetek fejlődésével is. Ennek következtében azonban a valószínűségszámítás történetének tanulmányozása nemcsak annak mélyebb megismerése szempontjából bír jelentőséggel, hanem történelmi, filozófiai szempontból és más tudományok, pl. a fizika szempontjából is. Látni fogjuk, hogy a valószínűségszámítás történetének már rövid áttekintése is számos értékes tanulságot nyújt.

A valószínűségszámítás története a reneszánsz korában kezdődik. Nincsenek adataink arra vonatkozólag, hogy az ókorban a valószínűség matematikai fogalmát egyáltalán ismerték volna. Az ókori görög materialista filozófusoknál előfordultak olyan gondolatok, amelyek a véletlen jelenségek

* A valószínűségszámítás történetére vonatkozó irodalomból utalunk elsősorban L. TODHUNTER „The history of the mathematical theory of probability" (Macmillan, Cambridge, 1865) c. adatokban gazdag munkájára, továbbá B. V. GNYEGYENKO „Kursz teorii verojatnosztyej" c. könyvének 3. függelékére, amely rövid terjedelme ellenére számos fontos elvi jelentőségű megállapítást tartalmaz. Jelen tanulmány kissé átdolgozva, függelékként megjelent a szerző „Valószínűségszámítás" c. egyetemi tankönyvében is. (Tankönyvkiadó, 1954, 673—691.)

tömegéből kialakuló szükségszerű természeti törvények zseniális megsejtésére vallanak. Így például PLATON „Törvények“ című munkájában * így jellemzi a görög materialisták felfogását: „... az elemek (a tűz, víz, föld és levegő) saját erejüknek véletlen és tervszerűtlen sodra által mozgásba hozva, ahogyan éppen összetalálkoztak, valami rokonság folytán összeilleszkedtek ... általában minden, ami az ellentétek vegyülése folytán *természeti szükségszerűséggel, ámde teljesen véletlenül* és találomra vegyült össze, így jött létre — tehát így jött létre az egész csillagos ég, valamint minden, ami csak az égen van ... nem ész által, sem nem valamely isten, sem öntudatos művészet ... hanem ... természet és véletlen folytán.“ Ezek a gondolatok azonban matematikai formát akkoriban még nem öltöttek és feledésbe merültek. A reneszánsz korában a szerencsejátékokkal kapcsolatban találkozunk az első számottevő próbálkozásokkal a valószínűségszámítás terén. A korai kapitalizmus kialakulása, a kereskedelem kifejlődése idején, amikor a kockázat fogalma a kereskedők, bankárok érdeklődése középpontjában állott, érthető, hogy érdeklődéssel fordultak a véletlen fogalma felé, és szenvedélyes érdeklődéssel kutatták a véletlen törvényeit, elsősorban ott, ahol azok szinte laboratóriumi precizitással voltak megfigyelhetők: a szerencsejátékok területén. Kétségtelen, hogy ebben a korban a szerencsejátékok igen elterjedtek és a játék sokaknál szinte szenvedéllyé vált, azonban abban, hogy a valószínűségszámítás törvényeit a szerencsejátékokkal kapcsolatban kezdték tanulmányozni, nemcsak a szerencsejátékok iránti érdeklődés nyilvánult meg, hanem az is, hogy felismerték, hogy a véletlen törvényeit ezen a területen megismerve, azokat más területeken is alkalmazni lehet. A várható érték („matematikai reménység“) fogalma, amely egykorú a valószínűségszámítás fogalmával, nemcsak a szerencsejátékokban elérhető várható nyereséget, hanem a kereskedelmi, üzleti tevékenység során elérhető várható hasznot is jelentette a XVI. és XVII. század polgárai számára; és bár az utóbbi esetben a várható haszon kevésbé megbízható módon volt kiszámítható, a matematikai módszer mégis bizonyos támpontot adott. (Gondolunk itt például az Angliában a XVII. században kifejlődő hajózási biztosításra). A valószínűségszámítás kifejlődése a XVII. század második felében tehát szorosan összefügg azokkal a társadalmi, gazdasági átalakulásokkal, amelyek ebben a korban lejátszódtak.

A valószínűségszámítás első kutatói közül megemlítjük LUCA PACIUOLO ** (1445—1514), TARTAGLIA *** (1499—1557) és CARDANO nevét (1501—1576).

* X. könyv, 889. PLATON összes művei, II. kötet. Magyar Filozófiai Társaság, Bp. 1943. 959. o. A fenti idézet EMPEDOKLES felfogásának kifejtése, amint azt H. DIELS megállapította, és ezt a PLATON-részletet EMPEDOKLES töredékei közé sorolta (l. H. DIELS I 21 EMPEDOKLES A 48). Utóbbi körülményre SZABÓ ÁRPÁD volt szives a figyelmemet felhívni.

** Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita, Venezia, 1494, 197. o.

*** General trattato, Vinegia, 1556, 265. o.

Utóbbi „De ludo aleae“ című munkájában több valószínűségszámítási feladatot helyesen old meg. G. GALILEI „Considerazione sopra il Gioco dei Daddi“ című munkájában* szabatosan kiszámítja a „szemek“ számának eloszlását, 3 kockával való dobásnál.** A szerencsejátékokkal kapcsolatos kérdések foglalkoztatták a XVII. század közepének legkiválóbb matematikusait, így B. PASCAL-t (1623—1662), P. FERMAT-ot (1601—1665) és CH. HUYGHENS-t (1629—1695). Előbbi két matematikus foglalkozott többek között két feladattal, amelyeket DE MÉRÉ lovag egy híres szerencsejátékos vetett fel. PASCAL és FERMAT tisztázzák a valószínűségszámítás számos alapvető fogalmát és többek között helyesen oldják meg azt a problémát, amellyel PACIUOLO, TARTAGLIA és CARDANO sikertelenül próbálkoztak. Felfedezéséről PASCAL FERMAT-hoz 1654. július 29-én írt levelében a következőképpen számol be:*** „Most már nem kételkedem abban, hogy helyes úton járok, miután eredményeim ilyen csodálatos módon megegyeznek az Önével. Látom, hogy az igazság ugyanaz Toulouse-ben, mint Párisban.“ PASCALnak ezekben a szavaiban érezhető az a nagy élmény, amelyet ő az elsők között ismert meg, hogy a véletlen események látszólagos káoszát a matematika szabatos eszközeinek felhasználásával a tudományos kutatás számára sikerült hozzáférhetővé tenni. HUYGHENS „De ratiociniis in ludo aleae“ című, 1657-ben FR. SCHOOTEN (1615—1660) „Exercitationum Mathematicorum“ Lib. 1. című könyvének függelékeként megjelent munkájában gyűjteményét találjuk az ebben a korban ismert valószínűségszámítási feladatoknak.

Érdekes megemlíteni, hogy HUYGHENS a valószínűséget a várható érték segítségével definiálja: a nyerés valószínűségét mint a nyereség várható értéke és számértéke hányadosát határozza meg.

A várható érték (nyeremény) fogalmának a szerencsejátékokra vonatkozó érdekes logikai analízisét találjuk. B. SPINOZA, a kiváló materialista filozófus egy 1666-ban JAN VAN DER MEERhez írt levelében.**** Itt jegyezzük meg, hogy egy 1697-ben (SPINOZA halála után 20 évvel) Hágában kiadott „Reeckening van Kanssen“ című valószínűségszámítási munkát (amely néhány HUYGHENS művében megoldás nélkül közölt feladattal foglalkozik), újabban szintén SPINOZÁnak tulajdonítanak.*****

A valószínűségszámítás fejlődése a XVIII. században gyors fellendülésnek indult, különösen Franciaországban és Angliában. Az első matematikus, aki világosan felismerte, hogy a valószínűségszámítás módszereinek hordereje messze túlnő a „szerencsejátékok“ szűk körén, BERNOULLI JAKAB (1654—1705) volt. Művében, amelynek „Ars coniectandi“ címet adta, és amely csak halála

* G. GALILEI: Opere, Firenze, 1855, XIV. kötet, 293—294. o.

** Ezt a problémát már egy 1477-ben Velencében kiadott, DANTE „Divina Commedia“-jához irott kommentár is említi.

*** B. PASCALS Oeuvres, Paris, 1819. 4. kötet, 361. o.

**** SPINOZA, Briefwechsel, Leipzig, 1914. 166—168. o.

***** L. pl. J. DUTKA, Spinoza and the theory of probability, Scripta Math. 1953. 24—33.

után, 1713-ban jelent meg Baselben, bebizonyítja a nagy számok törvényét és részletesen foglalkozik annak elvi jelentőségével. BERNOULLI egy olyan módszert alkalmaz a több kockával dobott szemek számával kapcsolatban, amely lényegében a generátorfüggvény módszerével azonos. Ki kell emelnünk, hogy BERNOULLI a véletlen fogalmát alapjában materialista módon tárgyalja.

„Teljesen bizonyos — mondja — hogy egy kocka adott helyzet, sebesség és az asztallaptól való távolság mellett attól a pillanattól kezdve, hogy elhagyja kezünket, nem eshet másképpen, mint ahogy ténylegesen esik. Hasonlóképpen az idő a légkör adott állapota mellett holnap nem lehet más, mint amilyen ténylegesen lesz. Ezek az okozatok közvetlen okaikból nem kevésbé szükségszerűen következnek, mint a napfogyatkozások az égitestek mozgásából. Ennek ellenére a napfogyatkozást a szükségszerű események közé, a kocka esését és az időjárást a véletlen események közé sorolják. Ennek oka kizárólag abban rejlik, hogy az, amint a későbbi események meghatározására adottnak tekintünk és valójában is adva van, előttünk nem eléggé ismeretes; ha eléggé ismernénk, úgy a matematika és fizika mai fejlettsége mellett* az adott okokból a későbbi okozatokat ugyanúgy kiszámíthatnánk, mint ahogy például az ismert csillagászati törvények alapján a napfogyatkozásokat kiszámítjuk és előre tudjuk látni. Mielőtt a csillagászat erre a fokra emelkedett, a napfogyatkozásokat ugyanúgy a véletlen eseményekhez számították, mint az említett véletlen eseményeket. Ebből következik, hogy egy embernek egy adott időpontban valami véletlennek tűnhet, amit egy másik ember (sőt esetleg ugyanaz az ember) egy másik időpontban, miután az okokat felismerte, szükségszerűnek tekint.“ **

BERNOULLI JAKAB 1654. december 27-én született Baselben. Apja kívánságára először teológiai tanulmányokat végzett, de a teológiánál sokkal többet foglalkozott diákkorában matematikával és csillagászattal. Tanulmányai befejezése után (1676) 6 évig utazgatott Európában. 1682-ben, miután a Strassburgban neki felajánlott papi állást nem fogadta el, visszatért Baselbe és ott matematikát és fizikát tanított az egyetemen, ahol 1687-ben nevezték ki professzorrá. 1699-ben a Párisi Akadémia tagjává választotta. 1705. augusztus 16-án, 51 éves korában halt meg; sírkövére, kívánságának megfelelően, egy logaritmikus spirális (t. i. két tanulmányában is foglalkozott a logaritmikus spirálisokkal) és az „Eadem mutata resurgo“ szavak vannak vésve. BERNOULLI JAKAB volt az első neves matematikus a Bernoulli-családból. Tanszékén őt halála után öccse és tanítványa, BERNOULLI JÁNOS (1667—1748) követte; rajtuk kívül még az első BERNOULLI MIKLÓS (1687—1739), JAKAB unokaöccse, továbbá JÁNOS két fia, a második BERNOULLI MIKLÓS és BERNOULLI DÁNIEL (1700—1782) voltak kiváló matematikusok.

* BERNOULLI itt a differenciál- és integrálszámításra utal, amelynek kiépítésében neki magának is jelentős része volt.

** Ars coniectandi, IV. rész, I. fej Ostwald's Klassiker, Nr. 108, 73—74. o.

BERNOULLI JAKAB a differenciál- és integrálszámítás egyik legelső művelője volt, akinek munkássága e téren közvetlenül LEIBNITZéhez csatlakozik. Maga LEIBNITZ is a legnagyobb elismeréssel beszélt BERNOULLI JAKAB ez irányú munkájáról. Mi itt részletesen csak BERNOULLI korszakalkotó valószínűségszámítási művével, az „Ars Coniectandi"-val foglalkozunk. BERNOULLI már az 1679—1685-ös években kezdett a valószínűségszámítással foglalkozni; ennek ellenére az Ars Coniectandi halálakor még befejezetlen maradt. A félbenmaradt kézirat nyomdakész részét JAKAB halála után unokaöccse, az első BERNOULLI MIKLÓS rendezte sajtó alá 1713-ban. Ez a mű négy részből áll; az első rész nem más, mint HUYGHENS fentemlített „De ratiociniis in ludo aleae" c. munkája, amelyet BERNOULLI JAKAB részletes megjegyzésekkel látott el; ezek a megjegyzések jelentőségben messze felülmulják az eredeti munkát. A második rész a kombinatorika részletes tárgyalását tartalmazza; ebben a részben szerepel először az irodalomban EULER által később Bernoulli-féle számoknak nevezett számsorozat. A harmadik rész valószínűségszámítási feladatoknak a második részben közölt kombinatorikai módszerekkel való megoldását tartalmazza.

A negyedik rész alkotja a munka kétségkívül legjelentősebb részét. Míg az első három részben BERNOULLI ugyanúgy, mint előfutárai, kizárólag szerencsejátékokkal kapcsolatos feladatokkal foglalkozik, a negyedik részben BERNOULLI a véletlen tömegjelenségekkel foglalkozik teljes általánosságban és azt a kérdést vizsgálja, milyen pontossággal lehet egy véletlen esemény valószínüségét az illető esemény gyakoriságának megfigyelése alapján meghatározni. Ez a kérdésfelvetés vezette őt a nagy számok törvényének felfedezésére. Annak igazolására, hogy mennyire világosan látta BERNOULLI JAKAB a nagy számok törvényének nagy horderejét, idézzük művéből a következő sorokat: „A legegyszerűbb ember is (egész csodálatos módon) egy természetes ösztönnél fogva minden tanítás nélkül is tudja, hogy minél több tapasztalattal rendelkezik, annál kisebb az a veszély, hogy az igazságtól eltévelyedjen. Bár ezt a dolog természeténél fogva mindenki belátja, mégis ennek tudományos alapokon nyugvó bizonyítása távolról sem kézenfekvő, és ezért akarom ezt itt közölni. Azonban úgy hiszem, keveset tennék, ha ennél megállanék. Meg kell vizsgálni még valamit, amire talán eddig senki sem gondolt. Azt is meg kell ugyanis vizsgálni, hogy a megfigyelések számának növelésével növekszik-e annak a valószínűsége, hogy a kedvező és kedvezőtlen esetek számossága a valódi arányt megközelíti, mégpedig olymódon, hogy ez a valószínűség végül a bizonyosság tetszőleges megadott fokát meghaladja ... Ha ez így van, amit a következő fejezetben meg fogok mutatni, akkor az esetek számát a posteriori majdnem olyan pontosan meg tudjuk határozni, mintha a priori ismeretes volna. Ez a mindennapi élet számára elegendő ahhoz, hogy feltevéseinket véletlen jelenségek bármely körére vonatkozólag nem kevésbé tudományosan ellenőrizzük, mint a szerencsejátékoknál.

Ha az urna helyébe a levegőt (vagy az emberi testet) gondoljuk, amely ugyanúgy a legkülönbözőbb változások (betegségek) nagy tömegét foglalja magában, mint ahogy az urna a golyókat, ugyanúgy megfigyelések útján állapítjuk meg, mennyivel inkább következik be egyik esemény, mint egy másik ... Ez az a probléma, amit itt közölni elhatároztam magam, miután 20 évig hordtam magamban; ez a probléma újszerűségénél és rendkívül nagy hasznánál fogva, tekintetbe véve nehézségét is, túlszárnyalja ennek a tannak összes fejezeteit jelentőségben és fontosságban."

Ezután BERNOULLI megcáfolja azokat az ellenvetéseket a nagy számok törvényének a szerencsejátékok körén túlmenő alkalmazásaival szemben, amelyeket egyesek, akikkel eredményeit előzetesen közölte, (elsősorban LEIBNITZ) tettek. Ezek közül az ellenvetések közül a legérdekesebb arra vonatkozik, hogy a szerencsejátékokon kívüli területen a véletlen események pl. betegségek valószínűsége idővel megváltozhat. Erre BERNOULLI azt válaszolja, hogy ez valóban lehetséges, ez esetben természetesen újabb megfigyeléseket kell végezni, ugyanúgy, mint amikor egy urna összetétele megváltozik.

A fenti idézetekből is kitűnik, hogy művének, amely a valószínűségszámítás történetének egyik legjelentősebb dokumentuma, a tanulmányozása a valószínűségszámítás minden kutatója számára ma is érdekességgel bír.

Fontos lépést jelentettek előre P. MONTMORT (1678—1718) „Essai d'analyse sur les jeux de Hasard" c. munkájának megjelenése 1708-ban, továbbá A. MOIVRE (1667—1751) „De mensura sortis" és „The doctrine of chances" c. munkáinak megjelenése 1711-ben, ill. 1718-ban. Művében MOIVRE bebizonyítja a binomiális eloszlásnak a normális eloszlással való megközelíthetőségét, a $p = 1/2$ esetre vonatkozólag. A valószínűség ú. n. „klasszikus" definíciója (a kedvező esetek száma osztva a lehetséges esetek számával) MOIVREnél fordul elő először. MOIVRE hangsúlyozza a valószínűség objektivitását. „A kocka dobásánál — írja — annak valamely helyzetének valószínűsége éppen olyan tényleges tárgya lehet a kutatásoknak, mint bármely más mennyiség vagy arány".* A XVIII. században a valószínűségszámítás alkalmazási köre már sokkal szélesebb volt, kiterjedt a biztosítással, a népszámlálással, a népesség szaporodásával kapcsolatos számos kérdésre. Ki kell emelnünk e korból Th. BAYES (megh. 1761)** halála után, 1763-ban megjelent munkáját: „An essay towards solving a problem in the doctrine of chances". BAYES munkája a következő probléma megoldásával foglalkozik: „Adva van, hogy egy véletlen esemény hányszor következett be és hányszor nem. Meghatározandó, hogy az esemény valószínűsége mekkora eséllyel fekszik két megadott határ között." *** BAYES tehát az első, aki szabatosan megfogalmazza a

* The doctrine of chances. 3. kiadás. London. 1756. 253. o.

** BAYES születési éve nem ismeretes.

*** Th. BAYES: Versuch zur Lösung eines Problems der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Ostwald's Klassiker, No. 169. 4. o.

matematikai statisztika alapproblémáját és azt a róla elnevezett módszerrel meg is oldja. BUFFON (1707—1788) „Essai d'arithmetique moral“ című munkája, amelyben többek között geometriai valószínűségekre vonatkozó feladatok, így pl. a tűdobásra vonatkozó feladat is megtalálható, szintén nagy hatást váltott ki. A XVIII. században végbement fejlődés tetőpontját P. S. LAPLACE (1749—1827) munkái jelentik. LAPLACE legnagyobb műve, a „Théorie analytique des probabilités“, amelynek első kiadása 1812-ben jelent meg, a valószínűségszámítás első rendszeres tankönyvének nevezhető. LAPLACE hangsúlyozza a valószínűségszámítás nagy gyakorlati jelentőségét. Művének NAPOLEONhoz intézett dedikációjában a következőket írja: „... a valószínűségszámítás kiterjed az élet legfontosabb kérdéseire, melyek közül a legtöbb nem más, mint a valószínűségszámítás egy problémája.“ LAPLACE a valószínűségszámítás fogalmának „klasszikus“ meghatározásából indul ki, bebizonyítja a MOIVRE—LAPLACE-tételt, és számos érdekes, konkrét feladatot old meg. A valószínűségszámítás alkalmazási köre LAPLACEnál már magában foglalja a hibaszámítást, csillagászati kérdéseket, számos konkrét statisztikai problémát. A relatív gyakoriság statisztikus ingadozásaira példaként egyebek között a francia postán évente elégtelen címzéssel feladott levelek relatív gyakoriságát hozza fel, amely meglepő stabilitást mutat. A hibaszámítással kapcsolatban kidolgozza a legkisebb négyzetek elméletének alapjait. Az a megállapitás, hogy a mérési hibák normális eloszlást követnek, már ADRAIN egy 1809-ben megjelent munkájában szerepel. LAPLACE ezt a tényt a MOIVRE—LAPLACE tétellel indokolja; foglalkozott azzal a feltevéssel is, hogy a hibák abszolut értéke exponenciális eloszlású. Messzemenően továbbfejlesztette a generátorfüggvény módszerét. A valószínűséget mint a kedvező esetek számának és az összes esetek számának hányadosát definiálja; abban az esetben, ha az „esetek“ egyformán valószínűek; de foglalkozik azzal is, ha az „esetek“ nem egyformán valószínűek.

LAPLACE az „Essai philosophique sur les probabilités“ című munkájában kifejti filozófiai nézeteit a valószínűség fogalmával kapcsolatban. LAPLACE felfogása a mechanikus materializmus. A kauzalitás kérdésében a materializmus alapján áll. LAPLACE érdeme, hogy a valószínűségszámítás módszereinek nagy jelentőségét a természettudományok számára elődeinél világosabban felismerte. Azonban az anyagi világ objektív törvényeit a mechanika törvényeire akarta visszavezetni, úgy képzelte, hogy a mechanika idővel a tudomány összes kérdéseire választ tud majd adni. Ezt a felfogását a következőképpen fejezte ki:* „A világegyetem mai állapotát mint előző állapotának következményét és jövőbeni állapotának okát kell felfognunk. Ha egy gondolkodó egy adott pillanatban ismerné az összes erőket, amelyek a természetben hatnak és a világot alkotó tárgyak kölcsönös helyzetét és ha képes volna mindezeket az adatokat analizálni, egyetlen egy képletbe foglalhatná a világegyetem legna-

* I. P. S. LAPLACE; Essai philosophique sur les probabilités. I. Gauthier Villars, 1921. 3. o.

gyobb égitestének és a legkönnyebb atomjának a mozgását: semmi sem volna bizonytalan számára és a múlt és a jövő világosan tárulna fel előtte." Ez a felfogás lényegében megegyezik BERNOULLI JAKAB fent idézett álláspontjával.

A XIX. század elején a valószinűségszámítás terén a legkiemelkedőbb eredmények S. POISSON (1781—1840) nevéhez fűződnek. POISSON általánosította a nagy számok törvényét és a MOIVRE—LAPLACE tételt olyan kisérletsorozatokra, amelyeknél a megfigyelt esemény valószínűsége kisérletről kísérletre változik, és elsőnek fedezte fel a róla elnevezett eloszlást, a binomiális eloszlás közelítéseként. Foglalkozott POISSON a valószínűségszámítás tűzérségi alkalmazásaival is. A legkisebb négyzetek elméletének továbbfejlesztése terén egymástól függetlenül C. F. GAUSS (1777—1855) és A. LEGENDRE (1752—1833) jelentős eredményeket értek el. Eredmények a csillagászatban, a geodéziában és számos más tudományban azóta is a kutatás nélkülözhetetlen segédeszközei.

2. §. *A valószínűségszámítás fejlődése a XIX. században*

A valószínűségszámitás fejlődése Franciaországban és általában Nyugat-Európában LAPLACE és POISSON után megtorpant. Ennek belső okát abban találhatjuk meg, hogy a mechanikus materialista felfogás a valószínűségszámítás hibás alkalmazásaihoz vezetett, és ezzel a valószínűségszámítás módszerei hitelüket vesztették. Ilyen alapjában elhibázott alkalmazások voltak például azok a kisérletek, melyekkel már CONDORCET foglalkozott, és amelyeket LAPLACE és POISSON folytattak: az esküdtszék ítélete helyességének valószínűségére vonatkozó számítások. Ezek abból a helytelen feltevésből indultak ki, hogy az egyes esküdtek állásfoglalása egymástól független, figyelmen kívül hagyva, hogy az esküdtek véleményüket ugyanazon tények, tanúvallomások alapján alakitják ki, általában ugyanazokat az osztályérdekeket képviselik, ugyanazon előítéletek hatása alatt állnak, stb. A valószínűségszámítás fejlődése megtorpanásának másik oka az volt, hogy a valószínűség fogalma tisztázatlan volt és ez megakadályozta, hogy a valószínűségszámítást szabatos matematikai alapokra helyezzék. Ebben a korban már felismerték, hogy a valószínűség klasszikus definíciója nem kielégítő, de jobbal még nem tudták pótolni. Ezt mutatják a XVIII. és XIX. században divatos paradoxonok. Gondolunk itt például arra, hogy D'ALEMBERT, ez az egyébként kiváló matematikus és filozófus, azt állította,* hogy ha egy érmet kétszer feldobunk, úgy 2/3 annak a valószínűsége, hogy legalább egyszer fejet dobjunk, mert — szerinte három lehetőség van: vagy már először fejet dobtunk, ez esetben nem is kell másodszor dobni, vagy előszörre írást, másodszorra pedig fejet, vagy pedig mind a kétszer írást dobtunk. Mivel a három eset közül kettő kedvező, a keresett valószínűsége 2/3. Valójában ez a valószínűség 3/4, D'ALEMBERT

* Encyclopédie Méthodique 2. kötet, Páris, 1784, 471—477. o.

okoskodása nyilvánvalóan hibás. De felhozhatjuk példaként BERTRAND paradoxonját is, vagy az ún. pétervári paradoxont. Az alapok tisztázatlansága mutatkozott meg a BAYES-féle tétel hibás alkalmazásaiban is. Annak illusztrálására, hogy milyen abszurd megállapításokra vezetett a BAYES-féle formula helytelen használata, megemlítjük a következő, sokat vitatott példát: ha egy A esemény $p = P(A)$ valószínűségének az a priori eloszlása egyenletes a $(0, 1)$ intervallumban, akkor azon feltevés mellett, hogy az A esemény n független kísérlet közül n-szer következett be, p feltételes (a posteriori) sűrűségfüggvénye $(n+1)x^n$ $(0 < x < 1)$. Így tehát annak a valószínűsége, hogy az A esemény az $n+1$-edik kísérletnél is bekövetkezik, $\frac{n+1}{n+2}$. Ha tehát az A esemény n kísérlet mindegyikénél bekövetkezett, annak a valószínűsége, hogy az $n+1$-edik kísérletnél újra bekövetkezik $\frac{n+1}{n+2}$ és $\frac{1}{n+2}$ annak a valószínűsége, hogy nem következik be. Ez az ú. n. „következtetési szabály". LAPLACE ebből arra következtetett, hogy mível tudjuk, hogy legalább 5000 éve tehát 1 826 213 napja mindennap felkelt a nap, legfeljebb $\frac{1}{1826\,215}$ annak a valószínűsége, hogy a nap holnap nem fog felkelni. (Hozzátette azonban, hogy aki ismeri az égi mechanika törvényeit, az persze tudja, hogy a nap bizonyosan felkel.)

A valószínűség fogalmára vonatkozólag ebben a korban a helytelen szubjektív idealista felfogás került előtérbe, amely már a XVIII. század idealista filozófusainál és filozófiailag tájékozatlan vagy ingadozó matematikusainál is megtalálható. Álljon itt példaként néhány idézet: DE MORGAN (1838) azt írta, hogy „valószínűségi mértéken valójában hitünknek mértékét értjük, vagy kell, hogy értsük ... Az objektív valószínűséget teljesen elvetem és a valószínűség szót úgy értelmezem, hogy gondolkodásunk állapotát jelenti egy állításra, egy eljövendő eseményre, vagy bármely olyan dologra vonatkozólag, amelyet illetőleg abszolut tudás nem létezik." S. MILL (1875) azt írja: „Nem szabad elfelejteni, hogy egy esemény valószínűsége nem az eseménynek egy sajátsága, hanem egyszerűen elnevezése azon érvek mértékének, amelyek alapján mi, vagy valaki más az esemény bekövetkezését várja."

A valószínűség fogalmának, módszerei alkalmazhatósági határainak tisztázatlansága és a valószínűség fogalmára vonatkozó helytelen idealista nézetek oda vezettek, hogy a XIX. század második felében, amikor a matematika terén igen nagyjelentőségű átalakulás ment végbe, amelynek következtében a matematika minden területén a szabatos megalapozásra törekedtek és a szabatosság iránti igények igen megnőttek, a valószínűségszámítás ebből a fejlődésből kimaradt. A legtöbb matematikus ebben az időben a valószínűségszámítást nem is tekintette a matematika részének, sőt egyáltalán nem vette komolyan. Jellemző ebből a szempontból, hogy F. KLEIN a XIX. század matematikájáról írt, egyébként igen értékes munkájában a valószínűségszámításról nem is esik szó.

Azonban a legkülönbözőbb alkalmazási területeken a valószínűségszámítási módszerek nélkülözhetetlenek voltak. Ennek következtében egészen sajátságos helyzet alakult ki. A hibaszámítás módszereit például továbbra is alkalmazták a geodéziában, a fizikában, a csillagászatban stb. (továbbfejlesztéséről csak kis mértékben beszélhetünk), azonban egy sajátságosan megmerevedett formában, amelyben az elmélet valószínűségszámítási alapjai háttérbe szorultak. Az a benyomása az embernek, hogy a legkisebb négyzetek módszerét, mint nélkülözhetetlen módszert használták, azonban szinte restellték, hogy ez a módszer a valószínűségszámításon alapszik és ezért ezt — amenynyire lehetett — elhallgatták; pedig a legkisebb négyzetek módszerének a valószínűségszámítási interpretáció adhatja csak meg a helyes megértését és enélkül a módszer keveset tud csak nyújtani.

A tényleges, véletlen hiba (mint valószínűségi változó) és ennek várható nagysága, (illetve szórása) ebben az eltorzult tárgyalásmódban összekeveredett. Ez a fogalomzavar még ma is érezteti hatását, pl. a kvantummechanikában, különösen a HEISENBERG-féle reláció helytelen idealista értelmezésében. A HEISENBERG-féle reláció a komplementer fizikai mennyiségek szórásainak szorzatára ad alsó határt: sokan ezt alaptalanul a tényleges hibák szorzatára vonatkoztatják.

Egy másik terület, ahol a valószínűségszámítás elégtelen fejlettsége és fogalmainak tiszátázatlansága a XIX. század második felében a tudomány fejlődését nagymértékben hátráltatta: a statisztikus mechanika.

A XIX. század végén és a XX. század elején a fizika egyre inkább a „mikrokozmosz", a molekulák és atomok világának vizsgálata irányába fordult. Ennek következtében a fizikusok szembekerültek azokkal a parányi véletlen ingadozásokkal, amelyek a makroszkopikus fizikában — éppen a nagy számok törvényeinek érvényesülése következtében — nem játszanak szerepet. Gondolunk itt olyan jelenségekre, mint a radioaktív bomlásjelenségek, vagy a BROWN-féle mozgás, az elektron-emissziós jelenségek, a kozmikus sugárzás és az atommag-reakciók. Ezeknek a jelenségeknek a tanulmányozásához a valószínűségszámítás módszerei elengedhetetlenek. A kinetikus gázelmélet megalkotói, így pl. L. BOLTZMANN (1844—1906) világosan felismerték ezt a tényt. Így például BOLTZMANN a gázelméletről szóló előadásaiban a következőket írja: „A molekulák mozgására vonatkozó egyenletek csak közelítő képletek, amelyek azokat a középértékeket adják meg, amelyek igen nagyszámú mozgó részecske együttes hatására a valószínűségszámítás törvényei szerint kialakulnak." *

BOLTZMANN éles harcot folytatott a machisták, pozitivisták, az „energetika" hívei, így elsősorban E. MACH és W. OSTWALD ellen, akik azt hirdették, hogy a fizikában csak a fenomenológikus, leíró módszereknek van lét-

* L. BOLTZMANN: Vorlesungen über Gastheorie, 1896. II. rész. 91 §.

jogosultsága és tagadták a molekuláris felfogás szükségességét. BOLTZMANN felfogásának lényegében materialista voltára világosan rámutatott LENIN, a „Materializmus és empiriokriticizmus“ című munkájában.*

„A machisták szerint — írja LENIN — az a körülmény, hogy ezek a fizikusok** elméletüket egyenletek rendszerére korlátozzák, egyértelmű a materializmus megdöntésével: csak egyenletek vannak, nincsen semmiféle anyag, semmiféle objektív valóság, minden csak szimbólum. BOLTZMANN megcáfolja ezt a nézetet és tudja, hogy ezzel a fenomenológikus fizikát cáfolja meg.“

A statisztikus mechanikát BOLTZMANN után W. GIBBS fejlesztette jelentősen tovább; a statisztikus mechanika eredményeinek nagy jelentősége volt abban, hogy a fizikában a molekuláris felfogás győzött. Azonban a valószínűségszámítás elmaradottsága és fogalmának tisztázatlansága akadályozta a statisztikus mechanika fejlődését. Egy sajátságos — sem fogalmilag, sem matematikailag nem kellően megalapozott — matematikai formalizmus jött létre, amely azóta is uralkodik a statisztikus mechanikában, amelynek mai képviselői jórészt negligálják a valószínűségszámítás időközben végbement fejlődését. Csak a legutóbbi időben dolgozta ki A. JA. HINCSIN szovjet matematikus a statisztikus mechanikának (beleértve a kvantumstatisztikát) a valószínűségszámítás korszerű elméletén alapuló módszerét, azonban a statisztikus mechanika művelőinek többsége még ma sem vett erről tudomást és továbbra is az elavult — és mint A. JA. HINCSIN egyik dolgozatának előszavában*** írja — „rosszminőségű“ módszereket használja. A korszerű valószínűségszámítási módszerek nem ismerése nemcsak azt eredményezte, hogy a valószínűségszámítás határeloszlástételeinek felhasználása helyett feleslegesen bonyolult és a célnak nem megfelelő matematikai apparátust alkottak, hanem elvi kérdésekben is fogalomzavarhoz vezetett és lehetővé tette, hogy az idealisták a zavarosban halászva misztikus nézeteiket hirdethessék. Gondolunk itt például az entrópia fogalmával kapcsolatos filozófiai vitákra. BOLTZMANN ebben a kérdésben is helyes, materialista álláspontot képviselt, azonban az ő gondolatait korában kevesen értették meg.****

A valószínűségszámítás fogalmára vonatkozó idealista nézetek hatása ma legerősebben a kvantummechanika terén érezteti még a hatását. Bár időközben A. N. KOLMOGOROV a valószínűségszámítást exakt matematikai alapokra helyezte és a szovjet matematikusok a valószínűségszámítás elvi kérdéseit a dialektikus materializmus alapján tisztázták, és a matematikusok többsége ma az egész világon a valószínűség fogalmának materialista felfogása alapján áll,

* V. I. LENIN, Materializmus és empiriokriticizmus, Szikra, 1949.

** MAXWELL elektrodinamikájáról van szó.

*** A. JA. HINCSIN, Успехи Математических Наук 5 (1949), 4. o.

**** Nincs kellően tisztázva, hogy ennek mennyiben volt része abban, hogy BOLTZMANN öngyilkossággal vetett véget életének.

a fizikusok túlnyomó többsége a szovjet fizikusok kivételével erről a fejlődésről még nem vett tudomást és ennek következtében a kvantummechanika statisztikus (valószínűségszámítási) felfogását nem tudja másként elképzelni, mint a valószínűség helytelen szubjektív fogalmának alapján. Ez a tény a mai „fizikai idealizmus“ — a kvantummechanika eredményeinek félremagyarázásán alapuló helytelen idealista felfogás — egyik legfőbb táptalaja.*

A XIX. század második felében a valószínűségszámítás terén lényeges előrehaladást csak a pétervári orosz matematikusok, P. L. CSEBISEV (1821—1894), és tanítványai: A. A. MARKOV (1856—1922) és A. M. LJAPUNOV (1864—1919) érték el. A valószínűségszámítás iránt már a XIX. század első felének orosz matematikusai is érdeklődtek. Így N. I. LOBACSEVSZKIJ (1792—1856) a valóságos tér geometriájának euklideszi vagy nem-euklideszi voltát szögméréssel akarta eldönteni és ezzel kapcsolatban foglalkozott a mérési hibák elméletével. M. V. OSZTROGRADSZKIJ (1801—1861) volt az első, aki a valószínűségszámítás módszereinek a minőségellenőrzésnél való felhasználását javasolta. Ugyanez a gondolat előfordul V. I. BUNYAKOVSZKIJ (1804—1889) 1846-ban megjelent munkájában, amely az első orosznyelvű valószínűségszámítási tankönyv. BUNYAKOVSZKIJ könyve bizonyítja, hogy a valószínűségszámítás terén Oroszországban a kutatás már a XIX. század első felében a kor színvonalán állott; a XIX. század második felében pedig P. L. CSEBISEV és tanítványai munkássága következtében az orosz matematikusok e téren messze felülmulták mindazt, amit Európa többi országainak matematikusai elértek.

Foglalkozzunk először CSEBISEV munkásságával. CSEBISEV legnagyobb érdeme, hogy a nagy számok törvényét elődeinél, BERNOULLI-nál, LAPLACE-nál és POISSON-nál sokkal általánosabb feltételek mellett bizonyította be, híres egyenlőtlensége segítségével és bizonyítása — ellentétben a régebbi szerzők munkáival (kivéve BERNOULLI JAKABot) — teljesen szabatos; továbbá a centrális határeloszlástételt általános formában megfogalmazta és egy bizonyítási módszert is adott rá, amelyet tanítványa, A. A. MARKOV épített ki teljesen szabatos bizonyítássá. CSEBISEV ugyanis bebizonyította, hogy bizonyos feltételeknek eleget tevő független valószínűségi változók sorozata standardizált részlet-

* Erre vonatkozólag rendkívül tanulságos L. DE BROGLIE tanulmánya (magyarul lásd Magyar Fizikai Folyóirat I. 1953. 173—190), amelyből kitűnik, hogy azok a fizikusok, pl. EINSTEIN, akik nem hajlandók elfogadni az ösztönösen materialista tudományos világnézetüknek ellentmondó indeterminizmust, és más idealista következtetéseket, amelyeket a fizikus közvélemény a kvantummechanika statisztikus felfogása szükségszerű velejáróinak tart, hajlanak arra, hogy elvessék a kvantummechanika egyedül konzekvens statisztikus interpretációját, hogy az említett idealista következtetésektől szabaduljanak. Ezek a fizikusok nem veszik figyelembe, hogy a szóbanforgó idealista következtetések egyáltalán nem következnek szükségszerűen a kvantummechanika statisztikus felfogásából, hanem csak a valószínűség fogalmának helytelen szubjektív értelmezésének következményei és a kvantummechanika statisztikus felfogása a valószínűség fogalmának materialista értelmezése mellett egyenesen kizárja mindezeket az idealista következtetéseket, beleértve az indeterminizmust is.

összegeinek összes momentumai konvergálnak a (standardizált) normális eloszlás megfelelő rendű momentumaihoz. Azt, hogy ebből következik az eloszlásfüggvények konvergenciája, MARKOV bizonyította be. CSEBISEV volt az első, aki a valószínűségi változó és várható értékének általános fogalmát teljes általánosságban világosan megfogalmazta és ezen fogalmak alapvető jelentőségét felismerte. CSEBISEV legtöbb munkáját orosz nyelven írta, és azok Európa többi országában nem voltak az ő korában ismertek. Annál nagyobb hatással volt CSEBISEV az orosz matematikusokra. Tanítványai közül A. A. MARKOV nevéhez fűződik egyrészt a centrális határeloszlástétel Csebisev-féle bizonyításának teljesen szabatossá tétele, továbbá a Markov-féle láncok fogalmának megalkotása. A Markov-láncok fogalmára MARKOV az orosz nyelv betűstatisztikájának vizsgálata útján jutott el. Ismeretes, hogy minden nyelvre jellemzőek az egyes betűk előfordulási valószínűségei. MARKOV ezen túlmenően a betűk egymásután való következésével is foglalkozott és megállapította, hogy például az egyes magánhangzók különböző valószínűséggel fordulnak elő különböző mássalhangzók után.*

A Markov-láncok fogalmának megalkotása azért alapvető jelentőségű, mert ezzel kezdődött meg nem-független valószínűségi változók sorozatainak vizsgálata és a nagy számok törvényének, valamint a centrális határeloszlástételnek kiterjesztése nem független változók sorozataira. Ez irányban igen jelentős eredményeket ért el Sz. N. BERNSTEIN, a szovjet valószínűségszámítási iskola egyik legkiemelkedőbb képviselője, aki a pétervári iskola hagyományainak folytatója. Ugyanakkor a Markov-láncok fogalma az első lépést jelentette a sztochasztikus folyamatok elmélete felé.

MARKOV igen élesen szembeszállt az olyan kísérletekkel, amelyek a valószínűségszámítás eredményeinek helytelen felhasználására és ezen keresztül a miszticizmus igazolására irányultak. Így például „Valószínűségszámítás" című könyvében élesen bírálta BUNYAKOVSZKIJt, aki a vallás által hirdetett „csodák" lehetőségét „tudományosan" igyekezett alátámasztani.**

A. M. LJAPUNOV legkiemelkedőbb érdeme a karakterisztikus függvények módszerének kidolgozása és annak alkalmazása a centrális határeloszlástétel

* MARKOV feldolgozta ebből a szempontból PUSKIN „Jevgenyij Anyegin" című költeményét és megállapította, hogy az egymásután következő betűk magasabbrendű Markov-láncot alkotnak. A Markov-láncok elméletének — mint ismeretes — ma a láncreakciók (kémiai reakciók, atommagreakciók stb.) alkotják a legjelentősebb alkalmazási területét.

** Amikor TOLSZTOJ LEÓt, a nagy orosz írót, a Szent Szinódus kizárta az egyházból, MARKOV levelet írt a Szent Szinódusnak, amelyben követelte, hogy őt is zárják ki. Levelében hivatkozik „Valószínűségszámítás" c. tankönyvének következő mondataira: ... az ősidőkben állítólagosan történt valószínűtlen eseményekre vonatkozó meséket kételkedéssel kell fogadnunk. Egyáltalán nem érthetünk egyet BUNYAKOVSZKIJ akadémikussal abban, hogy vannak olyan mesék, amelyekben nem illő kételkednünk", és azt kéri, hogy ennek alapján zárják ki őt az egyházból, mint olyan embert, aki nem hisz a csodákban. A Szent Szinódus egy pópát küldött ki MARKOVhoz, hogy őt elhatározásától eltérítse; MARKOV kijelentette, hogy csak matematikáról hajlandó vele beszélgetni, mire a pópa dolgavégezetlenül távozott.

igen általános feltételek melletti érvényességének bizonyítására. Igaz, hogy MARKOV később megmutatta, hogy LJAPUNOV eredménye a CSEBISEV-től származó bizonyítási gondolat segítségével is bebizonyítható, a szóbanforgó valószínűségi változók „csonkítása" segítségével, amely módszert azóta számos más problémánál is sikerrel alkalmazták és MARKOVnak ezt a teljesítményét nem becsülhetjük elég nagyra, azonban nem kétséges, hogy a karakterisztikus függvény módszere az, amely a valószínűségszámítás határeloszlástételei elméletének azóta történt fejlődése alapjává vált. A pétervári iskolából került ki V. I. ROMANOVSZKIJ is, aki a taskenti matematikai statisztikai iskola alapítója és annak ma is vezetője.

Míg a valószínűségszámítás klasszikus problémakörében Oroszországban ilyen nagyszerű eredményeket értek el, nyugaton e téren a XIX. század második felében lényeges előrehaladás nem történt. Meg kell azonban említeni H. POINCARÉ-t, akinek a nevéhez fűződik a „tetszőleges függvények" módszere. A XX. század elején Franciaországban fellendült a valószínűségszámítási kutatás, különösen E. BOREL, M. FRÉCHET és P. LÉVY nevét kell megemlítenünk, akikről a következő §-ban fogunk beszélni. A XX. század első évtizedeiben a matematikai statisztika Nyugat-Európában fejlődésnek indult. Az angol matematikai statisztikai iskola, K. PEARSON, „STUDENT" (W. GOSSET) és elsősorban R. A. FISCHER a biológiai, mezőgazdasági és más tudományos kisérletek matematikai statisztikai kiértékelésére fontos új módszereket dolgoztak ki, mint például a t- és χ^2-próbákat, a „maximális valószerűség" elvét, a becsléselmét alapjait, a szóráselemzést, stb.

Az angol matematikai statisztikai iskola terminológiájában, fogalmazásaiban bizonyos kettősség érezhető: egyrészt az idealista filozófiai nézetek behatása, másrészt a konkrét alkalmazásokkal való foglalkozás által megkívánt materialista felfogás. A matematikai statisztika eredményes alkalmazásai mellett az angol-amerikai statisztikai irodalomban alapvetően elhibázott alkalmazásokkal is találkozunk, pl. a burzsoá közgazdasági elméletek igazolási kísérleteivel. Tipikus példái ezek annak, hogyan válnak a helyes matematikai módszerek, ha azokat érvényességi körükön túl próbálják alkalmazni, a tudományos fejlődésnek akadályává, helytelen elméletek igazolására irányuló kísérletek eszközévé és álcázójává. Ezzel kapcsolatban meg kell jegyezni, hogy a régebbi angol-amerikai matematikai statisztikai irodalomra általában jellemző bizonyos formalisztikus felfogás, a különböző módszerek konkrét esetekben való alkalmazhatósága gondos vizsgálatának elhanyagolása. Gondolunk itt arra, hogy eloszlások normális voltának, valószínűségi változók függetlenségének megvizsgálására nem fordítottak egészen a legutóbbi évekig elég gondot és ennek megfelelően a nem normális eloszlásokból vett mintákkal és nem független változókra vonatkozó tételekkel keveset foglalkoztak. Ezzel kapcsolatban rá kell mutatni, hogy ez a hiba R. A. FISCHERnél sokkal kisebb mértékben van meg, mint követőinél. Részben a szovjet valószínűségszámítási és matematikai statisztikai iskola hatására ma ez a helyzet megváltozóban van.

3. §. A valószínűségszámítás új fellendülése a XX. században

A XX. század legnagyobb eredményei a valószínűségszámítás terén a valószínűségszámításnak a halmazelméleten és a mértékelméleten alapuló szabatos matematikai megalapozása és problémakörének messzemenő kiterjesztése a sztochasztikus folyamatok elméletének megalkotása útján és a valószínűségszámítás alkalmazási körének előzőleg nem is sejtett rohamos kiszélesedése. Mindkét vonalon a döntő lépést A. N. KOLMOGOROV szovjet matematikus tette meg. Foglalkozzunk először a valószínűségszámítás megalapozásának kérdésével. A valószínűségszámítás halmazelméleti, ill. mértékelméleti megalapozása irányában az első lépéseket E. BOREL francia és F. CANTELLI olasz matematikus tették meg. BOREL és CANTELLI fogalmazták meg és bizonyították be a nagy számok erős törvényét. Ettől kezdve azt mondhatjuk, hogy a valószínűségszámítás halmazelméleti ill. mértékelméleti megalapozásának kérdése „napirenden" volt, abban az értelemben, ahogy pl. — amint azt VAVILOV megmutatta — a XVII. század 70-es és 80-as éveiben a gravitációtörvény kérdése napirenden volt.* Számos matematikus tett egy-egy lépést ebben az irányban, így pl. HAUSSDORFF és RADEMACHER Németországban, különösen pedig A. LOMNICZKI és H. STEINHAUS Lengyelországban. A H. STEINHAUS által kidolgozott ú. n. független függvények elmélete, a valós függvénytan módszereinek messzemenő felhasználásán alapszik. Az a gondolat, hogy a valószínűségszámítás matematikai elméletét axiomatikus módon kell felépíteni, megtalálható már Sz. N. BERNSTEIN egy 1917-ben megjelent munkájában is. BERNSTEIN első axiómái a valószínűséget csak kvalitativen jellemzik („skála"-választástól eltekintve) a későbbi axiómákból következik csak a valószínűség számértékének egyértelműen meghatározott volta. Nálunk JORDAN KÁROLY foglalkozott ezzel a kérdéssel, egy 1927-ben megjelent dolgozatában, amelyben a valószínűség klasszikus definíciójának halmazelméleti fogalmazást adott és tisztán halmazelméleti úton levezetett több ismert és egy új általános tételt, amely speciális esetként tartalmazza BERNOULLI jólismert képletét is. Az, hogy KOLMOGOROVnak e téren számos előfutára volt, úgyanúgy semmit nem von le érdeméből, mint ahogy NEWTON érdemét sem kisebbíti, hogy előtte már számosan közeljutottak a gravitáció törvényéhez. KOLMOGOROV alapvető munkája „Die Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung" címen 1933-ban jelent meg. A valószínűségszámítás korszerű elmélete tehát még alig több, mint 20 éves. Az elmélet szabatos megalapozása óriási lökést adott a valószínűségszámítás fejlődésének. A valószínűségszámítás axiomatikus fel-

* „Kávéházi téma" volt, mint VAVILOV mondja. l. Sz. I. VAVILOV, Newton, IX. fej. 121. o.

építése végkép megszüntette azt a korszakot, amelyben a valószínűségszámítást a matematikusok szkeptikusan kezelték és nem tekintették a matematika többi fejezetével egyenrangúnak. Az, hogy ma a valószínűségszámítást a matematika egyik legfontosabb fejezetének tekintik, amelynek fejlődése elválaszthatatlanul összefonódott a matematika többi, főágának fejlődésével, KOLMOGOROV axiomatikus elmélete tette lehetővé. KOLMOGOROV elmélete megteremtette annak lehetőségét is, hogy a matematika számos fejlett ágának, így a halmaz- és mértékelméletnek, a valós függvénytannak és a funkcionális analízisnek az eredményeit a valószínűségszámítás felhasználhassa. Ugyanakkor figyelemreméltó tény, hogy a valószínűségszámítás eredményei a matematika számos fejezetében alkalmazhatók és termékenyítik meg a kutatást. Példaképpen megemlítjük BERNSTEIN bizonyítását a Weierstrass-tételre, BOREL tételét a normális tizedestörtekről és annak élesítését, többszörös integrálok kiszámítását a nagy számok törvénye segítségével, a Laplace-transzformáció Post—Widder-féle inverziós formuláját. Igen érdekes és fontos alkalmazásai vannak a valószínűségszámításnak a számelméletben is, továbbá megemlítendő, hogy a legutóbbi években figyelemreméltó eredményeket értek el differenciálegyenleteknek valószínűségszámítási kísérletek végrehajtása útján való numerikus megoldása útján. (ún. „Monte-Carlo-módszer".) Elmondhatjuk, hogy a valószínűségszámítás izolált helyzete, amely mint láttuk, a valószínűségszámítás és annak alkalmazásai — és ezen keresztül a fizika és más természettudományok — fejlődését hosszú ideig hátráltatta, ma már teljesen a multé.

KOLMOGOROV elmélete a véletlen és szükségszerűség dialektikus ellentétének megértésén, továbbá a valószínűség objektivitásának materialista felfogásán alapszik. Azok az elméletek, amelyek idealista, pozitivista, filozófiai felfogáson alapulnak, mint pl. R. v. MISES és követőinek elmélete, zsákutcába jutottak. Tekintettel arra, hogy MISES elmélete csődöt mondott és a matematikusok — egy-két kivételtől eltekintve — az egész világon KOLMOGOROV elméletét fogadták el, nem szükséges, hogy itt MISES elméletét részletesen ismertessük. A történeti hűség kedvéért azonban meg kell említeni, hogy MISES értékes részleteredményeket ért el a valószínűségszámítás több konkrét kérdésében, és hogy a valószínűségszámítás alapjaira vonatkozó vizsgálatainak is nagy jelentősége volt abból a szempontból, hogy a XX. század 20-as éveiben felhívta a matematikusok figyelmét arra, hogy a valószínűség klasszikus definíciója nem kielégítő és, hogy a valószínűségszámítás szabatos megalapozásra szorul. Abban, hogy MISES ennek a feladatnak a megoldását helytelen úton kereste, nagy része volt annak, hogy helytelen, machista filozófiai felfogás alapján közelítette meg a kérdést és ennélfogva kísérlete szükségképpen kudarcra kellett, hogy vezessen.

KOLMOGOROV nevéhez fűződik a valószínűségszámítás XX. századbeli fejlődésének másik nagy eredménye: a sztochasztikus folyamatok fogalmának megalkotása, „Über analytische Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung" c. munkájában (1931). Megemlítjük itt, hogy a folytonos paraméterű sztochasztikus folyamat gondolata már a század elején felmerült, L. BACHELIER francia matematikus munkáiban, azonban ő lényeges eredményeket nem ért el és heurisztikus meggondolásokra szorítkozott. A sztochasztikus folyamatok terén KOLMOGOROV mellett E. E. SZLUCKIJ, A. JA. HINCSIN, SZ. N. BERNSTEIN és számos más szovjet matematikus ért el kimagasló eredményt. Munkáikhoz csatlakoztak N. WIENER, P. LÉVY, W. FELLER, J. L. DOOB, W. DOEBLIN, M. FRÉCHET, és mások értékes vizsgálatai. A sztochasztikus folyamatok elméletének kibontakozása a szemünk előtt megy végbe, természettudományi és technikai alkalmazásainak jelentősége napról napra növekszik. A sztochasztikus folyamatok közül részletesen kidolgozva ma még csak a Markov-folyamatok elmélete van, bár még ott is számos probléma vár megoldásra. A nem-Markov-folyamatok elméletében a tudomány még csak az első lépéseket teszi meg. Igen figyelemreméltóak J. L. DOOB és mások, az ún. martingale-okra vonatkozó vizsgálatai.

Az utolsó három évtizedben nagyjelentőségű új eredmények jöttek létre a valószínűségszámítás klasszikus problémakörében is, amelyek az ismert eredményeket messzemenően általánosították, és új megvilágításba helyezték. Gondolunk itt elsősorban a nagy számok törvényeire és a valószínűségszámítás határeloszlástételeire. E téren nagy jelentőségű a kérdésfeltevés, amely független valószínűségi változók szériasorozatai összegének összes lehetséges határeloszlásaira vonatkozik. A legjelentősebb fogalom e téren a korlátlanul osztható eloszlások fogalma, amelyet A. N. KOLMOGOROV, A. JA. HINCSIN és P. LÉVY dolgoztak ki. A valószínűségszámítás határeloszlásainak élesítése terén H. CRAMÉR, G. ESSEEN, B. V. GNYEGYENKO, JU. V. LINNIK, JU. V. PROHOROV értek el kiemelkedő eredményeket. A határeloszlástételek gyengén függő változókra való kiterjeszthetőségének kérdésének tisztázása még a jövő feladata. E téren még a 30-as években SZ. N. BERNSTEIN ért el fontos eredményeket.

A legutóbbi időben R. FORTET, E. MOURIER és mások a valószínűségszámítás határeloszlástételeit igyekeznek kiterjeszteni olyan valószínűségi változókra, melyek értékei bizonyos Banach-terek elemei.

Jelentős új irányok alakultak ki a matematikai statisztika terén is, így a rendezett minták elmélete (amely főként szovjet matematikusok, A. N. KOLMOGOROV, B. V. GNYEGYENKO, N. V. SZMIRNOV és mások dolgoztak ki), a konfidencia-intervallumok J. NEYMAN lengyel származású matematikustól származó elmélete, a szekvenciális analízis és az eldöntés-függvények a magyar származású WALD ÁBRAHÁMtól származó elmélete, stb., továbbá a becsléselmélet, amelyet még R. A. FISCHER kezdeményezett és amelyben a legutóbbi években A. N. KOLMOGOROV és E. DÜNKIN értek el fontos eredményeket.

A valószínűségszámítás XX. századbeli fejlődésének legfőbb jellegzetessége és egyben a fejlődés fő hajtóereje a valószínűségszámítás alkalmazási körének rohamos kiszélesedése, amely a természettudományok és a technika gyorsütemű fejlődésével függ össze. Elegendő, ha e tekintetben utalunk az atomfizikára, különösen az atomenergia felszabadítására, a radar-technikára és általában a hiradás-technika és az automatizálás kérdéseire, mint a valószínűségszámítás új alkalmazási területeire. A valószínűségszámítás alkalmazásainak széles skálájából itt nincs módunk képet adni, csak rámutatunk arra, hogy nincs a matematikának még egy olyan ága, amelynek alkalmazási köre olyan kiterjedt volna, mint a valószínűségszámításé. Ennek következtében ma már a fizikus, a kémikus, a kutató orvos, biológus, mérnök, sőt, az üzemi mérnök számára is mindinkább nélkülözhetetlen a valószínűségszámítás és a matematikai statisztika elemeinek ismerete. A valószínűségszámítás fejlődése napjainkban elméleti téren és az alkalmazások vonalán egyaránt széles fronton és egyre fokozódó lendülettel halad előre.

4. §. A valószínűségszámítás hazánkban a felszabadulás előtt

Az első magyar szerzőtől származó munka, amely a valószínűségszámítás elemeit tárgyalja, HATVANI ISTVÁN (1718—1786), a legendás hírű debreceni tudós-professzor „Introductio ad principia philosophiae solidioris etc." című 1757-ben, Debrecenben, KÁLLAI GERGELY nyomdájában megjelent filozófiai tárgyú munkája, melynek „De Probabilitate" c. utolsó fejezete (259—296 old.) a valószínűségszámítás elemeivel foglalkozik. HATVANI ISTVÁN 1746-ban ösztöndíjjal Baselbe ment, ahol hallgatója volt BERNOULLI JÁNOSnak és DÁNIELnek. Itt, BERNOULLI JAKAB szülővárosában ismerkedett meg a valószínűségszámítással. HATVANI ISTVÁN műve önálló valószínűségszámítási eredményeket nem tartalmaz, azonban a korabeli ismeretek színvonalas összefoglalását adja. A szerencsejátékokra vonatkozó példákon kívül a halandóság, különösen a gyermekhalandóság kérdésére, a katonaszökevények számának statisztikai vizsgálatára is kitér.

