A MAGYAR
TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI OSZTÁLYÁNAK

KÖZLEMÉNYEI

SZERKESZTI:
RÉNYI ALFRÉD

II. KÖTET 1—4. SZÁM

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
BUDAPEST, 1952

Technikai szerkesztő: Erdős Lajosné
Akadémiai Kiadó (Budapest, V, Alkotmány-u. 21.) Felelős: Mestyán János

Csongrádmegyei Nyomdaipari Vállalat, Szeged. 524862 Felelős vezető: Vincze György

TARTALOMJEGYZÉK

Oldal

Rényi Alfréd: Beszámoló az osztály munkájáról, ötéves tervéről és az ezzel kapcsolatos feladatokról . . . 3
Hozzászóló: *Dési Frigyes* . . . 20

ELŐADÁSOK A MODERN FIZIKA KÖRÉBŐL

M. Cosyns: A kutatás megszervezése a brüsszeli atomkutató központban . . . 23
Gombás Pál: Az atommagok statisztikus elméletéről . . . 27
Kovács István: Vizsgálatok a stronciumoxid kék sávjain . . . 41
Hozzászóló: *Budó Ágoston* . . . 50
Selényi Pál: Higanygőz hatása a szelénegyenirányítóra és a szelén fényelemre . . . 51
Hozzászólók: *Hoffmann Tibor, Winter Ernő* . . . 57

ELŐADÁSOK A MATEMATIKA KÖRÉBŐL
Beszámoló a magyar matematikusok ez évi eredményeiről

Szőkefalvi-Nagy Béla: Újabb eredmények az analízis területén . . . 59
Szele Tibor: Újabb eredmények az absztrakt algebra területén . . . 73
Hozzászóló: *Rédei László* . . . 88
Kalmár László: A matematika alapjaival kapcsolatos újabb eredmények . . . 89
Hozzászólók: *Rényi Alfréd, Alexits György, Aczél János* . . . 104
Kalmár László válasza . . . 108
K. Kuratowski: Beszámoló a Lengyel Állami Matematikai Intézet tudományos tevékenységéről, különösen a topológia területén . . . 113
Hajós György: Újabb eredmények a geometria területén . . . 119
Rényi Alfréd: Új eredmények a valószínűségszámítás terén . . . 125
Hozzászólók: *Egerváry Jenő, Fényes Imre, Bodó Zalán, Takács Lajos* . . . 140
Turán Pál: Az analízis egy módszerének újabb alkalmazásairól . . . 145
Kitüntetések — Jutalmak . . . 155
A III. osztály hírei . . . 157

2. SZÁM

TUDOMÁNYOS KÖZLEMÉNYEK

Kovács István: Általánosított eljárás a perturbáló molekulatermek állandóinak kiszámítására a perturbációs adatok alapján . . . 161
Dallos András: Impulzus-spektrográfia . . . 173
Selényi Pál: Elektronmikroszkópiai képek elektrografikus felvétele . . . 185
Selényi Pál: Eötvös csavarási mérlegének elemi elmélete . . . 189
Gergely György és *Nagy Elemér:* Foszforeszcencia spektrumok . . . 201
Gergely György: Megjegyzések a willemit lumineszkálásának időbeli lefolyásához . . . 207
Budó Ágoston: Dipolfolyadékok dielektromos relaxációjáról . . . 209
Pauncz Rezső: Korrekció a Fermi-féle kinetikai energia képletében . . . 227
Fenyves Ervin és *Haiman Ottó:* Kozmikus sugárzás mérése bányában . . . 233
Bodó Zalán: Lumineszkáló porok néhány optikai tulajdonsága . . . 239
Bodó Zalán: Különböző lumineszkáló porok ultraibolya abszorpciójának mérése a diffúz reflexió segítségével . . . 253

Oldal

KÖNYVISMERTETÉSEK

Ankét: Kudrjarcev „A fizika története“ c. könyvéről 259
Fényes Imre és *Rényi Alfréd:* A. Ja. Hincsin „A statisztikai mechanika analitikus módszerei“ c. könyvről 275
Tarján Rezső: A. N. Bones—Brujevics „Az elektroncső fizika alkalmazásai“ c. könyvéről 281
Béll Béla: Sz. P. Hromov „A szinoptikus meteorológia alapjai“ c. könyvéről 285
Kalmár László: Péter Rózsa „Rekursive Funktionen“ c. könyvéről 297
Szász Pál: N. J. Lobacsevszkij „Geometriai vizsgálatok a párhuzamosok elméletének köréből“ c. könyvéről 301
Tandori Károly: N. J. Ahijezer „Előadások az approximáció elméletéről“ c. könyvéről . 307
Hoffmann Tibor: J. I. Frenkel „Bevezetés a fémek elméletébe“ c. könyvéről 315

EGYÉB KÖZLEMÉNYEK

Szamosi Géza: A II. Magyar Fizikus Vándorgyűlés 317
Ösztöndíjasok jutalmazása 321
A Tudományos Minősítő Bizottság határozatai 323
Akadémiai Intézetek hírei 325

3—4. SZÁM

TUDOMÁNYOS KÖZLEMÉNYEK

Marx György: Valós állapotfüggvények szerepe a kvantummechanikában 329
Neugebauer Tibor: A nullapontmozgás realitásának problémája a kvantummechanikában 333
Novobátzky Károly: A kvantumelmélet statisztikus sokasága 343
Fenyves Ervin és *Haiman Ottó:* Geiger—Müller csövek holt idejével kapcsolatos vizsgálatok 351
Gáspár Rezső: Az alumínium fém kötéséről 361
Aujeszky László: Energiaeloszlás a függőleges légoszlopban 373
Gáspár Rezső: Atomelektronok sajátfüggvényének és energiájának közelítő meghatározására szolgáló analitikus módszerről 391
Boros János és *Sibalszky Zoltán:* Elektronvezetés színes alkálihalogenid kristályokban 407
Novobátzky Károly: A Schrödinger—Gordon egyenlet 419
Selényi Pál: Egy egyszerű kísérlet a szelénegyenirányító zárórétegének ismeretéhez . 427

* * *

Marx György: Az elemi részek kölcsönhatásairól (Összefoglaló referátum) 431

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI OSZTÁLYÁNAK

KÖZLEMÉNYEI

II. KÖTET 1 SZÁM

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
1951. ÉVI NAGYGYŰLÉSÉNEK ANYAGA

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
BUDAPEST, 1952

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI OSZTÁLYÁNAK

KÖZLEMÉNYEI

II. kötet 1. szám

Szerkesztőség: Budapest V, Géza-utca 2.
Kiadóhivatal: Budapest V, Alkotmány-utca 21.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának közleményei változó terjedelmű füzetekben jelennek meg és az Akadémia III. osztályának előadóülésein bemutatott dolgozatokat, továbbá az osztály munkájára vonatkozó közleményeket, könyvismertetéseket stb. tartalmaz. Négy füzet alkot egy kötetet. Évenként általában egy kötet jelenik meg.

Kéziratok a következő címre küldendők:

A Magyar Tudományos Akadémia
III. Osztályának Közleményei.
Budapest V, Géza-utca 2.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi levelezés.

Minden szerzőt 100 különlenyomat illet meg, megjelent munkájáért.

Közlésre el nem fogadott kéziratokat a szerkesztőség lehetőleg visszajuttat a szerzőhöz, de felelősséget a beküldött kéziratok megőrzéséért, vagy továbbításáért nem vállal.

A Közlemények előfizetési ára kötetenként belföldi címre 20 forint, külföldi címre 30 forint. Belföldi megrendelések az Akadémiai Kiadó, Budapest V, Alkotmány-u. 21. (Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 04-878-111-48), külföldi megrendelések a „Kultúra" Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalat, Budapest VIII, Rákóczi-út 5. (Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 45-790-057-50-032) útján eszközölhetők.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztálya a következő idegennyelvű folyóiratokat adja ki:

1. Acta Mathematica Hungarica,
2. Acta Physica Hungarica.

Acta Mathematica Hungarica szerkesztősége, Budapest V, Géza-utca 2.

Acta Physica Hungarica szerkesztősége, Budapest V, Géza-utca 2.

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI OSZTÁLYÁNAK
KÖZLEMÉNYEI

SZERKESZTI:
RÉNYI ALFRÉD

A Magyar Tudományos Akadémia 1951. évi Nagygyűlése alkalmából rendezett előadásai.

Az osztály előadásainak programmja:

Nyilvános osztályülés december 11-én, kedden

Rényi Alfréd lev. tag: Beszámoló az osztály munkájáról, ötéves tervéről és az ezzel kapcsolatos feladatokról.
M. Cosyns: A kutatás megszervezése a brüsszeli atomkutató központban.

Fizikai Állandó Bizottság december 12-én, szerdán

Gombás Pál r. tag: Az atommagok statisztikus elméletéről.
Kovács István lev. tag: Vizsgálatok a stronciumoxid kék sávjain.
Selényi Pál lev. tag: Higanygőz hatása a szelénegyenirányítóra és a szelénfényelemre.
Neugebauer Tibor: A fehérjemolekulák autókatalitikus keletkezésének egy fizikai elmélete.*

Matematikai Állandó Bizottság december 13-án, csütörtökön

Szőkefalvi-Nagy Béla lev. tag: Újabb eredmények az analízis területén.
Szele Tibor: Újabb eredmények az absztrakt algebra területén.
Kalmár László lev. tag: A matematika alapjaival kapcsolatos újabb eredmények.
K. Kuratowski: Beszámoló a Lengyel Állami Matematikai Intézet tudományos tevékenységéről, különösen a topológia területén.

December 14-én, pénteken

Hajós György lev. tag: Újabb eredmények a geometria területén.
Rényi Alfréd lev. tag: Új eredmények a valószínűségszámítás és az alkalmazott matematika egyéb ágai terén.
Turán Pál lev. tag: Az analízis egy módszerének újabb alkalmazásairól.

***-gal megjelölt előadás a szerző kívánságára nem jelenik meg.**

Technikai szerkesztő: Erdős Lajosné
Akadémiai Kiadó (Budapest, V., Alkotmány-u. 21.) Felelős: Mestyán János

Csongrádmegyei Nyomdaipari Vállalat, Szeged 52753 Felelős vezető: Vincze György

BESZÁMOLÓ A III. OSZTÁLY MUNKÁJÁRÓL, ÖTÉVES TERVÉRŐL, ÉS AZ EZZEL KAPCSOLATOS FELADATOKRÓL

RÉNYI ALFRÉD lev. tag, osztálytitkár

Előadta az 1951 december 11-én tartott nyilvános osztályülésen

Tisztelt III. Osztály!

Igyekszem rövidesen beszámolni az osztály munkájáról, az eredményekről, melyeket az osztály a tavalyi Nagygyűlés óta elért, továbbá azokról a hiányosságokról, melyek az osztály munkájában tapasztalhatók voltak. Ennek alapján meg fogom próbálni, hogy összefoglaljam azokat a főbb feladatokat, amelyek megvalósítására a közeljövőben törekednünk kell. Ezeket a feladatokat nagy vonalakban megvitattuk és kijelöltük az ötéves tudományos terv kidolgozása alkalmával. Így elsősorban az osztályhoz tartozó tudományágak, a fizika, matematika, a csillagászat és a meteorológia ötéves tudományos tervét fogom nagy vonalakban ismertetni. Ez az első alkalom, hogy ötéves tudományos tervünket a nyilvánosság előtt ismertetjük és ebből nyilvánvalóan következik, hogy nincs mód arra, hogy a részletekbe belemenjünk. Az egyes tudományok tervéről külön-külön majd más alkalommal lehet és kell megbeszélést tartani. Hasonlóképpen nem térhetek ki a legutóbbi időben elért tudományos eredményekre. Ezekről a Nagygyűlésen elhangzó előadásokban lesz szó. Ki fogok azonban térni a tudományos tervek megvalósítását elősegítő szervezési és más feladatok ismertetésére. Kérem az osztály tagjait és az itt megjelent vendégeinket, szóljanak hozzá beszámolómhoz és egészítsék azt ki és hozzászólásaikkal is járuljanak hozzá ahhoz, hogy a jövő évben az osztály még eredményesebb munkát tudjon végezni.

A szocializmus építése, felemelt ötéves tervünk teljesítése terén a soronlevő központi feladatainkat a Magyar Dolgozók Pártja II. Kongresszusa világosan kijelölte. Ezek a feladatok elsősorban nehéziparunk fejlesztése, mezőgazdaságunk szociálista átszervezése és a kultúrforradalom továbbfejlesztése. Ezeket a központi országos feladatokat nekünk, természetesen a magunk területén is irányelvként kell szem előtt tartani és minden erőnkkel arra kell törekednünk, hogy ezen célok megvalósítását leghathatósabban elősegítsük. Ezen az erőfeszítésen keresztül a tudomány dolgozói összeforrnak dolgozó népünkkel. Állandóan tapasztalhattuk munkánk során, hogy gyökeresen megváltozott hazánkban a tudomány helyzete, láthattuk és érezhettük, hogy a tudomány és annak művelői hazánkban minden segítséget és támogatást megkapnak a Párttól, a kormánytól, és egész dolgozó népünktől. A tudomány hazánkban ma már nem néhány magányos ember ügye, hanem közüggyé vált, a tudomány fejlődését, tudományos életünk minden jelentősebb megnyilvánulását a dolgozók százezrei kísérik figyelemmel, mert tudják, hogy a tudomány milyen hatalmas fegyvere szebb jövőnkért folytatott harcunknak. Megváltozott hazánkban a tudomány dolgozóinak magatartása is. Nálunk is egyre inkább valósággá váltak *Sztálin* szavai: „A haladó tudomány nem határolja el magát a néptől, hanem kész a népnek a tudomány összes vívmányait átadni, nem kényszerből, hanem önkéntesen, örömmel szolgálja a népet.“

Amikor eredményeinkről beszámolunk, először arra kell rámutatnunk, hogy eredményeink elérése nem lett volna lehetséges a Szovjetunió állandó és önzetlen baráti segítsége és támogatása nélkül. Eredményeink elérésében messzemenően támaszkodunk a Szovjetunió segítségére, igyekeztünk követni a szovjet tudomány példáját és átvenni azokat a gazdag tapasztalatokat, amelyeket a Szovjetunió készségesen bocsátott rendelkezésünkre. Azonban a szovjet tudomány példája egyben azt is megmutatja, hogy mennyi mindent kell még tennünk, mennyivel többet tehetünk. Két kérdésre gondolok itt elsősorban. Az egyik a tudomány és a gyakorlat kapcsolatának kérdése. A gyakorlattal való szoros és eleven kapcsolat nemcsak azért szükséges és nélkülözhetetlen, mert enélkül a tudomány eredményei nem kerülhetnének gyakorlati felhasználásra, hanem ez a tudomány egészséges fejlődésének is nélkülözhetetlen előfeltétele. „A tudományt éppen azért nevezzük tudománynak“ — mondotta *Sztálin* elvtárs — „mert nem ismer el fétist, nem fél kezet emelni arra, ami lejárta magát, ami elavult és éberen figyel a tapasztalat, a gyakorlat szavára.“ A tudomány és gyakorlat kapcsolatainak elmélyítése terén értünk már el jelentős eredményeket. Azonban még távolról sem tettünk meg mindent, ami ezen a téren szükséges. A másik kérdés, amelyet még előljáróban alá szeretnék húzni, ez a tudomány és a világnézet kapcsolatának kérdése. Ahogy *P. Sz. Alexandrov* kiváló szovjet matematikus mondotta: „A tudós alkotó munkájának alapja a világnézet és ez teljes mértékben érvényes az olyan elvont tudományra is, mint a matematika.“ Ugyanúgy, mint ahogy a tudomány munkásai nem vonhatják ki magukat, nem állhatnak félre abban a harcban, amely ma világszerte a béke és a haladás erői között és a háború és a reakció erői között folyik és munkájukkal állásfoglalásukkal, vagy esetleg éppen az állásfoglalás előli kitéréssel az egyik vagy másik tábort erősítik, ugyanúgy nincsen harmadik út abban az elvi ideológiai harcban sem, amely világszerte a materializmus és az idealizmus között a haladás, az igazság, az igazi tudomány világnézete és a háborús uszítók, az őrült világhatalmi terveket szövögető imperialisták érdekeit kiszolgáló, különböző formában nyíltan, vagy leleplezetten hirdetett tudománytalan reakciós ideológiák között folyik. Az elmult években a tudomány fejlődése, a Szovjetunióban lefolyt viták világosan megmutatták, hogy a helytelen burzsoá ideológiák a tudomány konkrét kérdéseiben is téves és helytelen állásfoglaláshoz vezetnek. Világossá vált, hogy a tudomány döntő kérdéseiben csak az tájékozódhat, aki megismeri és elsajátítja a dialektikus materializmust, azt a világnézetet, amely egyedül képes a tudomány egészséges fejlődését biztosítani. *Rákosi Mátyás* 1949. október 22-én a Pártfőiskola megnyitásán tartott beszédében rámutatott arra, hogy „a szocializmus építésének bizonyos fokán túl, minden értelmiségi munka minősége úgy nő és úgy hatványozódik, ahogy benne a marxizmus-leninizmus elmélete érvényre jut és megvalósul." Ennek a megállapításnak az igazságát a III. osztályhoz tartozó tudományok területén is állandóan tapasztalhatjuk. Kétségtelen, hogy az elmult évben ezen a téren jelentékeny lépésekkel előbbre jutottunk. Természetesen a marxizmus-leninizmus megismerése és tudatos alkalmazása a kutató munkában azt is jelenti, hogy kritikus szemmel kell mérlegelnünk és vita tárgyává tennünk eddigi felfogásainkat számos tudományos kérdésben. Ez csak nyílt és szabad viták hosszú sorozatában valósulhat meg teljesen. A nyílt és szabad magas elvi színvonalú viták szellemének meghonosítása központi feladat a magyar tudomány fejlesztésében. „Mindenki tudja azt" — állapította meg *Sztálin* — „hogy semmiféle tudomány sem fejlődhet és érhet el sikereket a vélemények harca, a kritika szabadsága nélkül." Ugyanakkor *Sztálin* rámutatott arra is, hogy a kritika szabadságának biztosítása nélkül az a veszély áll fenn, hogy a tudományban klikk-rendszer alakul ki, a kritika elfojtása szükségképpen arakcsejevi rendszerhez és ezen keresztül a tudomány fejlődésének megakadásához vezet. Meg vagyok győződve, hogy az új tudományos fokozatok létesítése e tekintetben nagy segítséget jelent és hozzájárul a szabad tudományos viták szellemének kialakításához, különösen az új tudományos fokozatok elnyerésére benyujtandó disszertációk nyilvános megvitatása fog nagy segítséget nyujtani e téren. Az ideológiai harc terén döntő jelentőségű a hazafiatlan kozmopolita felfogás elleni harc, mivel a kozmopolitizmus az ellenség aknamunkájának támpontjává válhat. Ebben a harcban nagy jelentősége van a magyar tudomány haladó hagyományainak ápolásának: ezzel a kérdéssel is többet kell foglalkoznunk a jövőben.

Térjünk át ezután az osztály elmult évi munkájának ismertetésére. Mindenekelőtt az osztály rendezvényeiről számolok be. Az osztály 11 nyilvános felolvasó ülést tartott, melyeken összesen 23 tudományos előadás hangzott el és 33 dolgozatot mutattak be. Az előadások között szerepelt az elmult közgyűlésen megválasztott három új tagtársunk székfoglaló előadása, akik ezzel az osztály teljesjogú rendes, illetve levelező tagjaivá váltak. Az említett üléseken kívül az osztály két könyvankétot tartott. Örömmel állapíthatjuk meg, hogy úgy felolvasó üléseink, mint ankétjaink látogatottsága jelentékenyen megnőtt és ugyanakkor örvendetesen megszaporodott a hozzászólások száma is, amelyek azt mutatják, hogy az osztály tagjai és az osztály nyilvános üléseinek egyéb látogatói nemcsak eljárnak az ülésekre, de érdeklődéssel és figyelemmel kísérik az ott elhangzottakat. Néhány előadás után igen értékes és hasznos vita alakult ki, amely sok új szemponttal egészítette ki az előadásokat. Ugyanakkor azt is meg kell állapitani, hogy a nyilvános üléseinken elhangzott előadások megvitatása nem ért véget az üléssel, hanem több esetben az előadottakról még heteken keresztül folytak viták szakemberek között. Mindez kétségtelen, hogy fejlődést jelent és a jövőben is feltétlenül arra kell törekedni, hogy előadó üléseinket úgy szervezzük meg, hogy azok minden esetben tudományos életünk eseményévé váljanak.

Az előadó ülések közül csak két könyvankétünkre térek ki részletesebben. Ennek a két ülésnek a tapasztalatai azt mutatják, hogy azok a magas színvonalú, új eredményeket és szempontokat tartalmazó szovjet tudományos munkák, melyeket az osztály könyvkiadási terve keretében a magyar tudományos közvélemény számára hozzáférhetővé tettünk, óriási segítséget jelentenek tudományos életünknek. Az említett két szovjet könyv magyar fordításának megvitatása mindkét alkalommal messze túlnőtt ezen munkák tartalmának ismertetésén és alapvető elvi kérdések tisztázását tette lehetővé. A jövőben ugyanakkor, amikor az eddigi kialakult gyakorlatnak megfelelően rendszeresen meg kívánjuk tartani felolvasó üléseinket, az eddigi tapasztalatoknak megfelelően még gyakrabban fogunk ankéteket és vitákat rendezni legújabban megjelent munkákról, de más alkalmakból is. Az előadó ülésekkel kapcsolatban még két kérdést kívánok érinteni. Az első kérdés az, hogy az eddigi előadó üléseinken a csillagászat igen kevéssé és a meteorológia egyáltalán nem szerepelt. Ezen a hiányosságon feltétlenül változtatni kell. A másik kérdés, melyre ki szeretnék térni, az előadó ülések anyagának összeállítása. Az elmult évben több alkalommal úgy állítottuk össze az előadó ülések anyagát, hogy egyes alkalmakkor csak fizikai, más alkalommal csak matematikai előadások hangzottak el. Ennek kétségtelenül vannak előnyei, ugyanakkor azonban hátrányai is. Arra kell törekednünk, hogy a matematikusok és a fizikusok jobban megismerjék egymás munkáját és szorosabban működjenek együtt. Ennek elősegítésére úgy hiszem helyes, ha a jövőben nem választjuk ennyire külön az előadó ülések keretében a matematikai és fizikai előadásokat.

Áttérek ezután az osztályvezetőség és az állandó bizottságok munkájára. A III. osztály vezetősége az elmult évben nyolc alkalommal tartott ülést. Ezeken az üléseken az osztály munkájával kapcsolatos legfontosabb kérdésekkel foglalkozott. Így elsősorban az osztály ötéves tudományos tervével, az akadémiai intézetek és az osztály tudományos irányítása alá tartozó egyetemi intézetek kutatási terveivel, az akadémiai intézetek fejlesztésének kérdéseivel, ezen intézetek tudományos tanácsainak felállításával, az említett egyetemi intézeteknek juttatandó céltámogatás kérdésével, ösztöndíjak kérdésével, tudóspótlékok és jutalmazások kérdéseivel, az osztály könyvkiadási tervével, továbbá a matematikai, fizikai és meteorológiai állandó bizottságok javaslataival foglalkozott. Az állandó bizottságok közül a matematikai bizottság 6 ülést, a fizikai bizottság 8 ülést és a meteorológiai bizottság 2 ülést tartott. Az állandó bizottságok az osztályvezetőség számára készítették elő a fent említett kérdések megvitatását, ezenkívül számos egyéb kérdéssel is foglalkoztak. Az elmult év folyamán eredményesebbé vált úgy az osztályvezetőség, mint az állandó bizottságok munkája.

Ez annak köszönhető, hogy alaposan elő lettek készítve az ülések. Általában azt a gyakorlatot követtük, hogy úgy az osztályvezetőség, mint a bizottságok elé részletes írásbeli anyag formájában kerültek a megvitatandó kérdések, amely írásbeli anyagot az osztályvezetőség, illetőleg a bizottság tagjainak az osztálytitkárság előre megküldte. Ez a rendszer, amelyet a fizikai állandó bizottság kezdeményezésére vezettünk be, jól bevált. Ezenkívül az állandó bizottságokban arra törekedtünk, hogy minden kérdést a bizottság egy tagja, mint előadó ismertessen. Ez a rendszer javulást hozott a bizottságok tagjainak aktivizálása terén is, bár ezen a téren még nem lehetünk megelégedve a helyzettel és feltétlenül szükséges, hogy állandó bizottságaink tagjai a jövőben még aktívabban vegyék ki részüket a bizottság munkájából. Az osztálytitkárságnak, amely az év folyamán létszámban is, de elsősorban szervezettségben igen sokat fejlődött, nagy része van az osztály által elért eredményekben. Az osztály nagy gondot fordított a tudományos utánpótlás kérdésére, a tehetséges fiatal kutatók támogatására. Ebben az évben az osztály 79 fiatal kutatót, köztük 41 fizikust, 31 matematikust, 5 meteorológust és 2 csillagászt részesített havi 200—500 forintig terjedő tudományos ösztöndíjban. Az ösztöndíjasok munkatervet nyujtottak be és a munkaterv elbirálása alapján részesítette őket az osztály ösztöndíjban. Ösztöndíjasaink közül sokan eredményes munkát végeztek, bár kétségtelen, akadtak olyanok is, akik az akadémiai ösztöndíjat csak fizetés-kiegészítésnek tekintették. Az osztály nem foglalkozott eleget az ösztöndíjasok munkájával. A jövő évben az Akadémiai ösztöndíj politikáját az eddigi tapasztalatok alapján más alapon fogja folytatni, sokkal nagyobb súlyt helyez a munka ellenőrzésére, az új ösztöndíjasok esetében az ösztöndíj folyósítása csak akkor kezdődik meg, amikor az ösztöndíjas már bizonyos részleteredményeket tud felmutatni, ugyanakkor azonban az év végén az eredményes munkát végző ösztöndíjasokat az Akadémia nagyobb összegű prémiumban részesíti. Az erre vonatkozó értesítéseket az intézetek már megkapták. Itt emlékezem meg az aspiránsképzés megindulásáról is, amelynek jelentősége ma már közismert. 1951. februárjában 6 matematikus, 11 fizikus és 1 meteorológus aspiráns kezdte meg munkáját, míg ez év novemberében 7 matematikus, 7 fizikus, 1 csillagász és 1 meteorológus aspiráns lett felvéve. Az osztály több ízben foglalkozott az aspiránsok munkájával és megállapította, hogy az aspiránsvezetők közül egyesek nagy elfoglaltságuk miatt nem fordítanak elég időt aspiránsaik irányítására és munkájuk ellenőrzésére. Ezen feltétlenül változtatni kell, mert csak így biztosíthatjuk, hogy az aspirantura célkitűzései maradéktalanul megvalósulnak.

Áttérek az osztály folyóirat- és könyvkiadási tevékenységének ismertetésére. Az osztály 2 Actájának, az Acta Mathematica és az Acta Physicának egyenként 2—2 értékes tartalmú füzete jelent meg az elmúlt évben. E téren a jövőben az a teendőnk, hogy jelentősen meggyorsítsuk az Acták megjelenésének ütemét, mert e téren igen el vagyunk maradva. Az elmaradásnak elsősorban nyomdatechnikai okai voltak, melyekre a könyvkiadással kapcsolatban fogok rátérni. Ugyancsak megjelent ez évben az Osztályközlemények első száma is, amely ünnepi szám volt: az Akadémia fennállásának 125. éves évfordulója alkalmából rendezett Ünnepi Héten a III. osztály előadó ülésein elhangzott tudományos előadásokat foglalta magában*. Az a hatalmas támogatás, melyet Népköztársaságunk a tudományos életnek és ezen belül a Magyar Tudományos Akadémiának nyujt, lehetővé tette a tudományos könyvkiadás hazánkban eddig még soha nem látott méretekben való megindítását. A tudományos könyvkiadás terén ugyanúgy, mint a tudományos élet sok más területén, évtizedek mulasztásait kell jóvá tennünk. A tudományos könyvkiadásnak óriási jelentősége van. A tudományos könyvek kiadását az Akadémia legfontosabb feladatai egyikének kell tekintenünk. A multban a magyar tudósok munkáikat hazájukban csak a legritkább esetben adhatták ki. Sok esetben külföldön jobban megbecsülték és kiadták a magyar tudósok munkáit, mint idehaza. Az osztály könyvkiadási tervében szereplő munkák közül eddig 6 munka jelent meg és további 17 munka kiadása van előkészületben. A jövőben felhasználva az ez évben szerzett tapasztalatainkat, arra kell törekednünk, hogy a könyvkiadási tervünkben szereplő munkák kifogástalanul, de ugyanakkor időben jelenjenek meg. Az osztály kidolgozta ötéves könyvkiadási tervét, évente 500—600 ívnyi terjedelemben fog az osztály tudományos munkákat kiadni.

Beszélnem kell az osztály munkájáról az intézetek tematikai terveinek felülvizsgálatával és általában az intézetek munkájának irányításával és ellenőrzésével kapcsolatban, egyrészt az akadémiai intézetek, másrészt az osztály tudományos irányítása alá tartozó egyetemi intézetek vonalán. Meg kell állapítanom, hogy ezen a téren az osztály munkája sok kívánnivalót hagyott maga után. A tematikai tervek felülvizsgálata az esetek többségében inkább formális volt. Az állandó bizottságok csak kevés alkalommal adtak konkrét irányítást és útmutatást az intézeteknek. Hasonlóképpen inkább formálisak voltak az intézetlátogatások is, melyeket az osztály megszervezett, egy-két eredményes intézetlátogatástól eltekintve. Ezen a téren feltétlenül meg kell javítani az osztály munkáját, ez azonban csak úgy lehetséges, ha az állandó bizottságok tagjai a tematikai terv felülvizsgálatának kérdésével sokkal behatóbban és alaposabban foglalkoznának. A tudományos munka tervszerűségéről az elmult években igen sok vita folyt és ennek következtében a tervkészítés szempontjai és az egyes tudományágak speciális szempontjai ma már nagy vonalakban tisztázva vannak, azonban a gyakorlatba még nem mentek teljes mértékben át. Még nem mindenki érzi át a tervkészítés jelentőségét és azt a felelősséget, amelyet a terv betartása és végrehajtása iránt éreznünk kell. Iránymutatók e szempontból *A. V. Topcsijev* akadémikus, a Szovjetunió Tudományos Akadémia

* Az Osztályközlemények feladataival, továbbá a III. osztály könyvkiadási tevékenységével az Osztályközlemények második száma részletesen foglalkozott, ezért az osztálytitkári beszámoló idevonatkozó részeit kivonatosan közöljük. (A Szerkesztőbizottság)

elnöksége főtitkárának következő szavai: „A Szovjetunió Tudományos Akadémiájának minden tudományos működése ma már az egész állami terv elválaszthatatlan részét képezi. A tervnek kormányunk által történt jóváhagyása azt követelte a tudományos dolgozóinktól, hogy fokozzák munkájukkal kapcsolatos felelősségérzetüket az állammal szemben, hozzájárult a fegyelem megszilárdításához és biztosította az előirányzott legfontosabb munkák kitűzött határidőre való végrehajtását. *Ma minden egyes tudományos dolgozó, laboratórium, intézet, és az egész Akadémia becsületbeli ügye a terv végrehajtásáért, a tudományos munkák minőségéért, ideológiai színvonaluk emeléséért folytatott harc."* A szovjet tudomány példáját követve nekünk is arra kell törekednünk, hogy a tudomány területén is fokozzuk a tervfegyelmet és a tudományos tervek végrehajtását minden magyar tudós becsületbeli ügyének tekintse. Ez azonban feltételezi a tervkészítés munkájának megjavítását s a tervek elbírálásánál is ugyanúgy, mint a végrehajtásnál a felelősségtudat növelését.

Áttérek ezután az osztály felügyelete alá tartozó három akadémiai intézet, továbbá az osztály tudományos irányítása alá tartozó egyetemi intézetek fejlődésére. Első helyen a Központi Fizikai Kutató Intézetet említem meg, amelynek létesítése ötéves tervünk egyik legjelentősebb alkotása a tudomány területén. Néhány hónapja készült el a KFKI első épülete, amelyben az intézet kozmikus sugárzási osztálya nyert elhelyezést, *Jánossy Lajos* akadémikus vezetésével. Az épület és az ahhoz csatlakozó kutatási célokat szolgáló egyéb létesítmények, melyek részben szintén elkészültek, részben pedig építésük folyamatban van, olyan lehetőségeket nyujtanak a kozmikus sugárzás terén való kutatásoknak, amilyen lehetőség a Szovjetunión kívül semilyen más országban nincsen. Tekintettel arra, hogy az osztály az új épületbe csak az ősz folyamán költözött be, még korai volna az eredményekről beszélni, bár már ilyenek is vannak, azonban bizonyosak vagyunk abban, hogy a kozmikus sugárzási osztály élni fog azokkal a hatalmas lehetőségekkel, amelyeket Pártunk és Népköztársaságunk Kormánya neki nyujtott. Meg kell ezzel kapcsolatban jegyezni, hogy kétségtelen, hogy az a tény, hogy az intézet a várostól távol van, bizonyos kezdeti nehézségeket okozott, ezek a nehézségek azonban áthidalhatók és túlnyomó részben már át is vannak hidalva. Azoknak a kutatóknak, akik ebben az új, korszerű intézetben dolgozhatnak, tudatában kell lenniök annak, hogy ez milyen kitüntetést jelent és a kisebb-nagyobb átmeneti nehézségeket leküzdve, lelkes és eredményes munkával kell megszolgálniok azt az áldozatot, melyet dolgozó népünk hozott annak érdekében, hogy a kozmikus sugárzási kutatásoknak ilyen kiváló kutatási lehetőséget biztosítson. Hasonlóképpen jelentős beruházások történtek a Központi Fizikai Kutató Intézet spektroszkópiai osztálya vonalán is, amelynek felszerelése a legújabb típusú műszerekkel, főként kiváló minőségű szovjet gyártmányú műszerekkel bővült, amelyeknek következtében a kutatási lehetőségek ezen az osztályon is megsokszorozódtak. Megindult a KFKI második új épületének építkezése is, amely a jövő évben fog befejeződni.

Ez évben kezdte meg működését a KFKI elektromágneses hullámokkal foglalkozó osztálya, továbbá az akusztikai- és ultrahang-kutató csoportja is. Az intézet jövőben felállítandó osztályai létesítésére is történtek előkészületek, úgyhogy az új osztályok megalakulása az új épületek elkészülésével párhuzamosan, vagy már azt megelőzően fog megtörténni. Ilyen módon tehát megállapíthatjuk, hogy a KFKI létrehozása, a legnagyobb szabású és legjelentősebb új létesítményünk felépítése és munkájának megindítása, eredményesen halad előre. Nem haladhatunk el azonban szó nélkül azok mellett a hibák mellett, melyek ezzel kapcsolatban felmerültek, ki kell ezekre térnünk, elsősorban azért, mert ezen hibák kiküszöbölése az intézet eredményes munkájának előfeltétele. Elsősorban azt szeretném megemlíteni, hogy egy ilyen nagyszabású új tudományos intézet létrehozása szükségessé tette nagyszámú kutatókádernek az intézet munkájába való bevonását. Ezek a kutatók előzőleg egyetemi intézetekben dolgoztak és onnan való kiválásuk ezen egyetemi intézetek munkájában bizonyos átmeneti fennakadást okozott. A jövőben az intézet kutatókáderekkel való ellátását alaposabban meg kell tárgyalni az egyetemi intézetek vezetőivel és az egyetemi intézetek problémáit fokozottabban szem előtt kell tartani. Ezt már csak azért is nyomatékosan hangsúlyoznunk kell, mert a KFKI. létesítése a legcsekélyebb formában sem jelentheti azt, hogy az egyetemi fizikai intézetek kutatómunkája háttérbe szoruljon, vagy kevesebb támogatást kapjon. Éppen ellenkezőleg, az a célkitűzésünk — és ezt a célkitűzést meg is fogjuk valósítani —, hogy a KFKI felállítása segítséget nyujtson és új lendületet adjon az egyetemi intézetek kutatómunkájának is oly módon, hogy a különböző intézetekben folyó kutatások egymást szervesen kiegészítsék. Ezt világosan kell látniuk az egyetemi intézetek vezetőinek és kutatóinak, de világosan kell látniuk a KFKI vezetőinek is és a káderkérdések megoldásánál a jövőben fokozottabb körültekintéssel kell eljárni. Ez évben a KFKI létszáma több mint megnégyszereződött és ma már 90 körül jár. Ez a szám önmagában is mutatja, hogy nem egyszerű kérdésről van itt szó. A KFKI-val kapcsolatban néhány további kérdést kívánok érinteni, melyek elvi jelentőségűek, de alábbi megjegyzéseim természetesen más intézetekre is vonatkoznak. Jelenleg az intézet felépítése és megszervezése van napirenden. Azonban az intézet már felállított és működőképes osztályainak és csoportjainak munkája emögött nem szorulhat háttérbe. Ma már mindenki előtt nyilvánvaló, hogy az a feladat, hogy az építkezés és szervezés minden eszközzel való elősegítése mellett egyidejűleg maximálisan kihasználjuk a meglevő lehetőségeket, többek között azokon a vonalakon is, ahol a kutatómunka eredményei a népgazdaságban azonnal alkalmazásra és felhasználásra találhatnak. Azonban nem elég ezt a kérdést elvileg tisztán látni, hanem a gyakorlatba is át kell vinni. Kétségtelen, hogy az építkezés, szervezés igen nagy munkát jelent, ez volt az oka annak, hogy az intézet vezetői és legkiválóbb tudósai, akik szívükön viselték az intézet sorsát, olyan mértékben foglalkoztak szervezési és adminisztratív kérdésekkel, hogy abba időnként szinte elmerültek. Ez a jelenség nem egyedülálló és kisebb mértékben máshol is tapasztalható. Éppen azért kell rá a figyelmet felhívni. E téren irányt mutat Népköztársaságunk Minisztertanácsának rendelete, amely az akadémikusokat és kiemelt tudósokat mentesíti a felesleges adminisztrációtól és ülésezéstől és egyéb úton, például alkotó szabadság biztosításával segíti a tudományos munkát. Irányt mutat számunkra e kérdésben *I. P. Bargyin* akadémikus, a Szovjetunió Tudományos Akadémia alelnökének „A tudomány eladminisztrálása ellen, az alkotószellemű tudományos munkáért" című cikke. Idézem ennek a cikknek egy feltétlenül megszívlelendő mondatát: „Olyan körülményeket kell teremteni, amelyek mellett a tudományos dolgozók munkaidejüknek legalább háromnegyed részében a tudománnyal foglalkozhatnak és idejüknek csupán egynegyed részét fordítják — amennyiben ez elkerülhetetlen — az adminisztratív ügyekre." Mi még ettől távol állunk és itt sürgősen változtatni kell a helyzeten, hiszen a vezető tudósok adminisztratív munkával való túlterhelése gátolja tudományos munkájukat, gátolja azt, hogy elég időt fordítsanak fiatal tudományos munkatársaik irányítására és ezzel a tudomány fejlődését veszélyeztetik. A másik probléma, amelyre ki akarok térni, szintén nemcsak a KFKI-val kapcsolatban lépett fel, hanem más területen is felmerült. Arra gondolok, hogy a legcsekélyebb nehézség és fennakadás esetén egyesek rögtön arról kezdenek beszélni, hogy „ilyen körülmények között nem lehet dolgozni". Azt hiszem nem lehet vitás senki előtt, hogy amikor Népköztársaságunk semilyen anyagi áldozattól vissza nem riadvá a legmesszebbmenő támogatást adja meg a tudomány fejlesztéséhez, erre a magyar tudósoknak nem azzal kell válaszolni, hogy a legcsekélyebb fennakadás esetén, amely napokon belül megoldható, azonnal a munka beszüntetéséről kezdjenek beszélni, hanem a Párt és a kormány hatalmas támogatását azzal kell megszolgálniok, hogy a felmerülő nehézségekkel szembenézve és azokat kiküszöbölve eredményes munkát végezzenek. Nehézségek nélkül nincsen munka és országunk hatalmas ütemű és iramú fejlődése minden vonalon a nehézségek elleni harccal jár együtt. Nehézségeink, — mint arra *Rákosi* elvtárs több ízben rámutatott — a fejlődés, az építés, a növekedés nehézségei, így kell őket tekintenünk és ennek tudatában kell őket legyőzni. Mindenkinek meg kell érteni azt, hogy iparunk fejlesztése, olyan nagyszabású alkotások létrehozása, mint Sztálinváros, mint az Inotai Erőmű, nem mehet gombnyomásra, hanem csak áldozatos, megfeszített munka és harc — és ehhez hozzá kell tennem, hogy nemcsak az objektív nehézségekkel, hanem a sorainkat megbontani és az építést akadályozni kívánó ellenséggel szembeni harc — útján lehetséges. Nyilvánvaló, hogy a tudományos intézetek esetében sem más a helyzet.

Áttérek ezután az MTA Csillagvizsgáló Intézetének munkájára. Ez az intézet, amely már hosszú multra tekinthet vissza, ez évben vált akadémiai intézetté. Az intézetnek az Akadémia által való átvétele óta az intézet létszáma megnövekedett és egyéb úton is fokozottabb segítséget kapott az intézet kutató-munkájában. Az intézet jövője szempontjából legnagyobb jelentőségű az, hogy az intézet az ötéves terv keretében megrendelt egy 90 cm-es átmérőjű Sonnefeld-típusú tükörteleszkópot, egy ugyanilyen nagyságú objektívprizmával. A műszert négy év mulva szállítják, addig ki kell keresnünk hazánknak a csillagászati megfigyelések szempontjából legalkalmasabb helyét és ott kell megépíteni a távcső befogadására szolgáló épületet. Az új műszer segítségével az intézet a csillagászat számos területén korszerű kutatási eszközhöz jut. Addig is jelenlegi eszközeivel folytatja az intézet megfigyelési programmját, a szovjet csillagászati intézetekkel kiépítendő kooperációban. Az intézet fejlesztésének további jelentős pontja a jelenleg működő asztrofizikai és napfizikai osztály mellett egy új osztálynak, a pozicióasztronómiai és stellárstatisztikai osztálynak a felállítása, amelynek előkészületei már megtörténtek és amely jövő év elején megkezdi munkáját. A jövőben az intézetnek több súlyt kell helyeznie a rokontudományokkal való kooperációra, különösen a geodéziával és a geofizikával való kapcsolatokat kell kiszélesítenie.

Utolsónak hagytam az Alkalmazott Matematikai Intézetet, amely az elmult év folyamán szintén jelentékeny mértékben fejlődött és eredményes munkát végzett. Az intézetnek jelenleg 5 osztálya működik, (I. Mechanikai és szilárdságtani osztály, II. Kémiai osztály, III. Valószínűségszámítási és matematikai statisztikai osztály, IV. Gazdasági és biztosítási matematikai osztály, V. Numerikus és grafikus módszerek osztálya) azonban a már felállított osztályok keretein belül már ez évben annyira kiszélesítette működését, hogy indokolttá vált a jövő évben további osztályok, mégpedig elektrotechnikai osztály, gépi matematikai osztály és függvényapproximációs osztály felállítása. Az AMI-t elsősorban] abból a szempontból kell kiemelnünk, hogy a legszorosabb kapcsolatokat létesítette az iparral és a népgazdaság egyéb ágaival. Nincs itt hely, hogy erről a munkáról beszámoljak, csak egy számot említek meg: az intézet ebben az évben 140 külső megbízatást teljesített üzemek, ipari, mezőgazdasági és tudományos kutatóintézetek, klinikák stb. részére. Az intézet eddig azt az álláspontot képviselte, hogy foglalkozik minden olyan matematikai vonatkozású problémával, amelynek megoldására állami intézmények felkérik és nem igyekezett eléggé olyan súlyponti problémák kiválasztására, amelyek mogoldása a legsürgősebb és legjelentősebb az ötéves terv szempontjából. Ennek megfelelően az intézet nem lépett fel elég határozottan, kezdeményezően az ipar és a műszaki és természettudományok felé, hanem megelégedett a matematika gyakorlati alkalmazásaira való figyelem felhívásával. Azonban az utóbbi időben az intézet már felismerte, hogy az eddigi munkamódszerei odavezetnek, hogy az intézet elaprózza erejét és nem fordíthat elég energiát a népgazdaságilag döntő kérdésekre, és kísérletet tett új munkamódszerek kidolgozására. Ebbe az irányba mutat például az a munkaterv, amelyet az intézet az Ipari Minőségellenőrző Intézettel együtt, a Tervhivatallal egyetértésben a matematikai statisztikának a tömeggyártás minőségellenőrzésére való felhasználására kidolgozott. Az intézet kezdettől fogva törekedett arra, hogy munkájába minél nagyobb számban és minél intenzívebben bevonja külső munkatársként azokat a matematikusokat, akik az egyetemi intézetekben dolgoznak és az alkalmazott matematikai kutatómunka iránt érdeklődnek, de akiket az egyetemről kiemelni az oktatás megkárosítása nélkül nem lett volna lehetséges. Az intézet a jövőben sem szándékozik az egyetemi intézetek rovására fejlődni, hanem utánpótlásáról elsősorban az alkalmazott matematikus képzés során kiképzettek közül kíván gondoskodni. Abból a célból azonban, hogy az intézet munkáját kiszélesíthesse és egyben lehetőséget nyujtson az eddig csak elméleti vonalon dolgozó matematikusoknak, hogy tudásukat a gyakorlatban is felhasználhassák, előkészületeket tett annak érdekében, hogy az egyetemi intézetekben kiépíthesse csoportjait. A közeljövőben a debreceni Tudományegyetemen és a miskolci Nehézipari Műszaki Egyetemen van tervbevéve ilyen csoportok kiépítése. Az ötéves terv folyamán az intézet további kifejlesztése van tervbe véve olymódon, hogy az intézet a második ötéves terv elejére elméleti osztályokkal is kibővül és Központi Matematikai Intézetté alakul át.

Az egyetemi intézetekre térek ezek után át. Az osztály jelentős támogatást nyujtott az egyetemi matematikai, fizikai, csillagászati és meteorológiai intézetekben folyó tudományos kutatásokhoz, műszerek beszerzéséhez, az intézetek könyvtárának fejlesztéséhez és a kutatás egyéb előfeltételeinek megteremtéséhez. Az intézetek fejlesztésének, különösen személyi fejlesztésének kérdéseiben azonban az Akadémiának jelenleg csak véleményező szerepe van. Az egyetemi intézetekben folyó tudományos munka eredményességének azonban előfeltétele, hogy az intézetek fejlesztésénél, különösen az új állások létesítésénél a tudományos kutatás szükségletei is figyelembe legyenek véve. Az osztály az elmult évben doktori, magántanári képesítések mellett, egyetemi tanári és intézeti tanári kinevezés kérdését is véleményezte. A jövőben jobban össze kell egyeztetni az egyetemi kinevezésekkel kapcsolatban az oktatás és a tudományos munka érdekeit.

Rátérek végül az osztály tevékenységének még egy fontos területére: a tudományos egyesületek munkájának elvi irányítására. Ezzel a kérdéssel az osztály viszonylag keveset foglalkozott és a jövőben sokkal alaposabban kell foglalkoznia a Bolyai János Matematikai Társulattal, valamint az Eötvös Lóránd Fizikai Társulat munkájával, amely utóbbi társulat vándorgyűlését az Akadémia támogatásával sikeresen tartotta meg, de ezt a kezdeményezést nem követte az a fellendülés, amire szükség lett volna és még ma sem fejt ki olyan aktív tevékenységet, mint ami szükséges volna. A jövőben az osztálynak még fokozottabb segítséget kell nyujtania ennek a társulatnak, hogy fontos feladatait maradéktalanul teljesíteni tudja. Az osztálynak több támogatást kell nyujtania a Meteorológiai Társulatnak, továbbá a Természettudományi Társulatnak is, a természettudomány népszerűsítése fontos feladatának teljesítésében.

Ennyit kívántam az osztály munkájáról elmondani. A beszámoló közben igyekeztem egyben az előttünk álló feladatokra is rámutatni. Nem beszéltem természetesen a tudományos eredményekről, hiszen azok ismertetése messze túlnőtt volna egy ilyen beszámoló keretein. Áttérek most az osztály ötéves tervének igen vázlatos ismertetésére.

Mindenek előtt felsorolom az osztályhoz tartozó tudományok azon fejezeteit, amelyeket az osztály ötéves terve súlyponti területekként megjelöl. Ezek a következők:

MATEMATIKA

I. Analízis.

1. Differenciál-, integrál- és egyéb függvény-egyenletek.
2. Függvényapproximáció.
3. Funkcionálanalízis.
4. Komplex függvénytan.

II. Geometria.

1. Differenciálgeometria.
2. Topológia.
3. Folytonos csoportok.
4. Egyéb geometriai vizsgálatok.

III. Algebra és számelmélet.

1. Csoportok, gyűrűk, testek.
2. Algebrai számelmélet.
3. Analitikus számelmélet.
4. Geometriai számelmélet.

IV. Valószínűségszámítás.

1. Sztochasztikus folyamatok.
2. Határértéktételek.
3. Matematikai statisztika.
4. Elvi kérdések.

V. Matematikai gépek és egyéb segédeszközök.

1. Analógia-elvű gépek.
2. Digitális gépek.
3. Numerikus módszerek.
4. Nomográfia.

VI. A matematika elvi kérdéseire és történetére vonatkozó kutatások.

FIZIKA

I. Szilárd testek kísérleti és elméleti vizsgálata.

1. Fémek elmélete.
2. Az atom-statisztikus elmélete.
3. Spektroszkópia.
4. Kémiai kötés elmélete.

5. Kristálynövesztés.
6. Félvezetők és azok fotoeffektusa.
7. Lumineszcencia.
8. Felületi jelenségek.
9. Dielektrikumok nagy frekvenciás elektromos terekben.
10. Ferromágnesség.

II. Atommagok kísérleti és elméleti vizsgálata.

1. Kozmikus sugárzás.
2. Vizsgálatok az atommagra vonatkozólag.
3. Atommagreakciók.
4. Rádióaktív izotopok alkalmazásai.

III. A fizika elvi problémáira vonatkozó vizsgálatok.

1. Kvantummechanika.
2. Erőterek elmélete.
3. Statisztikus fizika.

IV. Egyéb kutatási témák.

1. Ultrahang.
2. Elektromágneses hullámok.

CSILLAGÁSZAT

I. Asztrofizika.
II. Napfizika.
III. Pozició-asztronómia és stellárstatisztika.

METEOROLÓGIA

I. Makroklimatológia.
II. Mikroklimatológia.
III. Agrometeorológia.
IV. Orvosmeteorológia.
V. Időjárástan.
VI. Felső légkörkutatás.
VII. Hosszú idejű prognosztika.
VIII. Sugárzás-kutatás.
IX. Légköri villamosság.

A fenti felsorolás természetesen még nem ad képet a tervbe vett kutatásokról. Nincs itt idő arra, hogy a tervet minden részletében ismertessem, ezért csak néhány általános megjegyzésre és néhány kiragadott példára szorítkozom. Először is félreértések elkerülése végett hangsúlyozom, hogy a fenti felsorolásban szereplő fejezetei az osztályhoz tartozó tudományoknak természetesen nem egészükben alkotják a terv részét: arról van szó, hogy a felsorolt fejezetek mindegyike terén több, még megoldatlan problémacsoportra mutat rá a terv, mint amelyek megoldására a kutatásoknak elsősorban törekedni kell.

Ugyanakkor rámutat a terv ezen problémák megoldásának gyakorlati jelentőségére és számításbajövő alkalmazásaira a népgazdaságban. Tekintve, hogy az osztályhoz tartozó tudományok jellegüket illetőleg inkább elméletiek, a tervben kiemelt kutatások nagy része távlati kutatás, amely elvi jelentőségű problémák vizsgálatára irányul. Ebből következik, hogy a legtöbb területen a terv meglehetősen vázlatos, hiszen az elméleti távlati kutatások területén az eredmények előrelátása nem igen lehetséges. A tervezésnek azonban ezen a vonalon is döntő jelentősége van, hiszen a tervezés azt jelenti, hogy felmérjük feladatainkat és erőnket, és a kutatás tervszerű megszervezésével és az erőknek a legfontosabb feladatok megoldására való összpontosításával igyekszünk maximális eredményeket elérni. A tudományos terv szab irányt az osztály könyvkiadási munkájának, ösztöndíjpolitikájának, az aspirantúra feljesztésének, stb. és ebből a szempontból már a legfontosabb kutatási *irányok* kijelölése is nagy jelentőségű az osztály munkája szempontjából. A tervkészítésnél az osztály a tudomány és gyakorlat közötti kapcsolatok elmélyítését alapvető szempontként tartotta szem előtt. Ennek illusztrálására néhány kiragadott példát említek meg arra vonatkozólag, hogy a felsorolt problémakörökre vonatkozó kutatásoknak milyen gyakorlati alkalmazási lehetőségei vannak, anélkül, hogy ebben a felsorolásban a legcsekélyebb mértékben törekedném a teljességre. *Differenciálegyenletekre* vonatkozó vizsgálatok főbb alkalmazási területei a következők: a mechanikai és szilárdságtan, statikai számítások, gépszerkesztéssel kapcsolatos dinamikai problémák, rezgés és lengéstani problémák, stabilitási kérdések, rezonancia jelenségek, folyadékok és gázok áramlásával kapcsolatos problémák. Az elektrotechnikában a híradástechnika területén elsősorban a nem lineáris differenciálegyenletek elméletének fejlesztése bír nagy jelentőséggel; az erősáramú elektrotechnikában a gép- és vezetésvédelem problémáinál, hálózatok számításánál, vándorhullámokkal kapcsolatban lépnek fel ilyen problémák. A differenciálegyenletek alkalmazási területei közé tartozik a hővezetés elméletének sok problémája, továbbá a vegyiipar különböző területein (növényi és ásványolaj iparban, gyógyszeriparban, műanyagiparban, élelmezési iparban) szerepet játszó diffúziós folyamatok, valamint elektrokémiai, termokémiai és reakciókinetikai kérdések is differenciálegyenletekre vezetnek. Az *integrálegyenletek* elmélete többek között a rugalmasságtanban alkalmazható. Az elméleti fizika számos problémája is differenciálegyenletek megoldására vezethető vissza. A *komplex függvénytan* eredményei különösen a hidrodinamika, elektrosztatika, hővezetés és rugalmasságtan síkbeli problémáinál alkalmazhatók. A *valószínűségszámítás* számtalan fontos gyakorlati alkalmazásai közül kiemeljük a következőket. A *sztochasztikus folyamatok elmélete* alkalmazást nyer a véletlen ingadozásokat mutató természeti jelenségek (atommagreakciók, elektronemisszió, kozmikus sugárzásnál és egyéb kérdéseknél fellépő részecskeszámlálás, rádióaktív bomlásjelenségek, diffúziós folyamatok, kémiai reakciók és egyéb kémiai folyamatok, légköri jelenségek, folyók és tavak vízállása, sztellárstatisztika stb.) a valószínűségszámítás segítségével való tárgyalásánál, továbbá a műszaki gyakorlatban előforduló véletlen ingadozásokat mutató jelenségek (energia források, elektromos erőművek változó igénybevétele, áram-, víz-, gázszolgáltatás igénybevételének ingadozása, közlekedési problémák, telefonhálózatok és távíróberendezések terhelése, többgépes rendszerrel kapcsolatos problémák a textiliparban és egyebütt, apritási folyamatok, gépek elhasználódása és megújítása stb.) valószínűségszámítási tárgyalásánál. A *matematikai statisztika* gyakorlati alkalmazásai közül kiemeljük a tömeggyártás minőségi ellenőrzésének matematikai statisztikai módszerét, a külső ballisztika problémáit, laboratóriumi, anyagvizsgálati, orvosi, gyógyszertani, biológiai stb. kísérletek eredményének kiértékelését, mezőgazdasági növénytermesztési és nemesítési és egyéb kísérletek matematikai statisztikai kiértékelését. A matematika gyakorlati alkalmazását szolgálják a matematikai gépek és egyéb segédeszközök, így például differenciálanalizátor, elektromos működésű harmónikus analizátor stb. építése, továbbá egyéb elektromos működésű analógia elven alapuló matematikai gépek építése, a numerikus számolás (egyenletek, egyenletrendszerek, differenciálegyenletek numerikus megoldása) gyorsítására és egyszerűsítésére irányuló eljárások kidolgozása, az alkalmazott matematikai kutatások során szükségessé váló függvénytáblázatok és nomogrammok elkészítése, a műszaki alkalmazások különböző területeire kiterjedő és a nomografikus módszerek alkalmazását szemléltető anyag összegyüjtése és feldolgozása, görbesereges és pontsoros nomografikus ábrázolás lehetőségének és legcélszerűbb megvalósításának vizsgálata.

A fizika felsorolt fejezeteinek gyakorlati vonatkozásai közismertebbek, így ezeket rövidebben ismertetem. A *fémek elméletével* kapcsolatban csak a fémek rugalmas alakváltozásainak vizsgálatainak ipari jelentőségére mutatok rá. A *spektroszkópiai* kutatások gyakorlati vonatkozásai közül kiemeljük a kvantitatív elemző eljárásoknak az ipar részére való kidolgozását, továbbá abszorpciós színképek vizsgálatát, ami a gyógyszeriparnak és a klinikai kutatásoknak nyujt segítséget. A *kristályosodás és kristálynövesztés* problémái vizsgálatának gyakorlati célja műszeriparunk részére kvarc- és egyéb kristályok előállítása, továbbá az anyagkifáradás, a rekrisztallizáció jelenségeinek vizsgálata. A *félvezetőkre* és azok fotóeffektusára irányuló kutatásoknak a híradástechnikában és a fényképészet terén van nagy gyakorlati jelentőségük. A *lumineszcenciára* vonatkozó vizsgálatok gyakorlati alkalmazást találnak jobb és olcsóbb fényt adó világítótestek konstrukciójánál. A *felületi jelenségek* vizsgálata többek között az ipar részére száraz egyenirányítók, további kerámikus kondenzátorok előállítására irányul. Kiemeljük még a *rádióaktív izotópok* felhasználását az orvostudományban és a biológiában, valamint az anyagvizsgálati eljárások terén. Az *ultrahangvizsgálatok* is számos alkalmazásra találnak az iparban és az orvostudományban, az *elektromágneses hullámok* vizsgálatának pedig a híradástechnikában van alapvető jelentősége.

A *csillagászati vizsgálatok* főként elméleti jellegűek, azonban a *napfizikai* kutatásoknak a rádiózás szempontjából nagy gyakorlati jelentőségük van, míg a *pozicióasztronómiai* vizsgálatoknak nagyjelelentőségű alkalmazásai vannak a geodézia, továbbá a légi tájékozódás módszereinek tökéletesítése terén.

A *meteorológia* terén tervbevett kutatások gyakorlati vonatkozásai közül is csak néhányat emelek ki: így a gyapot, dohány, kukorica és néhány más, fagyra érzékeny növény vetése szempontjából döntő fontosságú időszak *makroklimatológiai* vizsgálatát, a mezővédő erdősávok rendszerének meghonosításához szükséges *mikroklimatológiai* adatanyag megszerzését, a tájtermelés kialakítása céljából végzendő *agrometeorológiai* kutatásokat, az *orvosmeteorológia* területéről a munkahelyklímából adódó speciális megbetegedések megelőzésére irányuló vizsgálatokat és a repülésbiztonsági szolgálat fejlesztésére irányuló *felsőlégkör-kutatást.*

Fentiekben csak néhány terv-téma gyakorlati alkalmazási lehetőségeit soroltuk fel, az elméleti jellegű kutatásokról nem beszéltünk. Nyomatékosan rá kell azonban mutatni, hogy a tudomány és gyakorlat egységének megvalósítása szöges ellentétben áll a szűk prakticizmussal és az elméleti, távlati kutatások jelentőségének felismerése és messzemenő fejlesztése a gyakorlati alkalmazások eredményességének és a tudomány fejlesztésének egyaránt nélkülözhetetlen előfeltétele. Ugyancsak igen nagy jelentősége van az egyes szaktudományok elvi kérdései vizsgálatának a dialektikus materializmus fényében és a terv ilyen tárgyú vizsgálatokra is kiterjed, beleértve a reakciós irányzatok (fizikai idealizmus, matematikai formalizmus) elleni következetes harcot, ezen vizsgálatok terve a tudományos terv szerves részét alkotja. A terv mindenütt rámutat a tervbevett kutatásoknak a szovjet tudomány fő irányaival való kapcsolataira, aminek jelentőségét azért kell különösen aláhúznom, mert a szovjet tudomány nagyszerű eredményeinek még fokozottabb megismerése és a szovjet tudománnyal való együttműködés fokozottabb kiépítése a terv sikeres teljesítésének egyik legalapvetőbb előfeltétele. A szovjet tudománnyal való együttműködés tekintetében ki kell emelni az Akadémia Csillagvizsgáló Intézetet, amelynek kutatási programmja messzemenően a szovjet csillagászokkal való kooperációra épül.

A terv tartalmazza a kiadványok, rendezvények tervét is. E tekintetben kiemelem, hogy a jövő évtől kezdve a Központi Fizikai Kutató Intézet és az Alkalmazott Matematikai Intézet megindítják időszaki kiadványsorozataikat. 1952-ben megünnepli az osztály Bolyai János születésének 150. éves évfordulóját, 1953-ban kerül sor az I. Magyar Fizikai Kongresszus, 1954-ben pedig a II. Magyar Matematikai Kongresszus megrendezésére. Megemlítem még, hogy a beruházások összege a III. Osztály tudományos irányítása alatt álló intézetekben összesen 45 millió forintot tesz ki az ötéves terv hátralevő három évében. A terv végül tartalmazza az intézetek szakember-szükségleteinek felmérését az ötéves terv hátralevő éveire, továbbá a szakemberszükséglet biztosításának elősegítésére szolgáló intézkedések, (tanfolyamok stb.) tervét is. Így például a KFKI-ban ipari tanulók lesznek a fizikai intézetek speciális problémáinak megfelelő képzettségű műszerésszé kiképezve.

Beszámolómban nem beszéltem az elmúlt évben elért tudományos eredményekről, ezekről az állandó bizottságok ülései fognak beszámolni. Azonban anélkül, hogy a konkrét eredményekre kitérnék, rá kell mutatnom, hogy az a hatalmas támogatás, amelyben Népköztársaságunk a Magyar Dolgozók Pártjának útmutatásait követve a tudományos kutatást részesíti, meghozta a gyümölcseit és az elmúlt évben a magyar tudósok több kiemelkedő és nagyszámú figyelemreméltó eredményt értek el az osztály tudományterületén is. Különösen ki kell emelnem, hogy a tudomány területén már elismert, nemzetközi hírű tudósaink mellett az elmúlt év folyamán nagy számban jelentkeztek önálló eredményekkel a fiatal kutatógárda tagjai, ami a további fejlődés szempontjából igen bíztató jelenség.

Fentiekben igyekeztem képet adni a III. Osztály munkájáról és ötéves tervéről. A rendelkezésemre álló idő és az előadás tárgyának átfogó jellege már eleve megszabták, hogy beszámolóm nem lehetett teljes. Azonban beszámolóm szükségszerű hiányosságai mellett is elérte célját, ha sikerült megmutatnom, hogy milyen hatalmas feladatok állnak előttünk, s hogy ezek sikeres végrehajtása csak úgy lehetséges, ha megsokszorozzuk erőfeszítéseinket, megjavítjuk munkamódszereinket. Azt a hatalmas támogatást, amelyben Pártunk és kormányunk a tudományos munkát részesíti, dolgozó népünk áldozatkészségét hazafias kötelességünk azzal viszonozni, hogy minden erőnket megfeszítve, ötéves tudományos tervünk eredményes teljesítésével igyekezzünk arra, hogy az 1949. évi XXVII. törvény értelmében az elméleti és alkalmazott tudományok fejlesztésével, művelésük tervszerű megszervezésével az ország összes tudományos erőit a szocialista társadalom építésének szolgálatába állítsuk. Ugyanakkor tudatában kell lennünk annak is, hogy azzal, hogy tudományos munkánkat az ötéves terv teljesítésének, a szocializmus felépítésére, hazánk gazdagabbá, boldogabbá, erősebbé tételének szolgálatába állítjuk, egyben a békéért is harcolunk. Elmondhatjuk, hogy hazánkban még ilyen kedvező körülmények és ilyen korlátlan lehetőségek a tudomány előtt soha nem voltak. Fényes jövő áll a magyar tudomány előtt: rajtunk áll, hogy megvalósítsuk.

DÉSI FRIGYES HOZZÁSZÓLÁSA
AZ OSZTÁLYTITKÁR BESZÁMOLÓJÁHOZ

Mi, meteorológusok sokszor találkozunk olyan felfogással, amely a meteorológia tudományának elméleti és gyakorlati szempontból egyaránt helytelen értékelését tartalmazza.

A meteorológusok közül ma már senki nem vitatja, hogy a légköri folyamatok törvényszerűségeit nyomozó meteorológiai kutatómódszerek kétségkívül tartalmazzák a fizikai, matematikai, geográfiai, agrobiológiai, vagy éppen a fiziológiai kutatómódszerek elemeit is, azoknak olyan szintézisét, amely a légköri folyamatok törvényszerűségeit felderítő módszereknek sajátosan meteorológiai jelleget kölcsönöz. Ha azonban ezt — a véleményünk szerint egyetlen lehetséges — értelmezési módot elfogadjuk, akkor máris világossá válik előttünk a meteorológia önállóságának módszerbeli, elvi alapja és egyúttal szemünkbe tűnik az a szoros, kölcsönhatásban álló és egymást megtermékenyítő kapcsolat is, mely a meteorológia és a fizika, matematika, geográfia és a többi természettudomány között áll fenn.

A meteorológiának azonban nemcsak a módszere, hanem a gyakorlati szervezete is jellegzetes. A meteorológiai szolgálatot biztosító állomáshálózatunkon és repülőtereinken dolgozó munkatársaink, hivatásos észlelőink és a Meteorológiai Intézetben dolgozó tudós- és középkádereink együttes száma igen jelentős.

Az észlelési és megfigyelési adatok gyors, megbízható továbbításának és kicserélésének technikai lebonyolítása még óramű pontossággal működő híradó szolgálat fenntartását is szükségessé teszi. Többtízezer észlelőállomásról és többezer adóállomásról van szó, olyan hatalmas apparátusról, amely ismét csak a meteorológiai szolgálatnak és természetesen — vele szoros összefüggésben — a kutatómunkának is sajátossága. Megemlíthetjük még a legkülönfélébb obszervatóriumoknak szintén nem lebecsülendő sorát.

A meteorológiai kutatómunka és szolgálat méreteire jellemző, hogy egy hatalmas világszervezet, az OMM (Organisation Météorologique Mondiale) áll az élén, amely arra lenne hivatott, hogy nemzetközi viszonylatban irányítsa a meteorológiai szolgálatot és kutatómunkát. 1951. májusában az OMM ENSZ-mintájú szervezetté alakult át egy Párizsban megrendezett meteorológiai világkongresszus keretében. Nem véletlenül használtam feltételes módot az OMM feladatának körvonalazásában és egyben bírálatot is kívántam mondani róla, amikor ENSZ-mintájú szervezetnek minősítettem. Az ENSZ-mintájú OMM lényegében azt jelenti, hogy ez a meteorológiai világszervezet is ugyanazokat a kóros tüneteket viseli magán, mint a politikai megfelelője.

Két hónapon keresztül, nap mint nap tanúja voltam azoknak a háborút előkészítő törekvéseknek, amelyeket az imperialista zsoldban álló amerikai és angol küldöttek szívósan és leleplezetten kifejtettek. Csak egyetlenegy tényt említek meg. Mi, magyar küldöttek 24 órán belül megkaptuk útlevelünket, viszont a francia vízumok megszerzése 8 napot vett igénybe. Eleinte arra gondoltunk, hogy ez véletlen, de amikor Párizsba értünk, meglepődve állapítottuk meg, hogy a népi demokratikus küldöttek közül mi vagyunk az elsők, a román, lengyel, csehszlovák és bulgár elvtársaknak mégcsak nyomuk sincs. Később derült csak ki, miért kellett késnünk. Az előző nap ugyanis tagfelvételi kérelmeket tárgyaltak és — Spanyolország mellett — a Kuomintangklikket is felvette tagjai sorába az OMM keretében is működő imperialista szavazógép, s mindez — kétharmad többségről lévén szó — egyetlen egy szavazaton múlott.

Az eddigiekben azt a keretet vázoltam fel, amelybe a mi meteorológiai kutatómunkánk és szolgálatunk beilleszkedik. De nem lenne teljes a kép, ha nem említeném meg azt a szoros kapcsolatot, amely szinte a felszabadulás első pillanatától kezdve a magyar meteorológiai szolgálat és a szovjet meteorológiai szolgálat között szövődött. Még az ágyúk döreje sem halkult el, máris megjelentek a Meteorológiai Intézetben a szovjet meteorológusok és azonnal baráti jobbot, segítő kezet nyujtottak felénk.

Azóta 6 esztendő telt el. A hároméves és ötéves tervünk sikerei, munkásosztályunk és dolgozó parasztságunk áldozatos és hatalmas munkája a mi számunkra is lehetővé tette, hogy a felszabadulás óta eltelt 6 esztendő alatt akkorát fejlődjék meteorológiai tudományunk és szolgálatunk, amennyit 60 év alatt nem fejlődött. Mindazt, ami ma meteorológusaink rendelkezésére áll, az még a legmerészebb képzeletet is messze túlhaladta. Csinosodott, szépült és toronnyal bővült Meteorológiai Intézetünk a hároméves tervben. Ötéves tervünk második esztendejében megépült az aerológiai obszervatóriumunk, megépültek pavilonjaink és egy újabb központi épületünk közvetlenül befejezés előtt áll.

A magaslati és agrometeorológiai obszervatóriumaink 1952-ben készülnek el. Az eddig működő két osztályunk, az éghajlati és időjárási osztályunk mellett külön kutatóosztályt is szerveztünk.

És mindezeket nemcsak Pártunknak, kormányzatunknak, dolgozó népünknek és haladó értelmiségünknek köszönhetjük, hanem ezen a téren is példaképünknek az élenjáró szovjet meteorológiának. 6 esztendő alatt a segítő kézből elvtársi kézszorítás lett, felbecsülhetetlen értékű, állandó tanácsadás, eleven, élő emberi kapcsolat és Párizsban — az imperialista törekvések elleni harcban — elvtársi, kemény és széttéphetetlen harci szövetség.

Csak ízelítőt adok 1952-es munkatervünkről, néhány konkrétumot kutatási programmunkból, annyit, hogy *Rényi* elvtárs tervbeszámolója, amely természetszerűleg csak a legfőbb kérdéseket érintette, részleteiben is konkrétabbá váljék.

A Meteorológiai Intézet feladatai — népgazdaságunk fejlődésével szoros kapcsolatban — megsokszorozódtak. Mindenekelőtt tudományos káderképzés és a magyar meteorológiai szolgálat további fejlődése érdekében meg kellett teremtenünk a magyar nyelvű meteorológiai szakirodalmat. Ennek első lépése *Kromov:* A szinoptikus meteorológia alapjai c. könyvének lefordítása volt. 1952-ben egy elméleti-meteorológiai és egy repülés-meteorológiai tudományos kézikony megírására kerül sor. 1953-ban egy klimatológiai és egy műszertani, 1954-ben egy aerológiai, egy meteorológiai — energetikai és egy hidromechanikai kézikönyv megírását vettük tervbe.

Jobb munkánk érdekében javítani kívánunk azon a laza kapcsolaton, amely — elsősorban a mi hibánkból — az akadémiai Meteorológiai Bizottság és a III. Osztály között állott fenn. Ezért 1952. januárjától kezdve a meteorológiai kutatásokról szóló beszámolók a III. Osztály ülésein bemutatásra kerülnek és az elhangzott előadások a III. Osztály közleményeiben fognak megjelenni. A III. Osztály titkársága tette felénk ezen a téren is a kezdeményező lépéseket és ígérjük meteorológusaink nevében, hogy 1952. januárjától szorosabbra fűzzük kapcsolatainkat a III. Osztállyal. Abban sem kételkedem, hogy az Akadémia matematikus és fizikus tudósainak bírálata elő fogja segíteni a mi további jobb és eredményesebb meteorológiai kutatómunkánkat.

Meg kell emlékeznünk arról a nemzetközi kongresszusról is, amelyet 1952. szeptemberében — a hidrológusokkal karöltve — fogunk Budapesten megrendezni. A kongresszus anyaga a következő témákat öleli fel: 1. az öntözéssel kapcsolatos meteorológiai problémákat, különös tekintettel a párolgásra és a talajnedvességre; 2. a területi átlagok gyakoriságok és hóviszonyok klimatológiai értelmezését és alkalmazását a gyakorlati hidrológiában; 3. a rövid- és hosszúlejáratú időjárási előrejelzések hasznosításának kérdéseit népgazdaságunkban; 4. a magyar meteorológiai ötéves terv keretében folyó legfőbb kutatási irányok ismertetését.

A kutatóosztály munkatervének tengelyében a Pogoszjan-féle advektívdinamikus analízis elmélete és gyakorlata áll. Ugyanilyen fontosságú része a kutató programmnak a Multanovszkij-féle távprognosztikai elvek alkalmazása a hazai viszonyokra. De nemcsak a prognosztika területén tanulmányozzuk és alkalmazzuk hazai viszonyokra a szovjet szinoptika kitűnő módszereit, hanem a meteorológiai kutatások egyéb területein is.

Kilenc kutatócsoportot szerveztünk az említett célok elérése érdekében. A kutatócsoportok munkatervéből megemlítem a legfontosabb problémákat. Az aerológiai kutatócsoport például a magyar gyártmányú rádiószondákkal kapcsolatos tervezési és kísérleti munkákat fogja elvégezni. Az agrometeorológiai kutatócsoport növényhonosítási célból radiációs hőmérsékleti méréseket iktatott munkatervébe. A légköri elektromos kutatócsoport kísérleti berendezést készít a rádiószondák követésére, iránymérési célzattal. Az éghajlati kutatócsoport hőmérsékleti szélsőségek tanulmányozását és éghajlati térképek készítését tűzte ki célul. Az elméleti meteorológiai kutatócsoportnak az lesz a feladata, hogy a többi kutatócsoport munkájában felmerült problémák elméleti kidolgozásával nyujtson segítséget.

Még folytathatnók a felsorolást, de nem tesszük, mert a részletek nem tartoznak ide. Annyit azonban le kell szögeznünk, hogy az itt felsorolt kutatási problémák az elmélet és a gyakorlat kölcsönhatásából, népgazdaságunk ötéves terve ipari s mezőgazdasági eredményeinek és a meteorológia tudományának kölcsönhatásából sarjadtak. Tudatában vagyunk annak, hogy mint minden más tudomány, a meteorológia is csak akkor fejlődhet, csakis akkor válhat valóban szocialista lényegűvé, ha ezer meg ezer szál fűzi a szocialista termelés gyakorlatához. Ebben az irányban igyekeztünk haladni eddig is, s a jövőben még szilárdabb léptekkel járjuk majd ezt az utat, amelyet a szocialista haza, a szociálista társadalmi rend nyitott meg előttünk.

A KUTATÁS MEGSZERVEZÉSE A BRÜSSZELI ATOMKUTATÓ KÖZPONTBAN

MAX COSYNS

Előadta az 1951 december 11-én tartott nyilvános osztályülésen

Egy haladó laboratórium működése Nyugat-Európában súlyos problémákat okoz.

Ha ez a laboratórium beleegyezik abba, hogy feltétel nélkül együttműködjön az iparral, akkor osztályellenségeinek és a béke ellenségeinek érdekeit szolgálja.

Ha viszont alapvető kutatásaiba mélyedve szigetelődik el, elveszti a gyakorlattal való kapcsolatot és képtelenné válik fiatal kutató káderek képzésére, akikre pedig országának igen nagy szüksége lesz, amikor rálép a szocialista társadalom építésének útjára.

Ez az ellentmondás akkor oldódik meg, ha a laboratóriumot nem mint földrajzilag elszigetelt egységet kezeljük, amely egy ellenséges, a laboratórium elnyomására és leigázására törekvő társadalomban működik, hanem, mint a haladó tudomány egészének részét, amely a tudományra támaszkodik és ideiglenesen nehéz helyzetben az ellenséges területen működő előretolt őrs szerepét tölti be.

Ez rámutat a Szovjetunió és a népi demokráciák tudományával, valamint a tőkés országok elszigetelten dolgozó, haladó kutatóival való kapcsolatok hatalmas fontosságára. Csak ezeknek a kapcsolatoknak révén tudjuk megvalósítani azt az egységet, amely megváltoztatja az erőviszonyokat és lehetővé teszi a haladó laboratóriumok számára, hogy továbbra is hasznos munkát fejtsenek ki egy számukra ellenséges környezetben.

Ez rámutat egyúttal arra is, miért tartja a Béke Világtanács oly rendkívül fontosnak a varsói kongresszus által javasolt Kelet és Nyugat közötti kultúrális cserekapcsolatok elősegítését.

Nézzük meg egy konkrét példán keresztül, miben állanak a feladatok nehézségei és melyek a feladat megoldásának lehetőségei.

A brüsszeli szabad egyetem atomkutató központját 1947-ben alapították, meglehetősen csekély anyagi eszközökkel.

Az ország többi egyetemei követték ezt a példát és a kormány olyan koordinációs szervet hozott létre, amelynek eredeti célja a kutatások és a hitelek elosztása volt az egyes laboratóriumok között, de amely hamarosan a nemzetközi tőke szolgálatában lévő ellenőrző szerv szerepét töltötte be. A nemzetközi tőke legfőbb célja pedig az, hogy a békés célú kutatásokat megakadályozza, mert ezek összeegyeztethetetlenek a fegyverkezési programmal.

A brüsszeli központ tehát egymillió forintnál alacsonyabb összegű évi hitelt kapott, míg ugyanakkor a kongói uránium tárgyában megkötött amerikai-belga egyezmény értelmében több mint kétszáz millió forintot fordítanak az atomkutatásra Belgiumban.

A belga fizikusok kérték, hogy a kongói urániumtermelés két százalékát Belgium számára rezerválják. Belgium csak a termelés egy százalékának századrészét kapta meg, azzal az ürüggyel, hogy a belga tudósok nem értenek az atomkutatáshoz és nem tudják megfelelően felhasználni az urániumot.

A rendelkezésére álló eszközök hiányosságának ellenére a brüsszeli központnak sikerült három év alatt kidolgoznia a tiszta uránium fém és a tiszta grafit előállítását. A központ kész volt egy tízezer kilowattos kísérleti reaktor gyártásának elkezdésére, ha a kormány a megfelelő anyagi eszközöket rendelkezésére bocsájtja, (vagyis a kongói urániumtermelés 2 százalékát és az exportált uránium értékének 4 százalékát) de természetesen ezeket az eszközöket nem bocsátották a kutató központ rendelkezésére.

A kormány állandó akadékoskodása ellenére és az akadékoskodások által kialakult harci szellem révén a brüsszeli központ volt az, amely valamennyi laboratórium között a legjobban fejlődött. Az általa elért eredmények háromszor olyan jók voltak, mint a másik kutató központ által elértek, amelyek pedig négyszer annyi hitellel rendelkeztek. Ebben az évben megkétszereződött a kutató központ által közzétett munkák és az intézet kezei közül kikerült szakemberek száma.

Milyen szervezeti elvek révén értük el ezeket az eredményeket?

1. A kutatók kiválogatásában rendkívül nagy fontosságot tulajdonítottunk nemcsak a tudományos képzettségnek, hanem annak is, hogy az illető kutató tudatában van-e a kutató munka társadalmi szerepének.

2. A kutatók kiválogatása nemzetközi síkon történt. (Az intézetben négy világrész 11 országa van képviselve). Ezzel minden egyes kutató személyes kapcsolatokat hoz az intézetbe és növeli a laboratórium érintkezési felületét az egész világgal.

3. Szerves együttműködési és koordinációs kapcsolatokat létesítettünk azokkal a külföldi laboratóriumokkal, amelyek a mienkéhez hasonló szellemben dolgoznak. Ezek a kapcsolatok előbb személyes, az egyes kutatók közötti kapcsolatok, később félhivatalos, laboratóriumok közötti kapcsolatokká válnak, végül pedig egyes esetekben hivatalos kapcsolatokká fejlődnek, a kormány támogatásával, de az általunk megállapított keretek között.

Ezek a kapcsolatok lehetővé teszik, hogy minél gyorsabban és minél eredményesebben hajtsuk végre céljainkat. Egy, miénkhez hasonló laboratórium, ha elszigetelten működik, két évig dolgozik egy olyan kutatás befejezésén, amelynek végül is nem ő látja gyümölcsét, mert ha valamelyik amerikai laboratórium ugyanennek az elgondolásnak az alapján dolgozik és egy évvel később fog hozzá a végrehajtáshoz, a rendelkezésére álló eszközök révén hat hónap alatt elvégezheti a munkát. Kis laboratóriumoknak egy csoportja azonban, ha a szükséges technikai eszközöket összeadja, négy hónap alatt is elvégezheti a feladatot és nem kell attól tartania, hogy az ötlet végrehajtásában megelőzik.

4. A laboratóriumok szakosítása meghatározott technikai adatok alapján.

Míg egy szocialista társadalomban, megfelelő eszközök lehetővé teszik a szakemberek tömörítését egyetlen intézet különböző szakosztályain, az intézet feladata pedig egy meghatározott probléma megoldása, a kapitalista társadalomban ilyen csoportosítás nem lehetséges a pénzügyi és katonai csoportok közvetlen érdekeinek kiszolgáltatott laboratóriumokban. A mi esetünkben előnyös számunkra, ha erőfeszítéseinket egyetlen technikai eszközre összpontosítjuk és amikor a technikai eszköz felett már rendelkezünk, más laboratóriumoknak is rendelkezésére bocsájthatjuk, feltéve, hogy ezeknek a laboratóriumoknak a céljai nincsenek ellentétben a mi célkitűzéseinkkel.

A brüsszeli központ a grafit és az urániumfém terén végzett technikai kutatásain kívül *Occhialini* professzor révén specializálta magát az elemi részecskékre érzékeny maghasadási vastag emulziók tanulmányozásában, valamint az emulziók által rögzített jelenségek lemérési módszereiben.

5. Az eredmények elterjesztésére létesített független szerv létrehozása.

A tudományos folyóiratok megjelenésében szenvedett késedelmek, valamint a politikai földrajz következtében a meglévő folyóiratok terjesztési területének kicsinysége arra késztettek bennünket, hogy tájékoztatási bulletineket adjunk ki, melyeknek minden egyes száma egy vagy több cikket hoz egyazon tárgykörből és amelyeket a megjelenési időpont után is két héten belül terjeszteni lehet. A folyóiratok elterjesztését laboratóriumunk teljes mértékben ellenőrzi.

6. Szoros és gyakori személyes kapcsolatok a többi haladó laboratóriumokkal.

Ezeket a személyes kapcsolatokat, amelyek a közös feladatok elvégzéséhez nélkülözhetetlenül szükségesek, megerősíti az a tény, hogy a központ tagjainak nagyrésze tagja olyan kulturális szervezeteknek, mint a Belga—Szovjet, Belga—Magyar stb. baráti társaságok, valamint a béke híveinek mozgalma.

Így például ma a Magyar Tudományos Akadémia lehetővé tette számomra, hogy felújítsam kapcsolataimat magyar kollégáimmal és kiszélesítsük eredményes együttműködésünket, amely hozzájárul a népeink közötti baráti kapcsolatok megerősítéséhez.

AZ ATOMMAGOK STATISZTIKUS ELMÉLETÉRŐL

GOMBÁS PÁL r. tag

Előadta a Fizikai Állandó Bizottság 1951 december 12-én tartott ülésén

1. Bevezetés. — 2. A statisztikus magmodell. — 3. A Ritz-féle eljárás a nukleonok sűrűségeloszlásának és a magok energiájának meghatározására. — 4. Eredmények. — 5. Diszkusszió.

1. Bevezetés

Az atommagok statisztikus elmélete kb. két évtizedes multra tekint vissza. Elsőnek 1933-ban *Majorana*[1] alkalmazta a statisztikus elméletet atommagokra, aki csak néhány kvalitatív — de nagyon is lényeges — eredményt ért el. Az atommagok statisztikus elméletének további fejlődéséhez a legfontosabb alapokat egyrészt *Heisenberg*[2], másrészt *Weizsäcker*[3] vetették meg, mégpedig *Heisenberg* a kicserélődési energiának különféle potenciálokra való explicit kiszámításával, *Weizsäcker* pedig a kinetikus energiakorrekciónak az u. n. inhomogenitási korrekciónak a bevezetésével. A további számítások[4] azután ezeken az alapokon történtek, általában oly módon, hogy a nukleonok közti vonzási energiát többnyire a $-\alpha e^{-\beta r_{ij}}$ vagy a $-\alpha e^{-\beta r_{ij}^2}$ alakban tételezték fel, ahol r_{ij} két nukleon egymástól való távolságát jelenti. *Flügge*[5] munkájának kivételével mindezeket a számításokat igen leegyszerűsített feltevésekkel vitték keresztül általában olyan módon, hogy a nukleonok sűrűségeloszlására igen leegyszerűsített feltevéseket tettek, sőt a legtöbb esetben a sűrűséget — elhanyagolva az inhomogenitási korrekciót — teljesen konstansnak tételezték fel. Ilyen szempontból *Flügge*nek már említett munkája lényeges haladást jelentett, amennyiben ebben a nukleonok sűrűségeloszlására vonatkozóan semmiféle egyszerűsítő feltevés nem szerepel, hanem a sűrűségeloszlás és a magenergia a könnyű magokra egészen Si^{28}-ig a Ritz-féle eljárással lett meghatározva. Mindezeknek a számításoknak közös vonása, hogy ezekkel az eljárásokkal az atommagok energiájára, attól függően, hogy a szabadon választható empirikus paramétereket hogyan választották meg, vagy a könnyű magokra, vagy a nehéz magokra adódtak a tapasztalattal egyező eredmények. Így pl. *Flügge* munkájában, ahol az empirikus paraméterek a könnyű magok adataiból lettek meghatározva, az energia már a *Flügge* által tárgyalt legnehezebb mag esetében, Si^{28}-nál, az empirikustól 12 %-al tér el. Kivételt képeznek természetszerűen azok a munkák, melyeknek célja egy a tapasztalattal minél jobban egyező energiaformulának a meghatározása, amely 3—4, vagy esetleg még több empirikus paramétert tartalmaz; ilyen formulával természetszerűen az empirikus eredményeket a legkönnyebb magoktól a legnehezebbekig a tapasztalattal szinte tökéletes megegyezésben lehet leírni.[6] Mindez azonban inkább az empirikus adatoknak formulákkal való leírása, nem pedig a tapasztalati tényeknek általánosabb törvényszerűségekre való visszavezetése, aminek következményeképpen ezek a számítások ebből a szempontból tekintve csak kisebb érdeklődésre tarthatnak igényt, amivel természetesen nem akarjuk ezeknek az eljárásoknak rendkívül nagy heurisztikus értékét kétségbevonni.

Jelen dolgozat célja a magok energiájának a statisztikus elmélet alapján való számítása az általános energia-minimumelvből a Ritz-féle eljárással, mindennemű önkényes feltevés nélkül. A nukleonok között egy szkaláris Yukawa-féle kölcsönhatási potenciált veszünk fel és feltételezzük, hogy a neutron-proton, neutron-neutron és proton-proton közti kölcsönhatási energiának csak a nukleonoknak egymástól való távolságától függő része egyenlő és a következő alakú

$$J(r_{ij}) = -\gamma \frac{e^{-r_{ij}/r_0}}{r_{ij}}, \tag{1}$$

ahol r_{ij} két részecskének egymástól való távolsága, r_0 a π-mezonok Compton-féle hullámhossza és γ egy szabadon választható paraméter. Ha a π-mezonok tömegére, M_0-ra, a Powell és munkatársai által mért értéket[7] választjuk, amely 285 elektrontömeggel egyenlő, akkor nyerjük, hogy

$$r_0 = \frac{h}{2\pi M_0 c} = 1{,}355.\ 10^{-13}\,\mathrm{cm}, \tag{2}$$

ahol h a Planck-féle állandó és c a fénysebesség.

Az egész elméletben γ az egyetlen szabadon választható paraméter, amelynek alkalmas megválasztásával a magok energiájára a legkönnyebb magoktól a legnehezebbekig a tapasztalattal igen jól egyező eredmények adódnak. Eltekintve a legkönnyebb magoktól, a tapasztalattól való eltérés kisebb mint 7 %. Az igen könnyű magok esetében, amelyeknél a magenergia a tömegszámnak nem monoton függvénye, a statisztikus elmélet természetszerűen ezen erősen ingadozó empirikus értékeknek csak egy középértékét tudja adni. Ugyancsak igen jó közelítéssel adja az elmélet a stabilis izobárok elhelyezkedését a tömegszám-rendszám diagrammban.

Hogy az itt kifejtendő statisztikus elmélet, amely természeténél fogva elsősorban a nehéz magokra alkalmazható, könnyű magok esetében is ilyen jó eredményeket szolgáltat, annak a körülménynek tulajdonítható, hogy két korrekciót vezettünk be. Mégpedig először is korrigáltuk a nukleonok kicserélődési kölcsönhatását, mégpedig oly módon, hogy a részecskéknek önmagukkal való kicserélődési kölcsönhatásából származó energia eltünjön. Másodszor pedig a kinetikus energiát is módosítottuk, mégpedig oly módon, hogy a statisztikus kinetikus energia a He^4 mag esetében és könnyebb magok esetében átmegy az exakt hullámmechanikai kifejezésbe. Ezen korrekciókkal elértük, hogy a könnyű magok statisztikus energiakifejezése a hullámmechanikait jól approximálja és az empirikus eredményeknek jó középértékét adja.

2. *A statisztikus magmodell*

A következőkben röviden áttekintjük a statisztikus magmodell alapjait[8]; mégpedig további fejtegetéseinket egy nehéz magra vonatkoztatjuk, melyben a neutronok száma N, a protonok száma Z, melynek tömegszáma tehát $A = N + Z$. A statisztikus magmodell azon feltevésen alapszik, hogy a mag térfogatát dv nagyságú térfogatelemekre lehet felbontani, melyekben a potenciál praktice konstans és amelyek még sok nukleont tartalmaznak, melyeket szabad nukleongáznak lehet tekinteni a hőmérséklet abszolut nulla pontján. Attól a nehézségtől, hogy ez a feltétel a mag szélén a kisszámú nukleon miatt nem teljesíthető, eltekinthetünk, mivel a mag széle az energiaszámítás szempontjából aránylag kis jelentőséggel bír. Célunk a nukleonok sűrűségeloszlását, ill. a mag energiáját a stabil egyensúlyi helyzetben meghatározni. Ez az energia minimumelve alapján oly módon történik, hogy meghatározzuk a mag energiáját, mint a neutronsűrűség ϱ_n és protonsűrűség ϱ_p függvényét és meghatározzuk azokat a sűrűségeloszlásokat, amelyekkel az energia, $E(\varrho_n, \varrho_p)$ minimummal bír. ϱ_n-re és ϱ_p-re a következő mellékfeltételek állnak fenn:

$$\int \varrho_n \, dv = N \quad \text{és} \quad \int \varrho_p \, dv = Z. \tag{3}$$

Ezenkívül ϱ_n-nek és ϱ_p-nek még a következő feltételeket kell teljesíteni. Először is mindkét sűrűségeloszlásnak a magtól nagy távolságban gyorsan el kell tünnie. Másodszor pedig ϱ_n- és ϱ_p-hez, mint a magtól való távolság függvényéhez a magcentrumban vont érintők iránytangenseinek szimmetria okokból el kell tünniök. Első feladatunk az $E(\varrho_n, \varrho_p)$ függvény meghatározásában áll, amit tagonként végzünk el.

Először is a nukleonok kicserélődési kölcsönhatásából származó kicserélődési energiával foglalkozunk, amely a magot összetartja. Ez három részből áll, mégpedig a neutronoknak protonokkal, a neutronoknak neutronokkal és a protonoknak protonokkal való kicserélődési kölcsönhatásából származó energiatagokból, melyeket rendre E_A^{np}-, E_A^{nn}- és E_A^{pp}-vel jelölünk. A nukleonok közti kölcsönhatási energiának a koordinátáktól függő részét mind a három esetben az (1) alakban vesszük fel. Az E_A^{np} energia számításánál a neutronok és protonok közti kicserélődési kölcsönhatásról feltételeztük, hogy az egy Majorana típusú kölcsönhatás. Az egyenlő részek közti kölcsönhatás számításánál fel kell tételezni, hogy a részecskék kölcsönhatása a spintől függ, mégpedig két részecske közti kölcsönhatás esetében ezt a függést az (s_1, s_2) alakban tételeztük fel, ahol s_1 és s_2 a két részecskére vonatkozó Pauli-féle spin-operátort jelenti. Ennek a spintől való függésnek a feltételezésével azt érjük el, hogy a $J(r_{ij})$ kölcsönhatásból származó közönséges (nem kicserélődési) energia eltünik, és csak a kicserélődési energia marad meg. A közönséges energiának eltűnése feltétlenül szükséges, mert ez az energia az összenergiának a tömegszámtól való teljesen helytelen függéséhez vezetne.[9]

A kicserélődési energiának a számítása eléggé körülményes, de elemi úton elvégezhető.[10] A következő jelöléseket vezetve be

$$\omega_n = (3\pi^2\varrho_n)^{1/3} r_0, \qquad \omega_p = (3\pi^2\varrho_p)^{1/3} r_0, \tag{4}$$

$$\begin{aligned} f(\omega_n, \omega_p) = \frac{1}{24\pi^3} \Big\{ & 3(\omega_n^3\omega_p + \omega_n\omega_p^3) - \omega_n\omega_p + \\ & + \frac{1}{4}\left[1 + 6(\omega_n^2 + \omega_p^2) - 3(\omega_n^2 - \omega_p^2)^2\right] \ln \frac{1 + (\omega_n + \omega_p)^2}{1 + (\omega_n - \omega_p)^2} - \\ & - 4(\omega_n^3 + \omega_p^3) \operatorname{arctg}(\omega_n + \omega_p) + 4(\omega_n^3 - \omega_p^3) \operatorname{arctg}(\omega_n - \omega_p) \Big\} \end{aligned} \tag{5}$$

nyerjük, hogy

$$E_A^{np} = -\frac{4\gamma}{r_0^4}\int f(\omega_n, \omega_p)\, dv, \qquad E_A^{nn} = -\frac{\gamma}{r_0^4}\int f(\omega_n, \omega_n)\, dv,$$
$$E_A^{pp} = -\frac{\gamma}{r_0^4}\int f(\omega_p, \omega_p)\, dv. \tag{6}$$

A statisztikus tárgyalás következményeképpen E_A^{nn} és E_A^{pp} a neutronoknak, ill. protonoknak önönmagukkal való kicserélődési energiáját is tartalmazza, melynek természetszerűen semmiféle fizikai realitás nem tulajdonítható és amely könnyű magok esetében számottevő hibához vezet. Ezt a hibát durván oly módon korrigálhatjuk, hogy a részecskéknek önmagukkal való kicserélődéséből származó energiáját egy részecske átlagos kicserélődési energiájával E_A^{nn}/N-el ill. E_A^{pp}/Z-vel egyenlőnek tételezzük fel és az energiakifejezésből levonjuk. A korrekció tehát abban áll, hogy E_A^{nn}-t és E_A^{pp}-t az $1-\frac{1}{N}$ ill. $1-\frac{1}{Z}$ faktorokkal szorozzuk meg. Amint látható, az így korrigált energiák $N=1$, ill. $Z=1$ esetében eltűnnek, ahogy annak lennie is kell; a korrekció tehát ebben az esetben exakt. Mivel a korrekció csak könnyű magokra lényeges, tovább egyszerűsíthető. Ha ugyanis könnyű magok esetében a stabilis izotópokra szorítkozunk, akkor $N=Z=A/2$. Ebben az esetben tehát a fentebb megadott két korrekciófaktor helyett az $1-\frac{2}{A}$ közös korrekciófaktort vezethetjük be, melyet nehezebb magok esetében is megtarthatunk, minthogy ezeknél az egész korrekció jelentőségtelen.

A kicserélődési energiával egyensúlyt tartó leglényegesebb pozitív energiatag a neutronok és protonok Fermi-féle nullponti energiája, melyre a következő kifejezés adódik

$$E_K = \varkappa_K \int (\varrho_n^{5/3} + \varrho_p^{5/3})\, dv, \tag{7}$$

ahol $\varkappa_K$ a következő univerzális állandó

$$\varkappa_K = \frac{3}{40}\left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3}\frac{h^2}{M}. \tag{8}$$

M egy nukleon tömege, amelyet egy neutron és proton tömegének algebrai középértékével vettünk fel egyenlőnek. A következők szempontjából megemlítjük, hogy az E_K energia kizárólag a Pauli-elv következménye; a Pauli-elv nélkül, tehát a Bose statisztika esetében E_K egyáltalán nem lépne fel.

E kinetikus energia mellett *Weizsäcker*[11] szerint még egy kinetikus energiatagot, az u. n. inhomogenitási korrekciót kell figyelembe vennünk, amely onnan származik, hogy a nukleonokat nem lehet teljesen szabadnak tekinteni, vagyis hogy a nukleonok sajátfüggvénye nem pontosan síkhullám. Ezt az energiát *Weizsäcker* szerint a következő alakban lehet előállítani.

$$E_J = \varkappa_J \int \left[\frac{1}{\varrho_n}\left(\frac{d\varrho_n}{dr}\right)^2 + \frac{1}{\varrho_p}\left(\frac{d\varrho_p}{dr}\right)^2\right] dv, \tag{9}$$

ahol $\varkappa_J$ a következő univerzális állandó

$$\varkappa_J = \frac{h^2}{32\pi^2 M}. \tag{10}$$

Amint könnyen meggyőződhetünk E_J a részecskéknek Schrödinger-féle kinetikus energiája abban az esetben, ha az összes részecskék a legmélyebb energiaállapotban foglalnak helyet, s ennek megfelelően a részecskék sajátfüggvényei azonosak. Tehát ha csak E_J-t vennénk figyelembe, a Pauli-elvet teljesen elhanyagolnánk. A Pauli-elvet a statisztikus tárgyalási módban az E_K energiával vesszük figyelembe, amely éppen onnan származik, hogy egy kvantumállapotba, vagyis fázistércellába legfeljebb két neutront és két protont lehet elhelyezni. Innen azonnal látható az is, hogy abban az esetben, ha az E_J és az E_K energiát egyszerre vesszük figyelembe, hibát követünk el, mert a legmélyebb energiaállapotban helyetfoglaló két neutron és két proton kinetikus energiáját kétszer vesszük számításba, mert ez egyrészt a hullámmechanikai kifejezésben E_J-ben, másrészt a statisztikus tárgyalási mód következményeképpen E_K-ban is benne foglaltatik.[12] A legjobban nyilvánul meg a hiba két neutron és két proton esetében, tehát a He^4 mag esetében. Minthogy ebben az esetben a két neutron és két proton a legmélyebb energiaállapotban foglal helyet, nem kell a részecskéket magasabb energiaállapotba emelni, ami azt jelenti, hogy E_K-nak el kellene tünnie. Ugyanez volna természetesen a helyzet egy olyan mag esetében, melyben a részecskék száma 4-nél kisebb. Nagyobb részecskeszám esetében ez a hiba nem jelentős. Ezt a hibát egészen durván oly módon lehet korrigálni, hogy E_K-ból levonjuk két neutronnak és két protonnak az átlagos kinetikus energiáját, minek következtében a statisztikusan számított kinetikus energia $N=2$, $Z=2$ esetére eltűnik, amint annak lennie is kell; a korrekció tehát ebben az esetben exakt. Ekkor természetesen még azt a kikötést kellene tennünk, hogy a statisztikusan számított kinetikus energia négynél kisebb összrészecskeszám esetére is eltűnjön, ami azonban a mi esetünkben jelentőségtelen, minthogy számításainkat olyan magokra, melyekben az összes részecskék száma négynél kisebb, semmiesetre sem terjeszthetjük ki. Ahelyett, hogy E_K-nak a neutronokra és protonokra vonatkozó részére külön korrekciókat vezetnénk be, ugyanolyan okoknál fogva, melyeket a részecskéknek önmagukkal való kicserélődési energiájának korrigálásánál már kifejtettünk, E_K mindkét részére egy közös korrekciót vezetünk be, amely abban áll, hogy E_K-ból négy nukleon átlagos kinetikus energiáját levonjuk, vagyis E_K-t az $1-\frac{4}{A}$ korrekciófaktorral megszorozzuk.

Végül még a protonoknak elektrosztatikus Coulomb-féle kölcsönhatásából számított energiáját, E_C-t és a Coulomb-kölcsönhatás következtében fellépő kicserélődési energiát, E_R-t kell meghatároznunk, melyekre a következő kifejezések adódnak

$$E_C=\frac{e^2}{2}\int\int\frac{\varrho_p(\mathfrak{r})\varrho_p(\mathfrak{r}')}{|\mathfrak{r}-\mathfrak{r}'|}dv\,dv' \tag{11}$$

és

$$E_R=-\varkappa_R\int\varrho_p^{4/3}dv, \tag{12}$$

ahol $\varkappa_R$ a következő univerzális állandó

$$\varkappa_R=\frac{3}{4}\left(\frac{3}{\pi}\right)^{1/3}e^2 \tag{13}$$

és e a pozitív elemi töltés. E_C-ben a protonoknak önmagukkal való elektrosztatikus kölcsönhatásából származó energiája is bennfoglaltatik, ezt kompenzálja a protonoknak önmagukkal való kicserélődési energiája, amelyet E_R tartalmaz. Ez a kompenzáció a hullámmechanikában teljes, a statisztikus elméletben azonban csak részleges. De az ezekből az önkölcsönhatásokból származó energiák csak kis protonszámok esetében számottevőek E_C-hez, ill. E_R-hez képest. Kis protonszámok esetében azonban E_C+E_R az összenergiához viszonyítva jelentőségtelen. Ezért az ezen önkölcsönhatásokból származó energiák pontosabb korrekciójától eltekinthetünk.

A mag összenergiájára tehát a következő kifejezést nyerjük

$$E=E_A^{np}+\left(1-\frac{2}{A}\right)(E_A^{nn}+E_A^{pp})+\left(1-\frac{4}{A}\right)E_K+E_J+E_C+E_R. \tag{14}$$

A (6), (7), (9), (11) és (12) kifejezések behelyettesítése után innen E-t mint ϱ_n és ϱ_p függvényét nyerjük.

3. A Ritz-féle eljárás a nukleonok sűrűségeloszlásának és a magok energiájának meghatározására

Miután E-t mint a ϱ_n és ϱ_p sűrűségeloszlások függvényét meghatároztuk, feladatunk a fenntebb említett minimumprobléma megoldásában áll, ami azt jelenti, hogy meg kell határoznunk azokat a sűrűségeloszlásokat, amelyek az energiát minimummá teszik. Ezt a feladatot a Ritz-féle eljárás segítségével oldjuk meg, ami azt jelenti, hogy a sűrűségeloszlások, ϱ_n és ϱ_p számára a határfeltételeket kielégítő függvényeket veszünk fel, amelyek több, a minimumelvből meghatározandó variációs paramétert tartalmaznak. ϱ_n és ϱ_p-t a következő általános alakban célszerű felvenni

$$\varrho_n = \varrho_{n0} e^{-a_n^2 \xi^2} \left(1 + \sum_{i=1}^{k} c_{ni} \xi^{2i}\right)^3, \qquad \varrho_p = \varrho_{p0} e^{-a_p^2 \xi^2} \left(1 + \sum_{i=1}^{k} c_{pi} \xi^{2i}\right)^3, \tag{15}$$

ahol a mag középpontjától való távolság r helyébe a $\xi = r/r_0$ dimenzió nélküli változót vezettük be, a_n, a_p továbbá a c_{ni} és c_{pi} koefficiensek variációs paraméterek, melyek az energia minimumelvéből lesznek meghatározva. ϱ_{n0} és ϱ_{p0} normálási együtthatók, melyek értékét a (3) normálási feltételből nyerjük. Amint (15)-ből látható, ϱ_{n0} és ϱ_{p0} a neutron-, ill. protonsűrűségek a mag középpontjában. Amint továbbá látható, a (15) kifejezések a ϱ_n és ϱ_p-re vonatkozó fentebb említett két feltételt is kielégítik, melyek szerint először is ϱ_n-nek és ϱ_p-nek magtól a nagy távolságban el kell tűnnie, másodszor pedig ϱ_n és ϱ_p kezdeti érintői iránytangenseinek szintén el kell tűnnie. Ez az utóbbi feltétel azáltal lesz teljesítve, hogy ϱ_n-ben és ϱ_p-ben ξ-nek, tehát r-nek csak páros hatványai szerepelnek. A ϱ_n és ϱ_p kifejezésében a polinom a harmadik hatványon szerepel, ami a (7) és (12) integrálok kiszámítása szempontjából szükséges, mivel a (7) és (12) kifejezésben az integranduszban $\varrho_n^{5/3}$ és $\varrho_p^{5/3}$, ill. $\varrho_p^{4/3}$ áll.

Az itt véghezvitt első közelítésben az összes c_{ni} és c_{pi} koefficienseket nullával tettük egyenlővé, továbbá feltételeztük, hogy $a_n = a_p = a$, ami azt jelenti, hogy a neutron- és protonsűrűséget egymással arányosnak tételeztük fel és csak annyiban tekintettük őket különbözőknek, amennyiben a neutronok és protonok száma egymástól különböző. Az első közelítésben tehát ϱ_n és ϱ_p a következő alakú

$$\varrho_n = \varrho_{n0} e^{-a^2 \xi^2}, \qquad \varrho_p = \varrho_{p0} e^{-a^2 \xi^2}, \tag{16}$$

ahol

$$\varrho_{n0} = \frac{N a^3}{\pi^{3/2} r_0^3}, \qquad \varrho_{p0} = \frac{Z a^3}{\pi^{3/2} r_0^3}. \tag{17}$$

A (16) függvényeknek az energiakifejezésbe való behelyettesítése után a mag energiáját E-t mint az a variációs paraméter függvényét nyerjük. Feladatunk annak az a-értéknek meghatározása, amely E-t minimummá teszi. Ez az a-érték felel meg a stabilis egyensúlyi állapotnak és az ezzel az a-val számított E érték, melyet E_0-al jelölünk, a mag energiája az egyensúlyi állapotban.

A számítások keresztülviteléhez még a szabadon választható γ paraméter értékét kell meghatároznunk. Ezt úgy választottuk meg, hogy a legstabilabb izobároknak a következőkben meghatározandó energiái a legkönnyebb magoktól a legnehezebbekig a lehető legkisebb eltérést mutassák az empirikus értékektől. γ számára a következő értéket választottuk,

$$\gamma = 66{,}24\, e^2,$$

mellyel ez a követelmény igen kielégítő módon teljesül.

4. *Eredmények*

Az előző pontban meghatározott energiaminimum még A-nak és Z-nek a függvénye. Egy megadott $A = N + Z$ értékre meghatározott E_0 energiaminimum tehát még Z-nek a függvénye; e függvény adja az izobárok energiáját. Egy izobár-sornak energiaértékei egy bizonyos Z értéknél minimumot mutatnak, melynek ezen izobár-sor legstabilisabb eleme felel meg. Az egyes A tömegszámokhoz tartozó legstabilisabb izobárokat a következő egyenletből lehet meghatározni

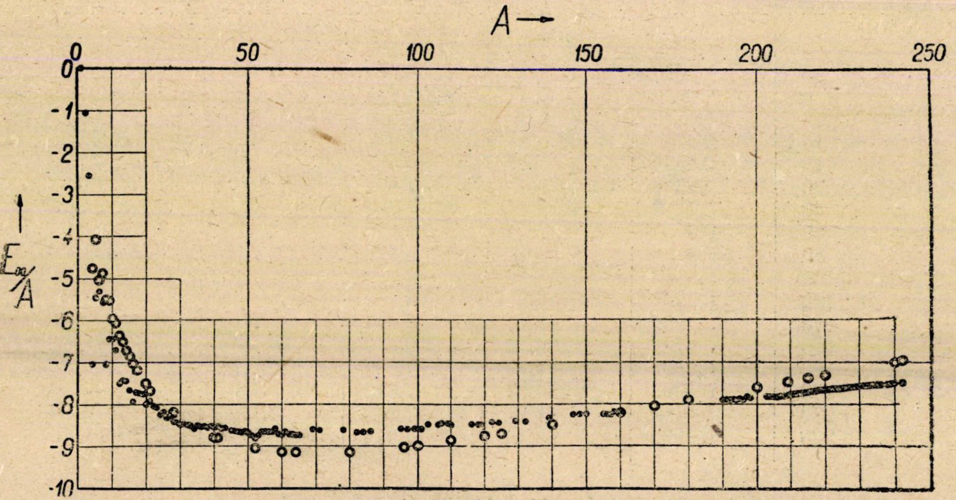
$$\left(\frac{\partial E}{\partial Z}\right)_A = 0, \tag{18}$$

ahol az A index a zárójel mellett azt jelenti, hogy a differenciálásnál A-t konstansnak kell tekinteni. Innen Z és A között egy összefüggést nyerünk, melyből minden A értékhez meg lehet határozni a legstabilisabb izobár rendszámát; az ily módon meghatározott rendszámok, melyeket Z_{eff}-el jelölünk, természetszerűen nem egész számok. A legstabilisabb izobárok energiáját azután úgy határoztuk meg, hogy A konstansul tartása mellett az $E_0(A, Z)$ energiát azon egészszámú Z értéknél vettük, mely Z_{eff}-hez legközelebb áll. Ezen Z_{eff}-értékek lekerekítése következményeképpen az egészen könnyű magok energiagörbéjében — ahol az izobár-sorok egyes tagjai közti energiadifferenciák relatíve nagyok — ingadozások mutatkoznak, mégpedig a legstabilisabb izobároknak egy részecskére eső átlagenergiája, E_{00}/A, az egymásután következő A értékeknél nem esik egy síma görbére, hanem páros tömegszám esetében kissé mélyebben, páratlan tömegszám esetében kissé magasabban fekszik, mint azt a görbe monoton menete kivánná.

Az a, Z_{eff} és E_{00}/A értékek több magra az 1. tabellában vannak összeállítva. Összehasonlításul a megfelelő legstabilisabb izobárokra Z és E_{00}/A empirikus értékeit[13] is megadtuk. A teljesebb áttekintés céljából az elméleti és empirikus adatok A függvénye gyanánt az 1. ábrán grafikusan is fel vannak tüntetve.[14] Amint látható, az elméleti értékeknek a kisérleti értékekkel való egyezése úgy a kötési energiák, mint a rendszámok esetében nagyon jó.

Az izobárok energiája Z függvénye gyanánt a könnyű izobárok esetében $A = 16$-ra és nehéz izobárok esetében $A = 200$-ra a 2, ill. a 3. ábrán látható.

A két függvény összehasonlítása mutatja, hogy az energiaminimum nehéz izobárok esetében egészen lényegesen laposabb, mint könnyűeknél. Hogy $A=200$ esetén az energiaminimum $Z=85$ és 86 között, tehát egy kb. $1^0/_0$-al nagyobb Z értéknél fekszik, mint az 1 tabellában megadott Z érték, az arra vezethető vissza, hogy az utóbbi Z értéket (18)-ból egy $(N-Z)/A$ szerinti sorfejtéssel és a harmad- és negyedrendben kicsiny tagok elhanyagolásával nyertük.



1. ábra. Az egy részecskére eső átlagenergia E_{00}/A, mint a tömegszám A függvénye azon magokra, amelyek energiája megadott A esetén a legmélyebb;
O számított értékek,
● empirikus értékek stabilis magokra,
◐ empirikus értékek instabilis magok esetén.

Ezekután még a nukleonok sűrűségeloszlásával és ezzel kapcsolatban a magrádiusz kérdésével szeretnénk foglalkozni. A teljes nukleonsűrűséget, ϱ-t, a következő kifejezéssel lehet előállítani

$$\varrho=\varrho_n+\varrho_p=\varrho_0 e^{-a^2\xi^2},$$

ahol

$$\varrho=\varrho_{n0}+\varrho_{p0}=\frac{Aa^3}{\pi^{3/2} r_0^3}$$

a teljes nukleonsűrűséget jelenti a mag középpontjában. A 2. tabellában a különböző tömegszámokra megadott ϱ_0 értékekből látható, hogy ϱ_0 $A \simeq 60$-tól a legnehezebb magokig csak kevéssé változik.

A nukleonsűrűség ϱ mint r függvénye egy haranggörbe, és itt felmerül a kérdés, hogy egy ilyen sűrűségeloszlás esetében hogyan lehet a kísérleti magrádiuszokkal összehasonlítható megrádiuszokat definiálni. Logikusan úgy kellene eljárni, hogy a magrádiusz R gyanánt azon r értéket definiáljuk, amelynél ϱ elegendő nagy értéket kezd felvenni. Ekkor természetszerűen

1. TÁBLÁZAT

A számított rendszámok és magenergiák összehasonlítása a kísérleti értékekkel. Ott, ahol a legstabilisabb izobár a kísérleti adatok hiánya miatt nem állapitható meg, az összes stabilis izobárok rendszámait adtuk meg; az instabilis magok rendszámait zárójelbe tettük. Az energiák MeV egységekben vannak megadva.

A	Elméleti értékek			Kísérleti értékek	
	a	Z_{eff}	$-E_{00}/A$	Z	$-E_{00}/A$
4	1,2610	1,96	4,769	2	7,05
5	1,1090	2,45	4,098	2	5,48
6	1,1036	2,94	5,039	3	5,32
8	1,0250	3,90	5,516	4	7,039
10	0,9740	4,87	5,972	5	6,443
15	0,8894	7,26	6,871	7	7,671
20	0,8399	9,62	7,498	10	7,999
40	0,7179	18,89	8,788	18	8,556
60	0,6463	27,90	9,126	28	8,752
80	0,5958	36,67	9,130	34; 36	—
100	0,5547	45,21	8,984	42; 44	—
120	0,5237	53,53	8,759	50; 52	—
140	0,4959	61,64	8,494	58	—
160	0,4723	69,52	8,209	64; 66	8,202
180	0,4501	77,19	7,907	72; 74	—
200	0,4323	84,63	7,610	80	—
220	0,4150	91,83	7,308	86	7,669
240	0,3995	98,78	7,014	96	7,496

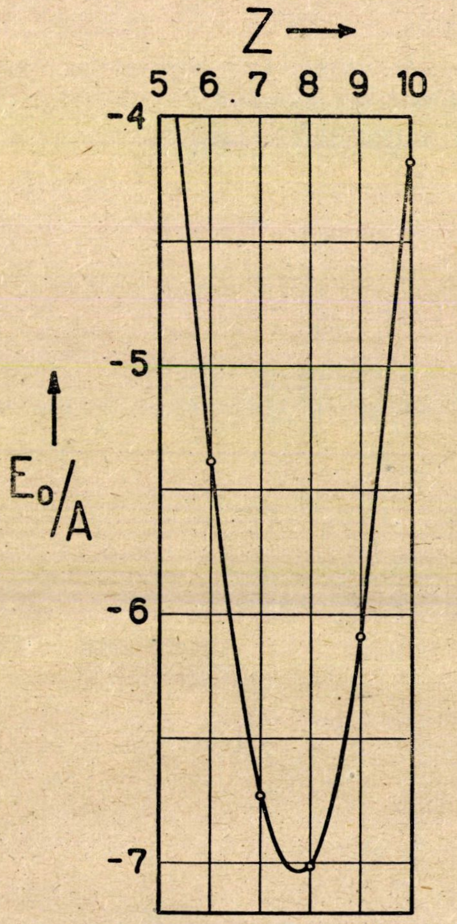
2. TÁBLÁZAT

Magrádiuszok és nukleonsűrűségek a mag-középpontban. Az R magrádiuszt r_0-egységekben fejeztük ki, a ϱ_0 magsűrűségek a mag középpontjában pedig $1/r_0^3$ egységekben vannak megadva. Az itt megadott elméleti Z értékek a Z_{eff}-hez legközelebb álló egész számok.

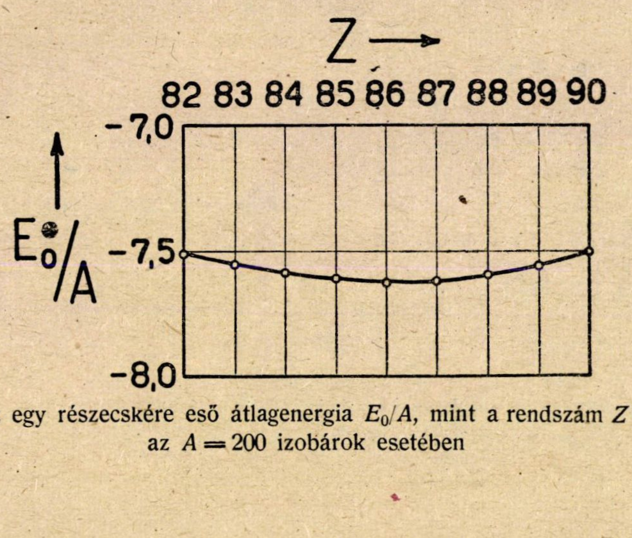
A	Elméleti értékek			Kísérleti értékek
	Z	ϱ_0	R	R
4	2	1,44	1,34	1,67
10	5	1,66	2,03	2,26
20	10	2,13	2,56	2,85
40	19	2,66	3,26	3,59
60	28	2,91	3,74	4,11
80	37	3,04	4,17	4,52
120	54	3,10	4,88	5,18
160	70	3,03	5,54	5,70
200	85	2,90	6,13	6,14
240	99	2,75	6,76	6,53

minden azon múlik, hogy az „elegendő nagy értéket" hogyan definiáljuk. Egy megfelelő magrádiuszhoz jutunk, ha ezt azon golyó sugara gyanánt definiáljuk, melyen kívül egy az összes magokra nézve konstans, 1 nukleon nagyságrendű nukleon-mennyiség foglal helyet. Ez a definició formulában kifejezve tehát a következő

$$\int_R^\infty \varrho 4\pi r^2\, dr = n, \tag{19}$$



2. ábra. Az egy részecskére eső átlagenergia E_0/A, mint a rendszám Z függvénye az $A = 16$ izobárok esetében



3. ábra. Az egy részecskére eső átlagenergia E_0/A, mint a rendszám Z függvénye az $A = 200$ izobárok esetében

ahol n egy 1 nagyságrendű szám. Mivel ϱ nagyobb r értékeknél igen meredeken esik le zérusra, az R radiusz n-től nem függ nagyon érzékenyen. Így pl. $A=120$, $Z=54$ esetében $n=1$-el $R=4{,}63\,r_0$, és $n={}^1/_2$-el $R=4{,}88\,r_0$. Mi n-re az ${}^1/_2$ értéket választottuk és ezzel a 2. tabellában összeállított értékeket nyertük.

Az így nyert magrádiuszokat az empirikus magrádiuszokkal hasonlítjuk össze, melyeket a következő formulával

$$R=1{,}42A^{1/3}\,10^{-13}\,\mathrm{cm}=1{,}05\,A^{1/3}r_0 \qquad (20)$$

lehet előállítani[15] és melyeket több magra a 2. tabellában adunk meg.

Mivel az empirikus magrádiuszok α-részekkel, protonokkal és neutronokkal való szórási kisérletekből, továbbá az α-bomlásból lettek meghatározva és a magrádiuszoknak fentebb adott elméleti definiciója ezekkel a kisérleti eljárásokkal nem függ szervesen össze, az elméleti és empirikus magrádiuszok összehasonlításánál óvatosan kell eljárnunk. A számított értékeknek az empirikus értékekkel való jó egyezése természetesen véletlen és arra vezethető vissza, hogy n számára az ${}^1/_2$ értéket választottuk. A lényeges az elméleti eredményekben az, hogy az elméleti rádiuszok A-tól praktice ugyanúgy függenek, mint az empirikusok, ami semmiesetre sem tulajdonítható véletlennek.

Hogy a kísérleti magrádiuszokkal közvetlenül összehasonlítható elméleti magrádiuszokhoz jussunk, az elméleti magrádiuszokat a kísérleti módszerekből kiindulva kellene definiálni. Így pl. elméletileg meg lehetne állapítani α-részeknek, protonoknak vagy neutronoknak a statisztikus magmodellen való szóródását és az így nyert eredményekből lehetne egy, a kísérleti magrádiuszokkal összehasonlítható magrádiuszt definiálni.

5. *Diszkusszió*

A variáció-számítás első lépésével nyert eredmények igen kielégítőek, különösen ha figyelembe vesszük, hogy az egész elméletben csak egy empirikus paraméter lett felhasználva és az egész eljárás önkényes feltevésektől mentes. Elsősorban az a kérdés vetődik fel, hogy a variáció-számítás következő lépése hogyan alakul és milyen eredmény várható ettől. A következő lépés a neutron- és protonsűrűségnek egymástól független variációjában állna, ami a Coulomb-féle taszítási energiának a csökkenését, tehát az összenergiának a süllyedését eredményezi. Az összenergiának ez a süllyedése főképpen nehéz magok esetében — ahol a Coulomb energia nagy — lesz jelentős. A második közelítéstől tehát az összenergiának a süllyedése várható, mégpedig annál nagyobb mértékben, minél nagyobb az A. Tehát az energiagörbének az iránytangense $A\simeq 60$-tól a legnehezebb magokig terjedő szakaszon kissé kisebbedni fog. Ha az így nyert új energiagörbét nagyobb energiák irányában eltoljuk, ami a γ paraméter értékének kisebbítésével érhető el, akkor a számított energiagörbe az empirikus értékekkel még jobb egyezést fog mutatni.

A sűrűségeloszlásnak a magasabb közelítésekkel való további javítása azáltal érhető el, hogy a (17)-es leegyszerűsített kifejezések helyett az általánosabb (15)-ös kifejezéseket használjuk.

Az elméletnek egy további javítása esetleg abban állhatna, hogy a nukleonokat a mellékkvantumszám szerint csoportosítjuk és ily módon a kinetikus energiát korrigáljuk. A vonzási energiákat is lehetne még korrigálni, pl. azáltal, hogy figyelembe vesszük a nukleonoknak a korrelációból származó kölcsönhatását.[16]

Végül még arra is lehetne gondolni, hogy a nukleonok egy részét mint kész α-részeket építjük be a magba és az így beépített nukleonok százalékos arányát szintén a minimumelvből határozzuk meg.

E problémák megoldásaira vonatkozó részletes beszámolók az Acta Physica Hungarica-ban fognak megjelenni.

A numerikus számításokat *Kunvári Olga, Mágori Edit, Molnár Béla* és *Szabó Éva* tanársegédek végezték. Az ábrákat *Knapecz Géza* és *Zelenka László* tanársegédek készítették. Szíves közreműködésükért mindnyájuknak e helyen is hálás köszönetemet fejezem ki.

Műszaki Egyetem
Fizikai Intézete, Budapest.

IRODALOM

1 *E. Majorana,* ZS. f. Pyhs. *82,* (1933), 237.

2 *W. Heisenberg,* Rapport du VIIième Congrès Solvay, Paris, 1934.

3 *C. F. v. Weizsäcker,* ZS. f. Phys. *96,* (1935), 431.

4 *C. F. v. Weizsäcker,* l. c.; *G. C. Wick,* Nuovo Cimento Nr. 4, 1934; Rend. Accad. Lincei *19,* (1934), 319; *21,* (1935), 170; *K. Nakabayasi,* ZS. f. Phys. *97,* (1935), 211; *S. Flügge,* ZS. f. Phys. *96,* (1935), 459; *E. S. Wang,* ZS. f. Phys. *100,* (1936), 736. További irodalmi adatokra vonatkozóan utalunk a következőkre: *H. A. Bethe* és *R. F. Bacher,* Rev. Mod. Phys. *8,* (1936), 82; *C. F. v. Weizsäcker,* Die Atomkerne, Physik und Chemie und ihre Anwendungen in Einzeldarstellungen Bd. II, Akad. Verlagsges., Leipzig, 1937; *L. Rosenfeld,* Nuclear Forces, Monographs on Theoretical and Applied Physics Vol. I, North-Holland Publishing Comp., Amsterdam, 1948.

5 *S. Flügge,* l. c.

6 V. ö. pl. *C. F. v. Weizsäcker,* l. c.

7 *W. Heisenberg,* Theorie des Atomkerns, 161 o., Max-Planck Institut für Phys., Göttingen, 1951.

8 Az elmélet alapjait illetően utalunk pl. *P. Gombás,* Die statistische Theorie des Atoms und ihre Anwendungen, 1—30 o., Springer, Wien, 1949.

9 V. ö. pl. *H. A. Bethe* és *R. F. Bacher,* Rev. Mod. Phys. *8,* (1936), 82.

10 A kicserélődési energia kiszámítása lényegesen körülményesebb, de teljesen hasonló a kicserélődési energiának Coulomb-szerű potenciál esetén való számításához, v. ö. pl. *P. Gombás,* Die statistische Theorie des Atoms und ihre Anwendungen 23 és következő oldalak, Springer, Wien, 1949. Tudomásom szerint elsőnek a kicserélődési energiát az (1) típusú kölcsönhatási energiával Nakabayasi számította ki a fentebb idézett dolgozatában.

11 *C. F. v. Weizsäcker,* l. c.

[12] Mindezekre a kérdésekre vonatkozólag v. ö. *P. Gombás*, Die statistische Theorie des Atoms und ihre Anwendungen, 110—116 o., különösen a 116 o. közepe, Springer, Wien, 1949.

[13] *L. Rosenfeld* egy összeállításából, Nuclear Forces, Monographs on Theoretical and Applied Physics Vol. I, 501—528 o., North-Holland Publishing Comp., Amsterdam, 1948.

[14] Az ábrán további elméleti adatokat is megadtunk, melyek a tabellában nincsenek feltüntetve.

[15] Erre vonatkozólag v. ö. *L. Rosenfeld,* Nuclear Forces, Monographs on Theoretical and Applied Physics, Vol. I, 22, 23 o., North-Holland Publishing Comp., Amsterdam, 1948; továbbá *G. Gamow* és *C. L. Critchfield,* Theory of Atomic Nucleus and Nuclear Energy-Sources, International Seires of Monographs on Phys., 8 és következő oldalak, Clarendon Press, Oxford, 1949.

[16] Erre az energiára vonatkozólag Coulomb-kölcsönhatás esetében v. ö. *E. Wigner,* Phys. Rev. (2), *46,* (1934), 1002, valamint *P. Gombás,* Die statistische Theorie des Atoms und ihre Anwendungen, 27 és következő oldalak, valamint 96 és következő oldalak, Springer, Wien, 1949.

VIZSGÁLATOK A STRONCIUMOXID KÉK SÁVJAIN

KOVÁCS ISTVÁN lev. tag

Előadta a Fizikai Állandó Bizottság 1951 december 12-én tartott ülésén

1. §. Bevezetés

A KFKI Spektroszkópiai Osztályának Molekula Csoportja a laboratórium rendbehozatala után az intézet Runge-Paschen felállítású, nagy diszperziójú konkáv rács-spektrográfjának beállítását tűzte ki első feladatául, amely előfeltételét képezte a csoport mindennemű tudományos munkájának. Mindjárt a vizsgálatok elején kellemetlen felfedezést tettünk: kiderült ugyanis, hogy a rácsbeállítás korrigálása ellenére a vonalak legnagyobb részének egyik oldalán egy zavaró kísérő vonal (satellit) jelenik meg, mely különösen molekulaspektrumok felvételére teljesen alkalmatlanná teszi a berendezést. Hónapokig tartó igen beható kisérletsorozat elvégzése után megállapítottuk, hogy az említett zavar a rés felállításának konstrukciós hibájából adódik és kiküszöbölhető, ha a fényforrást nem a rácsra, hanem a résre képezzük le, úgyhogy közben a résnek csak egy kisebb darabját használjuk fel, azt a részt, melyet a rés konstrukciós hibája ellenére pontosan be lehetett állítani. Miután a rács-spektrográf ilyen módon molekulaspektroszkópiai kutatásokra alkalmassá vált, néhány ellenőrző felvételt készítettünk a MgO zöld sávrendszeréről és a mérési eredményeket összehasonlítottuk az irodalomban ugyanezen színképre található adatokkal.

A tulajdonképpeni kutatások csak ezek után kezdődtek meg. Első kutatási témának a SrO sávos színképének vizsgálatát választottuk. A téma választásánál az a cél lebegett előttünk, hogy egyfelől adalékot szolgáltassunk az irodalomban hosszabb ideje eldöntetlen vitához, mely a SrO egyik sávrendszerének analizisével kapcsolatban merült fel, másfelől pedig, hogy ezen túlmenően tovább bővítsük a SrO molekulára vonatkozó eddigi ismereteinket.

A SrO sávos színképéből három sávrendszer ismeretes, egy az ultraibolya, egy a kék és egy az infravörös tartományban. Az említett sávrendszerek közül ezideig csak az infravörös sávrendszer néhány sávjának rotációs analízisével foglalkozott *Mahla*[1], valamint *Almkvist* és *Lagerqvist*[2]. *Mahla* vizsgálatai szerint az infravörös sávrendszer alsó állapota nem a SrO molekula alapállapota, hanem valamilyen gerjesztett állapot, és szerinte az infravörös sávrendszerben található perturbációk ezen alsó állapot perturbációira vezethetők vissza. Ugyancsak *Mahla* szerint ezen infravörös sávrendszernek sem az alsó, sem a felső állapota nem közös az ezideig még ki nem analizált kék sávrendszer egyik állapotával sem. *Almkvist* és *Lagerqvist* szerint azonban *Mahla* analízise hibás és az említett megállapítások közül egyik sem állja meg a helyét. Szerintük ugyanis az infravörös sávrendszer alsó állapota a SrO molekula alapállapota és ez az állapot közös a kék sávrendszer alsó állapotával, továbbá az említett perturbációk ennek megfelelően nem az alsó, hanem a felső állapot perturbációjára vezethetők vissza. *Almkvist* és *Lagerqvist* ugyanis észrevették, hogy az infravörös sávrendszer két sávja sávfejének a távolsága éppen megegyezik a kék sávrendszer $v''=1$ és $v''=0$ nívóinak a vibrációs analízisekből ismert távolságával és ebből jutottak arra a következtetésre, hogy az infravörös és a kék sávrendszer közös alsó állapottal rendelkeznek. Ennek alapján elkészítették mégegyszer az infravörös sávrendszer vibrációs és rotációs analízisét, mely teljesen eltérő eredményeket adott *Mahla* eredményeitől. A vita eldöntéséhez szükségesnek mutatkozott a kék sávrendszer rotációs analízise, mert ennek révén válhat csak ismeretessé a sávrendszer alsó állapotának finomszerkezete, amelyet így összehasonlíthatunk az infravörös sávrendszer alsó állapotának finomszerkezetével és csak így állapítható meg minden kétséget kizáró módon ezek azonossága vagy különbözősége, vagyis *Almkvist* és *Lagerqvist* feltevésének helyessége vagy helytelensége. Ha a feltevés helyes, akkor különösen indokolt az alsó állapot részletes ismerete, minthogy ebben az esetben ez a SrO molekula alapállapota. *Almkvist*nek és *Lagerqvist*nek az infravörös sávrendszerre vonatkozó méréseiből csak a két legalsó rezgési nívónak, a $v''=0$, $v''=1$ nívóknak finomszerkezete ismeretes és ezekből a SrO molekula kémiai disszociációs energiájára következtetéseket levonni csak nagyon kevéssé lehet.

Ezen okoknál fogva a kék sávrendszer rotációs analízisét tűztük ki célul. A kék sávrendszernél a vibrációs analízist először *Mecke* és *Guillery*[3] végezték el és a sávfejek elhelyezkedésére vonatkozóan a következő élformulát kapták:

$$\nu_f = 24{,}638 + 516\,n' - 3\,n'^2 - 648\,n'' + 3{\cdot}9\,n''^2, \qquad (1)$$

ahol n' és n'' egész számok.

Néhány évvel később a vibrációs analízist *Mahanti*[4] is elvégezte, ő a következő élformulát kapta:

$$\nu_f = 24{,}702{\cdot}81 + 519{\cdot}09\left(v'+\frac{1}{2}\right) - 3{\cdot}50\left(v'+\frac{1}{2}\right)^2 - 653{\cdot}47\left(v''+\frac{1}{2}\right) + 4{\cdot}02\left(v''+\frac{1}{2}\right)^2, \qquad (2)$$

ahol v' és v'' a felső, ill. alsó állapot vibrációs kvantumszámait jelentik.

A fenti élformulák alapján megállapíthatók az egyes sávok helyei a sávrendszeren belül, ha v' és v'' helyébe a megfelelő rezgési kvantumszámokat helyettesítjük. Ennek alapján a 0—1, 0—3, 1—1, 1—4 sávokat lefényképeztük és foglalkoztunk a sávok rotációs analizisével.

2. §. Kísérleti rész

A színkép előállításához fényforrás gyanánt a legalkalmasabbnak bizonyult az egyenáramú ív stronciumsóval átitatott szénelektródok között. A szénelektródákat előzőleg a Spektroszkópiai Osztály Ipari Csoportja által meghonosított tisztító eljárással spektroszkópiai célokra alkalmazhatóvá tettük. Az átitatás úgy történt, hogy az elektromos úton kb. 1000 C°-ra izzított szénelektródra az előzőleg gondosan vízmentesített és elporított stronciumsót rászórtuk egészen addig, amíg a sóolvadékot a szén felszívta. Az átitatásnak ez a módja tapasztalataink szerint előnyösebbnek bizonyult más eljárásoknál (mint pl. a furatában stronciumsót tartalmazó szénrúd izzításánál[5]), mert az ív egyenletesebben ég s az izzó olvadékot nem szórja széjjel. Az átitatásra használt stronciumsók ($SrCl_2$, $SrBr_2$, $Sr(NO_3)_2$) közül — amint azt a Zeiss-féle háromprizmás spektrográffal készült felvételek mutatták — a $SrCl_2$ esetében jelentkezett a SrO molekula sávos spektruma a legerősebben. A sávok erősségének további fokozását lehetett elérni úgy, hogy az alsó szénelektródot valamivel vastagabb rézköpennyel vettük körül, amelyen normális nyomású, lassú oxigénáramot vezettünk keresztül. Az ív gerjesztésére használt egyenáramú feszültség 220 V, az íváram erőssége 6 A, az ív hossza kb. 10 mm volt.

A színképet a bevezetésben említett Runge—Paschen felállítású, Hochheim-ötvözettel bevont nagy konkávráccsal állítottuk elő, melynek Rowland-féle, ill. lemeztartó köre 6·5 m átmérőjű, karcolatsűrűsége 32000 karcolat hüvelykenként, diszperziója az első rendben: cca. 1.29 Å lemez-milliméterenként. Felvételeink első rendben készültek: a vizsgált színképtartományban a második rendben jelentkező, zavaró ultraibolya színképvonalakat üvegszűrő közbeiktatásával küszöböltük ki.

Felvételeinknél Ilford „Rapid Process Pancromatic“ lemezeket használtunk („Maximal Energie“ előhívóval). Az expozíciós idő 30 perc és 2 óra között változott. Hullámhosszmérésnél összehasonlítási alapul célszerűen a vas-ív spektrumát fényképeztük felvételeinkre. A vasvonalak hullámhosszait a Harrison-féle[6] táblázatból vettük. A színképvonalakat az intézetbe nemrég érkezett legújabb típusú Zeiss—Abbe-féle komparátorral mértük ki, a hullámszámokra való átszámítás a Kayser-táblázat alapján történt.

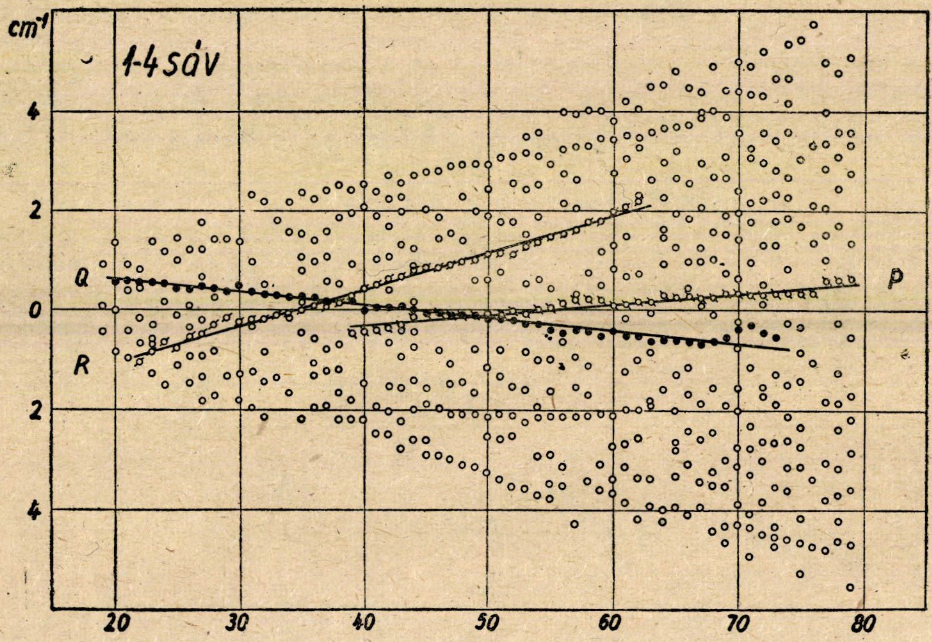
3. §. Analízis

Rotációs analízis

A felvételek igen áttekinthetetlen és bonyolult képet mutatnak. A rács nagy diszperziója következtében az egyes sávok fejei rátekintéssel egyáltalában nem ismerhetők fel. A sávokon belül az egyes ágakat szintén nagyon nehezen lehet felismerni, aminek az az oka, hogy az egyes sávok egymásba átnyúlnak, egymást átfedik s ezáltal a vonalak nagy sokasága látszólag teljes összevisszaságban, rendszertelenül követi egymást. Így igen sok egymásra eső, vagy közvetlen egymás közelébe eső vonal látható, amelyeket komparátor alatt nem is igen lehet szétválasztani, hanem egyetlen diffuz vonalnak tünnek elő. Ez azután az intenzitásviszonyokat is látszólag meghamisítja. Ezen nehézségek miatt a sávokon belüli egyes ágak felismerésére főként az először *Loomis* és *Wood*[7] által ismertetett eljárást követtük. Az eljárás lényege abban áll, hogyha valamilyen módon sikerült néhány olyan vonalat felfedezni, amely vonalak hullámszámainak második különbségei állandóknak mutatkoznak, vagyis más szóval az egyik ág egy valószínű szakaszát sikerült felismerni, akkor ezen vonalak hullámszámainak felhasználásával készítünk egy olyan parabolát, mely az észlelt vonalak hullámszámaihoz a legjobban símul s ennek segítségével extrapolálunk a szakasz elé és mögé. Ilymódon egy hipotetikus ág vonalainak hullámszámait nyerjük. A következőkben felmérjük egy diagrammban az így számított ág minden egyes vonalától a jobbra és balra következő ágvonalig terjedő szakaszban található összes szomszédos vonalnak az említett vonaltól számított különbségeit. Ha az eredetileg felvett ág valóban a vizsgált sávnak egyik ága, akkor a valamilyen futószám függvényében ábrázolt diagrammban az említett ág vonalainak megfelelő pontok az abszcissza tengely környékén fognak feküdni. Az eljárás tehát lehetővé teszi a szakaszt megelőző és követő vonalak hullámszámainak felismerését. Ezen felül azonban — és ez az eljárás legnagyobb előnye — megállapíthatók még az ugyanezen sávhoz tartozó *többi* ágak hullámszámai is. Mivel ugyanis egyazon sáv összes ágai ugyanazon kvadratikus tagot tartalmazzák, az egymásra következő vonalak távolságai a rotációs kvantumszám nagyobb értékeinél hasonló nagyságrendűek, és ennek következtében ugyanebben a diagrammban a többi ágak vonalai is egy-egy szabályos görbe mentén helyezkednek el és így azok is jól felismerhetők. Más sávok ágainak vonalai ebben a diagrammban a kvadratikus tag különbözősége miatt rendszertelenül helyezkednek el. A mellékelt 1. ábrán a viszonyok könnyen tanulmányozhatók.

Az összes eddig analizált sávok esetében ilyen módon három ágat lehetett felismerni. Tekintettel arra, hogy az infravörös sávrendszer analizise azt mutatta, hogy az alsó állapot egy $^1\Sigma$ állapot, akkor amennyiben ez az alsó állapot közös a kék sávrendszer alsó állapotával, ez a tény arra mutat, hogy a felső állapot egy $^1\Pi$ állapot. Ha eldöntöttük, hogy a felfedezett ágak közül melyik a P és melyik az R ág, valamint a rotációs kvantumszámokat az ág egyes vonalaihoz helyesen rendeltük hozzá, akkor a 0—1 és az 1—1 sáv alsó állapotaira vonatkozó kombinációdifferenciáknak, azaz a $\Delta_2 F''(J) = R(J-1) - P(J+1)$ különbségeknek meg kell egyezniök az infravörös sávrendszer ugyancsak $v'' = 1$ alsó állapotára vonatkozó kombinációdifferenciákkal. Mint a vizsgálatok mutatták, ez a megegyezés kielégítőnek mondható, ami az infravörös és a kék sávrendszer alsó állapotainak közös volta mellett bizonyít. A 0—1 és 1—1 sávok analizise alapján képezhetők voltak a $v' = 0$ és a $v' = 1$ felső állapotokra vonatkozó kombinációdifferenciák, vagyis a $\Delta_2 F'_d(J) = R(J) - P(J)$ és

$\Delta_2 F_c'(J) = R(J-1) - Q(J-1) + Q(J+1) - P(J+1)$ különbségek is, amelyeknek helyes analízis esetén meg kell egyezniök a 0—3 és az 1—4 sávok felső állapotainak megfelelő kombinációdifferenciáival. Ezen sávok analízise azután az alsó $v''=3$ és $v''=4$-es állapotok állandóinak kiszámítását teszi lehetővé, ami értékes kiegészítését adja az *Almkvist* és *Lagerqvist* által az alsó állapot $v''=0$ és $v''=1$-es nívóira adott analízisnek és az alapállapot disszociációs energiájának pontosabb meghatározására ad alkalmat.



1. ábra

Az állandók kiszámítására a következő eljárást alkalmaztuk. Ismeretes, hogy az R és P vonalak a $\Delta J = \mp 1$, a Q-vonalak pedig a $\Delta J = 0$ átmenetek révén jönnek létre s ennek megfelelően a következő formulákkal állíthatók elő:

$$R\text{-ág:}\quad \nu = \nu_0 + (B' + B'')(J+1) + (B' - B'' - D' + D'')(J+1)^2 - \\ -2(D' + D'')(J+1)^3 - (D' - D'')(J+1)^4$$

$$Q\text{-ág:}\quad \nu = \nu_0 + (B' - B'')J + (B' - B'' - D' + D'')J^2 - \\ -2(D' - D'')J^3 - (D' - D'')J^4$$

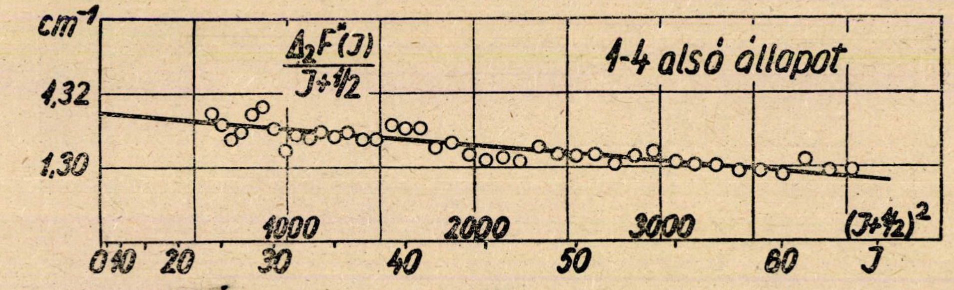
$$P\text{-ág:}\quad \nu = \nu_0 - (B' + B'')J + (B' - B'' - D' + D'')J^2 + \\ +2(D' + D'')J^3 - (D' - D'')J^4,$$

ahol ν_0 az úgynevezett nullvonal hullámszáma, B' és D' a felső, B'' és D'' az alsó állapot rotációs állandói, míg a J a rotációs kvantumszám. Egyszerű számítással meggyőződhetünk arról, hogy

$$\frac{\Delta_2 F(J)}{J+\frac{1}{2}} = 4B - 8D\left(J+\frac{1}{2}\right)^2,$$

ahol a $\Delta_2 F''(J)$ alkalmazásá esetén az alsó, $\Delta_2 F'(J)$ alkalmazása esetén pedig a felső állapot rotációs állandói szerepelnek.

Ha most $\frac{\Delta_2 F(J)}{J+\frac{1}{2}}$-t felrakjuk egy koordinátarendszerben, melynek x tengelye $\left(J+\frac{1}{2}\right)^2$ lépték szerint van számozva, akkor egyenes vonalat kell kapnunk, melynek az ordinátatengellyel való metszéspontja $4B$ és iránytangense $-8D$. A pontok közé az egyenest úgynevezett súlypont-módszerrel húzzuk be, amely abban áll, hogy a pontokat felosztjuk két egyenlő számú pontot tartalmazó csoportra, ahol mindegyik pont akkora súllyal szerepel, ahány kombinációdifferenciából számítottuk s mindegyik csoportnak kiszámítjuk a súlypontját. Ilyen módon két pontot kapunk, amelyeken keresztül meghúzzuk az egyenest. Ezzel az eljárással mind a felső, mind pedig az alsó állapot rotációs állandóit meghatározhatjuk. Megvilágításul szolgáljon a 2. ábra. Az így meghatározott értékeket táblázatba foglaltuk.



2. ábra

I. TÁBLÁZAT

Felső állapot			Alsó állapot				
						Lagerqvist és Almkvist adatai	
v'	B'	D'	v''	B''	D''	B''	D''
0	0·2928	$0{\cdot}47.10^{-6}$	0			$0{\cdot}3367_8$	$0{\cdot}35_4.10^{-6}$
1	0·2916	$0{\cdot}54.10^{-6}$	1	0·3346	$0{\cdot}33.10^{-6}$	$0{\cdot}3347_4$	$0{\cdot}37_8.10^{-6}$
2			2				
3			3	0·3306	$0{\cdot}48.10^{-6}$		
4			4	0·3288	$0{\cdot}57.10^{-6}$		

Ha a $v''=1$ állapotra kapott értéket összehasonlítjuk az *Almkvist* és *Lagerqvist* által ugyanezen állapotra kapott értékkel, akkor e két érték egyezését olyan jónak találjuk, hogy ennek alapján kimondhatjuk azt, hogy az infravörös és a kék sávrendszer alsó állapotai közösek.

A felső $v'=0$ és $v'=1$ állapotokra kapott B-értékeket a $B'_v=B'_e-$ $-\alpha'_e\left(v'+\frac{1}{2}\right)$ formula alapján összefoglalhatjuk a következő egyenletbe:

$$B'_v=0{\cdot}2934-0{\cdot}0012\left(v'+\frac{1}{2}\right).$$

Ebből az r_e magtávolságra a következő érték adódik:

$$B'_e=\frac{h}{8\pi^2 c\mu r_e^2}\,;\ r_e=2{\cdot}06\cdot 10^{-8}\ \mathrm{cm}.$$

Hasonlóan kapjuk az alsó állapotokra a mérési adatok alapján:

$$B''_v=0{\cdot}3375-0{\cdot}00195\left(v''+\frac{1}{2}\right).$$

Vibrációs analízis

A sávok nullhelyeinek, az úgynevezett nullvonalak helyeinek meghatározására két eljárást is alkalmaztunk. Az egyik az a szokásos eljárás, melynél képezzük az

$$\frac{1}{2}[R(J-1)+P(J)]\sim\nu_0+(B'-B'')J^2,$$

ill.

$$Q(J)\sim\nu_0+(B'-B'')J(J+1)$$

kifejezést, amelyet felmérünk J^2 [ill. $J(J+1)$] léptékű koordinátarendszerben; ezáltal egyenes vonalat kapunk, melynek az ordinátatengellyel való metszéspontja éppen ν_0, iránytangense pedig a rotációs állandók különbsége.

Ennél a grafikus eljárásnál jóval alkalmazhatóbbnak bizonyult egy másik, új eljárás, melyet itt alkalmaztunk először. Az eljárás részletes elméleti ismertetéséről más helyen lesz szó [8], itt csak a felhasznált formulákat közöljük:

$$\nu_0-B''=\frac{1}{4}\{[P(J)+R(J-2)](J+1)-[P(J+1)+R(J-1)](J-1)\}$$

$$\nu_0=\frac{1}{2}\{Q(J-1)\cdot(J+1)-Q(J)\cdot(J-1)\}.$$

Ennek az eljárásnak nemcsak az az előnye, hogy ezzel a ν_0 értékét számítással pontosan meg lehet határozni, hanem az is, hogy ezzel újabb módszert szolgáltathatunk a perturbációk felismerésére, valamint a perturbációs eltérésekből a perturbáló és perturbált termek $J=0$ nivói egymástól való távolságainak meghatározására. Az új módszerrel így számított ν_0 értékeket táblázatban tüntetjük fel.

II. TÁBLÁZAT

v'' \ v'	0	1
0		
1	23,988·94	24,502·71
2		
3	22,721·31	
4		22,612·98

A ν_0 értékekből egyszerű számítással meg lehet adni a sávfejek hullámszámait:

$$\nu_f = \nu_0 - \frac{(B'+B'')^2}{4(B'-B'')}.$$

Ennek alapján meghatároztuk a 0—1, 1—1, 0—3 és 1—4 sávok fejeinek hullámszámait és táblázatba foglalva összehasonlítottuk *Mecke* és *Guillery* [3], valamint *Mahanti* [4] értékeivel. Tekintettel arra, hogy mi rotációs analízis alapján számítottuk a ν_f értékeket, a mi értékeink pontosabbak, mint az említett szerzők által kis diszperziójú prizmás spektrográf segélyével végrehajtott vibrációs analízisek eredményei. A megegyezés ennek figyelembevétele alapján igen jónak mondható.

III. TÁBLÁZAT

v'' \ v'	0	1
0		
1	23,990·32 23,991·29 23,993·9	24,502·41 24,504·62 24,506·9
2		
3	22,723·58 22,723·90 22,729·1	
4		22,613·50 22,615·58 22,621·4

Megjegyzés a III. táblázathoz. Minden kockában a legfelső adat *Mahanti* értékei (2)-ből számítva, a legalsó adat *Mecke* és *Guillery* értékei (1)-ből számítva, és a középső adat a mi mérési eredményünk.

4. §. Összefoglalás

Ez az előadás a folyamatban lévő munka előzetes beszámolójaként tekintendő. Az eddigi eredmények kiértékelése azonban már most sem hagy semmi kétséget afelől, hogy a SrO infravörös és kék sávrendszere közös alsó állapottal bir és ez a közös állapot a SrO eddig ismert legmélyebb, tehát nagy valószínűséggel alapállapota. Ugyancsak megállapítható volt, hogy a kék sávrendszer $^1\Pi$—$^1\Sigma$ átmenet. Ezen felül megadtuk a kianalizált sávok rotációs és vibrációs állandóit.

A részletes közlés tartalmazni fogja a kianalizált sávok ágainak hullámszámait, a kombinációdifferenciákat, ezek kiegyenlített értékeit, az alapállapotnak, valamint a kék sávrendszer felső állapotának disszociációs energiáit.

Ezek az adatok kiegészítését fogják képezni a molekulaspektroszkópusok által már évek óta folytatott kísérletsorozatnak, mely a periódusos rendszer második oszlopában álló elemek oxidjai állandóinak meghatározását tűzte ki célul. Így a BeO, MgO, BaO, CaO mellé most a SrO sorakozik. Ismeretes ugyanis, hogy az említett állandókat elméletileg nem lehet előre kiszámítani, mivel a molekula hullámegyenletének elektron-része matematikai nehézségek miatt nem oldható meg. Az előadásban ismertetett kísérleti eredmények egy részét képezik azoknak az adatoknak, melyek alapján hozzá lehet majd fogni olyan elmélet felállításához, mely lehetővé teszi, hogy az egyes molekula-típusok állandóira sokkal nagyobb pontossággal következtethessünk előre, mint az eddig volt lehetséges.