A XX. század eleje óta több magyar matematikus ért el a valószínűségszámítás és a matematikai statisztika terén nemzetközileg is elismert eredményeket. Első helyen JORDAN KÁROLY nevét kell említenünk. JORDAN KÁROLY a klasszikus valószínűségszámítás problémakörében és a matematikai statisztika terén jelentős eredményeket ért el. Munkáiban kiegészítette és továbbfejlesztette a valószínűségszámítás klasszikusainak számos tételét. Sokat foglalkozott JORDAN KÁROLY a valószínűségszámítás elvi kérdéseivel. A klasszikus valószínűségszámítás álláspontján állva bírálta MISES helytelen elméletét és határozottan elutasította a valószínűség és gyakoriság egymáshoz való viszonyának pozitivista felfogását. Igen figyelemre méltó, hogy 1925-ben és 1928-ban megjelent dolgozataiban a klasszikus valószínűségszámítást halmazelméleti alapon építi fel. JORDAN KÁROLY bírálta R. A. FISCHER és követői felfogását, és a Bayes-féle módszer mellett foglalt állást. JORDAN KÁROLY igen behatóan foglalkozott a matematika statisztika segédeszközeivel. A differenciaszámításról írott könyve ennek a tárgykörnek klasszikus kézikönyve. Meg kell említenünk JORDAN KÁROLY „Matematikai statisztika" című könyvét is, amely az első ilyen tárgyú magyar nyelven megjelent mű. Foglalkozott JORDAN a valószínűségszámítás meteorológiai alkalmazásával is.

ARANY DÁNIEL több érdekes dolgozata foglalkozik a Laplace-féle generátorfüggvény-módszerrel és a játékok várható tartamának kérdésével.

Igen értékes eredményeket ért el a valószínűségszámítás terén PÓLYA GYÖRGY, a több évtizede külföldön élő kiváló magyar matematikus, a centrális határeloszlástétellel, a „bolyongási" problémákkal, geometriai valószínűségekkel kapcsolatban és a valószínűségszámítás különböző alkalmazásai terén (folyók hordalékának áramlása, csillagászati problémák, stb.).

A valószínűségszámítás alkalmazásai közül a felszabadulás előtt nálunk a biztosítási matematika állt az érdeklődés középpontjában és e téren a kutatás meglehetősen magas színvonalon állott. Ez érthető, hiszen a biztosítás a kapitalista társadalomban fontos üzletág. A biztosítási matematika jelentősége ma sokkal kisebb. A század eleje óta számos magyar matematikus foglalkozott a biztosítási matematika kérdéseivel. Ezek közül ALTENBURGER GYULA és GOLDZIHER KÁROLY nevét említjük meg.

Több figyelemre méltó valószínűségszámítási dolgozatot írt FELDHEIM ERVIN, aki fiatalon a fasizmus áldozata lett. Foglalkozott pl. a többdimenziós stabilis eloszlásokkal. Szép eredményekkel gazdagította a valószínűségszámítás újabb fejezeteit ERDŐS PÁL, a közel két évtizede külföldön élő kiváló magyar matematikus. Eredményei közül megemlítjük az iterált logaritmus tétel általánosítására, a valószínűségszámítás számelméleti alkalmazásaira és a bolyongási problémákra vonatkozó fontos és újszerű eredményeit.

5. §. *A valószínűségszámítás fejlődése hazánkban a felszabadulás óta*

Mindent összevetve azt kell, hogy mondjuk, hogy a valószínűségszámítás a felszabadulás előtt hazánkban meglehetősen elhanyagolt ága volt a matematikának. Magyar valószínűségszámítási iskoláról ez időben egyáltalán nem beszélhetünk, sőt, a magyar matematikusok többsége nem is igen érdeklődött a valószínűségszámítás iránt. Ennek egyik oka az volt, hogy a természettudományok nem kellő fejlettségük folytán nem léptek fel igényekkel a valószínűségszámítás alkalmazásai tekintetében és így hiányzott a valószínűségszámítási kutatás legfontosabb éltető eleme. Másik oka az volt, hogy a valószínűségszámítás terén élenjáró, a dialektikus materializmusra támaszkodó szovjet tudomány eredményei nem voltak kellő mértékben ismertek hazánkban. A felszabadulás után rövidesen elhárultak a fentemlített akadályok a valószínűségszámítás fejlődése elől hazánkban és megnyílt a fejlődés lehetősége ezen a vonalon is. Ugyanakkor egyre fokozódó mértékben nyilvánult meg a szükséglet a természettudományok, különösen a fizika és a technika számos ága részéről a valószínűségszámítás fejlesztése iránt. A szovjet matematikusok munkásságára támaszkodva és az ő személyes segítségükkel megszüntettük lemaradásunkat ezen a vonalon és a valószínűségszámítás terén hazánkban a tudományos kutatás egyre intenzívebben folyik és már számos új eredményt tud felmutatni. Az elméleti kutatásokkal párhuzamosan és azok eredményeire támaszkodva a valószínűségszámítás módszerei egyre újabb területeken kerülnek eredményes gyakorlati alkalmazásra. Ma már határozottan beszélhetünk arról, hogy magyar valószínűségszámítási iskola van kialakulóban. Ezt bizonyítják például az 1953-ban a Bolyai János Matematikai Társulat által Balatonföldváron rendezett valószínűségszámítási és 1954-ben Jósvafőn rendezett matematikai statisztikai kollokviumok. A hazai valószínűségszámítási és matematikai statisztikai kutatás központja a Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézete.

Még korai volna ezeknek a kutatásoknak az értékelése, ezért csak annyit említünk itt meg, hogy a hazai elméleti kutatások a valószínűségszámítás és a matematikai statisztika terén a következő főbb irányokban bontakoztak ki:

a) A sztochasztikus folyamatok elmélete és annak fizikai, kémiai és technikai alkalmazása.

b) A valószínűségszámítás határeloszlás tételei és a nagy számok törvényei, különös tekintettel a határeloszlástételek gyengén függő változókra való kiterjesztésére és legújabban a feltételes határeloszlások vizsgálatára.

c) Matematikai statisztikai vizsgálatok, különösen a rendezett minták elméletével kapcsolatban.

Az elméleti vizsgálatok mellett behatóan foglalkozik az Alkalmazott Matematikai Intézet kutatógárdája a valószínűségszámítás és matematikai statisztika alkalmazásaival, többek között a következő problémákkal: a tömeggyártás minőségellenőrzése, üzemek energiafogyasztásának ingadozásai, gépalkatrészek tartalékolása, aprítási folyamatok (pl. kőbányaiparban), a gépegyüttállás kérdései (a textiliparban és másutt). Az Intézet foglalkozik továbbá a matematikai statisztikai módszerek alkalmazásával orvosi, biológiai és mezőgazdasági (növénynemesítési, stb.) kísérletek kiértékelésénél. Az Intézet munkája következtében egyre növekszik az érdeklődés a valószínűségszámítás és a matematikai statisztika iránt, a legkülönbözőbb szakemberek körében és az Intézet egyre újabb konkrét megoldandó problémákat kap, amelyeket a szovjet matematika eredményeinek tanulmányozására támaszkodva az elmélet és gyakorlat egységének szellemében igyekszik megoldani.

ELEMI BIZONYÍTÁSOK A RENDEZETT MINTÁK ELMÉLETÉNEK NÉHÁNY ALAPVETŐ ÖSSZEFÜGGÉSÉRE

HAJÓS GYÖRGY r. tag és RÉNYI ALFRÉD lev. tag

Legyen $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ egy $F(x)$ folytonos eloszlásfüggvényű statisztikai sokaságból vett n-elemű minta, más szóval legyenek $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ teljesen független és közös $F(x)$ folytonos eloszlásfüggvénnyel bíró valószínűségi változók. Legyen $\xi_1^*, \xi_2^*, \ldots, \xi_n^*$ a fenti változók nagyság szerint növekedőleg elrendezett sorozata, azaz legyen

$$\xi_k^* = R_k(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

ahol $R_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ számok nagyság szerint növekedőleg elrendezett sorozatában a k-adikat jelenti.*

Ez a dolgozat a $\xi_1^*, \xi_2^*, \ldots, \xi_n^*$ valószínűségi változókkal, tehát *a rendezett minták elméletével* foglalkozik. Egyszerű módszerekkel fogunk bebizonyítani bizonyos alapvető összefüggéseket. Kifejezetten arra törekszünk, hogy kerüljük az analízis eszközeinek használatát és minimálisra redukáljunk minden számítást. Eredményeinket sokféle más úton is lehet számolással igazolni. Erre itt nem fogunk kitérni.

A dolgozatban szereplő tételek jórészt ismertek, bár néhányat közülük nem találtunk meg explicit alakban az irodalomban. Cikkünkben főleg arra törekedtünk, hogy a rendezett minták elméletének elemi és rendszeres tárgyalását adjuk. Dolgozatunknak tehát főleg módszertani érdekessége van. Az irodalomra vonatkozóan S. S. WILKS [3] cikkének bibliográfiájára és RÉNYI ALFRÉD [4] dolgozatára utalunk.

1. Abból a célból, hogy eloszlásmentes eredményekre jussunk, azaz olyan eredményekre, melyek nem függnek az $F(x)$ eloszlásfüggvénytől, bevezetjük az $\eta_k = F(\xi_k)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ valószínűségi változókat. Ha feltesszük, hogy az $y = F(x)$ függvény szigorúan monoton növekvő x azon értékeire, amelyekre $0 < F(x) < 1$ és folytonos, az $x = F^{-1}(y)$ inverz függvény is ilyen és így**

$$\mathbf{P}(\eta_k < x) = \mathbf{P}(\xi_k < F^{-1}(x)) = F(F^{-1}(x)) = x \qquad (0 \leqq x \leqq 1)$$

Ebből kitűnik, hogy *az $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ változók egyenletes eloszlásúak* a (0, 1) intervallumban. Az $\eta_k^* = F(\xi_k^*)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ jelöléssel:

$$\eta_k^* = F(\xi_k^*) = F(R_k(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)) = R_k(F(\xi_1), F(\xi_2), \ldots, F(\xi_n)) = R_k(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$$

* Amennyiben az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ számok között egyenlők is vannak, minden szám annyiszor számlálandó, ahányszor előfordul.

** $\mathbf{P}(A)$ az A esemény valószínűségét jelenti.

Az $\eta_1^*, \eta_2^*, \ldots, \eta_n^*$ változókat tehát úgy tekinthetjük, mint a $(0, 1)$ intervallumban egyenletes eloszlású statisztikai sokaságból vett n-elemű rendezett minta elemeit.

A következőkben az $\eta_1^*, \eta_2^*, \ldots, \eta_n^*$ rendezett minta vizsgálatára szoríthozhatunk: eredményeink könnyen átfogalmazhatók az eredeti $\xi_1^*, \xi_2^*, \ldots, \xi_n^*$ rendezett mintára vonatkozó összefüggésekké.

2. Az η_k^* változók nem függetlenek, mint azt az $\eta_j^* < \eta_k^*$, ha $j < k$, relációkból láthatjuk.

Az $\eta_1^*, \eta_2^*, \ldots, \eta_n^*$ változók együttes sűrűségfüggvénye:

(1) $$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = n! \qquad (0 \leqq x_1 \leqq x_2 \leqq \cdots \leqq x_n \leqq 1).$$

Valóban, ha E a $0 \leqq x_1 \leqq x_2 \leqq \cdots \leqq x_n \leqq 1$ egyenlőtlenségekkel definiált n-dimenziós szimplex tetszőleges mérhető részhalmaza, akkor

(2) $$\mathbf{P}((\eta_1^*, \eta_2^*, \ldots, \eta_n^*) \in E) = \Sigma \mathbf{P}((\eta_{i_1}, \eta_{i_2}, \ldots, \eta_{i_n}) \in E),$$

ahol az összegezést az $1, 2, \ldots, n$ számok összes $i_1, i_2, \ldots, i_n$ permutációira kell kiterjeszteni. Mivel az $\eta_{i_1}, \eta_{i_2}, \ldots, \eta_{i_n}$ változók együttes sűrűségfüggvénye a $0 \leqq x_k \leqq 1$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ egyenlőtlenségekkel definiált egységkocka tetszőleges $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ pontjában 1-gyel egyenlő, (2)-ből (1) egyszerűen következik.

Vizsgáljuk most azt az esetet, amikor az $\eta_k^* = c_k, \eta_{k+1}^* = c_{k+1}, \ldots, \eta_n^* = c_n$ értékek rögzítve vannak $(0 \leqq c_k \leqq c_{k+1} \leqq \cdots \leqq c_n \leqq 1)$. Ekkor *az $\eta_1^*, \eta_2^*, \ldots, \eta_{k-1}^*$ változókat a $(0, c_k)$ intervallumban egyenletes eloszlású statisztikai sokaságból vett $k-1$-elemű rendezett minta elemeiként foghatjuk fel.* Az $\eta_k^* = c_k, \ldots, \eta_n^* = c_n$ esemény úgy valósulhat meg, hogy az $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ változók közül tetszőleges $n-k+1$ változót kiválasztunk és azoknak a $c_k, \ldots, c_n$ értékeket adjuk, a többi $k-1$ változóra pedig csak azt a megkötést tesszük, hogy egyikük se legyen nagyobb c_k-nál. Így a kiválasztott $k-1$ változó mindegyike egyenletes eloszlású a $(0, c_k)$ intervallumban.

Ennélfogva (1) szerint *az $\eta_1^*, \ldots, \eta_{k-1}^*$ változók együttes feltételes sűrűségfüggvénye az $\eta_k^* = c_k, \ldots, \eta_n^* = c_n$ feltételek mellett:*

(3a) $$f(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1} | c_k, \ldots, c_n) = \frac{(k-1)!}{c_k^{k-1}} \qquad (0 \leqq x_1 \leqq \cdots \leqq x_{k-1} \leqq c_k).$$

Hasonlóképpen látható be, hogy ha az $\eta_1^* = c_1, \ldots, \eta_k^* = c_k$ értékeket rögzítjük, akkor *az $\eta_k^*, \ldots, \eta_n^*$ változókat a $(c_k, 1)$ intervallumban egyenletes eloszlású statisztikai sokaságból vett $(n-k)$-elemű rendezett minta elemeiként foghatjuk fel és az $\eta_{k+1}^*, \ldots, \eta_n^*$ változók együttes feltételes sűrűségfüggvénye az $\eta_1^* = c_1, \ldots, \eta_k^* = c_k$ feltételek mellett:*

(3b) $$f(x_{k+1}, \ldots, x_n | c_1, \ldots, c_k) = \frac{(n-k)!}{(1-c_k)^{n-k}} \qquad (c_k \leqq x_{k+1} \leqq \cdots \leqq x_n \leqq 1).$$

Minthogy a (3a) és (3b) sűrűségfüggvények csak c_k értékétől függnek, a fenti két állítás akkor is igaz, ha csak az $\eta_k^* = c_k$ feltételt tesszük fel, azaz a

(3a) és (3b) egyenletek az $f(x_1, \ldots, x_{k-1}|c_k)$ és $f(x_{k+1}, \ldots, x_n|c_k)$ feltételes sűrűségfüggvényeket is megadják, továbbá ugyanezeket a feltételes sűrűségfüggvényeket nyerjük akkor is, ha a bennük nem szereplő változókra vonatkozólag tetszőleges más feltevést teszünk. Ebből következik, hogy az $\eta_k^* = c_k$ feltétel mellett az $(\eta_1^*, \ldots, \eta_{k-1}^*)$ változók függetlenek a $(\eta_{k+1}^*, \ldots, \eta_n^*)$ változóktól. Másszóval: *a rendezett minta elemei Markov-láncot alkotnak.**

3. *Az* $\eta_{i+1}^*, \ldots, \eta_k^*$ $(1 \leqq i < k \leqq n)$ *változók együttes eloszlásának sűrűségfüggvénye:*

$$(4) \qquad f_{ik}(x_{i+1}, \ldots, x_k) = \frac{n!}{i!(n-k)!} x_{i+1}^i (1-x_k)^{n-k} \quad (0 \leqq x_{i+1} \leqq \cdots \leqq x_k \leqq 1).$$

Valóban, az $\eta_1^*, \ldots, \eta_i^*, \eta_{k+1}^*, \ldots, \eta_n^*$ változók együttes feltételes sűrűségfüggvénye az

$$(\mathrm{C}_1) \qquad \eta_{i+1}^* = x_{i+1}, \ldots, \eta_k^* = x_k$$

feltételek mellett nyilván:

$$f(x_1, \ldots, x_i, x_{k+1}, \ldots, x_n | x_{i+1}, \ldots, x_k) = \frac{f(x_1, \ldots, x_n)}{f_{ik}(x_{i+1}, \ldots, x_k)}.$$

Másrészt a Markov-tulajdonság miatt az $(\eta_1^*, \ldots, \eta_i^*)$ változók függetlenek az $(\eta_{k+1}^*, \ldots, \eta_n^*)$ változóktól a (C_1) feltétel mellett, tehát

$$f(x_1, \ldots, x_i, x_{k+1}, \ldots, x_n | x_{i+1}, \ldots, x_k) = \\ f(x_1, \ldots, x_i | x_{i+1}, \ldots, x_k) f(x_{k+1}, \ldots, x_n | x_{i+1}, \ldots, x_k).$$

Az (1), (3a) és (3b) egyenleteket figyelembe véve megállapításaink (4)-et adják.

Az $i+1=k$ speciális esetben (4)-ből η_k^* *sűrűségfüggvényét* kapjuk:

$$(5) \qquad f_k(x_k) = \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!} x_k^{k-1} (1-x_k)^{n-k} = \beta_{n,k}(x_k)$$

A rendezett minta elemei tehát béta-eloszlásúak.

Az $\eta_{k_1}^*, \ldots, \eta_{k_r}^*$ *változók együttes sűrűségfüggvénye*

$$f_{k_1, k_2, \ldots, k_r}(x_{k_1}, \ldots, x_{k_r}) = \\ = \frac{n!}{(k_1-1)!\,(k_2-k_1-1)! \cdots (k_r-k_{r-1}-1)!\,(n-k_r)!} x_{k_1}^{k_1-1} (x_{k_2}-x_{k_1})^{k_2-k_1-1} \cdots \\ \cdots (x_{k_r}-x_{k_{r-1}})^{k_r-k_{r-1}-1} (1-x_{k_r})^{n-k_r}.$$

A bizonyítás a fentihez teljesen hasonló; a következő módosításokkal: (C_1) helyett a

$$(\mathrm{C}_2) \qquad \eta_{k_1}^* = x_{k_1}, \ldots, \eta_{k_r}^* = x_{k_r}$$

feltételt tekintjük, a (0, 1) intervallumot az $x_{k_1}, \ldots, x_{k_r}$ osztópontokkal $r+1$ részintervallumra osztjuk, és figyelembe vesszük, hogy a Markov-tulajdonság miatt a különböző részintervallumokba eső η_i^* változók a (C_2) feltétel mellett függetlenek.

* Ezt elsőnek A. N. Kolmogorov jegyezte meg [1] dolgozatában.

4. Vezessük be egyszerűség kedvéért az $\eta_0^* = 0$ és $\eta_{n+1}^* = 1$ jelöléseket és definiáljuk a

$$\delta_k = \eta_k^* - \eta_{k-1}^* \qquad (k = 1, 2, \ldots, n+1)$$

valószínűségi változókat. Minthogy a $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ változókat az $\eta_1^*, \ldots, \eta_n^*$ változókból mértéktartó lineáris transzformációval nyertük, együttes sűrűségfüggvényeik a megfelelő pontokban megegyeznek egymással. *A $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ valószínűségi változók $g(y_1, \ldots, y_n)$ együttes sűrűségfüggvényét* tehát (1)-ből az

$$y_1 = x_1, y_k = x_k - x_{k-1} \qquad (k = 2, \ldots, n)$$

transzformációval nyerjük:

$$g(y_1, y_2, \ldots, y_n) = n! \quad (y_k \geqq 0;\ k = 1, 2, \ldots, n;\ y_1 + y_2 + \cdots + y_n \leqq 1). \tag{6}$$

A (6) relációból következik, hogy a $\delta_1, \ldots, \delta_n$ változók azonos eloszlásúak. Minthogy az egyes η_k változók eloszlása szimmetrikus az $\frac{1}{2}$ pontra vonatkozólag, az $(\eta_1^*, \ldots, \eta_n^*)$ változók együttes eloszlása is ilyen. Speciálisan $\delta_1 = \eta_1^*$ és $\delta_{n+1} = 1 - \eta_n^*$ azonos eloszlásúak. Végül is arra a következtetésre jutunk, hogy *a $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n, \delta_{n+1}$ változók valamennyien azonos eloszlásúak* és *közös sűrűségfüggvényük* η_1^* sűrűségfüggvényével azonos (lásd (5)-öt a a $k = 1$ esetben). *Közös várható értékük* a $\delta_1 + \cdots + \delta_{n+1} = 1$ reláció miatt:

$$\mathbf{M}(\delta_k) = \frac{1}{n+1} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n+1) \tag{7}$$

5. $\delta_1, \ldots, \delta_{n+1}$ nemcsak azonos eloszlású, hanem egyben *ekvivalens valószínűségi változók* is, azaz együttes eloszlásuk invariáns a változók tetszőleges permutálásával szemben. (6)-ból ugyanis láthatjuk, hogy a $\delta_1, \ldots, \delta_n$ változók együttes sűrűségfüggvénye a változók szimmetrikus függvénye, a $\delta_1, \ldots, \delta_{n+1}$ változók együttes eloszlása pedig invariáns a $(\delta_1, \ldots, \delta_{n+1}) \rightarrow (\delta_{n+1}, \ldots, \delta_1)$ permutációval szemben: ezt a két tényt szukcesszive alkalmazva azt kapjuk, hogy a $(\delta_1, \ldots, \delta_{n+1})$ változók együttes eloszlása invariáns változóinak tetszőleges permutációjával szemben.

Következésképpen az

$$\eta_{i+k}^* - \eta_i^* = \delta_{i+1} + \cdots + \delta_{i+k} \qquad (0 \leqq i < i+k \leqq n)$$

különbség eloszlása csak k-tól függ, tehát megegyezik pl. η_k^* (5) alatti eloszlásával és várható értéke (7) szerint $\frac{k}{n+1}$-gyel egyenlő.

Speciálisan a *minta $\Delta = \eta_n^* - \eta_1^*$ terjedelmé*nek sűrűségfüggvénye

$$\beta_{n,\,n-1}(x) = n(n-1)x^{n-2}(1-x) \qquad (0 \leqq x \leqq 1),$$

és várható értéke

$$\mathbf{M}(\Delta) = \frac{n-1}{n+1}.$$

6. Mint láttuk, az $\eta_k^* = c_k, \ldots, \eta_n^* = c_n$ feltételek mellett az η_i^* $(1 \leqq i < k \leqq n)$ változót úgy tekinthetjük, mint a $(0, c_k)$ intervallumból vett $(k-1)$-elemű rendezett minta i-edik elemét. Így az $\frac{\eta_{i}^{*}}{\eta_{k}^{*}}$ hányados feltételes eloszlása c_k-tól sem függ, tehát ugyanaz marad, bármilyen értéket is vesznek fel a $\eta_{k}^{*}, \ldots \eta_{n}^{*}$ változók, s így sűrűségfüggvénye (5) szerint $\beta_{k-1,i}(x)$. Tehát *a rendezett minta elemeiből képzett különbségek és hányadosaik is béta-eloszlásúak.*

Az $\frac{\eta_{k}^{*}}{\eta_{k+1}^{*}}$ $(k=1,2,\ldots,n)$ *változók teljesen függetlenek.* Valóban, a fentiek szerint az $\eta_{k}^{*}/\eta_{k+1}^{*}$ változó eloszlása nem függ az $\eta_{k+1}^{*},\ldots,\eta_{n}^{*}$ változók felvett értékeitől, tehát $\frac{\eta_{k}^{*}}{\eta_{k+1}^{*}}$ független az $\frac{\eta_{k+1}^{*}}{\eta_{k+2}^{*}},\ldots,\frac{\eta_{n}^{*}}{\eta_{n+1}^{*}}$ változóktól.

A

$$\zeta_k=\left(\frac{\eta_{k}^{*}}{\eta_{k+1}^{*}}\right)^k \qquad (k=1,2,\ldots,n)$$

változók egyenletes eloszlásúak a (0, 1) *intervallumban.** Valóban, η_{n}^{*} eloszlásfüggvénye:

$$\mathbf{P}(\eta_{n}^{*}<x)=\prod_{k=1}^{n}\mathbf{P}(\eta_{k}<x)=x^n \qquad (0\leqq x\leqq 1).$$

Minthogy az $\frac{\eta_{k}^{*}}{\eta_{k+1}^{*}}$ változót úgy tekinthetjük, mint a (0, 1) intervallumban egyenletes eloszlású statisztikai sokaságból vett k-elemű rendezett minta k-adik elemét, kapjuk, hogy

$$\mathbf{P}\left(\frac{\eta_{k}^{*}}{\eta_{k+1}^{*}}<x\right)=x^k \qquad (0\leqq x\leqq 1),$$

amiből

$$\mathbf{P}(\zeta_k<x)=\mathbf{P}\left(\frac{\eta_{k}^{*}}{\eta_{k+1}^{*}}<\sqrt[k]{x}\right)=x \qquad (0\leqq x\leqq 1),$$

és éppen ezt akartuk bebizonyítani.

7. Bevezetjük a

$$\vartheta_k=-\log\zeta_k=-k\log\frac{\eta_{k}^{*}}{\eta_{k+1}^{*}} \qquad (k=1,\ldots,n) \tag{8}$$

valószínűségi változókat. Előző eredményeink szerint ezek teljesen függetlenek és azonos eloszlásúak, mégpedig közös eloszlásfüggvényük:

$$\mathbf{P}(\vartheta_k<x)=\mathbf{P}(\zeta_k>e^{-x})=1-e^{-x} \qquad (x\geqq 0)$$

tehát ϑ_k exponenciális eloszlású valószínűségi változó $(k=1,2,\ldots,n)$ és várható értéke 1. A (8) egyenletből

$$\ln\eta_{k}^{*}=-\sum_{j=k}^{n}\frac{\vartheta_j}{j} \qquad (k=1,\ldots,n) \tag{9}$$

A rendezett minta elemeinek logaritmusai tehát nemcsak Markov-láncot, hanem *additív* Markov-láncot alkotnak, azaz teljesen független valószínűségi változók sorozatának szukcesszív részletösszegeiként állíthatók elő.

* Ez D. VAN DANTZIG és S. MALMQUIST tétele [2].

A (9) egyenlet segítségével a rendezett minta elemeit független és azonos eloszlású valószínűségi változók összegeinek egyszerű függvényeiként lehet előállítani. Ebből a tényből kiindulva a rendezett minták elméletének *határeloszlástételeit* a valószínűségszámítás centrális határeloszlástételei segítségével egyszerű és közvetlen úton lehet bebizonyítani. Ezzel foglalkozik RÉNYI ALFRÉD [4] cikke.

IRODALOM

[1] A. N. KOLMOGOROFF: Sulla determinazione empirica di una legge di distribuzione. Giorn. Istit. Ital. Att. 4 (1933), 83—91.

[2] S. MALMQUIST: On a property of order statistics from a rectangular distribution. Skand. Aktuarietidskrift, 33 (1950), 214—222. A tétel szerepel már D. VAN DANTZIG 1948-ban kiadott előadásainak sokszorosított szövegében is, amint arra D. VAN DANTZIG volt szives a figyelmünket felhívni.

[3] S. S. WILKS: Order statistics. Bull. Amer. Math. Soc. 54 (1948), 6—50.

[4] A. RÉNYI: On the theory of order statistics. Acta Math. Acad. Sci. Hung. 4 (1953), 191—231.

POISSON FOLYAMAT ÁLTAL SZÁRMAZTATOTT MÁSODLAGOS FOLYAMATOKRÓL ÉS AZOK FIZIKAI ALKALMAZÁSAIRÓL

TAKÁCS LAJOS

Bemutatta Rényi Alfréd lev. tag az 1952. december 1-én tartott felolvasó ülésen

1. §. A probléma kitűzése

Tekintsünk egy Poisson-féle sztochasztikus folyamatot. Legyen az események előfordulásának sűrűsége $\lambda(u)$, ahol $\lambda(u)$ az u időparaméter nem negatív, folytonos és korlátos függvénye. Poisson folyamat esetén feltételezzük, hogy közös pont nélküli időintervallumokban előforduló események számai egymástól függetlenek, továbbá, hogy annak a valószínűsége, hogy u és $u+\Delta u$ időpontok között *egy esemény előfordul:** $\lambda(u)\Delta u+o(\Delta u)$ és hogy *több mint egy esemény fordul elő:* $o(\Delta u)$.

Ezen feltevések mellett mint ismeretes a $(0, t)$ időközben előforduló események várható száma:

$$\Lambda(t)=\int_0^t \lambda(u)\,du \tag{1}$$

és annak a valószínűsége, hogy $(0, t)$ időközben pontosan k számú esemény fordul elő

$$P(t,k)=e^{-\Lambda(t)}\frac{[\Lambda(t)]^k}{k!}. \tag{2}$$

Jelen dolgozatunkban a következő problémával fogunk foglalkozni: Feltesszük, hogy az alapul vett Poisson folyamatban minden esemény, bekövetkezésének időpontjában egy véletlen jelet indít el. Az egyes jelek amplitudóját a jel kezdetétől számított u időtartam elteltével írja le az $f(u,\chi)$ függvény, ahol a χ paraméter valószínűségi változó. Az egyes jelekhez tartozó χ paraméterekről feltesszük, hogy egyforma eloszlású, független pozitív valószínűségi változók közös $P(\chi\leqq x)=H(x)$ eloszlásfüggvénnyel. Feltesszük továbbá, hogy az egyes jelek összeadódnak és a jelek összege által leírt másodlagos folyamatot fogjuk vizsgálat tárgyává tenni.

A következő eseteket fogjuk megkülönböztetni:

1. Tekintsük a Poisson folyamatot $0\leqq u<\infty$ időközben és jelöljük a Poisson folyamat eseményeinek előfordulási időpontjait: $u_1, u_2, \ldots, u_k, \ldots$

* $o(\Delta u)$ olyan függvényt jelöl, amelyre $\lim\limits_{\Delta u\to 0}\dfrac{o(\Delta u)}{\Delta u}=0$.

-val. Legyenek a létrehozott jelekhez tartozó χ paraméter értékei rendre: $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_k, \ldots$ A $\{\chi_k\}$ paraméterek egyforma eloszlású, független, nem negatív valószínűségi változók. Legyen a jelek értékeinek összege u időpontban $\eta(u)$, azaz

(3) $$\eta(u) = \sum_{0 \leqq u_k \leqq u} f(u - u_k, \chi_k).$$

$\eta(0) = 0$ és $\eta(u)$ értelmezve van $u \geqq 0$ értékekre. Jelöljük $\eta(u)$ valószínűségi változó eloszlásfüggvényét $P(\eta(u) \leqq x) = G(u, x)$-szel.

2. Tekintsük azt az esetet, midőn $\lambda(u) \equiv \lambda$, azaz az alapul vett Poisson folyamat időben homogén és tegyük fel, hogy a Poisson folyamatban előforduló valamennyi esemény létrehoz egy jelet, és jelöljük $\eta^*(u)$-val a $(-\infty, u)$ időintervallumban előforduló események által létrehozott jelek összegét u időpontban, azaz legyen

(4) $$\eta^*(u) = \sum_{-\infty < u_k \leqq u} f(u - u_k, \chi_k).$$

Ki fogjuk mutatni, hogy az $\eta^*(u)$ valószínűségi változó általános feltételek mellett létezik, és eloszlásfüggvénye független u-tól. Legyen ekkor $P(\eta^*(u) \leqq x) = G^*(x)$. Könnyen belátható, hogy ha 1. esetben az alapul vett Poisson folyamat időben homogén, azaz $\lambda(u) \equiv \lambda$ úgy $G^*(x) = \lim_{u \to \infty} G(u, x)$.

Dolgozatunkban először azzal a speciális esettel fogunk foglalkozni, amidőn $f(u, \chi) = \chi e^{-\alpha u}$, ahol α pozitív állandó. Ezt azért tesszük így, mert elvi szempontból a tisztán diszkontinuus Markov-folyamatok érdekes alkalmazását teszi lehetővé, másrészt mert gyakorlati szempontból nagyon fontos eset és ezzel kapcsolatban egyéb kérdéseket is tárgyalunk. Így megállapítjuk, $\eta(u)$-nak, illetve $\eta^*(u)$-nak egy rögzített a küszöbértéken bizonyos idő alatt történő áthaladásainak várható számát.

Ezen problémák tárgyalása után a független valószínűségi változók összegére vonatkozó egy ismert tétel általánosítását adjuk és ennek felhasználásával az említett sztochasztikus folyamatokat tetszőleges $f(u, \chi)$ időbeli lefolyású jelek esetén vizsgáljuk. Ezután az $\eta^*(u)$ folyamat korrelációs függvényével és harmonikus analízisével fogunk foglalkozni. Végül néhány példát mutatunk be a részecskeszámlálások köréből.

A fenti sztochasztikus folyamatok speciális eseteivel az irodalomban sokat foglalkoztak. Anélkül, hogy teljességre törekednénk, megemlítjük N. CAMPBELL [1] és [2], E. N. ROWLAND [3], A. JA. HINCSIN [4] és S. O. RICE [5] munkáit. Ezek közül gyakorlati szempontból a legmesszebbmenő S. O. RICE [5] munkája, azonban RICE csak az időben homogén esetet és $f(u, \chi) = \chi f(u)$ alakú jelek esetét tárgyalja. Tárgyalásunkban a felsorolt szerzőktől eltérő módszert követünk és az eddigieknél egyszerűbb eljárással általánosabb eredményeket nyerünk.

Itt említjük meg RÉNYI A. [6] munkáját, amelyben Poisson folyamat által származtatott történések folyamatát vizsgálta és megállapította, hogy egy adott időpontban éppen folyamatban lévő történések száma Poisson eloszlást követ. Ez az eset dolgozatunkból úgy kapható meg, hogy $f(u, \chi)$-nek a következő függvényt választjuk: $f(u, \chi) = 1$, ha $0 \leqq u \leqq \chi$ és $f(u, \chi) = 0$ egyébként.

2. §. *Exponenciális lefolyású jelek esete*

Ebben és a következő két fejezetben azzal a speciális esettel fogunk foglalkozni, amidőn a jelek időbeli lefolyását

$$f(u, \chi) = \begin{cases} \chi e^{-\alpha u} & \text{ha} \quad u \geqq 0 \\ 0 & \text{ha} \quad u < 0. \end{cases} \tag{5}$$

függvény írja le. Megállapítjuk, hogy milyen feltételek mellett léteznek és hogyan határozhatók meg $G(u, x)$ és $G^*(x)$ eloszlásfüggvények. Továbbá a következő kérdésekkel fogunk foglalkozni:

Azt mondjuk, hogy u időpontban A állapotban van a folyamat, ha u időpontban a folyamathoz rendelt valószínűségi függvény értéke $< a$ ($\eta(u) < a$, illetve $\eta^*(u) < a$) és B állapotban van, ha ez az érték $> a$ ($\eta(u) > a$, illetve $\eta^*(u) > a$). Itt a egy rögzített küszöbszámot jelent.

Kérdés, hogy $(0, t)$ időközben mennyi lesz a B állapotban való tartózkodás várható időtartama. Jelöljük ezt 1. esetben $\tau(t, a)$-val és 2. esetben $\tau^*(t, a)$-val. Továbbá kérdés, hogy $(0, t)$ időközben mennyi lesz az $A \to B$ átmenetek várható száma. Jelöljük ezt 1. esetben $m(t, a)$-val és 2. esetben $m^*(t, a)$-val.

Nevezzük *valódi eseményeknek* a Poisson-folyamatban előforduló eseményeket és *látszólagos eseményeknek* az $A \to B$ átmeneteket. Kérdés, hogy legalább a 2. esetben miként lehet a látszólagos események sűrűségéből a valódi események sűrűségére következtetni.

Mindenekelőtt azonban felemlítünk egy, az elmondottakat illusztráló fontos alkalmazási területet a kísérleti fizikából.

Példa a kísérleti fizikából. Tárgyalásunk konkretizálására gondoljunk elektronsokszorozóval történő részecskeszámlálás példájára. Elektronsokszorozó katódjára beeső korpuszkulák vagy fotonok elektronokat váltanak ki. Egy elektróda soron az elektronok száma egymás után szekundér emisszióval sokszorozódik.

Ha $p_0(k)$ jelenti annak a valószínűségét, hogy egy beeső részecske a katódból k elektront vált ki és az elektronsokszorozó sokszorozó lemezeinek száma r, melyek mindegyikére $p(k)$ jelenti annak a valószínűségét, hogy egy beeső elektron k szekundér elektront vált ki, és feltesszük, hogy minden egyes elektron sokszorozódási processzusa független a többitől, úgy a multiplikatív processzusok elméletének segítségével könnyen meghatározható annak a valószínűsége, hogy egy, a katódra eső részecske által kiváltott elektronlavina az anódra érve k elektronból álljon. Ha $\{p_0(k)\}$ generátorfüggvényét $f_0(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_0(k)s^k$ jelöli és $p(k)$ generátorfüggvényét $f(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p(k)s^k$ jelöli, úgy az n-ik sokszorozó lemezen kiváltott elektronok számának generátorfüggvényét $g_n(s)$-sel jelölve fennáll: $g_0(s) = f_0(s)$ és $g_n(s) = f[g_{n-1}(s)]$ $(n = 1, 2, \ldots, r)$. Ezen rekurzív formula segítségével meghatározható $g_r(s)$ az anódra eső elektronok száma valószínűségének generátorfüggvénye. A generátorfüggvény ismeretében meghatározhatók maguk a valószínűségek is.

Ha az anódra k elektron esik, úgy ezek az elektronok feltöltik az anódkör C kapacitású kondenzátorát az elektronok számával arányos $x = ke/C$ feszültségre (e az elektron töltése). Míg k valószínűségi változó diszkrét $k = 0, 1, 2, \ldots$ értékeket vesz fel, addig x valószínűségi változó jó közelítéssel folytonosnak tekinthető. Ugyanis például $C = 1\,pF$ esetén $\Delta x = \frac{\Delta k \cdot e}{C} = \frac{e}{C} = 1{,}6 \cdot 10^{-7}$ volt. Az x feszültségre feltöltött kondenzátor R ellenálláson keresztül kisül éspedig feszültsége időben exponenciális mértékben $xe^{-t/RC}$ függvény szerint csökken. Az RC időállandó reciprok értéke megegyezik az α állandóval, a feszültséglökés nagyságának eloszlásfüggvénye pedig $H(x)$.

A fentemlített sztochasztikus folyamatokkal leírható ez a jelenség. Sok esetben például radioaktív atomok bomlásánál, kozmikus sugárzásnál feltehető, hogy a katódra érkező korpuszkulák vagy fotonok időpontjai Poisson folyamatot alkotnak. Ekkor az események a katódra érkező részecskék. A katódból kiinduló elektronok sokszorozási processzusa egymástól független és egy lökés időtartama alatt érkező újabb részecskékre nézve az elektronsokszorozó hatásos marad. Az anódra érkező elektronlavina a külső körben egy exponenciális lefutású feszültséglökést okoz, melynek amplitudója valószínűségi változó. A különböző impulzusok lineárisan szuperponálódnak.

A jelenséget egy elektroncsöves koincidencia berendezéssel észleljük, amely egy számlálóval áll kapcsolatban. A számláló jelez, ha a jelek összegének értéke nagyobb lesz egy megadott a küszöbfeszültségnél és a jelfogó bekapcsolva marad mindaddig, amíg a jelek összegének értéke nagyobb a-nál.

Ekkor probléma, hogy mennyi lesz a jelfogó bekapcsolásainak várható száma és várható időtartama t időtartam alatt.

Megjegyezzük, hogy a jelfogó bekapcsolásainak várható számát nem érinti az a tény, hogy a jelfogó bekapcsolva maradjon mindaddig, amíg a B állapot tart. Ez csak a B állapotban való tartózkodás várható időtartamának illusztrálására szolgál; jóllehet ez a gyakorlatban nem megvalósíthatatlan eset.

Kétféle problémát különböztetünk meg:

Észlelések problémája: Egyetlen elektronsokszorozóval történő részecskeszámlálás esetén azt mondjuk, hogy adott időpontban észlelés kezdődik, ha a jelfogó bekapcsol. Az észlelések várható száma t időtartam alatt megegyezik a jelfogó bekapcsolásainak várható számával. Ekkor probléma, hogy különböző a értékek mellett, azaz különböző küszöbfeszültségek mellett a látszólagos eseménysűrűségből (észlelések sűrűsége) miként lehet visszakövetkeztetni a valódi eseménysűrűségre. Továbbá, érdekességgel bír a legkedvezőbb a érték megválasztásának kérdése.

Koincidenciák problémája. Egyidejűleg több elektronsokszorozót használva véletlen jelenségek észlelésére, kapjuk a koincidencia-problémát. Ekkor az összes elektronsokszorozó által szolgáltatott jeleket egyetlen koincidencia készülékkel vizsgáljuk. A számláló jelez, ha a jelek összege meghaladja a beállított a küszöbfeszültséget. Ekkor probléma, hogy különböző a értékek mellett mennyi lesz t időtartam alatt a véletlen koincidenciák várható száma. Ennek ismerete akkor bír különös fontossággal, ha azt vizsgáljuk, hogy két vagy több folyamat között van-e korreláció. Ekkor érdekességgel bír az a kérdés, hogy milyen a érték mellett a legkedvezőbb a korreláció vizsgálatot végezni.

Ez a probléma visszavezethető az előzőre, ha feltesszük, hogy az egyes elektronsokszorozókkal történő számlálási processzusok egymástól függetlenek, és egy beeső részecske által létrehozott feszültséglökés nagysága mindegyik elektronsokszorozó anódján ugyanazon valószínűség eloszlást mutatja. Ebben az esetben, ha az egyes elektronsokszorozókhoz érkező részecskék sűrűsége $\lambda_1(u), \lambda_2(u), \ldots, \lambda_m(u)$, úgy az m elektronsokszorozó helyettesíthető egyetlen olyannal, melynél a részecskék érkezésének sűrűsége:

$$\lambda(u) = \lambda_1(u) + \lambda_2(u) + \cdots + \lambda_m(u).$$

Az erősítő körök méretezése szempontjából fontossággal bír sztochasztikus folyamatunk harmonikus analízisének elvégzése.

3. §. *Az eloszlásfüggvények meghatározása*

Jelen fejezet célja $P(\eta(u) \leq x) = G(u, x)$ és $P(\eta^*(u) \leq x) = G^*(x)$ eloszlásfüggvények meghatározása $f(u, \chi) = \chi e^{-\alpha u}$ időbeli lefolyású jelek esetén. Az $\eta(u)$ és $\eta^*(u)$ valószínűségi függvények Markov-folyamatot írnak le, ugyanis, ha egy adott u időpontban ismerjük $\eta(u)$, illetve $\eta^*(u)$ értékét, úgy ez egyértelműen meghatározza a folyamat jövő sztochasztikus viselkedését. Ha azonban az időtengelyt megfordítjuk és egy adott u időponttól visszafelé haladva a kevesebb mint z ideje tartó jeleket, azaz $(u-z, u)$ időközben kezdődő jeleket tekintjük, úgy az így nyert

$$\zeta(u, z) = \sum_{u-z \leq u_k \leq u} f(u - u_k, \chi_k) \tag{6}$$

függvénnyel leírt folyamat ugyancsak Markov-féle marad, de $\zeta(u, z)$ „jövő" sztochasztikus viselkedése nem függ $\zeta(u, z)$ aktuális értékétől, azaz ezzel az eljárással független növekményű Markov-folyamatot nyertünk, ami viszont az előbbinél egyszerűbben tárgyalható.

Itt u rögzített érték és a folyamatot $z \geqq 0$ időpontokban tekintjük. Ekkor célszerű az események sűrűségét $p(z) = \lambda(u-z)$-vel jelölni.

$\zeta(u, z)$ ismeretében $\eta(u)$ és $\eta^*(u)$ könnyen megkapható. Ugyanis $\eta(u) = \zeta(u, u)$ és $\eta^*(u) = \lim_{z \to \infty} \zeta(u, z)$, ha $\lambda(u) \equiv \lambda$. Legyen $P(\zeta(u, z) \leqq x) = F(z, x)$, úgy $G(u, x) = F(u, x)$ és $G^*(x) = \lim_{z \to \infty} F(z, x)$ feltéve, hogy $\lambda(u) \equiv \lambda$.

Eddig nem foglalkoztunk $\eta^*(u)$ létezésének kérdésével. Most kimutatjuk, hogy $\eta^*(u)$ létezik, ha $M(\chi_n) < \infty$. A fent elmondottak szerint ugyanis $\eta^*(u)$ előállítható független valószínűségi változók összegeként a következő alakban:

$$\eta^*(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \Delta\zeta(u, n\Delta z), \qquad \text{ahol} \qquad \Delta\zeta(u, n\Delta z) = \zeta(u, (n+1)\Delta z) - \zeta(u, n\Delta z),$$

$(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Most pedig alkalmazható A. N. KOLMOGOROV ismert tétele (P. R. HALMOS: Measure Theory, 1950, 199 o.), amely szükséges és elegendő feltételt ad független valószínűségi változók végtelen sorának konvergenciájára vonatkozóan. Ha $M(\chi_n) < \infty$ úgy elegendő kis Δz és $c = 1$ választás mellett a feltételek könnyen beláthatóan teljesülnek és így $\eta^*(u) = \lim_{z \to \infty} \zeta(u, z)$ határérték 1 valószínűséggel létezik. Innen már következik, hogy $G^*(x)$ létezik, ha $M(\chi_n) < \infty$, de erre külön bizonyítást is adunk.

A $\zeta(u, z)$ folyamat ún. diszkontinuus Markov-folyamat. A. N. KOLMOGOROV [7] munkájának a végén említette fel a tisztán diszkontinuus Markov-folyamatot, amelynél csupán ugrásszerű állapotváltozások lépnek fel, és felírta a folyamatot meghatározó integro-differenciálegyenletet. W. FELLER [8] és [9] munkáiban ezt a processzust beható vizsgálat tárgyává tette, megadta az exisztencia és egyértelműségi tételeket és megadta az integro-differenciálegyenlet általános megoldását egyenletesen konvergens végtelen sor alakjában.

A $\zeta(u, z)$ folyamat speciális esetét képezi W. FELLER által tárgyalt folyamatnak, amennyiben esetünkben a változás bekövetkezésének és nagyságának valószínűsége független $\zeta(u, z)$ aktuális értékétől és általánosítása A. JA. HINCSIN [10] által tárgyalt esetnek, amelynél a változás valószínűségei még az időtől is függetlenek. Folyamatunkra alkalmazhatnánk W. FELLER általános tárgyalását, azonban célszerűnek mutatkozik éppen speciálitásában rejtőző egyszerűsége miatt külön tárgyalást adni.

A következő tételt bizonyítjuk be:

1. TÉTEL. *A fent definiált $\zeta(u, z)$ valószínűségi függvényre vonatkozó $P(\zeta(u, z) \leqq x) = F(z, x)$ eloszlásfüggvény eleget tesz a következő integro-differenciálegyenletnek:*

$$\frac{\partial F(z, x)}{\partial z} = p(z) \left[\int_0^x H[(x-y)e^{\alpha z}] \, d_y F(z, y) - F(z, x) \right], \tag{7}$$

melynek egyetlen feltételeinknek eleget tevő $F(z, x)$ megoldása van. Legyen

$F(z, y)$ karakterisztikus függvénye

$$\Phi(z, \omega) = \int_0^\infty e^{i\omega x} d_x F(z, x) \tag{8}$$

és legyen $H(x)$ karakterisztikus függvénye

$$\varphi(\omega) = \int_0^\infty e^{i\omega x} d H(x). \tag{9}$$

Ekkor fennáll

$$\log \Phi(z, \omega) = -\int_0^z p(v)\left[1 - \varphi(\omega e^{-\alpha v})\right] dv. \tag{10}$$

$\Phi(z, \omega)$ ismeretében $F(z, x)$ eloszlásfüggvény egyértelműen meghatározható.

BIZONYÍTÁS: Fennáll $\Delta z > 0$-ra

$$F(z + \Delta z, x) = \tag{11}$$

$$= p(z)\Delta z \int_0^x H[(x-y)e^{\alpha z}]\, d_y F(z, y) + (1 - p(z)\Delta z) F(z, x) + o(\Delta z).$$

Ugyanis az az esemény, hogy $z + \Delta z$ időpontban $\zeta(u, z + \Delta z) \leqq x$ legyen, úgy jöhet létre, hogy $\zeta(u, z) = y$, ahol $0 \leqq y < x$ és $(z, z + \Delta z)$ időközben bekövetkezik egy esemény, aminek a valószínűsége $p(z)\Delta z + o(\Delta z)$ és annak a valószínűsége, hogy a változás: $\zeta(u, z + \Delta z) - \zeta(u, z) \leqq x - y$ egyenlő $H[(x-y)e^{\alpha z}]$-vel, vagy z időpontban $\zeta(u, z) \leqq x$ aminek a valószínűsége $F(z, x)$ és $(z, z + \Delta z)$ közben nem történik esemény, aminek a valószínűsége: $1 - p(z)\Delta z + o(\Delta z)$. Annak a valószínűsége, hogy $(z, z + \Delta z)$ időközben egynél több esemény fordul elő: $o(\Delta z)$. Könnyen belátható, hogy az a kérdés, hogy $(z, z + \Delta z)$ intervallumban pontosan hol fordul elő az esemény nem érinti tárgyalásunkat és így úgy vehetjük, mintha z pontban fordult volna elő.

(11)-ből

$$\frac{F(z + \Delta z, x) - F(z, x)}{\Delta z} = \tag{12}$$

$$= p(z) \int_0^x H[(x-y)e^{\alpha z}]\, d_y F(z, y) - p(z) F(z, x) + \frac{o(\Delta z)}{\Delta z}$$

$\Delta z \to 0$ határmenetet elvégezve

$$\frac{\partial F(z, x)}{\partial z} = p(z)\left[\int_0^x H[(x-y)e^{\alpha z}]\, d_y F(z, y) - F(z, x)\right] \tag{13}$$

egyenletre jutunk. A fenti számítással azt mutattuk ki, hogy $F(z, x)$ z szerinti jobboldali deriváltja létezik és egyenlő (13) jobboldalával. Hasonlóan megmutatható, hogy $F(z, x)$ baloldali deriváltja is létezik és az is egyenlő (13) jobboldalával, azaz $F(z, x)$ z szerinti deriváltja létezik és erre fennáll (7).

(9) következtében

$$\int_0^\infty e^{i\omega x} d H(xe^{\alpha z}) = \int_0^\infty e^{i\omega xe^{-\alpha z}} d H(x) = \varphi(\omega e^{-\alpha z}). \tag{14}$$

Így (7) egyenletből a karakterisztikus függvényekre áttérve, tekintetbe véve, hogy eloszlásfüggvények kompozícióinak karakterisztikus függvénye egyenlő a karakterisztikus függvények szorzatával, könnyen adódik, hogy

$$\frac{\partial \Phi(z, \omega)}{\partial z} = -p(z)\,[1-\varphi(\omega e^{-\alpha z})]\,\Phi(z, \omega). \tag{15}$$

$\lambda(u)$-ról feltettük, hogy folytonos és mint ismeretes, egy karakterisztikus függvény egyenletesen folytonos $-\infty < \omega < \infty$-ra, tehát $\varphi(\omega e^{-\alpha z})$ is folytonos. Ezen feltételek mellett, mint ismeretes, differenciálegyenletünknek egyetlen a kezdeti feltételnek elegettevő megoldása van. $F(0, x)$-re vonatkozó feltételt tekintetbe véve $\Phi(0, \omega) = 1$ és ezen kezdeti feltétel mellett (15) lineáris differenciálegyenlet megoldása logaritmikus alakban felírva

$$\log \Phi(z, \omega) = -\int_0^z p(v)\,[1-\varphi(\omega e^{-\alpha v})]\, dv. \tag{16}$$

Az, hogy (7) integro-differenciálegyenletünknek egyetlen $F(z, x)$ megoldása van, amely kielégíti a kezdeti feltételt és x-ben eloszlásfüggvény, W. FELLER [8], [9] általános esetre vonatkozó tételéből következik. Mint ismeretes, $F(z, x)$ eloszlásfüggvény karakterisztikus függvényének $\Phi(z, \omega)$-nak ismeretében egyértelműen meghatározható. Lásd például H. CRAMÉR [11, 93. o.].

Tegyük fel most, hogy $p(z) \equiv \lambda$ állandó és vizsgáljuk meg, hogy mikor létezik $\lim\limits_{z\to\infty} F(z, x) = F(x)$ határeloszlásfüggvény. Erre vonatkozóan a következő tételt bizonyítjuk be:

2. TÉTEL. *Abban az esetben, ha $H(x)$ eloszlásfüggvény átlaga*

$$M_1 = \int_0^\infty x\, dH(x) \tag{17}$$

véges, a (7) *alatti integro-differenciálegyenletnek a kezdeti feltételünknek elegettevő $F(z, x)$ megoldása $z \to \infty$ esetén egy $F(x)$ határeloszlásfüggvényhez konvergál, amelynek karakterisztikus függvényére $\Phi(\omega)$*-ra fennáll, hogy

$$\log \Phi(\omega) = -\frac{\lambda}{\alpha} \int_0^1 \frac{1-\varphi(\omega v)}{v}\, dv. \tag{18}$$

$\Phi(\omega)$ ismeretében $F(x)$ egyértelműen meghatározható.

BIZONYÍTÁS: Hivatkozunk P. LÉVY és H. CRAMÉR tételére (lásd CRAMÉR könyvében [11, 96. o.]) mely szerint:

Ha adva van $\{F_n(x)\}$ valószínűség eloszlásfüggvények sorozata és $\{\Phi_n(\omega)\}$ a megfelelő karakterisztikus függvények sorozata, úgy annak a szükséges és elegendő feltétele, hogy $\{F_n(x)\}$ sorozat egy $F(x)$ eloszlásfüggvényhez konvergáljon, az, hogy minden ω-ra $\{\Phi_n(\omega)\}$ sorozat konvergáljon egy $\Phi(\omega)$ határfüggvényhez, mely $\omega=0$ értékre folytonos.

Ha ez a feltétel teljesül, úgy $\Phi(\omega)$ határfüggvény megegyezik az $F(x)$ határeloszlás karakterisztikus függvényével.

Esetünkben $\lim\limits_{z\to\infty} F(z,x)=F(x)$ határeloszlás a feltétel szerint akkor létezik, ha létezik

$$\lim_{z\to\infty}\int_0^z [1-\varphi(\omega e^{-\alpha v})]\,dv \tag{19}$$

határérték és ez folytonos az $\omega=0$ helyen. Ekkor $F(x)$ karakterisztikus függvényét $\Phi(\omega)$-val jelölve:

$$\Phi(\omega)=\int_0^\infty e^{i\omega x}\,dF(x) \tag{20}$$

és erre fennáll

$$\log\Phi(\omega)=-\lambda\int_0^\infty [1-\varphi(\omega e^{-\alpha v})]\,dv, \tag{21}$$

amely ekvivalens (18)-cal.

Feltettük, hogy

$$M_1=\int_0^\infty x\,dH(x) \tag{22}$$

véges és ekkor könnyen belátható, hogy

$$|1-\varphi(\omega)|=\left|\int_0^\infty (1-e^{i\omega x})\,dH(x)\right|\leqq M_1|\omega|. \tag{23}$$

Így

$$\left|\int_0^\infty [1-\varphi(\omega e^{-\alpha v})]\,dv\right|\leqq \frac{M_1|\omega|}{\alpha},$$

amiből következik, hogy (19) határérték minden véges ω esetén létezik és az $\omega=0$ helyen folytonos. Így alkalmazhatjuk LÉVY—CRAMÉR tételét, és ezzel állításunkat bebizonyítottuk.

Jelöljük most $G(u,x)$ karakterisztikus függvényét $\Psi(u,\omega)$-val, azaz

$$\Psi(u,\omega)=\int_0^\infty e^{i\omega x}\,d_x G(u,x) \tag{24}$$

és $G^*(x)$ karakterisztikus függvényét $\Psi^*(\omega)$-val, azaz

$$\Psi^*(\omega)=\int_0^\infty e^{i\omega x}\,dG^*(x), \tag{25}$$

úgy fennáll

$$\log\Psi(u,\omega)=-\int_0^u \lambda(u-v)[1-\varphi(\omega e^{-\alpha v})]\,dv \tag{26}$$

és $M_1 < \infty$ *esetén:*

$$\text{(27)} \qquad \log \Psi^*(\omega) = -\frac{\lambda}{a}\int_0^1 \frac{1-\varphi(\omega v)}{v}\,dv.$$

MEGJEGYZÉS: Ha $H(x)$ eloszlásfüggvény m-edik momentuma létezik, úgy, mint ismeretes

$$\text{(28)} \qquad M_j = \int_0^\infty x^j\,dH(x), \quad (j = 0, 1, \ldots, m)$$

momentumok is léteznek és fennáll $H(x)$ karakterisztikus függvényére (9)-re, hogy

$$\text{(29)} \qquad \varphi(\omega) = \sum_{j=0}^{m} \frac{M_j}{j!}(i\omega)^j + o(\omega^m)$$

és így (27) felhasználásával:

$$\text{(30)} \qquad \log \Psi^*(\omega) = \frac{\lambda}{a}\sum_{j=1}^{m} \frac{M_j}{j \cdot j!}(i\omega)^j + o(\omega^m),$$

azaz $G^*(x)$ eloszlásfüggvény félinvariánsai, melyeket jelöljünk Δ_j-vel, szintén léteznek az m-edikig bezárólag és ezek

$$\text{(31)} \qquad \Delta_j = (-i)^j \left[\frac{d^j}{d\omega^j}\log \Psi^*(\omega)\right]_{\omega=0} = \frac{\lambda}{a}\frac{M_j}{j}, \quad (j = 1, 2, \ldots, m).$$

A (31) összefüggés különösen alkalmas olyan gyakorlati feladatok megoldására, amelyeknél a $H(x)$ eloszlásfüggvény tapasztalatilag adott.

4. §. *A várható értékek meghatározása*

$\tau(t, a)$ és $\tau^*(t, a)$ meghatározása. u időpontban B állapotban van a rendszer, ha a jelek u időponthoz rendelt értékeinek összege nagyobb a-nál. Ennek a valószínűsége 1. esetben: $1 - G(u, a)$ és 2. esetben: $1 - G^*(a)$. Ekkor egyszerűen belátható, hogy $(0, t)$ időintervallumban a B állapotban való tartózkodás várható időtartama:

1. esetben:

$$\text{(32)} \qquad \tau(t, a) = \int_0^t [1 - G(u, a)]\,du.$$

2. esetben:

$$\text{(33)} \qquad \tau^*(t, a) = [1 - G^*(a)]\,t.$$

Az integrál létezése biztosítva van, mivel $G(u, x)$ u-nak nemcsak hogy folytonos, hanem differenciálható függvénye is.

$m(t, a)$ és $m^*(t, a)$ meghatározása. u és $u + \Delta u$ időpontok között $A \to B$ átmenet lép fel, ha u időpontban, a jelek értékeinek összege: $x < a$ és $(u, u + \Delta u)$ közben kezdődik egy jel, aminek a valószínűsége: $\lambda(u)\Delta u + o(\Delta u)$

és ennek amplitudója $(a-x)$-nél nagyobb, aminek a valószínűsége: $1-H(a-x)$. Annak a valószínűsége, hogy $(u, u+\Delta u)$ közben egynél több $A\to B$ átmenet jöjjön létre, mint könnyen belátható: $o(\Delta u)$.

Az elmondottak alapján könnyen adódik, hogy annak a valószínűsége, hogy $(u, u+\Delta u)$ közben $A\to B$ átmenet jöjjön létre:

1. esetben:

$$\lambda(u)K(u,a)\Delta u+o(\Delta u), \tag{34}$$

ahol $K(u,a)$-ra fennáll:

$$K(u,a)=\int_0^a [1-H(a-x)]\,dG(u,x). \tag{35}$$

2. esetben:

$$\lambda K^*(a)\Delta u+o(\Delta u), \tag{36}$$

ahol

$$K^*(a)=\int_0^a [1-H(a-x)]\,dG^*(x). \tag{37}$$

Mint könnyen belátható, az $(u, u+\Delta u)$ időközben előforduló $A\to B$ átmenetek várható számát 1. esetben (34), 2. esetben (36) szolgáltatja. A $(0,t)$ intervallumban előforduló $A\to B$ átmenetek várható számát úgy kapjuk meg, hogy a $(0,t)$ intervallumot n számú $\Delta u=t/n$ nagyságú szakaszra bontjuk, mindegyik szakaszban képezzük a várható értékeket, ezeket összegezzük és $n\to\infty$ határátmenetet végzünk. A $G(u,x)$ eloszlásfüggvény u-szerinti folytonosságából következik $K(u,a)$ u-szerinti folytonossága. Így biztosítva van, hogy a határátmenet elvégezhető, és eredményül azt kapjuk, hogy:

1. esetben:

$$m(t,a)=\int_0^t \lambda(u)K(u,a)\,du \tag{38}$$

és

2. esetben:

$$m^*(t,a)=\lambda K^*(a)t. \tag{39}$$

1. MEGJEGYZÉS. 2. esetben (37) szerint $K^*(a)$ előállítható, mint két eloszlásfüggvény különbsége és így létezik Fourier—Stieltjes transzformáltja. Jelöljük ezt

$$R(\omega)=\int_0^\infty e^{i\omega a}\,dK^*(a) \tag{40}$$

-val. (37) alapján erre fennáll

$$R(\omega)=[1-\varphi(\omega)]\,\Psi^*(\omega) \tag{41}$$

és innen $K^*(a)$ egyértelműen meghatározható.

Hasonlóan határozható meg $K(u,a)$ is.

2. MEGJEGYZÉS. A 2. esetben: t időtartam alatt B állapotban való tartózkodás várható időtartama: $\tau^*(t, a) = [1 - G^*(a)]\, t$, és az $A \to B$ átmenetek várható száma: $m^*(t, a) = \lambda K^*(a) t$. Jelöljük az egymást követő $A \to B$ és $B \to A$ átmenetek között eltelt időtartam átlagos hosszát ϑ-val. Erre nézve fennáll, hogy

$$\vartheta = \lim_{t \to \infty} \frac{\tau^*(t, a)}{m^*(t, a)} = \frac{1 - G^*(a)}{\lambda K^*(a)}. \tag{42}$$

Ez KOLMOGOROV és PROHOROV [12] tétele segítségével bizonyítható. Az idézett tétel a minket érdeklő speciális esetben azt mondja ki, hogy ha $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ egyforma várható értékű valószínűségi változók és $\zeta_\nu = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_\nu$ összeget tekintjük, ahol a tagok száma ν maga is valószínűségi változó, továbbá $n > m$-re ξ_n valószínűségi változók függetlenek $\nu = m$ eseménytől úgy $M(\nu) < \infty$ esetén fennáll $M(\zeta_\nu) = \vartheta M(\nu)$, ahol $\vartheta = M(\xi_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Esetünkben jelölje $\xi_n (n = 1, 2, \ldots)$ $(0 \leq t < \infty)$ időközben az egymást követő $A \to B$ és $B \to A$ átmenetek közötti időtartamokat és ν a $(0, t)$ időközben előforduló $A \to B$ átmenetek számát, úgy azt nyerjük, hogy $M(\zeta_\nu) = \vartheta m^*(t, a)$. Itt azonban könnyen beláthatóan fennáll $\lim\limits_{t \to \infty} M(\zeta_\nu)\, \tau^*(t, a) = 1$ határérték, ahonnan már (42) következik. A tétel alkalmazásához elegendő megmutatni, hogy a ξ_n-ek egyforma eloszlású független valószínűségi változók. Ez pedig onnan következik, hogy folyamatunk Markov-folyamat, amelynek valamely $B \to A$ átmenet pillanatától számított jövő sztochasztikus viselkedése nem függ a múlttól és ilyen időpontoktól számítva a folyamat sztochasztikusan megismétli önmagát.

3. MEGJEGYZÉS. A 2. esetben a *valódi eseménysűrűség:* λ és a *látszólagos eseménysűrűség* ($A \to B$ átmenetek sűrűsége):

$$\lambda'(a) = \lambda K^*(a). \tag{43}$$

5. §. Tetszőleges időbeli lefolyású jelek esete

Most általánosabban feltesszük, hogy egy jel időbeli lefolyását tetszőleges $f(u, \chi)$ függvény írja le, ahol u a jel kezdetétől számított időtartamot jelenti és az χ paraméter valószínűségi változó $H(x)$ eloszlásfüggvénnyel. Ha $f(u, \chi)$ a 2. §-ban tárgyalttól különbözik, úgy a megfelelő $\eta(u)$, illetve $\eta^*(u)$ valószínűségi függvények nem Markov-folyamatot írnak le. Ha azonban az időtengelyt megfordítjuk, azaz egy adott u időponttól visszafelé számítva z időtartamon belül, azaz $(u - z, u)$ időközben kezdődő jelek u időpontban felvett értékeinek összegét tekintjük, azaz

$$\zeta(u, z) = \sum_{u - z \leq u_k \leq u} f(u - u_k, \chi_k)$$

valószínűségi függvényt vezetjük be, úgy a $\zeta(u, z)$ függvény által leírt folyamat nemcsak Markov-féle lesz, hanem független növekményű Markov processzus lesz. $\zeta(u, z)$ segítségével $\eta(u)$ és $\eta^*(u)$ egyszerűen kifejezhető. Ugyanis fennáll $\eta(u) = \zeta(u, u)$ és $\eta^*(u) = \lim_{z\to\infty} \zeta(u, z)$ feltéve, hogy $\lambda(u) \equiv \lambda$ (állandó).

Most $\eta^*(u) = \lim_{z\to\infty} \zeta(u, z)$ határérték 1 valószínűséggel létezik, ha a (62) kifejezés véges. Ugyanis ekkor $\eta^*(u)$-ra a 3. §-ban mondottak szóról-szóra érvényesek maradnak és így A. N. KOLMOGOROV tétele alapján könnyen elvégezhető a bizonyítás, csupán $M(\chi_n) < \infty$ feltétel helyett (62) véges volta alkalmazandó. Ebben az esetben természetesen $G^*(x)$ is létezik, de erre külön bizonyítást is adunk.

Ennek az általánosított problémának is érdekes fizikai alkalmazását lehet adni éspedig elektroncsövek anódáram-ingadozásának tárgyalásánál. Mint ismeretes, elektroncsövek katódjából kilépő elektronok időpontjai Poisson-folyamatot követnek. Legyen egy $u = 0$ időpontban kilépő elektron által influált áram időbeli lefolyása $f(u, \chi)$, ahol χ jelenti az elektron kezdősebességét, amely valószínűségi változó. A klasszikus statisztika szerint χ Maxwell eloszlást követ. Az egyes elektronok által influált áramok összegeződnek és összegük $\eta(u)$ adja az anódáram pillanatnyi értékét. Ezzel a problémával egy külön dolgozatban fogunk foglalkozni.

Az itt tárgyalt $\zeta(u, z)$ folyamatot a következő fejezetben kimondott tétel segítségével fogjuk tárgyalni. Miként bizonyos sztochasztikus folyamatok visszavezethetők független valószínűségi változók összegének a tanulmányozására, úgy az itt tárgyalt folyamat visszavezethető bizonyos valószínűségi függvény integráljának a meghatározására.

6. §. Segédtétel

Most a következő segédtételt bizonyítjuk be $\zeta(z)$ additív Markov-folyamatra vonatkozóan.

LEMMA: *A $z \geqq 0$-ra értelmezett $\zeta(z)$ valószínűségi függvényre legyen érvényes, hogy*

1. $\zeta(0) \equiv 0$.

2. *$z_1 < z_2 \leqq z_3 < z_4$-re $\zeta(z_2) - \zeta(z_1)$ és $\zeta(z_4) - \zeta(z_3)$ független valószínűségi változók.*

3. *Legyen $\zeta(z + \Delta z) - \zeta(z)$ változó karakterisztikus függvénye $M\{e^{i\omega[\zeta(z+\Delta z)-\zeta(z)]}\} = \psi_{\Delta z}(z, \omega)$ és álljon fenn ω-ban egyenletesen a következő összefüggés*

$$\log \psi_{\Delta z}(z, \omega) = \Delta z \log \psi(z, \omega) + o(\Delta z). \tag{44}$$

Ha $P(\zeta(z) \leqq x) = F(z, x)$ és $\zeta(z)$ karakterisztikus függvénye

$$\Phi(z, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} d_x F(x, z) \tag{45}$$

úgy fennáll

$$\log \Phi(z,\omega)=\int_0^z \log \psi(u,\omega)\,du, \tag{46}$$

feltéve, hogy a jobboldalon álló integrál létezik. $\Phi(z,\omega)$ ismeretében egyértelműen meghatározható $F(z,x)$.

Megjegyezzük, hogy ha a $\zeta(z)$ folyamat differenciálható és diferenciálhányadosa $\xi(z)$ folyamat, azaz $\xi(z)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\zeta(z+h)-\zeta(z)}{h}$ (valószínűségi értelemben) úgy a 3. feltétel teljesül és $\psi(z,\omega)$ nem más, mint $\xi(z)$ karakterisztikus függvénye, azaz $\psi(z,\omega)=M\{e^{i\omega\xi(z)}\}$.

Ekkor felírható, hogy

$$\zeta(z)=\int_0^z \xi(u)\,du. \tag{47}$$

Bizonyítás. Ismeretes, hogy független valószínűségi változók összegének karakterisztikus függvénye egyenlő az egyes változók karakterisztikus függvényeinek szorzatával. Ez a tétel azonban érvényes marad akkor is, ha csak azt követeljük meg, hogy a valószínűségi változók összegében mindegyik változó független legyen a megelőző változók összegétől. Ekkor a valószínűségi változókat *tágabb értelemben függetleneknek* fogjuk nevezni. (Ez a tény lehetővé teszi, hogy tételünk kimondásánál a 2. követelményt enyhítsük és akárhány változó-növekmény függetlensége helyett csupán kettőét követeljük meg.)

Tételünk ennek a tételnek közvetlen általánosítása arra az esetre, midőn az összeadandó valószínűségi változók számának helyére egy folytonosan változó paraméter lép. Az általánosítás közvetlenül keresztülvihető, ha az említett tételt olyan alakban fogalmazzuk meg, hogy független, illetve az említett tágabb értelemben független valószínűségi változók összegezése esetén az egyes változók karakterisztikus függvényeinek logaritmusai összeadódnak.

Osszuk be a $(0,z)$ intervallumot $z_0=0, z_1,\dots,z_n=z$ osztópontokkal n számú $\Delta z=z/n$ nagyságú szakaszra. Legyen $\zeta(z_i)-\zeta(z_{i-1})=\xi_i$ $(i=1,2,\dots,n)$ úgy

$$\zeta(z)=\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_n. \tag{48}$$

A $\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n$ valószínűségi változók tágabb értelemben függetlenek és karakterisztikus függvényeik rendre $\psi_{\Delta z}(z_{i-1},\omega)$ $(i=1,2,\dots,n)$. Tágabb értelemben független valószínűségi változók összegének karakterisztikus függvénye egyenlő az egyes változók karakterisztikus függvényeinek szorzatával, azaz

$$\Phi(z,\omega)=\prod_{i=1}^{n}\psi_{\Delta z}(z_{i-1},\omega). \tag{49}$$

Mindkét oldal logaritmusát véve

$$\log \Phi(z,\omega)=\sum_{i=1}^{n}\log \psi_{\Delta z}(z_{i-1},\omega)=\sum_{i=1}^{n}[\log \psi(z_{i-1},\omega)\Delta z+o(\Delta z)], \tag{50}$$

ahol a második egyenlőség a 3. feltétel következménye.

Ha feltételezzük, hogy $\log \psi(z, \omega)$ a $(0, z)$ intervallumban integrálható, úgy $n \to \infty$ esetén (50) jobboldala

$$\int_0^z \log \psi(z, \omega)\, dz \tag{51}$$

integrálhoz konvergál és ezzel igazoltuk állításunkat.

Megjegyezzük, hogy ha (51) *integrál határértéke* $z \to \infty$ *esetén létezik és* $\omega = 0$ *helyen folytonos, úgy* $\lim\limits_{z\to\infty} F(z, x) = F(x)$ *határeloszlás is létezik, melynek karakterisztikus függvényét* $\Phi(\omega)$*-val jelölve fennáll:*

$$\log \Phi(\omega) = \int_0^\infty \log \psi(z, \omega)\, dz. \tag{52}$$

MEGJEGYZÉS. Ha létezik $\xi(z) = \zeta'(z)$ valószínűségi függvény és m-edik félinvariánsa véges, úgy

$$\lambda_j(z) = (-i)^j \left[\frac{d^j \log \psi(z, \omega)}{d\omega^j}\right]_{\omega=0} \qquad (j = 1, 2, \ldots, m) \tag{53}$$

félinvariánsok is végesek és ekkor $\zeta(z)$ félinvariánsai $\Lambda_j(z)$-k is léteznek az m-edikig bezárólag:

$$\Lambda_j(z) = (-i)^j \left[\frac{d^j \log \Phi(z, \omega)}{d\omega^j}\right]_{\omega=0} \qquad (j = 1, 2, \ldots, m) \tag{54}$$

és ezekre fennáll

$$\Lambda_j(z) = \int_0^z \lambda_j(z)\, dz \qquad (j = 1, 2, \ldots, m). \tag{55}$$

Ugyanis ekkor

$$\log \psi(z, \omega) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\lambda_j(z)}{j!} (i\omega)^j + 0(\omega^m) \tag{56}$$

és innen (46) segítségével adódik (55).

7. §. *A $G(u, x)$ és $G^*(x)$ eloszlásfüggvények meghatározása*

Tekintsük $\zeta(u, z)$ valószínűségi függvényt. Mivel u rögzített, célszerű lesz az események sűrűségét $p(z) = \lambda(u - z)$ függvénnyel jelölni. Ekkor ha ismerjük $\zeta(u, z)$ valószínűségi változó eloszlásfüggvényét $P(\zeta(u, z) \leqq x) = F(z, x)$-et úgy egyszerűen megkapható $G(u, x)$ és $G^*(x)$. Ugyanis fennáll, hogy $G(u, x) = F(u, x)$, ha $p(z) = \lambda(u - z)$ és $G^*(x) = \lim\limits_{z\to\infty} F(z, x)$, ha $p(z) \equiv \lambda$.

Most a következő tételt bizonyítjuk be:

3. TÉTEL: $F(z, x)$ *karakterisztikus függvényére* $\Phi(z, \omega)$*-ra fennáll, hogy*

$$\log \Phi(z, \omega) = -\int_0^z p(v)[1 - \varphi(v, \omega)]\, dv, \tag{57}$$

ahol

(58) $$\varphi(z,\omega)=\int_0^\infty e^{i\omega f(z,x)}\,dH(x).$$

BIZONYÍTÁS: Jelöljük $\zeta(u,z+\Delta z)-\zeta(u,z)$ karakterisztikus függvényét $\psi_{\Delta z}(z,\omega)$-val, azaz $\psi_{\Delta z}(z,\omega)=M\{e^{i\omega[\zeta(u,z+\Delta z)-\zeta(u,z)]}\}$. Erre fennáll, hogy

(59) $$\psi_{\Delta z}(z,\omega)=(1-p(z)\Delta z)+p(z)\Delta z\int_0^\infty e^{i\omega f(z,x)}dH(x)+o(\Delta z).$$

Ugyanis $\zeta(u,z)$ a $(z,z+\Delta z)$ közben nem szenved változást, ha ezen közben nem fordul elő esemény, aminek a valószínűsége $1-p(z)\Delta z+o(\Delta z)$ és ekkor $\zeta(u,z+\Delta z)-\zeta(u,z)=0$ vagy változást szenved, aminek a valószínűsége $p(z)\Delta z+o(\Delta z)$ és ha $\zeta(u,z+\Delta z)-\zeta(u,z)=f(z,y)$, ahol $y\leqq x$ úgy ennek a valószínűsége $H(x)$.

Így nyerjük (59) egyenletet.

(58) jelölés bevezetésével (59) a következő alakban írható

(60) $$\psi_{\Delta z}(z,\omega)=(1-p(z)\Delta z)+p(z)\Delta z\,\varphi(z,\omega)+o(\Delta z)$$

és innen

(61) $$\log\psi(z,\omega)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\log\psi_{\Delta z}(z,\omega)}{\Delta z}=-p(z)\,[1-\varphi(z,\omega)].$$

Így $\zeta(u,z)$-re alkalmazhatjuk segédtételünket. Ugyanis $\zeta(u,z)$ az 1. és 2. feltételt nyilvánvalóan kielégíti. Most megmutattuk, hogy a 3. feltételt is kielégíti. Ha (58) integrál létezik, úgy (57) is létezik és ezzel tételünket igazoltuk.

További kérdés, hogy mikor létezik $\lim\limits_{z\to\infty}F(z,x)=F(x)$ határeloszlás-függvény. Most feltesszük, hogy $\lambda(u)\equiv\lambda$ állandó. Erre vonatkozóan a következő tételt bizonyítjuk be.

4. TÉTEL. *Ha a következő kettős integrál létezik és véges*

(62) $$\int_0^\infty\left[\int_0^\infty|f(z,x)|\,dH(x)\right]dz$$

úgy $\lambda(u)\equiv\lambda$ esetén létezik $\lim\limits_{z\to\infty}F(z,x)=F(x)$ határeloszlásfüggvény és ennek karakterisztikus függvényére $\Phi(\omega)$-ra fennáll, hogy:

(63) $$\log\Phi(\omega)=-\lambda\int_0^\infty[1-\varphi(z,\omega)]dz.$$

BIZONYÍTÁS: Hivatkozva LÉVY—CRAMÉR említett tételére, elegendő kimutatni, hogy létezik

(64) $$\lim_{z\to\infty}\int_0^z[1-\varphi(v,\omega)]dv$$

határérték és az $\omega=0$ helyen folytonos.

Legyen

$$M(v) = \int_0^\infty |f(v, x)| dH(x) \tag{65}$$

úgy fennáll

$$|1 - \varphi(v, \omega)| \leqq |\omega| M(v) \tag{66}$$

és így

$$\left| \int_0^z [1 - \varphi(v, \omega)] dv \right| \leqq |\omega| \int_0^z M(v) dv. \tag{67}$$

Innen látszik, hogy ha (62) létezik, úgy (64) minden véges ω esetén létezik és az $\omega = 0$ helyen folytonos.

Jelöljük most $G(u, x)$ karakterisztikus függvényét $\Psi(u, \omega)$-val, azaz

$$\Psi(u, \omega) = \int_{-\infty}^\infty e^{i\omega x} d_x G(u, x) \tag{68}$$

és $G^*(x)$ karakterisztikus függvényét $\Psi^*(\omega)$-val azaz

$$\Psi^*(\omega) = \int_{-\infty}^\infty e^{i\omega x} dG^*(x), \tag{69}$$

úgy fennáll

$$\log \Psi(u, \omega) = -\int_0^u \lambda(u - z) [1 - \varphi(\omega, z)] dz, \tag{70}$$

amennyiben (58) *minden z-re létezik és*

$$\log \Psi^*(\omega) = -\lambda \int_0^\infty [1 - \varphi(\omega, z)] dz, \tag{71}$$

amennyiben (62) *létezik és véges.*

1. MEGJEGYZÉS: Ha $f(z, \chi) = \chi e^{-\alpha z}$ választással élünk és feltesszük, hogy χ várható értéke véges, úgy a fentiek a 3. fejezet eredményeit szolgáltatják.

2. MEGJEGYZÉS: Jelöljük $G(u, x)$ eloszlásfüggvény j-edik félinvariánsát $\Lambda_j(u)$-val, azaz legyen

$$\Lambda_j(u) = (-i)^j \left[\frac{d^j \log \Psi(u, \omega)}{d\omega^j} \right]_{\omega = 0} \qquad (j = 1, 2, \ldots). \tag{72}$$

Segédtételünk alapján kimondhatjuk, hogy ha

$$\lambda_j(z) = \lambda(u - z) \int_0^\infty [f(z, x)]^j dH(x) \tag{73}$$

létezik és $(0, u)$ intervallumban integrálható úgy $\Lambda_j(u)$ is létezik és fennáll:

$$\Lambda_j(u) = \int_0^u \lambda_j(z) dz. \tag{74}$$

Ha speciálisan $f(z,\chi)=\chi f(z)$ és χ j-edik momentuma létezik és ez

(75) $$M_j=\int_0^\infty x^j dH(x),$$

úgy

(76) $$\Lambda_j(u)=M_j\int_0^u \lambda(u-z)\,[f(z)]^j dz.$$

Ha $G^*(x)$ eloszlásfüggvény j-edik félinvariánsát Λ_j-vel jelöljük és ez létezik, úgy fennáll:

(77) $$\Lambda_j=\lambda\int_0^\infty\Big[\int_0^\infty (f(z,x))^j dH(x)\Big]dz$$

és $f(z,\chi)=\chi f(z)$ speciális esetben

(78) $$\Lambda_j=\lambda M_j\int_0^\infty [f(z)]^j dz.$$

Ez a fizikai irodalomban jólismert CAMPBELL-formula. Megjegyezzük, hogy az eredeti CAMPBELL-formula, mely csupán az átlagra és szórásra vonatkozott, idők folyamán nagymértékben általánosítva lett E. N. ROWLAND, A. JA. HINCSIN, S. O. RICE és mások által.

3. MEGJEGYZÉS: A fentiekből következik, hogy $\eta^*(u)$ átlagértéke:

(79) $$M\{\eta^*(u)\}=\lambda\int_0^\infty\Big[\int_0^\infty f(z,x)dH(x)\Big]dz$$

feltéve, hogy az integrál létezik. Ugyanis $\eta^*(u)$ átlagértéke megegyezik az első félinvariánssal.

$\eta^*(u)$ szórásnégyzete

(80) $$D^2\{\eta^*(u)\}=\lambda\int_0^\infty\Big[\int_0^\infty (f(z,x))^2 dH(x)\Big]dz$$

feltéve, hogy ez az integrál létezik. Ugyanis $\eta^*(u)$ szórásnégyzete $D^2\{\eta^*(u)\}= =M\{\eta^{*2}(u)\}-M^2\{\eta^*(u)\}$ megegyezik a második félinvariánssal.

8. §. Az $\eta^*(u)$ folyamat harmonikus analízise.

Megmutatható, hogy ha

(81) $$\int_0^\infty\Big|f(z,x)dH(x)\Big|dz$$

integrál létezik, úgy $\eta^*(u)$ *egy szűkebb értelemben stacionárius folyamatot* definiál. Nekünk azonban erre nem lesz szükségünk, hanem csak arra, hogy az $\eta^*(u)$ folyamat *tágabb értelemben stacionárius*, azaz $\eta^*(u)$ átlaga és szórása állandó és korrelációs függvénye nem függ u-tól.

Mint az előző fejezetben láttuk, fennáll

$$M\{\eta^*(u)\}=\lambda\int_0^\infty\left[\int_0^\infty f(z,x)\,dH(x)\right]dz=m \tag{82}$$

és

$$D^2\{\eta^*(u)\}=\lambda\int_0^\infty\left[\int_0^\infty (f(z,x))^2\,dH(x)\right]dz=\sigma^2 \tag{83}$$

feltéve, hogy ezen integrálok léteznek. Ezek a mennyiségek u-tól független állandók, amelyeket ezért m illetve σ^2-tel jelölünk.

Definiáljuk $\eta^*(u)$ korrelációs függvényét a szokott módon:

$$R(\tau)=\frac{M\{\eta^*(u)\,\eta^*(u-\tau)\}-m^2}{\sigma^2}. \tag{84}$$

Ennek meghatározására a következő tételt bizonyítjuk be:

5. TÉTEL: *A fent definiált $\eta^*(u)$ stacionárius sztochasztikus folyamat korrelációs függvényére fennáll, hogy*

$$R(\tau)=\frac{\lambda}{\sigma^2}\int_0^\infty\left[\int_0^\infty f(u,x)f(u-\tau,x)\,dH(x)\right]du \tag{85}$$

és $R(\tau)$ τ-nak páros függvénye.

BIZONYÍTÁS: Tekintsük $\theta(u)=\eta^*(u)+\eta^*(u-\tau)$ folyamatot. Ez a folyamat szintén stacionárius és csupán abban különbözik az előzőtől, hogy $f(u,\chi)$ helyett $f(u,\chi)+f(u-\tau,\chi)$ szolgáltatja az $u=0$ időpontban kezdődött jel időbeli lefolyását. Erre nézve fennáll

$$\begin{aligned}D^2\{\theta(u)\}&=\lambda\int_0^\infty\left[\int_0^\infty (f(u,x)+f(u-\tau,x))^2\,dH(x)\right]du=2\sigma^2+\\&+2\lambda\int_0^\infty\left[\int_0^\infty f(u,x)f(u-\tau,x)\,dH(x)\right]du\end{aligned} \tag{86}$$

Másrészt pedig általánosan érvényes, hogy ξ_1 és ξ_2 valószínűségi változók összegének szórásnégyzete

$$D^2\{\xi_1+\xi_2\}=\sigma_1^2+2R\sigma_1\sigma_2+\sigma_2^2, \tag{87}$$

ahol σ_1^2, illetve σ_2^2 jelenti ξ_1, illetve ξ_2 szórásnégyzetét és R jelenti ξ_1 és ξ_2 korrelációs koefficiensét. $\xi_1=\eta^*(u)$ és $\xi_2=\eta^*(u-\tau)$ választással azt nyerjük, hogy

$$D^2\{\theta(u)\}=2\sigma^2+2\sigma^2R(\tau). \tag{88}$$

(86) és (88) összehasonlításából adódik (85).

Stacionárius sztochasztikus folyamatokra A. JA. HINCSIN [13] BOCHNER tételére hivatkozva bebizonyítja, hogy annak a szükséges és elegendő feltétele, hogy $R(\tau)$ egy stacionárius folyamat korrelációs függvénye legyen, az, hogy előállítható legyen a következő alakban:

$$R(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}\cos\tau\omega\, dF(\omega), \tag{89}$$

ahol $F(\omega)$ egy valószínűségi eloszlásfüggvény. $F(\omega)$-át a processzus spektrális függvényének nevezzük.

A fizikában egy ilyen sztochasztikus processzus spektrális függvénye alatt:

$$G(\omega)=m^2+\sigma^2[F(\omega)-F(-\omega)] \tag{90}$$

függvényt értik, melynek szemléletes jelentése a következő: Ha $\eta^*(u)$-t áramnak tekintjük, melyet egységnyi ellenálláson vezetünk keresztül, úgy a leadott átlagos teljesítmény

$$\lim_{T\to\infty} M\left\{\frac{1}{T}\int_0^T[\eta^*(u)]^2du\right\}=M\{[\eta^*(u)]^2\}=m^2+\sigma^2 \tag{91}$$

és ennek a teljesítménynek a $0\leqq\omega<\infty$ frekvenciákra való eloszlását szolgáltatja $G(\omega)$, amely a $(0,\omega)$ frekvenciasávban leadott teljesítményt adja. Itt ω körfrekvenciát jelent, azaz $\omega=2\pi f$, ahol f a közönséges frekvenciát jelöli.

Ezután $F(\omega)$ meghatározásával fogunk foglalkozni.

Tegyük fel, hogy $f(u,x)$ minden véges x értékekre abszolút és négyzetesen integrálható függvény, azaz

$$\int_0^{\infty}|f(u,x)|^p du<\infty \quad (p=1,2). \tag{92}$$

Ekkor mint ismeretes, $f(u,x)$ előállítható Fourier-integrál alakjában. Legyen

$$f(u,x)=\int_{-\infty}^{\infty}A(\omega,x)e^{i\omega u}d\omega, \tag{93}$$

ahol

$$A(\omega,x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}f(u,x)e^{-i\omega u}du. \tag{94}$$

A fizikai irodalomban $2|A(\omega,x)|$-et tekintik $f(u,x)$ spektrális előállításban az ω frekvenciájú komponens amplitudó-sűrűségfüggvényének.

Ebben az esetben PLANCHEREL tételéből következik, hogy

$$\int_0^{\infty}[f(u,x)]^2du=4\pi\int_0^{\infty}|A(\omega,x)|^2d\omega. \tag{95}$$

Ha $f(u,x)$ négyzetesen integrálható, úgy $f(u,x)+f(u-\tau,x)$ is négyzetesen integrálható és akkor erre alkalmazva PLANCHEREL tételét, egyszerűen adódik, hogy fennáll

$$\int_0^{\infty}[f(u,x)+f(u-\tau,x)]^2du=4\pi\int_0^{\infty}|A(\omega,x)|^2(2+2\cos\omega\tau)d\omega. \tag{96}$$

Innen (95) tekintetbevételével következik, hogy

$$(97) \qquad \int_0^\infty [f(u,x)f(u-\tau,x)]\,du = 4\pi \int_0^\infty |A(\omega,x)|^2 \cos\omega\tau\,d\omega.$$

Képezzük mindkét oldal Stieltjes integrálját $H(x)$-szerint

$$(98) \qquad \int_0^\infty\Big[\int_0^\infty f(u,x)f(u-\tau,x)\,du\Big]dH(x) = 4\pi\int_0^\infty\Big[\int_0^\infty |A(\omega,x)|^2\cos\omega\tau\,d\omega\Big]dH(x).$$

Ha feltételezzük, hogy a (85) alatti korrelációs függvény $\tau=0$-ra létezik, úgy ezek az integrálok is léteznek és egyszerűen belátható, hogy az integráció sorrendje felcserélhető. Így

$$(99) \qquad \begin{aligned} R(\tau) &= \frac{\lambda}{\sigma^2}\int_0^\infty\Big[\int_0^\infty f(u,x)f(u-\tau,x)\,dH(x)\Big]du = \\ &= \frac{4\omega\lambda}{\sigma^2}\int_0^\infty\Big[\int_0^\infty |A(\omega,x)|^2\,dH(x)\Big]\cos\omega\tau\,d\omega. \end{aligned}$$

Ez az előállítás azt is mutatja, hogy a HINCSIN-féle (89)-es előállításban szereplő $F(\omega)$ függvény ω-szerint differenciálható, $F'(\omega)$, ω-nak páros függvénye éspedig

$$(100) \qquad F'(\omega) = \frac{2\pi\lambda}{\sigma^2}\int_0^\infty |A(\omega,x)|^2\,dH(x).$$

Ez az előállítás valamennyi ω-ra érvényes, mivel $|A(\omega,x)|$, ω-nak páros függvénye.

Megjegyezzük, hogy G. PÓLYA [14] karakterisztikus függvényekről szóló munkájában kimondott tétel szerint, ha $R(\tau)$-ról feltesszük, hogy $\tau>0$-ra konvex, úgy következik, hogy a HINCSIN-féle (89)-es előállításban szereplő $F(\omega)$ eloszlásfüggvény $\omega \neq 0$-ra minden esetre differenciálható és differenciálhányadosa ω-nak páros függvénye.

Kimondhatjuk tehát a következő tételt:

6. TÉTEL. *Tekintsük a fent definiált $\eta^*(u)$ sztochasztikus folyamatot, melyről feltételezzük, hogy a* (85) *alatti korrelációs függvénye létezik. Tegyük fel továbbá, hogy $f(u,x)$ a tekintetbe jövő x értékekre abszolút és négyzetesen integrálható, ekkor $R(\tau)$ korrelációs függvény Hincsin-féle* (89) *előállításában szereplő $F(\omega)$ eloszlásfüggvény ω szerint differenciálható és fennáll:*

$$(101) \qquad F'(\omega) = \frac{2\pi\lambda}{\sigma^2}\int_0^\infty |A(\omega,x)|^2\,dH(x).$$

A fent említett $0 \leqq \omega < \infty$-ra értelmezett $G(\omega)$ spektrális eloszlás összetevődik egy $\omega = 0$ helyen lévő m^2 nagyságú ugrásból és egy folytonos szakaszból, melynek sűrűségfüggvénye

(102) $$G'(\omega) = 4\pi\lambda \int_0^\infty |A(\omega, x)|^2 dH(x).$$

MEGJEGYZÉS: Ha $f(u, \chi) = \chi f(u)$ és $f(u)$ Fourier-transzformáltja

(103) $$A(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty f(u) e^{-iu\omega} du,$$

továbbá

(104) $$M_2 = \int_0^\infty x^2 dH(x),$$

úgy $A(\omega, x) = xA(\omega)$ és

(105) $$G'(\omega) = 4\pi\lambda M_2 |A(\omega)|^2$$

és (85) alapján

(106) $$R(\tau) = \frac{\lambda M_2}{\sigma^2} \int_0^\infty f(u) f(u-\tau) du,$$

ahol

(107) $$\sigma^2 = \lambda M_2 \int_0^\infty [f(u)]^2 du.$$

9. §. *Példák*

Ebben a fejezetben csupán $\eta^*(u)$ folyamattal fogunk foglalkozni és feltesszük, hogy $f(u, \chi) = \chi e^{-\alpha u}$, ahol χ eloszlásfüggvénye $H(x)$. Ezt a folyamatot elektronsokszorozókkal történő részecskeszámlálásra alkalmazzuk.

Most λ jelenti az elektronsokszorozó katódjához érkező korpuszkulák időbeli sűrűségét. χ jelenti az egyes elektronok által létrehozott feszültséglökések amplitudóit. $\alpha = 1/RC$, ahol RC az észlelő berendezés időállandója. Ha az erősítő küszöbfeszültsége: a úgy a látszólagos esemény sűrűség:

(108) $$\lambda'(a) = \lambda K^*(a),$$

ahol $K^*(a)$ Fourier—Stieltjes transzformáltja

(109) $$R(\omega) = \int_0^\infty e^{i\omega a} dK^*(a) = [1 - \varphi(\omega)] \Phi^*(\omega)$$

és itt

(110) $$\varphi(\omega) = \int_0^\infty e^{i\omega x} dH(x)$$

és

$$(111)\qquad \Phi^*(\omega)=\int_0^\infty e^{i\omega x}\,dG^*(x)=\exp\left\{-\frac{\lambda}{\alpha}\int_0^1\frac{1-\varphi(\omega v)}{v}\,dv\right\}.$$

$G^*(x)$ és $K^*(a)$ ismeretében könnyen meghatározható $\tau^*(t,a), m^*(t,a)$ és $\vartheta^*(a)$ is (33), (39) és (43) formulák segítségével.

1. ÉSZLELÉSI PROBLÉMA. Legyen χ valószínűségi változó exponenciális eloszlású, azaz $H(x)=1-e^{-x/\mu}(x\geqq 0)$, ahol $\mu=M\{\chi\}$ pozitív állandó. Ekkor

$$(112)\qquad \varphi(\omega)=(1-i\omega\mu)^{-1}$$

és innen (111) szerint

$$(113)\qquad \Phi^*(\omega)=(1-i\omega\mu)^{-\lambda/\alpha}$$

és (109) szerint

$$(114)\qquad R(\omega)=(1-i\omega\mu)^{-\frac{\lambda}{\alpha}}-(1-i\omega\mu)^{-\frac{\lambda}{\alpha}-1}.$$

Ezek segítségével

$$(115)\qquad G^*(x)=\int_0^x e^{-y/\mu}\frac{(y/\mu)^{\frac{\lambda}{\alpha}-1}}{\Gamma\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)}\frac{dy}{\mu}$$

és

$$(116)\qquad K^*(a)=\frac{e^{-a/\mu}(a/\mu)^{\frac{\lambda}{\alpha}}}{\Gamma\left(\frac{\lambda}{\alpha}+1\right)},$$

ahonnan

$$(117)\qquad m(t)=\lambda t\,\frac{e^{-a/\mu}(a/\mu)^{\frac{\lambda}{\alpha}}}{\Gamma\left(\frac{\lambda}{\alpha}+1\right)},$$

$$(118)\qquad \tau(t)=\frac{t}{\Gamma\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)}\int_{a/\mu}^\infty e^{-y}y^{\frac{\lambda}{\alpha}-1}\,dy,$$

$$(119)\qquad \vartheta(a)=\alpha\,\frac{\int_{a/\mu}^\infty e^{-y}y^{\frac{\lambda}{\alpha}-1}\,dy}{e^{-a/\mu}(a/\mu)^{\frac{\lambda}{\alpha}}}.$$

Az itt szereplő nem teljes és teljes gammafüggvények hányadosára táblázatok találhatók K. PEARSON [15] könyvében.

Most a látszólagos eseménysűrűség a küszöbfeszültség mellett

(120) $$\lambda'(a) = \lambda e^{-a/\mu} \frac{(a/\mu)^{\frac{\lambda}{\alpha}}}{\Gamma\left(1+\frac{\lambda}{\alpha}\right)}.$$

Itt μ jelenti egy jel átlagos amplitudóját és $\lambda'(a)$ akkor lesz maximális, ha $a = \frac{\lambda\mu}{\alpha}$. Legyen speciálisan $\lambda/\alpha = 0{,}25$ (például $\lambda = 10^5\ \mathrm{sec}^{-1}$ és $\alpha = 4.10^5\ \mathrm{sec}^{-1}$ azaz $RC = 2{,}5 \cdot 10^{-6}$ sec) úgy $a = z\mu$ jelöléssel a következő táblázatot állíthatjuk össze:

z	λ'/λ	z	λ'/λ	z	λ'/λ	z	λ'/λ
0,00	0,0000	0,50	0,5627	1,00	0,4059	1,50	0,2724
0,05	0,4963	0,55	0,5482	1,05	0,3908	1,55	0,2613
0,10	0,5614	0,60	0,5329	1,10	0,3761	1,60	0,2505
0,15	0,5910	0,65	0,5171	1,15	0,3618	1,65	0,2401
0,20	0,6041	0,70	0,5011	1,20	0,3478	1,70	0,2301
0,25	0,6076	0,75	0,4850	1,25	0,3342	1,75	0,2205
0,30	0,6049	0,80	0,4688	1,30	0,3211	1,80	0,2112
0,35	0,5980	0,85	0,4528	1,35	0,3083	1,85	0,2023
0,40	0,5881	0,90	0,4369	1,40	0,2959	1,90	0,1937
0,45	0,5762	0,95	0,4212	1,45	0,2840	1,95	0,1855

2. Koincidencia probléma.

a) Véletlen koincidenciák. Legyen ismét χ eloszlásfüggvénye: $H(x) = 1 - e^{-x/\mu}(x \geqq 0)$. Most számláljunk két λ sűrűséggel érkező korpuszkula processzust két ugyanolyan elektronsokszorozóval. Ekkor a küszöbfeszültség mellett a koincidenciák látszólagos sűrűsége (120)-ból, abban λ helyére 2λ-t téve

(121) $$\lambda_k'(a) = 2\lambda e^{-a/\mu} \frac{(a/\mu)^{\frac{2\lambda}{\alpha}}}{\Gamma\left(1+\frac{2\lambda}{\alpha}\right)}.$$

Ennek maximuma: $a_{\max} = 2\lambda\mu/\alpha$-nál van. Legyen $\lambda/\alpha = 0{,}25$ mint az előző példában és $z = a/\mu$ úgy

z	λ_k'/λ	z	λ_k'/λ	z	λ_k'/λ	z	λ_k'/λ	z	λ_k'/λ
0,000	0,0000	0,05	0,4800	0,55	0,9656	1,05	0,8092	1,55	0,5963
0,001	0,0713	0,10	0,6457	0,60	0,9594	1,10	0,7879	1,60	0,5763
0,002	0,1007	0,15	0,7523	0,65	0,9498	1,15	0,7663	1,65	0,5567
0,003	0,1232	0,20	0,8263	0,70	0,9376	1,20	0,7446	1,70	0,5375
0,004	0,1422	0,25	0,8788	0,75	0,9232	1,25	0,7229	1,75	0,5188
0,005	0,1588	0,30	0,9157	0,80	0,9070	1,30	0,7013	1,80	0,5005
0,010	0,2234	0,35	0,9408	0,85	0,8893	1,35	0,6798	1,85	0,4826
0,020	0,3128	0,40	0,9567	0,90	0,8704	1,40	0,6585	1,90	0,4653
0,030	0,3793	0,45	0,9653	0,95	0,8507	1,45	0,6374	1,95	0,4484
0,040	0,4337	0,50	0,9679	1,00	0,8302	1,50	0,6167	2,00	0,4319

b) Műkoincidenciák. Az előző eredményt azzal a feltevéssel nyertük, hogy az elektronsokszorozók katódjaira érkező korpuszkulák függetlenek egymástól. Most tegyük fel, hogy a két processzus között teljes kapcsolat van; azaz mindkét elektronsokszorozó katódjára eső korpuszkulák pontosan egyidőben érkeznek. Kérdés, mennyi lesz ekkor a látszólagos koincidenciák sűrűsége. Ez a két folyamat visszavezethető egyetlen olyan folyamatra, melyben az események sűrűsége λ és a jelek amplitudóinak eloszlásfüggvénye az előző $1-e^{-x/\mu}(x\geqq 0)$ eloszlás önmagával való kompozíciója, azaz

$$H(x)=1-\left(1+\frac{x}{\mu}\right)e^{-x/\mu} \quad \text{ha} \quad x\geqq 0. \tag{122}$$

Ekkor

$$\varphi(\omega)=(1-i\omega\mu)^{-2} \tag{123}$$

és

$$\log \Phi^*(\omega)=-\frac{\lambda}{\alpha}\int_0^1 \frac{1-\varphi(\omega v)}{v}\,dv=\frac{\lambda}{\alpha}\left[\frac{i\omega\mu}{1-i\omega\mu}-\log(1-i\omega\mu)\right] \tag{124}$$

azaz

$$\Phi^*(\omega)=(1-i\omega\mu)^{-\frac{\lambda}{\alpha}}e^{\frac{\lambda}{\alpha}\frac{i\omega\mu}{1-i\omega\mu}}=e^{-\frac{\lambda}{\alpha}}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(\lambda/\alpha)^j}{j!}(1-i\omega\mu)^{-\frac{\lambda}{\alpha}-j} \tag{125}$$

és

$$R(\omega)=-i\omega\mu\sum_{j=0}^{\infty}\frac{e^{-\frac{\lambda}{\alpha}}(\lambda/\alpha)^j}{j!}\left[(1-i\omega\mu)^{-\frac{\lambda}{\alpha}-1-j}+(1-i\omega\mu)^{-\frac{\lambda}{\alpha}-2-j}\right], \tag{126}$$

ahonnan

$$G^*(x)=\sum_{j=0}^{\infty}e^{-\lambda/\alpha}\frac{(\lambda/\alpha)^j}{j!}\int_0^x e^{-y/\mu}\frac{(y/\mu)^{\frac{\lambda}{\alpha}+j-1}}{\Gamma\left(\frac{\lambda}{\alpha}+j\right)}\frac{dy}{\mu} \tag{127}$$

és

$$K^*(a)=\sum_{j=0}^{\infty}e^{-\lambda/\alpha}\frac{(\lambda/\alpha)^j}{j!}\left[e^{-a/\mu}\frac{(a/\mu)^{\frac{\lambda}{\alpha}+j}}{\Gamma\left(\frac{\lambda}{\alpha}+1+j\right)}+e^{-a/\mu}\frac{(a/\mu)^{\frac{\lambda}{\alpha}+j+1}}{\Gamma\left(\frac{\lambda}{\alpha}+2+j\right)}\right]. \tag{128}$$

A Bessel-függvény definíciója szerint

$$J_\varrho(ix)=\left(\frac{ix}{2}\right)^\varrho\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(x/2)^{2\nu}}{\nu!\,\Gamma(\nu+\varrho+1)} \tag{129}$$

és ennek segítségével

$$K^*(a)=e^{-\left(\frac{\lambda}{\alpha}+\frac{a}{\mu}\right)}(a/\mu)^{\lambda/\alpha}\left[\frac{J_{\frac{\lambda}{\alpha}}\left(i2\sqrt{\frac{\lambda a}{\alpha\mu}}\right)}{\left(i\sqrt{\frac{\lambda a}{\alpha\mu}}\right)^{\lambda/\alpha}}+\frac{a}{\mu}\frac{J_{\frac{\lambda}{\alpha}+1}\left(i2\sqrt{\frac{\lambda a}{\alpha\mu}}\right)}{\left(i\sqrt{\frac{\lambda a}{\alpha\mu}}\right)^{\lambda/\alpha}}\right]. \tag{130}$$

Ha $\lambda/\alpha = n$ egész szám, úgy $K^*(a)$ kiszámítása visszavezethető Poisson-eloszlást mutató valószínűségi változók különbségének az eloszlásfüggvényének meghatározására éspedig

$$K^*(a) = P(\xi_1 - \xi_2 = n) + P(\xi_1 - \xi_2 = n+1), \tag{131}$$

ahol

$$P(\xi_1 = k) = \frac{e^{-\frac{a}{\mu}}(a/\mu)^k}{k!} \tag{132}$$

és

$$P(\xi_2 = k) = \frac{e^{-n} n^k}{k!}. \tag{133}$$

Poisson-eloszlásra jó táblázat található E. C. MOLINA [16] könnyvében.

Ekkor a koincidenciák látszólagos sűrűsége:

$$\lambda_k''(a) = \lambda K^*(a), \tag{134}$$

ahol $K^*(a)$-t (130) szolgáltatja. Legyen mint előbb $\lambda/\alpha = 0{,}25$ és $z = a/\mu$, úgy:

z	λ_k''/λ	z	λ_k''/λ	z	λ_k''/λ	z	λ_k''/λ	z	λ_k''/λ
0,000	0,0000	0,05	0,4059	0,55	0,6749	1,05	0,6588	1,55	0,5707
0,001	0,1528	0,10	0,4814	0,60	0,6793	1,10	0,6520	1,60	0,5603
0,002	0,1817	0,15	0,5303	0,65	0,6820	1,15	0,6446	1,65	0,5497
0,003	0,2011	0,20	0,5664	0,70	0,6831	1,20	0,6367	1,70	0,5391
0,004	0,2161	0,25	0,5944	0,75	0,6828	1,25	0,6283	1,75	0,5284
0,005	0,2285	0,30	0,6167	0,80	0,6813	1,30	0,6194	1,80	0,5176
0,010	0,2717	0,35	0,6345	0,85	0,6786	1,35	0,6102	1,85	0,5068
0,020	0,3231	0,40	0,6487	0,90	0,6750	1,40	0,6007	1,90	0,4960
0,030	0,3575	0,45	0,6599	0,95	0,6704	1,45	0,5909	1,95	0,4852
0,040	0,3840	0,50	0,6685	1,00	0,6650	1,50	0,5809	2,00	0,4744

Az 1. ábrán feltüntettük λ_k'/λ, λ_k''/λ és $(\lambda_k' - \lambda_k'')/\lambda$ mennyiségeket $z = a/\mu$ függvényében. Ha azt akarjuk megvizsgálni, hogy két elektronsokszorozó katódjára eső korpuszkulák érkezési idejei között van-e kapcsolat vagy nincs, úgy mivel mint láttuk függetlenség esetén $\lambda_k'(a)$ volt a véletlen koincidenciák látszólagos sűrűsége és teljes kapcsolat esetén $\lambda_k''(a)$, tehát célszerű a-t úgy megválasztani, hogy $|\lambda_k'(a) - \lambda_k''(a)|$ maximum legyen.

3. Észlelési probléma. Legyen $H(x)$ n-indexhez tartozó gamma-eloszlás, azaz $1 - e^{-x/\mu}$ $(x \geqq 0)$ exponenciális eloszlás önmagával való n-szeres kompozíciója, azaz

$$H(x) = \int_0^x e^{-y/\mu} \frac{(y/\mu)^{n-1}}{(n-1)!} \frac{dy}{\mu} = 1 - \sum_{j=0}^{n-1} e^{-x/\mu} \frac{(x/\mu)^j}{j!}, \tag{135}$$

úgy

$$\varphi(\omega) = (1 - i\omega\mu)^{-n} \tag{136}$$

és

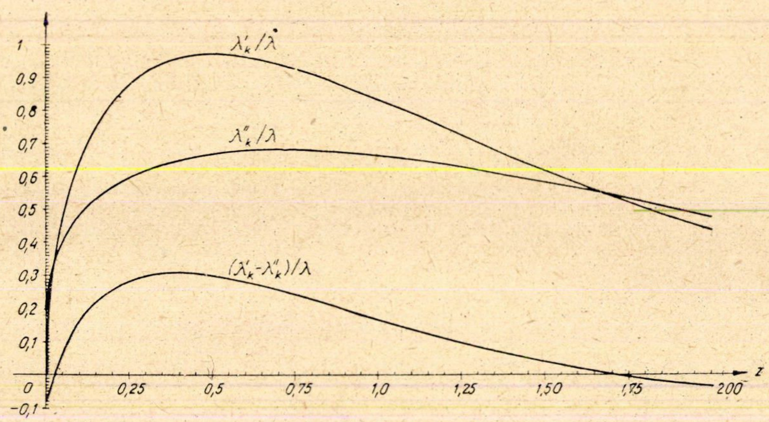
(137)
$$\log \Phi^*(\omega) = -\frac{\lambda}{\alpha}\int_0^1 \frac{1-\varphi(\omega v)}{v}\,dv =$$
$$= -\frac{\lambda}{\alpha}\left[\log(1-i\omega\mu)+(n-1)-\sum_{j=1}^{n-1}(1-i\omega\mu)^{-j}\right]$$

azaz

(138)
$$\Phi^*(\omega) = e^{-\frac{\lambda}{\alpha}(n-1)}(1-i\omega\mu)^{-\frac{\lambda}{\alpha}} e^{\frac{\lambda}{\alpha}\sum_{j=1}^{n-1}(1-i\omega\mu)^{-j}} =$$
$$= e^{-\frac{\lambda}{\alpha}(n-1)} \sum_{l=0}^{\infty} C_l (1-i\omega\mu)^{-l-\frac{\lambda}{\alpha}},$$

ahol

(139)
$$C_l = \sum_{\nu_1+2\nu_2+\dots+(n-1)\nu_{n-1}=l} \frac{1}{\nu_1!\,\nu_2!\cdots\nu_{n-1}!}\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)^{\nu_1+\nu_2+\dots+\nu_{n-1}}.$$



1. ábra

Ekkor

(140)
$$G^*(x) = e^{-\frac{\lambda}{\alpha}(n-1)} \sum_{l=0}^{\infty} C_l \int_0^x e^{-y/\mu} \frac{(y/\mu)^{\frac{\lambda}{\alpha}+l-1}}{\Gamma\left(\frac{\lambda}{\alpha}+l\right)} \frac{dy}{\mu}.$$

Továbbá

(141)
$$R(\omega) = [1-\varphi(\omega)]\,\Phi^*(\omega) =$$
$$= -i\omega\mu\left[(1-i\omega\mu)^{-1}+\dots+(1-i\omega\mu)^{-n}\right]\Phi^*(\omega) =$$
$$= -i\omega\mu e^{-\frac{\lambda}{\alpha}(n-1)} \sum_{r=1}^{\infty} B_r (1-i\omega\mu)^{-\frac{\lambda}{\alpha}-r},$$

ahol

(142)
$$B_r = \sum_{l=r-n}^{r-1} C_l.$$

Itt $l \geqq 0$-ra C_l-et (142) definiálja és $l<0$-ra $C_l=0$. Ennek segítségével

$$K^*(a)=e^{-\frac{\lambda}{\alpha}(n-1)}\sum_{r=1}^{\infty} B_r e^{-\frac{a}{\mu}} \frac{(a\,\mu)^{\frac{\lambda}{\alpha}+r+1}}{\Gamma\left(\frac{\lambda}{\alpha}+r\right)}. \tag{143}$$

$G^*(x)$ és $K^*(a)$ kiszámítására jó segítséget nyújt PEARSON [15] táblázata. Abban az esetben, ha λ/α egész szám, ezen sorok kiszámítása Poisson-eloszlásra vonatkozó táblázat segítségével végezhető el.

Az előző példánál tárgyalt koincidencia problémára teljes kapcsolat (műkoincidenciák) esetén a fenti formulák felhasználhatók, mivel két gamma-eloszlás kompozíciója ismét gamma-eloszlás.

4. $\eta^*(u)$ folyamat harmonikus analízise. Legyen $H(x)$ eloszlásfüggvény tetszőleges, amelynek első és második momentuma M_1 és M_2 véges. Ha $f(u,\chi)=\chi f(u)$, úgy (106) alapján

$$R(\tau)=e^{-\alpha|\tau|}, \tag{144}$$

függetlenül $H(x)$ eloszlásfüggvénytől.

$G(\omega)$ spektrális eloszlásnak az $\omega=0$ helyen $m^2=M_1^2/\alpha^2$ nagyságú ugrása van és $0<\omega<\infty$-ra differenciálható és differenciálhányadosa (105) szerint

$$G'(\omega)=\frac{2\lambda M_2}{\alpha^2+\omega^2}, \tag{145}$$

ugyanis

$$A(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty e^{-\alpha u}e^{-i\omega u}\,du=\frac{1}{2\pi}\,\frac{1}{\alpha+i\omega}. \tag{146}$$

Végül köszönetemet fejezem ki RÉNYI ALFRÉDnak a dolgozat átolvasásáért és számos értékes megjegyzéséért.

Magyar Tudományos Akadémia
Alkalmazott Matematikai Intézete.

IRODALOM

[1] N. Campbell: The study of discontinuous phenomena [Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, **15** (1909), 117—137].

[2] N. Campbell: Discontinuities in light emission [Proc. Camb. Phil. Soc. **15** (1909), 310—328].

[3] E. N. Rowland: The theory of the mean square variation of a function formed by adding known functions with random phases, and applications to the theories of the shot effect and of light [Proc. Camb. Phil. Soc. **32** (1936), 580—597].

[4] A. Khintchine: Theorie des abklingenden Spontaneffektes [Bull. Acad. Sci. URSS Ser. Math. **3** (1938), 312—323; Zentralblatt für Math. **19** (1939), 224].