Ki kell emelnem, hogy ez a munka az első molekulaspektroszkópiai kísérleti munka, mely a felszabadulás óta Magyarországon készült. Nagy nehézséget okozott az, hogy nem volt itt senkinek sem ilyen irányú tapasztalata, s így a munkával teljesen magunkra voltunk utalva. Éppen ezért a legnagyobb elismeréssel és köszönettel adózom munkatársaimnak, a KFKI Spektroszkópiai Osztály Molekula Csoportja tagjainak, név szerint *Budó Ágoston* akadémikusnak, aki az elvi irányításban, *Mátrai Tibor, Deézsy Irén, Koczkás Edit* kartársaknak és *Scari Ottó* aspiránsnak, akik a fényképezés, a fáradságos komparálás és numerikus számítások végrehajtásában buzgó és odaadó munkájukkal értékes segítséget jelentettek.

Magyar Tudományos Akadémia
Központi Fizikai Kutató Intézet
Spektroszkópiai Osztálya.

IRODALOM

[1] *Mahla K.*: Zs. f. Phys. *81* (1933), 625.
[2] *Almkvist G., Lagerqvist A.*: Ark. f. Fys. *1* (1949), 477; *2* (1950), 233.
[3] *Mecke R., Guillery M.*: Phys. Zs. *28* (1928), 514.
[4] *Mahanti P. C.*: Phys. Rev. *42* (1932), 609.
[5] *Brodersen P. H.*: Zs. f. Phys. *79* (1932), 613.
[6] *M. I. T. Wavelength Tables*, 1939, (London: Chapman and Hall)
[7] *Loomis F. W., Wood R. W.*: Phys. Rev. *32* (1928), 223.
[8] *Kovács I.*: Act. Phys. Hung. Megjelenés alatt.

HOZZÁSZÓLÁS

KOVÁCS ISTVÁN ELŐADÁSÁHOZ

BUDÓ ÁGOSTON lev. tag:

Az előadás kezdetén említett rácsbeállítással kapcsolatban röviden megszeretném jegyezni, hogy a beállításnál felmerült nehézségek főleg a rács és a rés jelenlegi állítási lehetőségeiben fennálló hiányosságoknak tulajdonítandók. A rácsot ugyanis — szemben a korszerű, három egymásra merőleges forgástengellyel rendelkező konstrukciókkal — csak két kitérő tengely körül lehet elforgatni és hasonlóan hiányos a rés állíthatósága is. Ily módon a rács és a rés kezdeti állásában tapasztalt több, egyidejűleg fellépő hibát (a rés nem volt pontosan a Rowland-körön, nem volt párhuzamos a rácskarcolatokkal és a rács normálisa nem feküdt a lemeztartó kör síkjában) csak igen hosszadalmas munkával lehetett kiküszöbölni és ezt is csak úgy, hogy bizonyos engedményeket kellett tenni a fényforrás optimális leképezési viszonyait illetőleg. A rács beállítására fordított sok idő és munka, bár a tulajdonképpeni kutatások megkezdését késleltette, mégis hasznos volt, mert a nyert tapasztalatok alapján a konstrukciós hibák könnyen kijavíthatók, továbbá a Spektroszkópiai Intézetnek az 5 éves terv keretében felépülő új épületébe való átköltözése során a rács újbóli felállítása előreláthatólag nem fog nagyobb nehézségeket okozni.

A SrO sávrendszerének rezgési szerkezetét már 1928-ban felismerték, a sávok rotációs szerkezetét azonban a most ismertetett vizsgálatokig azóta sem, noha a rotációs analízis szükségességére ujabban is rámutattak: 1949-ben *Almkvist* és *Lagerqvist*, akik azt is jelezték, hogy az analízis közlésére vissza fognak térni. Ez is mutatja, hogy a SrO molekula energiaállapotaira vonatkozólag már az előadásban ismertetett eddigi vizsgálatok is értékes eredményt jelentenek.

Az a tény, hogy az egyes sávok az átfedések és a teljesen ki nem küszöbölhető idegen vonalak miatt igen sok vonalat tartalmaznak, a rotációs analízis helyességét illetőleg alapos ellenőrzést, ill. kritikát tesz szükségessé. Az analízis alátámasztására egyetlen sávon belül is az előadásban említett Loomis-féle eljáráson kívül még több, más ellenőrzési módszer is alkalmazást nyert.

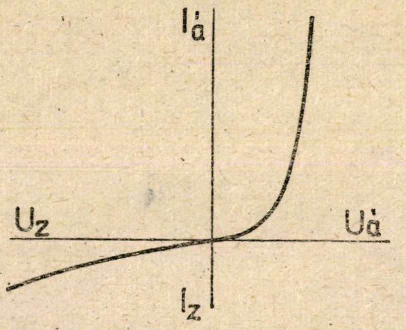
Ezek egybehangzó volta, továbbá a több sávból nyert megfelelő kombinációdifferenciáknak egy nagy rotációs kvantumszám-közben való egyezése az eddigi vizsgálatok szerint nagy mértékben kielégítő. A további sávok analízise az előadásban körvonalazott célok elérésén kívül egyúttal az eddigi bizonyítékok súlyát is növelni fogja.

A HIGANYGŐZ HATÁSA A SZELÉNEGYENIRÁNYÍTÓRA ÉS A SZELÉNFÉNYELEMRE

SELÉNYI PÁL lev. tag.

Előadta a Fizikai Állandó Bizottság 1951 december 12-én tartott ülésén

A szelénegyenirányító az elektrotechnikai iparnak műszaki, népgazdasági és honvédelmi szempontból egyaránt fontos tömegcikke; egyúttal a technikai-tudományos vizsgálatoknak olyan tárgya, amelyet érdekesség szempontjából talán még az elektroncsővel is egysorba helyezhetünk. Elméletét hosszú és kitartó előmunkálatok után *W. Schottky,* a kiváló német fizikus és — kissé eltérő formában, de azonos fizikai elgondolások alapján — *B. Davidov,* az ismertnevű szovjet tudós 1939-ben, egyidejűleg alkotta meg. — Én magam a világháború sajnálatos áldozatául esett kartársam, *Székely Miklós* gépészmérnök kezdeményezésére és az ő vállalata keretében 1940-től 1949-ig, kereken kilenc éven át foglalkoztam a szelénegyenirányítók gyártásának kidolgozásával, gyakorlatba való átültetésével, illetve folyamatos gyártásával és műszaki-tudományos vizsgálatával.

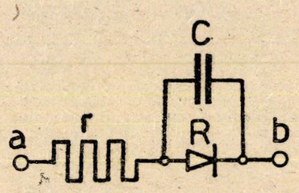


1. ábra. Szelénegyenirányító egyenáramú jelleggörbéje, vázlatosan

A szelénegyenirányító szerkezetét ismertnek tételezhetem fel. Alaplemezből, pl. nikkelezett vastárcsából, azt borító kb. 0,1 mm vastag, hőkezeléssel kristályos és vezető módosulatába átvitt szelénrétegből és erre permetezéssel felvitt fedő- vagy ellenelektródából áll. Az utóbbinak anyaga rendszerint a Wood-fémhez hasonló ötvözet; a gyártási eljárást az u. n. villamos formálás fejezi be. Villamos tulajdonságait az 1. ábrán vázlatosan felrajzolt sztatikus jelleggörbe szemlélteti: a görbe jobboldali ága az áteresztő, a bal ága a záró irányban mutatja a tárcsára kapcsolt feszültség és a rajta átfolyó áramerősség kapcsolatát. Példaképen megemlítjük, hogy egy szokásos 45 mm Ø tárcsa 1 Voltnál 600 mA áramot ereszt át, illetve kb. 0,1 mA-re zár. Egy másik jellemző adata a tárcsának, helyesebben mondva a zárórétegnek a kapacitása; ez 55 mm Ø tárcsa esetén 1,3—1,4 μF nagyságú. Nevezetes dolog, hogy e kapacitás záróirányú feszültség hatására rohamosan — az egyszerűbb esetekben a zárófeszültség négyzetgyökével arányosan — csökken. (*Schottky*-féle szabály.) Ennek szemléltetésére szolgálhat a következő mérési sorozat:

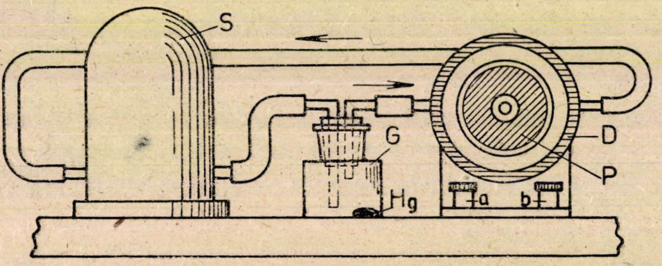
Zárófeszültség (Volt):	0	1	5	9,3
Kapacitás, százalékban:	100	34	20	13,3

Ennek a kapacitásnak tekintetbe vételével az egyenirányító elektromos sémáját (helyettesítő kapcsolását) a 2. ábra mutatja. Itt *a*—*b* a tárcsa két elektródja (két sarka), *r* a szelénréteg közönséges ohmikus ellenállása, *R* a záróréteg detektor-jellegű ellenállása és *C* a záróréteg kapacitása.



2. ábra. Szelénegyenirányító elektromos sémája

Tárgyamra térve, meg kell említenem, hogy e vizsgálatokra még 1943-ban az adott indítékot, hogy az időtájban a Marx és Mérei cégnek szállított és ott huzamosabb ideig raktározott egyenirányító berendezésekben a tárcsák záróképességüket önmaguktól elvesztették és az első bekapcsolásnál egyremásra tönkrementek, megolvadtak. — Az a gyanúm támadt, hogy e káros hatást talán a helyiség levegőjének higanygőzzel való fertőzöttsége okozza s midőn az első kísérlet pozitív eredményt adott, e megfigyelést két akkortájt megjelent közleményemben[1,2] megemlítettem* és kísérleteimet avval a reménnyel folytattam, hogy hasonlóan, mint az orvostudományban, talán itt is a „beteg" tárcsák tanulmányozásával az „egészségesek" szerkezetébe és működésébe



3. ábra. A higanygőz hatásának vizsgálatára szolgáló berendezés

*** Utólagos szóbeli értesülés, valamint a B. I. O. S. Final Report No. 725 „German Research on Rectifiers and Semi-Conductors" közlése szerint a higanygőz e káros hatását a gyártó cégek már régebben felismerték, azonban az itt, a 31. és 33. oldalon található magyarázat (a lerakódó higany vezető hídakat alkot az alaplemez és a fedőelektróda között) el nem fogadható.**

mélyebb betekintést nyerhetek. Kartársaim ítéletére kell bíznom, hogy e reményemben nem csalódtam-e?

A jelleggörbének a higanygőz hatása alatt történő változását a 3. ábrán látható egyszerű berendezéssel vizsgáltam. A vizsgálandó *P* tárcsát az üvegablakkal légmentesen lezárható *D* dobozba helyeztem; a *G* porüveg fenekén néhány csepp higany volt s a benne lévő, szobahőmérsékleten higanygőzzel telített levegőt az *S* gumimembrán-szivattyúval (akváriumszellőző szivattyúval) a tárcsát tartalmazó dobozon keresztül állandó körforgásban tartottam. A doboz alapzatán látható *a—b* két szorítócsavar a tárcsa két elektródjával állt villamos összeköttetésben, hogy közben a tárcsa villamos adatait mérhessük*.

A kísérletek részletes leírására itt nem térhetek ki, annyit mégis megemlítek, hogy a vázolt körülmények között normális gyártmányú tárcsa visszárama az öblítés megkezdésétől számított kb. másfél órán át változatlan marad, azután lassan, majd egyre gyorsabban nő és további két és fél óra alatt eredeti értékének kb. tízszeresét éri el.

Kísérleteim eredményeit röviden a következőkben foglalhatom össze:

1. A higanynak szóbanforgó „mérgező" hatása azáltal következik be, hogy a Hg-gőz a fedőelektróda likacsain, de magán az elektródán is átdiffundál és a közvetlenül alatta fekvő szelénréteget fokozatosan higanyszeleniddé változtatja át, ami többé nem félvezető, hanem amalgámszerű elektronos vezető.

2. Eközben a tárcsa $i_z = a \cdot f(U_z)$ záróirányú jelleggörbéjében (ahol i_z és U_z a visszáram, illetve a zárófeszültség) az f függvény változatlan marad s csupán az a állandó értéke nő meg. Más szóval: a visszáram — legalább is 0,2 és 15 Volt között s bizonyos mérési rendszabályok betartása esetén — minden feszültségnél *ugyanolyan arányban* nő meg.

3. Az áteresztő irányú jelleggörbében nem történik változás, csupán néhány tized voltnál, ahol a jelleggörbe folytonosságának következtében az áramerősség szintén valamelyest megnő. Tartós öblítés után, midőn a tárcsa zárása már erősen leromlott, vagy majdnem meg is szünt, az áteresztő irányú ellenállás is lényegesen csökken.

4. A higanygőz hatására a tárcsának sem a kapacitása, sem ennek a zárófeszültségtől való függése nem változik meg.

5. Szelénfényelemet hasonló kezelésnek vetve alá, annak üresjárási feszültsége — amit gyakorlatilag igen *nagy* ellenállású műszerrel mérünk — fokozatosan *nullára* csökken, ellenben rövidzárási árama — igen *kis* ellenállású műszerrel mérve — gyakorlatilag *nem* változik.

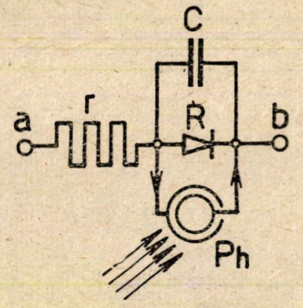
* A kapacitás-méréseket a Posta Kísérleti Állomásán végeztem. Hálásan emlékszem meg arról, hogy a háború e válságos idejében — 1944 február és március havában —, méréseim folytatása céljából ennek az állami intézménynek vezetősége a legnagyobb előzékenységgel adott módot az ottani dolgozásra s külön köszönettel tartozom *Bognár Géza* akadémikusnak, akkori posta-mérnök kartársnak, aki a mérőberendezés összeállításában, valamint a mérések végrehajtásában akkor is, 1948-ban is igen nagy segítségemre volt.

Nevezetes dolog már most, hogy ezeket a figyelemre méltóan egyszerű törvényszerűségeket a szelénegyenirányító *Schottky*-féle u. n. határ-réteg elmélete alapján (ZS. Phys. *118*, 539—592, 1942) nehézség nélkül értelmezhetjük. Ezt az elméletet itt és most csupán alapvonásaiban, — mondhatnám népszerűen — ismertethetjük. Kiindulásul az a közismert tény szolgál, hogy a szelén jellegzetes félvezető lévén, vezetőképességét a benne lévő tisztátalanságok, illetve rács-hibahelyek — röviden és egy közös elnevezéssel: azok a *gócok* okozzák, amelyek az adott hőmérsékleten egy-egy pozitív hiány-elektronra és egy negatív ionra vannak disszociálva. A félvezető ennek ellenére a maga egészében természetesen elektromosan semleges állapotban van. Ha azonban egy ilyen félvezető egy fémmel érintkezik, a határfelületen elektronokban elszegényedett réteg jön létre, mivel a fém pozitív „belépési munka" végzése árán felszippantja a hiány-elektronok egy részét és pedig annál nagyobb részét, minél nagyobb ez a ki- illetve belépési munka. Ez az elektronokban elszegényedett, tehát rosszul vezető, nagy ellenállású réteg a *záróréteg*. Az egyenirányítás mechanizmusa már most az, hogy ha a szelénre *negatív* feszültséget kapcsolunk, a létrejövő áram a hiányelektronokat *elszívja* a határrétegből, ennélfogva a feszültséggel együtt a záróréteg vastagsága is nő s ennekfolytán az áramerősség csak igen lassan növekszik. Ez történik a záróirányban. Ellenkező előjelű feszültség hatására az elektronok „elöntik" a záróréteget; annak vastagsága már kb. 1 voltnál zérusra csökken, a határellenállás eltűnik és a tárcsa ellenállása magának a szelénrétegnek 1 ohm nagyságrendű, ohmikus jellegű ellenállására redukálódik. A határrétegben a (pozitív töltésű) elektronok hiánya folytán negatív tértöltés van s ez a fedőelektródában ugyanakkora pozitív töltést influál. Ha ennek pillanatnyi értéke U feszültségnél Q, akkor — mint azt könnyű belátni — $dQ/dU = C$ a tárcsa kapacitása (differenciális kapacitása). Mivel a határréteg vastagsága növekvő zárófeszültség hatására növekszik, a kapacitásnak csökkennie kell. Az elmélet, amelynek részletesebb ismertetésére itt nem térhetünk ki, négy állandót tartalmaz; ezek: Φ a hiányelektronok kilépési munkája a fém-szelén határán, n_R illetve $\varkappa_R$, az elektronsűrűség, illetve a vezetőképesség a határon, n_A a gócok disszociálásából eredő negatív ionok (akceptorok) száma cm³ és V_D a „diffuziós feszültség", vagyis a szelén határrétege és semleges belseje közti potenciálkülönbség. Ezen mennyiségekből *Schottky* egyszerű fizikai meggondolások alapján a visszáramra, illetve a kapacitásra (i. h. 547. ill. 553. old.) a következő képleteket vezeti le:

$$i_{\text{záró}} = \varkappa_R \sqrt{\frac{8\pi e n_A}{\varepsilon}}\, f(V_D, U_Z) \tag{13}$$

$$C = \sqrt{\frac{\varepsilon e n_A}{8\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{V_D + U}} \cdot \tag{21}$$

Ha már most avval a közelfekvő feltevéssel élünk, hogy az említett kémiai átalakulás következtében a határfelületen a kilépési munka csökken, akkor e két képlet rögtön szolgáltatja megfigyeléseink magyarázatát. A kilépési munka csökkenése ugyanis megnöveli a határon az elektronok sűrűségét, az n_R illetve a vele arányos $\varkappa_R$ mennyiséget. A visszáram pedig, mint azt a (13) képlet mutatja, — ceteris paribus — evvel egyenesen arányos, a kapacitás pedig, melynek képletében a gócok száma szerepel, ettől nem függ, amint azt kísérleteim is mutatták. Az a benyomásom, hogy ez a megegyezés a *Schottky*-féle elmélet egyik legszebb igazolásának tekinthető. Megemlítem, hogy hasonló „mérgező" hatása van az ólomnak is. Ha a fedőelektróda ötvözete ólmot tartalmaz, a tárcsák záróképességüket napok, esetleg hetek alatt elvesztik. Ez a megfigyelés vezetett már 1943—44-ben arra a meggyőződésre, hogy a szelénnek belső, az alaplemezzel érintkező oldalán azért nincs záróréteg, mivel ott vasszelenidből vagy nikkelszelenidből álló átmeneti réteg képződik. Ez a feltevés nemcsak hogy jól egyezik a higany romboló hatásának fenti magyarázatával, de német kutatók olyan eredményeivel is, amikről utólag értesültem. A J. I. O. A. Final Report No. 56 „Selenium Rectifier Development in Germany" Appendix I. alatt részletesen ismerteti *R. Brill* és *H. Krebs*-nek szelénegyenirányítókon végzett röntgenvizsgálatait. Kimutatták, hogy az a (kb. 1/2000 mm vastagságú) bizmut réteg, amelyet az AEG gyártási eljárásánál az aluminium tárcsákon a szelén *alá* visznek fel, a hőkezelés alatt bizmutszeleniddé alakul át s megjegyzik (15. old.), hogy „a záróhatás kiküszöbölése ezen vegyület képződésének tulajdonítható". Az SAF gyártmányú tárcsákon, amelyek anyaga nikkelezett vas, ugyancsak kimutatták a pyrit struktúrájával bíró $NiSe_2$ képződését, megállapították rácsállandóját ($a = 5{,}948$) s megjegyzik (20. old.), hogy „itt is a $NiSe_2$ képződése akadályozza meg a záróréteg kialakulását".



4. ábra. Szelénfényelem elektromos modellje

Végül külön kell szólnom a fényelemen tett, felette érdekes megfigyelés értelmezéséről. *Kőrösy Ferenc* barátommal együtt még 1931-ben kimutattuk, hogy *Schottky*nak a fényelemekre vonatkozó alapvető felfogását [3] szemléletes alakba öntve, a fényelem fizikai modelljét megkapjuk[4,5], ha az egyenirányító sémájában a kristálydetektorral párhuzamosan egy alkáli-fotocellát is kapcsolunk, éspedig célszerűen u. n. centrális katódájú fotocellát (l. a 4. ábrát), amely szívófeszültség nélkül is jól működik. E sémán jól látható, hogy a fényelem üresjárási feszültsége nem más, mint a fényelemben bent, a „detektor" záróellenállásán át visszafolyó fotoáram okozta ohmikus feszültségesés, tehát e kapocsfeszültségnek valóban nullára kell csökkennie, ha a záróellenállás zérus lesz, jóllehet a primér fotoáram változatlan marad. Erre mint a priori lehetőségre — hogy t. i. határfelületeken felléphet ilyen fotohatás anélkül, hogy az kifelé megnyilvánulna, mivel ugyanott nincsen határellenállás — alkalomszerűen már *Schottky* is rámutatott. Kísérleteim most azt bizonyítják, hogy ez valóban lehetséges is, vagy, hogy modellünk segélyével fejezzem ki magam: a „kristálydetektort" tönkre lehet tenni anélkül, hogy akár a „fotocellának", akár a „sűrítőnek" bántódása esne.

De még többet is mondhatunk. Ha a fotohatást a higanygőz nem rontja le, ellenben a kilépési munka a fém-szelén határon csökken, akkor a fényelem színérzékenységének a higanygőz hatására a vörös felé kell eltolódnia. A napokban az említett 725 sz. B. I. O. S. jelentést gondosabban átolvasván, a 33. oldalon *Dr. Bosch*nak, az AEG fizikusának a következő közlését találom: „Higanygőz, amely akár a szelént, akár az ellenelektródát éri, az egyenirányítót rövidesen (pl. 2 nap alatt) és véglegesen tönkreteszi, talán azáltal, hogy belsőbb érintkezést hoz létre a szelén és az alaplemez között". Azt gondolom, hogy evvel a kissé elhamarkodott magyarázattal nem kell bővebben foglalkoznunk. Ezután ez következik: „Azonban egyetlen alkalommal azt találta, hogy a higanygőz a szelénfotocellát átmenetileg az infravörösre, egészen 11,000 Å-ig érzékenyítette s ezt nem tudta megmagyarázni". A jelenség eredményes megismétlése előtt természetesen elhamarkodott dolog lenne ebben fenti nézetünk megerősítését látni, azonban e megfigyelést mindenesetre bíztató útmutatásnak tekinthetjük abban az értelemben, hogy ezeket a vizsgálatokat eredményre való kilátással még számos irányban folytatni érdemes.

Budapesti Eötvös Loránd Tudományegyetem
Fizikai Intézete.

IRODALOM

[1] Elektrotechnika *36* (1943), 107 és 210.
[2] E. u. M. (Elektrotechnik u. Maschinenbau) *61* (1943), 432.
[3] *W. Schottky,* Phys. ZS. *31* (1930), 913.
[4] *F. Körösy* u. *P. Selényi,* Phys. ZS. *32,* (1931), 847.
[5] *F. Kőrösy* u. *P. Selényi,* Ann. Phys. (5) *13* (1932), 703. Megemlítem, hogy *E. Perucca* és *R. Deaglio* olasz fizikusok ugyanakkor s tőlünk függetlenül ugyanerre a felfogásra jutottak és azt két közleményükben (ZS. Phys., *72* (1931), 102. és Atti d. Acad. d. Science Torino *66* (1931), 24.) ki is fejtették.

HOZZÁSZÓLÁSOK

SELÉNYI PÁL ELŐADÁSÁHOZ

HOFFMANN TIBOR:

A *Selényi* profeśszor által megfigyelt jelenség magyarázatához a következőket szeretném hozzáfűzni. A higany hatása a szeléntárcsára abban állhat, hogy a higany a fedőelektródán átdiffundálva a szelén felső rétegében higanyszelenidet képez. Ez a higanyszelenid jó vezető. Ha most fennáll az, hogy a higanyszelenid kilépési munkája (elektronokra) nagyobb mint a fedőfémé (esetleg a fedőfém belső szélén fellépő szintén vezető rétegé), akkor a *Davidov* és *Schottky*-féle elgondolás szerint a záróirányban a potenciálfal magassága a kilépési munkák különbségével leesik. Ugyanez az effektus az áteresztőirány áramát csak kevéssé befolyásolja. Közvetlenül belátható ez abból, hogy a *p*-típusú szelén félvezetőből ebben az esetben a pozitív hiányelektronok kilépése közel változatlan körülmények között történik (áteresztő irányban), míg a fémből a pozitív hiányelektronok átlépése (záró irányban) könnyebbé válik. Itt természetesen figyelembe kell venni az alagút-effektust is, és ennek figyelembevételével a záróréteg, ill. higanyszelenidréteg vastagságára vonatkozóan következtetéseket vonhatunk, ha mérések állnak rendelkezésünkre, mint pl. a visszáram ismerete a higany hatásának való kitétel idejének függvényében.

WINTER ERNŐ:

Nagyon örvendetes, hogy *Selényi* kartárs nem elégedett meg annak a ténynek megállapításával, hogy higanygőz hatására a szelénegyenirányítók záróképességüket elveszítik, hanem ki is analizálta a folyamatot, amely a romlás alkalmával végbemegy. A problémák ilyen módon történő megfogása számunkra nagyon lényeges, mert ez vezet a gyakorlati és elméleti fejlődéshez, a jobb minőségű egyenirányítók előállításához és az egyenirányítás mechanizmusának helyesebb megértéséhez.

Sajnos, hajlamosak vagyunk arra, hogy a fizikai jelenségeket elméletileg nagy részletességgel és nagyon behatóan dolgozzuk fel, ugyanakkor azonban a gyakorlati részét elnagyoljuk.

A száraz egyenirányítók már ma is nagy szerepet játszanak az elektrotechnikában és jelentőségük állandóan fokozódik. Sok nyitott és kellőleg meg nem értett kérdés van, ami a fejlődést megnehezíti. Utalok itt elsősorban arra, hogy a száraz egyenirányítók Schottky-féle elmélete a megfigyelt tényekre nem ad elégséges magyarázatot. Ha egy fémet és félvezetőt érintkezésbe hozunk egymással, az még nem ad jó egyenirányítót. Az egyenirányító effektus kicsiny és lehet, hogy ez a kis effektus is más tényezők következménye. A természetes záróréteg nem elégséges a jó egyenirányítás létrehozására.

A rézoxidulegyenirányítónak aránylag jól ismerjük a záróréteg természetét, ami nem más, mint egy tiszta rézoxidulréteg, oxigénfelesleggel és fémfelesleggel biró oxidulrétegek között. A sziliciumról és germániumról annyit tudunk, hogy a kristály külső rétegeinek eltávolítása (oldással vagy csiszolással) az egyenirányítást annyira elrontja, hogy használhatatlanná válnak. Pedig a szilicium és germanium félvezetők maradnak a külső réteg eltávolítása után is és változatlan marad a fémkontaktus is.

A záróréteg fizikai és kémiai természetének megismerése rendkívül fontos a további céltudatos fejlesztési szempontból és szerintem ezeknek tisztázása fontosabb, mint az elmélet továbbfejlesztése, sőt az elmélet csak ezek alapján fejlődhetik egészségesen tovább.

A másik fontos probléma a felhasznált félvezetők fizikai és kémiai természetét jellemző adatok nyerése. Erre alkalmasnak látszik a Hall effektus mérése. A Hall effektus állítólag felvilágosítást tud adni arra nézve, hogy a félvezető „n“ vagy „p“ típusú-e, mekkora a zavaró atomok koncentrációja és milyen a zavaró energianívó és az alapanyag energianívói közötti különbség. Ilyen irányú publikációkat a magyar fizikai irodalomban nem látunk, pedig ezek a fejlesztő laboratóriumok munkáját rendkívüli mértékben elősegítenék.

ÚJABB EREDMÉNYEK AZ ANALÍZIS TERÜLETÉN

SZŐKEFALVI-NAGY BÉLA lev. tag

Előadta a Matematikai Állandó Bizottság 1951 december 13-án tartott ülésén

Feladatom, hogy a magyar matematikusok ezévi eredményeiről szóló beszámolók sorát megkezdve, az analízis területén elért eredményeket ismertessem, áttekintve az idén nyomtatásban megjelent és a még sajtó alatt álló közleményeket, továbbá, amennyiben szóbeli, vagy írásbeli közlés alapján ilyenekről is tudomást szerezni módom volt, azokat az eredményeket is, amelyek kidolgozása még folyamatban van. Tekintettel beszámolóm kereteire, eleve le kell mondanom a teljességről és arról, hogy a „tiszta" analízis területéről kilépve, az analízis módszereit felhasználó analitikus számelméleti, mechanikai, vagy valószínűségszámítási kutatások eredményeiről is szóljak. Egyébként, ami a valószínűségszámítást és az analízis egyéb alkalmazásait illeti, az e téren elért eredményekről nálam hivatottabb előadó fog beszámolni. Beszámolómat, könnyebb áttekinthetőség végett, igyekszem tárgykörök szerint tagolni.

1. Interpoláció, komplex függvénytan

*Fejér Lipót*nak a Mathematische Nachrichten Erhard Schmidt-kötetében közölt dolgozata[1] az általános parabolikus interpoláció újabb irodalmához (így saját idevágó 19 előbbi értekezéséhez is) kapcsolódik. Még 1932-ben bebizonyította *Fejér*, hogy minden, általa „normális"-nak nevezett abszcisszacsoportban való interpoláció esetén van az adott $f(x)$ folytonos függvényt az adott n pontban interpoláló legfeljebb $(2n-1)$-edfokú polinomok n-paraméteres seregében olyan, amelynek az $f(x)$ függvénytől az alapintervallumon való maximális eltérése legfeljebb kétszer akkora, mint az $f(x)$-et legjobban megközelítő legfeljebb $(2n-1)$-edfokú polinomé. *Fejér* most bebizonyítja, hogy ez a tétel *pontos,* azaz hogy a 2-es faktor általában nem kisebbíthető.

Egy másik, *Szegő Gábor*ral együtt írt dolgozatában *Fejér*[2] azokat a régebbi eredményeit fejleszti tovább, amelyek a komplex sík egységkörének bizonyos hatványsorok által, továbbá ezek szeletei, valamint e szeletek első, vagy magasabbrendű aritmetikai közepei által létesített konformis képére vonatkoznak. Bár ezek arra a speciális esetre korlátozódnak, amikor a hatványsor együtthatósorozata egyszeresen, vagy többszörösen monoton, mégis a függvénytanban fontos eseteket ölelnek fel.

Szőkefalvi-Nagy Gyula egy még nem közölt dolgozatában az $F(z)=\frac{f(z)}{g(z)}$ racionális törtfüggvény kritikus pontjaival, azaz az $fg'-f'g$ polinom zéróhelyeivel foglalkozik. Ezeknek az $F(z)$ függvény zéróhelyeihez és pólusaihoz viszonyított helyzetére vonatkozólag *Walsh*nak vannak eredményei. A jelen dolgozat ugyane kritikus pontok helyzetét az $F(z)$ zéróhelyei és pólusai helyett az $F(z)$ tetszésszerinti A- és B-helyeihez ($A \neq B$) viszonyítva vizsgálja.

*Mikolás Miklós*nak egy sajtó alatt álló dolgozata[3] az u. n. Euler—Maclaurin-féle összegképletnek komplex görbementi integrálokra való kiterjesztésével s a nyert formula alkalmazásaival foglalkozik.

2. *Trigonometrikus polinomok és sorok*

Ebben az évben jelent meg, *Fejér Lipót* és *Szegő Gábor* által sajtó alá rendezve, az a dolgozat, amelyet az 1945 januárjában tragikus körülmények között elhunyt fiatal magyar matematikus, *Schweizer Miklós* írt s amelynek kéziratát még 1943-ban benyújtotta tanárának, *Fejér Lipót*nak. E dolgozat[4] az

$$1+2\cos\theta+2\cos 2\theta+\cdots+2\cos n\theta+\cdots$$

sor részletösszegeinek másodrendű aritmetikai közepeivel foglalkozik. Minthogy ezek alkotják a Fourier-sor másodrendű közepeinek az integrálmagját, azért vizsgálatuknak a Fourier-sorok szummációelmélete szempontjából való fontossága nyilvánvaló. A szóbanforgó sor részletösszegeinek már az elsőrendű közepeiről jól ismeretes az a *Fejér* által talált nevezetes tény, hogy sehol sem negatívok; a harmadrendű közepekre vonatkozólag 1932-ben *Fejér* azt találta, hogy ezek a $(0, \pi)$ közön monoton fogynak. A másodrendű közepekre *Fejér* csak azt mutatta ki, hogy ha a $(0, \pi)$ köz első kétharmadrészét mindkét végén akármilyen kicsit is megcsonkítjuk, e közepek a megmaradó részen monoton fogynak, legalább is valamely n indextől kezdve, a $(0, \pi)$ köz harmadik harmadán viszont nincs monotonitás, sőt itt bármely kis részközön minden elég nagy indexű középnek van növő és fogyó ága is. Szegő később bebizonyította, hogy a csonkítás a számköz elején felesleges és hogy a $0 \leqq \theta \leqq \arccos(-0,4)$ közön *mindegyik* másodrendű közép monoton fogy. *Schweizer*nek sikerült a probléma teljes megoldása: kimutatta, hogy a számköz végének a csonkítása is felesleges, sőt hogy a $0 \leqq \theta \leqq \arccos(-0,5)=\frac{2\pi}{3}$ közön *mindegyik* másodrendű közép monoton fogyó.

Sajtó alatt van egy dolgozata *Fejér*nek,[5] amelyben rámutat arra a körülményre, hogy *Archimedes* által a gömbsüveg felszínének „meghatározására" felhasznált planimetriai „összegképlet" a trigonometria nyelvén a Fourier-sor elsőrendű közepeinek magjához vezet, s egyben új bizonyítást ad arra az általa 1910-ben közölt sejtésre, amelyet azóta ő maga és mások is többféleképpen bebizonyítottak, t. i. hogy a $(0, \pi)$ közön

$$\sin\theta + \frac{\sin 2\theta}{2} + \cdots + \frac{\sin n\theta}{n} > 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Ugyanerre az egyenlőtlenségre alapítja *Fejér* egy másik közlésre szánt kéziratában annak a bizonyítását, hogy az $x_s = \cos(2s-1)\frac{\pi}{2n}$ $(s = 1, 2, \ldots, n)$ Csebisev-abszcisszákhoz tartozó Lagrange-interpoláció alappolinomjainak integráljai, azaz a

$$\lambda_s = \int_{-1}^{1} l_s(x)\, dx, \qquad (s = 1, 2, \ldots, n)$$

u. n. Cotes-féle számok, eleinte nőnek, azután fogynak, azaz hogy

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_{\left[\frac{n+1}{2}\right]} \quad \text{és} \quad \lambda_s = \lambda_{n-s}.$$

Mint ismeretes, valamely interpoláció Cotes-féle számait azért fontos vizsgálni, mert ezek viselkedéséből az interpoláció által szolgáltatott közelítő integráció, az ú. n. mechanikus kvadratúra használhatóságára lehet következtetéseket levonni.

Egy másik, készen álló kéziratában *Fejér* a Fourier-sor du Bois-Reymond-féle, Lebesgue-féle, továbbá az általa most értelmezett Schur-féle szingularitásaival foglalkozik. *Schur*tól származik az a tétel, hogy ha a $c_0 + c_1 z + \cdots + c_n z^n + \cdots$ hatványsor összege az egységkörben abszolút értékben az 1 alatt marad, akkor, $s_n(z)$-vel jelölve e sor n-edik részletösszegét,

$$\frac{|s_0(z)|^2 + \cdots + |s_n(z)|^2}{n+1} < 1$$

az egész egységkörlemezen. Mármost, amint *Fejér* bebizonyítja egy példán, nem áll hasonló tétel a Fourier-féle sorokra, sőt még az egyszerűbb cosinus-sorokra sem, azaz ha

$$a_0 + a_1\cos\theta + \cdots + a_n\cos n\theta + \cdots$$

egy (páros) $F(\theta)$ függvény Fourier-sora és $|F(\theta)| \leqq 1$, akkor a sor részletösszegeinek négyzeteiből alkotott számtani közepek általában nem maradnak az 1 alatt. Ezt nevezi *Fejér* Schur-féle jelenségnek, vagy Schur-féle szingularitásnak a Fourier-sorok körében. (Ez a jelenség egyébként, mint *Fejér* kimutatja, a négyzetek harmadrendű közepeire már nem lép fel, s nem lép fel azokban a pontokban sem, ahol a sorok részletösszegei mind nem-negatívok.) A dolgozat legjelentősebb eredményének tekinthető annak felismerése, hogy a du Bois-Reymond-féle szingularitásra adott ismeretes Fejér-féle példa és több más hasonló konstrukció igazi alapja a következő általános tétel: *Ha a csupa nem-negatív együtthatóval biró*

$$b_1\sin\theta + b_2\sin 2\theta + \cdots + b_n\sin n\theta + \cdots$$

sinus-sor egyenletesen konvergens és összege $f(\theta)$, akkor $f(\theta)$-t a $(0, \pi)$ közön cosinus-sorba fejtve, a kapott

$$f(x) \sim a_0 + a_1\cos\theta + a_2\cos 2\theta + \cdots + a_n\cos n\theta + \cdots$$

sornak, az eredetihez „asszociált" sornak, együtthatói az

$$a_0+a_1+\cdots+a_n \geqq \frac{2}{\pi}\left(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right)b_n$$

egyenlőtlenségeknek tesznek eleget; és egyenlőség itten valamely n-re csak akkor áll, ha az illető n-től különböző indexű b együtthatók mind 0-val egyenlők.

Ezeken kívül is még számos olyan eredménye van készen *Fejér*nek, amelyek dolgozatban való közlését rövidesen tervezi. Említsük meg ezek közül azokat, amelyek az

$$a_1 \cos\theta + a_2 \cos 2\theta + \cdots + a_n \cos n\theta + \cdots$$

sor $f(\theta)$ összegfüggvényének jelváltásaira vonatkoznak. Még 1934-ben bebizonyította *Fejér,* hogy ha az együtthatók *négyszeresen monoton,* 0-hoz tartó sorozatot alkotnak és ha $a_1 > 0$, akkor $f(\theta)$ az egész $(0, \pi)$ közön *fogyó* függvény s ennek következtében ott pontosan *egyszer vált előjelet.* Újabban pedig bebizonyította, hogy ha az együtthatósorozatról csupán *háromszoros monotonitást* teszünk fel, akkor $f(\theta)$ ugyan általában már nem fogyó függvény, de továbbra is csak *egyetlen helyen vált előjelet s ez a hely a* $0 < \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ *közbe esik.* Ha pedig csak *kétszeres monotonitást,* azaz konvexitást tételezünk fel, akkor ugyan *több* jelváltás is lehetséges, de ezek *mind a* $0 < \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ *közbe esnek,* azaz a $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ közben végig $f(\theta) < 0$. Az az észrevétel, hogy a $0 < \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ közben több, sőt akárhány (páratlan számú) jelváltás léphet fel, *Turán Pál*tól származik. *Turán Pál* eredményeiről egyébként nem beszélek, holnapi előadásában őmaga fog azokról beszámolni.

A Fourier-sorok elméletébe vág *Szőkefalvi-Nagy Béla* dolgozata,[6] amely a Fourier-sor konjugált sorának Abel—Poisson-féle szummációjával foglalkozik s meghatározza a konvergencia rendjét abban az esetben, amikor a sorbafejtett függvény α-rendű Lipschitz-feltételnek tesz eleget. A konvergencia rendje $O(1-r)^{\alpha}$, mégpedig akár $\alpha < 1$, akár $\alpha = 1$, amit érdekes összevetni azzal, hogy *Salem, Zygmund* és *Natanszon* eredményei szerint az eredeti (nem konjugált) sorra a konvergencia rendje az $\alpha < 1$ esetben ugyanekkora, de az $\alpha = 1$ esetben általában rosszabb, t. i. $O\left[(1-r)\log\frac{1}{1-r}\right]$. A dolgozat pontos aszimptotikát ad meg.

3. *Ortogonális polinomok*

Az ortogonális polinomok elméletébe vág *Szőkefalvi-Nagy Bélá*nak a Mathematische Nachrichten Erhard Schmidt-kötetében megjelent dolgozata[7], amely *Alexits György* egy régebb közölt eredményét általánosítva kimutatja, hogy *ha az* (a, b) *véges intervallumon adott valamely pozitív tömegeloszlásra nézve ortogonális és normált* $\{p_n(x)\}$ *polinomrendszer az intervallum belsejében* [azaz minden $(a+h, b-h)$ részintervallumon, ahol $h > 0$] *korlátos, akkor minden olyan* $\{c_n\}$ *együtthatósorozatra, amelyre a* $\Sigma c_n^2 \log n$ *sor konvergens, a* $\Sigma c_n p_n(x)$ *sor is konvergens, legalább is az adott tömegeloszlásra nézve majdnem mindenütt.* Ezzel *Kolmogorov, Seliverstoff* és *Plessner* Fourier-sorokra bizonyított ismert tételének érvényességi körét sikerült nagymértékben kiterjeszteni. Hogy e tételben a $\log n$ faktor elhagyható-e, azaz hogy minden négyzetesen integrálható függvény sorfejtése majdnem mindenütt konvergens-e, az a Fourier-sorok körében is nyitott kérdés.

Annyi azonban Fourier-sorokra jól ismeretes *Fejér* és *Lebesgue* klasszikus vizsgálataiból, hogy minden integrálható függvény Fourier-sorának elsőrendű aritmetikai közepei majdnem mindenütt a függvényhez konvergálnak; négyzetesen integrálható $f(x)$ függvényre Hardy és Littlewood tétele szerint az az erősebb állítás is érvényes, hogy ha $s_n(x)$ jelenti az $f(x)$ Fourier-sora n-edik részletösszegét, akkor majdnem mindenütt

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}[s_k(x)-f(x)]^2 \to 0.$$

Már most *Tandori Károly* aspiránsnak sikerült ezt az utóbbi tételt ortonormális polinomrendszerek szerint való sorfejtésekre is kiterjesztenie, hacsak a következő feltételek teljesülnek: a) az alapul szolgáló tömegeloszlást egy nemnegatív, integrálható $w(x)$ sűrűségfüggvény származtatja, b) a $p_n(x)$ polinomok az (a, b) *belsejében* összeségükben korlátosak. *Tandori* szerint ekkor minden olyan mérhető $f(x)$ függvényre, amelyre

$$\int_a^b w(x)f^2(x)\,dx < \infty, \tag{1}$$

a $\{p_n(x)\}$ rendszer szerint való kifejtés majdnem mindenütt elsőrendű aritmetikai közepeivel az $f(x)$-hez szummálható, sőt áll majdnem mindenütt az erősebb Hardy—Littlewood-féle állítás is. E tétel könnyen tovább élesíthető úgy, hogy a b) feltételt csak *lokálisan* követeljük meg: Minden olyan mérhető $f(x)$ függvényre, amelyre az (1) feltétel teljesül, a $\{p_n(x)\}$ rendszer szerint való kifejtés elsőrendű közepeivel az $f(x)$ értékhez szummálható (a Hardy—Littlewood-féle erős értelemben) *majdnem minden olyan helyen, amelynek környezetében a* $\{p_n(x)\}$ *rendszer korlátos.*

E tétel következő korolláriuma *Szőkefalvi-Nagy Bélától* származik: *Ha a* $w(x)$ *függvény valamely* (α, β) *részintervallumon pozitív mértékű halmazon* *válik zéróvá, akkor a $p_n(x)$ polinomok ebben az intervallumban nem lehetnek összeségükben korlátosak.*

A *Tandori* által kikötött a) és b) feltételek előzőleg *Alexits György* egyik dolgozatában [8] szerepelnek. *Alexits* kimutatta, hogy (ha még $w(x)$-nek az (a, b) belsejében való korlátosságát is megköveteljük) az ilyen rendszerek szerint való sorfejtések részletösszegei, legalábbis az (a, b) intervallum belsejében, *ugyanolyan rendben közelítik meg a kifejtett $f(x)$ függvényt, mint a Fourier-sor,* hacsak az $f(x)$-ről valami regularitást követelünk meg, pl. hogy valamelyik deriváltja korlátos, vagy hogy őmaga, vagy valamelyik deriváltja Lipschitz-feltételnek tesz eleget; sőt ezekben az esetekben a megközelítés mértékére számszerű adatok is nyerhetők. Ez talán az első olyan approximációtétel ortogonális sorfejtésekkel kapcsolatban, amely lényegesen túlmegy az eddig majdnem kizárólag vizsgált speciális sorok területén.

Freud Géza aspiránsnak legújabban sikerült a $w(x)$ súlyfüggvényre és a $\{p_n(x)\}$ ortonormális polinomrendszerre vonatkozó igen általános feltételeket találnia, amelyek mellett a Fourier-sorokra ismert Riemann-féle lokalizációs tétel, valamint a Dirichlet—Jordan- és a Hardy—Littlewood-féle konvergenciakritériumok érvényessége kiterjeszthető e polinomrendszer szerint való sorfejtésekre is.

4. *Általános ortogonális függvényrendszerek*

Alexits György két másik dolgozata általános $\{\varphi_n(x)\}$ ortonormált függvényrendszerekre vonatkozik. Az egyikben [9] a $\Sigma c_n \varphi_n(x)$ sor részletösszegeire és tetszésszerinti pozitív rendű Cesàro-összegeire közöl majdnem mindenütt érvényes becsléseket, amelyek magukban foglalják mint speciális eseteket *Rademacher*nek a $\Sigma \varphi_n(x)$ sor részletösszegeire, *Gál István*nak pedig e sor elsőrendű közepeire vonatkozó becsléseit. Másik dolgozatában [10] *Salem*nek a Fourier-sor faktorsorozatokkal való transzformációjára vonatkozó egyes tételeit terjeszti ki *Alexits* olyan $\{\varphi_n(x)\}$ ortonormált rendszerekre, amelyekre a

$$K_n(x) = \int_a^b \left| \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) \varphi_k(x)\, \varphi_k(t) \right| dt$$

függvények közös (x-től és n-től független) korlát alatt maradnak. Kimutatja, hogy ha $\Sigma c_n \varphi_n(x)$ egy L^p osztálybeli függvény sorfejtése ($p \geqq 1$), akkor van olyan végtelenbe tartó $\{\lambda_n\}$ számsorozat, hogy $\Sigma \lambda_n c_n \varphi_n(x)$ szintén L^p-beli függvény kifejtése (Salem tétele Fourier-sorra és $p = 1$ esetére vonatkozott). E tétel bizonyos lehetőséget nyújt a konvergenciakérdés vizsgálatában. T. i. ebből a tételből következik, hogy ha valamely L^p osztályba tartozó összes függvények sorfejtéseiről kimutatjuk, hogy majdnem mindenütt *végesek,* akkor majdnem mindenütt *konvergensek* is.

Ugyancsak az általános ortonormált függvényrendszerekre vonatkozik *Tandori Károly*nak most megjelent dolgozata is.[11] *Kaczmarz*nak van egy tétele, mely szerint, ha a $\{\varphi_n(x)\}$ ortonormált függvényrendszerhez tartozó

$$L_n(x)=\int_a^b\left|\sum_{k=1}^{n}\varphi_k(x)\,\varphi_k(t)\right|dt$$

„Lebesgue-függvények" egy E halmazon eleget tesznek az

$$L_n(x)\leqq w_n \qquad (n=1,2,\ldots)$$

egyenlőtlenségeknek, akkor a

$$\Sigma c_k\,\varphi_k(x)$$

sor az E-n majdnem mindenütt konvergál minden olyan együtthatósorozat esetében, amelyre a $\Sigma c_k^2 w_k$ sor konvergens. *Tandori* észrevette, hogy a *Kaczmarz* által közölt bizonyítás nem teljes, t. i. csak arra az esetre érvényes, amikor található olyan $\{n_k\}$ növekvő indexsorozat, hogy elég nagy K egész számtól a következő álljon:

$$K\leqq w_{n_K}<K+1\leqq w_{n_{K+1}}<K+2\leqq w_{n_{K+2}}<K+3\cdots.$$

Ez a feltétel teljesül ugyan a Kaczmarz-tétel legfontosabb alkalmazásaiban, pl. amikor $w_n=\log n$, vagy $w_n=\log^2 n$, de nem teljesül általánosan. *Tandori*-nak azonban sikerült olyan bizonyítást találnia, amely a tételt teljes általánosságban kiadja. Ugyancsak sikerült bebizonyítania a Cesàro-közepekre vonatkozó analóg Kaczmarz-féle tételt, amelynek eredeti bizonyításában hasonló hiányosság van.

5. *Függvényegyenletek, iterációs eljárások, Tauber-szerű tételek*

Aczél János, Kalmár László és *G. Mikusiński* lengyel matematikus most megjelent közös cikkükben[12] a következő függvényegyenletet vizsgálják (az ú. n. tranzlációegyenletet):

$$f\big(f(x,u),v\big)=f(x,u+v).$$

Kimutatják, hogy ennek általános megoldása $f(x,u)=F^{-1}(F(x)+u)$, ahol $F^{-1}(y)=x$ az $y=F(x)$ inverz függvénye, ha csak az $f(x,u)$ megoldásáról kikötjük vagy azt, hogy folytonos, vagy pedig azt, hogy mindkét változótól monoton módon függ és az u-ban nem konstans. A Matematikai Lapokban közölt dolgozatában[13] *Aczél* ezt az eredményt tovább általánosítja és jó áttekintést nyújt egyéb idevonatkozó eredményeiről is. Legújabban Aczél az

$$f\big(f(x,y),z\big)=f\big(f(x,z),f(y,z)\big)$$

függvényegyenlettel, az ú. n. „öndisztributivitási" egyenlettel foglalkozva, ennek differenciálegyenletre való visszavezetése által bebizonyította, hogy az általános differenciálható és monoton megoldás alakja a következő:

$$f(x,y)=F^{-1}[(1-q)\,F(x)+q\,F(y)].$$

Szele Tibor, Fuchs László és *Hajós György* idevonatkozó előzetes eredményeit élesítve, *Aczél* bebizonyította, hogy bizonyos kiegészítő feltételek mellett a disztributivitás megkövetelése meghatározza a vektorok skaláris és vektoriális szorzásának, valamint a komplex-számok szorzásának a szabályát.

Barna Béla dolgozata [14] a Newton-féle gyökközelítő eljárás konvergencia-kérdésével foglalkozik. *Rényi Alfréd* egy tavaly megjelent dolgozatában kimutatta, hogy a három valós gyökkel biró, valós együtthatójú $f(x)$ polinomok esetében, ha még azt is feltesszük, hogy $f''(x)$ monoton, megszámlálhatóan végtelen sok ú. n. divergenciapont van, azaz olyan pont, amelyből kiindulva a Newton-féle eljárás divergens pontsorozathoz vezet. *Rényi* felvetette a problémát, vajjon így van-e ez az általános esetben is? *Barna* most bebizonyítja, hogy olyan *negyedfokú polinomok esetében, amelyeknek négy különböző valós gyökük van, a divergenciapontok halmaza perfekt és következésképpen nem megszámlálható.* A *Rényi* által vizsgált esettől eltérően itt olyan divergenciapontok is lépnek fel, amelyekből kiindulva az eljárás olyan pontsorozathoz vezet, amely korlátos és végtelen sok torlódási pontja van. Azonban, mint *Barna* szintén kimutatja, *nincsen olyan még oly rövid szakasz, amely tisztán divergenciapontokból állna.* A divergenciapontok halmazának *mértéke* még ismeretlen.

Freud Géza aspiráns az Akadémián bemutatott dolgozatában [14a] egy Tauber-szerű tétel maradéktagjával foglalkozik. Bebizonyítja, hogy ha

$$\int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, d\tau(t) = S\,\frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^\alpha}\,[1+O(s^\varepsilon)],$$

ahol $\tau(t)$ monoton függvény és α, ε pozitív számok, akkor

$$\int_0^x f(t)\, d\tau(t) = Sx^\alpha\left[1+O\left(\frac{1}{\log x}\right)\right].$$

6. *Valós függvények, ponthalmazelmélet*

Az egy valós változótól függő általános $f(x)$ függvény deriváltszámainak kapcsolataira vonatkozó nevezetes Denjoy—Young—Saks-féle tételt általánosítja *Császár Ákos*nak egy sajtó alatt álló dolgozata. [15] A deriváltszámok helyébe itt az ú. n. általánosított Lipschitz-féle számok lépnek, azaz az

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{\varphi(h)}$$

hányados szélső határértékei, ha h pozitív, illetőleg negatív számokon át tart 0-hoz; a $\varphi(h)$ alkalmas feltételeknek alávetett adott függvény. Ha $\varphi(h)=h$, akkor a közönséges (Dini-féle) deriváltszámokról, ha pedig $\varphi(h)=|h|^\alpha$, akkor a (*Besicovitch* és *Császár* által már előzőleg vizsgált) tulajdonképpeni Lipschitz-számokról van szó. Sikerül *Császár*nak ezen általánosított Lipschitz-számok között majdnem mindenütt érvényes relációkat felállítania. Egy másik dolgozatában[16] *Császár* a Darboux-féle tulajdonsággal foglalkozik. Mint ismeretes, az $f(x)$ függvényről akkor mondjuk, hogy megvan ez a tulajdonsága, ha bármely (x_1, x_2) közön az $f(x)$ felvesz az $f(x_1)$ és $f(x_2)$ közé eső minden értéket; ez a tulajdonsága megvan minden folytonos függvénynek, továbbá minden olyan függvénynek, amely mindenütt valamely differenciálható függvény deriváltja. *Császár* többféleképpen általánosítja Darboux-féle tulajdonság definicióját, pl. úgy, hogy az $f(x)$ függvénytől nem követeli meg, hogy az (x_1, x_2) közön minden értéket felvegyen az $f(x_1)$ és $f(x_2)$ értékek között, hanem csak majdnem minden értéket. *Császár*nak sikerül szükséges és elegendő, lokális jellegű feltételeket megállapitania arra, hogy az $f(x)$ függvénynek meglegyen az egész alapintervallumon az eredeti, illetve az általánosított Darboux-féle tulajdonsága.

Egy újabb dolgozatában[17] *Császár* az $E[f(x) > f(x_0)]$ és az $E[f(x) \geqq f(x_0)]$ halmazoknak az x_0 hely környezetében való struktúráját vizsgálja. Eredményei többek közt az extremumhelyek ritkaságára vonatkozó ismert tételeket általánosítanak.

Gehér István sajtó alatt álló dolgozatában[17a] Banachnak ahhoz a tételéhez csatlakozik, amely szerint az $f(x)$ korlátos változású függvény totális variációja előállítható az

$$\int_{-\infty}^{\infty} N(y)\,dy$$

integrál által, ahol $N(y)$ jelenti azoknak az x pontoknak a számát, amelyekben $f(x) = y$. *Gehér* ezt a tételt többváltozós függvényekre általánosítja.

Rényi Alfréd egy *Steinhaus*tól eredő probléma vizsgálata során a Weierstrass-féle approximációtétel *Stone*tól eredő általánosításának egy érdekes és hasznos analogonját fedezte fel az L^p függvényterekre vonatkozólag. A Stone-féle tétel így szól: Legyen $\{\varphi_\alpha(x)\}$ a Q bikompakt topologikus halmazon értelmezett folytonos függvényeknek egy olyan rendszere, amely a Q pontjait elválasztja abban az értelemben, hogy a Q bármely két x_1, x_2 pontjához található a rendszerbe tartozó függvények között olyan, amely e két pontban különböző értékeket vesz fel. Ekkor a Q-n értelmezett bármely folytonos $f(x)$ függvény tetszésszerinti pontossággal egyenletesen megközelíthető a $\varphi_\alpha(x)$ függvényekből alkotott polinomokkal. *Rényi*, együttműködve *Pukánszky Lajos*sal, bebizonyította, hogy *ha Q az n-dimenziós tér valamely véges mértékű részhalmaza és $\{\varphi_\alpha(x)\}$ a Q-n értelmezett korlátos és mérhető függvényeknek egy olyan rendszere, amely a Q pontjait elválasztja, akkor a Q-n értelmezett bármely L^p-osztálybeli függvény ($p \geqq 1$) az L^p-metrikában tetszőleges pontossággal megközelíthető a $\varphi_\alpha(x)$ függvényekből alkotott polinomokkal.* E tétel bizonyítása során a szerzők magának a Stone-féle tételnek is egy új bizonyítását találták.

7. *Lineáris operációk és operátorok*

Riesz Frigyes új bizonyítást talált saját, immár klasszikussá vált tételére, amely a folytonos függvényekre értelmezett lineáris operációk Stieltjes-integrál alakjában való előállítására vonatkozik. A szóbanforgó Af lineáris operációk korlátosak abban az értelemben, hogy van olyan M_A állandó, hogy

$$|Af| \leqq M_A \cdot \max |f(x)|.$$

Riesz ebben a bizonyításában a problémát visszavezeti olyan Bf lineáris operációk vizsgálatára, amelyekre a korlátosság definiciójában a maximum helyébe az abszolútérték integrálja lép:

$$|Bf| \leqq N_B \cdot \int_a^b |f(x)|\, dx.$$

Az ilyen Bf operációkról könnyen kimutatható, hogy előállíthatók a

$$Bf = \int_a^b f(x)\, dg(x)$$

alakban, ahol $g(x)$ az operáció által lényegében egyértelműen meghatározott, korlátos emelkedésű (Lipschitz-feltételnek eleget tevő) függvény.

Szőkefalvi-Nagy Béla folytatta a kvantummechanikai perturbációszámítás matematikai megalapozására irányuló vizsgálatait. Sikerült az eddig csupán a Hermite-féle, ill. az önadjungált operátorok perturbációjára vonatkozó eredményeknek jórészét kiterjesztenie általános *zárt* T operátorok esetére is, akár a Hilbert-tér, akár valamely még általánosabb teljes lineáris metrikus tér, azaz valamely Banach-tér operátorairól legyen is szó. A zártság feltétele igen általános: csak azt kívánja meg, hogy ha az $\{f_n\}$ és a $\{Tf_n\}$ sorozatok mindketten konvergensek: $f_n \to f$, $Tf_n \to g$, akkor $g = Tf$ legyen. Sikerül megmutatni, hogy ha a T_0 operátor zárt, akkor a zártsága elég kis perturbáció esetén megmarad. Pontosabban, ha a „perturbált"

$$T(\varepsilon) = T_0 + \varepsilon T_1 + \varepsilon^2 T_2 + \cdots$$

operátornak az ε paraméter elég kis értékeire ugyanaz az értelmezési tartománya, mint a T_0 operátornak, akkor a $T(\varepsilon)$ operátor az ε elég kis értékeire szintén zárt. Ha λ_0 a T_0 spektrumának izolált pontja és ha ennek a pontnak az ú. n. „principális multiplicitása" véges, mondjuk m-mel egyenlő, akkor a $T(\varepsilon)$ operátor spektruma a λ_0 pont környezetében véges sok pontból áll csak és e pontok principális multiplicitásainak összege szintén m-mel egyenlő. Speciálisan, ha $m = 1$, akkor a $T(\varepsilon)$-nak is csak egyetlen $\lambda(\varepsilon)$ spektrumpontja van a λ_0 környezetében, s ez, valamint a hozzátartozó sajátelem, mint az ε függvényei, az ε egy-egy hatványsorával állíthatók elő; e hatványsorok konvergenciasugara és konvergenciájának gyorsasága megbecsülhető. Magyarázatul jegyezzük meg, hogy a T operátor spektrumában levő λ pont „principális multiplicitásán" annak az altérnek a dimenzióját értjük, amelyet azok az f

elemek határoznak meg, amelyekre

$$\|(T-\lambda)^n f\|^{\frac{1}{n}} \rightarrow 0 \qquad (n \rightarrow \infty).$$

Riesz Frigyes és *Szőkefalvi-Nagy Béla* terjedelmes monográfiát írtak, amely „Előadások a funkcionális analízisből“ címmel, francia nyelven, a Magyar Tudományos Akadémia kiadásában rövidesen megjelenik. E könyv felöleli a valós függvények, továbbá a lineáris operációk és operátorok elméletének számos fejezetét és különös gondot fordít arra, hogy a problémák megoldására felhasználható mennél több módszerrel ismertesse meg az olvasót. A könyv első része a valós függvénytan modern fejezeteibe vezet be; itt van kifejtve első ízben többek között a Lebesgue-integrálnak az az egyszerű elmélete, amelyet *Riesz Frigyes* egyetemi előadásaiban már évek óta használ. Ennek lényege az, hogy a legegyszerűbb függvényeknek, az ú. n. lépcsősfüggvényeknek az elemi integrálfogalmából kiindulva, monoton függvénysorozatokon át történő egyszerű kiterjesztés útján közvetlenül vezet el az általános integrálfogalomig; a halmazok mértékének fogalma és a mérhető halmazokra vonatkozó tételek azután már egyszerűen adódnak a kész integrálelméletből, ha ezt a halmazok karakterisztikus függvényeire alkalmazzuk. Ugyanebben a részben található még többek között az intervallumfüggvények elméletének az eddigieknél egyszerűbb bevezetése; szó van a különféle (francia szerzők által újabban jogosan Riesz-féle tereknek nevezett) függvényterekről és azokban értelmezett lineáris operációkról s ezzel kapcsolatban a Stieltjes-féle integrálról és annak különféle általánosításairól. A továbbiak során bevezet a könyv az integrálegyenletek és általánosabb függvényegyenletek elméletébe, részletesen kifejti a Hilbert-tér korlátos és nem korlátos önadjungált operátorainak spektrálelméletét, alapul véve itt *Szőkefalvi-Nagy Béla* rövid Ergebnisse-referátumát, de sokkal részletesebb kidolgozásban, a szerzők és mások számos új eredményével kiegészítve, s alkalmazásokkal többek között a potenciálelméletre, a sajátrezgések elméletére, a kvantummechanikai perturbációszámításra és a statisztikus mechanika ergodikus problémájára. Az utolsó fejezet betekintést nyújt az általános — nem önadjungált, sőt nem is normális — operátoroknak az érdeklődés előterében álló, de még nem teljesen kidolgozott spektrálelméletébe.

* * *

Nem lenne teljes ez a beszámoló az analízis terén elért eredményekről, ha nem emlékeznénk meg arról a hatalmas teljesítményről, amelyet analízis tárgyú bel- és külföldi, elsősorban szovjet művek fordítása és kiadása terén ez évben felmutattunk. Megjelentek magyar fordításban *Bermant,* továbbá *Grebencsa* és *Novoszelov* bevezető tankönyvei, valamint *Gjunter* és *Kuzmin* hasznos „Felsőbb mennyiségtani példatára.“ Új, bővített kiadása készült el ezenkívül *Szász Pál* bevált „Differenciál- és Integrálszámítás“-ának. Míg e műveknek az egyetemi oktatás fogja kétségkívül nagy hasznát látni, addig az olyan művekből, mint *Ahijezer* magyar fordításban most megjelent approximációelméletéből, vagy *Natanszon* „Konstruktív függvénytan"-a készülő magyar kiadásából fiatal és idősebb matematikusaink egyaránt sokat meríthetnek. E két mű minden bizonnyal nagy érdeklődésre és kedvező talajra fog találni minálunk, hiszen e tárgykörben olyan kimagasló orosz és szovjet matematikusok, mint *Csebüsev*, *Markov*, *Bernstein* és számos kiváló tanítványuk dolgozott és dolgozik ma is, de mellettük jelentős és e művekben is kiemelt eredményeket ért el e téren a magyar analízis-iskola is, amelynek élén mint irányítók és aktív kutatók ott állnak mestereink, *Fejér Lipót* és *Riesz Frigyes*.

* * *

Ezzel elértem rövidreszabott beszámolóm végére. Ha szükségképpen hiányos és töredékes volt is ez a beszámoló, az talán világosan kitűnt belőle, hogy a magyar matematikusok tudományuknak ezt a szép, fontos és a természet megismerésében és leírásában oly alapvető jelentőségű ágát ebben az évben is igen sokoldalúan művelték és jelentős eredményekkel gazdagították. Minden — erkölcsi és anyagi — előfeltétel megvan arra, hogy e kutatómunka a jövőben is tervszerűen folyjék és eredményes legyen.

Szegedi Tudományegyetem
Bolyai Intézete.

IRODALOM

[1] *L. Fejér:* Beste Approximierbarkeit einer gegebenen Funktion durch ein Polynom gegebenen Grades, wenn das Polynom sonst beliebig oder wenn es noch einer interpolatorischen Beschränkung unterworfen ist, Math. Nachrichten, *4* (1951), 328—342.

[2] *L. Fejér—G. Szegő:* Special conformal mappings, Duke Math. Journal, *18* (1951), 535—548.

[3] *Mikolás Miklós:* Egy általános összegező formuláról — Sur une extension de la formule d'Euler—Maclaurin, se rapportant a des intégrales curvilignes complexes, I. Magyar Mat. Kongresszus Közleményei (sajtó alatt).

[4] *M. Schweizer:* The partial sums of second order of the geometric series, Duke Math. Journal, *18* (1951), 527—533.

[5] *L. Fejér:* Eigenschaften von einigen elementaren trigonometrischen Polynomen, die mit der Flächenmessung auf der Kugel zusammenhängen, Kung. Fysiografiska Sällskapets i Lund förhandlingar, *Riesz Marcell* jubileumi kötet, Lund (sajtó alatt).

[6] *Béla Sz.-Nagy:* Sur l'ordre de l'approximation d'une fonction par son intégrale de Poisson, Acta Math. Hung., *1* (1951), 183—186.

[7] *Béla Sz.-Nagy:* Über die Konvergenz von Reihen orthogonaler Polynome, Math. Nachrichten, *4* (1951), 50—55.

[8] *Alexits György:* A Lebesgue-féle függvények jelentősége az ortogonális polinomok szerint haladó sorok konvergenciájának problémájában, I. Magyar Mat. Kongresszus Közleményei (sajtó alatt).

[9] *G. Alexits:* Sur les sommes de fonctions orthogonales, Annales Soc. Polonaise (sajtó alatt).

[10] *G. Alexits:* Über die Transformierten der arithmetischen Mittel von Orthogonalreihen, Acta Math. Hung., *2* (1951), 1—8.

[11] *K. Tandori:* Über die Cesàrosche Summierbarkeit der orthogonalen Reihen, Acta Sci. Math., Szeged, *14* (1951), 85—95.

[12] *J. Aczél—L. Kalmár—J. G. Mikusinski:* Sur l'équation de translation, Studia Math., *12* (1951), 112—116.

[13] *Aczél János:* Többváltozós függvényegyenletekről. I., Matematikai Lapok, *2* (1951), 99—117.

[14] *B. Barna:* Über das Newtonsche Verfahren zur Annäherung von Wurzeln algebraischer Gleichungen, Publicationes Math., *2* (1951), 50—63.

[14a] *G. Freud:* Restglied eines Tauberschen Satzes. I, Acta Math. Hung. (sajtó alatt).

[15] *Á. Császár:* Sur les nombres de Lipschitz généralisés, Acta Math. Hung., *1* (1951), 277—302.

[16] *Császár Ákos:* A Darboux-féle tulajdonságról. — Sur la propriété de Darboux, I. Magyar Mat. Kongresszus Közleményei (sajtó alatt).

[17] *Á. Császár:* Sur quelques propriétés générales des fonctions d'une variable, Colloquium Math. (sajtó alatt).

[17a] *Gehér István:* Egy integráltranszformációról, I. Magyar Mat. Kongresszus Közleményei (sajtó alatt).

[18] *F. Riesz:* Sur la représentation des opérations fonctionnelles linéaires par des intégrales de Stieltjes, Kung. Fysiografiska Sällskapets i Lund förhandlingar, *Riesz Marcell* jubileumi kötet (sajtó alatt).

[19] *B. Sz.-Nagy:* Perturbations des transformations linéaires fermées, Acta Sci. Math. Szeged, *14* (1951), 125—137.

ÚJABB EREDMÉNYEK AZ ABSZTRAKT ALGEBRA TERÜLETÉN

SZELE TIBOR

Előadta a Matematikai Állandó Bizottság 1951 december 13-án tartott ülésén

Az absztrakt algebra, vagy kevésbbé szabatos elnevezéssel modern algebra bizonyos értelemben különleges helyet foglal el a matematika legújabb ágai között. Ennek oka az a hatalmas mérvű és rendkívül gyors ütemű fejlődés, amely ezt a tudományt a XX. század immár mögöttünk levő első felében mai állapotához eljuttatta. Elegendő néhány szóval utalni erre a nagy átalakulásra. Száz esztendővel ezelőtt még nyilván nem lehetett szó arról, hogy az algebra önálló tudomány volna, hiszen az akkori algebra még u. n. „alaptételét" is kénytelen volt a függvénytanból kölcsönözni. Ezzel szemben a századforduló táján feltörő hatalmas erejű új gondolatok és fogalomalkotások, valamint ezek kristálytisztaságú rendszerének kialakulása lehetővé tette, hogy az algebra századunk első negyedében teljesen autark tudománnyá váljék, legalábbis olyan értelemben, hogy azóta csupán a matematika alapjaira vonatkozó kutatásokból, különösképpen a halmazelméletből merít. Ennél többet ezen a téren a dolog természeténél fogva nem is várhatunk. Másfelől a század második negyedében bekövetkező legújabb fejlődés odavezetett, hogy ma az algebra a matematika úgyszólván valamennyi ágában folyó kutatásoknál jelentős szerepet tölt be. Alapvető fontosságú fogalmakat és módszereket lehetett átültetni a tiszta algebra talajából a matematika látszólag egészen távoleső tudományágaiba, s ez nemcsak rendkívül termékenynek bizonyult a korszerű kutatásban, hanem érezhető hatással volt az illető tudományágak „probléma-látására", beállítottságára is. Ezért minden túlzás nélkül mondhatjuk azt, hogy korunkban a modern algebra gyakorol a matematika egészének fejlődésére olyan univerzálisan influáló hatást, mint a mult század második felében a függvénytan. Ugyanakkor hangsúlyoznunk kell azonban azt is, hogy ez a félreismerhetetlen folyamat a valóságban igen természetes és egészséges kölcsönhatások alakjában megy végbe, amelyek során az algebra is nyer értékes indíttatásokat a matematika egyéb területein folyó kutatásokból. Elegendő ilyen vonatkozásban példaképpen arra a mindkét irányban igen termékeny kapcsolatra utalnunk, amely egyrészt az absztrakt algebra, másrészt a funkcionál-analízis, a modern geometriák, a topológia és a matematika alapjaira vonatkozó kutatások legújabb fejlődése között fennáll. Tehát semmiképpen sincs szó arról, hogy az algebra említett hatása a legcsekélyebb mértékben is veszélyeztetné a matematika többi ágainak önállóságát és szuverénitását.

Ha ármost ilyen mély kapcsolatban van az algebra az egész matematika jelenkori fejlődési irányaival, akkor örvendetesnek mondható, hogy hazánkban is több matematikus foglalkozik absztrakt algebrával és ért el ezen a téren számottevő eredményeket. Különösen biztató annak a grafikonnak ezidei tendenciája, amelyet a hazai algebrai kutatások extenzitásának időbeli fejlődéséről lehetne késziteni. *Bauer Mihály*ra, *Haar Alfréd*ra és *Kürschák József*re gondolva ugyanis nyilvánvaló, hogy a jelen század első harmadában voltak világraszóló magyar alkotások az absztrakt algebra területén, de az ilyen irányú kutatások akkoriban a rendkívül gazdag és sokoldalú magyar matematikai életnek még aránylag csupán szűk metszetét jelentették. Ezzel szemben századunk második harmadának eddig eltelt első felében rohamos emelkedést mutat az említett grafikon. Csak a legutóbbi egy-másfél esztendő alatt is olyan kiterjedt és sokoldalú vizsgálatokat folytattak algebristáink, hogy nehezen megoldható feladat a rendelkezésre álló idő alatt hiánytalanul beszámolni e vizsgálatok legfontosabb eredményeiről, hiszen algebrával foglalkozó matematikusainknak már a száma is örvendetesen nagy. Ezenfelül koruk és matematikai munkásságuk pillanatnyi szakasza tekintetében is széles spektrumot mutatnak: van köztük három akadémikus, akik egyszersmind Kossuth-díjasok is; viszont négy egészen fiatal, illetve kutatómunkájának kezdetén álló algebristánkról is szólnunk kell, egyrészt ama kapcsolat miatt, amelyben munkásságuk az őket irányító matematikusokéval van, másrészt mert eredményeik elérik azt a fokot, amely szükségessé teszi, hogy szerepeljenek ebben a beszámolóban. Jó fényt vet ez a jelenség arra, hogy az alkotó munka szempontjából milyen kedvező és egészséges közösségi szellem hatja át algebristáinkat. Ennek köszönhető, hogy nem egymástól elszigetelten, csupán egyéni becsvágytól hajtva végzik munkájukat, hanem állandó gondolatcsere kapcsolatában élnek egymással s azokkal a matematikusokkal, akik másirányú vizsgálataikban fel tudják használni a modern algebra eredményeit. Ezenfelül azok az algebristáink, akik már érettebb kutatók, természetesnek tartják, hogy tudásukat, kialakított módszereiket és problémáikat továbbadják azoknak a fiatal, illetve kezdő kutatóknak, akik közül az eljövendő évtizedek magyar algebristái kerülnek majd ki. Ezért a jövőtől nemcsak azt várhatjuk, hogy a hazánkban folyó algebrai kutató munka megmarad mostani színvonalán, hanem azt is, hogy ez a színvonal még emelkedni fog.

Ha azt kérdezzük, hogy algebrai kutatásunk az absztrakt algebrának melyik ágában bizonyult legeredményesebbnek, akkor erre az az egyértelmű válasz, hogy a csoportelméletben. Ez annyira nyilvánvaló és külföldi matematikusok által is elismert tény, hogy ma már nem elhamarkodott derűlátás egy önálló magyar csoportelméleti iskoláról beszélni, amely éppen ezekben az években alakul ki, de körvonalai már most is teljes határozottsággal felismerhetők. Örömmel kell rámutatnunk arra, hogy — természetesen sokszorosra nagyított méretekben — hasonló jelenség nyilvánul meg a Szovjetunió matematikai életében is, ahol, mint legilletékesebb, *A. G. Kuros* akadémikus állapította meg nemrégiben, hogy a szovjet algebristák eredményei a csoportelmélet terén a legjelentősebbek. Mi, magyar algebristák, úgy véljük, hogy itt nemcsak véletlenről van szó, s rajtunk áll, hogy azt a rendkívül kedvező lehetőséget, amelyet ez az analógia nyujt számunkra, minél jobban felhasználjuk. Már az eddigiek során is sokat köszönhetünk az élenjáró szovjet csoportelméleti iskola hatásának, de a legközelebbi jövőben még inkább igyekezni fogunk elmélyedni a nagy szovjet eredmények és módszerek tanulmányozásában.

Mielőtt a hazánkban folyó algebrai kutatások legújabb eredményeinek ismertetésére rátérnék, legyen szabad kegyelettel megemlékeznem egy nagyon fiatalon elhunyt magyar algebristáról, *Sándor Gyulá*ról, aki az alatt a rendkívül rövid idő alatt is, amely adatott neki, bizonyságát tudta nyujtani nagyerejű algebrai tehetségének. *Sándor Gyula* munkaszolgálatosként halt meg 1944-ben, az akkori rémuralom következtében. Nem sokkal halála előtt egy levelet írt *Rédei László*nak, aki ezt a levelet mostanában publikálta. Ez teszi időszerűvé egyebek között mostani megemlékezésünket *Sándor Gyulá*ról. Az említett levélben *Sándor* pontos becslést ad a törzshatványmodulusú magasabbfokú kongruenciák megoldásainak számára. Ez az eredmény egy *Nagell—Ore*-féle tétel élesítését jelenti és absztrakt algebrai értelmezése nyilvánvaló. Fájdalommal gondolunk azokra a további szép eredményekre, amelyekkel *Sándor Gyula* oly korai elhunyta miatt lett szegényebb matematikai életünk.

Még csupán annyit jegyzek meg tulajdonképpeni beszámolóm megkezdése előtt, hogy az alábbiakban absztrakt algebra helyett röviden csak algebrát fogok mondani, viszont beszámolóm időhiány miatt csupán az absztrakt algebra területén elért eredményekre vonatkozik. Vannak hazai kutatóinknak szép eredményei a klasszikus, illetve numerikus algebra körében is, ezekre azonban én most nem terjeszkedhetem ki.

Hajós György legújabb algebrai eredményeinek ismertetésénél abból kell kiindulnunk, hogy Hajós tíz évvel ezelőtt világraszóló eredményt ért el *Minkowski* egy olyan sejtésének bebizonyításával, amely azelőtt egy félévszázadon át dacolt a legkiválóbb matematikusok egész sorának sokirányú bizonyítási kísérletével. Az ily módon *Minkowski—Hajós*-féle tétellé változott sejtésnek eredeti, számelméleti jellegű megfogalmazásáról ezúttal nem szólva, azt a geometriai megfogalmazást kell említenünk, amelyet szintén *Minkowski* adott sejtésének. Nevezzünk e célból pontrácsnak az n-dimenziós euklideszi térben olyan, csupa izolált pontokból álló ponthalmazt, amely önmagába megy át minden olyan transzlációnál, melyet a halmaz két pontja által meghatározott vektor definiál. Nevezzük továbbá egyszeresen térfedő kockarácsnak csupa egybevágó kockák olyan halmazát ugyancsak az n-dimenziós térben, amelyre érvényesek a következők: a tér bármely pontja hozzátartozik a halmaz legalább egy kockájához, de a halmaz két különböző kockájának soha sincsen közös belső pontja; továbbá a halmazhoz tartozó kockák középpontjai pontrácsot alkotnak. A Minkowski—Hajós-féle tétel mármost úgy szól, hogy egyszeresen térfedő kockarács mindig oszlopozott, azaz tartalmaz két olyan szomszédos kockát, amelyek egy $n-1$ dimenziójú oldallapja teljes egészében közös. Bármennyire egyszerűen hangzik is ebben a fogalmazásban a tétel, bizonyítása rendkívüli nehézségekbe ütközik, s ezek a nehézségek a tér dimenziószámával oly erősen növekednek, hogy *Hajós* előtt nagy teljesítménynek számított az is, amikor pl. bebizonyították a tételt 8 dimenziós térre. Hajós az első döntő fontosságú lépést azzal tette a tétel általános igazolása irányában, hogy egy egészen új, csoportelméleti fogalmazást adott neki, amely már teljesen független a geometriai fogalmazásban szereplő tér dimenziószámától. Minkowski sejtésének ezt a *Hajós*tól származó csoportelméleti alakját sikerült azután valamivel később magának *Hajós*nak rendkívül mély és éleselméjű meggondolások útján bebizonyítania. A Hajós-féle csoportelméleti tétel megfogalmazása céljából tekintsünk egy G véges Abel-féle csoportot. Jelölje A és B két tetszőleges részhalmazát, vagy másszóval komplexusát G-nek. Ha G bármely eleme pontosan egyféleképpen előállítható egy A-beli és egy B-beli elem szorzataként, akkor azt mondjuk, hogy G az A és B komplexusok szorzata. Ezt a tényt így jelöljük: $G = A . B$. Nevezzük továbbá szimplexeknek G csupa különböző elemekből álló és

$$[\alpha]_n = [1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^{n-1}]$$

alakú komplexusait. Az α^n elemet a felírt szimplex záróelemének nevezzük. Ez nyilván akkor és csak akkor eleme a szimplexnek, ha $\alpha^n = 1$, azaz ha a szimplex csoport. Mármost a Hajós-féle csoportelméleti tétel így szól: Ha egy véges Abel-féle csoportot előállítunk szimplexek szorzataként, akkor e szimplexek egyike okvetlenül csoport.

Jellemző e tétel rendkívüli mélységére, hogy bár tisztán csoportelméleti tényt fejez ki, mindmáig nem sikerült senkinek sem kizárólag csoportelméleti eszközökkel bebizonyítani, hanem csak úgy, hogy gyűrűelméleti, pontosabban csoportalgebrai segédeszközöket is igénybe veszünk. *Hajós* egyik legnagyobbjelentőségű eredménye a csoportalgebrai bizonyítási módszer felfedezése volt, amely mindmáig az egyetlen járható út e roppant nehéz és mély tétel igazolására. Tíz esztendő telt el *Hajós* bizonyításának publikálása óta, s ez idő alatt fel is figyeltek rá a matematikusok a világ minden részében, de *Hajós* bizonyítása mindmáig lényegében az egyetlen. Továbbhaladni főképpen csak *Hajós* bizonyításának technikai egyszerűsítése irányában sikerült, azonban a *Hajós*tól származó döntő gondolatok változatlan megtartása mellett. Nagy örömmel állapíthatjuk meg, hogy ezek az eredmények is magyar matematikusoknak, elsősorban *Rédei László*nak köszönhetők.

O. H. Keller 1930-ban azt a sejtést mondotta ki, hogy egybevágó kockák egyszeresen térfedő rendszere akkor is mindig oszlopozott, ha nem kívánjuk meg, hogy a kockák középpontjai rácsot alkossanak. Ez az u. n. Keller-féle sejtés nyilván általánosítása a Minkowski—Hajós-féle tételnek, s bizonyítása eddig csak legfeljebb hatdimenziós térre sikerült. *Hajós* legújabban a Keller-féle sejtés analóg csoportelméleti megfogalmazását is meg tudta adni, s ez az eredménye úgy tekinthető, mint az első komoly lépés Keller sejtésének általános igazolása irányában. Ettől kezdve joggal remélhetjük, hogy ez a mostanáig reménytelenül nehéznek bizonyult sejtés előbb-utóbb mégis igazolást nyer majd. Megalapozza ezt a reményünket az a körülmény is, hogy a Hajós-féle csoportelméleti fogalmazásban Keller sejtése is dimenziómentes. A sejtés csoportelméleti alakja így szól: Ha

$$G = K \cdot [\alpha_1] \cdot [\alpha_2] \cdots [\alpha_m],$$

ahol K a G véges Abel-féle csoport tetszőleges komplexusa, akkor az $[\alpha_i]$ szimplexek közt van olyan, amelynek záróeleme előállítható két K-beli elem hányadosaként. Nyilvánvaló, hogy ez az állítás a $K=1$ esetben a Hajós-féle csoportelméleti tételbe megy át.

Hajós csoportelméleti vizsgálatai egy másirányú, de szintén igen érdekes és nehéz problémakörhöz is elvezettek, amelyben legújabban szintén nagysúlyú eredményt sikerült Hajósnak elérnie. Nevezzük a G csoport valamely A komplexusát periódikusnak, ha van G-nek olyan $\alpha \neq 1$ eleme, amelyre $\alpha \cdot A = A$. Ez a követelmény nyilván pontosan annyit jelent, hogy A az α elem által generált ciklikus csoport bizonyos G-beli mellékosztályaiból áll. Mármost *Hajós* azt a problémát vetette fel, hogy ha G fel van bontva két komplexus szorzatára, igaz-e, hogy ezek egyike szükségképpen periódikus. Legelőször azt sikerült *Hajós*nak bebizonyítani, hogy abban az esetben, amikor G törzshatványrendű ciklikus csoport, a válasz igenlő. De már általában tetszőleges véges ciklikus csoport esetében is igen nehéz ez a probléma. Legújabban azt sikerült Hajósnak kimutatnia, hogy ha G olyan ciklikus csoport, amelynek rendje felbontható három páronként relatív prímszám szorzatára, s e három szám közül legalább kettő összetett, akkor G előállítható két nem-periódikus komplexusának szorzataként. Eszerint a felvetett kérdésre az esetek legnagyobb részében nemleges a válasz. *Rédei László*nak viszont azt sikerült bebizonyítania, hogy a válasz igenlő, ha a G ciklikus csoport rendje háromnál nem több prímszám szorzata. Ilyen módon most már csupán a $p^m q^n, p^m q r, pqrs$ rendszámú ciklikus csoportok esetében nyílt a probléma, ahol p, q, r, s különböző prímszámokat jelentenek.

Kalmár László egyik legújabb dolgozatában a valós számok *Cantor*-féle értelmezésének *van der Waerden* által algebraizált módját egy igen lényeges ponton tökéletesítette, s ennek köszönhetően a valós számok bevezetésének ez az útja tisztán algebraivá vált. Hogy milyen új és mély bepillantást enged *Kalmár* eredménye a valós számtestnek ebbe a tisztán algebrai konstrukciójába, azt az az örvendetes tény is mutatja, hogy ezek a vizsgálatok *Kalmár*t egy igen érdekes sejtéshez vezették, amelyet azóta *Kalmár* és *Rédei* egyik tanítványa, *Steinfeld Ottó* be is bizonyított. Ennek az eredménynek megfogalmazása céljából tekintsünk egy K archimédeszileg elrendezett testet, s jelöljük B-vel a K-beli elemekből álló korlátos, C-vel a Cauchy-féle konvergenciakritériumnak elegettevő, N-el pedig a nulla-határértékű sorozatok halmazát. A B, C, N halmazok nyilván gyűrűt alkotnak a sorozatok szokásos módon értelmezett összeadására és szorzására nézve, s ezenfelül N ideálja B-nek. Ha K a racionális számtest, akkor a C/N maradékosztálygyűrű alkalmas a valós számtest algebrai értelmezésére. Mármost *Kalmár* sejtése, illetve Steinfeld eredménye úgy szól, hogy a C/N test maximális a B/N maradékosztálygyűrűben, azaz C/N-nek nincsen valódi testbővítése a B/N gyűrűben.

Ugyancsak *Kalmár László* legújabb kutatásai nevezetes eredményhez vezettek az asszociatív rendszerek szóproblémájával kapcsolatban is. E probléma tulajdonképpen a matematika alapjaira vonatkozó vizsgálatok körébe tartozik elsősorban, de nyilvánvaló, hogy szorosan összefügg az algebrával is, és az ilyen természetű kapcsolatok éppen a legutóbbi időben igen termékenyeknek bizonyultak az algebra haladására nézve. Tekintsünk véges számú generátorelemmel és definiáló relációval megadott asszociatív rendszert, amelyben tehát egy asszociatív művelet van értelmezve. Egy ilyen rendszer *Thue* által 1914-ben felvetett „szóproblémája" nem más, mint az a kérdés, hogy mi a szükséges és elegendő feltétele annak, hogy egy reláció érvényes legyen ebben a rendszerben. E problémát akkor tekintenők megoldhatónak, ha volna olyan eljárás, amelynek segítségével bármely adott relációról véges számú lépésben el tudnók dönteni, hogy érvényes-e a tekintett asszociatív rendszerben. Egy ilyen végesjellegű eldöntő eljárás szabatos definiciójával többen foglalkoztak, s legkézenfekvőbb definíciónak az mondható, amelyet *Markov* szovjet akadémikus adott az I. Magyar Matematikai Kongresszuson tartott előadásában az algorithmus fogalmára. Mármost *Markov* és *Post* egymástól függetlenül s majdnem egyidőben, elég bonyolult módon kimutatták olyan végesen generált asszociatív rendszer létezését, amelynek szóproblémája nem oldható meg általános rekurzív eljárással. *Kalmár* legújabban erre az u. n. Markov—Post-féle tételre sokkal egyszerűbb, közvetlenül az általános rekurzív eljárás fogalmán alapuló bizonyítást adott.

Rédei László a legutóbbi időben is rendkivül termékeny munkásságot folytatott és gyarapította nagyjelentőségű eredményekkel a csoportelmélet, a gyűrűelmélet, az algebrai struktúrák általános elméletének és az algebrai lényeg miatt az általunk tárgyalt tárgykörbe tartozó véges geometriának területét. Legkiemelkedőbb alkotásai a legújabbak közül egy, az algebrák elméletével kapcsolatos új fogalomnak, a *duplaalgebrának* bevezetése, amelyet mindjárt ismertetek, továbbá az algebrai struktúrák *ferdeszorzatának* fogalma, amely már a *Rédei*től eredő általános értelmezése óta eltelt rövid idő alatt is rendkívül értékesnek és hasznosnak bizonyult mind a csoportelmélet, mind a gyűrűelmélet problémakörében.

Közismert dolog, hogy a modern gyűrűelmélet egyik legszebb és legjobban kidolgozott ága az algebrák, vagy más elnevezéssel hiperkomplex rendszerek elmélete. Ha a lehető legáltalánosabb felépítésben akarnánk ezt az elméletet tárgyalni, akkor egységelemmel biró, különben pedig teljesen tetszőleges ferde gyűrűt kellene alapul vennünk. Ekkor azonban az az algebrai vonatkozásban ritka és szokatlan helyzet áll elő, hogy az algebrák különösen szép és fontos példái, mint amilyen a polinomgyűrű, a teljes mátrixgyűrű, az alternáló számok gyűrűje és a kvaterniógyűrű, áldozatul esnek a tárgyalásmód nagy általánosságának. Ezek ugyanis a szokásos értelmezésben csak akkor algebrák, ha az alapgyűrű kommutatív. Rédeinek e felismerésből kiindulva sikerült a szokásos operátorfeltételek alkalmas megváltoztatásával egy duplaalgebrának nevezett olyan gyűrűosztályt értelmeznie, amely természetes általánosítása az algebrák fogalmának, az utóbbival kommutatív alapgyűrű esetén egybeesik, s amely az előbb említett négy fontos esetet is felöleli. A duplaalgebra elnevezés azt jelzi, hogy az ilyen rendszernek az alapgyűrű kétoldali operátortartománya. Egészen bizonyos, hogy ez az új fogalom nagyjelentőségűnek bizonyul majd a modern gyűrűelméletben, éspedig egyrészt azért, mert eddig egymástól egészen távoleső gyűrűtípusok egységes tárgyalását teszi lehetővé, kiküszöbölve ezáltal az eddigi algebra-fogalom legsúlyosabb hiányosságát, másrészt mert remélhető, hogy idővel sikerülni fog a duplaalgebrák elméletét az algebrákéhoz hasonló mélységben feltárni. Ilyen vonatkozásban máris nagybecsű eredményei vannak *Rédei*nek. Sikerült nevezetesen megadnia az összes olyan duplaalgebrákat, amelyeknek van monomiális bázisa, azaz olyan bázisa, hogy két báziselem szorzata mindig egy báziselem szorozva az alapgyűrű valamely elemével. Az összes ilyen duplaalgebrák megadása egy csoportnak egy félcsoport által való *Schreier*-féle bővítése útján sikerül *Rédei*nek. Alkalmas félcsoport esetén ez a konstrukció a legegyszerűbb esetekben éppen a fentebb említett négy fontos gyűrűt szolgáltatja.

Egy másik, hasonlóan nagy rendszerező erővel biró algebrai struktura, amelyet *Rédei* egyik legújabb dolgozatában rendkívül általánosan értelmez, a ferdeszorzat. Hogy ez a fogalom is mennyire alkalmas egymástól eddig elszigeteltnek tekintett konstrukciók egységes tárgyalására, azt legszebben az a tény illusztrálja, hogy a ferdeszorzat a csoportelméletben egyenlőrangú speciális esetként öleli fel a *Schreier*-féle csoportbővítést és a faktorizálható csoportok *Zappa—Szép*-féle elméletét. *Rédei* ilyen irányú vizsgálatai külföldön is visszhangra találtak már, amennyiben *Kochendörfer* is bekapcsolódott e kutatásokba.

A Schreier-féle csoportbővítési elmélet gyűrűelméleti analogonját 1942-ben sikerült *Everett*nek megcsinálnia. *Everett* nehéz tárgyalásmódja helyett *Rédei* ezt a problémát is rendkívül elegánsan és áttekinthető módon tudja megoldani a ferdeszorzat segítségével.

Egyik további igen érdekes gyűrűelméleti dolgozatában az összes olyan gyűrűket sikerül *Rédei*nek explicit formában megadnia, amelyek bármely részmodulusa kétoldali ideál. Figyelemreméltó, hogy egy ilyen gyűrű mindig kommutatív. Ez a *Rédei* által megoldott probléma úgy tekinthető, mint a *Hamilton*-féle csoportok problémájának gyűrűelméleti analogonja.

Egy *Szele Tibor*ral közösen írt gyűrűelméleti dolgozatában megadja *Rédei* az összes elsőrangú gyűrűket, így nevezve egy gyűrűt, ha additív csoportja elsőrangú csoport. E dolgozat eredményeit tőlük függetlenül valamivel szűkebb keretben egy évvel később *R. A. Beaumont* és *H. S. Zukkermann* is publikálták a Pacific Journal of Mathematics 1. kötetében.

Igen figyelemreméltóak *Rédei*nek azok a dolgozatai is, amelyekben a Hajós-féle csoportelméleti tétel eredeti bizonyítását egyszerűsíti. Kiemelendő, hogy *Rédei* talált egy új megfogalmazást is a Minkowski—Hajós-féle tételre, amely a valós számok additív csoportjának egy tulajdonságát fejezi ki és így szól: Jelöljük V-vel a valós számok additív csoportját, V_n-el pedig n számú V csoport direkt összegét. Ha U olyan alcsoportja V_n-nek, hogy V_n U szerinti bármely mellékosztályába pontosan egy olyan $(x_1, \ldots, x_n)$ elem esik, amelyre $0 \leqq x_i < 1$ $(i = 1, \ldots, n)$, akkor V_n-nek legalább egyik $(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ eleme U-ban van.

A véges egyszerű csoportok elméletével kapcsolatos Rédei következő újabb eredménye: Bármely G páros rendű véges egyszerű csoport tartalmaz olyan $G \supset H \supset K$ részcsoportláncot, amelyben H és K nem Abel-féle csoport, kivéve azt az esetet, amikor G rendje 2 vagy 60.

*Szép Jenő*vel közösen a véges nilpotens csoportok generátorrendszereiről a következő eredményt nyerte *Rédei*: Ha $\{\alpha, \beta, \ldots\}$ véges p-csoport és $\{\alpha, \beta, \ldots\} \neq \{\beta, \ldots\}$, akkor $\{\alpha, \beta, \ldots\} \neq \{\alpha^p, \beta, \ldots\}$. Hasonló megállapítás érvényes a tekintett csoport kommutátorcsoportjára nézve is. Legújabban *N. Ito* kimutatta, hogy ezek az eredmények tovább nem élesíthetők.

Jelenleg is folyamatban vannak *Rédei* vizsgálatai két adott ciklikus csoport összes Zappa—Szép-féle szorzatának meghatározására.

Annak a *Szele Tibor* által több dolgozatban vizsgált kérdésnek a duálisaként, hogy egy gyűrű mennyiben van determinálva additív csoportja által, *Steinfeld Ottó, Rédei* tanítványa, azt a problémát vetette fel, hogy melyek az összes gyűrűk, amelyek multiplikatív félcsoportja elő van írva. Ez egy rendkívül nehéz probléma, amely az említett magyar kutatóktól függetlenül *D. Ellis* floridai matematikus vizsgálataiban is felmerült, aki azonban eddig még nem tudott eredményt elérni ezzel kapcsolatban. *Rédei* egy fontos észrevételéből kiindulva most *Rédei* és *Steinfeld* közösen kutatják ezt a problémát, már eddig is szép eredményekkel.

Mahler és *Jarnik* felfedezte a rácspontokra vonatkozó Minkowski-féle alaptétel p-adikus általánosítását. *Rédei*nek sikerült ezt a tételt még tovább általánosítania, egyúttal kiderítve, hogy a tétel valódi lényegének nem a p-adikus számok, hanem a véges projektív terek, azaz a véges testek nyelve az igazi kifejezője. Rédei tétele egyszersmind *Thue* egyik eredményének is nagymérvű általánosítása. Ezenfelül több figyelemreméltó számelméleti alkalmazását is adta már Rédei emez eredményének, amelyek közül egyik a törzsszámmodulusra vonatkozó hatványmaradékok eloszlását illeti és *Vinogradov* egy nevezetes tételével áll kapcsolatban.

Aczél János vizsgálatainak egyik legújabb eredménye algebrai vonatkozásban is figyelemreméltó. *Frobenius*tól származik a hiperkomplex számok elméletének az a nevezetes tétele, hogy a kvaterniótest az egyetlen lehetséges véges fokszámú nem-kommutatív testbővítése a valós számtestnek. *Aczél*nak sikerült egy ennél részben erősebb, részben gyengébb, de Frobenius tételével szoros kapcsolatban levő tételt bebizonyítania, amely lényegében azt mondja ki, hogy a kvaterniótest a valós számtestnek egyetlen negyedfokú nullosztómentes gyűrűbővítése. Kiemelendő *Aczél* bizonyításának geometriai jellege és rendkívül szemléletes volta, ami didaktikai szempontból számottevő haladást jelent, mivel ezen az úton hozzáférhetővé válik Frobenius tételének gondolatköre olyanok számára is, akik előzőleg nem foglalkoztak behatóan absztrakt algebrával.

Fuchs László legújabb vizsgálatai az elrendezett és részben elrendezett csoportok elmélete, az értékeléselmélet, továbbá az ideálelmélet terén hoztak rendkívül értékes gyümölcsöket.

Legyen G additív Abel-féle csoport. G-t akkor nevezzük *részben elrendezett* csoportnak, ha elemei részben rendezett halmazt alkotnak oly módon, hogy $a>0$ és $b>0$ esetén mindig $a+b>0$. A tekintett elrendezés Fuchs elnevezése szerint *normális*, ha abból, hogy G valamely a elemére és valamely n természetes számra $na \geqq 0$, mindig $a \geqq 0$ következik. Mármost Fuchs problémája a következő: A részben elrendezett G csoport rendezése mikor terjeszthető ki a csoport teljes elrendezésévé, ha a kiterjesztésnél ezenfelül még G egy tetszőleges eleméről előírjuk, hogy az 0-nál nagyobb legyen (amennyiben ez a követelmény nem áll fenn már eleve, illetve nincs ellentmondásban G eredeti elrendezésével). Fuchs tétele úgy szól, hogy ez akkor és csak akkor lehetséges, ha G eredeti elrendezése normális. Ez a tétel speciális esetként tartalmazza *F. Levi* ama szép tételét, mely szerint egy Abel-féle csoport akkor és csak akkor elrendezhető, ha torziómentes.

Egy másik, ugyancsak részben elrendezett csoportokra vonatkozó dolgozatában *G. Birkhoff* egyik eredményét általánosítja *Fuchs*. Az olyan részben rendezett csoportokra, amelyek egyszersmind *lattice*-t is alkotnak ugyanarra a rendezési relációra nézve, Birkhoff értelmezte az *abszolút érték* fogalmát, mint az $a, -a$ elempár felső burkát. *Birkhoff*nál tehát az abszolút érték is csoportelem. *Fuchs* kiterjeszti ezt a fogalomalkotást tetszőleges részben rendezett csoportokra is, ahol tehát lattice-követelmények teljesüléséről nincs szó. Az a mély és finom gondolat, amely ezt az általánosítást lehetővé teszi, analóg ötletet tartalmaz ahhoz, amely a legnagyobb közös osztó és az ideál közti kapcsolatot eredményezi. A Fuchs-féle abszolút érték fogalmának megvannak mindazok a tulajdonságai, amelyek a közönséges abszolút értéket jellemzik.

Fuchs egy további dolgozatában részben elrendezett csoportok rendezéstartó homomorfizmusaival foglalkozik. Megmutatja, hogy a csoportelmélet homomorfiatétele, továbbá a két izomorfiatétel átvihető az ilyen homomorfizmusokra is. A homomorfiatételben szereplő normálosztó mindig *konvex* alcsoport és a faktorcsoport indukált elrendezése általában kiterjesztendő. E szisztematikus vizsgálatok rendkivül szép alkalmazásaként adódik *Fuchs* következő tétele: Egy normálisan részben elrendezett csoportnak akkor és csak akkor nincs valódi konvex alcsoportja, ha a csoport rendezéstartóan izomorf a valós számok egy additív alcsoportjával.

Végül még egy további, ebbe a tárgykörbe vágó dolgozatában a *Schreier*-féle csoportbővítést sikerül átvinnie *Fuchs*nak részben elrendezett csoportokra, amely utóbbiak elméletében magától értetődő módon ugyanolyan alapvető fontosságú szerepet tölt be ez az eredmény, mint a közönséges csoportoknál. Kiemeli az eredmény szépségét a következő korollárium: ha ismeretes egy részben elrendezett csoport közönséges Schreier-féle bővítése egy részben elrendezett csoporttal, akkor ez a bővítés mindig elrendezhető az alapul vett csoportok elrendezése által indukált módon, hacsak az a nyilvánvalóan szükséges követelmény teljesül, hogy a bővítésnél felhasznált automorfizmusok rendezéstartóak.

Fuchs legújabb eredményeinek egy másik kategóriájára áttérve, azt a dolgozatát vesszük sorra, amelyben az értékeléselméletet általánosítja igen messzemenően. Különös öröm számunkra emlékezetünkbe idézni, hogy ennek az egész modern algebrában, sőt ennek keretein is túlmenően, oly nagyjelentőségű elméletnek felfedezője *Kürschák József*, szintén magyar matematikus volt. Kürschák elméletében eredetileg az értékhalmaz kettős kompozíciójú algebrai struktúra volt. *Krull*tól származik az a további fontos haladást jelentő lépés, hogy az u. n. *exponenciális értékelést* veszi alapul, mikoris az értékhalmaznak csupán elrendezett Abel-féle csoportot kell alkotnia. *Fuchs* legújabban úgy általánosította az elméletet, hogy elegendő, ha az értékhalmaz részben elrendezett Abel-féle csoport. Az exponenciális értékelés axiómái ekkor a következők: a K kommutatív test bármely zérustól különböző a eleméhez hozzárendeljük egy G részben elrendezett additív Abel-féle csoport valamely $v(a)$ elemét, mint a „abszolút értékét", oly módon, hogy $v(ab)=v(a)+v(b)$ mindig teljesüljön, továbbá $v(a)\geqq v(b)$ és $v(a')\geqq v(b)$ esetén mindig $v(a-a')\geqq v(b)$ álljon. Mármost a pozitív és zérus abszolút értékű elemek a test zéruselemével együtt egy integritástartományt alkotnak, amelyet a test értékgyűrűjének nevezünk. Az erre a fogalomra vonatkozó következő fontos tétel csak az elmélet Fuchs-féle általánosításában igaz: Egy integritástartomány kvocienstestе mindig értékelhető úgy, hogy az értékgyűrű éppen az alapul vett integritástartomány legyen. Ez a tétel egyebek között azért is jelentős, mert lehetővé teszi, hogy az integritástartomány bizonyos tulajdonságait az értékcsoport egyszerűbb struktúrájában vizsgáljuk. Az előbbi tételben fellépő értékcsoport továbbá akkor és csak akkor teljesen elrendezett, ha az integritástartomány minden ideálja irreducibilis, azaz nem állítható elő két tőle különböző ideál metszeteként. *Fuchs* ezen eredményeinek számos alkalmazásai közül különösen figyelemreméltó *Clifford* egy eredményének új és egyszerűbb bizonyítása, amely kritériumot tartalmaz arra nézve, hogy egy integritástartomány mikor integrálisan zárt. Kiemelendő még az a további szép eredmény, mely szerint integrálisan zárt gyűrű értékcsoportja teljesen elrendezett csoportok szubdirekt összege.

Ideálelméleti tárgyú dolgozatainak egyikében messzemenően általánosítja a *Noether*-féle gyűrűkre vonatkozó felbontási tételeket, s *Fuchs* tárgyalásában ez a ma már klasszikusnak nevezhető elmélet sokkal egyszerűbbé, áttekinthetőbbé és rövidebbé vált.

Egy másik idevágó tárgyú dolgozatában egy új fogalmat, a *primális ideál* fogalmát vezeti be *Fuchs*. A kommutatív R gyűrű J ideálját akkor nevezi primálisnak, ha az R/J maradékosztálygyűrűben a nullosztók ideált alkotnak. Bebizonyítja továbbá azt a tételt, hogy R minden ideálja előállítható primális ideálok metszeteként. Amennyiben az R gyűrű maximum-követelménynek is eleget tesz, akkor az előbbi tétellel kapcsolatban unicitás is állítható bizonyos értelemben.

A normalizátor csoportelméleti fogalmának analógiájára vezette be *Kalmár László* a gyűrűelméletben az *idealizátor* fogalmát. Egy adott kommutatív R gyűrű esetében R valamely S részgyűrűjének idealizátorán R maximális olyan részgyűrűjét értjük, amelyben S ideál. *Fuchs* legújabban egy szép alkalmazását találta e fogalomnak a modern arithmetikában. *Fuchs* eredménye így szól: az R kommutatív gyűrű akkor és csak akkor integrálisan zárt R kvociensgyűrűjében, ha minden végesen generált és legalább egy nem-nullosztót tartalmazó ideáljának idealizátora a kvociensgyűrűben része R-nek. E tétel további érdekes következménye azt mondja ki, hogy egy maximum-követelménynek elegettevő R integritástartományban egy J ideál akkor és csak akkor bomlik fel egyértelműen prímideálok szorzatára, ha J bármely prímideálosztója maximális ideál R-ben, s valamennyi ilyen prímideálosztó idealizátora R kvocienstestében éppen R.

Végül megemlítendő még, hogy az I. Magyar Matematikai Kongresszuson tartott előadásában *Fuchs* tetszőleges gyűrűk radikáljára új definíciót adott, amely másirányú általánosítása a radikál klasszikus definíciójának, mint a *Jacobson*-féle radikál. Idetartozik még *Fuchs* jelenleg is folyó vizsgálatainak következő eredménye. Ha átvisszük egy csoport Φ-alcsoportjának fogalmát arra az esetre, amikor a tekintett csoport egy gyűrű, önmagával, mint baloldali operátortartománnyal ellátva, akkor a Φ-alcsoport éppen a Jacobson-féle radikál lesz.

Gyires Béla egyik legújabb dolgozatában egy adott elem adott tényezőszámú faktorizációinak pontos számát határozta meg maradékosztálygyűrűkben. Eredménye úgy tekinthető, mint a „factorisatio numerorum“ klasszikus problémájának átvitele egységelemmel biró, véges, ciklikus gyűrűkre.

Kertész András bebizonyította, hogy egy csoport akkor és csak akkor bir azzal a tulajdonsággal, hogy valamennyi alcsoportja direkt faktor, ha a csoport elemi Abel-féle csoport, azaz bármely elemének rendje véges és négyzetmentes szám. Mint utólag kiderült, *R. Baer* egyik vizsgálatában egy más jellemző tulajdonságuk alapján ugyanezek a csoportok léptek fel. Legújabban *Kertész Szele Tibor*ral együtt az olyan Abel-féle csoportokkal foglalkozik, amelyek valamennyi endomorf képe direkt faktor. Az ilyen csoportok között már igen bonyolult típusok is fellépnek.

Szép Jenő igen figyelemreméltó eredményekben gazdag vizsgálatokat folytatott a véges csoportok struktúra-elméletében. Köztudomású, hogy ez az egyik legvonzóbb, de évtizedek óta megoldatlan problémáit tekintve egyszersmind az egyik legnehezebb ága is a modern algebrának. Amikor *Schreier* felfedezte a nevéről elnevezett bővítéselméletet, úgy látszott, hogy ezzel a struktúraprobléma egycsapásra az egyszerű csoportok kivizsgálására redukálódott. Nem szólva most arról, hogy a Schreier-féle bővítéselmélet konkrét struktúravizsgálatokban sem váltotta be az eleinte hozzáfűzött reményeket, elég arra rámutatnunk, hogy az egyszerű csoportok problémáira ez az elmélet természeténél fogva teljesen alkalmazhatatlan. Ezért igen örvendetes, hogy *Szép*nek egy olyan vizsgálati módszert sikerült kidolgoznia, amely éppen az egyszerű csoportokkal kapcsolatban vezetett becses eredményekhez. Nevezzük egy véges csoport tágabb, illetve szűkebb értelemben vett faktorizációjának a csoport két olyan alcsoport szorzataként való előállítását, amelyek metszete tetszőleges, illetve csak az egységelemből áll. *Szép* a szűkebb értelemben faktorizálható csoportok vizsgálatából indult ki. Mint utólag kiderült, a második világháború alatt már *G. Zappa* és *G. Casadio* olasz matematikusok is foglalkoztak a faktorizálható csoportokkal, és sikerült megadniok egy, a Schreier-féle csoportbővítéselmélethez hasonló elvi konstrukciót, amely szolgáltatja két adott csoport szűkebb értelemben vett szorzatait, illetve tágabb értelemben vett szorzatait az esetben, ha a két csoport metszete normálosztója a szorzat-csoportnak. Ezen az elvi konstrukción túlmenő szerkezeti eredményeket azonban *Zappa* és *Casadio* nem kapott. *Szép* tőlük függetlenül újra megtalálta ezt a konstrukciót, amely legújabban egy *Rédei*től eredő és a ferdeszorzatra alapított, már említett tárgyalásban igen világosan áttekinthetővé vált; de *Szép* ezen az u. n. Zappa—Szép-féle elméleten lényegesen túl is ment, amennyiben sok fontos következményt vont le belőle, elsősorban az egyszerű csoportokra vonatkozólag. Általában azt mondhatjuk, hogy a Zappa—Szép-féle elmélet konkrét problémák esetében gyakran jobban alkalmazható a Schreier-bővítésnél és nagyon kedvezően egészíti ki azt, lévén éppen azokra a problémákra alkalmazható, ahol a Schreier-bővítés természeténél fogva hasznavehetetlennek bizonyul. Ezzel a módszerrel *Szép* legújabb dolgozataiban a következő eredményeket nyerte. Megmutatta, hogy bármely törzsszámfokú alternáló csoport szűkebb értelemben faktorizálható, azaz hogy végtelen sok egyszerű csoport van, amely alkalmas valódi alcsoportjainak Zappa—Szép-féle szorzata. Bebizonyítja továbbá, hogy ha a G véges csoport szűkebb értelemben faktorizálható és faktorai relatív prím rendűek, akkor G bármely N normálosztója is szűkebb értelemben faktorizálható, s faktorai normálosztók G megfelelő faktoraiban. Ennek a tételnek következménye, hogy ha G faktorai egyszerű csoportok, akkor vagy maga G is egyszerű, vagy pedig faktorai egyike normálosztó G-ben. Egy további, *Rédei László*val közös dolgozatában a tágabb értelemben faktorizálható csoportok elméletét dolgozza ki *Szép,* éspedig úgy, hogy *Casadio*tól eltérően semmi kikötést nem tesz a faktorok metszetére nézve. E dolgozat eredményeiből következik, hogy ha egy csoport tágabb értelemben faktorizálható, éspedig oly módon, hogy az egyik faktor Abel-féle, s a két faktor metszete nem csupán az egységelemből áll, akkor maga a csoport nem egyszerű. További ilyen természetű eredménye *Szép*nek az, hogy relatív prím rendű Abel-féle csoportok Zappa—Szép-féle szorzata mindig feloldható. Ezt azóta *N. Ito* és *H. Wielandt* általánosította. Egyik újabb dolgozatában az összes faktorizálható csoport egyszerűségére ad meg szükséges és elegendő feltételt *Szép.*

A továbbiakban ismertetendő eredményekkel kapcsolatban R^+ mindig az összes racionális számok additív csoportját, $C(p^\infty)$ pedig a p-hatvány nevezőjű racionális számok mod 1 vett additív csoportját, azaz u. n. *Prüfer*-féle p^∞ típusú csoportot jelöli. Itt p tetszőleges törzsszám.

Szélpál István megmutatta, hogy a p elemű csoport és $C(p^\infty)$ az összes olyan Abel-féle csoportok, amelyek bármely nem egyelemű homomorf képe izomorf magával a csoporttal. Ennek az eredménynek mintegy duálisa *Szele Tibor* következő eredménye: a p elemű csoport és R^+ az összes olyan Abel-féle csoportok, amelyek valamennyi, a nulloperátortól különböző endomorfizmusa automorfizmus. Ezt az utóbbi tételt legújabban *J. P. Serre* párisi matematikus operátorcsoportokra általánosította. *Szélpál* egy másik dolgozatában megmutatja, hogy $C(p^\infty)$ az egyetlen végtelen Abel-féle csoport, amelynek valamennyi valódi alcsoportja véges. Csaknem biztosra vehető, hogy ez a tétel akkor is igaz, ha nem szorítkozunk Abel-féle csoportokra, de ekkor már a bizonyítás rendkívül nehéznek ígérkezik. Hogy azonban mégsem reménytelen problémával állunk szemben, azt *Fjodorov* szovjet matematikus legújabb eredménye mutatja, aki ennek a problémának a duálisát oldotta meg tetszőleges csoportokra, bebizonyítván, hogy ha egy végtelen csoport valamennyi tulajdonképpeni alcsoportja véges indexű, akkor a csoport végtelen ciklikus csoport. Figyelemreméltó, hogy Fjodorov felhasználja bizonyításában *O. Ju. Smidt* egy igen mély tételét, s mikor *R. Baer* értesült *Fjodorov* eredményéről, levélben közölte *Szele Tibor*ral saját bizonyítását e tételre, de *Baer* is kényszerül egy mély tételt felhasználni, bár bizonyítása egészen más úton halad. Ez azt mutatja, hogy Fjodorov tétele is, valamint Szélpál még megoldatlan problémája is súlyos kérdésekkel függ össze.

Egy *Szele Tibor*ral közös dolgozatában azt bizonyítja be *Szélpál István,* hogy a törzsszámrendű csoport, $C(p^\infty)$ és R^+ az összes Abel-féle csoportok közül egyértelműen ki van tüntetve ama tulajdonsága alapján, hogy e csoportokat bármely, a nulloperátortól különböző endomorfizmusuk az egész csoportra képezi le.

Legújabb vizsgálataiban adott gyűrűnek olyan bővítéseivel foglalkozik *Szélpál* amelyben az adott gyűrű nem ideál. Megmutatja, hogy ilyen beágyazás mindig lehetséges.

Szendrei János a gyűrűk egységelemes bővítéseivel kapcsolatban bebizonyította, hogy bármely nullosztómentes gyűrűnek van ugyancsak nullosztómentes egységelemes bővítése. Ha megkívánjuk, hogy a bővítés a lehető legszűkebb legyen, akkor még unicitás is áll fenn. Szendreinek ezt az eredményét legújabban *R. E. Johnson* felhasználta egyik dolgozatában, amelyről alább még lesz szó. *Szendrei* legújabb, *Szele Tibor*ral közös dolgozata a kommutatív endomorfizmusgyűrűvel biró Abel-féle csoportokkal foglalkozik.

Szele Tibor egyik legújabb dolgozatában, amelyet tanítómesterének, *Rédei László*nak ötvenedik születésnapjára dedikált, egy olyan elmélet alapjait dolgozta ki, amely az Abel-féle csoportok struktúra-elméletében ugyanazt a szerepet tölti be, mint a Steinitz-féle testbővítési elmélet a kommutatív testek elméletében. Csoportok algebrai és transzcendens bővítésének értelmezése után megmutatja, hogy egy tetszőleges csoportbővítés mindig megvalósítható egy tiszta transzcendens és egy azt követő algebrai bővítés által. Bármely csoportnak van pontosan egy algebrailag zárt algebrai bővítése. Az algebrailag zárt csoportok ama tulajdonságuknál fogva vannak kitüntetve az összes Abel-féle csoportok közül, hogy bármely őket tartalmazó csoportnak direkt komponensei. Egyébként az összes algebrailag zárt csoportok a

$$\Sigma C(p_\nu^\infty)+\Sigma R^+$$

direkt összeg alakjában adhatók meg. Ennek az elméletnek egyik eredménye egy új rangfogalom tetszőleges Abel-féle csoportokra, amely az eddigi, *Prüfer*től, illetve *Baer*től származó rangfogalmakat speciális esetként tartalmazza. Több ismert tétel új és részben élesített bizonyítása is adódik ebből az elméletből.

Szele egy további csoportelméleti eredményének megfogalmazása céljából legyen G tetszőleges Abel-féle csoport, H pedig olyan ciklikus alcsoportja G-nek, amelynek rendje a véges r szám. Mármost a tétel azt mondja ki, hogy a H alcsoport akkor és csak akkor direkt komponense G-nek, ha H metszete rG-vel 0. Ez a tétel speciális eseteként tartalmaz számos csoportelméleti tételt, így pl. a véges Abel-féle csoportok alaptételét, a végesrangú torziócsoportok *Kuros*-féle alaptételét, azt a két *Kulikov*-féle eredményt, melyek szerint az összes direkt irreducibilis torziócsoportok a ciklikus p-csoportokkal és $C(p^\infty)$-nel vannak adva, illetve, hogy direkt irreducibilis vegyes csoport nincsen, *Fomin* szintén szovjet matematikusnak korlátos elemrendű torziócsoporttal biró vegyes csoportokról szóló tételét, stb.

A nem Abel-féle csoportok elméletében *Szele* legújabb eredményei a következők. Megmutatja, hogy létezik egy és csak egy olyan végtelen csoport, amely valamennyi véges kvaterniócsoportot alcsoportjaként tartalmazza, s egyúttal a legszűkebb ilyen tulajdonságú csoport. Ez a *Szele* által „végtelen kvaterniócsoportnak" nevezett csoport olyan, hogy bármely két nem egyelemű alcsoportjának metszete nem egyelemű. Valószínűnek látszik, hogy ez az egyetlen ilyen tulajdonságú végtelen nem-Abel-féle csoport, de ennek bizonyítása eddig még nem sikerült. A másik, ebbe a tárgykörbe tartozó eredmény azt mondja ki, hogy ha egy tetszőleges csoportnak van tökéletes alcsoportja, akkor van tökéletes normálosztója is. Tökéletesnek az olyan csoportokat szokás nevezni, amelyek önmaguk kommutátorcsoportjai.

Gyűrűelméleti téren *Szele* legújabban azzal a problémakörrel foglalkozott, hogy amennyiben elő van írva egy gyűrű additív csoportja, milyen mértékben van ezzel már determinálva a gyűrű. Nyilvánvaló, hogy a legerősebb mértékben akkor, ha csupán egyetlen olyan gyűrű létezik, amelynek additív csoportja az előírt. Ez esetben a gyűrű szükségképpen u. n. *zérógyűrű,* s az ilyen csoportokat *nilcsoportok*nak nevezi *Szele.* Megadja az összes nil-torziócsoportokat. Ezek éppen az összes algebrailag zárt torziócsoportok, amelyek előállításáról fentebb már volt szó. Megmutatja, hogy vegyes nilcsoport nincsen. A torziómentes nilcsoportok közül tetszőlegesen nagyszámosságú típust tud megadni *Szele,* de az összest még nem ismeri. A következő lépés az összes olyan additív csoport megadása, amelyre pontosan két különböző gyűrűtípus építhető. Egyik legújabb dolgozatában meghatározza *Szele* az összes ilyen csoportot. Érdekes, hogy a torziómentes csoportok közül egyedül a racionális számok additív csoportja ilyen. A további vizsgálatok még folyamatban vannak.

*Schreier*nek és *Artin*nak kb. 25 esztendővel ezelőtt egy közös dolgozatban sikerült tisztán algebrailag jellemeznie az elrendezhető kommutatív testeket. Eredményük szerint egy test akkor és csak akkor elrendezhető, ha formálisan valós, azaz ha —1 nem eleme a test elemeinek négyzetei által generált additív félcsoportnak. Kétesztendővel ezelőtt *J. P. Serre* általánosította ezt az eredményt, megadván annak szükséges és elegendő feltételét, hogy egy adott elrendezett test adott bővítésére mikor terjeszthető ki az alaptest elrendezése. *Szele* legújabban ferde testekre általánosította *Schreier, Artin* és *Serre* eredményeit, s néhány nappal ezelőtt értesült arról, hogy *R. E. Johnson* az ő eredményét is általánosította nullosztómentes gyűrűk elrendezésének problémájára.

Szele legutóbbi, jelenleg is folyamatban levő vizsgálatai a direkt összeg fogalmának általánosításával állanak kapcsolatban. Ez az általánosítás igen célszerűnek látszik vegyes csoportok szerkezetének vizsgálatánál, különösen a kommutatív endomorfizmusgyűrűvel bíró Abel-féle csoportok, illetve az olyan Abel-féle csoportok leírásánál, amelyek bármely endomorf képe direkt faktor. Eme vizsgálatok eredményei *Szendrei János*sal, illetve *Kertész András*sal közös cikkben jelennek meg, amelyekről fentebb már volt szó.

Debreceni Tudományegyetem
Matematikai Intézete.

HOZZÁSZÓLÁS

SZELE TIBOR előadásához

RÉDEI LÁSZLÓ lev. tag:

Szele Tibor elhangzott előadásában kitűnő ismertetést adott az utóbbi években végzett hazai fontosabb algebrai kutatásainkról. Néhány apró, kiegészítő megjegyzésen kívül hozzászóló azt az észrevételt teszi, hogy kutatóink a csoportelméleten kívül az algebra egyéb ágait is szinte hasonló mértékben művelték, így a gyűrűelméletben éppen *Szele Tibornak* is becses kutatásai vannak, s igen jelentősek *Fuchs László* idevágó vizsgálatai. Egyébként pedig sokszor megítélés dolga, hogy egy-egy vizsgálatot hova számítunk, így például *Hajós György* csoportelméleti tétele a gyűrűelméletbe is tartozik. Egyáltalán az algebra fejezetei egymástól alig határolhatók el. Hazánkban az algebrának régi, érdemekben gazdag multja van, elég erre nézve *Hunyadi Jenő, König Gyula, Kürschák József, Bauer Mihály* nevét említeni. Mai algebristáink is jóleső megnyugvással elmondhatják, hogy sikeres munkával ápolták a tradiciókat. Örvendetes idősebb s fiatal algebristáinknak nagy száma, főleg az elmult évtizedekkel való összehasonlításban, amikor ismert különböző okokból sok tudós volt kénytelen kivándorolni az országból. Nem véletlen, hogy a Magyar Tudományos Akadémiának támogatása, s ezen keresztül Népi Demokráciánknak tudománypártoló politikája meghozta áldásos gyümölcsét. Mint mindennemű tudományos kutatóinkat, úgy bennünket algebristákat is a tudománynak ez a megbecsülése sarkaljon további munkára.

A MATEMATIKA ALAPJAIVAL KAPCSOLATOS ÚJABB EREDMÉNYEK

KALMÁR LÁSZLÓ lev. tag

Előadta a Matematikai Állandó Bizottság 1951 december 13-án tartott ülésén

A tudomány célja a valóság megismerése, avégett, hogy a valóságot az emberiség általános jólétének megvalósítása és fokozása érdekében megváltoztathassuk. E cél felé való törekvésben fontos szerepe van a matematikának: absztrakció segítségével megállapitani az anyagi világ térformáinak és menynyiségi viszonyainak különböző körülmények között egyaránt érvényes törvényeit. A matematika az elméleti természettudományok nélkülözhetetlen eszköze; ezek nélkül pedig a kísérleti természettudós sötétben tapogatódznék, legfeljebb rutinjára bízhatná magát.

Ha azonban megnézzük a matematikusnak munkamódszerét, amikor a kísérleti természettudós számára az utat megvilágító elmélet építése során egy-egy problémát igyekszik megoldani, akkor azt látjuk, hogy ő maga többnyire sötétben tapogatódzó, pusztán rutinjára támaszkodó kísérleti módszerrel dolgozik. Ötletszerűen végigpróbálja a felvetődő gondolatokat, hátha valamelyik célhoz vezet. Vajjon nem lehetséges-e olyan tudomány, amely eközben utat mutasson a matematikusnak, hasonlóan, mint ahogyan a matematika és a rá épülő elméleti természettudományok, elsősorban az elméleti fizika, utat mutat a kísérleti természettudósnak a maga kísérletezése közben?

Ilyen tudomány szerepét van hivatva betölteni *a matematika alapjainak tudománya.* Hogy teljesen betölthesse, a matematika különböző területein dolgozó matematikusok matematizálásának általánosított tapasztalatává kell válnia. Egy-két lépést már megtett ebben az irányban és az erre vonatkozó kutatásokba néhány magyar matematikus is belekapcsolódott.

E tekintetben számos haladó tradicióra tekinthetünk vissza. Ezek között időrendben is, de jelentőségüknél fogva is első helyen állnak a két Bolyai kutatásai *a geometria alapjaira* vonatkozólag. *Bolyai János,* az orosz *Lobacsevszkij*-vel egyidőben, a hiperbolikus geometria felépítésével megtette a legfontosabb lépést a párhuzamosság axiómájának a geometria többi axiómájától való függőségére vonatkozó több évezredes probléma megoldása felé. Appendixe címében jogosan állapította meg *Kant* idealista kijelentéseivel szemben, hogy az a kérdés, hogy a valóságos világban milyen geometria érvényes, az *Euklides*-féle-e, vagy nem, a priori soha el nem dönthető, tehát kisérleti úton vizsgálandó. Jól tudjuk, milyen fontos szerepe volt *Bolyai János* e megállapításának a modern fizika kialakulásában.

Nagy érdeklődést mutatott a matematika alapjai iránt *König Gyula;* ő volt az első, aki *Hilbert bizonyításelméleti* gondolatait megértette és *Hilbert*et sok tekintetben megelőzve továbbfejlesztette. Fia, a fasiszták által halálba üldözött *König Dénes,* gráfelméleten kívül elsősorban *halmazelmélettel* foglalkozott, a matematikának olyan ágával, amelyet sokan a matematika alapjaihoz számítanak.

A matematika alapjainak tudománya terén ma működő magyar matematikusok — eltekintve néhány halmazelméleti kutatástól — elsősorban a *matematikai logika* kérdéseivel foglalkoznak. Munkásságuk ismertetése során nem szorítkozhatom az utolsó évre, mert az idevágó kutatásokban szereplő fogalmak és problémák nem közismertek a matematikusok között és így azok megértése végett régebbi kutatásokat is figyelembe kell vennünk.

A matematikai logika egyik fontos teendője, hogy a *következmény* fogalmának matematikai szempontból szabatos, a matematika legkülönbözőbb területein, mindenféle következtetésre egyaránt alkalmazható meghatározását adja. Közelfekvő azt is megkívánni, hogy adott állításokról (tételekről, feltevésekről vagy sejtésekről) a meghatározás alapján mindig el lehessen dönteni véges számú lépésben, vajjon egy további adott állítás következményük-e. A matematikai logika az ilyen meghatározás kérdését az u. n. *eldöntésproblémára* vezeti vissza.

Az eldöntésprobléma annak a feltételeit keresi, hogy egy adott *logikai formula* bármely halmazon *azonosan igaz* legyen; ezzel ekvivalens másik (u. n. duális) alakjában annak feltételeit keresi, hogy egy adott logikai formulához legyen olyan halmaz, amelyen *kielégíthető.* A logikai formulák, amelyekről itt szó van, olyan formulák, amelyek *logikai függvényekből* u. n. *logikai műveletek* és *kvantorok* segítségével épülnek fel.

Logikai függvényen olyan egy- vagy többváltozós függvényt értünk, amely egy tetszőleges halmazon (u. n. individuumtartományon) van értelmezve, értékei pedig logikai értékek, vagyis egy kételemű halmaz elemei, amelyeket „igaz"-nak és „hamis"-nak nevezünk. Logikai függvényre példa az az $F(x)$ függvény, amely a természetes számok halmazán úgy van értelmezve, hogy értéke „igaz", ha x primszám, „hamis", ha x összetett szám; vagy az a $G(x, y, z)$ függvény, amely a sík pontjai halmazán úgy van értelmezve, hogy értéke „igaz", ha x, y, z egy egyenesen fekvő pontok, különben „hamis".

Logikai műveleten olyan egy- vagy többváltozós függvényt értünk, amelynek független változói is a logikai értékek halmazán futnak át, értékei is logikai értékek. Pl. a *negáció* művelete az az egyváltozós $\overline{X}$ függvény, amelynek értéke „igaz", ha X értéke „hamis", viszont „hamis", ha X értéke „igaz"; a *konjunkció* művelete az a kétváltozós $X \mathbin{\&} Y$ függvény, amelynek értéke akkor és csak akkor „igaz", ha X értéke is, Y értéke is „igaz", máskülönben „hamis"; az *implikáció* művelete az a kétváltozós $X \rightarrow Y$ függvény, amelynek értéke akkor és csak akkor „hamis", ha X értéke „igaz", Y értéke „hamis", és minden más esetben „igaz".

Kvantornak nevezzük a következő két, logikai függvényeken végezhető függvényoperációt:

$$(x)F(x) = \begin{cases} \text{„igaz“, ha } F \text{ azonosan „igaz“,} \\ \text{„hamis“ minden más esetben} \end{cases}$$

(u. n. *általános kvantor*); és

$$(Ex)F(x) = \begin{cases} \text{„hamis“, ha } F \text{ azonosan „hamis“,} \\ \text{„igaz“ minden más esetben} \end{cases}$$

(u. n. *exisztenciális kvantor*). Többváltozós logikai függvényre alkalmazva egy kvantort, eggyel kevesebb változós függvényt kapunk; pl. $(x)F(x, y)$ csak y-tól függ, az x u. n. *kötött változó* (mint $\int_a^b f(x, y)\,dx$-ben az x).

Egy logikai formula értéke attól függ, melyik halmazt választjuk individuumtartomány gyanánt, hogyan definiáljuk rajta a formulában szereplő logikai függvényeket és az individuumtartomány mely elemeit helyettesítjük a formulában szereplő, nem kötött (u. n. *szabad*) változók helyére. Azonosan igaznak nevezünk egy logikai formulát egy halmazon, ha bárhogy definiáljuk ezen a halmazon a formulában szereplő logikai függvényeket, mindig (a szabad változók bármely értékére) „igaz“ lesz az értéke; kielégíthetőnek nevezünk egy logikai formulát egy halmazon, ha lehet úgy definiálni ezen a halmazon a formulában szereplő logikai függvényeket, hogy (a szabad változók alkalmas értékeire) „igaz“ legyen az értéke. Pl.

$$(x)(F(x) \rightarrow F(x))$$

bármely halmazon azonosan igaz,

$$((x)\overline{F(x, x)} \mathbin{\&} (x)(y)(z)((F(x, y) \mathbin{\&} F(y, z)) \rightarrow F(x, z))) \rightarrow (Ex)(y)\overline{F(x, y)},$$

mint könnyen látható, bármely *véges* halmazon azonosan igaz formula; a

$$((x)\overline{F(x, x)} \mathbin{\&} (x)(y)(z)((F(x, y) \mathbin{\&} F(y, z)) \rightarrow F(x, z))) \mathbin{\&}$$
$$\mathbin{\&} (x)(y)(F(x, y) \rightarrow (Ez)(F(x, z) \mathbin{\&} F(z, y))))$$

formula kielégíthető a valós (vagy a racionális) számok halmazán („igaz“ lesz az értéke, ha F-et úgy definiáljuk, hogy $F(x, y)$ akkor és csak akkor legyen „igaz“, ha $x < y$, különben „hamis“).

A logikai formulák bizonyos *speciális osztályaira* meg van oldva az eldöntésprobléma, azaz ezekhez az osztályokhoz van olyan algoritmus, amelynek segítségével bármely adott, a kérdéses osztályhoz tartozó formuláról véges számú lépésben el lehet dönteni, hogy azonosan igaz-e (bármely halmazon), ill. hogy kielégíthető-e (alkalmas halmazon). Az eldöntésprobléma *redukcióelmélete* viszont az eldöntésproblémát speciális formula-osztályokra vonatkozó, vagyis a kérdéses osztályokhoz tartozó formulák azonosan igaz, ill. kielégíthető voltának feltételeit kérdező eldöntésproblémára igyekszik visszavezetni. Az eldöntésproblémára vonatkozó magyar kutatások legnagyobb része az eldöntésprobléma redukcióelméletére vonatkozik.

Az általánosság megszorítása nélkül feltételezhetjük, hogy a logikai formulában, amelyről szó van, nincs szabad változó, továbbá maga a formula *prenex* alakú. Ezen azt értjük, hogy úgy keletkezik, hogy logikai függvényekre előbb logikai műveleteket alkalmazunk, majd az így keletkező **M** formulában egymásután kvantorokkal kötjük le a változókat. A kvantorok alkalmazása előtt keletkező **M** formulát a kész formula *magvának* nevezzük, a kész formulában a mag előtt álló kvantorok sorozatát a kérdéses prenex formula *prefixumának*. Pl.

$$(x)F(x,x) \mathbin{\&} (x)(y)(F(x,y) \rightarrow F(y,x))$$

nem prenex formula,

$$(x)(y)(Ez)(F(x,y) \rightarrow (G(x,z) \mathbin{\&} G(z,y)))$$

prenex formula, prefixuma $(x)(y)(Ez)$, magva $F(x,y) \rightarrow (G(x,z) \mathbin{\&} G(z,y))$.

Rövidebb kifejezésmód kedvéért nevezzük egy prenex formula *típusának* a Π és Σ jeleknek azt a sorozatát, amely úgy keletkezik, hogy a formula prefixumában minden általános kvantort Π, minden exisztenciális kvantort Σ jellel pótolunk; a típusban az egymásutáni Π vagy Σ jelek „szorzatát" hatványjelöléssel rövidítjük. Pl. az említett prenex formula típusa $\Pi^2\Sigma$.

Kalmár az 1932-es zürichi nemzetközi matematikai kongresszuson tartott előadásával olyan vizsgálatokat kezdett, amelyek az eldöntésprobléma visszavezetésére irányulnak olyan formulák kielégíthetőségének kérdésére, amelyekben csak *egyetlenegy* logikai függvény szerepel és az is *kétváltozós*. Egyúttal igyekezett azt is elérni, hogy a formula típusa minél egyszerűbb legyen. Így később bebizonyította, hogy az eldöntésprobléma visszavezethető olyan formulák kielégíthetőségének kérdésére, amelyek egyetlenegy, kétváltozós, logikai függvényt tartalmaznak és emellett $\Sigma\Pi\Sigma\Pi^n$ (Ackermann-féle) típusúak. (*Ackermann* csak azt bizonyította be, hogy az eldöntésprobléma visszavezethető $\Sigma\Pi\Sigma\Pi^n$ típusú, de akárhány logikai függvényt tartalmazó formulák kielégíthetősége kérdésére; hasonló eredményekről nevezték el a később említendő típusokat is). Később, *Surányi*val közösen, bebizonyították a megfelelő redukciós tételt $\Pi^3\Sigma^n$ (Gödel-féle), $\Pi^n\Sigma$ és $\Pi^2\Sigma\Pi^n$ (Pepis-féle) típusú, egyetlen, kétváltozós, logikai függvényt tartalmazó formulákra vonatkozóan. Legutóbbi dolgozataiban *Kalmár* a megfelelő redukciós tételt $\Pi^2\Sigma^n\Pi$ és $\Pi\Sigma^n\Pi^2$ típus esetére is bebizonyította.

Surányi 1943-ban írt doktori disszertációjában az eldöntésprobléma redukcióelméletének teljesen új fejezetét nyitotta meg. Az addigi redukciótételek mindegyike vagy csak az általános, vagy csak az exisztenciális kvantorok számát redukálja adott számra. *Surányi*nak sikerült először bebizonyítania olyan redukciótételt, amely *egyidejűleg* mindkét számot adott számra redukálja (de a formula magvában szereplő logikai függvények számát nem). Bebizonyította, hogy az eldöntésprobléma visszavezethető olyan formulák kielégíthetőségének kérdésére, amelyek akár $\Pi^3\Sigma$, tehát egyidejűleg Gödel-féle és Pepis-féle, akár $\Pi^2\Sigma\Pi$ típusúak. Legújabb dolgozataiban (speciális) Ackermann-féle $\Sigma\Pi\Sigma\Pi^2$, $\Pi\Sigma^2\Pi^2$ típusú formulák kielégíthetőségének kérdésére redukálta az eldöntésproblémát, továbbá, ha megengedjük, hogy a formulában határozatlan logikai függvényeken kívül az a kétváltozós rögzített logikai függvény is szerepeljen, amelynek értéke akkor és csak akkor „igaz", ha $x=y$, akkor $\Pi\Sigma^5\Pi$ és $\Sigma\Pi\Sigma^4\Pi$ típusú formulák esetén is bebizonyította a megfelelő tételt. Emellett az is elérhető, hogy egyváltozós logikai függvényeken kívül a $\Sigma\Pi\Sigma\Pi^2$ és $\Pi\Sigma^2\Pi^2$ típusok esetén legfeljebb hét, a $\Pi\Sigma^5\Pi$ és $\Sigma\Pi\Sigma^4\Pi$ típusok esetén legfeljebb négy kétváltozós logikai függvény szerepeljen a formula magvában (az utóbbi esetben nem számítva az említett rögzített függvényt).

Más természetű, nem a formula típusára, hanem az *individuumtartomány számosságára* vonatkozó redukciótételt bizonyított be *Kalmár* az I. Magyar Matematikai Kongresszuson: megmutatta, hogy az eldöntésprobléma visszavezethető arra a kérdésre, mely logikai formulákhoz van olyan *véges* halmaz, amelyen az adott formula kielégíthető. (Előzőleg *Löwenheim* azt bizonyította be, hogy az eldöntésprobléma visszavezethető a megszámlálható individuumtartományokon való kielégíthetőség kérdésére; további redukció lehetősége azért látszott valószínűtlennek, mert adott véges n számosság esetén meg van oldva az a kérdés, mely formulák elégíthetők ki valamely n elemű halmazon.)

Az eldöntésprobléma redukcióelméletének eredetileg az volt a célja, hogy olyan speciális esetére redukálja az eldöntésproblémát, amelyet már sikerül megoldani. Az a remény, hogy ezt sikerül elérni, *Church* tétele folytán szétfoszlott; e tétel ugyanis azt mondja ki, hogy *nincsen olyan algoritmus,* amelynek segítségével bármely adott formuláról véges számú lépésben el lehetne dönteni, azonosan igaz-e, ill. kielégíthető-e. E tétel bizonyításához természetesen előbb szabatosan definiálni kellett az *algoritmus* fogalmát, amelyet a matematikus mindennapi munkájában éppenúgy rutinjára támaszkodva szokott alkalmazni szabatos definició nélkül, mint a következmény fogalmát. *Church* maga megkerülte ezt a magábanvéve is jelentős feladatot azzal, hogy önkényesen azt nevezte megengedett algoritmusnak, amely egy bizonyos, általa felállított axiómarendszerben kifejezhető. Ez szabatosan definiálható fogalom ugyan, csak éppen az nem magától értetődő, hogy fedi az algoritmusnak a matematikus mindennapi praxisában használt fogalmát. Az algoritmus fogalmának kielégítőbb szabatos definicióját adta *Kleene,* amennyiben visszavezette azt az olyan számelméleti függvény fogalmára, amelynek minden adott helyen véges számú lépésben ki lehet számítani az értékét s azt javasolta, hogy ez utóbbi fogalmat a *rekurzív függvény* fogalmának egy jelentős általánosításával azonosítsuk. Az algoritmus fogalmának olyan szabatos definicióját, amelyről nyilvánvaló, hogy fedi a mindennapi fogalmat, *Markov* szovjet matematikus adta meg az I. Magyar Matematikai Kongresszuson. Meg lehet mutatni, hogy az algoritmus fogalmának e három definiciója ekvivalens.

*Church*nek azt a tételét, hogy vannak algoritmussal meg nem oldható problémák, az idealista filozófusok úgy állították be, hogy az matematikai bizonyítéka az agnoszticizmusnak, tehát cáfolata a dialektikus materializmus azon állításának, hogy a világ megismerhető. (*Church* első példája algoritmussal meg nem oldható problémára más volt, nem az eldöntésprobléma.) *Church* tételét ebből a szempontból nagy „haladásnak" tekintették *Gödel* egy régebbi tételéhez képest, amely csak azt mondja ki, hogy adott axiómarendszerhez (ha az bizonyos, pontosan megfogalmazható, de igen általános feltételeknek eleget tesz) van olyan probléma, amely *ebben az axiómarendszerben* nem oldható meg. Beállításuk szerint a Gödel-tétel a tudásnak csak egy-egy axiómarendszerre vonatkozó *relatív* határát fedi fel, ezzel szemben a Church-tétel azt bizonyítja, hogy a tudásnak *abszolút* határa van. A matematika alapjai körül folyó ideológiai harcban tehát hasonló szerep jutott a Church-tételnek, mint a Heisenberg-féle bizonytalansági relációnak az elméleti fizika körül folyó ideológiai harcban.

E kérdések tisztázására tehát kívánatos volt *Gödel* és *Church* tételeinek eredeti, igen bonyolult és nehezen áttekinthető bizonyítását egyszerűsíteni, a Gödel-tétel feltételeit, továbbá a két tételnek egymáshoz való viszonyát tisztázni. *Kalmár* 1943-ban egyszerű bizonyítást adott a Gödel-tételre; újabb dolgozataiban bizonyítását az axiómarendszerre vonatkozó, az eredetinél általánosabb feltételek esetére is kiterjesztette és megmutatta, hogy módszere *Rosser* egy analóg tételének bizonyítására is felhasználható.

A Church-tételre vonatkozólag *Péter Rózsa* megmutatta, hogy a Gödel-tétel egy általánosan megfogalmazott alakjából *egyszerűen következik.* Ezt a meglepő tényt tovább elemezve, *Kalmár* az amsterdami filozófiai kongresszuson megmutatta, hogy a Church-tétel egyenesen *speciális esete* az általánosan megfogalmazott Gödel-tételnek. Ezzel kiderült, hogy a Church-tétel agnoszticista beállítása helytelen, a Church-tétel sem mond ki többet, mint a Gödel-tétel, t. i. azt, hogy ha pontosan előírjuk, milyen módszereket szabad használni, akkor mindig maradnak olyan problémák, amiket nem tudunk megoldani. Ez azt mutatja, hogy ahhoz, hogy a matematikai problémákat sorra mindet megoldjuk, módszereinket is állandóan fejlesztenünk kell. Ez a következtetés teljes összhangban van a dialektikus materializmussal, amely nem azt állítja, hogy a világ egyszersmindenkorra, pontosan előírható módszerekkel megismerhető (ezt a mechanikus materializmus állította), hanem azt, hogy nincs olyan, a valóságra vonatkozó probléma, amelyet módszereink kellő fejlődése során meg ne lehetne oldani.

A Church-tétel agnoszticista beállítása egy tudatos ferdítésen alapul: t. i. hogy a Church-tétel ugyanolyan értelemben vett probléma abszolút megoldhatatlanságát mutatja ki, mint amilyen értelemben vett probléma relatív megoldhatatlanságáról szól a Gödel-tétel. Valójában a Church-tétel nem is egy problémára, hanem egy *problémaseregre* vonatkozik, hiszen pl. minden egyes logikai formula kielégíthetőségének kérdése külön-külön probléma. Egy végtelen sok problémából álló problémasereg algoritmussal való megoldhatatlansága semmiképpen sem jelenti a valóság megismerhetetlenségét; hiszen a valóság megismerése a megismerési folyamat fejlődésének minden egyes fokán csak véges számú probléma megoldását kívánja. Igaz, hogy a matematikus egyes esetekben végtelen sok problémát is meg tud oldani egyidejűleg (t. i. valamilyen paramétertől függő problémát e paraméter bármely értékére). Így pl. van olyan algoritmus, amelynek segítségével bármely adott racionális együtthatójú polinomról véges számú lépésben el tudjuk dönteni, reducibilis-e a racionális számok testében (ebben a problémaseregben maga a polinom a paraméter). Az, hogy ez bizonyos problémaseregek esetén sikerül, nagyon hasznos a a valóság megismerése szempontjából, mert ilyen esetben nem kell a sereg minden egyes problémájával külön foglalkozni (csak a paraméter helyébe a megfelelő értéket behelyettesíteni az általános megoldásban). Azonban semmi okunk sincs elvárni, hogy bármely problémasereghez legyen ilyen általános megoldás. Ha valamely problémasereghez nincs, az azt mutatja, hogy már ahhoz is módszereink állandó dialektikus fejlődésére van szükség, hogy a kérdéses sereghez tartozó problémákat sorra mind meg tudjuk oldani. Így pl. az eldöntésproblémára vonatkozó Church-tétel azt mutatja, hogy a dialektikus fejlődés szükségessége már a logikában is fennáll: ahhoz, hogy bárhogyan megadott állításokról eldönthessük, következményük-e egy további állítás, logikai módszereinket is állandóan fejlesztenünk kell.

Ezenkívül annak, hogy valamely problémaseregről sikerül bebizonyítani, hogy nincs olyan algoritmus, amelynek segítségével a sereg bármely adott problémáját meg lehet oldani, az a jelentősége is megvan, hogy ez megkíméli a matematikust attól a hiábavaló munkától, hogy az ilyen problémasereghez megoldó algoritmust keressen; hasonlóan, mint ahogy a Ruffini—Abel-tétel megóvja az algebristát attól, hogy hiába keresse az általános ötödfokú egyenlet algebrai megoldását, vagy a π transzcendenciájának bizonyítása attól, hogy a kör négyszögesítésével foglalkozzék. Íly módon a Church-féléhez hasonló megoldhatatlansági tételek alkalmasak arra, hogy a matematikust tájékoztassák arról, milyen irányban végezze, jobban mondva, milyen irányban ne végezze gondolat-kísérleteit; mintegy segítik abban, hogy a maga kutatásának *selejtjét csökkentse*. Természetesen csak akkor van egy megoldhatatlansági tételnek ilyen szempontból jelentősége, ha a matematikusokat tényleg foglalkoztató problémaseregnek algoritmikus megoldhatatlanságára vonatkozik.

A Church-tétel folytán az eldöntésprobléma minden egyes redukciótétele példát szolgáltat algoritmussal meg nem oldható problémaseregre. Ha ugyanis az eldöntésprobléma visszavezethető valamely speciális esetére, akkor ehhez a speciális esetéhez nincs megoldó algoritmus. Így pl. *Kalmár* fent említett tétele, amely szerint az eldöntésprobléma visszavezethető arra a kérdésre, hogy mely logikai formulákhoz van olyan véges halmaz, ahol kielégíthetők, vagy duális alakjában, hogy mely logikai formulák azonosan igazak minden véges halmazon, új bizonyítást szolgáltat *Trahtyenbrot* szovjet matematikusnak arra a más módszerrel bebizonyított tételére, hogy nincs olyan algoritmus, amellyel bármely adott logikai formuláról el lehetne dönteni, azonosan igaz-e bármely véges halmazon.

A matematikusokat tényleg foglalkoztató nem logikai természetű problémaseregek közül az első, amelyről sikerült kimutatni, hogy nem oldható meg algoritmussal, *az asszociatív rendszerek szóproblémája* volt. Ez a probléma (-sereg) arra vonatkozik, hogy egy adott, véges számú báziselem segítségével felépíthető, véges számú generáló relációval definiált asszociatív rendszerben mely relációk állnak fenn. *Markov* szovjet és *Post* amerikai matematikusnak sikerült egyidejűleg egymástól függetlenül megadni olyan, a fenti értelemben végesen definiált asszociatív rendszereket, amelyeknek szóproblémája nem oldható meg algoritmussal. *Kalmár* e tételt mindkét szerző bizonyításánál egyszerűbb, az algebrista számára könnyebben követhető úton bizonyította be akadémiai székfoglaló előadásában.

Számos matematikai logikai kutatásnak fontos segédeszköze a *rekurzív függvények* fogalma. Rekurzívnak nevezünk egy függvényt, ha változóinak nemnegatív egész értékeire a 0 konstansból és az $x+1$ függvényből kiindulva véges számú rekurzióval és helyettesítéssel (függvény, ill. függvények függvényeinek képezésével) definiálható. A rekurzió (más néven teljes indukcióval való definició) fogalmát többféleképpen lehet szabatosan megfogalmazni és így a rekurzív függvények különböző osztályaihoz jutunk, amelyeknek különböző szerepük jutott halmazelméleti, ill. matematikai logikai kutatásokban.

Így *Hilbert* a *kontinuumproblémát* úgy próbálta megoldani, hogy a számelméleti, azaz olyan függvényeket, amelyeknek változói is a nemnegatív egész számok halmazán futnak át, értékei is nemnegatív egész számok, a második számosztály rendszámai szerint haladó osztályokba igyekezett sorolni, úgy, hogy minden osztályba megszámlálhatóan végtelen sok függvény jusson és egy számelméleti függvény se maradjon ki. Ha ez sikerülne, akkor be volna bizonyítva a kontinuum számosságára vonatkozó Cantor-féle sejtés, mert a számelméleti függvények kontinuum-számosságú halmazt alkotnak. *Hilbert* osztályozásában fontos szerepe van a számelméleti függvények definiciója alakjának. Így az első osztályba azokat a függvényeket sorolta, amelyek egy változó szerinti rekurziók és helyettesítések sorozatával definiálhatók, csupa számelméleti függvényen át. A második osztályba azokat a függvényeket sorolta, amelyeknek hasonló rekurzív definiciójához már olyan függvényoperációk is kellenek, amelyeknek egyes változói számelméleti függvényeken futnak át (más változói viszont a nemnegatív egész számokon; a rekurzió persze mindig ilyen változó szerint történik). Ilyen függvényoperációra példa az iteráció: az $f=f(z)$ egyváltozós függvény n-edik iteráltjának értéke az x helyen, $I(f; n, x)$, így definiálható n szerinti rekurzióval:

$$I(f; 0, x) = x,$$
$$I(f; n+1, x) = f(I(f; n, x));$$

a Hilbert-féle második osztályba tartozó számelméleti függvényre pedig az a $g(x, y, n)$ függvény, amely a következő rekurzióval definiálható az I függvényoperáció segítségével:

$$g(x, y, 0) = y + 1,$$
$$g(x, y, n+1) = I(g(x, z, n); y, x),$$

ahol I első argumentuma a $g(x, z, n)$ függvény, *mint z függvénye.* A Hilbert-féle harmadik osztályba azok a számelméleti függvények tartoznak, amelyeknek rekurzív definiciójához az említett fajta függvényoperációkon kívül olyan operációk is kellenek, amelyeknek egyes változói ilyen függvényoperációkon futnak át stb. *Hilbert*nek ezen az úton nem sikerült bebizonyítania a Cantor-féle sejtést; azonban egyes gondolatait felhasználva és lényegesen továbbfejlesztve *Gödel* később bebizonyította, hogy a Cantor-féle sejtés nem cáfolható meg a halmazelmélet Zermelo—Fraenkel-féle axiómarendszerében (feltéve, hogy ez az axiómarendszer ellentmondástalan).

Gödel fentemlített (adott axiómarendszerben megoldhatatlan problémákra vonatkozó) *tételének* bizonyításához szintén lényegesen felhasználta a rekurzív függvény fogalmát. *Gödel* a kérdéses tétel bizonyítását egy bizonyos axiómarendszerre végezte el (csak kimondta, hogy más hasonló axiómarendszerekre is érvényes). Megmutatta, hogy ebben az axiómarendszerben egyrészt minden rekurzív függvény kifejezhető, másrészt bizonyos, az axiómarendszerre vonatkozó állítások (pl. hogy egy véges formulasorozat egy adott formula bizonyítása-e ebben az axiómarendszerben) az axiómarendszer formuláinak és véges formulasorozatainak egy bizonyos megszámlálásánál fellépő sorszámok rekurzív függvényei közötti egyenletekkel fejezhetők ki. Ebből a két tényből *Gödel* tétele az átlós módszer egy bonyolult alkalmazása segítségével adódik.

Mint már említettem, *Kleene* is a rekurzív függvény fogalmának egy lényeges általánosítását használja fel az *algoritmus fogalmának* szabatos meghatározásához. *Ackermann* egy, a természetes számok egy bizonyos ε_0 típusú jólrendezésével kapcsolatos transzfinit rekurzióval definiált számelméleti függvényt használ fel az *aritmetika ellentmondástalanságának* bizonyításához. A már említett *Markov—Post-tétel* Kalmár-féle bizonyítása ugyancsak a Kleene-féle értelemben vett általános rekurzív függvény fogalmát használja fel. Újabban *Specker* és *Goodstein* az *analízis* fogalmainak és tételeinek élesítésére is alkalmazták a rekurzív függvény fogalmát (pl. egy x_n sorozat rekurzív módon konvergál egy x számhoz, ha van olyan *rekurzív* f függvény, hogy $|x_n - x| < \frac{1}{k}$, mihelyt $n > f(k)$).