[5] S. O. Rice: Mathematical Analysis of Random Noise [Bell. System Technical Journal. **23** (1944), 282—332; **24** (1945), 46—156].

[6] A. Rényi: On some problems concerning Poisson processes [Publicationes Mathematicae (Debrecen) **2** (1951), 66–73].

[7] A. N. Kolmogorov: Über die analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung [Math. Ann. **104** (1931), 415—458].

[8] W. Feller: On the integrodifferential equations of purely discontinuous Markoff processes [Trans. Amer. Math. Soc. **48** (1940), 488—515].

[9] W. Feller: Zur Theorie der stochastischen Processe [Math. Ann. **113** (1936), 113—160].

[10] A. Khintchine: Asymptotische Gesetze der Wahrscheinlichkeitsrechnung (Berlin (1933) 23).

[11] H. Cramér: Mathematical Methods of Statistics (Princeton, 1946).

[12] А. Н. Колмогоров и Ю. В. Прохоров: О суммах случайного числа случайных слагаемых. Усп. Матем. Наук. т IV., быш. 4, (1949) 168—172.

[13] A. Khintchine: Korrelationstheorie der stationär stochastischen Prozesse [Math. Ann. **109** (1934), 604—610].

[14] G. Pólya: Remarks on characteristic functions [Proc. of the Berkeley Symposium. 1949, 115—123].

15] K. Pearson: Tables of Incomplete Γ function (London, 1922).

[16] E. C. Molina: Poisson's Exponential Binomial Limit (New-York, 1945).

FÜGGELÉK

Bemutatta Rényi Alfréd lev. tag az 1953. június 8-án tartott felolvasó ülésen

Ebben a függelékben a dolgozat 3. tételére adunk attól eltérő elemi bizonyítást, amely egyben általánosabb is.

Tekintsünk egy általában időben nem homogén POISSON-féle sztochasztikus folyamatot $0 \leqq t < \infty$ időpontokban. Legyen $(0, t)$ időintervallumban előforduló események várható száma: $A(t)$. Feltesszük, hogy $A(0) = 0$ és $A(t)$ t-nek nem csökkenő függvénye. Ekkor mint ismeretes, annak a valószínűsége, hogy $(0, t)$ időközben pontosan n számú esemény fordul elő.

$$P(t, n) = e^{-A(t)} \frac{[A(t)]^n}{n!}. \tag{1}$$

Tegyük fel, hogy a Poisson-folyamatban előforduló minden egyes esemény elindít egy $f(u, \chi)$ időbeli lefolyású jelet, ahol χ valószínűségi változó és u jelenti a jel kezdőpontjától számított időtartamot. Legyen $f(u, \chi) \equiv 0$ ha $u < 0$. Tegyük fel, hogy az egyes jelek lineárisan összegeződnek, azaz ha a Poisson folyamatban $(0, t)$ időközben előforduló események időpontjait: $t_1, t_2, \ldots, t_n$-nel jelöljük és az események által megindított jelek véletlen paraméterei rendre $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_n$ úgy a jelek összegének értéke t időpontban:

$$\eta(t) = \sum_{k=1}^{n} f(t - t_k, \chi_k). \tag{2}$$

Feltesszük, hogy $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_n, \ldots$ független valószínűségi változók, melyek mindegyikének eloszlásfüggvénye: $P(\chi_k \leqq x) = H(x)$.

Célunk az, hogy meghatározzuk $\eta(t)$ valószínűségi változó eloszlásfüggvényét: $P(\eta(t) \leqq x) = F(t, x)$-et valamennyi t értékre. Az eloszlásfüggvény egyértelműen meghatározható a karakterisztikus függvény ismeretében, melyet jelöljünk a következőképpen:

$$\Phi(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} d_x F(t, x). \tag{3}$$

Erre vonatkozóan a következő tételt bizonyítjuk be:

3b. TÉTEL: Ha

$$\varphi(u, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega f(u, x)} dH(x) \tag{4}$$

integrál $0 \leqq u < t$ *értékekre majdnem mindenütt létezik, úgy fennáll*

$$\Phi(t, \omega) = \exp\left\{ -\int_0^t [1 - \varphi(t-u, \omega)]\, dA(u) \right\}. \tag{5}$$

BIZONYÍTÁS: Először bebizonyítjuk a következő segédtételt, amelyen a tétel bizonyítása alapszik:

LEMMA: *Azon feltétel mellett, hogy a fentemlített Poisson-folyamatban $(0, t)$ időközben pontosan n esemény fordul elő, az n számú esemény előfordulási időpontjai úgy tekinthetők, mint n számú független véletlen pont eloszlása $(0, t)$ időintervallumban, melyek mindegyikére annak a valószínűsége, hogy $(0, x)$ időintervallumba esik* $(0 \leqq x \leqq t): \Lambda(x)/\Lambda(t)$.

Legyen η_t valószínűségi változó a Poisson-folyamatban $(0, t)$ időintervallumban előforduló események száma és legyenek $0 \leqq \xi_1 \leqq \xi_2 \leqq \ldots \leqq \xi_n \leqq \ldots$ az egymást követő események időpontjai. Ekkor állításunk igazolására elegendő kimutatni, hogy $0 \leqq x_1 \leqq x_2 \leqq \ldots \leqq x_n \leqq \ldots$ értékekre fennáll a következő feltételes valószínűségeloszlás

$$P(\xi_1 \leqq x_1, \xi_2 \leqq x_2, \ldots, \xi_n \leqq x_n \mid \eta_t = n) = \tag{6}$$

$$= \sum_{j_1, \ldots, j_n} \frac{n!}{j_1! j_2! \ldots j_n!} \left[\frac{\Lambda(x_1)}{\Lambda(t)}\right]^{j_1} \left[\frac{\Lambda(x_2) - \Lambda(x_1)}{\Lambda(t)}\right]^{j_2} \ldots \left[\frac{\Lambda(x_n) - \Lambda(x_{n-1})}{\Lambda(t)}\right]^{j_n},$$

ahol az összegezés azon j értékekre terjesztendő ki, amelyekre

$$j_1 \geqq 1, j_1 + j_2 \geqq 2, \ldots, j_1 + j_2 + \cdots + j_{n-1} \geqq n - 1 \quad \text{és} \quad j_1 + j_2 + \cdots + j_n = n.$$

A jobboldal ugyanis $(0, t)$ időintervallumban az említett törvény szerint elosztott n számú független pont nagyság szerint rendezett koordinátáinak, azaz $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ n számú valószínűségi változó, együttes eloszlásfüggvényét adja.

A feltételes valószínűségek definíciója szerint

$$P(\xi_1 \leqq x_1, \xi_2 \leqq x_2, \ldots, \xi_n \leqq x_n \mid \eta_t) = \frac{P(\xi_1 \leqq x_1, \xi_2 \leqq x_2, \ldots, \xi_n \leqq x_n;\ \eta_t = n)}{P(\eta_t = n)}. \tag{7}$$

Most

$$P(\xi_1 \leqq x_1, \xi_2 \leqq x_2, \ldots, \xi_n \leqq x_n;\ \eta_t = n) = e^{-\Lambda(t)} \sum_{j_1, \ldots, j_n} \frac{[\Lambda(x_1)]^{j_1}}{j_1!} \frac{[\Lambda(x_2) - \Lambda(x_1)]^{j_2}}{j_2!} \ldots \frac{[\Lambda(x_n) - \Lambda(x_{n-1})]^{j_n}}{j_n!}, \tag{8}$$

ahol az összegezés kiterjesztendő: $j_1 \geqq 1, j_1 + j_2 \geqq 2, \ldots, j_1 + j_2 + \cdots + j_{n-1} \geqq n - 1$ és $j_1 + j_2 + \cdots + j_n = n$ értékekre. (8) jobboldala megegyezik annak a valószínűségével, hogy a Poisson-folyamatban $(0, x_1), (x_1, x_2), \ldots, (x_{n-1}, x_n), (x_n, t)$ intervallumokban rendre $j_1, j_2, \ldots, j_n, 0$ esemény fordul elő, ahol a lehetséges j értékeket az előző egyenlőtlenségek definiálják.

Mivel (1) szerint

$$P(\eta_t = n) = e^{-\Lambda(t)} \frac{[\Lambda(t)]^n}{n!}, \tag{9}$$

következőleg (8) és (9) felhasználásával (7) kifejezés jobboldala, megegyezik (6)-tal, amit bizonyítani kívántunk.

Ezután rátérünk a tétel bizonyítására. Először is megállapítjuk, hogy egy $(0, t)$ időközbe eső véletlen pontból (melynek eloszlástörvényét: $\Lambda(x)/\Lambda(t)$ szolgáltatja) mint kezdőpontból elinduló jel t időpontban mért nagyságának karakterisztikus függvénye mivel egyenlő. Ha tudjuk, hogy a jel u időpontban kezdődött, úgy ezen feltétel mellett a karakterisztikus függvény

$$\varphi(u, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega f(t-u, x)} dH(x). \tag{10}$$

Mivel u eloszlásfüggvénye $A(u) / A(t)$, ezért egy véletlen pont által elindított jel t időpontban mért nagyságának karakterisztikus függvénye a feltételes várható értékekre vonatkozó tétel felhasználásával:

$$\psi_t(\omega) = \frac{1}{A(t)} \int_0^t \varphi(t-u, \omega) dA(u). \tag{11}$$

Ha $(0, t)$ intervallumban n számú esemény fordul elő, úgy segédtételünk szerint a jelek értékeinek összege t időpontban n számú független valószínűségi változó összege, melyek mindegyikének karakterisztikus függvényét (11) szolgáltatja. Így az összeg karakterisztikus függvénye: $[\psi_t(\omega)]^n$.

Mivel n esemény bekövetkezésének valószínűségét (1) formula szolgáltatja, következőleg

$$\Phi(t, \omega) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-A(t)} \frac{[A(t)]^n}{n!} [\psi_t(\omega)]^n = e^{-A(t)[1-\psi_t(\omega)]}. \tag{12}$$

Ez megegyezik (5) formulával és éppen ezt kívántuk bizonyítani.

Magyar Tudományos Akadémia
Alkalmazott Matematikai Intézete.

ÖSSZETETT POISSON ELOSZLÁSOKRÓL, IV

(Megjegyzések az additív folyamatok elméletéhez)

PRÉKOPA ANDRÁS

Bemutatta Rényi Alfréd lev. tag az 1952. november 3-án tartott felolvasó ülésen

Bevezetés

Jelen dolgozatban a következő jelöléseket fogjuk használni. Legyen $\{\xi_t\}$ egy sztohasztikus folyamat; a $\xi_{t_2}-\xi_{t_1}$ különbségre vezessük be a következő jelölést:

$$\xi_J = \xi_{t_2}-\xi_{t_1},$$

ahol J a véges (t_1, t_2) intervallumot jelöli. Jelentse továbbá $W_\lambda(J)$ a következő valószínűséget:

$$W_\lambda(J) = \mathbf{P}(\xi_J = \lambda),$$

$F(x,J)$ pedig a ξ_J változó eloszlásfüggvényét. $F(x,J)$ karakterisztikus függvényét jelölje $f(u,J)$:

$$f(u,J) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux}\, dF(x,J).$$

A tárgyalás alapját képező folyamatot egy véges, zárt I intervallumban fogjuk tekinteni. Ebben az intervallumban $\{\xi_t\}$ tegyen eleget a következő feltételeknek: (J-vel ezentúl I valamely részintervallumát fogjuk jelölni.)

A) Ha $J_1, J_2, \ldots, J_n$ az I intervallum egy felosztását jelenti $I = J_1 + J_2 + \cdots + J_n$, a megfelelő $\xi_{J_1}, \xi_{J_2}, \ldots, \xi_{J_n}$ változók függetlenek;

B) A ξ_J változók egy valós számokból álló megszámlálható halmaz elemeit vehetik fel, mely halmaz független J speciális választásától.

Az A) feltételből következik, hogy ennek a halmaznak λ_k-val és λ_l-lel együtt tartalmaznia kell egy λ_m-et úgy, hogy $\lambda_k + \lambda_l = \lambda_m$, másszóval egy félcsoportot kell alkotnia az összeadásra nézve.

C) $1 - W_0(J) = 1 - \mathbf{P}(\xi_J = 0)$ folytonos intervallumfüggvény, vagyis

$$1 - W_0(J) \to 0,$$

ha J összehúzódik egy rögzített pontra.

A C) feltételből következik, hogy $1 - W_0(J)$ egyenletesen is folytonos I-ben.* Ugyancsak a C) feltételből következik, hogy $1 - f(u,J)$ is egyenletesen

* Legyen $\varphi(J)$ egy folytonos intervallumfüggvény az I zárt véges intervallumban; ebben az esetben $\varphi(J)$ egyenletesen is folytonos I-ben. Ellenkező esetben ugyanis léteznék egy oly $\varepsilon_0 > 0$, hogy kiválasztva egy alkalmas J_n sorozatot $|\varphi(J_n)| \geqq \varepsilon_0$, annak ellenére, hogy $|J_n| \to 0$. Jelentse d az J_n intervallumok középpontjainak egy sűrűsödési helyét, akkor kiválaszthatunk egy olyan J_{k_n} részsorozatot, hogy ezen részsorozat intervallumainak a középpontja konvergál d-hez. Mivel a J_{k_n} intervallumsorozat a d pontra összehúzódik, következik, hogy $\varphi(J_{k_n}) \to 0$, ami ellentmondás.

folytonos mégpedig u-tól függetlenül, ugyanis

$$|1-f(u,J)| \leqq 2(1-W_0(J)),$$

továbbá, hogy a ξ_t folyamat gyengén folytonos, hiszen

$$\mathbf{P}(|\xi_J|>\varepsilon) \leqq 1-\mathbf{P}(\xi_J=0) \to 0.$$

Az A) és C) feltételekből következik, hogy ξ_I korlátlanul osztható eloszlással rendelkezik ([1] 161—163.) és így $\log f(u,I)$ előállítható kanonikus alakban:

$$\log f(u,I)=i\gamma(I)\,u-\frac{\sigma^2(I)}{2}u^2+ \tag{1}$$
$$+\int_{-\infty}^{0}\left(e^{iux}-1-\frac{iux}{1+x^2}\right)dM(x,I)+\int_{0}^{\infty}\left(e^{iux}-1-\frac{iux}{1+x^2}\right)dN(x,I),$$

ahol $\gamma(I)$ és $\sigma(I)$ állandók, $M(x,I)$ és $N(x,I)$ nemcsökkenő függvények a $(-\infty,0)$, illetve a $(0,\infty)$ intervallumokban; $M(-\infty)=N(\infty)=0$ és

$$\int_{-1}^{0}x^2\,dM(x,I)+\int_{0}^{1}x^2\,dN(x,I)<\infty.$$

A mi esetünkben az (1) formula egy egyszerűbb kifejezésre redukálódik. Ezen dolgozat legfőbb célja az, hogy ezt az egyszerűsítést elvégezze és a kapott kifejezésben $M(x,I)$ és $N(x,I)$ konkrét jelentését megadja.

1. §. M(x, I) és N(x, I) jelentése

TÉTEL: ha az A) B) C) feltételek teljesülnek, akkor az (1) formula a a következő alakba írható:

$$\log f(u,I)=\sum_{k=1}^{\infty}C_{\lambda_k}(I)\,(e^{i\lambda_k u}-1), \tag{2}$$

ahol

$$C_{\lambda_k}(I)=\int_I W_{\lambda_k}(J),\quad \lambda_k\neq 0 \tag{3}$$

és

$$\sum_{k=1}^{\infty}C_{\lambda_k}(I)=\int_I(1-W_0(J))<\infty. \tag{4}$$

(3)-ban (4)-ben az integrálok a BURKILL-féle értelemben vannak véve.

BIZONYÍTÁS. Először kimutatjuk, hogy $\sigma(I)=0$. Valóban az (1) formulában szereplő $f(u,I)$ függvény két karakterisztikus függvény szorzata:

$$f(u,I)=f_1(u,I)f_2(u,I),$$

ahol

$$f_1(u,I)=e^{-\frac{\sigma^2(I)}{2}u^2}$$

a következő normális eloszlás karakterisztikus függvénye:

$$F_1(x, I) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma(I)}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2(I)}} dy.$$

Mivel

$$|F_1(x+h, I) - F_1(x, I)| \leqq \frac{|h|}{\sqrt{2\pi\sigma(I)}}$$

és

$$F(x, I) = \int_{-\infty}^{\infty} F_1(x-y, I)\, dF_2(y, I),$$

következik, hogy

$$|F(x+h, I) - F(x, I)| \leqq \frac{|h|}{\sqrt{2\pi\sigma(I)}}$$

ez azonban ellentmondás, mert feltételeztük, hogy $F(x, I)$ lépcsős függvény. (Ezt a bizonyítást lásd [2], 94—95.)

$f(u, I)$ az u változó majdnem periodikus függvénye:

$$f(u, I) = \sum_{k=0}^{\infty} W_{\lambda_k}(I) e^{i\lambda_k u}.$$

$f(u, I)$-vel együtt $\log f(u, I)$ is majdnem periodikus. Ehhez csak azt kell belátnunk, hogy $|f(u, I)| \geqq \delta > 0$, mert $\log z$ folytonos a $0 < \delta \leqq |z| \leqq 1$ tartományban és ismeretes, hogy egy majdnem periodikus függvény folytonos függvénye is majdnem periodikus. Ha elvégezzük az $I = J_1 + J_2 + \cdots + J_n$ felbontást, ahol $|J_k|$ (J_k hossza) elegendő kicsiny ahhoz, hogy a C) feltétel következtében $|f(u, J_k)| \geqq \eta > 0$, következik, hogy

$$|f(u, I)| = \prod_{k=1}^{n} |f(u, J_k)| \geqq \eta^n = \delta > 0.$$

Szorozzuk meg (1) mindkét oldalát $\frac{1}{2T}$-vel és integráljunk a $(-T, T)$ intervallumban; ha Fubini tételét alkalmazva először az u változó szerint integrálunk, azt kapjuk, hogy

$$-\frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \log f(u, I)\, du = \int_{-\infty}^{0} \left(1 - \frac{\sin Tx}{Tx}\right) dM(x, I) + \int_{0}^{\infty} \left(1 - \frac{\sin Tx}{Tx}\right) dN(x, I).$$

Ha $T \to \infty$, akkor mivel $\log f(u, I)$ majdnem periodikus, a baloldalon véges határértéket kapunk, figyelembe véve még, hogy

$$1 - \frac{\sin Tx}{Tx} \geqq 0,$$

alkalmazhatjuk Fatou tételét, melynek segítségével azt kapjuk, hogy

$$\int_{-\infty}^{0} dM(x, I) + \int_{0}^{\infty} dN(x, I) < \infty. \tag{5}$$

$M(x, I)$ és $N(x, I)$ tehát korlátos változásúak x szerint, másszóval az $x=0$ pontban véges határértékkel rendelkeznek. (5) alapján az (1) formula a következő alakra hozható:

$$\log f(u, I) = i\gamma'(I)\, u + \int_{-\infty}^{0} (e^{iux} - 1)\, dM(x, I) + \int_{0}^{\infty} (e^{iux} - 1)\, dN(x, I), \tag{6}$$

ahol

$$\gamma'(I) = \gamma(I) - \int_{-\infty}^{0} \frac{x}{1+x^2}\, dM(x, I) - \int_{0}^{\infty} \frac{x}{1+x^2}\, dN(x, I).$$

Itt $\gamma'(I) = 0$, ugyanis (6) baloldala és jobboldalának két utolsó tagja u-nak korlátos függvénye.

$M(x, I)$ és $N(x, I)$ ugró függvények; ez abból következik, hogy (6) baloldalán majdnem periodikus függvény áll. Ugyanis, ha elvégezzük a következő felbontást:

$$M(x, I) = M_1(x, I) + M_2(x, I), \quad N(x, I) = N_1(x, I) + N_2(x, I),$$

ahol mindkét kifejezésben az első tag ugró függvényt jelöl, míg a második tag egy nemcsökkenő folytonos függvényt, akkor (6)-ból egy alkalmas átrendezéssel azt kapjuk, hogy a majdnem periodikus rész leválasztása után visszamaradó rész:

$$\varphi(u, I) = \int_{\infty}^{0} e^{iux}\, dM_2(x, I) + \int_{0}^{\infty} e^{iux}\, dN_2(x, I).$$

Az utóbbi kifejezés jobboldala csak abban az esetben lehet majdnem periodikus ha $M_2(x, I) = \text{konst.}$ és $N_2(x, I) = \text{konst.}$ Valóban, ez könnyen belátható, ha tekintjük az $M(\varphi(u, I)\, e^{-i\lambda u})$* kifejezést és kimutatjuk, hogy ez minden valós λ-ra $M_2(x, I)$ és $N_2(x, I)$ folytonossága következtében eltűnik.

Most kimutatjuk, hogy $\log f(u, I)$ ugyanazon exponensekkel rendelkezik, mint $f(u, I)$, továbbá, hogy a tétel többi állításai is igazak. Ennek bizonyításához szükségünk van egy lemmára.

LEMMA: ha egy sztochasztikus folyamat eleget tesz az A) B) és C) feltételeknek, akkor

$$\log f(u, I) = \int_I (f(u, J) - 1), \tag{7}$$

és a Burkill integrált értelmező összegek egyenletesen konvergálnak u szerint $\log f(u, I)$-hez, pontosabban

$$\Big| \log f(u, I) - \sum_{k=1}^{n} (f(u, J_k) - 1) \Big| \leqq K \max (1 - W_0(J_k)) \to 0. \tag{8}$$

* $M(\varphi(u, I)e^{-i\lambda u}) = \lim\limits_{T \to \infty} \dfrac{1}{2T} \displaystyle\int_{-T}^{T} \varphi(u, I) e^{-i\lambda u}\, du.$

ha

$$\max |J_k| \to 0.$$

BIZONYÍTÁS. Tudjuk, hogy $|f(u,J)|^2$ $f(u,J)$-vel együtt majdnem periodikus karakterisztikus függvény és mivel $|f(u,J)|^2 \geqq \delta^2 > 0$, $\log |f(u,J)|^2$ hasonlóképpen majdnem periodikus. Jelöljük az $|f(u,J)|^2$ által meghatározott eloszlásban a 0 valószínűségét $W_0^*(J)$-vel, akkor

$$W_0^*(J) = \sum_{k=0}^{\infty} W_{\lambda_k}^2(J) = M(|f(u,J)|^2) \tag{9}$$

(9) alapján

$$W_0^*(J) - 1 \leqq W_0^2(J) + 1 - W_0(J) - 1 = W_0(J)(W_0(J) - 1),$$

tehát ha $|J|$ olyan kicsiny, hogy $W_0(J) > \frac{1}{2}$, akkor

$$1 - W_0(I) < 2(1 - W_0^*(J)). \tag{10}$$

Kimutatjuk, hogy $1 - W_0(J)$ korlátos változású.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(1 - W_0(J_k)) &\leqq 2\sum_{k=1}^{n}(1 - W_0^*(J_k)) = 2M\left(\sum_{k=1}^{n}(1 - |f(u,J_k)|^2)\right) \leqq \\ &\leqq -2M\left(\sum_{k=1}^{n}\log|f(u,J_k)|^2\right) = -2M(\log|f(u,I)|^2) = K.\end{aligned} \tag{11}$$

Itt felhasználtuk az $1 - x \leqq -\log x$ $(0 < x \leqq 1)$ egyenlőtlenséget. (8) a következőképpen igazolható:

$$\begin{aligned}&\left|\log f(u,I) - \sum_{k=1}^{n}(f(u,J_k) - 1)\right| \leqq \sum_{k=1}^{n}\left|\log f(u,J_k) - (f(u,J_k) - 1)\right| \leqq \\ &\leqq \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=2}^{\infty}\frac{1}{2}|f(u,J_k) - 1|^l \leqq \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{|f(u,J_k) - 1|}{1 - |f(u,J_k) - 1|} \leqq \\ &\leqq \sum_{k=1}^{n}|f(u,J_k) - 1|^2 \leqq 4\sum_{k=1}^{n}(1 - W_0(J_k))^2 \leqq K\max(1 - W_0(J_k)) \to 0.\end{aligned}$$

Mivel (8)-ban a sorozat egyenletesen konvergál $\log f(u,I)$-hez, következik, hogy

$$M\left(\sum_{k=1}^{n}(f(u,J_k) - 1)e^{-i\lambda u}\right) \to M(\log f(u,I)\, e^{-i\lambda u}),$$

vagyis ha $\log f(u,I)$ Fourier együtthatóit $C_{\lambda_k}(I)$-vel jelöljük, akkor

$$\left\{\begin{aligned} C_{\lambda_k}(I) &= \int_I W_{\lambda_k}(J), \quad \lambda_k \neq 0 \\ C_0(I) &= \int_I (W_0(J) - 1), \end{aligned}\right. \tag{12}$$

továbbá (6) következtében

$$-C_0(I) = \sum_{k=1}^{\infty} C_{\lambda_k}(I). \tag{13}$$

Ezzel a tétel be van bizonyítva.

Lehetséges, hogy a (2) formulában bizonyos λ_k értékekhez tartozó $C_{\lambda_k}(I)$ 0-val egyenlő. Ennek egy elegendő feltétele, hogy a zárt I intervallum minden pontjában

$$W_{\lambda_k}(J) = o(|J|),$$

miközben J a tekintett pontra összehúzódik. Ugyanis ebben az esetben

$$\int_I W_{\lambda_k}(J) = 0.$$

A bizonyítás nagyon egyszerű. Mivel a $\frac{W_{\lambda_k}(J)}{|J|}$ függvény folytonos a zárt I intervallumban, következik, hogy egyenletesen is folytonos. Másszóval, ha $\varepsilon > 0$ tetszőleges és $\max |J_l| < \delta$, következik, hogy $\frac{W_{\lambda_k}(J_l)}{|J_l|} < \varepsilon$ és így $\sum_{l=1}^{n} W_{\lambda_k}(J_l) < \varepsilon |I|$, vagyis (13) következik.

2. §. *Direkt bizonyítás*

Az előbb bebizonyított tételre direkt bizonyítást* is adhatunk, ha felhasználjuk a majdnem periodikus függvények elméletét.

Ebben az esetben nem használjuk fel az (1) formulát, de szükségünk van az 1. §. lemmájára. Az 1. §. lemmája szerint — amint azt (12)-ből láthatjuk — $\log f(u, I) - C_0(I)$ Fourier együtthatói a $C_{\lambda_k}(I) \geqq 0$ $(\lambda_k \neq 0)$ nem negatív számok. Ismeretes, hogy ha egy majdnem periodikus függvény Fourier együtthatói nem negatívok, akkor az összegük konvergál. (lásd [3], 62.):

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_{\lambda_k}(I) < \infty. \tag{14}$$

(14)-ből következik, hogy $\log f(u, I) - C_0(I)$ Fourier sora egyenletesen konvergál és így

$$\log f(u, I) = C_0(I) + \sum_{k=1}^{\infty} C_{\lambda_k}(I) e^{i\lambda_k u} \tag{15}$$

Ha u helyébe 0-t helyettesítünk, azt kapjuk, hogy

$$C_0(I) + \sum_{k=1}^{\infty} C_{\lambda_k}(I) = 0, \tag{16}$$

tehát

$$\log f(u, I) = \sum_{k=1}^{\infty} C_{\lambda_k}(I) (e^{i\lambda_k u} - 1),$$

amely éppen (2)-t bizonyítja, míg (12), (14) és (16) (3)-at és (4)-et igazolják.

* A (2) formulára egy direkt bizonyítást találunk [2]-ben arra az esetre, ha a λ_k számok összessége a nem negatív egész számok összességével azonos.

(14) bizonyítása nagyon egyszerűen elvégezhető abban az esetben, ha a λ_k számok összessége azonos az egész számok összességével. Valóban ebben az esetben $\log f(u, I)$ 2π szerint periodikus függvény. Mivel $f(u, I) = f(-u, I)$, $\log f(u, I)$ valós része páros függvény, képzetes része pedig páratlan. Következésképpen

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\log|f(u, I)| - C_0(I))\cos k u\, du = \begin{cases} \dfrac{C_k(I) + C_{-k}(I)}{2} & \text{ha } k \neq 0 \\ 0 & \text{ha } k = 0 \end{cases}$$

Az integrandusz folytonos, páros függvény és Fourier együtthatói nem negatívok, tehát*

$$\sum_{k \neq 0}(C_k(I) + C_{-k}(I)) < \infty.$$

3. §. $W_k(I)$ explicit alakja

Egyszerűség kedvéért szorítkozzunk arra az esetre, amikor a λ_k számok egész számok. Ebben az esetben (2) a következő alakban írható

$$\log f(u, I) = \sum_{k \neq 0} C_k(\;)(e^{i\lambda_k u} - 1). \tag{17}$$

Fejezzük ki a $W_k(I)$ valószínűségeket a $C_k(I)$ intervallum-függvények segítségével. (17)-ből következik, hogy a ξ_I változó, amelyet most $\xi(I)$-vel fogunk jelölni a következőképpen állítható elő

$$\xi(I) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} k\xi_k(I) \quad \text{vagy} \quad \xi(I) = \sum_{k=1}^{\infty} k(\xi_k(I) - \xi_{-k}(I)), \tag{18}$$

ahol a $\xi_k(I)$ változók függetlenek és rendre $C_k(I)$ várható értékkel rendelkeznek. Tekintsük most (18) második kifejezését. Itt független, Poisson-eloszlású változók különbségei állanak. Általában ha ξ és η két λ és μ várható értékkel rendelkező Poisson eloszlású változó, a

$$\zeta = \xi - \eta$$

különbség csak egész értékeket vehet fel, továbbá

$$\mathbf{P}(\zeta = n) = \lambda^n e^{-(\lambda+\mu)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda\mu)^k}{k!(k+n)!} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

és

$$\mathbf{P}(\zeta = -n) = \mu^n e^{-(\lambda+\mu)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda\mu)^k}{k!(k+n)!} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

* PALEY tételének egy könnyen bizonyítható speciális esete a következő: ha egy páros folytonos függvény Fourier együtthatói nem negatívok, akkor az összegük konvergál. Valóban

$$\frac{1}{2} S_n(0) \leq \frac{n+1}{2n+1} S_n(0) \leq \frac{1}{2n+1} \sum_{k=n}^{2n} S_k(0) \leq \sigma_{2n}(0),$$

ahol σ_n az n-edik Fejér közepet jelenti.

Ezeket a valószínűségeket a

$$J_n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}}{k!(k+n)!}$$

n-ed rendű Bessel függvények segítségével a következőképpen fejezhetjük ki:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\zeta = n) &= \left(\frac{1}{i}\sqrt{\frac{\lambda}{\mu}}\right)^n e^{-(\lambda+\mu)} J_n(2i\sqrt{\lambda\mu}) \\ \mathbf{P}(\zeta = -n) &= \left(\frac{1}{i}\sqrt{\frac{\mu}{\lambda}}\right)^n e^{-(\lambda+\mu)} J_n(2i\sqrt{\lambda\mu}), \end{aligned} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

vagy egységes írásmóddal:

$$\mathbf{P}(\zeta = n) = \left(\frac{1}{i}\right)^{|n|} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-(\lambda+\mu)} J_{|n|}(2i\sqrt{\lambda\mu}). \tag{19}$$

(19) felhasználásával, (18) alapján írhatjuk, hogy

$$\begin{gathered} W_k(I) = e^{-\lambda(I)} \sum_{\Sigma n r_n = k} \prod \left(\frac{1}{i}\right)^{|r_n|} \left(\frac{C_n(I)}{C_{-n}(I)}\right)^{\frac{r_n}{2}} J_{|r_n|}(2i\sqrt{C_n(I) C_{-n}(I)}) \\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \quad (n = 1, 2, \ldots;\ r_n \text{ egész szám}), \end{gathered} \tag{20}$$

ahol a szorzás minden olyan véges $\{r_n\}$ értékrendszer elemeire van kiterjesztve, amelyre $\Sigma n r_n = k$, míg az összegezés valamennyi ilyen rendszerre vonatkozik és

$$\lambda(I) = \sum_{n \neq 0} C_n(I).$$

Végül köszönetet mondok Rényi Alfrédnak értékes megjegyzéseiért.

Magyar Tudományos Akadémia
Alkalmazott Matematikai Intézete.

IRODALOM

[1] P. Lévy, Processus stochastiques et mouvement Brownien (Paris 1948).

[2] A. Rényi, On composed Poisson distributions, II. Acta Math. Acad. Sci. Hung. 2 (1951), 83—98.

[3] J. Favard, Leçons sur les fonctions presques-périodiques (Paris, 1939).

ELOSZLÁSOK MEGHATÁROZÁSA KÖZÉPÉRTÉKEIK SEGÍTSÉGÉVEL

VINCZE ISTVÁN

Bemutatta Rényi Alfréd lev. tag az 1953. november 23-án tartott felolvasó ülésen

Bevezetés

Tekintsünk valamely (a, b) intervallumban egy $f(x)$ sűrűségfüggvényt, tekintsük továbbá az (a, b) intervallumnak egy felosztássorozatát

$$a < x_{n1} < x_{n2} < \cdots < x_{nn} < b, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{1}$$

melyre

$$\max_n (x_{nk+1} - x_{nk}) \to 0, \quad \text{ha} \quad n \to \infty. \tag{2}$$

RÉNYI ALFRÉD vetette fel a kérdést, hogy az $f(x)$ folytonos, nemnegatív sűrűségfüggvény, amely esetleg egyéb feltételeknek is eleget tesz, egyértelműen meghatározott-e, ha ismeretes n és k minden értékére $(1 \leq k \leq n)$ az $x_{nk} \leqq x \leqq x_{nk+1}$ intervallumhoz tartozó feltételes várható érték:

$$\frac{\int\limits_{x_{nk}}^{x_{nk+1}} t f(t)\, dt}{\int\limits_{x_{nk}}^{x_{nk+1}} f(t)\, dt}.$$

RÉNYI ALFRÉD a kérdést a Schmidt-féle kozmogóniai elmélettel kapcsolatosan vetette fel, éspedig az alappontoknak speciális megválasztása mellett.

A probléma a mechanika terminológiájával a következőképpen fogalmazható meg: A folytonos, nemnegatív $f(x)$ függvény, amely esetleg egyéb feltételeknek is eleget tesz, meghatározott-e egy állandó szorzótól eltekintve, ha ismerjük a (2) feltételeknek eleget tevő (1) alappontrendszer minden intervallumára nézve az $x_{nk} \leqq x \leqq x_{nk+1}$, $0 \leqq y \leqq f(x)$ tartomány súlypontjának abszcisszáját.

A kérdést az (a, b) intervallumban folytonos, az intervallum belsejében *pozitív* és egyszer differenciálható $f(x)$ függvényekre igenlően válaszoljuk meg. Az alappontrendszerre vonatkozó feltételeinket valamivel általánosabban a következőképpen fogalmazzuk meg: Tekintsük az (a, b) intervallumban a zárt részintervallumoknak egy egymásba nem nyúló

$$I_{n1}, I_{n2}, \ldots I_{nn}, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{1'}$$

rendszerét, melyre

$$(2') \qquad \max_k D(I_{nk}) \to 0, \quad \text{ha} \quad n \to \infty,$$

ahol $D(I)$ jelenti az I intervallum hosszát; vegyük továbbá a (3') feltételt, mely szerint az (a, b) intervallum minden belső pontjához található ezen intervallumoknak olyan végtelen sorozata, amelyek mindegyike tartalmazza az illető pontot.

Ekkor az alábbi tételt fogalmazhatjuk meg:

Az (a, b) intervallumban értelmezett folytonos pozitív $f(x)$ sűrűség egyértelműen meg van határozva, ha ismerjük a (2') *és* (3') *feltételeket kielégítő* (1') *intervallumrendszer minden intervallumában az $f(x)$ sűrűség feltételes várható értékét, (illetve egy állandó szorzótól eltekintve meg van határozva, ha ismerjük az illető intervallumban a görbe alatti terület súlypont abszcisszáját.)*

Eredményünk több dimenzióra következőképpen fogalmazható meg:

Legyen a háróm dimenziós tér valamely egyszeresen összefüggő korlátos zárt T tartományán értelmezve a $\varrho(x, y, z)$ sűrűségű folytonos eloszlás; legyen továbbá $\varrho(x, y, z)$ a benne szereplő változóknak kétszer folytonosan differenciálható függvénye. Tekintsük most minden pozitív egész n-re a T tartományba eső

$$(1'') \qquad T_{n1}, T_{n2}, \ldots T_{nn}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

egymásba nem nyúló kockaalakú tartományok rendszerét, amelyek lapjai a tengelysíkokkal párhuzamosak és amelyekre

$$(2'') \qquad \max_{(k)} D(T_{nk}) \to 0, \quad \text{ha} \quad n \to \infty,$$

ahol $D(T)$ jelenti a T tartomány ármérőjét. Kössük ki továbbá, hogy (3'') a T tartomány minden belső pontját az (1'') rendszerből végtelen sok kocka tartalmazza.

Ekkor bebizonyítjuk, hogy *a $\varrho(x, y, z)$ sűrűség egy állandó szorzótól eltekintve egyértelműen meg van határozva akkor, ha ismerjük minden T_{nk} kockaalakú tartományon az eloszlás súlypontjának koordinátáit.*

Dolgozatunk 1. §-ában az egyváltozós esetre vonatkozó eredményeinket ismertetjük. Foglalkozunk itt avval a kérdéssel is, hogy ha a sűrűség az (a, b) intervallum valamely izolált, belső helyén eltűnik, akkor miként következtethetünk bizonyos feltételek mellett az alappontrendszer és súlypontabszcisszák ismeretében a zérőhelyek multiplicitására. A 2—4. §-ok állításaink bizonyítását tartalmazzák, míg az 5. §-ban néhány megjegyzést teszünk.

1. §. Tekintsük az (a, b) intervallum valamely rögzített x helyét és vegyük az (1) alappontcsoport ama intervallumait, amelyekre x ezen intervallumok belsejére, illetve baloldali végpontjára esik.*

* Ezt a feltevést az általánosság megszorítása nélkül tehetjük, mert ha véges sok intervallumtól eltekintve x az intervallumok jobboldalára esnék, akkor az $f(-x)$-re végezhetjük meggondolásainkat.

Legyen ezen intervallumok valamelyike I_{nk} és jelöljük ennek végpontjait $x_{nk}^{(1)}$, ill. $x_{nk}^{(2)}$-vel. Legyen tehát $x_{nk}^{(1)} \leqq x < x_{nk}^{(2)}$. A (3) feltétel szerint létezik az egész számoknak olyan $n_1, n_2, \ldots$ végtelen sorozata, hogy I_{n_i, k_i} tartalmazza x-et. A továbbiakban ezt a sorozatot röviden I_{nk}-val jelöljük és nem juttatjuk kifejezésre sem azt, hogy általában n az egész számoknak csupán egy részsorozatán tart végtelen felé, sem pedig azt, hogy k még n-től is és x-től függ; (ez a jelölésmód nem vezet félreértésre). Ezen intervallumok hossza növekvő n mellett a (2') feltétel miatt 0 felé tart, s így ez az intervallumsorozat az x helyet értelmezi; a következőkben az x-hez tartó intervallumsorozatnak fogjuk nevezni.*

Ismeretes, hogy ha az $f(x)$ folytonos függvény valamely x_0 helyen 0-tól különbözik, akkor az intervallumok x_0-hoz tartó sorozatára az intervallumokhoz tartozó súlypontabszcisszák határértékben az intervallum középpontjához tartanak; pontosabban

$$\frac{s_{nk} - x_{nk}^{(1)}}{x_{nk}^{(2)} - x_{nk}^{(1)}} \to \frac{1}{2}, \quad \text{ha } n \to \infty. \tag{4}$$

E határérték tehát nem ad felvilágosítást a függvényre nézve. Ha azonban a súlypontnak az intervallum középpontjától való eltérését vizsgáljuk, a következő eredményre jutunk:

SEGÉDTÉTEL: *Legyen $f(x)$ az (a, b) zárt intervallumban mindenütt differenciálható, pozitív függvény. Akkor a (2') és (3') feltételnek eleget tevő (1') alappontcsoport minden x-hez tartó intervallumsorozatára,*

$$\frac{s_{nk} - \dfrac{x_{nk}^{(1)} + x_{nk}^{(2)}}{2}}{(x_{nk}^{(2)} - x_{nk}^{(1)})^2} \to \frac{1}{12} \frac{f'(x)}{f(x)}, \quad \text{ha} \quad n \to \infty.$$

Ilyenmódon, ha $f(x)$ pozitív az (a, b) intervallum minden belső pontjában, akkor létezik a baloldalon álló kifejezés határértéke, amelyet $\psi(x)$-szel jelölhetünk, s amely az (a, b)-ben mindenütt értelmezett integrálható függvény. Ennélfogva az

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 12 \cdot \psi(x)$$

differenciálegyenlet megoldható és egy állandó szorzótól eltekintve megadja $f(x)$-et.

Említettük, hogy az (a, b) intervallum minden x helyére, ahol az $f(x)$ folytonos függvény 0-tól különbözik, a (4) reláció áll fenn. E tulajdonság $f(x)$ egy 0 helyére is nyilván érvényes, ha ott a függvény — legalább egy kis környezetben — e pontra nézve szimmetrikus és a zéróhelyekhez tartó intervallumsorozat intervallumai símmetrikusan helyezkednek el a gyök-

* Természetesen az x-hez többféleképpen választható feléje tartó intervallum-sorozat.

helyre nézve. Elég ehhez azonban az intervallumsorozatra nézve az

$$\frac{x_{nk}^{(2)}-z}{z-x_{nk}^{(1)}} \to 1, \quad \text{ha} \quad n \to \infty,$$

feltétel teljesülése is, ha z-vel jelöljük az illető 0 helyet. Vizsgáljuk meg mármost, hogy e kivételes esettől eltekintve az alappontcsoport és súlypontabszcisszák rendszere hogyan ad felvilágosítást a diszkrét zéró helyek bizonyos tulajdonságaira.

Vezessük be előbb a következő fogalmat: Az x-hez tartó intervallumsorozatról azt mondjuk, hogy *stabilisan tart x felé*, ha létezik a következő (véges, vagy végtelen) nemnegatív határérték:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{x_{nk}^{(2)}-x}{x-x_{nk}^{(1)}} = c_x.$$

A c_x határérték általában nem létezik, azonban érvényes a következő tétel:

Minden x-re a feléje tartó intervallumsorozatból kiválasztható az intervallumoknak olyan x-hez tartó részsorozata, amely stabilisan tart x felé.

Tekintsük ugyanis valamely x-re a (4) alatti reláció baloldalán álló hányadosok sorozatát ($n=1,2,3,\ldots$). E pozitív mennyiségek között mindig található vagy végtelen sok olyan, amely az 1-nél kisebb, vagy végtelen sok olyan, amely az 1-nél nem kisebb. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy a második eset áll fenn (az első esetben $f(-x)$-re végezhetjük meggondolásainkat) s a sorozatból mindig kiválasztható vagy véges határértékkel bíró konvergens, vagy végtelen felé tartó részsorozat, q. e. d.

A mondottakból következik, hogy valamely x helyhez több c_x is tartozhat az alappontcsoporttól függően. Tekintsük a továbbiakban minden x-hez c_x-et valamilyen módon meghatározottnak.

A következőkben valamely x helyet mindig stabilis intervallumsorozattal, illetve részsorozattal közelítünk meg, azonban az áttekinthetőség kedvéért nem juttatjuk kifejezésre, hogy az n egész szám a pozitív egész számoknak csak egy részsorozatán keresztül tart végtelen felé, sem pedig, hogy a k pozitív egész n-től és x-től függ.

Érvényes mármost a következő

TÉTEL: *Legyen z az* (a, b) *intervallumban folytonos nemnegatív* $f(x)$ *függvénynek diszkrét* 0 *helye. Legyen továbbá* $f(x)$ *e helyen többször differenciálható s legyen* $f^{(l)}(x) \neq 0$, *(nyilván l páros szám és* $f^{(l)}(x) > 0$). *Ekkor a z-hez tartó stabilis intervallumsorozatra, amelyre* $c_z \geqq 1$,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{s_{nk}-x_{nk}}{x_{nk+1}-x_{nk}} = \frac{1}{c_z+1}\left(\frac{l+1}{l+2}\,\frac{c_z^{l+2}-1}{c_z^{l+1}+1}+\frac{1}{c_z}\right). \tag{5}$$

Ha $c_z \neq 1$, *akkor az* (5) *egyenletből l értéke egyértelműen meghatározható.*

A $c_z = 1$ esetben tehát e határérték $\frac{1}{2}$ s a függvényre nézve semmi felvilágosítást nem nyerünk. Ha azonban $c_z \neq 1$, akkor ebből egyrészt a függvény eltűnésére, másrészt az első el nem tűnő derivált rendjére következtethetünk. Ha $c_z = \infty$, akkor az $\frac{l+1}{l+2}$ határértéket kapjuk. — A $c_z < 1$ esetben hasonló tételhez juthatunk.

2. §. Most rátérünk a segédtétel bizonyítására. Ki kell számítanunk a

$$\psi_n(x) = \frac{s_{nk} - \frac{x_{nk}^{(1)} + x_{nk}^{(2)}}{2}}{(x_{nk}^{(2)} - x_{nk}^{(1)})^2}$$

kifejezést. Az egyszerűség kedvéért vezessük be a következő jelöléseket:

$$s_{nk} = s,\; x_{nk}^{(2)} - x = \Delta x_2,\; x - x_{nk}^{(1)} = \Delta x_1,\; \Delta x_1 + \Delta x_2 = \Delta x.$$

Itt tehát Δx_1 és Δx_2 *egymástól függetlenül* tartanak majd zéró felé. E jelölésekkel

$$\frac{x_{nk}^{(1)} + x_{nk}^{(2)}}{2} = x + \frac{\Delta x_2 - \Delta x_1}{2}$$

és

$$x_{nk}^{(2)} - x_{nk}^{(1)} = \Delta x_1 + \Delta x_2 = \Delta x.$$

$\psi_n(x)$ most a következő alakot ölti:

$$\frac{s - x - \frac{\Delta x_2 - \Delta x_1}{2}}{\Delta x^2} = \frac{1}{\Delta x^2}\left(\frac{\int_{x-\Delta x_1}^{x+\Delta x_2} t f(t)\,dt}{\int_{x-\Delta x_1}^{x+\Delta x_2} f(t)\,dt} - x - \frac{\Delta x_2 - \Delta x_1}{2}\right) =$$

$$(6) \qquad = \frac{1}{\Delta x^2} \frac{\int_{x-\Delta x_1}^{x+\Delta x_2} (t-x) f(t)\,dt - \frac{\Delta x_2 - \Delta x_1}{2} \int_{x-\Delta x_1}^{x+\Delta x_2} f(t)\,dt}{\int_{x-\Delta x_1}^{x+\Delta x_2} f(t)\,dt}.$$

Az $f(x)$ differenciálhatóságára vonatkozó feltevésünk szerint érvényes x-nek elég kis környezetére

$$f(t) = f(x) + (t-x) f'(x) + o(t-x)$$

$f(t)$-t a (6) alatt kapott kifejezésbe helyettesítve, a $(t-x)$ hatványainak integrálása és megfelelő rendezés után a számlálóban $f(x)$ már nem szerepel s eredményül a következőt nyerjük:

$$\frac{1}{\Delta x^2} \frac{\frac{1}{12} \Delta x^3 f'(x) + \int_{x-\Delta x_1}^{x+\Delta x_2} o(t-x)^2\,dt - \frac{\Delta x_2 - \Delta x_2}{2} \int_{x-\Delta x_1}^{x+\Delta x_2} o(t-x)\,dt}{\Delta x \left[f(x) + \frac{\Delta x_2 - \Delta x_1}{2} f'(x) + \frac{1}{\Delta x} \int_{x-\Delta x_1}^{x+\Delta x_2} o(t-x)\,dt \right]}.$$

Osszunk most a számlálóban Δx^3-mal és vizsgáljuk a második tagot

$$\frac{1}{\Delta x^3}\int\limits_{x-\Delta x_1}^{x+\Delta x_2} o(t-x)^2\,dt=\frac{1}{\Delta x^3}\int\limits_{x-\Delta x_1}^{x} o(t-x)^2+\frac{1}{\Delta x^3}\int\limits_{x}^{x+\Delta x_2} o(t-x)^2\,dt=$$

$$=\frac{1}{\Delta x^3}\left(o(-\Delta x_1)^3+o(\Delta x_2)^3\right).$$

Minthogy $\frac{\Delta x_1}{\Delta x}<1$ és $\frac{\Delta x_2}{\Delta x}<1$, ennélfogva ez a kifejezés zéró felé tart, akárhogyan is tartatjuk Δx_1-et és Δx_2-et 0 felé.

Hasonló a helyzet a számláló harmadik tagjával:

$$\frac{\Delta x_2-\Delta x_1}{2\Delta x^3}\int\limits_{x-\Delta x_1}^{x+\Delta x_2} o(t-x)\,dx=\frac{\Delta x_2-\Delta x_1}{2\Delta x}\cdot\frac{1}{\Delta x^2}\left(o(\Delta x_1)^2+o(\Delta x_2)^2\right),$$

ahol $|\Delta x_2-\Delta x_1|<\Delta x$ s a szorzat második része Δx_1 és Δx_2-vel zéró felé tart.

A nevezőben $f'(x)$ tényezője ugyancsak 0 felé tart, míg a harmadik tagban az integrál kifejezés másodrendben tart zéró felé.

Arra az eredményre jutottunk tehát, hogy ha Δx_1 és Δx_2 egymástól függetlenül zéró felé tartanak, fenti kifejezés határértéke $\frac{1}{12}\frac{f'(x)}{f(x)}$, amivel segédtételünket bebizonyítottuk.

3. §. Tételünk bizonyításához a

$$\varphi_n(z)=\frac{s_{nk}-x_{nk}^{(1)}}{x_{nk}^{(2)}-x_{nk}^{(1)}}$$

kifejezés határértékét kell megállapítanunk, ha n egy stabilis intervallumsorozat indexein át tart végtelen felé. Itt minden n-re és a hozzátartozó k-kra $x_{nk}^{(1)}\leqq z<x_{nk}^{(2)}$, ahol z az $f(x)$ függvény valamely az (a, b) intervallum belsejébe eső zéróhelye. Az $f(x)$-re vonatkozó feltevés szerint z elég kis környezetében felírhatjuk, hogy

$$f(t)=\frac{f^{(l)}(z)}{l!}(t-z)^l+o(t-z)^l$$

és $f^{(l)}(z)>0$ (az l nyilván páros szám).

Áttérve a 2. §-ban használt jelöléseinkre

$$\Delta z_1=z-x_{nk}^{(1)} \text{ és } \Delta z_2=x_{nk}^{(2)}-z$$

és ezek úgy tartanak 0 felé, hogy a

$$\frac{\Delta z_2}{\Delta z_1}\to c_z,$$

ahol $c_z\geqq 1$ véges, vagy végtelen mennyiség.

Ekkor $\varphi_n(z)$ a következőképpen írható fel:

$$\frac{1}{\Delta z_1+\Delta z_2}\left(\frac{\int\limits_{z-\Delta z_1}^{z+\Delta z_2} t f(t)\,dt}{\int\limits_{j-\Delta z_1}^{z+\Delta z_2} f(t)\,dt}-z+\Delta z_1\right).$$

$f(t)$ fenti kifejezését beírva és a $(t-z)$ hatványintegráljait kiszámítva megfelelő rendezés után a következőt nyerjük:

$$\frac{1}{\Delta z_1+\Delta z_2}\,\frac{\dfrac{f^{(l)}(z)}{l!}\,\dfrac{\Delta z_2^{l+2}-\Delta z_1^{l+2}}{l+2}+\int\limits_{z-\Delta j_1}^{z+\Delta z_2} o(t-z)^{l+1}\,dt}{\dfrac{f^{(l)}(z)}{l!}\,\dfrac{\Delta z_2^{l+1}+\Delta z_1^{l+1}}{l+1}+\int\limits_{z+\Delta z_1}^{z+\Delta z_2} o(t-l)^{l}}+\frac{\Delta z_1}{\Delta z_1+\Delta z_2}.$$

Osszuk az első tag számlálóját és nevezőjét Δz_2^{l+1}-val:

$$\frac{1}{\dfrac{\Delta z_1}{\Delta z_2}+1}\,\frac{\dfrac{f^{(l)}(z)}{l!\,(l+2)}\left[1-\left(\dfrac{\Delta z_1}{\Delta z_2}\right)^{l+2}\right]+\dfrac{1}{\Delta z_2^{l+1}}\int\limits_{z-\Delta z_1}^{z+\Delta z_2} o(t-z)^{l+1}\,dt}{\dfrac{f^{(l)}(z)}{l!\,(l+1)}\left[1+\left(\dfrac{\Delta z_1}{\Delta z_2}\right)^{l+1}\right]+\dfrac{1}{\Delta z_2^{l+1}}\int\limits_{z-\Delta z_1}^{z+\Delta z_2} o(t-z)^{l}\,dt}+\frac{\dfrac{\Delta z_1}{\Delta z_2}}{1+\dfrac{\Delta z_1}{\Delta z_2}}.$$

A nevező második tagját két részre bontva

$$\frac{1}{\Delta z_2^{l+1}}\int\limits_{z-\Delta z_1}^{z} o(t-z)^{l}\,dt+\frac{1}{\Delta z_2^{l+1}}\int\limits_{z}^{z+\Delta z_2} o(t-z)^{l}\,dt=\frac{1}{\Delta z_2^{l+1}}\,[o\,(-\Delta z_1)^{l+1}+o\,(\Delta z_2)^{l+1}].$$

Minthogy Δz_2 elég kis értékére $\Delta z_2>\Delta z_1$, ennélfogva mindkét kifejezés 0 felé tart, ha Δz_1 és Δz_2 tartanak 0 felé.

A számláló második tagjára hasonló meggondolással kapjuk ezt az eredményt és így ha Δz_1 és Δz_2 0 felé tartanak $\varphi_n(z)$ a következő határérték felé tart:

$$\frac{1}{\dfrac{1}{c_z}+1}\,\frac{l+1}{l+2}\,\frac{1-\dfrac{1}{c_z^{l+2}}}{1+\dfrac{1}{c_z^{l+1}}}+\frac{\dfrac{1}{c_z}}{1+\dfrac{1}{c_z}}=\frac{1}{1+c_z}\left(\frac{l+1}{l+2}\,\frac{c_z^{l+2}-1}{c_z^{l+1}+1}+1\right).$$

Jelöljük ezt az értékét d_z-vel. d_z tehát az alappontrendszer és súlypont-abszcisszák ismeretében meg van határozva, éspedig c_z függvényeként, amit szintén az alappontrendszerből határozhatunk meg. Látjuk, ha $c_z=1$, akkor $d_z=\frac{1}{2}$, míg ha $c_z=\infty$, akkor $d_z=\frac{l+1}{l+2}$. Ez utóbbi eset áll fenn akkor is, ha az (a, b) intervallum kezdő- vagy végpontjáról van szó, továbbá akkor, ha a z-hez tartozó minden n-re és a megfelelő k-ra $x_{nk}=z$. Az $l=0$-ra $d_z=\frac{1}{2}$, tehát (4) egyenletünkhöz jutunk.

Tételünk második állítása szerint c_z és d_z az l-et, vagyis a függvény z-ben első el nem tünő deriváltjának rendjét egyértelműen meghatározza. Ki kell mutatnunk tehát, hogy az

$$\frac{1}{1+c_z}\left(\frac{l+1}{l+2}\frac{c_z^{l+2}-1}{c_z^{l+1}+1}+1\right)=d_z$$

egyenletnek egyetlen pozitív gyöke van az l ismeretlenre nézve.

Ez azonban annak következménye, hogy $c_z > 1$ esetben a baloldalon álló kifejezés $l > 0$-ra monoton növekvő függvénye l-nek. Ugyanis $\frac{l+1}{l+2}$ valóban ilyen tulajdonságú, míg ennek szorzója a következő alakban írható:

$$c_z-\frac{1+c_z}{1+c_z^{l+1}};$$

itt a kivonandó nevezője s így az egész kifejezés értéke is határozottan növekszik, ha $l > 0$. Ekkor azonban legfeljebb egy l-re vehet fel a baloldalon álló kifejezés egy megadott értéket. Márpedig problémánk természetéből következik, hogy ezt az értéket valóban felveszi.

4. §. Most rátérünk bevezetésünk három dimenzióra vonatkozó állításának bizonyítására.

Tekintsük a T tartomány valamely $P(x, y, z)$ belső pontját és vegyük az n indexek olyan sorozatát, amelyekhez van olyan k, hogy a T_{nk} tartalmazza (belsejében vagy kerületén) a P pontot. E tartományok átmérője a (2') feltétel miatt 0-hoz tart, figyelembe véve, hogy kikötésünk szerint végtelen sok a P pontot tartalmazó T_{nk} tartomány létezik. Jelöljük a T_{nk} tartomány középpontját O_{nk}-val, a $\varrho(x, y, z)$ sűrűségű tömegeloszlással vett súlypontját S_{nk}-val; jelöljük továbbá az O_{nk}-ból az S_{nk}-hoz mutató vektort $\overrightarrow{O_{nk}S_{nk}}$-val. E feltételek és jelölések mellett a 2. §-ban kimondott segédtételnek következő megfelelőjét bizonyítjuk be:

Ha a T tartományon értelmezett nemnegatív $\varrho(x, y, z)$ függvény valamennyi változója szerint egyszer folytonosan differenciálható, és valamely $P(x, y, z)$ helyen határozottan pozitív, akkor a T_{nk} tartományok ezen P ponthoz tartó sorozatára

$$\frac{1}{V_{nk}^{2/3}}\overrightarrow{O_{nk}P_{nk}}\to\frac{1}{12}\text{ grad log nat }\varrho(x, y, z), \tag{7}$$

ahol V_{nk} jelenti a T_{nk} kockaalakú tartomány köbtartalmát és n a megfelelő indexeken át tart végtelen felé.

Tételünket elég a (7) alatti vektor valamelyik komponensére bizonyítani. Számítsuk ezért ki az

$$\frac{S_x^{nk}-O_x^{nk}}{V_{nk}^{2/3}}$$

kifejezést, ahol O_x^{nk} jelenti a T_{nk} középpontjának x koordinátáját.

Legyen a T_{nk} tartomány változó pontja (u, v, w)

$$\begin{aligned} u_1 &\leqq u \leqq u_2 \\ v_1 &\leqq v \leqq v_2 \\ w_1 &\leqq w \leqq w_2 \end{aligned}$$

ahol $u_2 - u_1 = v_2 - v_1 = w_2 - w_1$; vezessük be továbbá a következő jelöléseket:

$$u_2 - x = \Delta x_2, \quad x - u_1 = \Delta x_1, \quad \Delta x_1 + \Delta x_2 = \Delta x;$$

ekkor

(8) $$V_{nk} = (u_2 - u_1)(v_2 - v_1)(w_2 - w_1) = \Delta x^3 = V.$$

E jelöléseinkkel

(9) $$s_x^{nk} - \sigma_x^{nk} = \frac{\iiint u\varrho(u, v, w)\,du\,dv\,dw}{\iiint \varrho(u, v, w)\,du\,dv\,dw} - \frac{\iiint u\,du\,dv\,dw}{\iiint du\,dv\,dw}$$

ahol az integrál mindenütt a T_{nk} tartományra vonatkozik.

A $\varrho(x, y, z)$ függvényre vonatkozó differenciálhatósági feltevés szerint felírhatjuk, hogy az (x, y, z) pont elég kis környezetében

(10) $$\varrho(u, v, w) = \varrho + \varrho_x'(u - x) + \varrho_y'(v - y) + \varrho_z'(w - z) + o(\Delta r),$$

ahol a $\varrho, \varrho_x', \varrho_y', \varrho_z'$ függvényünknek és első parciális deriváltjainak értékét jelentik az (x, y, z) pontban és

$$\Delta r = \sqrt{(u - x)^2 + (v - y)^2 + (w - z)^2}.$$

A (9) alatti kifejezés jobboldalát közös nevezőre hozva, majd $\varrho(u, v, w)$ helyébe a (10) alatti kifejezést írva számlálóként a következőt nyerjük:

(11) $$\begin{aligned} &\varrho_x'\left[V\iiint u(u - x)\,du\,dv\,dw - \iiint (u - x)\,du\,dv\,dw \iiint u\,du\,dv\,dw\right] + \\ &+ \varrho_y'\left[V\iiint u(v - y)\,du\,dv\,dw - \iiint u\,du\,dv\,dw \iiint (u - y)\,du\,dv\,dw\right] + \\ &+ \varrho_z'\left[V\iiint u(w - z)\,du\,dv\,dw - \iiint (w - z)\,du\,dv\,dw \iiint u\,du\,dv\,dw\right] + \\ &+ V\iiint u\,o(\Delta r)\,du\,dv\,dw - \iiint o(\Delta r)\,du\,dv\,dw \iiint u\,du\,dv\,dw. \end{aligned}$$

Megmutatjuk, hogy ϱ_x' együtthatója $V^{8/3}$ nagyságrendű, míg a többi tag nagyságrendje ennél kisebb.

Számítsuk ki ϱ_x' együtthatóját; bővítve a

$$-V\iiint x(u - x)\,du\,dv\,dw + \iiint x\,du\,dv\,dw \iiint (u - x)\,du\,dv\,dw = 0$$

kifejezéssel, továbbá figyelembe véve a (8) alatti összefüggéseket, a következőt nyerjük:

$$\begin{aligned} &V\iiint (u - x)^2 du\,dv\,dw - \left(\iiint (u - x)\,du\,dv\,dw\right)^2 = V\frac{\Delta x_2^3 + \Delta x_1^3}{3}(v_2 - v_1)(w_2 - w_1) - \\ &- \frac{(\Delta x_2^2 - \Delta x_1^2)^2}{4}(v_2 - v_1)^2(w_2 - w_1)^2 = \frac{1}{3}V^2(\Delta u_2^2 - \Delta u_1\Delta u_2 + \Delta u_1^2) - \\ &- \frac{1}{4}V^2(\Delta u_2^2 - 2\Delta u_1\Delta u_2 + \Delta u_1^2) = \frac{1}{12}V^2\Delta x^2 = \frac{1}{12}V^{8/3}. \end{aligned}$$

ϱ'_y és ϱ'_z együtthatói eltünnek; ugyanis

$$V\iiint u(v-y)\,du\,dv\,dw = V\int_{u_1}^{u_2} u\,dw \int_{w_1}^{w_2}\int_{v_1}^{v_2}(v-y)\,dv\,dw =$$
$$= V\frac{1}{(v_2-v_1)(w_2-w_1)}\iiint u\,du\,dv\,dw\cdot\frac{1}{u_2-u_1}\iiint(v-y)\,du\,dv\,dw =$$
$$= \iiint u\,du\,dv\,dw \iiint (v-y)\,du\,dv\,dw,$$

hasonlóképpen ϱ'_z együtthatójára.

Végül (11) utolsó két tagja a ϱ'_x-re alkalmazott átalakítás alkalmazása után a következőképpen becsülhető meg:

$$\left| V\iiint(u-x)o(\Delta r)\,du\,dv\,dw - \iiint o(\Delta r)\,du\,dv\,dw\iiint(u-x)\,du\,dv\,dw\right| \leqq$$
$$\leqq 2V^2\max|u-x|\,o(\max\Delta r) = 2V^2\Delta x\,o(\Delta x\sqrt{3}).$$

Azonban (8) szerint $\Delta x = V^{1/3}$ és így a constans $V^{7/3}o(V^{1/3})$ majorizálja e két tagot.

A (9) kifejezés nevezője $\varrho(u, v, w)$ (10) alatti alakjának helyettesítése után

$$V^2\varrho + V\varrho'_x\iiint(u-x)\,du\,dv\,dw + V\varrho'_y\iiint(v-y)\,du\,dv\,dw +$$
$$+ V\varrho'_z\iiint(w-z)\,du\,dv\,dw + V\iiint o(\Delta r)\,du\,dv\,dw.$$

Az előzőekhez hasonló számolás alapján nyerjük, hogy $\varrho'_x, \varrho'_y, \varrho'_z$ együtthatóinak nagyságrendje nem haladja meg a $V^2\Delta x$-et, az utolsó tag pedig a $V^2 o(\Delta x)$-et, ilyenformán e tagokból a V^2-et kiemelve 0 felé tartó kifejezéseket nyerünk.

A mondottak szerint az

$$\frac{s_x^{nk} - \sigma_x^{nk}}{V^{2/3}}$$

kifejezés számlálóját és nevezőjét $V^2\cdot V^{2/3} = V^{8/3}$-al osztva az első tagoktól eltekintve mindenütt V-el 0 felé tartó értékeket kapunk, s így e kifejezés valóban

$$\frac{1}{12}\,\frac{\varrho'_x(x, y, z)}{\varrho(x, y, z)}$$

felé tart, amivel állításunkat bebizonyítottuk.

Bevezetésünkben mondott az a tételünk, mely szerint ha $\varrho(x, y, z)$ kétszer folytonosan differenciálható, a T-n pozitív függvény, akkor a beosztástartományok és súlypontok ismeretében egy állandó szorzótól eltekintve egyértelműen meg van határozva, a következőképpen látható be: miután a

$$\lim \frac{1}{V_{nk}^{2/3}}\,\overrightarrow{O_{nk}S_{nk}}$$

határérték a T tartomány minden belső pontjára képezhető és feltételeink szerint ott folytonos és parciális deriváltakkal rendelkező komponensekkel bír, ennélfogva ezt a T-n belül és határátmenettel a kerületén nyert vektorfüggvényt $\Psi(x, y, z)$-vel jelölve a

$$\operatorname{grad} \log \operatorname{nat} \varrho(x, y, z) = \Psi(x, y, z)$$

differenciálegyenlet az analízis elemei szerint a $\log \operatorname{nat} \varrho(x, y, z)$-re egy additív konstanstól eltekintve és így $\varrho(x, y, z)$-re egy állandó szorzótól eltekintve egyértelmű megoldást ad.

5. §. E §-ban néhány megjegyzést teszünk.

a) A bevezetésben felvetett problémát úgy is fogalmazhatjuk, hogy ha az alappontrendszer intervallumaira nézve megadjuk az $f(x)$ függvény *első és nulladik momentumának hányadosát,* vajjon ezekből az $f(x)$-re hogyan következtethetünk vissza.

Feltehető az a kérdés is, hogy ha az alappontrendszer intervallumain megadjuk az $r+1$-ik és r-ik momentumok hányadosát, vajjon ezáltal az $f(x)$ függvény legalábbis egy állandó szorzótól eltekintve meg van-e határozva. Itt r tetszőleges nemnegatív számot jelenthet.

Ez a kérdés egyszerűen visszavezethető az előzőre, csupán

$$F(x) = x^r \cdot f(x)$$

függvényre kell megfelelően alkalmazni eredményeinket, ill. meggondolásainkat.

b) A térbeli tartományra vonatkozó tételünkben a T_{nk} tartományokat kockaalakúaknak választottuk. Kapott eredményünkre vezetett volna az is, ha parallelepipedonokat választottunk volna és csupán azt a kikötést kellett volna tennünk, hogy ennek átmérője ugyanazon nagyságrendben tartson 0-hoz, mint a köbtartalom $1/3$-ik hatványa. Általánosabb tartományfelosztás esetére még vissza kívánok térni.

c) Szerző vizsgálatait két irányban folytatja. Egyrészt — Rényi Alfréd ösztönzésére — azt a kérdést vizsgálja, hogy valamely eloszlásból vett N elemű mintából hogyan lehet eredményeink alapján további következtetést vonni az eloszlás jellegére. Másrészt az itt felhasznált gondolatok alkalmasak a differenciálgeometria bizonyos fogalmainak tömegeloszlás sűrűségével való vonatkozásainak vizsgálatára.

Magyar Tudományos Akadémia
Alkalmazott Matematikai Intézete.

POISSON-FOLYAMAT ÁLTAL SZÁRMAZTATOTT TÖRTÉNÉSFOLYAMATOKRÓL

TAKÁCS LAJOS

Bemutatta Rényi Alfréd lev. tag az 1953. január 5-én tartott felolvasó ülésen

1. §. Bevezetés

[1] dolgozatunk második részében foglalkoztunk a következő problémával: Legyen adva m számú egymástól független sztochasztikus folyamat. Az egyes sztochasztikus folyamatokat definiáljuk a következőképpen: Tekintsünk egy POISSON-folyamatot $0 \leqq u < \infty$ időközben, melyben az események előfordulásának sűrűsége p, azaz *annak a valószínűsége, hogy u és $u + \Delta u$ időpontok között egy esemény előfordul* $p\Delta u + o(\Delta u)$ és hogy ezen időközben több, mint egy esemény fordul elő: $o(\Delta u)$, továbbá közös pont nélküli időintervallumokban előforduló események számai egymástól függetlenek.*

A Poisson-folyamatban előforduló események közül bizonyosak létrehoznak egy-egy történést, mégpedig az $(0 \leqq u < \infty)$ időintervallumban bekövetkező első esemény létrehoz egy χ_1 időtartamú történést és ezután sorra-haladva mindazon események létrehoznak egy-egy $\chi_2, \chi_3, \ldots$ időtartamú történést, melyek olyan időpontokban fordulnak elő, midőn nem folyik történés. Feltesszük, hogy a χ_k valószínűségi változók egymástól függetlenek és ugyanazon $P(\chi_k \leqq x) = H(x)$ eloszlásfüggvénnyel bírnak. Valamennyi χ_k csupán pozitív értékeket vesz fel, azaz $H(0) = 0$ és várható értéke $M(\chi_k) = \alpha$ véges szám. A Poisson-folyamatból ily módon nyert másodlagos sztochasztikus folyamatot *történésfolyamatnak* nevezzük. Megjegyezzük, hogy ez a folyamat a gyakorlatban például Geiger—Müller számlálóval történő részecskeszámlálásnál lép fel.

[1]-ben megmutattuk, hogy annak a valószínűsége, hogy a történések folyamatában u és $u + \Delta u$ időpontok között kezdődjék egy történés:

$$f(u)\Delta u + o(\Delta u),$$

ahol $f(u)$ a következő integrálegyenletnek tesz eleget:

$$f(u) = p - p\int_0^u f(u-x)[1 - H(x)]\,dx, \tag{1}$$

melynek egyértelműen meghatározott, folytonos $f(u)$ megoldása van. Ha $H(x)$

* A $o(\Delta u)$ olyan függvényt jelöl, amelyre $\lim\limits_{\Delta u \to 0} \dfrac{o(\Delta u)}{\Delta u} = 0.$

Laplace—Stieltjes transzformáltja

(2) $$\psi(s) = \int_0^\infty e^{-sx}\, dH(x), \qquad (\Re(s) \geqq 0)$$

úgy $f(u)$ Laplace transzformáltja

(3) $$\int_0^\infty e^{-su} f(u)\, du = \frac{p}{s+p-p\psi(s)},$$

amely $\Re(s) > 0$-ra konvergens és ebből $f(u)$ egyértelműen meghatározható.

Annak a valószínűsége, hogy a történések folyamatában u időpontban éppen folyjék egy történés:

(4) $$F(u) = 1 - \frac{1}{p} f(u).$$

Kimutattuk, hogy fennállnak

(5) $$f^* = \lim_{u \to \infty} f(u) = \frac{p}{1+p\alpha}$$

és

(6) $$F^* = \lim_{u \to \infty} F(u) = \frac{p\alpha}{1+p\alpha},$$

határértékek, ahol α, χ_k várható értékét jelöli.

Ha most a fent definiált történések folyamatából m számút tekintünk egyidejűleg, úgy azt mondjuk, hogy u időpontban E_k $(k = 0, 1, \ldots, m)$ állapotban van a rendszer, ha abban a pillanatban k folyamatban történés folyik és $m-k$-ban nem folyik. [1]-ben a fenti rendszert először $(0, t)$ időintervallumban, majd végtelen hosszú ideig tartó folyamatnál egy kiragadott t hoszszúságú időintervallumban vizsgáltuk. Ezen utóbbi esetet stacionárius állapontnak neveztük. Meghatároztuk nem stacionárius és stacionárius állapotban egyaránt a $(0, t)$ időközben, illetve t időtartam alatt előforduló $E_{k-1} \to E_k$ átmenetek várható számát: $m_{m,k}(t)$-t és $m^*_{m,k}(t)$-t. Továbbá azt mondtuk, hogy u időpontban (legalább k-szoros) koincidencia van, ha a rendszer E_j $(j = k, k+1, \ldots, m)$ állapotok egyikében tartózkodik. Meghatároztuk nem stacionárius és stacionárius esetben a $(0, t)$ időközbe, illetve egy t hosszúságú intervallumba eső koincidenciák várható összidőtartamát: $\tau_{m,k}(t)$-t és $\tau^*_{m,k}(t)$-t.

Megjegyezzük, hogy a stacionárius folyamatra nyert eredmények úgy értendők, hogy először $(u, u+t)$ időközre állapítjuk meg a kérdéses valószínűségeket, illetve várható értékeket és azután $u \to \infty$ határátmenetet végzünk.

Jelen dolgozatunkban a $k = 1$ speciális esetet tesszük részletesebb vizsgálat tárgyává. Meg fogjuk határozni nem stacionárius esetben annak a valószínűségét, hogy $(0, t)$ időközben az $E_0 \to E_1$ átmenetek száma $\leqq n$ jelöljük ezt $W_1(t, n)$-nel. Továbbá annak a valószínűségét, hogy $(0, t)$ időközben az E_j $(j = 1, 2, \ldots, m)$ állapotokban való tartózkodás összidőtartama $\leqq z$, jelöljük ezt $\Omega_1(t, z)$-vel. Meg fogjuk határozni a megfelelő valószínűségeket stacionárius esetben is, mikor is $W_1^*(t, n)$, illetve $\Omega_1^*(t, n)$-nel fogjuk jelölni ezeket. Továbbá legyenek az egyes $E_0 \rightarrow E_1$ átmenetek és a közvetlen utána következő $E_1 \rightarrow E_0$ átmenetek időpontjai közötti távolságok rendre: $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots$ valószínűségi változók. Nyilvánvaló, hogy ξ_n-ek független valószínűségi változók ugyanazon eloszlásfüggvénnyel. Meghatározandó ezek eloszlásfüggvénye $P(\xi_n \leqq x) = D(x)$ és átlaga

$$\vartheta = \int_0^\infty [1 - D(x)]\, dx. \tag{7}$$

Jelölje $k = 1$ esetben a fentemlített várható értékeket: $m_1(t)$, $m_1^*(t)$, $\tau_1(t)$ és $\tau_1^*(t)$. [1] dolgozatunk eredményei alapján felírhatjuk, hogy

$$m_1(t) = \sum_{n=0}^\infty [1 - W_1(t, n)] = mp \int_0^t [1 - F(u)]^m\, du, \tag{8}$$

$$m_1^*(t) = \sum_{n=0}^\infty [1 - W_1^*(t, n)] = mp \left(\frac{1}{1+p\alpha}\right)^m t \tag{9}$$

$$\tau_1(t) = \int_0^t [1 - \Omega_1(t, z)]\, dz = \int_0^t [1 - (1 - F(u))^m]\, du, \tag{10}$$

$$\tau_1^*(t) = \int_0^t [1 - \Omega_1^*(t, z)]\, dz = \left[1 - \left(\frac{1}{1+p\alpha}\right)^m\right] t. \tag{11}$$

(8) és (10), valamint (9) és (11) összehasonlításából az adódik, hogy

$$m_1(t) + mp\, \tau_1(t) = mpt \tag{12}$$

és

$$m_1^*(t) + mp\, \tau_1^*(t) = mpt. \tag{13}$$

A ϑ várható érték a nagyszámok törvénye alapján vagy a felújítás elméfet ismert tétele szerint a következőképpen határozható meg:

$$\vartheta = \lim_{t \to \infty} \frac{\tau_1^*(t)}{m_1^*(t)} = \frac{(1+p\alpha)^m - 1}{mp}. \tag{14}$$

Dolgozatunk első részében a fentemlített valószínűségek meghatározásával fogunk foglalkozni. Az alkalmazott módszer tudomásunk szerint új, amellett igen egyszerű és azt hisszük, számos hasonló típusú probléma megoldásánál is sikerrel alkalmazható. Dolgozatunk második részében egy, a fentitől látszólag eltérő problémával fogunk foglalkozni és erre alkalmazzuk módszerünket. Ez a probléma azonban — mint látni fogjuk —, szoros kapcsolatban van az előzővel, ugyanis annak határesetét képezi.

2. §. Segédtételek

Ebben a fejezetben néhány segédtétel bizonyítását adjuk meg, melyeket fel fogunk használni a következőkben. Tekintsünk egy sztochasztikus folyamatot $0 \leqq u < \infty$ időpontokban. Tegyük fel, hogy a folyamat csak két állapotban lehet: A vagy B állapotban. Legyen a folyamat $u=0$ időpontban A állapotban, és tegyük fel, hogy a folyamatban az A és B állapotok váltogatják egymást. Legyenek az egymást követő különböző állapotokban való tartózkodás időtartamai független valószínűségi változók, mégpedig az A^*állapotban való tartózkodás időtartamai: $\eta_0, \eta_1, \eta_2, \ldots$ ugyanazon

$$C(x) = \begin{cases} 1-e^{-px} & \text{ha } x \geqq 0 \\ 0 & \text{ha } x < 0 \end{cases} \tag{15}$$

eloszlásfüggvénnyel és a B állapotban való tartózkodás időtartamai $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots$ ugyanazon $D(x)$ eloszlásfüggvénnyel, ahol $D(0)=0$.

Ezen definíció a folyamat struktúráját egyértelműen meghatározza. A folyamat Markov-pontjait alkotják mindazon időpontok, amelyekben a rendszer A állapotban van. Ugyanis ha tudjuk, hogy egy adott időpontban a rendszer A állapotban van, úgy annak a valószínűsége, hogy a következő $A \to B$ átmenet $\leqq x$ idő mulva következik be, $C(x)$-szel egyenlő, függetlenül attól, hogy mikor következett be az utolsó $B \to A$ átmenet.

Az elmondottakból az is világos, hogy az egymást követő $A \to B$ átmenetek időpontjai közötti távolságok $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \ldots$ is független valószínűségi változók ($\zeta_k = \eta_k + \xi_k$) ugyanazon $G(x) = C(x) * D(x)$ eloszlásfüggvénnyel, azaz

$$G(x) = \int_0^x [1-e^{-p(x-y)}]\, d\,D(y). \tag{16}$$

Jelölje a fenti esetben annak a valószínűségét, hogy $(0 \leqq u \leqq t)$ időközben $\leqq n$ $A \to B$ átmenet fordul elő: $W(t, n)$ és a megfelelő valószínűséget stacionárius esetben, azaz végtelen hosszú ideje tartó folyamat kiragadott t hosszúságú időintervallumára vonatkozóan $W^*(t, n)$. Meg fogjuk határozni ezeket az eloszlásfüggvényeket, valamint várható értékeiket és momentumaikat. Meg fogjuk határozni annak a valószínűségét, hogy nem stacionárius esetben a B állapotban való tartózkodás $(0, t)$ időközbe eső összhossza $\leqq z$; jelöljük ezt $\Omega(t, z)$-vel. Ugyanezt a valószínűséget meghatározzuk stacionárius esetre is, mikor is $\Omega^*(t, z)$-vel fogjuk jelölni. Továbbá meg fogjuk határozni ezen valószínűség eloszlásfüggvények átlagait.

Nem stacionárius eset

$W(t, n)$ meghatározása. Jelölje az egymást követő $A \to B$ átmenetek időpontjait rendre $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$. Ekkor annak a valószínűsége, hogy $(0 < u \leqq t)$ időintervallumban $\leqq n$ $A \to B$ átmenet fordul elő, egyenlő annak a valószínű-

ségével, hogy az $n+1$-edik átmenet t időpont után fordul elő, azaz

$$W(t,n)=P(t<u_{n+1})=1-P(u_{n+1}\leqq t)=1-C(t)*G_n(t), \tag{17}$$

ahol $G_n(t)$ jelenti $G(t)$ függvény n-szeres konvolúcióját, melyet $G_1(t)=G(t)$-ből kiindulva a következő rekurzív formulával határozhatunk meg:

$$G_n(t)=\int_0^t G_{n-1}(t-x)\,d\,G(x). \tag{18}$$

Ugyanis $u_{n+1}=\eta_0+\zeta_1+\zeta_2+\cdots+\zeta_n$, azaz $n+1$ független valószínűségi változó összege. Most $P(\eta_0\leqq x)=C(x)$ és mint ismeretes, $\zeta_1+\zeta_2+\cdots+\zeta_n$ eloszlásfüggvényét: $G_n(x)$-et a (18) rekurzív formula segitségével határozhatjuk meg.

Másrészt tudjuk, hogy független valószínűségi változók összegének Laplace—Stieltjes transzformáltja egyenlő az egyes változók Laplace—Stieltjes transzformáltjainak szorzatával. Ennek segítségével, ha ζ_k $(k=1,2,\ldots)$ Laplace—Stieltjes transzformáltját $\varphi(s)$-sel jelöljük, azaz $\Re(s)\geqq 0$-ra:

$$\varphi(s)=\int_0^\infty e^{-sx}d\,G(x), \tag{19}$$

úgy $\zeta_1+\zeta_2+\cdots+\zeta_n$ Laplace—Stieltjes transzformáltja:

$$\int_0^\infty e^{-sx}d\,G_n(x)=[\varphi(s)]^n \tag{20}$$

és tekintetbe véve, hogy

$$\int_0^\infty e^{-sx}d\,C(x)=\frac{p}{p+s}, \tag{21}$$

(17) alapján az adódik, hogy $W(t,n)$ Laplace-transzformáltja $\Re(s)>0$-ra

$$\int_0^\infty e^{-st}\,W(t,n)\,dt=\frac{1}{s}-\frac{p[\varphi(s)]^n}{s(p+s)}, \tag{22}$$

ahonnan $W(t,n)$ egyértelműen meghatározható.

A várható érték meghatározása. Ha a $(0,t)$ időközben előforduló $A\to B$ átmenetek várható száma véges, ami esetünkben nyilvánvaló, úgy az előállítható a következő alakban:

$$m(t)=\sum_{n=0}^\infty[1-W(t,n)]=\sum_{n=0}^\infty[C(t)*G_n(t)]. \tag{23}$$

(23) Laplace—Stieltjes transzformáltja tagonként képezhető és így azt nyerjük, hogy:

$$\int_0^\infty e^{-st}dm(t)=\frac{p}{p+s}\,\frac{1}{1-\varphi(s)}, \tag{24}$$

amely konvergens, ha $\Re(s) > 0$. Mint a megújuló sokaságok elméletéből ismeretes (W. FELLER [2]) innen egyértelműen meghatározható $m(t)$ nemcsökkenő átlagfüggvény.

A momentumok meghatározása. Ha $W(t, n)$ r-edik momentuma véges, úgy a következőképpen állítható elő:

$$m_r(t) = \sum_{n=0}^{\infty} [(n+1)^r - n^r][1 - W(t, n)]. \tag{25}$$

Ennek Laplace—Stieltjes transzformáltja $\Re(s) > 0$-ra

$$\int_0^{\infty} e^{-st} dm_r(t) = \frac{p}{p+s} \sum_{n=0}^{\infty} [(n+1)^r - n^r][\varphi(s)]^n = \frac{p}{p+s} \sum_{j=1}^{r} \mathfrak{S}_r^j \frac{j![\varphi(s)]^{j-1}}{[1-\varphi(s)]^j}, \tag{26}$$

ahol $\mathfrak{S}_r^j$ a másodfajú Stirling számokat jelöli. Itt felhasználtuk a jólismert

$$n^r = \sum_{j=1}^{r} \mathfrak{S}_r^j j! \binom{n}{j} \tag{27}$$

relációt. (26) ismeretében $m_r(t)$ egyértelműen meghatározható.

Stacionárius eset

$W^*(t, n)$ meghatározása. Ha a vizsgált folyamat már végtelen hosszú ideje tart és egy kiszemelt t hosszúságú időintervallumban vizsgáljuk, hogy mi a valószínűsége annak, hogy $\leqq n$ $A \to B$ átmenet fordul elő, úgy ismerni kell, hogy mi a helyzet az intervallum kezdőpontjában. Annak a valószínűsége, hogy a kezdeti időponttól számítva a következő $A \to B$ átmenet $\leqq x$ időtartamon belül következik be, mint ismeretes

$$G^*(x) = \frac{1}{\mu} \int_0^x [1 - G(y)]\, dy, \tag{28}$$

ahol μ jelenti $G(x)$ átlagát, azaz

$$\mu = \int_0^{\infty} [1 - G(x)]\, dx. \tag{29}$$

Ennek indokolása a következőképpen történik: Ha ζ_u-val jelöljük u időpontnak a közvetlen utána következő $A \to B$ átmenettől vett távolságát, úgy feltételeink mellett a ζ_u által leírt folyamatra alkalmazható J. L. DOOB [3] munkájában kimondott 12. tétel, amely szerint létezik $\lim\limits_{u \to \infty} P(\zeta_u \leqq x) = G^*(x)$ határeloszlás és ezt (28) szolgáltatja.

$G^*(x)$ eloszlásfüggvény ismeretében könnyen felírható $W^*(t, n)$. Ugyanis $W^*(t, n)$ hasonlóan határozható meg, mint $W(t, n)$, csupán η_0 helyére egy olyan valószínűségi változó lép, amelynek eloszlásfüggvénye $G^*(x)$ és így

$$W^*(t, n) = 1 - G^*(t) * G_n(t). \tag{30}$$

Mivel esetünkben

$$\int_0^\infty e^{-sx} dG^*(x) = \frac{1-\varphi(s)}{\mu s}, \tag{31}$$

(20) felhasználásával az adódik, hogy $\Re(s) > 0$-ra

$$\int_0^\infty e^{-st} W^*(t, n) dt = \frac{1}{s} - \frac{[1-\varphi(s)][\varphi(s)]^n}{\mu s^2}, \tag{32}$$

ahonnan $W^*(t, n)$ egyértelműen meghatározható.

A várható érték meghatározása. Stacionárius esetben t időtartam alatt bekövetkező események várható száma

$$m^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} [1 - W^*(t, n)] = \frac{t}{\mu}, \tag{33}$$

amely egyszerű számítással adódik és mint az előre is várható.

A momentumok meghatározása. Amennyiben a magasabbrendű momentumok végesek, az előbbiekhez hasonlóan nyerjük, hogy az r-edik momentum

$$m_r^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} [(n+1)^r - n^r] [1 - W^*(t, n)] \tag{34}$$

és ennek Laplace—Stieltjes transzformáltja (26)-hoz hasonlóan

$$\int_0^\infty e^{-st} dm_r^*(t) = \frac{1}{\mu s} \sum_{j=1}^{r} \mathfrak{S}_r^j \frac{j! [\varphi(s)]^{j-1}}{[1-\varphi(s)]^{j-1}}, \tag{35}$$

amely $\Re(s) > 0$-ra konvergens és innen $m_r^*(t)$ egyértelműen meghatározható.

B állapotban való tartózkodás időtartama

Mint láttuk az egymást követő $A \to B$ átmenetek időpontjai közötti távolságok eloszlásfüggvényét $G(x)$-et (16) szolgáltatja. Viszont, ha $G(x)$-et ismerjük, úgy (16)-ból meghatározható $D(x)$. Mivel $G(x)$ Laplace—Stieltjes transzformáltja $\varphi(s)$ és $C(x)$ Laplace—Stieltjes transzformáltja: $p\,(p+s)$, következőleg (16)-ból $\Re(s) \geqq 0$-ra:

$$\int_0^\infty e^{-sx} dD(x) = \frac{\varphi(s)(p+s)}{s}, \tag{36}$$

ahonnan $D(x)$ eloszlásfüggvény egyértelműen meghatározható. Legyen $D(x)$ n-szeres konvolúciója $D_n(x)$. Ez nagyon egyszerűen meghatározható (36) segítségével, ugyanis eszerint $D_n(x)$ Laplace—Stieltjes transzformáltja $\Re(s) \geqq 0$-ra

$$\int_0^\infty e^{-sx} dD_n(x) = \left[\frac{\varphi(s)(p+s)}{s}\right]^n, \tag{37}$$

ahonnan $D_n(x)$ meghatározható. Most $D_0(x)=0$, ha $x<0$ és $D_0(x)=1$, ha $x \geqq 0$.

$\Omega(t,z)$ és $\Omega^*(t,z)$ valószínűségi eloszlásfüggvények meghatározására hivatkozunk [1] dolgozatunkra. Nem stacionárius esetben annak a valószínűsége, hogy $(0,t)$ időintervallumban a B állapotban való tartózkodás összhossza $\leqq z$ [1] dolgozatunk eredménye szerint (feltéve, hogy $u=0$ időpontban A állapotban van a folyamat):

$$(38) \qquad \Omega(t,z)=\begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-p(t-z)} \dfrac{[p(t-z)]^n}{n!} D_n(z) & \text{ha } 0 \leqq z \leqq t \\ 1 & \text{ha } z \geqq t \end{cases}$$

és stacionárius esetben

$$(39) \quad \Omega^*(t,z)=\begin{cases} \left\{\dfrac{1}{1+p\vartheta} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-p(t-z)} \dfrac{[p(t-z)]^n}{n!}\right\} \left\{D_n(z)+p\int_0^z [1-D(x)] D_n(z-x)\,dx\right\} & \text{ha } 0 \leqq z < t \\ 1 & \text{ha } z \geqq t, \end{cases}$$

ahol ϑ jelenti $D(x)$ átlagát, azaz:

$$(40) \qquad \vartheta=\int_0^{\infty} [1-D(x)]\,dx.$$

Megjegyezzük, hogy $\Omega^*(t,z)$-nek $z=t$ helyen

$$(41) \qquad \frac{p}{1+p\vartheta} \int_t^{\infty} [1-D(x)]\,dx$$

nagyságú ugrása van.

Az $\Omega(t,z)$ és $\Omega^*(t,z)$ valószínűségek is egyszerűen előállíthatók Laplace-transzformáció segítségével, mégpedig ha $t-z=a$ (állandó) esetre szorítkozunk és $\Omega(a+z,z)$, illetve $\Omega^*(a+z,z)$ z szerinti Laplace-transzformáltját képezzük az a paraméter mellett. Ekkor ugyanis

$$(42) \qquad \int_0^{\infty} e^{-sz} \Omega(a+z,z)\,dz=\frac{1}{s} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-pa} \frac{(pa)^n}{n!} \left[\frac{\varphi(s)(p+s)}{s}\right]^n=\frac{1}{s} e^{-a[p-(p+s)\varphi(s)]}$$

és hasonlóan

$$(43) \qquad \int_0^{\infty} e^{-sz} \Omega^*(a+z,z)\,dz=\frac{(p+s)(1-\varphi(s))}{(1+p\vartheta)s^2} e^{-a[p-(p+s)\varphi(s)]}.$$

A Laplace-transzformáltak megfordítása segítségével nyerjük $\Omega(a+z,z)$, illetve $\Omega^*(a+z,z)$-et. Ezekből $a=t-z$ helyettesítéssel adódik a kívánt $\Omega(t,z)$ és $\Omega^*(t,z)$ valószínűség eloszlásfüggvény.

A B állapotban való tartózkodás időtartamának átlaga nem stacionárius esetben:

$$(44) \qquad \tau(t)=\int_0^t [1-\Omega(t,z)]\,dz$$

és ennek Laplace—Stieltjes transzformáltja $\Re(s)>0$-ra

$$(45)\qquad \int_0^\infty e^{-st}d\tau(t)=\frac{1}{s}-\frac{1}{p+s}\sum_{n=0}^{\infty}[\varphi(s)]^n=\frac{1}{s}-\frac{1}{(p+s)[1-\varphi(s)]}.$$

Stacionárius esetben

$$(46)\qquad \tau^*(t)=\int_0^t[1-\Omega^*(t,z)]dz=\frac{pt}{1+p\vartheta},$$

mint az egyszerű számítással adódik.

A magasabbrendű momentumok meghatározásával nem foglalkozunk, erre nézve utalunk [1] dolgozatunkra.

Amint a fenti tárgyalásból kitűnik, ha ismerjük $G(x)$ eloszlásfüggvényt, úgy előállítva ennek Laplace—Stieltjes transzformáltját $\varphi(s)$-et, a kérdéses valószínűségek mind meghatározhatók. Az alábbiakban olyan eseteket fogunk tárgyalni, midőn a $G(x)$ eloszlásfüggvényt nem ismerjük, de kerülő úton meg tudjuk határozni az $m(t)$ átlagfüggvényt. Ha ismerjük $m(t)$-t, úgy (26) *segítségével a következőképpen határozható meg $\varphi(s)$:*

$$(47)\qquad \varphi(s)=\int_0^\infty e^{-sx}dG(x)=1-\frac{p}{p+s}\,\frac{1}{\int_0^\infty e^{-st}dm(t)},$$

és innen $G(x)$ átlaga

$$(48)\qquad \mu=\int_0^\infty x\,dG(x)=\lim_{t\to\infty}\frac{t}{m(t)}.$$

Ha $P(t)$ jelenti annak a valószínűségét, hogy t időpontban A állapotban, van a rendszer és $P=\lim_{t\to\infty}P(t)$, úgy [1] dolgozatunk eredményei alapján felírhatjuk, hogy $\mu=1/pP$.

Dolgozatunknak ez a főgondolata: Vannak esetek, midőn $G(x)$ meghatározása vagy nem vihető véghez, vagy nagy nehézségekkel jár s ugyanakkor $m(t)$ egyszerűen kiszámítható és ennek ismeretében egyszerűen adódik $\varphi(s)$, $G(x)$ Laplace—Stieltjes transzformáltja. $\varphi(s)$ ismeretében pedig $G(x)$ egyértelműen meghatározható, és így a jelenlegi fejezet eredményei alkalmazhatók problémáink megoldására.

Előre bocsátjuk továbbá, hogy a következő két fejezetben tárgyalt speciális folyamatoknál hasonló jelöléseket alkalmazunk, mint a fent tárgyalt általános esetnél.

3. §. A kitűzött probléma megoldása

Mint könnyen belátható, az m-számú egymástól független történések folyamatából álló rendszerben azon időpontok, midőn a rendszer E_0 állapotban van, a folyamat Markov-pontjait alkotják. Az E_0 állapotban való tartózkodás időtartamai független valószínűségi változók ugyanazon $C(x)=1-e^{-mpx}$ $(x\geqq 0)$ eloszlásfüggvénnyel. Az egymást követő *nem*-E_0 $(E_1, E_2, \ldots, E_m$ egyike) állapotban való tartózkodás időtartamai szintén független valószínűségi változók ugyanazon $D(x)$ eloszlásfüggvénnyel, amelyet egyelőre nem ismerünk. Most a második fejezetben tárgyalt folyamattal állunk szemben. E_0 állapotnak ott A felel meg, *nem*-E_0-nak B állapot és az $E_0\to E_1$ átmeneteknek az $A\to B$ átmenetek. Jelölje most az egymást követő $E_0\to E_1$ átmenetek időpontjai közötti távolság eloszlásfüggvényét $G(x)$.

Legyen $G(x)$ Laplace—Stieltjes transzformáltja $\Re(s)\geqq 0$-ra

$$(49)\qquad \varphi(s)=\int_0^\infty e^{-sx}\,dG(x).$$

Ennek ismeretében az előző fejezet eredményei felhasználásával a kérdéses valószínűségek meghatározhatók.

Így $W_1(t,n)$ annak a valószínűsége, hogy $(0,t)$ közben $\leqq n$, $E_0\to E_1$ átmenet fordul elő, a következő kifejezés segítségével határozható meg

$$(50)\qquad \int_0^\infty e^{-st}W_1^*(t,n)\,dt=\frac{1}{s}-\frac{mp}{mp+s}\,\frac{[\varphi(s)]^n}{s},\quad (\Re(s)>0).$$

Stacionárius esetben $W_1^*(t,n)$ a következő transzformált segítségével határozható meg

$$(51)\qquad \int_0^\infty e^{-st}W_1^*(t,n)\,dt=\frac{1}{s}-\frac{[1-\varphi(s)][\varphi(s)]^n}{\mu s^2},\quad (\Re(s)>0).$$

Itt μ $G(x)$ átlagát jelöli.

Esetünkben (36) szerint $\Re(s)\geqq 0$-ra fennáll

$$(52)\qquad \int_0^\infty e^{-sx}\,dD(x)=\frac{mp+s}{mp}\,\varphi(s).$$

Most $D(x)$ átlaga $\vartheta=\mu-1/mp$ és ha n-szeres konvolúciója $D_n(x)$, úgy (40) szerint

$$(53)\qquad \Omega_1(t,z)=\sum_{n=0}^{\infty}e^{-mp(t-z)}\frac{[mp(t-z)]^n}{n!}D_n(z),\quad (0\leqq z\leqq t),$$

és (39) alapján:

$$(54)\qquad \Omega_1^*(t,z)=$$

$$=\frac{1}{1+mp\vartheta}\sum_{n=0}^{\infty}e^{-mp(t-z)}\frac{[mp(t-z)]^n}{n!}\cdot\left\{D_n(z)+mp\int_0^z[1-D(x)]D_n(z-x)\,dx\right\},$$

$$(0\leqq z<t).$$

Amint látjuk, az összes kérdésre válasz adható ebben az esetben, ha ismerjük $\varphi(s)$-t $G(x)$ Laplace—Stieltjes transzformáltját. Ez (47) formula segítségével $m_1(t)$ meghatározásával kapható meg. (8) szerint (4) figyelembevételével:

$$m_1(t) = \frac{mp}{p^m} \int_0^t [f(u)]^m du, \tag{55}$$

és ennek Laplace—Stieltjes transzformáltja:

$$\int_0^\infty e^{-st} dm_1(t) = \frac{mp}{p^m} \int_0^\infty e^{-st} [f(t)]^m dt, \tag{56}$$

mely $\Re(s) > 0$-ra konvergens.

Így (47) szerint az adódik, hogy

$$\varphi(s) = 1 - \frac{p^m}{mp+s} \left\{ \int_0^\infty e^{-st} [f(t)]^m dt \right\}^{-1}. \tag{57}$$

Miután $\varphi(s)$-et meghatároztuk a kérdéses valószínűségek is egyszerűen megkaphatók. Megjegyezzük, hogy adott $H(x)$ mellett $f(t)$-t (1) megoldása szolgáltatja. Most $G(x)$ eloszlás átlaga:

$$\mu = \int_0^\infty x d G(x) = \frac{(1+p\alpha)^m}{mp}, \tag{58}$$

ahol $\alpha = M\{\chi_k\}$, azaz χ_k várható értéke.

Megjegyezzük, hogy módszerünk nem alkalmazható az $E_k \rightarrow E_{k+1}$ (illetve $E_{k+1} \rightarrow E_k$) $k \neq 0$ átmenetek tanulmányozására, ugyanis az ilyen átmenetek közti időtartamok függnek attól, hogy abban a t pillanatban, amikor az $E_k \rightarrow E_{k+1}$ (illetve $E_{k+1} \rightarrow E_k$) átmenet megtörténik, a már folyamatban lévő történések mióta vannak folyamatban. Kivétel az az eset, midőn χ_k-k exponenciális eloszlásúak, amely könnyen tárgyalható ezzel a módszerrel. A $k=0$ esetben azonban a vázolt módszer alkalmazható problémánk általános megoldására.

4. §. *Poisson-folyamat által származtatott történésfolyamat*

A fentemlített módszer alkalmazására felhozunk egy másik példát, mellyel az rendkívül egyszerűen, különben pedig még speciális esetben is igen körülményesen tárgyalható. Ez a példa egyébként, mint látni fogjuk, szoros kapcsolatban áll az előzővel.

Tekintsünk egy λ sűrűségű Poisson-folyamatot $0 \leqq u$ időpontokban. Ekkor annak a valószínűsége, hogy u és $u+\Delta u$ időpontok között *egy esemény előfordul:* $\lambda \Delta u + o(\Delta u)$ és hogy egynél több esemény fordul elő: $o(\Delta u)$. Feltesszük, hogy minden egyes esemény létrehoz egy $\chi_k (k = 1, 2, \ldots)$ ideig tartó történést, ahol χ_k-k független valószínűségi változók ugyanazon $P(\chi_k \leqq x) = H(x)$ eloszlásfüggvénnyel. Legyen $\chi_k > 0$ azaz $H(0) = 0$. Ezt a folyamatot tette vizsgálat tárgyává RÉNYI A. [4] munkájában és megállapította, hogy egy adott időpontban éppen folyamatban lévő történések száma Poisson-eloszlást mutat.

Azt mondjuk, hogy a folyamat u időpontban E_k állapotban van, ha az éppen folyó történések száma k. Jelölje annak a valószínűségét, hogy $(0, t)$ időközben az $E_0 \to E_1$ átmenetek száma $\leqq n$, $W_1(t, n)$ és ugyanezt a valószínűséget egy végtelen hosszú ideje tartó folyamatból kiragadott t hosszúságú intervallumra, azaz stacionárius állapot esetén: $W_1^*(t, n)$.

Jelölje $(0, t)$ időközben a *nem* $-E_0$ azaz E_j, $(j = 1, 2, \ldots)$ állapotok egyikében való tartózkodás időtartamának eloszlásfüggvényét, azaz annak a valószínűségét, hogy ez az időtartam $\leqq z$ $\Omega_1(t, z)$ és ugyanezt stacionárius esetre $\Omega_1^*(t, z)$.

Mint könnyen belátható esetünkben azon időpontok, midőn a rendszer E_0 állapotban van a folyamat Markov-pontjait alkotják. Az E_0 állapotban való tartózkodás időtartamai független valószínűségi változók ugyanazon $C(x) = 1 - e^{-\lambda x} (x \geqq 0)$ eloszlásfüggvénnyel és a *nem* $-E_0$ állapotban való tartózkodás időtartamai szintén független valószínűségi változók ugyanazon $D(x)$ eloszlásfüggvénnyel, amelyet egyelőre nem ismerünk. Ez a folyamat megegyezik a második fejezetben tárgyalt folyamattal, ha E_0-t A-val azonosítjuk, *nem* $-E_0$-t B-vel és az $E_0 \to E_1$, átmenetek időpontjainak az $A \to B$ átmenetek időpontjait feleltetjük meg. Ekkor az egymást követő $E_0 \to E_1$, átmenetek időpontjai közötti távolság eloszlásfüggvénye: $G(x) = C(x) * D(x)$. $G(x)$ átlagát jelöljük μ-vel. Legyen $\Re(s) \geqq 0$-ra:

$$\varphi(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dG(x), \tag{59}$$

úgy (16) alapján

$$\int_0^\infty e^{-sx} dD(x) = \frac{\lambda + s}{\lambda} \varphi(s). \tag{60}$$

Jelöljük $D(x)$ n-szeres konvolúcióját $D_n(x)$-szel és $D(x)$ átlagát ϑ-val; $\vartheta = \mu - 1/\lambda$. Ekkor az előző fejezetek alkalmazásával tüstént felírható, hogy

$$\int_0^\infty e^{-st} W_1(t, n) dt = \frac{1}{s} - \frac{\lambda}{\lambda + s} \frac{[\varphi(s)]^n}{s}, \tag{61}$$

$$\int_0^\infty e^{-st} W_1^*(t, n) dt = \frac{1}{s} - \frac{[1 - \varphi(s)] [\varphi(s)]^n}{\mu s^2} \tag{62}$$

és

$$\Omega_1(t,z) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda(t-z)} \frac{[\lambda(t-z)]^n}{n!} D_n(z), \qquad (0 \leqq z \leqq t), \tag{63}$$

$$\Omega_1^*(t,z) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+\lambda\vartheta} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda(t-z)} \dfrac{[\lambda(t-z)]^n}{n!} \right\} D_n(z) + \lambda \displaystyle\int_0^z [1-D(x)]\, D_n(z-x)\,dx \Big\} & \text{ha } 0 \leqq z < t, \\ 1 & \text{ha } z \geqq t. \end{cases} \tag{64}$$

Amint látjuk, a szóbanforgó valószínűségek meghatározását $\varphi(s)$ meghatározásra vezettük vissza, amit viszont az átlagfüggvény kerülő úton való meghatározása segítségével állítunk elő.

A fenti problémával Geiger—Müller számlálókkal kapcsolatban C. LEVERT és W. L. SCHEEN [5], L. KOSTEN [6] és W. FELLER [7] munkájukban foglalkoztak, véletlen intervallumoknak egy egyenesen való elhelyezkedésével kapcsolatosan pedig C. DOMB [8] foglalkozott munkájában. A felsorolt szerzők csupán $\chi_k = \alpha$ (állandó) esetet tárgyalják. LEVERT és SCHEEN a problémát úgy oldják meg, hogy a t hosszúságú időintervallumot egy körkerülettel helyettesítik és az ily módon módosított problémára bonyolult többdimenziós integrálokkal állítják elő a megfelelő $W_1(t, n)$ valószínűséget, ami a mienktől természetesen különbözik és meghatározzák ennek faktoriális momentumait. KOSTEN kritika tárgyává teszi LEVERT és SCHEEN említett tárgyalását és a stacionárius esetre megadja az exakt $W_1^*(t, n)$ megoldást és kiszámítja ennek faktoriális momentumait. Módszere parciális differenciálegyenletek és integrálegyenletek rendszeréből álló egyensúlyi egyenletek Haeviside-operátor kalkulussal való megoldásán alapszik. W. FELLER valószínűségi változók összegezésére vezeti vissza a problémát és ezáltal az előző tárgyalásokat leegyszerűsíti és pontosabb becslést ér el. DOMB $\Omega_1^*(t, z)$ eloszlásfüggvényt, legalább is annak Laplace transzformáltját határozza meg, rekurzív formulák segítségével, amelyeket Laplace-transzformáció segítségével old meg.

Megmutatjuk, hogy a fenti eredmények milyen egyszerűen adódnak az általunk bevezetett módszerrel.

Csupán $\varphi(s)$ meghatározására van szükségünk. Ezt (47) szerint az átlagfüggvény meghatározása segítségével kapjuk meg.

Ha $m_1(t)$ jelenti a $(0, t)$ intervallumban előforduló $E_0 \to E_1$ átmenetek várható számát, úgy $m_1(t+\Delta t) - m_1(t)$ a $(t, t+\Delta t)$ intervallumban előforduló átmenetek várható száma. Legyen $P_0(t)$ annak a valószínűsége, hogy t időpontban E_0 állapotban van a rendszer:

$$P_0(t) = \begin{cases} e^{-\lambda t} & \text{ha } 0 \leqq t \leqq \alpha \\ e^{-\lambda\alpha} & \text{ha } t > \alpha. \end{cases} \tag{65}$$

Ugyanis t időpontban akkor van E_0 állapotban a rendszer, ha $(0, t)$ illetve $(t-\alpha, t)$ időintervallumban nem fordul elő egy esemény sem.

Most fennáll

(66) $$m_1(t+\Delta t)-m_1(t)=P_0(t)\lambda\Delta t+o(\Delta t).$$

Ugyanis, ha t időpontban E_0 állapotban van a rendszer, úgy $(t, t+\Delta t)$ időközben egyetlen $E_0 \rightarrow E_1$ átmenet $\lambda\Delta t+o(\Delta t)$ valószínűséggel fordul elő és egyéb esetekben a $(t, t+\Delta t)$ intervallumban előforduló $E_0 \rightarrow E_1$ átmenetek várható száma: $o(\Delta t)$.

(66)-ból;

(67) $$m_1'(t)=\begin{cases} e^{-\lambda t}\lambda & \text{ha } 0 \leqq t \leqq \alpha \\ e^{-\lambda\alpha}\lambda & \text{ha } t \geqq \alpha. \end{cases}$$

Így:

(68) $$\int_0^\infty e^{-st}\,dm_1(t)=\frac{\lambda}{\lambda+s}\,\frac{s+\lambda e^{-(\lambda+s)\alpha}}{s},$$

ahonnan (47) felhasználásával

(69) $$\varphi(s)=\frac{\lambda e^{-\alpha(\lambda+s)}}{s+\lambda e^{-\alpha(\lambda+s)}}.$$

Ennek ismeretében a kérdéses valószínűségek (61)—(64) formulák segítségével meghatározhatók.

Ezek előrebocsátása után rátérünk az általános esetre, midőn χ_k eloszlásfüggvénye $H(x)$ tetszőleges. A $(0, t)$ intervallumban kezdődő történéseket tekintve, mint azt RÉNYI [4] munkájában megmutatta, t időpontban E_0 állapotban

(70) $$P_0(t)=e^{-\lambda\int\limits_0^t [1-H(x)]\,dx}$$

valószínűséggel van a rendszer. Ennek igazolását mi is megadjuk.

Felírható, hogy

(71) $$P_0(t)=e^{-\lambda t}+\lambda\int_0^t e^{-\lambda(t-x)}P_0(x)H(x)\,dx.$$

Ugyanis t időpontban úgy lehet E_0 állapotban a rendszer, hogy $(0, t)$ időközben nem fordul elő esemény, aminek a valószínűsége $e^{-\lambda t}$, vagy hogy $(0, t)$ időközben $t-x$ időpontban fordul elő az első $E_0 \rightarrow E_1$ átmenet. Ennek sűrűségfüggvénye: $e^{-\lambda(t-x)}\lambda$. Az ebben a pillanatban kezdődő történés befejeződik t időpontig, aminek a valószínűsége $H(x)$, és a $(t-x, t)$ időközben kezdődő történéseket tekintve azok mindegyike befejeződik a t időpontig, aminek a valószínűsége $P_0(x)$.

Legyen $g(t)=e^{\lambda t}P_0(t)$, úgy

(72) $$g(t)=1+\lambda\int_0^t g(x)H(x)\,dx.$$

Itt $g(0)=1$ és

(73) $$g'(t)=\lambda g(t)H(t),$$

ahonnan

$$g(t)=e^{\lambda\int_0^t H(x)\,dx} \tag{74}$$

és így

$$P_0(t)=e^{-\lambda\int_0^t [1-H(x)]\,dx}. \tag{75}$$

Határozzuk meg most a $(t, t+\Delta t)$ közben előforduló $E_0 \to E_1$ átmenetek várható számát. Erre fennáll

$$m_1(t+\Delta t)-m_1(t)=P_0(t)\lambda\Delta t+o(\Delta t). \tag{76}$$

Ugyanis, ha t időpontban E_0 állapotban van a rendszer, úgy annak a valószínűsége, hogy $(t, t+\Delta t)$ közben egyetlen $E_0 \to E_1$ átmenet fordul elő: $\lambda\Delta t+o(\Delta t)$, és hogy egynél több $E_0 \to E_1$ átmenet annak a valószínűsége: $o(\Delta t)$. Ha t időpontban *nem* —E_0 állapotban van a rendszer, úgy a $(t, t+\Delta t)$ közben előforduló $E_0 \to E_1$ átmenetek várható száma: $o(\Delta t)$. (76)-ból.

$$m_1'(t)=\lambda P_0(t), \tag{77}$$

és így

$$\int_0^\infty e^{-st}\,dm_1(t)=\lambda\int_0^\infty e^{-st}P_0(t)\,dt=\lambda\int_0^\infty e^{-st-\lambda\int_0^t [1-H(x)]\,dx}\,dt, \tag{78}$$

ahonnan (47) felhasználásával az adódik, hogy

$$\varphi(s)=1-\frac{\lambda}{\lambda+s}\left\{\int_0^\infty e^{-st-\lambda\int_0^t [1-H(x)]\,dx}\,dt\right\}^{-1}. \tag{79}$$

Ennek ismeretében a (61)—(64) formulák segítségével kiszámíthatók a kérdéses valószínűségek.

Most

$$\mu=\int_0^\infty x\,dG(x)=\frac{e^{\lambda\alpha}}{\lambda}, \tag{80}$$

ahol $\alpha=M(\chi_k)$.

Ezen utóbbi fejezetben tárgyalt folyamat szoros összefüggésben áll a korábban tárgyalt m számú történések folyamatából álló rendszerrel. Ez ugyanis azt a határesetet képezi, midőn: $m\to\infty, p\to 0$ de $mp=\lambda$ (állandó).

Erre nézve elegendő megmutatni, hogy (57) formula a fenti határátmenettel (79)-be megy át. Tekintetbe véve, hogy (1) felhasználásával kimutatható, hogy fennáll:

$$f(t)=p-p^2\int_0^t [1-H(x)]\,dx+o(p^2), \tag{81}$$

így

$$(82)\qquad \left[\frac{f(t)}{p}\right]^m = \left[1 - p\int_0^t [1-H(x)]\,dx + o(p)\right]^m \to e^{-\lambda\int_0^t [1-H(x)]\,dx}, \text{ ha } m \to \infty,$$

adódik és ennek alkalmazásával (57)-ből következik (79).

Az, hogy a második folyamat az előzőnek határesete, szemléletből is nyilvánvaló, ha tekintetbe vesszük, hogy a Poisson-folyamat a „Bernoulli-folyamat" határesete.