Ezekből a példákból is látszik, milyen fontos kérdés a rekurzív függvény fogalma különféle szabatos meghatározásai során előálló különféle függvényosztályok viszonyának tisztázása. E területen *Péter Rózsa* végzett alapvető kutatásokat. A zürichi matematikai kongresszuson tartott előadásában, majd későbbi dolgozataiban a rekurzív függvények különböző osztályairól megmutatta, hogy azonosak azzal a függvényosztállyal, amelyet *Gödel* használ fentemlített tételének bizonyításában, az u. n. *primitív rekurzív függvények* osztályával. E függvényosztály esetén rekurzión egy f függvénynek egy adott g függvény és egy másik adott h függvény segítségével való

$$f(0, x, y, \ldots) = g(x, y, \ldots),$$
$$f(n+1, x, y, \ldots) = h(n, x, y, \ldots, f(n, x, y, \ldots))$$

alakú definícióját értjük. *Péter Rózsa* megmutatta, hogy ha megengedjük, hogy itt a második egyenletben $f(n, x, y, \ldots)$ helyett f-nek olyan értékei is szerepeljenek, amelyeknek első argumentuma ugyan n, vagy n-nél kisebb szám, de $x, y, \ldots$ helyett tetszőleges más argumentumok állnak, akár olyanok is, amelyek megint tartalmazzák f-et, de mindig csak úgy, hogy f első argumentumában n, vagy n-nél kisebb szám áll, akkor ugyanehhez a függvényosztályhoz jutunk. Ilyen definícióra példa:

$$f(0, x) = x,$$
$$f(n+1, x) = n + x + f(n, x^2) + f(n, f(n, x)).$$

Ebből következik, hogy a Hilbert-féle első osztály (bár látszólag általánosabban van definiálva) egybeesik a primitív rekurzív függvények osztályával. Egy másik dolgozatában *Péter Rózsa* olyan rekurzió jellegű módszerekkel foglalkozik, amelyekkel *nem primitív rekurzív függvényekhez* lehet jutni. Az első példát nem primitív rekurzív függvényre *Ackermann* adta u. n. *kétszeres,* vagyis n helyett egyidejűleg két változó szerint haladó rekurzió segítségével; példája (lényegtelen módosítástól eltekintve) a fenti, a Hilbert-féle második osztályba tartozó $g(x, y, n)$ függvény, amely kétszeres rekurzióval így definiálható:

$$g(x, m, 0) = m + 1,$$
$$g(x, 0, n+1) = x,$$
$$g(x, m+1, n+1) = g(x, g(x, m, n+1), n).$$

Péter Rózsa lényegesen egyszerűsítette *Ackermann* bizonyítását és egy másik, elvileg még egyszerűbb, ha nem is olyan elegáns függvényhez vezető eljárást is adott nem primitív rekurzív függvénynek kétszeres rekurzió segítségével való szerkesztésére. Ez az eljárás az *átlós módszer* egy érdekes (megszámlálható halmazon belül való) alkalmazása. Később ezeket az eredményeket *többszörös,* vagyis egyidejűleg több változó szerint haladó rekurziókra is átvitte: ezeket is egyszerű *normálalakra* hozta (amely bizonyos értelemben megfelel az egyszeres rekurziók visszavezetésének primitív rekurziókra), továbbá bebizonyította, hogy a $k+1$-szeres rekurzió *kivezet* a k-szorosan rekurzív függvények köréből. Megmutatván, hogy a k-szoros rekurzív függvények azonosak azokkal a számelméleti függvényekkel, amelyek a nemnegatív egész számoknak egy bizonyos ω^k rendtípus szerinti jólrendezésével kapcsolatos *transzfinit rekurzióval* definiálhatók, a nemnegatív egész számoknak egy ω^ω típusú jólrendezése segítségével olyan számelméleti függvényt szerkesztett, amely *nem definiálható többszörös rekurziókkal.*

Péter Rózsa belekapcsolódott azokba a vizsgálatokba is, amelyek a rekurzív függvényeknek az analízisre való alkalmazására vonatkoznak. Megmutatta, hogy ahhoz, hogy egy r pozitív valós szám a Specker-féle értelemben rekurzív szeletet alkosson, azaz, hogy legyen olyan f rekurzív függvény, hogy (pozitív egész m és n esetén) $\frac{m}{n} > r$ akkor és csak akkor álljon, ha $f(m, n) = 0$, szükséges és elegendő, hogy $[nr]$, mint n függvénye, rekurzív függvény legyen. Megmutatta, hogy ehhez elegendő, hogy r egy bizonyos, általa bevezetett, értelemben *rekurzív módon* legyen *irracionális* (vagy, hogy racionális legyen); a valós számok több szokásos sorfejtéséről megmutatta, hogy rekurzív módon irracionális szám kifejtésében az együttható az indexnek rekurzív függvénye. (Ezekben a vizsgálatokban „rekurzív" többféleképpen is érthető.)

Mindezekből látható, hogy *Péter Rózsa* lényeges eredményekkel gazdagította a rekurzív függvények elméletét és így hivatott volt ez elmélet első kézikönyvét megírni. E könyve, amely Akadémiánk kiadásában jelent meg, a szakkörökben általános érdeklődést váltott ki. A könyv írása számos új kérdést hozott felszínre; jelenleg ezek megoldásán dolgozik. Legutóbbi, megjelenés alatt lévő dolgozatában tisztázta a többszörösen rekurzív függvények viszonyát a Hilbert-féle *második osztályba* tartozó függvényekkel (e vizsgálatai az oslói nemzetközi matematikai kongresszuson tartott előadására nyúlnak vissza) és nagy érdeklődésre számot tartó problémákat vetett fel a Hilbert-féle második és magasabb osztályokba tartozó függvényekre vonatkozólag. *Péter Rózsa* e vizsgálataiból világos, hogy a Hilbert-féle osztályozásban erőltetett dolog *egy változó* szerint haladó rekurziókra szorítkozni; ha az osztályozást úgy módosítjuk, hogy többszörös rekurziókat is megengedünk, akkor a második osztály egy jól körülírható része az első osztályba kerül át (viszont minden, az első osztályban akárhányszoros rekurzióval definiált függvény a második osztályban megengedett módon már egyszeres rekurziókkal definiálható); továbbá, hogy az új osztályozás esetén az elsőnél magasabb osztályba tartozó függvények szerkesztésénél lényeges szerepet játszanak az olyan többváltozós függvények, amelyek *változóinak száma nem állandó,* hanem egyik változójuk értékétől függ, hogy hány változót kell megadni, hogy a függvény értéke meg legyen határozva (ilyen függvény pl. $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{x_1}$).

*Kalmár*nak a Gödel-tételre adott egyszerűbb bizonyításában a primitív rekurzív függvény fogalma helyett egy egyszerűbb fogalom szerepel: az *elemi* (számelméleti) *függvény* fogalma. Elemi függvényeknek nevezzük azokat a függvényeket, amelyek olyan kifejezéssel definiálhatók, amely a változókból és adott természetes számokból véges számú összeadás, aritmetikai kivonás, szorzás, aritmetikai osztás, szumma- és produktumképzés segítségével keletkezik. Itt aritmetikai kivonáson a különbség abszolút értékének, aritmetikai osztáson a hányados egész részének képzését értjük. Pl.

$$\max(x, y) = \frac{x+y+|x-y|}{2} = \left[\frac{(x+y)+|x-y|}{2}\right],$$

$$\min(x, y) = \frac{x+y-|x-y|}{2} = \left[\frac{|(x+y)-|x-y||}{2}\right],$$

$$\operatorname{res}(x, y) = x - y\left[\frac{x}{y}\right] = \left|x - y\left[\frac{x}{y}\right]\right|,$$

$$d(x) = \sum_{i=1}^{x} |1 - \min(1, \operatorname{res}(x, i))| =$$

$$= \sum_{i=1}^{x} \left|1 - \left[\frac{\left|\left(1+\left|x-i\left[\frac{x}{i}\right]\right|\right) - \left|1-\left|x-i\left[\frac{x}{i}\right]\right|\right|\right|}{2}\right]\right|,$$

$$x! = \prod_{i=1}^{x} i$$

elemi függvények.

Minthogy nemcsak a Gödel-tétel bizonyításában, hanem más kutatásokban is pótolni lehet a primitív rekurzív függvényeket elemi függvényekkel, felvetődik az a kérdés, nem azonos-e az elemi függvények osztálya a primitív rekurzív függvények osztályával. Ezt a kérdést *Bereczki Ilona* oldotta meg, amennyiben az I. Magyar Matematikai Kongresszuson bebizonyította, hogy az

$$f(x, 0) = 1,$$
$$f(x, n+1) = x^{f(x, n)}$$

primitív rekurzióval definiált függvény (amely hasonló iterációval jön létre a hatványozásból, mint a hatványozás a szorzásból, vagy a szorzás az összeadásból) *nem elemi függvény.* Előadásához hozzászólva *Markov* és *Egerváry* egy-egy problémát vetettek fel; az előbbi *Bereczki* eredményének az elemi függvény fogalmának általánosítására való kiterjesztésére, az utóbbi egy speciálisabb függvényosztályra vonatkozik. *Bereczki* jelenleg, miután *Egerváry* problémáját már megoldotta, egyrészt *Markov* problémájával, másrészt a rekurzív függvényekre vonatkozó bizonyos tételeknek az elemi függvényekre való átvitelével foglalkozik.

Ezekből látszik, hogy bár a magyar matematikusok a matematikai logika terén számos kutatásba bekapcsolódtak, lényegében még mindig csak egyes részletproblémák megoldásánál tartanak. Ez nem a magyar matematikai logika fejletlenségének jele, hanem annak, hogy a matematikai logika általában gyerekcipőben jár ahhoz a szerephez képest, ami a matematikus számára kutatásai során utat mutató elmélet kialakításában rá vár. Ahhoz, hogy ezt a szerepét betölthesse, egyrészt a matematikai logikusoknak kellene a matematika különböző egyéb területein szélesebbkörű matematizálási tapasztalatokat gyüjteniök, másrészt az ilyen tapasztalatokkal bőven rendelkező matematikusoknak is le kellene küzdeniök ellenkezésüket a matematikai logikával szemben.

Eddig egyoldalúan csak a matematikai logika terén elért magyar eredményekről beszéltem, holott a matematikai logika korántsem meríti ki a matematika alapjainak tudományát. Ennek oka azonban az, hogy a magyar matematikusok keveset foglalkoznak a matematika alapjai tudományának más területeivel. Pedig sok teendő volna még, elsősorban a dialektikus materializmusnak a matematikára való alkalmazása terén. *Alexits* és *Fenyő* idevágó úttörő munkája szinte folytatás nélkül maradt. Kívánatos volna e munka új, az újabb szovjet kutatások figyelembevételével kibővített kiadását megírni már csak azért is, mert a szerzők, mint szóbeli közléseikből tudom, a munka több megállapításával ma már nem értenek egyet. E munkából úgy látszik, mintha a dialektikus materializmus alkalmazása a matematikában, a matematika története jelenségeinek értékelésén kívül, csak a matematikai logikával kapcsolatban volna központi jelentőségű.

Hogy ez nem így van, mutatja a valószínűségszámítás megalapozása körüli ideológiai harc. A valószínűségszámítás nyugaton válságba jutott, mert művelői idealista filozófiából kiindulva próbálták megalapozni. A válság csak akkor szűnt meg, amikor *Kolmogorov* szovjet matematikus a dialektikus materializmus tudatos alkalmazásával új alapot adott a valószínűségszámításnak; ezzel a valószínűségszámítás szabatos matematikai diszciplinává vált. *Rényi* nagy érdeme, hogy *Kolmogorov* elméletét ismertette és a valószínűségszámítás megalapozása körüli ideológiai harcot a dialektikus materializmus alapján részletesen kiértékelte; e tekintetben, különösen a Mises-féle elmélet kritikájában, messzebb jutott el, mint *Gnyegyenko* szovjet matematikus hasonló tárgyú, valamivel később megjelent cikkében. A két munka, amely egymástól függetlenül keletkezett, az alapvető kérdésekben ugyanarra az eredményre jut.

Meg vagyok arról győződve, hogy hasonló feladatok, mint a valószínűségszámítással kapcsolatban, a matematika más ágaival kapcsolatban is vannak. Elsősorban az analízisre gondolok. Az analízis terén aligha lehet válságról beszélni, hiszen e téren, mint *Szőkefalvi-Nagy Béla* tagtársunk előadásából láttuk, egy olyan kis országban is, mint a mienk, egy év alatt jelentős eredmények gazdag termését takaríthatjuk be; másrészt közismert, hogy az analízis eredményeit milyen széles körben lehet alkalmazni. De mégis vannak olyan jelenségek, amelyek azt mutatják, hogy nincs minden rendben az analízis alapjai terén. Ilyen jelenség az, hogy a fizikusok többsége világszerte nem a mai szabatosan felépített analízist alkalmazza, hanem a Newton—Leibniz-féle misztikus differenciálszámítást. Annak okait, hogy miért nem veszik figyelembe a fizikusok az analízis megalapozására vonatkozó újabb eredményeket, véleményem szerint ugyancsak a dialektikus materializmus alkalmazásával kell felderíteni, akkor megtaláljuk, hol a hiba és hogyan lehet rajta segíteni.

Szeretném erre vonatkozólag néhány gondolatomat még röviden ismertetni. Kétségtelen, hogy a Newton—Leibniz-féle alapvetésre erősen rányomta bélyegét *Leibniz* misztikus metafizikus idealizmusa (szembetűnő az analógia a világnak monaszokra való és a mennyiségeknek végtelen kicsi differenciálokra való felbontása között). Azonban az is kétségtelen, hogy ami az analízis megalapozása terén a XVIII. és XIX. században történt, egészen *Weierstrass* logikai szempontból már kifogástalan alapvetéséig, arra is rányomta bélyegét korának idealista filozófiája. Így abban az analízis szabatos megalapozásával összefonódó tendenciában, hogy e diszciplinát önmagában zárt, a szemlélettől és a gyakorlati élettől független rendszerként alapozzák meg, fel lehet ismerni a hanyatló kapitalizmus korának a valóságtól elforduló, a tudomány öncélúságát hirdető filozófiáját. Ennek tudható be, hogy a Weierstrass-féle epszilontika — amit a matematika fejlődése szempontjából csak pozitiven lehet értékelni, hiszen nélküle a matematikának olyan fontos ágai, mint a modern topológia, vagy a halmazelmélet, létre sem jöhettek volna — mostohábban bánt a gyakorlat követelményeivel, mint a Newton—Leibniz-féle misztikus infinitézimális számítás, amely mégis csak a fejlődő kapitalizmus korában keletkezett. Így pl. mit sem ér a fizikus egy olyan sorfejtéssel, amelynek konvergenciája be van ugyan bizonyítva s így lehet annyi tagját venni, hogy azok összege a sor őt érdeklő összegét 3 tizedes pontossággal megközelítse, de vagy semmi felvilágosítást nem kap arra nézve, hány tagját vegye (mert csak úgy derült ki a sor konvergenciája, hogy feltettük, hogy divergens és ellentmondás jött ki), vagy csak olyasmit kap, hogy 1000000 tag biztosan elég erre a célra.

Jellemző az az indokolás, amivel a fizikus menti azt, hogy szabatosság tekintetében nem tart lépést az általa alkalmazott analízis fejlődésével. Nem beszélve arról a rosszabb esetről, amikor a fizikus hisz a misztikus végtelen kis mennyiségek létezésében, azzal indokolja a velük való számolást, hogy az sokkal kényelmesebb, mint az analízis szabatos fogalmainak használata és ha kicsire nem nézünk, közelítőleg úgy is helyes. Exisztenciatételekre pedig nincs szüksége, mert amit ő ki akar számítani, arról úgy is tudja, hogy létezik. A kényelemre való hivatkozás — erre *Rényi* tagtársunk hívta fel a figyelmemet — a Mach-féle „gondolkodással való takarékoskodás" elvének hatása. A megközelítés fogalma természetesen, ha a hibahatárt is megnevezzük, szabatos fogalom, amit a szabatos analízis is használ. Itt azonban rendszerint anélkül hivatkozik a fizikus a közelítő helyességre, hogy számot tudna adni arról, hogy milyen pontosságú a megközelítés (legfeljebb azt a sztereotip választ adja, hogy „magasabbrendű végtelen kis mennyiségektől eltekintve"). A megközelítés e határozatlan fogalmának használata vezetett az elméletileg helyes, de alkalmazásra „kényelmetlen" precíziós matematika és a matematikus véleménye szerint nem szabatos, de az alkalmazásokban helytálló approximációs matematika szétválasztásához. E mögött pedig filozófiai szempontból a kettős igazság idealista-opportunista tanának felelevenítése fedezhető fel.

Természetesen nem mindig áll az, hogy az ily módon felfogott approximációs matematika a gyakorlati alkalmazásban helyes eredményre vezet. Ez azonban a hanyatló kapitalizmus korában ritkán derülhet ki. Ennek két oka van. Ha a megközelítés kielégítő volta a kapitalistának is érdeke (pl. egy híd építésekor, amin a kapitalista is keresztülmegy, ha nem is gyalog, hanem autón), akkor a tízszeres biztonsági tényező biztosítja, hogy akkor sem lesz baj, ha a megközelítés nem elég pontos. Ha pedig „csak" a munkás életéről van szó, akkor a kapitalista is azt mondja, hogy „kicsire nem nézünk". A szocializmus építése korában, amikor felülvizsgáljuk az elavult technikai normákat, igyekszünk az anyaggal takarékoskodni, a selejtet csökkenteni, a munka termelékenységét fokozni, az embert pedig a legfőbb értéknek tartjuk, mind gyakrabban és gyakrabban ki fog derülni, hogy a preciziós matematikától elszakadt approximációs matematika hibás eredményekre vezet. Így előbb-utóbb fel fog merülni az analízis új alapvetésének szükségessége, amely a misztikus fogalmakkal éppúgy végérvényesen szakít, mint a tudomány öncélúságának tévtanával, az approximációs és preciziós matematikát pedig dialektikus egységbe fogja. Jó volna, ha matematikusaink, analistáink éppúgy, mint matematikai logikusaink, *Marx*nak a misztikus, a racionális, valamint az algebrai differenciál- és integrálszámítás kiértékelésére vonatkozó alapvető, sajnos nehezen hozzáférhető írásának áttanulmányozása után az itt felvetett kérdéssel is foglalkoznának és mielőbb eredményeket érnének el az analízis ilyen új megalapozása terén.

Szegedi Tudományegyetem
Bolyai-Intézete.

HOZZÁSZÓLÁSOK

KALMÁR LÁSZLÓ ELŐADÁSÁHOZ

RÉNYI ALFRÉD lev tag:

A Matematikai Bizottság ülésén eddig elhangzott előadások igen értékes és magas színvonalú beszámolók voltak a magyar matematikai tudomány fejlődéséről a matematika egy-egy átfogóbb fejezete terén. Nem véletlen azonban, hogy ezen előadások után nem alakult ki a szó szoros értelmében vett vita, hanem csak olyan hozzászólások hangzottak el, amelyek kiegészítették az előadást. Egy ilyen beszámolóval kapcsolatban ugyanis vita csak úgy alakulhat ki, ha az előadó az elért konkrét eredmények • ismertetésén, sőt egyes konkrét még megoldatlan problémák ismertetésén túlmenőleg kísérletet tesz arra, hogy a matematika szóbanforgó fejezetének kijelölje a helyét a matematikán belül és vázolja azt az irányt, amelybe a matematika illető ágának fejlődnie kell, hogy a jövőben fokozottabban tölthesse be azt a szerepet, amelyre hivatott. Nem vitás, hogy *Kalmár László* előadása azon túlmenőleg, hogy világos és sok fontos összefüggésre rámutató beszámolót nyujtott a matematika alapjai terén a legutóbbi időkben magyar matematikusok által elért valóban figyelemreméltó eredményekről, kísérletet tett arra is, hogy a matematika alapjaira vonatkozó kutatások célját és jelentőségét is vázolja és ezzel kapcsolatban kijelölje azt az irányt, amelybe a kutatásokat a jövőben folytatni kell. Ezt előadása jelentős pozitívumának tekintem, ugyanakkor azonban ez az értékes és helyes kísérlet szükségessé teszi a *Kalmár László* által kifejtett álláspont megvitatását is. Ezzel kapcsolatban már elöljáróban meg kell mondanom, hogy *Kalmár László* álláspontjával két lényeges ponton nem értek egyet. Az első kérdés a matematikai logika szerepére vonatkozik. *Kalmár László* előadásából világosan kitűnik, hogy ő — helyesen — a matematikai logikát a matematika alapjaira vonatkozó kutatásoknak csak egyik fontos, de nem egyetlen fejezetének tekinti. A matematika alapjaira vonatkozó kutatások feladataként ugyanakkor azt jelöli meg, hogy utat mutasson a matematikusnak kutató munkájában. Az előadás során azonban később úgy tárgyalta a matematikai logikát, mintha egyedül a matematikai logika volna hivatott, hogy utat mutasson a matematikusnak, hogy „ne tapogatódzzék sötétben", hogy *Kalmár László* saját kifejezését használjam. Ez a felfogás azonban véleményem szerint szerepének indokolatlan eltúlzását jelenti, amit azért tartok különösen veszélyesnek, mert ha a matematikai logika olyan célokat tűz ki maga elé, amelyeket nem teljesíthet, ez gátolja azt, hogy tényleges feladatait — amelyek ugyan szerintem szerényebbek, mint ahogy azt *Kalmár László* megfogalmazta, de azért igen jelentősek — valóban meg is valósítsa. Véleményem szerint a matematikai logika a matematikának csak a formális oldalával foglalkozik és ezen fontos feladatának teljesítése közben a tartalom kérdését, a matematika és a valóság viszonyának kérdését szándékosan nem is érinti. A feladat önmagában véve is jelentős és nem szorul rá, hogy jelentőségét úgy húzzuk alá, hogy olyan szerepet tulajdonítsunk neki, amelyet éppen sajátos jellegénél fogva nem tölthet be. Formális apparátus nélkül nincsen matematika és a formális apparátus jelentőségét lebecsülni teljesen helytelen volna. Azonban más dolog a matematika formális apparátusának jelentőségét elismerni és más dolog elfeledkezni a tartalom kérdéséről. Éppen ez az alapvető ellentét a matematika materialista és idealista felfogása között: az idealista felfogás csak a formát látja, míg a materialista felfogás állandóan szem előtt tartja, hogy a matematikai formákban, habár közvetve és elvontan, de mégis a valóság, annak mennyiségi viszonyai és térbeli formái tükröződnek — hogy *Engels Kalmár* által is idézett kifejezésével éljek. Ebből azonban nyilvánvalóan következik, hogy a matematikai logika csak a matematika formális kérdéseiben mutathat utat a matematikusnak, a matematika és a valóság viszonyának alapvető kérdéseiben nem. Éppen ezért, véleményem szerint ahhoz, hogy a matematikus „ne tapogatódzzék sötétben" elsősorban nem az szükséges (bár ez is hasznos és fontos), hogy fokozottabban megismerje és alkalmazza a matematikai logika módszereit és eredményeit, hanem ennél sokkal nagyobb jelentősége van annak, hogy megismerje a dialektikus materializmust és tudatosan alkalmazza azt a matematika és a valóság viszonyának kérdéseire, ez segíti a matematikust leginkább abban, hogy „ne tapogatódzzék sötétben".

A másik kérdés, amelyben nem értek egyet *Kalmár László*val, az analízis kérdése. *Kalmár László* párhuzamot vont a valószínűségszámítás és az analízis között. Valójában a helyzet az analízisben ma egészen más, mint a valószínűségszámításban. A valószínűségszámítás századunk első évtizedeiben válságon ment keresztül, a válságból a kiútat szovjet matematikusok találták meg — elsősorban *A. N. Kolmogorov* — és ennek során, a valószínűségszámítás szabatos matematikai elméletének megalkotásában, nagy segítségükre volt, hogy tudatosan alkalmazták a dialektikus materializmust. Hasonló jellegű válságról ma az analízisben nem beszélhetünk. Ilyen jellegű válság valóban volt az analízisben is, azonban ez a mult század első felében volt és a kiútat az analízis szabatos felépítésével *Dedekind, Weierstrass, Cantor* és követőik mutatták meg. Hogy ezt a kérdést világosan lássuk, vizsgáljuk meg, hogy mi jellemzi a matematika valamely fejezetének válságát? A válságokat a matematikában (ugyanúgy, mint a társadalomban) elsősorban ellentmondások fellépése és kiélezõdése jellemzi, melyek következtében minden bizonytalanná válik és elmosódik a határ „igaz" és „hamis" között. Az analízis alapvető fogalmaival kapcsolatban a mult század elején valóban felmerültek ellentmondások (gondoljunk *Bolzano* paradoxonaira, vagy a konvergencia-fogalom tisztázatlanságából származó ellentmondásokra, vagy még előbb a XVIII. században a függvény fogalmával kapcsolatos vitákra) és ezeknek az ellentmondásoknak igen nagy történelmi jelentőségük volt: ezeknek az ellentmondásoknak a feloldására irányuló törekvések nagymértékben hozzájárultak az analízis szabatos megalapozásához. Ilyen jellegű ellentmondásokkal ma az analízisben nem találkozunk és ez is mutatja, hogy nem lehet ma válságról beszélni az analízisben. Hivatkozom itt *Kolmogorov*nak az I. Magyar Matematikai Kongresszuson tartott előadására, ahol — a valószínűségszámítás megalapozása terén előttünk álló feladatokat illetőleg — az analízist állította példaképül a valószínűségszámítás elé és azt mondotta: a valószínűségszámítás matematikai elméletének továbbfejlesztésénél arra kell törekednünk, hogy a valószínűségszámítás konkrét kérdéseinek megoldásához ne kelljen visszanyúlnunk a valószínűségszámítás halmazelméleti alapjaira, amelyeken végeredményben az illető konkrét probléma matematikai megoldása nyugszik, mint ahogy egy differenciálegyenlet megoldásánál nem kell a valós számok Dedekind-féle, vagy Cantor-féle elméletéig visszanyúlnunk, bár végső fokon a megoldás egy ilyen elmélet létezését feltételezi. Az analízis, alapjainak szilárdságát illetőleg tehát olyan fokon áll ma, hogy mintaképül szolgálhat más, fiatalabb matematikai diszciplináknak. Ha tehát az analízis megalapozása körül nincsenek nyitott problémák, akkor hogyan értékeljük azokat a problémákat, amelyeket *Kalmár László* felhozott?

A helyzet az, hogy az általa említett problémák valóban megvannak, és abban is egyetértek, hogy ezekkel a problémákkal foglalkozni kell, azonban ezek a problémák nem az analízis megalapozásának a problémái, hanem egyrészt az analízis oktatásával kapcsolatos didaktikai problémák, másrészt a matematika gyakorlati alkalmazásával kapcsolatos általános problémák, amelyek az analízis megalapozásától teljesen függetlenek akkor is, ha az analízissel kapcsolatban lépnek fel leggyakrabban. Nagyon vigyázni kell, hogy ezekben a kérdésekben tisztán lássunk, hiszen e nélkül nem juthatunk egy lépéssel sem előbbre. Nézzünk egy konkrét kérdést: *Kalmár László* beszélt arról, hogy egyes fizikusok idegenkednek az analízis szabatos matematikai elméletétől és szívesebben megmaradnak a végtelen kicsiny mennyiségek misztikus felfogásánál. Kétségtelen, hogy akadnak ilyen fizikusok, ez azonban nem jelenti azt, hogy az analízis alapjaiban van a hiba: helyesebb volna a hibát az ilyen fizikusok matematikai tudásában keresni. Akkor volna indokolt az analízisben keresni a hibát, ha az analízis szabatos matematikai elmélete kevésbbé volna alkalmazható, mint a misztikus differenciálfogalom. Erről azonban szó sincs. Az Alkalmazott Matematikai Intézet munkája során igen sok gyakorlati probléma merült fel és ezek megoldása során minden esetben tekintettel voltunk a gyakorlat követelményei mellett a matematikai szabatosságra is. Azonban egyetlen esetben sem tapasztaltuk, hogy ez a gyakorlati alkalmazhatóság hátrányára lett volna: éppen ellenkezőleg, a matematikai szabatosság mindig a gyakorlat követelményeit szolgálta. A másik kérdés, amit *Kalmár László* érintett a „precíziós" és „approximációs" matematika ellentéte. Valójában nincs kétfajta matematika, hanem csak arról van szó, hogy az elmélet és gyakorlat elszakadása a burzsoá társadalomban a matematika területén is megnyilvánul. Ennek megvannak a társadalmi okai és valóban beszélhetünk a burzsoa tudomány általános válságán belül a burzsoa matematika válságáról is, ami többek között az elmélet és gyakorlat elszakadásában nyilvánul meg, de ez nem az analízis válsága. Nekünk ma, a szocializmus építésének korszakában a matematika területén is az elmélet és gyakorlat egységének megvalósítására kell törekednünk és ez az analízis területén azt jelenti, hogy törekednünk kell olyan problémák megoldására, amelyeknek a gyakorlatban jelentőségük van; törekednünk kell például sorfejtéseknél a maradéktag gyakorlatilag használható megbecsülésére; ehhez azonban nincsen szükség a konvergencia szabatos matematikai fogalmának elvetésére, vagy valamilyen „új" analízisre, — az analízis „új alapvetésére", ahogy *Kalmár* mondta —, hiszen ez az analízis meglévő elméletének keretei között teljes mértékben megvalósítható. Egyetértek abban, hogy „szakítanunk kell a tudomány öncélúságának tévtanával" de ez egészen más kérdés; különbséget kell tenni egy matematikai elmélet és polgári matematikusok vagy filozófusok által ahhoz fűzött idealista filozófiai megjegyzések között. Egyébként is a „tudomány öncélúságának tévtanával" a matematika bármely ágával kapcsolatban találkozunk, így például az algebrával kapcsolatban még nagyobb mértékben, mint az analízissel kapcsolatban. Azt jelenti ez, hogy az algebrában is „új alapvetésre" van szükség? Természetesen egyáltalán nem jelenti azt. Ezzel szemben valóban szükséges, hogy a matematikával kapcsolatos idealista megnyilvánulásokkal, a „matematikai idealizmussal" minden vonalon felvegyük a harcot és ugyanakkor a dialektikus materializmus alapján fokozott gonddal foglalkozzunk a matematika és alkalmazásainak elvi kérdéseivel. Ezzel lényegében visszajutottam ahhoz, amit a matematika alapjaira vonatkozó kutatásokkal kapcsolatban mondottam és abban már egyetértek Kalmár Lászlóval, hogy ezen a téren még igen sok tennivalónk van.

ALEXITS GYÖRGY r. tag:

Kalmár László igen világos előadásának néhány filozófiai jellegű részletéhez szeretnék hozzászólni.

Semmikép sem tudok egyetérteni *Kalmár*nak azzal a megállapításával, hogy a „matematikai logika a matematika alapjainak a tudománya". A matematikai logika a *matematikai gondolkodás formáival,* nem pedig magával az anyagi valósággal foglalkozik. A gondolkodás pedig az anyagi létezésnek egy sajátos módon való visszatükrözése a tudatban (*Lenin*). A matematikai logika tehát a valóság egy sajátos visszatükrözésének *formáit* vizsgálja, nem pedig magát az anyagi valóságot. Ezzel szemben a „matematika tárgyát a valóságos világ térformái és mennyiségi viszonylatai alkotják" (Engels, Anti-Dühring). A matematikai logika, mint a valóság visszatükrözésével foglalkozó tudomány, nem tartalmazhatja tehát a valóság bizonyos viszonyait *közvetlenül* vizsgáló matematikai alapjait, nem lehet „a matematika alapjainak a tudománya".

Kalmár ebben a kérdésben idealista felfogású, mert előbbre helyezi a tudattal foglalkozó matematikai logikát, a lét egyes kérdéseit tárgyaló matematikánál. Ez a nézet megegyezik a logikai objektívizmus felfogásával, amelyet *Leibniz* óta *Bolzano, Husserl, Meinong, Russell* és az összes többi logisztikusok képviseltek. Teljesen helytelen és a dialektikus materializmussal homlokegyenest ellenkező, idealista álláspontot foglal el az, aki a matematikai megismerés formalizmusát tartja a matematika alapjai tudományának.

Ugyanakkor helytelen volna a matematikai logika eredményeinek lekicsinylése is. Kétségtelen, hogy a matematikai logika a matematikai megismerés formáit, különösen a formalizmus határait illetően jelentős eredményeket ért el és ezek között előkelő helyet foglal el *Kalmár* néhány vizsgálata. Különösen érdekes *Kalmár*nak az az eredménye, amely szerint a Church-tétel speciális esete az általánosan fogalmazott Gödel-tételnek. Nem tudok azonban teljesen egyetérteni *Kalmár*nak azzal a felfogásával, mintha *ezzel az eredménnyel* sikerült volna megcáfolni azt az idealista állítást, hogy a tudásnak vannak abszolút határai. Ez a fogalmazás ismét arra mutat, hogy *Kalmár* a matematikai logika eredményeit a valóságra vonatkozó tényeknek gondolja. A Church-tétel *bármilyen* interpretációja — akár ismerjük *Kalmár* eredményét, akár nem — mindenképpen legfeljebb azt jelentheti, hogy a pusztán formális, *axiomatikus megismerésnek* vannak határai. Ez az állítás pedig semmi meglepőt sem tartalmaz, hiszen a formális gondolkodás korlátozott volta a dialektikus materializmus ismerőinek nem jelent különös meglepetést. Az érdekes csupán az, hogy az idealisták ezt a tényt saját módszereik következetes alkalmazásával *kénytelenek* elismerni.

Nem tudok végül egyetérteni az előadás utolsó részének néhány megállapításával sem. Így helytelennek tartom a precíziós és approximációs matematika merev szétválasztásának felfogását. A matematikának ez a két tendenciája az anyagi valóságról való ismereteink különböző fejlődési fokát, nem pedig különböző megismerést jelent. Az olyan állítások pedig, hogy az approximációs matematika „kicsire nem néz" elve a kapitalizmus hanyatló korának felel meg, a Weierstrass-féle epszilontika pedig *Weierstrass* korának a valóságtól való elfordulását tükrözi, teljesen alap nélküliek. Ezek a megjegyzések a történelmi materializmus tanításainak elhibázott leegyszerűsítései és semmiképpen sem helyes alkalmazásai a marxizmus-leninizmus filozófiájának.

ACZÉL JÁNOS:

Véleményem szerint sem az, ha egy tudományágban a gyakorlatban nem használható területeket művelnek, sem pedig az, ha a tudományágat rosszul alkalmazzák, nem jelenti az illető tudományágnak válságát; — hanem azt jelenti, hogy a szóbanforgó egyes tudósok járnak helytelen úton. Az analízis új fejlődésére sem a hibás alkalmazások és a nem alkalmazható tételek jellemzőek (bár ezek gyakran az első lépést jelentik a jól alkalmazható eredmények felé), hanem az elmélet és gyakorlat egységét szolgáló, pl. szovjet konstruktív függvénytani kutatások és Magyarországon pl. *Alexits* (approximációs hiba effektív becslése) és *Szőkefalvi-Nagy Béla* (perturbáció-számítás) eredményei.

KALMÁR LÁSZLÓ válasza RÉNYI ALFRÉD, ALEXITS GYÖRGY és ACZÉL JÁNOS hozzászólására

*Rényi Alfréd*dal egyetértek abban, hogy a matematikusnak ahhoz, hogy „ne tapogatódzzék sötétben", nemcsak matematikai logikai ismeretekre van szüksége, hanem elsősorban a dialektikus materializmus alapos ismeretére és tudatos alkalmazására. A dialektikus materializmusra azonban nemcsak a matematikusnak van szüksége, hanem minden tudósnak, így pl. a kísérleti fizikusnak is; ez semmit sem von le annak a megállapításnak jelentőségéből, hogy kísérleti fizikusnak emellett még elméleti fizikai ismeretekre is szüksége van ahhoz, hogy tervszerűen végezhesse kísérleteit. Hasonlóan gondolom azt, hogy a matematikai logika további fejlődése során egyszer majd hasznos, sőt nélkülözhetetlen segédeszközévé válik a matematikusnak abban, hogy tervszerűen végezze kísérleteit egy-egy matematikai probléma megoldására. Természetesen abban a kérdésben, hogy milyen problémákkal foglalkozzék, vagy hogy hogyan interpretálja kapott eredményeit a valóság szempontjából, akkor sem a matematikai logika igazítja majd el a matematikust, hanem a dialektikus materializmus; abban viszont, hogy pl. egy adott számelméleti problémát analitikus, vagy algebrai módszerekkel próbáljon-e megoldani, most sem a dialektikus materializmus igazítja el, hanem a rutinja, a jövőben pedig, úgy vélem, a matematikai logikától is értékes felvilágosításokat kaphat e tekintetben. Ennek feltétele azonban a matematikai logika további, ilyen célkitűzések irányába való fejlődése, aminek érdekében kívánatos volna a matematika különböző területeivel foglalkozó matematikusok szorosabb együttműködése a matematikai logikusokkal.

Helyeslem *Rényi*nek azt a megállapítását is, hogy a matematika egy-egy területén a válságot az jellemzi, hogy elmosódik a határ a között, ami igaz és a között, ami hamis. Ilyen értelemben valóban nem lehet most válságról beszélni az analízisben (nem is állítottam, hogy ilyen válság van). Ellenben éppen ilyen értelemben mutatkozik válság a matematika, különösen az analízis alkalmazásai területén, ha nem is olyan alkalmazások területén, amit matematikusok (pl. az Alkalmazott Matematikai Intézet munkatársai) adtak, hanem pl. azon alkalmazások területén, amellyel a legtöbb fizikus élt, amikor egy-egy új fizikai elméletet „matematikai" formába öntött. Ezen a téren annyira elharapódzott az a szokás, hogy nyugodtan lehet matematikailag teljesen hibás fogalmakkal és tételekkel operálni, hogy a matematikus — mélyreható fizikai ismeretek nélkül — nem tudja eldönteni, hibás-e az új elmélet már pusztán a benne alkalmazott matematikai segédeszközök hibás voltánál fogva, vagy pedig annak ellenére helyes.

Nem tudok egyetérteni azzal, hogy ez kizárólag didaktikai kérdés volna. Természetesen didaktikai téren is igyekszem mindent elkövetni, hogy a leendő fizikusok megtanulják, hogy a szabatos analízis nem szőrszálhasogatás, hanem a fizikai kutatásnak is fontos segédeszköze. (Ehhez persze annak megmutatása kell, hogy miért van szükség az egyes fogalmak szabatos definíciójára és az egyes tételek szabatos bizonyítására, ahelyett, hogy eleve a szabatosságnak olyan fokára helyezkedjünk, amelynek szükségét nemcsak fizikus, hanem matematikus tanítványaink sem láthatják még be.) Ezt előttem is megtették már sokan mások. De ha ezeknek a didaktikai erőfeszítéseknek csak olyan kevés sikere van, mint amit tapasztalhatunk, akkor fel kell vetnünk azt a kérdést, mi ennek az oka. Nem elég az okot csak a fizikusban keresni, a kritika eszközével, hanem az önkritika eszközét is alkalmazva megnézni, nem mulasztottak-e el valamit a matematikusok is az analízis megalapozása alkalmával.

Az analízis új alapvetését természetesen nem úgy értem, hogy pl. a konvergencia szabatos matematikai fogalmát elvessük, hanem úgy, hogy továbbfejlesszük. A továbbfejlesztés célja nem a szabatosságnak, hanem az alkalmazhatóságnak fokozása. Az analízis szabatos alapvetése arra készteti a matematikust, hogy eredményeit szabatos formában fejezze ki; egy olyan további alapvetés, amely egyúttal arra is készteti, hogy eredményét alkalmazhatóság szempontjából is felmérje és minél alkalmazhatóbb eredményre (pl. minél gyorsabban konvergens sorfejtésre) törekedjék, csak hasznos lehet a matematika és az azt alkalmazó tudományok fejlődése szempontjából.

A tudomány öncélóságának tévtanával természetesen minden vonalon, így az algebrában is fel kell vennünk a harcot. Az algebrában azonban nincs új alapvetésre szükség, mert nem találkozunk tömegesen olyan jelenségekkel, hogy az algebrát, feltehetően alapvetésének az alkalmazások szempontjából célszerűtlen volta következtében, tévesen alkalmaznák.

*Alexits György*nek hálás vagyok annak világos megmutatásáért, hogy „a matematika alapjai" szakkifejezés, amelyet világszerte alkalmaznak a matematikával kapcsolatos filozófiai kérdésekre vonatkozó, továbbá matematikai logikai és olykor még halmazelméleti kutatások összefoglalására is, fejetetejére állított, idealista felfogás terméke. Kétségtelen, hogy az e kutatásokat összefoglaló diszciplina sem az alap és felépítmény viszonya szempontjából (amely itt szóba sem jöhet), sem pedig semmiféle más materialista értelemben nem tekinthető alapnak. Minthogy hasonló értelemben szoktak néha a fizika, vagy más tudományág „alapjairól" beszélni, helyes volna, ha az Akadémia foglalkoznék azzal a kérdéssel, szükségesnek látja-e ennek a szakkifejezésnek megváltoztatását és hogy mi legyen helyette az új szakkifejezés. Határozatáról értesítenie kellene aztán a Közoktatásügyi Minisztériumot azzal a felkéréssel, hogy a matematikus tanárképzés tantervében változtassa meg az ilyen tárgyú előadás címét (amelyben, amikor ő tartotta Budapesten, *Alexits György* is tárgyalta a matematikai logika bizonyos kérdéseit), a megfelelő, most készülő tankönyv címével együtt. A Szovjetunió és a népi demokratikus országok, valamint a Német Demokratikus Köztársaság akadémiáit is fel kellene kérni, hogy foglalkozzanak a kérdéssel. (Pl. ismeretes, hogy a nagyrészben halmazelmélettel, emellett főleg matematikai logikával foglalkozó lengyel folyóiratnak Fundamenta Mathematicae a címe.)

Más dolog azonban egy helytelen szakkifejezést alkalmazni (amikor az egy előadásra való felkérés alkalmával is szerepel az előadás tárgykörének megjelölésében) és megint más dolog elfogadni azok felfogását, akik azt alkották. Ezért nem fogadhatom el *Alexits* kritikáját, hogy idealista felfogású vagyok, mert e szakkifejezés alkalmazásával előbbre helyezem a tudattal foglalkozó matematikai logikát a lét egyes kérdéseit tárgyaló matematikánál. Hiszen annak — elismerem, hibásan — a matematika alapjai tudományának nevezett diszciplinának, amelybe a matematikai logikát is beleértem, abban jelöltem meg a feladatát, hogy a matematika különböző területein dolgozó matematikusok matematizálásának általánosított tapasztalatává kell válnia. Világos tehát, hogy a matematikát előbbre helyezem a matematikai logikánál, hiszen a tapasztalat nyilván elsődleges annak általánosításával szemben. Nem hiszem, hogy — egy rossz szakkifejezés alkalmazásán kivül — bármi okot adtam volna arra, hogy *Alexits* azt gondolja, hogy egyetértek a logikai objektívistákkal, vagy a logicistákkal, akikkel sohasem értettem egyet.

Sohasem állítottam azt, hogy azzal az eredménnyel, hogy a Church-tétel speciális esete az általánosan megfogalmazott Gödel-tételnek, sikerült volna megcáfolnom azt az idealista állítást, hogy a tudásnak *vannak* abszolút határai. Csak azt állítottam, hogy azt sikerült ezzel megcáfolnom, hogy a *Church-tételből következik* a tudás abszolút határainak létezése — legalább is annak számára, aki elismeri, hogy a Gödel-tételből nem következik; már pedig a Gödel-tételt még a legmerészebb agnoszticisták is csak a tudás *relatív* határai bizonyítékának tekintik.

Hogy egyik állításból (a Church-tételből) következik-e egy másik állítás (a tudás abszolút határainak létezése), természetesen nem *közvetlenül* a valóságra vonatkozó kérdés, hiszen mindkét állítás tudatunkban van meg. Nem is állítottam, hogy a matematikai logika szóbanforgó eredményei (t. i., hogy a Church-tételből nem következik olyasmi, ami a Gödel-tételből nem következik), vagy bármely másik eredménye *közvetlenül* a valóságra vonatkozó tény volna. *Közvetve* azonban a matematikai logika eredményei is a valóságra vonatkoznak, mert hiszen, mint már *Engels* megállapította, szubjektív gondolkodásunk és az objektív világ egyazon törvényeknek van alávetve. Így pl. az, hogy egy matematikai tételből következik egy másik, azoknak a tényeknek egy bizonyos objektív összefüggését tükrözi vissza agyunkban, amelyeket a kérdéses tételek tükröznek. (Persze a Church-tétel esetében sokkal bonyolultabb a helyzet, mert maga a Church-tétel is a matematikai logikának egy tétele, tehát csak *közvetve* vonatkozik a valóságra; az agnoszticizmus pedig más értelemben, mint a matematikai tételek a való világ térformáit és mennyiségi viszonyait, de — a hanyatló kapitalista társadalom tehetetlenségét tükrözi.) Ezért nem tudok egyetérteni azzal, hogy *Alexits* metafizikus merevséggel elválasztja a matematikai logikát a matematikától, holott az mindössze még egy további absztraháló általánosítás (a matematikai tételek tartalmától való eltekintés) útján jött létre a matematikából, amely maga is sorozatos absztrakciók során jutott fejlődésének arra a fokára, amikor a modern értelemben vett matematikai logika keletkezett. Igaz, hogy a matematikai logika egy fokkal még formálisabb, mint a matematika, de bizonyos fokig a matematika is formális tudomány, hiszen „a tárgyak egy bizonyos rendszerét kutatva, a matematikát nem azok sajátos természete, hanem a köztük fennálló formális kapcsolatok érdeklik" *(A. N. Kolmogorov).* Ha merev határt vonunk a matematika és a matematikai logika között, akkor hova tegyük a Boole-féle algebrát, amely többek között (és elsősorban) a matematikai logikai állításkalkulus formális szerkezetéből keletkezett egy további elvonás útján?!

Nem értek egyet *Alexits*nek azzal az állításával sem, hogy a Church-tétel *bármilyen* interpretációja legfeljebb azt jelentheti, hogy az *axiómatikus megismerésnek* vannak határai. Church tétele eredeti formájában — Gödel tételével ellentétben — nem tételezi fel semmiféle axiómarendszer használatát. *Church* megad egy problémasereget és *nem* azt a feltevést vezeti ellentmondásra, hogy van olyan algoritmus, amelyről valamely axiómarendszerben *be lehet bizonyítani,* hogy a problémasereg bármely adott problémáját helyesen oldja meg. Hanem bármely algoritmushoz, amely a problémasereg bármely problémájához egyértelműen hozzárendeli az „igen" és „nem" válaszok egyikét (és amelyről valaki, akár bármilyen axiómatikus bizonyítás, sőt, akár bármiféle indoklás nélkül, azt állítja, hogy a problémasereg bármely problémájához a helyes választ rendeli hozzá), megad egy „ellenpéldát": a problémasereg egy speciális problémáját, amelyet elemi aritmetikai számítással meg tud oldani, de amelyről e megoldás révén kiderül, hogy a helyes válasz rá éppen az ellenkezője annak, amit a tekintett algoritmus rendel hozzá. Csak miután sikerült a Gödel-tétel (nem is az eredeti, hanem az egyszerűsített) bizonyításának elemzése kapcsán kideríteni, hogy a bizonyítás az axiómarendszerről olyan kevés feltevést használ fel, hogy alkalmazható olyan képződményekre is, amelyek a szó közönséges értelmében nem is axiómarendszerek (csak éppen bizonyos állításoknak bizonyos, az axiómatikus bizonyítások szerepét átvevő folyamatokhoz való hozzárendeléseit szolgáltatják), akkor derült ki, hogy a Church-tétel az így általánosított Gödel-tételnek (speciális ilyen, a közönséges értelemben axiómarendszernek nem is nevezhető képződményekre vonatkozó) speciális esete. Ahhoz tehát, hogy a Church-tételt úgy lehessen interpretálni, hogy az az axiómatikus megismerésre vonatkozzék, előbb az axiómatikus megismerés fogalmát lényegesen általánosítani kellett. Ez természetesen nem változtat azon, hogy a Church-tétel agnoszticista interpretációja kezdettől fogva hamis volt.

Azzal a megállapítással sem értek egyet, hogy „az idealisták ezt a tényt (azt, hogy az axiómatikus megismerésnek vannak határai) saját módszereik következetes alkalmazásával *kénytelenek* elismerni". A Gödel-tételnek, vagy a Church-tételnek sem eredeti bizonyítása, sem az én bizonyításom nem használ semmiféle idealista feltevést; nem érthető tehát, miért nevezi *Alexits* az idealisták módszerei alkalmazásának azt az utat, ahogyan a matematikai logika az axiómatikus megismerés határainak felismeréséhez eljutott.

A precíziós és approximációs matematika szétválasztásának kérdésében *Rényi* álláspontját fogadom el, amely szerint ez a szétválasztás a burzsoá tudomány válságának tünete; nehéz elképzelni azt, hogy az anyagi valóságról való ismereteink fejlődésének alacsonyabb foka tenné szükségessé azt, hogy megközelítésről beszéljünk bármiféle hibahatár megnevezése nélkül.

Amit az analízisnek fizikusok által való alkalmazása válságtüneteire vonatkozólag mondtam, azt nem ezzel az igénnyel mondtam, hogy a felvetett kérdés végleges megoldását adja a dialektikus materializmus alapján; e tekintetben csak első kísérletnek szántam. Ha *Alexits* elgondolásomat alap nélkülinek és a történelmi materializmus tanításai elhibázott leegyszerűsítésének tartja, hálás lennék, ha, mint e téren nálam jóval gyakorlottabb szakember, e kérdés kielégítő megoldását adná a marxizmus-leninizmus filozófiája helyes alkalmazásával.

*Aczél János*sal egyetértek abban, hogy pozitíven értékel minden olyan eredményt az analízis terén, amely az alkalmazhatóságot fokozza, így pl. a szovjet konstruktív függvénytani kutatásokat, vagy pl. *Alexits* és *Szőkefalvi-Nagy Béla* említett eredményeit. Az analízis *új fejlődésére* valóban az ilyen kutatások jellemzőek. Az analízis alkalmazásaira, főleg fizikusok által, azonban nagymértékben jellemzőek azok, amelyek nem veszik figyelembe a szabatosság mai követelményeit. Ha egy-egy tudós alkalmaz egy elméletet hibás formában, az valóban az illető tudós tévedése. De ha a hibás alkalmazás tömegjelenséggé válik, úgy, hogy az egyes tudósok nem fogadják el miatta a kritikát, mert más is így szokta csinálni, akkor már olyan tünettel állunk szemben, amelynek okait érdemes magában a rosszul alkalmazott tudományágban, esetleg annak nem minden szempontból kielégítő alapvetésében, megkeresni.

BESZÁMOLÓ A LENGYEL ÁLLAMI MATEMATIKAI INTÉZET TUDOMÁNYOS TEVÉKENYSÉGÉRŐL, KÜLÖNÖSEN A TOPOLÓGIA TERÜLETÉN

K. KURATOWSKI (Varsó), a Lengyel Állami Matematikai Intézet igazgatója

Előadta a Matematikai Állandó Bizottság 1951 december 13-án tartott ülésén

Megragadom az alkalmat mindenekelőtt, hogy kifejezzem afeletti örömömet, hogy résztvehetek a matematikai bizottság munkájában. Mi, lengyel matematikusok, mindig igen nagyra értékeltük a magyar matematikusok munkáját, s nagy örömmel fogadjuk azokat a lehetőségeket, amelyek a két ország matematikusainak kapcsolatait egyre szorosabbakká teszik.

A Lengyel Állami Matematikai Intézet szervezetéről és tudományos munkájáról szeretnék beszélni. Az Intézet éppen most három éve, 1948 decemberében alakult meg, mint az egyetemektől független tudományos intézet. Most, hogy a Lengyel Tudományos Akadémia megkezdi működését, az Intézet annak vezetése alá fog kerülni.

Az Intézet munkája felöleli a matematikának valamennyi ágát, a tiszta és az alkalmazott matematikát egyaránt, s működése kiterjed Lengyelország egész területére. Az Intézet központja Varsóban van, de Wroclawban, Krakkóban, Torunban, Lublinban és Poznańban is vannak csoportjai.

Az Intézet a matematika egyes speciális ágaival foglalkozó 16 csoportra oszlik. Az Intézet alapításakor azt két részre, a tiszta és az alkalmazott matematikával foglalkozó csoportra osztották. Hamarosan kiderült azonban, hogy ez a felosztás mesterséges, így ezt a beosztást megszüntettük, mert meggyőződésünk szerint nincs kétféle, tiszta és alkalmazott matematika, hanem csak egy matematika van és annak alkalmazásai. Az Intézet különböző csoportjai szoros együttműködésben állanak egymással, még látszólag igen távolálló csoportok között is van kapcsolat. Vannak olyan csoportok, melyeknek nincs közvetlen kapcsolatuk az ipar és a fizika problémáival, s közvetve mégis hozzásegítenek az ott felmerült problémák megoldásához. Így például a topológiai csoport különféle szolgálatokat tesz a differenciálegyenletekkel foglalkozó csoportnak, amely viszont közvetlen kapcsolatban áll az iparral.

A 16 csoport munkaterületei és működési helyei a következők:

1. Funkcionál-analízis (Varsó, Poznań).
2. Matematikai műszerek (Varsó).
3. Analitikus függvények (Krakkó, Lublin).
4. Valós függvénytan (Varsó, Wrocław).
5. Differenciálgeometria (Krakkó, Wrocław).
6. Geometriai optika (Wrocław).

7. A matematika alapjai (Varsó, Torun).
8. Integrálegyenletek (Varsó).
9. Differenciálegyenletek (Krakkó).
10. A termelés statisztikai ellenőrzése (Varsó).
11. Matematikai statisztika (Varsó).
12—13. Technikai problémák (Varsó, Wroclaw).
14. Topológia (Varsó, Wroclaw).
15. Matematikai fizika (Varsó).
16. A matematika gyakorlati alkalmazásai általában (Wroclaw).

A 16 csoportban körülbelül 100 tudományos dolgozó van alkalmazva. Ezek részben professzorok, docensek és tudományos segéderők (akik az asszistenseknek felelnek meg), részben pedig olyan dolgozók, akik csak átmenetileg, néhány hónapig dolgoznak az Intézetben. Felmerülhet az a kérdés, hogy szükség van-e egyáltalán arra, hogy a professzorok az egyetemen kívül az Intézetben is dolgozzanak, nem lehetne-e a tudományos kutatás feladatait az egyetemen elvégezni. A tapasztalat azonban azt mutatja, hogy az Intézet tudományos munkája a kutatás színvonalát jelentősen emeli. Figyelembe kell ugyanis venni azt a körülményt, hogy az Intézetben tartott előadások és szemináriumok színvonala lényegesen magasabb lehet, mint az egyetemi előadások színvonala, hiszen ezek nem egyetemi hallgatók, hanem kész kutatók számára készülnek. Szerepelnek az Intézet programmjában olyan témák is, amelyek a szokásos egyetemi tanrendekben nem találhatók meg. Így például a mult évben egy szeminárium *Infeld* és *Mostowski* professzorok vezetésével a kvantumelmélet csoportelméleti kérdéseivel foglalkozott. Vagy Krakkóban a differenciálegyenletek elméletével kapcsolatban a relativitáselmélet problémáival is foglalkoznak s külön előadásokat tartanak olyan mérnökök számára, akik tudásukat el akarják mélyíteni. Olyan előadásokat is tartanak a matematikának egyes ágairól, így például a nomográfiáról, amelyek első sorban technikusokat érdekelnek. Az Intézet előadásain és szemináriumain nemcsak az Intézet tagjai vesznek részt, hanem számos fiatal kutató is, akik tanulmányaikat éppen befejezték. Így az Intézet munkája nagy mértékben hozzájárul a tudományos káderek képzéséhez.

Hogy az Intézet munkáját jobban megismerjék, néhány példát fogok felsorolni az egyes csoportok munkájából. Jelenleg 40 szeminárium folyik különféle témákról. A funkcionál-analízis csoportját *Mazur* professzor vezeti; ő egy szemináriumot vezet, mely lineáris topológikus terekkel foglalkozik. Ugyanezen csoport poznańi tagozatában *Alexievicz* és *Orlicz* professzorok az ortogonális függvénysorok elméletéből vezetnek szemináriumot. A matematikai műszerek csoportját *Greniewski* dr. vezeti, itt az elektronikus számológépek, differenciálegyenleteket megoldó gépek, lineáris egyenletrendszereket megoldó gépek és egyéb matematikai műszerek kérdéseivel foglalkoznak. Az analitikus függvényekkel foglalkozó csoportot *Leja* professzor vezeti, a csoport lublini tagozatát pedig *Biernacki* professzor; ez a tagozat a polinomok analitikus elméletével foglalkozik. A valós függvénytani csoportot *Marczewski* professzor vezeti, ő a sztochasztikus folyamatokról, a mérték problémájáról, *Steinhaus* professzorral együtt pedig a valószínűség fogalmáról és az ergodelméletről vezet szemináriumot. Ugyanezen csoport varsói tagozatában Sikorski professzor a majdnem periódikus függvények elméletéről vezet szemináriumot. A differenciálgeometriai csoportot *Golab* professzor vezeti, résztvesz a csoport munkájában *Slebodzinski* professzor is. A matematikai alapjaival foglalkozó csoportot *Mostowski* professzor vezeti Varsóban. Ebben a csoportban *Mazur* professzor is vezet szemináriumot a rekurzív függvények szerepéről az analízisben. A csoport toruni tagozatát *Jaskowski* vezeti. A differenciálegyenletek csoportját *Ważewski* professzor vezeti, itt működik *Krzyżański* professzor is. A két statisztikai csoportot *Lange* és *Gruzewski* professzorok vezetik. A két technikai csoportot *Truski* és *Drobot* professzorok vezetik, *Turski* professzor csoportja első sorban rugalmasságtani alkalmazásokkal foglalkozik. A matematikai fizika csoportját *Rubinowicz* professzor vezeti. Végül az általános alkalmazásokkal foglalkozó csoportot *Steinhaus* professzor vezeti. Itt a matematika különféle, főleg statisztikai alkalmazásai szerepelnek, így például az orvostudománnyal, az Odera folyón való hajózással, a wroclavi villamosközlekedéssel, az antropológiával kapcsolatos kérdések.

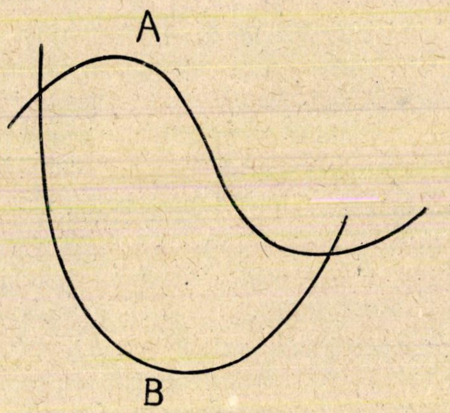
Észrevehették, hogy a matematika bizonyos ágai nem szerepelnek a csoportok munkaterületei között. Ennek oka az, hogy ezekben az ágakban jelenleg nincs Lengyelországban elsőrangú szakember. Így például nincsen algebrai, számelméleti, variációszámítási csoport. A halmazelmélet kérdéseivel viszont a matematika alapjaival foglalkozó csoport foglalkozik.

Az Intézet működése tervszerű. A terv nem túlságosan részletezett, mégis megfelelő módon alá vannak benne húzva azok a területek, amelyekkel az Intézet foglalkozni kíván. Minden csoport elkészíti tudományos tervét, amelyben felsorolja a vizsgálat tárgyává teendő kutatási kérdéseket. Természetesen évközi változások előfordulhatnak. A terv senkit sem gátol meg abban, hogy saját kutatásait folytassa és hogy olyan problémákkal foglalkozzék, amelyeket nem láttak és nem is láthattak előre, de megállapítja, hogy melyek azok a legfontosabb problémák, amelyekkel foglalkozni kell.

Egy külön csoport foglalkozik a matematikai publikációkkal. Elég tekintélyes számú matematikai folyóirat és könyv jelenik meg Lengyelországban, így a Fundamenta Mathematicae, a Studia Mathematica, a Colloquium Mathematicum, az Annales de la Société Polonaise de Mathématique stb. A felsorolt folyóiratokon kívül megjelennek a Monografie Matematyczne sorozatban matematikai monográfiák is. Ebben az irányban sokkal élénkebb most a munka, mint a háború előtt. Akkor körülbelül két kötet jelent meg évenként, az idén pedig már hét jelent meg.

Ilyen nagy matematikai élet irányításához jó szervezésre van szükség, hiszen a háborúban Lengyelország matematikusainak több mint 50%-át elvesztette. Ebben a szervezési munkában a kormánynak, különösen anyagi téren, igen sokat köszönhetünk. A Matematikai Intézet költségvetése forintra átszámítva mintegy két milliót, a Matematikai Társulat költségvetése ezen kívül egy milliót tesz ki.

Ezután rátérek a topológiai csoport munkájának részletesebb ismertetésére. Ezt a csoportot Varsóban *Borsuk* professzor vezeti, továbbá van a csoportnak egy tagozata Wroclawban is, amelyet *Knaster* professzor vezet, s amely halmazelméleti kérdésekkel foglalkozik, végül én magam is vezetek egy szemináriumot a halmazelméleti topológia köréből. Ez jelenleg első sorban a Janiszewski-féle problémával foglalkozik.



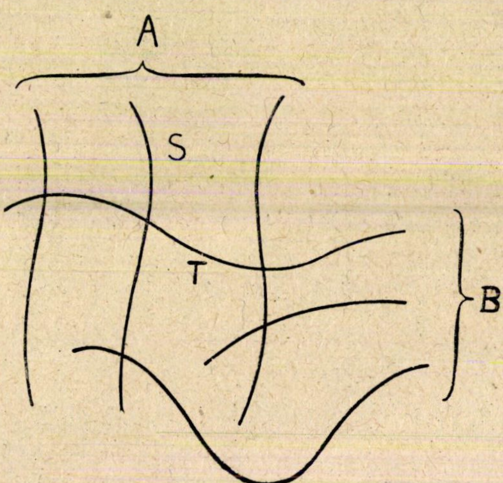
1. ábra

Janiszewski bizonyította be 1913-ban a következő tételt: ha A és B két kontinuum a síkban, s A és B közös része nem összefüggő, akkor A és B egyesítése szétdarabolja a síkot. Más fogalmazásban úgy is ki lehet fejezni ezt a tételt, hogy ha A és B két kontinuum a síkban, melyek egyesítésének kiegészítő halmaza összefüggő, akkor közös részük is összefüggő. Ez a tétel a síknak, illetőleg a gömbfelületnek alapvető tulajdonságát fejezi ki, így magában foglalja a Jordan-tétel egy részét.

Felmerül a kérdés, hogy megvizsgáljuk azokat a topológikus tereket, amelyekben a Janiszewski-tétel érvényes. Ebből a célból kissé megváltoztatjuk a tétel fogalmazását, kontinuum helyett összefüggő zárt halmazt mondunk benne. Tekintsünk azután egy normális topológikus teret, amelyről ezenkívül feltesszük azt is, hogy lokálisan összefüggő. Ez az utóbbi tulajdonság annyit jelent, hogy a tér minden nyílt halmaza előállítható összefüggő nyílt halmazok összegeként. Ilyen például a sík és általában minden euklideszi tér. Euklideszi terek esetében a fellépő nyílt halmazok csak megszámlálható sokan lehetnek, ezt azonban itt nem tesszük fel.

Összefoglalva, tekintsünk tehát egy normális, lokálisan összefüggő topológikus teret, amelyben a Janiszewski-tétel érvényes, azaz amelyben igaz az, hogy ha A és B összefüggő, zárt halmazok, s $A+B$ kiegészítő halmaza összefüggő, akkor AB is összefüggő. Ezt a teret jelöljük 1-gyel. Ha még feltesszük azt is, hogy a tér kompakt és hogy egyetlen pont nem darabolja fel, akkor ez a tér homeomorf a gömbfelülettel. Ez a gömbfelületnek egy topológikus jellemzése. Látható, hogy a Janiszewski-féle tulajdonság nagyon erős tulajdonság, lényegében a gömbfelületet jellemzi.

Legyenek most A és B az 1 tér zárt részhalmazai, S és T pedig legyen A, illetőleg B egy-egy komponense, azaz tovább nem bővíthető összefüggő részhalmaza. Könnyen megmutatható, hogy ha $1-(A+B)$ összefüggő, akkor

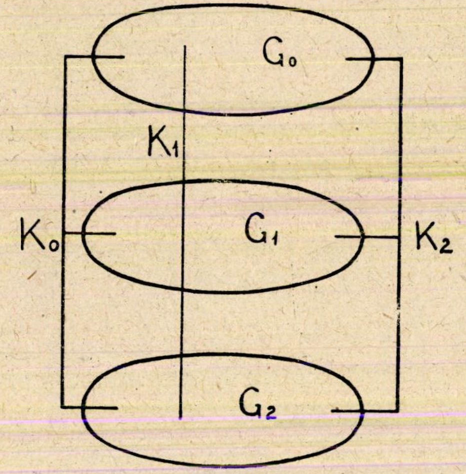


2. ábra

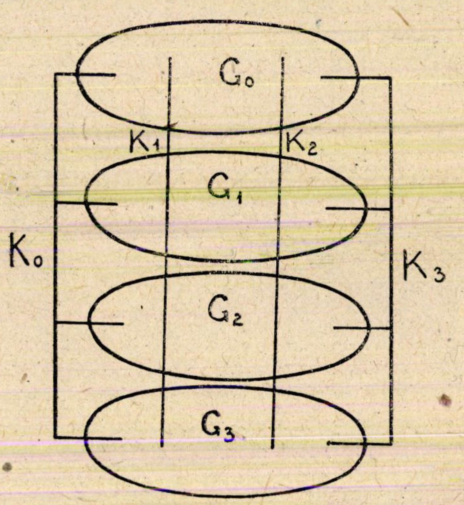
ST is összefüggő, ez a Janiszewski-féle tulajdonságnak egy általánosabb alakja. Érvényes azonban a hasonló állítás akkor is, ha A és B nem zárt, hanem nyílt halmazok. Mindezek a tulajdonságok megfogalmazhatók a Boole-féle algebrák nyelvén is, ha a lezárás műveletét vesszük alapul. Így tehát igen erős síkbeli topológiai tételek származtathatók a Boole-féle algebrák elméletéből, anélkül, hogy a pont fogalmát felhasználnók. Módszertani tekintetből igen érdekes kérdés, hogy meddig lehet eljutni a topológiában a pont fogalmának felhasználása nélkül. Ez az egyik kérdéskör, amellyel a szeminárium foglalkozik.

Zarankiewicz professzor vetette fel a következő kérdést, amely még nincs teljesen megoldva. Tekintsünk a síkban három, páronként közös pont nélküli tartományt, legyenek ezek G_0, G_1, G_2, továbbá tekintsünk három, ugyancsak közös pont nélküli kontinuumot, ezek legyenek K_0, K_1, K_2. Tegyük fel, hogy a három kontinuum mindegyikének van mind a három tartománnyal közös pontja. Akkor, mint az könnyen bebizonyítható, legalább az egyik tartományt az egyik kontinuum szétdarabolja.

Ezt az állítást nem nehéz bebizonyítani, de felmerül a kérdés, hogyan lehet az állítást általánosítani. Tekintsünk például 4 páronként közös pont nélküli tartományt és 4 páronként közös pont nélküli kontinuumot. Feltesszük, hogy mindegyik kontinuumnak van mindegyik tartománnyal közös pontja. Kimutatható, hogy van legalább 4 olyan (i, j) indexpár, hogy az i-edik kontinuum feldarabolja a j-edik tartományt, azaz amelyre $G_j - K_i$ nem összefüggő. Nincs azonban megoldva az a kérdés, hogy mi a helyzet N tartomány és N kontinuum esetén. *Zarankiewicz* professzornak az a sejtése, hogy ekkor legalább $(N-2)^2$ megfelelő tulajdonságú indexpár található, de ennek bizonyítása már az $N = 5$ esetben is igen nagy nehézségekbe ütközik. Ez tehát egy egészen elemi eszközökkel megfogalmazható probléma, amelynek megoldása azonban komoly nehézségeket támaszt.



3. ábra



4. ábra

Ezeket a problémákat azzal a célzattal mondottam itt el, mert úgy hiszem, hogy a megoldatlan problémák megvitatása a tudományos kapcsolatoknak igen termékeny formája. Kérem a magyar matematikusokat, hogy hasonló módon közöljék velünk megoldatlan problémáikat, a lengyel matematikusok a legnagyobb készséggel nyujtanak azokban segítséget.

ÚJABB EREDMÉNYEK A GEOMETRIA TERÜLETÉN

HAJÓS GYÖRGY lev. tag

Előadta a Matematikai Állandó Bizottság 1951 december 14-én tartott ülésén

A geometria olyan sok s annyira eltérő jellegű fejezetet ölel fel, hogy a magyar matematikusok által az elmúlt évben elért eredményekről beszámolva nem is várható, hogy ezek a geometria valamennyi fejezetét felölelik. Mégis megállapítható, hogy a mondott eredmények a geometria számos fejezetét gazdagították. Az érintett fejezetek közé tartozik az elemi geometria, projektív geometria, geometriai szélsőértékek fejezete, analitikus geometria, integrálgeometria, gráfelmélet, differenciálgeometria, többdimenziós terek geometriája és az általános terek differenciálgeometriája.

Az előadás kerete nem engedi meg, hogy az említett munkák részletes ismertetésébe bocsátkozzunk. Megelégszünk azzal, hogy minden dolgozatnál a legfontosabb, ill. legjellegzetesebb eredményt közöljük, vagy éppen — ahol több egyenrangú eredmény szerepel — az eredmények valamelyikének kiragadásával adjunk képet a dolgozat jellegéről.

Vincze István a súlyvonalakról írt dolgozatában egy konvex idomnak egy pontra, ill. irányra vonatkozó súlyvonalait definiálja. Mértani helye ez az adott ponton át, ill. az adott irányban haladó húrok felezőpontjainak. Kimutatja többek között, hogy egy ilyen súlyvonal hossza az idom kerületének felét nem haladhatja meg.

Sós Vera, a legifjabb generációból, egy pontra, ill. irányra nézve konvex görbékkel foglalkozik, amelyeket t. i. minden az adott ponton áthaladó, ill. az adott iránnyal párhuzamos szelő legfeljebb 2 pontban metsz. Megállapítja, hogy ha a görbe teljes szögváltozása 4π-nél kisebb, akkor van olyan pont s egyben olyan irány, melyre nézve a görbe konvex. A felületekre vonatkozó megfelelő vizsgálatainál a teljes szögváltozás helyett a Gauss-féle görbület abszolút értékének felszíni integrálja lép fel.

Szőkefalvi-Nagy Gyula egy rövid dolgozatban kimutatta, hogy a háromszög körülírt köre középpontjának a csúcspontoktól mért távolságait ismerve, s hogy a beírt kör középpontjának az oldalaktól mért távolságait ismerve a háromszög körzővel és vonalzóval nem szerkeszthető meg.

Vincze István és *Szüsz Péter* közös dolgozatban kimutatták, hogy bármely konvex test előállítható egy gömbből olyan leképezéssel, mely minden pontpár távolságát csökkenti.

Kárteszi Ferenc egy torznégyszög oldalérintő gömbjeivel foglalkozott. Kimutatta, hogy az általános esetben, midőn 8 érintő gömb van, a gömbök középpontjai egy Moebius-féle tetraéderpárt tűznek ki.

Egy másik dolgozatában *Kárteszi Ferenc* az axiálisan szimmetrikus Moebius-féle tetraéderpárokról ír. A témát projektív általánosításban vizsgálja: axiális szimmetria helyett biaxiális involúciót tekint, amely egy torzegyenespár felvétele mellett a tér adott pontjához az egyenespár e ponton áthaladó szelőjén az adott pontnak a torzegyenesek metszéspontjaira vonatkozó harmonikus társát rendeli. Foglalkozik a szerző avval a kérdéssel, hogy adott tetraéderhez hogyan kell a torzegyenespárt felvenni avégből, hogy a biaxiális involúció Moebius-helyzetben levő tetraédert szolgáltasson. Bizonyítja, hogy ebben az esetben a torzegyenesek olyan hiperboloid alkotói, melynek az adott tetraéder polártetraédere.

Fejes Tóth László több dolgozatban lefedésekkel kapcsolatos szélsőérték-feladatokkal foglalkozik. Egyik dolgozatában azt a kérdést tárgyalja, hogy ha n-féle sugarú köröket használhatunk s ezeket a síkban úgy helyezzük el, hogy egymást ne fedjék, akkor — durván szólva — a síknak hanyadrészét fedhetjük le. Pontosabban úgy adódik a kérdés, hogy a síknak egyre nagyobb darabjait tekintjük s azt vizsgáljuk, hogy e darabok lefedettségét kifejező törtszám mihez tart.

Egy másik dolgozatban *Fejes Tóth László* a gömb felületén elhelyezett egybevágó s egymást nem fedő gömbsüvegeknek telített rendszerét tekinti, vagyis olyat, hogy további egybevágó s a többit nem fedő gömbsüveg már nem helyezhető el a gömbön. Kiemeljük azt az eredményét, hogy az ilyen telített rendszerek a gömb felületének legalább $(1-1/\sqrt{2})$-szeresét fedik le.

Ismét másik dolgozatban *Fejes Tóth László* azt a kérdést vizsgálja, hogy a síknak hanyadrésze fedhető le, ha adott tartománysorozatot használunk s e tartományok mindegyikét k darabokra vághatjuk fel. Becslést ad arra az esetre, midőn az adott tartományok konvexek és mindegyikük elhelyezhető ugyanazon kör belsejében s egyben mindegyiküknek belsejében elhelyezhető ugyanazon kör.

Egerváry Jenő egyszerű ívekkel foglalkozó dolgozata kimutatja, hogy ha egy ívnek nincs 4 pontja egy síkban, akkor az ív húrjai az ív konvex burkát egyszeresen kimerítik. Ez az eredmény lehetőséget ad arra, hogy — az egyszerű ívek osztályán belül maradva — adott hosszúságú ívek közül a legnagyobb köbtartalmú konvex burokkal rendelkezőt megtalálja. Így egy csavarvonalnak egy teljes menetéhez jut.

Rédei László és *Szőkefalvi-Nagy Béla* közös dolgozatukban a Heron-formula általánosításaként két síkbeli poligon területének szorzatát csúcspárjaik távolságaival fejezik ki. Ha a két poligon megegyezik, e poligon területét átló- és oldalhosszaival kifejező formulához jutnak.

Rédei László egy dolgozatában két egymáshoz rendelt háromszög által megszabott affinitást tekint. Analitikus feltételét adja annak, hogy ennél az affinitásnál minden távolság csökkenjen. Kapcsolatban áll ez a dolgozatban tárgyalt ama kérdéssel, hogy a háromszögek egyikét forgatva a két háromszög Minkowski-féle kevert területe milyen relatív szélsőértéket vesz fel.

Szőkefalvi-Nagy Gyula két dolgozatban foglalkozik azokkal a síkbeli és térbeli alakzatokkal, amelyeknek egyenlete multipoláris koordinátákban lineáris. Az egyik dolgozat csak azokat a konvex alakzatokat tekinti, amelyeknek egyenletében csupa pozitív együttható szerepel, a másik dolgozat az általános esetről szól. Eredményei az egyenlet állandójának változtatásával adódó alakzatsorozatokra, az alakzatok érintőire és több részletkérdésre vonatkoznak.

Hasonló tárgyú *Szőkefalvi-Nagy Gyulának* azon pontok mértani helyeivel foglalkozó dolgozata, amelyeknek adott síkoktól mért távolságai egy lineáris összefüggést elégítenek ki. E mértani hely általában poliéderfelület, kivételes esetekben azonban test is lehet.

Fejes Tóth László az izoperimetrikus egyenlőtlenség Santaló-féle integrálgeometriai bizonyítását írta át elemi geometriai tárgyalássá. Bizonyítása teljesen elemi s nem szorítkozik konvex idomokra.

Az integrálgeometria kiterjesztéséről szól *Varga Ottó* dolgozata, amely az integrálgeometriai módszereket közvetlenül a Finsler-féle terekre alkalmazza. Motiválja ezt az általánosítást az a tény, hogy a Finsler-féle tér legszemléletesebb modellje az inhomogén anizontrop optikai közeg s az optika pedig szoros kapcsolatban áll az integrálgeometriával.

A gráfok fektorizációjának problémakörét dolgozza föl *Gallai Tibor* dolgozata. A gráfnak egy részgráfját k-adrendű faktornak nevezzük, ha ennek éppen k darab éle indul ki az eredeti gráf minden szögpontjából. A szerző e témakör számos korábbi eredményét közös forrásból vezeti le. Bizonyítja, hogy ha az eredeti gráf $(p+q)$-adrendű és egyetlen páratlan szögpontú részgráfjából sem indul ki $(1+p/q)$-nál s egyben $(1+q/p)$-nél kevesebb, nem a részgráf szögpontjába torkolló él (ha továbbá páratlan p és q esetén a gráf szögpontjainak száma páros), akkor van a gráfnak p-edrendű faktora.

Medgyessy Pál bebizonyította, hogy ha egy harmadrendű gráf elsőrendű faktorát tekintjük, található olyan út, amelynek minden második éle tartozik e faktorhoz s amelyben e faktornak minden éle kétszer, a gráf többi éle pedig egyszer szerepel.

Hajós György az n színnel kiszínezhetetlen gráfokkal foglalkozott, vagyis azokkal, amelyeknek szögpontjai nem sorolhatók n osztályba úgy, hogy minden él különböző osztályba tartozó szögpontokat kössön össze. A teljes $(n+1)$-szögből kiindulva effektív konstrukciót ad, mely minden n színnel kiszínezhetetlen gráfhoz elvezet.

A differenciálgeometria legismertebb bevezető fejezetére vonatkozik *Egerváry Jenő* dolgozata, melyben a térgörbék görbületének és torziójának képletét vezeti le megdöbbentő rövidséggel anélkül, hogy a Frenet-féle képletekre támaszkodnék.

Fejes Tóth László a síkgörbék affín ívhosszára, a görbület köbgyökének ívhossz szerinti integráljára adott eleminek mondható definíciót. Ha egy ívbe úgy írunk egy n oldalú töröttvonalat, hogy a görbe és a töröttvonal által közrefogott terület minimális legyen, akkor e terület n^2-szerese n növelésekor az affín ívhossz köbének tizenkettedéhez tart. Ez a definíció több, az affín ívhosszal kapcsolatos szélsőértékfeladat megoldását teszi lehetővé.

Egerváry Jenő többdimenziós ortocentrikus szimplexekre vonatkozólag definiálta a Feuerbach-gömbök sorozatát. E gömbök egyike a szimplex k-dimenziós határszimplexeinek súlypontjait és magasságpontjait tartalmazza (egy él magasságpontjaként a teljes szimplex magasságpontjának az élre vetett vetülete szerepeltetendő). Tárgyalja e gömbök viszonylagos elhelyezkedését és a síkban és térben ismert tulajdonságok megfelelőit. Tárgyalása az ortocentrikus szimplexre vonatkoztatott baricentrikus koordinátákat használ. E tárgyalásmódot a Ptolomaeus-tétel térbeli általánosításának bizonyítására is felhasználta.

A Feuerbach-gömbökre vonatkozó mondott eredményeket *Hajós György* is bizonyította, s azokat némileg kiegészítette. Bizonyításánál elemi vektorszámításra támaszkodik, amihez az alapgondolatot *Szele Tibornak* a Feuerbach-körre adott vektoriális tárgyalása szolgáltatta.

Varga Ottó és *Gyires Béla* közös dolgozatukban az n-dimenziós tér n vektora által meghatározott $\binom{n}{p}$ darab p-vektorral foglalkoznak. Geometriai úton jutnak így algebrai tételekhez, hogy pl. a mondott p-vektorok koordinátáinak mátrixa akkor és csak akkor ortogonális, ha az eredeti n darab vektor koordinátáinak mátrixa ortogonális volt.

Gyarmathy László a többdimenziós Apollonius-féle feladat megoldását tárgyalja. Megoldása azáltal válik lehetővé, hogy a ciklografikus ábrázolást megfelelően általánosítja s a *Maurin* által adott többdimenziós ábrázoló eljárást alkalmazza.

Varga Ottó több dolgozatában foglalkozik a Finsler-féle terekkel. Egyik dolgozatában a skaláris, ill. állandó görbületű Finsler-féle terekre ad geometriai kritériumot. E tereket az jellemzi, hogy egy ívelemen átfektetett síkhoz tartozó görbület nem függ a sík megválasztásától, ill. csak az ívelem kezdőpontjának megválasztásától függ. A szerző által adott kritérium egy parallelogramma mentén körülvezetett vektor megváltozását tekinti. A tér jellegére abból tud következtetni, hogy e különbségvektor irányának határhelyzete a parallelogramma (síkjának megtartása mellett való) csökkentésekor a parallelogramma és kezdővektor terébe, ill. a parallelogramma síkjába esik-e s hogy a különbségvektor iránya a határhelyzethez a parallelogramma területének csökkentésével együtt milyen erősen konvergál.

Másik dolgozatában *Varga Ottó* egymásra izometrikusan leképezhető Finsler-féle terekről ír. Megadja a terek görbületi tenzorai közötti ama összefüggést, amely az ilyen leképzés lehetőségét biztosítja.

Végül egy dolgozatában *Varga Ottó* affin összefüggő vonalelemsokaságok teljes differenciálinvariáns-rendszerének tárgyalását adja. E dolgozatával a *Veblen* által pontsokaságokra adott tárgyalást általánosítja. Tárgyalásánál megfelelő normálkoordinátarendszer bevezetését használja segédeszközként.

Az előadottak bőven alátámasztják a témák gazdagságáról a bevezetésben mondottakat. Mégis sajnálattal kell megállapítani, hogy a geometriának egyes fejezetei nem szerepelnek ebben a felsorolásban. Így pl. a topológia csak a vitathatóan odatartozó gráfelmélet révén áll az elmondottakkal kapcsolatban. A magyar geometriai iskolának tehát bőven van tennivalója: ehhez anyagot nyujt gazdag témaköre s eddig elhanyagolt fejezetek bekapcsolása is.

Magyar Tudományos Akadémia
Alkalmazott Matematikai Intézete.

ÚJ EREDMÉNYEK A VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS TERÉN

RÉNYI ALFRÉD lev. tag

Előadta a Matematikai Állandó Bizottság 1951 december 14-én tartott ülésén

A valószínűségszámítás a felszabadulás előtt hazánkban meglehetősen elhanyagolt ága volt a matematikának. *Jordán Károly* értékes és jelentős munkásságot végzett e téren, amelyről e héten a Bolyai János Matematikai Társulat *Jordán Károly* 80. születésnapja alkalmával tartott ünnepi ülésén volt alkalmam beszámolni.[1] Azonban a magyar matematikusok többsége nem igen érdeklődött a valószínűségszámítás iránt. Ennek főbb okai a következők voltak: a valószínűségszámítás terén élenjáró szovjet tudomány eredményei nem voltak kellőképpen ismeretesek hazánkban; hiányzott a matematika gyakorlati alkalmazásai iránti mélyebb érdeklődés, ami a valószínűségszámitási kutatás egyik legfontosabb éltető eleme; végül pedig a magyar matematikusok nem ismerték a dialektikus materializmust, ami a valószínűségszámítás elvi kérdéseiben való helyes tájékozódás előfeltétele. Ez utóbbi hiány különösen azért éreztette hatását, mert éppen erre az időre — a felszabadulás előtti évtizedekre — esik a valószínűségszámítás megalapozása körüli kérdések tisztázása és az egymással ellentétes és egymással éles harcban álló felfogások helyes értékelése csak a dialektikus materializmus alapján lehetséges. A valószínűségszámítás alapjai körüli viták ismertetésére itt nem térhetek ki[2], csak megemlítem, hogy a valószínűségszámítás szabatos matematikai elméletének megalkotása és a valószínűségszámítással kapcsolatos alapvető ismeretelméleti kérdések tisztázása szovjet matematikusok és elsősorban *A. N. Kolmogorov* érdeme.

A felszabadulás után rövidesen elhárultak a fentemlített akadályok a valószínűségszámítás fejlődése elől hazánkban és megnyílt a fejlődés lehetősége ezen a vonalon is. Ugyanakkor egyre nagyobb mértékben nyilvánult meg a szükséglet a természettudományok, különösen a fizika és technika számos ága részéről a valószínűségszámítás fejlesztése iránt. Ma már elmondhatjuk, hogy a szovjet matematikusok munkásságára támaszkodva és az ő személyes segítségükkel lényegében behoztuk lemaradásunkat ezen a vonalon és a valószínűségszámítás terén hazánkban a tudományos kutatás egyre intenzívebb és már számos eredményt tud felmutatni. Az elméleti kutatásokkal párhuzamosan és azok eredményeire támaszkodva a valószínűségszámítás módszerei egyre szélesebb területen kerülnek gyakorlati alkalmazásra. A valószínűségszámítási kutatások további fejlődése szempontjából nagy jelentősége van, hogy ma már a valószínűségszámítás az egyetemi matematika-oktatás szerves részévé vált. A magyar matematikusok felismerték, hogy a valószínűségszámítás elemeinek az ismerete a matematikai műveltség fontos alkotóeleme. Különösen ki kell emelni azt az egyre fokozódó érdeklődést, amely a fiatal matematikus generációnál a valószínűségszámítás iránt tapasztalható és ami a további fejlődés biztosítéka. A valószínűségszámítás további fejlődése szempontjából már igen érezhető egy magyar nyelvű korszerű tankönyv hiánya. Ezt a hiányt igyekszik előadó most készülő tankönyvével pótolni.

A valószínűségszámítás terén az elmult évben elért eredményeket három csoportra oszthatjuk, a következőképpen: *A)* elméleti eredmények, *B)* a matematikai statisztika körébe vágó eredmények, *C)* a valószínűségszámítás egyéb természettudományi és technikai alkalmazásaira vonatkozó eredmények.

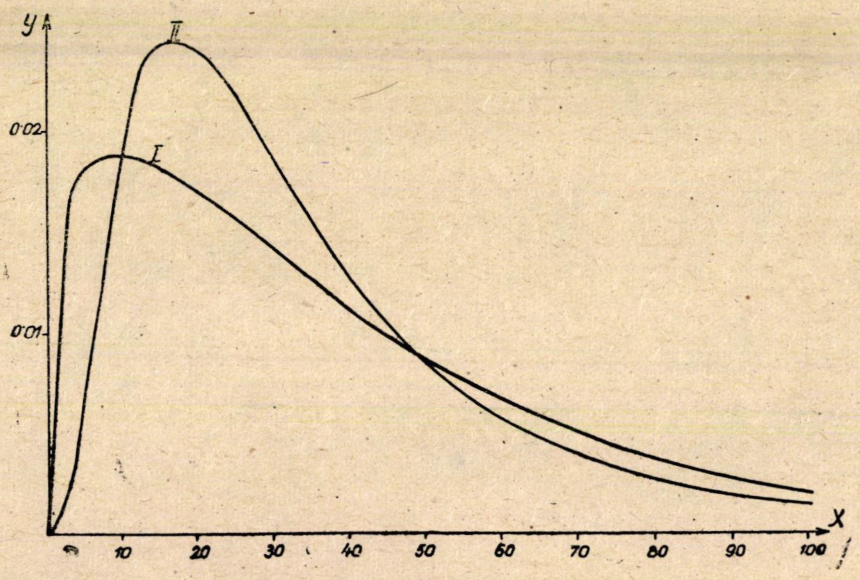
Az első csoportba tartozó eredmények egy nagy része a III. Osztály Osztályközleményeinek sajtó alatt lévő számában fog magyar nyelven megjelenni, ezért ezen eredmények részletes ismertetésére nem térek ki, inkább csak az eredmények felsorolására szorítkozom. A valószínűségszámítás terén ma világszerte az alapok tisztázása után a sztochasztikus folyamatok elméletének fejlesztése áll az érdeklődés előterében. Egy összefüggő és viszonylag teljes elmélet kialakítása a soronkövetkező feladat. Ez irányban előrehaladást jelentett a diszkrét és additiv Markov-féle folyamatok elméletének kidolgozása, amelyet az összetett Poisson-féle eloszlások fogalmának bevezetésével és tulajdonságainak tisztázásával *Jánossy Lajos, Aczél János* és az előadó egy közös dolgozatukban[3] kezdtek meg és amelyet előadó három másik dolgozatban[4,5,6] folytatott. Az összetett Poisson eloszlások elméletének kiépítésénél említett szerzők felhasználták *A. N. Kolmogorovnak* egy értékes útmutatását. Az elmélet felépítése lényegében befejezettnek tekinthető és már eddig is igen sokirányú gyakorlati alkalmazás lehetősége merült fel (rádióaktív bomlás, telefonhálózatok terhelési problémái, ötvözetek fajsúlyának lokális ingadozásai, elektronemisszió, stb.), azonban a gyakorlati alkalmazások köre távolról sincsen kimerítve. A Markov-láncok elméletére vonatkozik *Jánossy Lajos* egy új gondolatokat felvető munkája[7], amelyben a Laplace-féle transzformáció helyett más, általánosabb transzformáltakat vizsgál, amelyek az illető Markov-lánc sajátságaihoz vannak szabva. *Takács Lajos* dolgozata[8] bekövetkezési és koincidencia-jelenségek elméletét tárgyalja, általános feltevések mellett és eredményeit több konkrét esetre alkalmazza, *Gyires Béla* egy dolgozata[9] egész értékű valószínűségi változók esetében a centrális határértéktételt a részletösszegek mod n eloszlására terjeszti ki: eredményei kapcsolatban állnak a Poincarétől származó „méthode des fonctions arbitraires“ néven ismeretes módszerrel. Végül megemlítem előadónak a független függvényekre vonatkozó vizsgálatait, amelyeket akadémiai székfoglaló előadásával indított meg[10], melyben bebizonyította, hogy a valószínűségszámítás centrális határértéktétele az alapul vett valószínűségi mérték abszolút folytonos transzformációjánál érvényben marad, amely eredményét *A. N. Kolmogorov* az I. Magyar Matematikai Kongresszuson tartott előadásában messzemenően általánosította és továbbfejlesztette; előadó ezen vizsgálatainak folytatását képezi az I. Magyar Matematikai Kongresszuson tartott előadása[11], amelyben *H. Steinhaus* egy független függvényekre vonatkozó sejtését bizonyította be bizonyos kiegészítő feltevések mellett. Egy újabb dolgozatában[12] előadó kimutatta, hogy *Steinhaus* sejtése általánosságban nem érvényes, ugyanakkor a [10, 11]-ben szereplő feltételeknél lényegesen kevesebbet kívánó mellékfeltételek mellett mutatta ki a sejtés érvényességét. Ezeknek a vizsgálatoknak a folytatását képezi előadó és *Pukánszky Lajos* közös dolgozata[13], amely tárgyát illetőleg már a valós függvénytan területére tartozik és amelyről *Szőkefalvi Nagy Béla* tett említést beszámolójában. Ezt az eredményt itt csak azért említem, mert újabb példája annak, hogy a a valószínűségszámítási kutatások ösztönzést adhatnak a matematika más ágainak is. A [10] dolgozattal megindított új kutatási irányba vágó további eredményekről remélem a közeljövőben alkalmam lesz beszámolni. Most csak azt említem meg, hogy ezen az úton lehetségesnek látszik a valószínűségszámítás független valószínűségi változókra vonatkozó alapvető tételeinek gyengén függő változók esetére való kiterjesztése, aminek úgy elméletileg, mint pedig a gyakorlati alkalmazások szempontjából nagy jelentősége van.

Áttérek most a matematikai statisztika körébe vágó eredmények ismertetésére. A matematikai statisztika ma fejlődésének olyan stádiumába került, amikor az eddig alkalmazott módszerek fokozottabb kritikai felülvizsgálata, ugyanakkor pedig teljesen új alapokon nyugvó módszerek kidolgozása van napirenden. Az angol-amerikai matematikai statisztikai iskola, amelynek alapítója és vezetője *R. A. Fischer*, válságba jutott. Ez az iskola a *Bayes*-féle módszer kritikájának jelszavával indult, azonban ezt a módszert nem sikerült jobb és megbízhatóbb módszerrel helyettesíteni, amint ezt *Sz. N. Bernstein* már 1936-ban kimutatta és amire nemrégiben *H. Oderfeld* és *H. Steinhaus* is világosan rámutattak egy konkrét minőségellenőrzési problémával kapcsolatban. A „fiducial probability" (valószerűség) homályos fogalma, amit *Fischer* a Bayes-módszer helyettesítésére javasol, csak arra jó, hogy elleplezze, hogy *Fischer* és tanítványai nem voltak képesek a Bayes-módszert semmi mással pótolni. Ugyanakkor rá kell mutatni, hogy a nyugati statisztikában az úgynevezett „paraméteres" irányzat uralkodik, amely a gyakorlatban igen durva hibák forrásává válhat, ha azt kritikátlanul és alkalmazhatóságának előzetes gondos vizsgálata nélkül használják fel. Ennek az előzetes vizsgálatnak a szükségességére azonban a nyugati statisztikai irodalom egyáltalán nem fordít gondot, sőt, éppen azzal jellemezhető, hogy ezeket a kérdéseket szinte teljesen elhanyagolja. Ennek nyilvánvalóan társadalmi és ideológiai okai vannak. Az alkalmazhatóság kérdésének alapos tisztázása ugyanis lehetetlenné tenné a matematikai statisztika módszereivel való visszaéléseket, amelyek a burzsoá közgazdaságtanban és biológiában burjánoznak.

Az angol-amerikai statisztikai iskola irodalmát tehát fenntartással kell olvasnunk és alapos kritikával és óvatossággal kell kihámoznunk belőle azt, ami valóban értékes. Ugyanakkor a matematikai statisztika terén az elmult évtizedben a Szovjetunióban egy új iskola alakult ki, amely a matematikai statisztika további egészséges fejlődésére nézve irányt mutat. A szovjetunióbeli matematikai statisztikai kutatásokat a következő alapvető vonások jellemzik, amelyek egyben szembeállítják az angol-amerikai iskolával: 1. az elmélet alkalmazhatósági határainak lelkiismeretes és alapos vizsgálata a dialektikus materializmus alapján, 2. a matematikai szabatosság követelményének állandó szem előtt tartása (ezzel szemben áll a nyugati irodalom szembetűnő „közömbössége" a matematikai precizitással szemben), 3. a „nem-paraméteres" problémák és módszerek előnyben részesítése abból a célból, hogy az elmélet gyakorlati alkalmazásait függetlenítse ellenőrizhetetlen és gyakran egyenesen téves hipotézisektől.

A hazai matematikai statisztikai kutatások teljes mértékben a szovjet matematikai statisztikai iskolához csatlakoznak, beleértve a nyugati irányzatok fokozottabb kritikájára való törekvést is. Ez megnyilvánul az Alkalmazott Matematikai Intézet valószínűségszámítási és matematikai statisztikai osztályának mindennapi munkájában, melynek során a konkrét gyakorlati problémák megoldásánál igen jó eredménnyel alkalmaztuk állandóan a szovjet iskola eredményeit, így például a *Kolmogorov—Szmirnov*-féle próbát. Hasonlóképpen szovjet kutatásokhoz csatlakozik előadónak a kőtörmelék szemmegoszlására vonatkozó dolgozata[14], amelyben *Kolmogorov* hasonló tárgyú munkájához csatlakozva kimutatja a logaritmikus normális eloszlás érvényességét. Ennek a problémának a kőbányaiparban van gyakorlati jelentősége, így például lehetővé teszi a különböző előírt finomságra való aprításhoz szükséges energia kiszámítását. A kapott elméleti eredményeket az Alkalmazott Matematikai Intézet összehasonlította a megfigyelésekkel és igen jó egyezést kapott. Ugyanakkor meg kell állapítani, hogy *Beke Béla* megállapításai[15], aki azt állítja, hogy a logaritmikus normális eloszlás és a gyakorlatban eddig alkalmazott, minden elméleti alapot nélkülöző empirikus *Rosin—Rammler*-féle eloszlás között az eltérés gyakorlatilag lényegtelen, minden alapot nélkülöznek. Egy konkrét esetben a két eloszlás sűrűségfüggvényeinek eltérését az 1. ábra mutatja. A matematikai statisztika módszereinek alkalmazásánál szükséges körültekintésre mutatott rá előadó egy, az Orvosi Hetilapban megjelent[16], két kutató csoport között hőmunkának a munkás szervezetére gyakorolt hatására vonatkozó megfigyelések kiértékelésével kapcsolatban kialakult vitájához való hozzászólásában, az úgynevezett „szignifikáns differencia" módszerének alkalmazhatóságát illetően.

A matematikai statisztikával kapcsolatban a nyugati irodalomban el van terjedve az a nézet, hogy a matematikai statisztika a valószínűségszámítás ismerete nélkül is elsajátítható és eredményesen alkalmazható. Ez a nézet alapjában helytelen és rendkívül veszélyes. Arról van szó, hogy a valószínűségszámítás ismerete nélkül a matematikai statisztika módszerei receptekké válnak és semmi biztosítéka nincs annak, hogy ezeket a recepteket helyesen és a megfelelő helyen használják-e fel. A matematikai statisztika módszereinek alkalmazhatósági határait csak az ismerheti fel helyesen, aki tisztában van ezeknek a módszereknek az elméleti alapjával, tehát a valószínűségszámítással. A helyzetet a következő hasonlat világítja meg: a valószínűségszámítás és a matematikai statisztika viszonya hasonlít az orvostudomány és a gyógyszertan viszonyára és a matematikai statisztika módszereinek a valószínűségszámítás ismerete nélküli alkalmazása ahhoz hasonlítható, mint ha valaki egy ismeretlen betegség esetén közvetlenül gyógyszerészhez fordul, ahelyett, hogy először egy orvossal megvizsgáltatná magát. A hasonlat még abban a vonatkozásban is megállja a helyét, hogy ugyanúgy, amint a legjobb gyógyszer is súlyos kárt okozhat a szervezetben, ha nem az orvosi előírásoknak megfelelő mennyiségben és módon alkalmazzák, hasonlóképpen a legmegbízhatóbb matematikai módszernek is megvannak az alkalmazhatósági határai és a helytelen alkalmazás súlyos hibák forrása lehet.



1. ábra

Mielőtt az eredmények harmadik csoportjára rátérnénk, egy konkrét kérdésről szeretnék részletesebben beszélni, amely elvi szempontból is igen érdekes és példa arra, hogy egy statisztikai módszernél milyen körültekintően kell megvizsgálni az alkalmazhatóság feltételeit. *Bodó Zalán* egy nemrég megjelent dolgozatában[17] egy új módszert közöl, fluoreszcens porok szemcsemegoszlásának kísérleti meghatározására. Ez a módszer abban áll, hogy a mikroszkóp különböző beállításai mellett különböző látómezőkben megvizsgálja a megadott nagyság-csoportokba tartozó szemcsék *számarányát* és ebből határozza meg a teljes eloszlást. A módszer igen érdekes, mert sok munka megtakarítását teszi lehetővé, de természetesen a pontosság terén tett bizonyos engedmények árán; éppen ezért érdemes a módszer alkalmazhatósági határainak kérdését alaposabban megvizsgálni. Nem fogom itt részletesen ismertetni *Bodó Zalán* módszerét, hanem azt rögtön egy urna-modellre vonatkozó átfogalmazásban mutatom be, ami a kérdés matematikai lényegét tartalmazza.

Matematikailag *Bodó Zalán* módszere a következő eljárással jellemezhető: egy urnában N golyó van, ezek közül Np piros, Nq fehér és Nr kék golyó $(p+q+r=1)$; visszatevéssel egy n elemű mintát veszünk; jelentsék x, y és z a mintában lévő piros, fehér és kék golyók számát $(x+y+z=n)$. *Bodó* módszere azzal jellemezhető, hogy a $\frac{p}{q}$ hányadost az $\frac{x}{y}$ tapasztalati értékkel becsüli meg, feltéve, hogy olyan mintáról van szó, amelyben $y>0$, azaz amely tartalmaz legalább egy fehér golyót; amennyiben a minta nem ilyen, úgy azt nem veszi figyelembe. (Ez a feltétel elengedhetetlen, hiszen egyébként az $\frac{x}{y}$ hányadosról nem beszélhetünk.) Vizsgáljuk meg először, hogy ez a becslés *torzítatlan-e*, másszóval vizsgáljuk meg az $\frac{x}{y}$ valószínűségi változó feltételes várható értékét az $y>0$ feltétel mellett, amelyet $M_n(p,q)$-val jelölünk és nézzük meg, hogy ez megegyezik-e $\frac{p}{q}$-val. (Mint ismeretes, egy statisztikai becslést akkor neveznek torzítatlannak, ha várható értéke egyenlő a megbecsülendő mennyiséggel). Egyszerű számolással adódik, hogy

$$M_n(p,q)=\frac{np}{1-(1-q)^n}\sum_{r=0}^{n-2}(1-q)^r\,\frac{1-(1-q)^{n-r-1}}{n-r-1} \tag{1}$$

tehát — amint ez várható volt — a becslés nem torzítatlan. Vizsgáljuk meg $M_n(p,q)$ határértékét ha $n\to\infty$, p és q állandóak. Egyszerűen belátható, hogy ebben az esetben

$$M_\infty=\lim_{n\to\infty}M_n(p,q)=\frac{p}{q} \tag{2}$$

azaz a becslés határértékben torzítatlan. A konvergencia sebessége is megbecsülhető:

$$M_n(p,q)-\frac{p}{q}=O((1-q)^{\frac{n}{2}}\,n\log n)+O\left(\frac{1}{nq^2}\right) \tag{3}$$

Tegyük most fel, hogy ugyanakkor, amikor $n\to\infty$, p és q is változnak, mégpedig úgy, hogy mindkettő 0-hoz konvergál, olymódon, hogy hányadosuk egy határértékhez közeledik: pontosabban tegyük fel, hogy $np\to\mu$ és $nq\to\lambda$ akkor a várakozással ellentétben $\lim_{n\to\infty}M_n(p,q)$ nem egyenlő $\frac{p}{q}$-val, hanem ehelyett a következő határértékkel bir:

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ np\to\mu \\ nq\to\lambda}} M_n(p,q)=\frac{\mu}{e^\lambda-1}\int_0^\lambda \frac{e^x-1}{x}\,dx. \tag{4}$$

Ha λ nagy, úgy (4) jobboldala közelítőleg $\frac{\mu}{e^\lambda}Li(\lambda)$-val egyenlő, ahol $Li(x)=\int_1^x \frac{du}{\ln u}$ a törzsszámelméletből jól ismert integrállogaritmus; mivel aszimptotikusan $Li(x)\approx\frac{x}{\ln x}$, tehát ha $\lambda\to\infty$, úgy (4) jobboldala aszimptotikusan $\frac{\mu}{\lambda}$-val egyenlő. Ha azonban $\lambda\to 0$ és μ állandó, úgy (4) jobboldalának határértéke μ, míg ez esetben $\frac{\mu}{\lambda}\to\infty$.

Ez mutatja, hogy ennek a becslésnek az alkalmazásánál körültekintéssel kell eljárnunk: adott p, q és n értékek mellett meg kell becsülni az

$$M_n(p,q)-\frac{p}{q}$$

különbséget és csak ha ez kicsiny, $\frac{p}{q}$-hoz képest, akkor fogadhatjuk el az $\frac{x}{y}$ becslést (illetőleg az ezzel a becslési eljárással kapott értékek középértékét) megbízhatónak. Ehhez azonban hozzá kell tennünk a módszer „mentségére", hogy ugyanez a hibája minden más elképzelhető becslésnek is megvan; könnyű belátni ugyanis, hogy az x, y értékekből $\frac{p}{q}$-ra torzítatlan becslést megadni egyáltalán nem lehetséges. Legyen ugyanis $F(x,y)$ egy tetszőleges függvénye x-nek és y-nak; ha $F(x,y)$ a $\frac{p}{q}$ hányados torzítatlan becslése volna, úgy fennállna az

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-k}F(k,l)\,V(x=k;y=l)=\frac{p}{q} \tag{5}$$

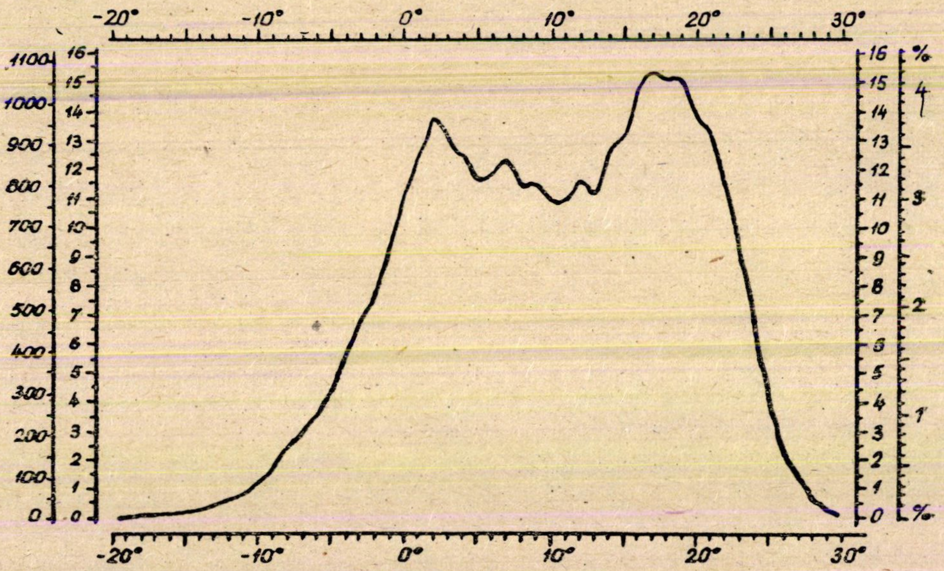
reláció, mégpedig p-ben és q-ban identikusan; ez azonban lehetetlen, hiszen ha $q\to 0$, úgy (5) jobboldala végtelenhez tart, míg a baloldal korlátos marad (ugyanez a helyzet, ha feltételes várható értékkel számolunk $y>0$ feltétel mellett). Ilyenmódon minden gyakorlati problémában p, q és n nagyságához szabott eljárást kell alkalmazni és nem létezik olyan univerzális „jó" módszer, amely minden körülmények között alkalmazható. A kérdésre más alkalommal még vissza fogok térni.

Még csak azt jegyzem meg, hogy a fluoreszcens porok szemmegoszlása jó egyezést mutat a logaritmikus normális eloszlás törvényével.

Áttérek ezek után az eredmények harmadik csoportjára: a valószínűségszámítás és a matematikai statisztika természettudományi és technikai alkalmazásaira. Ami a fizikát illeti, első helyen *Jánossy Lajosnak* a láncreakciókra vonatkozó dolgozatát[18] kell megemlíteni.

Ennek a dolgozatnak az érdekességét elsősorban az adja meg, hogy a numerikus számolás szükségletei vezették *Jánossyt* a függvényiteráció fogalmának folytonos paraméter esetére való általánosítására. Ennek lehetősége már a mult század végén felmerült, a kérdés azonban azóta éppen alkalmazások hiányában feledésbe merült. Az alkalmazások jelentőségére és a kérdés elméleti érdekességére való tekintettel indokoltnak látszik ebben az irányban folytatni a kutatásokat. Ezzel kapcsolatban előadó is ért el bizonyos részleteredményeket, azonban erről más alkalommal számol be.

Megemlítem itt *Fényes Imre* kísérletét a kvantummechanika új felépítésére a valószínűségszámítás segítségével. Elméletének lényege, hogy a Schrödinger-egyenletet a sztochasztikus folyamatok *Kolmogorov*-féle egyenleteiből igyekszik levezetni; *Fényes* kísérlete élénk vitát váltott ki, ami még nincs lezárva és így korai volna értékelést adni, azonban a kísérlet figyelemre méltó.



2. ábra

Részletesebben szeretnék beszámolni a valószínűségszámítás egy meteorológiai alkalmazásáról a napi középhőmérséklet eloszlásfüggvényének elméleti meghatározására vonatkozólag, mely kérdéssel nemrégiben foglalkoztam. Budapest napi középhőmérsékleteit az év minden napjára 70 év (1871—1940) adatai alapján *Takács Lajos* vizsgálta meg[19] és megállapította, hogy felrajzolva a napi középhőmérséklet gyakorisági görbéjét, egy-két maximummal biró (bimodális) görbét kapunk (2. ábra). Takács igen helyesen állapítja meg, hogy a két maximum nem véletlenül mutatkozik, hanem meteorológiai jelentésük van: a két maximum a téli és nyári félév átlagos hőmérsékletének felel meg. Takács azonban — megegyezőleg *Castrillon, Springstubbe* és mások véleményével — az említett gyakorisági görbét (helyesebben valószínűségi sűrűségfüggvényt) két Gauss-féle gyakorisági görbe (sűrűségfüggvény) összegeként próbálja előállítani. Azonban egy egyszerű valószínűségszámítási meggondolással beláthatjuk, hogy ez elméletileg nem indokolt és a szóbanforgó sűrűségfüggvényt nem két, hanem igen nagyszámú Gauss-féle sűrűségfüggvény összegeként, vagy még inkább Gauss-féle sűrűségfüggvények súlyfüggvénnyel vett integrálközépértékeként kell felfognunk. Ugyanis az a feltevés, hogy a napi középhőmérséklet eloszlásának sűrűségfüggvénye két Gauss-féle sűrűségfüggvény összegére bontható, annak a feltevésnek felelne meg, hogy az év két élesen elkülönülő — nyári és téli — félévre osztható, olymódon, hogy a napi középhőmérséklet mindkét félévben egyforma eloszlással ingadozik ugyanazon nyári, ill. téli középérték körül. Nyilvánvaló, hogy ez a felfogás csak első és igen durva közelítésnek tekinthető és sokkal helyesebb képet kapunk a napi középhőmérséklet eloszlásáról, ha az évet négy évszakra osztva a szóbanforgó gyakorisági görbét négy Gauss-féle görbéből építjük fel; de még pontosabb képet kapunk, ha az egyes hónapoknak megfelelően 12 Gauss-féle görbéből próbáljuk az évi középhőmérséklet gyakorisági görbéjét előállítani; ezt a felbontást tovább folytatva még pontosabb és reálisabb modelljét kapjuk a tényleges hőmérsékletingadozásoknak. Matematikailag a problémát a következőképpen fogalmazhatjuk meg: az évet bontsuk fel n egyenlő hosszú szakaszra és a k-ik szakasz j-ik napjának napi középhőmérsékletét fogjuk fel két tag, mégpedig az illető szakaszra jellemző átlagos középhőmérséklet és az attól való véletlen eltérés összegeként: a k-ik szakaszon az átlagos napi középhőmérséklet legyen x_k, akkor az év k-ik szakaszának j-ik napjának középhőmérsékletét ζ_{kj}-vel jelölve

$$\zeta_{kj} = x_k + \eta_{kj},$$

ahol η_{kj} az x_k-tól a k-ik szakasz j-ik napján tapasztalt véletlen eltérést jelöli. Indokoltnak látszik feltenni, hogy az η_{kj} változók függetlenek és normális eloszlásúak, 0 középértékkel és σ_{kj} szórással. Feltesszük, hogy az év k-ik szakaszán σ_{kj} állandó, azaz csak k-tól függ: jelöljük értékét σ_k-val. Jelentse ζ egy találomra kiválasztott nap középhőmérsékletét, úgy

$$\zeta = \xi + \eta, \tag{6}$$

ahol a ξ valószínűségi változó rendre $\frac{1}{n}$ valószínűséggel veszi fel az $x_1, x_2, \ldots x_n$ értékeket és az η valószínűségi változó $\xi = x_k$ esetében normális eloszlású 0 középértékkel és σ_k szórással. Ez esetben egyszerű valószínűségszámítási meggondolással következik, hogy ζ valószínűségi sűrűségfüggvénye

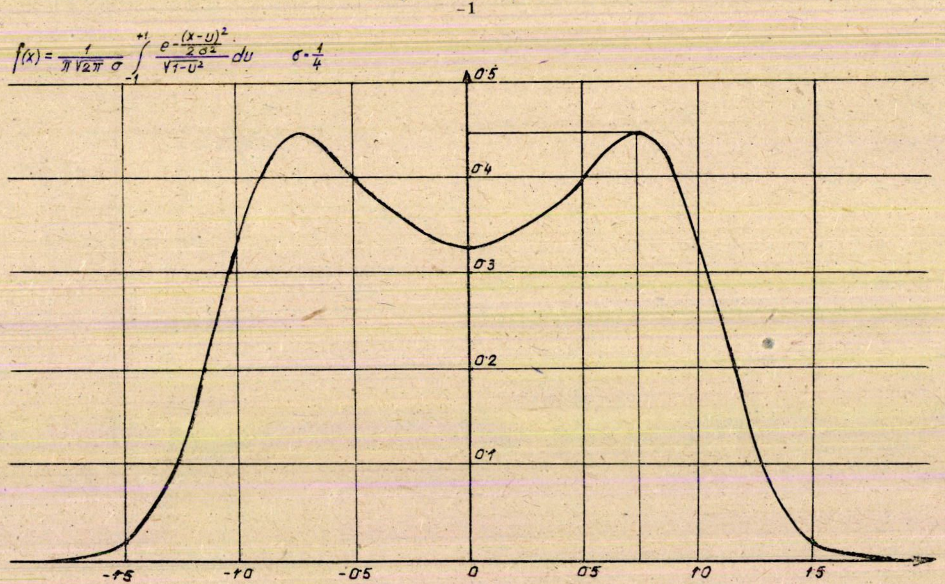
$$\frac{1}{n\sqrt{2\pi}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sigma_k} e^{-\frac{(x-x_k)^2}{2\sigma_k^2}}. \tag{7}$$

Ha az x_k értéket mint egy $x = x(t)$ $(0 \leq t \leq 1)$ függvény értékét, a σ_k értéket pedig mint a $\sigma = \sigma(t)$ $(0 \leq t \leq 1)$ függvény értékét fogjuk fel a $t = \frac{k}{n}$ helyen, úgy a (7) összeg felfogható az

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 \frac{1}{\sigma(t)} e^{-\frac{(x-x(t))^2}{2\sigma^2(t)}} dt \tag{8}$$

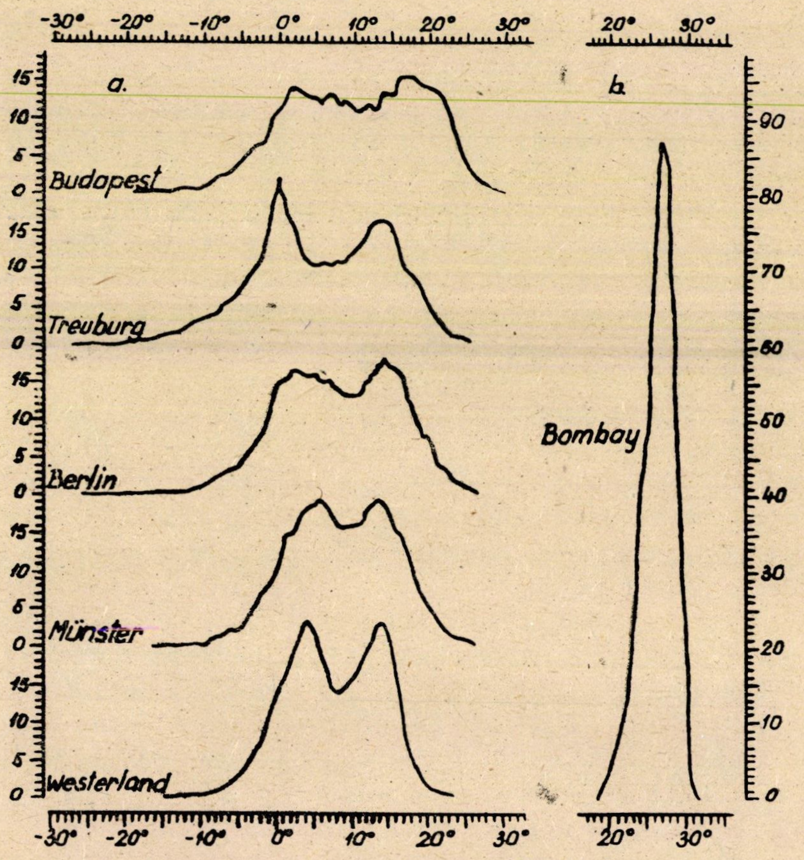
integrál Riemann-féle közelítő összegének; ilyenmódon tehát a napi középhőmérséklet gyakorisági görbéjének egyenletét a (8) alakban indokolt keresni. Az $x = x(t)$ függvény nyilvánvalóan a napi középhőmérséklet szempontjából vizsgált földrajzi helytől függ; hogy valamilyen képet kapjunk az $y = f(x)$ görbe menetéről, tegyük fel, hogy $\sigma(t) \equiv \sigma$ állandó és $x(t) = a + b \cos 2\pi t$, ebben az esetben a szóbanforgó sűrűségfüggvény:

$$f(x) = \frac{1}{\pi\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{+1} \frac{e^{-\frac{(x-a-bu)^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{1-u^2}} du, \tag{9}$$



3. ábra

amelynek menetét a 3. ábra mutatja. Megjegyzendő, hogy a föld tetszőleges pontjának megfelelő $x(t)$ függvény meghatározható olymódon, hogy kiszámítjuk minden egyes napra a napi középhőmérséklet *sokévi átlagát*. Hasonlóképpen közelítőleg megállapítható a $\sigma(t)$ függvény is. (Érdemes megjegyezni, hogy Budapesten a napi középhőmérséklet szórása télen nagyobb, mint nyáron.) A trópusokon $x(t)$ és $\sigma(t)$ első közelítésben állandónak vehetők; ebben az esetben az $f(x)$ függvény egyetlen Gauss-féle görbére redukálódik, a tapasztalatokkal megegyezően (lásd a 4. ábrán, Bombay napi középhőmérsékletének gyakorisági görbéjét). Budapesten az $x(t)$ függvény egy eltorzított sinus-hullámhoz hasonlít, amelynek a nyári félévnek megfelelő fele hosszabb és nagyobb amplitudójú. Ilyen $x(t)$-nek valóban két maximumú $f(x)$ görbe felel meg. Ilyenmódon tehát a napi középhőmérséklet gyakorisági görbéjének alakjára vonatkozó vázolt elméleti meggondolások számot adnak a napi középhőmérséklet gyakorisági görbéjének alakjának a földrajzi helytől való függéséről.



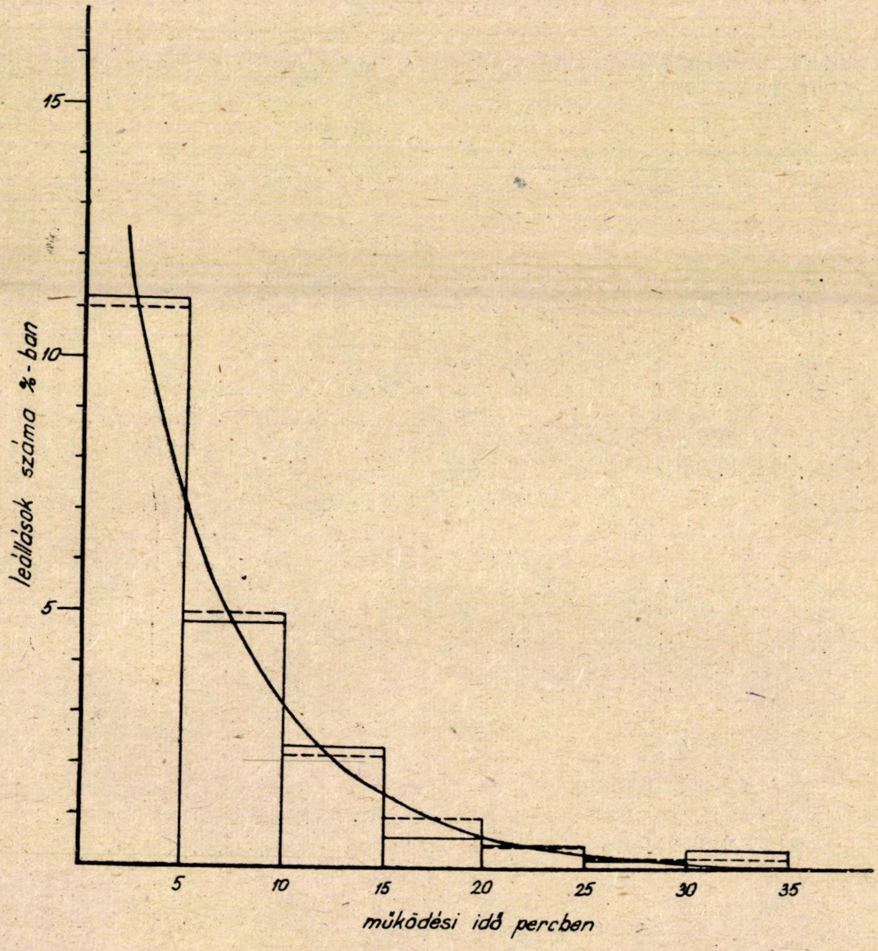
4. ábra

A fenti meggondolásokhoz egy elvi megjegyzést kívánok fűzni: a természettudományokban fellépő tapasztalati görbék képlettel definiált függvénnyel való megközelítésénél a lehetőségekhez képest arra kell törekedni, hogy a szóbanforgó természeti jelenség tényleges lefolyásának többé-kevésbbé pontos leírásán alapuló *elméleti meggondolás* eredményeképpen kapott képlettel közelítsünk és ne csupán a görbe *alakjából* kiindulva próbáljuk a tapasztalati görbét egy egyszerű alakú képlettel megközelíteni. Az ilyen eljárás célravezető voltát illusztrálják a napi középhőmérsékletre vonatkozó fenti megjegyzések.

Ami a valószínűségszámítás műszaki alkalmazásait illeti, az Alkalmazott Matematikai Intézet sok ilyen jellegű problémával foglalkozott, ezek közül csak három problémacsoportot emelek ki. Az első csoportba a minőségellenőrzés matematikai módszerei tartoznak. Az Intézet foglalkozott például a gödöllői Ganz Árammérő Gyár felkérésére automata-gépekkel gyártott csavarok gyártásánál a selejt csökkentésének kérdésével és kiszámította, hogy a futóellenőröknek milyen időközökben kell az automatagépek működését ellenőrizni, hogy a selejtszázalék egy előírt értéket ne haladjon meg. A probléma matematikai szempontból igen egyszerű, így ennek részletezésére itt nem térek ki. Matematikai szempontból is újszerű problémák merültek fel törésnek és kopásnak kitett gépalkatrészek tartalékolási és utánrendelési ütemtervének kidolgozásával kapcsolatban. Az erre vonatkozó eredményeinkről más helyütt fogunk beszámolni, azért itt ennek a kérdésnek a részletes ismertetését mellőzöm, csak annyit jegyzek meg, hogy ennek a kérdésnek igen nagy gyakorlati jelentősége van a népgazdaság szempontjából. A kérdés azért is érdekes, mert olyan problémáról van szó, amely a szocialista társadalomban egészen másképpen vetődik fel, mint a kapitalista társadalomban. Arról van szó ugyanis, hogy a tartalékolás és utánrendelés ütemtervének megállapításánál a szocialista iparban szem előtt kell tartani azt a követelményt, hogy egy üzem se tartalékoljon feleslegesen sok alkatrészt, mert a felesleges nagy tartalékot más üzemektől vonja el és így azok tervteljesítését veszélyezteti. Ugyanakkor azonban a tartaléknak elegendőnek kell lenni ahhoz, hogy a véletlen törések által szükségessé tett cserékre mindig legyen készenlétben alkatrész, illetőleg annak a valószínűsége, hogy a gép tartalékalkatrész hiányában ne tudjon termelni, gyakorlatilag elhanyagolhatóan kicsiny legyen.

Csak röviden említem meg a textilgépek optimális fordulatszámának meghatározására irányuló vizsgálatokat is[20]. A probléma a következő: egy munkás több automata szövőgépet kezel. Ha valamelyik gépen fonalszakadás történik, a gép leáll és a munkás hozzákezd az elszakadt fonal összekötözéséhez. Azonban azalatt, amíg dolgozik, újabb gépeken történhet fonalszakadás és így azok addig állnak, amíg a munkás a már előzőleg leállt gépeken el nem végzi a szükséges munkát. Tehát nemcsak a javítás, hanem a javítások alatti gépállás is okoz termeléskiesést. A fordulatszám növelésével növekszik az időegység alatti termelés, de ugyanakkor gyakoribbakká válnak a fonalszakadások, tehát a gépek többet állnak. A feladat tehát az, hogy meghatározzuk azt a fordulatszámot, amely mellett a tényleges termelés maximális. A probléma megoldásához természetesen szükséges annak kísérleti meghatározása, hogy a szakadások gyakorisága hogyan függ a fordulatszámtól. Anélkül, hogy a részletekbe belemennénk, csak azt emelem ki, hogy többszáz szakadásmentes működési idő (azaz a gép beindításától az első fonalszakadásig terjedő időtartam) hosszára vonatkozó, a Kistextben végzett üzemi adatfelvétel teljes mértékben igazolta azt a feltevést, hogy a működési idők exponenciális eloszlást követnek. Ennek oka nyilvánvalóan abban áll, hogy az, hogy egy bizonyos pillanatban történik-e fonalszakadás, kizárólag az ebben a pillanatban igénybevételnek kitett fonalszakaszok lokális szilárdsági viszonyaitól függ és így annak a valószínűsége, hogy egy bizonyos t időtartam alatt történik-e fonalszakadás, független attól, hogy a szóbanforgó időtartamot megelőzőleg a gép mennyi idő óta volt működésben. Ha tehát $F(t)$ jelenti annak a valószínűségét, hogy a működési idő t-nél hosszabb, úgy fennáll az

$$F(t+s)=F(t)F(s) \tag{10}$$



5. ábra

függvényegyenlet, amiből már következik, hogy $F(t)=e^{-\lambda t}$, ahol $\lambda>0$ állandó, azaz a működési idők exponenciális eloszlást követnek. Ezt azért emeltem ki, hogy még egy példával rámutassak a tapasztalati alapon felvett görbék elméleti értelmezésére való törekvések jelentőségére. Az 5. ábra a szakadásmentes működési idők hisztogrammját mutatja; a pontozott vonalak az elméletileg számított értékeket, míg a kihúzott vonalak a megfigyelt értékeket jelölik; látható, hogy a megegyezés igen jó. Az exponenciális eloszlás feltevése alapján az optimális fordulatszám meghatározására vonatkozó számítások egyszerűen elvégezhetők.

Úgy hiszem, a fenti néhány kiragadott példa is képet ad arról, milyen nagy jelentősége van a valószínűségszámítás alkalmazásának a műszaki gyakorlatban. A matematika ötéves tudományos tervében ennek megfelelően a valószínűségszámítás gyakorlati alkalmazásainak kérdései súlyponti kérdésként szerepelnek: arra kell törekednünk, hogy megsokszorozva erőfeszítéseinket ezeknek a problémáknak a megoldására, elősegítsük ötéves tervünk sikeres végrehajtását. *

Magyar Tudományos Akadémia
Alkalmazott Matematikai Intézete.

IRODALOM

[1] Megjelenik a Matematikai Lapokban.

[2] Lásd: *Rényi Alfréd:* A szovjet matematika 30 éve I. A valószínűségszámítás megalapozásáról, Matematikai Lapok I. *1* (1939) 27—64 és II. A valószínűségszámítás új irányai u. o. I. *2* (1950) 91—137. A valószínűségszámítás elvi kérdéseinek részletesebb kifejtését előadó a közeljövőben megjelenő „Valószínűségszámítás" c. tankönyvében fogja megadni.

[3] *Jánossy L., Rényi A., Aczél J.:* Összetett Poisson eloszlásokról I. MTA. III. O. Osztályközleményei I. *2* (1951). 315—328.

[4] *Rényi A.:* A Poisson eloszlás problémaköréről. MTA. III. O. Osztályközleményei I. *1* (1951) 202—212.

[5] *A. Rényi:* On some problems concerning Poisson processes. Publicationes Mathematicae *2* (1951) 66—73.

[6] *Rényi A.:* Összetett Poisson eloszlásokról. II. MTA. III. O. Osztályközleményei. I. *2* (1951), 329—341.

[7] *Jánossy L.:* A Laplace-transzformáció általánosítása a valószínűségszámításban. MTA. III. O. Osztályközleménye. I. *2* (1951), 343—350.

[8] *Takács Lajos:* Bekövetkezési és koincidencia jelenségek tárgyalása időtartamban tetszőleges eloszlású történések esetén. MTA. III. Osztályközlemények I. *2* (1951).

[9] *Gyires B.:* Valószínűségeloszlások egy határértékfeladata. I. Magyar Matematikai Kongresszus közl. (sajtó alatt).

[10] *Rényi A.:* A valószínűségszámítás központi határértéktételének egy új általánosításáról. MTA. III. O. Osztályközleményei I. *2* (1951).

[11] *Rényi A.:* Sztochasztikus függetlenség és teljes függvényrendszerek. I. Magyar Matematikai Kongresszus közleményei (sajtó alatt).

* Előadó az elmult évben elért alkalmazott matematikai eredmények közül csak a valószínűségszámítás terén elért eredményekről számolt be részletesen. Az egyéb irányú alkalmazott matematikai eredmények közül egyesekre nézve lásd Egerváry Jenő r. tag hozzászólását.

[12] *A. Rényi:* On a conjecture of. H. Steinhaus, Annales de la Société Polonaise de Mathématiques (sajtó alatt).

[13] *L. Pukánszky, A. Rényi:* On the approximation of measurable functions. Publicationes mathematicae. *2* (1951) 146—150.

[14] *Rényi A.:* Az aprítás matematikai elméletéről, Építőanyag, 1950.

[15] *Beke B.:* Aprított anyaghalmazok szemszerkezete, Építőanyag, (1951), 67—70.

[16] *Rényi A.:* Levél a szerkesztőséghez, Orvosi Hetilap, 1951, 29.

[17] *Z. Bodó:* Some optical properties of luminescent powders Acta Physica, I. *2*, 135—150.

[18] *Jánossy L.:* Egy az elektronsokszorozó elméletében fellépő sztochasztikus folyamatról MTA. III. O. Oszt. Közl. I. *2* (1951), 357—367.

[19] *Takács L.:* Napi hőmérsékletek gyakorisága Budapesten, Időjárás *51* (1947) és *54* (1948).

[20] Ezen vizsgálatok részletes ismertetése a Mérnöki Továbbképző Intézet kiadásában jelenik meg.

HOZZÁSZÓLÁSOK
RÉNYI ALFRÉD ELŐADÁSÁHOZ

EGERVÁRY JENŐ:

Hozzászólásom célja, hogy az Alkalmazott Matematikai Intézet mechanikai és szilárdságtani osztályának legutóbbi évi működéséről összefoglaló képet adjon.

A szilárdságtani természetű kérdések közt szerepeltek a következők: nagyteljesítményű generátorban szerkezeti elemként alkalmazott kúpos héj szilárdságtani vizsgálata; alternáló mozgású gép okozta talajrezgések vizsgálata konkrét alkalmazásban a csóri vízmű gépháza építésénél; két oldalról különböző nyomásnak alávetett lemez átbillenése.

Az osztályhoz számos olyan megbízás érkezett, amely hővezetési és diffuziós problémák tárgyalását tette szükségessé. Teljes elméleti és gyakorlati elintézést nyert a hűtési eljárások kapcsán felmerült következő probléma: egy testnek ismeretes a kezdeti hőmérsékleteloszlása továbbá a testnek felszínére, annak minden pontjában az időben lineárisan változó hőmérséklet van rákényszerítve (a hűtött test egyenletes sebességgel hülő közegben van elhelyezve). Az ilyen módon körülírt problémát sikerült a Laplace-egyenlet és a hullámegyenlet megoldására visszavezetni és egyes egyszerű testformák esetében — derékszögű hasáb, csőszerű test — a megoldásban számszerű eredményekig jutni.

FÉNYES IMRE:

Előadó volt szíves az én vizsgálataimról is megemlékezni. Kiegészítésül vázlatosan ismertetem vizsgálataim főbb eredményeit és további célkitűzéseit:

1. A fizikai Markov-folyamatok Fokker-egyenlete és a Kolmogorov egyenletek a fenomenológikus fizika kontinuitási egyenletének a sztochasztikus folyamatok esetére való általánosításaiként tekinthetők. Ez a körülmény alapul szolgál egy általános sztochasztikus sebesség értelmezéséhez. Azonban, míg ilymódon a sztochasztikus folyamatok kontinuitási egyenlete ismert, a hidrodinamikai mozgásegyenlet analógja a sztochasztikus folyamatok fizikájában ismeretlen. Mivel a mozgásegyenlet volna hivatott arra, hogy a valószínűségi sűrűség és a sztochasztikus sebesség különböző erőhatásokra történő változását figyelembe vegye, e mozgásegyenlet meghatározását elsőrendű feladatnak tartottam. A hidrodinamikai variációs elvnek a Markov-folyamatokra való alkalmazásával olyan variációs elvhez jutottam, amelynek Euler—Lagrange-féle egyenletei közt ott szerepel a Fokker-egyenlet és a Kolmogorov-egyenletek, sőt ezen túlmenőleg az eddig ismeretlen mozgásegyenlet is.

2. A Markov-folyamatoknak ilymódon kiszélesített elméletét a diffuzió problémájára alkalmaztam. Tekintve, hogy itt — a feltételektől függően — két, ill. három komplikált térbeli parciális differenciálegyenlet szimultán megoldásáról van szó, említésre méltó, hogy erőmentes térben és homogén erőtérben sikerült a feltételeket kielégítő zárt megoldást találni. Az eredmények a tapasztalással egyeznek.

3. Csak kevesek előtt ismeretes *Fürth*nek az az eredménye, hogy az erőmentes térben egyenes mentén mozgó Brown-részecske mozgására vonatkozólag szintén érvényes egy, a Heisenberg-félével formailag teljesen egyező, bizonytalansági reláció. Ismerve *Fürth*nek ezt az eredményét, felvetődött a

kérdés: érvényes-e minden Markov-folyamatra vonatkozólag ilyen bizonytalansági reláció? A koordináták és a sztochasztikus sebességek szórására a Schwartz-féle egyenlőtlenséget alkalmazva, közvetlenül kiadódott a keresett reláció, mely a Fürth-félének valamennyi Markov-folyamatra való általánosítása és amely a *Fürth* által vizsgált speciális esetben is élesebb egyenlőtlenséget szolgáltat. Itt említem meg, hogy a sztochasztikus sebességekhez és koordinátákhoz bizonyos operátorok rendelhetők, melyekre egyszerű felcserélési relációk érvényesek. E felcserélési relációk felhasználásával a bizonytalansági relációk igen egyszerű és szemléletes diszkussziója vált lehetővé.

4. Mind a sztochasztikus folyamatok, mind a statisztikus mechanika szempontjából fontos a kétféle elmélet kapcsolatának ismerete. Sikerült kimutatnom, hogy a statisztikai mechanika a Markov-folyamatok elméletének az a határesete, amidőn a Kolmogorov-féle elméletben szereplő *szórástenzor identikusan eltűnik.* Ez a körülmény érthetővé teszi, hogy bizonyos statisztikus fizikai problémák miért nem tárgyalhatók statisztikai mechanikai módszerekkel. Példaként a diffuzióelméletet említem, a diffuziókoefficienst jelenleg is csak félempirikus módszerekkel tudjuk elméletileg meghatározni. Megemlítem még, hogy a kétféle elméletnek ez a kapcsolata érdekes és gyakorlatilag is hasznosítható módon mutat rá a statisztikus mechanikai ergod-elv és a Markov-folyamatok elméletében szereplő ergodikus tulajdonság kapcsolatára.

5. Utoljára említem meg a Markov-folyamatok és a kvantummechanika kapcsolatára vonatkozó vizsgálataimat, melyek szervesen az előbb említett eredményekre épülnek. Ezzel kapcsolatban azokkal a Markov-folyamatokkal foglalkoztam, amelyeknél a stochasztikus sebességnek potenciálja van. Az ilyen folyamatokhoz mindig hozzárendelhető egy valószínűségi amplitudófüggvény, melynek a következő tulajdonságai vannak: az amplitudófüggvény abszolút értékének négyzete a valószínűségi sűrűséggel egyenlő, továbbá a Fokker-egyenlet, ill. a második Kolmogorov-egyenlet ezzel a függvénnyel kifejezve pontosan a hullámmechanikai kontinuitási egyenlet alakját veszi fel. Ebből a tényből nyilvánvalóan következik, hogy a kvantummechanika egész matematikai apparátusa konkrét jelentést nyer az említett potenciálos Markov-folyamatok elméletében. Ezzel nemcsak megcáfoltam *Schrödinger* és *Fürth* azon hiedelmét, hogy a Fokker-egyenlet a kvantummechanikában nem érvényes, hanem azt is bebizonyítottam, hogy a kvantummechanika nem egyéb, mint a Markov-folyamatok fizikájának egyik igen egyszerű speciális esete. Első pillanatban úgy tűnik, hogy a kvantummechanikának a Markov-folyamatok elméletébe való beépítésével nem a kvantummechanika válik egyszerűbbé, hanem ennek az elméletnek összes ismeretelméleti nehézségeit bevisszük a Markov-folyamatok elméletébe is. Gondolok itt a bizonytalansági reláció és az elvi mérhetetlenség viszonyára. valamint a rejtett paraméterek lehetetlenségének Neumann-féle bizonyítására, Valójában nem ez a helyzet. T. i. a bizonytalansági relációnak a Fokker egyenletből való származtatása kényszerítő erővel arra a következményre vezet, hogy a relációnak semmi köze sincs a mérés által történő zavaráshoz, hanem kizárólag a statisztikus tárgyalásmód következménye. Ami pedig a rejtett paraméterek lehetetlenségét illeti, szintén a legkedvezőbb megállapításra jutunk. Ugyanis a rejtett paraméternek Neumann-féle értelmezése szerint ezek a paraméterek a hullámfüggvényhez járuló olyan további adatok lennének, amelyek a hullámfüggvénnyel együtt szolgáltatnák a kauzális leírást. Nyilvánvaló, hogy ilyen rejtett paraméter nem lehetséges nemcsak a kvantummechanikában, de semilyen statisztikai diszciplinában, hiszen valószínűségi adatok (a hullámfüggvény

pedig ilyen) nem használhatók fel kauzális- állapothatározókként is. Ugyanez áll pl. a hőmérsékletre is. A hőmérséklethez hiába veszünk hozzá akárhány paramétert, nem kaphatunk a molekulák mozgására kauzális leírást. Igen egyszerűen kimutatható, hogy Neumann-féle értelemben vett rejtett paraméter a diffuzió elméletében sem lehetséges, ahol egyébként bizonyos rejtett paraméterek létezése nyilvánvaló. Nem akarom a felsorolást tovább folytatni, csupán azt említem meg, hogy a legelőször említett mozgásegyenlet és a Fokker-egyenlet a valószínűségi amplitudófüggvény behelyettesítésével egyetlen egyenletbe megy át, amely egy hullámegyenlet és amelyik a Schrödinger-egyenlettel azonos, ha a szórástenzor skalárissá fajult és értéke $\frac{h}{4\pi m}$.

További vizsgálatok folyamatban vannak. Főleg a második kvantálás valószínűségszámítási értelmezésével és néhány szemléltető példa megadásával kívánok foglalkozni, melyek közvetlenül mutatnák a kauzális tárgyalásmód és valószínűségi hullámok kapcsolatát.

BODÓ ZALÁN:

Mindenekelőtt köszönetet mondok *Rényi Alfréd*nak, hogy az általam használt módszert komoly matematikai kritika alá vette és egy érdekes hibaforrásra mutatott rá. Két dolgot szeretnék azonban az előadásnak ehhez a részéhez hozzáfűzni.

Először is azt, hogy az említett dolgozatom egészen más problémával foglalkozik. Ez előbbi módszer csak egy kisérletsorozathoz a kiindulási por körülbelüli eloszlásának tájékoztató meghatározására szolgált és csak mellékesen ismertettem. Azóta azonban többen érdeklődtek nálam e módszer után és úgy látom, hogy a gyakorlati életben (pl. malomiparban) alkalmazást nyerhet.

Ezért másodsorban szeretnék a szemcsenagyság eloszlás meghatározásánál felmerülő problémával részletesebben foglalkozni, mert szerintem itt még sok matematikai feladat rejlik.

Ha egy por szemcsenagysága igen tág határok között változik, (pl. 1 μ-tól 100 μ-ig terjed) a szemcsenagyság eloszlásának meghatározása igen nehéz feladat. Tekintetbe kell venni ugyanis, hogy az eloszlás súlyszázalékok szerint érdekel és pl. 3000 db. 1 μ-os szemcse összsúlya egyetlen 40 μ-os szemcse súlyának mindössze 4,7 $^0/_0$-a.

Mikroszkóp alatt történő közönséges statisztikus felvételnél tehát az a nehézség merül fel, hogy a tömegesen jelentkező kis szemcsék mellett, csak néha-néha tünnek elő nagy szemcsék, pedig épen ezek képezik az eloszlásban a lényeges részt. A darabszámra meghatározott eloszlási görbében tehát a szórás okozta hiba e görbe mentén nem egyenletes eloszlású, hanem súlyozva jelentkezik. A pontosság a kis szemcséknél kevésbbé lényeges, a nagy szemcséknél pedig fontosabb. Közönséges módszerrel pedig épen a kis szemcsék eloszlását ismerjük meg pontosabban, minthogy azokból számláltunk meg legtöbbet.

Ezért szerintem, a *Rényi Alfréd* által megmutatott hibaforrások ellenére is az általam járt út a súlyszázalék szerinti eloszlásról helyesebb képet nyujt, mint a közönségesen készített statisztika. Az utóbbi kijelentésem természetesen úgy értendő, hogy pl. én összesen 900 szemcsét számoltam meg, ezzel az eloszlásról helyesebb képet nyertem, mintha közönséges statisztikával számoltam volna meg 900 szemcsét, amely esetben pl. a dolgozatomban közölt pornál az eloszlás nagy szemcsék felöli részéről semmit sem tudtam volna megállapitani.

Épen ebben látom a megoldandó matematikai problémát. Egyrészt megállapítani, hogy az eredeti eloszlásról az általam alkalmazott módszer mennyiben ad helyesebb képet, mint a közönséges statisztika, tekintetbe véve a hibáknak előbb említett súlyozását is. Másrészt, hogy bizonyos n adott szemcsenagyságmeghatározást hogyan célszerű beosztani úgy, hogy a súlyszázalék szerinti eloszlásról a legpontosabb képet kaphassuk. Ha az utóbbi feladat megoldása esetleg általánosságban nem megy, fel lehetne talán tételezni előre, hogy logaritmikus normális eloszlás várható.

Így lehetne meghatározni a „jó“ módszert, amelyik e problémának a lehető legkisebb munkával a leggyorsabb megoldását jelentené. Mint már említettem, ennek a gyakorlati élet nagy hasznát venné.

TAKÁCS LAJOS:

Rényi Alfréd előadásának meteorológia vonatkozú állításaihoz és újszerű következtetéseihez, — amelyeket kitűnő példáknak kell elismernünk az elmélet és a gyakorlat termékeny összekapcsolására, — matematikai szempontból semmi hozzátenni valóm nincs, vele mindenben és tökéletesen egyetértek. A gyakorlati élettel való kapcsolat vonalán, meteorológiai szempontból legyen szabad néhány észrevételt tennem.

1. A meteorológus tudatában van annak, hogy pl. a napi középhőmérsékletek egész évi sűrűségfüggvényének két Gauss-féle sűrűségfüggvény összegére való felbontása elméletileg, fizikai és kifogástalan valószínűségszámítási meggondolásokkal nem indokolható. A gyakorlati élet igényeinek szolgálatában azonban mégis sok esetben kénytelen élni és megelégedni a kifogásolthoz hasonló „első és igen durva közelítésnek tekinthető“ szétválasztásokkal. Ilyen igény a különféle meteorológiai elemek viselkedésével (középérték, szóródás, stb,) kapcsolatban egyrészt az úgynevezett tenyészidőszakra (nyári félévre), másrészt az ú. n. fűtési idényre (téli félévre) vonatkozóan lép fel leggyakrabban. A gyakorlati élet nem matematikus vagy meteorológus szakemberét, aki a saját munkaterületén mégis meteorológiai adatok figyelembevételére kényszerül, valószínűségszámítási elmélettel való megterhelés nélkül kell statisztikai adatokkal eligazítanunk. Ilyen esetekben gyakran jobb tájékoztatást nyújt külön a nyári és külön a téli félévre vonatkoztatott adat, mint az egészévi középérték stb. Ez a gyakorlati cél indokolja pl. a fizikai és elméleti szempontból kellően alá nem támasztható kettéválasztást, vagy más — konvencionális (hónapok) vagy attól eltérő — részhalmazra való bontást.

2. Akármilyen rövid szakaszokra bontjuk is a meteorológiai elemek egész évi halmazát, a Gauss-féle sűrűségfüggvényhez való hozzámérés mindíg csak „első és durva közelítés“ marad, mégpedig azért, mert nem a független valószínűség esetével van itt dolgunk: egyik nap időjárása sem teljesen független attól, milyen volt az előző napokon az időjárás. A mi éghajlatunk alatt (Középeurópában) nincsen egyetlen olyan hely sem, ahol a Gauss-féle sűrűségfüggvényt legjobban megközelítő Bruns-féle sorfejtés esetén a ferdeség és az excessus egyszerre nulla volna. Szemléletesen szólva: nem kapunk a valószínűségfüggvényből szabályos haranggörbét, hanem ferdét (jobbra vagy balra dülő görbét) vagypedig olyant, amely a tetőzés környezetében szélesebb vagy hegyesebb az elméleti harangalaknál.

3. Hogy ennek ellenére több mint 100 éve kisért a meteorológiai elemekkel kapcsolatban az elméleti sűrűségfüggvény erőszakolása, annak kettős oka van.

Az egyik: a nagy számok, a véletlen törvényszerűségei valóban érvényesülnek bizonyos mértékig az időjárási elemek statisztikai számértékeinek halmazában, bár nem maradéktalanul. A másik: a sajátos törvényszerűségek kihüvelyezése az alaktól függetlenül azért nehéz, mert időjárásunk helyben alakuló geofizikai energiák működésének eredménye ugyan, azonban ehhez hozzáadódnak a különböző eredetű és fizikai tulajdonságú légtömegek által szállított energiák is, — sokszor az előbbit lényegesen felülmúló mértékben.

4. Az elvi megjegyzések hatására kiszámoltam az évet 36 szakaszra bontva a σ értékeit az idézett napi középhőmérsékleti adatokból. Budapesten első közelitésben a $\sigma(t)$ szintén torzított szinusz-hullámhoz hasonlít, [akárcsak $x(t)$], azonban fordított fázissal: december közepén jelentkező tetőzéssel és augusztus közepén beálló minimummal. Ebben, hogy a szórás télen nagyobb, mint nyáron, a meteorológus nemcsak statisztikai érdekességet lát, hanem éghajlati sajátosságot, mely finomabb részleteiben további kutatásokra látszik érdemesnek. Az ok a hozzánk érkező légtömegek szabálytalan, bár bizonyos naptári napokat és napcsoportokat mintegy előnyben részesítő „menetrendjében" lelhető fel.

AZ ANALÍZIS EGY MÓDSZERÉNEK ÚJABB ALKALMAZÁSAIRÓL

TURÁN PÁL lev. tag

Előadta a Matematikai Állandó Bizottság 1951 december 14-én tartott ülésén

Az elmúlt években, kiindulva az úgynevezett Riemann-sejtés vizsgálatából, azt vettem észre, hogy általam erre a célra bevezetett módszer igen különböző fajta kérdések vizsgálatára alkalmazható. Ezekről már négy ízben volt szerencsém az Akadémián beszámolnom, ezen alkalmazások a primszámformula maradéktagjára, illetőleg a zéta-függvény gyökeinek ezidőszerinti bizonyos értelemben legerősebb becslésére vonatkoztak, a múltévi akadémiai nagyhéten pedig az algebrai egyenletek közelítő megoldására. Most három újabb alkalmazásról szeretnék röviden beszámolni, melyeket e módszerről szóló, rövidesen megjelenendő könyvem megírása közben vettem észre; a második alkalmazás lehetőségét egy speciális esetben már 1949-ben a prágai matematikai kongresszuson tartott előadásomban jeleztem.

Mielőtt ezen alkalmazásokra rátérnék, néhány szót kell szólnom magáról a módszerről. Ismeretes Kronecker klasszikus tétele, amely szerint, ha $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda$ lineárisan függetlenek, akkor tetszőleges kis pozitív ε és tetszőleges valós $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ számokhoz található valós t úgy, hogy megfelelő racionális egész $x_1, x_2, \ldots, x_k$ számokkal

$$|t\lambda_\nu - \alpha_\nu - x_\nu| \leqq \varepsilon, \qquad \nu = 1, 2, \ldots, k. \tag{1}$$

Ismeretes az is, hogy 1910 óta, mióta e tételt *Harald Bohr* az analízis területén alkalmazta, milyen sok felhasználást nyert az ott. Ezek lényegileg azon alapszanak, hogy Kronecker tétele *ekvivalens* azzal, hogy tetszőleges b_ν és lineárisan független arkuszú z_ν komplex számokhoz és tetszőleges kis pozitív ε-hoz van oly valós y, hogy

$$\frac{\left|\sum_{\nu=1}^{n} b_\nu z_\nu^y\right|}{\sum_{\nu=1}^{n} |b_\nu||z_\nu|^y} > 1 - \varepsilon. \tag{2}$$

Itt a jobboldal nem függ sem a z_ν-ktől, sem a b_ν-ktől; viszont a (2)-t realizáló y érték, melyet nyilvánvaló okokból egyenirányító értéknek nevezhetünk, egyáltalán nem lokalizálható. Ugyancsak *Bohr* vette észre, hogy ha a b_ν együtthatók pozitívok, akkor Kronecker tétele helyett Dirichlet tételét alkalmazva adódik, hogy még tetszőleges arkuszú z_ν számok mellett is található bármely $\eta \geqq 1$ értékhez olyan y, melyre

$$\eta \leqq y \leqq \eta 5^n \tag{3}$$

és

$$\frac{\left|\sum_{\nu=1}^{n} b_\nu z_\nu^y\right|}{\sum_{\nu=1}^{n} |b_\nu| |z_\nu|^y} > \cos\frac{2\pi}{5}. \tag{4}$$

A jobboldal tehát itt sem függ a z_ν-ktől és a b_ν-ktől, de a kapott „közel egyenirányító" y már valamelyest lokalizálva van. Mint ismeretes, ezen ténynek is sok nevezetes következménye van az analízisben. A további alkalmazásoknál az az akadály, hogy e lokalizáció még mindig nagyon gyenge. Azt lehetne hinni, hogy a (3) egyenlőtlenség alapjául szolgáló Dirichlet-tételben lehetne a lokalizációt szűkíteni. Mint azonban *Hajós György* egy elegáns példával megmutatta, ezen lokalizáció lényegileg nem szűkíthető. Már most a szóbanforgó új módszer alapgondolata az, hogy igen sok további alkalmazásnál nem szükséges az

$$f(y) = \sum_{\nu=1}^{n} b_\nu z_\nu^y$$

kifejezést az

$$\sum_{\nu=1}^{n} |b_\nu| |z_\nu|^y$$

összeggel összehasonlítani, úgyhogy a hányados sem a z_ν-ktől, sem a b_ν-ktől ne függjön; megfelel a célnak

$$\frac{|f(y)|}{\min_j |z_j|^y}$$

illetőleg

$$\frac{|f(y)|}{\max_j |z_j|^y}$$

tört ilyen becslése. Még az sem lényeges, hogy ezen alsó becslés a b_j-ktől független legyen; lényeges csak az, hogy a z_j-k konfigurációjától ne függjön. Meglepő módon kiderült, hogy az ilyen becslések nem túl gyengék és — ami a fődolog — a megfelelő „gyengén egyenirányító" y-értékek a (3) alattinál lényegesen jobban lokalizálhatók. Pontosabban szólva fennáll a következő két tétel.