PÉLDA: Legyen $\chi_k = \alpha$ (állandó), azaz $H(x) = 0$ ha $x < \alpha$ és $H(x) = 1$ ha $x \geqq \alpha$. Ekkor (79) szerint

$$(83)\qquad \varphi(s) = \frac{\lambda e^{-\alpha(\lambda+s)}}{s+\lambda e^{-\alpha(\lambda+s)}},$$

ami megegyezik (69)-cel. Innên

$$(84)\qquad G(x) = \sum_{j=1}^{\left[\frac{x}{\alpha}\right]} (-1)^{j-1} \frac{e^{-j\alpha\lambda}\lambda^j}{j!} (x-j\alpha)^j,$$

és (60) szerint $D(x)$ Laplace—Stieltjes transzformáltja

$$(85)\qquad \int_0^\infty e^{-sx}\,dD(x) = \frac{\lambda+s}{\lambda}\,\frac{\lambda e^{-\alpha(\lambda+s)}}{s+\lambda e^{-\alpha(\lambda+s)}},$$

ahonnan

$$(86)\qquad D(x) = \sum_{j=1}^{\left[\frac{x}{\alpha}\right]} (-1)^{j-1} e^{-j\alpha\lambda}\left[\frac{\lambda^j (x-j\alpha)^j}{j!} + \frac{\lambda^{j-1}(x-j\alpha)^{j-1}}{(j-1)!}\right],$$

és hasonlóan

$$(87)\qquad D_n(x) = \sum_{j=n}^{\left[\frac{x}{\alpha}\right]} (-1)^{j-n}\binom{j-1}{n-1} e^{-j\alpha\lambda}\left[\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{\lambda^{j-k}(x-j\alpha)^{j-k}}{(j-k)!}\right].$$

(61) szerint

$$(88)\qquad \begin{aligned}\int_0^\infty e^{-st} W_1(t,n)\,dt &= \frac{1}{s} - \frac{\lambda}{\lambda+s}\,\frac{[\varphi(s)]^n}{s} = \\ &= \frac{1}{s} - \frac{\lambda}{\lambda+s}\sum_{j=n}^{\infty}(-1)^{j-n}\binom{j-1}{n-1}\frac{\lambda^j e^{-j\alpha(\lambda+s)}}{s^{j+1}},\end{aligned}$$

ahonnan

$$(89)\qquad W_1(t,n) = 1 + (-1)^n \sum_{j=n}^{\left[\frac{t}{\alpha}\right]}\binom{j-1}{n-1} e^{-j\alpha\lambda}\left[e^{-\lambda(t-j\alpha)} - \sum_{k=0}^{j}(-1)^k \frac{[\lambda(t-j\alpha)]^k}{k!}\right],$$

és (62) szerint

$$(90)\qquad \begin{aligned}\int_0^\infty e^{-st} W_1^*(t,n)\,dt &= \frac{1}{s} - \frac{1-\varphi(s)}{\mu s}\,\frac{[\varphi(s)]^n}{s} = \\ &= \frac{1}{s} - \frac{1}{\mu}\sum_{j=n}^{\infty}(-1)^{j-n}\binom{j}{n}\frac{\lambda^j e^{-j\alpha(\lambda+s)}}{s^{j+2}},\end{aligned}$$

ahol μ jelenti $G(x)$ átlagát, melynek értéke

$$\mu = e^{\alpha\lambda}/\lambda. \tag{91}$$

Innen

$$W_1^*(t,n) = 1 - \sum_{j=n}^{\left[\frac{t}{\alpha}\right]} (-1)^{j-n} \binom{j}{n} \frac{e^{-\alpha\lambda(j+1)} \lambda^{j+1} (t-j\alpha)^{j+1}}{(j+1)!}, \tag{92}$$

megegyezésben L. KOSTEN [6] eredményével.

$\Omega_1(t,z)$ és $\Omega_1^*(t,z)$ eloszlásfüggvények felírása (63) és (64) szerint $D_n(x)$ (87) kifejezése segítségével végezhető el. Most $D(x)$ átlaga: $\vartheta = (e^{\alpha\lambda}-1)/\lambda$. $\Omega_1(t,z)$ és $\Omega_1^*(t,z)$ kifejezése csak látszólag tartalmaz végtelen sok tagot, ugyanis $D_n(x)=0$ ha $n > x/\alpha$.

Magyar Tudományos Akadémia
Alkalmazott Matematikai Intézete.

IRODALOM

[1] L. TAKÁCS: Occurence and coindidence phenomena in case of happenings with arbitrary distribution law of duration [Hung. Acta. Math. **2** (1951), 275—298.]

[2] W. FELLER: On the integral equation of renewal theory [Annals of Mathematical Statistics **12** (1941), 243—267].

[3] J. L. DOOB: Renewal theory from the point of view of the theory of probability. [Transactions of the American Mathematical Society **63** (1948), 422—438.]

[4] A. RÉNYI: On some problems concerning Poisson processes [Publicationes Mathematicae Debrecen, **2** (1951), 66—79].

[5] C. LEVERT and W. L. SCHEEN: Probability fluctuation of discharges in a Geiger—Müller counter produced by cosmic radiation [Physica **10** (1943), 225—238].

[6] L. KOSTEN: On the frequency distribution of the number of discharges counted by a Geiger—Müller counter in a constant interval. [Physica, **10** (1943), 749—756.]

[7] W. FELLER: On probability problems in the theory of counters [Courant Anniversary Volum, New-York. (1948), 105—115.]

[8] C. DOMB: The problem of random intervals on a line [Proc. Cambridge, Phil. Soc. **43** (1947), 329—341.]

„VÁRAKOZÁSI IDŐ"-PROBLÉMÁK TÁRGYALÁSA MARKOV-FOLYAMATOK SEGÍTSÉGÉVEL

TAKÁCS LAJOS

Bemutatta Rényi Alfréd lev. tag az 1953. május 4-én tartott felolvasó ülésen

Bevezetés

„Várakozási idő"-problémák alatt általában a következő feladattal kapcsolatos kérdéseket értjük:

Tekintsünk egy kiszolgáló berendezést, amelyhez $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n < \ldots$ időpontokban érkezik egy-egy személy. Az érkezési időpontok $\{t_n\}$ sorozatát valamilyen valószínűségi törvény határozza meg. Az egymás után érkező személyeket egyetlen kiszolgáló érkezési sorrendben szolgálja ki a következő módon: Ha egy személy olyan időpontban érkezik a kiszolgáló berendezéshez, amidőn nincs sem várakozó sem, kiszolgálás alatt álló személy, úgy azonnal megkezdődik kiszolgálása. Ha a kiszolgáló egy érkező személy időpontjában el van foglalva, úgy ennek a személynek a kiszolgálása abban az időpillanatban kezdődik meg, amikor a közvetlen előtte érkező személy kiszolgálása befejeződött. Feltételézzük, hogy az egyes személyek kiszolgálásának időtartamai pozitív valószínűségi változók. Jelöljük ezeket rendre $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_n, \ldots$-nel.

Ha megadjuk azt a valószínűségi törvényt, amelyet a $\{t_n\}$ és a $\{\chi_n\}$ változók sorozata követ, továbbá a rendszer állapotát $t = 0$ időpontban (a kiszolgáló szabad, vagy mennyi idő mulva lesz szabad stb.) úgy ezzel az említett sztochasztikus folyamatot egyértelműen meghatároztuk.

Az említett sztochasztikus folyamattal kapcsolatban többek között a következő kérdések merülnek fel: Mennyi az n-ik érkező személy várakozási ideje? Mennyi egy esetleg t időpontban érkező személy várakozási ideje? Mihez tart a várakozási idő eloszlásfüggvénye, ha $n \to \infty$ illetve $t \to \infty$? Mennyi egy adott pillanatban a várakozó személyek száma? A kiszolgálási periódusok és szünetek milyen törvényt követnek?

Mi az itt felvetett kérdésekkel abban az esetben fogunk foglalkozni, amidőn a $\{t_n\}$ időpontok Poisson-folyamatban előforduló események időpontjait alkotják. Általában feltételezzük, hogy a Poisson-folyamat időben homogén, azaz az eseménysűrűség $\lambda(t) \equiv \lambda$ (állandó), de ahol csak tehetjük, az eredményeket nem homogén esetre is megadjuk. A $\{\chi_n\}$ kiszolgálási idők sorozatáról azt fogjuk feltenni, hogy azok egyforma eloszlású, független, pozitív valószínűségi változók.

Másik érdekes eset az, amidőn a $t_n - t_{n-1}$ ($n = 1, 2, \ldots$; $t_0 = 0$) időkülönbségek egyforma eloszlású, független, pozitív valószínűségi változók.

Erről az esetről csupán néhány szót szólunk. Dolgozatunkban eredetileg ezzel a kérdéssel is foglalkoztunk, de D. V. LINDLEYnek időközben megjelent cikke fölöslegessé teszi erre vonatkozó tárgyalásunkat.

Abban az esetben, ha a $\{t_n\}$ időpontok λ sűrűségű Poisson-folyamat eseményeinek időpontjait alkotják A. JA. HINCSIN meghatározta a várakozási idő karakterisztikus függvényét stacionárius állapot feltételezése mellett. HINCSIN ezen eredménye az általunk adott tárgyalásban egyszerűen megkapható. Megoldjuk továbbá a problémát nem stacionárius állapot esetére is, amelyről eddig az volt a vélemény, hogy csak igen körülményesen tárgyalható. A folyamat ugyanis általában nem Markov-folyamat és úgy látszott, hogy a markovizálás végtelen sok egyenletből álló integrodifferenciálegyenlet megoldására vezet. Észrevettük azonban, hogy a folyamat akkor is Markov-féle, ha az állapotot egyetlen mennyiséggel, magával a várakozási idővel írjuk le, és ekkor a probléma egyetlen integrodifferenciálegyenlettel oldható meg.

Szólnunk kell néhány szót több kiszolgáló berendezés esetéről is. Ebben az esetben a „várakozási idő"-problémával csupán olyan egyszerűsítő feltevések mellett foglalkoztak, melyek lényegében egy kiszolgáló berendezés esetére vezetik vissza. Erre vonatkozóan többek között A. K. ERLANG és F. POLLACZEK ért el számos eredményt.

1. §. A probléma kitűzése

Tekintsünk egy Poisson-féle sztochasztikus folyamatot $0 \leqq t$ időpontokban. Legyen az események előfordulásának sűrűsége $\lambda(t)$, ahol $\lambda(t)$ a t időparaméter valós, nemnegatív, folytonos és korlátos függvénye. Poisson-folyamat esetén feltételezzük, hogy *közös pont nélküli időintervallumokban előforduló események számai egymástól függetlenek*, továbbá, hogy *annak a valószínűsége, hogy t és $t+\Delta t$ időpontok között egy esemény előfordul** $\lambda(t)\Delta t+o(\Delta t)$ *és hogy több, mint egy esemény fordul elő* $o(\Delta t)$.

Tegyük fel, hogy azokban az időpontokban, midőn a Poisson-folyamatban előfordul egy esemény, valamely kiszolgáló-berendezéshez egy személy érkezik. Ha a kiszolgáló-berendezés előtt nincs várakozó személy, úgy azonnal megkezdődik ennek kiszolgálása. Ha vannak sorbanállók, úgy addig kell várakoznia, míg a korábban érkezettek kiszolgálása megtörténik és sor kerül reá. Ekkor abban a pillanatban megkezdődik kiszolgálása, midőn az előtte érkező személyé befejeződik. A kiszolgálás történjék érkezési sorrendben és az egyes kiszolgálási időtartamok: $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_n, \ldots$ legyenek független valószínűségi változók ugyanazon $P(\chi_n \leqq x) = H(x)$ eloszlásfüggvénnyel. Feltesszük, hogy valamennyi χ_n pozitív, azaz $H(0)=0$.

* $o(\Delta t)$ olyan függvényt jelöl, melyre $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{o(\Delta t)}{\Delta t} = 0$

Ez a processzus a gyakorlatban számos helyen előfordul, így például telefonközpontokba érkező hívásoknál, repülőgépeknek repülőtérre való leszállásánál, személyeknek pénztár előtt való várakozásánál és egyéb várakozási problémáknál.

A fenti terminológiát a konkrétság kedvéért választottuk; megfogalmazható természetesen elvontan is a probléma.

Egy t időpontban esetleg érkező személy várakozási időtartamát jelöljük $\eta(t)$ valószínűségi változóval. Az $\eta(t)$ valószínűségi függvény által leírt folyamatot *időben homogénnek* nevezzük, ha $\lambda(t) \equiv \lambda$ (időtől független állandó) és *időben nem homogénnek* nevezzük, ha $\lambda(t)$ függ a t időparamétertől.

Legyen $P(\eta(t) \leqq x) = F(t, x)$, azaz $F(t, x)$ annak a valószínűsége, hogy egy t időpontban érkező személy várakozási ideje x-nél nem nagyobb. Legyen továbbá $P(\eta(t_n - 0) \leqq x) = F_n(x)$, azaz annak a valószínűsége, hogy az n-edik érkező személy várakozási ideje legfeljebb x. Itt $t_n (n = 1, 2, \ldots)$ jelenti az n-edik személy érkezési időpontját.

Dolgozatunkban először $F(t, x)$ és $F_n(x)$ meghatározásával fogunk foglalkozni. Ezután azt fogjuk megvizsgálni, hogy milyen feltételek mellett létezik $\lim\limits_{t\to\infty} F(t, x)$ és $\lim\limits_{n\to\infty} F_n(x)$ határeloszlás és ezek hogyan határozhatók meg. Kimutatjuk, hogy általános feltételek mellett léteznek ezek a határeloszlások éspedig megegyeznek egymással. Ez a közös határeloszlásfüggvény szolgáltatja a *stacionárius megoldást*, azaz annak a valószínűségét, hogy ha a folyamat már végtelen hosszú ideje tart, egy tetszőlegesen választott időpontban a várakozási idő legfeljebb x, vagy egy tetszőlegesen választott személy várakozási ideje legfeljebb x.

Ezen kérdések tárgyalása után fogunk foglalkozni a kiszolgálási periódus időtartamának és a sorbanálló személyek számának meghatározásával.

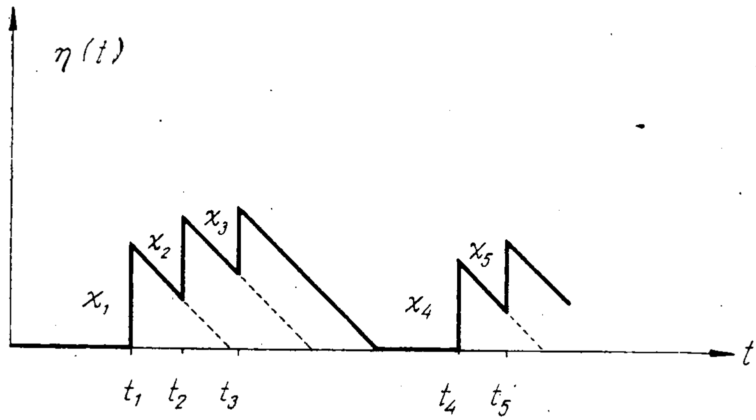
Sorban állások problémájával az irodalomban többen foglalkoztak. Megemlítjük TH. C. FRY [1] könyvét, melyben A. K. ERLANG eredményeire hivatkozva, stacionárius állapot feltételezésével, foglalkozik a sorbanállások törvényeivel. Nevezetesen állandó és exponenciális eloszlást mutató kiszolgálási idők esetén meghatározza az átlagos várakozási időt és annak a valószínűségét, hogy egy adott időpontban a várakozók száma: $j (j = 0, 1, 2, \ldots)$. (Exponenciális eloszlású kiszolgálási idők esetében FRY azzal az általánosabb kérdéssel is foglalkozik, midőn $\nu \geqq 1$ kiszolgáló berendezés van és erre az esetre megadja a várakozási idők eloszlásfüggvényét is.) F. POLLACZEK [2] munkájában azzal az esettel foglalkozik, midőn $\nu \geqq 1$ kiszolgáló berendezés van és az egyes kiszolgáló berendezések csupán minden ν-ik érkező személyt szolgálják ki. Előállítja a várakozási idők eloszlásfüggvényét arra az esetre, midőn egy adott időtartam alatt adott számú személy érkezik a kiszolgáló berendezésekhez és a kiszolgálási idők tetszőleges eloszlásúak. POLLACZEK ezen munkájában az eloszlásfüggvényekre és várható értékeikre több aszimptotikus formulát ad. POLLACZEK többi munkái közül csupán [3]-at említjük még meg, melyben repülőgépek leszállásánál fellépő várakozási problémákkal foglalkozik. A. N. KOLMOGOROV [4] munkájában azt az esetet tárgyalja, midőn az érkező és elmenő személyek időpontjai Poisson-folyamatot alkotnak, azaz a kiszolgálási időtartam exponenciális eloszlású. Legmesszebbmenő A. JA. HINCSIN [5] munkája, melyben a kitűzött problémát stacionárius esetben, tetszőleges kiszolgálási idők mellett tárgyalja és meghatározza a várakozási idő karakterisztikus függvényét. Megemlítjük továbbá D. V. LINDLEY [6] munkáját, amely speciális esetként tartalmazza a stacionárius állapotra vonatkozó Hincsin-féle eredményt. Figyelemre méltó továbbá D. G. KENDALL [7] munkája, amelyben a sorbanállások problémájának igen részletes irodalmi összeállítása található meg.

Mi a következőkben az eddigieknél általánosabb feladatot oldunk meg, nevezetesen az eddig általánosan nem tárgyalt nem stacionárius esetet időben homogén esetben megoldjuk és időben nem homogén esetre is szolgáltatunk eredményeket. Feltételt adunk a stacionárius állapot létezésére és megadjuk az erre vonatkozó megoldást.

Úgy gondoljuk, hogy még az általánosabb problémát is egyszerűbben és rövidebben oldjuk meg, mint sok szerző a speciális problémákat. Az egyszerű megoldás magyarázata a következőkben rejlik: Az eddigi vélemény az volt — lásd pl. W. FELLER ([8] 426. o.) munkáját —, hogy a várakozási idő probléma csak abban a speciális esetben vezet Markov-folyamatra, ha a kiszolgálási idő exponenciális eloszlású és ekkor a rendszer $E_j (j = 0, 1, 2, \ldots)$ állapotokban lehet, ahol E_j azt jelenti, hogy a várakozó és kiszolgálás alatt lévő személyek száma j. Ha a kiszolgálási idő nem exponenciális eloszlású, úgy a folyamat többé nem Markov-féle. Markov-félévé tehető úgy, hogy az állapotteret kibővítjük és az E_j állapotokhoz hozzáveszünk egy folytonos változót, az esetleg éppen kiszolgálás alatt álló személy eddigi kiszolgálási időtartamát. Ekkor viszont — FELLERt idézve — „az új egyenletek formálisan felírhatók, azonban olyan bonyolultak, hogy kétséges, hogy bármiféle nyereséget is jelentenének". (The new equations can usually be written down but they are so complicated that it is doubtful whether anything is gained.) Észrevettük azonban, hogy a folyamat akkor is Markov-folyamatnak tekinthető, ha a rendszer állapotát egyetlen változóval, az illető időpontban esetleg érkező személy várakozási idejével írjuk le. Ez a leírás egyformán elvégezhető exponenciális és tetszőleges eloszlású kiszolgálási időtartamok esetében. Nagy előny, hogy ennél a tárgyalásnál az E_j állapotok semmiféle szerepet nem kapnak, s ennek következtében nem végtelen sok egyenletből álló rendszerrel, hanem csupán egyetlen integrodifferenciálegyenlettel kell foglalkoznunk.

2. §. *A várakozási idő eloszlásfüggvénye*

$\eta(t)$ valószínűségi függvény t időpontban a kiszolgáló berendezéshez esetleg érkező személy várakozási idejét jelenti. Ha $t=0$ időpontban a kiszolgáló szabad úgy $\eta(0)=0$. Ha $t=0$ időpontban a kiszolgáló el van foglalva, úgy megadható egy η_0 valószínűségi változó, amely megadja azt az időpontot, amikor a kiszolgáló kezdeti foglaltsága megszűnik. Ekkor $\eta(0)=\eta_0$, ugyanis ennyi lesz $t=0$ időpontban egy esetleg érkező személy várakozási



1. ábra

ideje. Ha egy adott időpontban $\eta(t)=0$, úgy zérus marad mindaddig az időpontig, amíg egy személy meg nem érkezik a kiszolgáló berendezéshez. Bármilyen legyen is $\eta(t)$ értéke, abban a pillanatban, amidőn egy személy érkezik a kiszolgáló berendezéshez $\eta(t)$ ugrást szenved és pedig az ugrás nagysága megegyezik ezen személy jövendő kiszolgálási idejével. Egy személy megérkezése után $\eta(t)$ értéke lineárisan csökken egészen addig, amíg a következő személy meg nem érkezik, vagy addig, amíg zérussá nem válik.

Ha $\{t_n\}$ jelenti az egymásután érkező személyek időpontjainak sorozatát és $\{\chi_n\}$ a megfelelő kiszolgálási időtartamok sorozatát, úgy az elmondottak szerint $\eta(t)$ értéke $t_n (n=1,2,\ldots)$ időpontokban rendre $\chi_n (n=1,2,\ldots)$ nagyságú ugrást szenved. Közben $\eta(t)$ értéke lineárisan csökken, de ha egyszer elérte a zérus értéket, úgy az is marad a következő személy megérkezésének időpontjáig.

$\eta(t)$-t a következő egyenletek definiálják: $\eta(0)=\eta_0$. Ha $t_n<t<t_{n+1}$ úgy:

$$\eta(t)=\begin{cases}\eta(t_n)-(t-t_n) & \text{ha} \quad \eta(t_n)>t-t_n\\ 0 & \text{ha} \quad \eta(t_n)\leqq t-t_n\end{cases} \tag{1}$$

és ha $t=t_n$ úgy

$$\eta(t_n)=\eta(t_n-0)+\chi_n. \tag{2}$$

Ha ismerjük azt a törvényt, amelyet a $\{t_n\}$ és $\{\chi_n\}$ valószínűségi változók sorozata követ, úgy $\eta(0)=\eta_0$ kezdeti feltétel mellett (1) és (2) egyenletek segítségével $\eta(t)$ meghatározható bármely t időpontban.

Kihangsúlyozzuk, hogy a fenti $\eta(t)$ valószínűségi függvény minden $t\geqq 0$ értékre értelmezve van és $\eta(t_n-0)$ szolgáltatja az n-ik érkező személy várakozási idejét. $\eta(t)$ menetét az 1. ábra szemlélteti.

Ha a $\{t_n\}$ időpontok Poisson-folyamat eseményeinek időpontjaival egyeznek meg és a $\{\chi_n\}$-ek független valószínűségi változók, úgy az $\eta(t)$ valószínűségi függvény Markov folyamatot ír le. Ugyanis ha $\eta(t)$ értékét ismerjük egy adott időpontban, úgy ez az előbb elmondottak szerint egyértelműen meghatározza $\eta(t)$ jövő sztochasztikus viselkedését.

Ha a $\{t_n\}$ időpontok nem alkotnak Poisson-folyamatot, de a t_n-t_{n-1} $(n=1,2,\ldots)$ időkülönbségek egyforma eloszlású független valószínűségi változók, úgy az $\eta(t)$ folyamat már nem lesz Markov-féle, de a $\{t_n\}$ időpontok a folyamat Markov-pontjait, más elnevezés szerint regenerációs pontjait alkotják és így ebben az esetben is visszavezethető a folyamat Markov-folyamatok tanulmányozására.

A következőkben feltesszük, hogy a $\{t_n\}$ időpontok $\lambda(t)$ sűrűségű Poisson-folyamat eseményeinek időpontjait jelentik és a $\{\chi_n\}$-ek egyforma eloszlású független valószínűségi változók. Általában feltesszük, hogy $\eta(0)=\eta_0$ tetszőleges és η_0 eloszlásfüggvénye $P(\eta_0\leqq x)=F_0(x)$, vagy speciálisan $\eta_0\equiv 0$, mikor is $F_0(x)=0$ ha $x<0$ és $F_0(x)=1$ ha $x\geqq 0$. Most $P(\eta(t)\leqq x)=F(t,x)$ eloszlásfüggvényre a következő tételt bizonyítjuk be:

1. TÉTEL *Az $\eta(t)$ valószínűségi függvény $P(\eta(t)\leqq x)=F(t,x)$ eloszlásfüggvénye a következő integrodifferenciálegyenletnek tesz eleget*

$$\frac{\partial F(t,x)}{\partial t}=\frac{\partial F(t,x)}{\partial x}-\lambda(t)F(t,x)+\lambda(t)\int_0^x H(x-y)\,d_y F(t,y), \tag{3}$$

ahol az előforduló deriváltak vagy egyszerre jobboldali ($x\geqq 0$) vagy egyszerre baloldali ($x>0$) deriváltak. $F(t,x)$ eloszlásfüggvénynek $x=0$ helyen $F(t,0)$ nagyságú ugrása van, $0<x$ értékekre minden t mellett folytonos. $F(0,x)=1$ $(0\leqq x)$ kezdeti feltétel mellett (3)-nak egyértelműen meghatározott $F(t,x)$ megoldása van.

BIZONYÍTÁS. Felírhatjuk a következő egyenletet $0<\Delta t$-re:

$$F(t+\Delta t,x)=(1-\lambda(t)\Delta t)F(t,x+\Delta t)+\lambda(t)\Delta t\int_0^x H(x-y)\,d_y F(t,y)+o(\Delta t). \tag{4}$$

Ugyanis az az esemény, hogy $\eta(t+\Delta t)\leqq x$ több egymást kizáró módon jöhet létre: 1. $(t,t+\Delta t)$ időközben nem következik be esemény, aminek a valószínűsége $1-\lambda(t)\Delta t+o(\Delta t)$ és ekkor kell, hogy $\eta(t)\leqq x+\Delta t$ legyen, aminek a valószínűsége $F(t,x+\Delta t)$. 2. $(t,t+\Delta t)$ közben bekövetkezik egy esemény, aminek a valószínűsége $\lambda(t)\Delta t + o(\Delta t)$ és ha $\eta(t) = y\,(0 \leqq y \leqq x)$ úgy kell, hogy $\chi \leqq x-y$ legyen, aminek a valószínűsége $H(x-y)$ és y eloszlásfüggvénye $F(t, y)$. 3. $(t, t+\Delta t)$ közben egynél több esemény következik be, aminek a valószínűsége $o(\Delta t)$.

Később meg fogjuk mutatni, hogy $0<x$-re $F(t, x)$ eloszlásfüggvény x-ben folytonos. $x=0$ helyen $F(t, x)$-nek általában $F(t, 0)$ nagyságú ugrása van. Így mindenesetre felírható, hogy $0<\Delta t$-re:

(5) $$F(t, x+\Delta t) = F(t, x) + \frac{\partial F(t, x)}{\partial x}\Delta t + o(\Delta t),$$

ahol $\partial F / \partial x$ jobboldali deriváltat jelent, amely $x \geqq 0$-ra létezik. (5)-öt (4)-be helyettesítve $\Delta t \to 0$ határátmenetet elvégezve azt nyerjük, hogy $x \geqq 0$-ra

$$\frac{\partial F(t, x)}{\partial t} = \frac{\partial F(t, x)}{\partial x} - \lambda(t) F(t, x) + \lambda(t)\int_0^x H(x-y)\, d_y F(t, y),$$

ami megegyezik (3)-mal. Ez az egyenlet azt mutatja, hogy $F(t, x)$ t szerint jobbról differenciálható és a differenciálhányados megegyezik a baloldallal. Hasonlóan megmutatható, hogy $0<x$-re $F(t, x)$ t szerinti baloldali deriváltja is létezik és az is megegyezik (3) jobboldalával, csupán az a különbség, hogy most $\partial F / \partial x$ is baloldali x szerinti deriváltat jelent. Olyan x értékekre, melyeknél $F(t, x)$ jobboldali és baloldali x szerinti deriváltja megegyezik, azaz majdnem minden x értékre, $F(t, x)$ t szerint differenciálható és deriváltja megegyezik (3) jobboldalával.

Az $\eta(t)$ valószínűségi függvény által leírt folyamat úgynevezett kevert típusú Markov-folyamat. Ugyanis diszkontinuus és folytonos állapotváltozások keverékéből áll. Ilyen típusú folyamatokkal foglalkozott W. FELLER [9] munkájában, ahol megmutatta, hogy bizonyos feltételek mellett létezik egy egyértelműen meghatározott $F(t, x)$ megoldás, amely x-ben eloszlásfüggvény. FELLER elő is állítja a megoldást egyenletesen konvergens végtelen sor alakjában. Sajnos, általános tárgyalása erre a speciális esetre közvetlenül nem alkalmazható.

$F(t, x)$ megoldás helyett áttérünk ennek Laplace—Stieltjes transzformáltjának tanulmányozására. Ezen az úton nemcsak tételünket bizonyítjuk be, hanem előállítjuk a megoldást magát is. Vezessük be tehát a következő függvényeket, melyek $\Re(s) \geqq 0$-ra konvergensek:

(6) $$\Phi(t, s) = \int_0^\infty e^{-sx}\, dF(t, x)$$

és

(7) $$\psi(s) = \int_0^\infty e^{-sx}\, dH(x).$$

Képezzük a (3) egyenlet Laplace—Stieltjes transzformáltját mindkét oldalon, úgy azt nyerjük, hogy $\Re(s) \geqq 0$-ra

$$\frac{\partial \Phi(t,s)}{\partial t} = \Phi(t,s)\,[s-\lambda(t)+\lambda(t)\psi(s)]-s\,F(t,0). \tag{8}$$

Itt mint könnyen belátható, $\partial\Phi/\partial t$ derivált minden t értékre létezik és $F(t,0)=\lim\limits_{x\to+0} F(t,x)$, azaz $F(t,x)$ ugrása az $x=0$ helyen. Ennek a differenciálegyenletnek együtthatói t-nek folytonos függvényei és $\Phi(0,s)=1$. Ezen kezdeti feltétel mellett, mint ismeretes, (8)-nak egyértelműen meghatározott megoldása van éspedig $\Re(s) \geqq 0$-ra

$$\Phi(t,s) = e^{st-[1-\psi(s)]\Lambda(t)}\left[1-s\int_0^t e^{-su+[1-\psi(s)]\Lambda(u)}F(u,o)\,du\right], \tag{9}$$

ahol

$$\Lambda(t)=\int_0^t \lambda(u)\,du. \tag{10}$$

$\Phi(t,s)$ ismeretében, mint a Laplace-transzformációk elméletéből tudjuk, $F(t,x)$ eloszlásfüggvény egyértelműen meghatározható. Tehát $F(t,x)$ egyértelműen meg van határozva (9) formula segítségével, ha $F(u,0)$ egyértelműen megadható $0 \leqq u \leqq t$ értékekre. Az, hogy $F(t,0)$ minden t értékre egyértelműen meghatározható, világos lesz, ha a folyamatot a kiszolgáló berendezés szempontjából tekintjük. A kiszolgáló ideje szünetek és kiszolgálási periódusok váltakozásaiból tevődik össze és $F(t,0)$ annak a valószínűsége, hogy t időpontban szünet legyen. $F(t,0)$ egyértelműen meghatározható a kiszolgálási periódusok időtartamának eloszlásfüggvénye ismeretében. Időben nemhomogén folyamat esetén ez a számítás bonyolult, homogén folyamat esetén ellenben könnyen keresztülvihető, amit a következő fejezetben meg is teszünk.

Hátra van még annak a kimutatása, hogy $F(t,x)$ eloszlásfüggvény minden t értékre x-ben folytonos. $F(t,x)$ előállítható a következő alakban is:

$$\begin{aligned} F(t,x)=e^{-\Lambda(t)}\Bigg[1&+\int_0^t F(t-u,0)\,\lambda(t-u)e^{\Lambda(t-u)}H(u+x)\,du+\\ &+\int_0^t\left(\int_0^{x+u} F(t-u,x+u-y)\,\lambda(t-u)\,e^{\Lambda(t-u)}\,dH(y)\right)du\Bigg]. \end{aligned} \tag{11}$$

Ugyanis $\eta(t) \leqq x$ ha 1.) $(0,t)$ időközben nem fordul elő esemény, 2.) $t-u$ (ahol $0 \leqq u \leqq t$) időpontban várakozás nélkül kezdődik egy kiszolgálás, melynek időtartama $u+x$-nél kisebb és $(t-u,t)$ közben nem történik esemény 3.) $t-u$ (ahol $0 \leqq u \leqq t$) időpontban egy személy érkezik a kiszolgáló berendezéshez és ennek várakozási ideje $x+u-y$-nál kisebb, ahol y jelenti a kiszolgálás időtartamát és $(t-u,t)$ közben senki sem érkezik a kiszolgáló berendezéshez.

(11) előállításából, mely egyúttal egy rekurzív formula $F(t, x)$ meghatározására könnyen megmutatható $F(t, x)$ folytonossága $x > 0$ értékekre.

Definíciónkból következik, hogy $F(t, x)$ x-nek nem csökkenő függvénye. Az, hogy $F(t, +\infty) = 1$ abból a tényből következik, hogy $F(t, x)$ Laplace—Stieltjes transzformáltjára fennáll, hogy $\Phi(t, 0) = 1$.

Az elmondottak szerint kimondhatjuk a következő tételt is:

2. TÉTEL. *Az* 1. *tételben felírt* (1) *integrodifferenciálegyenlet* $F(t, x)$ *megoldásának Laplace—Stieltjes transzformáltja*

$$\Phi(t, s) = \int_0^\infty e^{-sx} dF(t, x) \qquad (\Re(s) \geq 0) \tag{12}$$

a következő alakban állítható elő:

$$\Phi(t, s) = e^{st - [1 - \varphi(s)] A(t)} \left[1 - s \int_0^t e^{-su + [1 - \varphi(s)] A(u)} F(u, 0) du\right], \tag{13}$$

ahol $F(u, 0)$ *annak a valószínűségét jelenti, hogy* u *időpontban a kiszolgáló szabad.*

Hasonlóan foglalkozhattunk volna azzal az esettel, midőn η_0 nem azonosan zérus, hanem tetszőleges valószínűségi változó. Ha feltesszük, hogy η_0 eloszlásfüggvénye $F_0(x)$, $0 < x$ értékekre folytonos, úgy az előbbi meggondolás szóról-szóra alkalmazható és csupán annyi módosítást kell tennünk, hogy (13)-ban a kezdeti feltétel, $\Phi(0, s) = 1$ helyett, $\Phi(0, s) = \Phi_0(s)$, ahol $\Phi_0(s)$ jelenti $F_0(x)$ Laplace—Stieltjes transzformáltját és $F(t, 0)$—t is az új esetnek megfelelő kifejezéssel kell helyettesítenünk.

Ezek után rátérünk $\lim_{t \to \infty} F(t, x) = F^*(x)$ határeloszlás meghatározására. Erre vonatkozóan a következő tételeket bizonyítjuk be.

3. TÉTEL. *Legyen* χ_n *valószínűségi változó várható értéke*

$$\alpha = \int_0^\infty x dH(x) = \int_0^\infty [1 - H(x)] dx \tag{14}$$

és legyen

$$\lim_{t \to \infty} \lambda(t) = \lambda \tag{15}$$

pozitív állandó. Ekkor ha $\lambda\alpha < 1$ *úgy létezik a kezdeti* $F_0(x)$ *eloszlástól független* $\lim_{t \to \infty} F(t, x) = F^*(x)$ *határeloszlásfüggvény, amelyet egyértelműen meghatároznak a következő egyenletek:*

$$F^*(0) = 1 - \lambda\alpha \tag{16}$$

és

$$\frac{dF^*(x)}{dx} = \lambda \left| F^*(x) - \int_0^x H(x - y) dF^*(y) \right|, \tag{17}$$

ahol az előforduló derivált jobboldali deriváltat jelent.

Ha $\lambda\alpha \geqq 1$ úgy nem létezik $F^*(x)$ határeloszlás, hanem fennáll minden x-re, hogy $\lim_{t\to\infty} F(t,x)=0$.

4. TÉTEL. *Ha $\lim_{t\to\infty}\lambda(t)=\lambda$ és $\lambda\alpha<1$ úgy létezik a kezdeti $F_0(x)$ eloszlástól független $\lim_{t\to\infty} F(t,x)=F^*(x)$ határeloszlásfüggvény, amelyet egyértelműen meghatároz*

$$\Phi^*(s)=\int_0^\infty e^{-sx}\,dF^*(x), \quad (\Re(s)\geqq 0), \tag{18}$$

Laplace—Stieltjes transzformált, amelyre fennáll, hogy

$$\Phi^*(s)=\frac{1-\lambda\alpha}{1-\lambda\dfrac{1-\psi(s)}{s}}. \tag{19}$$

BIZONYÍTÁS. Mindenekelőtt kimutatjuk, hogy a kezdeti $F_0(x)$ eloszlástól függetlenül fennáll $\lim_{t\to\infty} F(t,0)=1-\lambda\alpha$ határérték, ha $\lambda\alpha<1$ és $\lim_{t\to\infty} F(t,0)=0$ ha $\lambda\alpha\geqq 1$. Ha $\eta_0\equiv 0$ és $\lambda(t)\equiv\lambda$ (állandó) úgy a következő fejezetben kimutatjuk, hogy $\lambda\alpha<1$ esetén fennáll $\lim_{t\to\infty} F(t,0)=F^*(0)=1-\lambda\alpha$ határérték. Ha η_0 tetszőleges úgy tekintsük azt az időpontot, amidőn a kiszolgáló kezdeti foglaltsága megszünt. Ekkor akármennyi is a várakozók száma, a kezdeti állapottól függetlenül $t\to\infty$ esetén ugyanaz lesz az E_0 állapot valószínűsége, azaz tetszőleges η_0 esetén is fennáll, hogy $\lim_{t\to\infty} F(t,0)=F^*(0)=1-\lambda\alpha$. Ugyanis a következő fejezetben kimutatjuk, hogy az E_0 állapot ergodikus, és így állításunk a Markov-láncok elméletéből következik. Ha $\lim_{t\to\infty}\lambda(t)=\lambda$ úgy bizonyos t értéktől kezdve tetszőleges a λ—t közrefogó λ_1 és λ_2 értékekre fennáll, hogy $\lambda_1\leqq\lambda(t)\leqq\lambda_2$ és ekkor elegendő nagy t értékekre a kezdeti eloszlástól függetlenül fennáll, hogy $F_{\lambda_2}(t,0)\leqq F(t,0)\leqq F_{\lambda_1}(t,0)$, ahol $F_\lambda(t,0)$ jelenti λ sűrűséggel jellemzett folyamat esetén az $\eta(t)=0$ állapot valószínűségét. Ennek helyessége az előzőhöz hasonló okoskodással az E_0 állapot ergodikus voltából következik. Így ha $\lambda_2\alpha<1$ úgy fennáll, hogy:

$$1-\lambda_2\alpha\leqq\lim_{t\to\infty} F(t,0)\leqq 1-\lambda_1\alpha.$$

Mivel λ_1 és λ_2 tetszőlegesen közel választható λ-hoz, ezért $\lambda\alpha<1$ esetén fennáll, hogy $\lim_{t\to\infty} F(t,0)=F^*(0)=1-\lambda\alpha$.

Ha $\lambda\alpha\geqq 1$, úgy, mint látni fogjuk $\lambda(t)\equiv\lambda$ (állandó) esetén $\lim_{t\to\infty} F(t,0)=0$ és ekkor általában is igaz, hogy $\lim_{t\to\infty} F(t,0)=0$.

A következőkben először feltesszük, hogy $\eta_0\equiv 0$ azaz $F_0(x)=1$ ha $x\geqq 0$.

Legyen most (13) formulában $s=-i\omega$, ahol ω valós szám. Így $F(t,x)$ eloszlásfüggvény karakterisztikus függvényét nyerjük. Jelöljük ezt most $\Phi_t(\omega)$-

val. Ekkor

$$\Phi_t(\omega) = e^{-i\omega t - [1-\psi(-i\omega)]A(t)}\left[1 + i\omega \int_0^t e^{i\omega u + [1-\psi(-i\omega)]A(u)} F(u, 0) du\right]. \tag{20}$$

$\Phi_t(\omega)$ minden t értékre egy nem negatív valószínűségi változó karakterisztikus függvénye és így alkalmazható A. ZYGMUND [10] tétele, amely szerint ha az $\omega = 0$ pontot tartalmazó tetszőleges intervallumban fennáll $\lim_{t\to\infty} \Phi_t(\omega) = \Phi(\omega)$ és $\Phi(\omega)$ az $\omega = 0$ helyen folytonos, úgy létezik $\lim_{t\to\infty} F(t, x) = F^*(x)$ határeloszlásfüggvény, amelynek karakterisztikus függvénye $\Phi(\omega)$-val egyenlő.

Most kimutatjuk, hogy azon ω értékekre, amelyekre $\Re[\psi(-i\omega)] < 1$, fennáll a következő határérték

$$\lim_{t\to\infty} \Phi_t(\omega) = \frac{F^*(0)}{1 + \lambda \frac{1-\psi(-i\omega)}{i\omega}}. \tag{21}$$

Legyen ω egy rögzített érték, amelyre $\Re[\psi(-i\omega)] < 1$ és legyen ekkor rövidség kedvéért $\varphi(t) = i\omega t + [1-\psi(-i\omega)]A(t) = i\omega t + \gamma A t$, ahol $\Re(\gamma) < 0$, úgy

$$\Phi_t(\omega) = e^{-\varphi(t)}\left[1 + i\omega \int_0^t e^{\varphi(u)} F(u, 0)\, du\right].$$

Most $\lim_{t\to\infty} e^{-\varphi(t)} = 0$ és kimutatandó tehát, hogy

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\varphi(t)} \int_0^t e^{\varphi(u)} F(u, 0)\, du = \frac{F^*(0)}{\varphi^*}, \tag{22}$$

ahol $\varphi^* = \lim_{t\to\infty} \varphi'(t) = i\omega + [1-\psi(-i\omega)]\lambda$. Rögzített T érték mellett

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\varphi(t)} \int_0^T e^{\varphi(u)} F(u, 0)\, du = 0 \tag{23}$$

és így csak azt kell kimutatni, hogy elegendő nagy t-re

$$\left| e^{-\varphi(t)} \int_T^t e^{\varphi(u)} F(u, 0)\, du - \frac{F^*(0)}{\varphi^*} \right| \tag{24}$$

tetszőleges kicsinnyé tehető.

Mindenekelőtt kimutatjuk, hogy elegendő nagy T-re

$$|e^{-\varphi(t)}| \int_T^t |e^{\varphi(u)}|\, du < \frac{2}{\lambda\delta}, \tag{25}$$

ahol $\delta = \Re(\gamma) > 0$, azaz (25) korlátos függvény. Ugyanis ekkor $\Re\varphi(t) = \delta A(t)$

és így

$$(26)\qquad |e^{-\varphi(t)}|\int_T^t |e^{\varphi(u)}|\,du = e^{-\delta\Lambda(t)}\int_T^t e^{\delta\Lambda(u)}\,du \leqq \frac{2e^{-\delta\Lambda(t)}}{\lambda}\int_T^t e^{\delta\Lambda(u)}\lambda(u)\,du \leqq \frac{2}{\lambda\delta},$$

ahol T-t úgy választottuk meg, hogy $t \geqq T$ értékekre $\lambda(t) \geqq \lambda/2$ legyen.

Most fennáll, hogy

$$(27)\qquad \begin{aligned} \left|e^{-\varphi(t)}\int_T^t e^{\varphi(u)}F(u,0)\,du - \frac{F^*(0)}{\varphi^*}\right| &\leqq \left|e^{-\varphi(t)}\int_T^t e^{\varphi(u)}[F(u,0)-F^*(0)]\,du\right| + \\ &+ F^*(0)\left|e^{-\varphi(t)}\int_T^t e^{\varphi(u)}\,du - \frac{1}{\varphi^*}\right|. \end{aligned}$$

A jobboldalon az első tag $\leqq \frac{2}{\lambda\delta}\max\limits_{(T,t)}|F(u,0)-F^*(0)|$. Ez elegendő nagy T értékekre tetszőleges kicsinnyé tehető. A második tag a következő egyenlet felhasználásával

$$(28)\qquad e^{-\varphi(t)}\int_T^t e^{\varphi(u)}\varphi'(u)\,du = 1 - e^{\varphi(T)-\varphi(t)}$$

és $\varphi'(u) = \varphi^* + \gamma[\lambda(u)-\lambda]$ figyelembevételével a következőképpen írható:

$$(29)\qquad e^{-\varphi(t)}\int_T^t e^{\varphi(u)}\,du - \frac{1}{\varphi^*} = -\frac{e^{\varphi(T)-\varphi(t)}}{\varphi^*} - \frac{\gamma e^{-\varphi(t)}}{\varphi^*}\int_T^t e^{\varphi(u)}[\lambda(u)-\lambda]\,du.$$

A jobboldal első tagja elegendő nagy t-re, a második pedig elegendő nagy T-re tetszőleges kicsinnyé tehető. Ugyanis $\lambda(u)-\lambda$, $u \geqq T$-re tetszőleges kicsinnyé tehető és fennáll (25). Így ezzel kimutattuk a (21) határérték helyességét.

Ki kell még mutatni, hogy $\omega = 0$-nak van olyan környezete, amelyben $\Re\left(\int_0^\infty e^{i\omega x}\,dH(x)\right) < 1$. Ha $H(x)$ elfajult eloszlás, mégpedig χ zérustól különböző állandó, tehát ez nyilvánvaló. Ha pedig $H(x)$ nem elfajult eloszlás, úgy KOLMOGOROV—GNYEGYENKO ([11] 60. o.) könyvében kimondott tételekből következik, hogy létezik olyan $\omega_0 \neq 0$ szám, hogy $(-\omega_0, \omega_0)$ intervallumban $|\psi(-i\omega)| < 1$, azaz $\Re\psi(-i\omega) < 1$ is fennáll. Ki kell még mutatni, hogy (21) folytonos az $\omega = 0$ helyen. Mivel $\psi(-i\omega)$ karakterisztikus függvény egyenletesen folytonos minden ω értékre és mivel

$$(30)\qquad \lim_{\omega\to 0}\frac{1-\psi(-i\omega)}{i\omega} = -\alpha$$

határérték létezik, tehát (21) is folytonos az $\omega = 0$ helyen. Így kimutattuk, hogy létezik $F^*(x)$ határeloszlás. Ha pedig létezik $F^*(x)$ határeloszlás, úgy (3) fennállásából következik, hogy eleget tesz a (17) integrodifferenciálegyenletnek.

$F^*(x)$ Laplace—Stieltjes transzformáltja ekkor nyilvánvalóan

$$\Phi^*(s)=\int_0^\infty e^{-sx}\,dF^*(x)=\frac{F^*(0)}{1-\lambda\frac{1-\psi(s)}{s}}=\frac{1-\lambda\alpha}{1-\lambda\frac{1-\psi(s)}{s}}. \tag{31}$$

Most $\Phi^*(0)=1$, mivel

$$\lim_{s\to 0}\frac{1-\psi(s)}{s}=\int_0^\infty x\,dH(x)=\alpha. \tag{32}$$

Ha $\lambda\alpha\geqq 1$ úgy $\lim_{t\to\infty}F(t,0)=0$ és ekkor könnyen belátható, hogy $\lim_{t\to\infty}\Phi_t(\omega)=0$ és így minden x-re $\lim_{t\to\infty}F(t,x)=0$.

Ha η_0 tetszőleges $F_0(x)$ eloszlásfüggvénnyel bír, úgy $\lim_{t\to\infty}F(t,x)$ határeloszlás ekkor is létezik és megegyezik $F^*(x)$-szel. Ugyanis mivel az E_0 állapot ergodikus, ezért 1 valószínűséggel, véges időn belül eléri a rendszer az E_0 állapotot és mint kimutattuk, E_0 állapotból kiindulva $F(t,x)$, $F^*(x)$ határeloszláshoz tart $t\to\infty$ esetén.

A (31) formula ekvivalens A. JA. HINCSIN [5] munkájában megadott stacionárius állapotra vonatkozó megoldásával.

MEGJEGYZÉS. Ha HINCSIN nyomán feltételezzük, hogy $\lambda\alpha<1$ esetén létezik stacionárius állapot, melynek eloszlásfüggvénye $F^*(x)$ úgy (3) egyenletből rövidebben eljuthatunk (31) egyenlethez. Ekkor ugyanis (3)-ból rögtön következik (17) egyenlet fennállása, melyből azt nyerjük, hogy $F^*(x)$ Laplace—Stieltjes transzformáltjára $\Phi^*(s)$-re fennáll, hogy

$$\Phi^*(s)=\frac{F^*(0)}{1-\lambda\frac{1-\psi(s)}{s}}.$$

Mivel $F^*(x)$ eloszlásfüggvény, tehát kell, hogy $\lim_{s\to 0}\Phi^*(s)=1$ legyen, másrészt, mint láttuk $\lim_{s\to 0}[1-\psi(s)]/s=\alpha$ és így az adódik, hogy

$$F^*(0)=1-\lambda\alpha.$$

Most tegyük fel, hogy a $\{t_n\}$ időpontok időben homogén λ sűrűségű Poisson-folyamat eseményeinek időpontjaival egyeznek meg. Jelöljük az n-ik személy várakozási idejének eloszlásfüggvényét $F_n(x)$-szel, azaz legyen $P(\eta(t_n-0)\leqq x)=F_n(x)$. Ha a kiszolgáló kezdeti elfoglaltsága η_0 és ennek eloszlásfüggvénye $P(\eta_0\leqq x)=F_0(x)$ úgy az $\{F_n(x)\}$ sorozat fokozatosan előállítható a következő rekurzív formula segítségével

$$F_n(x)=\int_0^\infty K(x,y)\,dF_{n-1}(y)\qquad (n=1,2,\ldots), \tag{33}$$

ahol

$$K(x, y) = H(x-y) + \int_{x-y}^{\infty} e^{-\lambda(u+y-x)}\, dH(u). \tag{34}$$

Ez egyszerűen onnan következik, hogy az $\{\eta(t_n-0)\}$ valószínűségi változók sorozata Markov láncot alkot $P(\eta(t_n-0) \leq x \mid \eta(t_{n-1}-0) = y) = K(x, y)$ átmenet valószínűségekkel.

Kérdés, hogyan viselkedik $F_n(x)$ midőn $n \to \infty$. Erre vonatkozólag a következő tételt bizonyítjuk be.

5. TÉTEL. *Ha $M(\chi_n) = \alpha$ várható értékre fennáll, hogy $\lambda\alpha < 1$, úgy $F_n(x)$ eloszlásfüggvény $n \to \infty$ esetén a kezdeti $F_0(x)$ eloszlásfüggvénytől függetlenül a 3. és 4. tételben meghatározott $F^*(x)$ eloszlásfüggvényhez konvergál. Ha $\lambda\alpha \geqq 1$ úgy $\lim_{n \to \infty} F_n(x) = 0$ minden x értékre.*

BIZONYÍTÁS. Először tekintsük azt az esetet, midőn $\eta_0 \equiv 0$. Könnyen belátható, hogy ekkor $F_{n+1}(x) \leq F_n(x)$. Ugyanis $F_n(x)$ jelenti annak a valószínűségét, hogy az n-ik személy várakozási ideje legfeljebb x, ha az első személy kiszolgálása várakozás nélkül kezdődött és $F_{n+1}(x)$ felfogható úgy, mint annak a valószínűsége, hogy az n-ik személy várakozási ideje legfeljebb x egy olyan sorban, amelyben az első személy kiszolgálása esetleg várakozás után kezdődik meg. Mivel $\{F_n(x)\}$ sorozat monoton csökkenő és alulról korlátos, tehát minden x-re létezik $\lim_{n \to \infty} F_n(x)$ határérték.

Most jelölje $G(t, x)$ a $(0, t)$ időintervallumban utolsónak érkező személy várakozási idejének eloszlásfüggvényét és legyen $K_t(x, y)$ annak a valószínűsége, hogy ha ezen személy várakozási ideje y, akkor egy t időpontban esetleg érkező személy várakozási ideje $\leq x$. Ekkor fennáll, hogy:

$$F(t, x) = \int_0^t K_t(x, y)\, d_y G(t, y). \tag{35}$$

Könnyen megmutatható, hogy

$$\lim_{t \to \infty} K_t(x, y) = K(x, y), \tag{36}$$

ahol $K(x, y)$-t (33) definiálja és

$$\lim_{t \to \infty} G(t, y) = \lim_{n \to \infty} F_{n+1}(x). \tag{37}$$

Ugyanis, ha t_n jelöli a $(0, t)$ intervallumban utolsónak érkező személy érkezési időpontját, úgy a $t - t_n$ változó $t \to \infty$ esetén exponenciális eloszlást követ $\lambda e^{-\lambda x}$ sűrűségfüggvénnyel és ez megegyezik két egymás utáni érkezési időpont közötti távolság eloszlásával. Továbbá ha $t \to \infty$ úgy 1 valószínűséggel $n \to \infty$. Így (35) alapján azt kapjuk, hogy

$$\lim_{t \to \infty} F(t, x) = \lim_{n \to \infty} \int_0^{\infty} K(x, y)\, dF_{n+1}(y) = \lim_{n \to \infty} F_{n+2}(x), \tag{38}$$

ahol az utolsó egyenlőség (33) fennállásának a következménye. Mint láttuk, $\lim\limits_{n\to\infty} F_n(x)$ határérték létezik és így ez (38) szerint megegyezik $\lim\limits_{t\to\infty} F(t, x)$-szel, azaz $\lim\limits_{n\to\infty} F_n(x) = F^*(x)$ ha $\lambda\alpha < 1$, míg $\lim\limits_{n\to\infty} F_n(x) = 0$ ha $\lambda\alpha \geqq 1$.

Ha η_0 tetszőleges, úgy szintén létezik határeloszlás és ez megegyezik $F^*(x)$-szel. Ugyanis, mint a következő fejezetben látni fogjuk az E_0 állapot ergodikus, s ekkor tetszőleges kezdeti állapotból kiindulva 1 valószínűséggel bekövetkezik olyan időpont, amelyben a rendszer E_0 állapotban van. Ezután az időpont után pedig úgy viselkedik a rendszer, mintha a kezdőpontból $\eta_0 \equiv 0$ feltétel mellett indult volna el.

PÉLDÁK. 1. Legyen $\chi_n = \alpha$ (állandó) úgy $\psi(s) = e^{-s\alpha}$ és (19) alapján $\lambda\alpha < 1$ esetben:

$$\Phi^*(s) = \frac{1-\lambda\alpha}{1-\lambda\frac{1-e^{-\alpha s}}{s}} = (1-\lambda\alpha)\, s \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{\lambda^j e^{-s\alpha j}}{(s-\lambda)^{j+1}}, \tag{39}$$

ahonnan

$$F^*(x) = (1-\lambda\alpha) \sum_{j=0}^{\left[\frac{x}{\alpha}\right]} (-1)^j e^{\lambda(x-\alpha j)} \frac{\lambda^j (x-\alpha j)^j}{j!}. \tag{40}$$

2. Legyen χ_n exponenciális eloszlású, azaz $H(x) = 1 - e^{-x/\alpha}$ (ha $x \geqq 0$) úgy $\psi(s) = 1/(1+\alpha s)$, ahonnan

$$\Phi^*(s) = \frac{(1-\lambda\alpha)(1+\alpha s)s}{(1-\lambda\alpha)s + \alpha s^2} \tag{41}$$

és

$$F^*(x) = 1 - \lambda\alpha e^{-\frac{1-\lambda\alpha}{\alpha}x}. \tag{42}$$

3. §. *Időben homogén folyamattal kapcsolatos vizsgálatok*

Ebben a fejezetben végig fel fogjuk tenni, hogy a $\{t_n\}$ időpontok időben homogén λ sűrűségű Poisson-folyamat eseményeinek időpontjaival egyeznek meg. Egyszerűség kedvéért legyen $\eta_0 \equiv 0$, azaz a kiszolgáló kezdeti elfoglaltsága zérus. Könnyen belátható, hogy a kiszolgáló ideje szünetekből és kiszolgálási periódusokból tevődik össze. Legyenek az egymást követő szünetek időtartamai $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots$ és a kiszolgálási periódusok időtartamai: $\xi_1, \xi_2, \ldots$ Ezek valamennyien független változók. A $\{\vartheta_n\}$-ek exponenciális eloszlásúak $P(\vartheta_n \leqq x) = 1 - e^{-\lambda x}$ (ha $x \geqq 0$) eloszlásfüggvénnyel. A $\{\xi_n\}$-ek is egyforma eloszlásúak, de közös eloszlásfüggvényüket $P(\xi_n \leqq x) = G(x)$-et egyelőre nem ismerjük. Ennek meghatározása lesz egyik feladatunk. Ezután meghatározzuk $F(t, 0)$-t annak a valószínűségét, hogy t időpontban a kiszolgáló szabad. Kimutatjuk, hogy $\lambda\alpha < 1$ esetén $\lim\limits_{t\to\infty} F(t, 0) = 1 - \lambda\alpha$ és $\lambda\alpha \geqq 1$

esetén $\lim_{t\to\infty} F(t, 0) = 0$. Meghatározzuk továbbá stacionárius esetben $(t \to \infty, \lambda\alpha < 1)$ annak a valószínűségét, hogy a rendszer $E_j (j = 0, 1, 2, \ldots)$ állapotban legyen, azaz a várakozó és kiszolgálás alatt álló személyek száma j legyen.

1. A kiszolgálási periódus vizsgálata. Kiszolgálási periódusnak nevezzük azt az időtartamot, amelyet a kiszolgáló egy várakozás nélkül kezdődő kiszolgálás kezdőpontjától az időközben sorbanállók megszakítás nélküli kiszolgálása esetén az utolsó sorbanálló kiszolgálásának befejező időpontjáig tölt el. Jelöljük az egymást követő kiszolgálási periódusok időtartamait rendre $\xi_1, \xi_2, \ldots$ valószínűségi változóval. Ezek függetlenek és közös eloszlásfüggvényük $P(\xi_n \leqq x) = G(x)$.