I. Ha $m \geqq 0$ és $z_1, \ldots, z_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ adottak úgy, hogy

$$|z_1| \geqq |z_2| \geqq \cdots \geqq |z_n|$$

akkor ezekhez található oly egész ν, hogy

$$m \leqq \nu \leqq m+n$$

és

$$\frac{|b_1 z_1^\nu + \cdots + b_n z_n^\nu|}{|z_n|^\nu} \geqq |b_1 + \cdots + b_n| \left(\frac{n}{2e(m+n)}\right)^n.$$

II. Ha ismét $m \geqq 0$ és $z_1, \ldots, z_n, b_1, \ldots, b_n$ adottak és

$$|z_1| \geqq \cdots \geqq |z_n|,$$

akkor van oly egész ν, hogy

$$m \leqq \nu \leqq m+n$$

és

$$\frac{|b_1 z_1^\nu + \cdots + b_n z_n^\nu|}{|z_1|^\nu} \geqq \left(\frac{n}{24e^2(m+2n)}\right)^n \min_j |b_1 + \cdots + b_j|.$$

A lényeges ezen alsó becslésekben tehát a z_j-k konfigurációjától való függetlenség és a ν-érték jó lokalizációja. Ami bennük nem kielégítő, az az alsó becslésnek a b_j-ktől való függése, különösen a második főtételnél; ennek alkalmazásai éppen ezért eddig lényegileg a

$$b_1 = b_2 = \cdots = b_n$$

esetre szorítkoztak. Az alkalmazások szempontjából hasznos volna e tételeknek egy oly alakja, mely fenti előnyök mellett még azzal is bír, hogy a b_j együtthatóktól az alsó becslés

$$c(m, n) \max_j |b_j|$$

alakban függ. Ilyen azonban általában nem várható, mert ha a z_j-k konfigurációja tetszőlegesen van adva és

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^{n} \{b_\nu z_\nu^x + (-b_\nu) z_\nu^x\},$$

akkor

$$f(x) \equiv 0,$$

bármilyenek is a b_j-együtthatók.

A I. tételből a z_j-értékek megfelelő specializálásával rögtön nyerhető, hogy ha

$$R\alpha_\nu \geqq 0 \qquad \nu = 1, 2, \ldots, n,$$

akkor

$$\max_{a \leqq x \leqq a+d} \left|\sum_{\nu=1}^{n} b_\nu e^{\alpha_\nu x}\right| \geqq |b_1 + \cdots + b_n| \left(\frac{d}{2e(a+d)}\right)^n. \tag{5}$$

Ezen előzetes megjegyzések után rátérek az említett újabb alkalmazásokra. Ezek elsője lineáris differenciálegyenlet-rendszerekre vonatkozik. Legyen

$$\frac{dx_\nu(t)}{dt} = \sum_{\mu=1}^{n} f_{\nu\mu}(t) x_\mu(t), \qquad \nu = 1, 2, \ldots, n \tag{6a}$$

a vizsgálandó rendszer, ahol

$$x_\nu(0) = a_\nu, \qquad \nu = 1, 2, \ldots, n. \tag{6b}$$

Egy ilyen rendszer explicit megoldása igen ritkán sikerül; mivel a fizikai problémák legtöbbje ilyen rendszerek vizsgálatára vezet, más utakat kellett keresni a megoldás tanulmányozására. Az ilyen módon nyert eredmények általában a megoldásnak egy szinguláris hely környezetében való qualitatív viselkedésére, vagy annak $t \to +\infty$-re vonatkozó aszimptotikus viselkedésére vonatkoznak. Utóbbi típusúak között karakterisztikusak azon Poincaré által kezdeményezett vizsgálatok, melyek azon esetre vonatkoznak, mikor a (6a) alatti rendszer együtthatófüggvényeire

$$\lim_{t\to+\infty} f_{\nu\mu}(t) = a_{\nu\mu}, \qquad 1 \leqq \nu, \mu \leqq n. \tag{7}$$

Ez esetben a, teljes általánosságban először *Perron* által bebizonyított, tétele szerint a megoldások viselkedése $t \to +\infty$ mellett az

$$\begin{vmatrix} (a_{11}-\lambda) & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & (a_{22}-\lambda) & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & (a_{nn}-\lambda) \end{vmatrix} = 0 \tag{8}$$

karakterisztikus egyenlet gyökeitől függ; ha ezek $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, akkor minden $(x_1, \dots, x_n)$ megoldásrendszerre

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{t} \log(|x_1| + \dots + |x_n|) = R\lambda_\nu, \tag{9}$$

ahol $1 \leqq \nu \leqq n$ és fordítva, minden $1 \leqq \nu \leqq n$-hez van oly $(x_1, \dots, x_n)$ megoldás, melyre (9) teljesül. Ezek segítségével rögtön eldönthető, mi történik, ha a (6a)—(6b) rendszerben a kezdeti értékeket egy kissé megváltoztatjuk. Ha *minden* ν-re $R\lambda_\nu < 0$, akkor ezen változtatás a megoldást a további t-időpontokban is csak kissé változtatja meg, mikoris $(x_1, \dots, x_n)$-et az n-dimenziós tér egy pontjaként felfogva stabilis mozgásról beszélünk. Ha *minden* ν-re $R\lambda_\nu > 0$, akkor épp ellenkezőleg, a kezdeti értékeket tetszőleges kevéssé megváltoztatva a megoldás „végül" nagyon megváltozik, azaz előbbi értelemben labilis mozgásról beszélhetünk; minden egyéb esetben megválaszthatók a kezdeti értékek megváltozásai úgy, hogy előírt kicsinyek legyenek és az új mozgás az eredetihez az előbbi értelemben „közel", ill. „távol" legyen. E vizsgálatokat *Poincaré, Ljapunov* és azóta sokan mások kiterjesztették nem-lineáris rendszerekre; jelentőségük, különösen a stabilitásra vonatkozóké, a velük foglalkozó irodalom méreteiben is kifejezésre jut. Megjegyezhetjük azonban, hogy a labilitás esetét sem kell figyelmen kívül hagyni. Ha pl. egy fizikai vagy csillagászati hipotézist sikerül (6a)—(6b)-alakú rendszerrel kifejezni, akkor a hipotézis biztosan helytelen, ha a mérési eredmények ellentétben állanak a rendszerből levont valamilyen matematikai következtetéssel. Mérési eredmények viszont csak *véges* t-értékekre vonatkozhatnak; tehát célszerűnek látszik megpróbálni (9)-et úgy módosítani, hogy $\overline{\lim}$ helyett egy *véges* intervallumra vonatkozó abszolútérték-maximum alsó becslése szerepeljen. Ezek tehát a Poincaré—Perron-féle tételek végesített formáit jelentik. Ha az $f_{\nu\mu}(t)$ együtthatófüggvényekre (7) helyett $a \leqq t \leqq a+d$-ben

$$f_{\nu\mu}(t) \equiv a_{\nu\mu} \qquad 1 \leqq \nu, \mu \leqq n \tag{10}$$

áll, akkor, mint ismert és rögtön látható, $a \leqq t \leqq a+d$-re és $\nu = 1, \dots, n$ mellett

$$x_\nu(t) = \sum_{j=1}^{n} c_{\nu j} e^{\lambda_j t}$$

alakú, ha a (8) alatt értelmezett λ_j-számok mind különbözők. Ha tehát

$$\min_j R\lambda_j = l,$$

akkor

$$x_\nu(t)\, e^{-lt} = \sum_{j=1}^{n} c_{\nu j}\, e^{(\lambda_j - l)t}$$

kifejezésre (5) alkalmazható; azaz ez esetben $\nu = 1, 2, \dots, n$-re

$$\max_{a \leqq t \leqq a+d} |x_\nu(t)|\, e^{-lt} \geqq |x_\nu(0)| \left(\frac{d}{2e(a+d)} \right)^n .$$

Egy egyszerű határátmenet rögtön adja, hogy ez áll azon esetben is, mikor a λ_j-k között egyenlők is vannak. Ebből, ha k egy oly index, melyre

$$|x_k(0)|^2 \geqq \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} |x_\nu(0)|^2,$$

rögtön adódik, hogy

$$\max_{a \leqq t \leqq a+d} \sum_{\nu=1}^{n} |x_\nu(t)|^2 \geqq \frac{e^{2la}}{n} \left(\frac{d}{2e(a+d)} \right)^{2n} \sum_{\nu=1}^{n} |x_\nu(0)|^2.$$

Ha már most a (6a) alatti rendszer együtthatói „majdnem" állandók $a \leqq t \leqq a+d$-re, akkor kimutatható, hogy „lényegileg" ugyanazon alsó becslés érvényes. Pontosabban szólva igaz a következő tétel.

Ha a (6a)-alatti rendszer együtthatófüggvényei $a \leqq t \leqq a+d$ közben folytonosak,

$$\max_{\nu, \mu} |f_{\nu\mu}(a)| = B,$$

az

$$\begin{vmatrix} f_{11}(a) - \lambda & f_{12}(a) & \cdots & f_{1n}(a) \\ f_{21}(a) & f_{22}(a) - \lambda & \cdots & f_{2n}(a) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n1}(a) & f_{n2}(a) & \cdots & f_{nn}(a) - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

egyenlet gyökeinek valós része $\geqq l > 0$ és

$$\max_{a \leqq t \leqq a+d} \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{n} |f_{\nu\mu}(t) - f_{\nu\mu}(a)|^2 \leqq \frac{1}{4n^2 d^2} \left(\frac{d}{2e(a+d)} \right)^{2n} e^{2(l-nB-n)a-2nd(2B+1)} \leqq 1, \quad (11)$$

akkor

$$\max_{a \leqq t \leqq a+d} \sum_{\nu-1}^{n} |x_\nu(t)|^2 \geqq \frac{e^{2la}}{4n^2 d^2} \left(\frac{d}{2\bar{e}(a+d)} \right)^{2n} \sum_{\nu=1}^{n} |x_n(0)|^2. \quad (12)$$

E tétel bizonyára lényegesen javítható lesz (11)-et illetőleg, de — különösen kis d értékekre — így sem érdektelen. Ha pl. $d = e^{-\frac{l}{2n}a}$, akkor (11) teljesül, ha az $f_{\nu\mu}(t)$ együtthatófüggvények $x = a$-ban „elég magas rendben" érintik a megfelelő $y = f_{\nu\mu}(a)$ egyeneseket. Érdekes a tételt egybevetni *Perron* azon tételével, mely tudomásom szerint az egyetlen eredmény ezirányban és mely szerint, ha a (6a) rendszer együtthatófüggvényeire $0 \leqq t \leqq T$-ben

$$|f_{\nu\mu}(t)| \leqq C, \tag{13}$$

akkor $0 \leqq t \leqq T$-re

$$\sum_{\nu=1}^{n} |x_\nu(t)|^2 = \varphi(t)$$

jelöléssel

$$\varphi(0)e^{-2nCt} \leqq \varphi(t) \leqq \varphi(0)e^{2nCt}. \tag{14}$$

Itt a (13) praemissa gyengébb (11)-nél, viszont (14) jóval gyengébb (12)-nél. (12) nyilván (9)-nek abban az esetben való végesítése, ha ott azon λ_ν-t tekintjük, melyre $R\lambda_j$ a legkisebb; a felső becslés (12)-ben hiányzik. A (14)-ben szereplő felső becslés nem tekinthető (9) végesített formájának, mert nC általában nagyobb a $R\lambda_\nu$ számok maximumánál.

Ezután térjünk rá az új alkalmazások egy másik csoportjára, mely transzcendens egész függvényekre vonatkozik. Mint *Borel* felfedezte, ha egy $|z| > R$ esetén konvergens, $f(z) = \sum_{0}^{\infty} a_\nu z^{-\nu-1}$ alakban írt hatványsorhoz hozzárendeli az $F(z) = \sum_{0}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu!} z^\nu$ függvényt, akkor megfelelő pozitív a-val

$$|F(z)|e^{-a|z|} \tag{15}$$

korlátos marad az egész síkon és $f(z)$ szinguláris helyei a konvergencia-körön összefüggenek $F(z)$-nek az origóból kiinduló különböző félsugarakon való növekvésével. Legyen

$$\overline{\lim_{v \to \infty}} \frac{1}{r} \log |F(re^{i\varphi})| = h(\varphi);$$

ezen $h(\varphi)$ függvény φ-nek folytonos és 2π szerint periodikus függvénye, éspedig, mint *Pólya* észrevette, az $r = h(\varphi)$ görbe egy konvex tartományt határol. Ekkor *Borel* észrevétele, *Pólya* által precizírozott formájában, azt mondja ki, hogy ha e konvex görbét a valós tengelyre tükrözzük, akkor a $\varphi = \varphi_0$-hoz tartozó félsugár akkor és csak akkor metszi a konvergencia-kört $f(z)$ egy szinguláris pontjában, ha a tükrözött görbét annak egy extrémpontjában metszi, azaz egy olyanban, mely *nem* belső pontja egy egyenes szakasznak. De ekkor a Fabry-féle hézagos-hatvány-sor tétel biztosan be lenne bizonyítva, ha igaz lenne a (15) alatti speciális függvényosztályra, hogy, hacsak

$$\frac{\lambda_\nu}{\nu} \to \infty, \tag{16}$$

akkor rendje és típusa minden kis szögtérben ugyanaz, mint az egész síkra vonatkozólag. Ugyanis ekkor az előbbi konvex görbe és tükörképe is kör, azaz minden pont extrémpont. *Pólya* vetette fel azon merész kérdést, hogy vajjon (16) mellett nem igaz-e ez *minden* transzcendens egész függvényre és ki is mutatta-e sejtés helyességét. Ezen formájában a tétel csak végesrendű egész függvényekre bír igazi értelemmel; a tételt *Mandelbrojt* és *Laurent Schwarz* oly módon terjesztették ki, hogy ha

$$M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$$

és $0 \leq \alpha < \beta \leq 2\pi$-re

$$M(r, \alpha, \beta) = \max_{\substack{|z|=r \\ \alpha \leq \operatorname{arc} z \leq \beta}} |f(z)|,$$

akkor (16) mellett tetszőleges kis pozitív ε, η és δ-ra és $r > r_0(f, \varepsilon, \delta, \eta)$ mellett

$$M\big(r(1-\varepsilon)\big) < M(r, \alpha, \alpha+\delta)^{1+\eta}. \tag{17}$$

Az I. tétel (5) alatti alakjában módot ad *Pólya* tételének kétirányú általánosítására. Az első abban áll, hogy minden $0 < \varepsilon \leq \frac{1}{2}$, $0 \leq \alpha < \beta \leq 2\pi$-re, hacsak $r > r_1(f, \varepsilon, \beta-\alpha)$, fennáll az

$$M(r) \leq \frac{16e\pi}{\beta-\alpha} M(2r)^{\varepsilon} M(r, \alpha, \beta) \tag{18}$$

egyenlőtlenség. Hogy ez véges rendű normáltípusú egész függvények esetén *Pólya* tételét tartalmazza, az onnan világos, hogy ez esetben az $M(2r)^{\varepsilon}$ tényező nem befolyásolja sem a rendet, sem a típust. Ez esetben azonban a (18) alatti egyenlőtlenség jóval többet is ad. Legyen megadva egy, az origóból kiinduló tetszőleges l görbe, mely a végtelenbe fut és melynek poláregyenlete $\vartheta = F(r)$. A (18) alatti egyenlőtlenségből rögtön következik, hogy már a

$$|\vartheta - F(r)| \leq \frac{1}{M(r)^{\varepsilon}}$$

tartományban $f(z)$ rendje és típusa egyezik a teljes síkra vonatkozó renddel és típussal. Ha $f(z)$ nagyon erősen nő, akkor (18) semmitmondóvá lesz az $M(2r)^{\varepsilon}$ faktor miatt, de nem volna nehéz (18)-at úgy módosítani, hogy (17)-et kiadja.

A másik általánosítás

$$h(r, x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} r^{\lambda_\nu}(a_\nu \cos \lambda_\nu x + b_\nu \sin \lambda_\nu x) \tag{19}$$

alakú végtelen harmonikus kifejtésekre vonatkozik, melyek az egész síkon konvergálnak és melyekre szintén megköveteljük a (16) alatti Fabry-feltétel fennállását. Míg általában hatványsorok és harmonikus kifejtések elmélete parallel haladt, addig érdekes módon a (19) alatti lakunáris harmonikus kifejtések csupán *N. Wiener* és *Zygmund* egyes dolgozataiban léptek fel. Sőt talán a harmonikus kifejtés rendjének definiciója sem szerepel explicit az irodalomban.

Kézenfekvő $h(r, x)$ rendjét, α-t, ha

$$\max_{x} |h(r, x)| = M_1(r),$$

akkor az

$$\alpha = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log\log M_1(r)}{\log r}$$

formulával értelmezni. Ha ismét

$$\max_{\alpha\leqq x\leqq\beta} |h(r, x)| = M_1(r, \alpha, \beta),$$

akkor a használt módszer kiadja (18) teljes analogonját, tehát azt, hogy $0 < \varepsilon \leqq \frac{1}{2}, 0 \leqq \alpha < \beta \leqq 2\pi$-re

$$M_1(r) \leqq 8\left(\frac{8e\pi}{\beta-\alpha}\right)^4 M_1(2r)^{\varepsilon} M_1(r, \alpha, \beta), \tag{20}$$

hacsak $r > r_2(f, \varepsilon, \beta-\alpha)$.

Az új alkalmazások harmadik csoportja, melyekre csak még rövidebben térek ki, az

$$F(z) = \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu f(\tau_\nu z)$$

alakú kifejezésekre vonatkozik. Ismeretes az a szerep, melyet valós $f(x)$, valós c_ν-k és τ_ν-k esetén e kifejezésekkel való approximáció, *N. Wiener* nevezetes elméletében játszik. Komplex változóra térve ezen témakörbe tartozik egy félsíkban reguláris függvény approximációja

$$\sum_{1}^{n} c_\nu e^{\tau_\nu z}$$

alakú polinomokkal. A (21) alatti általános kifejezésekkel való approximálhatóság kérdését, ha $f(z)$ egész függvény, *A. O. Gelfond* tárgyalta igen általános feltételek mellett. Ezen approximáció egyértelműségének vizsgálata természetszerűleg vezet a (21)-alatti kifejezések koncentrikus körökön való abszolút maximumának alsó becslésére. Így merül fel azon kérdés, mely önmagában is érdekes, hogy a (21) alatti függvényekre milyen egyszerű feltételek mellett áll, hogy ugyanolyan rendűek, mint $f(z)$. Itt persze, nem úgy mint előbb — mindenütt az egész síkra vonatkozó rend, ill. típus értendő. Hogy $f(z)$-re bizonyos kirovások szükségesek, azt az approximációs tételre vonatkozólag *Gelfond* már megállapította. Éspedig azt, hogy

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$$

sorfejtésben

$$a_\nu \neq 0 \qquad \nu = 0, 1, \ldots \tag{22}$$

kell hogy legyen. Hogy ez a fenti kérdés tárgyalásához is szükséges, azt pl.

$$f(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\nu!}z^{5\nu+1},\quad c_j=1,\ \varepsilon_j=e^{\frac{2j\pi i}{5}}\quad j=1,2,3,4,5$$

példa mutatja, mikoris $f(z)\equiv 0$. (22)-nél többet követelve fix n és numerikus pozitív ω mellett tekintsük azon $f(z)$-ket, melyekre $m>m_0(\omega)$ mellett

$$\max_{m\leqq\mu,\nu\leqq m+n}\left|\frac{a_\mu}{a_\nu}\right|>m^{-n\omega}$$

E feltétel pl. $f(z)=e^z$-re teljesül. Ekkor a fenti kérdésekre vonatkozólag I. és II. tételekből több felelet adódik. Ezek közül csupán azt említem meg, hogy már $F(0)\neq 0$ adja azt, hogy $F(z)$ rendje nem kisebb, mint $f(z)$-é. E tételek bizonyítása azonban mélyebb, és így ezekre sem terjeszkedem ki.

Budapesti Eötvös Lóránd Tudományegyetem
Matematikai Intézete.

KITÜNTETÉSEK

A Népköztársaság Elnöki Tanácsa a tudományok fejlesztése és a kutatómunka terén végzett jó munkájuk elismeréséül 1951. november 7-én többeket kitüntetett, köztük a III. osztály tagjai közül *Gombás Pál* akadémikusnak, az Akadémia alelnökének a Magyar Népköztársasági Érdemrend III. fokozatát és *Rényi Alfréd* lev. tagnak, a III. osztály titkárának a Magyar Népköztársasági Érdemrend IV. fokozatát adományozta.

A Népköztársaság Elnöki Tanácsa a Magyar Tudományos Akadémia állandó szakbizottságaiban, valamint a Műszaki- és Természettudományi Egyesületek Szövetségében végzett jó munkájuk elismeréséül többeket kitüntetésben részesített, köztük *Szigeti György*nek, a Fizikai Állandó Bizottság tagjának a Magyar Népköztársasági Érdemérem arany fokozatát adományozta.

A Népköztársaság Elnöki Tanácsa 1952 április 4-én ismét többeket kitüntetett, így a III. osztály tagjai közül *Jordan Károly* lev. tagnak és *Kónya Albert* a Fizikai Állandó Bizottság titkárának a Magyar Népköztársasági Érdemrend V. fokozatát adományozta.

JUTALMAK

A Magyar Tudományos Akadémia Elnöksége az 1951. évi nagygyűlésen jutalomban részesítette az 1951-ben eredményes munkásságot folytató kutatókat. A III. Osztály területén a következők részesültek jutalomban.

Fizikusok:

Simonyi Károly, a magasfeszültségű berendezések felépítése terén elért eredményeiért 4.000 Ft,

Kónya Albert, a Compton-vonalak intenzitásának vizsgálatánál és az alkáli-fémek elméletében elért eredményeiért 2.500 Ft,

Tarján Imre, Gyulai Zoltán vezetése alatt kvarckristályok mesterséges termelésére vonatkozó vizsgálataiért 2.000 Ft,

Fényes Imre, a termodinamika megalapozására vonatkozó vizsgálataiért, továbbá a valószínűségszámítás segítségével a kvantummechanika alapjaira vonatkozó sokat ígérő kutatásaiért 2.000 Ft,

Hoffmann Tibor, a lineáris atomláncok elméletének kidolgozásáért 1.500 Ft,

Gáspár Rezső, Gombás Pál által a fémekre kidolgozott statisztikus elméletnek az elektronszerkezet szempontjából bonyolultabb felépítésű fémekre való alkalmazásáért 1.500 Ft,

Horváth János, sok elektront tartalmazó gömbi szimetrikus molekulák elméleti tárgyalása terén a polarizációs energia és ionos kötés terén végzett, valamint térelméleti vizsgálataiért 1.000 Ft,

Zimonyi Gyula, Gyulai Zoltán és Tarján Imre, a kvarckristályok mesterséges termelésére vonatkozó vizsgálatokban való részvételéért 1.000 Ft,

Csongor Éva, a litium-atommagokban polónium α-sugarakkal gerjesztett γ-sugárzásra vonatkozó vizsgálataiért 1.000 Ft, *Medveczky László,* „Vizsgálatok Mg(α; n) Si atommagfolyamatok neutronjainak energiaeloszlására vonatkozólag fotoemulziós módszerrel" munkájáért 1.000 Ft,

Nagy János, „Vizsgálatok Mg(α; n) Si atommagfolyamatok gerjesztési függvényére vonatkozólag BCl_3 ionizációs neutronszámláló kamrával" munkájáért 1.000 Ft

jutalomban részesültek.

Matematikusok:

Szele Tibor, a csoportelméletben, továbbá az absztrakt algebra egyéb ágaiban elért eredményeiért 3.000 Ft,

Fuchs László, az algebra különböző fejezeteiben elért eredményeiért 2.500 Ft,

Aczél János, a függvényegyenletek elmélete terén elért eredményekért 2.500 Ft,

Császár Ákos, a valós függvénytan terén elért eredményeiért 2.000 Ft,

Szép Jenő, a csoportelméletben elért szép eredményeiért 2.000 Ft,

Fenyő István, az integrálegyenletek terén elért eredményeiért 2.000 Ft,

Gyires Béla, a matrix elmélet, a valószínűségszámítás, valamint azok kapcsolataira vonatkozó eredményeiért 1.500 Ft

jutalomban részesültek.

Meteorológia:

A meteorológia terén elért eredményeiért *Takács Lajos* 1.500 Ft jutalomban részesült.

A Magyar Tudományos Akadémia III. Osztályához tartozó intézetekben az igazgatók a következő tudományos dolgozókat részesítették jutalomban az 1951. második felében végzett eredményes munkájukért:

Alkalmazott Matematikai Intézet:

Pál Sándor 2.000 Ft, *Székely Gábor* 1.000 Ft, *Körmendy István* 1.000 Ft, *Takács* Lajos 1.000 Ft, *Pukánszky Lajos* 500 Ft, *Fazekas Ferenc* 500 Ft, *Szüsz Péter* 300 Ft, *Lovass-Nagy Viktor* 300 Ft.

Központi Fizikai Kutató Intézet:

Szamosi Géza és *Bardócz Árpád* 3.000—3.000 Ft, *Tari László* 1.700 Ft, *Faragó Péter és munkatársai* 2.500 Ft, *Mátrai Tibor, Haimann Ottó, Lengyel Béla, Fenyves Ervin* 1.400—1.400 Ft, *Plank Jenő* és *Láng László* 1.200—1.200 Ft, *Koczkás Edit, Deézsi Irén, Vorsatz Brunó, Sibalszky Zoltán, Karlovits József* 1.000—1.000 Ft, *ifj. Schay Géza, László György, Kántor Károly* 800—800 Ft.

Csillagvizsgáló Intézet:

Csada Imre 1.500 Ft, *Guman István* 900 Ft, *Balázs Julia* 800 Ft, *Ozsváth István* 500 Ft

jutalomban részesültek.

A III. OSZTÁLY HÍREI

Tekintettel arra, hogy a III. osztály vezetősége az Akadémia 1951. évi közgyűlésén új tagokkal bővült, ugyanakkor pedig a Vegyészeti Osztály megalakulásával az osztályvezetőség vegyész tagjai az osztályvezetőségből kiváltak, továbbá mivel a fizikai és matematikai állandó bizottságok újraválasztásakor a titkárok személyében változás történt, alábbiakban közöljük az osztályvezetőség és az állandó bizottságok jelenlegi összetételét. Megalakultak az osztályhoz tartozó kutatóintézetek tudományos tanácsai is, ezek tagjainak névsorát is közöljük.

A III. osztály vezetősége:

Elnök: Riesz Frigyes r. tag
Titkár: Rényi Alfréd lev. tag
Alexits György, Gombás Pál, Novobátzky Károly mint az Elnökség tagjai vesznek részt a III. osztály vezetőségének munkájában.
Tagok: Budó Ágoston lev. tag, Hajós György lev. tag, Jánossy Lajos r. tag, Kovács István lev. tag.

Fizikai Állandó Bizottság:

Elnök: Gombás Pál r. tag
Titkár: Kónya Albert
Tagok: Budó Ágoston lev. tag
Fényes Imre
Gyulai Zoltán lev. tag
Jánossy Lajos r. tag
Kovács István lev. tag
Novobátzky Károly r. tag
Szigeti György.

Matematikai Állandó Bizottság:

Elnök: Alexits György r. tag
Titkár: Hajós György lev. tag
Tagok: Kalmár László lev. tag
Rényi Alfréd lev. tag
Szőkefalvi-Nagy Béla l. tag
Turán Pál lev. tag
Varga Ottó lev. tag.

Meteorológiai Állandó Bizottság:

Elnök: Jordan Károly lev. tag
Titkár: Dési Frigyes
Tagok: Aujeszky László
Berényi Dénes
Béll Béla
Surányi János
Száva-Kováts József.

A Központi Fizikai Kutató Intézei Tudományos Tanácsa:

Elnök: Jánossy Lajos r. tag
Titkár: Szamosi Géza
Tagok: Budó Ágoston lev. tag
Erdey-Gruz Tibor r. tag
Gombás Pál r. tag
Kovács István lev. tag
Rényi Alfréd lev. tag
Simonyi Károly
Tarján Rezső.

Az Alkalmazott Matematikai Intézet Tudományos Tanácsa:

Elnök: Egerváry Jenő r. tag
Titkár: Vincze István
Tagok: Alexits György r. tag
Fenyő István
Hajós György lev. tag
Jánossy Lajos r. tag
Rényi Alfréd lev. tag
Tarján Rezső
Turán Pál lev. tag.

A Csillagvizsgáló Intézet Tudományos Tanácsa:

Elnök: Egerváry Jenő r. tag
Titkár: Földes István
Tagok: Detre László
Dezső Lóránt
Rényi Alfréd lev. tag.

TARTALOMJEGYZÉK

Oldal

Rényi Alfréd: Beszámoló az Osztály munkájáról, ötéves tervéről és az ezzel kapcsolatos feladatokról 3
Hozzászóló: *Dési Frigyes* 20

ELŐADÁSOK A MODERN FIZIKA KÖRÉBŐL

M. Cosyns: A kutatás megszervezése a brüsszeli atomkutató központban 23
Gombás Pál: Az atommagok statisztikus elméletéről 27
Kovács István: Vizsgálatok a stronciumoxid kék sávjain 41
Hozzászóló: *Budó Ágoston* 50
Selényi Pál: Higanygőz hatása a szelénegyenirányítóra és a szelén fényelemre 51
Hozzászólók: *Hoffmann Tibor, Winter Ernő* 57

ELŐADÁSOK A MATEMATIKA KÖRÉBŐL

Beszámoló a magyar matematikusok ez évi eredményeiről

Szőkefalvi-Nagy Béla: Újabb eredmények az analízis területén 59
Szele Tibor: Újabb eredmények az absztrakt algebra területén 73
Hozzászóló: *Rédei László* 88
Kalmár László: A matematika alapjaival kapcsolatos újabb eredmények 89
Hozzászólók: *Rényi Alfréd, Alexits György, Aczél János* 104
Kalmár László válasza 108
K. Kuratowski: Beszámoló a Lengyel Állami Matematikai Intézet tudományos tevékenységéről, különösen a topológia területén 113
Hajós György: Újabb eredmények a geometria területén 119
Rényi Alfréd: Új eredmények a valószínűségszámítás terén 125
Hozzászólók: *Egerváry Jenő, Fényes Imre, Bodó Zalán, Takács Lajos* 140
Turán Pál: Az analízis egy módszerének újabb alkalmazásairól 145
Kitüntetések — Jutalmak 155
A III. osztály hírei 157

Ára: 20 Ft.

Technikai szerkesztő: Erdős Lajosné

Akadémiai Kiadó (Budapest, V, Alkotmány-u. 21.) Felelős: Mestyán János

Csongrádmegyei Nyomdaipari Vállalat, Szeged. 52753 Felelős vezető: Vincze György

A MAGYAR
TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI OSZTÁLYÁNAK

KÖZLEMÉNYEI

II. KÖTET 2. SZÁM

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
BUDAPEST, 1952

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI OSZTÁLYÁNAK

KÖZLEMÉNYEI

A SZERKESZTŐBIZOTTSÁG TAGJAI:
ALEXITS GYÖRGY, BUDÓ ÁGOSTON, GYULAI ZOLTÁN,
NOVOBÁTZKY KÁROLY, TURÁN PÁL

SZERKESZTI:
RÉNYI ALFRÉD

II. kötet 2. szám

Szerkesztőség: Budapest V, Nádor-utca 12.
Kiadóhivatal: Budapest V, Alkotmány-utca 21.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei változó terjedelmű füzetekben jelennek meg és az Akadémia III. osztályának előadóülésein bemutatott dolgozatokat, továbbá az osztály munkájára vonatkozó közleményeket, könyvismertetéseket stb. tartalmaznak. Négy füzet alkot egy kötetet. Évenként általában egy kötet jelenik meg.

Kéziratok a következő címre küldendők:

A Magyar Tudományos Akadémia
III. Osztályának Közleményei.
Budapest V, Nádor-utca 12.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi levelezés.

Minden szerzőt 100 különlenyomat illet meg, megjelent munkájáért.

Közlésre el nem fogadott kéziratokat a szerkesztőség lehetőleg visszajuttat a szerzőhöz, de felelősséget a beküldött kéziratok megőrzéséért, vagy továbbításáért nem vállal.

A Közlemények előfizetési ára kötetenként belföldi címre 20 forint, külföldi címre 30 forint. Belföldi megrendelések az Akadémiai Kiadó, Budapest V, Alkotmány-u. 21. (Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 04-878-111-48), külföldi megrendelések a „Kultúra" Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalat, Budapest VI., Sztálin-út 2. (Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 45-790-057-50-032) útján eszközölhetők.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztálya a következő idegennyelvű folyóiratokat adja ki:

1. Acta Mathematica Hungarica,
2. Acta Physica Hungarica.

ÁLTALÁNOSÍTOTT ELJÁRÁS A PERTURBÁLÓ MOLEKULATERMEK ÁLLANDÓINAK KISZÁMÍTÁSÁRA A PERTURBÁCIÓS ADATOK ALAPJÁN

(Alkalmazás a BaO színképén található perturbációkra)

KOVÁCS ISTVÁN lev. tag

Előadta az 1950. május 23-án tartott osztályülésen

Ismeretes, hogy a molekulák színképeiben is, az atomokéhoz hasonlóan, az egyes színképvonalak bizonyos — formulákkal leírható — szabályos egymásrakövetkezést mutatnak. Sokszor azonban ez a szabályosság fokozatosan megszűnik, a várt helyeken a spektrumvonalak hiányoznak, s ehelyett ezen helyektől balra, vagy jobbra, esetleg mindkét oldalon, nemvárt helyeken, egyre nagyobb távolságban jelenik meg egy-egy vonal. Növekvő rotációs kvantumszámokon át vizsgálva az említett eltérések egy maximum felé közelednek, majd ezen áthaladva a szabályosság lassan ismét helyreáll és a továbbiakban a színképvonalak hullámszámai a már említett formuláknak tesznek ismét eleget. Ezt a jelenséget szokás perturbációnak nevezni. Ugyancsak a perturbáció helyén a normális intenzitáseloszlás is megváltozik; a perturbált vonalak intenzitása csökken, mégpedig olymódon, hogy a várt helyüktől legmesszebb eltolódott vonalak szenvedik a legnagyobb intenzitáscsökkenést.

Az elméleti vizsgálatok azt mutatták, hogy a perturbációk két különböző rotációs termsorozat kvantummechanikai kölcsönhatásától erednek, ill. azzal értelmezhetők. Nevezetesen, ha ugyanazon molekula két különböző elektrontermjére felépülő vibrációs és rotációs termemeletek ugyanazon rotációs kvantumszámhoz tartozó nívói egymás közelébe kerülnek, akkor — bizonyos szimmetriafeltételek teljesülése esetén — a két termsor egymástól eltérülni iparkodik. Ennek következtében a két termsorozat valamelyikéről induló, vagy arra érkező átmenetekhez tartozó sávvonalak a színképen rendellenes, „perturbált" helyet foglalnak el. Az egymástól perturbációs hatást szenvedő két termsorozat közül az átmenetben részt vevő termet „perturbált", míg a másikat „perturbáló" termnek nevezzük.

Mivel a perturbáló term létezésére legtöbbször kizárólag magából a perturbációból, vagyis a perturbációs eltérésekből következtetünk (legtöbbször semmiféle átmenet nem ismeretes a perturbációt okozó termsorozatról), kívánatosnak látszik olyan eljárás kidolgozása, mely a perturbáló termek állandóinak meghatározását lehetővé teszi a vonalak szabályszerű helyéről való elmozdulásának számadataiból. Amint a bolygók pályáinak „háborgatásaiból" új, addig ismeretlen bolygók jelenlétére, sőt helyzetére lehetett következtetni, még mielőtt a háborgató égitestet magát felfedezhették volna, úgy a sávos színképek perturbációi is módot nyújtanak olyan molekulatermek állandóinak meghatározására, melyek maguk esetleg tényleges színképek révén nem is volnának megismerhetők. Ilyen eljárások már ismeretesek, azonban a legtöbbje azzal a hátránnyal bír, hogy egyfelől feltételezi a perturbációs matrixelem ismeretét, másfelől pedig szükségessé teszi a perturbáció helye környékén a perturbált term pertubálatlan helyének meghatározását, hogy így ki lehessen számítani a perturbációs eltéréseket, amelyeknek ismerete a módszer alkalmazásához elengedhetetlenül szükséges. Lehetséges azonban megadni olyan eljárást is, mely az előbbiekben említett hátrányokkal nem bír és mindig alkalmazható, valahányszor a perturbáció helye környékén legalább két ú. n. számfölötti (vagyis ugyanazon rotációs kvantumszámhoz rendelt) vonalpárt észlelünk. Ilyen eljárások már ismeretesek, azonban csak $^1\Pi - ^1\Sigma$ sávra, ahol a $^1\Pi$ állapotot egy $^1\Sigma$ term perturbálja[1,2]. Az eljárás számos hasznos alkalmazásra talált *Schmid* és *Gerő*, valamint tanítványai különböző munkáiban. Az utóbbi időben azonban olyan kísérleti eredmények váltak ismeretessé, melyek kívánatossá tették az eljárást minden olyan gyakorlatilag előforduló átmenetre és perturbációra általánosítani, melyek szingulett termekkel kapcsolatban előfordulhatnak, nevezetesen szingulett-szingulett átmenetek esetére olyankor, amikor az egyik termet egy másik szingulett, ill. triplett term perturbálja.

Hogy ezen általánosítás végrehajtható legyen, szükséges, hogy a megfelelő perturbációs esetek elméleti tárgyalása már készen rendelkezésre álljon. Az azonos multiplicitású termek közötti[2,3,4], valamint az ú. n. interkombinációs, tehát pl. szingulett-triplett perturbációk tárgyalása és kvantummechanikai értelmezése az irodalomban már ismeretes[5].

Az idézett értekezések azonban nem tartalmazzák az összes elképzelhető eseteket és így többek között nem tartalmazzák azokat sem, melyeket svéd kutatók találtak a BaO színképében[6]. Ezek a kísérleti tények indokolttá tették a még hátralévő perturbációs esetek elméleti tárgyalását[7]. Ezzel egyúttal, a kísérleti anyag mai állását tekintve, a perturbációs kérdéseket nagyjából lezártnak tekinthetjük. Az utóbb idézett értekezés rövid áttekintést nyújt az interkombinációs perturbációk elméletéről, megmutatva az egyes elektronok pálya- és spinimpulzusmomentuma közötti kölcsönhatás tekintetbevételének jelentőségét. Ennek segítségével sikerült már korábban olyan perturbációk bekövetkezését előre jelezni, amelyeket addig még soha nem észleltek[4], s amelyeket később *Gerő* valóban meg is talált[8].

Miután ezzel az összes gyakorlatilag előforduló interkombinációs perturbációkat elméletileg értelmeztük, megnyílik a lehetősége annak, hogy a speciális esetre régebben kidolgozott eljárásokat általánosítsuk. A gondolatmenet illusztrálására általános levezetést adunk meg, melynek eredménye bármilyen speciális esetre azonnal gyakorlatilag alkalmazható. Ha két molekulaterm egymás közelébe kerül, akkor a hullámegyenlet szeparációja révén nyert energiakifejezések már nem tekinthetők jó közelítésnek. Ilyenkor a szeparációnál elhagyott tagokat is figyelembe kell venni a kvantummechanikai perturbáció számítás segítségével. Ezek tekintetbevétele egy szekuláris egyenletre vezet, melynek megoldásai adják a perturbált energiákat:

$$\begin{vmatrix} W_g^0 - W & H_{gs} \\ H_{sg} & W_s^0 - W \end{vmatrix} = 0,$$

vagyis

$$W_g = \frac{W_g^0 + W_s^0}{2} + \Delta; \quad W_s = \frac{W_g^0 + W_s^0}{2} - \Delta; \quad \Delta = \sqrt{\left(\frac{W_g^0 - W_s^0}{2}\right)^2 + |H_{gs}|^2},$$

ahol a g index a perturbált, az s index pedig a perturbáló termre vonatkozik. Mint egyszerűen látható,

$$W_g + W_s = W_g^0 + W_s^0, \tag{1}$$

azaz a perturbáció a perturbálatlan termek aritmetikai közepét változatlanul hagyja. Ez a tény teszi lehetővé olyan eljárás megadását, ahol nincs szükség a perturbációs matrixelem ismeretére a perturbáló term állandóinak kiszámításánál. Ugyanezen okból válik érthetővé a „középérték eljárás" elnevezés is.

Tegyük fel a továbbiakban az egyszerűség kedvéért, hogy a perturbáció a Q-ágban mutatkozik. Jelöljük $W^0(J)$-nek az átmenetben részt vevő, J rotációs kvantumszámhoz tartozó másik állapotot. Ekkor a perturbált $W_g(J)$ és $W_s(J)$ termértékek a perturbáció helye környékén a számfölötti vonalpárok ($Q(J)$ és $Q'(J)$) segélyével a következőképpen állíthatók elő: (l. 1. ábra)

$$\left.\begin{aligned} W_g(J) &= W^0(J) - \operatorname{sign} C \cdot Q(J) \\ W_s(J) &= W^0(J) - \operatorname{sign} C \cdot Q'(J) \end{aligned}\right\}, \tag{2}$$

ahol C az átmenetben részt vevő két term rotációnélküli rezgési nívóinak távolságát jelenti. Itt csak az előjele fordul elő: éspedig C pozitív, ill. negatív aszerint, hogy a perturbált term az átmenetnek alsó, ill. felső állapota. (1) és (2)-ből következik:

$$2W^0(J) - \operatorname{sign} C[Q(J) + Q'(J)] = W_g^0(J) + W_s^0(J). \tag{2a}$$

Képezve ugyanezen kifejezést $J-1$-re, a kettőt kivonva egymásból és osztva $2J$-vel adódik:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2J}[W_s^0(J) - W_s^0(J-1)] &= \frac{1}{J}[W^0(J) - W^0(J-1)] - \\ -\frac{1}{2J}[W_g^0(J) - W_g^0(J-1)] &- \operatorname{sign} C \cdot \frac{1}{2J}[Q(J) - Q(J-1) + Q'(J) - Q'(J-1)]. \end{aligned} \tag{3}$$

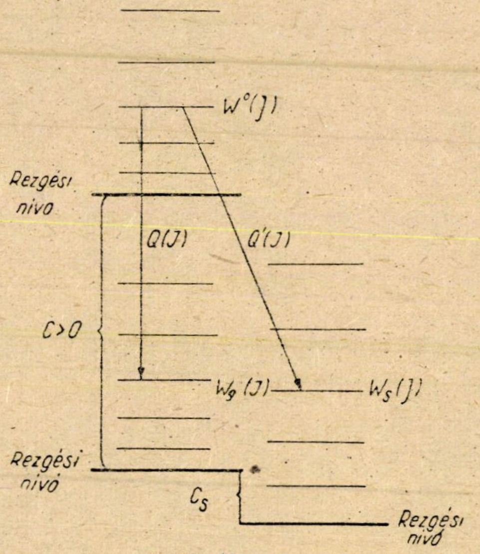
Ha *szingulett termek* esetén a J-től való függésre felvesszük a következő konkrét kifejezéseket:

$$\begin{aligned} W_g^0(J) = B_g[J(J+1) - \Lambda_g^2]; \; W_s^0(J) = C_s + B_s[J(J+1) - \Lambda_s^2]; \; W^0(J) = \\ = C + B[J(J+1) - \Lambda^2], \end{aligned} \tag{4}$$

akkor a perturbáló term rotációs állandójára, B_s-re, a következő kifejezés adódik:

$$B_s = 2B - B_g - \operatorname{sign} C \cdot \frac{1}{2J}[Q(J) - Q(J-1) + Q'(J) - Q'(J-1)], \quad (5)$$

ahol az észlelt két számfölötti vonalpáron $[Q(J), Q'(J)$ és $Q(J-1), Q'(J-1)]$ kívül csak az átmenetben részt vevő nem perturbált és a perturbált term rotációs állandója szerepel.



1. ábra

A baloldali alsó termsorozat a perturbált, a jobboldali alsó termsorozat pedig a perturbáló termsorozat. A felső termsorozat az átmenetben részt vevő perturbálatlan termsorozat.

A másik keresett állandóra kapjuk (2a), (4) és (5) felhasználásával:

$$\begin{aligned} C_s = 2(C - \Lambda^2 B) + \Lambda_g^2 B_g + \Lambda_s^2 B_s + \\ + \operatorname{sign} C \cdot \frac{1}{2}\{(J-1)[Q(J) + Q'(J)] - (J+1)[Q(J-1) + Q'(J-1)]\}. \end{aligned} \quad (6)$$

Hasonló kifejezéseket kaphatunk, ha a perturbáció a P- és R-ágban jelentkezik, azzal a különbséggel, hogy ott a Q vonalak helyett a P- és R-ágak számfölötti vonalpárjai szerepelnek.

Az itt bemutatott módszer könnyen általánosítható az interkombinációs perturbációk esetére is, ha tehát a *perturbáló term triplett* term. Minthogy a triplett termekre nem adható meg olyan egységes formula, mint azt szinguletteknél láttuk, az egyes eseteket itt külön kell tárgyalni, legalább is a perturbáló triplett term fajtáját illetően.

Ha feltesszük, hogy egy *szingulett termet egy* $^3\Sigma$ *term* perturbál, akkor bizonyos elhanyagolások mellett $W_s^0(J)$ a következő alakban adható meg:

$$W_{s3}^{0}(J)=C_{^3\Sigma}+B_{^3\Sigma}(J+1)(J+2);$$
$$W_{s2}^{0}(J)=C_{^3\Sigma}+B_{^3\Sigma}J(J+1);\ W_{s1}^{0}(J)=C_{^3\Sigma}+B_{^3\Sigma}(J-1)J. \qquad (7)$$

Ha ezen értékeket sorban behelyettesítjük (3)-ba $W_s^0(J)$ helyébe, és $W_g^0(J)$ és $W^0(J)$ értékeit ismét (4)-ből vesszük, akkor a perturbáló $^3\Sigma$ term állandóira a következő kifejezéseket kapjuk:

$$B_{^3\Sigma}=\frac{J}{J+1}B_s;\quad C_{^3\Sigma}=C_s-B_sJ;\qquad (k=J+1), \qquad (8a)$$
$$B_{^3\Sigma}=B_s;\quad C_{^3\Sigma}=C_s;\qquad (k=J), \qquad (8b)$$
$$B_{^3\Sigma}=\frac{J}{J-1}B_s;\quad C_{^3\Sigma}=C_s+B_sJ;\qquad (k=J-1), \qquad (8c)$$

ahol a B_s és C_s kifejezések a szingulettekre (5) és (6)-ban megadott értékeket jelentik.

Ha *szingulett termet* $^3\Pi$ *term* perturbál, akkor hasonló számításokkal a $^3\Pi$ term állandói is megadhatók. A $^3\Pi$ term formula bonyolultsága miatt általános közbülső esetben a kifejezések elég bonyolultak, úgyhogy azokat itt nem is adjuk meg. [Részletesen l. (9).] Ha a $^3\Pi$ term *Hund*-féle *a)* vagy *b)* esetű, akkor a keresett állandókra adódó kifejezések lényegesen egyszerűsödnek. Így *Hund*-féle *a)* esetben kapjuk:

$$\begin{aligned}&B_{^3\Pi}=B_s;\quad C_{^3\Pi}=C_s-B_s(Y-2);\quad (^3\Pi_2),\\ &B_{^3\Pi}=B_s;\quad C_{^3\Pi}=C_s-2B_s\quad (^3\Pi_1),\\ &B_{^3\Pi}=B_s;\quad C_{^3\Pi}=C_s+B_s(Y-2);\quad (^3\Pi_0)\ \left(Y=\frac{A}{B_{^3\Pi}}\right),\end{aligned} \qquad (9)$$

míg *Hund*-féle *b)* esetben:

$$B_{^3\Pi}=\frac{J}{J+1}B_s;\quad C_{^3\Pi}=C_s-B_s\left[J+\frac{1}{J+1}\right];\qquad (k=J+1),$$
$$B_{^3\Pi}=B_s;\quad C_{^3\Pi}=C_s;\qquad (k=J),$$
$$B_{^3\Pi}=\frac{J}{J-1}B_s;\quad C_{^3\Pi}=C_s+B_s\left[J+\frac{1}{J-1}\right];\qquad (k=J-1).$$

Hasonló eredményeket kapunk, ha a perturbáció *P* és *R* ágakban jelentkezik.

Ezek a fenti elméleti eredmények tették lehetővé, hogy a BaO színképén fellelhető rendkívül bonyolult perturbációs problémahalmazban rendet lehessen teremteni[10]. A BaO spektrumában 5000 és 7000 Å között egy $^1\Sigma^*-{}^1\Sigma$ sávrendszer található, ahol az alsó állapot a BaO molekula alapállapota és teljesen perturbációmentes, míg a felső $^1\Sigma^*$ állapoton szokatlanul sok perturbáció található. A perturbációk felfedezése az ú. n. $B'-B''$ módszer alapján történt[11, 2]. Ha ugyanis ábrázoljuk a következő kifejezést:

$$f(Q)=\frac{Q(J)-Q(J-1)}{2J}=B_g-B,$$

akkor ott, ahol nincs perturbáció, ez egyenes vonalat ad. Mihelyt azonban perturbáció lép fel, a $B_g - B$ kifejezés fokozatosan átmegy a perturbáló term B_s rotációs állandójával képezett $B_s - B$ kifejezésbe, ami annyit jelent, hogy a kezdeti egyenes a perturbáció helye környékén — aszerint, hogy a perturbáló term rotációs állandója nagyobb, vagy kisebb a perturbált term állandójánál — felszáll, vagy lehajlik. A perturbáció helye környékén észlelt számfölötti vonalak felhasználásával két hasonló kifejezés képezhető, amely két görbét eredményez, s a két görbe metszéspontjának ordinátája éppen a két görbe aritmetikai közepe:

$$\frac{f(Q)+f(Q')}{2} = \frac{B_g+B_s}{2} - B.$$

Ez a kifejezés ugyanazon formulához vezet B_s-t illetően, mint amit a középérték eljárásban már megadtunk. Ebből is meg lehet grafikusan határozni B_s-t, ha a két görbe metszéspontja létrejön, aminek feltétele ugyancsak legalább két számfölötti vonalpár észlelése. A 2. *a—e* ábrák az (1,2), (2,0), (3,0), (4,0), (5,0) sávokon a felső állapot perturbációit mutatják.

Ha a felső termeket $J(J+1)$ függvényképpen ábrázoljuk, akkor az előbbi görbék alapján be lehet jelölni a megfelelő helyeken a perturbációkat. Ott, ahol legalább két számfölötti vonalpár állt rendelkezésre, ki lehetett számítani a perturbáló term B_s értékeit egyelőre azzal a feltevéssel, hogy csupa szingulett term perturbál. [Tehát az (5) formula alapján.] Ezek az értékek fel vannak tüntetve a 2. ábrák megfelelő helyein és azonkívül még az átmetszéshez tartozó J értékek.

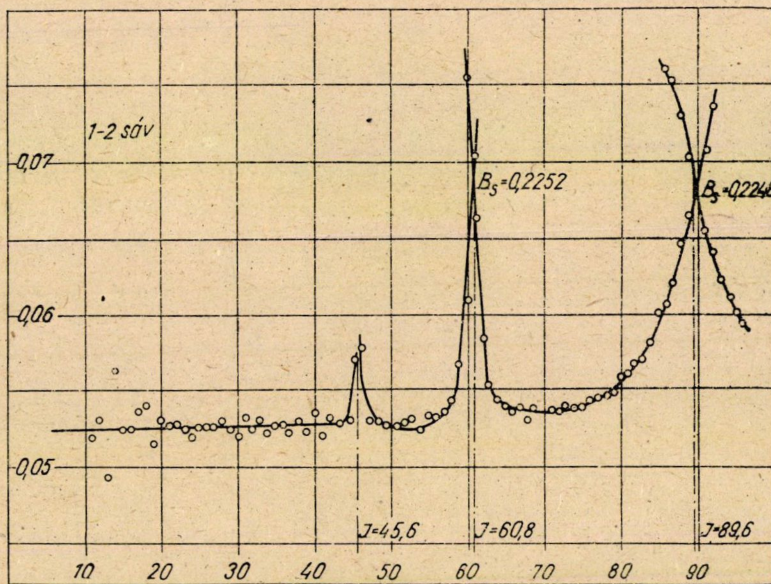
Különböző lehetőségek átvizsgálása után végül is a perturbációk értelmezése a következő módon sikerült. Feltettük, hogy a $v' = 1$ nívón $J = 60{,}3$-nél egy ${}^3\Sigma^-$ term $K = J+1$ komponense perturbál. Ez azt jelenti az előzőkben ismertettek szerint, hogy a már kiszámított B és C értékek modifikálódnak a (8a) formulák szerint. Így adódott $B_s = 0{,}2256$ helyett $B_{^3\Sigma} = 0{,}2219$ és $C_s = 17\,331{,}8$ helyett $C_{^3\Sigma} = 17\,318{,}3$. Ezen számadatok birtokában a perturbáló ${}^3\Sigma$ term (7) első formulája alapján numerikusan így állítható elő:

$${}^3\Sigma_{J+1}: \; W_{^3\Sigma} = 17\,318{,}3 + 0{,}2219\,(J+1)(J+2).$$

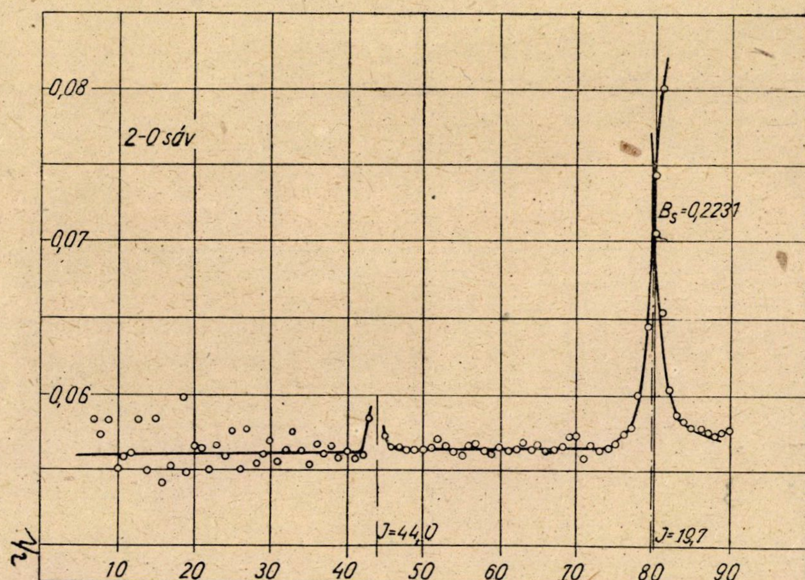
A másik, $J = 45{,}6$-nél talált perturbációról pedig azt állítjuk, hogy az ugyanezen ${}^3\Sigma^-$ term $K = J-1$ komponensétől származik. Sajnos, itt a B érték a hiányzó számfölötti vonalpárok miatt nem volt meghatározható. Minden, amit erről a perturbációról tudunk, az csak az átmetszéshez tartozó J érték. Ha azonban feltevésünk helyes, akkor (7) harmadik formulája alapján a $K = J-1$ komponens term formulája a $K = J+1$ komponensnél már meghatározott $B_{^3\Sigma}$ és $C_{^3\Sigma}$ értékekkel a következőképpen állítható elő:

$${}^3\Sigma^-_{J-1}: \; W_{^3\Sigma} = 17\,318{,}3 + 0{,}2219\,(J-1)J.$$

Ismerve a perturbált ${}^1\Sigma^*(v' = 1)$ term állandóit és ezzel termformuláját: $17\,217{,}2 + 0{,}2564 \cdot J(J+1)$, a két egyenletet egyenlővé tehetjük és meghatározhatjuk a metszésponthoz tartozó J rotációs kvantumszámot. Erre adódik



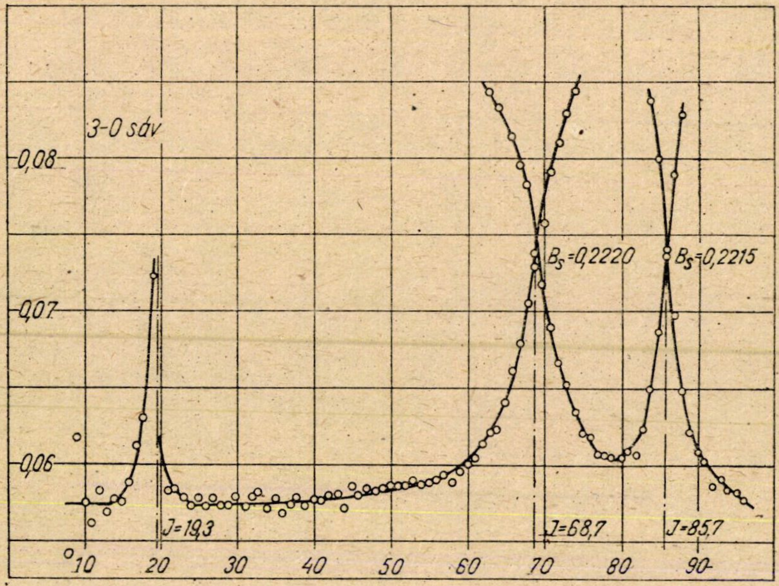
2. *a* ábra



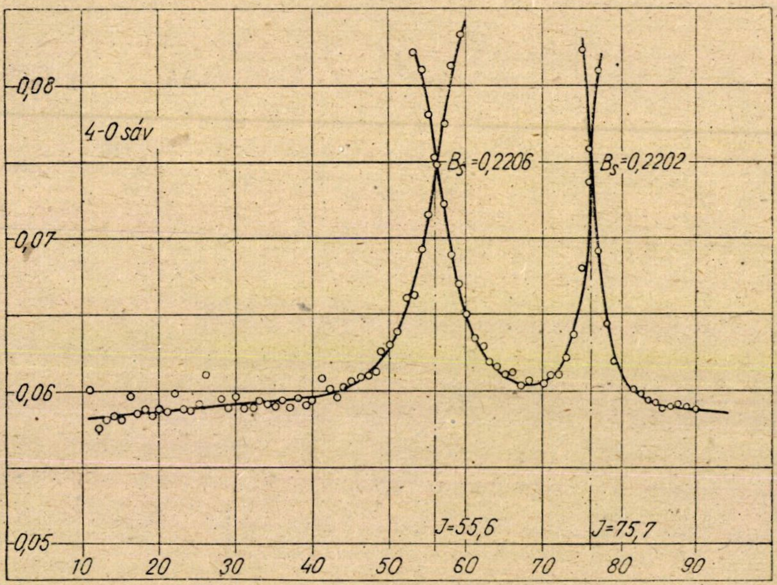
2. *b* ábra

$J = 47{,}7$, ami a kísérletileg tapasztalt $J = 45{,}6$ értékkel olyan jól megegyezik, hogy az alapfeltevést helyesnek kell minősítenünk: a perturbáló term minden valószínűség szerint $^3\Sigma^-$ term.

A következő lépés az volt, hogy a fennmaradó perturbációk egy részét ezen $^3\Sigma^-$ term különböző vibrációs nívói perturbációinak számlájára írtuk,

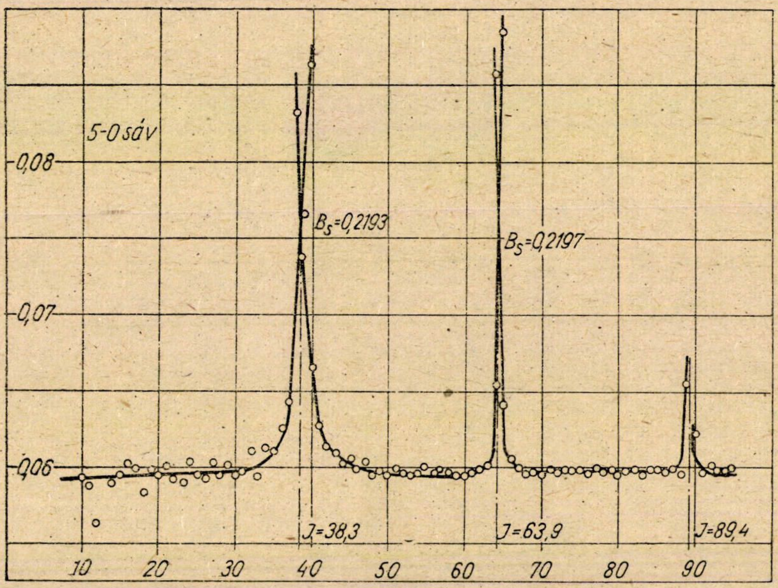


2. *c* ábra



2. *d* ábra

éspedig úgy, hogy $^3\Sigma^-$ term $K=J+1$ komponense a $v'=2$, $J=44{,}0$, $v'=3$, $J=19{,}3$, illetve a $K=J-1$ komponense a $v'=4$, $J=97{,}5$, $v'=5$, $J=89{,}4$ perturbációkat okozza. Sajnos, ezeken a helyeken nem állt rendelkezésre számfölötti vonalpár és így B értékek közvetlenül nem voltak meghatározhatók. Ismeretesek azonban az átmetszési helyhez tartozó J értékek, valamint az, hogy



2. e. ábra

A 2. *a—e* ábrákon az $f(Q)$, ill. $f(Q')$ görbék láthatók J függvényében. Az átmetszéseknél az abszcisszán fel van tüntetve az átmetszéshez tartozó J érték, az ordinátán pedig — ahol ki lehetett számítani — a perturbáló term B_s rotációs állandójának értéke annak feltételezésével, hogy a perturbációkat szingulett termek okozzák.

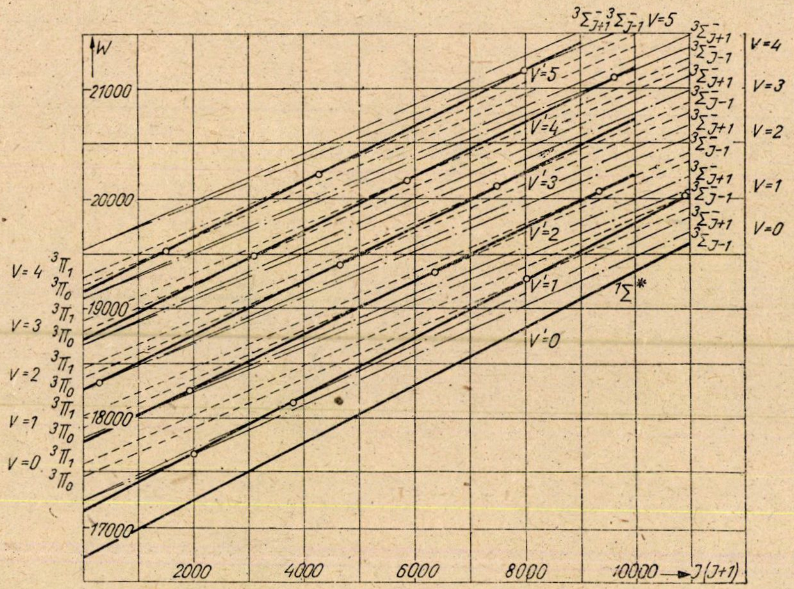
a rotációs állandó és a rezgési term-magasság hogyan függ a v rezgési kvantumszámtól:

$$B_v = B_e - \alpha\left(v + \frac{1}{2}\right); \quad G(v) = W_e + \omega_e\left(v + \frac{1}{2}\right) - \omega_e x_e\left(v + \frac{1}{2}\right)^2,$$

ahol $B_e - \frac{1}{2}\alpha$ és $W_e + \frac{1}{2}\omega_e - \frac{1}{4}\omega_e x_e$ már ismeretes a $v' = 1$ nívón talált perturbációkból. Nyilvánvaló ugyanis, hogy mivel a $v' = 0$ nívón semmiféle perturbáció nem található, a $v' = 1$ nívón a perturbáló term $v = 0$ nívója perturbál. Ha tehát fenti egyenletekben $v = 0$-t helyettesítünk, a baloldalakon pedig B_v, ill. $G(v)$ helyébe betesszük a 0,2219, illetve 17 318,3 értékeket, egy összefüggést kapunk a fenti állandók között. A többi különböző perturbációs helyeken v és J ismeretével még négy-négy összefüggést állíthatunk fel. E fölösszámú egyenletekből a legkisebb négyzetek elve alapján meghatározhatjuk a fenti egyenletben szereplő állandókat és ezekkel a perturbáló $^3\Sigma^-$ term állandóira a következő formula adódik a v rezgési kvantumszám függvényében:

$$B_v = 0{,}2225 - 0{,}00117\left(v + \frac{1}{2}\right);$$

$$G(v) = 17\,094{,}6 + 448{,}7\left(v + \frac{1}{2}\right) - 1{,}9\left(v + \frac{1}{2}\right)^2.$$



3. ábra

A vastagon kihúzott vonalak a perturbált $^1\Sigma^*$ termeket, az eredményvonallal kihúzottak a perturbáló $^3\Sigma$ termeket, a szaggatott vonallal húzották pedig a perturbáló $^3\Pi$ termeket jelentik. A megállapított perturbációk helyei az ábrán teljes vonallal kihúzott körökkel, a feltételezett perturbációk helyei pedig szaggatott körökkel vannak jelezve.

Ez az összefüggés minden v értékre megadja a rotációs állandót és a rezgési term-magasságot, amelyeknek alapján (7) felhasználásával minden rezgési nívóra felírható a numerikus termformula. Ezek segélyével kiszámíthatók az így adódó J átmetszési értékek és összehasonlíthatók a valóban észlelt értékekkel; ez látható a mellékelt táblázatban. A megegyezés jónak mondható.

Mindenesetre az elméleti számítások szerint még perturbációnak kellene lenni a $v'=2$ nívón $J=32{,}1$-nél, a $v'=3$ nívón $J=5{,}7$-nél. Ha megnézzük a megfelelő $B'-B''$ ábrát, akkor azt mondhatjuk, hogy a $v'=2$-nél $J=32$ körül a kísérleti adatok igen pontatlanok, úgyhogy nem lehet a kis perturbációt határozottan megállapítani, míg a $v'=3$ $J=5{,}7$ annyira a sávfej elején van, hogy ott a vonalak gyengesége miatt hiányzik az analízis. A többi elméletileg adódó perturbáció pedig olyan magas rotációs kvantumszámnál volna csak észlelhető, ameddig az analízis már nem terjed ki. Ez volt tehát az első jelentős alkalmazása az előbbiekben közölt általánosításnak.

Ugyancsak ezen az alapon sikerült kimutatni, hogy a fennmaradó perturbációk minden valószínűség szerint egy *Hund*-féle *a)* esetű $^3\Pi$ term $^3\Pi_1$ és $^3\Pi_0$ komponensétől származnak. A $^3\Pi$ term *Hund*-féle *a*) esetben $^1\Sigma$ termet nem perturbál[7]. Hasonlóan eljárva a $^3\Pi$ perturbációra közölt (9) formulák alapján sikerült a rotáció állandókra és a rezgési nívókra az összefoglaló egyenletet az előbbiekhez hasonló eljárással megadni[10].

TÁBLÁZAT

v'		J észl.	J szám.
1	$K=J-1$	45,6	47,7
	$K=J+1$	60,8	60,5
2	$K=J-1$	—	32,1
	$K=J+1$	44,0	44,7
3	$K=J-1$	—	5,7
	$K=J+1$	19,3	18,4
4	$K=J-1$	97,5	97,5
	$K=J+1$	—	109,5
5	$K=J-1$	89,4	89,6
	$K=J+1$	—	101,5

Összefoglalva: a számítások azt eredményezték, hogy a BaO felső $^1\Sigma^+$ termjének különböző vibrációs nívóin minden valószínűség szerint $^3\Sigma^-$ és $^3\Pi$ term különböző vibrációs nívói okozzák a perturbációkat. E perturbáló termek állandóit az általánosított eljárás segélyével sikerült numerikusan kiszámítani, tisztán a perturbációs adatokból, valamint ugyancsak ezen eljárás alapján sikerült eldönteni azt, hogy a perturbáló term milyen típusú. Az értelmezés helyességét alátámasztja még az a tény is, hogy a Ba(^{1}D) és O(^{3}P) atomok alapállapotainak termkombinációjából csak két molekulaterm jöhet létre: egy $^3\Sigma^-$ és $^3\Pi$ term, ami pedig éppen a mi eredményünk is.

Magyar Tudományos Akadémia
Központi Fizikai Kutató Intézete
Spektroszkópiai Osztálya.

IRODALOM

1 *R. Schmid, L. Gerő:* ZS. f. Phys. *94,* (1935), 386.
2 *I. Kovács:* ZS. f. Phys. *106,* (1937), 431.
3 *I. Kovács:* ZS. f. Phys. *109,* (1938), 387.
4 *I. Kovács:* ZS. f. Phys. *111,* (1939), 640.
5 *A. Budó, I. Kovács:* ZS. f. Phys. *109,* (1938), 393, *111,* (1939), 633.
6 *R. Barrow, A. Lagerqvist, E. Lind:* Proc. Phys. Soc. *63A.* (1950), 1132.
7 *A. Budó, I. Kovács:* Act. Phys. Hung. *1,* (1951), 84.
8 *L. Gerő, R. Schmid:* ZS. f. Phys. *112,* (1939), 679; *116,* (1940), 246.
9 *I. Kovács:* Act. Phys. Hung. *1,* (1951), 97.
10 *I. Kovács, A. Lagerqvist:* Ark. f. Fys. *2,* (1950), 411.
11 *L. Gerő:* ZS. f. Phys. *93.* (1935), 669.

IMPULZUS-SPEKTROGRÁFIA

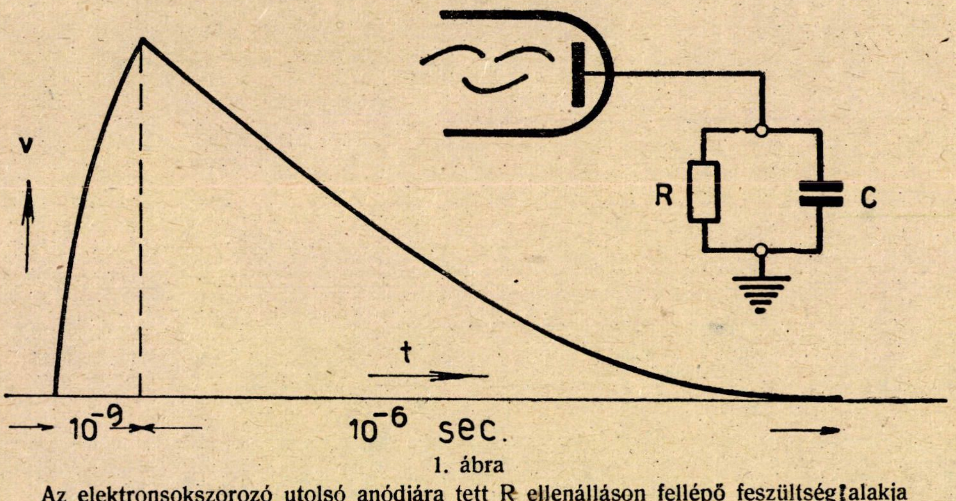
DALLOS ANDRÁS

Bemutatta GOMBÁS PÁL r. tag *az 1950. október 17-én tartott osztályülésen*

Tartalom. A szerző egy olyan berendezést, illetve eljárást dolgozott ki, amellyel statisztikus impulzusok nagyság szerinti eloszlás-függvénye gyors méréssel meghatározható. A kiértékelés gyorsaságát a lökések száma nem befolyásolja. A kiértékelést megkönnyíti, ha a katódsugárcsövön az impulzusok csúcsai hosszú ideig látszanak. A szerző erre alkalmas készüléket szerkesztett. A cikk néhány kiértékelési mód leírását és összehasonlítását adja. Külön kiemelendő az a módszer, melynél a fáradságos feketedési-görbemérés elhagyható s az eloszlási függvény közvetlenül, mérés nélkül is előtűnik a fényérzékeny lemezen.

PROBLEMATIKA

Az elektronsokszorozó katódjáról az elektronok egyenként lépnek ki és minden egyes kilépő elektront a sokszorozó lemezből kiváltott szekunder elektronok egy legvalószínűbb érték körül statisztikusan ingadozó faktorral megsokszoroznak. Ennek megfelelően az utolsó anódlemez munkaellenállásán különböző amplitudójú impulzusok keletkeznek. A munkaellenállással parallel levő kondenzátor (szórt kapacitás) feltöltésére mintegy 10^{-9} sec idő kell, mert az elektronrepülési idő szórást mutat és a szekunder emisszió nem következik be szükségképpen azonnal.[1,2] Az említett kondenzátor kisütése kb. 10^{-6} sec időállandóval következik be (1. ábra). Feladatunknak tekintettük ilyen impul-



1. ábra
Az elektronsokszorozó utolsó anódjára tett R ellenálláson fellépő feszültség alakja

zusok amplitudó szerinti gyakorisági görbéjének felvételét az elektronsokszorozás jelenségének tanulmányozása érdekében.

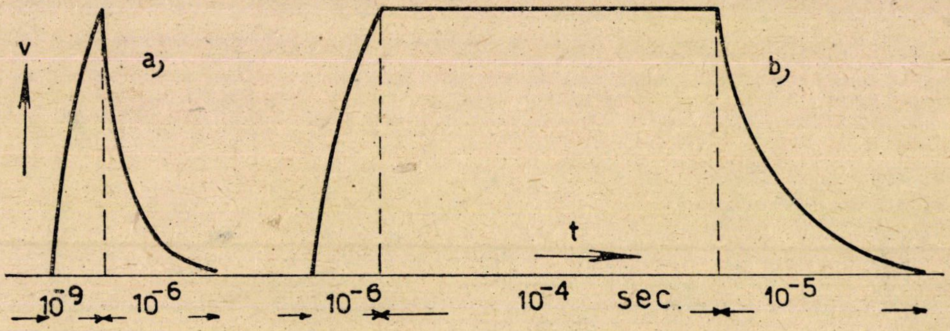
Az impulzusok filmre való regisztrálása és az impulzus-sereg kiértékelése fáradságos munkát igényel és nagy a szubjektív leolvasási hiba is. Ezért merült fel gyorsabb és pontosabb mérési módszer megvalósításának szükségessége. A munkához *D. Maeder* cikke[3] adta az alapötletet: az impulzusok katódsugárcsőre viendők, úgy átalakítva, hogy az új impulzusok amplitudója az eredetiekével legyen arányos, a csúcson a sugár egy meghatározott és aránylag hosszú ideig tartózkodjék, fel- és leszálló ága pedig rövid időtartamú legyen. Ha az időtartam-különbségek elég nagyok, akkor halvány vonal helyett a katódsugárcső ernyőjén az impulzus amplitudójára jellemző helyen fényes pontot fogunk észlelni. Ezeket a jeleket *D. Maeder* egymásra fotografálta és az eloszlási görbét fotometrálással határozta meg.

A kézenfekvő alapötlet megtartásával: 1. az idézett szerzőtől függetlenül megbízhatóbb és egyszerűbb lökéshosszabbító berendezést fejlesztettünk ki; 2. a lökések szaporaságától függően három különböző kiértékelési eljárást dolgoztunk ki.

A LÖKÉSHOSSZABBÍTÓ BERENDEZÉS

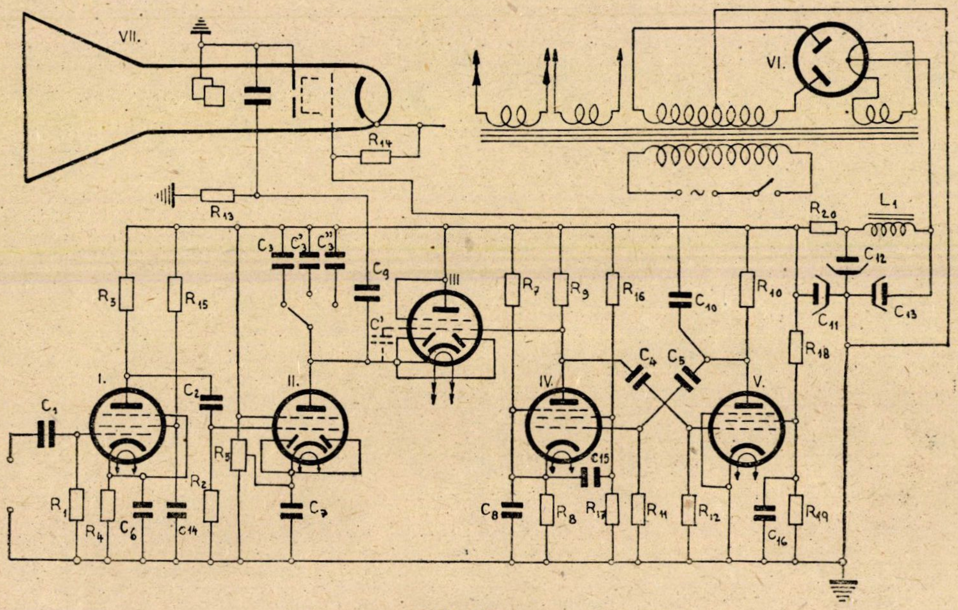
A lökéshosszabbító berendezés célja (2. ábra) az *a* szerinti impulzusból a *b* szerintit nyerni. Ezen feladat megoldására egy kondenzátor feltöltése kínálkozott, melyet az impulzus tölt fel (csövön keresztül). A kondenzátor az impulzus integráljával arányos feszültségre fog feltöltődni. Ez, exponenciális görbéről lévén szó, az eredeti jel amplitudójával lesz arányos. Miután a kondenzátor feltöltődött, feszültsége egy meghatározott ideig fennmarad, míg egy kapcsolószerkezettel vezérelt kisütő cső ki nem süti.

A konkrét kapcsolást a 3. ábra mutatja. A II cső olyan előfeszültségre van állítva, hogy nyugalmi helyzetben nem folyik rajta áram (lezárás) és csak akkor vezet, ha rácsára pozitív jel érkezik. (Minthogy esetünkben negatív impulzusokról van szó, szükséges az I erősítő, illetve fázisfordító cső is.) Ha



2. ábra

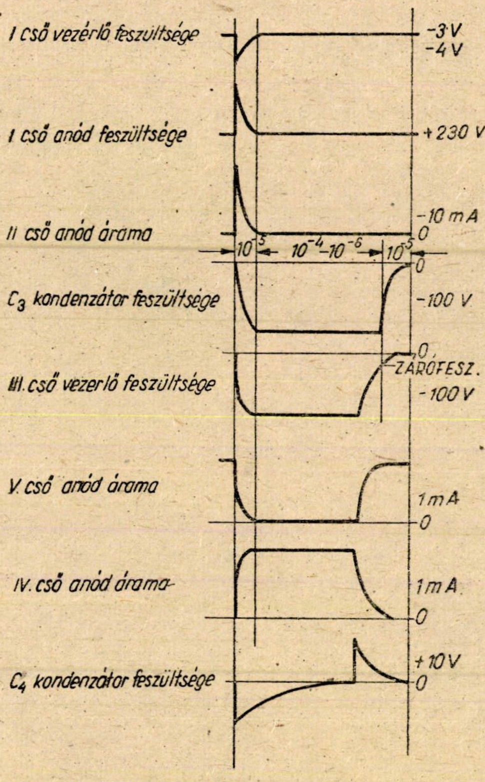
Az *a)* szerinti rövid impulzus meghosszabbítandó a *b)* szerinti, közel négyszögalakú lökéssé, de úgy, hogy amplitudója az eredetiével legyen arányos valamilyen pozitív impulzus érkezik a II cső rácsára, akkor a C_3 kondenzátorra áram fog folyni és feltöltődve rajta a jel integráljával arányos feszültség jön létre. Ezalatt a III cső le van zárva és ezt a lezárást a IV és V csőből álló kapcsolószerkezet biztosítja. (Nyugalmi esetben a IV cső negatív előfeszültsége miatt nem vezet és az V cső vezet. Ennek következtében, ha a III cső rácsa az anódjával van egyenlő feszültségen, a C_3 kondenzátor nem töltődhet fel. Amint azonban a II cső rácsára pozitív impulzus érkezik, anódján negatív impulzus lép fel, mire a C′ kapacitáson át az V cső rácsa negatív impulzust



3. ábra

A teljes lökéshosszabbító-berendezés kapcsolási rajza. Az alkalmazott kapcsolási elemek: *csövek:* I=EF6, II=EBL21, III=UBL21, IV=EF6, V=EF6, VI=AZ21, VII=5BP1/1802; *kondenzátorok:* $C_1 = 6000$ pF, $C_2 = 500$ pF, $C_3 = 200$ pF, $C_3' = 600$ pF, $C_3'' = 2000$ pF, $C_4 = 300$ pF, $C_5 = 300$ pF, $C_6 = 0{,}01$ μF, $C_7 = 0{,}1$ μF, $C_8 = 0{,}01$ μF, $C_9 = 0{,}1$ μF, $C_{10} = 1000$ μF, $C_{11} = 32$ μF, $C_{12} = C_{13} = 16$ μF, $C_{14} = C_{15} = C_{16} = 0{,}1$ μF; *ellenállások:* $R_1 = R_2 = 0{,}5$ MOhm, $R_3 = 50$ KOhm, $R_4 = 500$ Ohm, $R_5 + R_6 = 30$ KOhm, $R_7 = 10$ KOhm, $R_8 = 500$ Ohm, $R_9 = R_{10} = 80$ KOhm, $R_{11} = R_{12} = 0{,}1$ MOhm, $R_{13} = R_{14} = 1$ MOhm, $R_{15} = 0{,}1$ MOhm, $R_{16} = 30$ KOhm, $R_{17} = 15$ KOhm, $R_{18} = 30$ KOhm, $R_{19} = 15$ KOhm, $R_{20} = 500$ Ohm; *induktivitás:* $L_1 = 3$H

kap. Ennek következtében az V cső anódellenállásán pozitív impulzus lép fel, mely megindítja a IV cső áramát, mely áram okozta és a munkaellenálláson fellépő feszültségesés lezárja az V csövet.) A C_3 kondenzátor most már az impulzus időtartama (mintegy 10^{-6} sec) alatt feltöltődik és feszültsége mindaddig fenn is marad, amíg a kapcsolókör vissza nem billen; ez az ábra szerinti méretezés következtében 10^{-4} sec alatt következik be, amikor is a III cső elveszti negatív feszültségét és kisüti a C_3 kondenzátort. A megfelelő feszültségek és áramok a 4. ábrán láthatók.



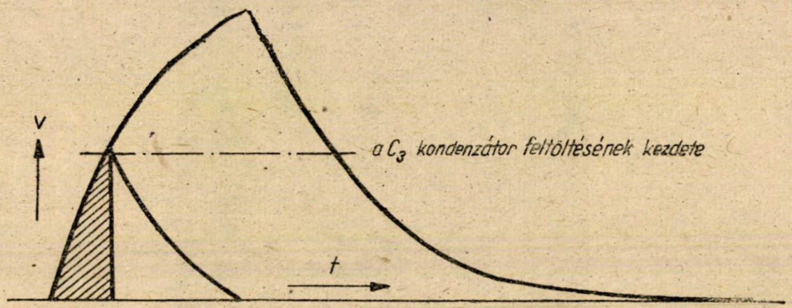
4. ábra
A 3. ábra megfelelő feszültségeit és áramait mutatja a lökéshosszabbító működése közben

A C_3 kondenzátoron fellépő feszültséget a katódsugárcső függőleges eltérítő lemezpárjára vezetve, a katódsugárcső 10^{-6} sec alatt kitér (töltési idő), majd helyben marad 10^{-4} sec-ig, s utána mintegy 10^{-5} sec alatt visszatér nyugalmi helyzetébe (kisütés). A 10^{-6} sec-os szakasz alatt keltett kis fénymennyiség a 10^{-4} sec-os szakasz alatt keletkező, az előbbinek 100-szorosát kitevő fénymennyiség mellett alig látszik és, hogy a 10^{-5} sec-os se lássék, a katódsugárcső rácsára kioltó (negatív) impulzust vezetünk az V cső anódjáról.

A feldolgozható impulzus-feszültségek határa C_3 változásával állítható (Esetünkben a felső határok: 0,2 0,6 és 2,0 V.)

A berendezésben hibák várhatók onnan, hogy a III cső lezárására, vagy más szóval a C_3 kondenzátor kisütésének megakadályozására egy meghatározott feszültségre van szükség. Ez kis impulzus esetén aránylag később következik be, mint nagyobbnál (5. ábra) és így az összterületből kisebb impulzusok esetén aránylag nagyobb rész vész el. Minthogy az eredeti, feldolgozandó impulzus egész felszálló ága 10^{-9} sec-os, a leszálló ága 10^{-6} sec-os, ez a hiba nem mutatkozhat. Az egész elmaradó terület a legrosszabb esetben is kevesebb, mint 1%. (Ez akkor következik be, ha csak az impulzus csúcsánál kezdődne meg a kondenzátor feltöltése.) A hitelesítési méréseknél ez a feltevés igazolódott.

A kapcsolásban nem történt gondoskodás arról, hogy a bemenő I és II cső az impulzus megjelenése után 10^{-4} sec-ig ne dolgozzon. A fenti követelmény teljesítése néhány újabb csővel lehetséges (*Maeder*), de felesleges, mert egyszerűbb kevesebb lökésszámmal dolgozni, és ez mindig elérhető.



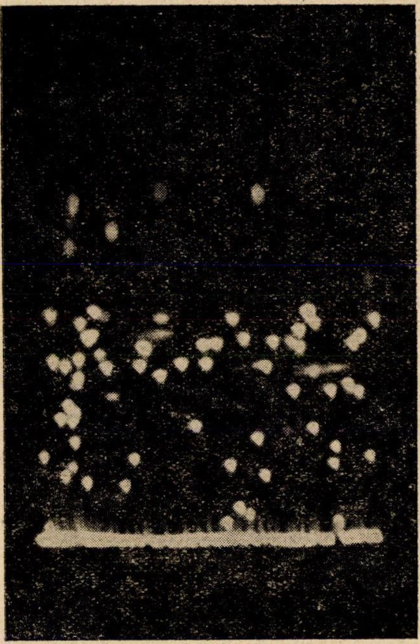
5. ábra
A III cső egy meghatározott negatív rácsfeszültségig vezet és kisüti a C_3 kondenzátort. Emiatt a vonalkázott terület (töltéssel arányos) elvesz és ez kis impulzusfeszültségeknél aránylag nagyobb, mint a nagyobbaknál

Úgy találtuk, hogy a használt katódsugárcső foszforeszkálásának (utánvilágításának) időállandója mintegy 10^{-3} sec, másrészt a fényfolt fényessége bizonyos adott intenzitás elérésekor telítésbe jut. Hogy ezen jelenségek zavaró hatását kiküszöböljük, a katódsugárcső vízszintes eltérítését is elláttuk eltérítő feszültséggel. Ha 10^{-4} sec, vagy ennél rövidebb periódusidejű fűrészfog-rezgéssel dolgozunk, akkor egyeneseket kapunk pontok helyett. *Maeder* csak akkor járatja a vízszintes eltérítést, ha feldolgozandó impulzus érkezik a berendezésre, ami szintén felesleges, mert egyszerűbb egy oszcillográf közönséges fűrészfog-generátorával dolgozni.

KIÉRTÉKELÉSI MÓDSZEREK

A teljes impulzus-spektrográf. A meghosszabbított impulzusokat katódsugárcsőre visszük (6. ábra) és a feladat most már mindössze annyi, hogy meg kell határozni a fluoreszkáló folt nyugalmi helyzetétől egy megadott távolságban a felvillanások relatív számát. Ezt nevezzük kiértékelésnek. A következőkben a kiértékelés 3 módját ismertetjük.

1. módszer. A katódsugárcső ernyőjén megjelenő képet hosszabb (néhány perc, akár több óra) ideig tartó expozícióval fényérzékeny lemezre rögzítjük. Az egy helyre eső felvillanások okozta feketedés összeadódik, tehát egy ilyen felvételről az amplitudó eloszlást a feketedési görbe kimérésével meg lehet állapítani. (A statisztikus hibát a hosszú ideig tartó expozíció közepeli ki.) *D. Maeder* ezt a feketedési görbét fáradságos munkával különböző expozíciós idők alapján külön határozta meg. Helyette mi a vizsgálandó és az amplitudóban statisztikus ingadozást mutató lökésekkel magukkal vettük fel a feketedési kalibrációt a következőkben leírtak szerint.



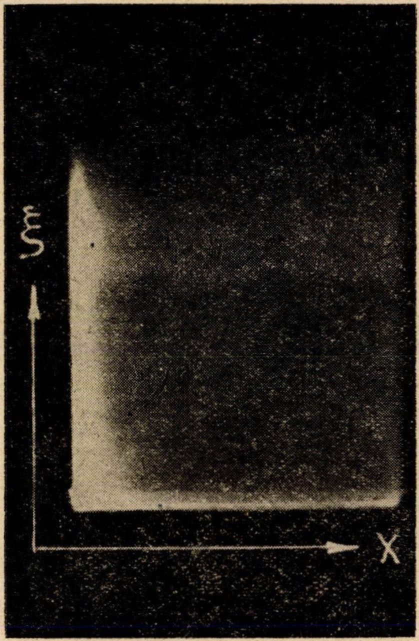
6. ábra
Katódsugárcső ernyőjéről fényképezett kép, melyen minden fényfolt egy lökés csúcsát jelenti. A nagyobb amplitudójú lökés ordinátája nagyobb. Pontok helyett vízszintes vonalat kapunk abban az esetben, ha a vízszintes eltérítés periódusideje 10^{-4} sec.

A katódsugárcső vízszintes eltérítését nem időben lineáris fűrészfogrezgéssel, hanem másodfokú görbével végeztük. Legyen x az elektronsugár okozta fényfolt távolsága a nyugalmi helyzettől, t az elmozduláshoz szükséges idő, s történjen így az eltérítés $x = at^2$ szerint (a = konstans). (Ilyen eltérítő feszültség nyerhető lineáris fűrészfog-rezgésből ellenállás-kondenzátorosztón végzett integrálással.) Minthogy az elektronsugár által egyetlen helyen keltett fénymennyiség f az ott-tartózkodás idejével egyenesen arányos (ami viszont a sebességtől fordítva függ), érvényes az x helyen keltett fénymennyiségre:

$$f(x) = \frac{b}{dx/dt} = \frac{c}{2at} = \frac{d}{\sqrt{x}} \quad (b, c \text{ és } d \text{ konstansok}).$$

Ha most az ilyen kvadratikus eltérítésű elektronsugár által keltett fény-mennyiséget lefényképezzük, (7. ábra) akkor a fényképező lemez minden helye a fenti egyenletben definiált ismert megvilágítást kap. Ilyen módon meghatározható a feketedési görbe, azaz, hogy a különböző feketedések milyen megvilágítások mellett jöttek létre.

A méréseknél nyert 7. ábra szerinti fényképekből az eloszlási függvény gyakorlatilag a következőképpen határozható meg. Egyetlen $x = a$ egyenesen



7. ábra

A 6. ábrán látható lökéseket egy $x = at^2$-es időtengelyű oszcillográfra visszük. Világos lesz az a vízszintes sáv, ahová több azonos nagyságú lökés esik. Az ábrán látható világos folt körvonala mutatja a $W(\xi)$ eloszlási függvény négyzetgyökét. A fénykép mintegy 10^6 lökést regisztrál

minden lökés azonos fényt kelt és így a különböző feketedést az amliptudó szerint különböző számú lökés okozza. Egyetlen $\xi = b$ egyenes viszont azonos számú lökést kapott és a feketedés-különbségeket az elektronsugár sebességének helytől függő különbsége okozza. Ha most összehasonlítjuk az $x = a$ egyenes mentén a feketedéseket a $\xi = b$ egyenesen talált feketedésekkel, akkor pl. az (a, ξ_k) helyen észlelt feketedéssel valamilyen (x_1, b) helyen azonos feketedést találunk. Ekkor az $f(x) = \frac{d}{\sqrt{x}}$ függvény szerint a relatív fénymennyiség meghatározható. Minthogy ugyanis az $x = a$ egyenesen vagyunk, az észlelt $f(x_1)$ fénymennyiség a $W(\xi_k)$ lökésszámmal arányos, és így az eloszlási függvény meghatározható a

$$W(\xi_k) = \frac{d}{\sqrt{x_1}}$$

összefüggés alapján. ($W(\xi_k)d\xi_k$ azon lökések száma, melyeknek amplitudói ξ_k és $\xi_k + d\xi_k$ közé esnek).

A feketedési görbe külön történő meghatározásánál hibát okoz a fényképező lemezek, az előhívási és fixálási műveletek különbözősége, továbbá körülményes megtalálni a feketedési görbe éppen szükséges szakaszát Nem léphet fel ez a hiba, ha a feketedési görbét magával a vizsgálandó lökéssereggel vesszük fel és egyszersmind a görbe megfelelő (aktuális) szakaszát mértük meg.

A $W(\xi)$ eloszlási függvény azonban közvetlenül is előtűnik a leírt módszer (de bármilyen más, nem lineáris fűrészfog-rezgés) használata esetén. Az egyetlen helyen keltett fénymennyiség függ a lökések számától (mely $W(\xi)$ eloszlási függvény szerint változik) és az egyetlen lökés alatt okozott fénymennyiségtől (melyet esetünkben $f(x) = \frac{d}{\sqrt{x}}$ függvény szerint x irányban történő kvadratikus eltérítés definiál). Így együttesen a feketedést okozó fénymennyiség $F = W(\xi) \cdot f(x)$ az x, illetve ξ koordinátájú helyen. Ha most azokat a helyeket vizsgáljuk, melyek feketedése azonos, azaz melyekre érvényes $W(\xi) \cdot f(x) = \text{konst}$ összefüggés, akkor,

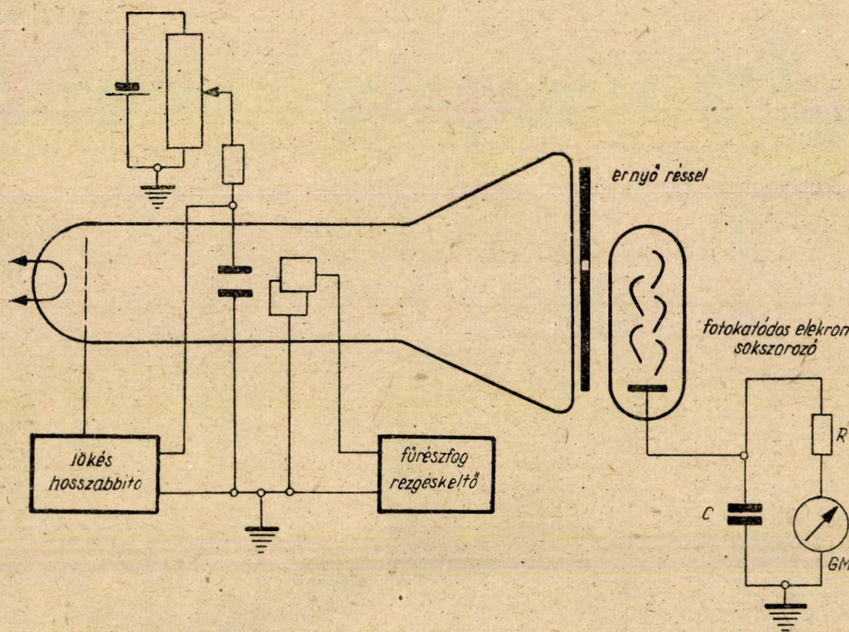
$$W(\xi) = k\sqrt{x} \qquad (k = \text{konst}),$$

ami azt jelenti, hogy az azonos feketedésű helyek az eloszlási függvény négyzetét írják le. (Lásd a 7. ábra világos részének körvonalát).

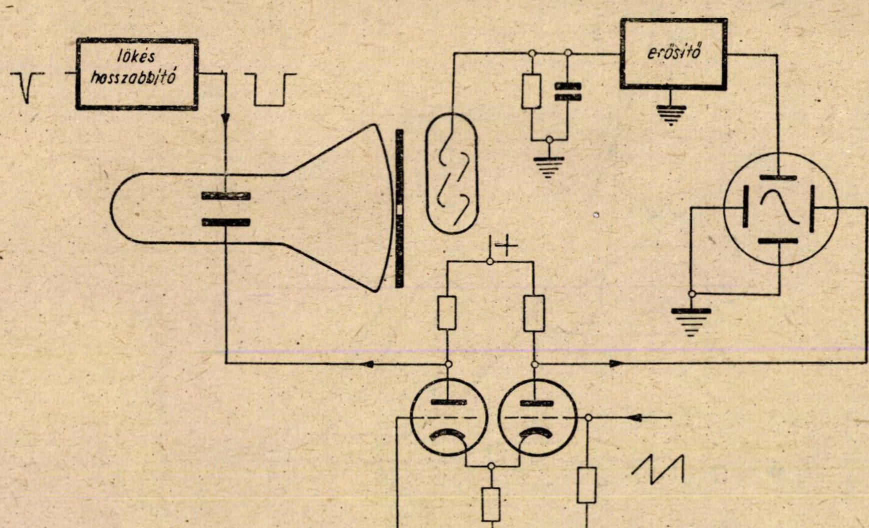
Megjegyezzük, hogy célszerűbb volna exponenciális eltérítéssel dolgozni. Ekkor ugyanis $x = ae^{bt}$ (a és b konstansok) a sebesség $\frac{dx}{dt} = bx$ a keltett fénymennyiség $f(x) = \frac{1}{bx}$ és így az egyenlő feketedésű helyek magát az eloszlásfüggvényt adnák a $W(\xi) = kx$ függvény alapján.

2. módszer. Az ernyő elé rést, a rés elé látható fényre érzékeny fotokatódú elektronsokszorozót teszünk (8. ábra). A felvillanások hatására a rés elé helyezett elektronsokszorozóban keletkező áramot mérhetjük (*Faragó P.* ötlete). Hogy műszerünk időben mennyire közepel, azt a T = RC időállandó szabja meg. A rést tologatva a különböző nagyságú lökések relatív száma megmérhető. A rés tologatása helyett a katódsugárcső eltérítő lemezét különböző egyenfeszültséggel látjuk el és ezzel a fluoreszkáló folt alaphelyzetét változtatjuk.

3. módszer. Az eloszlási görbe közvetlenül is láthatóvá tehető a következőképpen: a 8. ábra szerinti katódsugár nyugalmi helyzetének eltolását nem telepről, potenciometrikusan szabályozva végezzük, hanem lineáris fűrészfogrezgéssel (9. ábra). Ugyanezt a fűrészfogrezgést egy második katódsugárcső lemezpárjára vezetjük, míg a függőleges lemezpárra a fotoérzékeny elektron-

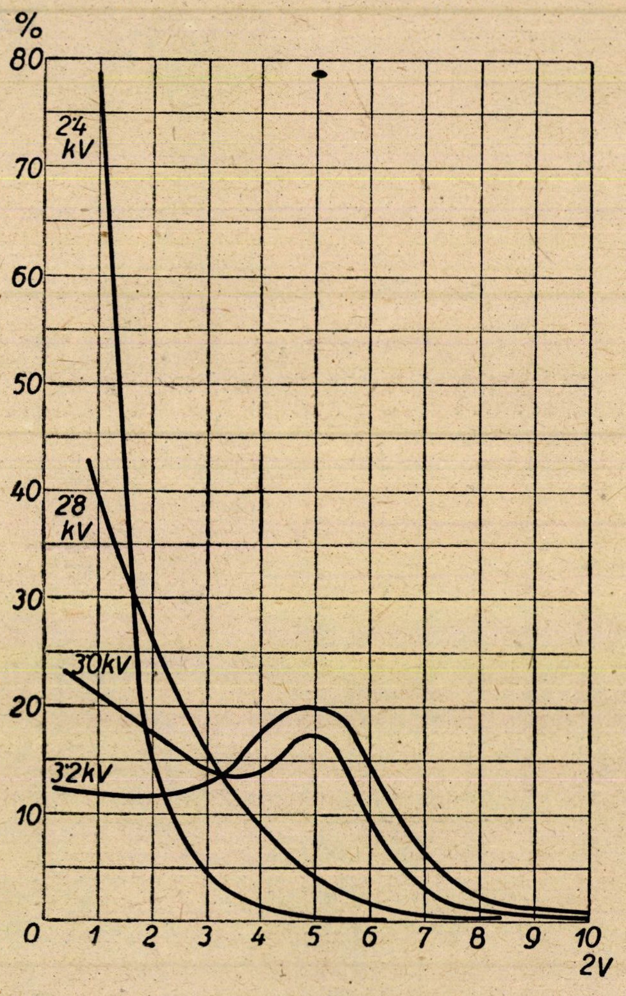


8. ábra
A legegyszerűbb gyors lökéseloszlás-mérésre alkalmas összeállítást mutatja. A galvanométer $T = RC$ időre kiközepelt áram arányos a T idő alatt a rés előtt megjelent lökések számával



9. ábra
Ha a 7. ábra szerinti elektronsugár nyugalmi helyzet tologatást nem kézzel szabályozva, potenciométerről vett feszültséggel, hanem elektronikusan, fűrészfog-feszültséggel végezzük, akkor egy második katódsugárcsövön nyerhető a teljes amplitudó szerinti spektrum

sokszorozó munkaellenállásán fellépő feszültséget kapcsoljuk. (Ez a feszültség a felvillanások számával arányos). Ebben az esetben ezen a második katódsugárcsövön a keresett nagyság szerinti eloszlási görbe fog megjelenni. Ha a statisztikus ingadozást csökkenteni óhajtjuk, az eloszlási görbék hosszabb ideig egymásra fényképezendők. — Megjegyezzük, hogy az imént leírt módszerrel csak hozzávetőleges méréseket végeztünk, mert a 10^{-4} sec-os felbontóképesség miatt csak kevés sec-enkénti lökésszámmal dolgozhattunk és így a nyert képek nagy statisztikus ingadozást mutattak.



10. ábra
Egy 14 gyorsító-elektródás elektronsokszorozó impulzusainak amplitudó szerinti eloszlásfüggvényei különböző tápfeszültségek mellett

MÉRÉSEK

Mérési eredmények. A 10. ábra egy 14 anódás, izzókatódos elektronsokszorozó tápfeszültségtől függő lökéseloszlási görbéit mutatja. (A mért elektronsokszorozó munkaellenállása R = 100 KOhm, a shuntölő kondenzátor C = 10 pF kapacitású). A mérésekből látható, hogy a görbék menete a gyorsító feszültségektől függ. Ha a feszültség növekszik, a kis amplitudójú lökések relatív száma csökken. Az impulzusok átlagos nagysága növekvő feszültséggel véges határértékhez tart, utóbbi jelenséget valószínűleg a nagyobb áramsűrűségeknél keletkező tértöltés okozza (*Pócza*).

ÁTTEKINTÉS

A közleményben leírt impulzushosszabbító berendezés minden olyan esetben használható, amikor a nyert lökések integrálja önmagával arányos és ahol a felmenő ág az elsőnél legalább két nagyságrenddel rövidebb időtartamú. Használható tehát az ismert proporcionális számlálóknál is.

Ha a leírt 3 kiértékelő módszert összehasonlítjuk a feldolgozandó lökések gyakorisága szempontjából, a következőket állapíthatjuk meg. Az 1. módszer akármilyen kis időegységenkénti lökésszám esetén használható, a 2. módszerhez legalább sec-onként 1000 lökés szükséges, a 3. módszer pedig csak legalább mintegy 100 000 pulzus/sec esetén alkalmazható. Ami a pontosságot illeti, a legpontosabb az 1. módszer. Összefoglalva kimondhatjuk, hogy közepes időegységenkénti lökésszám esetén (1000 pulzus/sec), ha a gyors kiértékelés a cél, a 2. módszert, ha a pontosság fontosabb, akkor az 1. módszert célszerű alkalmazni.

A leírt munka az Egyesült Izzó és Villamosság Vállalat Kutató Laboratóriumában (Ujpest) készült 1948 elején. Végezetül hálás köszönetet kell mondanom *Faragó Péter* és *Pócza Jenő* kartársaimnak, kik a fenti problémára figyelmemet felhívták.

Távközlési Kutató Intézet,
Budapest.

IRODALOM

1 *Wang.* Phys. Rev. *68,* (1945) 284.
2 *Papp.* Rev. Sci. Instr. *19,* (1948) 578.
3 *Maeder.* Helv. Phys. Acta, *20,* (1947) 139.

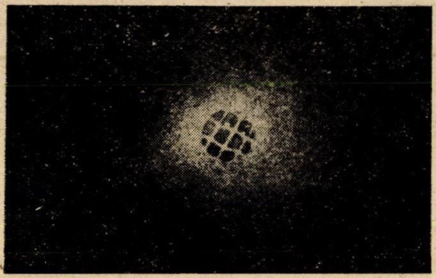
ELEKTRONMIKROSZKÓPI KÉPEK ELEKTROGRAFIKUS FELVÉTELE

SELÉNYI PÁL lev. tag

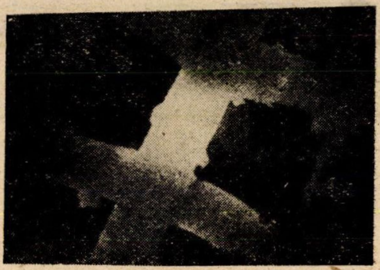
Előadta az 1950. december 12-én tartott osztályülésen

Több mint húsz évvel ezelőtt elvileg új eljárást közöltem rezgési-görbéknek (oszcillogrammoknak) felvételére katódsugárcső segélyével.[1–7] Az általam szerkesztett csőben a katódsugarat nem világító-ernyőn, vagy fényképező lemezen, hanem szigetelő anyagból való ernyőn, például magán a cső üvegfalán fogjuk fel, s ily módon ott *negatív* villamossággal felrajzolt, *láthatatlan* görbét, oszcillogrammot kapunk. Ha most az ernyőt — vagy akár annak hátlapját, tehát a csőfal *külső* felületét — *pozitív* töltésű finom porral (légárammal szétporlasztott kén-mínium keverékkel vagy lykopódium-porral) szórjuk be, a por (a lykopódium vagy a mínium) a negatív töltésű helyeken tapadva marad és így a felrajzolt görbe láthatóvá lesz. (Előhívás.) Néhány évvel később hasonló eljárást: elektrosztatikus töltésekkel való feljegyzést és beporzással történő előhívást szabad levegőn izzó katóddal és 1—2 mm hosszúságú ion-nyalábbal valósítottam meg s ezt az „elektrografálás"-nak elnevezett eljárást képtávírásra, facsimile-átvitelre, oszcillogrammok felvételére jó sikerrel alkalmaztam is,[8–16] de az első eljárást, a katódsugárral történő feljegyzést, a kezdeti kísérleti állapotnál tovább fejleszteni nem volt módom. Pedig hogy ebben igen komoly lehetőségek várnak még kiaknázásra, bizonyítja, hogy eljárásomat két japán fizikus 1936-ban Dufour-rendszerű katódsugár oszcillográffal megismételvén,[17] 65 kV feszültséggel és 2,4 mikroamper sugárerősséggel, keménygumi-lemezen 100 000 Hz szaporaságú váltakozóáram görbéjét tudták nehézség nélkül feljegyezni. A görbe amplitudója 1 cm, tehát az írási sebesség 2 km/mp volt, az előhívást ők is a szabad levegőn, lykopódiumporral végezték. Ilyen előzmények után, hosszú évek óta terveztem az elektrografikus feljegyzési módszer kipróbálását az elektronmikroszkópon. Az első két sikeres felvételt — illetve azok fényképészeti reprodukcióit — a mellékelt 1. és 2. ábra mutatja. A felvételek — az elektronmikroszkópiában mintegy tárgyasztalként használatos finom drótszita képe — úgy készültek, hogy közönséges fekete papirost, aminőt pl. fényképező lemezek csomagolására szokás használni, megolvasztott parafinba mártva, parafinnal vontunk be, a kellő nagyságra kivágott papírdarab hátát maradandóan hozzáerősített fémfegyverzettel láttam el (valamivel nagyobb sztaniol-lemezre helyezve s ezt köröskörül reá hajtogatva), az így elkészített „felvevő-lemezt" — szabad oldalával természetesen az elektronnyaláb felé fordítva — a mikroszkóp fémkazettájában helyeztem el; exponáltuk, (45 kV, 4 mp) kivettük és előhívás céljából gumilabdából szétporlasztott lykopódium-port fújtam rá. A várakozás szerinti eredmény be is következett: az expozíció alatt „láthatatlan villamoskép“ keletkezik s azt lykopódium-porral élesen elő lehet hívni.

Egy körülmény azonban még magyarázatra szorul. A katódsugárcsővel végzett régi kísérleteimben, valamint *Suzuki* és *Tsuji* kísérleteinél is a (pozítív töltésű) mínium-, illetve lykopódium-porral való beszórása a katódsugár által felrajzolt görbét hívta elő: vagyis a por az üvegfalnak, illetve a keménygumilemeznek *besugárzott* részeire tapadt, míg e mostani felvételeken a lyko-

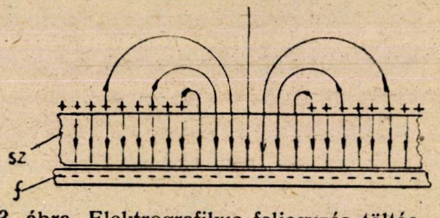


1. ábra. Fémszita elektronmikroszkópi képe, parafinnal bevont papíron felfogva és lykopódiumporral előhíva, kb. 15-szörös nagyítás



2. ábra. U. a. mint az 1. ábra, kb. 200-szoros nagyítás

pódium *ott* tapadt a papirosra, ahol azt elektronok *nem* érték s ily módon a szitának nem árnyékképét kaptuk, mint a világító ernyőn, vagy a fényképező lemezen, hanem közvetlenül pozitív képét nyertük. Ezt az első pillanatra igen meglepő jelenséget a következőképpen kell értelmezni: Ismeretes, hogy az ütköző elektronok vezetőből is, szigetelőből is másodlagos elektronokat váltanak ki. Ha a kilépő elektronok száma *kisebb*, mint a becsapódóké, akkor egy szigetelő az elektronoktól *negatívra* töltődik fel; ez következett be az idézett katódsugárcső-kísérletekben. A jelen esetben alkalmazott kb. 40 kV feszültségű elektronok a parafinból a becsapódóknál *több* szekundér elektront váltanak ki: a parafin *pozitív* töltést nyert. A lemez hátát borító fémlemezen tehát e pozitív töltés által influált, *negatív* töltés ül; ahol ennek erővonalai az elülső felületen át kilépnek, vagyis az árnyékban volt, töltésmentes helyeken, a fémfegyverzetnek negatív töltése által vonzatva (l. a 3. ábrát) odatapad a lykopódium s így jön létre a pozitív kép. Negatív töltésű por természetesen a besugárzott, pozitív töltésű helyekre tapadna; ebből következik, hogy egy ilyen elektromos töltésekkel felrajzolt képet tetszésünk szerint pozitív vagy negatív kép alakjában hívhatunk elő, amint erre egyébként már fent idézett közleményeimben rámutattam.



3. ábra. Elektrografikus feljegyzés töltés- és erővonaleloszlása
sz = szigetelő lemez
f = fémfegyverzet

Itt csupán még azt kívánom felemlíteni, hogy az elektrografikus feljegyzési eljárást a távolbalátás területén is a biztos siker reményében lehetne felhasználni, kivetíthető képek előállítására, — a „távmozi" megvalósítására — oly módon, hogy a felfogott képet katódsugárral (vagy „Lénárd-sugárral") mozgó szigetelő-szalagra felrajzoltatjuk, beporzással előhívjuk, kivetítjük, letöröljük és az egész eljárást egyazon végnélküli szalagon folytonosan megismételjük. Részletesebben e lehetőséget a fentebbi, 12 alatt idézett közleményemben fejtettem ki. Az eljárás hasonló lenne a közismert „Zwischenfilm" eljáráshoz, avval a két lényeges különbséggel, hogy míg ott az előhívási időt kb. 45 mp. alá nem sikerült leszorítani, itt az előhívás 1 másodperc törtrésze alatt megtörténhet, továbbá, hogy az elektrografikus eljárás költsége a fényképezési eljárás költségéhez képest elenyészően csekély. Az elektronmikroszkóppal folytatandó kísérleteimet bizonyos értelemben ilyen irányú előtanulmányoknak is óhajtom tekinteni.

Az itt leírt kísérleteket a *Magyar Tudományos Akadémiának* az *Eötvös Loránd Tudományegyetemen* elhelyezett elektronmikroszkóp-laboratóriumában végeztem. A laboratórium vezetőjének, *Gerendás Mihály* kartársnak és munkatársainak szíves segítségükért e helyen is őszinte köszönetet mondok.

Budapesti Eötvös Loránd Tudományegyetem
Fizikai Intézete.

IRODALOM

[1] ZS. f. Phys. *47,* (1928), 895.
[2] ZS. techn. Phys. *9,* (1928), 451.
[3] ZS. techn. Phys. *10,* (1929), 486.
[4] Elektrotechnika, (1930), 63.
[5] Elektrotechnika, Numero festival, 1931. nov. 15.
[6] Az Egyesült Izzó nevére szóló magyar szabadalom: 97970 sz. „Eljárás és berendezés gyors lefolyású jelenségek időbeli lefolyásának katódsugarakkal való regisztrálására és rögzítésére."
[7] U. S. A. Patent Nr. 1, 818, 760, Paul Selényi, Process and Apparatus for Drawing Electrical Pictures; 1931. aug. 31., magyar és osztrák elsőbbsége 1928. febr. 1.
A történeti hűség kedvéért legyen szabad itt megemlítenem, hogy a ma széltében használt „storage-tube" vagy „memory-tube"-ok elvét: „jelek"-nek villamos töltésekkel való feljegyzését és elraktározását, e szabadalmakban elsőként én fektettem le és az említett katódsugár-csővel meg is valósítottam.
[8] E. T. Z., *56,* (1935), 961.
[9] ZS. techn. Phys. *16,* (1935), 607.
[10] ZS. techn. Phys. *17,* (1936), 487.
[11] Elektrotechnika, (1936), 173.
[12] Wireless Engineer, XV. (1938), 303.
[13] Journ. Appl. Phys. V. (1938), 637.

[14] Elektrotechnika (1939), 153.

[15] E. u. M. *55,* (1937), 122. (mit *S. Keresztes*)

[16] 113, 675 sz. magyar szabad., U. S. A. Patent Nr. 2, 143, 214, továbbá nyolc darab, e kettővel lényegben azonos külföldi szabadalom.

E találmány egyébként külföldi szakkörökben élénk érdeklődésre talált. Erről tanúskodik *dr. Zworykin, Prof. Schröter, Prof. Karolus* és *dr. Knoll* látogatása a Tungsram kutatólaboratóriumban, 1936. febr. 29-én, amit *Zworykin* a következő évben megismételt. (ld: „Rádió és Villamosság" VI. évf. 3. sz. 1936. márc., 10—11 old.)

[17] *M. Suzuki* and *Tsuji,* Journ. Inst. Electr. Eng. Japan, Vol. *56,* Nr. 8. 1936.

EÖTVÖS CSAVARÁSI MÉRLEGÉNEK ELEMI ELMÉLETE

SELÉNYI PÁL lev. tag

Előadta az 1951. február 19-én tartott osztályülésen

1. Bevezetés

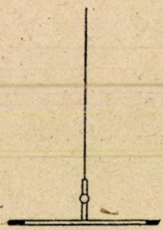
Eötvös Loránd az ő csavarási mérlegének elméletét két dolgozatában fejtette ki. Először 1896 évi általánosan ismeretes „Vizsgálatok a gravitáció és a mágnesség köréből" című alapvető, klasszikus dolgozatában[1,2] a potenciálelmélet és felsőbb mennyiségtan szokásos eszközeinek felhasználásával, elég szűkszavúan és a közbenső számítások kihagyásával. Természetesen egy ilyen dolgozat csakis a fizikusok szűkebb körében találhat megértésre. Evvel ellentétben a tágabb értelemben vett szakemberek nagyobb körének szánta *Eötvös* a torziós mérleg elméletének azt a kifejezését, amelyet a Balatonon végzett méréseiről szóló dolgozatában közöl,[3,4] s amelyben csupán a potenciálelmélet elemeit és elemi matematikai eszközöket vesz igénybe. Ez a nálunk is kevéssé ismert dolgozata a szakember számára valóságos üdítő csemege: Az olvasónak az az érzése, hogy egy türelmes, gondos vezető kényelmes kanyarokon vezeti fel a magaslatra, amelyet vezetője nehezebb utakon már régebben megjárt és ahol a terep minden zegét-zugát jól ismeri. Természetesen a felsőbb mennyiségtan mellőzése a matematikai fejtegetéseket hosszadalmasabbá teszi; amellett az egész elmélet kiinduló pontja, hogy t. i. a nehézségerőnek a nívófelület érintősíkjába eső komponensei a koordináták lineáris függvényei, a matematikailag nem képzett olvasó számára nem egészen magától értetődő. — Az elméletnek idegen tollból eredő kifejtéseiben semmi újat nem találunk, sőt például *K. Jung*nak a Handb. d. Experimentalphysik XXV/3 kötete 52—67. oldalán közölt tárgyalása felesleges sallangjaival: a nehézségerő „nem hatásos" összetevőinek részletezésével inkább megnehezíti, mintsem megkönnyíti a megértést.

Ennek előrebocsátása után és az imént használt hasonlattal élve, meg szeretném mutatni, hogy igenis van egy utacska, amely fáradság nélkül, könnyen és egyenesen vezet a célhoz; másszóval, hogy *Eötvös* csavarási mérlegét a legrövidebb idő alatt mindenkivel meg lehet értetni, aki a fizika elemeiben járatos. Remélem, hogy az igényesebb olvasó az ehhez igazodó tárgyalási módot elnézéssel fogja követni.

2. A görbületi variometer

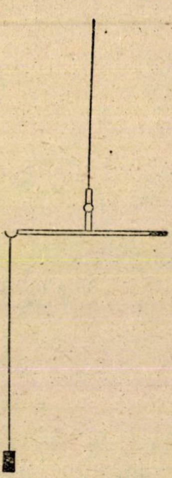
Ismeretes, hogy *Eötvös* gravitációs vizsgálataihoz kétféle csavarási mérleget szerkesztett. Az egyik, az ú. n. görbületi variometer alakjára azonos a *Coulomb*-mérleggel, vagyis vékony fémhuzalon függő vízszintes rúdból és ennek végeire erősített két egyforma tömegből, pl. platina-súlyból áll (l. az 1. ábrát). — A másik, az ú. n. horizontális variometer, ettől abban különbözik, hogy az egyik súly a rúd végén, a másik a rúd végére erősített huzal végén, tehát mélyebben van elhelyezve l. a 2. ábrát).

Meggondolásainkat a görbületi variometerrel kezdjük. Ez — hogy egy szóval kimondjuk — a Föld alakjának a gömbtől való eltérését mutatja ki és méri meg. Ehhez az eredményhez a következő úton jutunk el. Tegyük fel, hogy a Föld (a tenger színe) szigorúan gömbalakú s helyezzük el a Föld bármely pontjára mérlegrudunkat, vagyis két végén két egyenlő tömeget hordozó rudacskát, amely azonban nincs huzalra függesztve, hanem — iránytű módjára — a közepén csúcsra van helyezve és akörül súrlódás nélkül foroghat (l. a 3. ábrát). Miután eközben a súly a Földtől állandóan egy magasságban marad, vagyis a nehézségerő sem pozitív, sem negatív munkát az elforduláskor nem végez, világos, hogy a rúd bármely azimutba állítva, ott marad: szerkezetünk a gömbalakú Földön közömbös egyensúlyi állapotban van.



1. ábra
A görbületi variometer

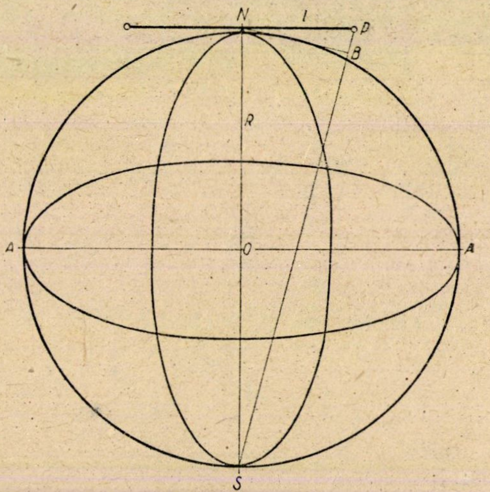
Vizsgáljuk meg most szerkezetünk viselkedését a valóságos Földön, amely nem gömbalakú, hanem belapult, amint azt a szemléletesség kedvéért igen erősen túlzott mértékben a 4. ábrán feltüntettük. Világos, hogy az északi vagy a déli sarkon egyensúlyi állapota ugyancsak közömbös lesz; elfordulás közben a súlyok se nem közelednek a Földhöz, se nem távolodnak attól, mivel a belapult Föld meridiánjai is egybevágóak, más szóval, mivel a két sarok a forgási ellipszoidnak ú. n. szférikus pontja, vagyis minden normálmetszet görbületi sugara ugyanakkora (R_p). — Másként áll azonban a dolog az egyenlítőn. Ott a meridián görbületi sugara (R_M) kisebb, mint az egyenlítőé (R_A) a kettő viszonya ábránkon kb. 1 : 2. Már pedig a súlyoknak a Föld felszínétől való távolságát éppen a görbületi sugár szabja meg, nevezetesen a távolság annál kisebb, minél nagyobb a görbületi sugár, amint ezt az 5. ábra külön is szemlélteti. Ennélfogva ha a rúd az észak-déli irányból a kelet-nyugati irány felé fordul el, a nehézségerő *pozitív* munkát végez: szerkezetünk az egyenlítőn nem lesz *közömbös* egyensúlyi állapotban, hanem a meridiánmenti *labilis* helyzetből igyekszik beállani az egyenlítő irányába, ahol az egyensúly *stabilis.* — Ha a mérlegkar nincsen súrlódásmentesen alátámasztva, hanem bármilyen finom, de mégis bizonyos csavarási, — irányítónyomatékkal rendelkező szálra van felfüggesztve, akkor a mérlegkar természetesen nem tud az egyenlítő irányába vagy általában, a nagyobb görbületű főmetszet irányába beállani, hanem ahhoz



2. ábra
A horizontális variometer

közeledni igyekszik addig, míg a nehézségerő okozta forgatónyomaték a huzal megcsavarodásából eredő, ellenkező irányú csavarási nyomatékkal egyensúlyba nem jut.

Ez a görbületi variometernek egyszerű magyarázata, talán szabad állítanom: fizikai lényege. Nehéz elképzelni, hogyan maradhatott ez rejtve *Eötvös* mélyen járó analizáló elméje előtt; tény azonban, hogy e magyarázatot sem nála, sem más szerző írásaiban nem találtam.*



3. ábra. A gömbalakú földön az N csúcs körül szabadon forgó l mérlegkar közömbös egyensúlyban van

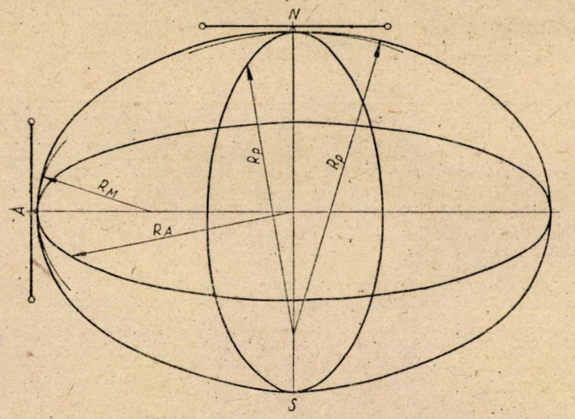
A fenti gondolatmenetet tovább fűzve, könnyü dolog a görbületi variometer elméletét kvantitatíve is kifejteni. Legyen (l. a 3. ábrát) l a mérlegkar félhossza, R a Föld sugara (pontosabban: a nívófelület szóbanforgó normálmetszetének görbületi sugara), akkor a mérlegrúd P végpontjának a Földtől való távolsága (magassága)

$$h = l^2/2R. \qquad (1)$$

(Ez következik az NBP és az SNP háromszögek hasonlóságából, ahol az NB ívet az NB húrral azonosíthatjuk.) Eszerint a mérlegkar két végén lévő $2m$ tömeg súlyánál fogva

$$U = mgh = mgl^2/R \qquad (2)$$

helyzeti energiával rendelkezik. Látnivaló, hogy ez annál kisebb, minél nagyobb R. Miután pedig minden mechanikai rendszer a kisebb ener-



4. ábra. A belapult Föld északi és déli sarkán a mérlegkar közömbös egyensúlyban van; az egyenlítőn ennek síkjába törekszik befordulni

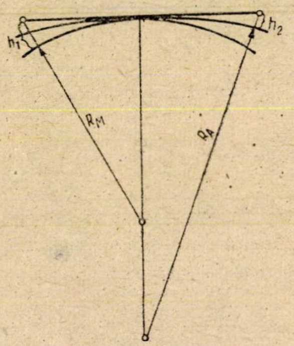
* Ez a magyarázat lényegében azonos azzal, amit még 1948-ban az egyetemen, később „Az Eötvös-mérleg fizikája és matematikája" címen az Eötvös Loránd Fizikai Társulatban előadtam és Eötvös összegyüjtött munkáinak nyomás alatt álló kiadásában két rövid lábjegyzet formájában közöltem, azzal a különbséggel, hogy akkor fejtegetésemben a nehézségerő nívófelületének fogalmából indultam ki. Közben rájöttem, hogy még erre sincs szükség; elegendő, ha egyszerűen a Föld „alakjáról" beszélünk. Ezt mindenki megérti, másrészt a hozzáértő úgyis tudja, hogy ezen a nehézségerő ekvipotenciális felülete (nívófelülete) értendő.

giájú állapot felé igyekszik, ebből következik, hogy a mérlegrúd valóban a legnagyobb görbületi sugarú (legkisebb görbületű) irányba, tehát pl. a valóságos, belapult Föld egyenlítőjén a meridionális helyzetből a kelet-nyugati irányba igyekszik befordulni. A nehézségerő eközben (2) értelmében

$$L = U_2 - U_1 = mgl^2(1/R_M - 1/R_A) \tag{3}$$

munkát végez. Ebből az $\bar{F}$ *közepes* forgatónyomatékot a mechanika elemi szabálya értelmében megkapjuk, ha a munkát az elfordulás szögével osztjuk, vagyis

$$\bar{F} = \frac{2}{\pi} mgl^2(1/R_M - 1/R_A) = \frac{K}{\pi} g(1/R_M - 1/R_A), \tag{4}$$



5. ábra. A súlyok közelebb kerülnek a Földhöz, (a h_1 távolság h_2-re csökken) ha a kar a nagyobb, R_M görbületű irányból a kisebb R_A görbületűbe fordul el. (Az utóbbit a papír síkjára *merőlegesnek* kell elképzelnünk.)

ahol $K = 2ml^2$ a mérlegrúd tétlenségi nyomatékát jelenti. Ekkora forgatónyomaték hat a rúdra valahol a két említett helyzet közötti *közepes* állásban. Más helyzetben természetesen a forgatónyomaték is más és más és *Eötvös* balatoni dolgozatának lényeges tartalma éppen az, hogy a forgatónyomatéknak az azimuttal való változását csupán elemi matematikai segédeszközök felhasználásával állapítja meg. Az analitikai mechanika és felsőbb mennyiségtan elemeit is igénybe véve, természetesen hamarább célhoz jutunk:

Legyen α a rúd pillanatnyi azimutja, akkor a reá ható forgató nyomaték

$$F = -\frac{dU}{d\alpha} = -mgl^2 \frac{d}{d\alpha}(1/R). \tag{5}$$

Legyen továbbá r_1 és r_2 a nívófelület illető pontjának két főgörbületi sugara, akkor *Euler* közismert tétele szerint

$$1/R^2 = \cos^2\alpha/r_1 + \sin^2\alpha/r_2 \tag{6}$$

s ezt (5)-be téve és a differenciálást elvégezve, rögtön nyerjük *Eötvös* balatoni dolgozata (11) képletével egyezésben, hogy

$$F = -mgl^2(1/r_1 - 1/r_2)\sin 2\alpha = -\frac{1}{2} K\mathbf{R}\sin 2\alpha, \tag{7}$$

ahol α a mérlegkar azimutja, azonban nem tetszésszerinti iránytól, hanem a kisebb görbületű főiránytól számítva, $\mathbf{R} = g(1/r_1 - 1/r_2)$ pedig az *Eötvös* által vízszintes irányítóképességnek nevezett mennyiség.

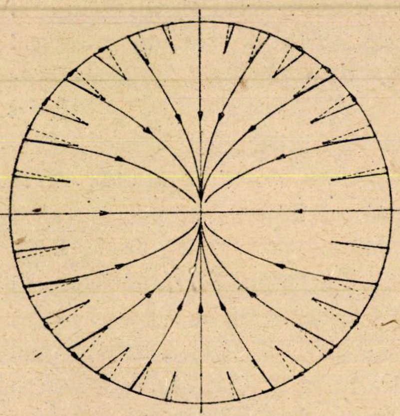
E képlet értelmében tehát a forgatónyomaték a mérlegrúd azimutjának változtatásakor egyszerű sinus-törvény szerint, nevezetesen az elforgatási szög kétszeresének sinusa szerint változik: egy teljes körülforgás alatt tehát kétszer, t. i. a két főgörbületi irányban zérus lesz s azokon áthaladva előjelét változtatja.

Nevezetes dolog már most, hogy ehhez a tisztán *fizikai-energetikai* meggondolásból nyert eredményhez tisztán *matematikai* meggondolással is el lehet jutni. A felületelméletből ismeretes ugyanis, hogy ha egy felület valamely pontjának normálisán (a főnormálison) át különböző irányú normálmetszeteket fektetünk és egy-egy ilyen metszetben a főnormálistól jobbra-balra normálisokat emelünk, e normális-párok közül csupán kettő, nevezetesen a két főirány mentén emelt egy-egy pár fekszik benn *egy* síkban, t. i. éppen a főirányok síkjában. Minden egyéb irányban e két átellenes normális nem fekszik bent a normálmetszet síkjában, hanem abból előre-hátra kilép, vagyis egy-egy kitérő egyenespárt alkot. Ha a szóbanforgó felületen a nehézségi erő nívófelületeit értjük, akkor a felületi normálisok — hosszúságukat a mindenkori g-vel egyenlőnek téve — a nehézségerőt képviselik. Az említett két átellenes normális tehát a rúd két végére ható nehézségerőt, vagyis a rúdra ható erőpárt jelenti és a normális-párokra vonatkozó fenti *geometriai* tételből rögtön következik a fenti *fizikai* megállapítás, hogy a rúdra ható forgatónyomaték zérus a két főirányban, valamint — részletesebb felületelméleti meggondolások szerint az is, hogy e forgatónyomaték sin 2α szerint változik és olyan irányú, hogy a rudat a kisebb görbületű főirányba igyekszik beforgatni.[5] Egyúttal azonban megértjük azt is, amire a fenti *energetikai* meggondolás nem ad felvilágosítást, hogy t. i. honnan erednek, mik azok a vízszintes erők, amelyek a mérlegrudat forgatják? Nem egyebek ezek, mint a rúd két végére ható nehézségerőnek a *főérintősíkra* való vetületei, amik — a fentiek értelmében — a két főirányban magába a rúdnak irányába esnek, — tehát forgatónyomatékuk zérus, — minden más irányban azonban egy-egy, a rúdra merőleges összetevőt is tartalmaznak, vagyis egy-egy vízszintes erőpárt hoznak létre.

Eötvös balatoni dolgozatában éppen a nehézségerőnek ezekből a vízszintes síkban — az érintősíkban — fellépő komponenseiből indul ki. A számbajövő területen — a két arasznyi mérlegrúd mozgási területén belül ez erőket egyenletesen változónak feltételezve, az észak-déli, illetve a kelet-nyugati összetevőt $X = ax + a_1 y$ és $Y = by + b_1 x$ alakban írja fel s e feltevésből azután egyszerű fizikai meggondolásokkal és csupán az elemi matematika felhasználásával magát az Euler-tételt is és a (7) egyenletet is levezeti, s végül a szóbanforgó erőkomponenseket, amelyek a vízszintes síkban lépnek fel és a rúd elfordulását létrehozzák, az erővonalak felrajzolásával is szemlélteti.

A következő 6. ábra azonos *Eötvös* idézett dolgozatának 12. ábrájával — csupán az erők irányát jelző nyilakkal egészítettük ki —, és arra az esetre vonatkozik, midőn a nehézségerő nívófelületének két főgörbületi sugara nem egyenlő. A mérlegrúd középpontját (a felfüggesztő szálat) a kör középpontjába kell gondolnunk; a kar végein lévő két súly tehát a kör kerületének két átellenes pontjában foglal helyet. Mint látható, a két főirányban az erővonalak a központ felé irányuló egyenesek; minden egyéb irányban azonban parabolaszerű görbék, úgy, hogy a két súlyra ható erőknek van egy érintőleges összetevője, amely legnagyobb a kar 45°-os azimutjában és minden helyzetben olyan irányú, hogy a kart a kisebb görbületű főirányba igyekszik beforgatni. Ha a két főgörbületi sugár — s velük együtt természetesen a többi is — mind egyenlő, akkor az erővonalak mind sugármenti egyenesek, mivel — mint azt könnyű belátni — a mindenhelyi nehézségerőnek az érintősíkra való vetületei mind a központ felé irányulnak, tehát érintőleges komponens nincs és a mérlegkarra nem hat forgatónyomaték.

A fentiekben feltételeztük, hogy a főgörbületek *iránya* ismeretes; hiszen α az attól mért azimutot jelenti. A valóságban ez persze nem áll, azonban a részletesebb, matematikai elméletből kiderül, hogy ha az eszközt, pl. az észak-déli irányból kiindulva ismert szögekkel (célszerűen 360°/3 vagyis 120°-kal) el-elforgatjuk és a rúd elcsavarodását a házához képest e különböző azimutokban tükör és skála segélyével leolvassuk, akkor *három* ilyen mérésből mind az **R** mennyiség, mind pedig a kisebb görbületű főiránynak az észak-déli iránnyal bezárt λ szöge meghatározható, egyúttal pedig a harmadik ismeretlen, a rúdnak, illetve a felfüggesztő huzalnak meg nem csavart helyzetéhez tartozó skála-leolvasás kiküszöbölhető.



6. ábra. Erővonalak a nehézségerő nívófelületének érintősíkjában, ha a két főgörbületi sugár egymástól különböző nagyságú

Végül megemlítjük, hogy a felsőbb mennyiségtan nyelvén szólva, az Eötvös mérleg köztudomásúlag a nehézségerő U potenciálja második differenciálhányadosainak meghatározására szolgál. A nívófelületet jellemző **R** és λ mennyiségek ezekkel a következő kapcsolatban állanak:

$$\mathbf{R} = g(1/r_1 - 1/r_2) = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \tag{8}$$

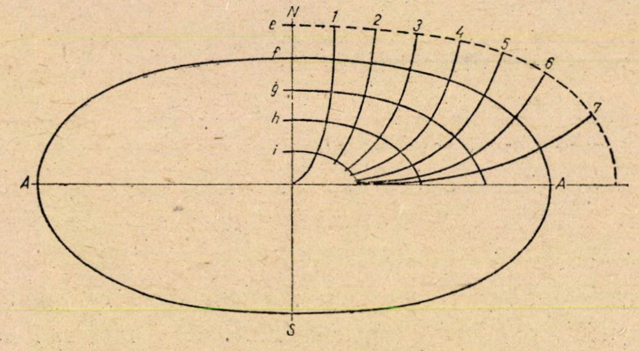
$$\operatorname{tg} 2\lambda = 2 \frac{\dfrac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}}{\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2}}. \tag{9}$$

3. A horizontális variometer

A belapult Földön a nehézségi erőviszonyok a gömbalakú Földétől abban is különböznek, hogy míg az utóbbin a nehézségerő *nagysága* mindenütt ugyanaz, addig az előbbin a g értéke csupán egy-egy párhuzamos kör mentén állandó, ellenben az egyenlítőtől a sarkok felé haladva, egy-egy meridián mentén értéke állandóan *növekszik*. Ez a növekedés két okból származik: A nehézségerő, a testek súlya, a Föld vonzásának és a Föld forgásából származó centrifugális erőnek eredője; a sarkok felé haladva egyrészt *nő* a vonzóerő, mivel közelebb jutunk a belapult Föld középpontjához, másrészt *csökken* a centrifugális erő egészben is és még külön is annak a vonzással ellentétes irányú összetevője. Azonban az egész változás *igen* csekély; g „normális" értéke az egyenlítőn 978 CGS, a sarkokon 983,2 CGS és a centiméterenkénti változás, a *grádiens* pl. a 45° szélesség táján mindössze $8{,}1 \cdot 10^{-9}$ dyn/cm, vagyis a g-nek kereken 10^{-11}-ed része. Eszerint ha pl. a 20 cm hosszú mérlegrudat észak-déli irányba állítva, 180°-kal elforgatjuk, a rúd két végén lévő tömeg súlyának mindössze $2 \cdot 10^{-10}$-ed részével lesz könnyebb illetve nehezebb, mint az első állásban volt. Ilyen nagyságrendű *súlyváltozás*nak kimutatása egészen reménytelen feladatnak látszik. Ennek ellenére a horizontális variometer éppen ennek a nívófelület mentén jelentkező rendkívűl csekély grádiensnek kimutatására és mérésére szolgál.

A meghatározás, illetve a horizontális variometer szerkezete *Eötvös*nek azon az *alapvető* felismerésen alapszik, hogy a nehézségerő *nagyságának* a nívófelület *mentén* való változása elválaszthatatlanul össze van kötve az erő *irányának*, tehát a „függőleges" (és a „vízszintes") iránynak változásával a nívófelületre *merőleges* haladási irányban. Más szóval: *inhomogén* erőtérnek mind a nívófelületei, mind pedig az erővonalai *görbék*, amint ezt a 7. ábra szemlélteti. Itt f jelenti a Föld felületét, mint nívófelületet, g, h, i és e pedig a nehézségerő nívófelületeit a Föld belsejében, illetve afelett, 1, 2, 3,... stb. pedig az erővonalaknak a nívófelületekre merőleges rendszerét. Látni való, hogy a nívófelületek a sarkoktól az egyenlítő felé haladva egymástól fokozatosan távolodnak, ami következik a potenciál definíciójából eredő $g \cdot h = g' \cdot h'$ egyenlőségből (ahol g és g' a nehézségerő értéke a nívófelület két pontjában, h és h' ugyanott a két szomszédos nívófelület egymástól való távolsága), az erővonalak pedig ennek következtében a Föld középpontjából kifelé haladva a Föld tengelye felé hajlanak el.

Gondoljuk már most a horizontális variometert pl. a 45° szélesség táján, rúdjával a kelet-nyugati irányban, vagyis a papiros síkjára merőlegesen



7. ábra. A belapult Föld nívófelületei és erővonalai

elhelyezve úgy, hogy a rúd *végén* lévő platina-henger az e—3 pontban, a lelógó henger pedig az f—3 pontban (helyesebben 20 cm-rel, a rúd hosszával, előtte) legyen. Látni való, hogy a két hengerre ható nehézségerők *iránya* különböző — lévén a 3 erővonal görbe, — ennélfogva a rúdra forgatónyomaték fog hatni, amely a rudat az észak-déli irányba igyekszik beforgatni. *Eötvös* gondolatmenetét követve, az erőviszonyokat még másképpen is lehet kifejezni: Ha pl. az e nívófelületen 1 cm-rel *vízszintesen* odébb haladva 4-ből 3-ba megyünk, a nehézségerő *nagysága* a fenti egyenlőség értelmében megnő — lévén az $f3$ távolság kisebb az $f4$-nél, — vagyis a g nehézségerőhöz egy *függőleges* komponens, a *grádiens* (*Eötvös* jelölése szerint: $Gr(g)$) járul hozzá. Ez azonban olyan kicsiny, hogy mint *súlyváltozást* kimutatni lehetetlen. Ha ugyanott 1 cm-rel *lefelé* haladva az e nívófelületről az f-re megyünk át, a nehézségerő *iránya* változik meg igen kicsiny ε szöggel, ami egyértelmű azzal, hogy az $e3$-ban működő g erőhöz egy északnak irányított $g.\varepsilon$ nagyságú *vízszintes* összetevő járult hozzá. Ezt azonban megmérhetjük, hiszen vízszintes erőkre a csavarási mérleg hihetetlenül érzékeny. Amellett a szóbanforgó két erőnövekmény között a legegyszerűbb kapcsolat áll fenn: a kettő számértéke egymással egyenlő.

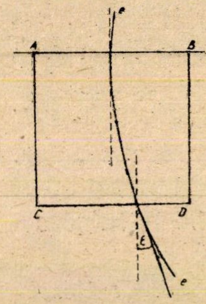
Ezt *Eötvös* idézett balatoni értekezésében az ottani 4. ábra segélyével, amelynek az itt közölt 8. ábra hű másolata, a következőképpen mutatja ki:

„Jelentse egy függőleges átmetszetet előtüntető rajzunkban A és B a nívófelületeknek a gradiens irányába eső két pontját (4. ábra). Legyen e pontok egymástóli távolsága 1 centiméter és a nehézség A-ban $= g$ s így B-ben $= g + Gr(g)$. Alkossuk az $ABCD$ derékszögű négyzetet s húzzuk meg az e—e erővonalat, mely görbe lévén ha AB-t merőlegesen metszi, úgy CD-én át e merőlegestől ε-nal eltérő szöglet alatt halad. Eszerint az erőnek vetülete AB út mentén nulla, CD út mentén azonban $g\varepsilon$ lesz s a tömegegység elmozdulásánál végzett munka A-tól B-ig s onnét D-ig

$$g + Gr(g),$$

ellenben a megfelelő munka A-tól C-ig s onnét D-ig

$$g + g\varepsilon.$$



8. ábra
Eötvös balatoni értekezésének 4. ábrája a $Gr(g) = g.\varepsilon$ egyenlőség levezetéséhez

Tudva, hogy a munka független az úttól,

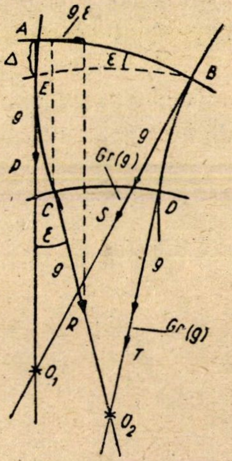
$$g + Gr(g) = g + g\varepsilon \tag{10}$$

s így

$$Gr(g) = g\varepsilon. \tag{11}$$

Azaz: a nehézség gradiense valamely nívófelületben egyenlő az égy centiméterrel alatta fekvő pont nehézségének vetületével e nívófelületre, vagy pontosabban szólva, annak érintő síkjára."

Ez a bizonyítás, ámbár hibátlan és helyes eredményhez vezet, fizikai szemléletünket még sem elégíti ki. Mi a fizikai jelentése az $ABCD$ négyzetnek? Ha AB a *nívófelület* egy darabja, akkor a reá *merőleges* AC és BD egyenesdarabokat jóhiszeműen *erővonalak*nak és a mindkettőre merőleges CD-*t* a szomszédos *nívófelület* egy darabjának vélnők. Azonban ez nincsen így, hiszen az $e—e$ erővonal nem merőleges CD-re. Továbbá: miért ábrázolhatjuk a nívófelület 1 cm hosszú darabját az AB *egyenessel*, holott az ugyancsak 1 cm hosszú ee erővonalat *görbe* vonallal ábrázoljuk. Ezeknek az ellentmondásoknak az a megoldása, hogy ha egy görbesereg *görbületi viszonyait* kívánjuk taglalni, akkor az illető görbék figyelembe vett legkisebb darabjait *körívekkel* és nem *egyenes* darabokkal kell ábrázolni. Ennek értelmében a fenti ábrát úgy kell átrajzolni, amint az a 9. ábrán látható. Az ábrán, amelyen a görbületi viszonyokat a szemléletesség kedvéért igen-igen túlozva tüntettük fel, az O_1 középpont körül rajzolt AB ív és az O_2 középpont körül rajzolt CD ív a nehézségerő két szomszédos nívófelületének egy-egy elemi darabja; AC és BD a reájuk merőleges két szomszédos erővonal. A papiros síkja legyen az a sík, amelyben a nehézségerő fentebb említett vízszintes gradiense fekszik (tehát a forgási ellipszoid alakú Föld esetén valamelyik délkör) s legyen $AB = BD = 1$ cm. Ha az A pontban a nehézségerő értéke g, akkor B-ben az értéke $g + Gr(g)$. Ha viszont A-ból 1 cm-rel lejjebb, a C pontba megyünk, az erő *iránya* változik meg az igen kicsiny ε szöggel, úgy hogy g-nek AB-re való vetülete, vagyis a g-hez járuló *vízszintes összetevő* értéke $g\varepsilon$ (l. a 9. ábrát). Rajzoljuk meg a CD-vel párhuzamos BE ívet; a kettő közti szög ugyancsak ε (minthogy $AB \perp AP$-re és $CD \perp CR$) továbbá az $AE = \Delta$ jelölést bevezetve és *Eötvös* bizonyítását követve írjuk fel, hogy a nehézségerő munkája az $A—B—D$ úton és az $A—C—D$ úton ugyanakkora. Lesz:



9. ábra. Inhomogén nehézségi-tér kicsiny része és azon az erőviszonyok

$$0 + 1\cdot(g + Gr(g)) = (1 + \Delta)\cdot g + 0, \tag{12}$$

s ebből

$$1\cdot Gr(g) = \Delta\cdot g \tag{13}$$

vagyis

$$Gr(g) = g\cdot\frac{\Delta}{1}. \tag{14}$$

Azonban az ábra szerint $\frac{\Delta}{1} = \operatorname{tg}\varepsilon = \sin\varepsilon = \varepsilon$, tehát

$$Gr(g) = g\cdot\varepsilon, \tag{15}$$

ami bebizonyítandó volt. E szerint, ha a csavarási mérlegen az egyik súlyt H cm-rel mélyebbre helyezzük, a rúdra a fenti F forgatónyomatékon kívül még egy, a H-val és $Gr(g)$-vel arányos F' forgatónyomaték is fog működni. Ez a horizontális variometer elvének lényege. Legyen G_x és G_y a $Gr(g)$ vektor két összetevője és α a mérlegrúd azimutja, vagyis az X tengellyel bezárt szöge, akkor e forgatónyomaték:

$$F' = -mHlG_x \sin\alpha + mHlG_y \cos\alpha, \tag{16}$$

és a rúdra ható egész forgatónyomaték $\Phi = F + F'$. Miután F'-ben kettő az ismeretlenek száma, ennélfogva a mérésnél úgy kell eljárnunk, hogy az eszközt 5 különböző azimutba állítjuk, a rúdra ható forgatónyomatékot a drót elcsavarodásából meghatározzuk s ebből mind **R**-t és λ-t, mind pedig a gradiens nagyságát és irányát is kiszámíthatjuk.

A potenciálelméletre gondolván, a G_x és G_y mennyiségek jelentése is közvetlenül világos. Nem mások ezek mint az U nehézségi potenciál második differenciálhányadosai, nevezetesen

$$G_x = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} \quad \text{és} \quad G_y = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z}.$$

Azonban

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) \\ \text{és}\quad \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right). \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

S ha ehhez még hozzáfűzzük, hogy $\frac{\partial U}{\partial z} = g$, akkor a $\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}$, $\frac{\partial^2 U}{\partial z \partial z}$ mennyiségek e kétféle alakja is értelmezést nyer. A felsőbb mennyiségtan nyelvén a (17) alatti egyenletek egyszerűen a differenciálás sorrendjének felcserélhetőségét fejezik ki, potenciálelméleti vonatkozásban pedig *Eötvös*nek azt az alapvető felismerését tartalmazzák, hogy a *függőleges* erő nagyságának, a g-nek a *vízszintes* irány mentén jelentkező mérhetetlenül kicsiny változása helyett, vagyis a $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)$ és $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)$ helyett mérhetjük a nívófelület érintősíkjában fellépő *vízszintes* komponensnek változását a *függőleges* mentén, vagyis a velük egyenlő $\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)$ és $\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)$ mennyiségeket. Így lett *Eötvös* kezében a matematikából fizika. Azonban a $Gr(g) = g\varepsilon$ egyenlőségnek *Eötvös*től származó fenti elemi levezetése klasszikus példa arra is, hogy egy fizikai elvből, a munkának az úttól való függetlenségéből, hogyan lehet egy matematikai tételt, a differenciálások sorrendjének felcserélhetőségét leszármaztatni. A matematikának és fizikának erre az egymásba fonódására már fentebb is rámutattunk, midőn a görbületi variometernek *Eötvös*től eredő elemi tárgyalását ismertettük.

Azt is mondhatnók, hogy *Eötvös* csavarási mérlege sajátságos „matematikai-fizikai" műszer: működése a differenciálszámítás és a differenciál-geometria néhány egyszerű tételén alapszik. S talán nem tévedünk, ha részben ebben keressük az Eötvös-mérleg sajátos varázsát, aminek *Eötvös* a varázsvesszőről szóló hasonlatában olyan költői kifejezést ad és aminek a hatása alól senki, aki ez eszközzel csak egyszer is dolgozott, magát kivonni nem tudja.

Az Eötvös-mérleg további tárgyalása, nevezetesen annak ismertetése, hogy a mérések által szolgáltatott nyers adatokat hogyan kell a helyi befolyásoktól megszabadítani és a gyakorlati geofizikai kutatások számára értékesíteni, mind ennek tárgyalása meghaladná e dolgozat kereteit. E tekintetben elegendő az Eötvös emlékfüzetre illetve az Eötvös-emlékkönyvre és az ott közölt irodalmi forrásokra utalnunk.

Budapesti Eötvös Loránd Tudományegyetem
Fizikai Intézete.

IRODALOM

[1] Mat. és Term. Tud. Ért. *14* (1896), 221.

[2] Ann. d. Phys. u. Chem. Neue Folge *59* (1896), 354. Ezekkel tartalmilag majdnem azonos, viszont az elmélet kifejtésében még szűkszavúbb, de már laboratóriumon kívül, nevezetesen a Sághegyen végzett mérésekről is beszámol francianyelvű [Congrès Internat. .de Physique, Paris, 1900 t. III] és az evvel egyező magyarnyelvű (Mat. és Fiz. Lapok, *9* (1900), 361.) dolgozata.

[3] A Balaton nívófelületei s azon a nehézség változásai. A Balaton tudományos tanulmányozásának eredményei, I. *1.* Geofizikai függelék, 1908. Kilián F., bizománya.

[4] U. e. németül: Resultate der wissenschaftlichen Erforschung des Balaton I. *1* Geophysikalischer Anhang, Wien, 1908, in Commission von Ed. Hölzel.

[5] Utólag jöttem rá, hogy e magyarázat már *Tangl Károly*nak az Eötvös-emlékfüzetben írt „Vizsgálatok a gravitációról" c. cikkében [Mat. és Fiz. Lapok *27* (1918), 136—146. fellelhető.