$G(x)$ meghatározása. Tegyük fel, hogy a kiszolgáló berendezéshez egy várakozás nélküli személy érkezik. Az érkezés időpontjában rögtön megkezdődik ennek kiszolgálása. Tegyük fel, hogy ez a kiszolgálás y ideig tart. Annak a valószínűsége, hogy ezen y időtartam alatt n személy érkezik a kiszolgáló berendezéshez:

$$e^{-\lambda y}\frac{(\lambda y)^n}{n!}, \tag{43}$$

azaz Poisson-eloszlást mutat. Ha $n = 0$, úgy a kiszolgálási periódus egyetlen kiszolgálásból áll és ekkor ennek időtartamának eloszlásfüggvénye: $H(x)$. Ha $n \geqq 1$, úgy a kiszolgáló az első személy kiszolgálása után hozzákezd a sorbanállók egyikének kiszolgálásához. A többi sorbanállóról gondoljuk el, hogy félreállanak. Miután a kiszolgáló ezen személy és az időközben esetleg érkező személyek kiszolgálásával végzett, mely időtartam eloszlásfüggvénye $G(x)$, úgy a félreállított n személy közül megkezdi egynek a kiszolgálását, miután ezzel és a közben érkezőkkel végzett, amely időtartam eloszlásfüggvénye ismét $G(x)$, úgy újra megkezdi a félreállítottak egyikének kiszolgálását és ezt addig folytatja, míg a félreállítottak el nem fogynak. A kiszolgáló szempontjából tökéletesen mindegy, hogy érkezési sorrendben szolgálja-e ki a személyeket vagy sem. Ez csak a személyeket érinti, ugyanis a várakozási idő eloszlásfüggvénye ezzel megváltozik, $F(t, 0)$ és az átlagérték azonban változatlan marad. Jelöljük $G_n(x)$-szel n számú ξ-vel megegyező eloszlású független valószínűségi változó összegének eloszlásfüggvényét, azaz $G(x)$ n-szeres konvolúcióját. $G_n(x)$ kiszámítható a következő rekurzív formula segítségével:

$$G_n(x) = \int_0^\infty G_{n-1}(x-y)\,dG(y) \quad (n = 2, 3, \ldots), \tag{44}$$

ahol $G_1(x) = G(x)$, vagy karakterisztikus függvények módszerével. Tekintetbe véve, hogy független valószínűségi változók összegének karakterisztikus függvénye megegyezik az egyes változók karakterisztikus függvényeinek szorzatával.

Az elmondottak alapján felírható, hogy

$$G(x)=\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda y}\frac{(\lambda y)^n}{n!} G_n(x-y)\,dH(y). \tag{45}$$

Ugyanis a kiszolgálási periódus hossza x-nél kisebb, ha az első érkező személy kiszolgálása y ideig tart ($0<y\leqq x$); y eloszlásfüggvénye $H(y)$, és ennek kiszolgálása alatt még n ($n=0,1,2,\ldots$) személy érkezik, aminek a valószínűségét (43) szolgáltatja és ezek, valamint a közben érkezettek kiszolgálási időtartama $x-y$-nál nem nagyobb, aminek a valószínűsége, mint láttuk $G_n(x-y)$. Megjegyezzük, hogy $G_0(x)=1$ ha $x\geqq 0$ és $G_0(x)=0$ ha $x<0$.

Legyen $G(x)$ Laplace-Stieltjes transzformáltja

$$\Gamma(s)=\int_0^{\infty} e^{-sx}\,dG(x), \tag{46}$$

amely $\Re(s)\geqq 0$-ra konvergens.

(45) egyenletből Laplace-transzformációra áttérve azt nyerjük, hogy

$$\begin{aligned}\Gamma(s)&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[\Gamma(s)]^n}{n!}\int_0^{\infty} e^{-(s+\lambda)x}(\lambda x)^n\,dH(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\lambda^n[\Gamma(s)]^n\,\psi^{(n)}(s+\lambda)}{n!}=\\ &=\psi[s+\lambda-\lambda\Gamma(s)],\end{aligned} \tag{47}$$

azaz $G(x)$ Laplace-Stieltjes transzformáltja $\Gamma(s)$, $\Re(s)\geqq 0$-ra kielégíti a következő függvényegyenletet:

$$\Gamma(s)=\psi(s+\lambda-\lambda\Gamma(s)). \tag{48}$$

Ennek az egyenletnek fennállására D. G. KENDALL is adott [7] munkájában vázlatos bizonyítást. A továbbiakban a következő tételt bizonyítjuk be:

6. TÉTEL: *A kiszolgálási periódus eloszlásfüggvényének, $G(x)$-nek Laplace-transzformáltja $\Gamma(s)$ a $\Re(s)\geqq 0$-ra érvényes*

$$\Gamma(s)=\psi[s+\lambda-\lambda\Gamma(s)] \tag{49}$$

függvényegyenletnek $\Gamma(\infty)=0$ feltételnek eleget tevő egyértelműen meghatározott analitikus megoldása. $\Gamma(s)$ ismeretében $G(x)$ egyértelműen meghatározható.

Jelölje p^* azt a legkisebb pozitív számot, amelyre fennáll

$$\psi(\lambda(1-p^*))=p^*, \tag{50}$$

úgy $\lim_{x\to\infty} G(x)=p^*$. Ha $\lambda\alpha\leqq 1$ úgy $p^*=1$ és ekkor $G(x)$ valódi eloszlás, míg ha $\lambda\alpha>1$, úgy $p^*<1$, azaz $G(x)$ nem valódi eloszlás, éspedig ekkor a kiszolgálási idő végtelen is lehet $(1-p^*)$ valószínűséggel.

BIZONYÍTÁS: Nyilvánvaló, hogy $G(x)$ minden véges x értékre létezik és mint láttuk, $\Gamma(s)$ kielégíti a (49) függvényegyenletet. Továbbá nyilvánvaló, hogy $\Gamma(s)$ analitikus és $\Gamma(\infty)=0$. $\Gamma(s)$ ismeretében $G(x)$ egyértelműen meghatározható. Ezért elegendő kimutatni, hogy $\Gamma(s)$-et egyértelműen meghatározzák $\Gamma(\infty)=0$ és az analitikusság feltétele. Elegendő $\Gamma(s)$-et csupán nem negatív valós s értékekre ismerni, ugyanis $\Re(s) \geqq 0$ értékekre egyértelműen kiterjeszthető. Tekintsük tehát a (49) függvényegyenletet $0 \leqq s < \infty$ valós értékekre. A $\psi(s)$ függvény $0 \leqq s < \infty$ értékekre monoton csökken, éspedig $\psi(0)=1$ és $\psi(\infty)=0$. $\psi(s), 0 \leqq s < \infty$ értékekre differenciálható, és a $\psi'(s)$ differenciálhányados monoton növekvő; $\psi'(0)=-\alpha$ és $\psi'(\infty)=0$. Legyen (49)-ben $\Gamma(s)=x$, úgy $s=\Gamma^{-1}(x)$ és $\psi(s)$ monoton voltából következik, hogy egyértelműen megfordítható, azaz $\psi^{-1}(x)$ a $0 \leqq x \leqq 1$ értékekre létezik. Ekkor (49)-ből azt kapjuk, hogy

$$\Gamma^{-1}(x)=\psi^{-1}(x)-\lambda(1-x),$$

vagyis $0 \leqq x \leqq 1$ értékekre $\Gamma^{-1}(x)$ egyértelműen meg van határozva. Kérdés $\Gamma(s)$ is egyértelműen meg van-e határozva?

A $\Gamma^{-1}(x)$ függvény az $x=0$ helyen ∞ és az $x=1$ helyen 0 és $0<x \leqq 1$ értékekre differenciálható, éspedig

$$\frac{d\Gamma^{-1}(x)}{dx}=\lambda+\frac{1}{\psi'(\psi^{-1}(x))},$$

a fent elmondottakból könnyen beláthatóan monoton növekvő függvény. Az $x=1$ pontban ezen derivált értéke $\lambda-\frac{1}{\alpha}$. Ha $\lambda\alpha \leqq 1$, úgy ez a derivált nem pozitív és ekkor $\Gamma^{-1}(x)=0$-nak nincs gyöke a $0<x<1$ intervallumban, hanem $\Gamma^{-1}(1)=0$. Míg ha $\lambda\alpha>1$, úgy ez a derivált negatív, azaz $\Gamma^{-1}(x)=0$-nak a $0<x<1$ közben van gyöke és nyilvánvalóan csakis egy gyöke van.

Jelölje $\Gamma^{-1}(x)=0$ legkisebb pozitív gyökét $x=p^*$ úgy $\Gamma^{-1}(x)$ a $0 \leqq x \leqq p^*$ intervallumban monoton csökkenő folytonos függvény. Így $s=\Gamma^{-1}(x)$ egyértelműen megfordítható és $\Gamma(s)$ a $0 \leqq s < \infty$ intervallumban szolgáltatja a keresett $G(x)$ Laplace-transzformáltját. Ez a $\Gamma(s)$ a mondott feltételek mellett egyértelműen meg van határozva. A függvényegyenletnek általában több megoldása létezik, de csak egy elégíti ki az említett feltételeket. Most $\Gamma(0)=p^*$, azaz $\lim\limits_{x\to\infty} G(x)=p^*$. A $\Gamma^{-1}(x)=0$ egyenlet gyökei pedig megegyeznek $\psi(\lambda(1-x))=x$ egyenlet gyökeivel. Ezzel tételünket bebizonyítottuk.

PÉLDA. Legyen $H(x)=1-e^{-x/\alpha}$, úgy $\psi(s)=1/(1+\alpha s)$ és ekkor (49)-ből

$$\Gamma(s)=\frac{1+\alpha(s+\lambda)-\sqrt{[1+\alpha(s+\lambda)]^2-4\alpha\lambda}}{2\alpha\lambda}. \tag{51}$$

Most (49)-nek két megoldása van és pedig pozitív és negatív négyzetgyökkel vett megoldás. A negatív négyzetgyököt $\Gamma(\infty)=0$ feltétel miatt kell venni. Ekkor (51) megfordításával azt nyerjük; hogy

$$G'(x) = e^{-\frac{(1+\lambda\alpha)x}{\alpha}} I_1\left(\frac{2\sqrt{\lambda\alpha x}}{\alpha}\right)\frac{1}{\sqrt{\lambda\alpha x}}, \tag{52}$$

ahol $I_1(x) = J_1(ix)/i$ és $J_1(x)$ az elsőfajú Bessel-függvényt jelöli. Most $G(\infty) = 1$, ha $\lambda\alpha \leqq 1$, míg $G(\infty) = 1/\lambda\alpha$, ha $\lambda\alpha > 1$.

A (48) összefüggés kiválóan alkalmas $G(x)$ momentumainak meghatározására.

Most meghatározzuk a várható kiszolgálási periódust

$$\mu = \int_0^\infty x\,dG(x) \tag{53}$$

-et, azonban közvetlenül (45)-ből. Emlékeztetünk arra, hogy

$$\alpha = \int_0^\infty x\,dH(x)$$

és így (45)-ből azt kapjuk, hogy

$$\mu = \alpha + \sum_{n=1}^{\infty} n\mu \int_0^\infty e^{-\lambda y} \frac{(\lambda y)^n}{n!}\,dH(y). \tag{54}$$

Ezt különben közvetlenül beláthatjuk: μ összetevődik az első személy átlagos kiszolgálási idejéből α-ból és ha ennek kiszolgálása közben n személy érkezik, aminek a valószínűsége

$$p_n = \int_0^\infty e^{-\lambda y} \frac{(\lambda y)^n}{n!}\,dH(y),$$

úgy ezek, valamint a közben érkezők átlagos kiszolgálási ideje a fent részletezett meggondolás szerint $n\mu$.

(54)-ben az összegezést végrehajtva az adódik, hogy

$$\mu = \alpha + \lambda\alpha\mu. \tag{55}$$

Ha $\lambda\alpha < 1$, úgy innen

$$\mu = \frac{\alpha}{1-\lambda\alpha}, \tag{56}$$

míg ha $\lambda\alpha \geqq 1$, úgy $\mu = \infty$ lehet csak.

A $\lambda\alpha > 1$ esetben, mint említettük $p^* = \Gamma(0)$ a valószínűsége annak, hogy a kiszolgálási periódus hossza véges. Ekkor kérdezhetjük, hogy mennyi a kiszolgáltatási periódus várható hossza azon feltétel mellett, hogy véges. Ennek értéke

$$\mu^* = -\frac{\Gamma'(0)}{\Gamma(0)}. \tag{57}$$

Itt $\Gamma(0)=p^*$ és (49) szerint $\Gamma'(0)=\psi'(\lambda(1-p^*))[1-\lambda\Gamma'(0)]$, ahonnan $\Gamma'(0)$ meghatározható. Így végeredményben

$$\mu^* = \frac{-\psi'(\lambda(1-p^*))}{p^*[1+\lambda\psi'(\lambda(1-p^*))]}. \tag{58}$$

Exponenciális kiszolgálási idők esetében, ha $\lambda\alpha>1$, úgy $p^*=1/\lambda\alpha$ és

$$\mu^* = \frac{\alpha}{\lambda\alpha-1}. \tag{59}$$

Állandó α időtartamú kiszolgálási idők esetén, mikoris p^* a $\lambda\alpha p^* e^{-\lambda\alpha p^*}=\lambda\alpha e^{-\lambda\alpha}$ egyenlet legkisebb pozitív megoldása, azt kapjuk, hogy

$$\mu^* = \frac{\alpha}{1-p^*\lambda\alpha}. \tag{60}$$

A kiszolgálási periódus vizsgálatával kapcsolatban felmerül még az a probléma, hogy egy kiszolgálási periódus hány személy kiszolgálásából áll. Jelöljük f_j-vel annak a valószínűségét, hogy egy kiszolgálási periódus $j(j=1,2,\ldots)$ számú kiszolgálásból áll. Annak a valószínűsége, hogy egy személy kiszolgálása alatt n személy érkezik a kiszolgáló berendezéshez, mint már említettük,

$$p_n = \int_0^\infty e^{-\lambda x}\frac{(\lambda x)^n}{n!}\,dH(x), \quad (n=0,1,2,\ldots). \tag{61}$$

Ekkor könnyen belátható, hogy fennáll a következő összefüggés:

$$f_j = \sum_{\substack{n_1+n_2+\ldots+n_j=j-1 \\ n_1+n_2+\ldots+n_k\geq k\ (k=1,2,\ldots,j-1)}} p_{n_1}p_{n_2}\ldots p_{n_j}. \tag{62}$$

Célszerűbbnek látszik azonban az $\{f_j\}$ mennyiségek generátorfüggvényét meghatározni, melyet jelöljünk a következőképpen:

$$F(\omega) = \sum_{j=1}^{\infty} f_j\omega^j. \tag{63}$$

Az f_j valószínűségekre a következő rekurzív formulát írhatjuk fel:

$$\begin{cases} f_1 = p_0 \\ f_j = \sum\limits_{n=1}^{j-1} p_n \sum\limits_{j_1+j_2+\ldots+j_n=j-1} f_{j_1}f_{j_2}\ldots f_{j_n}. \end{cases} \tag{64}$$

Ennek indokolása teljesen analóg a $G(x)$-re vonatkozó (45) formula felírásával. (64)-ből áttérve a generátorfüggvényekre, és tekintetbe véve, hogy

$$\psi(\lambda-\lambda\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n\omega^n, \tag{65}$$

azt kapjuk, hogy $F(\omega)$ *a következő függvényegyenletnek tesz eleget:*

$$F(\omega) = \omega\,\psi[\lambda-\lambda F(\omega)]. \tag{66}$$

7. TÉTEL. *Az f_j valószínűségek $F(\omega)$ generátorfüggvénye az*

$$F(\omega)=\omega\psi[\lambda-\lambda F(\omega)] \tag{67}$$

függvényegyenletnek $F(0)=0$ kezdeti feltétel által egyértelműen meghatározott, $|\omega|\leqq 1$-re analitikus megoldása. Legyen $x=p^*$ a $\psi(\lambda(1-x))=x$ egyenlet legkisebb valós pozitív gyöke, úgy $\lim\limits_{\omega\to 1} F(\omega)=p^*$.

BIZONYÍTÁS: Az f_j valószínűségek nyilvánvalóan léteznek. Így generátorfüggvényük $F(\omega)$ is létezik $|\omega|\leqq 1$-re, $F(\omega)$ analitikus $|\omega|\leqq 1$-re, $F(0)=0$, továbbá $F(\omega)$ kielégíti a (67) függvényegyenletet. $F(\omega)$ ismeretében az f_j valószínűségek egyértelműen meghatározhatók. Így elegendő kimutatni, hogy $F(\omega)$-át a mondott feltételek egyértelműen meghatározzák. Elegendő csupán $0\leqq\omega\leqq 1$ valós értékekre megállapítani $F(\omega)$-t, ennek ismeretében valamennyi $|\omega|\leqq 1$-re egyértelműen meghatározható. Legyen (67)-ben $x=F(\omega)$, úgy $\omega=F^{-1}(x)$ és ekkor erre (67) szerint fennáll

$$F^{-1}(x)=\frac{x}{\psi(\lambda(1-x))}.$$

Most $F^{-1}(0)=0$ és $F^{-1}(1)=1$ és $0\leqq x\leqq 1$ értékekre $\frac{dF^{-1}(x)}{dx}$ monoton csökken. A $\frac{dF^{-1}(x)}{dx}$ derivált értéke az $x=1$ pontban: $1-\lambda\alpha$. Ha ez a derivált nem negatív, azaz $\lambda\alpha\leqq 1$ úgy $F^{-1}(x)$ monoton növekedik a $0\leqq x\leqq 1$ értékekre és $F^{-1}(1)=1$. Ha ez a derivált pozitív, azaz $\lambda\alpha>1$, úgy $F^{-1}(x)=1$-nek $0<x<1$ közben van egy és csakis egy $x=p^*$ gyöke és ekkor $0\leqq x\leqq p^*$ értékekre $F^{-1}(x)$ monoton növekvő. Ha tehát $F^{-1}(x)=1$ egyenlet legkisebb pozitív gyökét $x=p^*$ jelöli, úgy azt kapjuk, hogy $F^{-1}(x)$ a $0\leqq x\leqq p^*$ értékekre egyértelműen megfordítható. $F(0)=0$, $F(\omega)$ ω-nak folytonos függvénye és $\lim\limits_{\omega\to 1} F(\omega)=p^*$. A fenti eljárással $F(\omega)$-át egyértelműen előállítottuk. p^* annak a valószínűségét jelenti, hogy a kiszolgálási periódus végesszámú kiszolgálásból áll.

PÉLDA. Legyen $\chi_n=\alpha$ (állandó). Ekkor $\psi(s)=e^{-s\alpha}$ és könnyen belátható, hogy

$$G(x)=\sum_{j=1}^{\left[\frac{x}{\alpha}\right]} f_j. \tag{68}$$

Tehát $G(x)$-et visszavezettük az f_j valószínűségek meghatározására. Most $F(\omega)$ a következő függvényegyenletnek tesz eleget:

$$F(\omega)=\omega e^{-\alpha\lambda[1-F(\omega)]}. \tag{69}$$

Ha $y=\alpha\lambda F(\omega)$ és $x=\omega e^{-\alpha\lambda}\alpha\lambda$ jelöléssel élünk, úgy

$$ye^{-y}=x \tag{70}$$

összefüggést nyerjük. Innen kell meghatározni az $y=y(x)$ függvényt, azaz

(70) inverz függvényét. Mint ismeretes $y=y(x)$-nek az origon átmenő ága az $|x|\leqq 1$ e értékekre a következő hatványsor alakban állítható elő:

(71) $$y(x)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{j^{j-1}}{j!}x^{j},$$

azaz $|\omega|\leqq 1$ értékekre azt kapjuk, hogy

(72) $$F(\omega)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{e^{-\lambda\alpha j}(\lambda\alpha j)^{j-1}}{j!}\omega^{j}.$$

Megjegyezzük, hogy (69)-ből a következő differenciálegyenletet is nyerhetnők

$$\omega F'(\omega)-F(\omega)=\lambda\alpha\omega F(\omega)F'(\omega),$$

melynek megoldását $F(0)=0$ kezdeti feltétel mellett ugyancsak (72) szolgáltatja.

Így (68) alapján felírható, hogy a keresett $G(x)$ eloszlásfüggvény

(73) $$G(x)=\sum_{j=1}^{\left[\frac{x}{\alpha}\right]}\frac{e^{-\lambda\alpha j}(\lambda\alpha j)^{j-1}}{j!}.$$

Megjegyezzük még, hogy (62) alapján felírható, hogy

(74) $$f_j=e^{-\lambda\alpha j}(\lambda\alpha)^{j-1}\sum_{\substack{n_1+n_2+\ldots+n_j=j-1\\ n_1+n_2+\ldots+n_k\geqq k\ (k=1,2,\ldots,j-1)}}\frac{1}{n_1!\,n_2!\ldots n_j!}$$

és így ezen az úton is megkapható (73).

Ha χ_n exponenciális eloszlású, úgy (67) szerint

(75) $$F(\omega)=\frac{(1+\lambda\alpha)-\sqrt{(1+\lambda\alpha)^2-4\lambda\alpha\omega}}{2\lambda\alpha},$$

ahonnan:

(76) $$f_j=\frac{1}{2}\binom{2j}{j}\frac{(\lambda\alpha)^{j-1}}{(1+\lambda\alpha)^{2j-1}}.$$

2. *$F(t,0)$ meghatározása.* [12] munkánkban foglalkoztunk olyan sztochasztikus folyamatokkal, melyben $1-e^{-\lambda x}$ eloszlásfüggvényű szünetek és $G(x)$ eloszlásfüggvényű történések váltogatják egymást. Kimutattuk, hogy ha a folyamat $t=0$ időpontban szünettel kezdődik, akkor annak a valószínűsége, hogy $(t,t+\Delta t)$ időközben egy történés (most kiszolgálási periódus) kezdődjék, $f(t)\Delta t+o(\Delta t)$, ahol $f(t)$ az idő folytonos függvénye, és egyértelműen meg van határozva a következő Volterra-féle integrálegyenlettel:

(77) $$f(t)=\lambda-\lambda\int_0^t f(t-x)[1-G(x)]\,dx.$$

Most fennáll $f(t)\Delta t+o(\Delta t)=F(t,0)\lambda\Delta t+o(\Delta t)$. Ugyanis $(t,t+\Delta t)$ közben akkor kezdődik egy kiszolgálási periódus, ha t időpontban nincs várakozó, aminek a valószínűsége $F(t,0)$ és $(t, t+\Delta t)$ közben valaki megérkezik a kiszolgáló berendezéshez, aminek a valószínűsége $\lambda\Delta t + o(\Delta t)$. Innen

$$F(t,0) = \frac{f(t)}{\lambda}. \tag{78}$$

(70) alapján $\Re(s) > 0$-ra fennáll, hogy

$$\int_0^\infty e^{-st} F(t,0)\,dt = \frac{1}{s+\lambda-\lambda\Gamma(s)}. \tag{79}$$

Innen $F(t,0)$ egyértelműen meghatározható $(F(0,0)=1)$.

Említett [12] munkánkban kimutattuk, hogy fennáll

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \frac{\lambda}{1+\lambda\mu} \tag{80}$$

határérték, ha μ véges. μ $G(x)$ átlagát jelenti. Innen (78) és (55) tekintetbevételével az adódik, hogy $\lambda\alpha < 1$ esetén

$$\lim_{t\to\infty} F(t,0) = F^*(0) = \frac{1}{1+\lambda\mu} = 1 - \lambda\alpha. \tag{81}$$

Ezzel kimutattuk $F^*(0)$ határérték létezését időben homogén esetben, amit az előző fejezetben felhasználtunk.

3. E_j állapot valószínűségének meghatározása. Jelölje P_j $(j=0,1,2,\ldots)$ időben homogén folyamatnál stacionárius esetben annak a valószínűségét, hogy egy tetszőlegesen kiválasztott időpontban a rendszer E_j $(j=0,1,2,\ldots)$ állapotban legyen, azaz a várakozó és kiszolgálás alatt álló személyek száma legyen j és P_0 annak a valószínűsége, hogy E_0 állapotban legyen a rendszer, azaz ne legyen se várakozó, se kiszolgálás alatt álló személy. Mint láttuk, $\lambda\alpha < 1$ esetben fennáll

$$P_0 = 1 - \lambda\alpha. \tag{82}$$

Ha $\lambda\alpha \geqq 1$, úgy mint láttuk $\mu = \infty$ és ekkor a rekurrens események elméletéből következik, hogy $P_0 = 0$. (Lásd W. FELLER [13] és [14] munkáit.)

HINCSIN [5] munkájában megmutatta, hogy stacionárius állapotban azaz $t\to\infty$ esetén annak a valószínűsége, hogy egy kiszolgálás végpontjában a rendszer E_j állapotban legyen, megegyezik annak a valószínűségével, hogy egy tetszőlegesen választott időpontban E_j állapotban legyen a rendszer. Elegendő tehát csupán a kiszolgálási idők végpontjaira felírni ezeket a valószínűségeket. Az egymást követő kiszolgálási idők végpontjaiban uralkodó állapotokat írja le $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n, \ldots$ valószínűségi változó, ahol $\zeta_n = j$, ha E_j állapotban van a rendszer az n-ik kiszolgálás végpontjában. Az $\{\zeta_n\}$ valószínűségi változók által leírt folyamat Markov-láncot alkot a következő átmenet valószínűségekkel $k \geqq 1, j=0,1,2,\ldots$-re

(83) $$P(\zeta_n = k+j-1 \mid \zeta_{n-1}=k) = p_j = \int_0^\infty e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^j}{j!} dH(x)$$

és $k=0$-ra

(84) $$P(\zeta_n = j \mid \zeta_{n-1}=0) = p_j.$$

Mint könnyen megmutatható, esetünkben alkalmazható W. FELLER ([14], 325.) könyvében kimondott tétel, mely szerint ha egy irreducibilis lánc állapotai ergodikusak, úgy a kezdeti ζ_1 értéktől függetlenül léteznek:

(85) $$\lim_{n\to\infty} P(\zeta_n = j) = P_j \quad (j=0,1,2,\ldots)$$

határvalószínűségek és a P_j értékek egyértelműen meghatározhatók a következő egyenletrendszerből:

(86) $$P_j = P_{j+1}p_0 + P_j p_1 + \cdots + P_1 p_j + P_0 p_j \quad (j=0,1,2,\ldots).$$

Esetünkben a Markov-lánc irreducibilis, ugyanis bármely állapot elérhető bármely állapotból elegendő számú lépéssel. FELLER kimutatja, hogy egy irreducibilis lánc állapotai mind ugyanazon osztályhoz tartoznak. $\lambda\alpha<1$ esetén, mint láttuk, az E_0 állapot ergodikus és ennek következtében valamennyi állapotra fennáll ez. Ha $\lambda\alpha \geqq 1$, úgy az E_0 állapot rekurrens nulla állapot és akkor az összes többi állapot is az, azaz $P_j=0$ valamennyi j-re.

Legyen

(87) $$\Pi(\omega) = \sum_{j=0}^{\infty} P_j \omega^j$$

és

(88) $$\pi(\omega) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j \omega^j = \int_0^\infty e^{-\lambda(1-\omega)x} dH(x) = \psi(\lambda(1-\omega)),$$

úgy ezen generátorfüggvények segítségével (86)-ból azt nyerjük, hogy

(89) $$\omega \Pi(\omega) = \pi(\omega)\,[\Pi(\omega) + P_0\omega - P_0],$$

ahonnan

(90) $$\Pi(\omega) = P_0 \frac{\pi(\omega)}{1 - \dfrac{1-\pi(\omega)}{1-\omega}}.$$

Ha $\omega \to 0$, úgy

(91) $$\frac{1-\pi(\omega)}{1-\omega} \to \lambda\alpha$$

és ekkor $\Pi(0) = P_0/(1-\lambda\alpha)$. Most ha $\lambda\alpha<1$, úgy akár $\Pi(0)=1$, akár akár $P_0 = 1-\lambda\alpha$ tekintetbevételével azt kapjuk, hogy

(92) $$\Pi(\omega) = \frac{(1-\lambda\alpha)\psi(\lambda(1-\omega))}{1 - \dfrac{1-\psi(\lambda(1-\omega))}{1-\omega}}.$$

PÉLDA: 1. χ_n exponenciális eloszlású valószínűségi változó, azaz $H(x) = 1 - e^{-x/\alpha}$. Ekkor $\psi(s) = 1/(1+\alpha s)$ és így fennáll, hogy

$$\Pi(\omega) = \frac{1-\lambda\alpha}{1-\lambda\alpha\omega}, \tag{93}$$

ahonnan

$$P_j = (1-\lambda\alpha)(\lambda\alpha)^j. \tag{94}$$

2. $\chi_n = \alpha$ (állandó). Ekkor $\psi(s) = e^{-s\alpha}$ és így

$$\Pi(\omega) = \frac{(1-\lambda\alpha)e^{-\lambda\alpha(1-\omega)}}{1 - \frac{1-e^{-\lambda\alpha(1-\omega)}}{(1-\omega)}}, \tag{95}$$

ahonnan

$$P_j = (1-\lambda\alpha)\sum_{k=0}^{j,(j-1)} (-1)^{j-k} e^{k\lambda\alpha}\left(\frac{(k\lambda\alpha)^{j-k}}{(j-k)!} + \frac{(k\lambda\alpha)^{j-k-1}}{(j-k-1)!}\right). \tag{96}$$

4. §. *„Várakozási idő"-problémák nem Poisson-folyamat esetén*

Tegyük fel most, hogy a kiszolgáló berendezéshez érkező személyek $\{t_n\}$ érkezési időpontjaira fennáll, hogy a $\tau_n = t_n - t_{n-1}$ $(n = 1, 2, \ldots; t_0 = 0)$ időkülönbségek egyforma eloszlású, független, pozitív valószínűségi változók közös $P(\tau_n \leqq x) = Q(x)$ eloszlásfüggvénnyel. Időben homogén Poisson-folyamat esetén $Q(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ $(x \geqq 0)$ volt. Most azt az általánosabb esetet tárgyaljuk, midőn $Q(x)$ tetszőleges. A $\chi_1, \chi_2, \ldots$ kiszolgálási időkről továbbra is fel fogjuk tenni, hogy azok egyforma eloszlású, független valószínűségi változók közös $H(x)$ eloszlásfüggvénnyel.

Már a 2. fejezetben említettük, hogy az ilymódon definiált $\eta(t)$ valószínűségi függvény általában nem Markov-folyamatot ír le, de a $\{t_n\}$ érkezési időpontok a rendszer Markov-pontjait alkotják. Legyen $\eta(t_n - 0) = \eta_n$, azaz az n-edik érkező személy várakozási ideje és $\eta(0) = \eta_0$. Az elmondottak szerint az $\{\eta_n\}$ valószínűségi változók sorozata Markov-folyamatot alkot. Az $\{\eta_n\}$ valószínűségi változók η_0 ismeretében sorjában a következő valószínűségi egyenlet segítségével határozhatók meg:

$$\eta_{n+1} = \begin{cases} \eta_n + \chi_n - \tau_{n+1} & \text{ha } \tau_{n+1} - \chi_n < \eta_n \\ 0 & \text{ha } \tau_{n+1} - \chi_n \geqq \eta_n. \end{cases} \tag{97}$$

Jelöljük η_n valószínűségi változó eloszlásfüggvényét $P(\eta_n \leqq x) = F_n(x)$-szel. Az $\{F_n(x)\}$ sorozat $F_0(x)$-ből kiindulva, fokozatosan előállítható a következő rekurzív formula segítségével:

$$F_{n+1}(x) = \int_0^\infty K(x, y)\, dF_n(y), \quad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{98}$$

ahol

$$(99) \qquad K(x, y) = \int_0^\infty [1 - Q(u + y - x)]\, d H(u).$$

Ugyanis az $\{\eta_n\}$ változó sorozat által leírt Markov-folyamat átmenet valószínűségei: $P(\eta_{n+1} \leqq x \mid \eta_n = y) = K(x, y)$ és így fennáll (98). A számítások kényelmesen elvégezhetők a következő kétlépéses rekurzív formulák segítségével:

$$(100) \qquad K_n(x) = \int_0^\infty H(x-y)\, d F_n(y)$$

és

$$(101) \qquad F_{n+1}(x) = \int_0^\infty [1 - Q(y-x)]\, d K_n(y).$$

További kérdés, hogy mikor létezik $\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$ határeloszlásfüggvény és hogyan lehet meghatározni $F(x)$-et. Erre vonatkozóan hivatkozunk D. V. LINDLEY [6] munkájára, amelyben a következő tételt bizonyította be:

Arra nézve, hogy létezzék $\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$ határeloszlásfüggvény, szükséges és elegendő, hogy fennálljon $M(\chi_n) < M(\tau_n)$ vagy $\tau_n - \chi_n \equiv 0$. Ha $M(\chi_n) \geqq M(\tau_n)$ és $\tau_n - \chi_n \not\equiv 0$, úgy minden x-re $\lim_{n\to\infty} F_n(x) = 0$. Az $F(x)$ határeloszlás, amennyiben létezik a kezdeti $F_0(x)$ eloszlástól független és a következő integrálegyenlet egyértelműen meghatározott megoldása:

$$(102) \qquad F(x) = \int_0^\infty K(x, y)\, d F(y).$$

LINDLEY vizsgálataiban a (97) egyenletből indul ki és megmutatja, hogy ez az egyenlet egy bolyongási problémát ír le, amely probléma a rekurrens események elméletével és nagy számok törvényeinek segítségével tárgyalható.

Az itt kimondott tétel bebizonyítható a Markov-folyamatok általános tételei segítségével vagy visszavezethető lényegében annak a kimutatására, hogy az $\eta_n = 0$ állapot ergodikus véges visszatérési idővel, ha $\alpha < \theta$, ahol $\alpha = M(\chi_n)$ és $\theta = M(\tau_n)$.

Érdekes kérdés még az, hogy ha az $\eta(t)$ folyamatot minden t-re értelmezzük a 2. fejezetben leírt módon, úgy mikor létezik $\lim_{t\to\infty} F(t, x) = F^*(x)$ határeloszlásfüggvény és hogyan határozható meg. Erre vonatkozóan a következő tételt mondjuk ki:

6. TÉTEL. *Ha $\alpha < \theta$ és $0 < \theta \leqq \infty$ és $Q(x)$ nem olyan eloszlásfüggvény, amely csupán ugrásokkal növeli értékét egy adott szám bizonyos egész számú*

többszöröseinél, úgy létezik a kezdeti $F_0(x)$ eloszlástól független $\lim_{t\to\infty} F(t,x) = F^*(x)$ *határeloszlásfüggvény, amely a következőképp határozható meg:*

$$F^*(x) = \frac{1}{\theta}\int_0^x [1-Q(y)]\, K(y+x)\, dy, \tag{103}$$

ahol

$$K(x) = \int_0^\infty F(x-y)\, d\, H(y) \tag{104}$$

és $F(x)$ a (102) *integrálegyenlet egyértelműen meghatározott megoldása.*

Tételünk bizonyítására bevezetünk egy új változót, $\zeta(t)$-t, amely t időpontnak a közvetlen megelőző t_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ időponttól vett távolságát jelenti. Az így definiált $\zeta(t)$ folyamat megegyezik J. L. DOOB [15] munkájában vizsgált megújítási folyamat speciális esetével. Feltételeink mellett alkalmazhatjuk DOOB [12] tételét, amely szerint létezik a következő határeloszlásfüggvény:

$$Q^*(x) = \lim_{t\to\infty} P(\zeta(t) \leqq x) = \frac{1}{\theta}\int_0^x [1-Q(u)]\, du. \tag{105}$$

Ha $t \to \infty$ és t_n jelenti a $(0, t)$ szakaszban utoljára érkező személy érkezési időpontját, úgy 1 valószínűséggel $n \to \infty$ és $\lim_{n\to\infty} P(\eta(t_n) \leqq x) = K(x)$, ahol $K(x)$-et (104) szolgáltatja. Így könnyen beláthatóan

$$F^*(x) = \int_0^x K(x+y)\, d\, Q^*(y), \tag{106}$$

ami megegyezik (96)-tal.

Az egyértelműség és a kezdeti $F_0(x)$ eloszlástól való függetlenség az $F(x)$-re kimondott tételből következik.

Megjegyezzük, hogy ha $F^*(x)$-et úgy értelmezzük, mint $\eta(t)$ eloszlásfüggvényét egy végtelen hosszú ideje tartó folyamatban „találomra" választott $t = t^*$ időpontban, úgy $G(x)$-re elég azt kikötni, hogy átlagára fennálljon: $0 < \mu < \infty$. Ezen pontosabban azt értjük, hogy a $(0, t)$ intervallumon választunk egy egyenletes eloszlást mutató pontot, erre nézve meghatározzuk a megfelelő eloszlásfüggvényt és azután $t \to \infty$ határátmenetet végzünk.

PÉLDA. Erre az esetre a várakozási idők mellett példának lehet felhozni vízgyüjtő-medencék megtelését és kiürülését. Ezt a példát G. P. BOJEV ([16] 311. o. 170. példa) könyvéből merítettük. Jelentse $\eta(t)$ a vízgyüjtő medence készletét t időpontban. A vízgyüjtő medencék körülbelül éves periódusokban telnek meg és ha feltesszük, hogy az időegységenkint távozó víz mennyisége a készlettől függetlenül ugyanannyi, míg a kiürülés bekövetkezik, úgy a fenti modellel leírható jelenséggel állunk szemben. Stacionárius esetben a vízgyüjtő medence készletének eloszlásfüggvényét a (106) alatt megadott $F^*(x)$ szolgáltatja. Ha azt tesszük fel, hogy az időegységenként távozó víz arányos a készlettel, úgy a [17] dolgozatunkban leírt modell alkalmazható.

Magyar Tudományos Akadémia
Alkalmazott Matematikai Intézete.

IRODALOM

[1] Th. C. Fry: Probability and its Engineering Uses (New-York (1928), 372—387.),

[2] F. Pollaczek: Über eine Aufgabe der Wahrscheinlichkeitsrechnung. [Mathematische Zeitschrift **32** (1930), I. 64—100; II. 729—850.].

[3] F. Pollaczek: Répartition des délais d'attente des avions arrivant à un aéroport qui possède *s* pistes d'atterissages [Comptes Rendus Acad. Sci. Paris **232** (1951), 1901.].

[4] A. N. Kolmogorov: Sur le problème d'attente [А. Я. Хинчин Mathematique, Математический Сборник **38** (1931), 101—106].

[5] А. Я. Хинчин: Математическая теория стационарной очереги [Математический Сборник **39** (1932), 73—84.].

[6] D. V. Lindley: The theory of queues with a single counter [Proceedings of the Cambridge Philosophical Society **48** (1952), 277—289.].

[7] D. G. Kendall: Some problems in the theory of queues [Journal of the Royal Statistical Society. Ser. B. **13** (1951), 151—185.].

[8] W. Feller: On theory of stochastic processes, with particular reference to applications [Proceedings of the Berkeley Symposium (1949), 403—432.].

[9] W. Feller: Zur Theorie der stochastischen Processe [Mathematische Annalen **113** (1936), 113—160.].

[10] A. Zygmund: A remark on characteristic functions [Proceedings of the Second Berkeley Symposium (1951), 369—372.].

[11] A. N. Kolmogorov: és B. V. Gnyegyenko: Független valószínűségi változók összegeinek határeloszlásai (Budapest, 1951).

[12] L. Takács: Occurence and coincidence phenomena in case of happenings with arbitrary distribution law of duration [Acta Math. Hung. **2** (1951), 275—298.].

[13] W. Feller: Fluctuation theory of recurrent events [Transaction of the Am. Math. Soc. **67** (1949), 98—119.].

[14] W. Feller: An Introduction to Probability Theory and its Application [New-York, 1950.].

[15] J. L. Doob: Renewal theory from the point of view ot the theory of probability [Transaction Am. Math. Soc. **63** (1948), 422—438.].

[16] Г. П. Боеб: Теория вероятностей (Москва, 1950.).

[17] Takács L.: Bizonyos fizikai regisztráló berendezésekkel kapcsolatos sztochasztikus folyamatokról. [MTA III. Oszt. Közl. **4** (1954) 571—587.]

BIZONYOS FIZIKAI REGISZTRÁLÓ BERENDEZÉSEKKEL KAPCSOLATOS SZTOCHASZTIKUS FOLYAMATOKRÓL

TAKÁCS LAJOS

Bemutatta Rényi Alfréd lev. tag az 1953. június 8-án tartott felolvasó ülésen

1. §. Bevezetés

[1] dolgozatunkban foglalkoztunk a következő sztochasztikus folyamattal: Tekintsünk egy Poisson-folyamatot $0 \leqq t < \infty$ időpontokban. Legyen az események időbeli sűrűsége $\lambda(t)$, t-nek nemnegatív, folytonos és korlátos függvénye. Feltesszük, hogy a Poisson-folyamat minden eseménye létrehoz egy:

$$(1) \qquad f(u,\chi) = \begin{cases} \chi e^{-\alpha u} & \text{ha } u \geqq 0, \\ 0 & \text{ha } u < 0 \end{cases}$$

időbeli lefolyású jelet, ahol u a jel kezdőpontjától számított időtartamot jelenti, χ pozitív valószínűségi változó a jel amplitúdója és α egy pozitív állandó. Jelölje $\eta(t)$ valószínűségi változó a $(0, t)$ időintervallumban kezdődő jelek összegét t időpontban, azaz legyen

$$(2) \qquad \eta(t) = \sum_{0 \leqq t_n \leqq t} f(t - t_n, \chi_n),$$

ahol $0 \leqq t_1 < t_2 < \cdots$ jelentik a $(0 \leqq t < \infty)$ időintervallumban kezdődő jelek kezdő pontjait és $\chi_1, \chi_2, \ldots$ az egyes jelek amplitúdóit. Feltesszük, hogy $\chi_1, \chi_2, \ldots$ egyforma eloszlású független valószínűségi változók közös $P(\chi_n \leqq x) = H(x)$ eloszlásfüggvénnyel. [1]-ben kimutattuk, hogy fennáll a következő tétel:

Az $\eta(t)$ valószínűségi változó karakterisztikus függvénye $\Phi(t,\omega)$ a következőképpen fejezhető ki:

$$(3) \qquad \Phi(t,\omega) = E\{e^{i\omega\eta(t)}\} = \exp\left\{-\int_0^t \lambda(t-u)[1-\varphi(\omega e^{-\alpha u})]\,du\right\},$$

ahol $\varphi(\omega)$ a χ_n $(n = 1, 2, \ldots)$ valószínűségi változó karakterisztikus függvénye, azaz

$$(4) \qquad \varphi(\omega) = E\{e^{i\omega\chi_n}\} = \int_0^\infty e^{i\omega x}\,dH(x).$$

Megmutattuk továbbá, hogyha az alapulvett Poisson-folyamat időben homogén, tehát ha $\lambda(t) \equiv \lambda$ (állandó), fennáll a következő határeloszlástétel:

Ha a χ_n $(n = 1, 2, \ldots)$ valószínűségi változó várható értéke véges, úgy létezik $\lim\limits_{t \to \infty} P(\eta(t) \leqq x) = F^*(x)$ határeloszlás. Az $F^*(x)$ eloszlásfüggvény karak-

terisztikus függvényére $\Phi^*(\omega)$-ra fennáll, hogy

$$\Phi^*(\omega)=\exp\left[-\frac{\lambda}{\alpha}\int_0^1\frac{1-\varphi(\omega u)}{u}\,du\right]. \tag{5}$$

A fenti feltevések mellett mint ismeretes, az alapulvett Poisson-folyamat egymást követő eseményei közötti t_n-t_{n-1} ($n=2,3,\ldots$) időkülönbségek exponenciális eloszlású, független valószínűségi változók. *Dolgozatunkban azzal az általánosabb esettel fogunk foglalkozni, amikor a kiindulásul szolgáló esemény folyamatban az egymást követő események közötti $t_n-t_{n-1}=\xi_{n-1}$ ($n=1,2,\ldots$; $t_0=0$) időkülönbségek egyforma eloszlású független valószínűségi változók, melyek közös eloszlásfüggvénye $P(\xi_n\leqq x)=G(x)$ tetszőleges. Tegyük fel ismét, hogy a létrehozott jelek időbeli lefolyását az* (1) *függvény írja le és jelentse $\eta(t)$ a $(0,t)$ időintervallumban kezdődő jelek értékeinek összegét t időpontban, melyet most is* (2) *ad meg. Jelölje $\eta(t)$ eloszlásfüggvényét $P(\eta(t)\leqq x)=F(t,x)$. Dolgozatunkban $F(t,x)$ explicit meghatározásával nem foglalkozunk. Csupán azt a kérdést tárgyaljuk, hogy miként viselkedik $F(t,x)$ eloszlásfüggvény, midőn $t\to\infty$.*

Abban a speciális esetben, ha $G(x)=1-e^{-\lambda x}$, azaz az alap-folyamat időben homogén Poisson-folyamat, úgy mint már említettük, létezik $\lim\limits_{t\to\infty}F(t,x)=F^*(x)$ határeloszlásfüggvény. Tetszőleges $G(x)$ eloszlásfüggvény esetén a 3. §-ban állapítjuk meg, hogy mikor létezik $\lim\limits_{t\to\infty}F(t,x)=F^*(x)$ határeloszlásfüggvény és az hogyan határozható meg. Először azonban $\{F_n(x)\}$ eloszlásfüggvény sorozat konvergenciáját vizsgáljuk, ahol $F_n(x)=F(t_n-0,x)$ és $\{t_n\}$ sorozat az alapfolyamat eseményeinek időpontjait jelenti. A 2. §-ban $\lim\limits_{n\to\infty}F_n(x)=F(x)$ határeloszlásfüggvény meghatározásával foglalkozunk. Ezután $F^*(x)$ határeloszlásfüggvény meghatározását visszavezetjük $F(x)$ ismeretére.

Megjegyezzük, hogy az $F^*(x)$ határeloszlásfüggvénynek más értelmezést is adhatunk. Tegyük fel, hogy a vizsgált $\eta(t)$ folyamat már végtelen hosszú ideje tart. Ebben a folyamatban „találomra" választunk egy t^* időpontot és kérdezzük, hogy mivel lesz ekkor egyenlő $P(\eta(t^*)\leqq x)$ valószínűség. Ezen pontosabban azt értjük, hogy $(0,t)$ időközben választunk egy egyenletes eloszlást mutató pontot és erre nézve állapítjuk meg a megfelelő valószínűséget, majd $t\to\infty$ határátmenetet végzünk. Kimutatjuk,hogy $P(\eta(t^*)\leqq x)=F^*(x)$. $F^*(x)$ ezen utóbbi értelmezése azonban általánosabb, mint az előző, ugyanis az így definiált $F^*(x)$ eloszlásfüggvény sokszor olyan esetekben is létezik, amikor $\lim\limits_{t\to\infty}F(t,x)$ nem létezik. $F^*(x)$ úgy tekinthető, mint az egyensúlyi állapotra vonatkozó eloszlásfüggvény, azaz azon időpontokra vonatkozó megoldás, amelyeknél a kezdeti állapot hatása már elmúlt.

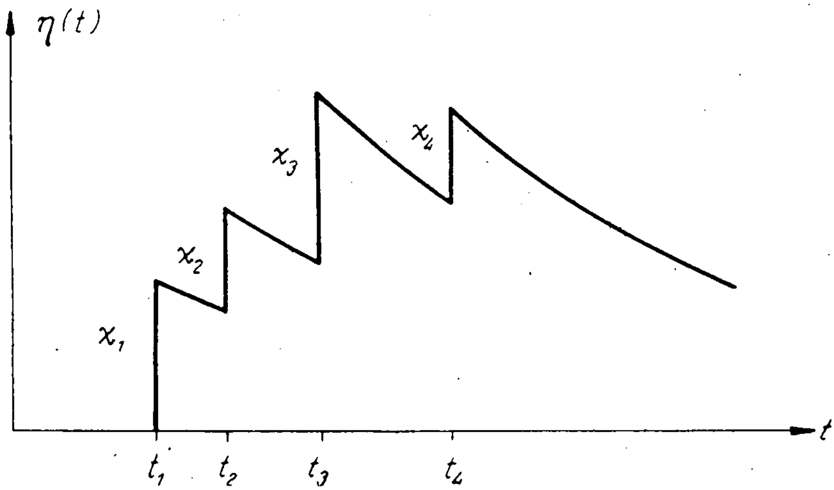
Végül a 4. és 5. §-ban a fenti folyamatoknak részecskeszámlálók elméletében történő alkalmazásaival foglalkozunk.

2. §. *Az $F(x)$ határeloszlás meghatározása*

Amint mondottuk, $\eta(t)$ a $(0, t)$ időintervallumban kezdődő jelek összegét jelenti t időpontban. $\eta(t)$ menetét adott esetben az 1. ábra szemlélteti. Legyen $\eta(t_n-0)=\eta_n$ azaz a jelek összegének értéke közvetlenül az n-ik jel kezdete előtt. Ha az n-ik jel amplitúdója χ_n, úgy $\eta(t_n)=\eta_n+\chi_n$ és ezután $\eta(t)$ exponenciálisan csökken a következő jel bekövetkezésének időpontjáig és fennáll, hogy

$$\eta_{n+1}=(\eta_n+\chi_n)e^{-\alpha\xi_n}, \tag{6}$$

ahol χ_n és ξ_n egymástól, valamint η_n-től is független valószínűségi változók.



1. ábra

Eszerint az $\{\eta_n\}$ valószínűségi változók sorozata Markov-folyamatot alkot. Másszóval a t_n időpontok a vizsgált nem Markov-típusú folyamat Markov-pontjait alkotják. Ezen azt értjük, hogy ha ilyen időpontokban ismerjük a rendszer állapotát, úgy ennek jövő sztochasztikus viselkedése egyértelműen meg van határozva, azaz nem függ a rendszer múltjától. Más elnevezés szerint az ilyen pontokat regenerációs pontoknak és a folyamatot rekurrens események folyamatának nevezzük.

Az $\{\eta_n\}$ valószínűségi változók sorozata által leírt Markov-folyamatra vonatkozóan az átmenet-valószínűségek (6) alapján a következők:

$$P(\eta_{n+1}\leqq x\,|\,\eta_n=y)=\int_0^\infty H(xe^{\alpha u}-y)\,dG(u) \quad (n=1,2,\ldots). \tag{7}$$

Ugyanis $P(\chi_n\leqq x)=H(x)$ és $P(\xi_n\leqq x)=G(x)$.

(7) segítségével $P(\eta_1\leqq x)=F_1(x)=1\,(x\geqq 0)$-ból kiindulva sorjában meghatározhatók a $P(\eta_n\leqq x)=F_n(x)$ eloszlásfüggvények. A számítások ké-

nyelmesen elvégezhetők a következő kétlépéses rekurzív formulák segítségével:

$$K_n(x) = \int_0^\infty F_n(x-y)\,dH(y), \tag{8}$$

$$F_{n+1}(x) = \int_0^\infty K_n(xe^{\alpha u})\,dG(u). \tag{9}$$

Itt $K_n(x) = F(t_n+0, x)$, azaz a jelek összegének eloszlásfüggvénye közvetlenül az n-ik jel kezdete után.

A (6) összefüggés kiválóan alkalmas az η_n valószínűségi változók momentumainak meghatározására, amennyiben azok léteznek. Csupán azt kell tekintetbe venni, hogy valószínűségi változók összegének várható értéke egyenlő az egyes változók várható értékeinek összegével és hogy független valószínűségi változók szorzatának várható értéke egyenlő az egyes változók várható értékeinek a szorzatával. Így (6) alapján

$$E\{\eta_{n+1}^k\} = E\{e^{-\alpha k \xi_n}\} E\{(\eta_n+\chi_n)^k\} = E\{e^{-\alpha k \xi_n}\}\left[\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j} E\{\eta_n^j\} E\{\chi_n^{k-j}\}\right], \tag{10}$$

ahol

$$E\{e^{-\alpha k \xi_n}\} = \int_0^\infty e^{-\alpha k x}\,dG(x), \tag{11}$$

és

$$E\{\chi_n^j\} = \int_0^\infty x^j\,dH(x). \tag{12}$$

(10) egyenleteket $k=1, 2, \ldots$-re és $n=1, 2, \ldots$-re felírva rekurzív formulát nyerünk az $E\{\eta_n^k\}$ momentumsorozat meghatározására.

Legyen speciálisan $M_n = E\{\eta_n\}$, azaz η_n valószínűségi változó várható értéke. Erre fennáll, hogy

$$M_{n+1} = (M_n+\mu)\int_0^\infty e^{-\alpha x}\,dG(x), \tag{13}$$

ahol μ jelenti χ_n várható értékét, azaz

$$\mu = \int_0^\infty x\,dH(x) = \int_0^\infty [1-H(x)]\,dx. \tag{14}$$

Ha feltesszük, hogy ξ_n valószínűségi változó pozitív, azaz $G(0)=0$, úgy $\int_0^\infty e^{-\alpha x}dG(x) < 1$, és ekkor ha μ véges, úgy az $\{M_n\}$ sorozat konvergens és fennáll

$$M = \lim_{n\to\infty} M_n = \frac{\mu\int_0^\infty e^{-\alpha x}dG(x)}{1-\int_0^\infty e^{-\alpha x}dG(x)}. \tag{15}$$

Megjegyezzük, hogy $G(0)=0$ helyett elegendő lenne csupán azt feltenni, hogy $G(0)<1$.

Foglalkozzunk most azzal a kérdéssel, hogy milyen feltételek mellett létezik $\lim_{n\to\infty} F_n(x)=\lim_{n\to\infty} F(t_n-0, x)=F(x)$ határeloszlás és miként határozható meg. Erre vonatkozólag a következő tételt bizonyítjuk be:

1. TÉTEL: *Ha* χ_n $(n=1, 2, \ldots)$ *várható értéke* $E(\chi_n)=\mu$ *véges és* $G(0)<1$, *úgy* $\{F_n(x)\}$ *eloszlásfüggvénysorozat* $n\to\infty$ *esetén a kezdeti* $F_1(x)$ *eloszlásfüggvénytől függetlenül ugyanazon* $F(x)$ *határeloszlásfüggvényhez tart és ez a következő integrálegyenlet egyértelműen meghatározott megoldása:*

$$F(x)=\int_0^\infty K(x, y)\,dF(y), \tag{16}$$

ahol

$$K(x, y)=\int_0^\infty H(xe^{\alpha u}-y)\,dG(u). \tag{17}$$

BIZONYÍTÁS: Legyen először miként eddig is volt $\eta_1=0$, azaz $F_1(x)=1$ ha $x\geqq 0$ és $F_1(x)=0$, ha $x<0$. Kimutatjuk, hogy rögzített x érték mellett $\{F_n(x)\}$ sorozat monoton csökkenő. (6) formula ismételt alkalmazásával könnyen kapjuk, hogy

$$\eta_n=\chi_1 e^{-\alpha(\xi_1+\cdots+\xi_{n-1})}+\chi_2 e^{-\alpha(\xi_2+\cdots+\xi_{n-1})}+\cdots+\chi_{n-1}e^{-\alpha\xi_{n-1}}, \quad (n=2, 3, \ldots). \tag{18}$$

Itt $\chi_1, \chi_2, \ldots$ és $\xi_1, \xi_2, \ldots$ független valószínűségi változók közös $H(x)$, illetve $G(x)$ eloszlásfüggvénnyel. (18)-at η_{n+1}-re felírva azt kapjuk, hogy:

$$\eta_{n+1}=\chi_1 e^{-\alpha(\xi_1+\cdots+\xi_n)}+\eta_n^*, \tag{19}$$

ahol η_n^*-ban foglaltuk össze a többi tagok összegét. Könnyen belátható, hogy η_n és η_n^* valószínűségi változók eloszlásfüggvényei megegyeznek. Mivel (19) jobboldalán az első tag pozitív valószínűségi változó, következőleg fennáll, hogy $P(\eta_{n+1}\leqq x)\leqq P(\eta_n\leqq x)$, azaz $F_{n+1}(x)\leqq F_n(x)$, $(n=2, 3, \ldots)$, amit bizonyítani kívántunk. Az $\{F_n(x)\}$ sorozat alulról korlátos: $0\leqq F_n(x)$ és monoton csökkenő, tehát minden x-re létezik $\lim_{n\to\infty} F_n(x)=F(x)$ határfüggvény. Könnyen belátható, hogy $F(x)$ eloszlásfüggvény. Ugyanis $F(0)=0$, $F(x)$ x-nek nem csökkenő függvénye és csupán azt kell kimutatni, hogy $F(+\infty)=1$. Az utóbbi állítás a következőképpen látható be: $\{E(\eta_n)\}$ várható értékek sorozata: $M_1=0$, M_2, $M_3, \ldots$ (13) szerint monoton növekedő és (15) által meghatározott M határértékhez tart. Legyen $x>M/\varepsilon$ ahol $\varepsilon>0$ tetszőleges, úgy $x>M_n/\varepsilon$ is fennáll és ekkor a nemnegatív valószínűségi változókra vonatkozó ismert Markov-féle egyenlőtlenség szerint $F_n(x)\geqq 1-\varepsilon$ minden n-re, tetszőleges kis ε mellett is. Innen következik, hogy $x>M/\varepsilon$ esetén $F(x)\geqq 1-\varepsilon$, azaz $\lim_{x\to\infty} F(x)=1$.

Most megmutatjuk, hogy a kezdeti eloszlástól függetlenül mindig ugyanazt az $F(x)$ határeloszlásfüggvényt nyerjük. Eddig $\eta_1 = 0$ volt, ha most feltesszük, hogy η_1 tetszőleges eloszlást mutató valószínűségi változó, úgy az előző tárgyaláshoz képest a különbség annyi, hogy a (18) alatti η_n helyett $\eta_n + \eta_1 e^{-\alpha(\xi_1+\dots+\xi_{n-1})}$ szolgáltatja a jelek értékének összegét közvetlenül az n-ik esemény bekövetkezése előtt. Mivel n növekedésével $\eta_1 e^{-\alpha(\xi_1+\dots+\xi_{n-1})}$ valószínűségi változó tetszőleges eloszlású η_1 esetén is valószínűségi mértékben 0-hoz konvergál, tehát most is létezik határeloszlásfüggvény és ez megegyezik a korábban nyert $F(x)$-szel.