FOSZFORESZCENCIA SPEKTRUMOK

NAGY ELEMÉR és GERGELY GYÖRGY

Bemutatta Gyulai Zoltán lev. tag az 1951. június 11-én tartott osztályülésen

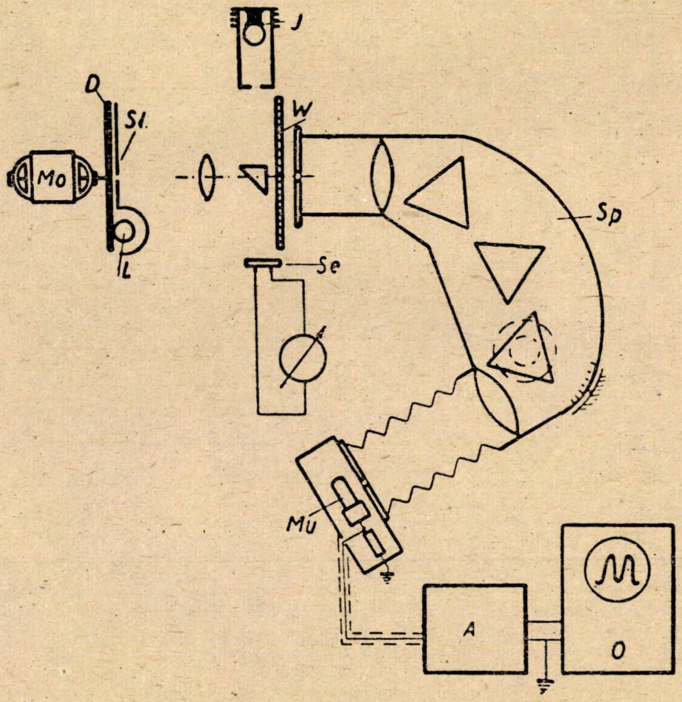
Szigeti, Nagy[1, 2, 3, 4], *Butler*[5] és *Shrader*[6] kimutatták, hogy a willemit emissziós színképe sávokra bontható fel.

Újabb vizsgálatainknál azt találtuk, hogy a foszforeszcencia utánvilágítási görbéje exponenciális komponensekre bontható, amelyek az anyag emissziós sávjaival függenek össze.

Foszforeszcencia spektrumok mérése forgótárcsás módszerrel

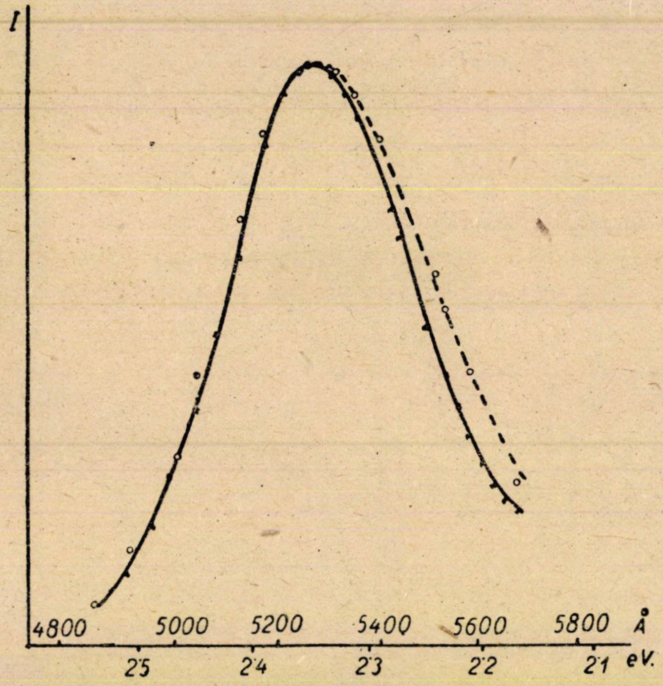
Méréseinknél a vizsgált lumineszkáló anyaggal tárcsát vontunk be. A tárcsát szinkronmotorral forgattuk, egy körülfordulás ideje 160 msec volt. Az első ábra mutatja a kísérleti elrendezést.

A színkép könnyen mérhető a foszforeszcencia folyamán, ha a foszforeszkáló forgótárcsa egy részét a spektrográf résére képezzük le. A gerjesztés



1. ábra
A mérés elrendezése, mellyel a színkép a foszforeszcencia alatt vizsgálható
Jelölések: Mo. szinkronmotor, L. higanylámpa, D. forgótárcsa, bevonva a mintával, Sl. rés, J. normállámpa, W. fénymoduláló tárcsa, Se. szelén fényelem, Sp. spektrográf, Mu. fotomultiplier, A. erősítő, O. oszcillográf

és a mérés között eltelt időnek megfelel az a szög a tárcsa kerületén, melyet a lumineszkáló anyag gerjesztett foltja és a leképzett tárcsa-rész határoznak meg. A foszforeszcencia spektrumokat pontról-pontra vettük fel, *Szigeti* és *Nagy*[1, 2, 3] félautomatikus módszerével. A fluoreszcens spektrumokat és foszforeszcens spektrumokkal összehasonlítva azt találtuk (2. ábra), hogy a sárga melléksávok teljesen eltűntek körülbelül 3 msec-mal a gerjesztés után. Ebből következik, hogy a melléksávok utánvilágításának exponensei nagyobbak, mint a fősávé.



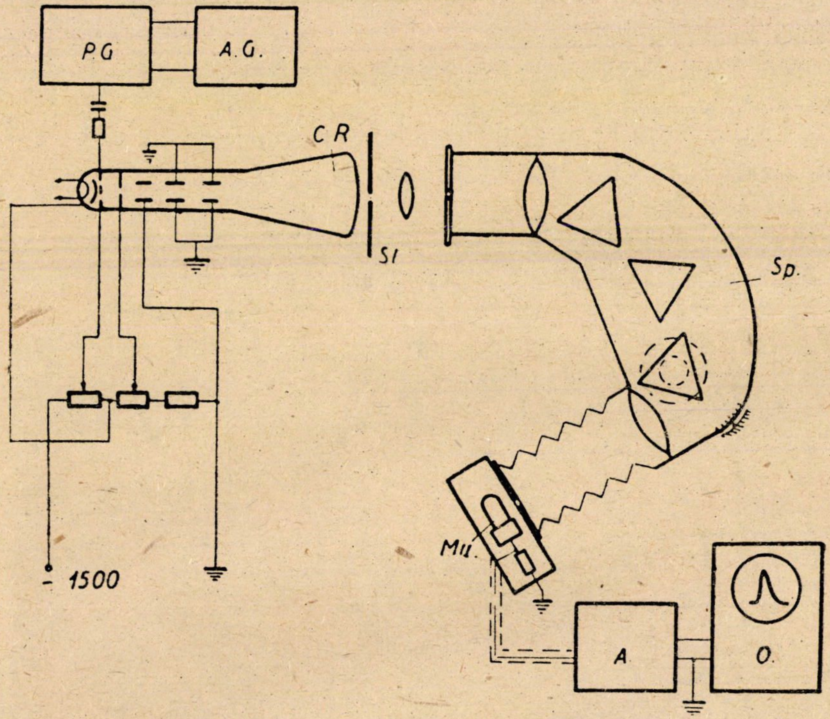
2. ábra
Willemit fluoreszcens és foszforeszcens emissziós színképek, egymásra rajzolva
Fluoreszcencia: —o—, foszforeszcencia: —x—.
A kék oldalak egybeesnek

Hasonló eredményeket tapasztaltunk katódsugárgerjesztés esetén is, a *Gergely*[7] közleményében leírt mérési elrendezéssel. Zöld és sárga szűrőket helyezve a katódsugárcső ernyője és a fotomultiplier közé, a leggyorsabb kialvási komponens eltűnt az utánvilágítási görbe kezdetén.

Foszforeszcencia egy színképsávban

Új kísérleti módszert dolgoztunk ki, mellyel közvetlenül meg lehet határozni az utánvilágítás leggyorsabb exponenciális komponensének helyét a spektrumban. A 3. ábra mutatja a mérés elrendezését.

Impulzusgenerátor (Orion SP 61221) impulzusai vezérlik azon katódsugárcső rácsát, melynek ernyőjén a vizsgált lumineszkáló anyag van. Ezen katódsugárcső ernyőjének lumineszkáló fényfoltját a spektrográf résére képezzük le. A spektrográfba bejutó fény fotomultiplier katódjára esik, mely egy rés mögé van felszerelve és azzal együtt a színkép tetszőleges részéhez állítható. A lumineszkáló fényfolt intenzitása változik a lumineszkálás felgerjedésének és utánvilágításának megfelelően. A multiplier munkaellenállásán fellépő jeleket három fokozatú, széles sávú erősítővel erősítettük és oszcillográffal (Orion SP 21011) vizsgáltuk.



3. ábra
A spektrálisan felbontott foszforeszcencia mérésének elrendezése. Jelölések: C. R. katódsugárcső a mintával. A többi jelölés megegyezik az 1. ábra jelölésével

Mivel a multiplier árama a ráeső fény intenzitásával arányos, a vizsgáló oszcillográf függőleges kitérései arányosak a lumineszkálás intenzitásával. Megfelelő vízszintes eltérítést alkalmazva, a teljes felgerjedési és utánvilágítási görbe látható az oszcillográfon.

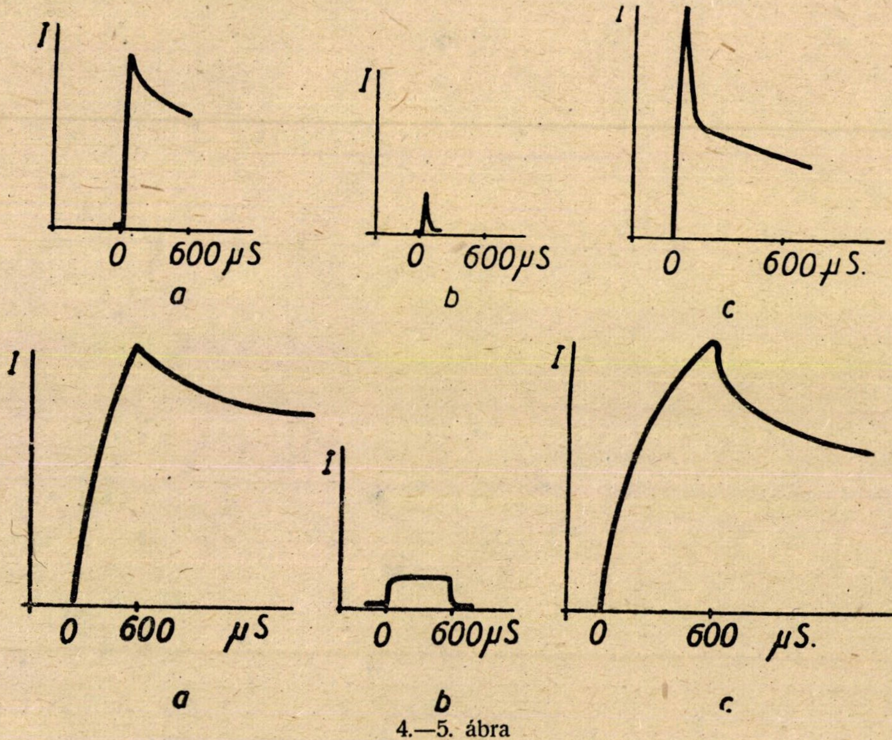
Ezzel az eljárással a felgerjedési és utánvilágítási görbe bármely hullámhosszon vizsgálható.

Ennek az új módszernek az alkalmazása jelentős haladást jelent, mivel ez a mérés azelőtt csak a teljes és nem a spektrálisan felbontott fénnyel volt csak elvégezhető.

Méréseinknél olyan rést használtunk, mely a spektrumból körülbelül 250 Å széles sávot vágott ki.

Mérési eredmények

A 0,05 msec gerjesztő impulzussal kapott mérési eredményeket mutatják a 4a., b. és c. ábrák. A 4a. ábrán a felgerjedési és utánvilágítási görbe olyan színképtartományban látható, melynek súlypontja körülbelül 5390 Å, tehát főleg a cinkszilikát fősávját tartalmazza, a sárga melléksávot alig. Az utánvilágítás tulnyomó részt lassú, mint azt a leglassúbb komponensnél tapasztaltuk a willemit foszforeszcenciájában. A 4b. ábra a kék sávnál, körülbelül 4600 Å-nél mutatja a mérés eredményét. Az itt mért utánvilágítási görbe nagyon meredek és megegyezik az utánvilágítás leggyorsabb komponensével. A teljes felgerjedési és utánvilágítási görbét mutatja a 4c. ábra. A nem felbontott spektrum felgerjedési és utánvilágítási görbéje tartalmaz egy igen gyors és egy lassú komponenst, melyek exponensei megegyeznek a foszforeszcencia spektrális felbontásánál kapott értékekkel. A 4c. ábra természetesen nem egyszerű összege a 4a. és 4b.-nek, mivel a leggyorsabb komponens sokkal szé-



4.—5. ábra
Felgerjedési és utánvilágítási görbék tetszőleges léptékben
4. Gerjesztési idő 0,05 msec
5. Gerjesztési idő 0,6 msec

lesebb spektrumsávú, mint a lassú, és így az egész sávnak sokkal kevesebb része jut a résre a 4b. esetben, mint a 4c. esetben.

Az 5a—c. ábrák ugyanezeket a méréseket mutatják 0,6 msec gerjesztési idő esetén. Itt is kimutatható, hogy a felgerjesztési és utánvilágítási görbe a színkép kék részében (5b. ábra) olyan alakú, mint a gerjesztő impulzus kis torzítással. Ez ismét rámutat arra a tényre, hogy a kékben lejátszódó jelenség igen gyors és elérte az egyensúlyi állapotot már jóval a gerjesztés befejezése előtt.

Ez az eredmény megegyezik régebbi méréseinkkel[7], melyek szerint a leggyorsabb komponens eléri az egyensúlyi állapotot körölbelül 25—30 μsec gerjesztés után. A jelen közleményben ismertetett méréseinknél 50 mikroszekundumnál rövidebb gerjesztő impulzusokat nem tudunk alkalmazni, mivel a spektrográf miatt a fény intenzitása nagyon erősen lecsökkent.

A mérési eredmények kiértékelése és taglalása előtt figyelembe kell venni a fotomultiplier spektrális karakterisztikáját. Vizsgálatainknál RCA 931A (S4 spektrális karakterisztika) és EMI 27 (hasonló spektrális érzékenység) fotomultipliereket használtunk. Ezeknek a fotomultipliereknek az érzékenysége a kék felé nő, míg a vörösben 6200 Å fölött majdnem teljesen érzéketlenek. Ezt a spektrális érzékenységet feltétlenül tekintetbe kell venni. Az összes eddigi közleményekben, melyek foszforeszcenciával foglalkoznak, ezt a tényt teljesen elhanyagolták. Ezeket a meggondolásokat problémánkra alkalmazva következik, hogy a lumineszkálás intenzitása a kékben viszonylag nagyobbnak látszik, mintha a mérést egy ideális multiplierrel végeztük volna, melynek spektrális érzékenysége független a hullámhossztól. A multiplier karakterisztikája miatt lehetetlen azt a pontosságot elérni a sárgában és a vörösben, mely a kékben és zöldben lehetséges volt.

Vizsgálatainkat mesterséges willemiten végeztük, mely 0,2% mangánt tartalmazott. A gyors komponens az utánvilágítási görbében jól észlelhető 0,3% mangántartalom alatt. Ez a kék komponens nem volt észlelhető nagyobb mangántartalomnál; 0,8% mangán tartalomnál pl. ezt a komponenst csak a teljes, spektrálisan fel nem bontott utánvilágítási görbében találtuk meg, és ott is csak igen kis amplitudóval.

A kék komponens fokozatosan háttérbe szorul növekvő mangán tartalommal. Egy olyan minta, melyhez szándékosan nem adtunk mangánt, de azt nyomokban tartalmazta (igen halvány zöld mangán emisszióval fluoreszkált ultraibolya gerjesztés alatt), katódsugár gerjesztés hatására széles spektrális sávban kékben fluoreszkált.

A forgótárcsás foszforeszcens spektrumméréshél nem találtunk lényeges, kétséget kizáró különbséget a kék oldalon a fluoreszcens és a foszforeszcens emisszió között. Ez a diszkrepancia könnyen magyarázható, mivel ebben az esetben a gerjesztés 30 msec volt, és ilyen hosszú gerjesztésnél a kék sáv relatív intenzitása gyakorlatilag elhanyagolható. Rövidebb gerjesztéseket viszont nem tudtunk alkalmazni, mivel a pontról-pontra való összehasonlító színképméréseknél sokkal nagyobb intenzitásra van szükség.

Mindezek alapján tehát igen nehéz következtetést levonni a kék fluoreszcencia gerjesztésére és az az állítás, hogy ez a kék fluoreszcencia csak katódsugárral gerjeszthető, ultraibolyával pedig nem, további vizsgálatokat igényel.*

A spektrum sárga oldalán a helyzet sokkal tisztább. A sárga melléksávok amplitudója viszonylag nagyobb[3] (8—20%) és nem függ erősen a mangán koncentrációjától. A sárga melléksávok eltűnését a foszforeszcenciában hat mintán állapítottuk meg, melyek mangántartalma különböző volt és 0,2—6% között változott.

Vizsgálataink határozottan igazolják a cinkszilikát emissziós színképének sávos szerkezetét. A kérdés elméleti vonatkozásától eltekintve új kísérleti eljárást dolgoztunk ki, mellyel könnyebben lehet pontosabb eredményeket elérni. Módszerünk további előnye, hogy közvetlenebb mint a foszforeszcens spektrum fényképezése. A teljes utánvilágítási görbe egy lépésben előállítható és nincs szükség órákig tartó expozicióra.

Távközlési Kutató Intézet
Budapest.

IRODALOM

1 *Gy. Szigeti,* Elekrotechnika, *39,* (1947), 4—5.
2 *Gy. Szigeti* and *E. Nagy,* Műegyetemi Közlemények (1948).
3 *E. Nagy,* J. Opt. Soc. Am., *39,* (1949), 42.
4 *E. Nagy,* Acta Phys. Hung., *1,* (1951), 115.
5 *K. H. Butler.* J. Electrochem. Soc., *93,* (1948), 143.
6 *R. E. Shrader,* J. Opt. Soc. Am., *39,* (1949), 699.
7 *Gy. Gergely,* J. Opt. Soc. Am., *40,* (1950), 357.
8 *E. Nagy,* J. Opt. Soc. Am., *40,* (1950), 407.
9 *G. F. T. Garlick,* Luminescent Materials, Oxford (1949), 180.

* A kék emisszió spektrális eloszlásával, gerjesztésével, aktiválásával és élettartamával jelen közlemény beküldése után részletesen foglalkoztunk. Ezen vizsgálatok eredményeit most rendezzük sajtó alá.

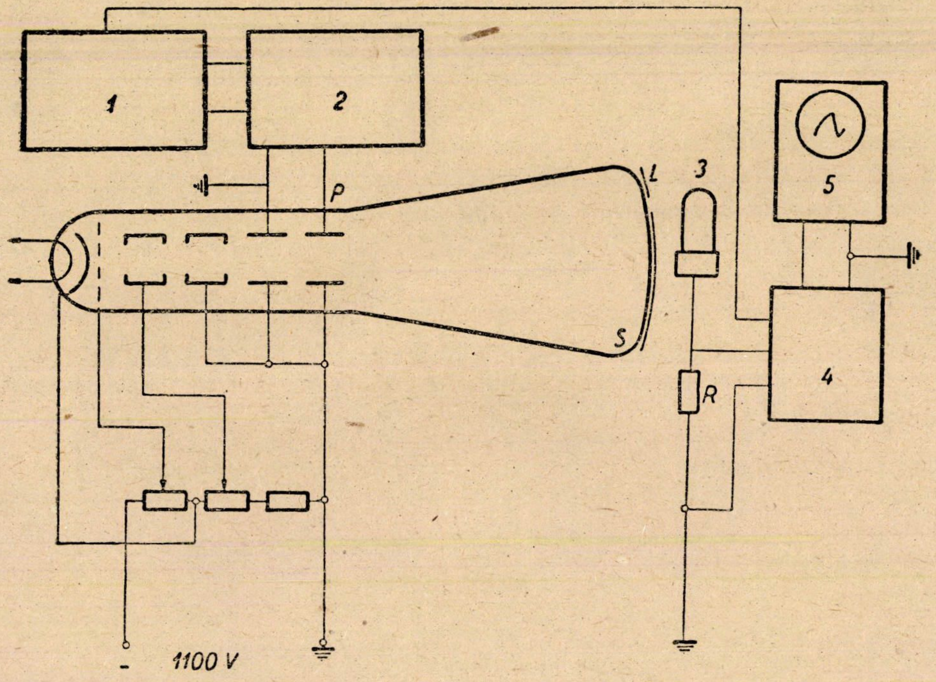
MEGJEGYZÉSEK A WILLEMIT LUMINESZKÁLÁSÁNAK IDŐBELI LEFOLYÁSÁHOZ

GERGELY GYÖRGY

Bemutatta Gyulai Zoltán lev. tag az 1951. június 11-én tartott osztályülésen

Egy előző közleményben szerző[1] beszámolt vizsgálatairól, melyeket katódsugárral gerjesztett willemit lumineszkálásával kapcsolatban végzett. Jelen közlemény néhány kiegészítő adatot tartalmaz.

A vizsgálat anyaga mesterséges willemit volt, mely 0,2% mangánt tartalmazott. A gerjesztés 1—280 mikroszekundum között változó impulzusokban történt. Az impulzusok között minden esetben 20msec szünet volt. Mérések történtek négyszöghullám gerjesztése mellett is, amikor a gerjesztő impulzus hossza megegyezett a gerjesztési szünettel.



1. ábra

Kísérleti elrendezés. Jelölések: 1. hanggenerátor, 2 impulzusgenerátor, vagy négyszöghullámú generátor, 3. fotomultiplier, 4. erősítő, 5. katódsugár oszcillográf

A kísérlet elrendezését mutatja az 1. ábra. Az impulzusok, melyeket egy impulzusgenerátor (Orion SP 61221) vagy egy négyszöghullámgenerátor (Orion SP 60881) állított elő, katódsugárcső P eltérítő lemezét vezérelték

A fluoreszkáló ernyő S fekete papírernyővel volt betakarva, egy 2×2 mm nagyságú L folt kivételével, melyet az elektronsugár a gerjesztés alatt bombázott. Az ernyő fénye fotomultiplierre jutott, a multiplier munkaellenállása 7 0000 Ohm volt. A vizsgálatoknál Weiss-típusú fotomultipliert, néhány esetben pedig 931 A-t használtunk.

A multiplier munkaellenállásán fellépő jeleket egy kétfokozatú, szélessávú, 25 c—5 Mc sávszélességű erősítő erősítette (Orion SP 21011 oszcillográf erősítő). A jeleket oszcillográffal vizsgáltuk, melynek ernyőjét fényképeztük.

A kísérletileg kapott görbék matematikai analízise azt mutatja, hogy a teljes utóvilágítási görbe három exponenciális tag összegével állítható elő, melyek alakja a következő:

$$I = I_0 e^{-\alpha t}.$$

A kialvási állandók a következők voltak: $\alpha_1 = 200/\text{sec}$, $\alpha_2 = 1800/\text{sec}$, $\alpha_3 = 72.000/\text{sec}$.

Az α kialvási állandók függetlenek a gerjesztés időtartamától, valamint intenzitásától, de az egyes komponensek relatív amplitudóit a gerjesztés időtartama határozza meg.

A kialvási állandó és az egyes komponensek amplitudói függnek a mangán aktivátor koncentrációjától. A kialvási görbe gyors komponense kis mangán tartalomnál, 0,3% alatt számottevő. Nagyobb mangán tartalomnál is észlelhető volt a leggyorsabb komponens, de csak igen kis amplitudóval.

A lassabb komponensek amplitudói és kialvási állandói is változnak a mangán koncentrációjával. Részletesebb adatokat egy következő közleményben fogunk ismertetni.

Egy újabb közleményben Nagy Elemér[2] magyarázatát adta az utóvilágítás három komponensének. Kimutatta, hogy ezek a komponensek összefüggnek a willemit lumineszkálásának Szigeti és Nagy által talált emisszió sávjaival.[3, 4, 5]

Távközlési Kutató Intézet
Budapest.

IRODALOM

1 *Gy. Gergely,* J. Opt. Soc. Am., *40,* (1950), 357.
2 *E. Nagy,* J. Opt. Soc. Am., *40,* (1950), 407.
3 *G. Szigeti* and *E. Nagy,* Műegyetemi Közlemények, 1948.
4 *E. Nagy,* J. Opt. Soc. Am., *39,* (1949), 42.
5 *E. Nagy* and *Gy. Gergely,* Acta Phys. Hung., *1,* (1951). 127.

DIPÓLFOLYADÉKOK DIELEKTROMOS RELAXÁCIÓJÁRÓL

BUDÓ ÁGOSTON lev. tag

Előadta az 1951. nov. 26-án tartott osztályülésen

Poláris molekulákat tartalmazó folyadékok nagyfrekvenciájú elektromos terekben való viselkedésének — az anomális diszperziónak és a dielektromos veszteségeknek — értelmezésére *Debye* elmélete bizonyult a legalkalmasabbnak[1]. Az elmélet kiindulópontja az az elképzelés, hogy a dipólmolekuláknak az elektromos tér irányító hatására bekövetkező forgásánál és a Brown-féle forgó mozgásnál a hidrodinamikai Stokes-féle törvénynek megfelelő súrlódási ellenállás lép fel. Ebből az elképzelésből már az egyszerű szemlélet is arra enged következtetni, hogy elegendő nagy frekvenciájú terek esetében a dipólmolekulák a tér gyors változásait nem követhetik momentán, ami nyilván a polarizációnak a frekvencia növekedésével járó csökkenését eredményezi (anomális diszperzió), a térerősség és a polarizáció közt fennálló fáziskülönbség pedig az elektrodinamika és termodinamika tételei szerint a dielektrikum felmelegedését (dielektromos veszteségek) vonja maga után. Mindkét jelenség (a mechanizmusról nyert közös néven dielektromos relaxáció) kvantitatív leírásánál a tér irányába eső $\bar{m}$ átlagos dipólmomentum a mérvadó, amely egy ω körfrekvenciával változó F elektromos térben a Debye-féle elmélet szerint:

$$\bar{m}=\frac{\mu^2}{3kT}\,\frac{1}{1+i\omega\tau}\,F \qquad (F=F_0 e^{i\omega t}); \tag{1}$$

itt μ a molekula permanens dipólmomentuma, k a Boltzmann-féle állandó, T az abszolút hőmérséklet, τ pedig az ú. n. relaxációs idő: fogalmilag az az időtartam, amely alatt egy sztatikus tér hirtelen megszüntetése esetén a polarizáció a Brown-féle mozgás következtében kezdeti értékének e-edrészére csökken. Ha a molekulát merev, a sugarú, az η viszkozitású közegben forgó gömbnek képzeljük, akkor

$$\tau=\frac{4\pi\eta a^3}{kT}=\frac{\varrho}{2kT} \tag{2}$$

($\varrho=8\pi\eta a^3$ a Stokes-féle súrlódási együttható). Az $\bar{m}$ (1) alakjának és az

$$\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}=\frac{4\pi N}{3}\left(\alpha+\frac{\bar{m}}{F}\right) \tag{3}$$

Clausius—Mosotti-féle összefüggésnek felhasználásával (α a polarizálhatóság, N az 1 cm^3-ben levő dipólmolekulák száma, $\varepsilon=\varepsilon'-i\varepsilon''$ a komplex dielektromos állandó) mind a két mérhető mennyiség: a valós ε' dielektromos állandó és a dielektromos veszteségekkel arányos ε'' az ω frekvencia függvényeként kifejezhető. Az így nyert összefüggések ε' és ε'' mérésével kísérletileg ellenőrizhetők, ill. a mérési adatokból μ és τ meghatározhatók; ezekből az értékekből azután részben az egyes molekula szerkezetére, részben pedig (főleg a τ-ra kapott értékekből) a folyadék szerkezetére vonatkozólag következtetéseket lehet levonni.

Ki kell emelnünk, hogy az eredeti Debye-féle elmélet két lényeges egyszerűsítő feltevést tartalmaz. 1. A molekula-modell merev gömb, merev dipólmomentummal; ez a modell tehát nem veszi tekintetbe az egyes molekula szerkezetét, nevezetesen a molekula alakját, és — bizonyos molekuláknál — a molekulán belüli, (szabad vagy akadályozott) forgásra képes dipólcsoportokat. 2. Az említett Clausius—Mosotti-féle összefüggés alkalmazása azt jelenti, hogy az egyes molekulára ható térerősségre, a belső térerősségre a Lorentz-féle $\mathfrak{F} = \mathfrak{E} + \frac{4\pi}{3}\mathfrak{P}$ közelítést vesszük fel, amelyben a szomszédos molekulák egymásra gyakorolt irányító hatása — a dipól-dipól kölcsönhatás, asszociáció — nincs számításba véve, tehát erősen poláris folyadékok viselkedésének leírása az elmélettől nem várható, az elmélet csak megfelelően híg poláris oldatokra alkalmazható.

Az első, vagyis az egyes molekulára vonatkozó egyszerűsítő feltevéssel kapcsolatban az eredeti Debye-féle elméletet több irányban általánosították: ellipszoid-alakú molekulákra[2, 3], továbbá olyan molekulákra, amelyekben néhány dipólcsoport szabadon vagy a molekulán belüli erők által akadályozott módon foroghat[4], majd sok belső szabadsági fokkal rendelkező molekulákra[5]. Ezen általánosított elméletek szerint az átlagos momentum kifejezésében több Debye-féle tag összege lép fel: $\sum \frac{C_n}{1 + i\omega\tau_n}$, vagyis az átlagos momentumot és ezzel a mérhető ε', ε'' mennyiségeket most a τ_n relaxációs idők és C_n „súlyaik" (a relaxációs idők „spektruma") határozzák meg, híg poláris oldatoknál a mérésekkel általában kielégítő megegyezésben.

Az elméletnek tiszta dipólfolyadékokra (vagy koncentráltabb poláris oldatokra) való kiterjesztéséhez mindenek előtt a fent említett második egyszerűsítő feltevést kell alkalmasabbal helyettesíteni, tehát a szomszédos molekulák egymásra gyakorolt irányító (vagyis a külső elektromos tér forgató hatását akadályozó) hatását kell tekintetbe venni. Ennél a feladatnál, amely a legszorosabban összefügg a belső térerősség régi problémájával, jelenleg két út látszik járhatónak. Az egyik kiindulópontja a Debye-féle elgondolás[6], amely szerint a dipólmolekulára a környezete által kifejtett irányító, ill. a forgást akadályozó hatás leírható egy

$$-E \cos(\mu, E') \tag{4}$$

alakú potenciállal, ahol az E állandó az ú. n. akadályozó energia, (μ, E') pedig az a szög, amelyet a dipól a környezet által megszabott, térben és időben lassan változó E' iránnyal bezár. („Kvázi-kristályos folyadékmodell".) A másik lehetőség az Onsager-féle[7], ill. az általánosabb Kirkwood-féle eljárás[8], amely a molekulák közti erőknek az elektrosztatika és a statisztikus mechanika alapján való figyelembevételével a belső térerősség Lorentz-féle értékének gyökeres módosításához vezet. A két elmélet kritikai összehasonlítása (és a Debye-féle elgondolással szemben támasztott ellenvetések cáfolata) *Frank* egyik munkájában található meg [9].

Míg a fenti feltevések a sztatikus dielektromos állandóra aránylag egyszerű és bevált kifejezéseket adnak, addig időben változó terek, tehát a dielektromos relaxáció esetében a problémák sokkal nehezebbek, és kvantitatív szempontból kielégítő megoldásuktól még távol vagyunk. A dielektromos relaxáció elméletét a Debye-féle feltevés alapján, gömbszerű molekulamodellre, *Debye* és *Ramm* dolgozták ki [10], a sztatikus esetre levezetett Onsager-formulát pedig *Cole* egészítette ki egy relaxációs faktorral [11]. (A legexaktabbnak, de az alkalmazhatóságra nézve legkörülményesebbnek látszó Kirkwood-féle elméletet időben változó terekre még nem sikerült általánosítani [12].) Az újabb szisztematikus relaxáció-vizsgálatok — elsősorban *Fischer* munkái [13] — a mérési eredmények diszkussziójánál mindkét elméletre támaszkodnak. A Debye—Ramm-féle elmélet alkalmazhatóságát azonban korlátozza a gömbalakú molekulamodell feltételezése, mert, mint említettük, a mérések tanúsága szerint a molekula alakja és a molekulán belüli, forgásra képes dipólcsoportok a relaxációjelenségeket híg poláris oldatoknál is észrevehetően befolyásolják. Ezért éppen abból a célból, hogy az egyes molekula szerkezetéből eredő befolyást a környezet befolyásától jobban el lehessen választani s ezáltal az utóbbit is pontosabban lehessen tanulmányozni, kívánatosnak látszik a Debye—Ramm-féle elméletet a gömbalaktól erősen eltérő alakú, továbbá forgásra képes dipólcsoportokkal rendelkező molekulákra is kiterjeszteni.

I. Ellipszoid-alakú molekulák. Mint említettük, a dielektromos relaxációra az alkalmazott $F = F_0 e^{i\omega t}$ külső elektromos tér irányába eső átlagos dipólmomentum a mérvadó, amely definíció szerint:

$$\overline{m} = \frac{\int \mu_F f \, d\Omega}{\int f \, d\Omega}; \tag{5}$$

itt μ_F a molekula μ permanens dipólmomentumának az F tér irányára való vetülete, f pedig az eloszlási függvény ($f\,d\Omega$ azon molekulák száma, amelyek dipólusainak irányai a t időpillanatban a $d\Omega$ térszög-tartományba esnek). Az f függvény gömbalakú molekulák esetében a következő, diffúzió típusú differenciálegyenletnek tesz eleget [10]:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{kT}{\varrho} \Delta f + \frac{1}{\varrho} \operatorname{div} (f \operatorname{grad} u), \tag{6}$$

amely szemléletesen azt fejezi ki, hogy a $d\Omega$-ba mutató dipólusok száma az időben egyrészt a Brown-féle forgó mozgás következtében, másrészt az u potenciállal bíró erők irányító hatása miatt változik. [ϱ a (2)-nél említett súrlódási együttható.] Ellipszoid-alakú molekulák esetében (5)-nél általánosabb egyenletből kell kiindulnunk, mert most a $D=\frac{kT}{\varrho}$ „diffúziós együttható" szerepét egy **D** tenzor veszi át, amelynek főértékei az ellipszoid egy-egy főtengelye körüli forgásoknak (súrlódási együtthatók: $\varrho_a, \varrho_b, \varrho_c$) felelnek meg:

$$D_1=\frac{kT}{\varrho_a},\quad D_2=\frac{kT}{\varrho_b},\quad D_3=\frac{kT}{\varrho_c}. \tag{7}$$

A (6) helyébe lépő általánosabb egyenlet a

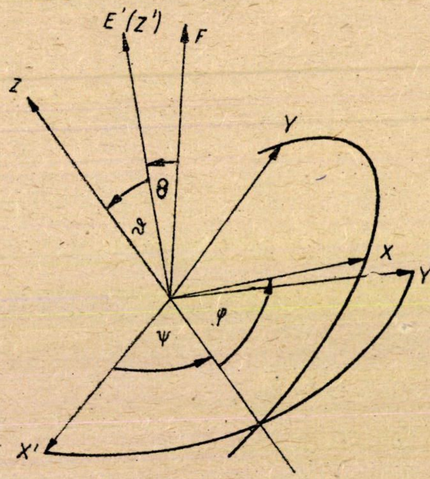
$$\frac{\partial f}{\partial t}=\operatorname{div}(\mathbf{D}\operatorname{grad} f)+\frac{1}{kT}\operatorname{div}(\mathbf{D} f \operatorname{grad} u) \tag{8}$$

alakban írható[5], vagy alkalmas $x^1, x^2, \ldots$ koordinátákban, a tenzorkalkulus szokásos jelöléseit alkalmazva (összegezés a kétszer előforduló indexekre):

$$\frac{\partial f}{\partial t}=\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^\sigma}\left[\sqrt{g}\,D^{\sigma\tau}\left(\frac{\partial f}{\partial x^\tau}+\frac{f}{kT}\frac{\partial u}{\partial x^\tau}\right)\right]. \tag{9}$$

Itt u a Debye-féle feltevésnek megfelelően két részből áll: az egyik a környező molekulák hatásából eredő (4) energia, a másik pedig a dipólus potenciális energiája az F külső térben:

$$u=-E\cos(\mu, E')-\mu F\cos(\mu, F). \tag{10}$$



1. ábra

Az alkalmazott F külső térerősség mutasson a térben rögzített $X_0Y_0Z_0$ derékszögű koordinátarendszer Z_0 tengelyének irányába. A kiszemelt molekula környezete által megszabott E' irány legyen egy másik, egyelőre szintén a térben rögzítve gondolt $X'Y'Z'$ rendszer Z' tengelye; ennek helyzetét az $X_0Y_0Z_0$ rendszerhez képest jellemezzék a Θ és (az 1. ábrán fel nem tüntetett) Φ szögek, az ellipszoid-molekula X, Y, Z főtengelyeinek helyzetét pedig az előbbi $X'Y'Z'$ rendszerhez viszonyítva a ϑ, ψ, φ Euler-féle szögek, végül a molekula μ dipólmomentumának iránykoszinuszai XYZ-ben legyenek α, β, γ:

$$\alpha = \frac{\mu_x}{\mu}, \quad \beta = \frac{\mu_y}{\mu}, \quad \gamma = \frac{\mu_z}{\mu}. \tag{11}$$

A bevezetett jelölések közül tehát α, β, γ a molekula felépítése által meghatározott adatok, Θ és Φ paraméterek (amelyekre később közepelni fogunk), ϑ, ψ és φ pedig a koordináták:

$$x^1 = \vartheta, \quad x^2 = \psi, \quad x^3 = \varphi. \tag{12}$$

A (9)-ben szereplő $D^{\sigma\tau}$ tenzorkomponensek (és $\sqrt{g}$) meghatározhatók (7)-ből és azokból a transzformációs összefüggésekből, amelyek az ellipszoid főtengelyei körüli $d\alpha_1, d\alpha_2, d\alpha_3$ forgások és $d\vartheta, d\psi, d\varphi$ közt fennállnak. [Ha ezeket a mechanikából ismert

$$\begin{gathered} d\vartheta = \cos\varphi \cdot d\alpha_1 - \sin\varphi \cdot d\alpha_2, \quad d\psi = \frac{1}{\sin\vartheta}(\sin\varphi \cdot d\alpha_1 + \cos\varphi \cdot d\alpha_2), \\ d\varphi = -\operatorname{ctg}\vartheta(\sin\varphi \cdot d\alpha_1 + \cos\varphi \cdot d\alpha_2) + d\alpha_3 \end{gathered} \tag{13}$$

összefüggéseket a $dx^\sigma = \sum_{i=1}^{3} a_i^\sigma d\alpha_i$ alakban foglaljuk össze, akkor

$$D^{\sigma\tau} = \sum_{i=1}^{3} a_i^\sigma a_i^\tau D_i, \tag{14}$$

l. (7)]. A tenzorkomponensek a következők:

$$\begin{gathered} D^{11} = kT\left(\frac{\cos^2\varphi}{\varrho_a} + \frac{\sin^2\varphi}{\varrho_b}\right), \qquad D^{12} = D^{21} = kT\left(\frac{1}{\varrho_a} - \frac{1}{\varrho_b}\right)\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\sin\vartheta}, \\ D^{22} = kT\frac{1}{\sin^2\vartheta}\left(\frac{\sin^2\varphi}{\varrho_a} + \frac{\cos^2\varphi}{\varrho_b}\right), \; D^{23} = D^{32} = -kT\frac{\cos\vartheta}{\sin^2\vartheta}\left(\frac{\sin^2\varphi}{\varrho_a} + \frac{\cos^2\varphi}{\varrho_b}\right), \\ D^{33} = kT\left[\operatorname{ctg}^2\vartheta\left(\frac{\sin^2\varphi}{\varrho_a} + \frac{\cos^2\varphi}{\varrho_b}\right) + \frac{1}{\varrho_c}\right], \\ D^{31} = D^{13} = -kT\left(\frac{1}{\varrho_a} - \frac{1}{\varrho_b}\right)\operatorname{ctg}\vartheta\sin\varphi\cos\varphi, \end{gathered} \tag{15}$$

$\sqrt{g}$ értéke pedig [a $\sum(d\alpha_i)^2 = g_{\sigma\tau}dx^\sigma dx^\tau$, $g = \det g_{\sigma\tau}$ értelmezésből]:

$$\sqrt{g} = \sin\vartheta. \tag{16}$$

Végül a (10)-zel definiált u-ra gömbháromszögtani tételek felhasználásával az alábbi kifejezés adódik:

$$\begin{aligned} u &= u_0 + u_1 e^{i\omega t}, \quad u_0 = -E[\sin\vartheta(\alpha\sin\varphi + \beta\cos\varphi) + \gamma\cos\vartheta], \\ u_1 &= -\mu F_0\{\cos\Theta[\sin\vartheta(\alpha\sin\varphi + \beta\cos\varphi) + \gamma\cos\vartheta] + \\ &+ \sin\Theta[\cos\vartheta\sin\psi(\alpha\sin\varphi + \beta\cos\varphi) - \cos\psi(\alpha\cos\varphi - \beta\sin\varphi) - \\ &- \gamma\sin\vartheta\sin\psi]\}. \end{aligned} \tag{17}$$

A (15)—(17) kifejezések (9)-be való helyettesítésével kapjuk a megoldandó differenciálegyenlet explicit alakját.

Keressük a megoldást (17)-nek megfelelően az

$$f = f_0 + f_1 e^{i\omega t} \tag{18}$$

alakban; itt $f_0 = Ce^{-\frac{u_0}{kT}}$ az u_0 potenciális energiának megfelelő, sztatikus esetre vonatkozó Boltzmann-féle eloszlási függvény, tehát kielégíti (9)-et ($\partial f_0 / \partial t = 0$ és $u = u_0$-val). Ha ezt figyelembe vesszük, továbbá az $\left(\frac{F_0}{kT}\right)^2$-tel arányos, vagyis az alkalmazásokban előforduló viszonylag kis térerősségeknél elenyésző $f_1 \frac{\partial u_1}{\partial x^\tau}$ típusú tagokat elhanyagoljuk, (9)-ből f_1 számára a következő egyenletet nyerjük:

$$i\omega f_1 = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^\sigma} \left[\sqrt{g}\, D^{\sigma\tau} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x^\tau} + \frac{f_1}{kT} \frac{\partial u_0}{\partial x^\tau} + \frac{f_0}{kT} \frac{\partial u_1}{\partial x^\tau} \right) \right]. \tag{19}$$

Az egyenlet további tárgyalásánál később említendő okokból csak *forgási ellipszoid molekulamodellre* szorítkozunk, amelyet már sok molekula alakja eléggé megközelít. Ebben az esetben, ha a szimmetriatengely a Z tengely, az α, β iránykoszinuszok közül pl. β-t 0-nak vehetjük, továbbá

$$\varrho_a = \varrho_b = \varrho, \quad \text{és legyen} \quad \frac{\varrho}{\varrho_c} = r; \tag{20}$$

a Debye-féle E akadályozó energia és a kT termikus energia viszonyát jelöljük y-nal:

$$y = \frac{E}{kT}. \tag{21}$$

A fentiek figyelembevételével és az említett helyettesítések elvégzése után (19)-et így írhatjuk:

$$\frac{i\omega\varrho}{kT} f_1 = D[f_1] + yH[f_1] + G(\vartheta, \psi, \varphi; y), \tag{22}$$

ahol

$$D[f_1] = \frac{\partial^2 f_1}{\partial \vartheta^2} + \frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta} \frac{\partial f_1}{\partial \vartheta} + \left(r + \frac{\cos^2\vartheta}{\sin^2\vartheta} \right) \frac{\partial^2 f_1}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\sin^2\vartheta} \frac{\partial^2 f_1}{\partial \psi^2} - 2 \frac{\cos\vartheta}{\sin^2\vartheta} \frac{\partial^2 f_1}{\partial\psi\,\partial\varphi}, \tag{23}$$

$$\begin{aligned} H[f_1] = \gamma \left(2\cos\vartheta \cdot f_1 + \sin\vartheta \frac{\partial f_1}{\partial\vartheta} \right) + \alpha \Bigg\{ \left[(r+1)\sin\vartheta \cdot f_1 - \cos\vartheta \frac{\partial f_1}{\partial \vartheta} \right] \sin\varphi - \\ - \left(r\sin\vartheta + \frac{\cos^2\vartheta}{\sin\vartheta} \right) \cos\varphi \frac{\partial f_1}{\partial\varphi} + \frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta} \cos\varphi \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \psi} \Bigg\} \end{aligned} \tag{24}$$

és

$$\begin{aligned} G(\vartheta, \psi, \varphi; y) = \frac{\mu F_0}{kT} e^{y(\gamma\cos\vartheta + \alpha\sin\vartheta\sin\varphi)} \big[\cos\Theta \{ 2\gamma\cos\vartheta + \alpha(r+1)\sin\vartheta\sin\varphi - \\ - y[\gamma^2\sin^2\vartheta + \alpha^2(\cos^2\vartheta + r\sin^2\vartheta\cos^2\varphi) - 2\alpha\gamma\sin\vartheta\cos\vartheta\sin\varphi] \} - \\ - \sin\Theta \{ [\alpha(r+1)\cos\varphi + y(\alpha^2 r\sin\vartheta\sin\varphi\cos\varphi + \alpha\gamma\cos\vartheta\cos\varphi)] \cos\psi + \\ + [2\gamma\sin\vartheta - \alpha(r+1)\cos\vartheta\sin\varphi + y(\gamma^2\sin\vartheta\cos\vartheta + \alpha^2(r\cos^2\varphi - 1) - \\ - \alpha\gamma(\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta)\sin\varphi)] \sin\psi \} \big]. \end{aligned} \tag{25}$$

A (22) egyenlet elvi megoldási módja a következő lehet. Meghatározzuk a

$$D[X]+yH[X]=-\lambda X \tag{26}$$

differenciálegyenlet λ_n sajátértékeit és X_n sajátfüggvényeit, a (22)-beli G-t kifejtjük az X_n-ek szerint:

$$G=\sum c_n X_n, \tag{27}$$

majd az

$$f_1=\sum A_n X_n \tag{28}$$

alakúnak feltételezett f_1-et (22)-be helyettesítjük. Ily módon kapjuk az A_n-ek számára:

$$\frac{i\omega\varrho}{kT}A_n+\lambda_n A_n=c_n, \tag{29}$$

ahonnan

$$A_n=\frac{c_n}{\lambda_n+\frac{i\omega\varrho}{kT}}=\frac{c_n}{\lambda_n}\frac{1}{1+i\omega\tau_n}, \quad \tau_n=\frac{\varrho}{\lambda_n kT}, \tag{30}$$

tehát a λ_n-ek és X_n-ek birtokában f_1 s így a teljes f eloszlási függvény is [l. (18)] meghatározható volna.

A (22), ill. (26) egyenletek bonyolult volta miatt gyakorlatilag csak közelítő megoldások adhatók meg, az y paraméter megfelelően kicsiny, ill. nagy értékei mellett.

a) *Kis y esetében* (26)-ban $yH[X]$-et perturbációnak tekintjük, tehát a

$$D[U]+\lambda U=0 \tag{31}$$

egyenletből indulunk ki. Ez (az r és λ állandók fizikai jelentésétől eltekintve) ugyanaz az egyenlet, mint amelyik a molekulák kvantummechanikájában a szimmetrikus pörgettyű hullámegyenleteként ismeretes [14]. Sajátértékei és (nem normált) sajátfüggvényei:

$$\lambda_{mnp}=j(j+1)+n^2(r-1), \tag{32}$$

$$U_{mnp}=x^{\frac{d}{2}}(1-x)^{\frac{s}{2}}F(-p, 1+d+s+p, 1+d, x)e^{i(n\varphi+m\psi)}; \tag{33}$$

itt $m, n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots;$ $p=0, 1, 2, \ldots,$ $d=|m-n|,$ $s=|m+n|, j=p+$ a nagyobbik szám d és s közül; $x=\frac{1}{2}(1-\cos\vartheta)$, $F(-p, \ldots)$ pedig a Jacobi-féle polinomokat jelenti. [Itt említjük meg, hogy az általános ellipszoid esetében (31) helyébe az aszimmetrikus pörgettyű hullámegyenlete lépne és a (24)—(25)-nek megfelelő kifejezések is aránytalanul bonyolultabbak volnának.]

A (26) után említett módszernél [vagyis először a (26) perturbált, homogén probléma X_n sajátfüggvényeit meghatározni és ezekből felépíteni (22) megoldását] közvetlenebb, és egyes, az elfajulással kapcsolatos kényelmetlenségek kiküszöbölése céljából alkalmasabb mindjárt (22)-vel foglalkozni. Mint

(25)-ből látható, G a következő alakú:

$$G=\frac{\mu F_0}{kT}[\cos\Theta\cdot A(\vartheta,\varphi)-\sin\Theta\cdot B(\vartheta,\varphi,\psi)],\tag{34}$$

ahol A és B (25)-ből közvetlenül leolvasható kifejezések. Ennek megfelelően legyen

$$f_1=\frac{\mu F_0}{kT}[\cos\Theta\cdot P(\vartheta,\varphi)-\sin\Theta\cdot Q(\vartheta,\varphi,\psi)];\tag{35}$$

így (22) egyénértékű az alábbi két egyenlettel:

$$sP=D[P]+yH[P]+A \quad \text{(36a)},\qquad sQ=D[Q]+yH[Q]+B,\quad \text{(36b)}$$

ahol

$$s=\frac{i\omega\varrho}{kT}.\tag{37}$$

Az ismert A, B kifejezéseket kifejthetjük y hatványai szerint, az együtthatókat pedig a (33) sajátfüggvények szerint. Így (ha a λ_i-hez tartozó, az A, ill. B kifejezésében szereplő sajátfüggvényeket U_i, ill, U_i'-vel jelöljük):

$$A=\sum[a_i^{(0)}+ya_i^{(1)}+\cdots]U_i,\qquad B=\sum[b_i^{(0)}+yb_i^{(1)}+\cdots]U_i'.\tag{38}$$

A keresett P, Q függvényeket hasonló alakúaknak tételezzük fel:

$$\begin{aligned}P&=\sum p_iU_i=\sum[p_i^{(0)}+yp_i^{(1)}+\cdots]U_i,\\ Q&=\sum q_iU_i'=\sum[q_i^{(0)}+yq_i^{(1)}+\cdots]U_i'.\end{aligned}\tag{39}$$

Ha ezeket (36)-ba helyettesítjük, akkor a

$$H[U_i]=\sum_k H_{ik}U_k,\qquad H[U_i']=\sum_k H_{ik}'U_k\tag{40}$$

egyenletekkel definiált H_{ik}, H_{ik}' matrixelemek és a

$$T_i=\lambda_i+s\tag{41}$$

jelölés bevezetésével a keresett $p_i^{(0)}, p_i^{(1)},\ldots$ számára kapjuk:

$$\begin{aligned}p_i^{(0)}&=\frac{a_i^{(0)}}{T_i},\quad p_i^{(1)}=\frac{1}{T_i}\Big[a_i^{(1)}+\sum_k p_k^{(0)}H_{ki}\Big]=\frac{1}{T_i}\Big[a_i^{(1)}+\sum_k\frac{a_k^{(0)}H_{ki}}{T_k}\Big],\\ p_i^{(2)}&=\frac{1}{T_i}\Big[a_i^{(2)}+\sum_k p_k^{(1)}H_{ki}\Big]=\frac{1}{T_i}\Big[a_i^{(2)}+\sum_k\frac{a_i^{(1)}H_{ki}}{T_k}+\sum_{k,l}\frac{a_l^{(0)}H_{lk}H_{ki}}{T_kT_l}\Big],\ldots;\end{aligned}\tag{42}$$

analóg kifejezések érvényesek $q_i^{(0)}, q_i^{(1)},\ldots$-re.

Azok az (egymásra ortogonális, nem normált) U_i, U_i' sajátfüggvények — a (33) függvények alkalmas lineáris kombinációi — amelyek az átlagos momentum kiszámításához a második közelítésig bezárólag szükségesek [l. alább (48)-at], a megfelelő λ_i sajátértékekkel együtt a következők:

$$
\begin{array}{llll}
\lambda_1=2; & U_1=\cos\vartheta, & U_1'=\sin\vartheta\sin\psi, & \\
\lambda_2=r+1; & U_2=\sin\vartheta\sin\varphi, & U_{2a}'=\cos\varphi\cos\psi-\cos\vartheta\sin\varphi\sin\psi, & \\
 & & U_{2b}'=\cos\vartheta\cos\varphi\cos\psi-\sin\varphi\sin\psi, & \\
\lambda_3=6; & U_3=1-\frac{3}{2}\sin^2\vartheta, & U_3'=\sin\vartheta\cos\vartheta\sin\psi, & (43)\\
\lambda_4=r+5; & U_4=\sin\vartheta\cos\vartheta\sin\varphi, & U_4'=\cos\vartheta\cos\varphi\cos\psi- & \\
 & & -(\cos^2\vartheta-\sin^2\vartheta)\sin\varphi\sin\psi, & \\
\lambda_5=4r+2; & U_5=\sin^2\vartheta\cos 2\varphi, & U_5'=\sin\vartheta(\sin 2\varphi\cos\psi+ & \\
 & & +\cos\vartheta\cos 2\varphi\sin\psi). &
\end{array}
$$

Ezeknek a sajátfüggvényeknek a felhasználásával hosszadalmasabb számítások után kapjuk y^2-ig bezárólag a (38)-nak megfelelő [az $a_i^{(0)}, b_i^{(0)},\ldots$-okat definiáló] kifejezéseket:

$$
\begin{aligned}
A=2\gamma U_1+\alpha(r+1)U_2+y\Big[(2\gamma^2-\alpha^2)U_3+\alpha\gamma(r+5)U_4-\\
-\alpha^2\left(r+\frac{1}{2}\right)U_5\Big]+y^2\left[\frac{1}{5}\gamma U_1+\frac{1}{10}\alpha(r+1)U_2+\cdots\right],\\
B=2\gamma U_1'+\alpha(r+1)U_{2a}'+y\Big[\frac{1}{2}\alpha\gamma(r-1)U_{2b}'+\\
+\frac{3}{2}(2\gamma^2-\alpha^2)U_3'+\frac{1}{2}\alpha\gamma(r+5)U_4'+\alpha^2\left(r+\frac{1}{2}\right)U_5'\Big]+\\
+y^2\left[\frac{2}{5}\gamma U_1'+\frac{1}{5}\alpha(r+1)U_{2a}'+\cdots\right]
\end{aligned}
\qquad (44)
$$

(az y^2 szorzóiban pontozva jelölt tagoknak a második közelítésben nincs szerepük), továbbá a H_{ik}, H_{ik}' matrixelemeket. [Ezeket helykímélés okából nem írjuk ki; a belőlük alkotott, a második közelítésig szükséges szorzatok a későbbi (50)-ből (42) és (44) figyelembevételével leolvashatók. Mivel a (24)-beli H nem önmagához adjungált operátor, $H_{ik}\neq H_{ki}$.]

A fentiek alapján meghatározható p_i, q_i-kkel (18), (35), (39) szerint a teljes eloszlási függvény:

$$
f=f_0+\frac{\mu F_0 e^{i\omega t}}{kT}(\cos\Theta\cdot\sum p_i U_i-\sin\Theta\cdot\sum q_i U_i'), \qquad (45)
$$

az (5) átlagos momentumban szereplő $\mu_F=\mu\cos(\mu, F)$ pedig [l. (10), (17), $\beta=0$-val]:

$$
\begin{aligned}
\mu_F=\mu\{\cos\Theta[\gamma\cos\vartheta+\alpha\sin\vartheta\sin\varphi]-\\
-\sin\Theta[\gamma\sin\vartheta\sin\psi+\alpha(\cos\varphi\cos\psi-\cos\vartheta\sin\varphi\sin\psi)]\}=\\
=\mu[\cos\Theta(\gamma U_1+\alpha U_2)-\sin\Theta(\gamma U_1'+\alpha U_{2a}')].
\end{aligned}
\qquad (46)
$$

Az (5)-ben

$$
d\Omega=\sin\vartheta d\vartheta d\psi d\varphi\cdot\sin\Theta d\Theta d\Phi, \qquad (47)
$$

mivel a molekula különböző helyzetein kívül a molekula környezete által megszabott E' tengely (Θ, Φ) irányaira is közepelnünk kell (amelyek a folyadékban egyenlő valószínűséggel fordulnak elő).

Az (5) közepelés az U_i, U_i' sajátfüggvények ortogonalitásának felhasználásával könnyen keresztülvihető; az eredmény:

$$\overline{m}=\frac{\mu^2 F}{9kT\cdot C(y)}[\gamma(p_1+2q_1)+\alpha(p_2+q_{2a})], \tag{48}$$

ahol

$$C(y)=\frac{\sin hy}{y}=1+\frac{1}{6}y^2+\frac{1}{120}y^4+\cdots. \tag{49}$$

Az $\overline{m}$-hez tehát a p_i, q_i-k közül csak p_1, p_2, q_1, q_{2a}-t kell (42) alapján meghatároznunk. Ily módon kapjuk a második közelítésig bezárólag:

$$\begin{aligned}\overline{m}=\frac{\mu^2 F}{3kT}\Bigg\{&\frac{2\gamma^2}{T_1}+\frac{\alpha^2(1+r)}{T_2}+\frac{y^2}{6}\Bigg[\alpha^2\gamma^2\left(\frac{1-r}{T_1T_2}-\frac{1-r}{T_2^2}+\right.\\&\left.+\frac{2r}{T_1^2T_2}-\frac{1+3r}{T_1T_2^2}+\frac{1+r}{T_2^3}\right)+\frac{2\gamma^2(\alpha^2-2\gamma^2)}{T_1T_4}-\frac{\alpha^2(\alpha^2-2\gamma^2)(2-r)}{T_2T_4}-\\&-\frac{\alpha^2\gamma^2(5+r)}{T_1T_5}-\frac{\alpha^2\gamma^2(5+r)}{T_2T_5}-\frac{\alpha^4r(1+2r)}{T_2T_6}-\frac{8\gamma^4}{T_1^2T_4}-\\&-\frac{\alpha^4(1+r)(2-r)}{T_2^2T_4}-\frac{2\alpha^2\gamma^2(2+r)}{T_1^2T_5}-\frac{3\alpha^2\gamma^2(1+r)}{T_2^2T_6}-\\&-\frac{\alpha^4r(1+r)(1+2r)}{T_2^2T_6}+\frac{2\alpha^2\gamma^2(5-r)}{T_1T_2T_4}-\frac{\alpha^2\gamma^2(7+5r)}{T_1T_2T_5}\Bigg]\Bigg\}.\end{aligned} \tag{50}$$

A (41)-ből következő

$$\frac{1}{T_iT_k}=\frac{1}{\lambda_i-\lambda_k}\left(\frac{1}{T_k}-\frac{1}{T_i}\right) \tag{51}$$

és néhány más átalakítás alkalmazásával az átlagos momentumot a szokásos alakban írhatjuk:

$$\overline{m}=\frac{\mu^2 F}{3kT}\sum\frac{C_n}{1+i\omega\tau_n}, \tag{52}$$

ahol a τ_n relaxációs idők és C_n „súlyaik" — az y^2-es tagokig bezárólag — a következők:

$$\begin{aligned}\tau_1&=\frac{\varrho}{2kT}\left\{1-\frac{y^2}{12}\left[\gamma^2-\frac{2\alpha^2(r+1)}{(r-1)(r+3)}\right]\right\},\\C_1&=\gamma^2\left[1-\frac{y^2}{6}\left\{1-\frac{\gamma^2}{4}+\frac{\alpha^2}{2}\left[\frac{r+5}{(r+3)^2}+\frac{5r+1}{(r-1)^2}\right]\right\}\right];\\\tau_2^{\pm}&=\frac{\varrho}{(r+1)kT}\left\{1\pm\frac{y\gamma}{\sqrt{6}(r+1)}-\frac{y^2}{3}\left[\frac{2(r^2-4r-1)}{(r-5)(3r+1)}-\frac{\gamma^2(r+7)}{8(r^2-1)}\right]\right\},\\C_2^{\pm}&=\frac{\alpha^2}{2}\left[1\pm\frac{y\gamma}{\sqrt{6}(r+1)}-\frac{y^2}{6}\left\{\alpha^2\left[1+\frac{r^2}{(3r+1)^2}+\frac{2r-7}{(r-5)^2}\right]-\right.\right.\\&\qquad\left.\left.-\gamma^2\left[\frac{5r+1}{2(r-1)^2}-\frac{r-21}{16(r-5)}\right]\right\}\right],\end{aligned} \tag{53}$$

$$\tau_3 = \frac{\varrho}{6kT}, \qquad C_3 = \frac{y^2}{72}\left(\gamma^2 - \alpha^2 \frac{2r-4}{r-5}\right)^2;$$

$$\tau_4 = \frac{\varrho}{(r+5)kT}, \qquad C_4 = \frac{y^2}{96}\alpha^2\gamma^2 \frac{(r+7)^2}{(r+3)^2};$$

$$\tau_5 = \frac{\varrho}{(4r+2)kT}, \qquad C_5 = \frac{y^2}{6}\alpha^4 \frac{r^2}{(3r+1)^2}.$$

A kapott eredményekben (11) szerint

$$\alpha = \sin\vartheta_0, \qquad \gamma = \cos\vartheta_0, \tag{54}$$

ahol ϑ_0 a μ dipólnak az ellipszoid forgástengelyével bezárt szöge.

Gömbalakú molekuláknál ($r=1$) a fenti 6 relaxációs idő helyett csak 2 szerepel:

$$\tau_{\mathrm{I}} = \frac{\varrho}{2kT}\left(1 - \frac{y^2}{12}\right), \quad C_{\mathrm{I}} = 1 - \frac{y^2}{8}; \qquad \tau_{\mathrm{II}} = \frac{\varrho}{6kT}, \quad C_{\mathrm{II}} = \frac{y^2}{72}. \tag{55}$$

[Ez (53)-ból $r=1$-re $\alpha=0$-nál azonnal látható, de bármilyen α-nál ($\alpha^2+\gamma^2=1$) is fennáll. Az $r=1$, $\alpha \neq 0$ esetben ugyan az (53) első négy kifejezése elfajulási okokból értelmét veszti, de az (52) összeg — mint az (50)-ből kimutatható — az (55)-nek megfelelő összegbe megy át.]

Abban az esetben, ha a méréseknél alkalmazott frekvenciák viszonylag kicsinyek, úgyhogy az $\frac{1}{1+i\omega\tau_n} \approx 1 - i\omega\tau_n$ közelítés megengedett, (52)—(53) alapján az átlagos momentumra y^2-ig bezárólag a következő egyszerűbb kifejezés adódik:

$$\overline{m} = \frac{\mu^2 F}{3kT}\left\{\left(1 - \frac{y^2}{9}\right) - i\omega\frac{\varrho}{2kT}\left[1 - \frac{r-1}{r+1}\sin^2\vartheta_0 - \frac{11}{54}y^2 \cdot S(r, \vartheta_0)\right]\right\},$$

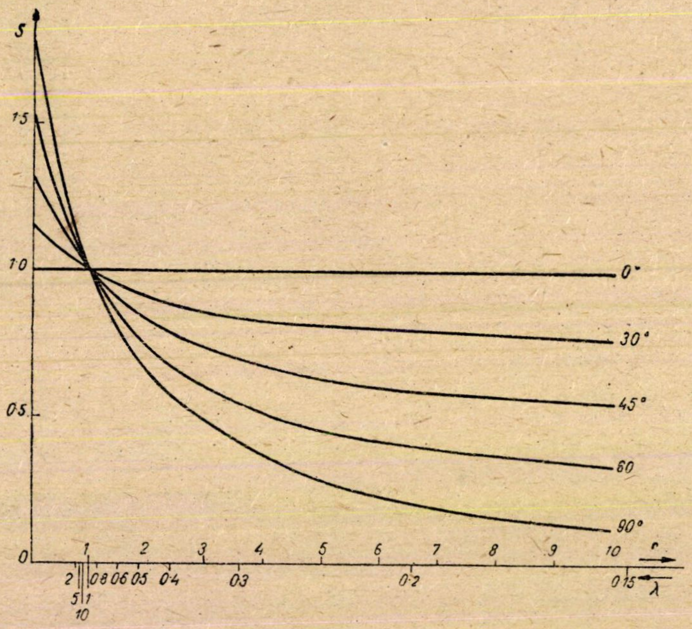
ahol (56)

$$S(r,\vartheta_0) = 1 - \frac{12}{11}\frac{r-1}{r+1}\sin^2\vartheta_0\left[1 - \frac{\sin^2\vartheta_0}{4(2r+1)} + \frac{\cos^2\vartheta_0(r^2+2r-11)}{4(r+1)^2(r+5)}\right].$$

Az $S(r, \vartheta_0)$ tényező, amely gömbalakú molekuláknál 1, tartalmazza a molekula alakjának és a dipólmomentum helyzetének a befolyását a dielektromos relaxációnak az akadályozó energiából származó részére; S értékeit különböző ϑ_0 szögek mellett, r függvényeképpen, a 2. ábra tünteti fel. Eddigi eredményeink nyilván minden olyan alakú modellre alkalmazhatók, amelynek forgásait két súrlódási együtthatóval lehet jellemezni. Speciálisan a forgási ellipszoid esetében (az erre vonatkozó Stokes-féle törvény alapján) a két súrlódási együttható r hányadosa az ellipszoid tengelyviszonyának függvényeképpen meghatározható[2,3]. A $\lambda = \frac{a}{c}$ tengelyviszonynak a különböző r-ekhez tartozó értékeit a 2. ábra r tengelye mentén szintén feltüntettük, a molekula alakjától származó befolyás könnyebb áttekintése céljából.

b) *Nagy y esetében* ($y >> 1$, vagyis ha az E akadályozó energia nagy a kT termikus energiához képest) a differenciálegyenlet felhasználása nélkül is célhoz juthatunk. A nagy akadályozó energia ugyanis a kiszemelt dipólmolekulát egy bizonyos, a környezet által meghatározott (az idővel lassan változó) egyensúlyi helyzethez köti, amelynek környezetében a molekula csak kis amplitudójú rezgéseket végezhet. Ezek mellett a Brown-féle mozgás szerepe elhanyagolható, úgyhogy lényegében egy súrlódó közegben a periódikusan változó elektromos tér hatására forgó, ellipszoid-alakú oszcillátorral van dolgunk. Az egyensúlyi helyzetet (az alkalmazott F térerősségeknél fennálló $E >> \mu F$ miatt) az határozza meg, hogy a dipól potenciális energiájának E-től származó része minimum legyen, vagyis μ iránya E'-vel egybeessék. Az egyensúlynak megfelelő ϑ_e, φ_e szögekre nézve tehát (17) szerint fennáll (az általános ellipszoidnál):

$$\sin\vartheta_e \sin\varphi_e = \alpha, \qquad \sin\vartheta_e \cos\varphi_e = \beta, \qquad \cos\vartheta_e = \gamma, \tag{57}$$



2. ábra

míg ψ_e bármilyen értékű lehet. Az ellipszoid forgó mozgását (a tehetetlenségi effektus megengedhető elhagyásával) az ismert

$$w_x = \frac{M_x}{\varrho_a} = \frac{\mu_y(F_z + E_z') - \mu_z(F_y + E_y')}{\varrho_a}, \ldots \tag{58}$$

egyenletek határozzák meg, ahol $F_x, \ldots$ a külső térerősségnek, $E_x', \ldots$ pedig az E akadályozó energiának megfelelő, $E' = E/\mu$ nagyságú térerősségnek komponensei. (58)-ból a (13)-nak megfelelő $\dot\vartheta = w_x \cos\varphi - w_y \sin\varphi, \ldots$ egyenleteknek, továbbá gömbháromszögtani összefüggéseknek a felhasználásával következik:

$$\dot{\vartheta}=(E+\mu F\cos\Theta)\left[\cos\vartheta\left(\frac{\alpha}{\varrho_b}\sin\varphi+\frac{\beta}{\varrho_a}\cos\varphi\right)-\gamma\sin\vartheta\left(\frac{\cos^2\varphi}{\varrho_a}+\frac{\sin^2\varphi}{\varrho_b}\right)\right]-$$
$$-\mu F\sin\Theta\left[\sin\vartheta\sin\psi\left(\frac{\alpha}{\varrho_b}\sin\varphi+\frac{\beta}{\varrho_a}\cos\varphi\right)+\right.$$
$$\left.+\gamma\cos\vartheta\sin\psi\left(\frac{\cos^2\varphi}{\varrho_a}+\frac{\sin^2\varphi}{\varrho_b}\right)+\gamma\left(\frac{1}{\varrho_a}-\frac{1}{\varrho_b}\right)\cos\psi\sin\varphi\cos\varphi\right],$$
$$\dot{\varphi}=(E+\mu F\cos\Theta)\left[\frac{\cos^2\vartheta}{\sin\vartheta}\left(\frac{\alpha}{\varrho_b}\cos\varphi-\frac{\beta}{\varrho_a}\sin\varphi\right)+\frac{\sin\vartheta}{\varrho_c}(\alpha\cos\varphi-\beta\sin\varphi)+\right.$$
$$\left.+\gamma\left(\frac{1}{\varrho_a}-\frac{1}{\varrho_b}\right)\cos\psi\sin\varphi\cos\varphi\right]+ \tag{59}$$
$$+\mu F\sin\Theta\left[\frac{1}{\varrho_c}\cos\vartheta\sin\psi(\alpha\cos\varphi-\beta\sin\varphi)+\right.$$
$$+\frac{1}{\varrho_c}\cos\psi(\alpha\sin\varphi+\beta\cos\varphi)-\cos\varphi\sin\psi\left(\frac{\alpha}{\varrho_b}\cos\varphi-\frac{\beta}{\varrho_a}\sin\varphi\right)+$$
$$\left.+\gamma\left(\frac{1}{\varrho_a}-\frac{1}{\varrho_b}\right)\frac{\cos^2\vartheta}{\sin\vartheta}\sin\psi\sin\varphi\cos\varphi+\gamma\frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta}\cos\psi\left(\frac{\sin^2\varphi}{\varrho_a}+\frac{\cos^2\varphi}{\varrho_b}\right)\right];$$

ψ-ra nem lesz szükségünk. A fenti általános kifejezések jelentékenyen egyszerűsödnek az egyensúlyi helyzet környezetében, ahol a

$$\vartheta\to\vartheta_e+\vartheta,\qquad \varphi\to\varphi_e+\varphi \tag{60}$$

átírás után ϑ és φ kicsiny volta miatt a $\cos(\vartheta_e+\vartheta)\approx\cos\vartheta_e-\sin\vartheta_e\cdot\vartheta$ és a hasonló közelítéseket alkalmazhatjuk, sőt az E-hez képest igen kicsiny μF együtthatójú tagokban közvetlenül az egyensúlyi szögértékeket vehetjük. Ily módon (57) figyelembevételével adódik:

$$\dot{\vartheta}=-E(c_1\vartheta+c_2\varphi)-\mu F\sin\Theta\left(c_1\sin\psi_e-\frac{c_2}{\varkappa}\cos\psi_e\right)$$
$$\dot{\varphi}=-E(c_3\vartheta+c_4\varphi)-\mu F\sin\Theta\left(c_3\sin\psi_e-\frac{c_4}{\varkappa}\cos\psi_e\right), \tag{61}$$

ahol

$$\varkappa=\sqrt{\alpha^2+\beta^2},\quad c_1=\frac{1}{\varkappa^2}\left(\frac{\alpha^2}{\varrho_b}+\frac{\beta^2}{\varrho_a}\right),\quad c_2=\varkappa^2c_3=\frac{\alpha\beta\gamma}{\varkappa}\left(\frac{1}{\varrho_b}-\frac{1}{\varrho_a}\right),$$
$$c_4=\frac{\gamma^2}{\varkappa^2}\left(\frac{\alpha^2}{\varrho_a}+\frac{\beta^2}{\varrho_b}\right)+\frac{\varkappa^2}{\varrho_c}.$$

Hasonlóan, a (60) helyettesítések után a μ momentum F-re való vetületére [$\mu_F=-u_1/F_0$, l. (17)] kapjuk:

$$\mu_F=\mu[\cos\Theta-\sin\Theta(\vartheta\sin\psi_e-\varkappa\varphi\cos\psi_e)]. \tag{62}$$

A (61) megoldása a következő alakú ($F=F_0e^{i\omega t}$-vel):

$$\vartheta=\mu F\sin\Theta(a_1\sin\psi_e+b_1\cos\psi_e),\quad \varphi=\mu F\sin\Theta(a_2\sin\psi_e+b_2\cos\psi_e), \tag{63}$$

ahol a_1, a_2, b_1, b_2 könnyen meghatározható állandók. (63)-mal kapjuk (62) átlagértékére $\left(\overline{\sin^2\Theta\sin^2\psi_e}=\overline{\sin^2\Theta\cos^2\psi_e}=\frac{1}{3}\text{ felhasználásával}\right)$: $\frac{1}{3}\mu^2F(-a_1+\varkappa b_2)$. Innen a_1, b_2 értékeivel egyszerű számítások után a keresett átlagos dipólmomentum:

$$\overline{m}=\frac{2}{3}\mu^2F\frac{EB+i\omega A}{E^2B+2i\omega EA-\omega^2}, \tag{64}$$

ahol

$$A=\frac{1}{2}\left(\frac{\beta^2+\gamma^2}{\varrho_a}+\frac{\gamma^2+\alpha^2}{\varrho_b}+\frac{\alpha^2+\beta^2}{\varrho_c}\right),\quad B=\frac{\alpha^2}{\varrho_b\varrho_c}+\frac{\beta^2}{\varrho_c\varrho_a}+\frac{\gamma^2}{\varrho_a\varrho_b}. \tag{65}$$

(64) átalakítása mutatja, hogy az általános ellipszoid esetében az átlagos momentum két relaxációs idővel fejezhető ki:

$$\overline{m}=\frac{\mu^2F}{3E}\left(\frac{1}{1+i\omega\tau_1}+\frac{1}{1+i\omega\tau_2}\right),\quad \tau_{1,2}=\frac{1}{E}\,\frac{A\pm\sqrt{A^2-B}}{B}\ \text{[l. (65)]}. \tag{66}$$

Forgási ellipszoidnál ($\varrho_a=\varrho_b=\varrho$, $\gamma=\cos\vartheta_0$, $\alpha=\sin\vartheta_0$) a két relaxációs idő:

$$\tau_1=\frac{\varrho}{E},\quad \tau_2=\frac{1}{E\left(\frac{\alpha^2}{\varrho_c}+\frac{\gamma^2}{\varrho}\right)}, \tag{67}$$

gömbnél pedig ($\varrho_c=\varrho$) a *Debye* és *Ramm* által megadott közös $\tau=\varrho/E$ értéket kapjuk.

(66)-ból következik, hogy a viszonylag alacsony frekvenciáknál ($\omega\tau_n<<1$) fennálló

$$\overline{m}=\frac{\mu^2F}{\frac{3}{2}E}(1-i\omega\tau_{\text{eff}}) \tag{68}$$

összefügéssel definiált „hosszúhullámú" vagy „effektív" relaxációs idő az általános ellipszoid esetében:

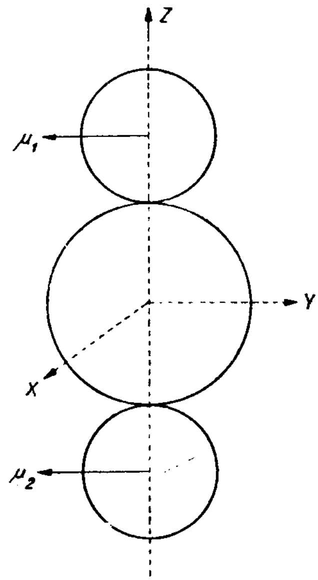
$$\tau_{\text{eff}}=\frac{1}{2E}\,\frac{(\beta^2+\gamma^2)\varrho_b\varrho_c+(\gamma^2+\alpha^2)\varrho_c\varrho_a+(\alpha^2+\beta^2)\varrho_a\varrho_b}{\alpha^2\varrho_a+\beta^2\varrho_b+\gamma^2\varrho_c}; \tag{69}$$

forgási ellipszoidnál:

$$\tau_{\text{eff}}=\frac{\varrho}{2E}\left(1+\frac{\varrho_c}{\alpha^2\varrho+\gamma^2\varrho_c}\right), \tag{70}$$

gömbnél pedig ϱ/E.

II. Forgásra képes dipólcsoportokkal rendelkező molekulák. Azt az egyszerű és sokszor megvalósuló esetet vizsgáljuk, amikor a molekula két egyforma dipólcsoportot tartalmaz és ezek forgástengelye közös (Z, 3. ábra). Mindegyik csoport dipólmomentumának a forgástengelyre merőleges komponense legyen μ_1, a párhuzamos komponensek eredője pedig zérus. A molekulának mint egésznek az X és Y tengelyek körüli forgásainál fellépő súrlódási együttható legyen ϱ, egy-egy csoportnak a Z tengely körüli forgásaira vonatkozó súrlódási együttható pedig ϱ_1. A csoportok forgását a molekulán belül szabadnak tekintjük, vagyis feltételezzük, hogy a molekulán belüli erők a forgást nem akadályozzák.



3. ábra

A probléma az ellipszoid-modellnél alkalmazott eljáráshoz analóg módon tárgyalható. Az általános (9) egyenletben most az x^σ koordináták a molekulatengely irányát megszabó ϑ, ψ szögek és a két csoport saját forgásait leíró φ_1, φ_2 szögek lehetnek, de az utóbbiak helyett előnyösebb a

$$\chi=\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}, \quad \eta=\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2} \tag{71}$$

koordinátákat bevezetni ($x^1=\vartheta$, $x^2=\psi$, $x^3=\chi$, $x^4=\eta$). A diffúziós tenzor főértékei most nyilván [l. (7)]: kT/ϱ, kT/ϱ, kT/ϱ_1, kT/ϱ_1. Ezekből, valamint a könnyen általánosítható (13)-ból következnek [(71) és (14) felhasználásával] a tenzorkomponensek:

$$\begin{gathered} D^{11}=D^{22}\sin^2\vartheta=\frac{kT}{\varrho}, \quad D^{33}=\frac{kT}{\varrho}\operatorname{ctg}^2\vartheta+\frac{1}{2}\frac{kT}{\varrho_1}, \\ D^{44}=\frac{1}{2}\frac{kT}{\varrho_1}, \quad D^{23}=D^{32}=-\frac{kT}{\varrho}\frac{\cos\vartheta}{\sin^2\vartheta}, \end{gathered} \tag{72}$$

a többi zérus; $\sqrt{g}=2\sin\vartheta$. Az u potenciális energia [amelyet úgy kaphatunk meg, hogy a φ_1 és φ_2-vel felírt (17) összegét vesszük $\alpha=1, \beta=0, \gamma=0$, $\mu=\mu_1$-gyel, majd (71)-et alkalmazzuk]:

$$\begin{gathered} u=u_0+u_1e^{i\omega t}, \qquad u_0=-2E\sin\vartheta\sin\chi\cos\eta, \\ u_1=-2\mu_1F_0[\cos\Theta\sin\vartheta\sin\chi\cos\eta+ \\ +\sin\Theta(\cos\vartheta\sin\psi\sin\chi-\cos\psi\cos\chi)\cos\eta]. \end{gathered} \tag{73}$$

Így a (18) feltevéssel adódó (19) egyenletet az

$$y=\frac{E}{kT}, \quad r=\frac{\varrho}{\varrho_1} \tag{74}$$

jelölésekkel explicite a (22)-nek megfelelő alakban írhatjuk:

$$\frac{i\omega\varrho}{kT}f_1=D[f_1]+yH[f_1]+G(\vartheta, \psi, \chi, \eta; y), \tag{75}$$

de most

$$D[f_1]=\frac{\partial^2 f_1}{\partial\vartheta^2}+\frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta}\frac{\partial f_1}{\partial\vartheta}+\frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 f_1}{\partial\psi^2}+$$
$$+\left(\frac{r}{2}+\frac{\cos^2\vartheta}{\sin^2\vartheta}\right)\frac{\partial^2 f_1}{\partial\chi^2}+\frac{r}{2}\frac{\partial^2 f_1}{\partial\eta^2}-2\frac{\cos\vartheta}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 f_1}{\partial\psi\partial\chi}, \tag{76}$$

$$H[f_1]=2\Big\{\left[(r+1)\sin\vartheta f_1-\cos\vartheta\frac{\partial f_1}{\partial\vartheta}\right]\sin\chi+$$
$$+\left[\frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta}\frac{\partial f_1}{\partial\psi}-\left(\frac{r}{2}\sin\vartheta+\frac{\cos^2\vartheta}{\sin\vartheta}\right)\frac{\partial f_1}{\partial\chi}\right]\cos\chi\Big\}\cos\eta+r\sin\vartheta\sin\chi\sin\eta\frac{\partial f_1}{\partial\eta}, \tag{77}$$

$$G=\frac{2\mu_1F_0}{kT}[\cos\Theta\cdot A(\vartheta,\chi,\eta)+\sin\Theta\cdot B(\vartheta,\psi,\chi,\eta)],$$

$$A=e^{2y\sin\vartheta\sin\chi\cos\eta}\{(r+1)\sin\vartheta\sin\chi\cos\eta-$$
$$-y[2\cos^2\vartheta\cos^2\eta+r\sin^2\vartheta(\cos^2\chi\cos^2\eta+\sin^2\chi\sin^2\eta)]\},$$
$$B=e^{2y\sin\vartheta\sin\chi\cos\eta}\{(r+1)(\cos\vartheta\sin\psi\sin\chi-\cos\psi\cos\chi)\cos\eta+ \tag{78}$$
$$+y[2\sin\vartheta\cos\vartheta\sin\psi\cos^2\eta-r\sin\vartheta\cos\vartheta\sin\psi(\cos^2\chi\cos^2\eta+\sin^2\chi\sin^2\eta)-$$
$$-r\sin\vartheta\cos\psi\sin\chi\cos\chi(\cos^2\eta-\sin^2\eta)]\}.$$

a) *Kis y esetében* a (31) után leírt módszernek megfelelően a $D[U]+$ $+\lambda U=0$ egyenletből indulunk ki. Ennek sajátértékei, mint az (76) és (23) összehasonlításából megállapítható, az r helyett $\frac{r}{2}$-vel képezett (33) sajátfüggvényeknek $e^{il\psi}$-vel való szorzatai, a megfelelő sajátértékek pedig [l. (32)]: $j(j+1)+n^2\left(\frac{r}{2}-1\right)+l^2\frac{r}{2}$. Az átlagos momentumnak a második közelítésben való kiszámításánál a következő sajátértékek és sajátfüggvények szerepelnek:

$$\begin{aligned}
\lambda_1&=1+r; & U_1&=\sin\vartheta\sin\chi\cos\eta,\\
& & U_1'&=(\cos\psi\cos\chi-\cos\vartheta\sin\psi\sin\chi)\cos\eta,\\
\lambda_2&=6; & U_2&=1-\frac{3}{2}\sin^2\vartheta,\\
& & U_2'&=\sin\vartheta\cos\vartheta\sin\psi,\\
\lambda_3&=2r; & U_3&=\cos 2\eta,\\
\lambda_4&=6+2r; & U_4&=\left(1-\frac{3}{2}\sin^2\vartheta\right)\cos 2\eta,\\
& & U_4'&=\sin\vartheta\cos\vartheta\sin\psi\cos 2\eta,\\
\lambda_5&=2+4r; & U_5&=\sin^2\vartheta\cos 2\chi\cos 2\eta,\\
& & U_5'&=\sin\vartheta(\cos\psi\sin 2\chi+\cos\vartheta\sin\psi\cos 2\chi)\cos 2\eta,\\
\lambda_6&=2+2r; & U_6&=\sin^2\vartheta\cos 2\chi,\\
& & U_6'&=\sin\vartheta(\cos\psi\sin 2\chi+\cos\vartheta\sin\psi\cos 2\chi).
\end{aligned} \tag{79}$$

A továbbiakban az I. a.-ban részletezett eljárást alkalmazva, hosszabb számítások után a következő eredményt kapjuk. Az átlagos momentum:

$$\overline{m}=\frac{2\mu_1^2F}{3kT}\sum\frac{C_k}{1+i\omega\tau_k} \tag{80}$$

($\sqrt{2}\mu_1=\mu$ a molekula eredő dipólmomentuma), amelyben az y^2-es tagokig bezárólag 5 relaxációs idő fordul elő:

$$\tau_1=\frac{\varrho}{(r+1)kT}\left\{1-\frac{y^2}{3(r+1)}\left[\frac{r(2r+1)}{2(3r+1)}+\frac{r-2}{r-5}-\frac{r+1}{(r-1)(r+5)}\right]\right\},$$

$$C_1=1-\frac{y^2}{6(r+1)}\left[\frac{r(2r+1)(5r+1)}{(3r+1)^2}+\frac{6(r-2)(r-3)}{(r-5)^2}+\frac{2(r+1)}{3(r-1)^2}+\frac{4(r+1)}{3(r+5)^2}-1\right]; \tag{81}$$

$$\tau_2=\frac{\varrho}{6kT},\quad C_2=\frac{y^2(r-2)^2}{9(r-5)^2};\quad \tau_3=\frac{\varrho}{2rkT},\quad C_3=\frac{y^2}{9(r-1)^2};$$

$$\tau_4=\frac{\varrho}{2(r+3)kT},\quad C_4=\frac{2y^2}{9(r+5)^2};\quad \tau_5=\frac{\varrho}{2(2r+1)kT},\quad C_5=\frac{y^2r^2}{6(3r+1)^2}.$$

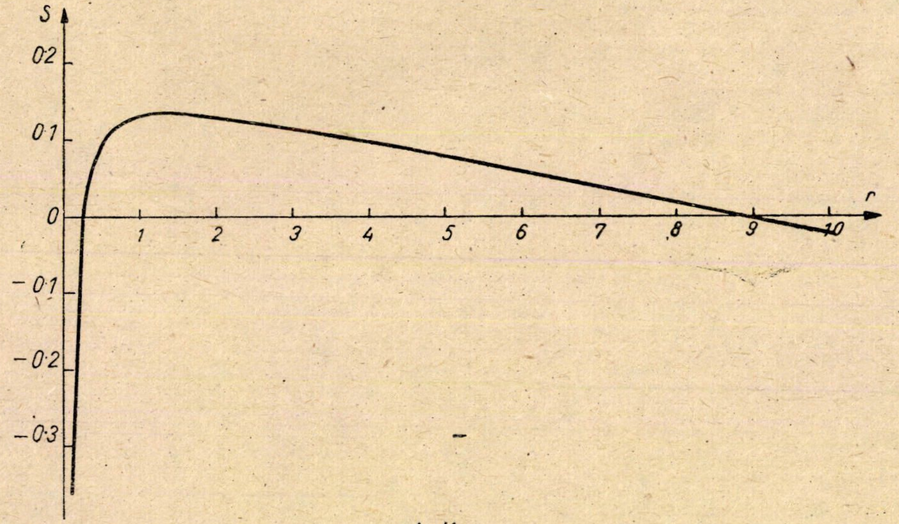
Alacsony frekvenciáknál ($\omega\tau_n<<1$):

$$\overline{m}=\frac{2\mu_1^2F}{3kT}\left\{\left(1-\frac{y^2}{18}\right)-i\omega\frac{\varrho}{(r+1)kT}[1-y^2S(r)]\right\}, \tag{82}$$

ahol

$$S(r)=\frac{1}{6}\left[\frac{11-r}{9}-\frac{1}{r(r+3)}-\frac{r^2}{2(r+1)(2r+1)}\right].$$

Az $S(r)$ függvényt, amely az alkalmazott modellnél a dielektromos veszteségeknek az akadályozó energiától származó részére mérvadó, a 4. ábra tünteti fel.



4. ábra

b) *Nagy y esetében* $(E >> kT)$ az I. b.-ben' részletezettekhez hasonló számítások szerint az átlagos momentum:

$$\overline{m} = \frac{2\mu_1^2 F}{3E}\left(\frac{1}{1+i\omega\tau_1} + \frac{1}{1+i\omega\tau_2}\right), \quad \tau_1 = \frac{\varrho}{E}, \quad \tau_2 = \frac{\varrho_1}{E}. \tag{83}$$

Hosszú hullámoknál [l. (68)]:

$$\overline{m} = \frac{2\mu_1^2 F}{\frac{3}{2}E}(1 - i\omega\tau_{\text{eff}}), \quad \tau_{\text{eff}} = \frac{\varrho + \varrho_1}{2E}. \tag{84}$$

Az átlagos momentumra nyert eredményeinkből a (3)-nál említett módon kaphatjuk a mérésekkel tanulmányozható $\varepsilon'(\omega)$ és $\varepsilon''(\omega)$ diszperzió-, ill. abszorpciógörbéket. Az a tény, hogy számításaink szerint mind ellipszoidalakú, mind pedig forgó dipólcsoportokkal rendelkező molekuláknál több relaxációs idő lép fel, mint gömbalakú molekuláknál, általában az anomális diszperzió tartományának nagyobb frekvenciák felé való eltolódását, az abszorpciógörbén pedig a maximum környékének eltolódását és kiszélesedését eredményezi. (Több maximum csak akkor várható, ha a relaxációs idők igen nagy mértékben különbözők.) A mérésekkel való részletes összehasonlításnál a híg poláris oldatokban végzett (ill. végtelen hígitásra — $E=0$ — extrapolált) méréseknél bevált μ, ϱ, r értékekből kell kiindulnunk, hogy a koncentráció emelésével növekvő E akadályozó energiára helyesen következtethessünk és a (nagyobb súrlódási együtthatókban megnyilvánuló) asszociációt tanulmányozhassuk. A jelen dolgozat célja azonban az elmélet alapján várható összefüggéseknek a megállapítása volt, méréseket és a mérési eredményeknek a fenti szempontokból való feldolgozását egy későbbi munka keretében vettük tervbe.

Szegedi Tudományegyetem
Kisérleti Fizikai Intézete.

IRODALOM

1 *Debye P.:* Polare Molekèln, Leipzig 1929.
2 *Perrin F.:* Journ. Phys. (7), *5,* (1934), 497.
3 *Budó Á., Fischer E., Miyamoto S.:* Phys. Zs. *40,* (1939), 337.
4 *Budó Á.:* Phys. Zs. *39,* (1938), 706. — Journ. Chem. Phys. *17,* (1949), 686.
5 *Kirkwood J. G.* and *Fuoss R. M.:* Journ. Chem. Phys. *9,* (1941), 329.
6 *Debye P.:* Phys. Zs. *36,* (1935), 100, 193.
7 *Onsager L.:* Amer. Chem. Soc. *58,* (1936), 1486.
8 *Kirkwood J. G.:* Journ. Chem. Phys. *7,* (1939), 592.
9 *Frank F. C.:* Trans. Farad. Soc. *42 A,* (1946), 19.
10 *Debye P.* und *Ramm W.:* Ann. d. Phys. (5), *28,* (1937), 28.
11 *Cole R. H.:* Journ. Chem. Phys. *6,* (1938), 385.
12 *Kirkwood J. G.:* Trans. Farad. Soc. *42 A,* (1946), 7.
13 *Fischer E.:* Phys. Zs. *40,* (1939), 645.; Zs. f. Naturforschg. *4a* (1949), 707.; Ann. d. Phys. *6,* (1949), 117.; Zs. f. Phys. *127,* (1949), 49.
14 *Reiche F.* und *Rademacher H.:* Zs. f. Phys. *39,* (1927), 444.; *Kronig R.* and *Rabi I.:* Phys. Rev. *29,* (1927), 262.

KORREKCIÓ A FERMI-FÉLE KINETIKAI ENERGIAKÉPLETBEN

PAUNCZ REZSŐ

Bemutatta Gombás Pál r. tag az 1951. november 26-án tartott osztályülésen

Bevezetés

Tekintsünk N szabad elektront igen mély hőmérsékleten V térfogatba bezárva (áthatolhatatlan falak). Az elektrongáz átlagos kinetikai energiáját kétféle módon számíthatjuk ki:

a) Kvantummechanikai dobozmodell. Legyen a V térfogat egy a élű kocka. A lehetséges energiaértékek a következők:

$$E_{n_x n_y n_z} = \frac{h^2}{8m} \frac{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}{a^2} \qquad \begin{matrix} n_x = 1, 2, \ldots \\ n_y = 1, 2, \ldots \\ n_z = 1, 2, \ldots \end{matrix} \tag{1}$$

Az átlagos energiát (mely tisztán kinetikai energia, mert a doboz belsejében a potenciális energiát zérusnak vehetjük) olymódon határozhatjuk meg, ha a legmélyebb állapotokat szukcesszive betöltjük (a Pauli-elv figyelembe vételével minden kvantumállapotban csak két elektront helyezhetünk el, ellentétes spiniránnyal) és az (1) felhasználásával számított összenergiát elosztjuk az elektronok számával (N).

A következők szempontjából igen lényeges, hogy egyik kvantumszám sem lehet zérus. Ebben az esetben ugyanis a megfelelő saját-függvény

$$\psi_{n_x n_y n_z} = \sqrt{\frac{8}{a^3}} \sin \frac{n_x \pi}{a} x \cdot \sin \frac{n_y \pi}{a} y \cdot \sin \frac{n_z \pi}{a} z \tag{2}$$

azonosan zérus lenne. (Cosinus-függvény viszont nem lehet saját-függvény, mert nem teljesíti a határfeltételeket.)

b) Fermi—Dirac-statisztika. Igen mély hőmérsékleten e módszer alapján N elektron átlagos kinetikai energiája a következőnek adódik:

$$\bar{E} = \frac{h^2}{8m} \frac{3}{5} \left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3} \left(\frac{N}{V}\right)^{2/3}. \tag{3}$$

Összehasonlítás céljából emeljük ki mind az a, mind a b úton számított átlagenergia értékekből a közös

$$\frac{h^2}{8m} \cdot \frac{1}{a^2} = \frac{h^2}{8m} \cdot \frac{1}{V^{2/3}}$$

szorzó-faktort, a megmaradó rész mind két esetben kizárólag N-től függ. Ez utóbbi értékeit tartalmazza az I. táblázat.

I. TÁBLÁZAT

N	Qu.	Fermi
1	3	0,59
10	6	2,70
20	8,10	4,28
30	9,93	5,61
40	11,40	6,80
50	12,80	7,89
100	18,50	12,53
1000	70,12	58,18

A táblázat áttekintése azt mutatja, hogy a Fermi-féle képlet alapján számított értékek jóval kisebbek, mint a kvantummechanikai úton számított értékek (a százalékos eltérés még 1000-nél is 20 százalék körül van).

A következőkben kimutatjuk, hogy ez az eltérés szinte teljesen megszüntethető, ha a Fermi-féle levezetés gondolatmenetének megtartása mellett felhasználjuk azt a tényt, hogy egyik impulzuskomponens sem lehet zérus.

Effektív impulzustérfogat

A kvantummechanikai dobozmodell tárgyalásával kapcsolatban már rámutattunk arra, hogy egyik kvantumszám értéke sem lehet zérus. Ábrázoljuk a lehetséges állapotokat egy olyan térben, melynek derékszögű koordinátái az n_x, n_y, n_z kvantumszámok legyenek. Minden egyes állapotnak egy rácspont felel meg, egész számú koordinátákkal. Megadott N esetén az összes betöltött állapotnak megfelelő rácspontok egy gömb belsejében lesznek (gömbnyolcad), melynek sugara a maximális r.

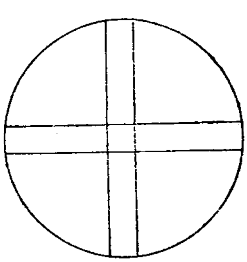
$$r^2 = n_x^2 + n_y^2 + n_z^2.$$

Figyelembe kell azonban venni az előbbiek alapján azt, hogy mindazok a rácspontok, amelyeknél bármelyik koordináta zérus, üres állapotot jelentenek. Ezek a rácspontok a három koordinátasíkon találhatók.

Másrészt az impulzus x komponensének négyzetére a következő érték adódik:

$$p_x^2 = \frac{h^2}{4a^2} \cdot n_x^2. \tag{4}$$

Minthogy n_x^2 nem lehet zérus, így p_x^2 sem lehet az. Hasonló a helyzet p_y^2 és p_z^2-tel.



Effektív impulzustérfogat

Azt a tényt, hogy egyik kvantumszám értéke sem lehet zérus, a Fermi-féle statisztikus levezetésnél olymódon vehetjük figyelembe, hogy a $p_x = 0$, $p_y = 0$, $p_z = 0$ koordinátasíkok megfelelő vastagságú környezetét kivágjuk az impulzustérből és a megmaradó *effektív impulzustérfogattal* számolunk.

A legkitűnőbb egyezést a kvantummechanikai értékek akkor mutatják, ha a kivágandó rész vastagsága a legkisebb lehetséges impulzuskomponenssel egyenlő. A kivágandó rész vastagságát $2d$-vel jelölve:

$$2d = \frac{h}{2a} \quad (n_x = 1). \tag{5}$$

A továbbiakban a Fermi-féle levezetés ismert gondolatmenetét követjük.

A maximális energia kiszámítása

N elektronnak megfelelő fázistérfogat a Fermi—Dirac-statisztika szerint (mély hőmérsékleten) $N\frac{h^3}{2}$, ennek egyenlőnek kell lenni a V térfogat és a V_{eff} effektív impulzustérfogat szorzatával:

$$V \cdot V_{\text{eff}} = N \cdot \frac{h^3}{2}. \tag{6}$$

Az effektív impulzustérfogatot az előbbiek alapján úgy nyerjük, ha a p_μ maximális impulzussal leírható gömbből kivágunk három $2d$ vastagságú réteget a koordinátasíkok mentén. A megmaradó effektív impulzustérfogat értéke (l. függelék)

$$V_{\text{eff}} = \frac{4}{3}\pi\left(p_\mu^3 - 4{,}5\,p_\mu^2 d + 5{,}7295\,p_\mu d^2 - 1{,}9098\,\frac{d^4}{p_\mu} - 0{,}40986\,d^3\right). \tag{7}$$

Vezessük be a következő jelölést:

$$p_\mu = r \cdot d. \tag{8}$$

Ekkor V_{eff} a következőképp írható:

$$V_{\text{eff}} = \frac{4}{3}\pi d^3\left(r^3 - 4{,}5\,r^2 + 5{,}7295\,r - 1{,}9098\,\frac{1}{r} - 0{,}40986\right). \tag{9}$$

Helyettesítsük be ezt a képletet a (6) egyenletbe és vegyük figyelembe, hogy (5) szerint:

$$d^3 = \frac{h^3}{64a^3} = \frac{h^3}{64\,V}. \tag{10}$$

A megfelelő egyszerűsítéseket elvégezve a következő egyenletet kapjuk r-re:

$$r^3 - 4{,}5\,r^2 + 5{,}7295\,r - \frac{1{,}9098}{r} - 0{,}40986 = \frac{24}{\pi}N. \tag{11}$$

$r = \sqrt[3]{\frac{24}{\pi}} \cdot x$ helyettesítéssel:

$$x^3 - 2{,}28485\,x^2 + 1{,}4771\,x - \frac{0{,}12693}{x} - 0{,}05365 = N. \tag{12}$$

A (12) egyenletet különböző N értékek mellett numerikusan megoldva megkapjuk x-t, mint N függvényét. A II. táblázatban megadunk néhány x értéket. A nyert számértékek kitűnően approximálhatók a következő kifejezés segítségével:

$$x = N^{1/3} + 0{,}7616 + \frac{0{,}081}{N^{1/3}} - \frac{0{,}031}{N^{2/3}}. \tag{13}$$

II. TÁBLÁZAT

N	num.	x approx
1	1,8118	1,8116
10	2,9466	2,9469
20	3,5015	3,5016
30	3,8917	3,8917
40	4,2027	4,2027
50	4,4655	4,4652
100	5,4195	5,4192
1000	10,7698	10,7697

Behelyettesítve az $r = \sqrt[3]{\frac{24}{\pi}}\,x$ és $p_\mu = r \cdot d = r\,\frac{h}{4\,V^{1/3}}$ összefüggéseket a maximális impulzusra a következőt nyerjük:

$$p_\mu = \frac{h}{2}\left(\frac{3}{\pi}\right)^{1/3}\left(\frac{N}{V}\right)^{1/3}\left\{1 + \frac{0{,}7616}{N^{1/3}} + \cdots\right\}. \tag{14}$$

Levezetésünk eredményeképpen tehát a Fermi-féle kifejezést kaptuk, korrekciós tagokkal kiegészítve.

Az átlag-energia kiszámítása

Azon elektronok számát, amelyek impulzusa az effektív impulzustérfogatban p és $p+dp$ közé esik, a (6) összefüggés segítségével határozhatjuk meg. Ugyanis, ha az impulzusgömb sugarát dp-vel növeljük, a dV_{eff} effektív impulzustérfogatváltozás a következő kapcsolatban van dN részecskeszámváltozással:

$$V \cdot dV_{\text{eff}} = dN \cdot \frac{h^3}{2}. \tag{15}$$

dV_{eff} értéke a (9) alapján:

$$dV_{\text{eff}} = \frac{4\pi}{3} d^3 \left(3r^2 - 9r + 5{,}7295 + \frac{1{,}9098}{r^2}\right) dr. \tag{16}$$

A (10) figyelembevételével a keresett elektronszámra a következőt nyerjük:

$$dN = \frac{\pi}{24}\left(3r^2 - 9r + 5{,}7295 + \frac{1{,}9098}{r^2}\right) dr. \tag{17}$$

Az összenergiát a következő integrál szolgáltatja:

$$E = \int_{p_0}^{p_\mu} \frac{p^2}{2m} dN = \frac{d^2}{2m} \cdot \frac{\pi}{24} \int_{\sqrt{3}}^{r_\mu} (3r^4 - 9r^3 + 5{,}7295 r^2 + 1{,}9098)\, dr \tag{18}$$

$$= \frac{d^2}{2m} \cdot \frac{\pi}{24}\left(\frac{3}{5} r^5 - \frac{9}{4} r^4 + \frac{5{,}7295}{3} r^3 + 1{,}9098 r - 2{,}3347\right). \tag{19}$$

Behelyettesítve d (5) értékét, valamint az $r = \sqrt[3]{\frac{24}{\pi}}\, x$ alapján a következőt nyerjük:

$$E = \frac{h^2}{8m} \cdot \frac{1}{V^{2/3}}\left(\frac{3}{5}\left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3} x^5 - 1{,}107838 x^4 + 0{,}47746 x^3 + 0{,}123 x - 0{,}076\right). \tag{20}$$

Ebbe a képletbe kell behelyettesítenünk a (12) egyenlet numerikus megoldása útján nyert x értékeket, N-nel való osztás után nyerjük az átlagenergia értékeit. Az így nyert értékeket a III. táblázat c. oszlopában találjuk (num.).

Közelítő, approximációs képletet kaphatunk az átlagenergiára, ha a következő hányadost képezzük:

$$\bar{E} = \frac{E}{N} = \frac{h^2}{8m} \cdot \frac{1}{V^{2/3}} \frac{0{,}58183 x^5 - 1{,}107838 x^4 + 0{,}47746 x^3 + \cdots}{x^3 - 2{,}28485 x^2 + 1{,}4771 x - \cdots} \tag{21}$$

$$= \frac{h^2}{8m} \frac{1}{V^{2/3}} \left\{ \frac{3}{5}\left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3} (x^2 + 0{,}221556 x + 0{,}124252 + \cdots)\right\}. \tag{22}$$

(N értékét a (12) egyenletből helyettesítettük). Behelyettesítve x approximációs kifejezését (13)-ból

$$E = \frac{h^2}{8m} \cdot \frac{1}{V^{2/3}} \left\{ \frac{3}{5}\left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3} N^{2/3} + 1{,}1078\ N^{1/3} + 0{,}725 \right\}. \tag{23}$$

A (23) alapján számított értékeket a III. táblázat *b* oszlopában láthatjuk (appr.). Az eredmények igen jól egyeznek a numerikusan nyert értékekkel.

III. TÁBLÁZAT

N	Fermi	Korrigált		Kvantum
	a	*b* appr.	*c* num.	*d*
1	0,58	2,41	2,61	3
10	2,69	5,80	5,82	6
20	4,29	8,02	8,03	8,10
30	5,62	9,78	9,80	9,93
40	6,80	11,32	11,33	11,40
50	7,90	12,70	12,72	12,80
60	8,92	13,98	13,99	14,10
70	9,88	15,17	15,18	15,17
80	10,80	16,30	16,31	16,37
90	11,68	17,37	17,38	17,46
100	12,53	18,40	18,41	18,50
1000	58,18	69,99	69,99	70,12

A táblázat áttekintéséből látható, hogy a korrigált energiaképlet igen jól megközelíti a kvantummechanikai értéket.

A korrigált képlet első tagja megegyezik az eredeti Fermi-féle képlettel, a tulajdonképpeni korrekciót tehát a következő tagok adják:

$$E_{\text{korr}}=\frac{h^2}{8m}\cdot\frac{1}{V^{2/3}}(1{,}1078\,N^{1/3}+0{,}725). \tag{24}$$

Függelék. Az effektív impulzustérfogat számítása. A p_μ sugarú gömb $\frac{4}{3}\pi p_\mu^3$ térfogatából le kell vonnunk három $2d$ vastagságú gömbréteget a koordináta síkok mentén:

$$-6p_\mu^2 d+2\pi d^3.$$

Ennél a levonásnál azonban kétszer vontuk le a gömbrétegek közös részeit, ez utóbbiak térfogatát tehát még hozzá kell adnunk. Két gömbréteg közös részének térfogatát olymódon nyerhetjük, ha a gömböt $x=-d$ $x=+d$, $y=-d$ $y=+d$ párhuzamos síkokkal metsszük. A közös rész térfogatát a következő integrál szolgáltatja:

$$I=2\int_{-d}^{d}\int_{-d}^{d}\sqrt{p_\mu^2-x^2-y^2}\,dx\,dy.$$

$$I=\frac{8}{3}\left\{d^2\sqrt{p_\mu^2-2d^2}+d(3p_\mu^2-d^2)\arcsin\frac{d}{\sqrt{p_\mu^2-d^2}}-p_\mu^3\arcsin\frac{d}{p_\mu^2-d^2}\right\}.$$

Nagyobb p_μ-ekre (a négyzetgyök és az arc sinus sorba fejtésével) következő képletet nyerjük:

$$8\,d^2 p_\mu - \frac{8}{3}\frac{d^4}{p_\mu} + \cdots$$

Ennek az értéknek a háromszorosát kell vennünk:

$$24 d^2 p_\mu - 8\,\frac{d^4}{p_\mu}.$$

A gömbrétegek levonásánál háromszor levontuk, a közös részeknél háromszor hozzáadtuk a legbelső 8 d^3 térfogatú kockát. Az effektív térfogat kiszámításához tehát még ezt a $8d^3$ értéket le kell vonnunk:

Az effektív impulzustérfogat értéke tehát:

$$V_{\text{eff}} = \frac{4}{3}\,\pi p_\mu^3 - 6 p_\mu^2 d + 24 p_\mu d^2 - 8\,\frac{d^4}{p_\mu} + (2\pi - 8) d^3.$$

Összefoglalás

A Fermi-féle kinetikus energiaképletet korrigáltuk annak a feltevésnek alapján, hogy egyik impulzuskomponens értéke sem lehet zérus (kvantummechanikai dobozmodell) A korrigált képlet igen jó egyezést mutat a kvantummechanikai dobozmodell alapján számított kinetikus energiaértékkel.

Hálás köszönetemet fejezem ki *Gombás Pál* akadémikus úrnak, aki értékes megjegyzéseivel és tanácsaival a dolgozat befejezését nagy mértékben elősegítette.

Szegedi Tudományegyetem
Elméleti Fizikai Intézete.

IRODALOM

[1] *Gombás P.* Die statistische Theorie des Atoms und ihre Anwendungen.

KOZMIKUS SUGÁRZÁS MÉRÉSE BÁNYÁBAN

FENYVES ERVIN és HAIMAN OTTÓ

Bemutatta Jánossy Lajos r. tag az 1952 április 7-én tartott osztályülésen

Bevezetés

1949 júniusától 1951 szeptemberéig kozmikus sugárzási méréseket végeztünk Tatabányán egy 285 m mély bányában, ami. kb. 650 m vízekvivalens mélységnek felel meg. A mérés célja a bányában észlelhető kozmikus sugárzás természetének, a részecskék ionizáló, vagy nem-ionizáló voltának és áthatoló képességének vizsgálata volt.

A legtöbb szerző felfogása szerint a nagy mélységben észlelhető kozmikus sugárzás összetétele hasonló, mint a föld felszínén tengerszint magasságban észlelhető kozmikus sugárzásé, vagyis a sugárzás túlnyomó részét képező kemény komponens főleg mezonokból, a puha komponens pedig főleg elektronokból és fotonokból áll. Ezek a szerzők a sugárzás rendkívül nagy áthatolóképességét (egészen 3000 m vízekvivalens mélységig észleltek kozmikus sugárzást) azzal igyekeztek magyarázni, hogy azok a részecskék, amelyek ilyen mélységig lehatolnak, igen nagy energiájú mezonok. Így például 1000 m vízekvivalens mélységig lehatoló mezonnak $10^{11}\,eV$ nagyságrendű energiával kell rendelkeznie földfelszínen.

Más szerzők a kozmikus sugárzás ilyen nagy mélységbe való lehatolását nem-ionizáló részekkel igyekeztek magyarázni. Ennek megfelelően azt tételezték fel, hogy a nagy mélységekben észlelhető ionizáló részek ezen nem-ionizáló részek szekundérjei. Ezen állításaikat a nagy mélységekben észlelhető részecskék ionizálóképességének és abszorpciójának vizsgálatával igyekeztek bizonyítani. Mérésünk egyik fő célja ezen probléma tisztázása volt.

Kísérleti berendezés

Méréseinket Geiger—Müller csöves koincidenciaberendezés segítségével végeztük. A GM-csövek effektív hossza 100 cm, átmérőjük pedig 4 cm volt. Az intenzitás növelése céljából a csöveket páronként parallel kapcsolva használtuk.

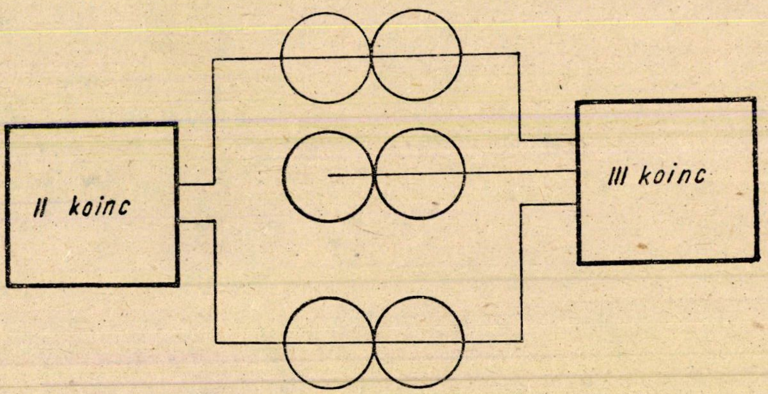
A koincidenciaberendezés kettes, hármas és négyes koincidenciák regisztrálására volt alkalmas. A felbontóképesség 2 mikrosec nagyságú volt. A készülék alkalmas volt több fajta koincidencia egyidejű mérésére. A számlálószerkezetek állását egy önműködő fényképező berendezéssel lehetett regisztrálni.

Az egész mérőberendezés egy meddő kőzetbe vágott kis oldalszelvényben állott.

Kettes koincidenciák és a környezet radioaktivitása

A bányában több szerző[1, 2, 3] észlelt olyan puha sugárzást, amely csak kis valószínűséggel szólaltatja meg a GM-csöveket és így nagyszámú kettes koincidencia mellett csak igen kevés hármas koincidenciát okoz. Ez a puha, kevéssé ionizáló sugárzás a kettes és hármas koincidenciák különbségével mérhető, mivel — ahogyan a továbbiakban megmutatjuk — a hármas és négyes koincidenciák száma közel egyforma, tehát ezek ionizáló részektől származnak.

A kettes koincidenciák mérésénél a csöveket oldalról 5 cm ólommal árnyékoltuk, hogy az egyes csövek beütésszámát csökkentsük és így a véletlen koincidenciák számát a minimumra szorítsuk le. A kettes koincidenciákkal egyidejűleg az azonos látóterű hármas koincidenciákat is észleltük. A csövek elrendezését az 1. ábra mutatja.



1. ábra

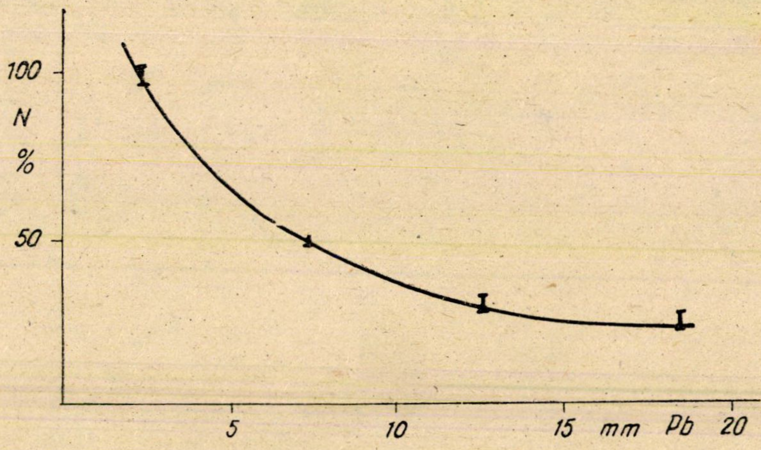
Méréseinket vertikális és horizontális irányban végeztük, hogy ezen sugárzásiránytól való függését meghatározhassuk. Azt találtuk, hogy a kettes és hármas koincidenciák különbsége a vertikális és horizontális irányban ugyanakkora.

Megmértük ezenkívül a kettes és hármas koincidenciák különbségének megfelelő sugárzás abszorpcióját ólomban. A talált abszorpciógörbét a 2. ábra szemlélteti.

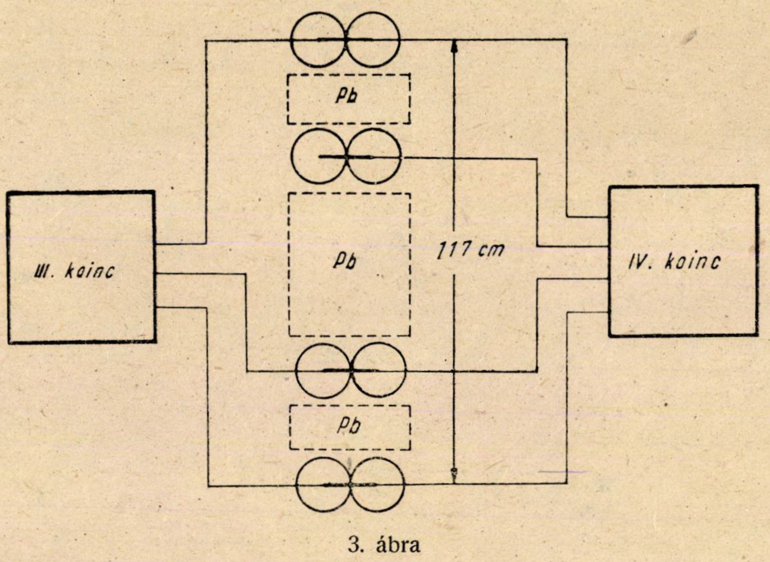
A görbe első pontját abszorbens nélkül mértük. Az abszcisszán feltüntetett 2,5 mm ólom a GM-csövek falának és az állványzat ólomekvivalensének felel meg. A görbén látható, hogy 5 mm ólom abszorbenst helyezve a csövek közé, a sugárzás intenzitása kb. felére csökken.

Az 5 mm-es felezőréteg és a sugárzás izotropikus volta arra engednek következtetni, hogy ez a sugárzás a környezet radioaktivitásának tulajdonítható, megegyezésben *Miesowicz, Jurkiewicz* és *Massalski*[2], valamint *Bollinger* feltevésével. Igy a kettes koincidenciákat, amelyeknek száma esetünkben erősen meghaladta a hármas és négyes koincidenciák számát, főleg a környezet radioaktív γ-sugárzása okozta.

A kettes és hármas koincidenciák viszonya az egyes szerzőknél nagyon különböző. Ezek az eltérések valószínűleg a környezet radioaktivitásának különbözőségével magyarázhatók.



2. ábra



3. ábra

A bányában észlelhető kozmikus sugárzás mérése hármas és négyes koincidenciával

Már első tájékoztató jellegű méréseink is mutatták, hogy a hármas és négyes koincidenciák száma közel egyenlő. Miután a γ-sugarak csak néhány százaléknyi valószínűséggel szólaltatják meg a csöveket, ezért a hármas és négyes koincidenciákat tisztán kozmikus eredetűeknek kell tartanunk. A több hónap alatt végzett mérések arra irányultak, hogy az azonos látóterű hármas és négyes koincidenciák összehasonlításával a bányában észlelhető kozmikus sugárzás ionizáló vagy nem ionizáló voltára pontosabban következtethessünk. A hármas és négyes koincidenciákat a 3. ábrán látható elrendezésben mértük. Ezek a mérések azt mutatták, hogy a hármas és négyes koincidenciák óránkénti száma a hibahatárokon belül megegyezik.

A mérések eredményét az I. táblázatban foglaltuk össze. Ezek szerint a bányában észlelhető kozmikus sugárzás főleg ionizáló részekből áll, egyezésben más szerzők[2,4,5] eredményeivel, akik úgy GM-csöves koincidenciaberendezésekkel, mind Wilson-kamra segítségével mutatták ki a részecskék ionizáló voltát.

I. TÁBLÁZAT

	koinc. száma	órák száma	koinc./óra
hármas koincidenciák (III)	1921	4145	0,463 ± 0,011
négyes koincidenciák (IV)	535	1096	0,488 ± 0,021
III—IV			—0,025 ± 0,024

A bányában észlelhető kozmikus sugárzás abszorpciójának vizsgálata

A következő kérdés a bányában észlelt kozmikus sugárzás áthatolóképességének vizsgálata volt. Az áthatolóképesség egyrészt a részecskék természetére enged következtetni, másrészt — mint a továbbiakban látni fogjuk — a részecskék primér, vagy szekundér voltára vonatkozólag is felvilágosítást nyújt.

Az áthatolóképesség vizsgálata céljából a hármas teleszkóp csövei között 80 cm vastagságú ólomabszorbenst helyeztünk el (3. ábra). Az abszorbens nélküli mérésnél a szélső csövek közötti anyag (GM-csőfalak és állványzat) ólomekvivalense 5 cm volt. Az abszorpciómérés eredményeit a II. táblázat tartalmazza. Látható, hogy az intenzitás 80 cm ólom közbeiktatása után a hibahatárokon belül nem változott. Ez a sugárzás rendkívül nagy áthatolóképességét mutatja.

II. TÁBLÁZAT

	Ólomabszorbens vastagsága	koinc./óra
I.	5 cm	0,463 ± 0,011
I'	85 „	0,480 ± 0,021
ΔI		0,017 ± 0,024
ΔI/I		0,037 ± 0,052

A részecskék nagy áthatolóképessége és ionizáló volta arra enged következtetni, hogy a bányában észlelt kozmikus sugárzás kemény komponense főleg mezonokból áll.

A bányába lehatoló részecskék

A bányában észlelt részecskék rendkívül nagy áthatolóképessége kapcsán felmerül az a kérdés, vajjon azonosak lehetnek-e ezek a részecskék azokkal a részecskékkel, amelyek a bánya feletti egész földrétegen áthatoltak. A kérdés vizsgálata céljából össze kell hasonlítanunk a bányában észlelt sugárzás abszorpcióját ólomban és a lehatoló sugárzás abszorpcióját vastag földrétegekben. Ha feltételezzük, hogy az áthatoló részek a készülék felett lévő egész rétegen áthatoltak, akkor azt várhatjuk, hogy a részecskéknek a GM-csövek közötti ólomban ugyanakkora lesz az abszorpciója, mint a készülék feletti ekvivalens vastagságú földrétegben.

A különböző földmélységekben végzett mérésekből[4] az adódik, hogy az intenzitás 300 m vízekvivalensnél nagyobb mélységekben a mélység —2,7 hatványával csökken.

$$I = \text{const.}\, h^{-2,7}.$$

Ezek szerint méréseinknél a várt relatív intenzitáscsökkenés, ha a csövek közé 80 cm ólomabszorbenst helyezünk, a következőképpen adódik:

$$\Delta I = -2,7\,\text{const.}\, h^{-3,7}\,\Delta h$$

$$\frac{\Delta I}{I} = -2,7\frac{\Delta h}{h} = -2,7\frac{80\times 11,3\times 82/207}{6,5\cdot 104\times {}^1/_2} \simeq -0,03,$$

ahol h a földmélység, amelyben mértünk (650 m vizekvivalens) és Δh a csövek között lévő ólomabszorbens vízekvivalense, ahol az átszámításnál az elméletnek megfelelően az abszorbens Z/A értékét is figyelembe vettük.

A számítás szerint az intenzitáscsökkenésnek 3%-nak kell lennie. Az általunk végzett mérések pontossága nem elégséges ennek ellenőrzésére, mindössze annyit mondhatunk ki, hogy méréseink nem állnak ellentétben a fenti feltevéssel, vagyis nem zárják ki azt a lehetőséget, hogy a bányában észlelt részecskék az egész földrétegen áthatoltak volna.

Hasonló eredményeket talált *Randall, Sherman* és *Hazen*[6] 850 m v. e. mélységben, továbbá *Greisen, Cocconi* és *Bollinger*[7] 1600 m v. e. mélységben. Ezekkel az eredményekkel ellentétben *Barnóthy* és *Forró*[8] 1000 m v. e. mélységben, továbbá *Miyazaki*[9] 3000 m v. e. mélységben sokkal nagyobb intenzitáscsökkenést észleltek.

Összefoglalás

A bányában végzett méréseink eredményei összefoglalva a következők:

1. A kettes koincidenciákat főleg a radioaktív háttér okozza.

2. A bányában észlelhető kemény kozmikus sugárzás erősen ionizáló és nagy áthatolóképességű, tehát feltehetően mezonokból áll.

3. Ezen részecskék általunk talált áthatolóképessége nem mond ellent annak a feltevésnek, hogy ezek a részecskék a bánya felett lévő egész földrétegen áthatoltak.

Ezen a helyen kell köszönetet mondanunk *Kurtha Géza* műszerész kartársunknak, aki a készülék építésénél és a mérés megindításánál nagy segítségünkre volt. Ugyancsak köszönettel tartozunk a tatabányai XV. akna dolgozóinak és vezetőségének, akik mindenkor szívesen nyújtott segítségükkel méréseinket lehetővé tették.

Magyar Tudományos Akadémia
Központi Fizikai Kutató Intézet
Kozmikus Sugárzási Osztálya.

IRODALOM

[1] *J. Barnóthy* és *M. Forró,* Phys. Rev. *55,* (1939), 870.
[2] *M. Miesowicz, L. Jurkiewicz* és *J. M. Massalski,* Phys. Rev. *77,* (1950), 380.
[3] *L. M. Bollinger,* Phys. Rev. *79,* (1950), 207.
[4] *V. C. Wilson,* Phys. Rev. *55,* (1939), 6.
[5] *O. L. Tiffany* és *W. E. Hazen,* Phys. Rev. *77,* (1950), 849.
[6] *C. A. Randall, N. Sherman* és *W. E. Hazen,* Phys. Rev. *79,* (1950), 905.
[7] *K. Greisen, G. Cocconi* és *L. M. Bollinger,* Phys. Rev. *82.* (1951), 294.
[8] *J. Barnóthy* és *M. Forró,* Phys. Rev. *74,* (1948), 1300.
[9] *Y. Miyazaki,* Phys. Rev. *76,* (1949), 1733.

LUMINESZKÁLÓ POROK NÉHÁNY OPTIKAI TULAJDONSÁGA

BODÓ ZALÁN

Bemutatta Gyulai Zoltán lev. tag az 1951 június 11-én tartott osztályülésen

Bevezetés

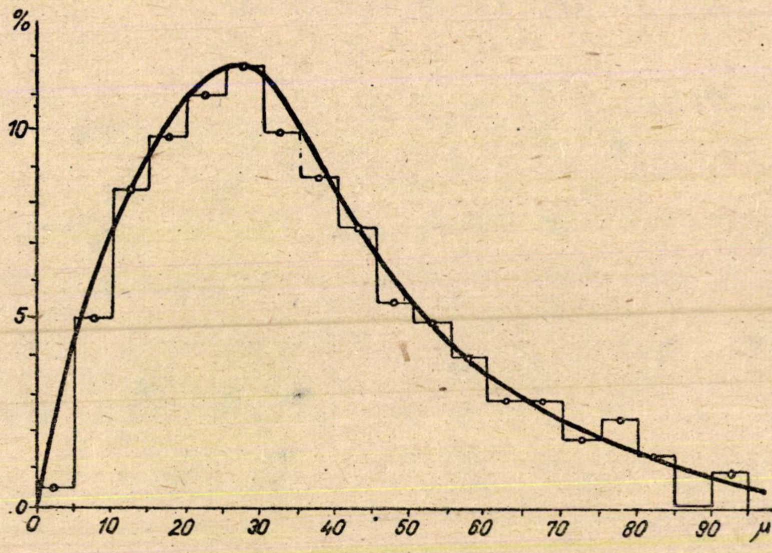
Régóta köztudomású, hogy a fluoreszcens porok világítóképessége a szemcsenagyságnak függvénye. A porokat agyon lehet őrölni, azaz a szemcsenagyság csökkentésével a világítóképességet igen tetemesen el lehet rontani. Kutatólaboratóriumunkban vizsgálatot indítottunk, hogy megállapítsuk e fénycsökkenés mértékét és okait. Ezért először is a világítóképességnek a szemcsenagyság függvényében való megmérését tűztük ki feladatul.

A vizsgálat tárgyául választott por antimonnal és mangánnal aktivált kálciumklorofluorofoszfát volt.

Az elkészült por szemcsenagysága igen tág határok között változott. Mikroszkópikus vizsgálat szerint a szemcsék nagysága 1 μ-tól 100 μ-ig terjedt. A szemcsenagyságok százalékos eloszlásának meghatározása igen nehéz feladat. Tekintetbe kell venni ugyanis, hogy pl. 3000 db. 1 μ-os szemcse összsúlya egyetlen egy 40 μ-os szemcse súlyának mindössze 4,7 %-a. Ezért, ha a helyes eloszlásról akarunk képet kapni sok 10 000 db. szemcse nagyságának megmérése szükséges. Ez azonban elkerülhető a következő módon: pár száz szemcsét megmérve megnézzük, hogy mi pl. az 1, 2, 3 és 4 μ-os szemcsék egymáshozképesti relatív gyakorisága. Ezután figyelmünket már csak a 3 μ-osnál nagyobb szemcsékre fordítva a 4, 5, 6 és 7 μ-os szemcsék egymáshozképesti relatív gyakoriságát határozzuk meg. Így szakaszokból építhetjük fel a teljes eloszlást. A kezdeti por eloszlásának ilyen felvételét 5 μ-os pontossággal az I. táblázat és az 1. ábra tünteti fel. Láthatjuk, hogy kb. 38 000 szemcse megszámlálását tudtuk helyettesíteni 900 szemcse megmérésével. Természetesen ez az eljárás pontosság szempontjából nem azonos azzal, mintha 38 000 szemcsét számoltunk volna meg, de az eloszlás kb.-i képét megkaptuk, ha kisebb pontossággal is, de lényegesen kevesebb munkával. Ez mindenesetre azt mutatta, hogy egy frissen készült halofoszfát porban, miként már említettem, 1 μ-tól kb. 100 μ-ig minden szemcsenagyság képviselve volt.

Egyenlő szemcsenagyságú szemcsék kiválasztása

Az első feladatunk az volt, hogy az ilyen különböző nagyságú szemcsék keverékéből határozott nagyságú szemcséket válasszunk ki. Erre a célra ismételt ülepítési eljárás szolgált. Az ülepítés állandó hőmérsékleten tartott és így állandó viszkozitású vízben történt. Megfelelő magasságú folyadékoszlopban felrázott port meghatározott ideig ülepedni hagytunk. A le nem ülepedett

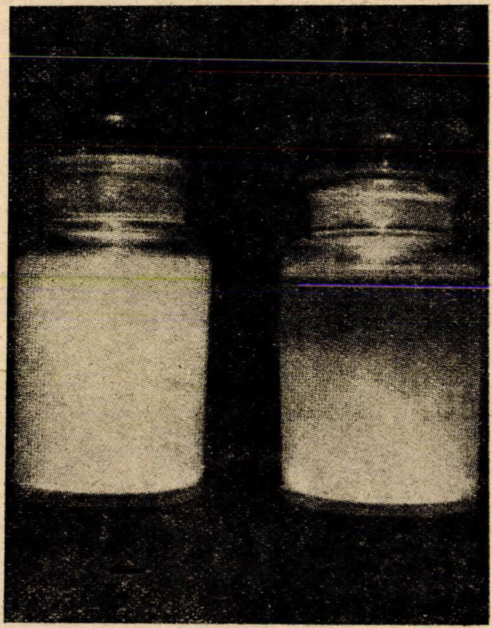


1. ábra
Az eredeti por szemcsenagyság eloszlása

I. TÁBLÁZAT

Szemcsenagyság	Szemcsék száma				Teljes térfogat	Százalékos térfogat
μ	mért			számított	1000 μ^3	%
0—5			184	22470	350	0,5
5—10			77	9390	3960	5,3
10—15			26	3172	6200	8,4
15—20		156	13	1586	7220	9,7
20—25		70		712	8120	10,9
25—30		41		417	8670	11,7
30—35		21		214	7340	9,9
35—40	122	12		122	6430	8,6
40—45	72			72	5530	7,5
45—50	38			38	4080	5,5
50—55	25			25	3620	4,9
55—60	16			16	3040	4,1
60—65	9			9	2190	3,0
65—70	7			7	2150	2,9
70—75	4			4	1570	2,1
75—80	4			4	1820	2,4
80—85	2			2	1120	1,5
85—90	0			0	0	0,0
90—95	1			1	790	1,1
Összesen	300	300	300	38261	74200	100,0

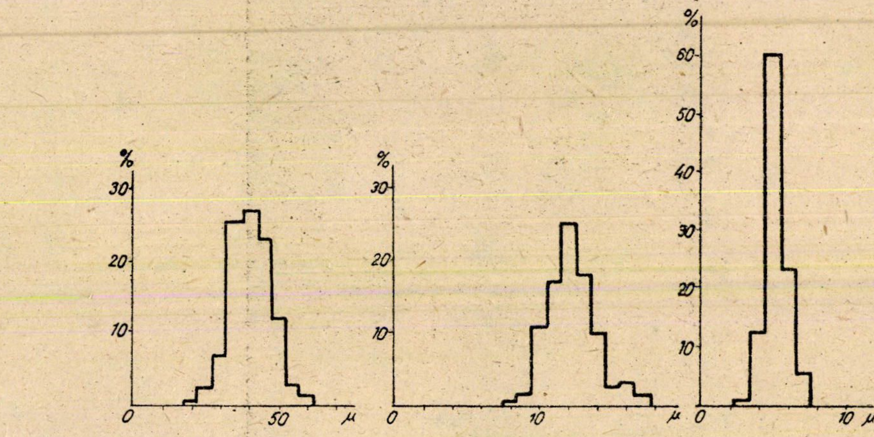
keveréket leöntve, az ülepedéket az előbbi magasságig vízzel öntöttük fel és felrázás után újra az előbbi ideig hagytuk ülepedni. Ezt az eljárást 20-szor ismételve, végül már a folyadék a választott ülepedési idő alatt teljesen kitisztult. Az utolsó leöntéseknél az ülepedő anyag és a már tiszta folyadék határa éles kontrasztú süllyedő vonalat alkotott annak jeléül, hogy egy bizonyos szemcsenagyságnál kisebb szemcséktől sikerült a porkeveréket megszabadítanunk. (Lásd az ülepedésről készült fényképet a 2. ábrán.) Most valamivel



2. ábra
Az első és az utolsó ülepítés

rövidebb ülepedési időt választva az előbbi eljárást ismételtük és összegyüjtöttük a most ezen kisebb ülepedési idő alatt leülepedni nem tudó szemcséket. A leöntött folyadékokkal így igen egyforma nagyságú szemcséket sikerült összegyüjtenünk.

Ezen módon öt különböző szemcsenagyságú mintát készítettünk el. Az ülepedési időket gömbalakú részecskékre vonatkozó Stokes törvénnyel választottuk ki. Az öt mintára tervezett szemcsenagyság határok a II. táblázat 2. oszlopában feltüntetettek voltak. Az első három minta méreteit sok szemcse nagyságának mikroszkóp alatti megmérésével ellenőriztük. Itt, mivel a szemcsék nagysága közel egyenlő volt, az előbb említett nehézségek már nem merültek fel. Az eloszlási görbéket a 3. ábra tünteti fel. A közepes szemcsenagyságok kb. 20%-kal voltak nagyobbak a számítottaknál. Az eltérést valószínűleg az okozta, hogy a gömbalakú részecskékre érvényes Stokes tétellel számoltunk szabálytalan részecskék esetén is. Szabálytalan részecskék esetén pontosan ugyanekkora eltérést a Stokes tételtől már mások is tapasztaltak.[1] Az utolsó két mintánál is ezért a közepes szemcsenagyságot 20%-kal nagyobbnak vettük a számítottnál (II. táblázat, 3. oszlop). Ezek nagyságának pontos méréséhez ugyanis legalább 0,1 μ pontosságra lett volna szükség. Mikroszkópunk erre már nem volt alkalmas, annyit azonban feltétlenül ellenőrizni lehetett ezeknél is, hogy a negyedik minta csak 2 és 3 μ, az ötödik minta csak 1 és 2 μ közötti szemcséket tartalmazott.



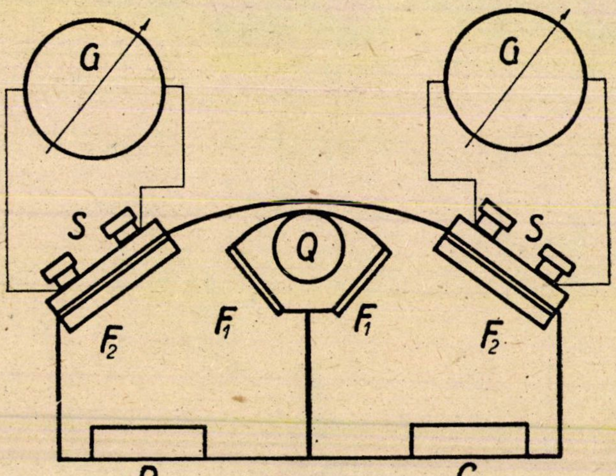
3. ábra
Az ülepített minták szemcsenagyság eloszlása

II. TÁBLÁZAT

1	2		3	4	5	6	7
Minta	Tervezett szemcsenagyság		Talált szemcsenagyság	Fényerő	U. i. reflexió	Látható reflexió	Egyenlő abszorbeált fényre számított világítóképesség
	Határok μ	közép μ	μ	relatív	%	%	relatív
1	30—37	33,5	40,00	99,5	10,0	88,0	90
2	9—11	10	12,25	100,0	19,0	95,0	100
3	4—5	4,5	5,20	83,5	29,0	97,0	95
4	2—2,5	2,25	2,70	65,0	43,0	95,0	93
5	1—1,25	1,13	1,35	46,0	57,0	93,0	87
Becsült hiba			± 5%	± 1,0	± 1,0	± 2,0	± 6

Ultraibolyareflexió és a világítóképesség mérése

Öt mintánkkal a következő kísérleteket végeztük el. Először is megmértük a gyakorlatilag végtelen vastag rétegű por világítóképességét állandó intenzitású 2537 Å-ös ultraibolya besugárzásokon. A mérésnél fényforrásul kisnyomású kvarclámpa szolgált, melynek látható fényét kiszűrtük. A világítóképességet szelén fényelemmel mértük, az erre eső fényből viszont az ultraibolya fényt szűrtük ki (lásd 4. ábra). A mérési adatokat a II. táblázat 4. oszlopa tünteti fel.

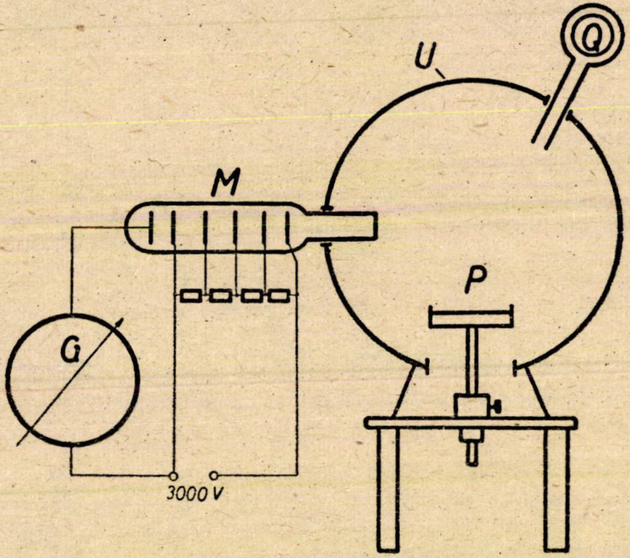


4. ábra

A porok világítóképességének mérése. Q: kisnyomású kvarclámpa. F_1: Corning 9863-as szűrő. F_2: ólomüvegszűrő. S: szelén cella. G: galvanométer. P: mérendő anyag. C: ellenőrző anyag

Valóban a világítóképesség tetemes csökkenése látható. E fénycsökkenés okának keresésénél azt kellett először megvizsgálnunk, hogy az egyes minták valóban ugyanakkora gerjesztést kaptak-e. A besugárzás intenzitása valóban egyforma volt ugyan (pontosabban a mérési eredményeket a besugárzó ultraibolya fény ellenőrző mérésével azonos intenzitásra számítottuk át, l. 4. ábra), de a kisebb szemcsék ebből feltehetően több fényt reflektáltak (diffuzan) vissza. Ecélból megmértük a porokról reflektált ultraibolya fényt. A mérőberendezést az 5. ábra tünteti fel. A vizsgálandó port integráló gömbben helyeztük el, keskeny sugárban ultraibolya fénnyel világítottuk meg és a gömb falának fényességét egy csak ultraibolyára érzékeny elektronsokszorozóval mértük meg. A reflektálóképességnek így megállapított relatív értékeit a por helyére tett magnéziumoxid mintával abszolút értékekre számítottuk át. Az irodalmi adatok szerint ugyanis e hullámhosszon a magnéziumoxid reflektálóképessége 95%-nak vehető[2]. (Ezért volt az integrálógömb fala is magnéziumoxiddal bevonva.) A mérési eredményeket a II. táblázat 5. oszlopa tünteti fel. Láthatjuk, hogy igen nagymértékben növekszik a kisszemcséjű porokon a reflektált fény.

Ha a porba valóban bejutott ultraibolya fényre, tehát azonos gerjesztésre számítjuk át a világítóképességet, a II. táblázat 7. oszlopának értékeit kapjuk. Ebből a következő eredményt szűrhetjük le: az igen nagy szemcsék felé a világítóképesség kicsit csökken. A kisszemcsék irányában mutatkozó fénycsökkenés is kicsi és esetleg nem is reális. Olyan nagy pontosságban homogén (az ötödik minta 0,2 μ-ra pontos, míg pl. az első csak 7 μ-ra) szemcsenagyságú anyagból, mint amilyenek az igen kis szemcséjűek voltak, csak igen kis mennyiség állt rendelkezésünkre (lásd az 1. ábrabeli eloszlást) és a szennyezések ezekben feltétlenül koncentrálódtak. Ezek a szennyezések pl. részben már az üzemi körülmények között gyártott porban lehettek, részben a nagy mennyiségű vízzel való átmosásból kerülhettek bele. A víz ugyan desztillált volt, de csak egyszeresen. A szennyezések koncentrálódását alátámasztja az, hogy az ultraibolya reflexióhoz hasonlóan mért látható reflexió (lásd II. táblázat 6. oszlopát) a legkisebb szemcséknél növekedés helyett csökkenő tendenciát mutat.



5. ábra
A diffuz reflexió mérése. U: Ulbricht-féle gömb. Q: Kisnyomású kvarclámpa. M: Elektronsokszorozó. G: galvanométer. P: mérendő anyag

Így kétségtelennek látszik, hogy *ennél az anyagnál* és a vizsgált *szemcsenagyságtartományban* (1 μ-tól 40 μ-ig) a tényleges világítóképesség a szemcsenagyságtól nem (vagy legalább is csak igen kismértékben) függ.

A reflektált fény és az abszorpciós együttható számítása

A reflektált fény szemcsenagyságtól való függésének pontos felvétele lehetővé tette kis elméleti megfontolás után az ultraibolya (2537 Å) abszorpciós koefficiens meghatározását. A port több rétegből összetettnek tekintve és az i-edik rétegen az egységnyierős fényből reflektált fényt γ_i-vel, az i-edik rétegen áteresztettet β_i-vel jelölve β_{n-1} és γ_{n-1}-ből β_n és γ_n a következő módon számolható ki:

A 6. ábra szerint

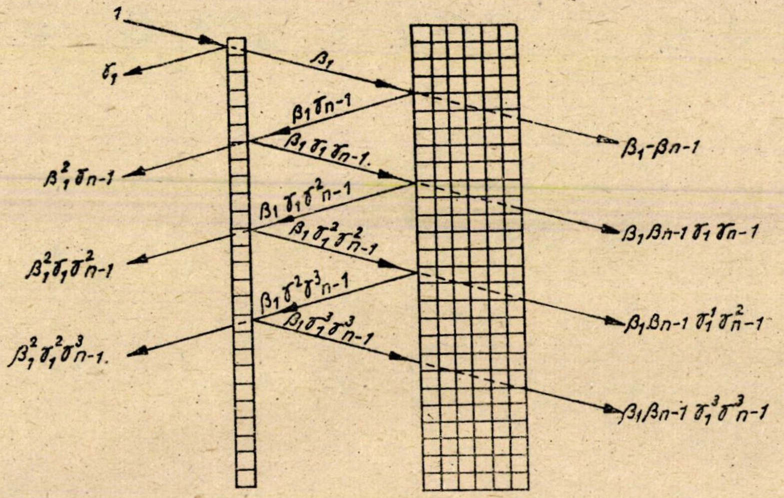
$$\gamma_n = \gamma_1 + \beta_1^2 \gamma_{n-1} + \beta_1^2 \gamma_1 \gamma_{n-1}^2 + \beta_1^2 \gamma_1^2 \gamma_{n-1}^3 + \cdots \tag{1}$$

$$\beta_n = \beta_1 \beta_{n-1} + \beta_1 \beta_{n-1} \gamma_1 \gamma_{n-1} + \beta_1 \beta_{n-1} \gamma_1^2 \gamma_{n-1}^2 + \beta_1 \beta_{n-1} \gamma_1^3 \gamma_{n-1}^3 + \cdots \tag{2}$$

e két végtelen geometriai sor összegezése szerint:

$$\gamma_n = \gamma_1 + \frac{\beta_1^2 \gamma_{n-1}}{1 - \gamma_1 \gamma_{n-1}} \tag{3}$$

$$\beta_n = \frac{\beta_1 \beta_{n-1}}{1 - \gamma_1 \gamma_{n-1}} . \tag{4}$$



6. ábra
A reflektált és áteresztett fény számítása

Ha $n \to \infty$, $\beta_n \to 0$ és $\gamma_{n-1}, \gamma_n \to \gamma_\infty$. Így a (3) egyenletből γ_∞ meghatározható:

$$\gamma_\infty = \gamma_1 + \frac{\beta_1^2 \gamma_\infty}{1 - \gamma_1 \gamma_\infty} \tag{5}$$

megoldva γ_∞-re:

$$\gamma_\infty = \frac{1 + \gamma_1^2 - \beta_1^2}{2\gamma_1} - \sqrt{\left(\frac{1 + \gamma_1^2 - \beta_1^2}{2\gamma_1}\right)^2 - 1} . \tag{6}$$

Az első rétegen reflektált és áteresztett fényt hasonló módon számíthatjuk ki. Ha az első réteg felületének reflekszíós együtthatóját α-val jelöljük, a réteg vastagságát, tehát a szemcsenagyságot a-val, az ultraibolya fény abszorpciós együtthatóját μ-vel, akkor a 7. ábra szerint:

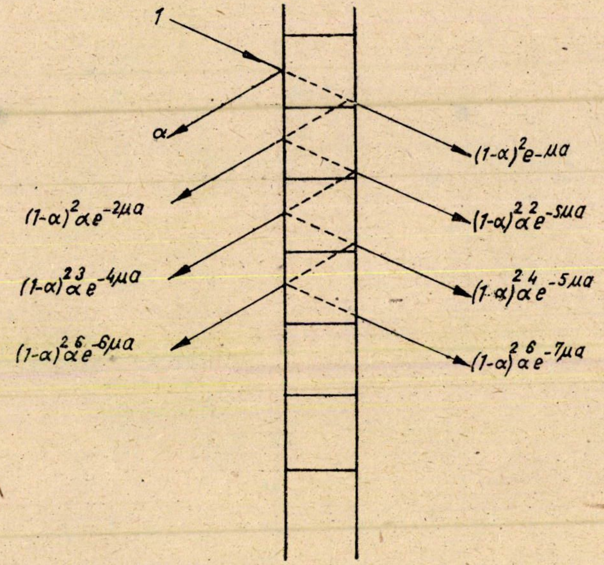
$$\gamma_1 = \alpha + (1-\alpha)^2 \alpha e^{-2\mu a} + (1-\alpha)^2 \alpha^3 e^{-4\mu a} + (1-\alpha)^2 \alpha^5 e^{-6\mu a} + \cdots \tag{7}$$

$$\beta_1 = (1-\alpha)^2 e^{-\mu a} + (1-\alpha)^2 \alpha^2 e^{-3\mu a} + (1-\alpha)^2 \alpha^4 e^{-5\mu a} + (1-\alpha)^2 \alpha^6 e^{-7\mu a} + \cdots \tag{8}$$

e végtelen sorokat megint összegezve:

$$\gamma_1 = \frac{\alpha(1 + e^{-2\mu a} - 2\alpha e^{-2\mu a})}{1 - \alpha^2 e^{-2\mu a}}, \tag{9}$$

$$\beta_1 = \frac{(1-\alpha)^2 e^{-\mu a}}{1 - \alpha^2 e^{-2\mu a}}. \tag{10}$$



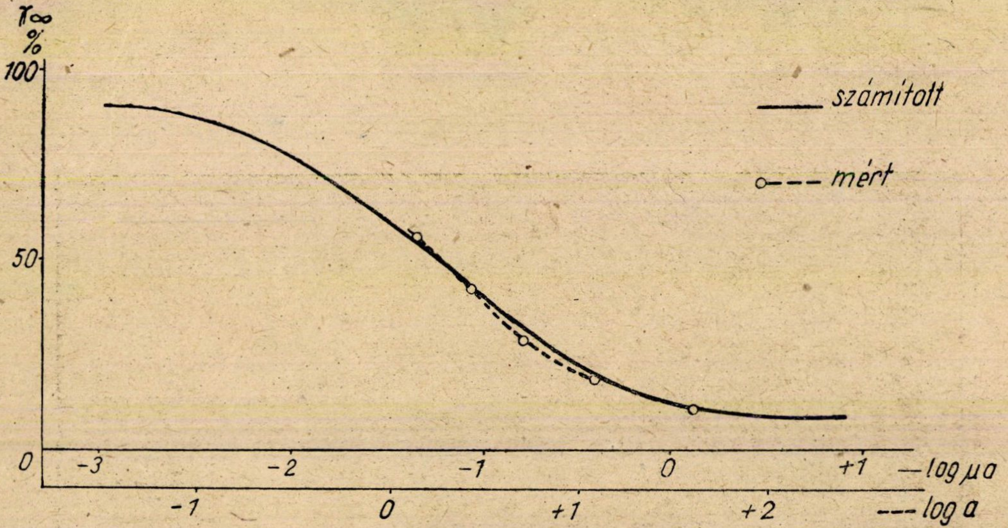
7. ábra
Reflexió és áteresztés egyetlen rétegen

Ezek a számítások azt mutatják, hogy γ_∞, a végtelen vastag réteg által reflektált fény csak α-tól és μa-tól függ és ha $\mu a \rightarrow \infty$, $\gamma_\infty \rightarrow \alpha$. Ami méréseink szerint a 40μ-os nagy szemcsenagyságnál $\gamma_\infty = 0{,}10$ volt. Ezért $\alpha = 0{,}10$-et vettünk fel és γ_∞-t a (6), (9), és (10) egyenletek segítségével μa különböző értékeinél kiszámítottuk. A számított γ_∞ a 8. ábrában log μa függvényében teljes vonallal van ábrázolva.

Ugyanezen ábrán láthatjuk a mért γ_∞ értékeket is log a függvényében (szaggatott vonallal). Mivel $\log \mu a = \log \mu + \log a$ a két görbe vízszintes eltolással fedésbe hozható kell legyen. Az eltolás mértéke pedig éppen log μ lesz. Ezt az eltolást a 8. ábrában már megtettük. A két görbe fedése tökéletesnek mondható és az eltolás mértéke $\mu = 300$ cm^{-1}-t adott.

A módszer ellenőrzése

Az abszorpciós együttható meghatározásának ezt a módszerét úgy ellenőriztük, hogy alkalmaztuk olyan anyagra is (színes üvegre), melynek abszorpciós együtthatóját közönséges módszerrel is meg tudtuk mérni. Lilaszínű üveget acélmozsárban porrá törtünk. Az esetleges vas szennyezést meleg sósavval való kimosással tüntettük el. Az őrölt porból nyolc homogén szemcsenagyságú mintát állítottunk elő. A négy nagyobb szemcséjűt szitálással, a négy kisebb szemcséjűt az előbb ismertetett ülepítési eljárással.



8. ábra
Számított és mért diffuz reflexió

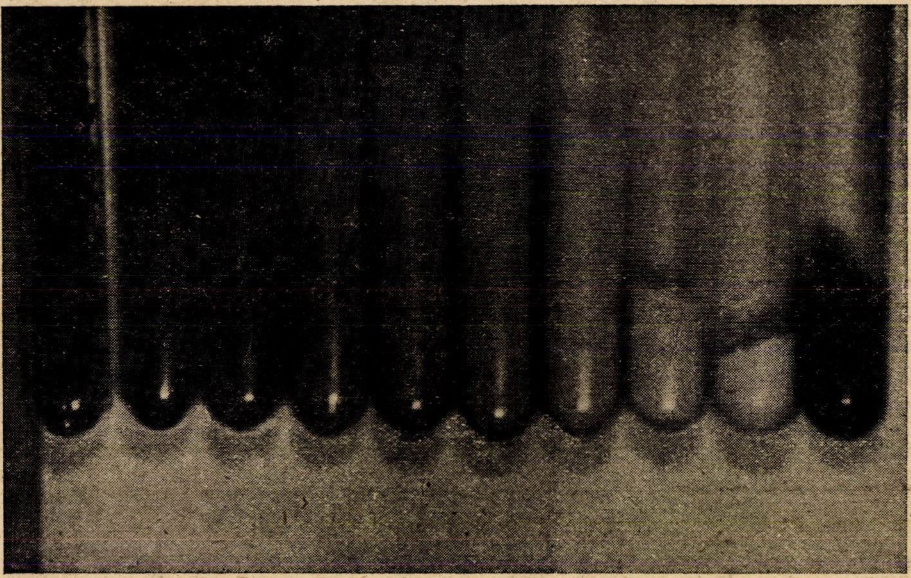
III. TÁBLÁZAT

Minta	Közepes szemcsenagyság μ	Reflexió %-ban		
		lila	zöld	2537 Å
1	648	12,5	6,0	5,5
2	463	16,8	9,4	5,5
3	194	31,7	23,4	5,1
4	92,9	40,8	31,3	5,1
5	35,5	54,0	45,7	4,4
6	21,8	61,5	54,8	5,5
7	12,37	72,2	65,3	8,0
8	5,48	77,2	71,6	16,3

A 9. ábra mutatja e mintákról készült fényképfelvételt. Az első kémcsőben az üveg nagyobb darabjai vannak, a közbülső nyolc kémcső tartalmazza a mintákat. A minták színe fokozatosan gyengül, majd fehéredik, az utolsó minta már teljesen fehér. E jelenség magyarázata az, hogy az utolsó mintára már γ_∞ minden színre igen nagy. A legutolsó kémcsőben a legfehérebb anyagot olyan benzol-szénkéneg (színtelen) keverékkel öntöttük le, melynek törésmutatója az üvegével megegyezett. Ezért $\alpha \approx 0$ lett és így megszűnt a tetemes (és ezért fehér) diffuz reflexió. E jelenség különben a mindennapi életben is számtalan helyen tapasztalható. A frissen festett fal sötétebb színű, mint a kiszáradt. Az ázott föld fekete, a száraz por fehér. A papíron a zsírfolt ránézésben sötétebb, átnézésben világosabb, mint a tiszta rész stb.

A mikroszkóp alatt megállapított közepes szemcse nagysága az üvegmintáknak a III. táblázat 2. oszlopában látható. A következő oszlopok a reflexiót tüntetik fel lila, zöld és 2537 Å ultraibolya fénynél.

Az első két színre a mérést szelén fényelemmel végeztük, az utolsóra elektronsokszorozóval, az apatitnál ismertetett módon.



9. ábra

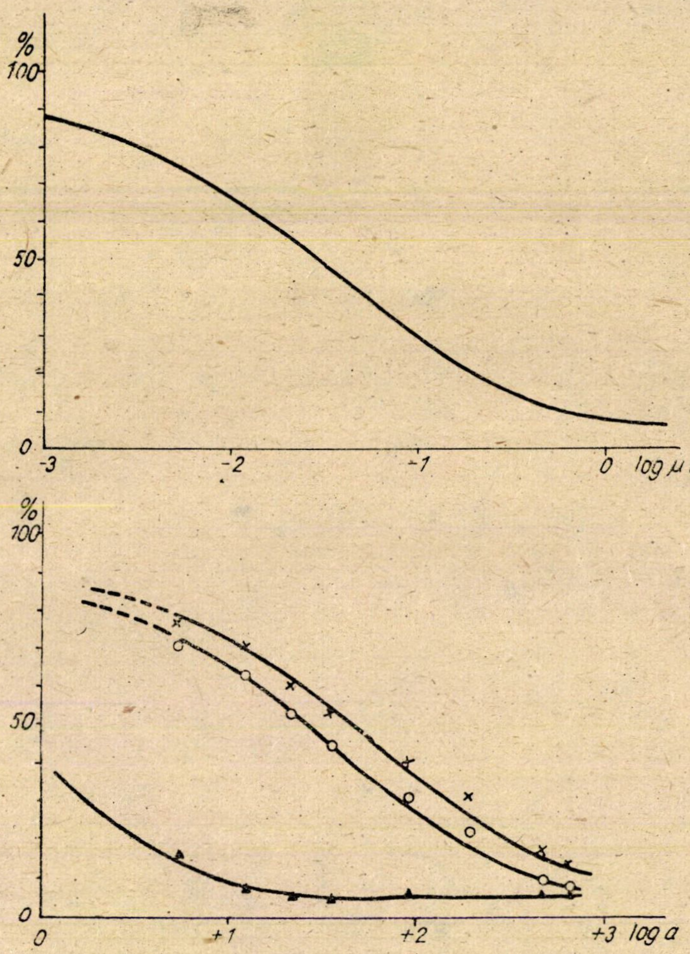
Színes (lila) üvegpor. Balról jobbfelé a szemcsenagyság csökken. A jobb szélső kémcsőben u. a. a por, ami az előtte levő kémcsőben, de leöntve ugyanolyan törésmutatójú színtelen folyadékkal

A 10. ábrán a diffuz reflexiót ábrázoltuk log μa függvényében. Az ismertetett módon $a = 0{,}055$-t (a mérések szerint is és a számítások szerint is reális értéknek látszik) felvéve számítottuk ki e görbét és ábrázoltuk az ábra felső részén. A mért pontokat az ábra alsó részén látható módon tudtuk e görbével tologatással fedésbe hozni. Az így kapott abszorpciós együttható értékek lila színre 6,3 cm^{-1}, zöld színre 11,5 cm^{-1} és 2537 Å-ös ultraibolyára 550 cm^{-1} voltak.

Ezeket az abszorpciós együtthatókat az üvegen végzett közvetlen mérésekkel is meghatároztuk. A méréseket a látható színeknél 2,95 mm vastag lemezen, az ultraibolya fénynél 30 μ vastag folián végeztük. Az eredmények lilára 6,41 cm^{-1}, zöldre 12,26 cm^{-1} és ultraibolyára 491 cm^{-1} voltak.

Az egyezés a kétfajta módon mért értékek között meglepő jó. A magyarázat abban lehet, hogy a számításbeli közelítésnél elkövetett hibák egymást kb. kikompenzálták. (Pl. kocka alakú szemcsékkel és így *a* fényúttal számoltunk, a valóságos alak ettől többé-kevésbbé eltér, úgyhogy az egyes szemcsékben megtett fényút *a*-nál kisebb. Viszont nem vettük tekintetbe a szemcsékből való kilépéskor a nagyon ferde beesési szögeknél fellépő totális reflexiót, ez a hatás a közepes fényutat viszont növeli.)

Végeredményben illő biztonsággal mondhatjuk, hogy a diffuz reflexióval meghatározott abszorpciós értékek pontossága nagyobb, mint $\pm$ 20%. Ennek alapján az apatitnál kapott 300 cm^{-1} érték pontossága $\pm$ 60 cm^{-1}-nek vehető.



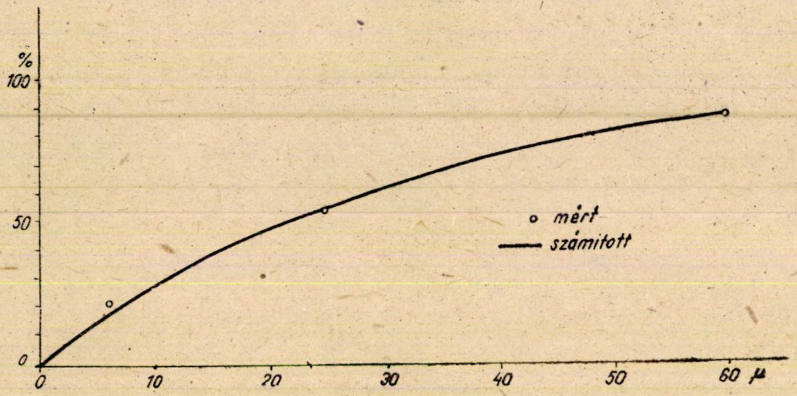
10. ábra

a) A lila üveg számított diffuz reflexiója

b) A számított görbe fedésbe hozatala a mérési eredményekkel

Fotometrálás mikroszkóp alatt

A kapott $\mu = 300/\text{cm}$ értéket sikerült még egy módon ellenőrizni. Az előző számítások szerint $1 - \gamma_1 - \beta_1$ jelenti az egy (az első) szemcsében elnyelt fényt. Ha $\mu = 300/\text{cm}$ értékkel számolva ezt a szemcsenagyság függvényében ábrázoljuk, a 11. ábrában megrajzolt görbét kapjuk.



11. ábra
Egyes szemcsék közepes fényessége mikroszkóp alatt fotometrálva

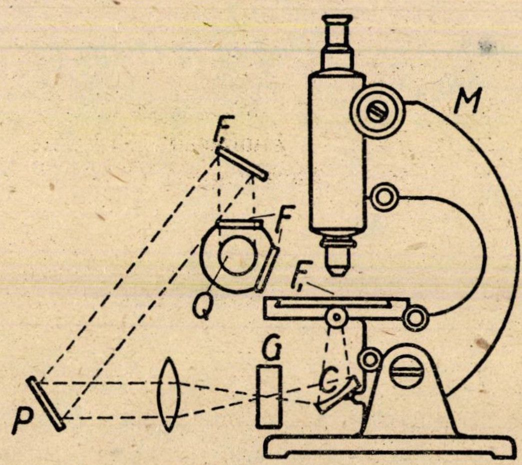
Mikroszkóp alatti fotometrálással sikerült egyes szemcsék világítóképességét meghatározni három különböző szemcsenagyságnál. A mikroszkóp alatti fotometrálás a 12. ábrában feltüntetett módon történt. A szemcséket háttérből megvilágítva, azok feketének látszanak, mert a hátulról kapott irányított fényt szabálytalan voltuk miatt teljesen szétszórják, ezért a következő eljárást alkalmaztuk. A szemcséket elölről monokromatikus ultraibolya fénnyel sugároztuk be. Ugyanerről az ultraibolya fényforrásról ugyanilyen fluoreszkáló anyagot (ez egy vastag rétegű állandó minta volt) gerjesztettünk. Ennek fluoreszkáló fényét tükör és lencse segítségével használtuk a háttér megvilágítására. E fénysugár útjába szürke éket helyeztünk el. A szürke ékkel szabályozhattuk a háttér megvilágításának erősségét. Az éket olyan helyzetbe állítottuk, hogy a szemcse és háttér világítása egyforma legyen, azaz a kérdéses szemcse kontúrjai elmosódjanak. A szürke éket fogasrúd és fogaskerék áttétellel mozgattuk és a leolvasás fordulatszámláló segítségével történt, ami igen kényelmesnek mutatkozott. Az ék helyzetével meghatározhatjuk az egyes szemcsék egymáshozképesti világítóképességét. Az egyenlő nagy szemcsék világítóképessége is igen tetemesen szórt. A kapott eredmények, melyek 200—200 szemcse világítóképességének középértékei, a 11. ábrába bejelölt értékek. Az egyezés itt is kielégítő.

Az ultraibolya fényforrás esetleges ingadozásai ennél a módszernél kiestek, mert hiszen a mérő és a mért fény ugyanúgy ingadozott.

A mért ultraibolya reflekszióból még egy eredmény adódik. α a mérések szerint 10%. Ha alkalmazzuk a merőleges reflekszióra érvényes

$$\alpha = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2$$

képletet, az ultraibolya törésmutatóra 1,93-at kapunk. (A ferdén reflektált fény Fresnel formulák szerint jobban reflektálódik, ami azt jelenti, hogy a törésmutató értéke a kapottnál valamivel kisebb.) Apatitnál tudomásunk szerint a



12. ábra
Egyes szemcsék fényességének mikroszkóp alatti fotometrálása. Q: kisnyomású kvarclámpa. M: mikroszkóp. F: Corning 9863-as szűrők. P: síktükör. C: homorú gömbtükör. F_1: fluoreszkáló por. G: szürke ék.

IV. TÁBLÁZAT

	μ cm^{-1}	
	plánparallel lemezen mérve	a diffuzió reflexióból számítva
Lila	6,41	6,3
Zöld	12,26	11,5
2537 Å	491,0	550

törésmutatót csak látható fényre mérték és ott 1,64-nek találták. Mivel az ultraibolyában erős abszorpció van, másrészt az előbb említett ferde beesések miatt, a kapott törésmutató érték is reálisnak látszik.

Összefoglalás

Összefoglalva az eredményeket, méréseink szerint az antimonnal és mangánnal aktivált apatit világítóképessége a szemcsenagyságtól lényegesen nem függ és ez kérdésessé tesz ennél az anyagnál minden olyan elméletet, mely szerint a fénycsökkenésnek oka az lenne, hogy az őrléskor a szemcsék a centrumokon keresztül könnyebben törnek és a felszínre kerülő centrum megszűnne centrum lenni.

A vizsgált antimonnal és mangánnal aktivált apatit abszorpciós együtthatóját 2537 Å-nél $\mu = 300 \pm 60$ cm^{-1}-nek találtuk.

Meg kell említenünk, hogy *Brumberg* és *Pekermann*[3] ZnS. Cu-ra 3600 Å-ös gerjesztésnél az abszorpciós együtthatóra ugyanilyen nagyságrendbe eső értéket, 200 cm^{-1}-et talált és *Benford*[4] számításait, aki hasonló módon számol reflektált és áteresztett fényt, de a szemcsenagyságtól való függésig nem jut el.

Távközlési Kutató Intézet
Budapest.

IRODALOM

1 *I. M. Dalla—Valle,* Micromeritics, Pitman. New-York, London p. 20. Table 2. 1948.
2 *Benford, Schwarz, Lloyd,* J. Opt. Soc. Am., *38,* (1948), 946.
3 *Brumberg - Pekermann,* Dokladi Akadémii Nauk SzSzSzR. *61,* (1948), 43.
4 *Benford,* J. Opt. Soc. Am., *36,* (1946), 524.

KÜLÖNBÖZŐ LUMINESZKÁLÓ POROK ULTRAIBOLYA ABSZORPCIÓJÁNAK MÉRÉSE A DIFFUZ REFLEXIÓ SEGÍTSÉGÉVEL

BODÓ ZALÁN

Bemutatta Gyulai Zoltán lev. tag az 1952 április hó 7-én tartott osztályülésen

Bevezetés

Az előzőleg ismertetettek[1] szerint sikerült olyan eljárást találnunk, melynek segítségével a homogén szemcsenagyságú porok diffuz reflexiójából meg lehet határozni ezen anyagok abszorpciós együtthatóját. Ezt a módszert több különböző lumineszkáló porra alkalmaztuk és most összefoglalva szeretnénk ismertetni az így nyert eredményeket.

Különböző mangán- és vastartalmú willemitek abszorpciós együtthatója 2537 Å-nél

16 féle különböző mangán- és vastartalmú willemitnél határoztuk meg az abszorpciós együtthatót. E 16 anyag mangán- és vastartalmát az 1. táblázat II. és III. oszlopában láthatjuk.

Mindezen porokból ülepítéssel homogén szemcsenagyságokat állítottunk elő és 2537 Å-nél a diffuz reflexiókból az abszorpciós együtthatókra az I. táblázat IV. oszlopában feltüntetett értékeket kaptuk. Willemitnél az $\alpha = 0{,}04$-gyel számított reflexiós görbét használtuk, mert igen nagy szemcsenagyságoknál a reflexió 4%-ig csökkent le. A kapott eredményeket a következő képletben lehet összefoglalni:

$$\mu\,\mathrm{cm} = 20 + 600\ C_{\mathrm{Mn}} + 1200\ C_{\mathrm{Fe}} \quad \text{ahol}$$

C_{Mn}: a mangántartalom súlyszázalékban,

C_{Fe}: a vastartalom súlyszázalékban.

Az 1. táblázat V. oszlopában az ezen képlettel számított értékek is fel vannak tüntetve és tekintetbevéve a mérési módszerünket az eredmények egyezését teljesen kielégítőnek kell mondanunk. Az abszorpciós együttható tehát a mangántartalomtól is és a vastartalomtól is lineárisan függ.

A numerikus eredményekből két lényeges következtetést kell levonnunk: először is azt, hogy tiszta anyagnál az alaprács abszorpciója a mangán abszorpciója mellett elhanyagolhatóan kicsiny. A 2537 Å sugárzás elnyelése tehát csaknem kizárólagosan a mangánon (illetve esetleg a mangán által eltorzított alaprácson) történik.

Másodsorban azt látjuk, hogy a vas csak kb. kétszer annyira abszorbeál, mint ugyanannyi mangán. Ezért a vas hatására történő világítóképesség-csökkenés nem magyarázható teljes egészében a vas konkurens abszorpciójával, vagyis azzal, hogy a vas által elnyelt ultraibolya fény nem jut a mangánra. Pl. a 16. mintánál fentiek szerint a gerjesztő fény 60%-a a mangánon nyelődik el, mégis ezen anyag világítóképessége méréseink szerint csak 7%-a volt a vasnélküli willemitének. Ezzel a kérdéssel kapcsolatos elméleti vizsgálatainkról következő közleményünkben[2] számolunk be.

Különböző mangán- és vastartalmú willemitek abszorpciós együtthatója 3600 Å körüli fénynél

Az említett 16 mintánál megmértük az abszorpciós együtthatót 3600 Å körüli fénynél is. A mérésekhez nagynyomású kvarclámpát használtunk, melynek fényéből a 3000 Å és 4500 Å közötti sugarakat engedtük át. A többi sugarat kiszűrtük. Az így kapott fényt a következőkben röviden 3600 Å körüli fénynek nevezzük. Mérési eredményeinket az 1. táblázat utolsó oszlopában tüntettük fel. Most a mérési eredményeket a következő képletben lehet összefoglalni:

$$\mu/\mathrm{cm} = 10 + 10\, C_{Mn} + 620\, C_{Fe}.$$

A két kisebbik érték e képletben nagyon bizonytalan, inkább csak nagyságrendet jelent.

E mérésekből a legfontosabb az a körülmény, hogy a mangán a 3600 Å körüli fénysugarakat alig abszorbeálja. A vas konkurens abszorpciója most igen tekintélyes. 3600 Å körüli gerjesztésnél a lumineszkálás igen kis hatásfokában feltétlen szerepe van tehát a mangán kis abszorbeáló képességének

I. TÁBLÁZAT

Mintaszám	Aktivátor- és killertartalom		Abszorpciós együttható					
			2537 Å			3600 Å		
	Mn %	Fe %	Mért/cm	Számított /cm	Különbség %	Mért/cm	Számított /cm	Különbség %
1.	0,005	0,005	33	29	+14	12	13	+ 3
2.	0,064	0,003	51	62	—18	13	13	0
3.	0,22	0,003	150	156	—4	14	14	0
4.	1,01	0,003	590	630	—6	20	22	— 9
5.	5,00	0,002	2300	3000	– 23	59	61	— 3
6.	0,003	0,024	63	51	+24	27	25	+ 8
7.	0,068	0,014	80	78	+3	17	20	—15
8.	1,1	0,019	780	700	+11	36	33	+ 9
9.	0,74	0,04	620	510	+22	51	42	+21
10.	1,1	0,045	670	730	—8	54	49	+10
11.	0,001	0,1	170	140	+21	73	72	+ 1
12.	0,46	0,17	540	500	+8	91	119	—24
13.	0,74	0,08	560	560	0	50	67	—25
14.	0,08	0,75	690	920	—25	490	475	+ 3
15.	0,64	0,44	850	930	—9	363	289	+25
16.	1,2	0,4	1200	1200	0	313	270	+16

is, mely így szerephez juttatja egyrészt a kis mennyiségben jelenlevő szennyezéseket, másrészt az alaprácsot. Kérdéses, hogy az alaprácsban elnyelt energiával mi történik.

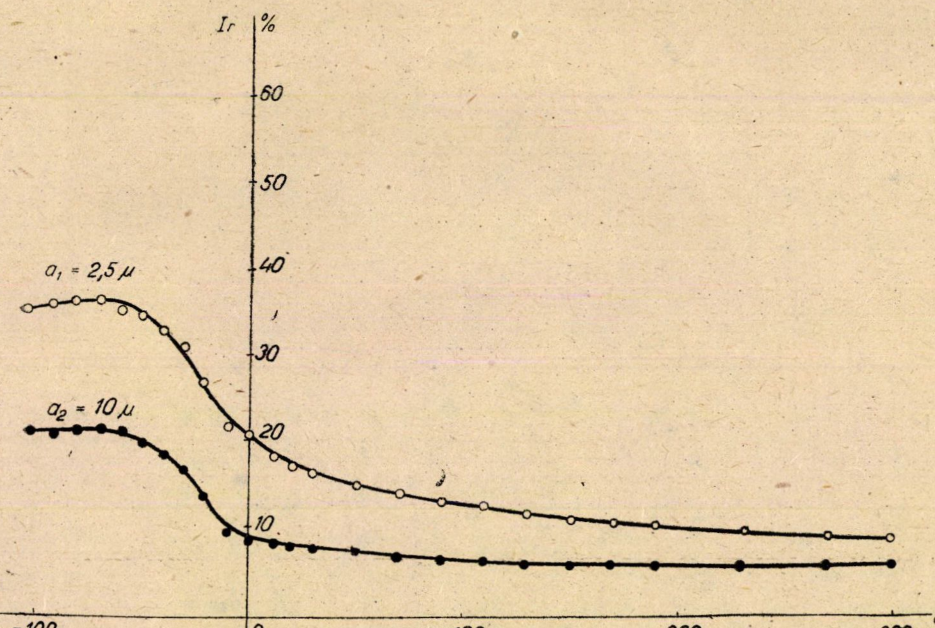
Különböző antimontartalmú apatitok abszorpciós együtthatója 2537 Å-nél

6 különböző mintán folytattunk vizsgálatot. Ezek közül 4-nek különböző antimontartalma volt. Az 5-ik mintában a jól világításnak megfelelő %-ban mangánaktivátor volt antimon nélkül, a 6-ik mintában ugyanennyi mangán a világítás szempontjából legkedvezőbb mennyiségű antimonnal együtt. Az összetételek és a mérési eredmények a 2. táblázat első oszlopaiban láthatók. Az eredményeket most a következő egyenlet írja le:

$$\mu/\mathrm{cm} = 60 + 320\, C_{Sb}.$$

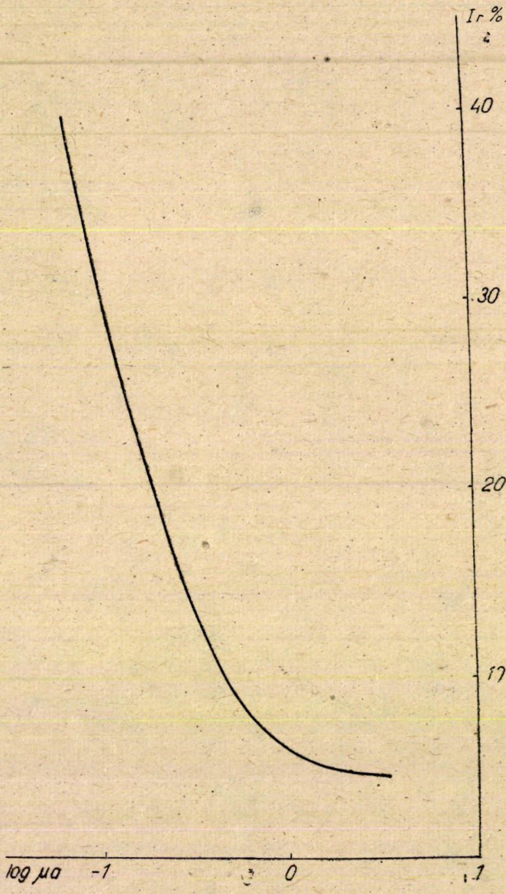
II. TÁBLÁZAT

Mintaszám	Aktivátor tartalom		Abszorpciós együttható					
	Sb %	Mn %	2537 Å			3600 Å		
			Mért/cm	Számított /cm	Különbség %	Mért/cm	Számított /cm	Különbség %
1.	—	—	59	59	0	5,9	5,0	+18
2.	0,6	—	260	241	+8	7,3	7,8	— 6
3.	0,9	—	365	347	+5	9,2	9,1	+ 1
4.	2,8	—	880	954	—8	17,8	17,9	— 1
5.	—	0,5	56			10,7	10,0	+ 4
6.	0,9	0,5	300	347	—13	14,0	14,1	— 1



1. ábra Kadmiumborát diffuz reflexiójának hőmérséklet függése

A mérésekből megint azt láthatjuk, hogy az alaprács abszorpciója az antimon atomok abszorpciójához képest kicsi. Az abszorpció legnagyobb része most is az aktivátoron, jelenleg az antimon atomokon (illetve esetleg azok környezetében) történik. Érdekes, hogy a mangán hozzátétel az abszorpciót nem növeli. Az 5-ik minta nem tartalmazott antimont és ezért 2537 Å-ös sugárzásra nem világított, csak katódsugárgerjesztésre. Az apatitban tehát két fajta aktivátor esetén is csak az antimon abszorbeál. Innen az energia egy része valahogyan átjut a mangáncentrumokhoz.



2. ábra Kadmiumborát diffuz reflexiójának az „a" szemcsenagyságtól és a μ abszorpciós együtthatótól való számított függése

Különböző antimontartalmú apatitok abszorpciós együtthatója 3600 Å körüli sugárzásnál

Az eredményeket a 2. táblázat utolsó oszlopaiban láthatjuk. Az alkalmazható egyenlet:

$$\mu/\text{cm} = 5 + 4{,}6\, C_{\mathrm{Sb}} + 10\, C_{\mathrm{Mn}}.$$

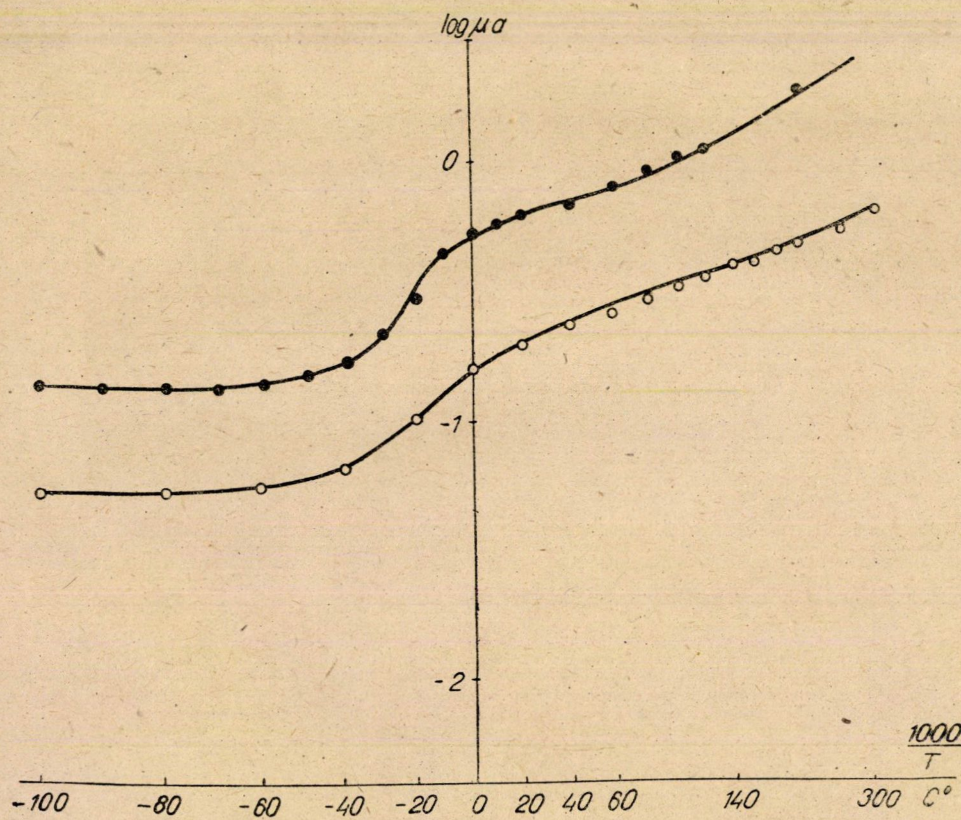
A mérések pontossága az igen kis abszorpciós együtthatók miatt nem nagy. Biztosnak látszik azonban, hogy most is az abszorpció a hosszabb hullámhosszak felé megint lényegesen kisebb, mint 2537 Å-nél és hogy 3600 Å környékén már nemcsak az antimon, hanem a mangán is abszorbeál.

A 2537 Å-ös abszorpciós együtthatónak hőmérsékletfüggése

Kísérleteket végeztünk különböző anyagoknál a diffuz reflexió hőmérséklettől való függésének megállapítására is. Méréseink $-130\ C^0$ és $+300\ C^0$ között történtek.

Különböző willemitekkel és apatitokkal végezve a kísérletet a diffúz reflexió és így az abszorpciós együttható is nem mutatott hőmérsékletfüggést. (Apatitnál magas hőmérsékleteken a reflexiócsökkenésnek a mérési pontosság nagyságrendjébe eső nyomai mutatkoznak talán.)

Erősen változott azonban a diffuz reflexió a hőmérséklet függvényében kadmiumborátnál. Két különböző szemcsenagyságú ($a_1 = 2,5\,\mu$ és $a_2 = 10\,\mu$)



3. ábra

Kadmiumborátnál log μ a-nak $1000/T$-től való függése két különböző szemcsenagyságnál poron vettük fel a diffuz reflexiónak hőmérsékletfüggését. A mérési eredményeket az 1. ábrán láthatjuk. Ezen anyagnál az $\alpha = 0{,}047$ értékre számítottuk ki a reflexiónak log $\mu \cdot a$-tól való függését (2. ábra). E görbe segítségével ábrázoltuk a log μa-t $1000/T$-ben való függésében (3. ábra). A két mérési görbének az előbbeni közleményben való megfontolások szerint párhuzamosnak és egymáshoz képest $\log a_2 - \log a_1 = 0{,}6$-tal eltoltnak kellene lennie. A reflexióképesség ugyanis csak $\mu \cdot a$-tól függ. Ha a hőmérséklettel μ változik log $\mu \cdot a$ változása log μ-höz képest csak log a-val való eltolásnak felel meg.

A két görbe e követelményt tűrhetően teljesíti és μ-nek kb. egy nagyságrenddel való változásra mutat. A két görbe által adott értékek közepelésével azt kapjuk, hogy a hőmérsékletnek $-100\ C^0$-ról $+300\ C^0$-ig való növekedésével az abszorpciós együttható 2537 Å-nél 170/cm-ről 2400/cm-re növekedik. Ez egyezésben van *Krőger*nek[3] ezen anyagon végzett kvalitatív mérési eredményeivel. Az abszorpciós együtthatónak kadmiumborátnál tapasztalt ezen különleges viselkedése feltétlenül további vizsgálatokat érdemel.

Végül meg kell köszönnünk *Makai Endré*nek a vizsgálati porok elkészítését és *Schneer Anná*nak a porok kémiai analízisét.

Távközlési Kutató Intézet
Budapest.

IRODALOM

1 *Bodó Zalán:* Ugyanezen számban lévő cikk.
2 *E. Nagy, Z. Bodó:* Acta Phys. Hung. (1952). (Sajtó alatt).
3 *F. A. Kröger, Th. P. J. Botden:* Physica. 13, (1947), 216.

ANKÉT
KUDRJAVCEV „A FIZIKA TÖRTÉNETE" CÍMŰ KÖNYVÉRŐL

A M. T. A. III. osztálya 1951 november 13-án ankétot rendezett *Kudrjavcev* „A fizika története" című könyvéről, amely az Akadémiai Kiadó kiadásában jelent meg magyar fordításban. Az ankéton *Novobátzky Károly* r. tag elnökölt, a bevezető előadást *Kovács István* lev. tag tartotta, az előadást élénk vita követte. Alábbiakban közöljük az ankét anyagát.

KOVÁCS ISTVÁN lev. tag

Nemrégiben jelent meg a Magyar Tudományos Akadémia kiadásában *Kudrjavcev:* „A fizika története az antik fizikától Mengyelejevig" című könyvének magyar fordítása. Az a páratlan érdeklődés, mely nemcsak a fizikusok, hanem a más területeken működő szakemberek részéről is megnyilvánult ezen könyv iránt, azt mutatja, hogy az Akadémia jól választott, mikor a könyv lefordítását és kiadását elhatározta. A könyv az első nagyobbszabású kísérlet magyar nyelven, de — mint az előszóból kitűnik — úgy látszik a Szovjetunióban is a fizika teljes történetének marxista-leninista szellemben való feldolgozására. Ebben az értelemben nélkülözhetetlen szakkönyv lesz nemcsak a fizikusok, hanem más szakemberek számára is, és az érdeklődés, mely iránta már eddig is megnyilvánult, nemcsak azt mutatja, hogy a könyvre szükség volt, hanem azt is, hogy feladatát be tudja tölteni.

Kudrjavcev könyvének bevezetésében a marxizmus-leninizmus segítségével rámutat a társadalom és a tudomány fejlődésének szoros kapcsolatára. Megállapítja, hogy a fizika a technikával kapcsolatos vívmányain keresztül közvetlen kapcsolatban áll a termeléssel, a munkaeszközök kialakításán keresztül arra aktívan hat, s ennek következtében a termelőerők változásához és fejlődéséhez s végül a termelési viszonyok, a társadalom szerkezetének átalakításához jelentősen hozzájárul. A munkaeszközök kialakítása, a termelési viszonyok megváltozása viszont újabb problémákat vet fel, újabb kezdeményezéseket eredményez a fizika tudományában, ami azután további fejlődéshez, átalakuláshoz vezet. Nyilvánvaló ugyanis, hogy például a gőzgép felfedezése lényeges szerepet játszott a kapitalizmus kifejlesztésében, de az is biztos, hogy viszont a termelőerők, vagyis a munkaeszközök, az emberek és termelési tapasztalataiknak bizonyos fejlettségi foka volt szükséges a gőzgép felfedezéséhez. Amíg ez utóbbi előfeltételek nem teljesülnek, azaz a felfedezésre még nincsen a társadalomnak szüksége, addig a felfedezés vagy nem történik meg, vagy ha véletlen körülmények folytán esetleg meg is történik, a felfedezés elsikkad, a kortársak nem értik meg, a társadalom mint szükségtelent elveti. Ez történt például a *Heron* által feltalált gőzturbinával, az eolipillal, amely közel 2000 évvel előbb látott napvilágot a gőzgép feltalálásánál. Amikor azonban az új termelési viszonyok kialakítására való törekvés a termelőerők növelését teszi szükségessé (jelen esetben a manufaktúra üzemek kialakítása), a hőerőgép felfedezése egyszeriben társadalmi szükségességgé vált, s ekkor majdnem egyidőben különböző kutatók, különböző helyeken egymástól függetlenül fel is találják a gőzgépet, amint ez *Watt* és az orosz *Polzunov* esetében történt. Maga a gőzgép felfedezése azután nemcsak a kapitalista ipar létrejöttének volt igen fontos alapja, hanem igen fontos befolyással volt a fizika tematikájára, fejlődésének irányára. A gőzgép volt, amely ráirányította a fizikusok figyelmét a termodinamikára, ez utóbbi kifejlesztésében az idealizált gőzgép modellje vezette a fizikusokat (gondoljunk csak a Carnot-féle körfolyamatra) és az energiamegmaradás elvének forrása szintén a gőzgépben található meg. Ebből a tipikus példából láthatjuk, hogy milyen szoros összefüggésben van a társadalom és a tudomány fejlődése, hogyan hat egyik a másikra, hogyan ösztönzi egyik a másikat. *Kudrjavcev* könyvének egyik fő érdeme, hogy a fizika minden korszakának kezdetén felvázolja a társadalom akkori állapotát, megadva mintegy a fizika fejlődése következő szakaszának társadalmi hátterét, és a történelmi materializmus egyedül helyes módszerével megmutatja a kölcsönhatást a társadalmi átalakulások és a fizika fejlődésének egyes periódusai között.

Kudrjavcev ezzel kapcsolatban felhívja a figyelmet azonban arra is, hogy túl primitív, túl vulgáris dolog lenne, ha a tudomány fejlődésének *valamennyi* jelenségét közvetlenül a termelésre vezetnők vissza. Ha az előbb említett példát elemezzük tovább, akkor meg lehet ugyan állapítani, hogy a gőzgép felfedezése irányította a fizikusok figyelmét a termodinamika kifejlesztésére, de a termodinamika további fejlődése során az eredeti gyakorlati cél (t. i. a gőzgépek leggazdaságosabb működtetése) helyébe egy bonyolultabb cél nyomult: néhány tapasztalati tételből kiindulva a hőjelenségek általános leírása, egy önmagában ellentmondásmentes, logikailag kifogástalan elmélet felállítása. A hipotézisek igazolására, a törvények felállítására irányuló törekvés arra kényszeríti a kutatót, hogy új, az eredeti céltól látszólag távolabb álló tényeket kapcsoljon be vizsgálatainak körébe, és ezáltal lényegesen kibővítse az eredeti kutatások területét. Ilyen módon azután a tudomány gyakran látszólag messze elkalandozik a gyakorlati élettől, majd pedig hirtelen éles fordulattal, teljesen váratlanul ismét a legszorosabb kapcsolatba kerül vele. (Gondoljunk csak teljesen elvont Maxwell-féle egyenletekre, az általuk előre jelzett elektromágneses hullámokra és a rádióra, vagy más példa az atomelmélet és atomenergia valósággá vált felszabadítása.) A tudomány fejlődésének van tehát belső logikája, mely meghatározza a tudományos gondolat fejlődésének kanyargós útjait.

A polgári történetírás szellemtörténészei a tudományok fejlődését úgy állítják be, mintha az a társadalom anyagi lététől teljesen függetlenül, egyes kimagasló személyek véletlen lángeszétől, zseniális eszméiktől fejlődött volna mai színvonaláig. Ez a felfogás természetesen tudománytalan, velejéig hibás és reakciós. Erről az irányzatról helyesen jegyzi meg *Kudrjavcev:* „Ilyen módon ugyanis visszavonhatatlanul az egyes zseniális emberek önkényes, ellenőrizhetetlen tevékenysége nyomult előtérbe, azoké, akik a legfontosabb vezéreszméket felvetették. Példával is illusztrálhatjuk, hogy mennyire nem állja meg a helyét az eféle felfogás." És a következőkben *Newton* és *Arisztotelesz* példáján mutatja meg, hogy két lángeszű ember különböző korban különbözőképpen oldja meg ugyanazt a kérdést, tehát ugyanazon problémával kapcsolatban különböző koroknak megfelelően más és más eszmék vetődnek fel. Amikor ugyanis egyfelől el kell ismernünk a kiváló tudósok szerepét a tudomány fejlődésében, ugyanakkor egyben arra is rá kell mutatnunk, hogy a nagy tudósok érdemeinek túlbecsüléséből könnyen idealista nézetek fakadhatnak. A differenciálszámítás felfedezése kétségtelenül zseniális tett volt és ténylegesen döntő befolyást gyakorolt az elméleti fizika további fejlődésére, de amikor ezt *Newton* felfedezte, akkor tőle függetlenül erre *Leibniz* is rájött. Miért? Mert a mozgások tanulmányozására az akkor rendelkezésre álló geometriai módszerek elégteleneknek bizonyultak, és a mozgások tanulmányozása, a dinamika törvényeinek kutatása akkor társadalmi szükségesség volt. Erre vonatkozóan idézi *Kudrjavcev Marxot:* „A XVII. században igen fontos szerepet játszott a gépek szórványos alkalmazása, minthogy az akkori idők nagy matematikusai számára gyakorlati támaszpontokat nyújtott és ösztönözte őket a modern mechanika megalkotására." Kétségtelen, hogy *Newton* zseniális kutató volt, de ő is korának gyermeke és az általa felvetett eszmék végső soron korának eszméi voltak. A *Newton* által felvetett gondolatok már őt megelőzően és vele egyidőben szórványosan más kutatóknál is felmerültek (innen származnak pl. *Hooke*-al kapcsolatos prioritási vitái) s azt, hogy a mechanika addigi eredményeit rendszerbe foglalhassa, éppen az tette lehetővé, hogy a XVII. században élt, mert ha például az ókorban élt volna, egészen más eszmék fűződnének nevéhez. Kimagasló személyek a tudomány életében annyiban játszhatnak jelentékeny szerepet, amennyiben képesek helyesen felfogni a fejlődés akkori feltételeit, és eszméik és kívánságaik helyesen fejezik ki a kor szükségleteit. Tehát a kimagasló személyek éppen ezért lehetnek hatással eszméikkel a tudomány fejlődésére, éppen azért emelkednek ki kortársaik közül, mert ők tudják legjobban, legszemléletesebben, legkövetkezetesebben megfogalmazni, kifejezni, érvényre juttatni a társadalom akkori állapotában a kor tudományának haladó eszméit.

A fizika tudományának fejlődése nemcsak a tények megismerésében, az objektív tartalom kifejlesztésében áll, hanem az ezekhez elkerülhetetlenül kapcsolódó világnézeti, filozófiai megállapítások kialakításában is. Erre vonatkozóan nagyon helyesen jegyzi meg *Kudrjavcev* előszavában: „A fizika lényegénél fogva mélységesen világnézeti tudomány." A tudomány ugyanis harci eszköz is, az uralkodó osztályok mindig felhasználták és ma is felhasználják uralmuk biztosítására. Éppen ezért egyetlen osztálytársadalomban sem lehet közömbös az uralkodó osztály számára, hogy milyen nézetek kapcsolódnak a tudományos ténymegállapításokhoz. *Kudrjavcev* könyvéből világossá válik, hogy a rabszolgatársadalom, de még inkább a feudalizmus, melyek létrejöttüket az akkori időkben haladó társadalmi erők győzelmének köszönhették, reakciósakká váltak, mikor létüket az újabb haladó erők fenyegetni kezdték. Ilyenkor minden eszközzel szembefordultak ezekkel az erőkkel, küzdöttek ellenük, hol erőszakkal, hol rábeszéléssel, hol börtönnel, inkvizícióval, máglyával, hol pedig különböző áltudományos, reakciós nézetek mesterséges szításával. Ebben a harcban mindkét fél részére mindig fontos fegyvert jelentett a fizika, a hozzákapcsolódó természetfilizófiai nézetekkel. *Kudrjavcev* hosszasan időzik azoknál a küzdelmeknél, amelyeket a tudomány forradalmi harcosai vívtak a haladást gátló erőkkel, mert — mint írja — „A társadalmi viszonyok gyökeres átalakulásának időszakaiban a fizikai nézetek mindig heves ideológiai harcok céltábláivá váltak." Könyvének legsikerültebb részében *Roger Bacon* szenvedésein, *Giordano Bruno* és *Galilei* sorsán keresztül mutatja meg az új, haladó szellemű materialista irányzat üldözését. Mindazoknak, akik a fizikai természet és a szabad gondolkodás törvényeinek kipuhatolásába mélyedtek, koruknak a klérus által irányított dogmatikus szellemével nyílt összeütközésbe kellett kerülniök. Akik a középkorban a görögök és a rómaiak iratainak tanulmányozásából más eszméket merítettek, mint kortársaik, akik felismerték, hogy mi a valódi tudomány és valódi szellemi szabadság, azok csakhamar átlátták, hogy mindaz, amit az ő koruk igazi tudományosságnak nevezett, az igazi tudományosságnak csak a torzképe. Akik elég forradalmi erőt éreztek magukban a középkorban a skolaszticizmus gyomjainak kiirtására, ezek mind szembekerültek az uralkodó osztály érdekeinek legelszántabb védelmezőivel, a sötétség bajnokaival, a klerikális reakcióval. A későbbiekben sem volt más a helyzet és hogy a világnézeti harcban a fizika később is milyen jelentős szerepet játszott, ahhoz elég utalnunk arra, hogy a marxizmus nagyjai *Engels* és *Lenin* milyen sokszor és milyen sokat foglalkoznak az uralkodó osztály által éppen a fizikához kapcsolt áltudományos, reakciós, machista, pozitívista nézetek kritikájával. *Kudrjavcev* könyvén keresztül ragyogóan bontakozik ki a legrégibb kortól kezdve egészen a XIX. századig a materializmus mindent elsöprő győzelme. Megláthatjuk könyvéből, hogy már az ókortól kezdve *Mengyelejevig* a haladó nézetek lényegileg mindig materialista nézetek voltak, a haladó tudósok lényegileg mind materialisták voltak. Ezen a tényen az sem változtat, hogy a tudományban materialista fizikusok sokszor idealista természetfilozófiai következtetéseket vonnak le tudományukból; gondoljunk csak *Eddington, Jeans, Heisenberg, Bohr* és a többiek természetfilozófiai nézeteire, melyek napjainkban magára a tudomány fejlődésére is milyen káros befolyást gyakorolnak. Ezek a tudósok a tudomány továbbfejlesztése kapcsán szerzett tekintélyüket arra akarják felhasználni, hogy ennek segélyével a reakciós eszmék szószólójává váljanak. Ezekre mondja nagyon találóan *Lenin* a „Materializmus és empiriokriticizmus" cimű művében: „Ezek a professzorok a legértékesebb munkákat képesek ugyan adni a kémia, a fizika története speciális területén, de egyetlen egynek sem szabad közülük elhinni egyetlen szót sem, amikor filozófiáról van szó."

Kudrjavcev könyve azonban nemcsak a társadalom és tudomány fejlődésének szoros kapcsolatára mutat rá, nemcsak a materializmus győzelmének kibontakozását tárja elénk, hanem hézagpótló jelentőséggel bir még abban is, hogy ez az első munka, mely világosan mutatja az orosz fizika igazi szerepét és hozzájárulását a világ tudományához. *Polzunov, Lomonoszov, Richman, Petrov, Jakobi, Lenc, Mengyelejev* és a többiek sorsának és munkáinak részletes tárgyalása sok újat hozott a szakemberek számára is. Különösen érdekes és jelentős ezek közül az orosz tudomány egyik legnagyobb alakjának, a polihisztor *Lomonoszov*nak élete és munkássága. Valóban egyenesen csodálatos az a sokoldalúság, az a zseniális előrelátás, mellyel kortársai közül messze kimagaslott; nem hiába nevezte *Puskin* az „első orosz egyetem"-nek. Az anyag megmaradása törvényének felfedezése és tapasztalati igazolása, a fizikai kémiának mint külön tudománynak a kifejlesztése, a légköri villamossággal kapcsolatos vizsgálatai, a Vénusz bolygó atmoszférájának felfedezése, valamint azok a tervei és javaslatai, melyek életében már nem valósulhattak meg, *Lomonoszov*ot előkelő helyre állítják a világ nagy természettudósai között. Nagy érdeme, hogy először foglalt élesen állást a kozmopolitizmussal szemben, először hangoztatta az idegenimádat gátló szerepét a hazai tudomány fejlődésében és ő maga életének legnagyobb részét a hazai talajból táplálkozó tudomány kialakításának szentelte. *Lomonoszov* éles különbséget tudott tenni a pétervári akadémián összegyült külföldi semmirekellők, áltudósok és kalandorok, valamint az igazi nagyok: *Euler* és a két *Bernoulli* testvér, között. Az utóbbiak közül különösen *Euler*rel tartott igen szoros barátságot egészen élete végéig, és a két nagy tudós kölcsönösen rendkívül ösztönző hatást gyakorolt egymásra.

Lomonoszov nagyszerű kezdeményezése azonban halála után abbamaradt. Azon sajnálatos ténynek oka, hogy *Lomonoszov* természettudományos munkái közel másfél évszázadon keresztül feledésbe merültek, Oroszország akkori rendkívül elmaradt társadalmi helyzetében keresendő. *Lomonoszov* messze megelőzte korát és ezért eszméi nem találtak visszhangra Oroszországban. Sok időnek kellett elmúlnia ahhoz, hogy *Lomonoszov* elfoglalja az őt megillető helyet a világ tudományos értékelésében és ahhoz, hogy a szocializmus országának legcsodálatosabb egyetemét éppen *Lomonoszov*ról nevezzék el.

Kudrjavcev példája megmutatja az utat, melyet a tudományok történetírása terén nekünk is követnünk kell. A fizikának Magyarországon is vannak haladó hagyományai, és ezeket a hagyományokat nekünk is ápolnunk kell. Nekünk is van *Segner*ünk, *Eötvös*ünk, *Jedlik*ünk, *Bolyai*nk, *Déry*nk, *Bláthy*nk és *Zipernovszky*nk, akikről a világ kevés kivétellel vajmi keveset tud. Egészen bizonyos, hogy az ez irányban végzendő kutatások sok új és ma még a szakemberek előtt sem ismeretes meglepő tényeket hozhatnának felszínre. Minden nemzet haladó hagyományai egyformán értékes részét alkotják az emberiség közös kulturális kincsének, és ezért nekünk is arra kell törekednünk, hogy ehhez a közös világkultúrához erőnkhöz mérten minél nagyobb mértékben járuljunk hozzá. Erre vonatkozóan mondja *Sztálin* elvtárs: „Minden nemzetnek, legyen az nagy vagy kis nemzet, megvannak a maga sajátos tulajdonságai, külön vonásai, amelyek csakis ennél a nemzetnél találhatók meg és más nemzeteknél hiányoznak. Ezek a sajátosságok alkotják azt az értéket, amellyel minden nemzet gyarapítja, kiegészíti, gazdagítja a világkultúra közös kincsesházát. Ebben az értelemben minden nemzetnek — legyen ez kis vagy nagy nemzet — egyenlő a helyzete és minden nemzet ugyan olyan jelentős, mint bármely más nemzet."

Az orosz tudomány nagyjainak kellő értékelése mellett *Kudrjavcev* a tudomány többi nagyjait is jelentőségüknek megfelelően tárgyalja. Ezt láthatjuk többek között a *Faraday*ról szóló kitünően sikerült fejezetben is. Talán több mint szimbólum, hogy a londoni kovács fia, aki maga is könyvkötőmunkásból lett világhirű tudós, a proletáriátusnak a történelem szinpadára való lépésével és az önálló munkásmozgalomnak kialakulásával egyidőben jelenik meg a fizika nagyjai sorában. Amikor az idejétmúlta mechanisztikus materializmust a kialakuló dialektikus materializmus készül felváltani, *Faraday* a jelenségek univerzális összefüggésébe vetett szilárd meggyőződése alapján jut el korszakalkotó felfedezéseihez. *Kudrjavcev* kellő súlyt tud adni *Faraday* munkásságának és jelentőségének megfelelően illeszti bele a kor történetébe.

A könyv befejezését illetően, azt hiszem, vitatható *Kudrjavcev* álláspontja. Véleményem szerint ugyanis nem helyes a tárgyalt utolsó korszakot és így a könyvet *Mengyelejev*vel zárni le. *Mengyelejev* munkái nem a fejlődés valamely periódusát tetőzték be, hanem sokkal inkább új korszakot, új perspektívákat nyitottak meg a haladás számára, hisz közismert dolog, hogy a modern atomelmélet legnagyobb eredményei közé soroljuk éppen a *Mengyelejev* által felfedezett periódusos rendszer elméleti értelmezését, ami csak a XX. században sikerült. A periódusos rendszer törvényszerűségei alkotják a modern atomfizika alapját, és így ennek felfedezése sokkal inkább tekinthető zseniális kezdetnek, mintsem befejezésnek. Sokkal helyesebb lett volna a korszakot *Maxwell* munkásságával befejezni, mivel a Maxwell-egyenletek valóban a kor alapvető elektromos, mágneses és fénytani ismereteinek legnagyobbszabású összefoglalását, betetőzését adják. Ezen a téren *Maxwell* munkássága *Newton*éval teljesen egyenrangú. A Maxwell-egyenletek ugyanis magukban foglalják *Coulomb* két törvényét a potenciálelmélet lényeges részeivel együtt, *Oersted* felfedezését *Ampère* kutatásaival együtt, *Ohm* törvényét, *Faraday* indukciós törvényeit, mindezeket a Faraday-féle erővonal elképzelésre alapozva, amely ezáltal kerül teljes egybehangzásba a régebbi, már *Laplace* által kidolgozott potenciálelmélettel. Tartalmazzák ezenfelül a *Maxwell* által feltételezett elektromágneses hullámok létezését is, mely hullámok a Thomson-féle elektromos rezgőkörökből kiindulva transverzálisan, fénysebességgel terjednek tova a vákuumban és, akár a fényhullámok, anyagi közegekben törést szenvednek. Ez a nagyszabású egyesítés ilyen kevés egyenlet segítségével egyike a fizikatörténet legnagyobb eredményeinek. És amikor a relatívitáselmélet Newton mechanikáját már nem tekinti tovább a jelenségek exakt leírásának, Maxwell egyenletei még mindig eredeti tisztaságukban és érintetlenségükben ragyognak a fizika égboltján.

Mindezek ellenére, aki ebből a könyvből ismeri meg *Maxwell* munkásságát, az nem kap teljes képet róla, mert az előbb elmondottakról a könyvben aránytalanul keveset találhat az olvasó. Lehet, hogy a szerző ezeket az általa kilátásba helyezett következő könyvébe szánta, ami véleményem szerint nem helyes, ezzel szemben viszont itt részletesen levezeti a Maxwell-féle sebességeloszlási törvényt, amely viszont inkább tartozna a következő könyvbe, melyet *Mengyelejev*vel kellene kezdenie. Minthogy azonban a korszak ebben a könyvben *Mengyelejev*vel zárul, így adódik, hogy pl. *Boltzmann*ról már nem eshet szó, aki nélkül pedig az atomelméletről szóló fejezet hiányos marad. Általában igen nehéz dolog egy korszakot vagy könyvet bizonyos évszámnál lezárni, mert szükségképpen vannak olyan események, melyek ugyan a záróévszám előtt történtek, fejlődéstörténeti szempontból mégis a következő korszakhoz tartoznak, és ugyanez áll megfordítva is.

Mindezeket egybevetve meg kell állapitanunk, hogy *Kudrjavcev* könyve óriási nyeresége a magyarnyelvű tudományos irodalomnak. Azzal, hogy rámutat a társadalom és tudomány fejlődésének szoros kapcsolatára, hogy elénk tárja a materialista világnézet győzelmes kibontakozását, hogy megmutatja az orosz fizika igazi szerepét a világ tudományában és így ösztönzést ad nekünk is saját nagyjaink emlékének erőteljesebb ápolására, gazdag anyagot szolgáltat mind a fizikusoknak, mind pedig a más területen működő szakemberek számára. Ez a könyv hozzásegíti a fizikust ahhoz, hogy saját szaktudománya területén sokkal jobban tudjon eligazodni, jobban fel tudja ismerni a különböző káros, idealista nézeteket a fizikában és a győzelmes materializmus fegyverével jobban tudjon ellenük harcolni. A könyvben közölt nagyszámú idézettel nemcsak rendkívül szinessé, érdekessé és értékessé teszi a leírást, hanem azáltal, hogy könyvén keresztül a tudomány nagyjai saját szavaikkal szólnak hozzánk az egész előadás valahogy hitelesebbé, meggyőzőbbé, az élethez közelebbállóvá válik. A nagy emberek munkájának, küzdelmének, kiállásának, sorsának ilyen közvetlenül közelről szemlélése feltétlenül ösztönző hatást gyakorol az ifjúságra, amint azt maga a könyv is igen érdekesen példázza *Faraday* esetében.

Ez a rövid előadás természetesen egyáltalában nem tart igényt a könyv kimerítő ismertetésére. Célja inkább csak az volt, hogy néhány szempontra rámutatva bevezetést adjon a most következő ankéthoz, hogy a végső vélemény a remélhetően értékes felszólalások és a termékeny vita során alakuljon ki véglegesen.

HOZZÁSZÓLÁSOK

NOVOBÁTZKY KÁROLY r. tag:

A mai fizika anyagi és vakuumfizikára tagozódik. Az utóbbinak általánosan használt neve térelmélet. Ide tartozik az elektrodinamika Maxwell-féle elmélete és az *Einstein*től eredő gravitációs elmélet. Mindkettő az anyagtól mentes üres térnek geometriai sajátságaiból magyarázza a benne lefolyó fizikai jelenségeket. A természetes geometria bizonyos konvenciók alapján mérőeszközökkel meg is tudja határozni a tér speciális geometriai szerkezetét. Kétségtelen tehát, hogy a tér geometriája épp oly objektív realitás, mint maga az anyag, és kihatással van a térben lejátszódó fizikai történésre. Ez az utóbbi az, ami nem él a mai filozófiai köztudatban. Bizonyíték erre maga *Kudrjavcev*, aki egy szóval sem említi a térgeometria szerepét a vakuumfizikában, egy szóval sem említi, hogy a vakuumelektrodinamika új kort nyitott meg a mechanikai világnézet megsemmisítésével. Ellenkezőleg: érezhetően favorizálja *Descartest*, ki a hatások továbbterjedését csakis egymással érintkező anyagok kölcsönhatásával akarta magyarázni. Ugyanebből az okból *Rudas* híve volt az elavult éterelméletnek.

Tudatossá kell tenni, hogy a mai fizika a három alaprészecskéből felépített anyag mellett a tér geometriai struktúráját is oly realitásnak tekinti, melynek lényeges része van a természeti folyamatokban. Ez nem érinti a materializmus lényegét, ha azt pontosan *Lenin* meghatározása szerint értelmezzük.

SCHAY GÉZA r. tag:

Azzal a kérdéssel kapcsolatban, hogy a gravitációval és elektromágnességgel foglalkozó térelméletek, melyek a tér geometriai sajátságaira támaszkodnak, nincsenek-e ellentmondásban a dialektikus materializmussal, nézetem szerint egyértelműen le lehet szögezni, hogy nincsenek. A filozófiai materializmus ugyanis, amint az történelmi fejlődéséből is kiderül, semmiesetre sem azonosítható a köznapi anyagelvűséggel. Lényege az a meggyőződés, hogy a minket környező világ olyan objektív valóság, amely ugyan tudatunktól függetlenül létezik, de amelyről objektív módon szerezhetünk és szerzünk tudomást. A dialektikus materializmus ezt azzal egészíti ki, hogy ezt az objektív valóságot helyesen is meg tudjuk ismerni. A megismerhető objektív valóság mineműségéről azonban a filozófiai materializmus nem tesz semmi előzetes elvi kijelentést. Éppen ennek a megállapítása a tudományos megismerés feladata. Ha tehát a tudomány objektív módszereivel arra az eredményre jutunk, hogy a térnek valamilyen határozott geometriai struktúrája van, és ez a struktúra megfigyelhető tényekkel észlelhető és eldönthető, akkor az ilyen felfogás semmiesetre sem ellenkezik a dialektikus materializmussal.

Azt a felfogást, hogy a materializmus egyik alapvető gondolata az objektív valóság létezése és megismerhetősége, alátámasztja az a sokszor hangoztatott tény, hogy gyakorlatilag minden komoly kutató ösztönszerűen a dialektikus materializmus módszerét alkalmazza, még ha nincs is ennek tudatában, sőt a valóságban még akkor is, ha tudatosan más filozófiai nézetet vall. Nehezen képzelhető el ugyanis, hogy valaki lelkes és eredményes kutatást végezzen, ha alapjában nem az a hit vezeti, hogy munkájával megismerheti az igazságot. Továbbá minden kísérleti kutatásnak is csak az lehet az értelme, hogy tisztázza és eldöntse, milyen a világ „valójában", tehát előfeltétele az objektív valóság létezésébe vetett hit.

GYULAI ZOLTÁN lev. tag:

A könyv stílusa igen élvezetes, tárgyalásmódja dialektikus, tudományos, amint ezt már *Kovács* professzor taglalta.

A könyvtől vártam egy bizonyos kérdés tisztázását. Úgy vettem észre, hogy a filozófusok és a fizikusok között nincs harmónia az erő értelmezésében. Mint fizikus szerettem volna, hogy ha ez a könyv, amelyik eo-ipso gyökerében foglalkozik az erővel, ezt úgy vitte volna keresztül, hogy ezek a félreértések tisztázódjanak. Ugyanis az én meggondolásaim szerint itt nincsen valódi ellentét.

A könyv II. kiadás 266. oldalán ez áll: Newtoniánus volt-e Newton? Vajjon a kérdés feltevésénél nem vetít-e a könyv egy mai szempontot kétszáz esztendővel vissza. Ha Newton követői tévesen is értelmezték egyes helyeken Newtont, vagy belőle haladás ellenes következtetéseket vontak le, ezt nem lehet Newton hibájául felróni.

HATVANY JÓZSEF:

A dialektikus materializmus megkülönbözteti az anyag két fogalmát. A filozófus anyagnak nevez mindent, ami tőlünk független, objektív létező valóság. A fizikus anyagfogalma a tudomány pillanatnyi állása szerint változik, fejlődik. A dialektikus materializmus tehát nemcsak megengedi, de feltételezi, hogy a filozófiai anyagfogalomba számos olyan jelenség is beletartozzék, amely a fizikus anyagfogalmában esetleg nem foglaltatik. Ilyen pl. az energia, ilyen lehet esetleg a tér, de semmi esetre sem a tér geometriája, mint a tér szerkezetének leírása. Amennyiben a geometria a geométertől függetlenül létező objektív valóságot ír le, úgy ez a valóság kétségkívül a filozófiai anyag-fogalom része.

A könyv számos olyan jelentős elvi problémát vet fel, melynek tisztázása feltétlenül szükséges, ha helyesen akarjuk megírni a magyar tudomány és ezen belül a magyar fizika történetét. Ilyenek: a tudomány fejlődésének belső logikája és a történelmi szükségszerűség viszonya, valamint az egyes tudós tehetségének, hajlamainak szerepe; a tudós egyénisége és nézetei értékelésének kritériumai. A marxizmus-leninizmus tudománya lehetővé teszi, hogy az értékelésnél az abszolút és relatív haladó mozzanatok viszonylagos súlyát tekintetbe vegyük.

TARJÁN REZSŐ:

Kovács István bevezető előadásában, valamint *Gyulai Zoltán* hozzászólásában *Kudrjavcev* könyvét a tudományos kutató szemszögéből méltatta. Az én munkám a gyakorlati fizikus munkája. Az a feladatom, hogy a fizika eredményeit a gyakorlatban alkalmazzam. Így ebből a szempontból szeretnék a vitához hozzászólni.

A hozzászólók kiemelték, hogy *Kudrjavcev* következetesen végigviszi könyvében a dialektikus materializmus álláspontját. Ez így is van. Én viszont arra szeretném felhívni a figyelmet, hogy a szerző nemcsak materialista, hanem marxista is.

Hogyan nyilvánul ez meg? Részben úgy, hogy már a könyvének programmatikus bevezetésében hangsúlyozza, hogy „a legjelentősebb tényező, amely megakadályozza a tudományos gondolatok térhódítását a burzsoá tudományban: *a burzsoá tudósok gondolkodásának osztályukszabta korlátozottsága*". Rendkívül fontosnak tartom és a könyv egyik nagy érdeme, hogy a könyv ezeket az osztályhelyzetszabta korlátokat, amelyek az egyes tudósok, vagy éppen —,és éppen ezek a periódusok a fizika ú. n. „válságai" — az egész fizika fejlődését korlátozták (pl. Euler idealizmusa, Newton vallásossága, stb.), alaposan elemzi. Hogy mennyire fontos ennek a szempontnak a következetes érvényesítése a fizikus számára, arra semmi sem jobb bizonyíték, mint a fizikának a napjainkban lejátszódó válsága; pontosabban: az a válság, amelybe a burzsoá fizikusok pl. a quantum-elmélet terén jutottak. Világos, hogy ebben az esetben sem a fizika van válságban, hanem *a kapitalizmus általános válsága, a burzsoá fizikusok gondolkodásának osztályukszabta korlátozottsága az, amely az imperialista táboron belül nemcsak az egyes fizikusok, de magának a fizikának a fejlődését is fékezi.*

Kudrjavcev marxista voltából logikusan következik, hogy számára — a fizika története egyszersmind a haladó és reakciós erők harcának a története, amint erre szerkesztői előszavában *Szamosi Géza* is rámutatott. A könyvben ez úgy nyilvánul meg, hogy mindenütt élesen kidomborodik a fizika történetén belül a materializmus és az idealizmus harca, mely utóbbit legtöbbször az egyházi reakció képviselte.

Ez a harc aszerint ölt különböző formákat, hogy az adott társadalmi forma fejlődésének milyen szakaszán folyik. Angliában a polgári társadalom kialakulásának idején az egyház defenzivában van. Úgy igyekszik a maga befolyását átmenteni, hogy *Cotes Bentley* püspök sugallatára „átdolgozza" *Newton* „Principiá"-it. Egyszerűen kihagyja az anyag átalakulásáról szóló harmadik hipotézist, amely ellenkezik az egyház véleményével; így *Newton* fizikájából newtonizmust csinál. Ötven évvel korábban viszont, Olaszországban, a haldokló feudalizmus viszonyai között, a haladó kopernikuszi világnézet elfojtása elsőrendű politikai kérdés. Az egyház tehát támad. *Kudrjavcev* könyvének egyik legszebb része az, ahol kimutatja, hogy *Galilei* harca és pere nem egyszerűen csak egy fizikai elmélet helyes vagy helytelen volta körül forgott, hanem a szó legteljesebb értelmében *nyílt politikai per, politikai harc volt*, a *Galilei* képviselte haladó erők és az egyházi reakció között.

Kudrjavcev marxista volta megnyilvánul abban is, hogy nemcsak összefüggéseket és fejlődést mutat be, hanem *marxista módon értékel is.* Értékelésénél a társadalom és ezen belül a fizikai tudományok akkori állapotából indul ki: de ezen belül az egyes fizikai nézeteket *és* a fizikusokat is aszerint értékeli, ahogy a maguk korában a haladást, vagy a reakciót szolgálták, hogy mennyire tudták — *Sztálin* elvtárs szavai szerint — „megtörni a régit és újat alkotni".

A harcos marxista értékelési mód talán a legszebben abban a fejezetben jut kifejezésre, amely a tudomány és a technika franciaországi forradalmi átszervezéséről szól. Olyan része ez a könyvnek, amelynek tanulságai közvetlenül nekünk, a szocializmust építő Magyarország tudományos munkásainak is szólnak.

A tudósok hazafiságáról van szó ebben a fejezetben. Arról, hogy amikor a fiatal francia forradalmat a szövetségbe tömörült reakció próbálta megfojtani, hogyan siettek a haladó francia tudósok és az ujjászervezett Akadémia az ország segítségére: hogyan fogtak össze a dolgozó néppel és teremtették elő azt, amire a nép hadseregének az ország védelmére szüksége volt. *Fourcroy* kidolgoz egy eljárást, amelynek segítségével az ágyúöntéshez szükséges rezet ki lehet vonni a harangokból. *Segain* új bőrcserzési eljárást dolgoz ki, amellyel a hadsereg részére szükséges bakkancsok előállítási ideje az eredetinek egy töredékére csökken. *Monge* könyvet ír az ágyúöntés technikájáról, majd *Berthollet* és *Vandermonde*-al együtt könyvet írnak ezzel a címmel: „Útmutatás a munkásoknak... az acél előállítására" és a munkások kiképzésére tanfolyamokat szerveznek. *Kudrjavcevvel* együtt hadd idézzük mi is *Arago*-t:

> „Szükség volt tiszta rézre: a haza és a tudomány megtalálta azt a kolostori és plébániai harangokban és a toronyórákban. Ez az ércbánya szolgáltatta azt a fémmennyiséget, amelyet nem hozhattunk be többé Angliából, Svédországból. Szükség volt salétromsavra; a föld, amelyet a tudósok eleddig csupán kisméretű laboratóriumi kísérleteikben használtak fel, feltárta kincseit és kielégítette a hadsereg igényeit. A bőr katonabakkancsokká való feldolgozása teljes hónapokat igényelt és a katonák a bakkancsokra várva mezítláb jártak: ám a bőripar váratlanul nagy tökélyre emelkedett és a hónapok napokká váltak. A puskagyártást késleltették az elkerülhetetlen aprólékos munkálatok: a gépek megerősítették a mesterek kezét, megkönnyítették munkájukat s a puska immár fölös számban érkezett a hadsereghez".

Persze a tudomány és a dolgozó nép ilyen közvetlen egységének a polgári Franciaország kialakulása hamar véget vetett. De, noha *Kudrjavcev* nem utal rá, mert nem a tárgyalt történelmi szakaszba esik, ezt a fejezetet olvasva lehetetlen nem gondolni arra, hogy *a tudománynak és a népnek ez a teremtő egysége történelmileg újra csak a Nagy Októberi Szocialista Forradalom után, a Szovjetunióban valósult meg.* A kurszki mágneses anomália kivizsgálása a polgárháború időszakában, a szovjet tudósok *Sztálin* elvtárs által is hangsúlyozott hozzájárulásai a nagy honvédő háborúban aratott világtörténelmi győzelemhez, vagy közreműködésük napjainkban a kommunizmus nagy építkezéseinél csak a legkiemelkedőbb, de korántsem az összes bizonyítékai ennek a tézisnek. Ismétlem: *Kudrjavcev* könyvének ez a része közvetlenül nekünk, magyar tudományos munkásoknak is szól.

Végeredményben, a könyv egészét tekintve leszögezhetjük, hogy *Kudrjavcev* könyve nagy segítséget jelent a magyar fizikusoknak. Tárgyi érdemein túl (pl. az eredeti források bő idézetei, amik egyébként nem volnának egykönnyen hozzáférhetők!) megtanít bennünket arra, hogyan kell a természetet ténylegesen materialista módon, történelmileg és dialektikusan felfogni. Ezzel olyan segítséget nyújt a magyar tudományos munkásoknak, melynek hatását a konkrét problémák megoldásánál is bizonyára érezni fogjuk.

DEZSŐ LORÁNT:

Mint csillagász, *Kudrjavcev* fizika történeti könyvével kapcsolatban a figyelmet természetesen elsősorban csillagászati vonatkozású részekre szeretném irányítani.

Szerző könyvének előszavában azt mondja: „abban akar segítségére lenni az olvasónak, hogy ... rátapintson a fizika tudományának világnézeti jellegére", mert „a fizika lényegénél fogva mélységesen világnézeti tudomány."* Szükségesnek tartom ezen egész általános, de kétségbevonhatatlan megállapítás mellett még kiemelni, hogy igen gyakran éppen a világnézetileg nagyfontosságú fizikai problémáknál a csillagászatra hárult a döntő szerep. Félreérthetetlenül igazolja ezt a könyv számos idevonatkozó adata.

Kitűnő példa rá maga az egész V. fejezet. Már címe is elárulja: „*Galilei* és harca az új világszemléletért." A bolygóknak a napkörüli keringését hirdető kopernikuszi tanítás általános elismertetéséért küzdött *Galilei* egész életén át. Ez „egyszersmind az új világszemléletért, a reakciós skolasztikus, klerikális ideológia ellen vívott harc volt."

„Teljes joggal állíthatjuk, hogy *Galilei*nek elsőrendű célja volt... a Copernicus-rendszer fizikai megalapozása". Hiszen, mint ismeretes, *Copernicus* könyvében még nem sorakoztathatott fel olyan tényeket, melyek nézetének helyességét bizonyíthatták volna, ha bizonyítás alatt az ellentmondást nem tűrő exakt matematikai ill. fizikai bizonyítást akarunk érteni. A Föld forgásának és napkörüli keringésének tényét *közvetlenül* tapasztalattal ill. megfigyeléssel még *Galilei* halála után is csak jóval későbbi korokban lehetett először kimutatni. Ennek ellenére *Galilei*nek mégis sikerült tudományosan teljesen kielégítően bizonyítani *Copernicus* tanításának helyességét. Érveléséhez a leglényegesebb és döntő tapasztalati alapot az nyújtotta, hogy kis távcsővével felfedezte a Nap tengelykörüli forgását, a Vénusz bolygó „fázisait" és a Jupiter bolygó körül keringő 4 nagy holdat.

Galilei műveiből és különféle *Galilei*vel kapcsolatos dokumentumokból vett hosszabb idézetek *Kudrjavcev* könyvében megvilágítják, hogy mennyire súlypontját alkotta *Galilei* egész munkásságának a kopernikuszi tanítás elfogadtatásának és igazolásának kérdése. Az idézetekre támaszkodva *Kudrjavcev* igen meggyőzően jut arra a végkövetkeztetésre, hogy további tudományos célkitűzése és az a fenyegetés, „hogy megsemmisítik valamennyi kéziratát", kényszerítették az inkvizíció hatalmába került ősz tudóst tanainak ú. n. „ünnepélyes" megtagadására.

A természettudományok történetével foglalkozó könyvek között igen kevés van, amelyben olyan drámai erővel bontakozik ki a klérus tudománytalan, igaztalan, önző harca a helyes irányban fejlődésre lendülő materialista világnézettel szemközt, mint ebben a műben. És talán végső fokon sohasem végződött a küzdelem egyetlen csatája sem olyan örök időkre szégyenletes módon, mint éppen a *Galilei*vel kapcsolatos kérdések esetén. Úgyannyira, hogy a legtöbb *Galilei*ről író szerző klerikális beállítottsága mértékétől függően megmegkíséreli az egyház ezen különösen sötét szégyenfoltját amennyire csak lehet tisztára mosni. Általában nevetségesen hatnak az efféle próbálkozások. Így leginkább egyszerűen elhallgatják az idevágó eseményeket.

Nem érdektelen, ha fellapozzuk a (tudomásom szerint) egyetlen másik, hasonló részletességgel megírt magyar nyelven megjelent fizikatörténeti könyvet, *Heller Ágost* művét és megnézzük, mit olvashatunk itt *Galilei* peréről. (*A physika története a XIX. században.* 2 kötetben. Budapest, 1891 ill. 1902. A K. M. Természettudományi Társulat kiadása, a M. Tudományos Akadémia segítkezésével)

Heller szerint *Galilei* személyében mindössze „a régi *megkedvelt*** rendszernek" támadt hatalmas ellensége és *Galilei* „ellenségei, különösen *Grassi* és

* Az idézetek, ha nincs más utalás, mindig *Kudrjavcev* szóbanforgó könyvéből valók.
** Kiemelés tőlem.

Scheiner... keresztülvitték, hogy ... az inkvizíció ... ellen(e) pert indítson". Innen mindenesetre úgy tűnik ki, mintha csupán személyes ellenfeleinek, egyéni, magánintrikája eredményezte és táplálta volna a *Galilei* elleni egyházi üldözést. Tehát az inkvizíció, már régóta általánosan elismert, de klerikális körökben még ma is mindössze tévedésnek minősített eljárásáért ezek szerint nem is az egyházat, hanem csupán egyes személyeket terhelne a felelelősség; az inkvizíció magas egyházi szervezete legfeljebb annyiban maradna hibáztatható, hogy hagyta magát félrevezettetni.

Annyit *Heller* könyve is elárul, hogy „az egyházi államban... *Galilei, Copernicus* és *Kepler* idevágó műveit csak 1835-ben vették le a tiltott könyvek indexéről". Tehát ebben a tudományos kérdésben az egyház két évszázaddal volt elmaradott.

Egyébként érdemes felemlíteni még, hogy a jezsuita *Scheiner* maga is csillagász volt, aki a napfoltokat *Galilei*vel nagyjából egyidőben, tőle függetlenül, önállóan is felfedezte. Sőt talán magukra a napfoltokra vonatkozólag sokkal több és legalább egyenértékű észleléseket végzett. Papi ideológiája béklyóinál fogva azonban képtelen volt arra, hogy a helyes észleléseket helyesen értelmezze. (*Scheiner* az észlelt foltokat Földünk és a *makulátlan* Nap között lévő objektumoknak tekintette.)

Kudrjavcev könyve a magyar nyelvű irodalomban először ad valóban tiszta képű tájékoztatást az egyház tudományfejlődést gátló reakciós harcáról, amelyet Földünk közönséges bolygóként való felismerése és ezen nézet elterjedése ellen kifejtett és amely küzdelem *Galilei* működése révén különösen kiéleződött.

Köztudomású, hogy a tudomány fejlődésének és a fejlődést gátló erők utólagos reális értékelésének nemcsak érdekessége és történeti jelentősége van. Sok kedvező kihatást várhatunk *Kudrjavcev* könyvétől a hazai fizikai tudományok legkülönbözőbb fokon folyó oktatásában és nemkülönben a kutatási munkáknál és a kutatási eredmények helyes értékelésénél.

Remélhetőleg a könyv segíteni fog abban is, hogy a magyarországi fizikusok és tudományos kutatást és oktatást irányító szervek belássák előbb-utóbb kellő mértékben, hogy a csillagászat voltaképpen nem egyéb, mint speciális alkalmazott fizika, avagy esetleg definíciótól függően: általánosabb fizika. És így ennek megfelelőleg kellene helyet biztosítani minden vonalon a fizika mellett a csillagászat számára is. Igaz, hogy a csillagászat eddigi eredményeinek aránylag csekély százaléka fontos csak gyakorlati vonatkozásokban, míg a fizikai kutatások legtöbbször igen gyorsan alkalmazhatók mind kapitalista, mind szocialista társadalmi szükségleteknél. Ezzel szemben világnézeti kérdésekben az idealizmus és materializmus egymás elleni harcában a csillagászatra — véleményem szerint — legalább ugyanolyan szerep jut, mint a tiszta fizikára. Az elmúlt korokra vonatkozólag különösen beszédesen olvashatjuk ki ezeket *Kudrjavcev* könyvéből. Különben éppen ebben látom okát annak, hogy mind az utóbbi évekig a csillagászat hazánkban annyira elhanyagolt volt, hogy még jelen pillanatig sem lehetett a mulasztásokat bepótolni. Az uralmon volt politikai rendszernek nem állott érdekében, hogy egy olyannyira a vizet a materialista világnézet malmára hajtó tudományt támogasson, mikor az számottevő haszonnal nem is kecsegtetett.

Természetesen gyakran meg lehetett és lehet kísérelni a természeti jelenségeket idealista módon felfogni, vagy azoknak ideig-óráig akár az egyházi szemszögből kívánatos értelmezést tulajdonítani. *Kudrjavcev* említ effféle próbálkozásokat és igyekszik rávilágítani azok történeti indítóokaira. Ámbár ilyen események még manapság is előfordulnak. Az imperialista országokban élő számos kiváló fizikustól hallhatunk idealista megnyilatkozásokat. Legtöbbjük célja félreérthetetlenül politikai.

Nálunk a szocializmus felé való fejlődés jelenlegi szakaszában azonban igen vigyázni kell, hogy ne essünk a túlzott baloldaliasság hibájába. Munkásságát más politikai körülmények között kifejtett tudós esetleges idealista kijelentéseit ennek megfelelőleg kell értékelni. Ezeket azért tartom elengedhetetlennek felemlíteni, mivel saját magam voltam fültanúja az utóbbi években egy a fizikusok közé számítható szakember igen megdöbbentő szavainak. Fontos értekezleti vita során ellenfelének érvelését, mivel az az *idealista Newton*ra hivatkozott, eleve és pusztán ezért helyt nem állónak akarta nyilvánítani.

Newton „tekintélye vitathatatlanul jelentős szerepet játszott abban, hogy tudományellenes, reakciós áramlatok kerekedtek felül a fizikában s ezzel magyarázható az az éleshangú jellemzés, amelyet *Engels* adott egyízben *Newton*ról". Szerencsére *Vavilov*, a Szovjetunió Tudományos Akadémiája volt elnöke *Newton*ról szóló könyve magyar fordításának megjelenése óta nálunk is bárki megismerhette *Newton* ideológiailag helyes értékelését. Ma már különösen kimerítőleg olvashatunk erről a témáról, mivel *Kudrjavcev* műve szinte önálló könyvként kiadható terjedelemben foglalkozik *Newton* kimagasló munkásságával.

Kudrjavcev fizika történeti munkájának tanulmányozása bizonyára többször elejét fogja venni annak, hogy az említetthez hasonló más káros kihatású baloldali kilengések megismétlődjenek. Igen kár azonban, hogy név- és tárgymutató nem könnyíti meg a terjedelmes könyv használatát. Ezt a hiányt még utólagosan is érdemes volna pótolni.

M. ZEMPLÉN JOLÁN:

Nem akarom ismételni, amit az előttem szólók *Kudrjavcev* könyvének méltatásával kapcsolatban már elmondottak (egyébént éppen a mai napon jelent meg a könyvről szóló ismertetésem a Társadalmi Szemle novemberi számában), csupán *Dezső Loránt* néhány kijelentését szeretném kiegészíteni, illetve azokkal vitába szállni, mert ennek nyomán esetleg téves kép alakulhatna ki *Galilei* történelmi és tudománytörténeti jelentőségéről.

Kétségtelen az, hogy sem az ókorban, sem pedig az újkor kezdetén a természettudományok differenciálódása még nem történt meg és így általában a fizika és a csillagászat története nem választható külön. Az éles különválasztás nem is lenne helyes a dialektikus materializmus szempontjából sem, hiszen a világ anyagi egységének és összefüggésének egyik legdöntőbb bizonyítéka éppen az, hogy a földön és a világmindenségben ugyanazok a fizikai törvények uralkodnak. Lényegében ennek bizonyítását kezdte meg *Galilei* és ezt a munkát folytatták *Kepler* és *Newton*.

Az is kétségtelen, hogy a *Galilei* ellen folyó világnézeti harc középpontjában a *Galilei* által védett kopernikuszi rendszer kérdése állt. Ha azonban kizárólag ebben látnánk *Galilei* jelentőségét, akkor nemcsak hamis és nem teljes képet kapnánk, hanem úgy tüntetnénk fel, mintha *Kudrjavcev* sem ismerte volna ezt fel. *Dezső Loránt* arra hivatkozik — állításának bizonyítására — hogy *Kudrjavcev* egy terjedelmes fejezetet szentel *Galilei* pörének és egyik főművének *Beszélgetések a két világrendszerről*, melynek kivonatos fordítása 1947-ben magyarul is megjelent. Ennél terjedelmesebb azonban az a fejezet, melyben

Kudrjavcev *Galilei*vel mint a klasszikus dinamika megalapítójával foglalkozik. Erre vonatkozó főművét *Galilei* már a pör után írta és a „szégyenletes megtagadást" erősen enyhítette az, hogy ez tette lehetővé *Galilei* számára (mert így nem égették meg), hogy ezt a művet, melyen egész életében dolgozott, befejezhesse.

Ennek a munkának a jelentősége azért igen nagy, mert a mechanikára vonatkozó téves arisztoteleszi nézetek szétzúzása mellett ebben alapozza meg *Galilei* a modern természettudomány *módszerét,* példát mutat elmélet és gyakorlat egységére, amely módszert a marxizmus—leninizmus klasszikusai, *Engels* és *Lenin,* emeltek magas színvonalra, megtisztítva azt a rárakódott metafizikus-mechanisztikus tévedésektől és kiegészítve a dialektika tudatos alkalmazásával.

Ez a módszer *Galilei* első művében még csak csírájában van meg. Itt inkább ragyogó vitatkozó készségéről tesz tanúságot, melyen azonban még érezhető, hogy az arisztoteleszi-skolasztikus logikán nevelkedett.

Anélkül tehát, hogy a csillagászat jelentőségét — melyet *Dezső Loránt* hangsúlyoz — le akarnók becsülni, egyet kell érteni *Dezső*vel annyiban, hogy a csillagászat „alkalmazott fizika", tehát az alaptudomány a fizika és éppen a „világnézeti jelleg" szempontjából *Galilei* munkásságában döntő, vagy még döntőbb szerepe van a mechanika megalapozásának, mint a kopernikuszi rendszer megvédésének és ezt igazolja *Kudrjavcev* könyve is.

Az ankét az elnöklő *Novobátzky* Károly r. tag zárószavaival ért véget.

A. JA. HINCSIN
„A STATISZTIKAI MECHANIKA ANALITIKUS MÓDSZEREI“ C. KÖNYVÉRŐL

A. Ja. Hincsin könyvével kapcsolatban a következő alapvetően fontos szempontokra szeretném felhívni a figyelmet.

1. A statisztikus mechanika egyik feladata az, hogy a makroszkópikus fizika fogalmait molekuláris adatokra vezesse vissza. A visszavezetés középértékképzés útján történik, így a makrofizikai adatok a molekuláris adatok átlagértékei. Milyen súlyfüggvény szerint végezzük a közepelést? A statisztikus mechanika ergodikus, kváziergodikus és pszeudoergodikus elvei éppen azért születtek meg, hogy erre a kérdésre, a priori adottnak vélt principiumok alapján választ adhassanak. Majdnem egy évszázad telt el már a probléma első felmerülése óta, de *a fizika szempontjából* a kérdés megoldatlan maradt. A szovjet valószínűségszámítási iskola eredményeinek birtokában megállapíthatjuk, hogy ilyen úton nem is juthatunk pozitív eredményre. A valószínűségszámítás csak arra vállalkozhat, hogy a valószínűséggel kapcsolatos fogalmak általános törvényeit felderítse, de a priori adott (tehát a realitástól függetlenül, tisztán spekulatív úton nyert) valószínűségeket nem ismerhet el. Röviden: minden konkrét valószínűségszámítási kijelentésnek tapasztalati alapokra kell épülnie. *Hincsin* könyve az a priori elvek létezésének igen szép, de éppen ezért igen kártékony illúziójától fosztja meg az olvasót és ezzel a statisztikus mechanikát tudatosan a helyes probléma-felvetés irányába fordítja. Tudomány csak tényekre épülhet, illúziókra nem.

A mondottak szerint a statisztikus mechanika egyes problémáiban szereplő súlyfüggvényeket is magából a fizikai realításból kiindulva, tapasztalati alapokra építve kell meghatározni. Persze ez sem könnyű feladat, de csak ez az út az egyedül célravezető. A statisztikus mechanika fejlődéstörténetének és a diszciplina érvényességi területének mélyreható analíziséből kiindulva, *Hincsin* meg is mutatja a kivezető utat. A klasszikus statisztika esetében azt a munkahipotézist vezeti be, hogy a fázisfüggvények az állandó energiájú felületen „majdnem állandóak“. Ezáltal a súlyfüggvényt önkényesen is megválaszthatjuk, csupán azt kell kikötnünk róla, hogy a rendszer mozgásával szemben invariáns legyen. Ilyen invariáns súlyfüggvény viszont a Liouville-tétel alapján egyszerűen meghatározható. A kvantumstatisztikák esetében a fázisfüggvények „majdnem állandó“ voltáról nem beszélhetünk, ezért itt a súlyfüggvény meghatározása okvetlenül szükséges. Mivel itt az állandó energiájú felületnek a kvantumállapotok valószínűségi amplitudói által meghatározott gömbfelület felel meg, ezen a felületen kell egy alkalmas mértéket megadni. *Hincsin* munkahipotézise szerint a mérték az említett gömbfelület megfelelő darabjának területével arányos, vagyis a fázisok eloszlása egyenletes.

A makroszkópikus egyensúly esetében az említett munkahipotézisek a tapasztalással egyező eredményre vezetnek.

Az említett kérdések tárgyalásánál *Hincsin* világosan kifejezésre juttatta, hogy az általa javasolt megalapozás nem tekintendő végső megoldásnak. A könyvnek egyik nagy érdeme éppen abban áll, hogy nem kendőzi a nehézségeket és megoldatlan problémákat nem igyekszik megoldottként feltüntetni. Azt hiszem hasznos lesz, ha egy ilyen kérdést itt kissé részletesebben tárgyalok. Ha valaki azt kérdezi, hogy a *Maxwell*-féle sebességeloszlás milyen molekuláris-fizikai és valószínűségszámítási tételeknek a következménye, a statisztikus mechanika alapján nem adhatunk választ. *Hincsin* sem ad erre magyarázatot, ellenben megmutatja azt a két alapvető körülményt, amelyik már tartalmazza a sebességeloszlás tulajdonságait is. Eme körülmények egyike az, hogy a fázisfüggvények az állandó energiájú felületen majdnem állandóaknak tekinthetők. A másik körülmény az, hogy a struktúrafüggvény normálhatatlansága miatt be kell vezetnie faktorként az energiának egy exponenciális kifejezését. Hogy milyen mélyebb molekuláris és valószínűségszámítási alapjai vannak ezeknek a tényeknek, arra csak a további vizsgálatok adhatnak választ. Ezek az új problémák legalább olyan értékesek, mint a befejezett eredmények.

2. A statisztikus mechanikának egy másik feladata a fenomenológikus termodinamika törvényeinek statisztikus értelmezése. *Hincsin* könyve ebben a vonatkozásban is igen tanulságos. Különösen figyelemre méltó *Hincsin* tárgyalásában az a körülmény, hogy a termodinamika statisztikus megalapozásában éppen azok a momentumok hangsúlyozódnak, amelyek a fenomenológikus termodinamikában az axiómák szerepét játszák. (Itt *Carathéodory* és *Ehrenfest—Afanassjewe*-féle axiómatikus megalapozásra gondolok.) Ezek közül a legfontosabbak a következők:

a) A termikus egyensúly és a hőmérsékletfogalom kapcsolata. *Hincsin* tárgyalásából világosan kiderül, hogy a valószínűségi sűrűségfüggvények exisztenciája elválaszthatatlanul össze van kötve egy olyan paraméter exisztenciájával, amelyik az egész egyensúlyi rendszerre (tehát az összes nagy komponensekre) vonatkozóan azonos értékű. Nyilvánvaló tehát, hogy ez a paraméter szükségszerűen a hőmérsékletet reprezentálja.

b) Az abszolút hőmérséklet előjele feltétlenül pozitív. Ez a körülmény statisztikai oldalról azáltal nyer megerősítést, hogy a valószínűségi sűrűségfüggvényről csak $\beta > 0$ esetén beszélhetünk.

c) Az abszolút hőmérséklet a zérus értéket nem veheti fel. Valóban $\beta = 0$ a statisztikai tárgyalásmód szerint lehetetlen.

d) Valójában hőenergia nem létezik, a hő nem energia-fajta, hanem az energia átalakulásának egyik fajtája. A hő, *Hincsin* statisztikus értelmezése szerint is, valóban az energiaátalakulás egyik fajtájának mértéke.

e) Entrópiája csak a termikusan homogén egyensúlyi rendszereknek van. Az a körülmény, hogy a *Hincsin*-féle statisztikus entrópia-definicióban egyetlen, az egész rendszerre nézve közös β paraméter szerepel, ezt a tényt explicite is kihangsúlyozza. Ezzel kapcsolatban hasznos lesz rámutatnunk a *Boltzmann*-féle entrópia-definició hiányosságaira. E szerint a rendszer entrópiája az ú. n. állapotvalószínűség logaritmusával arányos. Azonban az állapotvalószínűség akkor is értelmezhető, ha a rendszer termikusan inhomogén és így a *Boltzmann*-féle entrópia olyankor is létezik, amikor a rendszernek nincs is entrópiája.

Még sok példát lehetne felsorolni, de — azt hiszem — ennyi is eléggé meggyőző.

3. Különösen figyelemre méltónak tartom a kvantumstatisztikák megalapozásának eleganciáját. Itt ugyanis, a klasszikus statisztikákkal szemben, az a nehézség merül fel, hogy a statisztikai sokaság individuumai már maguk is csak statisztikailag vannak jellemezve. (U. i. a hullámfüggvény statisztikus és nem kauzális állapothatározó.) Ez az oka annak, hogy ebben az esetben nem lehet a fázisfüggvényeket az állandó energiájú felületen „majdnem állandó"-aknak tekinteni. A már előzőleg említett közepelési elv igen frappáns megoldását adja ennek a problémának is.

A klasszikus statisztikában elegendő a mozgásegyenleteknek egyetlen integrálját figyelembe venni. Ez az integrál a rendszer energiája. (Tudjuk, hogy vannak más integrálok is, így az impulzusmomentum és a tömegközéppont helyzete és sebessége, azonban ezek a statisztikus mechanika szempontjából egyáltalán nem döntő jellegűek.) *Hincsin* felhívja a figyelmet arra, hogy a kvantumstatisztikákban az energiaintegrálon kívül még egy integrál felvétele okvetlenül szükséges, ha a tapasztalással egyező elméletet akarunk felépíteni. Ez a másik integrál az állapot szimmetriajellegét leíró különleges fázisfüggvény, mely háromféle értéket vehet fel: $\sigma = +1, -1, 0$. Ennek megfelelően a vizsgált rendszer szimmetria-jellege nem változhat és így háromféle kvantumstatisztikai séma lehetséges:

$\sigma = +1$, szimmetrikus *(Bose—Einstein)* statisztika;

$\sigma = -1$, antiszimmetrikus *(Fermi—Dirac)* statisztika;

$\sigma = 0$, teljes (klasszikus kvantum-) statisztika.

Érdekes itt az a körülmény, hogy az ú. n. klasszikus kvantumstatisztika teljesen exakt értelmezést nyer, tehát a kvantumstatisztikák közt a másik kettővel teljesen egyenrangú. Az eddigi felfogás ugyanis ezt a *(Hincsin* által teljesnek nevezett) statisztikát a klasszikus és a kvantumstatisztika következetlen és kielégítően nem indokolható kombinációjának tekintette.

4. *Hincsin* könyvéből ismerjük meg a statisztikus mechanika kétféle közepelési eljárásának, a mikrokánonikus és a makrokánonikus, röviden:

kánonikus közepelésnek, helyesen értelmezett viszonyát. *Hincsin* megmutatta, hogy a kétféle közepelési eljárás elvileg egyáltalán nem különbözik egymástól, a makrokánonikus közepelés nem egyéb, mint alkalmas módszer a mikrokánonikus közepek közelítő kiszámítására. A bizonyítás a valószínűségszámítás határértéktételeinek alkalmazásán alapszik. A határértéktételek alkalmazása más vonatkozásban is döntő szerepet játszik *Hincsin* könyvében.

5. Végezetül megállapíthatjuk, hogy *Hincsin* könyve két szempontból is jelentős szerepet játszik a statisztikus mechanika történetében. A könyv egyik jelentősége abban áll, hogy a statisztikus mechanika konzekvens megalapozását adja. Emellett azonban ugyanolyan jelentős abból a szempontból is, hogy „gondolatkeltő“, tehát olyan következtetések alapjául szolgálhat, amelyek a statisztikus mechanika további fejlődése folyamán döntő jellegűek. Mindezt figyelembe véve, különösen sajnálatos, hogy a könyv formailag nem üti meg a kívánt mértéket. Bár — hangsúlyozni kell — a hiányosságok lényegében nem érintik a könyv használhatóságát. A fordítást, az előzőleg megjelent könyvekéhez képest, határozottan jónak mondhatjuk. Lehet ugyan kifogást emelni, de nem vagyok benne biztos, hogy ezek a kifogások valóban jogosak-e. Egyetlen példát szeretnék ezzel kapcsolatban felemlíteni. Szerző egy fogalomra többféle elnevezést is használ. Pl. valószínűségi sűrűség, lokális eloszlásfüggvény, differenciális eloszlásfüggvény, mind ugyanazt a fogalmat jelölik. Az olvasó szempontjából kétségkívül előnyösebb lett volna mindenütt ugyanazt a kifejezést használni, de talán az sem hiba, ha a fordító az eredeti szóhasználat mellett marad. A fordítás hiányosságai mind hasonló természetűek és a problémát komplikálta az, hogy olyan határterületről volt szó, ahol más kifejezést szoktak használni a fizikusok és mást a matematikusok és ismét mást a magyar és mást a külföldi irodalomban. Hangsúlyoznom kell, hogy az itt felemlített (de nem értelemzavaró) fordítási hiányosságokat egy fizikus és egy matematikus lektor közös munkája árán lehetett volna csak kiküszöbölni. A könyvben vannak sajtóhibák is, azonban a szokásosnál nem több, amit rövid hibajegyzékkel pótolni lehetett volna.

A könyv egyéb formai hibái: a szerző neve hiányosan van feltüntetve; nincs megemlítve a munka eredeti címe, ami annál fontosabb lett volna, mivel a könyv két különböző hosszabb dolgozat fordítása; nincs tartalomjegyzék; nincs előszó; továbbá hasznos lett volna néhány oldalnyi jegyzettel megkönnyíteni az olvasó munkáját. Mindezekre magyarázatot az ad, hogy a könyvnek nem volt szerkesztője. Bár az én nevem ott áll a könyvben, hogy én szerkesztettem a könyvet, de nekem erről nem volt tudomásom. A könyv nyomásakor értesítettek telefonon, hogy szerkesztőként az én nevem fog a könyvön szerepelni. Persze látszólag nem volt egészen illetéktelen az ilyen minőségben való szereplésem, mert a könyv lektorálását én végeztem. Mindez magyarázatot ad a hibákra, érthetővé pedig a szervezettség hiánya teszi a dolgot, hiszen ez a könyv egyike volt a III. Osztály első kiadványainak. Úgy látom a kérdést, hogy az említett hiányosságokon még mindig lehetne segíteni megfelelő pótlások utólagos kiadásával, de még kívánatosabb volna *Hincsin* újabb ilyen tárgyú művének lefordítása, amikor az előzőek tanulságait leszűrve, a hibákat teljes mértékben ki lehet küszöbölni.

Fényes Imre

Hincsin munkái a statisztikus (nem statisztikai!) mechanika történetében új fejezet kezdetét jelentik. *Hincsin* volt az első, aki a statisztikus mechanikát konzekvens és szabatos matematikai alapokon építette fel. A statisztikus mechanika lényege éppen abban áll, hogy a tárgyalt fizikai rendszereket, azok törvényszerűségeit a valószínűségszámítás segítségével vizsgálja. Ennek ellenére a statisztikus mechanika *Hincsin* előtti művelői nem vették igénybe a valószínűségszámítás fejlett korszerű apparátusát. Ennek magyarázata az, hogy a statisztikus mechanika kialakulása idején a valószínűségszámítás nyugaton még igen kezdetleges állapotban volt, az orosz matematikusok — *Csebisev, Markov, Ljapunov* — korszakalkotó eredményeit a statisztikus mechanika alkotói nem ismerték. Az azóta eltelt évtizedek alatt a valószínűségszámítás matematikai elmélete, elsősorban szovjet matematikusok munkája következtében, akik között *A. N. Kolmogorovot, Sz. N. Bernsteint* és magát *A. Ja. Hincsint* kell első helyen megemlítenünk, hatalmas fejlődésen ment keresztül. Erről a fejlődésről, aminek óriási jelentősége van a fizika, a kémia és más természettudományok és a műszaki tudományok szempontjából, a nyugati fizikusok többsége nem igen vett tudomást. Igen érdekes ennek okait közelebbről megvizsgálni. Első helyen azt kell megemlítenünk, hogy a valószínűségszámítás *Kolmogorov*-tól származó korszerű szabatos matematikai elmélete konzekvens materialista elmélet, és érthető, hogy a fizikai idealizmus hívei elzárkóztak ez elől az elmélet elől. Ezt az elzárkózást elősegítette az az egészségtelen konzervatizmus, amely a matematikai módszerek alkalmazását illetőleg, a fizikusok körében eléggé el van terjedve. Így történhetett meg, hogy a statisztikus mechanikában — ahogy *Hincsin* mondja vagy „rosszminőségű" és kétes értékű matematikai meggondolásokat alkalmaztak, vagy nehézkes és áttekinthetetlen speciális matematikai apparátust igyekeztek megalkotni — mint például *Fowler* és *Tolman* — ahelyett, hogy alkalmazták volna a valószínűségszámítás határeloszlás-tételeinek meglévő és szabatos apparátusát, amelynek éppen a statisztikus mechanika a legkézenfekvőbb alkalmazási területe. *Hincsin* érdeme elsősorban abban áll, hogy megmutatta, hogy semmi különleges apparátusra itt nincsen szükség, és a normális eloszláshoz való lokális konvergenciára vonatkozó határértéktételek egyszerű alkalmazásával minden eddigi tárgyalásnál világosabb, áttekinthetőbb és szabatosabb módon építhető fel a statisztikus mechanika, mind a klasszikus, mind a kvantumstatisztika. Külön ki szeretném emelni azt az érdekes körülményt, hogy míg a klasszikus statisztikában az egyváltozós határértéktételekre van csak szükség, a kvantumstatisztika felépítése megköveteli a többváltozós határértéktételek alkalmazását. Igen nagy jelentősége van annak, hogy az ergod-elvet *Hincsin* lényegében a nagy számok törvénye segítségével pótolja, továbbá rámutat annak a lehetőségére is, hogy a részecskék kölcsönös korrelációja is figyelembe vehető. Világosan rámutat *Hincsin* az elmélet felépítésénél arra is, hogy ahol ezt a kölcsönhatást elhanyagoljuk, ott tulajdonképpen csak közelítésről van szó, amely azonban gyakorlatilag megengedhető. Ennek ellenére *Hincsin* könyve szükségképpen arra a gondolatra vezeti az olvasót, (bár ezt ebben a formában nem mondja ki) hogy érdemes volna a statisztikus mechanika felépítésénél is figyelembe venni a kölcsönhatásokat, és ennek megfelelően a független valószínűségi változókra vonatkozó határértéktételek helyett a gyengén függő valószínűségi változókra vonatkozó megfelelő tételeket alkalmazni. Ennek a programmnak a végrehajtása azonban megköveteli a nem független valószínűségi változókra vonatkozó határértéktételek elméletének továbbfejlesztését. Az első kezdeményező lépést e téren *Sz. N. Bernstejn* tette meg, azonban ez az elmélet még távolról sem érte el azt a fejlettségi fokot, mint a független változókra vonatkozó határértéktételek elmélete, és ezen a téren még sok nyitott prombléma van.*

Örömmel üdvözlöm *Hincsin* munkáinak magyar nyelven való megjelenését, meg vagyok győződve arról, hogy ez a könyv — a magyar kiadás és a fordítás kirívó fogyatékosságai ellenére is — nagy érdeklődésre fog találni a magyar fizikusok és matematikusok körében, és azt fogja eredményezni, hogy egyrészt a fizikusok behatóbban fognak a valószínűségszámítással foglalkozni, másrészt a matematikusok is fokozottabban fognak érdeklődni a statisztikus mechanika iránt. A fizikus hallgatók részére tartott egyetemi valószínűségszámítási előadásomban *Hincsin* nyomán tárgyaltam a statisztikus mechanikát, hogy ezzel is hozzájáruljak ahhoz, hogy ez a kiváló munka minél szélesebb körben ismertté váljék.

Rényi Alfréd lev. tag

* Egy erre vonatkozó újabb eredmény található Rényi Alfréd „A valószínűségszámítás központi határértéktételének egy új általánosításáról" c. dolgozatában, III. o. Közleményei. I. *2* (1951), 351.

A. M. BONCS-BRUJEVICS „AZ ELEKTRONCSŐ FIZIKAI ALKALMAZÁSAI" CÍMŰ KÖNYVÉRŐL

Az elektroncső egyike azoknak a — ma már a műszaki gyakorlatba is átment — eszközöknek, amelyeken a természettudományok, elsősorban pedig a fizika fejlődésének a dialektikája, ennek a fejlődésnek belső törvényei, logikája a legvilágosabban látható és igazolható. Amint *P. Sz. Kudrjavcev* megállapítja, „a termelési bázis változása adja az *alapot* a tudomány tartalmának a megváltozásához, de a tudomány saját belső törvényeinél fogva, saját fejlődési logikájánál fogva fejlődik tovább."* Ezeknek a belső fejlődési törvényeknek egyike, amely a fizikára különösen jellemző, az, hogy olyan jelenségek és kísérleti eszközök, amelyek a fizika fejlődésének egy meghatározott szakaszában a kutatás *tárgyát* képezik, visszahatnak magára a fizikai kutatásra és nem sokkal később már a további kutatás *eszközei* lesznek.

A példákat szinte tetszésszerinti számban lehetne felhozni akár a klasszikus, akár pedig a modern fizika területéről. Az elektroncső az elmondottakra azért jellegzetes példa, mert rendkívül rövid idő alatt ért el olyan fejlődési színvonalat, hogy felhasználása magának a fizikai kutatásnak a további fejlődésére nemcsak visszahatott, hanem sok esetben annak alapfeltételeit teremtette meg. Még nem mondhatjuk el például, hogy akár csak a klasszikus kivitelű elektroncsövek minden tulajdonságát ismerjük és *értjük is.* Ennek ellenére a klasszikus kivitelű elektroncsöveket — amelyekről az előttünk fekvő könyv szól — rendkívül kiterjedt mértékben használják a híradástechnikán kívül a fizika és a technika széles területein. Így az elektroncsőnél a fejlődésnek az előbb említett két szakasza gyakorlatilag egybeolvadt: a ma „klasszikus"-nak nevezett elektroncső nemcsak a kutatás tárgya, hanem *ugyanakkor* annak rendkívül fontos eszköze is, amely nagymértékben kihat a modern fizika fejlődésére. Túl azon, hogy *Boncs-Brujevics* könyve az első komoly tudományos színvonalú könyv, amely az elektroncsövekkel magyar nyelven foglalkozik, — ez az utóbbi körülmény az, amelynek a könyv megjelenése különleges jelentőségét köszönheti.

A könyv elsősorban a fizikusoknak, szűkebben főként atomfizikusoknak és a kozmikus sugárzással foglalkozó kutatóknak szól. Ez a körülmény határozza meg a könyv tematikáját is. Az első fejezetben a szerző lineáris áramkörök (rezgőkörök, vezetékek, művonalak) kérdését tárgyalja a legkorszerűbb szempontok alapján. A felhasználási célnak megfelelően részletesen foglalkozik

* *P. Sz. Kudrjavcev:* A fizika története. 11. old. Akadémiai Kiadó, 1951.

a jel-spektrumok és ennek kapcsán az alakhű átvitel kérdéseivel. A következő fejezetben tömören és amellett rendkívül logikusan összefoglalja az elektroncsövek elméletének fizikai alapjait, ideértve az oszcillátorokat is, majd áttér az elektroncsővek egyik fő használati formájának, az erősítőknek a tárgyalására (III. és IV.-ik fejezet), amely a könyvnek tartalmilag és didaktikailag is egyik legsikerültebb része. Már a klasszikus erősítő-típusok tárgyalásánál mindenütt súlyt helyez a méretezés kérdéseire, amelyeket gyakorlatilag is bemutat. Ezek után a zaj-kérdések, visszacsatolt erősítők és a negatív visszacsatolás kérdései következnek. Az alakhű átvitel pontosságával függ össze az, hogy a szerző mindenütt gondosan elemzi az erősítők fáziskarakterisztikáit is.

A szórt kapacitások tárgyalása átvezet a számláló erősítők technikájában rendkívül fontos impulzus-erősítők tárgyalásához. Ismét részletesen tárgyalja a méretezési szempontokat és az átviteli sáv helyes megválasztását. Közli a szükséges kiegyenlítő kapcsolásokat és alaposan foglalkozik a különböző negatív visszacsatolásokkal is. Részletes ábrákat hoz arról, ahogy a különböző módon és mértékben torzult jelek az oszcilloszkópon megjelennek. Ezzel hathatós segítséget nyújt azoknak, akik először foglalkoznak az impulzus-technikával, mert tapasztalat szerint a katódsugárcsövön megfigyelt oszcillogrammok interpretálása szokta a legnagyobb nehézséget jelenteni. A fejezet az egyenáramú erősítők részletes tárgyalásával zárul.

Az V. fejezetben a szerző ismét bő méretezési anyag kapcsán az oszcillátorok kérdésével foglalkozik. Nagyszámú speciális áramkört ismertet, amelyek közül a legérdekesebb a ciklotronok duánsainak táplálására szolgáló adó tárgyalása. A szinuszos oszcillátorok tárgyalása után logikusan következik a különböző relaxációs oszcillátorok és billenő áramkörök alapos ismertetése, különös tekintettel a legfőbb felhasználási területet jelentő részecske-számlálókra. Itt külön értéket jelent a méretezési szempontok és formulák részletes tárgyalása, mert elsősorban ezek az áramkörök azok, amelyeket arra való hivatkozással, hogy „úgy sem lehet pontosan végigszámolni", általában tisztán empirikusan szoktak kidolgozni.

A VII.-ik fejezet az atomfizikában előforduló rendkívül kicsi, 10^{-14}, sőt 10^{-15} Amper nagyságrendű áramok mérésére szolgáló csőelektrométerek kérdéseit tárgyalja. Ennek a problémakörnek az irodalma Magyarországon alig ismert, a szerző viszont részletesen tárgyalja az alkalmazható csövek tulajdonságait, az áramköröket és ezzel jelentékeny szolgálatot tesz a nálunk most kifejlődőben lévő magfizikai kutatásoknak. A következő fejezetben a szerző az impulzus regisztrálás módszereivel foglalkozik. Részletesen tárgyalja az ionizációs kamrák, valamint a különböző számláló csövek és kristályszámlálók viselkedését, amelyekről magyar nyelven eddig szintén jóformán semmi sem jelent meg. Végül részletesen hozza a különböző amplitudó vizsgálati módszereket, a koincidencia és antikoincidencia áramköröket, valamint az amplitudó-válogató áramköröket is. A könyv a vizsgálatokhoz szükséges stabil áram- és feszültségforrások tárgyalásával zárul. Nagy értéke a bő irodalomjegyzék, amelyben számos, Magyarországon eddig ismeretlen szovjet publikáció címe található.

A könyvet az elmélet és gyakorlat példaszerű egysége jellemzi. A szövegezése rendkívül tömör, emellett azonban ugyanolyan világos is. A könyv rendkívül logikus szerkezetén és az anyag előadásán egyaránt meglátszik, hogy a szerzőben az anyag teljesen kiforrott, mielőtt könyvének megírásához hozzákezdett volna. Ezért van az, hogy még a rendkívül komplikált áramköröket is, mint pl. a relaxációs és billenő áramköröket, egyszerűen és világosan tudja elmondani. Az anyag kiforrottságára mutat az is, hogy a tárgyalt áramkörök megítélésénél *biztos kézzel tudja elválasztani a valódi tudományt a tudományos divattól.* Igy a példaképpen felhozott áramkörök mindig olyanok, amelyeken a kapcsolás működési elve a legvilágosabban megérthető, ugyanakkor azonban a probléma legkorszerűbb megoldását is jelentik. Így válik lehetővé pl. az, hogy az erősítőkről szóló III. és IV. fejezetben mindössze cca 80 oldalon lényegében ugyanazt az anyagot mondja el, amelyet a nálunk is sokat forgatott MIT sorozat XVIII. kötete sok fölösleges és csak látszólagos eleganciát jelentő matematikai apparátus alkalmazásával 700 oldalon (!) ismertet.

Összefoglalva: Boncs-Brujevics könyve — melynek tanulmányozását a fordító Sándor Endre kitűnő munkája még csak megkönnyíti — nagy nyeresége hazai tudományos irodalmunknak; nemcsak a fizikusoknak, hanem a híradástechnikusoknak is rendkívül hasznos szolgálatot tesz.

Tarján Rezső

SZ. P. HROMOV
„A SZINOPTIKUS METEOROLÓGIA ALAPJAI“ CÍMŰ KÖNYVÉRŐL

A szinoptikus meteorológia — a szerző meghatározása szerint — a nagy területen uralkodó időjárási viszonyoknak és változásainak okairól szóló tan, gyakorlati szempontból az időjárás előrejelzéséről szóló tudomány. Fejlődését a gyakorlati szükségesség (repülés) indította meg és a technika (pontosabban a hiradástechnika) segítette elő. Az első világháború után a szinoptikus meteorológia régi módszerét, az ú. n. *izobárszinoptikát* (amely az időjárási jelenségeket a horizontális nyomáseloszlás függvényének tekintette) felváltotta a „norvég iskola“ frontelmélete. A két *Bjerknes, Solberg, Bergeron* és munkatársaik az új szinoptikus meteorológiát a hidro- és termodinamikára építették fel, amelyekből idővel a meteorológia sajátos ága: a *dinamikus meteorológia* fejlődött ki. A két világháború közötti idő a szinoptikus meteorológia forradalmi időszaka volt. A norvég partokon teljes tisztaságában megvalósuló frontelmélet Közép-, Dél- és Kelet-Európában jelentős módosításra szorult s ezidőtájt a különböző elméletek és „iskolák“ a szinoptika gyors fejlődését mutatják.

Ebben az időszakban valóban merész vállalkozásnak látszott *Hromov* szovjet meteorológus első könyve: „Bevezetés a szinoptikus analízisbe“. A könyv négy évig készült s 1937-ben jelent meg orosz nyelven. A könyv jelentősége túlnőtt a Szovjetunió területén, s nagy nemzetközi sikerét mutatja, hogy 1940-ben *Konček* és *Swoboda* fordításában német kiadásban is megjelent. Az első kiadást 1942-ben — a háborús légkör ellenére — második német kiadás követte.

Hromov 1940-ben új könyvet írt „Szinoptikus meteorológia“ címen, 1948-ban pedig Leningrádban megjelent 15 év munkájának eredményeképpen „A szinoptikus meteorológia alapjai“ című összefoglaló nagy munkája.

Az első és a harmadik könyv megjelenése között a Szovjetunióban a szinoptika hatalmas fejlődésen ment át. A sűrű aerológiai hálózat lehetővé tette a felsőbb légrétegek rendszeres tanulmányozását és a háromdimenziós analízis gyors fejlődését. *Hromov* első könyve nagyjából a polárfront-elmélet alapján állt s ennek alkalmazását adta Közép- és Kelet-Európára. Harmadik könyvében kibontakozik a sajátos szovjet szinoptika számos kiváló kutató eredményeivel. Egyes fejezeteket a szinoptika tudományágainak speciális művelői: *Bugajev, Taborovszkij, Zverev, Vangengeim, Dzerdzejevszkij* írtak. *Hromov* nagymultú, nemzetközileg elismert munkásságának eredménye ez a hatalmas kézikönyv, amely most magyar fordításban is megjelent.

A szinoptika korántsem nevezhető a meteorológia szűk tartományának. Gyakorlati vonatkozásaiban rendkívül szerteágazó, a közlekedés, egészségügy, mezőgazdaság számos területén alkalmazásra talál. Jelentősége tehát túlnő a a szakemberek szűk körén. Éppenezért megfelelő összefoglaló munka kiadása, nemcsak a meteorológusképzés, hanem a határtudományok érdeklődésének kielégítése szempontjából is szükségessé vált. Nagyon szerencsésnek mondhatjuk a meteorológia ezen reprezentatív területéről éppen *Hromov* könyvének kiválasztását, amelynek megjelenése a meteorológiai szakirodalom nagy eseménye volt. Az alábbiakban részletesen ismertetjük *Hromov* munkáját.

Az I. fejezet a szinoptika tárgykörének és történetének ismertetése után a légkör legfontosabb állapotjelzőivel foglalkozik. Ezeknek nagy száma ízelítőt ad a szinoptika feladatainak sokrétűségéről. Nevezetesen arról, hogy milyen számértékekkel tudjuk jellemezni az atmoszférikus levegőt, amely folytonos áramlásban van, különböző magasságokban felmelegszik vagy lehül, adiabatikusan kiterjed, illetőleg összezsugorodik, kiszárad vagy átnedvesedik. Az egymástól független állapotjelzőkön kívül, aminők a nyomás, hőmérséklet, nedvességtartalom, szél, a meteorológia ezeknek számos függvényét vezette be, amelyek alkalmasak a folytonos változásban lévő atmoszférikus levegő jellemzésére. Ilyenek az adiabatikus változások során konzervatív állapotjelzők (pszeudopotenciális hőmérséklet, entrópia) a hőtartalom összehasonlítására szolgáló potenciális és ekvivalens hőmérséklet, az egyensúlyi állapotra jellemző függőleges hőmérsékleti gradiens. Ide sorolhatjuk a felhők, ködök, csapadékok különböző fajtáit, amelyeknek alakja, méretei, halmazállapota, struktúrája fontos jellemzői azon légréteg fizikai állapotának, energiatartalmának, amelyben keletkeztek.

Az állapotjelzők egy része skálár, másik vektormennyiség. Ezek az egész légkör terjedelmében mint skálár- és vektorterek jelennek meg. Ezen számszerű állapotjelzőkön kívül az I. fejezet néhány alapfogalmat (légtömeg, front, általános légkörzés) ismertet.

A II. fejezetben a könyv a szinoptikus analízis eszközeit mutatja be. A probléma a következő: hogyan tudjuk nagykiterjedésű terület (kontinensek, északi félgömb) fölött a légkör állapotjelzőit adott pillanatban áttekinteni. Ismerteti azokat a technikai megoldásokat és módszereket, amelyeket a meteorológia világszervezete ennek megoldására kidolgozott: az egyidejű és reprezentatív észleléseket, a szinoptikus hálózatot, az észlelések továbbítását, az észlelt adatok áttekinthető ábrázolását (szinoptikus térképek), amelyek lehetővé teszik, hogy akár az egész féltekének légteréről többezer megfigyelő állomás adatai alapján az észlelést követő 2—3 órán belül áttekinthető képet nyerjünk. Ennek a valóban páratlanul működő szervezetnek munkája, valamint az adatgyűjtés és térképrevitel technikai megoldásai a szinoptika gyakorlati alapjait képezik, azért ezzel *Hromov* is részletesen foglalkozik. A világirodalomban először foglalja össze azokat az alapelveket, amelyeket a szinoptikus helyzet analízisére a gyakorlati szinoptika termelt ki, de tudatossá *Hromov* munkájában váltak. Ezek: *az összehasonlítás elve* (az időjárási elemek összehasonlításának módszere), *a jellemzőség elve* (nagy légterek időjárása szempontjából reprezentatív állomások tulajdonságai), *a fizikai logika elve* (a légkör fizikai törvényeinek logikus alkalmazása az analízisnél), az *egymásrakövetkezés elve* (az időjárás időbeli fejlődésének követése a térképsorozatok figyelembevételével), *a térbeliség elve* (a függőleges dimenzió figyelembevétele az időjárási helyzet síkmetszeten való analízisénél).

Az utóbbi elv keresztülvitelére a magaslégköri kutatás (aerológia) számos segédeszközt dolgozott ki az aerológiai diagrammok formájában. Ezek nemcsak a levegő állapotjelzőinek függőleges ábrázolására alkalmasak, hanem lehetővé teszik a levegő adiabatikus állapotváltozásaival kapcsolatos számításokat, különböző s a gyakorlatban jól felhasználható energetikai feladatok megoldását. Az utóbbi követelmény előírja, hogy a diagramm területhű legyen, azaz az állapotváltozások során körüljárt terület arányos legyen a végzett munkával. Ennek eleget tesz a termodinamikában jól ismert p, v indikátordiagramm, de számos más a meteorológiában könnyebben előállítható ábrázolásmód is (a fajlagos térfogat közvetlenül nehezen mérhető). A diagramm területhű marad, ha az ábrázolásnál alkalmazott x, y koordinátapárok eleget tesznek a következő feltételnek:

$$\frac{\partial x}{\partial p}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial v}\cdot\frac{\partial y}{\partial p}=1$$

azaz a p, v indikátordiagramm transzformációját olyan $x = F(p, v)$ és $y = f(p, v)$ függvényekkel kell végrehajtani, amelyekből alkotott függvénydetermináns az egységgel egyenlő. *Hromov* összefoglalja az aerológiában elterjedt ábrázolási módokat s részletesen ismerteti ezek elméleti alapjait is. Ezek a diagramm-papírok:

1. emagramm $x = T, y = -R\cdot\ln p$
2. aerogramm $x = \ln T, y = -R\cdot T\cdot\ln p$
3. tefigramm $x = T, y = \varphi$ (entrópia)
4. stüvegramm $x = T, y = p^{\frac{AR}{c_p}}$
5. rossbygramm $x = m$ (keverési arány), $y = \ln \Theta_d$ (parciális potenciális hőmérséklet)
6. szondogramm $x = \ln T, y = T\cdot\varphi$

Hromov részletesen ismerteti az aerológiai diagrammokon végrehajtható számításokat.

Az aerológiai megfigyelések módot adnak az időjárási helyzet térbeli ábrázolására is. A gyakorlat folyamán többféle, de nem egységes módszer alakult ki. Ezek közül a nyomástopográfiai térképek (különböző izobárikus felületek tengerszintre vonatkozó topográfiái) általánossá váltak. A különböző irányítottságú függőleges síkokban (az ú. n. függőleges metszetekben) való ábrázolás technikáját és lehetőségeit *Hromov* foglalja össze jelen könyvében.

Ennek a fejezetnek legfőbb értékét abban láthatjuk, hogy a háromdimenziós időjárási analízis módszereiről és technikájáról, amelyek sokszor egymástól függetlenül, sporádikusan fejlődtek, összefoglaló, korszerű és részletekbemenő képet ad.

A III. fejezet a légáramlás meteorológiai problémáját tárgyalja. A meteorológiának ezzel foglalkozó ága: a dinamikus meteorológia, a hidrodinamikából, illetőleg az aerodinamikából fejlődött ki, de a szabad légkörrel kapcsolatos kérdések során sajátos irányban haladt. A légköri folyamatok óriási kiterjedése (egy-egy atmoszférikus áramrendszer egész földrészek, óceánok légterét kitölti) speciális feladatok elé állítja a dinamikus meteorológiát. Ezek megoldása során számolnia kell a földforgás eltérítő erejével, a függőleges dimenzióban történő áramlásnál a termodinamikai változásokkal és különböző összetett fizikai folyamatokkal, mint aminők az áramló levegőben létrejövő kicsapódás, felhőképződés, csapadékkihullás, amelyek mind a légtömeg energiaváltozásával járnak. Az áramlás folyamatában, éppen a nagy térségekre való tekintettel, nem hanyagolható el a környezet hatása, a hőátadás, az áramló levegő sugárzásokozta energiaveszteségei.

Az áramlásnak ezen bonyolult problematikájában a dinamikus meteorológia az atmoszférikus nyomástérre, az ú. n. *bárikus mezőre* támaszkodik, amelynek jellegzetessége — s ez ismét jelentős különbség a hidrodinamikai problémákkal szemben — a közel aerosztatikus nyomáseloszlás a függőleges irányban. A légnyomás a legkönnyebben és a legpontosabban mérhető állapotjelzők közé tartozik s a szinoptika kezdeti fokán is fontos szerepe volt. A meteorológia történetének ebben a leírónak mondható korszakában az izobáralakulatok, ciklonok, anticiklonok. csatornák, ékek, hátságok, nyergek vonalai, elhelyezkedése valamely terület fölött és főként ezek alakváltozásai voltak az ú. n. izobárszinoptika kiinduló bázisai. Az oknyomozó szinoptika a dinamikus meteorológia által felállított elvekre épít s ebben a szemléletben az izobárok a légáramlás számszerű áttekintésére alkalmas görbeseregekké váltak. *Hromov* a bárikus mező és a szél közötti törvényszerűségeket a vektoranalízis igénybevételével részletesen tárgyalja azokkal a speciális meteorológiai fogalmakkal együtt, amelyeket a dinamikus meteorológia alakított ki (gradiens szél, geosztrófikus, ciklosztrófikus szél, termikus szél stb.).

A cirkulációs elméletnek és az izobár-izoszter felületek által képezett szolenoidoknak gyakorlati alkalmazását látjuk a parti szél, a hegy-völgyi szél tárgyalásánál. Ebben foglalkozik a könyv (*Taborovszkij* tollából) a szovjet dinamikus meteorológiai kutatások egyik legjelentősebb irányával, amelynek célja az időjárási elemek várható értékeinek matematikai úton való kiszámítása. Ennek lényege a légnyomási alakulatok s ezzel a légáramlás rendszerének kiszámítása. A nyomásváltozások, melyek végül is új izobáralakulatokhoz és így megváltozott áramrendszerekhez vezetnek, advektív és dinamikus okokra vezethetők vissza, tehát a légnyomásváltozást a termikus és bárikus, röviden a *termobárikus* mező állapota határozza meg. Ezen kettős tér bárikus részlege gradienseivel számszerűleg meghatározza az áramlási mezőt, amely az izoterm felületek rendszerében szemlélve megadja a szél és a vizszintes hőmérsékletkülönbségek-okozta advektív hőkicserődést. Másrészről az izoterm felületek áramlás-okozta megváltozása a bárikus rendszer deformációjához vezet, amelynek következménye az áramlási mező megváltozása lesz. A termobárikus mezőnek, mint összetett skálár-térnek és a vele összefüggő gradienstereknek tanulmányozása az alapja a *Pogoszján* és *Taborovszkij* által kidolgozott *advektívdinamikus analízisnek,* melynek matematikai alapjait *Kibel* hidrodinamikai kutatásai rakták le. *Hromov* könyve a szovjet kutatásnak ezen előtérben álló problémájáról jól áttekinthető képet ad.

A hidrodinamikának a természetes légkörre való alkalmazása során számolnunk kell azokkal a diszkontinuitásokkal, amelyek a kontinentális méretű légterekből sohasem hiányoznak. A diszkontinuitás a hőmérsékleti, áramlási stb. mezőkben, mint szakadási hely jelentkezik. A diszkontinuitási felület, a *front* a valóságban, mint véges kiterjedésű *frontzóna* jelenik meg, s különböző fizikai tulajdonságú levegőfajtákat: légtömegeket választ el egymástól. Az utóbbi évtizedek szinoptikus meteorológiája a toposzférának erre a két szerkezeti elemére, a légtömegre és a frontra épült fel. *Hromov* összefoglalja az idők folyamán megtisztult és konkretizált definíciókat a kezdetben határozatlan légtömegosztályozásokkal szemben. A légkörre alkalmazott hidrodinamika: a dinamikus meteorológia sohasem lehet független a terresztrikus vonatkozásoktól, a légtömegek sem tárgyalhatók tehát a földrajzi szempontok figyelembe vétele nélkül. A légtömegek sajátságait a napsugárzás beesési szöge, a nagy földrajzi térségek, kontinensek, óceánok, sivatagok, hófelszin stb. alakítja ki, ezért osztályozásuk földrajzi alapokon nyugszik. Az általános képbe mozaikszerűen illeszkednek be az egyes földrészeken végzett légtömegfeldolgozások, amelyeket a gyakorlati szükségszerűség írt elő. A rendelkezésre álló feldolgozások alapján ismerteti *Hromov* Európa, a Szovjetunió, Északamerika légtömegeit, jobbanmondva azokat a légtömeget, amelyek ezen nagy térségek időjárását módosítják.

A légtömegek inkább sztatikus tárgyalás után a frontokról szóló fejezet a kinematika és a dinamika körébe tartozik. A frontok kialakulásának kinematikáját *Hromov Pettersen* elméletének alapján tárgyalja, de ezt jelentősen továbbfejleszti szovjet kutatások nyomán. A frontok kialakulásának alaptényezője az áramlási mező, amely összetettségében több elemi mező (transzlációs mozgás, forgó mozgás, vergenciális mozgás, deformációs mozgás) egymásrahelyeződéseként fogható fel. A mozgásnak ezen analitikai tárgyalása a meteorológia klasszikus fejezetei közé tartozik. A frontok kialakulását és feloszlását a legfontosabb légtömegjellemző: az ekvipotenciális hőmérséklet izotermáinak sűrűsödésével és ritkulásával mutatja ki a légáramlás összetett, deformációs mezőiben. Hasonlóképpen klasszikus értékű a frontfelület hajlásszögének tárgyalása a *Margules*-féle egyenlet alapján. A szakadási felületnek (frontfelületnek) a levegő mozgásegyenleteiből levezetett differenciálegyenlete *Margules* formulájában megadja a frontfelület hajlásszögét. Az ebből vont következtetések *Hromov* tárgyalásában korlátokat szabnak az áramlási lehetőségeknek a frontfelület két oldalán.

A gyakorlat szempontjából nagyon értékes része ennek a fejezetnek a frontok osztályozása és azoknak az időjárási jelenségeknek (csapadék, felhőzet stb.) összefoglalása, amelyek a különböző frontokon kialakulnak.

A sztatika mozdulatlan, adott helyen kialakult légtömegeiből azok a hullámszerű, majd örvényszerűvé vált képződmények vezetnek át a légkör dinamikájához, amelyek a frontok mentén keletkeznek. Ezeknek a képződményeknek, a ciklonoknak, anticiklonoknak kifejlődésével, szerkezetével, feloszlásával a *Ciklontevékenység* című fejezetben foglalkozik *Hromov*. A könyvnek ez a legterjedelmesebb fejezete (152 oldal) a korszerű szinoptika alapvető kérdéseivel foglalkozik (légnyomásváltozások analízise, a ciklonok energetikája, energiaátalakulások a ciklonban, a sztratoszféra és a troposzféra kölcsönhatásának problémája, az advektív-dinamikus analízis alapjai).

A nyomásváltozások a ciklontevékenység leglényegesebb megnyilvánulásai, a szinoptikus gyakorlatban nagyon jól hasznosíthatók (bárikus térképek előrejelzése). *Hromov* a termobárikus összetett mező matematikai tárgyalása útján mutatja ki, hogy a nyomásváltozások részben advektív természetűek (a bárikus és a hőmérsékleti gradienssel, valamint a két mező izovonalai hajlásszögének szinuszával arányosak), másrészről dinamikus okokra vezethetők vissza (ez az összetevő arányos a horizontális hőmérsékleti gradiens négyzetével, a bárikus mező izovonalainak vergenciájával és görbületével). Ezek a tételek a termobárikus mező gyakorlati fontosságára mutatnak rá a szinoptikus előrejelzés területén.

A ciklonok energiájának tárgyalásánál *Hromov* három energiafajtát különböztet meg: a légtömeg potenciális energiáját, belső energiáját és kinetikai energiáját. Az első kettő a légtömegben fellépő horizontális vagy vertikális labilitás esetén kinetikai energiává alakulhat át, ezért összegüket labilitási energiának nevezhetjük. Megkülönböztetésül a vertikális labilitási energiát, amely az előbbinek egy része, instabilitási energiának nevezi *Hromov*. A labilitási energiának kinetikai energiává való alakulásakor a légtömeg középhőmérséklete csökken. A légtömegek közti horizontális hőmérsékletkülönbség ennekfolytán labilitási energiával jár együtt, amely a ciklon legfontosabb energiatartaléka. Ehhez csatlakozik a kisebb jelentőségű vertikális instabilitási energia a hőmérséklet labilis függőleges rétegződése következményeként. *Hromov* részletesen tárgyalja azon hullámszerű, majd örvényszerű képződmények keletkezését, amelyek végül is a hőmérsékleti mező asszimetriájához vezetnek s a keletkező ciklon energiaforrásává válnak. Ezt szervesen kiegészíti az energiaátalakulás tárgyalása a ciklon fejlődése, feloszlása vagy regenerálódása során.

Az aerológiai mérések kimutatták, hogy a ciklontevékenységgel egyidejűleg a sztratoszféra alsó határának, a tropopauzának jelentős hullámzása figyelhető meg. A két jelenség közti okozati kapcsolat kezdettől fogva vita tárgya volt a dinamikus meteorológiában. *J. Bjerknes* kinematikai, majd *E. Palmén* dinamikai magyarázata szerint a ciklontevékenységgel kapcsolatos horizontális, illetőleg vertikális mozgások hozzák létre a tropopauzahullámokat, mégpedig az első — a délkörök mentén a sarkok felé süllyedő — tropopauza vízszintes irányú áthelyeződése következtében, a másik pedig a ciklonok és anticiklonok fölött 8 km-nél nagyobb magasságban kialakuló vertikális mozgás gradiensmódosító hatása miatt. Eszerint a sztratoszférikus hullámzásnak elsődleges oka a troposzférikus ciklontevékenység. Ezt a nézetet vallja a szovjet szinoptika is.

A másik felfogást a német „frankfurti iskola" képviselője: *G. Stüve* dolgozta ki. Eszerint a sztratoszférában létrejövő változások okai a troposzférikus nyomásváltozásoknak s a troposzféra időjárási jelenségeiben a ciklontevékenységen keresztül a sztratoszféra játsza a vezetőszerepet (sztratoszférikus kormányzás elve). *Hromov* állást foglal ebben a ma is folyó vitában s kimutatja a frankfurti iskola elméletének logikai hiányosságait.

A frontképződésnek és frontfeloszlásnak újszerű fogalmazását adja *Pogoszján* és *Taborovszkij* elmélete, amely az irodalomban advektív-dinamikus analízis néven ismeretes. Gyakorlati eredményeit a szinoptikában messzemenően alkalmazzák. Az advektív-dinamikus analízis arra a tapasztalatra épül, hogy a hőmérséklet változása a rövid ideig tartó légköri folyamatoknál megközelítőleg advektív természetű, míg a nyomásváltozásnak advektív és dinamikus tényezői vannak. Ennek következtében a hőmérséklet- és a nyomásmező változásai nem egyértelműek s a két mező izovonalai, ha kezdetben összeesnének is, az alapjában különböző természetű változások miatt eltérnek egymástól. Az összetett termobárikus mező tisztán geometriai szemléletéből is következik, hogy az áramlás következtében az izotermák áthelyeződnek, mivel a bárikus (áramlási) mező izovonalai metszik az izotermákat. Az izotermák közeledésekor a horizontális hőmérsékleti gradiens megnő, távoladásakor csökken. Mivel a frontzónákban, két légtömeg között a hőmérsékleti gradiens erős növekedése jelentkezik, azért az advektív-dinamikus analízis kibővíti a front fogalmát és az izotermák áramlás-okozta közeledését frontképző folyamatnak, széthúzódását frontfeloszlásnak fogja fel. A front fogalmának ezt a dinamikus értelmezését tömören így is szokták jellemezni: a front nem más, mint a magassági bárikus mezőben fellépő konvergencia.

Azt gondolhatnánk, hogy a szinoptika hajnalát jelentő légtömegeknek és a velük kapcsolatos frontnak, mint elválasztó felületnek a fogalma a dinamikus meteorológiának ezen fejlődési szakaszában háttérbe szorul. Meg kell azonban állapítanunk, hogy a légtömegek fizikai sajátságaiban mutatkozó különbség mérhető és kétségtelenül kimutatható valóság a közöttük levő átmeneti frontzónákkal együtt. Az advektív-dinamikus analízis ezen túlmenően kimutatja, hogy nemcsak a légtömegek határán léphet fel diszkontinuitás a légköri elemekben, hanem földrajzilag egységes légtömegben is, ha abban az áramlási konvergencia vagy divergencia gradiensnövekedést vagy csökkenést okoz.

A front dinamikus szemlélete ennek fogalmát tovább bővíti. Frontképződés léphet fel lokálisan valamely hely fölött, ha az átvonuló légtömegben az izobárok sűrűsödése vagy ritkulása éppen a kiszemelt hely fölött megy végbe (*lokális* vagy helyi frontképződés és frontfeloszlás). Végbemehet azonban az izotermák közeledése és széthúzódása a légtömeggel együtt mozgó felület, vagy zóna mentén is. Ezt a „menetközben" végbemenő folyamatot az advektívdinamikus analízis *individuális* frontképződésnek nevezi. A gyors iramban fejlődő szovjet szinoptikának ezt az új és eredményekben gazdag irányát hivatott szerző, *Taborovszkij* tollából ismerteti *Hromov* könyve.

A légnyomási képződmények áramrendszerének tanulmányozása során a szinoptikus könnyen egyoldalúvá válik a ciklon vagy anticiklon térségének óriási méreteiben is szűkreszabott szemléletében. *Hromov* nagyon helyesen iktatja a szinoptikus fejezetek közé a légkör általános cirkulációjának éghajlati vonatkozású tárgyalását. A ciklonális tevékenység csak egy része az egész légkört átfogó áramrendszernek, az általános cirkulációnak. Ennek a teljes egészében máig is felderitetlen mechanizmusát az elméletek történelmi fejlődésében mutatja be *Hromov* a legegyszerűbb *Bjerknes*-féle modelltől kezdve *Bergeron, Swoboda, Elliot* sémáin keresztül a könyvben körvonalaiban ismertetett *Blinova*-féle elméleti modellig. A kezdetben zárt gyűrűkből állónak képzelt cirkulációt a különböző geofizikai tényezők megszaggatják, sejtszerűvé teszik. Az átlagos bárikus mezőben ez a sejtszerű tagoltság ú. n. *hatásközpontok* alakjában jelentkezik, amelyek a ciklonok és anticiklonok gyakori megjelenésével tűnnek ki. Módszertanilag nagyjelentőségű *Hromov* fejtegetése a szinoptikus és az éghajlati hatásközpontok közti alapvető különbségről. Az előbbiek tényleges nyomási képződmények, amelyek valamely helyen hosszabb-rövidebb ideig megmaradnak, de előbb-utóbb feloszlanak. Az éghajlati hatásközpont ezzelszemben, mint az adott térségben gyakran fellépő szinoptikus hatásközpontok statisztikailag kiértékelt eredménye egyszersmindenkorra adott. Hasonló értelemben használja a korszerű klimatológia az éghajlati front elnevezést is, amely nem jelent valamely helyen állandóan jelenlevő tényleges diszkontinuitási zónát, hanem a szinoptikus hatásközpontokkal kapcsolatos frontok leggyakoribb megjelenési övezeteit, amelyek viszont az éghajlati hatásközpontokkal statisztikailag vonatkozásba hozhatók.

Ez a fejezet a szinoptikus számára átfogó képet ad a földi cirkuláció áramrendszereiről: a passzátról, a monszunról, a trópusokon észlelhető ciklonális tevékenységről, a trópusokon kívüli cirkuláció sajátságairól. Az áramrendszereket elsősorban a bárikus mezők alapján, a légnyomás átlagos eloszlását figyelembe véve tárgyalja, de kitér azokra a termodinamikai vonatkozásokra is, amelyek a cirkulációkkal kapcsolatosak (hőközvetítés az általános cirkulációban). *Hromov* könyvének ez a fejezete megindokolja a modern szinoptikának azt az álláspontját, amely szerint egyes földrészek időjárásának szinoptikus áttekintése már nem kielégítő az időjárás előrejelzése szempontjából, hanem a híradástechnika fejlődését igénybevéve az időjárási folyamatok vizsgálatánál az egész Földre, vagy legalább a féltekére (cirkumpoláris térképek) kiterjedő szemléletre van szükség.

A szinoptika gyakorlati feladatát, az időjárás előrejelzését *Hromov* két feladatkörben jelöli meg: egyik a szinoptikus helyzet prognózisa, a másik ennek gyakorlati alkalmazása a helyi viszonyokra és egyes időjárási elemekre. A szinoptikus helyzet előrejelzésének alapelve az analízis folyamán megállapított szinoptikai objektumok: frontok, légtömegek, légnyomási mező áthelyeződésének és fejlődésének extrapolációja a fizika, elsősorban a termodinamika és a hidrodinamika eredményeinek felhasználásával. Az ebben a részben közölt tapasztalati és elsősorban kvalitatív módszerek a szinoptikusok kiképzésénél, de a gyakorlott szinoptikus számára is nagy segítséget nyújtanak.

A hidrodinamika és a termodinamika alapegyenleteiből kiindulva a szinoptikai objektumok számszerű előrejelzésére, kiszámítására is történtek kísérletek. Részletesen ismerteti a könyv *Bugajev* tollából *Pettersen* vizsgálatait a légnyomási mező kiszámításáról. *Pettersen* a légnyomási mező karakterisztikus görbéinek egyenletéből indul ki. A karakterisztikus pontok ezek metszéspontjaiként foghatók fel. Az analitikusan így meghatározott görbék és pontok sebességének és gyorsulásának kifejtéséből mód nyílik azok áthelyeződésének számszerű extrapolációjára.

Nagyjelentőségű vizsgálatokat végzett a Szovjetunióban a szinoptikus helyzet kiszámítása terén *Kibel*. Formulái bizonyos megközelítésekkel a hidrotermodinamikai egyenletek megoldását adják a bárikus, termikus és áramlási mezőkre és lehetővé teszik a légnyomás, hőmérséklet és szél egyszerűsített feltételek mellett való kiszámítását.

A szinoptikus helyzet számszerű előrejelzése ezen analitikus módszerekkel a gyakorlat számára egyelőre terjedelmes számolási feladatokat jelent, de alkalmazásuk a számolási technika fejlődésével új korszakot nyit a szinoptikában.

Az időjárás előrejelzése a szinoptikus helyzet prognózisának gyakorlati alkalmazása. A gyakorlati szinoptikus számára felbecsülhetetlen *Hromov* könyvének erre vonatkozó fejezete. Részletesen foglalkozik a hőmérséklet, a szél, a felhőzet, a csapadék, a köd, a látási viszonyok, a jéglerakódás (repülőgépek jegesedése) előrejelzésének kérdéseivel. A megoldás az előző fejezetekben tárgyalt fizikat alapelvek szigorú alkalmazásával történik.

A könyv utolsó fejezete a nagy térségre és a hosszú időtartamra kiterjedő *makroszinoptikai* folyamatokat és ezzel kapcsolatban a *távprognózis* kérdését tárgyalja. A meteorológiának ez a gyakorlatilag kétségkívül igen fontos ága a kezdeti, tisztán statisztikus módszerek sikertelensége után a szinoptika eszközei felé fordult. Ez az irány a Szovjetunióból indult ki *(Multanovszkij)* s jelenleg is itt folynak a legeredményesebb kutatások *(Vangengeim)*. A szinoptikus módszer alapeleme az ú. n. *természetes szinoptikai periódus*, az az időtartam, amelyen belül valamely időjárási típus uralmon marad. Ezen hosszabb időközre vonatkozó átlagok és eltérések térképes ábrázolása a szinoptikus térképhez hasonló áttekintést nyújt a szinoptikus periódusról. A makroszinoptikus helyzetek, időjárási típusok osztályozása több szempont alapján lehetséges. *Hromov* ismerteti *Multanovszkij* osztályozását (alapja az anticiklonok tipikus trajektóriái), *Schinze* (a légtömegek mozgásai), *Baur* (a felső légrétegek állapota), *Vangengeim* (légköri cirkuláció) és *Dzerdzejevszkij* (cirkulációs mechanizmusok) makroszinoptikus osztályozását. A szinoptikai helyzetek prognosztikai felhasználása az analógiák rendszeres megállapításán alapszik.

Részletesen ismerteti *Hromov* a korszerű szovjet távprognózisnak, *Multanovszkij* iskolájának módszerét, amelynek alapja a bárikus centrumok helyzeteit feltüntető gyűjtőtérképek valamely makroszinoptikus folyamatnak (pl. ónoseső keletkezésének) egyes különválasztható fázisairól. Amennyiben ezen fázisok az esetek többségében ugyanúgy következnek egymásután, a gyűjtőtérképek távprognózis céljára felhasználhatók. *Multanovszkij* módszerét rendszeresen alkalmazzák a Szovjetunió meteorológiai szolgálatában természetes periódusokra, sőt évszakokra is.

Hromov ismerteti a makroszinoptikus folyamatok kutatásának egyéb irányait, így a korrelációs összefüggések kutatásának és a periódus-kutatásnak módszereit is. Az előbbi a légkör egységes voltán és teljes tömegének változatlanságán alapszik, amelynek következtében a légkör egyik részében bekövetkező rendellenesség ugyancsak rendellenességet vált ki a légkör másik részén. A periodicitás — *Hromov* szerint helyesebben — a ritmuskutatás feltételezi, hogy a normális egyensúlyából kimozdult légköri cirkuláció az egyensúlyi helyzet körül bizonyos rezgéseket végez, amelyeknek periódusát geofizikai tényezők (tengerek-szárazföldek eloszlása, a Föld méretei stb.) határozzák meg.

A makroszinoptikus folyamatokról és a távprognózisról szóló fejezet jól kifejezi ennek a gyakorlatilag nagyfontosságú tudományágnak mozaikszerű fejlődését, feladatainak és eszközeinek sokrétűségét. A könyvnek ezen gondolatokban és ötletekben gazdag fejezete kiinduló pontja lehet sok értékes kutatómunkának.

* * *

Hromov sikerrel oldotta meg nehéz feladatát, a fejlődőben lévő szinoptikus meteorológia jelen állapotának világos, rendszerbe foglalt rögzítését. Könyve nemcsak tankönyv, hanem alapos tájékoztató is a határtudományok művelői számára, de nélkülözhetetlen segédeszköze a gyakorlati szinoptikusnak is.

A könyv fordításában, lektorálásában és szerkesztésében résztvevő kollektíva (Bodolai István, Csaplak Andor, Dési Frigyes, Faragó László, Gelléri Sándor, Hille Alfréd, Ozorai Zoltán) aránylag rövid idő alatt hatalmas munkát végzett *Hromov* nagy művének magyar fordítása érdekében. A könyv fordítása jól sikerült, a magyar szöveg világos, érthető formában adja át *Hromov* tömör, logikus előadását. A könyv külső kiállítása megfelel irodalmi jelentőségének, ábrái világos, szép rajzok. Külön kiemelendő az Akadémiai Kiadó áldozatkészsége, amellyel az aerológiai diagrammpapirok költséges előállítását (függelék) lehetővé tette.

Béll Béla.

Országos Meteorológiai Intézet
Budapest.

PÉTER RÓZSA „REKURSIVE FUNKTIONEN" CÍMŰ KÖNYVÉRŐL

Rekurzív függvényeknek az olyan aritmetikai függvényeket nevezzük, amelyek a 0 konstansból és az $x+1$ függvényből véges számú helyettesítéssel és rekurzióval előállíthatók. Itt aritmetikai függvényen olyan egy- vagy többváltozós függvényt értünk, amelynek független változói a nem-negatív egész számokon futnak át és értékei is nem-negatív egész számok. Helyettesítésen függvény függvényének, vagy függvények függvényének képezését értjük, tehát azt a műveletet, amely egy pl. r-változós $\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ függvényből és r számú akárhány-változós $\beta_1(x, y, \ldots), \beta_2(x, y, \ldots), \ldots, \beta_r(x, y, \ldots)$ függvényből a

$$\varphi(x, y, \ldots) = \alpha(\beta_1(x, y, \ldots), \beta_2(x, y, \ldots), \ldots, \beta_r(x, y, \ldots))$$

függvényt hozza létre. A rekurzió fogalmát többféleképpen lehet pontosan meghatározni; így a rekurzív függvények többféle osztályához juthatunk. A legegyszerűbb ilyen függvényosztály a *primitív-rekurzív* függvények osztálya. Ehhez a függvényosztályhoz akkor jutunk, ha rekurzión azt a műveletet értjük, amely egy $\alpha(x, y, \ldots)$ függvényből és egy, kettővel több változós, $\beta(n, x, y, \ldots, m)$ függvényből azt, az α-nál eggyel több változós, $\varphi(n, x, y, \ldots)$ függvényt hozza létre, amelyre

$$\varphi(0, x, y, \ldots) = \alpha(x, y, \ldots),$$
$$\varphi(n+1, x, y, \ldots) = \beta(n, x, y, \ldots \varphi(n, x, y, \ldots)).$$

Ezt a műveletet *primitív rekurziónak* nevezzük. Ezt a fogalmat számos irányban általánosíthatjuk. Ha a második egyenlet jobboldalán $\varphi(n, x, y, \ldots)$ helyett a φ függvénynek olyan helyeken vett értékei szerepelnek, ahol az első argumentum nem szükségképpen n, de n-nek, x-nek, y-nak, ... olyan függvénye, amelynek értéke legfeljebb n, akkor *értékkészlet-rekurzióról* beszélünk. Ha a második egyenlet jobboldalán φ-ben az első után álló argumentumok $x, y, \ldots$ helyett n-nek, x-nek, y-nak, ..., továbbá φ olyan értékeinek függvényei, amelyeknek első argumentuma ismét n, a többiek megint csak n-nek, x-nek, y-nak, ... vagy esetleg φ további hasonló módon képezett értékeinek függvényei, akkor *beskatulyázott rekurzióról* beszélünk. Előfordulhat, hogy több függvényt definiálunk egyidejűleg rekurzióval: *szimultán rekurzió*. Előfordulhat, hogy n helyett több változó szerint fut a rekurzió: *többszörös rekurzió*. A természetes számok nagyság szerinti rendezése helyett más jólrendezést is vehetünk alapul s akkor úgy definiálhatjuk a φ függvényt rekurzív módon, hogy bármely helyen felvett értékét olyan helyeken vett értékei függvényeként definiáljuk, amelyekben az első argumentum a kérdéses jólrendezés értelmében megelőzi annak a helynek első argumentumát, ahol a függvény értékét definiáljuk: *transzfinit rekurzió*.

A rekurzióban szereplő, a primitív rekurzió esetén fent α-val és β-val jelölt, „előzőleg definiált“ függvények szerepét átvehetik olyan függvényoperációk is, amelyeknek egyes változói nem a természetes számok halmazán, hanem az aritmetikai függvények halmazán, vagy az ilyen függvényoperációk halmazán futnak át, stb., s amelyek maguk is valamely számváltozójuk szerinti rekurzióval vannak definiálva: *magasabbrendű rekurzió.* Ezeket a lehetőségeket természetesen kombinálni is lehet. Azonban valamennyien speciális esetei az úgynevezett *általános rekurziónak,* amelyen egy függvénynek olyan tetszőleges alakú egyenletrendszer segítségével való definícióját értjük, amelyből kiindulva, valahányszor numerikusan meg van adva egy hely, véges számú lépésben egyértelműen ki lehet számítani a függvény értékét a kérdéses helyen a következő két lépés ismételt alkalmazásával: a betűk helyébe numerikusan megadott tetszőleges számok helyettesítése; valamely, az egyenletrendszerből már megkapott egyenlet baloldalának jobboldalával való helyettesítése valamely másik, az egyenletrendszerből már megkapott egyenletben.

Rekurziókat már régóta használnak a matematika különböző fejezeteiben speciális aritmetikai függvények, vagy számsorozatok definíciójára. A rekurzív függvények jelentősége azonban ennél sokkal nagyobb: számos, különösen axiómatikus vagy matematikai logikai vizsgálatnak nélkülözhetetlen segédeszközei. Pl. *Dedekind* és *Peano* az aritmetika axiómatikus felépítésében lényeges segédeszközként alkalmazták a rekurzióval való definíciót. *Skolem* megmutatta, hogy rekurzió segítségével sok esetben ki lehet küszöbölni aritmetikai definíciókból és bizonyításokból a „minden“ és a „van oly“ fogalmát. *Hilbert* a kontinuum számosságára vonatkozó *Cantor*-féle sejtést próbálta bebizonyítani — vagy legalább is azt, hogy ezt a sejtést nem lehet megcáfolni — olyan módon, hogy az aritmetikai függvényeket (amelyek kontinuum-számosságú halmazt alkotnak) definíciójuk komplikáltsága szerint a második számosztály rendszámaival számozott osztályokba igyekezett sorolni úgy, hogy minden osztályba megszámlálhatóan végtelen sok függvény jusson és egy aritmetikai függvény se maradjon ki, vagy legalább is egyikről se lehessen bebizonyítani, hogy kimaradt. *Hilbert* e gondolatát később, lényegesen módosítva, *Gödel*nek sikerült keresztülvinnie, s így jutott ahhoz a tételhez, hogy a *Cantor*-féle sejtést a *Zermelo—Fraenkel*-féle axiómarendszerben nem lehet megcáfolni. *Gödel* egy másik dolgozatában, amelyben bebizonyította, hogy minden, bizonyos igen tág feltételeknek eleget tevő, axiómarendszerhez van olyan aritmetikai probléma, amely a kérdéses axiómarendszerben nem dönthető el, szintén a rekurzív függvények fogalmára támaszkodik. Bizonyítása azon alapul, hogy minden ilyen axiómarendszerben ki lehet fejezni az összes primitív-rekurzív függvényeket; másrészt, ha az axiómarendszer formuláit és véges formula-sorozatait alkalmas módon megszámláljuk, akkor bizonyos, az axiómarendszerre vonatkozó állításokat (pl. hogy egy véges formulasorozat bizonyítása a kérdéses axiómarendszerben egy adott formulának) a formulák és véges formula-sorozatok sorszámainak rekurzív függvényei között egyenletekkel lehet kifejezni. *Kleene* az általános rekurzív függvény fogalma segítségével definiálta precízen a véges számú lépésben végrehajtható eljárás fogalmát. *Ackermann* az aritmetika ellentmondástalanságát bizonyos transzfinit rekurzióval definiált függvény felhasználásával bizonyítja be. Ujabban *Specker* és *Goodstein* a rekurzív függvények fogalmát az analízis bizonyos fogalmai (pl. a konvergencia fogalma) konstruktív élesítésére használják fel.

Ezekben a kutatásokban a rekurzív függvények különböző osztályai kerültek alkalmazásra és sokszor lényeges szerepe van annak a kérdésnek, hogy mi a kapcsolat két ilyen osztály között, azonosak-e, vagy az egyik valódi része-e a másiknak, hogy hogyan lehet a bonyolultabb osztályhoz tartozó függvényeket az egyszerűbb osztályhoz tartozók segítségével kifejezni stb. Ilyen kérdések tisztázása terén *Péter Rózsának* nagy érdemei vannak. Ezért örömmel lehet üdvözölni, hogy ő írta a rekurzív függvények első monográfiáját.

A könyv mindenekelőtt több olyan függvény rekurzív definícióját adja meg, amelyek a számelméletben, esetleg a kombinatorikában, az analízisben, vagy a halmazelméletben fontos szerepet játszanak. Majd sorra veszi a primitív rekurzió fentemlített általánosításaival kapcsolatos függvényosztályokat és viszonyukat nagymértékben tisztázza. Így többek között bebizonyítja, hogy sem az értékkészlet-rekurzió, sem a primitív rekurzió, sem pedig a beskatulyázott rekurzió nem vezet ki a primitív-rekurzív függvények osztályából; ezzel szemben a többszörös rekurzió, valamint a magasabbrendű rekurzió bővebb függvényosztályokhoz vezet. A rekurzív függvények egyes osztályaihoz tartozó függvények rekurzív definícióját lehetőleg egyszerű normálformára hozza. Beledolgozza a könyvébe *Bereczki Ilona* egy eredményét, amely szerint az 1 konstansból és a független változókból az összeadás, aritmetikai kivonás, szorzás, aritmetikai osztás, szumma- és produktumképzés segítségével megkapható függvények nem merítik ki a primitív-rekurzív függvények osztályát. (Itt aritmetikai kivonáson a különbség abszolút értékének, aritmetikai osztáson a hányados egész részének képezését értjük.) Részletesen foglalkozik *Kleene, Skolem* és *Markov* azon eredményeivel, amelyek az általános rekurzív függvényeknek primitív-rekurzív függvények segítségével való ellőállíthatóságára vonatkoznak a legkisebb olyan szám fogalmának felhasználásával, amely eleget tesz valamely adott egyenletnek. Külön paragrafusban foglalkozik a rekurzív függvények elméletének történetével és bizonyos alkalmazásaival. Ez a paragrafus azonban nem öleli fel azokat az alkalmazásokat, amelyek bizonyos probléma-seregeknek véges algoritmussal való megoldhatatlanságára, vagy az analízis fogalmainak konstruktív élesítésére vonatkoznak; ezek a kérdések a további három paragrafus tárgyát képezik.