Az $F(x)$ eloszlásfüggvénynek ekkor, mint könnyen belátható, ki kell elégítenie a következő integrálegyenletet:

$$F(x) = \int_0^\infty P(\eta_{n+1} \leqq x \mid \eta_n = y)\, dF(y), \tag{20}$$

ami ekvivalens (16)-tal.

Kimutatjuk még, hogy (16) integrálegyenletnek egyetlen olyan megoldása van, amely x-ben eloszlásfüggvény és ez a keresett $F(x)$ határeloszlásfüggvény. Ugyanis, ha lenne még egy megoldása, amely x-ben eloszlásfüggvény, úgy válasszuk azt η_1 eloszlásfüggvényének. (6) egyenlet szerint a (16) integrálegyenlet fennállása következtében ez az eloszlásfüggvény önmagát reprodukálja lépésről lépésre és így a határeloszlás is megegyezik vele. Láttuk azonban, hogy ha tetszőleges eloszlásból indulunk is ki, mindig ugyanazon a kezdeti eloszlástól független $F(x)$ határeloszlásfüggvényt kapjuk, és így feltevésünk ellentmondásra vezet.

Megjegyezzük, hogy a (16) integrálegyenlet ekvivalens a következő integrálegyenletrendszerrel:

$$K(x) = \int_0^\infty F(x-y)\, dH(y) \tag{21}$$

és

$$F(x) = \int_0^\infty K(xe^{\alpha y})\, dG(y). \tag{22}$$

Itt $K(x) = \lim\limits_{n\to\infty} P(\eta_n + \chi_n \leqq x)$, azaz $\eta(t)$ határeloszlásfüggvénye abban az esetben, ha $t = t_n + 0$ értékeken át tartunk végtelenhez.

Megjegyezzük még, hogy ha χ_n és ξ_n valószínűségi változók legalább egyike nem elfajult eloszlással bír, úgy az $F(x)$ határeloszlásfüggvény sem elfajult.

3. §. Az $F^*(x)$ eloszlásfüggvény meghatározása

Most azzal a kérdéssel foglalkozunk, hogy milyen feltételek mellett létezik $\lim\limits_{t\to\infty} F(t, x) = F^*(x)$ határeloszlásfüggvény és hogyan határozható meg. Erre vonatkozóan a következő tételt bizonyítjuk be:

2. TÉTEL. *Ha χ_n várható értéke $E(\chi_n)=\mu$ véges, ξ_n várható értékére $E(\xi_n)=\vartheta$-ra fennáll, hogy $0<\vartheta<\infty$ és ξ_n eloszlásfüggvényére $G(x)$-re fennáll, hogy $G(0)<1$ és $G(x)$ nem olyan eloszlásfüggvény, amely csupán ugrásokkal növeli értékét egy adott szám bizonyos egészszámú többszöröseinél, úgy létezik a kezdeti $F(0,x)$ eloszlástól független, egyértelműen meghatározott $\lim\limits_{t\to\infty} F(t,x)=F^*(x)$ határeloszlásfüggvény és ez a következőképpen kapható meg:*

$$F^*(x)=\frac{1}{\vartheta}\int_0^\infty K(xe^{\alpha u})[1-G(u)]\,du, \tag{23}$$

ahol $K(x)$-et $F(x)$ ismeretében (21) adja meg.

Megjegyezzük, hogy a (2) alatti definíció szerint $\eta(0)=0$ és ekkor $F(0,x)=1$, ha $x\geqq 0$ és $F(0,x)=0$, ha $x<0$. Ha $\eta(0)=\eta_0$ valószínűségi változóval, úgy $\eta(t)$ (2) alatti definíciójában egy additív $\eta_0 e^{-\alpha t}$ tagot is kell szerepeltetni.

Tételünk bizonyítására vezessünk be egy új valószínűségi változót $\zeta(t)$-t, amely jelentse a t időpontnak a közvetlen megelőző esemény időpontjától való távolságát, ha $(0,t)$ időközben egyáltalán előfordul esemény és legyen $\zeta(t)=t$ ha $(0,t)$ időközben nem fordul elő esemény. Az így definiált $\zeta(t)$ processzus megegyezik J. L. DOOB [2] munkájában vizsgált megújítási folyamat speciális esetével. Tételünkben kimondott feltételek mellett felhasználhatjuk DOOB idézett munkájának 12. tételét, amely szerint létezik a következő határeloszlásfüggvény:

$$G^*(x)=\lim_{t\to\infty} P(\zeta(t)\leqq x)=\frac{1}{\vartheta}\int_0^x [1-G(u)]\,du. \tag{24}$$

Ha $(0,t)$ időközben n esemény fordul elő és $t-t_n=u$, úgy ezen feltételek mellett $\eta(t)$ eloszlásfüggvénye legyen $K_n^*(xe^{\alpha u})$. Ha $P(\zeta(t)\leqq u)=G(t,u)$ jelölést bevezetjük, úgy azon feltétel mellett, hogy $(0,t)$ időközben n esemény fordul elő, $\eta(t)$ eloszlásfüggvénye

$$\int_0^t K_n^*(xe^{\alpha u})\,d_u G(t,u). \tag{25}$$

Vegyük tekintetbe, hogy ha $t\to\infty$ úgy $G(t,u)\to G^*(u)$ és ekkor 1 valószínűséggel $n\to\infty$, mikoris a kimondott feltételek mellett $K_n^*(xe^{\alpha u})\to K(xe^{\alpha u})$. Így E. HELLY ismert tételének felhasználásával kimutatható, hogy

$$F^*(x)=\lim_{t\to\infty} F(t,x)=\int_0^\infty K(xe^{\alpha u})\,dG^*(u), \tag{26}$$

ami bizonyítandó volt és ami megegyezik (23)-mal. Az egyértelműség és a kezdeti eloszlástól való függetlenség az $F(x)$-re kimondott 1. tételből adódik.

Ha $F^*(x)$-et úgy értelmezzük, mint $\eta(t^*)$ valószínűségi változó eloszlásfüggvényét, abban az esetben, ha az $\eta(t)$ folyamat már végtelen hosszú ideje tart és t^* egy „találomra" választott időpontot jelent, úgy $F^*(x)$-et most is (23) szolgáltatja. Ki kell hangsúlyozni azonban, hogy az utóbbi értelmezés szerint ξ_n-re csak azt kell kikötni, hogy $E(\xi_n) = \vartheta$ várható érték $0 < \vartheta < \infty$ határok közé essék. Ha $\lim\limits_{t \to \infty} F(t, x)$ határeloszlás létezik, úgy természetesen megegyezik $F^*(x)$-szel, de $F^*(x)$ olykor is létezhet, amikor $F(t, x)$-nek nincs határértéke.

Ez utóbbi állításunk igazolására mindenekelőtt meg kell határozni annak a valószínűségét, hogy a végtelen hosszú ideje tartó folyamatban „találomra" választott pontnak a megelőző esemény időpontjától vett távolsága $\leq x$. Azt állítjuk, hogy ezt a valószínűséget a (24) alatt értelmezett $G^*(x)$ eloszlásfüggvény szolgáltatja. Ha a 2. tétel feltételei teljesülnek, úgy ez nyilvánvaló, most azonban a „nagy számok erős törvényének" felhasználásával kimutatjuk, hogy ez már $0 < \vartheta < \infty$ feltevés esetén is teljesül. Az említett valószínűséget a következőképpen határozzuk meg: Tekintsük először a folyamatot (t_1, t_{n+1}) időközben. Ezen az intervallumon választunk egy véletlen pontot, amelyről feltesszük, hogy egyenletes eloszlást követ (t_1, t_{n+1})-en. Így meghatározzuk a keresett valószínűséget erre az intervallumra, majd $n \to \infty$ határátmenettel kapjuk a feladat megoldását. Könnyen belátható, hogy ugyanerre az eredményre jutunk, ha (t_1, t_{n+1}) helyett tetszőleges $(0, t)$ szakaszt választunk és $t \to \infty$ határátmenetet végzünk. Ugyanis, ha $(0, t)$ intervallumban n esemény fordul elő, úgy 1 valószínűséggel $\frac{t_{n+1} - t_1}{t} \to 1$, ha $t \to \infty$.

Tekintsük tehát a (t_1, t_{n+1}) szakaszt. Feltevésünk szerint a $t_{k+1} - t_k = \xi_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ időkülönbségek egyforma eloszlású független valószínűségi változók ugyanazon $G(x)$ eloszlásfüggvénnyel. Legyenek $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ távolságok közül x-nél nagyobbak: $\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \ldots, \xi_{i_m}$ és a többiek pedig legyenek $\leq x$. Egy találomra választott pont akkor lesz az előző eseménytől $\leq x$ távolságra, ha x-nél kisebb ξ_k hosszúságú szakaszra esik, vagy x-nél nagyobb hosszúságú szakasznak a kezdőponttól vett x hosszúságú részére. E feltételek mellett az egyenletes eloszlás következtében a keresett valószínűség a következő:

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k - \sum\limits_{k=1}^{m} (\xi_{i_k} - x)}{\sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k} = 1 - \frac{m}{n} \frac{\dfrac{\xi_{i_1} + \cdots + \xi_{i_m}}{m} - x}{\dfrac{\xi_1 + \cdots + \xi_n}{n}}. \tag{27}$$

Olyan x értékekre, amelyekre $G(x) = 1$, azaz minden szakasz hossza $\leq x$, ez a valószínűség 1-gyel egyenlő és következőleg ekkor $G^*(x) = 1$, ami összhangban van (24)-gyel. Tegyük fel tehát, hogy $G(x) < 1$. Ha $\vartheta = E(\xi_k)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$, azaz

$$\vartheta = \int_0^\infty x\,dG(x) = \int_0^\infty [1 - G(x)]\,dx \tag{28}$$

véges, úgy a „nagy számok erős törvénye" szerint fennáll, hogy 1 valószínűséggel

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\xi_1+\cdots+\xi_n}{n} = \vartheta. \tag{29}$$

Hasonló értelemben felírható, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\xi_{i_1}+\cdots+\xi_{i_m}}{m} = \frac{1}{1-G(x)}\int_0^\infty u\,dG(u), \tag{30}$$

ugyanis

$$P(\xi_k \leqq u \mid \xi_k > x) = \frac{G(u)-G(x)}{1-G(x)}, \tag{31}$$

továbbá

$$\lim_{n\to\infty} \frac{m}{n} = 1-G(x). \tag{32}$$

E határértékek felhasználásával (27)-ből $n\to\infty$ határátmenettel azt kapjuk, hogy $G(x)<1$ értékekre

$$G^*(x) = \frac{1}{\vartheta}\int_0^x [1-G(u)]\,du. \tag{33}$$

Mivel a (33) képlet olyan x értékekre is helyes eredményt ad, amelyekre $G(x)=1$, tehát ezzel állításunkat igazoltuk.

Végtelen hosszú ideje tartó folyamat esetén egy „találomra" választott egyenletes eloszlást mutató pont 1 valószínűséggel messzebb lesz a kezdőponttól, mint akármilyen előre megadott nagy szám. Így tehát a véletlen pontot megelőző esemény t_n időpontjában 1 valószínűséggel $F(x)$ határeloszlás szolgáltatja a $P(\eta(t_n-0) \leqq x)$ valószínűséget. Mivel a véletlen pontnak ettől való távolságának eloszlásfüggvénye $G^*(x)$, következőleg annak a valószínűsége, hogy a véletlen pontban $\eta(t^*)\leqq x$ a következő lesz:

$$F^*(x) = \frac{1}{\vartheta}\int_0^\infty K(xe^{\alpha u})\,[1-G(u)]\,du, \tag{34}$$

ahol $K(x)$-et $F(x)$ ismeretében (21) adja meg. Ez megegyezik $\lim_{t\to\infty} F(t,x)$ határeloszlással abban az esetben, ha egyáltalán létezik határeloszlás.

Jelöljük $F^*(x)$ átlagát M^*-gal. Erre (23) alapján fennáll, hogy:

$$M^* = \int_0^\infty x\,dF^*(x) = \frac{M+\mu}{\vartheta}\int_0^\infty e^{-\alpha u}[1-G(u)]\,du = \frac{\mu}{\alpha\vartheta}. \tag{35}$$

Ebben a kifejezésben M-et (15) szolgáltatja.

Hasonlóképpen határozhatjuk meg $F^*(x)$ magasabbrendű momentumait is.

MEGJEGYZÉS: Ha $G(x) = 1-e^{-x/\vartheta}$, azaz a $\{t_n\}$ időpontok egy $\lambda = 1/\vartheta$ sűrűséggel jellemzett Poisson-folyamatban előforduló események időpontjait alkotják, úgy

$$\frac{1-G(x)}{\vartheta} = G'(x) \tag{36}$$

és akkor (22) és (23) alapján

$$F^*(x) = F(x), \tag{37}$$

mint az előre is várható volt.

4. §. *Bizonyos várható értékek meghatározása*

Az általunk vizsgált $\eta_t(t)$ sztochasztikus folyamatnak fizikai problémákra való alkalmazásánál felmerül a következő probléma. Tegyük fel, hogy a folyamat már végtelen hosszú ideje tart, azaz egyensúlyi állapot áll fenn és kérdezzük, hogy egy „találomra“ választott t hosszúságú időtartam alatt mennyi lesz azon u időpontok várható száma, amelyekben $\eta_t(u)$ áthalad egy rögzített a küszöbértéken, azaz $\eta_t(u-0) < a$, de $\eta_t(u+0) > a$, továbbá mennyi lesz az a várható időtartam, amely alatt $\eta_t(u) > a$. Jelöljük az előbbi várható értéket: $m^*(t;a)$-vel, az utóbbit: $\tau^*(t;a)$-val.

Az a küszöbértéken csakis akkor következhet be áthaladás, ha abban a pillanatban kezdődik egy jel. t idő alatt előforduló jelek várható száma könnyű számítással: $t\vartheta$-nak adódik és egy u időpontban kezdődő jel akkor lesz egyúttal átmenet is, ha a jel előtt $\eta_t(u-0) < a$ és utána $\eta_t(u+0) > a$. Ennek az eseménynek a valószínűsége: $F(a)-K(a)$ és így:

$$m^*(t;a) = \frac{[F(a)-K(a)]t}{\vartheta}. \tag{38}$$

A t hosszúságú intervallumba eső azon szakaszok összhosszának várható értéke, amelyeken $\eta_t(u) > a$, könnyen beláthatóan:

$$\tau^*(t;a) = [1-F^*(a)]t. \tag{39}$$

A (38) és (39) várható értékek létezésére csupán azt kell feltennünk, hogy $0 < \vartheta < \infty$ és μ véges.

Ha ezen várható értékeket végtelen hosszú ideje tartó folyamat tetszőleges t hosszúságú szakaszára értelmezzük, úgy meg kell követelnünk a 2. tétel feltételeinek teljesülését is.

5. §. *Példák a kisérleti fizika területéről*

[1] dolgozatunkban példaképpen említettük elektronsokszorozóval történő részecskeszámlálás esetét. Ha az elektronsokszorozóval λ esemény sűrűségű Poisson-folyamat szerint érkező részecskéket számlálunk, úgy az elektronsokszorozó által szolgáltatott feszültségimpulzusok kezdőpontjai is Poisson-folyamatot alkotnak és így alkalmazható az [1]-ben adott tárgyalás. Ha azonban a

lökéseket egy leosztóba vezetjük, mely csak minden m-ediket jelzi, úgy az így kapott feszültséglökések kezdőpontjai nem alkotnak Poisson-folyamatot, hanem két egymás utáni lökés kezdőpontjának távolsága

$$G(x) = \int_0^x e^{-\lambda y} \frac{(\lambda y)^m}{m!} \lambda dy \tag{40}$$

eloszlásfüggvénnyel bír. Erre az esetre alkalmazható a most adott tárgyalás. Ekkor $\vartheta = m/\lambda$.

Továbbá érdekességgel bír az az eset is, midőn Poisson-folyamat szerint érkező részecskéket Geiger—Müller számlálóval számlálunk. Ekkor a Geiger—Müller számlálócső által létesített feszültségimpulzusok időpontjai nem fognak Poisson-folyamatot alkotni. Ha a Geiger—Müller cső érzéketlenségi ideje τ állandó, úgy az egymás után érkező feszültségimpulzusok közötti távolság eloszlásfüggvénye

$$G(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leqq \tau \\ 1 - e^{-\lambda(x-\tau)} & \text{ha } x \geqq \tau. \end{cases} \tag{41}$$

Ekkor $\vartheta = \tau + 1/\lambda$. Erre az esetre is a most adott tárgyalás alkalmazható.

Ha ismerjük a feszültséglökések nagyságának eloszlásfüggvényét $H(x)$-et, a feszültséglökések időpontjainak egymástól való távolságának eloszlásfüggvényét $G(x)$-et, továbbá feltehető, hogy a feszültséglökések időben exponenciálisan csökkennek RC időállandóval, azaz $\alpha = 1/RC$, úgy alkalmazható a mostani tárgyalás.

[1]-ben tárgyaltuk azt az esetet, midőn a feszültséglökéseket egy olyan erősítőbe vittük, melynek küszöbfeszültsége a, és csak akkor kapunk impulzust, ha a bemenő feszültség a-nál nagyobb értékre ugrik fel. Ha az erősítőbe jutó feszültségimpulzusok sűrűségét valódi *lökés-sűrűségnek* nevezzük, amely tehát esetünkben $A = 1/\vartheta$, úgy kérdés, hogy az erősítő után kapcsolt számláló mit fog jelezni. Nevezzük ezt *látszólagos eseménysűrűségnek* és jelöljük $A'(a)$-val. Ez függ az a küszöb-feszültség értékétől. (38) szerint most azt nyerjük, hogy

$$A'(a)/A = F(a) - K(a), \tag{42}$$

ahol $K(x)$-et (21) szolgáltatja. Csupán $F(x)$ meghatározására van tehát szükségünk, melyet a (16) integrálegyenlet megoldásával nyerhetünk.

A következőkben példákat adunk $F(x)$ meghatározására, melynek segítségével a látszólagos eseménysűrűség kiszámítható.

Szorítkozzunk arra a speciális esetre, amidőn $\chi_n = \mu$ (állandó), azaz az impulzusok amplitúdói egyforma nagyságúak. Ekkor (21)-ből:

$$K(x) = F(x - \mu) \tag{43}$$

és így

$$A'(a)/A = F(a) - F(a - \mu). \tag{44}$$

A megoldandó integrálegyenlet ekkor (22) szerint a következő:

$$F(x)=\int_0^\infty F(xe^{\alpha y}-\mu)\,dG(y), \tag{45}$$

vagy tekintetbe véve, hogy most

$$K(x,y)=1-G\left(\frac{1}{\alpha}\log\frac{\mu+y}{x}\right), \tag{46}$$

az előbbivel ekvivalens következő alakot írhatjuk fel:

$$F(x)=\int_0^\infty K(x,y)\,dF(y). \tag{47}$$

1. ESET. Ha

$$G(x)=\int_0^x e^{-\lambda y}\frac{(\lambda y)^m}{m!}\lambda\,dy, \tag{48}$$

úgy (45) szerint

$$\begin{aligned} F(x)&=\int_0^\infty F(xe^{\alpha y}-\mu)e^{-\lambda y}\frac{(\lambda y)^m}{m!}\lambda\,dy=\frac{\lambda^{m+1}x^{\lambda/\alpha}}{\alpha^{m+1}m!}\int_x^\infty F(t-\mu)\frac{\left(\log\frac{t}{x}\right)^m}{t^{\lambda/\alpha+1}}\,dt=\\ &=\frac{\lambda^{m+1}x^{\lambda/\alpha}}{\alpha^{m+1}m!}\sum_{j=0}^{m}(-1)^{m-j}\binom{m}{j}(\log x)^{m-j}\int_x^\infty F(t-\mu)\frac{(\log t)^j}{t^{\lambda/\alpha+1}}\,dt. \end{aligned} \tag{49}$$

Legyen

$$C_j=\int_\mu^\infty F(t-\mu)\frac{(\log t)^j}{t^{\lambda/\alpha+1}}\,dt \qquad (j=0,1,\ldots,m), \tag{50}$$

úgy (49) a következő alakban írható:

$$F(x)=\frac{\lambda^{m+1}x^{\lambda/\alpha}}{\alpha^{m+1}m!}\sum_{j=0}^{m}(-1)^{m-j}\binom{m}{j}(\log x)^{m-j}\left[C_j-\int_0^{x-\mu}F(t)\frac{[\log(t+\mu)]^j}{(t+\mu)^{\lambda/\alpha+1}}\,dt\right]. \tag{51}$$

Ezen formula segítségével $F(x)$ fokozatosan előállítható a $(k\mu,(k+1)\mu)$, $(k=0,1,2,\ldots)$ intervallumokra. A $C_0, C_1,\ldots, C_m$ állandók azután meghatározhatók az (50) feltételi egyenletekből és $F(\infty)=1$ követelményből.

2. ESET. Ha speciálisan $m=0$, úgy $G(x)=1-e^{-\lambda x}$ és ekkor Poisson-folyamat által származtatott processzusról van szó, melyet már [1]-ben részletesen tárgyaltunk. Ekkor

$$F(x)=\frac{\lambda}{\alpha}x^{\lambda/\alpha}\left[C_0-\int_0^{x-\mu}\frac{F(t)}{(t+\mu)^{\lambda/\alpha+1}}\,dt\right] \tag{52}$$

rekurzív formulát nyerjük $F(x)$ meghatározására. A C_0 állandó meghatározható az $F(\infty)=1$ követelményből.

Ha a C_0 állandót eleve ismernők, akkor (52) segítségével, kiindulva

(53) $$F(x)=\frac{C_0\lambda}{\alpha}x^{\lambda/\alpha},\quad (0\leqq x\leqq\mu)$$

előállításból $F(x)$-et fokozatosan elő tudnánk állítani explicit alakban a $(\mu, 2\mu), (2\mu, 3\mu), \ldots$ intervallumokra. C_0-nak most a következő meghatározását adjuk meg:

[1] dolgozatunkban előállítottuk $F(x)$ karakterisztikus függvényét $\Phi^*(\omega)$-t általános esetben, amelyet most (5) formula szolgáltat. Ezt $\chi_n=\mu$ (állandó) speciális esetre alkalmazva és áttérve Laplace-transzformációra azt nyerjük, hogy

(54) $$\int\limits_0^\infty e^{-sx}F(x)\,dx=\frac{1}{s}e^{-\frac{\lambda}{\alpha}\int\limits_0^1\frac{1-e^{-s\mu v}}{v}dv}.$$

Tegyük fel, hogy $\Re(z)>0$, ekkor az Euler-féle állandó ($C=0{,}577215\ldots$) ismert integrál előállításából csekély módosítással azt kapjuk, hogy

(55) $$C=\int\limits_0^1\frac{1-e^{-zt}}{t}dt-\int\limits_1^\infty\frac{e^{-zt}}{t}dt-\log z.$$

Ennek felhasználásával (54) a következőképpen alakítható át:

(56) $$\int\limits_0^\infty e^{-sx}F(x)\,dx=\frac{\mu^{-\frac{\lambda}{\alpha}}e^{-\frac{\lambda}{\alpha}C}}{s^{\lambda/\alpha+1}}e^{-\frac{\lambda}{\alpha}\int\limits_\mu^\infty\frac{e^{-st}}{t}dt},\quad (\Re(s)>0).$$

Innen $\gamma=e^C=1{,}781072\ldots$ jelölést bevezetve azt kapjuk, hogy:

(57) $$\int\limits_0^\infty e^{-sx}F(x)\,dx\sim\frac{1}{(\mu\gamma)^{\lambda/\alpha}s^{\lambda/\alpha+1}},\quad (s\to\infty).$$

Ismert ABEL típusú tételből (lásd G. DOETSCH [3] könyvében 503. o. 3. tételt) következik, hogy ekkor $x\to 0$-ra:

(58) $$F(x)\sim\frac{1}{\Gamma\left(1+\frac{\lambda}{\alpha}\right)(\mu\gamma)^{\lambda/\alpha}}x^{\lambda/\alpha}.$$

Ezt (53)-mal összevetve megvan a C_0 állandó értéke és pedig fennáll, hogy

(59) $$\frac{C_0\lambda}{\alpha}=\frac{1}{\Gamma\left(1+\frac{\lambda}{\alpha}\right)(\mu\gamma)^{\lambda/\alpha}}.$$

Megjegyezzük, hogy (57) fennállását elegendő például valós s-ekre kimutatni, hogy (58) fennállására következtessünk. Ugyanis, ha tudjuk, hogy (53) fennáll, úgy ebből következik (57) fennállása (lásd G. DOETSCH [3] könyvében 473. o. 1. tételt) és az állandó tényező numerikus értékének meghatározásához elegendő a határértéket speciális s-ekre vizsgálni.

A fentiek szerint a $0 \leqq x \leqq \mu$ értékekre azt kapjuk, hogy

$$F(x) = \frac{1}{\Gamma\left(1+\frac{\lambda}{\alpha}\right)(\mu\gamma)^{\lambda/\alpha}} x^{\lambda/\alpha}. \tag{60}$$

Innen kiindulva (52) segítségével $F(x)$ most már fokozatosan előállítható a $(\mu, 2\mu), (2\mu, 3\mu), \ldots$ intervallumokra. $\mu \leqq x \leqq 2\mu$-re például:

$$F(x) = \frac{x^{\lambda/\alpha}}{\Gamma\left(1+\frac{\lambda}{\alpha}\right)(\mu\gamma)^{\lambda/\alpha}} \left[1 - \frac{\lambda}{\alpha}\int_0^{x-\mu} \frac{t^{\lambda/\alpha}}{(t+\mu)^{\lambda/\alpha+1}}\,dt\right]. \tag{61}$$

A fenti képletek birtokában lehetővé válik, hogy idézett dolgozatunkban exponenciális eloszlást mutató amplitúdók esetére megadott koincidencia problémát a gyakorlatban igen fontos szerepet játszó állandó amplitúdók esetére is kidolgozzuk.

Megjegyezzük, hogy (56) Laplace-transzformált megfordításával $F(x)$ a következő alakban állítható elő:

$$F(x) = \frac{1}{\Gamma\left(1+\frac{\lambda}{\alpha}\right)(\mu\gamma)^{\lambda/\alpha}} \left[x^{\lambda/\alpha} + \sum_{n=1}^{\left[\frac{x}{\mu}\right]} \frac{(-1)^n (\lambda/\alpha)^n}{n!} \int_{n\mu}^{x} (x-y)^{\lambda/\alpha} f_n(y)\,dy\right], \tag{62}$$

ahol

$$f_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x < \mu \\ 1/x & \text{ha } x \geqq \mu \end{cases} \tag{63}$$

és $f_n(x)$ ennek n-szeres konvolúciója, amely a következő rekurzív formula segítségével határozható meg:

$$f_n(x) = \int_{\mu}^{x-(n-1)\mu} \frac{f_{n-1}(x-y)}{y}\,dy, \qquad (n = 2, 3, \ldots). \tag{64}$$

(52) előállításából látszik, hogy $F(x)$ folytonos, és továbbá az is következik, hogy $x > 0$ értékekre differenciálható és $F'(x)$-re fennáll, hogy

$$xF'(x) = \frac{\lambda}{\alpha}[F(x) - F(x-\mu)]. \tag{65}$$

Ez az egyenlet megegyezik PÁL LÉNÁRD [4], más úton nyert eredményével.

Az $m=0$-ra vonatkozó integrálegyenlet másképpen is felírható. $G(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ speciális esetben (46) szerint:

$$K(x, y) = \begin{cases} \left(\frac{\mu+y}{x}\right)^{-\lambda/\alpha} & \text{ha } x < \mu + y, \\ 1 & \text{ha } x \geqq \mu + y, \end{cases} \tag{66}$$

ahonnan

$$F(x)=\int_{x-\mu}^{\infty}\left(\frac{\mu+y}{x}\right)^{-\frac{\lambda}{\alpha}}dF(y)+F(x-\mu) \tag{67}$$

integrálegyenletet nyerjük $F(x)$ meghatározására.

3. ESET. Ha

$$G(x)=\begin{cases}0 & x\leqq\tau\\ 1-e^{-\lambda(x-\tau)} & x\geqq\tau\end{cases}, \tag{68}$$

úgy (46) szerint

$$K(x,y)=\begin{cases}\left(\frac{\mu+y}{x}\right)^{-\frac{\lambda}{\alpha}}e^{\lambda\tau} & \text{ha } xe^{\alpha\tau}<\mu+y\\ 1 & \text{ha } xe^{\alpha\tau}\geqq\mu+y\end{cases} \tag{69}$$

és

$$F(x)=e^{\lambda\tau}\int_{xe^{\alpha\tau}-\mu}^{\infty}\left(\frac{\mu+y}{x}\right)^{-\frac{\lambda}{\alpha}}dF(y)+F(xe^{\alpha\tau}-\mu) \tag{70}$$

integrálegyenlet megoldásával nyerhető $F(x)$ eloszlásfüggvény. (45)-ből viszont azt kapjuk, hogy

$$F(x)=e^{\lambda\tau}\int_{\tau}^{\infty}F(xe^{\alpha y}-\mu)e^{-\lambda y}\lambda\,dy=\frac{\lambda e^{\lambda\tau}x^{\lambda/\alpha}}{\alpha}\int_{xe^{\alpha\tau}}^{\infty}F(t-\mu)\frac{dt}{t^{\lambda/\alpha+1}}, \tag{71}$$

vagy

$$C_0=\int_{\mu}^{\infty}F(t-\mu)\frac{dt}{t^{\lambda/\alpha+1}} \tag{72}$$

állandó bevezetésével

$$F(x)=\frac{\lambda e^{\lambda\tau}x^{\lambda/\alpha}}{\alpha}\left[C_0-\int_{\mu}^{xe^{\alpha\tau}}F(t-\mu)\frac{dt}{t^{\lambda/\alpha+1}}\right] \tag{73}$$

rekurzív formulát nyerjük $F(x)$ meghatározására. Innen látszik, hogy $F(x)$ folytonos, és következőleg $x>0$ értékekre differenciálható is. $F'(x)$-re (73) alapján fennáll, hogy

$$xF'(x)=\frac{\lambda}{\alpha}[F(x)-F(xe^{\alpha\tau}-\mu)]. \tag{74}$$

(73)-ból azt nyerjük, hogy $0\leqq x\leqq\mu e^{-\alpha\tau}$ értékekre

$$F(x)=\frac{C_0\lambda e^{\lambda\tau}x^{\lambda/\alpha}}{\alpha} \tag{75}$$

és ennek ismeretében $F(x)$ fokozatosan előállítható a $(\mu e^{-\alpha\tau}+\cdots+\mu e^{-k\alpha\tau}$, $\mu e^{\alpha\tau}+\cdots+\mu e^{-(k+1)\alpha\tau})$, $(k=1,2,\ldots)$ intervallumokra. Végül is tehát (73) segítségével $F(x)$ meghatározható a $(0,\mu/(e^{\alpha\tau}-1))$ intervallumban. Könnyen belátható, hogy $F(x) = 1$ ha $x \geqq \mu(e^{\alpha\tau} - 1)$. Az eddig ismeretlen C_0 állandó ez utóbbi követelményből határozható meg.

Ha (74) egyenletből áttérünk $F(x)$ Laplace-transzformáltjára, úgy az említett Abel-típusú tétel felhasználásával megmutatható, hogy most

$$\frac{C_0 \lambda}{\alpha} = \frac{1}{\Gamma\left(1 + \frac{\lambda}{\alpha}\right)(\mu\gamma)^{\lambda/\alpha}}, \tag{76}$$

ahol $\gamma = e^C = 1{,}781072\ldots$. Így tehát a $(0, \mu e^{-\alpha\tau})$ intervallumban

$$F(x) = \frac{e^{\lambda\tau} x^{\lambda/\alpha}}{\Gamma\left(1 + \frac{\lambda}{\alpha}\right)(\mu\gamma)^{\lambda/\alpha}} \tag{77}$$

és a $(\mu e^{-\alpha\tau}, \mu e^{-\alpha\tau} + \mu e^{-2\alpha\tau})$ intervallumban

$$F(x) = \frac{e^{\lambda\tau} x^{\lambda/\alpha}}{\Gamma\left(1 + \frac{\lambda}{\alpha}\right)(\mu\gamma)^{\lambda/\alpha}} \left[1 - \frac{\lambda e^{\lambda\tau}}{\alpha} \int_0^{x e^{\alpha\tau}} \frac{(t-\mu)^{\lambda/\alpha}}{t^{\lambda/\alpha+1}} \, dt\right]. \tag{78}$$

(62)-höz hasonló alakban állítható elő $F(x)$ a többi intervallumokra is.

A C_0 állandó meghatározására legyen

$$\Phi(s) = \int_0^\infty e^{-sx} \, dF(x), \qquad (\Re(s) \geqq 0), \tag{79}$$

úgy (74) alapján felírható, hogy

$$s\Phi'(s) = \frac{\lambda}{\alpha} \left[e^{-s\mu e^{-\alpha\tau}} \Phi(se^{-\alpha\tau}) - \Phi(s)\right]. \tag{80}$$

Innen $\Phi'(s)/\Phi(s)$ integrálásával azt kapjuk, hogy valós s-ekre

$$\Phi(s) = \exp\left[-\frac{\lambda}{\alpha}\int_0^1 \frac{1 - e^{-s\mu e^{-\alpha\tau} x}}{x} \, dx - \frac{\lambda}{\alpha}\int_0^1 e^{-s\mu e^{-\alpha\tau} x} \frac{1 - \dfrac{\Phi(se^{-\alpha\tau}x)}{\Phi(sx)}}{s} \, dx\right]. \tag{81}$$

Könnyen belátható, hogy a jobboldalon álló második integrál $s \to \infty$ esetén zérushoz tart és így (57)-hez hasonlóan felírható, hogy:

$$\Phi(s) \sim \frac{e^{\lambda\tau}}{(\mu\gamma)^{\lambda/\alpha} s^{\lambda/\alpha}}, \qquad (s \to \infty). \tag{82}$$

Innen (75) figyelembevételével azt kapjuk, hogy a C_0 állandóra fennáll a (76) egyenlet.

Ezekkel a példákkal a felvetett kísérleti fizikai alkalmazásokat $\chi_n = \mu$ állandó esetre megoldottuk.

Magyar Tudományos Akadémia
Alkalmazott Matematikai Intézete.

IRODALOM

[1] TAKÁCS L.: Poisson-folyamat által származtatott másodlagos folyamatokról és azok fizikai alkalmazásairól. [MTA III. Oszt. Közl. 4 (1954) 473—504]

[2] J. L. DOOB: Renewal theory from the point of view of the theory of probability. [Transaction Amer. Math. Soc. 63 (1948) 422—438.]

[3] G. DOETSCH: Handbuch der Laplace-Transformation Bd. 1 (Basel, 1950).

[4] PÁL LÉNÁRD: Néhány megjegyzés véletlen koincidenciák számításával kapcsolatban. [MTA Alk. Mat. Int. Közl. megjelenőben].

A TUDOMÁNYOS MINŐSÍTŐ BIZOTTSÁG HÍREI

Császár Ákos doktori disszertációjának nyilvános vitája

1954. május 6-án került sor a budapesti Eötvös Loránd Tudományegyetem Matematikai Intézetében CSÁSZÁR ÁKOS, a matematikai tudományok kandidátusa „Valós függvények nívóhalmazainak struktúrájáról" c. doktori értekezésének nyilvános vitájára. Tekintettel a jelölt érdemes tudományos munkásságára, a vitát szakkörökben nagy érdeklődés előzte meg. Az értekezés opponensei RIESZ FRIGYES akadémikus, ALEXITS GYÖRGY akadémikus és SZŐKEFALVI-NAGY BÉLA levelező tag voltak, a vitában KALMÁR LÁSZLÓ levelező tag elnökölt.

A vita elején CSÁSZÁR ÁKOS rendkívül világos és élvezetes előadásban, más szakterületen kutató matematikusok előtt is könnyen érthető módon ismertette doktori dolgozatának eredményeit. Előző dolgozataiban már több olyan kérdéssel foglalkozott, amelyek a legáltalánosabb függvényosztályokra érvényes bizonyos törvényszerűségek megállapítását tűzik ki célul; jelen dolgozatában is ilyen jellegű problémával foglalkozik: a függvények lokális szerkezetének feltárására törekszik. Hasonló természetű vizsgálatok a valós függvénytan irodalmában csak egyes egészen speciális esetekben, főként a függvények szélsőértékével kapcsolatosan szerepeltek. CSÁSZÁRé az érdem, hogy ezt a kérdést a legáltalánosabb formában felveti és az egy- s kétváltozós valós függvényekre vonatkozóan meg is oldja, mégpedig igen általános feltételek mellett. Nívóhalmazok segitségével precíz definíciót ad a függvények lokális növekedésére, fogyására stb. Az egyváltozós esetben a függvénynek egy pontbeli viselkedését a nívóhalmazoknak az illető ponttól balra s jobbra eső része segítségével értelmezi, míg a kétváltozós függvényeknél a tekintett pontból kiinduló és adott irányszögű egyenesekkel határolt szögtartományok jutnak szerephez a definícióban. Vizsgálatainak fő célkitűzése annak megállapítása, hogy egy tetszésszerinti (egy- vagy kétváltozós) valós függvény milyen sok pontban lehet növekvő, fogyó, nem-fogyó, nem-növekvő vagy oszcilláló, milyen sok szorosabb vagy tágabb értelemben vett szélsőértéke lehet stb., tehát kutatásai szorosabb kapcsolatban állanak a differenciálható függvények menetének klasszikus problémájával, de annak messzemenő általánosításai. A valós függvénytan szellemének megfelelően, a dolgozat első része megengedi a szereplő nívóhalmazok bizonyos részeinek elhanyagolását; ezen elhanyagolható halmazok lehetnek pl. a nullmértékű halmazok, ill. általánosabban egy oly $\mathfrak{N}$ halmazrendszer elemei, amely rendszer rendelkezik a nullmértékű halmazok rendszerének azon tulajdonságaival, hogy a részhalmaz-képzéssel és a megszámlálható sok halmaz egyesítési műveletével szemben zárt. A dolgozat második részében CSÁSZÁR csupán a nívóhalmazok külső felső sűrűségét veszi figyelembe, eltekintve a zérus külső sűrűségi helyektől; ezzel tehát szerző a Denjoy—Hincsin-féle approximatív határértékekre vonatkozó vizsgálatokhoz kapcsolódik.

CSÁSZÁR szisztematikusan sorra veszi az összes elképzelhető lokális viselkedéseket, szimmetria-okokra való hivatkozással leszűkíti a tüzetesebb vizsgálatot igénylő esetek számát, majd a megmaradó lehetőségeket végigtekintve, megállapítja, hogy ezek közül melyek azok, amelyek a függvény menetére általában jellemzők, ill. amelyek csak szingularitásként, legföljebb egy $\mathfrak{N}$-be tartozó halmazon, ill. nullmértékű halmazon valósulhatnak meg. Eredményei arról győznek meg, hogy a lokális tulajdonságok eloszlásai általában megegyeznek a szemlélet és a megelőző valós függvénytani vizsgálatok alapján általánosnak sejtett lehetőségekkel. Különösen becsesnek kell tekinteni ezeket az eredményeket a kétváltozós esetben, hiszen a kétváltozós valós függvényekre vonatkozó ismereteink lényegesen szűkebbek az egyváltozósakra vonatkozóknál, s tekintettel a sík topológiájának számos, rendkívül meglepő példájára, nem igen lehetett remélni, hogy a kétváltozós valós függvények lokális tulajdonságainak eloszlását egyhamar jellemezni lehet, méghozzá ilyen aránylag jól áttekinthető módon. A dolgozatnak a kétváltozós függvények lokális struktúráját vizsgáló részében alapvető szerepet játszik KOLMOGOROV és VERCSENKO egy nevezetes tétele.

A dolgozatban szereplő tételek nagy számánál fogva nem ismertethetjük teljes részletességgel a disszertáció eredményeit. Meg kell elégednünk azzal, ha csupán a következő két, tipikusnak mondható tételt idézzük.

Azon síkbeli pontok összessége, amelyekhez létezik olyan belőlük kiinduló szögnyílás, amelyben az $f(x, y)$ függvény a tágabb értelemben növekvő, de a szigorúbb értelemben nem (az $\mathfrak{N}$ rendszer pontjaitól eltekintve), mindig három halmazból tevődik össze. Az egyik halmaz $\mathfrak{N}$-hez tartozik, a másik megszámlálható sok rektifikálható görbeívvel lefedhető, végül a harmadik olyan, hogy rajta a függvény értékkészlete megszámlálható.

Egy másik tipikus tétel: Azon pontok összessége, amelyekből kiindulnak oly (α, β) és (γ, δ) szögtartományok, hogy ezek egyikében az $f(x, y)$ függvény a tágabb értelemben növekvő, de a szigorúbb értelemben nem, másikában pedig a szigorúbb értelemben növekvő, fogyó vagy oszcilláló, mindig összetehető két halmazból: az egyik $\mathfrak{N}$-hez tartozik, a másik pedig lefedhető megszámlálható sok rektifikálható görbeívvel.

A disszertáció tételeinek bizonyításai mély meggondolásokat igényelnek. Annak ellenére, hogy a dolgozat két részének eredményei közt sok az analógia, a bizonyításokban ez az analógia csak elég lazán nyilvánul meg. A bizonyításokban szereplő geometriai jellegű meggondolásoknak a többdimenziós térre való alkalmas általánosítása esetén az eredményeket 2-nél több változós függvényekre is ki lehet majd terjeszteni.

CSÁSZÁR előadása után a kijelölt opponensek olvasták fel bírálatukat. Mindhárman nagy elismeréssel szólottak a dolgozatról. Kiemelték a tárgyalt probléma eredetiségét, alapvető jellegét; hangsúlyozták, hogy a szerencsésen megválasztott fogalmaknak nagy szerepük van abban, hogy a szerző maga elé tűzött célját ily sikeresen valósíthatta meg. Egyöntetűen megállapították, hogy a nyert eredmények lényegesen kibővítik a legáltalánosabb függvényekre vonatkozó ismereteinket és a bizonyítások nagy ötletességről tesznek tanúbizonyságot. RIESZ FRIGYES úgy véli, hogy a dolgozat olvasása fárasztó és azt tanácsolja, hogy a szerző dolgozatát jóképességű egyetemi hallgatók számára is érthető formában publikálja. Bírálata további részében részletesebben kitér a doktori értekezésben bizonyítás nélkül felhasznált KOLMOGOROV—VERCSENKO-féle tételre és néhány ezzel kapcsolatos gondolatát közli. ALEXITS GYÖRGY a disszertáció jelentős érdemeinek erős hangsúlyozása mellett hiányolja, hogy a szerző megelégedett a megfelelő matematikai fogalmak megalkotásával és a belőlük folyó lokális tulajdonságok eloszlási módjának exakt leírásával, de nem terjeszkedett ki a leírt tulajdonságoknak a klasszikus vizsgálatokból ismert sajátságokkal való kapcsolatára. A dolgozat eredményeivel összefüggő számos ilyen problémát említ meg a folytonos, ill. a korlátos variációjú függvényekkel kapcsolatban. SZŐKEFALVI-NAGY BÉLA a dolgozatot tömör előadásmódja ellenére is világosan követhetőnek tartja s kiemeli, hogy CSÁSZÁR kutatásainak sikerét nagymértékben lendítette előre a modern valós függvénytani irodalomban való alapos tájékozottsága. Mindhárom opponens egyetért abban, hogy a dolgozat igen alkalmas arra, hogy ennek alapján CSÁSZÁR a doktori fokozatot elnyerje.

Szünet után a hozzászólásokra került sor. RÉNYI ALFRÉD, HAJÓS GYÖRGY, KALMÁR LÁSZLÓ, VINCZE ISTVÁN hozzászólásaikban részint a felvetett problémák különféle általánosítási lehetőségeire mutattak rá, részint a dolgozat eredményeivel kapcsolatos néhány kérdést intéztek a szerzőhöz. Szóvátették, hogy a nyomtatott tézisek oly tömören vannak megfogalmazva, hogy belőlük a dolgozat eredményeiről nehéz áttekintést nyerni.

CSÁSZÁR válaszában először az opponensek bírálatával foglalkozott. Részletesen kitért a dolgozattal kapcsolatos megjegyzéseikre és kérdéseikre. Különösen megragadta a jelenlevőket az a tény, hogy CSÁSZÁR az opponensek által a kidolgozott problémákkal kapcsolatban felvetett kérdések javarészére már érdemleges választ tudott adni, ezzel továbbfejlesztve disszertációjának eredményeit. Részletesen foglalkozott eredményeinek a klasszikus vizsgálatokkal való különféle kapcsolataival is. A még mindig nyitva maradt problémákról szólva, ama módszereket ismertette, amelyek véleménye szerint eredménynyel kecsegtetnek, majd részletes indokolással együtt a várható eredményeket mint sejtéseit közölte, kitérve a felmerülő nehézségek természetére is. Válasza második részében az ülésen elhangzott hozzászólásokban foglalt megjegyzéseket vette sorra. A RÉNYI, ill. HAJÓS által felvetett általános kérdéshez kapcsolódva, hasonló igen általános kérdést fogalmazott meg topologikus csoportok leképezéseire vonatkozóan, majd HAJÓS egyik kérdésére válaszolva, taglalta azokat a geometriai nehézségeket, amelyek az n-dimenziós probléma tárgyalásánál fellépnek. Miután a többi kérdésre adott válasza is elhangzott, a válasz egyes pontjaihoz kapcsolódó rövid vita alakult ki.

A bíráló bizottság a lefolyt vita alapján megállapította, hogy CSÁSZÁR ÁKOS doktori értekezése mind probléma-felvetésében, mind eredményeiben önálló, értékes és magas színvonalú munka; a szerző eredményeit a valós függvénytan modern módszereinek ötletes és nagy rutinra valló alkalmazásával érte el. A bizottság örömmel konstatálta, hogy a vita során a jelölt több felvetett problémára már érdemleges választ adott. A dolgozat komoly tudományos érdemei alapján a bizottság egyhangúan javasolta a Tudományos Minősítő Bizottságnak, hogy CSÁSZÁR ÁKOSt nyilvánítsa a matematikai tudományok doktorává.

Szívből kívánunk további sok szép tudományos sikert CSÁSZÁR ÁKOSnak, a matematikai tudományok doktorának.

Fuchs László
a matematikai tudományok doktora

A Tudományos Minősítő Bizottság

pályázatot hirdetett az 1955. évi aspiránsfelvételekre. A pályázat beadásának határideje 1954. december 1. volt.

Az aspirantúrára felvett pályázók aspiránsi munkájukat 1955. szeptember 1-én kezdik meg.

A III. OSZTÁLY HÍREI

PRÉMIUMOK

A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai és Fizikai Tudományok Osztálya a Tudományos Minősítő Bizottsággal együtt a következő aspiránsok részére utalt ki prémiumot eddig végzett munkájuk alapján:

Matematikus aspiránsok:

1. *Pukánszky Lajos* (Szegedi Tudományegyetem, Matematikai Intézet). II. éves munkájának elején kitűnő dolgozatot készített topologikus csoportok unitér reprezentációjára vonatkozóan Mautner tételével kapcsolatosan. Dolgozata komoly felkészültséget igényelt és szép tudományos eredménynek mondható. 2500 Ft jutalomban részesült.

2. *Prékopa András* (Alkalmazott Matematikai Intézet, Budapest). Különösen kiemelkedő a hosszú láncmolekulák bomlásáról megírt, sajtó alatt lévő dolgozata, mely a valószínűségszámítási módszereknek a szerves kémia terén újszerű alkalmazását adja. 2500 Ft jutalomban részesült.

3. *Molnár József* (Eötvös Loránd Tudományegyetem, Matematikai Intézet). Dolgozatában Dowker ismert, területekre vonatkozó eredményét általánosítja konvex idomokba beírt maximális kerületű poligonokra vonatkozóan. A dolgozat Dowker módszerét felhasználja, de azt a megváltoztatott tárgynak megfelelően lényegesen és igen ügyesen módosítja. A dolgozatban elért eredmény rendkívül figyelemre méltó. 1000 Ft jutalomban részesült.

4. *Kővári Tamás* (Eötvös Loránd Tudományegyetem, Matematikai Intézet). Hármas társszerzőségben dolgozatot írt, melyben Zarankiewicz egy topológiai vonatkozású problémáját oldja meg. A dolgozat megírásában Kővárinak igen jelentős szerepe van. Mellékelte továbbá aspiránsi munkája során elért igen változatos, igen érdekes példagyűjteményét, amely önálló problémafelvetésről és gondolkodásról tanúskodik, s amely több igen figyelemre méltó tudományos részeredményt is tartalmaz. 1200 Ft jutalomban részesült.

5. *Steinfeld Ottó* (Szegedi Tudományegyetem, Matematikai Intézet). Dolgozata: „Megjegyzés N. H. McCoy egyik dolgozatához“ címen az Osztályközleményekben (IV. 2.) jelent meg. A kutatás tárgya bizonyos McCoy által

nyert primideálokra vonatkozó kritériumoknak további hasonló jellegű és szintén értékes kritériumokkal való kibővítése. Ezenkívül Steinfeld a komplett primideálokra is nyer hasonló eredményeket. 1200 Ft jutalomban részesült.

6. *Hajnal András* (Szegedi Tudományegyetem, Matematikai Intézet). Figyelemre méltó dolgozatában egy Szuszlin-féle halmazelméleti problémával kapcsolatosan ért el igen érdekes részleteredményt. *Hajnal* aspiránsnak számos kisebb, még meg nem írt eredménye van. 1000 Ft jutalomban részesült.

7. *Moór Artúr* (Kossuth Lajos Tudományegyetem, Matematikai Intézet). Moór Artúr a Cartan-terekbe az oszkuláló Riemann-tér fogalmát vezette be. Kimutatta, hogy az oszkuláló Riemann-térnek invariáns derivációja megegyezik a Cartan-tér invariáns derivációjával. Megvizsgálta továbbá az oszkuláló Riemann-tér és a Cartan-tér görbületének összefüggését. 1500 Ft jutalomban részesült.

8. *Soós Gyula* (Kossuth Lajos Tudományegyetem, Matematikai Intézet). Soós Gyula olyan Finsler-tereket vizsgált meg, amelyekben affinitási és mozgási csoportok léteznek. Kimutatta, hogy ezek azok a Finsler-terek, amelyekben az affin-csoportoknak mozgási alcsoportja létezik. A dolgozatot Varga Ottó egyik felolvasó ülésen mutatta be. 1500 Ft jutalomban részesült.

9. *Kertész Andor* (Kossuth Lajos Tudományegyetem, Matematikai Intézet). 1953-ban több dolgozata jelent meg. E dolgozatokban figyelemre méltó eredményeket ért el a végtelen csoportok struktúra-elméletében. Kertész Andor Kulikov szovjet matematikus egyik tételének általánosítását tovább élesíti és kimutatja, hogy eredményében már egyetlen feltétel sem enyhíthető. 2500 Ft jutalomban részesült.

Fizikus aspiránsok

1. *Kiss Dezső* (Központi Fizikai Kutató Intézet, Kozmikus Sugárzási Osztály). Aspiránsi munkáját nagy szorgalommal és lelkiismeretességgel végzi. Ezenkívül munkájáról összefoglaló előadást tartott és két dolgozata jelent meg a Központi Fizikai Kutató Intézet Közleményeiben. 2000 Ft jutalomban részesült.

2. *Trummer István* (Központi Fizikai Kutató Intézet, Spektroszkópiai Osztály). Két előadást tartott munkájával kapcsolatban, három dolgozata jelent meg, illetve van megjelenőben. 1500 Ft jutalomban részesült.

3. *Schmidt György* (Központi Fizikai Kutató Intézet, Atomfizikai Osztály). Az A. G. 1 nyomás alatti generátoron igen értékes vizsgálatokat végzett, amelyek e készülék tökéletesítéséhez vezettek, annyira, hogy a tervezettnél jóval magasabb, 1,65 millió volt feszültséget lehetett elérni. Kísérleteiről a Központi Fizikai Kutató Intézet Közleményeiben számolt be. 1500 Ft jutalomban részesült.

* * *

A Magyar Tudományos Akadémia Csillagvizsgáló Intézetének Tudományos Tanácsa javaslatára az MTA III. osztálya a következőknek utalt ki prémiumot eredményes munkájukért:

1. Magyar János (Kecskemét) elkészítette az 1930-as év rekurrens foltcsoportjainak a Napfizikai Osztály által tervezett fejlődés-diagrammmjait, és a már előzőleg elkészített 1930. évi nem rekurrens foltcsoportok fejlődési csoportjaiból megszerkesztette a grafikus diffrakciósebesség-diagrammokat. 600 Ft jutalomban részesült.

2. Lovass Bernadett (Sopron, Erdőgazdasági Technikum) az 1927. évi foltcsoportok fejlődési diagrammjain eszközölt bizonyos pótlásokat és azonkívűl elkészítette az 1927. évi rekurrens foltcsoport diagrammját és a jelentősebb nem rekurrens foltcsoportok diagrammjait is. 700 Ft jutalomban részesült.

3. Boskovits Péter (Budapest) elkészítette az 1934. évi nem rekurrens foltcsoportok teljes fejlődési diagrammjait. 200 Ft jutalomban részesült.

4. Vigassy Lajos befejezte a kettős csillagok vizsgálatára vonatkozó — számára kiadott — segédmunkákat. 8 katalógusból mintegy 3000 kettős csillagra összeszedte a fényességmérő adatokat és így egy gyűjteményes katalógust készített. A munka további menetét már a Csillagvizsgáló Intézetben végzi. 800 Ft jutalomban részesült.

5. Falvay Valéria önállóan végzi az N15 csillaghalmaz felvételének kiértékelését. Eddig kb. 250 felvétel kiértékelését végezte el. 2000 Ft jutalomban részesült.

A Magyar Tudományos Akadémia III. Osztályának 1955. évi pályatételei

Matematikai témák:

1. A tömeggyártás minőségellenőrzésének matematikai statisztikai módszerei. (Jutalmazható ilyen tárgyú önálló tudományos eredményt tartalmazó munka, továbbá az említett módszereknek a magyar iparban való bevezetését és eredményes alkalmazását szolgáló összefoglaló jellegű munka is.)
2. A számfogalom kialakítása az iskolában különös tekintettel az egyetemi oktatás igényeire.
3. Reformtörekvések a matematika tanítása terén, a Szovjetunióban és a népi demokratikus országokban kiadott matematikai tankönyvek alapján kritikailag feldolgozva.
4. Nagykapacitású gépek alkalmazása matematikai problémák megoldására. (Jutalmazható: matematikai feladatok gépi megoldásával kapcsolatos, új eredményeket tartalmazó munka, továbbá olyan munka is, mely a vonatkozó

irodalom valamely részének alapos kritikai feldolgozását tartalmazza, és ilyen gépek hazai építését és felhasználását elősegíti.)

5. Kőnig Gyula élete és munkássága.

6. Önálló vizsgálat bármelyik akadémiai téma köréből. (Az akadémiai témákra vonatkozólag szóban, vagy írásban felvilágosítást nyújt a Magyar Tudományos Akadémia III. Osztálya. Bp. V., Széchenyi rkp. 3.)

Fizikai témák:

1. Tanulmányok a magyar fizika haladó hagyományai köréből.
2. Kvantum-kémiai vizsgálatok.
3. Szilárd testek elmélete és annak alkalmazása technikai problémákra.
4. Vizsgálatok az antiferromágnesség kvantum-elmélete köréből.
5. Félvezetőkkel kapcsolatos kutatások olyan irányokban, hogy az irodalomban ismertetett anyagokon kívül még milyen más anyagoknál mutatható ki a tranzisztor-, illetőleg az elektrolumineszcens hatás.
6. Rekristallizációs folyamatokra, tűkristályok előállítására és általában a kristályosodásra vonatkozó vizsgálatok.
7. Az üveg fizikai tulajdonságainak vizsgálata.
8. Lángok sugárzásának és hőátadásának vizsgálata.
9. A napsugárzás biológiai komponensének terepen való mérésére alkalmas hordozható szpektrográf szerkesztése.
10. A magkutatás méretezése az irodalomban fellelhető adatok kritikus kiértékelése alapján.

Csillagászati témák:

1. Az intersztelláris anyagok és a csillagok kölcsönhatása.
2. A hold okozta légköri ár—apály vizsgálata a hazai adatok alapján.
3. Napfoltcsoportok területváltozása és mozgása közötti korrelációk. (Bővebb felvilágosítást a Csillagvizsgáló Intézet Napfizikai Osztálya ad.)

Technikai szerkesztő: Erdős Lajosné

A kiadásért felelős: az Akadémiai Kiadó igazgatója. Műszaki felelős: Tóth Ferenc.
A kézirat beérkezett: 1954. X. 13. — Példányszám: 500. — Terjedelem: 13½ (A/5) ív, 3 ábra.

Csongrádmegyei Nyomdaipari Vállalat, Szeged 54-6047 Felelős vezető: Vincze György

Ára: 28,— Ft.

TARTALOMJEGYZÉK

TUDOMÁNYOS KÖZLEMÉNYEK