A könyv hasznos szolgálatot tesz a rekurzív függvények elmélete, az axiómatikus vizsgálatok és a matematikai logika kutatóinak. A szerző azonban nemcsak erre törekszik, hanem arra is, hogy a rekurzív függvények elméletének új híveket nyerjen. Evégett nagyon kevés előismeretet tételez fel, a matematikai logika köréből semmit és az elemi számelméletből, az analízisből, a halmazelméletből is csak nagyon keveset. A tárgyalás is olyan, amely alkalmas a tárgy megkedveltetésére. Bonyolult bizonyítások általános alakban való közlése helyett olyan, lehetőleg egyszerű, speciális esetekben mutatja meg szerző a bizonyítás alapgondolatát és módszereit, amelyek az általános esetre jellemző nehézségeket is magukba rejtik, úgy, hogy e speciális esetek mintájára az olvasó bármely más speciális esetet is el tud intézni, s amennyiben az ilyen kérdésekben egy bizonyos jártasságra tett szert, az általános bizonyítást is rekonstruálhatja.

Kár, hogy a könyv külső kiállítása nem olyan, amit egy ilyen kiváló és világszerte nagy érdeklődéssel várt könyv olvasói elvárhatnának, továbbá, hogy számos sajtóhiba és nyelvi hiba maradt a könyvben.

Kalmár László lev. tag

N. I LOBACSEVSZKIJ „GEOMETRIAI VIZSGÁLATOK A PÁRHUZAMOSOK ELMÉLETÉNEK KÖRÉBŐL“ C. KÖNYVÉRŐL

Ebben az évben *Bolyai János* születésének 150. évfordulóját készülnek megünnepelni a magyar matematikusok. Igen időszerű volt tehát a *„Geometriai vizsgálatok“* kiadása, amelyben *N. I. Lobacsevszkij*, aki a hiperbolikus geometria felfedezése és annak közzététele dicsőségében *Bolyai János*sal osztozik, korábbi orosz, illetve francia nyelvű közleményei után, vizsgálatainak lényegét német nyelven foglalta össze 1840-ben. Ezt a Szovjetunió Tudományos Akadémiája 1945-ben orosz nyelven adta ki, *V. F. Kagan* professzor bevezetésével, magyarázataival, függelékével. E munka most *Bizám György* kiváló fordításában és *Kárteszi Ferenc* gondos szerkesztésében magyarra átültetve kerül matematikus közönségünk elé, az Akadémiai Kiadó kiadásában. Ugyancsak *Kárteszi Ferenc* írt hozzá érdekes előszót. Az igazán nagyon szép ábrák is az ő szakértelmét dícsérik.

Az egész könyv öt részre oszlik. Az első rész a *„Bevezetés“*, amelyben *V. F. Kagan* ismerteti *Lobacsevszkij* idevágó régebbi munkáinak történetét, a *„Geometriai vizsgálatok“* keletkezését és tartalmát, majd előkészítésül *Legendre* vizsgálatait a párhuzamosok elméletére vonatkozólag. Ezután következik a *„Geometriai vizsgálatok“* fordítása magyarázó lábjegyzetekkel kísérve. A harmadik részt alkotják a szöveghez kapcsolódó *„Megjegyzések“*, amelyekben a kommentátor bővebben magyarázza és kiegészíti a szerző eléggé nehéz szövegét. Ezt követi a *„Függelék“*, amely a hiperbolikus sík és tér részletesebb leírása mellett tartalmazza a hiperbolikus trigonometriának egyrészt *Kagan*tól származó új térbeli előállítását a klasszikus úton vagyis a paraszféra felhasználásával, másrészt pedig annak *H. Liebmann*-féle tisztán síkbeli, de paraciklusokat felhasználó levezetését.

A befejező ötödik rész a *„Függelék a magyar kiadáshoz“*. Ez röviden ismerteti a két *Bolyai* életét és matematikai munkásságát, kiemeli *Gauss* irántuk tanusított különös magatartását, főleg pedig megismertet azzal a két bírálattal, amelyeket a *„Geometriai vizsgálatokról“* külön-külön írtak. Továbbá egy érdekes megjegyzést is fűz *Lobacsevszkij*nek az átellenes gömbháromszögek egyenlőterületűségére vonatkozó bizonyításához. Külön szakaszban felsorolja még e függelék a *Lobacsevszkij*re vonatkozó legfőbb életrajzi adatokat, végül ismét külön szakaszban kis bibliográfiával is szolgál.

Minket magyarokat elsősorban az a párhuzam érdekel, amely a *„Geometriai vizsgálatok“* és *Bolyai János* ugyancsak világhírű munkája, az *„Appendix“* között van. Mindkettőnek lényege a hiperbolikus trigonometria előállítása. És ez mind a két műben arra a tényre van alapítva, hogy a paraszférán (jelen fordításban a *határfelületen*) az euklideszi síkgeometria érvényes, ha egyenes alatt paraciklust (a fordítás szerint *határvonalat*) értünk. Ez az alaptény egyik műben sincs maradék nélkül bebizonyítva. Ezen nem is csodálkozhatunk, hiszen a két *Bolyai* és *Lobacsevszkij* idejében az axiomatika még nagyon messze volt mai fejlettségi fokától. Az azonban már kifogásolható, hogy a *„Megjegyzésekben"* sem találjuk meg a teljes bebizonyítást. A [24] megjegyzésben be kellett volna bizonyítani, miszerint a paraszférán a felsorolt axiomákon kívül *Hilbert* III_5 kongruencia-axiómája is teljesül: ha az ABC és $A'B'C'$ háromszögekben $AB \equiv A'B'$, $AC \equiv A'C'$ és $BAC_{\sphericalangle} \equiv B'A'C'_{\sphericalangle}$, akkor egyszersmind $ABC_{\sphericalangle} \equiv A'B'C'_{\sphericalangle}$ (ebből már következik, hogy egyben $ACB_{\sphericalangle} \equiv$ $\equiv A'C'B'_{\sphericalangle}$).[1]

A 28. tételt, amely röviden kifejezve azt mondja, hogy a paraszféraháromszög szögeinek összege 180^0, *Lobacsevszkij* egészen másképp bizonyítja, mint *Bolyai János.* Ez a rendkívül szellemes és nagyon szemléletes bizonyítás azonban szintén nem teljes. Ugyanis *Lobacsevszkij* bizonyítás nélkül felhasználja (és ez nála ismét nem csodálható), hogy a gömbháromszög területe az oldalakkal 0-hoz tart, valamint akkor is, midőn az egyik szög és az azt közrefogó oldalak egyike állandó, a másik pedig $\rightarrow 0$. Ezt a [15] megjegyzésben lehetett volna bebizonyítani.

Nem lényeges eltérés a *„Geometriai vizsgálatok"* és az *„Appendix"* között, hogy az euklideszi és a hiperbolikus geometria szétválasztása, vagyis annak bebizonyítása, miszerint az elpattanási szög vagy parallelaszög (a fordításban a *párhuzamosság szöge*) vagy minden esetben 90^0, vagy pedig minden esetben $< 90^0$, *Lobacsevszkij* művében *Legendre* szögösszegtételeire van alapítva (22. tétel), míg *Bolyai János* ezt az elpattanó egyenesek vagy hiperbolikus parallelák (a fordítás szerint *párhuzamos egyenesek*) alaptulajdonságaiból vezeti le. Viszont lényeges, a felépítés szigorúságát illető különbség a két mű között, hogy *Lobacsevszkij* szigorúan bebizonyítja (23. tétel), miszerint bármely α hegyesszöghöz található olyan p távolság, amelynek megfelelőleg az elpattanási szög $\Pi(p) = \alpha$.[2]

Az alapvető 33. tételt, amelynek értelmében koncentrikus paraciklusokon (a fordításban *párhuzamos határvonalakon*) a belső valamely ívének a külső megfelelő ívéhez való viszonya $\frac{s'}{s} = e^{-x}$, ahol x a két paraciklus távolsága megfelelő egységben mérve, *Lobacsevszkij* sem bizonyítja be teljesen, de *Bolyai János* legalább utal arra, hogy a bizonyítás még kiegészítésre szorulna. („Appendix" 24. §). Az e ponthoz kapcsolódó [22] megjegyzés is adós marad annak a bebizonyításával, hogy a megfelelő ívek viszonya mint az x távolság függvénye folytonos. Ez abból következik, hogy egymástól elpattanó egyenesek megfelelő pontjainak távolsága az elpattanás irányában folyvást csökken és minden értéket felvesz. Ezt a kommentátor a *„Függelékben"* be is bizonyítja

(123. old.), de a folytonosságra hivatkozik, bár a tétel hiperbolikus elemi geometriai úton is egyszerűen lett volna bebizonyítható.

A 35. pont teszi (a 23. pont mellett) a másik lényeges különbséget a *„Geometriai vizsgálatok"* és az *„Appendix"* között. Ebben *Lobacsevszkij* kimutatja a derékszögű háromszögek egymásközti megfelelkezését, ami *Bolyai János* előtt rejtve maradt. Ennek alapján előállítja a derékszögű háromszög mondhatnók *hiperbolikus szögtrigonometriáját* (a szögek és az oldalaknak megfelelő elpattanási szögek között fennálló egyenleteket), valamint a gömbi trigonometriát. Ez utóbbinak a párhuzamosság axiómájától való függetlenségét *Bolyai János* is kimutatta (*„Appendix"* 26. §).

Meg kell jegyeznünk, hogy a hiperbolikus szögtrigonometriának ezt az előállítását még lényegesen egyszerűsíthetjük. Ez az egyszerűsített *Lobacsevszkij*-féle előállítás a következő.

Legyen ABC derékszögű háromszög ($C_{\sphericalangle} = 90^0$), amelynek alkatrészei

$$\overline{BC} = a, \quad \overline{CA} = b, \quad \overline{AB} = c, \quad BAC_{\sphericalangle} = A = \Pi(\alpha), \quad CBA_{\sphericalangle} = B = \Pi(\beta).$$

Állítsunk a háromszög síkjára az A pontban merőlegest, amelynek egyik végtelen távoli pontja Ω s tekintsük az A ponton átmenő Ω középpontú paraszférát (mint *Lobacsevszkij*). Messe e paraszféra a $B\Omega$ és $C\Omega$ egyeneseket rendre B'' és C''-ben (mint a 28. ábrán) s legyen az $AB''C''$ paraszféra-háromszögben $\widehat{AC''} = q$, $\widehat{AB''} = r$. Akkor a paraszféra euklideszi geometriája szerint

$$q = r \cos A.$$

Ha pedig a B pontban állítunk a háromszög síkjára merőlegest, amelynek egyik végtelen távoli pontja Ω_1 s a B ponton átmenő Ω_1 középpontú paraszférát tekintjük (mint *Lobacsevszkij*), akkor ennek az $A\Omega_1$ és $C\Omega_1$ egyenesekkel való metszéspontjait rendre A_1 és C_1-gyel jelölve, az A_1BC_1 paraszféra-háromszögben nyilván $\widehat{A_1B} = r$, tehát az $\widehat{A_1C_1} = s$ oldal

$$s = r \sin B.$$

De az $A\Omega_1C$ síkban a C ponton átmenő Ω_1 középpontú paraciklusnak az $A\Omega_1$ és $C\Omega_1$ egyenesek közti íve evidenter q-val egyenlő, tehát a $\overline{CC_1} = f(a)$ jelölés mellett (amelyet *Lobacsevszkij* használ) a hosszegység megfelelő választásánál a 33. tétel értelmében $q = se^{f(a)}$ s így nyerjük, hogy másrészt

$$q = r \sin B\, e^{f(a)}.$$

Itt q helyébe a fenti értéket téve, adódik (mint *Lobacsevszkij*nél),

$$\cos A = \sin B\, e^{f(a)}.$$

Most egyszerűbben következtetve mint *Lobacsevszkij*, a $b \to \infty$ határátmenettel (v. ö. *„Appendix"* 27. §), mikor is $A \to 0$, $B \to \Pi(a)$, előáll az

$$e^{-f(a)} = \sin \Pi(a)$$

képlet s ennek alapján az előbbi a

(I) $$\sin B = \sin \Pi(a) \cos A$$

alakot ölti. E képletet a megfelelő háromszögre alkalmazva, amelynek alkatrészei* $a, \alpha', \beta, 90^0 - \Pi(b), \Pi(c)$, adódik

(II) $$\sin \Pi(c) = \sin \Pi(a) \sin \Pi(b),$$

illetve (a szögek szerepét felcserélve)

(III) $$\cos \Pi(b) = \cos A \cos \Pi(c).$$

Mármost (I)-ből (II) és (III) alapján

(IV) $$\sin B = \frac{\operatorname{tg} \Pi(c)}{\operatorname{tg} \Pi(b)}$$

s ezt a B szöget illető (III)-hoz hasonló képlettel összevetve, (II)-re tekintettel adódik

(V) $$\operatorname{tg} B = \operatorname{tg} \Pi(a) \cos \Pi(b).$$

Végül (I)-ből és a b oldalt illető hasonló képletből (II) felhasználásával

(VI) $$\operatorname{tg} A \operatorname{tg} B = \sin \Pi(c).$$

Ezek a kívánt képletek.

Ebben a bizonyításban nem használtuk fel az

$$f(c) = f(a) + f(b)$$

relációt. Ezt különben kiolvashatjuk az említett első konfigurációból (de hasonlókép a másodikból is) s nem kell a prizmát a $B\Omega$ egyenes mentén felvágnunk és a síkra kiterítenünk, amint *Lobacsevszkij* felesleges bonyolításképpen teszi.

Ugyancsak lényeges eltérés van a *„Geometriai vizsgálatok"* és az *„Appendix"* között a $\Pi(x)$ függvény meghatározásában. *Lobacsevszkij* rendkívül szellemesen megmutatja (a szögtrigonometria fenti (III) képletének felhasználásával), hogy e függvény eleget tesz a

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\Pi(c)}{2} = \operatorname{tg} \frac{\Pi(c-\beta)}{2} \operatorname{tg} \frac{\Pi(c+\beta)}{2}$$

függvényegyenletnek. Ennek megoldását illetőleg azonban nagyon szűkszavú. Az idevágó [120] lábjegyzetben meg van mutatva, hogy ebből folyólag minden pozitív egész n-re

$$\operatorname{tg}^n \frac{\Pi(c)}{2} = \operatorname{tg} \frac{\Pi(nc)}{2}.$$

Mivel a könyv a kezdők igényeihez kíván alkalmazkodni, ehhez még jó hozzátennünk, hogy ebből már következik e reláció minden racionális n-re, ebből pedig a $\Pi(x)$ függvény folytonossága révén (ami az említett 23. pont alapján könnyen belátható) bármely irracionális n-re is. Ha a c távolságot

* Itt α' az a távolság komplementuma (a fordításban *kiegészítő távolsága*), amelyre $\Pi(\alpha) + \Pi(\alpha') = 90^0$.

úgy választjuk, hogy

$$\operatorname{ctg}\frac{\Pi(c)}{2}=e$$

a természetes logaritmusok alapszáma, akkor e reláció az $nc=x$ jelöléssel a

$$\operatorname{tg}\frac{\Pi(x)}{2}=e^{-\frac{x}{c}}$$

alakot ölti. *Lobacsevszkij* e c távolságot választja hosszegységnek. Ebben a munkájában azonban — amint a [29] megjegyzés is kiemeli — adós marad annak bebizonyításával, hogy ez a hosszegység egyenlő a már előbb megválasztottal, amely mellett egymástól x távolságban haladó koncentrikus paraciklusokon a belső valamely ívének a külső megfelelő ívéhez való viszonya e^{-x}. A bebizonyítást a kommentátor a *„Függelékben"* kívánja keresztülvinni (VI. szakasz, 2. pont.). De végelemzésben ez a bizonyítás is hézagos, mert felhasználja a $\Pi(x)$ függvényt meghatározó egyenletet (V. szakasz, 4. pont, (IX)), amelynek bebizonyításában az alább említett hézag van.

A $\Pi(x)$ függvénynek ezt a *Lobacsevszkij*-féle meghatározását az *„Appendix"* híres 29. §-ával összehasonlítva, meg kell állapítanunk, hogy ez a meghatározási mód minden szellemessége mellett is, egyszerűségben elmarad *Bolyai János* csodálatraméltóan elegáns bizonyítása mögött. Ez utóbbi u. i. nem használja fel sem a derékszögű háromszögek egymásközti megfelelkezését, sem a szögtrigonometriát, hanem a koncentrikus paraciklusokkal dolgozva csupán a fenti $e^{-f(a)}=\sin\Pi(a)$ relációra épít, amelyet *Bolyai János* a 28. §-ban szintén egyszerűbben bizonyít.

A derékszögű háromszögre vonatkozó trigonometriai képletek birtokában (amelyek a (I)—(VI) képletekből adódnak a $\Pi(x)$ függvényt meghatározó fenti képlet alapján), az általános háromszög trigonometriájának előállítása már nem nehéz, ezt az *„Appendix"* mellőzi is. A *„Geometriai vizsgálatokban"* ezt is megtaláljuk, a számítás részleteivel a *„Megjegyzések"* szolgálnak. Ez az előállítás különben még egyszerűbben is keresztülvihető.*

Miként az *„Appendix"*, a *„Geometriai vizsgálatok"* is adós marad annak bebizonyításával, hogy a hiperbolikus geometria ellentmondásmentes. Kár, hogy ezt a kommentátor sem mutatja meg.

A *„Függelékben" V. F. Kagan* a *H. Liebmann*-féle síkbeli előállítás részletes tárgyalását megelőzően, figyelemreméltó egyszerű módon újból előállítja a hiperbolikus trigonometriát a paraszféra felhasználásával. Megfelelő előkészítés után először is bebizonyítja, hogy valamely a magasságú $p(a)$ paraciklusívnek $\operatorname{tg}\Pi(a)$-szorosa

$$p(a)\operatorname{tg}\Pi(a)=k$$

az a távolságtól független, állandó paraciklusív, amint már az *„Appendix"* 30. §-ában is be van bizonyítva. Bizonyítása azonban sokkal közvetlenebb.

* Lásd referenstől[2], i. h. 1. §.

Azután újból előállítja a derékszögű háromszög hiperbolikus szögtrigonometriáját. Az ABC derékszögű háromszög ($C_{\sphericalangle} = 90^0$) síkjára az A pontban az $A\Omega$ merőlegest állítván, a B ponton átmenő $A\Omega$ tengelyű paraszféra mellett (amelyet *Bolyai János* használt) a C ponton átmenőt is használja s így jut a

$$\operatorname{ctg} \Pi(a) = \operatorname{ctg} \Pi(c) \sin A$$

és

$$\cos \Pi(a) = \operatorname{ctg} \Pi(b) \operatorname{tg} A$$

képletekhez, amelyekből a többi már következik. Végül újra előállítja a $\Pi(x)$ függvényt, kimutatva, hogy

$$\operatorname{tg} \frac{\Pi(x)}{2} = e^{-\frac{x}{k}}$$

ha a k ív hosszát is k-val jelöljük. Bizonyítás nélkül felhasználja azonban, hogy

$$\lim_{a=0} \frac{p(a)}{a} = 1,$$

ami másszóval azt mondja, hogy a paraciklusívnek a húrjához való viszonya 1-hez tart, midőn az ív 0-hoz konvergál. Ez a hiány egyébként könnyen pótolható, nemcsak a hiperbolikus trigonometria birtokában, hanem annak felhasználása nélkül is, amint a fent idézett helyen* egyszer már megjegyeztük.

Ki kell emelnünk, hogy *V. F. Kagan* a hiperbolikus trigonometriának ennél az előállításánál nem használja fel sem a derékszögű háromszögek egymásközti megfelelkezését, sem a koncentrikus paraciklusokat, tehát sokkal egyszerűbben jár el, mint akár *Lobacsevszkij*, akár *Bolyai János*. Könyve már ezért is a legnagyobb érdeklődésre tarthat számot.

Bizám Györgyöt és *Kárteszi Ferencet* pedig igaz elismerés illeti meg fáradságos munkájukért, amely által a *„Geometriai vizsgálatok“* e *V. F. Kagan*-féle érdekes kiadása immár magyar nyelven is hozzáférhetővé válik.

Szász Pál

IRODALOM

[1] E tekintetben utalhatunk *R. Bonola „Sulla teoria delle parallele e sulle geometrie non-euclidee“* c. kitűnő munkájára (németül lásd *F. Enriques*, Fragen der Elementargeometrie, I. Teil, 2. Aufl. 1923, különösen Zweiter Teil, § 22.).

[2] Ennek olyan bebizonyítását illetőleg, amely az *„Appendix“* rendszerébe beilleszthető, lásd referenstől: A hiperbolikus trigonometriáról, Matematikai és Fizikai Lapok *48* (1941), 401—409., speciálisan 402.[6] jegyz.

* Lásd[2], speciálisan 401.[3] jegyz.

N. I. AHIJEZER „ELŐADÁSOK AZ APPROXIMÁCIÓ ELMÉLETÉRŐL" C. KÖNYVÉRŐL

Ez a munka, amelynek magyar fordítása az Akadémiai Kiadó kiadásában 1951-ben jelent meg, *Ahijezer*nek a harkovi egyetemen az 1937—39 években tartott előadásai alapján készült. Annak ellenére, hogy aránylag kisterjedelmű (287 oldal), az approximációelmélet igen széles területeit öleli fel. Az approximációelmélet a modern matematikai analízisnek aránylag új és virágzó ága, amely kialakulását elsősorban orosz és francia matematikusoknak, így különösen *Csebisev*nek, *Markov*nak, *Bernstejn*nek, *Lebesgue*nek és *de la Vallée Poussin*nek köszönheti. Az orosz matematikusok klasszikus tradicióit követve szovjet matematikusoknak egy kiváló csoportja ezen a téren az utolsó 40 évben rendkivül sok és nagy eredményt ért el és a Szovjetunióban egész approximációelméleti iskolát épített ki. Közülük, anélkül, hogy teljességre törekednénk, csak *Ahijezer, Krein, Natanszon* és *Nyikolszkij* neveit említjük meg. A könyv különösen kiemeli a magyar matematikusok szerepét az approximáció elmélet kialakulásában.

A könyv, éppen azért, mert előadások alapján készült, bevezető jelleggel is bír, így több olyan nagyszerű logikával és tömör egyszerűséggel megírt részt tartalmaz, amelyekben a szerző a tulajdonképpeni approximációs problémáknak a megfogalmazásához és bizonyításához szükséges segédeszközöket tárgyalja. Ezeket a részeket, bár sok szempontból figyelemre méltók, nem ismertetjük részletesen.

Az első fejezetben *Ahijezer* először is az approximációelmélet alapfeladatát határozza meg igen nagy általánosságban. Legyen $\mathfrak{M}$ egy tetszőleges dimenziójú euklideszi térnek bizonyos részhalmaza és tekintsük az $\mathfrak{M}$ halmazon értelmezett valós, vagy komplex függvényeknek E lineáris és normált terét. Legyenek $f(P)$ és $F(P; A_1, \ldots, A_n)$ ennek a térnek elemei, ahol az utóbbi függvénynek az értéke a P ponton kívül az $A_1, \ldots, A_n$ paraméterértékektől is függ. A feladat ezekután a következő: határozzuk meg az $A_1, \ldots, A_n$ paramétereknek azt az értékrendszerét, amelyre az $f(P)-F(P; A_1, \ldots, A_n)$ különbségnek az E-beli normája minimális.

Ismeretes, hogy például az $[a, b]$ intervallumon folytonos függvényeknek a $C[a, b]$ osztálya, az $[a, b]$-n abszolút értékük p-edik ($p \geqq 1$) hatványával együtt *Lebesgue* szerint integrálható függvénynek az $L^p[a, b]$ osztálya lineáris és normált terek, ha bennük két f és g elem eltérését a $\max\limits_{a \leqq x \leqq b} |f(x)-g(x)|$, illetve az $\left\{\int\limits_a^b |f(x)-g(x)|^p dx\right\}^{1/p}$ mennyiségekkel mérjük. A klasszikus approximáció-elméletben különösen fontos szerepet játszik a 2π szerint periódikus folytonos függvényeknek a $C_{2\pi}$ osztálya.

A lineáris és normált terekben való approximáció alaptétele a következő: Ha $x \in E$ és $g_1, \ldots, g_n$ az E térnek lineárisan független elemei, akkor van olyan $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ szám n-es, amelyre $\|x-\lambda_1 g_1-\ldots-\lambda_n g_n\|$ minimális.

Minthogy az $1, x, x^2, \ldots, x^n$ és az $e^{ikx}(k=0, \pm 1, \ldots, \pm n)$ függvények lineárisan függetlenek, ezért az alaptételből következik, hogy minden $C[a, b]$-beli függvényhez van egy legfeljebb n-edfokú legjobban közelitő polinom és minden $C_{2\pi}$-beli függvényhez van egy legfeljebb n-edrendű legjobban közelítő trigonometrikus polinom.

A legjobban közelítő lineáris kifejezés unicitása általában nem állítható. Azonban, ha a tér szigorúan normált, akkor az unicitás bebizonyítható. Szigorúan normáltnak nevezzük a teret, ha az $\|x+y\|=\|x\|+\|y\|$ egyenlőségből következik, hogy $x=\alpha y (\alpha>0)$. A Minkowski-féle egyenlőtlenség bizonyítása során kiderül, hogy az $L^p(p>1)$ terek szigorúan normáltak. Viszont a C tér nem szigorúan normált. Vegyünk például két f és g folytonos függvényt, amelyek lineárisan függetlenek és maximumukat ugyanabban a pontban, azonos előjellel veszik fel. Ezekre a függvényekre $\|f+g\|=\|f\|+\|g\|$, mégis $f \neq \alpha g$. Az, hogy az L tér sem szigorúan normált, hasonlóan egyszerű ellenpéldával mutatható meg. Ilyen módon az általános tételekből nem következik egyenletes approximáció esetén a legjobban közelítő polinomok unicitása. Ez későbbi fejezet eredményeiből adódik.

A Hilbert-tér alapelemeinek rövidrefogott tárgyalása után részletesen ki van dolgozva a Hilbert-térben lineárisan független elemek lineáris kombinációival való approximáció kérdése is. Majd az általános eredmények alkalmazásaként a szerző bebizonyítja a Müntz-féle tételt, amely egy $\{t^{p_i}\}\left(p_i>-\frac{1}{2}, \lim\limits_{i\to\infty} p_i=\infty\right)$ függvényrendszernek az L^2, illetve a C térben való zártságának szükséges és elegendő feltételét adja meg. Az első fejezet további része az L^p terek szeparabilitásának kérdését és a Riesz—Fischer tételt, majd Weierstrass klasszikus approximációs tételeit és ezeknek az L^p terekre való általánosításait tárgyalja. A fejezet végén néhány, a lineáris operációk elméletébe tartozó tétel található, részben bizonyítás nélkül.

A második fejezet a Csebisev-féle problémakört tárgyalja. *Csebisev* bebizonyította, hogy ha $f(x) \in C[a, b]$, akkor az összes legfeljebb n-edfokú polinomok közül egyetlen olyan $P_n(x)$ polinom van, amely a legkevésbbé tér el $[a, b]$-ben az $f(x)$ függvénytől. Ezt a $P_n(x)$ polinomot teljesen jellemzi az, hogy létezik $[a, b]$-ben legalább $n+2$ $x_1<x_2<\cdots<x_{n+2}$ pont, úgynevezett Csebisev-féle váltakozás, amelyekben az $f(x)-P_n(x)$ különbség váltakozó előjelekkel felveszi maximumát. Hasonló tétel igaz periódikus esetre is.

Ahijezer ezt a tételt nagy mértékben általánosítja. Polinomok helyett

$$Q(x) = s(x)\frac{q_0x^n + \cdots + q_n}{p_0x^m + \cdots + p_m}$$

alakú kifejezésekkel közelít, ahol m és n adott számok és $s(x)$ adott folytonos függvény. Ennek az általánosításnak jelentősége különösképpen akkor szembetűnő, ha az $[a, b]$ intervallum végtelen; természetesen ebben az esetben az m, n számokra, $s(x)$-nek és a közelítendő $f(x)$ függvénynek a végtelenben való viselkedésére további feltevéseket kell tenni. *Ahijezer* ebben az általánosságban a *Csebisev*éhez hasonló tételt bizonyít be, amely abban az esetben, ha $[a, b]$ véges, $s(x) \equiv 1$ és $m = 0$, tartalmazza az eredeti Csebisev-tételt.

A szerző az általános elméletet számos érdekes példával illusztrálja. Bevezeti először is a Csebisev-polinomokat. Amint ismeretes, az n-edik Csebisev-polinom $T_n(x) = x^n - P_{n-1}(x)$ alakban írható, ahol $P_{n-1}(x)$ az a legfeljebb $(n-1)$-edfokú polinom, amelyre $\max\limits_{-1 \leqq x \leqq 1} |x^n - P_{n-1}(x)|$ minimális. Bebizonyítja a Csebisev-féle tételnek a periódikus esetre vonatkozó analogonját. Legyen ugyanis $f(\theta) \in C_{2\pi}$ és $s_\nu(\theta) = a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \cdots + a_\nu \cos \nu\theta + b_\nu \sin \nu\theta$. Az $x = \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$ helyettesítéssel $f(\theta)$ olyan $F(x) \in C(-\infty, \infty)$ függvénybe megy át, amelyre $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} F(x)$ véges szám és $s_\nu(\theta)$ a

$$\frac{p_0x^{2\nu} + \cdots + p_{2\nu}}{(1+x^2)^\nu}$$

alakot ölti. Ezután *Ahijezer* általános tételét alkalmazza, abban az esetben, amikor $s(x) = 1/(1+x^2)^\nu$.

Csebisev tétele könnyen általánosítható az úgynevezett Csebisev-féle függvényrendszer esetére. Az $f_i(x) \in C[a, b]$ $(i = 1, \ldots, n)$ függvények Csebisev-féle függvényrendszert alkotnak, ha bármely $F(x; \alpha) = \alpha_1 f_1(x) + \cdots + \alpha_n f_n(x)$, „polinomnak" $[a, b]$-ben legfeljebb $n-1$ zéróhelye van, feltéve, hogy az $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ számok között van 0-tól különböző. (Nyilvánvaló, hogy az $1, x, x^2, \ldots, x^n$ rendszer bármely intervallumban Csebisev-féle függvényrendszer.) Meg lehet mutatni, hogy ha $f(x) \in C[a, b]$, akkor az összes „polinomok" közül egyetlen olyan van, amely a legkevésbbé tér el $[a, b]$-ben az $f(x)$ függvénytől. A legjobban közelítő polinomot teljesen jellemzi egy legalább $n+1$ tagú Csebisev-féle váltakozás létezése. Ennek az általánosításnak a bizonyításánál *Ahijezer* döntő szerepet ad *Haar* egy eredményének, amelyet *Haar* egészen más probléma kapcsán nyert. Legyenek $f_i(P)$ $(i = 1, \ldots, n)$ a P pontnak lineárisan független, folytonos függvényei. Az értelmezési tartomány legyen a tetszőleges dimenziójú euklideszi térnek egy korlátos, zárt $\mathfrak{M}$ halmaza. *Haar* megmutatta, hogy bármely az $\mathfrak{M}$ halmazon folytonos $f(x)$ függvényhez tartozó legjobban közelítő $F(P; \alpha) = \alpha_1 f_1(P) + \cdots + \alpha_n f_n(P)$ „polinom" unicitásának a szükséges és elegendő feltétele az, hogy minden ilyen „polinomnak" az $\mathfrak{M}$ halmazon legfeljebb $n-1$ különböző zéróhelye legyen, feltéve, hogy nem minden α_i nulla.

A hatványrendszernek még egy érdekes általánosítása van. Az $f_i(x) \in C[a, b]$ $(i = 1, 2, \ldots)$ függvényrendszer Markov-féle, ha minden k-ra az $f_1(x), \ldots, f_k(x)$ függvények Csebisev-féle rendszert alkotnak. Ebben az esetben értelmezhető a Csebisev-polinomoknak az analogonja. Legyen ugyanis $Q_1(x) = f_1(x)$ és általában $Q_k(x) = f_k(x) - F_{k-1}(x)$ $(k = 2, 3, \ldots)$, ahol $F_{k-1}(x)$ az az $F_{k-1}(x) = \alpha_{k,1} f_1(x) + \cdots + \alpha_{k,k-1} f_{k-1}(x)$ „polinom", amely az $L[a, b]$ tér metrikájában a legkevésbbé tér el az $f_k(x)$ függvénytől az összes $(k-1)$-edrendű „polinomok" közül. Meg lehet mutatni, hogy minden k-ra fennállnak a következő relációk:

$$\int_a^b f_k(x) \operatorname{sign} Q_j(x)\, dx = \begin{cases} 0 & (j = 1, 2, \ldots, k-1), \\ 1 & (j = k). \end{cases}$$

Megfordítva, ha egy $F(x) = f_k(x) + \alpha_1 f_1(x) + \cdots + \alpha_{k-1} f_{k-1}(x)$ „polinom" eleget tesz az

$$\int_a^b f_r(x) \operatorname{sign} F(x)\, dx = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots, k-1)$$

feltételnek, akkor $F(x) \equiv Q_k(x)$. Az így definiált $Q_k(x)$ „polinomoknak" érdekes tulajdonságuk van. *A. Markov* tétele szerint, ha $f(x) \in C[a, b]$, akkor

$$\min_\mu \int_a^b |f(x) - (\mu_1 f_1(x) + \cdots + \mu_k f_k(x))|\, dx = \left| \int_a^b f(x) \operatorname{sign} Q_{k+1}(x)\, dx \right|.$$

Ennek az eredménynek az érdekessége az, hogy a függvénynek a legjobb közelítését a függvény segítségével, határozott eljárással, integrálalakban adja meg.

Ennek a tételnek egyszerű alkalmazásaként számos érdekes eredmény nyerhető. Minthogy az $1, \cos x, \ldots, \cos nx, \ldots$ függvények a $[0, \pi]$ zárt intervallumra vonatkozóan, a $\sin x, \ldots, \sin nx, \ldots$ függvények pedig a $(0, \pi)$ nyílt intervallumra vonatkozóan Markov-féle rendszert alkotnak és mivel

$$\int_0^\pi \cos mx \operatorname{sign} \cos nx\, dx = 0 \qquad (m = 0, 1, \ldots, n-1)$$

és

$$\int_0^\pi \sin mx \operatorname{sign} \sin nx\, dx = 0 \qquad (m = 1, \ldots, n-1),$$

ezért ha $f(x) \in C[0, \pi]$, akkor

$$\min_a \int_0^\pi |f(x) - a_0 - a_1 \cos x - \cdots - a_{n-1} \cos (n-1)x|\, dx = \left| \int_0^\pi f(x) \operatorname{sign} \cos nx\, dx \right|$$

és

$$\min_b \int_0^\pi |f(x) - b_1 \sin x - \cdots - b_n \sin nx|\, dx = \left| \int_0^\pi f(x) \operatorname{sign} \sin (n+1)x\, dx \right|.$$

Hasonlóan, alkalmazásként adódik az a *Korkin*tól és *Zolotarjov*tól származó eredmény is, amely szerint

$$\min_c \int_{-1}^{1} |x^n - c_0 - c_1 x - \dots - c_{n-1} x^{n-1}| \, dx = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

A könyv harmadik fejezete a harmonikus analízis, tehát a Fourier-sorok és a Fourier-integrálok elméletének a továbbiakban felhasználandó fejezeteit tárgyalja. A szerző különös súlyt helyez a Fejér típusú maggal bíró integrál-operátorok elméletének részletes tárgyalására. A bizonyítások mindenütt a lehető legegyszerűbbek.

A negyedik fejezet az exponenciális típusú transzcendens egész függvényekkel foglalkozik, amelyek a továbbiakban nagy szerepet játszanak. Exponenciális típusúnak nevezünk egy transzcendens egész függvényt, ha

$$\sigma = \overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\log M(r)}{r} < \infty,$$

ahol $M(r) = \max\limits_{|z|=r} |f(z)|$. A σ számot $f(z)$ kitevőjének nevezik. Ezeknek a függvényeknek az elméletében alapvető szerepet játszik *Paley* és *Wiener* tétele, amely szerint ha $f(z)$ kitevője σ-nál nem nagyobb és ha

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty,$$

akkor

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sigma}^{\sigma} e^{itz} \varphi(t) \, dt,$$

ahol $\varphi(t) \in L^2[-\sigma, \sigma]$. A könyv ennek a tételnek *Plancherel*től és *Pólyá*tól származó bizonyítását tárgyalja. Különösen sokat foglalkozik *Ahijezer* azoknak az exponenciális típusú transzcendens egész függvényeknek az osztályával, amelyeknek az exponenciális típusa egy adott pozitív számnál nem nagyobb és amelyek a valós tengelyen korlátosak. Erre a függvényosztályra kiterjeszthetők a trigonometrikus polinomoknak a legfontosabb tulajdonságai. Így például kiterjeszthető *Bernstejn*nek a trigonometrikus polinomok deriváltjának a maximumára vonatkozó egyenlőtlensége és átvihető *Fejér* és *Riesz Frigyes* tétele, amely nem negatív trigonometrikus polinomoknak az előállítására vonatkozik. A fejezet végül részletesen tárgyalja a Levitan-féle polinomokat és folytonos függvényeknek Lebesgue—Stieltjes-féle integrál alakjában való előállíthatóságának a kérdését. Az utóbbi kérdés általános megfogalmazásban összefügg adott multiplikátor-sorozat segítségével transzformált trigonometrikus összegek extrémum-problémájával és így a Bernstejn-féle egyenlőtlenséggel is.

A könyv ötödik fejezete tárgyalja a harmonikus approximáció problémáját. A harmonikus approximáció tételeinek egyik csoportját alkotják a direkt tételek, amelyek a függvény sajátságaiból következtetnek a legjobb közelítésnek a nagyságrendjére. A legalapvetőbb klasszikus eredmények ebben az irányban a következők:

1911-ben *Jackson* bebizonyította a következő két tételt: Ha $f(x)$ 2π szerint periódikus, r-szer ($r \geqq 1$) differenciálható és $|f^{(r)}(x)| \leqq 1$, akkor bármely n természetes számhoz található olyan n-nél alacsonyabb rendű trigonometrikus polinom, amely eleget tesz az

$$|f(x)-T_{n-1}(x)| \leqq \frac{A_r}{n^r}$$

egyenlőtlenségnek, ahol A_r csak r-től függ. Ha $f(x)$ 2π szerint periódikus, r-szer differenciálható és $f^r(x)$ folytonossági modulusa $\omega_r(\delta)$, akkor bármely n természetes számhoz található olyan n-nél alacsonyabb rendű trigonometrikus polinom, amely eleget tesz az

$$|f(x)-T_{n-1}(x)| \leqq \frac{B_r}{n^r}\omega_r\left(\frac{2\pi}{n}\right)$$

egyenlőtlenségnek, ahol B_r csak r-től függ.

Jackson eredményeiben az A_r és B_r állandók r-rel együtt végtelenbe tartanak. Ha $E_{n-1}(f)$-fel jelöljük az $f(x)$ függvénynek n-nél alacsonyabb rendű trigonometrikus polinomokkal való legjobb közelítését, akkor *Jackson* tételei szerint az első esetben $E_{n-1}(f) \leqq \frac{A_r}{n^r}$, a második esetben pedig $E_{n-1}(f) \leqq \frac{B_r}{n_r}\omega_r\left(\frac{2\pi}{n}\right)$. *Bernstejn* hasonló eredményeket ért el 2π szerint periódikus, analitikus függvényeknek trigonometrikus összegekkel való közelítésére vonatkozólag.

Jackson tételeit *Favard* élesítette. Meghatározta az első Jackson-féle tétel feltételeinek eleget tévő függvények osztályára vonatkozóan az $E_{n-1}(f)$ legjobb közelítések pontos felső határát, vagyis erre a függvényosztályra vonatkozóan a legjobb $(n-1)$-edrendű trigonometrikus közelítést és azt az extrémális függvényt, amelyre ez a felső határ eléretik. Eredményei alapján a Jackson-féle tételekben szereplő A_r és B_r r-től független állandókkal helyettesíthetők, pl. $A_r \leqq \frac{\pi}{2}$. *Favard* megvizsgálta a konjugálta függvény legjobb közelítésének a rendjét is, azonban erre a kérdésre nem térünk ki részletesen.

A fordított tételek, amelyek a függvény legjobb közelítésének nagyságrendjéből következtetnek a függvény tulajdonságaira, *Bernstejn* nevéhez fűződnek, aki bebizonyította a következő két tételt: Ha $f(x)$ 2π szerint periódikus és $E_n(f) = 0(n^{r+\alpha})$, ahol r természetes szám és $0 < \alpha < 1$, akkor a függvény r-szer differenciálható és differenciálhányadosa α-rendű Lipschitz feltételnek tesz eleget. Ha $f(x)$ 2π szerint periódikus és $E_n(f) = 0(n^{r+1})$, ahol r természetes szám, akkor a függvény r-szer differenciálható és az r-edik differenciálhányadosának folytonossági modulusa eleget tesz az

$$\omega_r(\delta) \leqq \delta \log \frac{1}{\delta}$$

feltételnek. Hasonló típusú eredményeket kapott *Bernstejn* 2π szerint periódikus, analitikus függvényekre vonatkozóan is.

A Jackson-féle és a Bernstejn-féle tételek nem periódikus esetben, polinom-approximációnál is érvényesek némi módosítással. Mivel ezek a kérdések kívül esnek a harmonikus approximáció körén, ezért ezeket *Ahijezer* nem tárgyalja. A fent felsorolt tételeket és még sok más approximációs tételt *Ahijezer* összefoglalva és nagy mértékben általánosítva tárgyalja. Nem szorítkozik csupán a periódikus függvényekre, hanem az egész számegyenesen értelmezett függvényeknek tágabb halmazait is vizsgálja. Az approximált függvények osztályának ilyen kibővítése esetén a T-nél kisebb rendszámú trigonometrikus összegek, mint approximáló függvények nem elégségesek. Természetes módon kínálkozik, hogy ezt azzal a tágabb függvényosztállyal helyettesítsük, amelyet az összes olyan függvények alkotnak, amelyeket valamely T-nél kisebb kitevőjű exponenciális típusú transzcendens egész függvényeknek a valós tengelyen felvett értékei származtatnak. Ebben a függvényosztályban központi helyet foglalnak el az

$$\int_{-T}^{T} e^{itx} \varphi(t)\, dt$$

alakú integrálok, ezért joggal beszélhetünk harmonikus approximációról. Ezenkívül *Ahijezer* a Jackson- és a Bernstejn-féle tételeket más irányban is általánosítja. Egyenletes közelítés helyett bebizonyítja ezekeknek a tételeknek az L^p terekre vonatkozó analogonjait is.

Az approximáció direkt tételei egy igen általános és központi tételből következnek, amely *Favard, Krejn* és *Sz.-Nagy Béla* eredményei alapján jött létre. E tétel szerint a legjobb egyenletes közelítés pontosan meghatározható egy olyan függvényosztály esetében, amely egy bizonyos speciális típusú magfüggvénnyel, úgynevezett Krejn-féle maggal képezett integrálok segítségével áll elő. Ekkor a legjobb közelítés a függvény ismeretében, meghatározott eljárással nyerhető egy integrál alakjában. A szerző itt külön felhívja az olvasónak a figyelmét arra az analógiára, amely az itt tárgyaltak és *A. Markov*nak a már említett vizsgálatai között fennáll. A Krejn-féle magokra vonatkozó használható kritérium adódik *Sz.-Nagy Béla* egyik eredményéből, amelyet *Ahijezer* részletesen ismertet. Meg kell jegyezni, hogy *Sz.-Nagy Béla* eredményei eredetileg más irányúak, ő bizonyos multiplikátor sorozatokat, illetve súlyfüggvényeket vizsgált, amelyekkel trigonometrikus soroknak, illetve trigonometrikus integráloknak bizonyos osztályát transzformálva az extrémum-probléma megoldható. *Ahijezer* alaptételének az L^p térre vonatkozó következményeinél a legjobb közelítés már nem adható meg pontosan, csupán becsülhető.

Az, hogy ezek a tételek a periódikus esetet tartalmazzák, egy lemmából következik, amely szerint, ha a függvény 2π szerint periódikus és van egy T-nél kisebb kitevőjű exponenciális típusú transzcendens egész függvény, amely egy pozitív δ számnál nem rosszabb egyenletes közelítést szolgáltat, akkor van olyan legfeljebb $[T]$-edrendű trigonometrikus polinom, amelynek a függvénytől való eltérése δ-nál nem nagyobb.

Az általanos direkt eredmények után megtalálható a *Favard*-féle tételnek egy egyszerűbb, közvetlen bizonyítása is, továbbá *Ahijezer* közli a Jackson-féle tételek általánosításainak egy másik, a Fejér-típusú magokat felhasználó konstruktívabb bizonyítását is. Végül a fejezet a Bernstejn-féle fordított tételeket tartalmazza, általánosítva a teljes számegyenesen értelmezett függvények bizonyos osztályaira és az L^p terekre is. Majd alkalmazásként *Ahijezer* bebizonyítja a Fourier-sorok elméletéből ismeretes Privalov-féle tételnek egy általánosítását.

A hatodik fejezet a Wiener-féle problémával foglalkozik. *Wiener* megmutatta, hogy az $L[-\infty, \infty]$ térnek egy $\mathfrak{M}$ részhalmaza akkor és csakis akkor zárt az $L[-\infty, \infty]$ térben, ha nincs a számegyenesen olyan pont, amelyben minden $\mathfrak{M}$-beli függvénynek a Fourier-transzformáltja eltűnik. Ennek a zártsági feltételnek alkalmazásaként a szerző *Wiener, Ikehara* és *Carleman* Tauber-típusú tételeit tárgyalja.

A könyv utolsó része számos érdekes feladatot, illetve eredményt tartalmaz. Érdekes elemi szélsőértékproblémákon és zártsági kritériumokon kívül megtalálható többek között *Szegő* tétele a függvények mértani közepéről; *Carathéodory* és *Fejér* problémája: keresendő az az egységkörben analitikus függvény, amelynek hatványsorában az első n együttható adott számokkal egyenlő és amelynek az egységkörben felvett maximuma az összes ilyen függvények közül a minimális; *Zolotarjov* egy approximációs problémája; *Fekete* tétele zárt, síkbeli ponthalmazok transzfinit átmérőjéről és *Bernstejn* aszimptotikus képletei, amelyek egyszerű analitikus függvényeknek a legjobb közelítéseire vonatkoznak. A könyv részletes bibliográfiával végződik.

Amint látható, a könyv igen széles területet ölel fel és a legmodernebb eredményeket is tartalmazza, így a matematikai irodalomnak nagy nyeresége. A tárgyalás mindenütt világos és a lehető legrövidebb. Az anyag kiválogatásában és csoportosításában a szerzőt első sorban a logikai zártság követelménye irányítja, éppen ezért *Ahijezer* többször mellőzi a történeti sorrendet és az egyes eredményeket is meglepő módon állítja be, amint azt például *Haar* és *Sz.-Nagy Béla* tételeivel kapcsolatban megjegyeztük. A könyv másik jellemző vonása a rendkívüli általánosság. A nagyfokú általánosítások hatalmas analitikus apparátus felhasználását teszik szükségessé. Ezt a nehézséget *Ahijezer* csillogó technikával győzi le. A könyv jelentőségére jellemző, hogy Berlinben egy német kiadása is készülőben van. A magyar kiadás fordítási munkáit *Varga Tamás*, a szerkesztési munkát *Sz.-Nagy Béla* végezte nagy szakavatottsággal.

Remélhető, hogy *Ahijezer*nek ez a könyve *I. P. Natanszon*nak rövidesen ugyancsak magyar fordításban is megjelenő *„Konstruktív függvénytan“* c. könyvével együtt, amely tankönyv jellegű és így a kezdők számára könnyebben olvasható bevezetést nyújt, nagy segítséget nyújt a fiatal magyar kutatóknak, hogy tovább dolgozzanak a matematikának ebben a modern és gyors fejlődésnek indult ágában, amelyben a magyar matematikai iskola már eddig is nagyszámú értékes eredményt ért el.

Tandori Károly

J. I. FRENKEL
„BEVEZETÉS A FÉMEK ELMÉLETÉBE" CÍMÜ KÖNYVÉRŐL

Ez a könyv *J. I. Frenkel*nek a leningrádi Politechnikum fémipari tagozatán elhangzott előadásainak kiegészített gyüjteménye. Terebélyesedő iparunk egyre növekvő igényekkel lép fel technológiai vonatkozásokban is. A második ötéves terv igen fontos célkitűzése alapanyagbázisunk kiszélesítése. Mindez fokozottan előtérbe hozza annak a szükségességét, hogy hazánkban minél többen ismerkedjenek meg, minél többen foglalkozzanak az anyag szerkezetének — elsősorban a fémek szerkezetének — elméletével is.

A fizikusok közt hazánkban már komoly eredményeket elért iskolája van a szilárd testek fizikájának, azonban *Frenkel* könyvének olvasásakor felmerül az emberben a gondolat, hogy milyen hiányosság van még a mi ezirányú kutatásainkban. Fizikusaink vagy az elmélet legelvontabb kérdéseit tárták fel ezen a téren, vagy pedig kísérleti fizikai módszerekkel vizsgálták a problémát, de hiányzott a kettő közötti kapcsolat. A legtöbb technikai alkalmazással kapcsolatos probléma pedig ezen az átmeneti területen van. A *reális anyag* sok olyan tulajdonságot mutat, melyet az *ideális testre* vonatkozó elméleti tárgyalás egészen másképad vissza (pl. szakítási szilárdság, stb). Ezeknek az ú. n. *szerkezettől függő tulajdonságoknak* a vizsgálata az, ami hazánkban igen kevéssé volt elterjedt és ez az, aminek a fontosságára *Frenkel* könyve rámutat.

A könyv öt részre tagolódik: A fémek elektronelmélete, a dielektrikumok és a fémek sávelmélete, a szilárd és folyékony testek molekuláris kinetikus elmélete és ennek alkalmazása a fémekre, az ötvözetek kinetikus elmélete és végül a szilárdság és plaszticitás. Az első részben mindenki számára érthető egyszerűséggel magyarázza meg a szerző a fémek számos tulajdonságát: elméleti szilárdság, összenyomhatóság, kilépési munka, hőkapacitás, termikus elektronemisszió, elektromos vezetőképesség, mágneses tulajdonságok. A második rész a sávelmélet igen egyszerű tárgyalását adja. Ez a rész nagyon ügyes kritikai összefoglalást ad erről a kérdésről, nagyon élesen rámutat arra, hogy egy elmélet alkalmazásainál mennyire számba kell venni az alkalmazhatóság határait. Részletesen tárgyalja itt a szerző a fémek, szigetelők, a félvezetők közti felépítésbeli különbségeket, a szennyeződések szerepét ezek tulajdonságainak kialakításában. A harmadik részben a molekuláris kinetikus elmélet klasszikus tárgyalását adja a szerző. Ez a rész, mely a reális szilárd testekkel foglalkozik, szinte élő képként tárja az olvasó elé, hogy a fémeken belül mennyi mozgás, mennyi változás történik, hogy a fém igen stabil egyensúlya mennyire *dinamikus* egyensúly. A fémrács hibáinak részletes tárgyalása után az olvadás elméletét tárgyalja itt a szerző. A negyedik rész az ötvözeteket, a rendezettség fogalmát, a kohászatban oly fontos fázisátalakulások elméletét tárgyalja egyszerű eszközökkel. Az ötödik rész a szerkezettől függő tulajdonságokat tárgyalja, a technikai szilárdság és az elméleti szilárdság közti különbséget, a szilárdságot befolyásoló egyéb tényezőket, az anyagkifáradás elméletét, a plaszticitást, az összesülést (szinterezést).

A könyv igen hasznos lesz nemcsak a fizikusoknak, — tudósoknak, oktatóknak és diákoknak egyaránt, — de máris nagy érdeklődés mutatkozik iránta a technikusok, mérnökök részéről is, ami újból csak arra mutat, hogy műegyetemi oktatásunkban az anyagszerkezeti, elméleti technológiai kérdéseknek mind nagyobb tért kell elfoglalniok.

A magyar kiadáson még mindig meglátszik — bár már kisebb mértékben, mint eddig — a műszaki szakfordítás terén való elmaradottságunk. Ezzel kapcsolatos hiányosság, hogy a már használatos szakkifejezésekkel sokszor nem egyezőt használ, pl. „ötvényt" használ „ötvözet", vagy „öntvény" helyett, stb. A jövőben a műszaki nyelv könnyedségére és érthetőségére még több gondot kell fordítanunk.

Hoffmann Tibor

A II. MAGYAR FIZIKUS VÁNDORGYŰLÉS

1952 május 24-től 28-ig rendezte az Eötvös Loránd Fizikai Társulat a II. Magyar Fizikus Vándorgyűlést Debrecenben. A vándorgyűlésen több mint 150 fizikus vett részt a fővárosi és vidéki egyetemekből, kutatóintézetekből, üzemekből és középiskolákból.

A megnyitó előadást *Gyulai Zoltán* lev. tag tartotta. Majd a megyei pártbizottság, a Tanács és a debreceni egyetem részéről üdvözölték az egybegyűlt fizikusokat.

A vándorgyűlés előadásai három témakörrel foglalkoztak. Ezek: atommagfizika, szilárd testek szerkezete, molekulafizika. A bevezető előadást *Szalay Sándor* debreceni egyetemi tanár tartotta: „Újabb vizsgálatok hazai szenek urántartalmára vonatkozólag" címmel. A vándorgyűlés egyik legjelentősebb eseménye a május 27-ére Debrecenbe érkező *L. Infeld* lengyel fizikus professzor, a Lengyel Tudományos Akadémia elnökségi tagjának előadása volt, melyben egy új általános elektrodinamikai elméletet ismertetett.

A vándorgyűlés programmja általában megfelelt a célkitűzéseknek; vagyis leginkább olyan témák kerültek előadásra, melyekkel hazánkban sokan foglalkoznak, melyek épp ezért általános érdeklődésre találtak. Ez utóbbinak bizonyságául szolgált az előadások után keletkezett, számos esetben igen élénk vita.

Külön ki kell emelnünk, hogy a vándorgyűlés technikai rendezése kifogástalan volt. A rendezőség, a tavalyi tapasztalatokon okulva, gondot fordított arra, hogy a jelenlévőknek megfelelő alkalom és idő álljon rendelkezésre a tudományos előadások mellett baráti együttlétekre is.

Itt kell rámutatnunk azonban a vándorgyűlés egynémely hibájára is. Ezeknek felemlítése már csak azért is különösen fontos, mert tanulságul kell szolgáljanak az Eötvös Loránd Fizikai Társulat számára jövő évi nagy feladatának, az 1953 évi I. Magyar Fizikus Kongresszus megrendezésének során.

A debreceni vándorgyűlés megmutatta, hogy a jövőben szakítani kell a 15 perces előadások és 5 perces viták rendszerével. A tavalyi I. vándorgyűlésen u. i. ez a módszer még alkalmasnak bizonyulhatott arra, hogy a résztvevők a magyar fizikai kutatásról megfelelő összképet alakítsanak ki magukban; de nem szolgálta már a II. vándorgyűlés elsődleges célját, hogy t. i. a megszabott tárgykörökön belül a fizikusok alaposan elmélyedhessenek az egyes témákban és az elért eredményeket vagy ismertetett módszereket behatóan megvitathassák. A jövőben a vándorgyűlések tudományos programmját tehát úgy kell megszerveznünk, hogy jóval több idő jusson egy-egy téma beható tanulmányozására, a széleskörű tudományos kritika és önkritika alkalmazására. Ez a felismerés igen lényegesen kell, hogy befolyásolja az I. Magyar Fizikus Kongresszus tudományos programmjának összeállítását. Kívánatos, hogy a kongresszuson speciális jellegű vizsgálatokról szóló beszámolók tömege helyett inkább kisebb számban, de átfogó jellegű előadások szerepeljenek.

Részben a rövid előadási idővel függ össze a vándorgyűlés tudományos programmjának az a hibája is, hogy egyes előadások nem nyújtottak megfelelő képet az előadott téma jelentőségéről és a vizsgálatok eredményeinek elvi vagy gyakorlati fontosságáról. Nem egy olyan előadás volt, melyben az előadó egyszerűen egy mérési eredményt közölt és meg sem kísérelte a kapott eredményt értékelni, tehát rámutatni arra, hogy a kapott eredmény milyen adatokat szolgáltat a kérdéses jelenségcsoport behatóbb megértéséhez. Bizonyos azonban, hogy ennek nemcsak a rövid előadási idő volt az oka, hiszen számos előadónak sikerült egy-egy problémáról a rövid előadási idő ellenére is széles és átfogó képet adni témájáról. A jövő évi kongresszusig az eddiginél sokkal intenzívebb tudományos kritika alkalmazásával lehet majd ezt a hiányosságot felszámolni.

A kongresszusig továbbá meg kell szüntetnünk a magyar fizikus életnek és az Eötvös Loránd Fizikai Társulatnak egy további súlyos hibáját, mely szintén megmutatkozott a vándorgyűlésen; egyes intézeteink, egyes fizikusaink között még mindíg nem kielégítő a tudományos kapcsolat. Ennek a hibának orvoslása azért bir különösen nagy jelentőséggel, mert fejlődésünk jelen stádiumában a kollektív tudományos munka hiánya már komoly bajokhoz vezethet. Ebben a munkában az Eötvös Loránd Fizikai Társulatnak szüksége lesz a Tudományos Akadémia III. Osztályának az eddiginél sokkal intenzívebb támogatására.

A kongresszusig továbbá fel kell számolnunk a fizikus közéletünkben még mindig meglévő „apolitikus" vonásokat. A II. fizikus vándorgyűlésen nem látszott megfelelően az a szerep, melyet a magyar fizikusok a szocializmus építésében visznek, nem vált plasztikussá az az ezernyi szál, mely a magyar fizikusok munkáját Pártunk, dolgozó népünk harcaival elválaszthatatlanul összekapcsolja.

Összefoglalva megállapíthatjuk, hogy a II. Magyar Fizikus Vándorgyűlés — kétségtelenül meglévő hibái ellenére — jelentős esemény volt a magyar fizika fejlődésében és a bemutatott eredmények biztosítékot nyújtanak arra, hogy a magyar fizikusok a következő évben a növekvő lehetőségeknek és szükségleteknek megfelelően fokozott munkával fognak harcolni nagy céljaink eléréséért, a szocializmus győzelméért, a béke megvédéséért.

A vándorgyűlés előadásai

Május 24, szombat

Szalay Sándor:	Újabb vizsgálatok hazai szenek urántartalmára vonatkozólag.
Bozóky László:	Újabb γ-sugár-védelmi berendezésekről.
Tari László:	Hordozható rádióaktív sugárzásmérő készülék.
Orbán György:	Logaritmikus intenzitás-skála előállítása röntgensugarakra és ennek felhasználása.
Keszthelyi Lajos:	Szcintillációs számláló antracénnel.
Kertész László— Szalay Sándor— Simonyi Ágnes:	Rádióaktív izotóppal nyomjelzett intravénásan beadott kolloid sorsának vizsgálata állati szervezetben.
Szalay Sándor— Fényes Tibor:	Egy elektromágneses rendszerű α-sugár spektrométer.
Cornides István:	Energia-homogén ionforrás tömegspektroszkópiai célokra.
Erő János:	Magreakciók tanulmányozására szolgáló teljes kísérleti berendezés.
Karlovits József— Schmidt György:	Beszámoló Van de Graaf-generátorok építésénél szerzett tapasztalatokról.
Szalay Sándor— Puskás Emil:	Egy kétmillió voltos Van de Graaf-generátor.

Május 25, vasárnap

Jánossy Lajos:	Egy nem-lineáris egyenlet tulajdonságairól.
Neugebauer Tibor:	Az atommagok energianívóinak helyzeteiből az erőtörvényre vonható következtetések.
Szamosi Géza:	További vizsgálatok az atommag szerkezetéről.
Marx György:	Longitudinális rezgések az atommagokban.
Nagy Károly:	Neutron befogáskor felszabaduló energia kiszámítása.
Nagy János:	$Al(\alpha, n)P$ magátalakulás gerjesztési függvényének vizsgálata.
Medveczky László:	$Al(\alpha, n)P$ atommagfolyamat neutronjainak energiaeloszlása.
Fenyves Ervin— Haiman Ottó:	Kozmikus sugárzás mérése bányában.

Május 26, hétfő

Gyulai Zoltán— Morlin Zoltán:	Rekristalizációs kísérletek NaCl pasztillákon.
Tarján Imre:	Vizsgálatok mesterséges kvarckristályok előállításával kapcsolatban.
Cornides István:	Kristálymagképződés elektromos térben.
Hoffmann Tibor:	Adszorpció. Felületi állapotok. Kontaktusok. Szennyeződések.
Gyulai Zoltán— Szilvási Árpád— Gaál János:	Thermoelektromotoros erő-mérések nehezen olvadó fémoxidok között.
Gombay Lajos— Láng János:	Ferroszilíciumból készített kristálydióda és trióda.
Bodó Zalán:	Lumineszkáló porok kvantumhatásfokának kalorimetrikus mérése.
Nagy Elemér:	Fluoreszcens jelenségek a kristályrács egyes atomjain.
Neugebauer Tibor:	Megjegyzések a ferroelektromos jelenségek elméletéhez.
Lengyel Béla:	Térfogati mágnetostrikción alapuló ultrahangkutatások.
Gáspár Rezső:	Röntgen- és nagysebességű elektronsugarak szóródása atomban.

Május 27, kedd

L. Infeld:	Nemlineáris elektrodinamika és az éter problémája.
Kovács István:	Újabb eljárás a perturbáló molekulatermek állandóinak meghatározására.
Deézsi Irén— Koczkás Edit— Mátrai Tibor:	Újabb vizsgálatok a SrO kék sávjain.
Pauncz Rezső:	Lineárisan kondenzált aromás vegyületek színképe az elliptikus rotátormodell alapján.
Pauncz Rezső— Berencz Ferenc:	Négygyűrűs aromás vegyületek diamágneses anizotrópiája.
Láng László:	A kémiai mechanika néhány fontos állandójának meghatározása spektroszkópiai úton.
Vizesy Mária— Láng László:	Diasztereomer párok színképeinek vizsgálata.
Tarnóczy Tamás:	Égési folyamatok befolyásolása akusztikus energiával.
Greguss Pál:	Akusztikus dehidrociklizáció.
Evva Ferenc:	Polidiszperzitás és szolvatáció befolyása zselatinos AgCl-szuszpenziók fényszórására.
Szimán Oszkár:	Makromolekulák jód-komplexeinek optikai tulajdonságai.

Szamosi Géza

ÖSZTÖNDÍJASOK JUTALMAZÁSA

1952 május 30-án, a Nagygyűlés keretében tartott vitaülésen a III. osztály ösztöndíjasai közül a következők részesültek jutalomban.

Matematika

Bereczki Ilona jelentős eredményt ért el a rekurzív függvények elméletében, megoldott egy problémát, melyet *A. A. Markov* szovjet matematikus vetett fel az I. Magyar Matematikai Kongresszuson. 1000 Ft jutalomban részesült.

Hosszú Miklós figyelemreméltó eredményt ért el „Az autodisztributivitás függvényegyenletéről" c. dolgozatában. A problémát az eddigiektől lényegesen különböző új úton közelíti meg, s az eddigi eredményeket túlhaladja. 1000 Ft jutalomban részesült.

Molnár József két önálló geometriai dolgozatot írt. Első dolgozatában egyszerű bizonyítást ad *Habicht* és *van der Waerden* egy tételére. Másik dolgozatának főeredménye a konvex gömbi tartományokra vonatkozó két tétel, melyekkel *A. Thue, R. Kershner* és *Fejes Tóth László* eredményeit egyesíti és általánosítja. 1000 Ft jutalomban részesült.

Soós Gyula dolgozatában a konvex testek elméletéből ismert Helly-tétel általánosítását adja. Tétele *A. D. Alexandrov* konvex felületekre vonatkozó tételeire támaszkodik. 1000 Ft jutalomban részesült.

Szász Gábor eredményes kutatásokat végzett az utóbbi időben az ú. n. „lattice"-elmélet terén. Dolgozatában figyelemreméltó önállóságot és eredetiséget mutat. 1000 Ft jutalomban részesült.

Szendrei János nevezetes eredményt ért el a zérus-osztómentes gyűrűk elméletében. Kiemelendő a problémának teljesen önálló felvetése és annak igen szellemes megoldása. Sikerrel foglalkozik további kérdésekkel is. 1500 Ft jutalomban részesült.

Fizika

Fényes Tibor egy elektromágneses sugárenergia spektrométer elkészítésében eredményesen dolgozott. 500 Ft jutalomban részesült.

Kertész László radióaktív (RáÉ) izotoppal nyomjelzett Bi_2S_3-kolloidnak kisérleti állatok szervezetében történő sorsát kisérő vizsgálataiért, amelyekben élő szervezet reticulo endothel védekező rendszerének működését vizsgálta, 500 Ft jutalomban részesült.

Lentei Ilona nemes gázszerű ionok polarizálhatóságára vonatkozólag végzett számitásokat, ezenkívül az atomok elektronjainak mellékkvantumszám szerinti csoportosítására vonatkozólag most vannak folyamatban számításai. 500 Ft jutalomban részesült.

Makranczi Béla elkészített egy fotoelektromosan ultraibolyában érzékeny kvarcablakos Geiger—Müller számlálócsövet és a hozzátartozó elektronikus berendezést. 1000 Ft jutalomban részesült.

Medveczky László fotoemulziós módszerrel sikeresen megvizsgálta Al-ből Po—α sugarakkal való bombázás hatására kilépő neutronsugárzás energiaspektrumot. 1000 Ft jutalomban részesült.

Nagy János sikeresen megvizsgálta BCl_3-os neutronszámláló kamrával az Al-ból Po—α sugarainak hatására kilépő neutronok gerjesztési függvényét. 1000 Ft jutalomban részesült.

Szilvási Árpád és *Gaál József* „Nehezen olvadó fémoxidok között fellépő termoelektromos erő mérése“ témán együtt dolgoztak, a mérés anyagául ZrO_2 és Al_2O_3-at vettek. A kérdés célja gyakorlati alkalmazás kemencék belső hőmérsékletének mérésére. A vizsgálatok eredményei előadásra kerültek a II. Magyar Fizikus Vándorgyűlésen. 1000 Ft jutalomban részesültek.

Ujhelyi Sándor naftalin egykristályok előállítását oldotta meg atomkutatások céljaira. 1000 Ft jutalomban részesült.

Meteorológia

Berkes Zoltán megvizsgálta azt a kérdést, hogy Magyarország felett milyen mértékű az általános légkörzésből eredő légtömbáthelyeződés az év folyamán. Az irány szerinti szélút- és szélerősségadatok felhasználhatók a mezővédő erdősávok telepítésénél is. 1000 Ft jutalomban részesült.

Kakas József dolgozata az ipari létesítmények, légszennyező üzemek és lakótelepek, valamint a mezővédő erdősávok elhelyezésével kapcsolatban felmerülő szélirány- és szélerőgyakoriság kérdéseinek évszakonkénti tisztázásával foglalkozott. 1000 Ft jutalomban részesült.

A TUDOMÁNYOS MINŐSÍTŐ BIZOTTSÁG HATÁROZATAI

A Tudományos Minősítő Bizottság az 1951. évi 26. számú törvényerejű rendelet értelmében megkezdte munkáját. A Magyar Tudományos Akadémia összes rendes és levelező tagjait a Tudományos Minősítő Bizottság a tudományok doktorává nyilvánította. A minősítésre beadott kérvények közül eddig az aktív és nyugalmazott egyetemi tanárok, valamint akadémiai kutatóintézeti vezetők kérvényeivel foglalkozott a TMB és közülük a III. osztályhoz tartozó tudományágakból a következőket nyilvánította a tudományok doktorává, illetőleg kanditátusává.

Fejes Tóth Lászlót, Detre Lászlót * a matematikai tudományok doktorává, *Kárteszi Ferencet, Gallai Tibort, Szentmártony Tibort* a matematikai tudományok kanditátusává ;

Szalai Sándort a fizikai tudományok doktorává, *Simonyi Károlyt, Kónya Albertet, Ribár Istvánt, Tarján Imrét, Lassovszky Károlyt* * a fizikai tudományok kanditátusává nyilvánította.

A többi pályázó kérvényeinek elbírálása folyamatban van.

* Az említett rendelet felsorolja, hogy mely tudományokból adható kandidátusi, ill. doktori oklevél. Ebben a felsorolásban a csillagászat külön nem szerepel, így tehát csillagászok munkájuk jellegének megfelelően matematikai, ill. fizikai kandidátusi, ill. doktori fokozatot nyerhetnek.

AKADÉMIAI INTÉZETEK HÍREI

Alkalmazott Matematikai Intézet

Folyó évi április hó 18-án tartotta alakuló ülését az Alkalmazott Matematikai Intézet Tudományos Tanácsa. A Tanács alakuló ülésén többek között a következő főkérdésekkel foglalkozott: az Intézet eddigi működéséről szóló jelentés megvitatása, az Intézet tudományos tematikai tervének felülvizsgálata, az Intézet szervezetének és fejlesztésének kérdései. Tárgyalásra került továbbá az ülés során a Természettudományi Karon folyó alkalmazott matematikus képzés, valamint a mérnöktovábbképzés néhány matematikai vonatkozású problémája.

Az Intézet eddigi munkájának és tudományos tervének megvitatása során megállapítást nyert, hogy az Intézet nagyszámú olyan problémát oldott meg, amelyeket a népgazdaság és tudományos kutatás különböző szektorai, az ipar, mezőgazdaság, kereskedelem, biztosítás intézményei vetettek fel és ezzel ötéves tervünk megvalósítását közvetlenül segítette elő. A vita során az az álláspont alakult ki, hogy a jövőben az Intézet külső megbízásból végzett munkáinak még gyorsabb és eredményesebb teljesítése mellett az elméleti tudományos kutatómunkát az Intézetben tervszerűbbé kell tenni.

Az Intézet eddigi munkájának, jövő feladatainak és szervezetének megvitatása során a Tudományos Tanács egyöntetűen arra a megállapításra jutott, hogy az Intézetet mielőbb, de legkésőbb a második ötéves terv megindulásának idejére Központi Matematikai Intézetté kell fejleszteni, amely az alkalmazott matematikai kutatómunka mellett a hazánkban folyó matematikai kutatás egész területét átfogja. Az erre irányuló előkészületeket még az első ötéves terv során kell megtenni.

Az Intézetnek Központi Matematikai Intézetté való kifejlesztése a tudomány és gyakorlat egységének még fokozottabb megvalósítását lesz hivatva elősegíteni azáltal, hogy a matematika gyakorlati alkalmazásaival kapcsolatos kutató munka fokozása mellett és ezzel szoros kapcsolatban az Intézeten belül fokozottabb mértékben fog folyni a kutatás a matematika elméleti elvi jellegű irányaiban is.

A Tudományos Tanács végül határozatokban rögzítette le a vita során kialakult állásfoglalását, amely határozatok az Intézet jövő munkájának és fejlesztésének irányt szabnak. E határozatok között szerepelnek egyebek között új osztályok létesítésére, továbbá a termeléssel és műszaki tudományos kutatással való kapcsolat megjavítására vonatkozó határozatok.

* * *

Az Intézet megkötötte első szocialista versenyszerződését és pedig a Csepel Autógyárral.

A szerződés értelmében az Intézet vállalja, hogy a minőségellenőrzés statisztikai módszereinek az Autógyárban történő bevezetése munkájában tevékenyen részt vesz. Ennek során megadja a felmerülő elméleti kérdésekre vonatkozó szükséges tájékoztatást mind az eljárás beindítása, mind annak folyamatos alkalmazása során, rendszeresen figyelemmel kíséri a módszerek alkalmazását, s gondoskodik arról, hogy a nyert statisztikai adatok feldolgozása az Intézetben megtörténjék.

Támogatást nyújt az Intézet a statisztikai minőségellenőrök kiképzéséhez, s továbbá a tapasztalatokról az Autógyárban két előadást tart.

A Csepel Autógyár lehetővé teszi, hogy az alkalmazott matematikus hallgatók az Intézet vezetésével gyárlátogatásokon ismerkedjenek meg a bevezetett módszerekkel. Lehetőséget nyújt továbbá az Autógyár arra, hogy az Intézet — általa elvi síkon már kidolgozott — matematikai problémákkal, így elsősorban a törésnek, ill. kopásnak kitett gépalkatrészek tartalékolására, továbbá az egyidejűségi tényezőre vonatkozó matematikai számításokkal kapcsolatban a gyár működésében tapasztalatokat szerezzen.

A tudományos kutatás és az ipari termelés a szerződés eredményeként való jobb együttműködése ötéves tervünk teljesítését segíti elő. Hasonló szerződést kötött az Intézet a Telefongyárral is.

Csillagvizsgáló Intézet

A Magyar Tudományos Akadémia *Csillagvizsgáló Intézetének* Tudományos Tanácsa 1952 márciusában alakult meg. A Tanács feladata abban áll, hogy elsősorban a Csillagvizsgáló Intézetet, de általában az egész hazai csillagászatot érintő összes elvi fontosságú kérdéseket megvitassa és ezekre vonatkozólag az illetékes tényezők felé javaslatot tegyen. A Tanács 1952 április 30-án tartotta első ülését. Ez alkalommal a szovjet csillagászokkal való kooperáció, az egyetemi csillagászati oktatás és a csillagász káderképzés aktuális problémái, egy létesítendő vidéki obszervatórium helyének megválasztása képezték az ülés legfőbb programmpontjait. Az egyetemi oktatásra vonatkozólag a tanács javasolta a Közoktatásügyi Minisztériumnak, hogy a IV. éves fizika-matematikaszakos tanárjelöltek csillagászati előadása ezentúl két féléven keresztül heti két órában történjék, az eddigi egy félév és heti három óra helyett és, hogy a matematika-fizika és fizikaszakos hallgatók órarendje is úgy legyen megállapítva, hogy ezt az előadást hallgathassák.

Ára: 30 Ft.

TARTALOMJEGYZÉK

TUDOMÁNYOS KÖZLEMÉNYEK

Oldal

Kovács István: Általánosított eljárás a perturbáló molekulatermek állandóinak kiszámítására a perturbációs adatok alapján 161
Dallos András: Impulzus—spektrográfia 173
Selényi Pál: Elektronmikroszkópiai képek elektrografikus felvétele 185
Selényi Pál: Eötvös csavarási mérlegének elemi elmélete 189
Gergely György és Nagy Elemér: Foszforeszcencia spektrumok 201
Gergely György: Megjegyzések a willemit lumineszkálásának időbeli lefolyásához . . 207
Budó Ágoston: Dipolfolyadékok dielektromos relaxációjáról 209
Pauncz Rezső: Korrekció a Fermi-féle kinetikai energia képletben 227
Fenyves Ervin és Haiman Ottó: Kozmikus sugárzás mérése bányában 233
Bodó Zalán: Lumineszkáló porok néhány optikai tulajdonsága 239
Bodó Zalán: Különböző lumineszkáló porok ultraibolya abszorpciójának mérése a diffúz reflexió segítségével 253

KÖNYVISMERTETÉSEK

Ankét: Kudrjarcev „A fizika története“ c. könyvéről 259
Fényes Imre és Rényi Alfréd: A. Ja. Hincsin „A statisztikai mechanika analitikus módszerei“ c. könyvről 275
Tarján Rezső: A. N. Boncs—Brujevics „Az elektroncső fizika alkalmazásai“ c. könyvéről 281
Béll Béla: Sz. P. Hromov „A szinoptikus meteorológia alapjai“ c. könyvéről . . . 285
Kalmár László: Péter Rózsa „Rekursive Funktoinen“ c. könyvéről 297
Szász Pál: N. J. Lobacsevszkij „Geometriai vizsgálatok a párhuzamosok elméletének köréből“ c. könyvéről 301
Tandori Károly: N. J. Ahijezer „Előadások az approximáció elméletéről“ c. könyvéről 307
Hoffmann Tibor: J. I. Frenkel „Bevezetés a fémek elméletébe“ c. könyvéről . . . 315

EGYÉB KÖZLEMÉNYEK

Szamosi Géza: A II. Magyar Fizikus Vándorgyűlés 317
Ösztöndíjasok jutalmazása 321
A Tudományos Minősítő Bizottság határozatai 323
Akadémiai Intézetek hírei 325

Technikai szerkesztő: Erdős Lajosné

Akadémiai Kiadó (Budapest, V, Alkotmány-u. 21.) Felelős: Mestyán János

Csongrádmegyei Nyomdaipari Vállalat, Szeged. 523422 Felelős vezető: Vincze György

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI OSZTÁLYÁNAK

KÖZLEMÉNYEI

II. KÖTET 3—4. SZÁM

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA

BUDAPEST, 1952

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI OSZTÁLYÁNAK

KÖZLEMÉNYEI

SZERKESZTI:
RÉNYI ALFRÉD

II. kötet 3—4. szám

Szerkesztőség: Budapest V, Nádor-utca 12.
Kiadóhivatal: Budapest V, Alkotmány-utca 21.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei változó terjedelmű füzetekben jelennek meg és az Akadémia III. osztályának előadóülésein bemutatott dolgozatokat, továbbá az osztály munkájára vonatkozó közleményeket, könyvismertetéseket, referátumokat stb. tartalmaznak. Négy füzet alkot egy kötetet. Évenként általában egy kötet jelenik meg.

Kéziratok a következő címre küldendők:

A Magyar Tudományos Akadémia
III. Osztályának Közleményei.
Budapest V, Nádor-utca 12.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi levelezés.

Minden szerzőt 100 különlenyomat illet meg, megjelent munkájáért.

Közlésre el nem fogadott kéziratokat a szerkesztőség lehetőleg visszajuttat a szerzőhöz, de felelősséget a beküldött kéziratok megőrzéséért, vagy továbbításáért nem vállal.

A Közlemények előfizetési ára kötetenként belföldi címre 20 forint, külföldi címre 30 forint. Belföldi megrendelések az Akadémiai Kiadó, Budapest V, Alkotmány-u. 21. (Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 04-878-111-48), külföldi megrendelések a „Kultúra" Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalat, Budapest VI., Sztálin-út 2. (Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 45-790-057-50-032) útján eszközölhetők.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztálya a következő idegennyelvű folyóiratokat adja ki:

1. Acta Mathematica Hungarica,
2. Acta Physica Hungarica.

VALÓS ÁLLAPOTFÜGGVÉNYEK SZEREPE A KVANTUMMECHANIKÁBAN

MARX GYÖRGY

Bemutatta Novobátzky Károly r. tag 1950. október 17-én tartott felolvasó ülésen

A kvantummechanika alapfeltevése szerint a vizsgált részecskét a ψ állapotfüggvény írja le, melyet a dinamikai egyenletből határozhatunk meg. Az egyes fizikai mennyiségeknek differenciál- és matrixoperátorok felelnek meg. Ezeket az operátorokat az állapotfüggvényre alkalmazzuk. Ha ψ az operátornak sajátfüggvénye, a megfelelő sajátérték szolgáltatja a kérdéses fizikai mennyiség értékét a ψ által meghatározott állapotban.

Tekintsük például egyetlen részecske impulzusának x-komponensét. Ennek az operátora

$$\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}.$$

Az impulzuskomponens sajátértékegyenlete

$$\frac{\hbar}{i}\frac{\partial \psi}{\partial x} = \lambda \psi. \tag{1}$$

Ha a részecske állapotát leíró ψ függvény ezt kielégíti, az x-irányú impulzuskomponens értéke a λ sajátérték. Mivel az operátor hermitikus, λ szükségképpen valós szám.

Második példának vegyük a részecske energiáját. Mint ismeretes, az energia operátorának alakját egyes speciális esetekben az állapotfüggvényt meghatározó dinamikai egyenletből olvashatjuk le. A dinamikai egyenlet u. i. a következő alakú:

$$\frac{\hbar}{i}\frac{\partial \psi}{\partial t} + H\psi = 0. \tag{2}$$

H az energia operátora. Ha ψ az így bevezetett H operátornak sajátfüggvénye, kielégíti a

$$H\psi = E\psi \tag{3}$$

energiasajátértékegyenletet. E az energiasajátérték; természetesen ez is valós.

A röviden ismertetett alapfeltevéseknek a segítségével a kvantummechanika sok problémát sikeresen megoldott. Gondoljunk a hidrogénatommag körül keringő elektron energiasajátértékeinek meghatározására a Dirac-egyenlet alapján. Ennek segítségével lehetővé vált a hidrogénatom-színkép finomszerkezetének kielégítő tárgyalása. Az elektronnál és az összes többi vizsgált esetben az energia- és impulzussajátfüggvények komplexnek adódtak. Bizonyos problémák tárgyalásánál azonban valós állapotfüggvények használatára szorítkozunk. Az elektromágneses tér állapotát leíró függvények, az elektromágneses potenciálok csak valós értéket vehetnek fel. A gravitációs tér esetében hasonló a helyzet. Már pedig az (1) egyenletre vetett pillantás azt mutatja, hogy az egyenlet valós ψ-vel nem elégíthető ki. (Valós ψ esetén a baloldalon képzetes, a jobboldalon valós kifejezés állana, ami lehetetlenség.) Hasonló a helyzet az energia esetében is. Vonjuk ki a (2) egyenletből a (3) egyenletetet. Ekkor a

$$\frac{\hbar}{i}\frac{\partial\psi}{\partial t} = -E\psi \tag{4}$$

összefüggésre jutunk, amelyik megmutatja, hogy az energiasajátfüggvény sem lehet valós. (Valós ψ az előbbihez hasonló nehézségre vezetne.) Ezek szerint az energiának és az impulzuskomponenseknek *nincsenek valós sajátfüggvényeik.* Ugyanez kimutatható a pályaimpulzusmomentum és a spin komponenseiről is.[1] Ezek után felmerül a kérdés: Hogyan alkalmazhatjuk valós állapotfüggvények esetén a kvantummechanika módszereit?

Dirac egy dolgozatában[2] felveti azt a lehetőséget, hogy az elektromágneses tér sohasem lehet energiasajátállapotban. Ez a megoldás nehezen látszik elfogadhatónak, hiszen energiaméréssel a rendszer mindig energiasajátállapotba hozható. (Az energiamérés lehetőségéről való lemondás elvi problémákra vezetne.)

Egy másik lehetőség az volna, hogy a valós függvényekből összevonással komplex állapotfüggvényeket alkossunk. Többek közt megpróbálkoztak azzal, hogy a valós elektromágneses térerősségekből komplex állapotfüggvényeket képezzenek a következő módon:

$$\psi_1 = \mathfrak{H}_x + i\mathfrak{E}_x,\quad \psi_2 = \mathfrak{H}_y + i\mathfrak{E}_y,\quad \psi_3 = \mathfrak{H}_z + i\mathfrak{E}_z.$$

Így a kvantummechanika módszerei alkalmazhatókká válnak, meghatározhatjuk az elektromágneses teret képviselő fotonnak a spinjét etc. [3], [4], [1]. E módszer hiányossága az, hogy a Lagrange-függvény használatán alapuló kanonikus eljárást ilyen összevont állapotfüggvények esetén nem sikerült alkalmazni.

Ha az eredeti valós állapotfüggvények használatánál akarunk megmaradni, akkor le kell mondanunk a kvantummechanika fenti módszereiről. Nem tűzhetjük ki célul magunk elé, hogy meghatározzuk egy valós állapotfüggvénnyel leírt *részecskének* az energiáját, spinjét, stb. Megmarad azonban annak a lehetősége, hogy a térkvantálás („második kvantálás") használatához folyamodjunk. A térkvantálás során az erőteret leíró potenciálokat is operátoroknak tekintjük; nem várjuk el tőlük, hogy kielégítsék a nehézségeket okozó (1), (4) egyenleteket. Az elektromágneses tér esetében a térkvantálás eredményesnek bizonyult. Gondolatmenetünk elvezet *N. Kemmer* feltevéséhez.[5] *Kemmer* szerint az elemi *részecskéket komplex* állapotfüggvényekkel írjuk le. Ezeknél a jelen dolgozat első részében tárgyalt „első kvantálás" használható. Azoknál az elektromosan semleges objektumoknál, melyek állapota *valós* függvényekkel (potenciálokkal) adható meg, az *erőtér-jelleg* az elsődleges. Az utóbbiaknál a

„második kvantáláshoz“, a *tér* kvantálásához kell folyamodnunk. A kvantálás vezethet ugyan az energia és más mennyiségek diszkrét értékeire, de ez nem jelenti azt, hogy az energiakvantumok a térben lokalizálhatóak, tehát részecskejelleggel rendelkeznek. Ezt az elképzelést a tapasztalat is megerősíti. Az elektromágneses tér energiakvantumát, a fotont inkább az egész térben eloszló oszcillátornak kell tekintenünk, mint részecskének.[6] Semmi jel nem mutat arra, hogy a szintén semleges neutrinó több részecske-tulajdonsággal rendelkezne, mint a foton. Nem lokalizálható a térben a „gravitációs hullámok“ által szállitott energia sem.[7]

Kérdéses maradt a semleges részecskék közül a neutronok és a semleges mezonok helyzete. Ezek állapotfüggvényét és dinamikai egyenletét biztosan nem ismerjük, nem tudjuk, hogy az őket leíró ψ valós-e vagy komplex. (Ezen felül mindkét részecske instabil, más részecskékre esik szét. Nem tudjuk, hogy az elmondottak, melyek nem összetett részecskékre vonatkoztak, reájuk milyen mértékben érvényesek.) Mivel a neutron részecske-volta valószínű, állapotfüggvényét komplexnek kell feltételeznünk. (Ezt megköveteli a mértékinvarencia is, hiszen a neutron mágneses momentuma révén közvetlen kölcsönhatásban áll az elektromágneses térrel[8].) A komplex állapotfüggvény feltételezése azzal az elképzeléssel támasztható alá, hogy a neutron az elektromosan töltött protonnak egy más kvantumállapota. Ha a semleges mezonok és töltött mezonok között hasonló szoros kapcsolat áll fenn, akkor a semleges mezonok is részecskéknek tekinthetők. Ha azonban a semleges mezonok önálló, elektromos sajátságokkal nem rendelkező objektumok, állapotfüggvényüket valósaknak kell feltételeznünk. Ebben az esetben az elektromágneses térhez hasonlóan inkább erőtérnek, mint részecskének tekintendők. *Möller* már 1939-ben felvetette annak lehetőségét, hogy a semleges mezontér is oszcillátorok szuperpoziciója, melynek kvantált szerkezete csak a térkvantálás következménye, nem pedig a részecske-jelleg megnyilvánulása.[9]

A problémákat inkább felvetni, mint megoldani kívántam. Az elemi részek kvantummechanikájának kidolgozása még nem tekinthető befejezettnek. A részecske-erőtér-alternatívában tisztázatlan a nyugalmi tömeg véges vagy zérus voltának szerepe. Még sok nyitott probléma van, melyek felvetése néha megkönnyítheti a további fejlődést.[10]

Budapesti Eötvös Loránd Tudományegyetem Fizikai Intézete.

IRODALOM

[1] *Marx György,* Hungarica Acta Physica, *I.* évf. *6.* szám (1949).
[2] *P. A. M. Dirac,* Proc. Roy. Soc. *A. 180,* (1942), 15.
[3] *G. Rummer,* Zeitschrift für Physik *65,* (1930), 244.
[4] *G. Moliere,* Annalen der Physik *VI.* Series *6,* (1949), 146.
[5] *N. Kemmer,* Proc. Roy. Soc. *A. 173,* (1939), 91.
[6] *W. Heitler,* The Quantum Theory of Radiation, (1936), 63.
[7] *A. Einstein,* Berliner Berichte (1916), 448.
[8] *A. Sommerfeld,* Atombau und Spektrallinien II., (1939), 722.
[9] *M. Möller,* Nature, *142,* (1939), 290.
[10] E dolgozat megjelent: Acta Physica Hungarica, *1.* (1951), 104.

A NULLAPONTMOZGÁS REALITÁSÁNAK PROBLÉMÁJA A KVANTUMMECHANIKÁBAN

NEUGEBAUER TIBOR

Bemutatta Novobátzky Károly r. tag az 1950. december 12-én tartott felolvasó ülésen

A lineáris harmonikus oszcillátor klasszikus differenciálegyenletéből

$$m\ddot{x} = -k^2 x \tag{1}$$

a potenciális energiára az $\int_0^x k^2 x\,dx = \frac{1}{2}k^2x^2$ kifejezést kapjuk és ezt a Schrödinger-féle hullámegyenletbe

$$\Delta\psi + \frac{8\pi^2 m}{h^2}(E-V)\psi = 0 \tag{2}$$

helyettesítve a

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2}\left(E - \frac{1}{2}k^2x^2\right)\psi = 0 \tag{3}$$

differenciálegyenletre jutunk. A k^2 konstanst, mint ismeretes, kifejezhetjük az oszcillátor klasszikus frekvenciájával, mivel az (1) differenciálegyenlet megoldásából

$$4\pi^2\nu_0^2 = \frac{k^2}{m} \tag{4}$$

következik és azért $k^2 = 4\pi^2\nu_0^2 m$, ahol ν_0 az oszcillátor (klasszikus) frekvenciája.

A (3) differenciálegyenlet megoldása, mint ismeretes, a következő sajátértékeket szolgáltatja:

$$E = h\nu_0\left(n + \frac{1}{2}\right), \tag{5}$$

ahol n egy egész szám. A Bohr-elmélet evvel szemben az

$$E = h\nu_0 n \tag{6}$$

eredményre vezet, tehát a kvantummechanika szerint az a lényeges különbség lép fel, hogy az oszcillátornak még az alapállapotban ($n=0$) is marad

$$E_0 = \frac{1}{2}h\nu_0 \tag{7}$$

energiája, amelyet tőle semmi módon nem lehet elvenni.

Ennek az u. n. nullapontenergiának a tényleges felléptét azonban, amint ismeretes, kísérleti úton csak elég nagy nehézségek leküzdésével lehet igazolni. Ennek elsősorban is az az oka, hogy mindig csak energiakülönbségeket tudunk mérni és ezek képzésénél a nullapontenergia természetesen kiesik. Ennek folytán más módszerekre vagyunk utalva és az eziđőszerint legjobb ilyen eljárást a szilárd testeken végzett röntgeninterferometrikus mérések szolgáltatják. Az egy kristály által létesített diffrakciós kép struktúrája ugyan nem változik a nullapontmozgás fellépte miatt, a szórt fény intenzitása azonban más lesz. Ha az u. n. atomalakfaktort elméleti úton kiszámítottuk, (pl. a Hartree-módszer alapján meghatározott töltéseloszlásból egy atomon belül) akkor ennek a teoretikus atomalakfaktornak a mérési eredményekből levezetettől egy kissé különbözőnek kell adódnia, mivel a nullapontmozgás az utóbbi esetben a töltéseloszlást az atommag környezetében még tovább elkeni.[1] Képletben kifejezve az ismert egyenlet

$$fD = fe^{-M}, \tag{8}$$

ahol $D = e^{-M}$ a Debye-féle hőmérsékletfaktor, szolgáltatja az atomalakfaktor látszólagos megváltozását a hőmozgás révén. M itten a nullapontmozgás hatását is tartalmazza. *James, Brindley* és *Wood*[2] igen gondos alumíniumegykristályokon végzett mérései tényleg egyértelműen igazolták a nullapontmozgás valóságos létét. Hasonló módon igazolták *James* és *Brindley*[3] sylvinkristályoknál, *Shonka*[4] *NaF*-nál, *James, Waller* és *Hartree*[5] kősónál és *Rusterholz*[6] *Ag*, *Pt* és *Au* fémnél ezen jelenség reális voltát.

Lényegileg ugyanezen az elven lehet igazolni a nullapontmozgás jelenlétét elektrondiffrakciós kísérletekkel is és ez elsőízben *Degard* és *van der Grinten*[7]-nek sikerült. A nevezett szerzők széntetraklorid elektronszórását vizsgálták gázállapotban.

Egy további ilyen módszer lenne a szilárd anyagok mért rácsállandóját a tisztán elméleti úton számítottal összehasonlítani, mivel a pozitív nullapontenergiát a negatív rácsenergiához algebrailag kell hozzáadni és ez a rácsállandó megnagyobbodására vezet. A kristályrácsok dinamikájának az elmélete azonban még egyáltalában nem annyira fejlett, hogy olyan pontos eredményeket tudna szolgáltatni, amelyekből egy ilyen várt kicsiny különbség tényleges felléptét határozottan meg lehetne állapitani.[8] Egészen hasonlóak a viszonyok kétatomos molekulák számított és mért magtávolainak összehasonlításánál. Ugyanígy elméletileg lehetséges lenne ilyen molekulák disszociációs energiájának a számított és a mért értékeit összehasonlítani és ilyen módon a nullapontenergia létét igazolni. Azonban az elmélet általában még itt sem szolgáltat az ezen összehasonlításhoz szükséges kielégítően pontos értékeket.

Egy igen érdekes bizonyítéka a nullapontenergia tényleges felléptének azonban az a már kísérletileg igen jól megalapozott tapasztalat, hogy a *He* normális nyomáson még a legmélyebb hőmérsékletek alkalmazása esetén sem vihető át a szilárd halmazállapotba, mivel egy nemesgázkristályban pusztán a van der Waals-féle erők okozzák a kohéziót és ezek a *He* esetében (mivel ezen atomnak csak két elektronja van) már nem képesek a nullapontmozgással szemben egy szilárd rácsot összetartani. Csak igen nagy nyomás alatt vihető a folyékony hélium át egy olyan állapotba, amelyet bizonyos szempontból „szilárd"-nak nevezhetünk, amint ezt az ilyen irányú kísérletek igazolják is. A további módszerek a nullapontenergia létének a kimutatására, mint pl. a sávos spektrumok elméletéből nyertek, csak sokkal kevésbbé megbízhatóak.

Egy igen érdekes körülmény azonban, hogy az elektromágneses sugárzás esetében a nullapont-energia fellépése problematikus. Ha t. i. a szokásos módszer szerint kiszámítjuk, hogy egy üregben milyen álló hullámok keletkezhetnek és azután minden ilyen hullámmozgáshoz rendelünk egy oszcillátort, amelyre a kvantummechanikát alkalmazzuk, akkor persze itt is fel kell lépnie a nullapontenergiának. Ilyen oszcillátort azonban egy üreghez végtelen sokat kell rendelnünk, mivel álló hullám is végtelen sok van (a hullámhossz minden további csökkenésénél t. i. újabb lehetséges álló hullámmozgásokra jutunk) és ennek folytán a nullapontenergia is végtelen nagy lenne. Ez már persze önmagában véve is abszurdum és még képtelenebbé válik, ha meggondoljuk, hogy a relativitástan szerint egy végtelen nagy energiához egy végtelen nagy tömeg is tartozik, stb.

Leszögezhetjük tehát azt a tényt, hogy az eddigi kísérleti tapasztalatok szerint anyagi részek esetében a nullapontenergia határozottan fellép, míg az elektromágneses sugárzásnál ez kérdéses. Legújabb vizsgálatok mégis amellett szólnak, hogy a nullapontenergia az elektromágneses tér esetében is fellép. A modern mikrohullámtechnika segítségével *Lamb* és *Retherford* (Phys. Rev. *72* (1947) 241) kimutatták, hogy a H $2S$-nívója a Sommerfeld képletéből számított értékénél egy kissé magasabban fekszik. Ez az ú. n. Lambshift elméleti megfontolások alapján az elektromágneses tér nullapontrezgésének az elektronra való hatásától származik. Előbbi megfontolásaink alapján ugyan ennek is végtelen nagynak kellene adódnia, a Dirac-féle pozitronelmélet bevezetésével azonban az itt fellépő integrál konvergenssé válik és az ilyen módon számított eltolódás a mérttel a kísérleti hibák határán belül egyezik. (Ld. pl. T. *Welton*, Phys. Rev. *74* (1948) 1157). A divergencianehézségek tehát legalább ezen egy esetben ki vannak küszöbölve. Mindezen kérdések szorosan összefüggnek a Tomanoga—Schwinger-féle ú. n. renormalizálási módszerrel.

Egy további érdekes, ezen problémával kapcsolatos kérdés az, hogy vajjon ezen nullapontmozgásnál egy tényleges rezgőmozgásról (vagy legalább is valamilyen statisztikai ingadozásról) van-e szó, vagy pedig pusztán egy „elkentség" lép-e fel. Elméleti okok határozottan az utóbbi felfogás mellett szólnak, mivel azonban az újabb időben megkísérelték egyes kísérleti eredményeket az első felfogás segítségével értelmezni, azért foglalkoznunk kell ezen kérdéssel és ez tulajdonképpen ezen tanulmány tárgya.

A nullapontmozgás tényleges fellépésének eddig említett kísérleti bizonyítékai t. i. a felvetett kérdésre vonatkozólag nem adnak választ, mert ezek mindig olyan jelenségekre vonatkoznak, amelyeknél csak a nullapontmozgás hatásának a középértékét mérjük, tehát az eredményük független attól, hogy egy tényleges rezgőmozgásról vagy csak egy elkentségről van-e szó. Másrészt határozottan a tényleges rezgés feltevése ellen szól az a körülmény, hogy állandó dipolussal rendelkező molekuláknak ezen esetben korrespondencia-szerűen ki kellene sugározniuk a nullapontenergiájukat. Persze ezen okoskodást még nem tekinthetjük szigorú bizonyítéknak, mivel ezek a korrespondencia-elven alapuló meggondolások nem mindig megbízhatóak. Érdekes még evvel kapcsolatban megemlíteni, hogy egy lineáris oszcillátor sajátfüggvénye az alapállapotban

$$\psi_0 = e^{\frac{2\pi^2 m \nu_0}{h} x^2} \tag{9}$$

éppen a Gauss-féle hibafüggvény.

A felvetett probléma megoldása céljából másrészt a fényszórás és az elektromos ellenállás elméletére lehetne hivatkozni. Amint ismeretes, ideálisan rendezett kristályrácsok egyáltalában nem szórnák a (látható) fényt és azonkívül ilyen fémrácsoknak egyáltalában nem is lenne elektromos ellenállásuk, mindkét jelenség felléptét csak a rácselemek hőrezgései és azonkívül rácshibák és szennyezések okozzák. Ha tehát az utóbbiaktól eltekintünk, akkor mint az említett két jelenség oka csak a rácspontok hőmozgása (rezgése) marad meg, mely az ideális rendet minden időpillanatban elrontja. Ha tehát a nullapontmozgást teljesen elkentnek tekintjük, akkor ez a rácsban semilyen rendezetlenséget sem okoz, hanem csak a rácspontok egyenletes elkentségét. Ezen felfogás szerint tehát úgy a fényszórásnak, mint az elektromos ellenállásnak egy ideálisan hibátlan kristályrács esetében az abszolut zérusponton el kellene tűnnie. Ha viszont a nullapontmozgás egy tényleges rezgőmozgásból (vagy akár valamilyen statisztikai ingadozásból) állna, akkor az ideális rend ezen okból minden pillanatban el lenne rontva és ezért az abszolút zérusponton egy véges nagyságú maradék fényszórásnak és maradék ellenállásnak kellene fellépnie. Azonban egy igen nehéz probléma lenne mindkét esetben a kérdést kisérleti úton eldönteni. A fényszórásért olyan nagy mérvben a szennyezések felelősek, hogy még normális hőmérsékleten sem könnyű a termikus rezgések hatását kimutatni. Hasonlóan igen nehéz lenne az elektromos ellenállás elméletét egy kisérleti döntés céljaira felhasználni; a várt effektusnak ugyan elég nagynak kellene lennie, az elektromos ellenállás kvantummechanikai elmélete evvel szemben még legnagyobbrészt csak kvalitatív eredményeket szolgáltatott, amihez a szupravezetésnek még megoldatlan problémája is járul.

Kétségkívül egy módszert szolgáltat azonban az itt felvetett probléma eldöntésére a gömbszimmetrikus molekulák fényszórásánál fellépő depolarizáció mérése. Jelöljük egy molekula főpolarizálhatóságait rendre b_1, b_2 és b_3-mal, akkor a fényszórásnál fellépő depolarizáció fokára a Langevin-Born-Gans-féle orientálódási elméletből a következő ismert képlet adódik[9]:

$$\Delta = \frac{I_x}{I_z} = \frac{2(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 - b_1 b_2 - b_2 b_3 - b_3 b_1)}{4(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) + b_1 b_2 + b_2 b_3 + b_3 b_1}. \tag{10}$$

Mivel gömbszimmetrikus molekuláknál $b_1 = b_2 = b_3$, (10)-ből a $\Delta = 0$ eredményt kapjuk, a depolarizáció tehát eltűnik. Ha azonban tekintetbe vesszük a nullapontmozgást, akkor amíg ezt teljesen elkentnek tesszük fel, a kérdéses molekula minden időpillanatban szigorúan gömbszimmetrikus marad, tehát Δ eltűnik. Ha azonban feltesszük, hogy a nullapontmozgás egy tényleges rezgésből (vagy bármely más mozgásból) áll, akkor a gömbszimmetria minden pillanatban el van rontva és ezért Δ-nak véges értéke lesz. Mivel továbbá a molekula a gyors fényrezgésekre pillanatnyilag reagál, azért a részeinek a lassú hőrezgései (amilyen nagyságrendű különben a nullapontrezgés is lenne) fölött ez a jelenség nem közepelődik ki. A depolarizáció t. i. nem egy előjeleffektus; a gömbszimmetriától való bármely eltérés csakis pozitív effektust létesíthet. (Negatív nem létezik.)

Egy ideális anyag (gáz) ezen jelenség vizsgálatára a metán. Ezen molekulának a rezgésfrekvenciái ugyanis a hidrogénatomok kicsiny tömegei miatt olyan magasan fekszenek, hogy normális hőmérsékleten praktikus értelemben véve csakis a nullapontmozgás marad meg. Tényleg a legtöbb mérési eredmény arra mutat, hogy a mégis fellépő igen kicsiny depolarizáció a Raman-effektuson kívül csak szennyezésektől és elkerülhetetlen kísérleti hibáktól származik. Sokkal kevésbbé volna alkalmas ezen kérdés eldöntésére a CCl_4, amelynél a klóratomok nagy tömegei miatt a molekula rezgésfrekvenciái már igen alacsonyan fekszenek és ezért már normális hőmérsékleten is észrevehetően gerjesztve vannak. Tényleg ennél a gáznál kísérleti úton a szórt fénynek egy mérhető depolarizációját állapították meg.

Másrészt megpróbálták az egyes szerzőktől a CH_4-nél mért nagyobb depolarizációt egy a nullapontmozgásnak megfelelő tényleges rezgő mozgásra visszavezetni és érdekesképpen ezen felfogás mellett szólna az az ismert (a Langevin-Born-Gans-féle orientálódási elméletből következő) összefüggés a depolarizáció foka (Δ) és a kerrkonstans (K) közt, amely szerint[10]

$$K = \frac{3}{2kT} \frac{(n_\infty - 1)(n-1)}{\pi N} \frac{\Delta}{6 - 7\Delta}. \tag{11}$$

Dipolusnélküli molekulák kerrkonstansára viszont ezen elméletből

$$K = \frac{n_s - n_r}{n} \frac{1}{E^2}$$

$$= \frac{\pi N}{15kT} \{(a_1 - a_2)(b_1 - b_2) + (a_2 - a_3)(b_2 - b_3) + (a_3 - a_1)(b_3 - b_1)\} \tag{12}$$

következik[11], ahol a_1, a_2 és a_3 a kérdéses molekula statikus (állandó elektromos térrel szemben fellépő) főpolarizálhatóságait jelentik és a többi szimbólumnak a szokásos jelentése van. Egy jól megalapozott kísérleti tapasztalat szerint a metánnak egy véges nagyságú kerrkonstansa van, amely olyan nagyságrendű, mint általában a dipólust nem tartalmazó, de nem is gömbszimmetrikus molekuláké. Ebből (11) alapján az következne, hogy a metánnál egy véges nagyságú depolarizációnak is kellene fellépnie, ami egy további bizonyítéka lenne annak, hogy a nullapontmozgásnál egy tényleges rezgőmozgásról van szó.

A (12) képlet szerint gömbszimmetrikus molekulák esetében a kerrkonstans ugyanúgy eltűnik, mint a szórt fény depolarizációja. A kerrkonstans mérése azonban azon kérdés eldöntésére, hogy egy molekula tényleg gömbszimmetrikus-e, távolról sem annyira alkalmas, mint a depolarizáció fokának a mérése, mivel elektromos kettősentörést nem csak az orientálódási elméletből levezetett anizotropiatag, amelyet (12) képletünk ad meg, idéz elő, hanem azonkívül egy más jelenség is, amely az eredeti Voigt-féle elméletnek felel meg. Ez az u. n. Voigt-féle része a Kerr-effektusnak azonban általában két nagyságrenddel kisebb, mint az anizotropiatag és azért kivételes esetektől eltekintve, elhanyagolható. A kerrkonstans ezen különböző fizikai okoktól származó tagjai a következőképpen jönnek létre:. Ha a molekulának kész dipólusmomentuma van, akkor ez igyekszik beállni a Kerr-kondenzátorban uralkodó állandó elektromos térintenzitás irányába és ennek révén a kérdéses anyag kettősentörővé válik, mint egy optikailag egytengelyű kristály, ez a kerrkonstansnak az ú. n. dipolustagja, amelyre azonban a továbbiakban nem lesz szükségünk. Ha viszont a molekulának nincsen is állandó dipólusmomentuma, az említett konstans elektromos tér azért polározni fogja a molekulát, tehát elektromos momentumot indukál benne és ennekfolytán igyekszik beállítani a molekulát úgy, hogy a legkönnyebb polarizálhatóságának az iránya a térirányba essék. Természetesen ez a jelenség is okoz egy elektromos kettősentörést és ez szolgáltatja a kerrkonstans ú. n. anizotropiatagját, melyet (12) fejez ki. Az említett két tag a Langevin-Born-Gans-féle orientálódási elméletből következik. Mivel továbbá a termikus mozgás minden rendeződésnek ellene hat, azért az említett két tag a hőmérséklettől függ. Ezenkívül azonban megfelelően a Stark-effektusnak az állandó elektromos tér befolyásolja a molekulák sajátfrekvenciáit és ezenkívül a hozzájuk tartozó színképvonalak intenzitásait is. *W. Voigt*[12] eredetileg ezen az elméleti alapon vélte értelmezhetni az egész Kerr-effektust. Ma már tudjuk, hogy ez nem lehetséges, mert amint már említettük, a Voigt-féle tag még az anizotropiatagnál is általában két nagyságrenddel kisebb.

A kvantummechanika az anizotropiatagra a következő képletet szolgáltatja:

$$K_A = \frac{4\pi N}{hS_0\bar{n}^2}\sum_{jm} e^{-\frac{W_0(nj)}{kT}} \frac{1}{kT} \sum_{\substack{n \neq n' \\ j'}} \frac{|P_{0z}(njm;n'j'm)|^2}{h\nu(n'j';nj} \times$$

$$\times \left\{ \sum_{n'j'}^{\pi} \frac{\nu_0(n'j';nj)|P_{0z}(njm;n'j'm)|^2}{\nu_0^2(n'j';nj)-\nu^2} - \sum_{n'j'm'}^{\sigma} \frac{\nu_0(n'j';nj)|P_{0r}(njm;n'j'm')|^2}{\nu_0^2(n'j;nj)-\nu^2} \right\}. \quad (13)$$

Itten $\nu(n'j';nj)$ a sajátfrekvenciákat és $P(njm;n'jm')$ a hozzájuk tartozó (a kérdéses kvantumátmenetnél fellépő) momentumokat jelenti, ν a beeső fény frekvenciája és az összes többi szimbólumnak a szokásos értelme van. Csekély elhanyagolások segítségével igazolható, hogy (13) (12)-be vihető át, amiből egyben az ott álló klasszikus polarizálhatóságok kvantummechanikai értelmezését kapjuk.

A Voigt-elméletnek megfelelő tagokra viszont a kvantummechanikából a következő kifejezést kapjuk:

$$K_\nu = \frac{4\pi N}{hS_0\bar{n}^2}\sum_s e^{-\frac{W_0 s}{kT}}\Big\} - \Big[\sum_{s'}^{\pi} \frac{\nu_0^2(s's)+\nu^2)\nu_2(s's)|P_{0z}(ss')|^2}{(\nu_0^2(s's)-\nu^2)^2} -$$

$$-\sum_{s'}^{\sigma} \frac{\nu_0^2(s's)+\nu^2)\nu_2(s's)|P_{0x}(ss')|^2}{(\nu^2(s's)-\nu^2)^2}\Big] +$$

$$+\Big[\sum_{s'}^{\pi} \frac{\nu_0(s's)\{P_{0z}(ss')P_{2z}(s's)+P_{0z}(s's)P_{2z}(ss')\}}{\nu_0^2(s's)-\nu^2} -$$

$$-\sum_{s'}^{\sigma} \frac{\nu_0(s's)\{P_{0x}(ss')P_{2x}(s's)+P_{0x}(s's)P_{2x}(ss')\}}{\nu^2(s's)-\nu^2}\Big]\Big\}. \tag{14}$$

Az írásmód egyszerűsítése végett itten az njm kvantumszámok helyett egyszerűen s-et írtunk.

Ha már most megbecsüljük az anizotropiatag (13) és a Voigt-féle tagok (14) nagyságrendjét[13] és tekintetbe vesszük, hogy $P(ss')$-nek az állandó elektromos térintenzitás szerinti sorbafejtésénél, amely

$$P(ss') = P_0(ss') + P_2(ss')E^2 + \dots \tag{15}$$

alakú, $P_2(ss')$ értékére a kvantummechanikai perturbációelmélet a

$$P_{2q}(ss') = \sum_{s''s'''} \frac{P_{0q}(ss'')P_{0z}(s''s''')P_{0z}(s'''s')}{h^2\nu(s''s')\nu(s'''s')} - \sum_{s''s'''} \frac{P_{0z}(ss''')P_{0z}(s'''s'')P_{0q}(s''s')}{h^2\nu(ss'')\nu(ss''')}$$

$$-\sum_{s''} \frac{P_{0q}(ss'')P_{0z}(s''s')P_{0z}(s's')}{h^2\nu^2(s''s')} + \sum_{s''} \frac{P_{0z}(ss'')P_{0z}(s''s'')P_{0q}(s''s')}{h^2\nu^2(ss')}$$

$$+\sum_{s''s'''} \frac{P_{0z}(ss'')P_{0z}(s''s''')P_{0q}(s'''s')}{h^2\nu(ss'')\nu(s''s''')} - \sum_{s''s'''} \frac{P_{0z}(ss'')P_{0q}(s''s''')P_{0z}(s'''s')}{h^2\nu(ss'')\nu(s'''s')} \tag{16}$$

kifejezést szolgáltatja, azt a meglepő eredményt kapjuk, hogy az anizotropiatag és a Voigt-féle tagok ugyanolyan nagyságrendűek. A Voigt-féle tagok nagy nagyságrendje annak a következménye, hogy ámbár dipólusnélküli molekuláknál a tiszta rotációs átmenetekhez tartozó momentumok ($P_0(ss')$) eltűnnek, azonban (16)-ban az első sorban olyan tagok is lépnek fel, amelyeknél a nevezőkben tiszta rotációsfrekvenciák állnak, anélkül, hogy az ezekhez tartozó átmeneti momentumok, (amelyek eltűnnek), lépnének fel a számlálóban. Mivel továbbá a rotációsfrekvenciák legalább is két nagyságrenddel kisebbek, mint az oszcillációs és elektronátmeneti frekvenciák, ezért látszólag olyan nagy nagyságrendűek a Voigt-féle tagok. Ha azonban tekintetbe vesszük (14) képletünk második sorában a spektroszkópi stabilitás tételét[14], amely szerint

$$\sum_{mm'} |f(nm;n'm')|^2 = \sum_{mm'} |f_0(nm;n'm')|^2, \tag{17}$$

vagyis (17)-et az $f=P$ esetre alkalmazzuk, akkor ebből az következik, hogy a (14) második részében fellépő két tag éppen lerontja egymást, mivel a számlálókban álló kapcsos zárójelben levő kifejezések $|P_z(ss')|^2$ ill. $|P_x(ss')|^2$ sorbafejtésétől származnak, tehát a Voigt-féle tagok nagy nagyságrendje csak látszólagos. Tényleg el lehet érni egy transzformáció segítségével, amely a nem teljes elfajzás esete kvantummechanikai tárgyalásának felel meg, azt, hogy, (16) első sorában a nevezőkben már csak oszcillációs és elektronátmeneti frekvenciák álljanak[15]. Ebből tehát az következik, hogy a Voigt-féle tagok tényleg két nagyságrenddel kisebbek, mint az anizotropiatag, amint azt a tapasztalat is igazolja.

Ha tehát a metánmolekula szigorúan gömbszimmetrikus, (még a nullapontmozgás tekintetbevétele esetén is, tehát ez az utóbbi tényleg egyenletesen el van kenve,) akkor a nála észlelt kerreffektusnak csak a Voigt-féle tagok lehetnek az okai. Ekkor azonban valamilyen módon igazolni kell tudni, hogy a spektroszkópiai stabilitás tétele ezen molekulánál valamilyen speciális okok folytán már nem érvényes, mert amint említettük, a CH_4 kerrkonstansa ugyanolyan nagyságrendű, mint más nem gömbszimmetrikus, de dipolusnélküli molekuláké. Ellenkező esetben tényleg az következne, hogy a nullapontmozgásnál egy valóságos rezgőmozgásról (vagy legalább is statisztikai ingadozásról) lenne szó.

Amint már említettük, a metánmolekula sajátrezgései a hidrogénatomok igen kicsiny tömegei miatt igen nagy frekvenciájúak és azért igen nagy energiájúak is, ennekfolytán tehát és ugyancsak a H-atomok kicsiny tömegei miatt is a sajátrezgéseknek igen nagy amplitudójúaknak kell lenniök. Másrészt ebből viszont az következik, hogy ezek már erősen anharmonikusak. Ez a minden nehézség nélkül a kvantummechanikába átvihető klasszikus gondolatmenet teljesen megmagyarázza azt, hogy a spektroszkópiai stabilitás tétele a metánnál már nem érvényes, tehát ezen gáznál tényleg fellép egy relative nagy Voigt-féle tag (a kerrkonstansban), amely minden további nélkül megmagyarázza a metánnál mért egész kerreffektust: vagyis egyáltalában nem kell azt feltenni, hogy a metánnak (a nullapontmozgástól származó tényleges rezgéstől előidézett) anizotropiatagja is lenne. Ha viszont ilyen anizotropiatag nem lép fel, akkor a (11) képletből nem lehet azt a következtetést levonni, hogy a metánnál a szórt fény tényleges depolarizációjának is fel kell lépnie, mivel ezen képlet a klasszikus orientálódási elméletből van levezetve és azért benne mint kerrkonstans csak az orientálódási elméletnek megfelelő anizotropiatag áll, (a Voigt-féle tagok nem). Tehát helytálló a legtöbb kísérletezőnek az a megfigyelése, hogy a metánnál mégis mért igen kis depolarizációnak csak másodlagos okai vannak.

Evvel tehát igazoltuk, hogy a tapasztalattal semmi ellentmondásra nem jutunk, ha feltesszük, hogy a nullapontmozgás nem egy tényleges mozgás, hanem pusztán egy „elkentség“, amint ezt az elmélet is legalább is igen valószínűvé tette. Viszont rögtön paradoxonokra vezetne az az elképzelés, hogy egy tényleges rezgésről vagy valamilyen tényleges statisztikai ingadozásról van szó.

Teljesség okából még meg akarjuk említeni, hogy egy gömbszimmetrikus molekulának még akkor sem lehetne egy véges anizotropiatagja, ha a nullapontmozgásnál egy tényleges rezgésről lenne szó. Egy molekula beállására a kerrkondenzátor állandó elektromos terében t. i. nyilvánvalóan ugyanolyan nagyságrendű időre lesz szükség, mint amekkora egy teljes rotációs körülfutás (a molekula egy teljes forgásának az) ideje. Másrészt az oszcillációs frekvenciák legalább két nagyságrenddel nagyobbak, mint a rotációs frekvenciák és ennekfolytán a molekulának nincsen ideje az oszcillációjának egy fázisában beállni az elektromos térhez, tehát egy orientálódási effektus (megfelelően a Langevin-Born-Gans-féle elméletnek) nem is jöhet létre. A fényszórásnál természetesen másképpen van, mivel ottan nem létezik beállás és a molekula ennélfogva a rezgéseinek minden fázisában pillanatnyilag reagálna a fényhullám gyors váltakozású elektromos terére, tehát ezen módon egy tényleges rezgést kétségkívül ki lehetne mutatni.

Budapesti Eötvös Loránd Tudományegyetem
Fizikai Intézete.

IRODALOM

[1] Pl. *M. v. Laue,* Röntgenstrahlinterferenzen. Leipzig. Akademische Verlagsgesellschaft. 1941. 185, 201 és 227.

[2] *R. W. James, G. W. Brindley* és R. *G. Wood,* Proc. Roy. Soc. London (A) *125,* (1929), 401.

[3] *R. W. James* és *G. W. Brindley,* Proc. Roy. Soc. London (A) *121,* (1928), 155.

[4] *J. J. Shonka,* Phys. Rev. *43,* (1933), 947.

[5] *R. W. James, I. Waller* és *D. R. Hartree,* Proc. Roy. Soc. London (A) *118,* (1928), 334.

[6] *A. Rusterholz,* Diss. Zürich 1931.

[7] *C. Degard, J. Piérard* és *W. van der Grinten,* Nature *136,* (1935), 142, *C. Degard* és *W. van der Grinten,* IIe Congrès National des Sciences. Bruxelles 1935. 653.

[8] *Th. Neugebauer* és *P. Gombás,* ZS. f. Phys. *89,* (1934), 480.

[9] Pl. *H. A. Stuart,* Molekülstruktur. Berlin. J. Springer 1934. 172.

[10] *H. A. Stuart,* l. c. 205.

[11] *H. A. Stuart,* l. c. 203.

[12] *W. Voigt,* Magneto- und Elektrooptik. B. G. Teubner, Leipzig 1908.

[13] *Th. Neugebauer,* ZS. f. Phys. *82,* (1933) 660. és *86,* (1933), 392.

[14] Pl. *J. H. van Vleck,* Theory of Electric and Magnetic Susceptibilities. Oxford. University Press 1932. 139.

[15] *Th. Neugebauer,* ZS. f. Phys. *86,* (1933), 392.

A KVANTUMELMÉLET STATISZTIKUS SOKASÁGA

NOVOBÁTZKY KÁROLY r. tag

Előadta az 1951. február 19-én tartott felolvasó ülésen

A modern tankönyv- és monográfiairodalom, melynek célja a kvantumelmélet megalapozása és interpretációja, egyértelműen a Born-féle statisztikus értelmezés álláspontjára helyezkedik. Eszerint a kvantumelmélet kijelentései nem egy kiszemelt részecskére vonatkoznak, hanem statisztikai átlagolás eredményei. Meglepő azonban, hogy magának a sokaságnak a megállapításával és az átlagolás módjával az irodalom nem foglalkozik. Ennek a problemának megoldását tűzi ki céljául a jelen dolgozat a nem relativisztikus elmélet keretén belül.

Ismeretes, hogy az anyagi pont mozgását kimerítően leírja a Hamilton—Jacobi-féle parciális differenciálegyenlet. Ha $S(x, y, z, t)$ a hatásfüggvény, $V(x, y, z, t)$ az adott potenciál, m a mozgó pont tömege, akkor az egyenlet a következő:

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2\right]+V=0. \qquad (1)$$

Az általános megoldás három integrációs konstánst tartalmaz: $S=S(x, y, z, t, a, b, c)$. Átmenetileg úgy gondoljuk, hogy a három állandót numerikusan rögzítettük. Legyen p a tömegpont impulzusa, $\mathfrak{V}=\frac{p}{m}$ a sebessége. Amint ismeretes, $p=\operatorname{grad} S$, tehát

$$\mathfrak{V}=\frac{1}{m}\operatorname{grad} S(x, y, z, t). \qquad (2)$$

Látható, hogy S sebességteret határoz meg, amennyiben a tér minden pontjához adott t időben sebességvektort rendel. Szemléletesen úgy gondolhatjuk tehát, hogy a téren m tömegű pontok halmaza áramlik át, melyet inkoherens folyadéknak tekinthetünk. $\frac{1}{m} S(x, y, z, t)$ játssza a sebességpotenciál szerepét. A mozgás örvény nélküli tiszta áramlás.

Közelfekvő gondolat, hogy a mozgó pontok halmazát olyan sokaságnak tekintsük, amelyre statisztikát építhetünk. A statisztikai sokaság legjellemzőbb mennyisége a ϱ sűrűség. Sűrűségnek fogjuk nevezni a köbcentiméterben foglalt tömegpontok számát. ϱ dimenziója tehát cm^{-3}. Az anyagmegmaradás megkívánja a kontinuitás egyenletének fennállását:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t}+\operatorname{div} \varrho \mathfrak{V}=0. \qquad (3)$$

A következőkben igen fontosnak bizonyul az a körülmény, hogy az (1) és (3) főegyenletek variációs elvből adódnak:

$$\delta\int\varrho\left\{\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2\right]+V\right\}dx\,dy\,dz\,dt. \tag{4}$$

ϱ variációja adja az (1) egyenletet, S variációja pedig a (3) kontinuitási egyenletet, ha tekintetbe vesszük (2)-t. Mivel ϱ feltétlenül pozitív, legyen $\varrho = A^2$, ahol A reális. (4) integranduszához kényelmi okokból még a 2 tényezőt függesztjük, úgy hogy a variációs elv a következő

$$\delta\int L\,dx\,dy\,dz\,dt = 0,$$

ahol a Lagrange-függvény

$$L = 2A^2\left\{\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^3+\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2\right]+V\right\}. \tag{5}$$

Lagrange függvénytől két dolgot kell megkövetelnünk. Egyfelől invariansnak kell lennie, másfelől $L\,dx\,dy\,dz\,dt$ dimenziója szükségképpen hatásjellegű. Mindkét követelmény teljesül. S és A a nem relativisztikus mechanikában invariáns skalárok, melyeknek dimenziója $g\,\mathrm{cm}^2\,\mathrm{sec}^{-1}$, ill. $\mathrm{cm}^{-3/2}$.

A statisztika felépítésének legnagyobb nehézsége S három határozatlan állandójában rejlik. A sebességtér és a rajta végzett átlagolások lényegesen függnek ezek értékeitől. Már pedig a mozgás egyedüli adata a V potenciál és feltétlenül meg kell kívánnunk, hogy tisztán ez határozza meg az átlagértékeket. Az egyedüli kivezető út, hogy nem általános, hanem reguláris megoldásokat kívánunk. Differenciálegyenletek reguláris megoldásai általában nem tartalmaznak határozatlan állandókat.

Érdekes, hogy itt a regularitás követelménye belső szükségletből fakad és nem önkényes hozzátoldás, mint a Schrödinger-féle elméletben. Találóan idézhető ezen a helyen *Joos*nak szép kijelentése, hogy a kvantummechanika az integrációs állandók nélküli mechanika.

A klasszikus mechanika azonban általánosságban nem tűri meg a ϱ sűrűség regularitását. Gondoljunk pl. az X tengelyben rezgő lineáris oszcillátorra. Ha a az amplitudót, ω a körfrekvenciát és E az energiát jelenti, akkor

$$S = \frac{E}{\omega}\left(\arc\sin\frac{x}{a}+\frac{x}{a}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right).$$

Az $S =$ konst. felületek az X tengelyre merőlegesek, a ponthalmaz áramlása az X tengellyel párhuzamosan történik. Az a pontmennyiség, mely másodpercenként egy áramcső f keresztmetszetén átmegy, az $f\mathfrak{V}_x$ térfogatot tölti be. A sebesség az amplitudó-határfelületek felé fokozatosan csökken és ott zérussá válik. A pontsokaság egyre kisebb teret foglal el, a sűrűség nő és a határfelületeken végtelenné válik. Nagyon sok mozgást ismerünk, melynek fordulópontja van, ahol tehát ugyanez következik be.

Ha nem akarjuk elejteni a Jacobi-féle statisztikus sokaság gondolatát, nincs más hátra, mint a klasszikus mechanika megváltoztatása. Mikor *Schrödinger* annak idején erre a lépésre elhatározta magát, optikai analogiákat használt fel útjelzőkként. Módszere nagyszerű eredményekre vezetett, de avval a nehézséggel járt, hogy a ψ hullámfüggvény fizikai jelentése nem adódott ki és hosszabb ideig függőben maradt. Itt nem akarjuk elhagyni a tiszta mechanika területét, hogy ezt a nehézséget elkerüljük. A vezérlő elv abban áll, hogy az (5) Lagrange-függvényt megengedett módon általánosítjuk. Figyelemreméltó, hogy ez az általánosítás nagy mértékben egyértelmű és a feltevések minimumával érhető el.

Világos, hogy (5) zárójeles kifejezésnek első négy tagja nem változtatható meg, mert különben S variációja nem szolgáltatja többé a kontinuitás egyenletét. Az egyedül megengedett változás egy T toldaléktag hozzáadásában áll, mely az említett okból nem tartalmazhatja S-et. T felépítésére rendelkezésre áll m, A és az A-ból alkotható differenciálvariánsok. Legegyszerűbb $(\mathrm{grad}\, A)^2$, mert csak másodrendű téregyenletekre vezet. Ennélfogva

$$T = A^{n_1} (\mathrm{grad}\, A)^{2 n_2} m^{n_3}. \tag{6}$$

T dimenziója szükségkép $g\,\mathrm{cm}^{-1}\,\mathrm{sec}^{-2}$, hogy $dx\,dy\,dz\,dt$-vel szorozva a hatás dimenzióját adja. Mivel $[A] = \mathrm{cm}^{-3/2}$, $(\mathrm{grad}\, A)^2 = \mathrm{cm}^{-5}$, $[m] = g$, látható, hogy (6) jobboldalán hiányzik az idődimenzió, mely a baloldalon fellép. Elkerülhetetlenül szükséges, hogy a jobboldalt egy univerzális konstans tényezővel kiegészítsük. Nagyon sok ilyen konstanst ismerünk, de mindegyiknek határozottan körülírt jelentése van és nem illik ide. Kivétel a Planck-féle $\hbar$. Más választást nem lehet megindokolni. $\hbar$ választásával (6) egyenlet dimenziókban felírva a következő:

$$g\,\mathrm{cm}^{-1}\,\mathrm{sec}^{-2} = (g\,\mathrm{cm}^2\,\mathrm{sec}^{-2})^{n_4} \mathrm{cm}^{-3/2 n_1} \mathrm{cm}^{-5 n_2} g^{n_3}.$$

Az összehasonlítás rögtön megadja, hogy

$$n_4 = 2,\ n_3 = -1,\ \frac{3}{2} n_1 + 5 n_2 = 5.$$

Ha teljesen valószínűtlen hatványokat kizárunk, akkor az utolsó egyenlet megoldása $n_1 = 0$, $n_2 = 1$. Így tehát

$$T = \frac{\hbar^2}{m} \left\{ \left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial A}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial A}{\partial z}\right)^2 \right\} \tag{7}$$

és a Lagrange-függvény

$$\begin{aligned} L = 2A^2 \left\{ \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2 \right] + V \right\} + \\ + \frac{\hbar^2}{m} \left[\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial A}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial A}{\partial z}\right)^2 \right]. \end{aligned} \tag{8}$$

Az eredő Euler-egyenletek a következők:

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2\right]+V-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\Delta A}{A}=0, \tag{9}$$

$$\frac{\partial A^2}{\partial t}+\frac{1}{m}\left(\frac{\partial A^2}{\partial x}\frac{\partial S}{\partial x}+\frac{\partial A^2}{\partial y}\frac{\partial S}{\partial y}+\frac{\partial A^2}{\partial z}\frac{\partial S}{\partial z}\right)+\frac{1}{m}A^2\Delta S. \tag{10}$$

(10) a kontinuitás egyenlete, (9) a Hamilton—Jacobi-féle mozgásegyenlet. Az egyedüli különbség (1)-gyel szemben az, hogy a külső erők V potenciáljához a pontsűrűségtől függő $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\Delta A}{A}$ potenciál járul hozzá. A fundamentális mozgástörvények változatlanok maradtak. Ezeket (9) karakterisztikus egyenletei fejezik ki:

$$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{m}\frac{\partial S}{\partial x},\quad \frac{d}{dt}\frac{sS}{sx}=-\frac{\partial}{\partial x}\left(V-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\Delta A}{A}\right),$$

vagy $\frac{\partial S}{\partial x}$ eliminálása után

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{\partial}{\partial x}\left(V-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\Delta A}{A}\right).$$

Igaz marad, hogy tömeg és gyorsulás szorzata a ható erővel egyenlő, csak az erő maga változott meg. Míg fizikai testeknél V gradienséhez a feszültségek divergenciája járul hozzá, addig itt sűrűségpotenciálból származnak új erők.

Kérdés már most, hogy az így általánosított mechanika megenged-e reguláris megoldásokat, tényleg integrációs állandók nélküli mechanikát nyertünk-e. A felelet igenlő. Foglaljuk össze A és S ismeretlen függvényeket a következő komplex függvénnyé:

$$\psi - A c^{\frac{i}{\hbar}S}. \tag{11}$$

Ekkor a (9) mozgásegyenlet és a (10) kontinuitási egyenlet összefoglalható a jól ismert Schrödinger-féle egyenletben:

$$\frac{\hbar}{i}\frac{\partial\psi}{\partial t}-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi+V\psi=0. \tag{12}$$

Ha az itt jelzett differenciálásokat ψ-nek (11)-beli alakján hajtjuk végre és az egyenlet reális és imaginárius részét külön-külön 0-sal tesszük egyenlővé, éppen a (9) és (10) egyenleteket nyerjük. A Schrödinger-egyenletről pedig köztudomású, hogy reguláris megoldásokat megenged.

Minden külön meggondolás nélkül kiadódik a Schrödinger-féle stacionárius egyenlet is. Ha ugyanis V nem függ t-től, akkor a klasszikus mechanika szerint $S=-Et+S_0(x,y,z)$, ahol E a mozgás energiaállandója. A megfelelő ψ-t (12)-be helyettesítve, az első tag $-E\psi$-vé válik. A pontsűrűség

$$\varrho=A^2=\psi^*\psi. \tag{13}$$

A (10) alatti kontinuitási egyenlet is átmegy a jól ismert alakba

$$\frac{\partial}{\partial t}(\psi^*\psi)+\operatorname{div}\frac{\hbar}{2im}(\psi^*\operatorname{grad}\psi-\psi\operatorname{grad}\psi^*), \tag{14}$$

ha a (11)-ből számított $S=\frac{\hbar}{2i}\lg\frac{\psi}{\psi^*}$ kifejezést helyettesítjük beléje. Világos, hogy a statisztikus sokaság egy adott helyén valamely pont megtalálásának valószínűsége annál nagyobb, minél nagyobb az illető helyen a pontsűrűség. $\psi^*\psi$-t tehát nem kell külön axiomatikusan találati valószínűségnek definiálni, ez az értelme magától értetődő. Hasonlóan vagyunk (14) egyenlet második tagjával, mely valószínűségi áramnak adódik.

A (12) Schrödinger-egyenlet lineáris és homogén, tehát operátoregyenletként fogható fel. Az összehasonlítás (1)-gyel megmutatja a mennyiségek és operátorok kapcsolatát:

$$\frac{\partial S}{\partial t}\sim\frac{\hbar}{i}\frac{s}{st},\quad \frac{\partial S}{\partial x}\sim\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\quad \text{stb.}\quad V\sim V.$$

Az eddigiek alapján megállapíthatjuk, hogy a Schrödinger-egyenlet nem talán egy részecskének, hanem a statisztikus sokaságnak klasszikus mozgását írja le. *A* következő fontos kérdés, hogyan kell ezen a sokaságon középértékelni. Valamely $F(x, p)$ fázisfüggvénynek klasszikus középértéke tudvalevőleg $\bar{F}=\frac{\int\varrho F dt}{\int\varrho dt}$, vagy ha a nevezőt 1-re normáljuk

$$\bar{F}=\int\varrho F dt=\int\psi^*\psi F dt. \tag{15}$$

Az átlagolásnak ez a módja itt teljesen hamis eredményekre vezetne. Az ok kézenfekvő. Hiszen a $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\Delta A}{A}$ sűrűségi potenciálnak hozzáadása a külső erők V potenciáljához teljesen megváltoztatja, mondhatnók, meghamisítja az erőviszonyokat. Vizsgáljuk pl. a lineáris oszcillátor egyik sajátfüggvényét:

$$\psi_n=e^{-\frac{\xi^2}{2}}H_n(\xi)e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t}\quad\left(\xi=\sqrt{\frac{mw}{\hbar}}x\right).$$

H_n Hermite-féle polinom. Mivel $e^{-\frac{i}{\hbar}Et}$ faktora reális, S csak a $-E_n t$ tagból áll. A $p_x=\frac{\partial S}{\partial x}$ impulzus eltűnik, a statisztikus ponthalmaz mozdulatlan, merev sokaság, melynek sűrűsége jobbra-balra gyorsan zérusra csökken. Ez az élettelen ponthalmaz szolgáljon statisztikai sokaságként a vibráló oszcillátor számára. A p_x impulzusnak és bármely hatványának középértéke a közönséges módon képezve természetesen zérus volna, holott az oszcillátorra $\overline{p_x^2}$ már a puszta szemlélet alapján nem az. Világos, hogy a mozgató erő megváltoztatása az átlagolás módjának megváltoztatását kívánja. Ennek a módnak megállapítása egyértelműen folyik abból az axiómából, mely szerint minden fizikai mennyiség csak saját értékeinek egyikét veheti fel. Ha tehát $F(x, p)$ mennyiség operátoralakja Ω, akkor

$$\Omega \varphi_n = \lambda_n \varphi_n \tag{16}$$

egyenletnek λ_n értékei szolgáltatják az F mennyiség lehetséges értékeit. φ_n olyan sokaságot ír le, melyben minden egyes tömegpontnak F-mennyisége (pl. impulzusa) egyenlő λ_n-nel. Most felhasználhatjuk a sokaságoknak azt a rendkívüli előnyét, hogy egyetlen ψ függvénnyel írhatók le. Fejtsük az adott ψ-t a φ_n-ek szerint sorba:

$$\psi = \sum a_k \varphi_k. \tag{17}$$

Első pillanatban azt hihetnők, hogy a_k fejezi ki azt a mértéket, mellyel a φ_k által jellemzett sokaság a ψ sokaságban képviselve van. De ha meggondoljuk, hogy a_k általában komplex és hogy nem az a_k-ra, hanem az $|a_k|^2$-ekre érvényes, hogy $\Sigma |a_k|^2 = 1$, akkor $|a_k|^2$-et fogjuk a képviselet mértékének tekinteni. φ_k-yal együtt természetesen λ_k is $|a_k|^2$ mértékben (vagy súllyal) van képviselve a ψ sokaságban. F mennyiség középértéke a ψ sokaságban tehát

$$\bar{F} = \sum |a_k|^2 \lambda_k. \tag{18}$$

Alkalmazzuk a (17) egyenletre az Ω operátort, akkor $\Omega\psi = \Sigma a_k \lambda_k \varphi_k$. (17) alapján érvényes még $\psi^* = \Sigma a_k^* \varphi_k^*$. Szorozzuk össze a két utolsó egyenletet és integráljunk a konfigurációs térre:

$$\int \psi^* \Omega \psi \, dt = \sum |a_k|^2 \lambda_k = \bar{F}.$$

Tisztán látható, hogy a középértékelés kvantumelméleti módja logikai folyománya (16)-nak.

Igen érdekes a vázolt statisztikus kvantumelmélet alkalmazása az alagút-effektusra. Gondoljunk a kezdőpontban az X tengelyre merőleges potenciálküszöböt, melynek átlépése U munkát követel. Essék erre a falra az X tengellyel párhuzamosan mozgó tömegpontok árama, tömegpontonként E kinetikai energiával. Jól ismeretes, hogy akkor a negatív x-ek terében a Schrödinger-egyenlet $\Delta\psi_1 + \frac{2m}{\hbar^2} E\psi_1 = 0$ és a pozitív féltérben $\Delta\psi_2 + \frac{2m}{\hbar^2}(E-U)\psi_2 = 0$. A megoldás

$$\psi_1 = e^{i\alpha x} + a e^{-i\alpha x}, \quad \psi_2 = b e^{\beta x}, \text{ ahol } \alpha = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} E}, \ \beta = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(U-E)}.$$

α mindenképpen reális, β akkor, ha $U > E$. Ezt az esetet szemeljük ki. a és b komplex állandók. Itt csak az alagúteffektus paradoxonjával akarunk foglalkozni. A pozitív térrészbe átjutott tömegpontok energiája $E = \frac{p^2}{2m} + U$, tehát p^2 negatív, a p impulzus imaginárius, ami képtelenség.

A magyarázatot csak a statisztikus sokaság adhatja meg, mely minden ízében klasszikus. Legyen a b együttható trigonometrikus alakja $b = re^{i\varphi}$, ahol

r és φ ugyancsak állandó. Akkor $\psi_2 = e^{\beta x} r e^{i\varphi}$. Látható, hogy $A_2 = e^{\beta x} r$ és $S_2 = \hbar\,\varphi = \text{konst.}$, tehát $p_x = \dfrac{\partial S_2}{\partial x} = 0$. A statisztikus sokaság nyugvó, merev ponthalmaz, akárcsak az oszcillátoré. Sűrűsége $\varrho = A_2^2 = e^{2\beta x} r^2$. Világos, hogy β négyzetgyökös kifejezését negatív előjellel kell venni, mikor is a sűrűség a potenciálküszöbtől számított távolsággal exponenciálisan csökken. A fontos az, hogy a sokaság tömegpontjainak kinetikai energiája zérus, $\dfrac{\Delta A_2}{A_2}$ pedig pozitív konstans: β^2. A (9) mozgásegyenlet, melyben $\dfrac{\partial S}{\partial t} = -E$, most így írandó

$$-E + U - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\Delta A_2}{A_2} = 0 \text{ vagy } E = U - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\Delta A_2}{A_2},$$

ami nyilván azonosság. A kinetikai energia egyáltalán nem negatív, hanem zérus, a reális energiaegyenleget pedig a sűrűségi potenciál biztosítja. Könnyen kimutatható, hogy a tömegpont rejtélyes felemelését a magasabb U energiaszintre ugyancsak a sűrűségi potenciál végzi.

Az eddigiekből kiviláglik, hogy a nem relativisztikus kvantumelmélet azonnal elveszti a klasszikustól elütő, sok tekintetben misztikus jellegét, ha a statisztikus sokaság alapján tárgyaljuk.

Budapesti Eötvös Loránd Tudományegyetem
Fizikai Intézete.

GEIGER—MÜLLER CSÖVEK HOLT IDEJÉVEL KAPCSOLATOS VIZSGÁLATOK

FENYVES ERVIN és HAIMAN OTTÓ

Bemutatta Jánossy Lajos r. tag az 1951. november 14-én tartott felolvasó ülésen

Bevezetés

Ismeretes, hogy a Geiger—Müller csövek (GM-csövek) egy részecske regisztrálása után bizonyos ideig nem képesek újabb ionizáló részecskéket jelezni. Ezt az időt holt időnek nevezzük és ennek nagysága sok szempontból igen fontos, különösen, amikor nagy intenzitású radioaktív sugárzásokat mérünk, továbbá antikoincidencia berendezéseknél. Ugyanis két egymásután következő részecske érkezése között a holt időnél nagyobb időnek kell eltelnie, hogy mind a kettő regisztrálható legyen. A holt idő nagysága felső határt szab a GM-csővel mérhető intenzitás nagyságának. Radioaktív méréseknél gyakran jelentős azon beütések száma, amelyeket a holt idő következtében nem regisztrálunk és ezért ezekre korrekciót kell alkalmaznunk. A korrekció kiszámításához természetesen szükségünk van a holt idő nagyságának pontos ismeretére.

Antikoincidenciába kapcsolt csöveknél fontos, hogy a cső minden ionizáló részre megszólaljon. Ha a cső holt ideje hosszú, előfordulhat, hogy jóllehet ionizáló rész halad át a csövön, mégsem regisztráljuk, és tévesen antikoincidenciának minősítjük az eseményt.

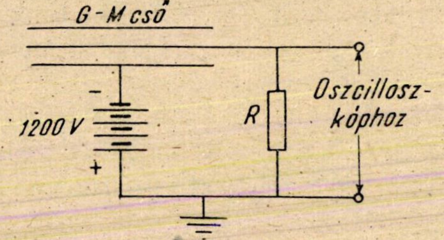
Méréseink és az ezzel kapcsolatos fejtegetéseink önkioltó csövekre vonatkoznak. Az általunk vizsgált csövek töltése 80 Hg mm argon és 10 Hg mm alkohol kioltókeverék volt. A csövek katódja 35 mm átmérőjű rézhenger, anódja pedig 0,1 mm átmérőjű wolfram huzal volt.*

GM-csövek kisüléseinek vizsgálata

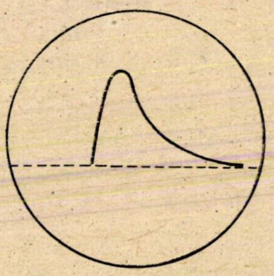
A GM-csövek működését kényelmesen vizsgálhatjuk oszcilloszkóp segítségével. Önkioltó GM-csövek vizsgálatánál célszerű az oszcilloszkóp bemenetét a méréseknél általánosan használt GM-cső kapcsolás ú. n. munkaellenállásának (a GM-csővel sorba kapcsolt R ellenállásnak) két végpontjára kötni. (1. ábra.) Így a GM-cső szálán fellépő feszültséglökések alakját elvben könnyen vizsgálhatjuk.

* A következő fejezetekben olyan problémákkal is fogunk részletesen foglalkozni, amelyek csak a magyarnyelvű szakirodalom szempontjából újak. Az általunk kikísérletezett új eredményeket pedig az utolsó fejezetben írjuk le, ahol a holt idő megrövidítéséről lesz szó.

Ha ionizáló részecskék haladnak a GM-csövön keresztül és azt megszólaltatják, akkor az oszcilloszkóp ernyőjén a 2. ábrához hasonló képek jelennek meg. A lökések statisztikus időeloszlása miatt ezek a képek az ernyő különböző helyein jelennek meg. Az egyes képek fényereje azonban kisebb annál, hogy a kisüléseket ily módon fényképezni, vagy beható módon vizsgálni lehessen. Ez a probléma úgy oldható meg, hogy az egyes kisülések képeit egy elektronikus berendezés segítségével az ernyő egy fix helyén egymásra fektetjük. Ezzel egyrészt a kép fényerejét nagymértékben megnöveljük, másrészt megszüntetjük a kép ugrálását is. Ez az eljárás azért lehetséges és eredményes, mert a GM-cső egyes lökéseinek nagysága és alakja közel egyforma.



1. ábra


2. ábra

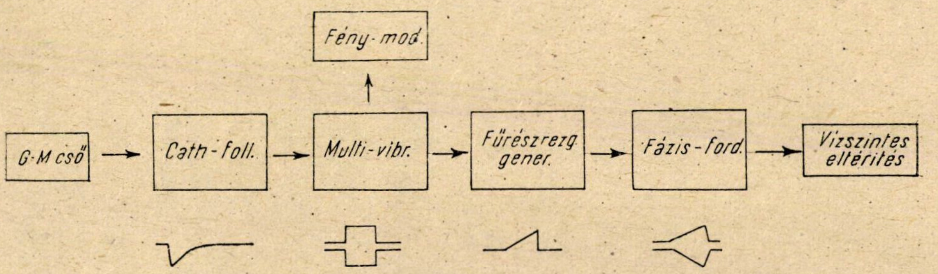
Elektronikus berendezés

A fenti cél elérésére egy speciális elektronikus berendezést (az ú. n. single-sweep-et) kellett megépíteni. Ezen berendezés működési elve a következő:

Az oszcilloszkópon az idő-tengely eltérése nem ismétlődik periódikusan, hanem csak olyankor következik be, amikor egy GM-csőben létrejövő kisülés elindítja. A katódsugár, amennyiben regisztrálni szándékozott impulzus nem érkezik be, az oszcilloszkóp ernyőjének szélén egy bizonyos pontban időzik. A világító pont csak akkor indul el egyenletes sebességgel vízszintes irányban, ha a GM-cső kisülése bekövetkezik. A cső szálán ilyenkor megjelenő feszültségváltozást az oszcilloszkóp függőleges eltérítőjére visszük rá és így a feszültségváltozás, mint az idő függvénye jelenik meg az oszcilloszkóp ernyőjén. Az időtengely végigfutása után a pont gyorsan visszatér eredeti helyzetébe és mindaddig ottmarad, míg egy következő impulzus be nem érkezik. Végeredményben az egyes jelek, egy pontból kiindulva, célkitűzéseinknek megfelelően egymásra rajzolódnak.

A feladat elektronikus megoldása a következőképpen történt (3., 4. ábra). A GM-cső utáni első fokozat egy cathode-follower volt, amelynek segítségével a GM-cső lökéseit torzítás nélkül energiában felerősítettük és egyben megakadályoztuk, hogy készülékünk további részei visszahassanak a számlálócsőre.

A cathode-follower fokozat után egy meredek elejű négyszög-impulzust létrehozó multivibrátor következett. A multivibrátor negatív négyszögét egy fűrészrezgés-generátor vezérlésére használtuk fel. E fűrészrezgés-generátor lényegében sorbakapcsolt ellenállásból és kondenzátorból áll. A kondenzátorral párhuzamosan egy nagyáramú elektroncsövet kötöttünk. Ha az elektroncsövet egy negatív impulzussal lezárjuk, az ellenálláson keresztül a kondenzátor exponenciálisan feltöltődik. Az exponenciális feszültségemelkedés egy másik cső segítségével lineárissá tehető. Ha az első elektroncsövet lezáró negatív impulzus megszűnik, e nagyáramú cső rövidre zárja és gyorsan kisüti a kondenzátort. Így a kondenzátor fegyverzetein fűrészalakú feszültséglökéseket kaptunk. Ezeket egy fázisfordító fokozat segítségével megfordítottuk és a két ellentétes fázisú fűrészrezgést az oszcilloszkóp vízszintesen eltérítő lemezpárjára vittük.



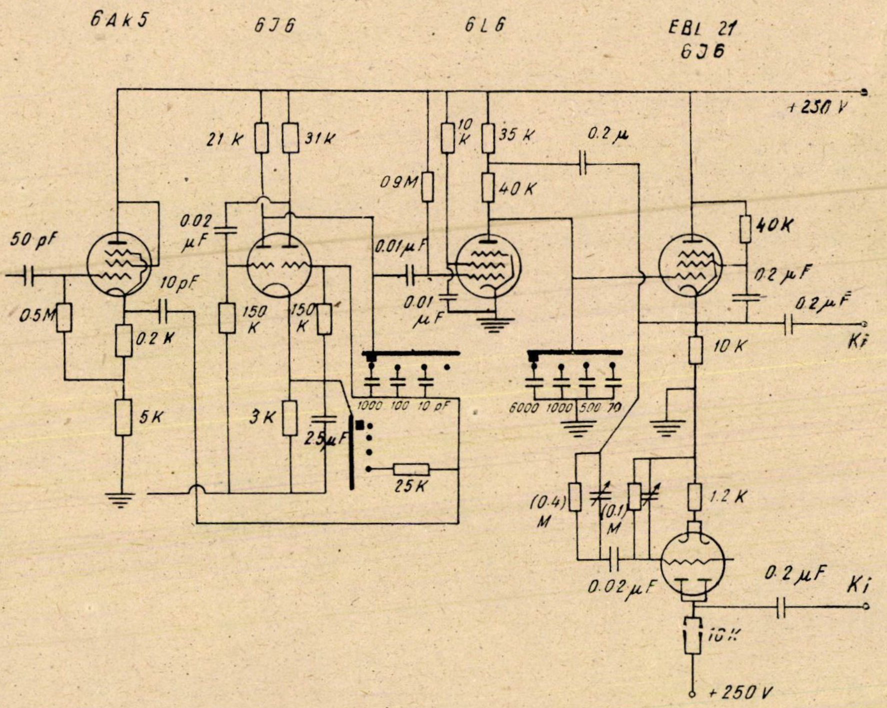
3. ábra

A multivibrátor másik csövének anódján jelentkező pozitív feszültséglökést az oszcilloszkóp fénymodulációjára használtuk fel. Ezt a pozitív négyszögjelet a katódsugárcső rácsára vezettük és az előfeszültség beállításával elértük, hogy az oszcilloszkóp fényfoltja csak az impulzus idejére villanjon fel. A készülék blokkdiagrammját a 3. ábra szemlélteti, a kapcsolás részleteit pedig a 4. ábrán láthatjuk.

Az általunk készített single-sweep időtengelyének hossza változtatható volt és rendre 400, 50, 15 és 5 mikrosec-ra volt beállítható. Így a legkülönbözőbb hosszúságú impulzusokat is kényelmesen vizsgálhattuk vele.

A single-sweep indulásának bizonyos késése van a beérkező impulzushoz képest, amelyet a kapcsolási elemek és elektroncsövek adatai szabnak meg. Ennek következtében a vizsgálandó jel kezdeti része nem jelenik meg az ernyőn. A cél természetesen az, hogy ezt a kezdeti részt is vizsgálni tudjuk, ami azzal érhető el, hogy a vizsgálandó jelet egy késleltető művonalon keresztül visszük a függőleges eltérítő rendszerre. A mi esetünkben ez a késés 0,2 mikrosec körüli volt és ennek megfelelő nagyságú késleltető vonalat kellett alkalmaznunk.

Ezen a helyen jegyezzük meg, hogy a single-sweep nemcsak GM-csövek és általuk vezérelt erősítők impulzusainak vizsgálatára, hanem tetszőleges statisztikus eloszlású jelenségek vizsgálatára is alkalmas és ennélfogva rendkívül széleskörű alkalmazási területe is van.



4. ábra

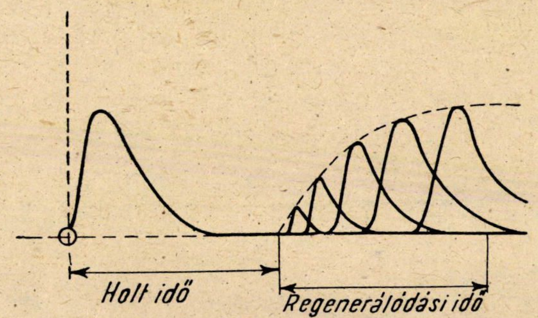
GM-csövek holt ideje és regenerálódási ideje

Ha egy GM-cső lökéseit single-sweep segítségével vizsgáljuk, az időtengelyt elég hosszúra választjuk és a beütésszámot radioaktív preparátum segítségével kellően megnöveljük, akkor egy vízszintes eltérítés időtartama alatt általában több kisülés következik be. Ezért azt várhatnók, hogy az oszcilloszkóp ernyőjén az első lökés után statisztikusan elosztva az időtengely egész hosszában lökések jelennek meg.

Ezzel szemben, ha a kísérletet elvégezzük, az 5. ábrán feltüntetett képet látjuk. Közvetlenül az első lökés után a cső egy bizonyos ideig, tehát nem regisztrálja az áthaladó részecskéket, de egy jól definiált idő eltelte után az eredetinél kisebb, növekvő amplitudójú lökések jelennek meg az ernyőn. Azt az időt, amely alatt a cső nem képes újabb részecskéket regisztrálni, a cső holt idejének nevezzük.

A single-sweep-pel működő oszcilloszkóp az időtengely megfelelő kalibrálása után módot nyújt a holt idő mérésére. Ugyanis ha felvételt készítünk az oszcilloszkóp ernyőjén megjelenő képről és hosszabb ideig exponáljuk, a holt idő után következő lökések egy elmosódott képet adnak, minthogy az ernyő különböző helyeire esnek. Ezen elmosódott képnek éles körvonala van és ez megfelel a lökések burkoló görbéjének. Az éles burkoló görbe segítségével pontosan megállapítható, hogy hol kezdődnek az első kisülés utáni lökések és így a holt idő pontosan megmérhető.

A holt idő eltelte után egyre növekvő amplitudójú lökések jelennek meg az oszcilloszkóp ernyőjén és egy bizonyos idő után elérik az eredeti lökés amplitudójának nagyságát. Ezt az időt a cső regenerálódási idejének nevezzük. A holt idő és regenerálódási idő eltelte után a cső ismét eredeti állapotába jutott vissza. A single-sweep-pel vezérelt oszcilloszkóp segítségével természetesen a regenerálódási idő is jól mérhető.



5. ábra

A szokásos önkioltó GM-csövek esetében a holt idő 100 mikrosec rendű szokott lenni és a regenerálódási idő is ilyen nagyságrendű.

A méréstechnika szempontjából fontos megjegyezni, hogy valamely GM-csöves elektronikus regisztráló berendezés holt ideje általában hosszabb, mint a GM-csőnek fenti módszerrel érzékeny oszcilloszkóp ernyőjén mért holt ideje még abban az esetben is, ha a regisztráló berendezés egyik időállandója sem hosszabb a GM-cső holt idejénél. Ugyanis az elektronikus berendezés megindításához bizonyos nagyságú feszültséglökésre van szükség. Ezen lökésnagyság eléréséhez szükséges idő hozzájárul a GM-cső saját holt idejéhez.

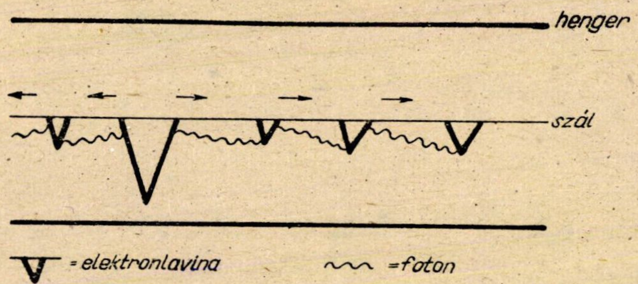
A GM-csövek kisülési mechanizmusa

A holt idő és regenerálódási idő értelmezéséhez szükségünk van arra, hogy vázoljuk a GM-csövek kisülési mechanizmusának egyes részleteit.

Ha a GM-csövön egy ionizáló rész halad át és a csövön belül egy, vagy több ionpár képződik, akkor az elektronok az elektromos tér hatására a szál felé mozognak. A szál közvetlen közelében lévő erős elektromos térben kinetikus energiájuk elég nagy lesz ahhoz, hogy ütközési ionizáció útján újabb szekundér elektronokat hozzanak létre, ezek ugyancsak ütközési ionizáció útján további elektronokat termelnek és a folyamat lavinaszerűen kiterjed.

A szál közvetlen közelében nagy számban keletkezett elektronokkal egyidejűleg természetesen nagyszámú pozitív ion is keletkezik. Ezeknek az elektronoknál sokkal kisebb mozgékonyságuk van. Az elektronlavina 10^{-7} sec nagyságrendű idő alatt a szálra érkezik. Ezalatt a pozitív ionok gyakorlatilag nem mozdulnak el és a szál körül pozitív tértöltésréteget alkotnak. Ezen tértöltésréteg és a szál között a térerősség lecsökken eredeti értékéhez képest és ily módon megakadályozza újabb elektronlavinák kialakulását, vagyis lefojtja a kisülést.

A továbbiak szempontjából fontos megemlíteni, hogy ezen pozitív ionréteg nemcsak az eredeti elektronlavina kifejlődésének helyén keletkezik. Az egész gázkisülés ugyanis nem lokalizálódik az első ionpárok helyére. Az első lavinában keletkezett fotonok fotoeffektus révén további lavinákat indítanak meg. A kioltó szerves gáz — pl. alkohol — erős abszorbeáló képessége következtében a fotonok nem jutnak el messzire, hanem keletkezési helyük közelében keltik az újabb lavinákat. Így a kisülés mintegy pontról pontra, véges sebességgel tovább terjed a szál mentén (6. ábra).



6. ábra

Az elektronlavina lefutása után a pozitív ionfelhő a henger felé vándorol és közben a szál körül lévő térerősség egyre növekszik. Ha az ionok elérkeztek egy bizonyos kritikus távolságra, amelynél a szál körüli térerősség eléri a GM-cső indulási feszültségének megfelelő értéket, akkor újból felléphetnek kisülések. (Az indulási feszültség alatt azt a küszöbfeszültséget értjük, amelyet a GM-csőre kapcsolva a cső számolni kezdi az ionizáló részecskéket.)

A holt idő ezek szerint nem egyéb, mint az az idő, amely alatt a pozitív tértöltés a fent említett kritikus távolságra elérkezik.

A holt idő elmultával a cső ismét képes újabb bejövő részecskéket regisztrálni, de mivel a térerősség a szál közelében még nem érte el eredeti értékét, ezért a számlálócső úgy működik, mintha alacsonyabb feszültségen lenne. Alacsonyabb feszültség esetén azonban a számlálócső által adott feszültséglökés is kisebb. Ezért az ilyenkor kapott lökések amplitudói kisebbek az eredetinél és csak akkor érik el annak nagyságát, amikor az ionfelhő a hengerre érkezett és a szál körüli térerősség eredeti értékét vette fel. Az az idő, amíg az ionfelhő a kritikus távolságtól a hengerig elérkezik, a regenerálódási idő.

A holt idő megrövidítése

Mint már a bevezetésben is említettük, a GM-csövek holt ideje bizonyos határt szab a csövekkel mérhető legnagyobb beütésszámnak: ez annál nagyobb, minél kisebb a GM-cső holt ideje. Az antikoincidencia berendezések érzékenysége, illetve megbízhatósága is jelentősen növekszik az alkalmazott GM-csövek holt idejének csökkenésével. Ezért fontos feladat olyan elektronikus berendezések szerkesztése, amelyek segítségével GM-csövek holt ideje megrövidíthető.

A GM-csövek holt idejének megrövidítésére irányuló első kísérletek abból indultak ki, hogy a hosszú holt időt a pozitív ionfelhő kis mozgékonysága okozza. Mivel ez a pozitív ionfelhő a szál közvetlen közelében keletkezik, célszerűnek látszott a GM-csőre adott feszültséget a kisülés kezdete után gyorsan megfordítani és így a pozitív ionokat a szálra visszaszívni. Ezzel a módszerrel a pozitív ionok gyors eltávolítása látszott lehetségesnek. Az első ilyen elektronikus berendezést, amely minden kisülés után megfordítja a GM-cső szálán lévő feszültséget, *Simpson*[1] szerkesztette. *Simpson* berendezése GM-csövenként 9 elektroncsőből áll. Ugyanezt a problémát *Hodson*[2] egy két csőből álló egyszerű multivibrátor segítségével oldotta meg. *Hodson* berendezése lehetővé tette, hogy a GM-cső negatív feszültségű hengere közvetlenül az egyes kisülések után kb. 20 mikrosec-ig 150 Volt pozitív feszültséget kapjon a szálhoz képest. Ez az idő szükséges ahhoz, hogy a pozitív ionok a szálra érkezzenek. *Hodson* ezzel a berendezéssel elérte, hogy a GM-csöves készülékének holt ideje 700 mikrosec-ról 30 mikrosec-ra csökkent.

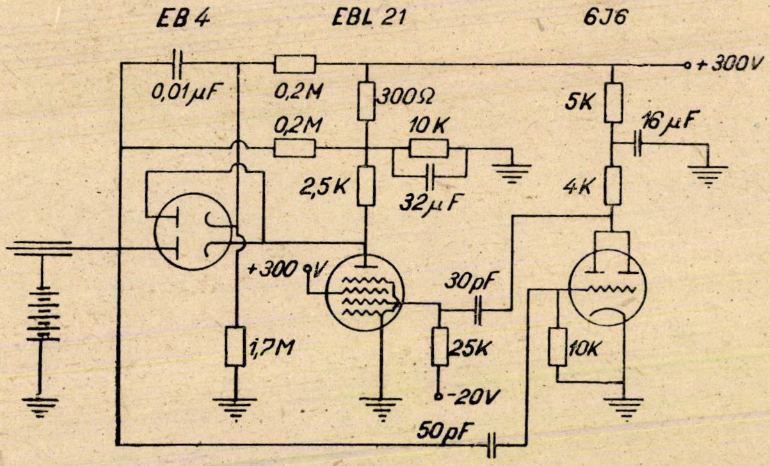
További mérések azonban azt mutatták, hogy a holt idő lecsökkentéséséhez nem szükséges a feszültség megfordítása, hanem elég a szál pozitív feszültségének 2—300 Volttal való igen gyors csökkentése közvetlenül a kisülés után. Ezzel helytelennek bizonyult az a fenti feltevés, hogy a holt idő megrövidülését a pozitív ionoknak a szálra való gyors visszaszívása okozta.

A kérdés most már az volt, mi okozta azt, hogy ezen elektronikus berendezések mégis nagymértékben lecsökkentették a GM-csövek holt idejét. A magyarázat a következőképpen adódott.

Már a GM-csövek kisülési mechanizmusának vázolásánál említettük, hogy a pozitív ionfelhő a szál mentén csak bizonyos véges sebességgel terjed ki. Ezek szerint, ha a szálon lévő feszültséget elég gyorsan lecsökkentjük az indulási feszültség alá, akkor az ionrétegnek az egész csőre való kiterjedése megakadályozható. Így a csőnek az a része, ahol a pozitív ionfelhő nem fejlődött ki, a szál-henger feszültség visszaállítása után ismét alkalmas újabb részecskék regisztrálására.

Kísérleteinkben reprodukáltuk *Hodson* méréseit azzal a különbséggel, hogy a multivibrátor lökéseinek időtartamát 20 mikrosec helyett 1,5 mikrosec-nak választottuk. Ezzel a berendezéssel sikerült a GM-cső holt idejét kb. 3 mikrosec nagyságúvá lecsökkenteni. Mivel a pozitív ionoknak a szálon való összegyüjtéséhez *Hodson* számításai szerint legalább 10 mikrosec körüli időre volna szükség, ezek az eredmények is mutatják, hogy nem a pozitív ionoknak a szálra való visszaszívása okozza a holt idő megrövidítését.

Ugyanezeket a kísérleteket elvégeztük anélkül, hogy a GM-cső szálának feszültségét megfordítottuk volna, csak a szál feszültségét csökkentettük kb. 0,2 mikrosec alatt 150 Volttal. 1,5 mikrosec-os multivibrátort használva a holt idő most is kb. 3 mikrosec-nak adódott. Az általunk használt multivibrátor rajzát a 7. ábra mutatja.

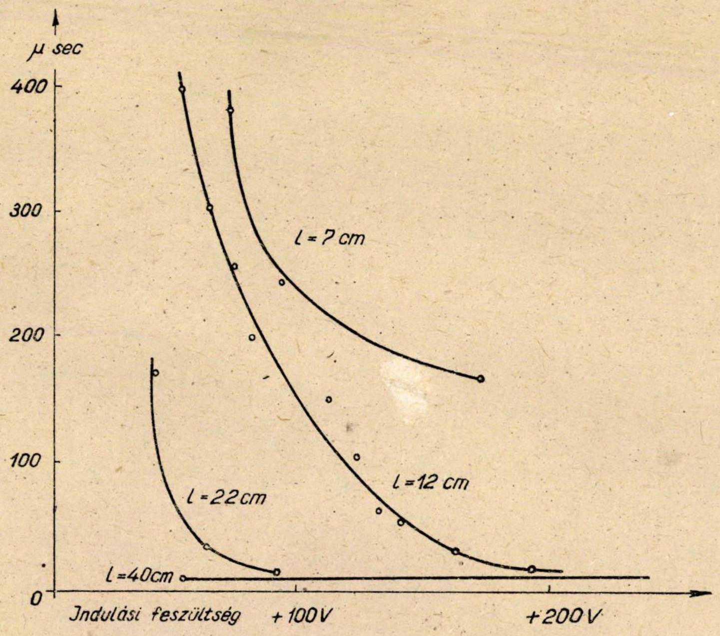


7. ábra

Ha elfogadjuk azt az elméletet, hogy a holt idő megrövidülését az okozza, hogy megakadályozzuk az ionréteg kiterjedését a szál egész hosszában, akkor fel kell téteteleznünk, hogy minden kisülés után marad a csőnek olyan része, amely érzékeny újabb részek regisztrálására és így az oszcilloszkópon észlelhető holt időnek tulajdonképpen zérusnak kellene lennie. A valóságban észlelt 3 mikrosec körüli holt idő a multivibrátor érzéketlenségének ideje. Ezt egyszerűen igazoltuk két, illetve több párhuzamosan kapcsolt GM-cső segítségével. Ilyen esetben ugyanis elvben nem volna szabad holt időnek jelentkeznie, mivel a csövek függetlenek egymástól és az egyik cső kisülése nem gátolja meg a másik csövet abban, hogy egyidejűleg vagy tetszőlegesen rövid idő mulva regisztrálni tudjon. A mérések azonban párhuzamosan kapcsolt GM-csövekkel is ugyanazt a holt időt mutatták, mint egyetlen GM-cső esetében, vagyis a holt időt a multivibrátor okozta.

Ugyanezen elmélet alapján az várható, hogy rövidebb csövek holt ideje ugyanazon multivibrátor segítségével nem csökkenthető le úgy, mint a hosszabb csöveké. A hosszabb csöveknél ugyanis az ionrétegek a cső egész hosszában való kiterjedése nyilván hosszabb ideig tart és így ugyanolyan gyorsaságú multivibrátor könnyebben tudja megakadályozni, mint rövidebb csöveknél.

Ezen effektus vizsgálata céljából 4 db különböző hosszúságú (7, 12, 22, 40 cm hosszú), de különben azonos GM-csövet készítettünk el és vizsgáltunk meg fenti multivibrátor segítségével. A várakozásnak megfelelően azt találtuk, hogy a holt idő a GM-cső indulási feszültségétől számított azonos túlfeszültség esetében a leghosszabb csőnél a multivibrátor holt idejénél rövidebb és a rövidebb csöveknél egyre hosszabb volt.



8. ábra

Megvizsgáltuk azokat a kísérleti körülményeket, amelyek mellett a rövid csöveknek holt ideje is jelentősen csökkenthető. Azt találtuk, hogy az összes csöveknél a holt idő a túlfeszültség növelésével csökkenthető. A holt időt, mint a túlfeszültség függvényét a 8. ábra szemlélteti. Az egyes görbék mellé írt számok a csövek effektív hosszát jelentik cm-ekben.

Méréseinket a Központi Fizikai Kutató Intézet Kozmikus Sugárzási Osztályán végeztük *Jánossy Lajos* akadémikus vezetése és irányítása mellett. Köszönetet kell mondanunk *Balogh Sándor* elektroműszerész kartársunknak, aki a készülékek építésénél és a kísérletek elvégzésénél nagy segítségünkre volt.

Magyar Tudományos Akadémia
Központi Fizikai Kutató Intézet
Kozmikus Sugárzási Osztálya.

IRODALOM

1 *Simpson, J. A.* Phys. Rev. *66,* (1944), 39.
2 *Hodson, A. L.* J. Sci. Inst. *25,* (1948), 11.

AZ ALUMÍNIUM FÉM KÖTÉSÉRŐL

GÁSPÁR REZSŐ

Bemutatta Gombás Pál r. tag az 1952. március 3-án tartott felolvasó ülésen

Bevezetés

Közismert tény, hogy fémekben az elektronok egy része — az atommagok közvetlen környezetét kivéve — teljesen szabad elektronokhoz hasonlóan viselkedik. Egy és két valenciaelektronnal biró fémek tárgyalására a fenti tény számításba vételével igen jól bevált módszert dolgozott ki Gombás[1]. A módszer a fém valenciaelektronjait az ú. n. fémelektronokat az iontörzs elektronjaitól külön kezelve, mint teljesen szabad elektronokat tárgyalja és a rácsenergiát a fémelektronok sajátenergiájából és a fémelektronoknak a törzselektronokkal és az atommaggal való kölcsönhatási energiájából építi fel. Az iontörzs elektronjaira nézve felteszi, hogy azoknak eloszlása, saját, valamint az atommaggal való kölcsönhatásából származó energiája a fémben megegyezik a szabad atomban felvett értékkel, tehát a fémes kötés következtében nem változik s így mint egy konstans elhagyható. A fémelektronoknak a törzselektronokkal való kölcsönhatási energiájának számítása, ha a fémelektronokat teljesen szabadoknak tekintjük, azonban csak úgy oldható meg sikeresen, ha azt egy modifikált potenciáltér segítségével végezzük el. Ez fémeknél eddig azonban csak gömbszimmetrikus sajátfüggvénnyel biró, tehát például a sáv alján elhelyezkedő kis kinetikus energiájú elektronok esetére volt értelmezhető. A jelen dolgozat egyik célja, hogy a modifikált potenciálteret a vezetési sávban magasabban fekvő, tehát nagyobb energiával rendelkező elektronokra is megadja és így három és több valenciás fémek elméleti tárgyalását is lehetővé tegye. Az elmélet próbakövéül az elméleti és gyakorlati szempontból is igen érdekes tulajdonságokkal rendelkező *Al* fémet választjuk.

1. A Φ-operátor bevezetése

Valenciaelektronok és fémelektronok sajátfüggvényei az iontörzs közelében igen bonyolult alakot öltenek a törzselektronok sajátfüggvényeire való ortogonalizálás miatt, ez a követelmény pedig a Pauli-elv következménye. Ha azonban a Pauli-elvet egy statisztikus potenciál bevezetésével tekintetbe vesszük, a sajátfüggvénynek az alakja az iontörzs közelében nem lesz döntő jelentőségű és az atom valenciaelektronjainak esetében egyszerű Slater típusú sajátfüggvénnyel, fémelektronok esetében pedig síkhullámokkal is mindenütt helyesen írjuk le azok viselkedését az energiaszámítás szempontjából. *Gombás*[1] szerint a

Pauli-elv következményeképpen fellépő potenciál

$$F^l = \gamma_0(\varrho^{2/3} - \varrho_l^{2/3}) \tag{1}$$

alakba írható, ahol $\gamma_0 = (3\pi^2)^{2/3} e a_0/2$; ϱ az iontörzs összes elektronjainak sűrűsége és ϱ_l azon elektronok sűrűsége, melyeknek energiája kisebb mint a szóbanlevő elektron lehetséges legkisebb energiája. Így az Al atomban a $3s$-elektronra ható taszító potenciálban $\varrho_0 \equiv 0$, a $3p$ elektronéban pedig $\varrho_1 = 2\varrho_{1s} + 2\varrho_{2s}$, ahol ϱ_{1s}, ill. ϱ_{2s} az Al atom $1s$, ill. $2s$ elektronjainak sűrűsége és végül a $3d$ elektron esetében $\varrho_2 \equiv \varrho$, tehát $F^2 \equiv 0$ lenne. e a pozitív elemi töltés és a_0 a legkisebb körpálya sugara a H-atomban a Bohr-elmélet szerint.

A törzselektronok héjakba való tagozódásának a következménye az, hogy az (1) potenciál jellegzetesen változik a valenciaelektron mellékkvantumszáma szerint és az ugyanazon mellékkvantumszámmal rendelkező valenciaelektronokra ugyanaz. Így ahelyett, hogy a taszító potenciált elektrononként állapítanánk meg, formálisan bevezethetünk egy operátort Φ-t, mely a gömbfelületi függvények rendszerében diagonális és sajátértékei az (1) által meghatározott potenciálok, azaz $\Phi Y_l^m = F^l(r) Y_l^m$, ahol Y_l^m az a gömbfelületi függvény, amelyik az l mellék és m mágneses kvantumszámhoz tartozik. Biztos, hogy a Φ operátor hermitikus, hiszen sajátértékei valósak. Ha feltesszük, hogy lineáris is, akkor

$$\Phi(r, \vartheta, \varphi) = \frac{1}{c^2} F^l(r) M^2$$

alakban írható fel, ahol

$$M^2 = -\frac{h^2}{4\pi^2}\left[\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\cdot\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right].$$

M^2 az impulzusmomentum abszolút érték négyzetének operátora és $c^2 = \frac{h^2}{4\pi^2} l(l+1)$ ennek sajátértéke. Atomok valenciaelektronjainak esetében ez a felfogás ugyanazon eredményre vezet, mintha az (1) potenciállal számoltunk volna s előnye abban a formális tényben mutatkozik, hogy nem kell a valenciaelektron mellékkvantumszáma szerint külön-külön Schrődinger-egyenletet felállítani, hanem a sajátfüggvények és sajátértékek *egy* Schrődinger-egyenletből származtathatók.

Fémelektronok esetében azonban lényeges segítséget jelent a Φ operátor bevezetése. Ha szabad fémelektronjaink hullámszámvektora nem zérus, akkor az elektronok nem osztályozhatók a mellékkvantumszám szerint és így az (1) potenciálok közül sem választhatunk megfelelőt számukra. A Φ operátor azonban akármilyen sajátfüggvényre alkalmazható és a számítások könnyen elvégezhetők, ha a sajátfüggvényt gömbfüggvények szerint előbb sorbafejtettük.

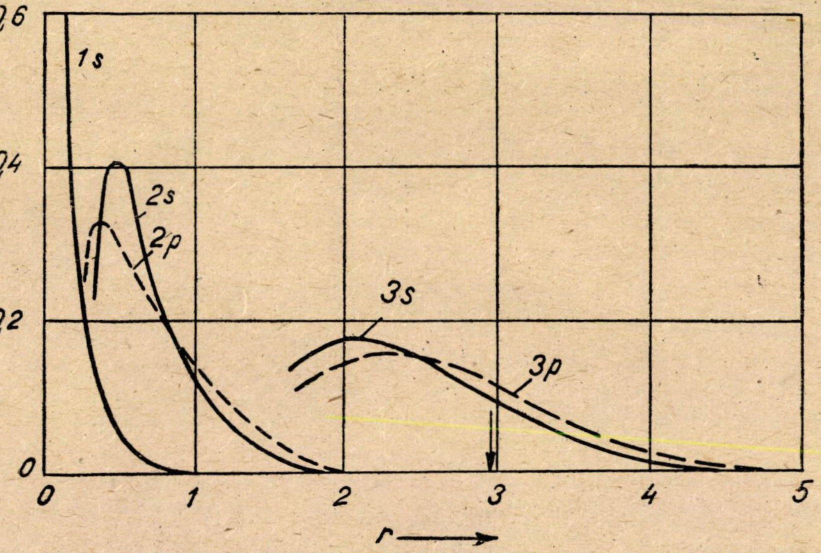
2. *Fémelektronok az Al fémben*

Az *Al* atom elektronjai a szokásos közelítést tekintetbe véve az $1s, 2s, 2p, 3s$ és $3p$ állapotokban helyezhetők el. Ezek szerint az *Al* atom 13 elektronját a Pauli-elv szerint a fenti állapotok közt elosztva számára a

$$(1s)^2, (2s)^2, (2p)^6, (3s)^2, 3p$$

elektronszerkezeti képlet írható fel. Ha valenciaelektronoknak azokat az elektronokat nevezzük, melyek a látható, ill. közeli ultraibolya spektrum kibocsátásában vesznek részt, akkor két $3s$ és egy $3p$, azaz három valenciaelektronja van az *Al* atomnak.

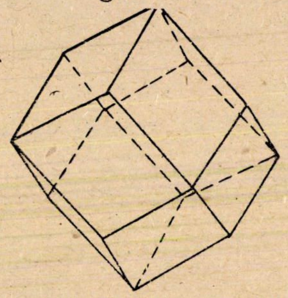
Az *Al* fém elektronjainak energianívói — mint minden szilárd testé — sávokban helyezkednek el. Mint ismeretes[2], a sávok közül azok fognak kiszélesedni, s így a fémes kötésben szerepet játszani, melyekhez tartozó elektronok atomi sajátfüggvényei, ha az atommagokat rácstávolságnyira hozzuk közel, jelentős fedést mutatnak. Az 1. ábrán az *Al* atom elektronjainak radiális sűrűségeit láthatjuk a magtól való távolság függvényében. A nyil az *Al* fémben két legközelebb



1. ábra Az *Al*-atom elektronjainak radiális sűrűségei. Az ábrán a radiális sűrűségnek a mag közelében való lefutását nem tüntettük fel

fekvő atommag távolságának felét jelöli. Azon elektronok energiaértékei, melyeknek radiális sűrűsége ezen a helyen jelentős, sávvá szélesednek ki s így a kötési energia és egyéb állandók számítását jelentős mértékben befolyásolják. Az ábra szerint[3] a $3s$ és $3p$ elektronok jönnek tekintetbe ebből a szempontból és így az *Al* fémnél atomonként három fémelektronnal kell számolnunk. Az $1s$, $2s$ és $2p$ elektronok gyakorlatilag semmiféle fedést nem mutatnak. Ezeknek megfelelő sávok szélessége jelentéktelen és eloszlásuk, energiájuk az atomban és fémben ugyanannak vehető. Az $1s$, $2s$ és $2p$ elektronok hozzájárulása a rácsenergiához egy állandó.

Az *Al* fém lapcentrált köbös rácsban kristályosodik. Az előbb nyert eredményeknek megfelelően elképzelve az *Al* fémet, a következő modellt adhatjuk meg. A rácspontokban helyezkednek el a háromszoros pozitív töltésű Al^{3+}-ionok és körülöttük atomonként 3—3 fémelektron. A tárgyalást *Wigner* és *Seitz*[4] nyomán egy elemi cellára redukálhatjuk, ha tekintetbe vesszük, hogy a többi cella elektromosan neutrális. Ez az elemi cella, mint az a 2. ábrán látható, igen nagyfokú szimmetriája révén jól approximálható gömbbel. Vizsgáljuk meg a fémelektronok mozgását ebben az elemi gömbben. Az egy



2. ábra A felületi centrált rács elemi cellája

elektronra ható potenciál a gömb belsejében a mag és lezárt nemesgázszerű $(1s)^2\,(2s)^2\,(2p)^6$ elektronhéj és a fémelektronok gömbszimmetrikus potenciáljaiból tehető össze. Feltesszük, hogy a kicserélődési és korrelációs hatás következtében a vizsgálandó elektron körül keletkező lyuk éppen elegendő arra, hogy átlagban egy elektront a cellától távoltartson.[5] Így az egy elektronra ható potenciál számításánál csupán két fémelektron veendő tekintetbe. Ezeknek sűrűségét állandónak vettük. Így az összpotenciál

$$V = \frac{Ze}{r} + V_e + V_f = \frac{ze}{r} + \left(V_e + \frac{(Z-z)e}{r}\right) + V_f, \qquad (2)$$

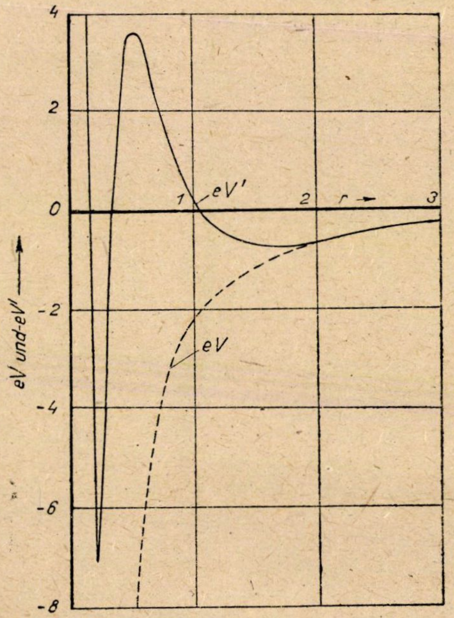
ahol r a vizsgált hely távolsága a magtól, $Z=13$ az *Al* rendszáma. V_e az iontörzs elektronjainak potenciálja, melyet *D. R. Hartree*[6] határozott meg és

$$V_f = -2\pi\nu e\left(R^2 - \frac{r^2}{3}\right) \qquad (3)$$

a két állandó sűrűségű fémelektron potenciálja. (3)-ban $\nu = 6/4\pi R^3 \cdot R$ az elemi gömb sugara, z pedig a fémelektronok száma. (2)-ben ze/r a pontszerűnek gondolt iontörzs Coulomb-szerű potenciálja, $V_e + (Z-z)e/r$ az ion elektronfelhőjének nem Coulomb-szerű potenciálja és V_f a már ismert jelentéssel bír.

Ezen potenciáltérben meghatározott egyelektron sajátfüggvény azonban csak akkor fogja a fémelektron állapotát leírni, ha megfelelő módszerrel gondoskodunk, hogy az elektronnak elegendő magas kinetikus energiája legyen, különben törzselektron sajátfüggvényeket fog közelíteni. Az egyik lehetséges megoldás volna, hogy a sajátfüggvényeket az iontörzs minden egyes elektronjának sajátfüggvényére ortogonalizáljuk.[7] Mi ezt azáltal érjük el, hogy a fémelektronok mozgását egy modifikált potenciáltérben határozzuk meg. A modifikált potenciál

$$V' = V + \Phi, \tag{4}$$



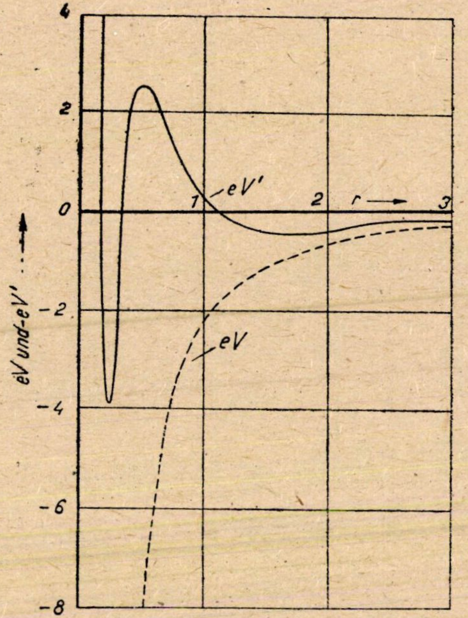
3. ábra Az s elektronok effektív potenciális energiája:

$$-eV' = -e\left[\frac{Ze}{r} + V_e + V_f - \gamma \varrho^{2/3}\right], \qquad \text{(kihúzva)}$$

elektrosztatikus potenciális energia:

$$-eV = -e\left[\frac{Ze}{r} + V_e + V_f\right], \qquad \text{(szaggatva)}$$

ahol Φ az első részben már említett operátor, melynek meghatározását *Hartree* számításai[8] teszik lehetővé, kinek számításaiból a ϱ ill. ϱ_l sűrűségek meghatározhatók. A modifikált potenciál mind s, mind p elektronokra az elemi gömb több mint 75%-ában állandónak tekinthető. A megfelelő Schrődinger-egyenlet megoldása a fémelektronokra az elemi cella legnagyobb részében síkhullámot s így állandó sűrűségeloszlást ad. A (4) potenciál ezek szerint a fémelektronokra nézve az elemi cellának több mint 75%-ában „self consistent". V' a maghoz közel eső helyeken nagy ingadozásokat mutat, ami azonban jelentéktelen, mert az elemi cella kis részében folyik le az ingadozás és a középértéktől való eltérés mindkét irányban gyakorlatilag egyforma.



4. ábra A *p* elektronok effektív potenciális energiája:

$$-eV' = -e\left[\frac{Ze}{r} + V_e + V_f - \gamma_0(\varrho^{2/3} - \varrho_1^{2/3})\right] + \frac{e^2 a_0}{r^2}, \qquad \text{(kihúzva)}$$

elektrosztatikus potenciális energia:

$$-eV = -e\left[\frac{Ze}{r} + V_e + V_f\right]. \qquad \text{(szaggatva)}$$

3. A kinetikus energia számítása

A rácsenergia számítása a Gombás módszerével végzett számításokhoz[9] nagymértékben hasonlóan történik. A fő eltérés a kinetikus energia számításában van. Ezt fogjuk részletesen ismertetni.

A teljesen szabadnak vett fémelektronokat írjuk le a

$$\psi_{\mathfrak{k}} = \frac{1}{\Omega^{1/2}} e^{i(\mathfrak{k}\cdot\mathfrak{r})}. \tag{5}$$

hullámfüggvénnyel. (5)-ben Ω az elemi gömb térfogata és $\mathfrak{k}$ az elektron hullámszám vektora, ami az elektron kinetikus energiájával az

$$E_k(\mathfrak{k}) = \frac{1}{2}|\mathfrak{k}|^2 \tag{6}$$

összefüggésben van.

A $\mathfrak{k}$ hullámszámvektor egy az abszolút nullaponton lévő teljesen elfajult elektrongáz esetében nullától egy maximális $\mathfrak{k}'$ hullámszámvektorig minden értéket felvesz. $\mathfrak{k}'$ értékét abból a követelményből határozzuk meg, hogy az elemi gömbben átlagban három fémelektron kell, hogy tartózkodjon. Ezen feltételeknek megfelelően

$$\frac{2}{h^3}\Omega\frac{4\pi p'^3}{3}=z, \tag{7}$$

ahol p' a maximális impulzus. Tekintve, hogy

$$p'=\frac{h}{2\pi}k', \tag{8}$$

(7)-ből (8) segítségével kapjuk

$$\frac{\Omega}{\pi^2}\frac{k'^3}{3}=z. \tag{9}$$

$\Omega=4\pi R^3/3$ és $z=3$ behelyettesítése és átrendezés után

$$k'=3\left(\frac{\pi}{4}\right)^{\frac{1}{3}}\frac{1}{R}=\frac{2{,}768}{R}. \tag{10}$$

A fémelektronok kinetikus energiája két részből tehető össze, melyek a következők:

1. A teljesen szabad fémelektrongáz kinetikus energiájának átlagértéke

$$E_K=\varkappa_k \nu^{5/3}\frac{4\pi R^3}{3}=1{,}105 z^{5/3} e^2 a_0 \frac{1}{R^2}. \tag{11}$$

(11)-ben $\varkappa_k=3(3\pi^2)^{2/3}e^2a_0$ 10 és $\nu=3z/4\pi R^3$ a fémelektronok sűrűsége, z ezek száma.

2. Eddig azonban nem vettük tekintetbe, hogy a fémelektronok a Pauli-elv következményeképpen egy magasabban fekvő ú. n. vezetési sávban vannak. Az első részben mondottak szerint a Φ operátor bevezetése a Pauli-elvet ebből a szempontból helyettesíteni képes. A Φ operátor térbeli és az összes fémelektronokra vonatkozó átlagértéke fogja a kinetikus energia második igen jelentős részét adni.

Fejtsük az (5) hullámfüggvényt az ismert módon sorba[10]

$$\psi_{\mathfrak{k}}=\frac{1}{\Omega^{1/2}}e^{i(\mathfrak{k}\cdot\mathfrak{r})}=\frac{1}{\Omega^{1/2}}e^{i(\mathfrak{k}\cdot\mathfrak{r}_n)}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)i^l j_l(kr)P_l(\cos\vartheta) \tag{12}$$

ahol $\mathfrak{r}_n$ egy rácspontot meghatározó rádiuszvektor, $k=|\mathfrak{k}|$, $r=|\mathfrak{r}-\mathfrak{r}_n|$ és

$$j_l(kr)=\left(\frac{\pi}{2kr}\right)^{\frac{1}{2}}J_{l+\frac{1}{2}}(kr), \tag{13}$$

ahol $J_{l+\frac{1}{2}}$ egy $l+\frac{1}{2}$ rendű Bessel-függvény.

(1), (12) és (13) segítségével könnyen képezhető a Φ operátornak az elemi cellára vonatkozó átlagértéke

$$\overline{\Phi}_{\mathfrak{k}}=\int\psi_{\mathfrak{k}}^*\,\Phi\,\psi_{\mathfrak{k}}\,d\tau=$$

$$=\frac{2\pi^2}{\Omega k}\gamma_0\left\{\int_0^R J_{\frac{1}{2}}^2(kr)\varrho^{2/3}(r)\,r\,dr+3\int_0^R J_{\frac{3}{2}}^2(kr)\left[\varrho^{2/3}(r)-\varrho_1^{2/3}(r)\right]r\,dr\right\}, \tag{14}$$

ahol dv a térfogatelem. (14)-ben csupán két tag marad meg, mert az *Al* fém esetében $F^l \equiv 0$, ha $l \geqq 2$. Ha az egész sávra vonatkozóan akarunk felvilágosítást, vagyis ennek az energiarésznek a teljes energiához való hozzájárulását akarjuk meghatározni, akkor még a sáv összes hullámszámvektorai szerint átlagolnunk kell. Az átlagérték (14)-ből egyszerűen adódik. (9)-hez hasonlóan nyerhető, hogy abban a gömbhéjban, melyik a k és $k+dk$ sugarú gömbök közé esik,

$$\frac{\Omega}{\pi^2} k^2 dk \tag{15}$$

állapot esik. (14)-ből és (15)-tel kapjuk

$$\overline{\Phi} = \frac{\Omega}{\pi^2} \int_0^{k'} \overline{\Phi}_t k^2 dk =$$

$$= \gamma_0 \left\{ \int_0^R \varrho^{2/3}(r) \left[J^2_{\frac{1}{2}}(k'r) - J_{-\frac{1}{2}}(k'r) J_{\frac{3}{2}}(k'r) \right] k'r\, d(k'r) + \right. \tag{16}$$

$$\left. + 3 \int_0^R [\varrho^{2/3}(r) - \varrho_1^{2/3}(r)] \left[J^2_{\frac{3}{2}}(k'r) - J_{\frac{1}{2}}(k'r) J_{\frac{5}{2}}(k'r) \right] k'r\, d(k'r) \right\}$$

(16) a Φ-operátor átlagértékét, általában z, ha k'-t (10) határozza meg, tehát *Al* fém esetében 3 fémelektronra adja meg. (16) a benne szereplő $\varrho^{2/3}$ ill. $\varrho_1^{2/3}$ függvények miatt, melyek tabellázott függvények, csak numerikusan határozható meg. $\overline{\Phi}$ értékét az *Al*-fémre annak egyensúlyi helyzetének környezetébe eső néhány R esetében az I. táblázatban adjuk meg.

I. táblázat. A $\overline{\Phi}$ és W_K értéke az egyensúlyi helyzet környezetébe eső néhány R értékre. A szereplő mennyiségeket atomi egységekben adtuk meg, tehát R-t a legkisebb Bohr-féle hidrogénsugárban a_0-ban, W_K-t és $\overline{\Phi}$-t $\frac{e^2}{a_0}$ egységben, ahol e az elemi töltés.

R	$\overline{\Phi}$	W_K
2,8	1,1975	1,2884
2,9	1,0858	1,1597
3,0	0,9848	1,0475
3,1	0,8939	0,9494
3,2	0,8137	0,8631
3,3	0,7439	0,7870
3,4	0,6846	0,7196

Ha minden fémelektron sajátfüggvénye gömbszimmetrikus volna (nem ez a helyzet), akkor (16) helyett

$$W_K = 3ze^2 I_K \frac{1}{R^3} \tag{17}$$

értéket kapnánk az elektronoknak a Pauli-elv következményeképpen beálló kinetikus energia növekedésére. (17)-ben

$$I_K = \frac{\gamma_0}{e}\int_0^\infty \varrho^{2/3}(r)\, r^2\, dr \tag{18}$$

és (18)-ban a felső határt R helyett ∞-be helyeztük, tekintetbe véve ϱ exponenciális eltűnését. Az I. táblázatban W_K értékeit is felsoroltuk. Látható, hogy $\bar{\Phi}$ értékei kisebbek W_K-nál, vagyis a sajátfüggvény szerkezetének pontos tekintetbevétele az energiát mélyíti.

4. *A potenciális energia számítása*

A fémelektronok sajátenergiájának számításánál a következő tagokat kell figyelembe venni. A fémelektronok kölcsönös Coulomb-szerű elektrosztatikus kölcsönhatását

$$E_C = \frac{3z^2e^2}{5}\frac{1}{R}, \tag{19}$$

a fémelektronok kicserélődési energiáját

$$E_A = -0{,}4582\, z^{4/3} e^2 \frac{1}{R} \tag{20}$$

és a korrelációs energiát, mely a következő közelítő kifejezéssel számolható

$$E_W = -0{,}0172\, z \frac{e^2}{a_0} - 0{,}0577\, z^{4/3} e^2 \frac{1}{R}, \tag{21}$$

ahol z ismét a fémelektronok száma.

A fémelektronoknak az iontörzzsel való tiszta elektrosztatikus Coulomb és nem Coulomb-szerű tagjai könnyen számíthatók, mert az operátorok függetlenek a hullámszámvektortól s így a különböző hullámszámvektorú elektronokra az átlagérték ugyanaz, mint a sáv alsó szélén levő elektronra. Így nyerjük a Coulomb-szerű tagra egyszerű számítás után

$$W_C = -\frac{3z^2e^2}{2}\frac{1}{R}. \tag{22}$$

A nem Coulomb-szerű elektrosztatikus energiára pedig, tekintetbe véve a potenciálnak nagy távolságban való exponenciális eltűnését, kapjuk

$$W_E = -3\, z e^2 I_E \frac{1}{R^3}, \tag{23}$$

ahol

$$I_E = \frac{1}{e}\int_0^\infty \left(V_e + \frac{(Z-z)e}{r} \right) r^2\, dr. \tag{24}$$

A fém és törzselektronok kicserélődési energiája az előzőekhez hasonlóan függetlenül az elektronnak a sávban elfoglalt helyétől a következő alakban adható meg:

$$W_A = -3z I_A e^2 \frac{1}{R^3} + \alpha z^{4/3} e^2 \frac{1}{R^4}, \tag{25}$$

ahol

$$I_A = \frac{4}{3}\frac{\varkappa_a}{e^2}\int_0^{r_g} \varrho^{1/3}(r) r^2\, dr \quad \text{és} \quad \alpha = \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{1/3} \frac{\varkappa_a}{e^2} r_g^3. \tag{26}$$

Itt $\varkappa_a = 3^{4/3} e^2 / 4\pi^{1/3}$ és r_g egy határsugár, melynél a ϱ sűrűség a Thomas—Fermi—Dirac atommodell határsűrűségének értékét veszi fel.[11]

Az $E_C + W_C$ energiaösszeg pontosabban is tekintetbevehető. A Madelung-módszer segítségével *Fuchs*[12] végezte el a számításokat és a felületi centrált rácsra

$$E_C' + W_C' = -\frac{0{,}89586 z^2 e^2}{R} \tag{27}$$

kifejezést kapta. (19) és (22) összege a pontosabb (27)-től kevesebb, mint 0,5%-kal tér el. Az eltérés tekintetbevétele azonban az általunk végzett számításoknál indokolt, mert z^2 értéke egy nagyságrenddel nagyobb, mint pl. az alkáli fémeknél, ahol a különbséget el szokás hanyagolni.

5. *A rácsenergia számítása és az abból vonható következtetések*

Az *Al* fém rácsenergiája $U(R)$ alatt azt az energiamennyiséget értjük, amely szükséges ahhoz, hogy az *Al* fémet egymástól végtelen távol lévő pozitív Al^{3+}-ionokra és elektronokra felbontsuk. A (11) és (16) kinetikus és a (20), (21), (23), (25) és (27) potenciális energiák összege adja a rácsenergiát

$$U(R) = E_K + \bar{\Phi} + E_A + E_W + W_E + W_A + E_C' + W_C'. \tag{28}$$

Az 5. ábrán a rácsenergia változását látjuk az egyensúlyi helyzet környezetében.

(28) segítségével a fontosabb fémállandók azonnal számolhatók. A nyugalmi rácstávolságnál a rácsenergiának minimuma van, azaz

$$\left(\frac{dU}{dR}\right)_{R=R_0} = 0, \tag{29}$$

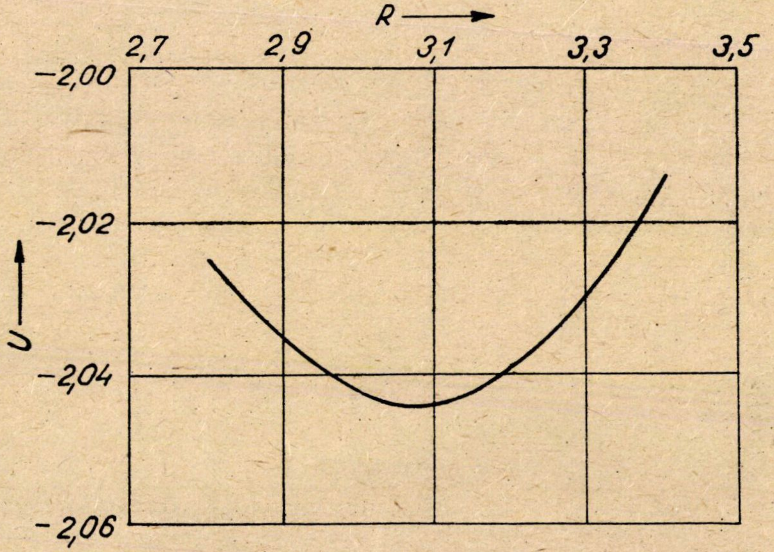
melyből (28) segítségével az egyensúlyi helyzetben az elemi gömb sugara R_0 és belőle az $a = 2R_0\left(\frac{2\pi}{3}\right)^{1/3}$ képlet segítségével a nyugalmi rácstávolság értéke meghatározható. A nyugalmi rácstávolság ismeretében meghatározhatjuk a rácsenergiának hozzá tartozó értékét U_0-t. A rácsenergiából és a szabad atom ionizációs energiáiból pedig megkaphatjuk a fém szublimációs hőjét

$$S = |U_0| - I_1 - I_2 - I_3 \tag{30}$$

ahol $I_1 = 5{,}97\, eV$; $I_2 = 18{,}8\, eV$; $I_3 = 28{,}5\, eV$ az *Al* atom első, második és harmadik ionizációs energiái.[13]

Végül még egy igen fontos atomi állandó, a kompresszibilitás is könnyen számítható, mert a nyugalmi rácstávolságnál a rácsenergiával a következő összefüggésben van:

$$\frac{1}{\varkappa} = \frac{1}{12\pi R_0}\left(\frac{d^2U}{dR}\right)_{R=R_0}. \tag{31}$$



5. ábra. Az *Al*-fém rácsenergiája az egyensúlyi helyzet környezetében. *U és* R értékei atomi egységben vannak megadva

A fent felsorolt atomi állandók számított és kísérleti értékeit a II. táblázatban állítottam össze. Az elméleti és kísérleti értékek megyezése, mint a tabellából látható, igen jó.

II. táblázat. Az *Al* fém néhány struktúrától nem függő állandójának elméleti és kísérleti értéke

	Rácsenergia kcal/mol.	Rácsállandó Å	Szublimációs energia kcal/mol.	Kompresszibilitás cm²/din.
Számított	1281,6	4,17	54,8	$0{,}74.10^{-12}$
Kísérleti	1286,8	4,04	60	$0{,}95.10^{-12}$

Összehasonlítás céljából számításokat végeztünk olyan feltételek mellett is, hogy az összes fémelektronokra ható taszító potenciál megegyezik az *s* elektronokra érvényes $F^0 = \gamma_0 \varrho^{2/3}$ potenciállal. A III. táblázatban ezeket a számított értékeket láthatjuk néhány, a számítás folyamán felhasznált állandó értékével együtt. A II. és III. táblázat adatait összevetve látható, hogy a következetesen véghezvitt számítás a kísérleti eredményekkel jobb összhangban van.

III. táblázat Az a, U_0, S és $\varkappa$ állandók számított értékei az *Al*-fémre és a számítás elvégzéséhez szükséges r_g, I_E, I_K, I_A, állandók. Az állandókat annak feltételezésével számítottuk, hogy az összes fémelektronoknál a Pauli-elvet helyettesítő potenciál az s elektronokra érvényes.

a Å-ben	U_0 kcal/mol.	S kcal/mol.	$\varkappa$ cm²/din.	r_g a_0-ban	I_E a_0^2-ban	I_K a_0^2-ban	I_A a_0^2-ban
4,33	1248,0	21,2	$0{,}77.10^{-12}$	1,91	0,6614	3,1425	0,8828

mint az itt említett. Ennek oka az, hogy a Φ operátor átlagértékének számításánál tekintetbe vettük a fémelektronok sajátfüggvényének asszimmetriáját.

Megjegyezzük, hogy teljesen téves volna a taszító potenciál átlagértékének számításánál a fémelektronok megoszlását s és p elektronokra a szabad atomban meglevő 2 : 1 arányban felvenni. Ezzel a feltevéssel végzett számítások pl. a szublimációs energiára, a mért érték háromszorosát s a nyugalmi rácstávolságra pedig a mért értéknél lényegesen kisebb értéket adtak volna.

Budapesti Műszaki Egyetem
Fizikai Intézete.

IRODALOM

[1] *P. Gombás,* Nature (London) *157,* (1946) 668; Hung. Acta Physica *1,* No. 2, 1947 Die statistische Theorie des Atoms und ihre Anwendungen, Springer, Wien 1949, ahol a többi irodalom is megtalálható.

[2] Lásd pl. *F. Seitz:* The Modern Theory of Solids. McGraw Hill Book Company, London 1949 303—308.

[3] Az *Al* atom elektronjainak az ábrán látható radiális sűrűségei 1*s*, 2*s*, 2*p* elektronok esetében „self consistent field" számításokból, 3*s* és 3*p* elektronok esetében variációszámításból ismert sajátfüggvények segítségével adódtak. *D. R. Hartree,* Proc. Roy. Soc. London (A) *151,* (1935) 96; *B. Kozma és A. Kónya,* Zs. f. Phys. *118,* (1941) 153 és a szerző nem publikált munkája.

[4] *E. Wigner* és *F. Seitz,* Phys. Rev. (2) *43,* (1933) 804.

[5] *J. C. Slater,* Phys. Rev. (2) *81,* (1951) 385.

[6] *D. R. Hartree* l. c.

[7] *C. Herring,* Phys. Rev. (2) *57,* (1940) 1169.

[8] *D. R. Hartree* l. c.

[9] *P. Gombás* l. c.

[10] Lásd pl. *S. Flüge* u. *H. Marschall,* Rechenmethoden der Quantentheorie, Springer, Berlin, 1945, 97.

[11] Lásd pl. *P. Gombás:* Die statistische Theorie des Atoms und ihre Anwendungen, Springer, Wien 1949.

[12] *K. Fuchs,* Proc. Roy. Soc. London (A) *151,* (1935) 585.

[13] *Landolt—Börnstein:* Zahlenwerte und Funktionen. Springer, Berlin, 1951. 211.

[14] A kísérleti rácsenergia értékét az első három ionizációs energia és a szublimációs energia összegeként kaptuk. Az utóbbi értékét az abszolút hőmérsékleti skála nullpontján lásd a *H. G. Grimm* és *H. Wolff, Geiger—Scheels* Handbuch d. Phys. XXIV./II., 2. Aufl. 1073. Springer, Berlin.

A kompresszibilitás kísérleti értékét *Bridgman* szobahőmérséklet körüli hőfokon nyert méréseiből lineáris extrapolációval kaptuk. Lásd: *Bridgman,* Proc. Amer. Acad. of Art. and Sci. *58,* (1923) 165.

ENERGIAELOSZLÁS A FÜGGŐLEGES LÉGOSZLOPBAN

AUJESZKY LÁSZLÓ

Bemutatta Jordan Károly r. tag az 1952. március 3-án tartott felolvasó ülésen

I.

Az energetikai vizsgálatok szerepe a meteorológiában

A légkör bonyolult fizikai folyamatait (az ú. n. időjárási folyamatokat) azáltal lehet viszonylag legkönnyebben feltárni, ha a bennük dolgozó energiamennyiségeket számszerűen megállapítjuk.

Ugyanis, a légkör nagy anyagtömegeiben igen tetemes energiamennyiségek vannak jelen különféle energiafajták alakjában, és pedig főképen mint hőenergia, szélenergia, nehézségi potenciális energia, a levegő vízgőzében foglalt halmazállapoti energia, továbbá a napsugárzásban fellépő elektromágneses sugárzó energia. Ezek az energiafajták a légkörben minduntalan átalakulnak egymásba. Az időjárás összes fontosabb eseményeiben (mint pl. a szélbetörésekben, a lehülési és felmelegedési folyamatokban, a felhők és csapadékok keletkezésében) nagyszabású energiaátalakulások játszódnak le a légkör felsorolt energiakészletei között. Általában ezek képviselik az összes *időváltozások* energetikai hátterét.

Ezekből a tényekből következik, hogy *a légköri jelenségek energiamérlegének vizsgálatát ma a meteorológiai kutatás egyik fontos heurisztikus módszerének kell tekinteni.* Az energetikai vizsgálatok a meteorológia szövevényes jelenségeinek tisztázásában éppen olyan kitünő eszköznek bizonyulnak, mint a fizikának bármely más olyan ágában, ahol bonyolult jelenségek felett kell világos áttekintést biztosítanunk.

II.

A légkör függőleges energiaeloszlásának alaptényei

A légkör energetikájának *alapfeladata* a következő: megállapítandó, hogy a légkör egy megadott részében, egy megadott időpontban, mennyi van jelen a különféle energiafajtákból (és pedig főképen a legnagyobb mennyiségben fellépő két energiafajtából: a hőenergiából és a nehézségi potenciális energiából).

A feladat megoldása végett a légkört felosztjuk egységnyi alapterületű függőleges légoszlopokba és egy-egy ilyen légoszlop energiaviszonyait külön vizsgáljuk meg. Ebben a dolgozatban — amely egy folyamatban levő nagyobb energetikai vizsgálat-sorozat első láncszemét alkotja, — a légkörből kimetszett egységalapú függőleges légoszlop hőenergiájának és nehézségi potenciális energiájának a különböző magassági szintek közti megoszlásával foglalkozunk.

A levegő — a légkörben előforduló természetes viszonyok között — igen jó közelítéssel *ideális gázok elegyének* tekinthető és így számításainkban az ideális állapotegyenletet fogjuk használni. Vizsgálatunk alapjául szolgál a dinamikus meteorológia elemeiből adódó két képlet, amelyek kifejezik a térfogategységnyi levegőben lévő hőenergiát illetőleg a bennelévő nehézségi potenciális energiát a légoszlop tetszésszerinti magassági szintjében: Ha az energiasűrűséget a hőenergia esetében δ_Q-val, a nehézségi energia esetében δ_g-vel jelöljük,

$$\delta_Q = \frac{\varphi}{2} P \qquad (1)$$

$$\delta_g = DG, \qquad (2)$$

ahol φ jelenti a levegőt alkotó molekulák szabadsági fokainak átlagos számát, P és D a légkör kérdéses pontjában fennálló légnyomást illetőleg légsűrűséget, végül G a nehézségi tér potenciálját (az ú. n. geopotenciált) a légkör szóbanlévő pontjában.*

Az (1) képlettel kapcsolatban megjegyezzük a következőket. A levegőt alkotó gázok túlnyomó többsége *kétatomos* molekulákból áll, tehát olyan molekulákból, amelyek szabadsági fokainak száma 5. Ezenkívül a háromatomos összetevők közül a széndioxidnak szintén 5 szabadsági foka van. Ezért az (1) képletben $\varphi/2$ helyébe igen jó közelítéssel 2,5 iktatható**.

* Minthogy az (1) képlet az irodalomban ritkán fordul elő, bemutatjuk az ideális gázok kinetikus elméletéből adódó levezetését.

A gázelmélet elemeiből ismeretes, hogy a T absz. hőmérsékletű gáz 1 molnyi mennyiségben lévő hőenergia a következő:

$$\frac{\varphi}{2} R T,$$

ahol R a Regnault-féle egyetemes állandó; következéskép a térfogategységben lévő D tömegű gáz δ_Q hőenergiája:

$$\delta_Q = \frac{D}{M} \frac{\varphi}{2} R T,$$

ahol M a gáz mulekulasúlyát (gázelegyeknél az elegy látszólagos molekulasúlyát) jelenti.

Ámde az ideális állapotegyenlet szerint

$$\frac{R}{M} D T = P,$$

aminek figyelembevételével megelőző képletünk $\frac{\varphi}{2} P$-be megy át, úgy amint állítottuk.

** A levegő elegyösszetevői közül csak néhány alárendelt jelentőségű anyag van, amelyeknél a szabadsági fokok száma *5-től különböző*; ilyenek egyrészt a *nemes gázok* (szabadsági fokaik száma 3), másrészt a *vízgőz* (szabadsági fokainak száma 6); ezeknek az anyagoknak a mennyisége azonban nem csak nagyon csekély a levegőben, hanem a vízgőz mennyisége átlagos időviszonyok közt majdnem egyenlő is a nemes gázok összes mennyiségével (1% körüli vízgőztartalom és 1% körüli argontartalom). Ezért a gázelegyben lévő molekulák szabadsági fokainak *átlagát* kiszámítva, a nemes gázok és a vízgőz jelenlétének hatása nagyrészben lerontja egymást, és így még kisebbé válik az a hiba, amit elkövetünk, ha φ-t 5-tel tekintjük egyenlőnek.

A (2) képlet használatánál kiaknázzuk azt a tényt, hogy a légkör aránylag vékony gömbhéjnak számít a Földgömb méreteihez képest; ennek megfelelően a légkör legfontosabb rétegein belül a nehézségi gyorsulás felfelé való csökkenése elhanyagolhatóan kicsi, vagyis az egész függélyes légoszlop minden pontjában a következő közelítéssel élhetünk:

$$G \sim gh,$$

ahol g a légoszlop alján fennálló nehézségi gyorsulás, és h az illető pont magassága a légoszlop aljától számítva, amit a potenciál 0-szintjének választunk.

A most előadott két közelítő feltevés alapján a légoszlop tetszőleges h magasságban fennálló energiasűrűségek a következők:

$$\delta_Q = 2{,}5P \tag{3}$$

$$\delta_g = Dgh, \tag{4}$$

Az energiasűrűségek képletei felvilágosítást adnak arról, hogy ez a két energiakészlet (a hőenergia és a nehézségi potenciális energia) miként oszlik meg a légoszlop különféle magassági szintjei között.

A hőenergia függélyes eloszlását a (3) képlet szabja meg, amennyiben kimondja, hogy a hőenergia sűrűsége minden magasságban arányos az ottani légnyomással. Minthogy a légoszlopban felfelé haladva, a P légnyomás *monoton csökken*, és a légkör felső határán 0-vá válik, azért ugyanilyen függőleges eloszlást állapíthatunk meg a hőenergia sűrűségéről is: a légkör hőkészletei főkép az alsó légszintekben vannak felhalmozva. *Annak ellenére tehát, hogy a légkör felsőbb rétegeiben igen magas hőmérsékletek állnak fenn* (pl. az ozonoszféra felső szélén, 70 km tengerszínfeletti magasságban, átlagosan 70° C; még magasabban az ionoszférában pedig néhány ezer Celsius-fok) *mégis a légkör hőenergiakészletének nagyrésze az alsó légrétegekben található.* Ennek az a magyarázata, hogy az említett magas rétegekben, bár a *hőmérséklet* igen magas, de az ottani csekély légsűrűségnek megfelelően a jelenlévő levegő tömege már nagyon kevés.

Még kevésbbé triviális az a tanulság, amelyet a (4) képlet szolgáltat a légoszlop nehézségi potenciális energiájának a különböző magasságok közti eloszlásáról. A képletből mindenekelőtt az tűnik ki, hogy a nehézségi potenciális energiánál az energiasűrűség a talajon zérus, felfelé haladva pedig *eleinte* meglehetősen sebesen növekedik a magassággal: mindaddig, amíg a D légsűrűségnek a felfelé való csökkenését elhanyagolhatjuk, addig a δ_g energiasűrűség a h magassággal arányosan fog növekedni. Viszont azt is mutatja a képlet, hogy a légkör felső határán δ_g ismét zérussá lesz (ott $D = 0$, h pedig véges érték). Már ebből is kitűnik, hogy *a függélyes légoszlopnak létezik legalább egy olyan közbeeső magassági szintje, amelynek maximális potenciális energiája van.*

Dolgozatunkban olyan tételeket fogunk felállítani, amelyek kimondják, hogy a nehézségi potenciális energiának pontosan *egy* maximuma van a függélyes légoszlopban; továbbá megadják, hogy ez a maximum milyen magasságban fekszik, (éspedig, hogy a maximális helyzeti energiájú színt milyen eltolódásokat szenved az időváltozások alkalmával, illetőleg milyen különbségeket mutat a Földnek a különböző éghajlatú vidékein).

III.

Számítási alapok

Feladatunk megoldásához a (4) egyenlet az esetben vezet el bennünket, ha a benne előforduló D légsűrűséget meg tudjuk adni a légoszlop tetszőleges h magasságú pontjában.

Ismeretes, hogy a légsűrűségnek a légoszlopban való változása nem fejezhető ki *egyetlen* explicit képlettel, minthogy a légkör egymás felett fekvő tartományokból van összetéve (troposzféra, sztratoszféra, ozonoszféra stb.), amelyek abban is különböznek egymástól, hogy az állapotjelzők mindegyik magassági tartományban más és más függvényei a magasságnak. Ezért a függélyes légoszlopot energetikai vizsgálatokban annyi szakaszból állónak kell tekinteni, ahány magassági tartományból áll a légkör. Ezeken a szakaszokon belül a légsűrűség tudvalévően előállítható, mint a magasságnak az explicit függvénye, éspedig a következőképpen.

A légkör egymás felett következő tartományait az alábbi két csoportba oszthatjuk be:

a) *Függőleges hőváltozási tartományok*, amelyekben a levegő T abszolut hőfoka jelentékenyen változik a magassággal, és a változás az egész tartományon át egyenletesen megy végbe*:

$$T = T_n - \gamma_n z \tag{5a}$$

ahol z az illető tartomány kezdőszíntjétől kezdve számított magasságot jelenti, tehát

$$z = h - h_n \tag{6}$$

és γ_n a magasságtól független együttható (az illető hőváltozási tartomány ú. n. függőleges hőcsökkenési együtthatója).

* Összes képleteinkben a következő egységes jelölésmódot fogjuk használni:

Az állapotjelzőknek a kiválasztott légoszlop tetszőleges h magasságú színtjében felvett értékeit indexnélküli betűkkel (T, P, D) jelöljük. Ezek tehát a légoszlopban változó mennyiségek, amelyek a h paraméter függvényei.

Ezzel szemben a légkör alulról számított n-edik tartományának kezdőmagasságát h_n-nel és az állapotjelzőknek ebben a színtben felvett értékeit T_n, P_n és D_n-nel fogjuk jelölni. Az összes indexes mennyiségek tehát függetlenek a h kurrens magasságtól, és h szerinti differenciálhányadosaik mind eltünnek.

Bár vizsgálatainkban a h magasság számít független paraméternek, mégis teljesség végett megjegyezzük, hogy az indexes mennyiségek az *idő* folyamán nem konstansok, pl. időváltozások alkalmával a h_n magasságok (amelyek az egyes légköri tartományok vastagságát szabják meg) tudvalévően elég jelentékeny változásokat szenvedhetnek.

b) *Azonos hőfokú tartományok* (izoterm tartományok vagy sztratoszférák), amelyekben a hőmérséklet minden magasságban ugyanannyinak tekinthető, mint az illető tartománynak az alján:

$$T = T_n \tag{5b}$$

A meteorológia elemeiből ismeretes, hogy az a) tipusú tartományokban a légnyomás és a légsűrűség következő függvényei a tartomány aljától számított z magasságnak:

$$P = P_n \left(1 - \frac{\gamma_n}{T_n} z\right)^{\frac{f}{\gamma_n}} \tag{7a}$$

$$D = D_n \left(1 - \frac{\gamma_n}{T_n} z\right)^{\frac{f}{\gamma_n} - 1} \tag{8a}$$

ahol az ujonnan használt betű, f, az időváltozásoktól független következő állandót jelent:

$$f = g \frac{M}{R} \tag{9}$$

(M a levegő látszólagos molekulasúlya, h az egyetemes gázállandó; középeurópai nehézségi gyorsulás esetén $f \sim 3{,}4 \cdot 10^{-4} C/cm$).

Hasonlókép ismeretes a meteorológiának az a két alapképlete, amely szerint a b) tipusú légköri tartományokban (pl. a legalsó sztratoszférában) a légnyomás illetőleg a légsűrűség következő függvényei a tartomány kezdőszíntjétől számított magasságnak:

$$P = P_n e^{-\frac{f}{T_n} z} \tag{7b}$$

$$D = D_n e^{-\frac{f}{T_n} z} \tag{8b}$$

A (8a) és (8b) légsűrűségi képleteket behelyettesítve (5)-be, olyan képleteket kapunk, amelyek a légoszlop egy-egy függőleges tartományában a δ_g energiasűrűséget megadják, mint a magasság explicit függvényét. Ha még (6)-ot is figyelembevesszük, kapjuk:

a) A függőleges hőváltozási tartományokban

$$\delta_g = D_n \left(1 - \gamma_n \frac{h - h_n}{T_n}\right)^{\frac{f}{\gamma_n} - 1} gh \tag{10a}$$

b) A sztratoszférai tartományokban

$$\delta_g = D_n e^{-f \frac{h - h_n}{T_n}} gh \tag{10b}$$

IV.

A δ_g energiasűrűség értékváltozásai a függőleges mentén

A (10a) és (10b) képletek lehetővé teszik, hogy a légkör minden egyes függőleges tartományában külön-külön megvizsgálhassuk, vajjon a légoszlopban felfelé haladva, a nehézségi potenciális energia δ_g energiasűrűsége növekedni fog-e, vagy csökkenni. A két egyenlet jobb oldalán ugyanis a konstansokon kívül csak a h független változó lép fel, tehát elő tudjuk belőlük állítani δ_g-nek h utáni differenciálhányadosát, amelynek előjele a felvetett kérdést eldönti.

* * *

a) Ha a vizsgált n-edik légköri tartomány a hőváltozási tartományok közé tartozik, akkor a hőváltozási tartományokban érvényes (10a) képlet zárójeles tagja helyébe (5a) alapján T/T_n-t helyettesítve, az energiasűrűség differenciálhányadosának előjelvizsgálata következőképen alakul:

$$sg\frac{d\delta_g}{dh}=sg\frac{d}{dh}\left\{D_n\left(\frac{T}{T_n}\right)^{\frac{f}{\gamma_n}-1}gh\right\}=sg\frac{d}{dh}\left\{\left(\frac{T}{T_n}\right)^{\frac{f}{\gamma_n}-1}h\right\}$$

ahol a hatványkitevő *pozitív*, mert az aerológiai észlelésekből ismeretes, hogy γ_n mindig lényegesen kisebb az f értéknél. Ezért a differenciálás így folyik le:

$$sg\frac{d\delta_g}{dh}=sg\left\{\left(\frac{f}{\gamma_n}-1\right)\left(\frac{T}{T_n}\right)^{\frac{f}{\gamma_n}-2}\frac{1}{T_n}\frac{dT}{dh}h+\left(\frac{T}{T_n}\right)^{\frac{f}{\gamma_n}-1}\right\}.$$

Ámde (5a) szerint

$$\frac{dT}{dh}=-\gamma_n$$

továbbá a végig kiemelhető

$$\left(\frac{T}{T_n}\right)^{\frac{f}{\gamma_n}-2}$$

tényező bizonyosan pozitív (mert abszolút hőmérsékletek hányadosainak a hatványa), tehát

$$sg\frac{d\delta_g}{dh}=sg\left\{-\left(\frac{f}{\gamma_n}-1\right)\frac{1}{T_n}\gamma_n h+\frac{T}{T_n}\right\}=sg\left\{-\left(\frac{f}{\gamma_n}-1\right)\gamma_n h+T\right\}$$

amibe T értékét (5a) és (6) alapján ujból behelyettesítve,

$$sg\frac{d\delta_g}{dh}=sg\left\{-\left(\frac{f}{\gamma_n}-1\right)\gamma_n h+T_n-\gamma_n h+\gamma_n h_n\right\}=sg\left\{-fh+T_n+\gamma_n h_n\right\}$$

A legutóbb kapott zárójeles kifejezés aszerint lesz pozitív, zérus vagy negatív, hogy

$$h\lesseqgtr\frac{T_n+\gamma_n h_n}{f}$$

A jobboldali mennyiség az illető a) tipusú tartománynak egy jellemző állandója, amelynek hosszúság-dimenziója van, tehát egy kiváltságos magassági értéket jelöl ki. Ezt a magasságot jelöljük röviden A_n-nel:

$$A_n = \frac{T_n + \gamma_n h_n}{f} \tag{11a}$$

Levezetésünkkel bebizonyítottuk, hogy az a) tipusú légköri tartományoknak valamely tetszőleges h talajfeletti magasságú szintjében a nehézségi potenciális energia δ_g energiasűrűsége *aszerint* fog felfelé nőni vagy csökkenni, hogy h kisebb vagy nagyobb-e, mint a (11a) képlettel megadott A_n mennyiség.

Itt a következő három alesetet kell megkülönböztetni:

a/1. eset: Előfordulhat, hogy az illető légköri tartományoknak a kezdőmagassága, h_n, maga is nagyobb, mint A_n. Ebben az esetben a tartományba eső összes h értékekre *a fortiori*

$$h > A_n$$

tehát a vizsgált differenciálhányados ezuttal a tartomány minden pontjában negatív lesz, vagyis ebben az esetben a potenciális energiának az energiasűrűsége az egész tartományon át felfelé *monoton csökken.*

a/2. eset: Hasonlókép előfordulhat olyan légköri tartomány is, amelynél még a tartomány felső határának magassága (h_{n+1}) is kisebb A_n-nél. Ekkor a tartomány összes szintjeire

$$h < A_n$$

tehát a vizsgált differenciálhányados a mondottak szerint a tartomány minden pontjában pozitív, vagyis δ_g az egész tartományon át felfelé *monoton növekedik.*

a/3. eset: Végül lehetséges az az eset, hogy

$$h_n < A_n < h_{n+1}$$

vagyis a tartományba *beleesik* a kiváltságos A_n magassági szint, amelynek az a tulajdonsága van, hogy δ_g eddig a magasságig növekedik, innen felfelé pedig csökken, tehát ebben az esetben *az energiasűrűségnek egy maximuma van ebben a kiváltságos magasságban.**

* * *

b) Teljesen analóg gondolatmenetet végzünk abban az esetben is, ha a függőleges légoszlopnak az n-edik szakasza egy b) tipusú tartományba (sztratoszférába) esik bele.

Az ilyen tartományokban a δ_g energiasűrűséget a (10b) képlet szolgáltatja. Ennek h szerinti differenciálása útján azt találjuk, hogy az ilyen tartományok h magasságú szintjében δ_g-nek felfelé való növekedése vagy csökkenése

* Pillanatnyilag elintézetlenül maradtak az $A_n = h_n$ és $A_n = h_{n+1}$ különleges esetek. Ezen a két szinguláris helyen eddigi gondolatmenetünk nem alkalmazható, mert itt δ_g elveszíti a differenciálhatóságát, amire alább még visszatérünk.

a következő feltételen múlik: δ_g felfelé nő, vagy nem változik, vagy csökken *aszerint*, hogy

$$h \lessgtr \frac{T_n}{f}$$

A következőkben kényelmi okokból és az analógia kidomborítása végett ezt a jelölést fogjuk használni:

$$B_n = \frac{T_n}{f} \tag{11b}$$

aminek bevezetésével ahhoz a tételhez jutottunk, hogy a sztratoszférai tartományok számára is megadható egy hosszúság-dimenziójú mennyiség, B_n, amely eldönti, hogy a δ_g energiasűrűség az illető tartományon belül miként viselkedik a függőleges mentén. Ha a (11b) képlettel megadott B_n kisebb, mint a tartomány alsó határának magassága (*b*/1. aleset) akkor δ_g az egész tartományon át felfelé monoton fogy; ha B_n nagyobb, mint a tartomány felső határának magassága (*b*/2. aleset) akkor δ_g az egész tartományon át felfelé monoton nő; végül, ha B_n *beleesik* magába a tartományba (*b*/3. aleset), vagyis, ha

$$h_n < B_n < h_{n+1}$$

akkor ebben a kiváltságos magasságban az energiasűrűségnek egy maximuma található.

A δ_g energiasűrűség differenciálhányadosának előjelén alapuló eddigi vizsgálataink természetesen érvényüket veszítik a következő néhány szinguláris magasságban:

$$h_1, h_2, h_3, \ldots$$

amelyek a légkör egymásfeletti tartományainak az elhatároló magasságai. Ugyanis ezek a h_n helyek a δ_g függvénynek szakadási helyei, ahol δ_g ugrásszerűen megy át a (10a) és (10b) képletek közül az egyikből a másikba. Ezért δ_g ezeken a szinguláris helyeken nem differenciálható. Következéskép eddigi meggondolásaink csak a légköri tartományok *belsejére* érvényesek, de a h_n határmagasságokra nézve nincsen bizonyító erejük. Ennekfolytán az eddigiek még nem zárják ki azt a lehetőséget, hogy a δ_g energiasűrűségnek további maximumai lehessenek (a légköri tartományok belsejében A_n illetőleg B_n magasságban fekvő szinteken *kívül*) esetleg még a h_n elválasztószintek valamelyikében is.

Eddigi eredményeink tehát annak kimondására jogosítanak, hogy a függőleges légoszlopban a nehézségi potenciális energiának *legfeljebb kétszerannyi számú* maximumhelye lehet, mint ahány egymásfeletti tartományból a légkör összetevődik. Ugyanis minden tartomány *belsejében* lehet legfeljebb egy maximum (éspedig a hőváltozási tartományokban A_n magasságban és a sztratoszférákban B_n magasságban, feltéve, hogy az A_n illetőleg B_n magasság tényleg beleesik a tartomány belsejébe); továbbá esetleg még lehet maximuma δ_g-nek a h_n elválasztó magasságokban is.

A továbbiakban azonban kimutatjuk, hogy ezekből a lehetséges maximumokból minden időjárási helyzetben *egy és csakis egy* valósul meg; továbbá kimutatjuk, hogy a nehézségi potenciális energiának ez a maximumszintje mindig a légkör két legalsó tartománya közül az egyikbe esik bele (mégpedig legtöbbször a troposzférába).

V.

Alkalmazás a légkör két legalsó tartományára: a troposzférára és sztratoszférára

Minthogy az időjárás legfontosabb folyamatai a légkör két legalsó tartományában játszódnak le (a troposzférában és a legalsó sztratoszférában), azért a meteorológiai energetikában ez a két tartomány követel meg legnagyobb figyelmet. Kiemelkedő fontosságú speciális eseteit képviselik tehát a IV. alatt kifejtett tételnek azok, amelyek a troposzférában ($n=1$) és a közvetlenül felette következő első sztratoszférában ($n=2$) adják meg a δ_g energiasűrűség függőleges viselkedését.

A troposzféra esetében a (11a) képlet annyiban egyszerűsödik, hogy a h_1 kezdőmagasság a légkör alsó szélével esik egybe: $h_1=0$, és így a troposzféra számára

$$A_1=\frac{T_1}{f} \tag{12a}$$

miáltal a tételünk a következő speciális alakot ölti:

A δ_g energiasűrűségnek maximuma van a troposzféra belsejében a (12a) képlettel megadott A_1 magasságban* *abban és csakis abban az esetben*, ha az A_1 magasság még beleesik a troposzféra belsejébe, (ami lényegében azt a feltételt jelenti, hogy

$$\frac{T_1}{f}<h_2 \tag{13a}$$

legyen, ahol h_2 a troposzféra és sztratoszféra közti határfelületnek, az ú. n. *tropopauzának* a magassága); továbbá pedig maximuma van az első sztratoszféra belsejében a

$$B_2=\frac{T_2}{f} \tag{12b}$$

magasságban *abban és csakis abban az esetben*, ha ez a magassági szint nincs többé benne a troposzférában, hanem a sztratoszféra belsejébe esik

* Az A_1 magasságot az irodalomban „a homogén sűrűségű légkör magasságának" szokás nevezni, mert könnyen kimutatható, hogy *ha* az egész légkör egyetlen troposzférából állna, amelynek függélyes hőcsökkenési együtthatója $\gamma=f$, abban az esetben a légsűrűség (8a) képletéből a h magasság kiesik, a légsűrűség tehát minden magasságban ugyanaz lenne; továbbá könnyű kimutatni, hogy ebben a légkörben a (7a) képlettel megadott légnyomás A_1 magasságban zérussá válik, tehát A_1 ennek a légkörnek a magasságával egyenlő.

bele, (ami lényegében azt a feltételt jelenti, hogy

$$\frac{T_2}{f} > h_2 \qquad (13b)$$

legyen.)*

Ez a tétel könnyen áttekinthető helyzetet teremtene abban az esetben, ha h_2 az időváltozások alkalmával nem változna meg. Ismeretes azonban, hogy a tropopauza magassági fekvése az idő folyamán nagy eltolódásokat szenved. Ha rendszeresen végzett aerológiai megfigyelésekből pl. naponként vagy félnaponként megállapítjuk h_2 és B_2, valamint talajmenti észlelésekből A_1 értékét, azt találjuk, hogy h_2 az esetek egy részében nagyobb A_1 és B_2-nél, máskor pedig kisebb náluk, vagy a két érték közé esik. Eszerint a (13a) feltételi egyenlőtlenség bizonyos időjárási helyzetekben beteljesül, más időjárási helyzetekben ellenben nincs kielégítve. Hasonlókép a (13b) feltételi egyenlőtlenség is az időjárás ingadozásai szerint hol beteljesül egy megadott légoszlopban, hol pedig nem.

Közelebbről a megfigyelési anyag azt mutatja, hogy az időjárási helyzetek többségében (13a) teljesítve van, vagyis a nehézségi potenciális energiának *többnyire* van maximuma a troposzféra belsejében. Az időjárási helyzetek egy sokkal kisebb részében ellenben (13b) teljesül be, vagyis *aránylag kevés* olyan időjárási helyzet lép fel, amelyben a nehézségi potenciális energiának van maximuma a sztratoszféra belsejében.

A két feltétel azonban nem teljesülhet egyidejűleg,** és így sohasem fordulhat elő, hogy a δ_g energiasűrűségnek egyidejűleg lehessen maximuma a troposzféra belsejében is és a sztratoszféra belsejében is.

* Szigorúan véve a feltételi egyenlőtlenségek így hangzanának:

A troposzféra belsejébe eső maximum létének szükséges és elegendő feltétele, hogy

$$h_1 < \frac{T_1}{f} < h_2$$

a sztratoszféra belsejébe eső maximum létének feltétele pedig

$$h_2 < \frac{T_2}{f} < h_3$$

Tekintettel azonban arra, hogy $h_1 = 0$, az első egyenlőtlenség első része triviálisan teljesül; hasonlókép h_3, a sztratoszféra felső határának magassága olyan nagy (átlagosan $3{,}5 \cdot 10^6$ cm) az előforduló T_2/f értékekhez képest, hogy a második egyenlőtlenség második fele is triviálisan teljesülőnek tekinthető; így a feltételi egyenlőtlenségek *lényeges részei* a (13a) és (13b) alakra zsugorodnak össze.

** Ugyanis a (12a) és (12b) definiciós egyenletek különbségét képezve,

$$A_1 - B_2 = \frac{T_1 - T_2}{f}$$

ahol a jobb oldal bizonyosan pozitív, mert a T_1 talajmenti hőmérséklet mindig lényegesen magasabb, mint a sztratoszféra T_2 hőmérséklete. Eszerint

$$A_1 > B_2$$

amiből következik, hogy a (13a) és (13b) egyenlőtlenségek ellentmondanak egymásnak: a két feltételi egyenlőtlenség közül minden adott időpontban legfeljebb az egyik teljesülhet be.

Előfordulhat ellenben olyan időjárási helyzet, amelyben a (13a) és (13b) egyenlőtlenségek közül *egyik sem* teljesül be, vagyis A_1 a tropopauza *fölé* esik és B_2 a tropopauza *alá* esik:

$$A_1 > h_2 > B_2 \tag{14}$$

illetőleg A_1 és B_2 explicit értékeit behelyettesítve

$$T_1 > h_2 f > T_2$$

Ebben az esetben a troposzférában minden h magasság kisebb A_1-nél (tehát a δ_g energiasűrűség a IV. pont értelmében az egész troposzférán át felfelé monoton növekedni fog); egyúttal azonban a sztratoszférában minden h magasság nagyobb B_2-nél (tehát δ_g az egész sztratoszférán át monoton csökkenni fog). Ennek a két eredménynek az egybevetéséből következik, hogy a szóbanlévő esetben δ_g-nek a troposzféra és sztratoszféra elválasztó felületében (a h_2 magasságban) van maximuma.

Ezek alapján a δ_g energiasűrűségnek a troposzférában és sztratoszférában való függélyes viselkedését következőkben foglalhatjuk össze. A δ_g energiasűrűség a troposzféra alján zérus; innen felfelé növekedik és bizonyos magasságban maximumot ér el; mégpedig a maximum a következő magasságok valamelyikében áll be:

vagy az A_1 magasságban [éspedig azokban a légoszlopokban, amelyeknél ez a magasság benne fekszik a troposzféra belsejében, vagyis amelyekre a (13a) feltétel beteljesül];

vagy a B_2 magasságban [éspedig azokban a légoszlopokban, amelyeknél ez a magasság benne fekszik a sztratoszféra belsejében, vagyis amelyekre a (13b) feltétel beteljesül];

vagypedig a tropopauzában [éspedig azokban a légoszlopokban, amelyeknél A_1 felül fekszik a troposzférán és B_2 alul fekszik a sztratoszférán, vagyis amelyekre a (14) feltétel beteljesül].

Eszerint a δ_g energiasűrűségnek a légkör két legalsó tartományában mindig létezik *egy és csakis egy* maximuma, éspedig a maximális energiasűrűségű szint mindig a következő két magassági szint közé esik:

$$\frac{T_2}{f} \text{ és } \frac{T_1}{f}$$

Azt is megállapíthatjuk, hogy a most kijelölt magassági sáv, amely a maximális potenciális energiájú szintet okvetlen magában foglalja, *meglehetősen vékony* a troposzférának és sztratoszférának az egész vastagságához képest. Ugyanis az aerológiai mérésekből kiolvasható, hogy az $A_1 - B_2$ magasságkülönbség általában csak 1-2 km-t tesz ki, ellenben a troposzféra átlagos vastagsága nálunk 11 km, a sztratoszféráé pedig több, mint 20 km.

Eszerint ez a két kiváltságos magassági szint (amelyek az energiasűrűségi maximumnak a lehetséges legalsó és legfelső helyzetét jelölik ki az illető légoszlopban) viszonylag közel esik egymáshoz. Másszóval, a maximális potenciális energiájú szint minden megadott légoszlopban egy meglehetősen szűk magassági intervallumba esik bele és sohasem fekszik távol a tropopauzától; időváltozások alkalmával azonban a tropopauza magasságával együtt lényeges eltolódásoknak lehet alávetve.

VI.

A δ_g energiasűrűség viselkedése a légkör felsőbb tartományaiban

Hogy a IV. pontban felállított tételt a légkör többi tartományaiban ($n > 2$) is alkalmazzuk, avégből táblázatban összeállítottuk ezeknek a tartományoknak az átlagos magassági és légállapoti adatait.*

I. TÁBLÁZAT

A légkör felsőbb tartományainak átlagos magassági és légállapoti adatai

Sorszám n	A légköri taromány neve	Jellege	Átlagos kezdőmagassága km	Hőmérs. a kezdőszintben K°	Az a) tipusú tartományoknál		A b) tipusú tartományoknál
					γ_n C/cm	A_n km	B_n km
3	alsó ozonoszféra	a) tipusú	35	220	$-6 \cdot 10^{-5}$	0,3	—
4	ozonosztratoszféra	b) „	55	340	—	—	10,0
5	második troposzféra	a) „	70	340	$5 \cdot 10^{-5}$	20,2	—
6	harmadik sztratoszf.	b) „	85	270	—	—	7,8

Egybevetve a táblázat h_n oszlopában álló adatokat az A_n illetőleg B_n oszlopokban látható adatokkal, egyöntetűen megállapíthatjuk, hogy a táblázatban szereplő minden egyes tartománynak a kezdőmagassága *nagyobb,* mint az illető tartományhoz tartozó A_n és B_n érték. Ez pedig a IV. alatti tétel értelmében annyit tesz, hogy a δ_g energiasűrűség ezeknek a légköri tartományoknak a belsejében mindenütt monoton csökken a h magasság növekedésével.

VII.

A δ_g energiasűrűség függőleges változásának teljes áttekintése

Összefoglalva az V. és VI. pontban bebizonyított tételeket, következőkép jellemezhetjük a nehézségi potenciális energiának a légkör különféle magassági szintjei között való megoszlását.

1) A nehézségi potenciális energiának az energiasűrűsége, δ_g, a légkör alján zérus; innen felfelé eleinte sebesen növekedik; feljebb — a légsűrűség csökkenése következtében — a növekedés meglassul, és az energiasűrűség egy maximumot ér el oly magasságban, amely az időváltozások alkalmával bizonyos ingadozásokat mutat.

* V. ö.: *Aujeszky:* A légkör függőleges tagozódása egymás felett következő troposzférákba és sztratoszférákra, Időjárás, *54,* (1950.) 74-79.

2) A δ_g energiasűrűség maximuma az időjárási helyzetek többségében a troposzféra belsejének felső rétegeibe esik (éspedig A_1 magasságba). Bizonyos ritkábban előforduló időjárási helyzetekben azonban a maximum a troposzféra felső határára esik (h_2 magasságba), vagy a sztratoszféra belsejének alsó rétegeibe esik (B_2 magasságba).

3) A függélyes légoszlopnak abban a részében, amely a 2) alatt leírt kiváltságos szinten felül fekszik, a δ_g energiasűrűség felfelé sehol sem növekedik, vagyis δ_g-nek a 2) alatti maximumon kívül nincsen több relatív maximuma a légoszlopban.

4) Ellenben nem zárható ki az a lehetőség, hogy a δ_g függélyes változását ábrázoló görbének inflexiós pontjai lehessenek az egyes légköri tartományok elválasztó szintjeiben (a h_n-nel jelölt magasságokban).

5) Ezektől a szinguláris helyektől eltekintve, a δ_g energiasűrűség felfelé *monoton csökken* a sztratoszférának a legnagyobb részében és a felette lévő összes légköri tartományokban.

6) A 2) alatt mondottak azt is megadják, hogy a maximális potenciális energiájú szint magassági fekvése miként változik meg az *időváltozások* alkalmával, továbbá, hogy milyen fekvésbeli különbségek mutatkoznak a földnek a külünböző *éghajlatai* alatt. A meleg légtömegekben és a föld meleg éghajlatai alatt magasabban fekszik, a hideg légtömegekben és hideg éghajlatok alatt alacsonyabban található meg.

VIII.

A talált eredmények értékelése, különös tekintettel folyamatbanlévő további vizsgálatokra

A fentiekben közölt eredmények élesen megmutatják, hogy a hőenergiának és a nehézségi potenciális energiának a függőleges eloszlása nagyonis eltérő: a hőenergiánál az energiasűrűség a legnagyobb a talajon és felfelé monoton csökken a légkör felső határáig; a nehézségi potenciális energiánál ellenben az energiasűrűség zérusból kiindulva felfelé eleinte nő, azután ismét zérusig csökken.

Eszerint a légoszlop valamely h magasságában a δ_Q energiasűrűség értéke igen különböző lehet a δ_g energiasűrűség értékétől. Időváltozások alkalmával az egyik vagy mindkét energiasűrűség értéke megváltozhat, de a két változás értéke nagyon különböző lehet.

Képezzük a két energiasűrűség integráljait az egész légoszlopon át. Az egyik integrál egyenlő a (egységnyi alapterületű) légoszlop egész hőenergiájával (E_Q), a másik a légoszlop egész nehézségi potenciális energiájával (E_g):

$$E_Q = \int_{h=0}^{H} \delta_Q dh, \qquad E_g = \int_{h=0}^{H} \delta_g dh$$

ahol H a légkör felső határának magasságát jelenti.

Az időváltozások alkalmával a légoszlop E_Q és E_g energiakészletei nyilván megváltoznak. Mivel azonban már maguknak az integranduszoknak a változásai is egymástól igen különbözők lehetnek, azt várhatjuk, hogy az E_Q és E_g integrálok értékváltozásai közt nincsen semmiféle szorosabb kapcsolat. Másszóval valószínűnek látszik, hogy a légoszlop hőenergiájának és nehézségi potenciális energiájának a megváltozása — az időváltozások alkalmával — egymástól függetlenül történik.

Ennek ellenére ki fogjuk mutatni egy következő dolgozatban, hogy a légoszlopnak ez a két energiakészlete csak egy állandó tényezőben különbözik egymástól:

$$E_Q = 2{,}5 E_g. \tag{15}$$

Ez a tétel többek között a légkörnek azt a meglepő energetikai tulajdonságát fedi fel, hogy a kétféle energiakészlet mindig csak *együtt* és mindig *egymással arányosan* változhat meg. Ez annál érdekesebb, mert a hőenergia, mint kifejtettük, mindig elsősorban a légkör alsó rétegeiben van jelen, ellenben a potenciális energia nagyrésze a közepes magasságú rétegekben. A különböző szintekben székelő energiakészletek megváltozása azonban mégis mindig úgy folyik le, hogy az egész légoszlop hőenergiája arányos marad a légoszlop nehézségi potenciális energiájával.

A most előzetes közlésként felemlített (15) tétel bizonyításával és messzemenő meteorológiai következményeivel részletesen foglalkozunk előkészületben lévő dolgozatunkban.

IX.

A hőenergia és a nehézségi potenciális energia együttes mennyisége a légkör különféle magassági szintjeiben

Az előző pontokban külön-külön vizsgáltuk ennek a két energiafajtának a függőleges mentén való eloszlását a légkörben (ami a δ_Q és δ_g energiasűrűségek magasságszerinti differenciálhányadosaival jellemezhető); befejezésül viszont a két energiakészlet *összegét* vizsgáljuk meg ebből a szempontból (amihez a $\delta_Q + \delta_g$ összeg differenciálhányadosának taglalása nyitja meg az utat).

Az előzők alapján ugyanis módunkban van még ennek az energiaösszegnek a függélyes viselkedésére nézve is egy érdekes tételt felállítani.

A légkörben felfelé haladva, a $\delta_Q + \delta_g$ összeg első tagja monoton fogy, a második tag viszont eleinte lényegesen növekedik. *Állítjuk azonban, hogy az első tag csökkenése mindenkor felülmúlja a második tag növekedését, úgy hogy a két energiasűrűségnek az összege már a föld felszínétől kezdve monoton csökken felfelé.*

A $\delta_Q + \delta_g$ mennyiség ezen tulajdonságának igazolása végett felhasználjuk azt a fentebbi megállapításunkat, hogy a két energiasűrűség *differenciálható függvénye* a magasságnak a függőleges légoszlop összes egymásfeletti tartományainak a belsejében (és csak az egyes övezetek elválasztó szintjeiben veszti el a differenciálhatóságát). Eszerint a h_n-nel jelölt szinguláris helyek kivételével mindenütt létezik a

$$\frac{d}{dh}(\delta_Q+\delta_g) \tag{16}$$

differenciálhányados, és azt kell bizonyítanunk, hogy ez a differenciálhányados *mindenütt negatív.*

Ennek elérése végett a δ_Q energiasűrűség (3) alatti képletét differenciáljuk a h magasság szerint és figyelembevesszük a légkör jólismert sztatikus alapegyenletét, amely szerint

$$\frac{dP}{dh}=-gD$$

miáltal (3)-ból kapjuk:

$$\frac{d\delta_Q}{dh}=-2{\cdot}5gD$$

és így a vizsgálandó (16) kifejezést következőkép írhatjuk:

$$\frac{d}{dh}(\delta_Q+\delta_g)=-2{,}5gD+\frac{d\delta_g}{dh}$$

vagy (4) felhasználásával

$$\frac{d}{dh}(\delta_Q+\delta_g)=-2{,}5gD+g\left(\frac{dD}{dh}h+D\right) \tag{17}$$

Hogy ez a kifejezés a légoszlop összes egymásfeletti tartományainak a belsejében tényleg mindenütt negatív, azt külön-külön kell igazolnunk a troposzférára, a sztratoszférára és a sztratoszféra feletti többi tartományokra.

a) Tételünknek a troposzférára vonatkozó része következőkép igazolható:

A troposzféra a légkör függőleges tartományai közül a legalsó, és a III. pontban kifejtett osztályozás szerint a légköri tartományok a) tipusába tartozik. Ezért a (17) képletben szereplő D légsűrűséget a troposzférában úgy kapjuk meg, hogy az a) tipusú tartományokban érvényes (8a) légsűrűségi képletnek az $n=1$ speciális esetét vesszük. Figyelembevéve még, hogy a troposzférában a tartomány kezdőszintje egybeesik az egész légkör kezdőszintjével, z helyébe h-t írhatunk és így kapjuk:

$$D=D_1\left(1-\frac{\gamma_1}{T_1}h\right)^{\frac{f}{\gamma_1}-1}$$

illetőleg f/γ_1-et röviden a_1-nek nevezve, és az (5a) kapcsolatot figyelembevéve, a légsűrűség jólismert troposzférai képletéhez jutunk:

$$D=D_1\left(\frac{T}{T_1}\right)^{a_1-1} \tag{18}$$

Ujból kihasználva, hogy $f>\gamma_1$ és így $a_1-1\neq 0$, a D légsűrűség differenciálása következőkép alakul:

$$\frac{dD}{dh}=\frac{D_1}{T_1^{a_1-1}}\frac{d}{dh}T^{a_1-1}=\frac{D_1}{T_1^{a_1-1}}(a_1-1)\,T^{a_1-2}\frac{dT}{dh}$$

ami (18) alkalmazásával így írható:

$$\frac{dD}{dh}=(a_1-1)\frac{D}{T}\frac{dT}{dh}$$

ahol az utolsó tényező (5a) alapján $=-\gamma_1$, tehát

$$\frac{dD}{dh}=-(a_1-1)\gamma_1\frac{D}{T} \tag{19}$$

A (18) és (19) kifejezéseket (17)-be helyettesítve, végig kiemelhető a gD pozitív mennyiség, amelynek a kifejezés előjelére nincsen kihatása, tehát elhagyható:

$$\operatorname{sg}\frac{d}{dh}(\delta_Q+\delta_g)=\operatorname{sg}\left\{-2{,}5-\gamma_1(a_1-1)\frac{h}{T}+1\right\}=$$

$$=\operatorname{sg}\left\{-1{,}5-\gamma_1(a_1-1)\frac{h}{T}\right\}$$

Minthogy γ_1, a_1-1, h és T mind pozitívek, a jobboldali kifejezés mindíg negatív, úgy amint állítottuk.

b) Állításunknak a sztratoszférára vonatkozó részét úgy igazoljuk, hogy (17)-be a légsűrűség sztratoszférai képletét helyettesítjük be. Ezt a (8b) képlet $n=2$ speciális esete szolgáltatja:

$$D=D_2e^{-\frac{f}{T_2}z} \tag{20}$$

ahol (6) értelmében

$$z=h-h_2$$

tehát

$$\frac{dD}{dh}=\frac{dD}{dz}=-\frac{f}{T_2}D$$

Ezt (17)-be behelyettesítve és az előjel szempontjából közömbös gD pozitív mennyiséggel kiosztva, kapjuk, hogy a sztratoszférában

$$\operatorname{sg}\frac{d}{dh}(\delta_Q+\delta_g)=\operatorname{sg}\left\{-1{,}5-\frac{f}{T_2}h\right\}$$

vagyis a differenciálhányados itt is negatívnak bizonyul.

c) A sztratoszféra feletti összes tartományok belsejére nézve a $\delta_Q+\delta_g$ összeg függőleges csökkenése *triviális állítás,* mert ezekben a tartományokban a δ_Q-n kívül már δ_g is (mint a VI. pontban kimutattuk) felfelé monoton csökken.

Az a), b) és c) alatti részbizonyítások együttvéve állításunknak az egész függőleges légoszlopban való helyességét igazolják, kivéve a h_n-nel jelölt választószinteket, mert ezeken a szinguláris helyeken — a differenciálhányadosok hiányzása miatt — nem zárható ki az a lehetőség, hogy a $\delta_Q + \delta_g$-t ábrázoló görbének inflexiós pontja fordulhasson elő.

X.

A felállított energetikai tételek összefoglalása

A dolgozatunk keretében kimondott és igazolt meteorológiai-energetikai tételek lényegét a következőkben összegezzük.

Egy függőleges légoszlop hőenergiája és nehézségi potenciális energiája úgy oszlik meg a különböző magassági szintek között, hogy a *hőenergiának* az energiasűrűsége az egész légoszlopban felfelé monoton csökken; a *nehézségi potenciális energiának* az energiasűrűsége felfelé eleinte nő és maximumot ér el olyan magassságban, amely a tropopauza közelében fekszik, innen kezdve pedig a légkör felső határáig monoton csökken; *a két energiasűrűség összege* pedig az egész légoszlopon át felfelé monoton csökken.*

Az Országos Meteorológiai Intézet
Budapest.

* A kisszámú szinguláris szintet figyelmen kívül hagyva, ahol csökkenés helyett változatlanság is fennállhat.

ATOMELEKTRONOK SAJÁTFÜGGVÉNYÉNEK ÉS ENERGIÁJÁNAK KÖZELÍTŐ MEGHATÁROZÁSÁRA SZOLGÁLÓ ANALITIKUS MÓDSZERRŐL

GÁSPÁR REZSŐ

Bemutatta Gombás Pál r. tag az 1952. június 16-án tartott felolvasó ülésen

Bevezetés

Anyagszerkezeti problémák elméleti vizsgálata szempontjából lényeges, hogy az atomok elektroneloszlását és az elektronok lehetséges energiaértékeit ismerjük. A probléma hullámmechanikai megoldására több módszer kínálkozik, melyek közül azonban csak kettőt, a variációs módszert és a self-consistent field módszert alkalmazták rendszeresen ilyen természetű atomproblémák megoldására.[1] Mindkét módszerrel azonban a felmerülő számolástechnikai nehézségek miatt csak korlátolt számban végeztek számításokat. A variációs módszer alkalmazását az nehezíti meg, hogy a magasabb rendszámú elemeknél számításba veendő nagyobb energiájú elektronok sajátfüggvényei igen bonyolult alakúak s ennek megfelelően a variálandó energiakifejezés is bonyolult. A variációs módszernek nagyobb rendszámú elemekre való alkalmazását akadályozó nehézségeket újabban a statisztikus atomfizika segítségével sikerült elhárítani.[2] A self-consistent field módszer alkalmazásában az jelenti a fő nehézséget, hogy a módszerrel együttjáró numerikus számolási munka, különösen nagyobb rendszámú elemek esetében olyan nagymennyiségű, hogy csak megfelelően megválasztott, különösen erre a célra szolgáló gépekkel lehet belátható időn belül elvégezni.

A jelen dolgozat célja, hogy egy a statisztikus atomfizikától tanult jó gondolat segítségével az eddig végzett self-consistent field számítások potenciáljait a periódusos rendszernek csaknem összes elemeire általánosítsa és így fontos atomfizikai állandóknak a periódusos rendszer összes elemeire való meghatározását tegye lehetővé. Első alkalmazásként a potenciált univerzális potenciál-függvényül használtuk fel az elektron Schrődinger-egyenletében. Így sikerült egy analitikus közelítő módszer segítségével a periódusos rendszer összes elemeire az $1s$-, $2p$-, $3d$-, $4f$-elektronok sajátfüggvényeit és energiatermjeit meghatározni.

A potenciál meghatározása

Vizsgáljunk egy semleges Z rendszámú atomot. Ennek potenciálja

$$V = \frac{Z_p e}{r}, \qquad (1)$$

ahol $Z_p e$ az effektív magtöltést, e az elemi töltést jelöli és r a szóbanlévő helynek az atommagtól való távolsága. Z_p egy semleges atomban a következőképpen változik. A mag helyén értéke megegyezik a rendszámmal, Z-vel. A magtól távolodva az elektronok árnyékoló hatása kezd érvényesülni s így az effektív magtöltés értéke csökken. A magtól nagyobb távolságra, semleges atomról lévén szó, igen gyorsan eltűnik. Z_p lefutását lényegében az atomról-atomra változó rendszám és elektronfelhő határozzák meg. Így az effektív magtöltés lényegesen más lefutást mutat a különböző rendszámú atomokra vonatkozólag. Megpróbálhatjuk azonban úgy transzformálni, hogy lefutásuk jó közelítéssel megegyezzék. Erre a transzformációra útmutatást a statisztikus elmélettől nyerhetünk.

A statisztikus atomelméletben a jól ismert Thomas—Fermi egyenlet[8]

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = \frac{\varphi^{3/2}}{x^{1/2}} \tag{2}$$

határozza meg az atomi rendszerben uralkodó potenciáleloszlást. A (2)-ben szerepet játszó $\varphi(x)$ függvény a potenciállal

$$\varphi(x) = \frac{r}{Ze}(V - V_0) \tag{3}$$

képlet szerint függ össze. (3)-ban a már ismert mennyiségeken kívül szereplő V_0 állandó semleges atomokra 0, és az x változó az r-rel az

$$x = \frac{r}{\mu}, \quad \mu = \frac{0{,}8853\, a_0}{Z^{1/3}} \tag{4}$$

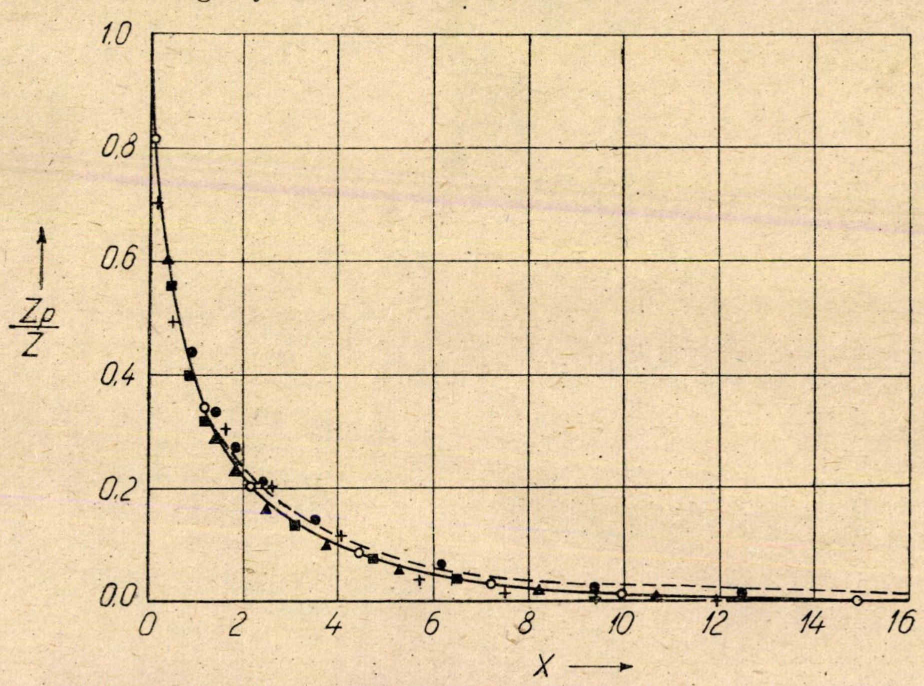
egyenlet szerint függ össze. (2)-nek a $\varphi(0) = 1$, $\varphi(x_0) = 0$ és $\varphi'(x_0) = 0$ határfeltételek melletti, azaz a semleges atomokra vonatkozó megoldása $\varphi_0(x)$ univerzális függvény.

Az effektív magtöltés szoros összefüggésben van a $\varphi_0(x)$ függvénnyel. Definiáljunk az (1)-ben szereplő Z_p-hez hasonlóan a statisztikus atomelméletben is egy effektív magtöltést Z_p'-t. Behelyettesítve (1)-et (3)-ba és tekintetbe véve, hogy $V_0 \equiv 0$, nyerjük, hogy egy semleges atomra a statisztikus atomelméletben

$$\varphi_0(x) = \frac{Z_p'}{Z}. \tag{5}$$

Tehát Z_p'/Z a *redukált effektív magtöltés* a Thomas—Fermi-féle statisztikus atommodellben semleges atomokra vonatkozóan univerzális függvény.

A statisztikus elmélet Thomas—Fermi-féle közelítésének a hullámmechanikai self-consistent field módszerben a kicserélődés nélküli, ú. n. Hartree-féle közelítés felel meg. Ha Z_p'/Z univerzális a statisztikus elméletben, akkor várható, hogy a Hartree-féle redukált effektív magtöltések, Z_p/Z-k sem túlságosan különböznek egymástól, feltéve, ha megfelelő koordináta rendszerbe transzformáljuk őket. A statisztikus elmélet szerint a (4) alatt definiált x változót kell független változónak bevezetni, hogy a várt egységes lefutás szembetűnjék. Az 1. ábrán tüntettük fel néhány elem atomjának a self-consistent field módszer Hartree közelítésében számolt redukált effektív magtöltéseit. Nem tüntettünk fel minden számított pontot, hogy áttekinthető legyen az ábra. Az ábrán ugyancsak feltüntettük szaggatott vonallal kihúzva a Thomas—Fermi-féle statisztikus atommodell redukált effektív magtöltését, a $\varphi_0(x)$-t. Először is szembetűnik, hogy a self-consistent field módszerrel számított redukált effektív magtöltések szórása igen csekély, különösen nyilvánvaló ez akkor, ha tekintetbe vesszük, hogy annyira különböző rendszámú elemek vannak köztük, mint a berillium ($Z=4$), vas ($Z=26$) és a higany ($Z=80$). Jól látható az is, hogy a Thomas—Fermi módszerrel számított redukált effektív magtöltés az atom belső részeiben igen jól közelíti a self-consistent field módszerrel számítottat.



1. ábra. A redukált effektív magtöltések ábrázolása univerzális koordinátarendszerben.
A „self-consistent field" módszerrel számított pontok:
○ Hg ■ W ▲ Kr ● Ca + Be,
---------------- A Thomas—Fermi elmélet $\varphi_0(x)$ görbéje,
———————— $Z_p/Z = e^{-\lambda_0 x}/(1+A_0 x)$ a (7) alatti paraméter értékekkel.

A magtól nagyobb távolságra azonban a két módszer lényegesen különböző eredményt ad, a self-consistent field módszerrel számított görbék exponenciálisan eltűnnek, a Thomas—Fermi módszerrel számított görbe pedig ezek fölött halad és sokkal lassabban, úgy mint $1/r^3$ tűnik el. Az 1. ábrán jól látható, hogy a redukált effektív magtöltés a self-consistent field módszer Hartree-féle változatában is jó közelítéssel univerzális függvénynek tekinthető. Azt a megjegyzést kell azonban tennünk, hogy ez az állítás csak a választott koordinátarendszerben igaz, tehát az x változó bevezetésével. Fordítva viszont igaz, hogy az x változóról r-re térve át, megkaphatjuk az egyes atomok effektív magtöltésének lefutását és így (1) segítségével a potenciált.

A további lépéseket igen változatos módon tehetjük meg. Bármely elemre kaphatunk közelítő effektív magtöltés értékeket, ha egy elemre pl. Hg-ra a már elvégzett kicserélődés nélküli self-consistent field számításokat a (4) transzformáció segítségével a kívánt rendszámnak megfelelő koordinátarendszerbe transzformáljuk. Ennél a transzformációnál természetesen tekintetbe kell venni, hogy a redukált effektív magtöltés Z_p/Z az univerzális függvény és így a transzformáció alkalmával ennek értékei mennek át változatlanul. Így jó numerikus közelítő potenciált nyerhetünk, mely a maghoz közeleső részeken közelít jól, de amely a magtól távolabbeső részeken is a hullámmechanika által megkövetelt lefutást mutatja.

Egy igen fontos másik lehetőség az, hogy olyan analitikus kifejezést keressünk, amelyik a redukált effektív magtöltés lefutását az összes atomokra megadja. Igen jó analitikus alaknak bizonyul

$$\frac{Z_p}{Z}=\frac{e^{-\lambda_0 x}}{1+A_0 x}, \tag{6}$$

mert csupán két paramétert tartalmaz és a λ_0 és A_0 paraméterek célszerű megválasztása esetén igen jól közepeli Z_p/Z-nek az 1. ábrán látható értékeit. Az 1. ábrán látható kihúzott görbe (6)-nak

$$\lambda_0=0{,}1837 \quad \text{és} \quad A_0=1{,}05 \tag{7}$$

paraméter értékekhez tartozó görbéje és igen jól közelíti a nehéz atomok Z_p/Z-jét. Az I. táblázatban közöljük összehasonlítás céljából a higanyatomra meghatározott Z_p/Z értékeket mind a self-consistent field módszer, mind a mi általunk (6)-ból számított esetben. Tekintve, hogy analitikus formulánk csupán két paramétert tartalmaz, a megegyezés kitűnőnek nevezhető.

I. TÁBLÁZAT

Néhány redukált effektív magtöltés érték a Hg atomra vonatkozólag

x	Z_p/Z Hartree szerint	$Z_p/Z = e^{-\lambda_0 x}/(1+A_0 x)$
0,19	0,794	0,801
0,517	0,595	0,592
1,295	0,345	0,339
2,32	0,1879	0,1905
3,52	0,1134	0,1140
4,9	0,0678	0,0680
7,45	0,0289	0,0297
9,6	0,0161	0,0162
15,0	0,005	0,0026

Az így minden atom számára előállított Z_p/Z-t számos probléma megoldására használhatjuk fel. Első alkalmazásként megmutatjuk, hogy a (6) és (1) kombinálásával nyert potenciált az egy elektronra vonatkozó Schrődinger-egyenletben univerzális potenciálfüggvényként használva a periódusos rendszerben az összes elemek atomjaiban lévő $1s$-, $2p$-, $3d$-, $4p$-elektronok sajátfüggvényeit és energiatermjeit jó közelítéssel meghatározhatjuk.

A Schrődinger-egyenlet felállítása és megoldása

A többelektronos atomoknál használatos egyelektron-közelítést alkalmazva feltételezzük a self-consistent field módszer Hartree-közelítéséhez hasonlóan, hogy a teljes atom sajátfüggvénye az egyes elektronok sajátfüggvényeiből egyszerű szorzatalakban állítható elő és hogy az elektronok egy centrálszimmetrikus potenciáltérben mozognak. Mivel feltevésünk szerint az elektronok mozgását meghatározó potenciál mindig centrálszimmetrikus, a sajátfüggvény ψ szögtől függő része gömbfelületi függvény. Egy elektron teljes sajátfüggvénye tehát

$$\psi = R(r)\, Y_{lm}(\vartheta, \varphi) \tag{8}$$

lesz. (8)-ban l és m a vizsgálat alá vett elektron mellék- és mágneses kvantumszámait és Y_{lm} az l és m indexű gömbfelületi függvényt jelenti. A radiális részt, $R(r)$-t meghatározó Schrődinger-egyenlet pedig a következő alakban írható

$$\frac{d^2 f}{dr^2} + \left[\frac{8\pi^2 m}{h^2}\left(\varepsilon + \frac{Z_p e^2}{r}\right) - \frac{l(l+1)}{r^2}\right] f = 0, \tag{9}$$

ahol $f(r) = rR(r)$. (9)-be (6)-ból Z_p-t behelyettesítve nyerjük az l mellékkvantumszámú elektronok sajátfüggvényét és energiáját meghatározó Schrődinger-egyenletet[4]. Az előzőkben mondottak szerint (8) az összes előforduló elemekre érvényes és így megoldása is különös érdekességgel bir.

A (9) differenciálegyenlet megoldása a $\frac{Z_p}{r} = \frac{Z}{r}\frac{e^{-\lambda_0 x}}{1 + A_0 x}$ potenciál segítségével komplikált volna és analitikus formában nem is lehetséges. Van azonban egy másik járható út. *Rasetti*[5] megmutatta, hogy a (9) differenciálegyenlet megoldását a következőképpen végezhetjük el. A (9) differenciálegyenlet megoldása könnyen megadható, ha a potenciál

$$\frac{Z_p^0 e}{r} = \frac{Z^* e}{r} + \frac{1}{2}\frac{\lambda e a_0}{r^2} + \frac{\chi_0}{e} \tag{10}$$

alakba írható. Ekkor a Schrődinger-egyenlet megoldása

$$f = A r^{n^*} e^{-\gamma r} \tag{11}$$

alakú, ahol n^* és γ a sajátfüggvény alakját meghatározó állandók és A egy normálási állandó. A (9), (10) és (11) képletekben szereplő mennyiségek a következő összefüggésben vannak egymással

26*

$$n^* = \frac{1}{2}\{[1-4\lambda+4l(l+1)]^{1/2}+1\}, \tag{12}$$

$$\gamma = \frac{Z^*}{n^* a_0} \tag{13}$$

és az energiaértéket az

$$\varepsilon = -\frac{1}{2}\gamma^2 e^2 a_0 - \chi_0 \tag{14}$$

egyenlet szolgáltatja. A (10)-ben szereplő három paramétert Z^*-, λ- és χ_0-t úgy választjuk meg, hogy Z_p/r és Z_p^0/r, valamint ezeknek első és második differenciálhányadosai a (11) függvény maximumának helyén, a

$$r_m = \frac{n^*}{\gamma} \tag{15}$$

helyen megegyezzenek. Ez a választás biztosítja, hogy azon a helyen, ahol a szóban lévő elektron radiális sűrűsége

$$4\pi f^2 = 4\pi r^2 R^2(r) = 4\pi A^2 r^{2n^*} e^{-2\gamma r} \tag{16}$$

a legnagyobb értékét veszi fel és ennek közvetlen környezetében a közelítő potenciál a valóságossal nagy mértékben megegyezik. Mivel a módszer olyan, hogy a potenciál közelítése mindig a vizsgált sajátfüggvényre nézve legjelentősebb helyen és ennek környezetében a legjobb, biztos, hogy a (11) alakú sajátfüggvények közül a fenti módszerrel adott megoldás a valóságos sajátfüggvényt legjobban közelíti meg. Különösen jó ez a közelítés akkor, ha a sajátfüggvénynek a maximuma éles, mint ez az atomok belső elektronjainak sajátfüggvényeinél tényleg tapasztalható. Kevésbbé lesz jó a közelítés, ha a sajátfüggvény maximuma nem olyan kifejezetten éles, mert ekkor a potenciálnak a maximumtól távolabb fekvő értékei is számításba jönnek. Ebben az esetben az energia és a sajátfüggvény megváltozását perturbációszámítás segítségével kell figyelembe venni.

Az egyes paraméterek meghatározása ezek után a következőképpen történhetik. Az χ_0 paraméter értéke az első és második differenciálhányadosban nem fordul elő és így a Z^* és λ paraméterek tőle függetlenül határozhatók meg. A Z_p/r és Z_p^0/r függvényeknek az r_m helyen való megegyezéséből viszont a χ_0 paraméter határozható meg, ha már Z^*-t és λ-t előzőleg meghatároztuk. A deriválások elvégzése és átrendezés után (6) és (10) felhasználásával kapjuk

$$\begin{aligned}\lambda a_0 &= Z\mu f_\lambda(x_m) = \\ &= Z\mu \frac{x_m^3 e^{-\lambda_0 x_m}}{(1+A_0 x_m)^3}[2\lambda_0 A_0 + 2A_0^2 + \lambda_0^2 + 2(\lambda_0 A_0^2 + \lambda_0^2 A_0)x_m + \lambda_0^2 A_0^2 x_m^2],\end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned}Z^* r_m &= Z\mu f_{Z^*}(x_m) = \\ &= Z\mu \frac{x_m e^{-\lambda_0 x_m}}{(1+A_0 x_m)^3}[1 + (\lambda_0 + 3A_0)x_m - \lambda_0^2 x_m^2 - (\lambda_0 A_0^2 + 2\lambda_0^2 A_0)x_m^3 - \lambda_2^0 A_0^2 x_m^4]\,.\end{aligned} \tag{18}$$

A (17) és (18)-ban szereplő $x_m = r_m/\mu$ a radiális sűrűség maximumának helyét határozza meg. Említésre méltó, hogy λ és $Z^* r_m$ a rendszámtól, ha x_m-nek a rendszámtól való függését nem tekintjük, csupán a $Z\mu$ faktoron keresztül függ, mig f_λ és f_{Z^*} az x változó bevezetésével a rendszámtól független univerzális függvények lesznek. (17) és (18)-ból kiindulva a (12), (13) és (15) egyenletekből a

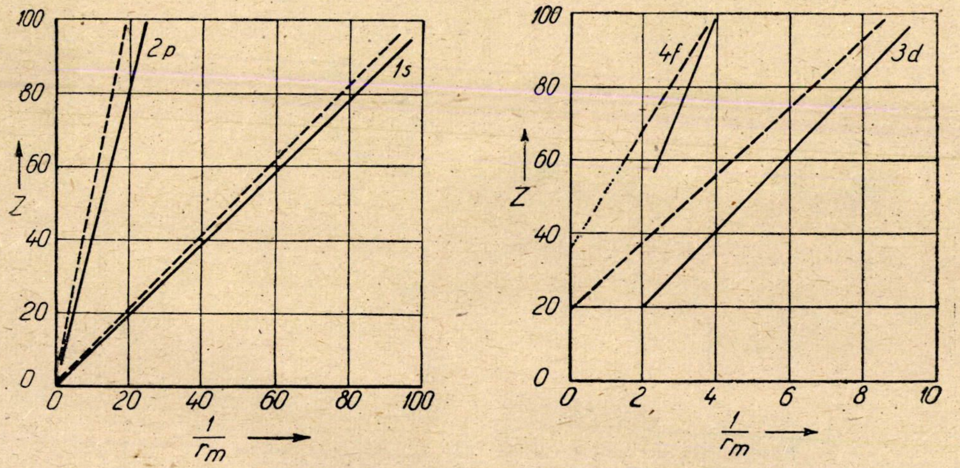
$$\frac{Z\mu}{a_0} = \xi \tag{19}$$

mennyiség meghatározására a

$$\xi^2 (f_{Z^*} + f_\lambda)^2 - \xi [f_{Z^*} + 2l(l+1)(f_{Z^*} + f_\lambda)] + l^2 (l+1)^2 = 0$$

másodfokú egyenletet nyerjük, melynek fizikailag interpretálható megoldása

$$\xi = \frac{f_{Z^*} + 2(f_{Z^*} + f_\lambda)\, l(l+1) + \sqrt{f_{Z^*}^2 + 4 f_{Z^*}(f_{Z^*} + f_\lambda)\, l(l+1)}}{2(f_{Z^*} + f_\lambda)^2} \tag{20}$$



2. a ábra A rendszám és az $1s$ és $2p$ elektronok radiális sűrűsége maximumának összefüggése
- - - - - - - - $Z = Z(1/r_m)$ *Slater* szerint
———————— $Z = Z(1/r_m)$ itt számítva.

2. b ábra A rendszám és a $3d$ és $4f$ elektronok radiális sűrűsége maximumának összefüggése
- - - - - - - - $Z = Z(1/r_m)$ *Slater* szerint
———————— $Z = Z(1/r_m)$ itt számítva.

A (20) egyenlet összefüggést ad a rendszám (ξ-n keresztül) és a (11) sajátfüggvények maximumának helye x_m (f_{Z^*}-n és f_λ-n keresztül) között. (20) segítségével a $Z = Z(x_m)$, ill. (4) felhasználásával a $Z = Z(r_m)$ összefüggés könnyen tabellázható. A 2a és 2b ábrákon láthatjuk a $Z = Z(r_m)$ összefüggéseket a legmélyebb s, p, d, f állapotokra, tehát az $1s, 2p, 3d, 4f$ állapotokra. Hogy az összefüggéseket könnyebben áttekinthessük, abszcisszául a maximum helyének reciprokját, $1/r_m$-t választottuk. Ebben a koordináta rendszerben a $Z = Z(1/r_m)$ összefüggést jó közelítéssel egyszerű egyenes ábrázolja. Ennek a ténynek részletes megbeszélésére később még visszatérünk.

A maximum helyének ismeretében (17) és (18)-ból a λ és Z^* állandók értéke határozható meg. Így a közelítő potenciált meghatározó paraméterek mind birtokunkban vannak, mivel a függvénynek a maximum helyén felvett értékét meghatározó χ_0 állandó értékének a megállapítása nem ütközik nehézségbe.

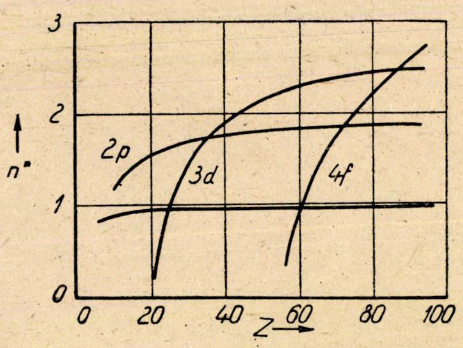
A sajátfüggvények meghatározása és diszkussziója

A (11) alakú ú. n. Slater-típusú sajátfüggvényeket az n^* és γ paraméterek határozzák meg. A potenciált meghatározó állandók ismeretében (12), (13) és (15) segítségével ezeket a paramétereket könnyen meghatározhatjuk. Kisebb számítások elvégzése után nyerjük, hogy

$$n^* = (Z\mu f_{Z^*}/a_0)^{1/2} \tag{21}$$

és

$$\gamma = \frac{(Z\mu f_{Z^*}/a_0)^{1/2}}{r_m}. \tag{22}$$



3. ábra Az effektív főkvantumszám függése a rendszámtól. Slater szerint az effektív főkvantumszám a rendszámtól függetlenül az egyes elektronállapotokra a következő:

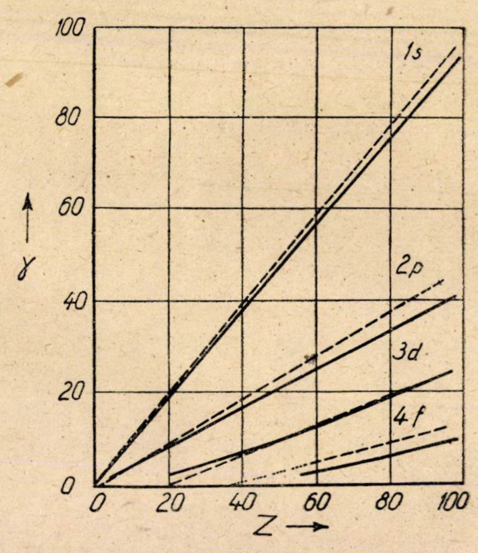
állapot	$1s$	$2p$	$3d$	$4f$
n^*	1	2	3	3,7

A 3. és 4. ábrán bemutatjuk ezeknek a paramétereknek függését a rendszámtól. Érdekes megemlíteni, hogy míg az $1s$ állapot esetében az effektív főkvantumszám n^* igen közel esik 1-hez, a tényleges főkvantumszámhoz, magasabb főkvantumszámú állapotoknál ilyen korreláció nem állapítható meg. A γ paraméter, amely a sajátfüggvény alakját főképpen a külső, magtól távolabb fekvő részeken determinálja, a 4. ábra tanúsága szerint igen jó közelítéssel a rendszámmal arányosan változik.

Az n^* és γ paraméterek meghatározását, ha a számításokat nem egyes atomokra, hanem a periódusos rendszer összes atomjaira el akarjuk végezni, eddig csupán a Slater által bevezetett félempirikus módszerrel lehetett végrehajtani.[6] A *Slater* módszerében szereplő n^* paraméter definíciója megegyezik a miáltalunk adottal, a γ paraméter helyett *Slater* azonban a szemléletesebb jelentésű árnyékolási állandóval s-el dolgozik. A két paraméter összefüggése a következő:

$$\gamma = \frac{Z-s}{n^* a_0}, \tag{23}$$

ahol Z az atom rendszáma, s az árnyékolási állandó, n^* a Slater-féle effektív főkvantumszám és a_0 a legkisebb Bohr-féle hidrogénsugár. Slater n^* és s értékeit úgy határozza meg, hogy a könnyebb atomokra heliumtól neonig a sajátfüggvények a variációs módszerrel meghatározott sajátfüggvényekkel a lehető legjobban megegyezzenek, és a nehezebb atomokra a legfontosabb atomállandók, mint pl. a röntgentermek, ionizációs energiák, diamágneses szuszceptibilitások, a tapasztalattal megegyezésben kiszámíthatók legyenek. Az effektív főkvantumszám n^* és az árnyékolási állandó s meghatározása *Slater* szerint a következőképpen történik.



4. ábra Az árnyékolási állandóval összefüggő γ paraméter függése a rendszámtól
-------------------------- *Slater* szerint
―――――――――――――― itt számítva.

n^* számára a következő értékeket kell felvenni:

Valódi főkvantumszám $n = 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6.$

Effektív főkvantumszám $n^* = 1 \quad 2 \quad 3 \quad 3{,}7 \quad 4{,}0 \quad 4{,}2.$

Az s árnyékolási állandó meghatározása a következőképpen történik. Osszuk be az elektronokat csoportokba:

$$(1s), (2s, 2p), (3s, 3p), (3d), (4s, 4p), (4d, 4f), (5s, 5p), \ldots .$$

Tehát az ugyanahhoz a főkvantumszámhoz tartozó s és p elektronokat foglaljuk egy csoportba, mig a $d, f, \ldots$ elektronok egy másik csoporthoz tartoznak. Feltételezzük, hogy az egyes állapotok energetikai sorrendje az atomban a fent megadott sorrenddel megegyezik, s így azok betöltődése is ebben a sorrendben következik be. Feltesszük továbbá, hogy a stabilisabb elektroncsoport átlagban beljebb tartózkodik, mint a kevésbbé stabilis. Ezeknek a feltevéseknek következményeképpen a következő szabályok állnak fenn az árnyékolási állandó s meghatározására.

1. Minden elektroncsoport, melyik a vizsgált elektroncsoportnál kijjebb fekszik, nem járul hozzá s-hez.

2. Minden elektron, amelyik a vizsgálat alá vett elektron csoportjához tartozik, az árnyékolási állandóhoz, s-hez 0,35-tel járul hozzá. Kivétel ezen szabály alól az $1s$ csoport, ahol 0,30 a hozzájárulás.

3. Ha a vizsgálat alá vett elektron egy (s, p) csoporthoz tartozik, akkor az eggyel kisebb főkvantumszámmal rendelkező csoport minden elektronja 0,85-tel járul hozzá az árnyékolási állandóhoz, mig a még beljebb fekvő csoportok hozzájárulása 1,00. Ha a vizsgálat alá vett elektron egy (d, f) csoporthoz tartozik, akkor minden beljebb fekvő csoport, az eggyel kisebb főkvantumszámú is, 1,00-al járul hozzá az árnyékolási állandóhoz, s-hez.

Slater szerint tehát az n^* az effektív főkvantumszám értéke azonos főkvantumszámú csoporton belül a rendszámtól független állandó, mig γ (23) szerint a rendszámmal lineárisan változik és a Z tengelyt $Z = s$-nél metszi. A 4. ábrában összehasonlítás céljából szaggatott vonallal feltüntettük a *Slater* szerint meghatározott egyeneseket is. Az általunk számított görbék és a Slater-féle egyenesek megegyezése jó. Nagyobb százalékos eltéréseket a $2p$ és $4f$ állapotok esetében találunk. Az általános lefutás azonban itt is megegyezik. A 3. ábrán látható, hogy az $1s, 2p, 3d$ és $4f$ állapotban lévő elektronok effektív főkvantumszámai hogyan függenek a rendszámtól. Jól látható, hogy az 1 és 2 főkvantumszámú állapotok esetén az általunk számított effektív főkvantumszám magasabb rendszámú atomoknál asszimptotikusan közelíti a Slater-féle módszerrel meghatározott effektív főkvantumszámot. A 3 és 4 főkvantumszámoknál hasonló törekvés mutatkozik, de az asszimptotikus viselkedés csak a periódusos rendszerben előforduló elemeknél magasabb rendszámú elemeknél észrevehető.

A n^* és γ paramétereknek van még egy nevezetes szerepe. Ezek határozzák meg ugyanis a radiális sűrűségek maximumának helyét. A (15) képlet szerint a két paraméter hányadosa adja meg azt a helyet, ahol a radiális sűrűség maximális értékét veszi fel. Az effektív főkvantumszám n^* a mi számításaink szerint általában kisebbnek adódik a *Slater* által meghatározottnál. A γ paraméter a $3d$ állapot kivételével szintén kisebb a *Slater* által meghatározottnál, és így várható, hogy az általunk meghatározott sajátfüggvény maximumok a $3d$ állapottól eltekintve csak kisebb eltérést mutassanak a *Slater*étől. A $3d$ állapot esetében, hol az általunk számított egyik paraméter csaknem pontosan megegyezik a *Slater* által számítottal, az effektív főkvantumszámban n^*-ban való eltérés miatt a maximumok helye is jelentősen különbözhet. A 2. a és 2. b ábrán a rendszámot adtuk meg $1/r_m$ függvényében, mind az általunk, mind a *Slater* módszerével meghatározott sajátfüggvényekre. (23)-ból a γ paraméter *Slater*-féle értékét (15)-be téve kapjuk

$$\frac{1}{r_m}=\frac{Z-s}{n^{*2}a_0}, \tag{24}$$

tehát $1/r_m$ a rendszámnak lineáris függvénye. A 2. a és 2. b ábrákon jól látható, hogy ez a lineáris függés az általunk számított $1/r_m = 1/r_m(Z)$ függvénnyel is igen jó közelítéssel teljesül.

Az energia meghatározása

A hullámmechanikai atomprobléma egyik legérdekesebb kérdése az elektrontermek meghatározása. Ezek határozzák meg ugyanis a kibocsátott elektromágneses sugárzás hullámhosszát s így az egész optikai és röntgenspektrumot. Mint később látni fogjuk, módszerünk az itt közölt formájában az optikai termek meghatározására nem alkalmas, de könnyen és megfelelő pontossággal szolgáltatja a röntgentermeket.

Az előző fejezetekben kifejtettek tekintetbevételével az energiatermek meghatározása könnyű feladat. (10)-ből (1) és (6) tekintetbevételével kapjuk, hogy

$$\chi_0=\frac{Ze^2}{r_m}\frac{e^{-\lambda_0 x_m}}{1+A_0x_m}-\frac{Z^*e^2}{r_m}-\frac{1}{2}\frac{\lambda e^2 a_0}{r_m^2}, \tag{25}$$

vagy (17) és (18) behelyettesítése és átrendezés után

$$\chi_0=\frac{Ze^2}{\mu}\frac{1}{x_m^2}\left\{\frac{x_m e^{-\lambda_0 x_m}}{1+A_0x_m}-\left(f_{Z^*}+\frac{1}{2}f_\lambda\right)\right\}. \tag{26}$$

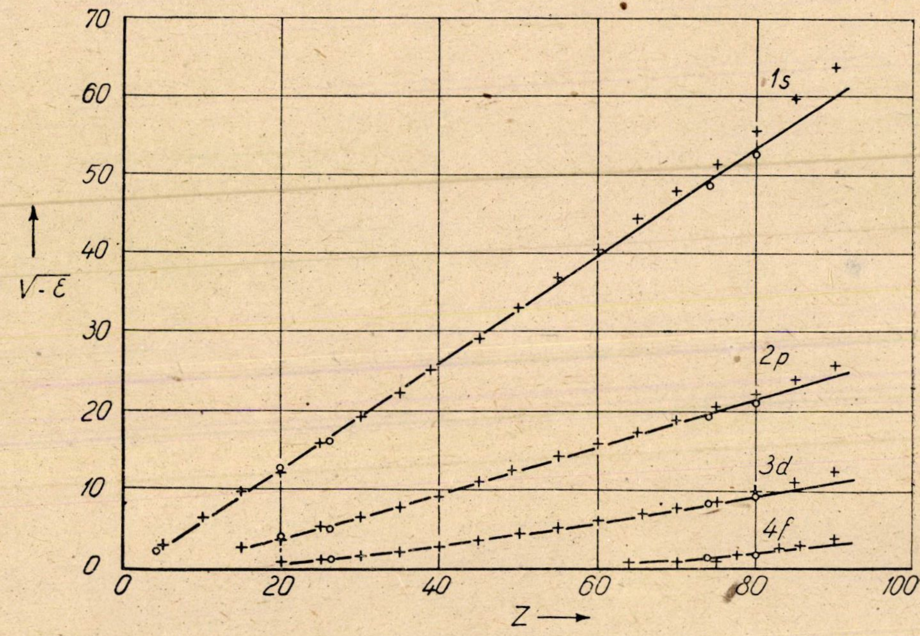
Az energia meghatározása ezután (22) és (26) segítségével történhetik (14)-ből. Eszerint

$$\varepsilon=-\frac{Ze^2}{\mu}E(x_m)$$

$$\varepsilon=-\frac{Ze^2}{\mu}\frac{1}{x_m^2}\left[\frac{x_m e^{-\lambda_0 x_m}}{1+A_0x_m}-\frac{f_{Z^*}+f_\lambda}{2}\right]. \tag{27}$$

(27) a Z/μ faktortól eltekintve az x_m változónak univerzális függvénye, ami a számításokat igen megkönnyíti, mert az $E(x_m)$ függvény a rendszámtól függetlenül tabellázható és a további számításokban is felhasználható. (19) segítségével meghatároztuk az $1s, 2p, 3d$ és $4f$ állapotok energiáját, mint a rendszám függvényét. Ezek az energiatermek a röntgenspektroszkópiából jól ismert karakterisztikus sugárzásból meghatározhatók. Az $1s, 2p, 3d$ és $4f$ állapotokban lévő elektronok energiáját a $K_{\rm I}$, $L_{\rm II}$ és $L_{\rm III}$, $M_{\rm IV}$ és $M_{\rm V}$, $N_{\rm VI}$ és $N_{\rm VII}$ termekkel, ill. ezek középértékével azonosíthatjuk. Az L, M és N termek kettőssége a spintől származó dublett felhasadás eredménye. A tapasztalattal való össze-

hasonlításkor ezek számtani közepét vettük a spin-felhasadás nélküli értéknek. A röntgentermekre fennálló karakterisztikus törvényszerűségek akkor a legszembetűnőbbek, ha $\sqrt{-\varepsilon}$-t mérjük fel a rendszám függvényeként.. Az 5. ábrán a keresztekkel megjelölt pontok a röntgenspektroszkópiai mérésekből



5 ábra. Az $1s$, $2p$, $3d$ és $4f$ elektronok energiatermjeinek függése a rendszámtól
+ + + + + + + + + + + + kísérleti Röntgen-termértékek
——————— itt számítva (perturbációszámítással korrigált értékek)
○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ „self-consistent field" módszerrel számítva (a kicserélődési energia nincs tekintetbe véve)

II. TÁBLÁZAT

A Ca, Fe, W és Hg atomok Röntgen-spektrumának energiatermjei

		Ca	Fe	W	Hg
K	kísérleti	148,7	261,95	2560,15	3057,95
	itt számított	143,2	254,6	2357,0	2780,2
	Hartree	149,2	261,6	2382,0	2776,5
$L_{II, III}$	kísérleti	12,825	26,35	400,25	487,98
	itt számított	13,3	27,3	381,0	452,8
	Hartree	12,795	26,51	370,25	446,0
$M_{IV, V}$	kisérleti	—	0,155?	67,53	86,32
	itt számított	—	0,658	66,2	84,5
	Hartree	—	0,7578	67,75	85,25
$N_{VI, VII}$	kísérleti	—	—	1,99	3,675
	itt számított	—	—	1,863	4,295
	Hartree	—	—	1,689	4,194

megállapított termértékeket jelölik[7], mig a körök a self-consistent field módszerrel a kicserélődés tekintetbevétele nélkül meghatározott értékeket[8]. A kihúzott vonal ábrázolja az itt közölt módszerrel végzett számítások eredményeit. Az elméleti és kísérleti értékek megegyezése jó.

Érdekes összehasonlításra nyílik alkalom, ha a Ca, Fe, W és Hg atomok $1s, 2p, 3d$ és $4f$ elektronjainak termértékeit vesszük vizsgálat alá. *D. R. Hartree* és *W. Hartree*, valamint *Manning* és *Goldberg* self-consistent field számításaiból ezek az energiatermek szintén ismeretesek. A II. táblázatban ezeket soroltuk fel, valamint az általunk számítottakat és a mért röntgen termértékeket. A két módszerrel számított termérték sem egymástól, sem a kísérleti értéktől nem tér el lényegesen.

A módszer kritikai vizsgálata; az önpotenciál

A módszer kifejtése során több közelítő lépést alkalmaztunk s szükséges, hogy most ezen közelítések jóságát megvizsgáljuk és jogosságukról meggyőződjünk.

1. Az első közelítő lépés módszerünk során az volt, hogy az összes atomok redukált effektív magtöltését univerzális függvénynek vettük, ami, mint az 1. ábrából is látható, csak közelítőleg igaz. Eltérések azonban csak az atomok külső, az atommagtól távolabb fekvő részein mutatkoznak. Ezen eltérések adják az egyik okát annak, hogy azon sajátfüggvények és energiaértékek, melyeknek meghatározásában ezek a részek játszanak döntő szerepet, kevésbbé jól egyeznek a tapasztalattal, mint amelyeknél a belső részek a döntők. A viszonyok mindenesetre még így is jobbak, mintha a Thomas—Fermi-féle $\varphi_0(x)$-t választottuk volna redukált effektív magtöltésnek, mert az általunk választott redukált effektív magtöltés a hullámmechanikai követelménynek megfelelő exponenciális eltűnést mutatja, míg $\varphi_0(x)$ mint $1/x^3$ tűnik el a végtelenben. Az így elkövetett hiba korrigálásával nem foglalkozunk, hiszen a számítások analitikus kivitelezését és az egész periódusos rendszerre való kiterjesztését ez az elhanyagolás tette lehetővé.

2. A második közelítő lépés az volt, hogy nem vettük tekintetbe azt, hogy az előbb tárgyalt Z_p Z-vel meghatározható potenciál tartalmazza a vizsgálat alá vett elektron potenciálját és így az elektron quasi önmagára hat. Ez az önpotenciál legsúlyosabban az atom szélén jön számításba, ahol a potenciál miatta exponenciálisan eltűnik és nem megy át e/r-be, amint az szükséges volna. Ennek az önpotenciálnak többféle hatása van. Az elektron nagyobb taszító hatás alatt lévén, a sajátfüggvény maximuma a magtól távolabb tolódik és így természetesen lazábban kötött is lesz, energiája tehát abszolút értékben kisebb a valóságosnál.

Az elektronnak ebből az önmagára való hatásából származó önpotenciális energiája perturbáció számítással tekintetbe vehető és korrigálható.

A magtól $\mathfrak{r}_1(r_1, \vartheta_1, \varphi_1)$ távolságban lévő 1-es elektron és az $\mathfrak{r}_2(r_2, \vartheta_2, \varphi_2)$ távolságra lévő 2-es elektron Coulomb energiája

$$\varepsilon_1' = \int\int \frac{|\psi_1(\mathfrak{r}_1)|^2 \, |\psi_2(\mathfrak{r}_2)|^2}{|\mathfrak{r}_1 - \mathfrak{r}_2|} d v_1 d v_2 . \tag{28}$$

(28)-ben ψ_1 az 1-es és ψ_2 a 2-es elektron sajátfüggvénye és az integrál az egész térre terjesztendő ki. A (28) perturbációs taghoz hasonló integrálok kiszámítását könnyen elvégezhetjük. Felhasználva (8)-at és az

$$\frac{1}{|\mathfrak{r}_1 - \mathfrak{r}_2|} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=-k}^{+k} \frac{(k-|m|)!}{(k+|m|)!} \frac{r(a)^k}{r(b)^{k+1}} P_k^{|m|}(\cos\vartheta_1) P_k^{|m|}(\cos\vartheta_2) e^{im}(\varphi_1 - \varphi_2) \tag{29}$$

összefüggést, és azt, hogy a két elektron sajátfüggvénye esetünkben megegyezik, nyerjük

$$\varepsilon_1' = \sum_{k=0}^{\infty} a_k F^k , \tag{30}$$

ahol az a_k-k lényegében háromszoros Legendre-polinómok integráljaiból tehetők össze és

$$F^k = (4\pi)^2 \int_0^\infty \int_0^\infty f^2(r_1) f^2(r_2) \frac{r(a)^k}{r(b)^{k+1}} d r_1 d r_2 . \tag{31}$$

(29) és (31)-ben $r(a)$, ill. $r(b)$ r_1 és r_2 közül a kisebbet ill. a nagyobbat jelöli és $f(r) = rR(r)$ a sajátfüggvény (11) alatt definiált radiális része. Az a_k állandókat többek között *Slater* is meghatározta és *Gaunt* analitikus formulát adott számukra.[9] Az általunk felhasználtakat a III. táblázatban közöljük. Az F^k parciális integrálás után az

$$F^k = 32\pi^2 \int_0^\infty f^2(r) r^k dr \int_r^\infty f^2(r') r'^{-k-1} dr' \tag{32}$$

alakba írható. (11)-et (33)-ba helyettesítve és az $y = 2\gamma r$ új integrációs változót bevezetve nyerjük

$$F^k = \frac{4\gamma}{[(2n^*)!]^2} \int_0^\infty y^{2n^*+k} e^{-y} dy \int_y^\infty y'^{2n^*-k-1} e^{-y'} dy' = \gamma \Phi^k(n^*) . \tag{33}$$

(33), ha az effektív főkvantumszám n^* természetes egész szám, akkor azonnal kiintegrálható és zárt alakban adható meg. Az általunk számított effektív főkvantumszámok azonban egyes kivételes esetektől eltekintve nem egész vagy félszámok s így a (33) által megadott alak használandó.

3. A módszerünkben szereplő harmadik elhanyagolás onnan ered, hogy a (9) Schrődinger egyenletet a (6)-ból nyerhető $Z_p e/r$ potenciál helyett a (10) összefüggés segítségével definiált $Z_p^0 e/r$ potenciállal oldottuk meg. Ez utóbbi a radiális sűrűség maximumának helyén r_m-nél igen jól közelíti $Z_p e/r$-et — a függvényérték, valamint az első és második deriváltak megegyeznek — de az

eltérés az r_m-től távol fekvő helyeken jelentős lehet. Különösen szembetűnő az eltérés a maghoz közeleső helyeken, hol $Z_p^0 e/r$ mint $1/r^2$ válik végtelenné, míg $Z_p e/r$ csak mint $1/r$. (17)-ből következik, hogy λ mindig pozitív s így a $Z_p^0 e/r$ közelítő potenciáltérben mozgó elektron átlagban a maghoz közelebb tartózkodik, mint az ezen közelítés nélkül várható volna. A 2. és 3. alatt említett elhanyagolások egymás ellen dolgoznak s így az ezeket helyesbítő perturbációs tag jelentősége csökken és igen kis korrekciónak tekinthető.

III. TÁBLÁZAT $a^k(l, |m_l|, |m'_l|)$

l	$\|m_l\|$	$\|m'_l\|$	$k=0$	2	4	6
s	0	0	1			
p	1	1	1	1/25		
	1	0	1	—2		
	0	0	1	4		
d	2	2	1	4/49	1/441	
	2	1	1	—2	—4	
	2	0	1	—4	6	
	1	1	1	1	16	
	1	0	1	2	—24	
	0	0	1	4	36	
f	3	3	1	25/225	9/1089	1/736164
	3	2	1	0	—21	—6
	3	1	1	—15	3	15
	3	0	1	—20	18	—20
	2	2	1	0	49	36
	2	1	1	0	—7	—90
	2	0	1	0	—42	120
	1	1	1	9	1	225
	1	0	1	12	6	—300
	0	0	1	16	36	400

Az utóbbi elhanyagolást perturbációs eljárással akarjuk figyelembe venni. A perturbációs operátor ev a következőképpen írható fel:

$$-ev = \frac{Z_p e}{r} - \frac{Z_p^0 e}{r} = \frac{Ze}{r}\,\frac{e^{-\lambda_0 r}}{1+A_0 x} - \frac{Z^* e}{r} - \frac{1}{2}\,\frac{\lambda e a_0}{r^2} - \frac{\chi_0}{e}. \qquad (34)$$

Fejtsük ezt sorba az r_m hely, a vizsgálandó elektron radiális sűrűsége maximumának helye körül. Mivel a két potenciál értéke, valamint első és második deriváltjuké is az r_m helyen megegyezik, nyerjük

$$ev = \frac{1}{3!}\left[\frac{\partial^3(ev)}{\partial r^3}\right]_{r=r_m}(r-r_m)^3 + \frac{1}{4!}\left[\frac{\partial^4(ev)}{\partial r^4}\right]_{r=r_m}(r-r_m)^4 + \cdots \qquad (35)$$

Az elsőrendű perturbációs energia

$$\varepsilon_1'' = \int \psi^* e^2 v \psi \, dv =$$

$$= \frac{e^2}{3!}\left[\frac{\partial^3 v}{\partial r^3}\right]_{r=r_m}\int (r-r_m)^3 \psi^* \psi \, dv + \frac{e^2}{4!}\left[\frac{\partial^4 v}{\partial r^4}\right]_{r=r_m}\int (r-r)^4 \psi^* \psi \, dv + \cdots \qquad (36)$$

A szereplő integrálok és deriváltak könnyen kiszámítható, de hosszadalmas formulákra vezetnek, melyeket nem közlünk.

A perturbációs energiákat kiszámítva kitűnik, hogy azoknál az elektronoknál, melyek igen szorosan vannak a maghoz kötve — $1s$ és $2p$ elektronok — a 2. és 3. alatt említett elhanyagolások csaknem teljesen kompenzálják egymást. A lazábban kötött elektronoknál viszont a 3. elhanyagolás nagysága a 2.-at felülmúlja.

Budapesti Műszaki Egyetem
Fizikai Intézete.

IRODALOM

[1] Lásd pl. *P. Gombás,* Theorie und Lősungsmethoden des Mehrteilchenproblems der Wellenmechanik, Birkhäuser, Basel 1950.

[2] *P. Gombás* és *R. Gáspár,* Acta Physica Hungarica, I., *3.* (1952).

[3] *E. Fermi,* Rend. Accad. Lincei (6) *6,* (1927) 602; Zs. f. Phys. *48,* (1928) 73; *P. Gombás,* Die statistische Theorie des Atoms und ihre Anwendungen, Springer, Wien 1949.

[4] A (9) egyenletbe a Z_p effektív magtöltésül az egyszeres pozitív ion effektív magtöltését kellene behelyettesíteni, míg az általunk használt effektív magtöltés (6) semleges atomra vonatkozik. Az innen eredő hiba becslését lásd a 403—406. oldalakon.

[5] *F. Rasetti,* Rend. Lincei (6) *7,* (1928) 915; Zs. f. Phys. *49,* (1928) 546.

[6] *J. C. Slater,* Phys. Rev. (2) *36,* (1930) 57.

[7] *Landolt-Börnstein:* Zahlenwerte u. Funktionen, Springer, Berlin 1950.

[8] *D. R. Hartree* és *W. Hartree,* Proc. Roy. Soc. London (A) *149,* (1935) 210., *M. F. Manning* és *J. Millmann,* Phys. Rev. (2) *49,* (1936) 848; *M. F. Manning* és *L. Goldberg,* Phys. Rev. (2) *63,* (1938) 662.

[9] *J. C. Slater,* Phys. Rev. (2) *34,* (1929) 1293; *F. A. Gaunt,* Trans. Camb. Phil. Soc. (1929); *E. U. Condon* és *C. H. Shortley,* The Theory of Atomic Spectra, Cambridge. At the University Press, 176 és köv. oldalak, 1935.

ELEKTRONVEZETÉS SZÍNES ALKÁLIHALOGENID KRISTÁLYOKBAN

BOROS JÁNOS és SIBALSZKY ZOLTÁN

Bemutatta Gyulai Zoltán lev. tag az 1952. június 16-án tartott felolvasó ülésen

Pohl és munkatársainak vizsgálatai alapján színezett alkálihalogenid kristályokban belső fényelektromos hatásnál elektronvezetés lép fel. Ezek a kristályok tehát színezett állapotban úgy tekinthetők, mint amelyek elektronikus félvezetők. A színezés több módon történhetik:

Röntgen- vagy rádióaktív besugárzással, alkáli fémgőzben való hevítéssel („additív színezés"), magas hőmérsékleten elektromos térrel (tűalakú katóddal) viszünk be színezést előidéző elektronokat.

Gudden és más kutatók már régen rámutattak arra, hogy a Wilson-féle elmélet alapján várható az ú. n. zavaró nívók elektromos és optikai meghatározása. A „zavaró nívók" a félvezető valencia és vezetési sávjai közötti energiaértékek. A félvezető elmélet szerint ezekről az energianívókról lépnek át a vezetési sávba az elektronok, amelyek a vezetést előidézik („felesleg vezetők"), vagy ezek veszik fel a valencia sávról az elektronokat („defekt vezetők"). Ezt a várakozást azonban a kísérletek eddigelé alig támasztották alá. Ilyen kísérleti alátámasztást adott egyikünk[1] V_2O_5 egykristályok esetében. Ezeknél a vezetőképesség hőmérsékleti koefficiensére 0,40 eV érték adódott. Ez az érték kiadódott abszorpció mérésekből is. Meg kell itt még jegyezni, hogy a zavaró nívók elektromos és optikai úton való meghatározásának lehetőségét Gudden[2] és mások is, már fel is adták. A különböző kutatóknál az a vélemény alakult ki, hogy az elektronleválasztás mechanizmusa egészen más az optikai abszorpciónál és más a termikus esetben. Az utóbbi alatt értjük pl. az elektromos vezetést. Nagyon erős támaszai voltak ennek az elgondolásnak *Smakula*[3] mérési eredményei. *Smakula* mérte színes alkálihalogenid kristályoknál az elektron mozgékonyságát és annak hőmérsékleti koefficiensét a $v = v_0 e^{-\frac{\Delta B}{kT}}$ formulából kiszámította. Ezt a ΔB értéket nevezte „termikus kioldási munká"-nak. Ha ezeket a kioldási munka értékeket összehasonlítjuk az alkálihalogenidek *F* centrumainak abszorpciós maximum értékével, úgy minden esetben eltérést kapunk. *F* centrumok („festék centrumok") alatt értjük azokat a centrumokat (centrum alatt az elektron egy bizonyos kötés-módja értendő), amelyek a megfelelő alkálihalogenidek legtipikusabb színezését okozzák. Ez a különbség azért van meg, mert legelőször is *Smakula* értékeihez képest kétszeres ΔB értékkel kell számolni. A félvezetőknél ugyanis különböző problémáknál szerepet játszik az $e^{-\frac{\Delta B}{2kT}}$ faktor. Ez a különbség onnan származik, hogy *Smakula* a $v = v_0 e^{-\frac{\Delta B}{kT}}$ formulával számolt. Valójában a félvezetőknél a Fermi-féle statisztikát alkalkalmazzuk és ez esetben a $v = v_0 e^{-\frac{\Delta B}{2kT}}$ formulával kell számolni. Ezzel a formulával számolva kétszeres ΔB értéket nyerünk. Ha *Smakula* ΔB értékeinek kétszeresével számolunk, akkor valóban olyan értékeket kapunk, amelyek optikai úton (abszorpció, foszforeszcencia-emisszió) is meghaphatók. Így pl. NaCl esetében $2 \cdot 0{,}94 = 1{,}88$ ev. Optikailag viszont kék kősónál 1,94 eV értéket nyerünk. KCl kristályok esetében $2 \cdot 1{,}00 = 2{,}00$ eV érték adódik, optikailag viszont foszforeszcencia-emisszióból 2,02 eV nyerhető. Itt meg kell jegyezni azt, hogy ha sárga színű — additive festett — NaCl-t, vagy a viola színű KCl kristályt felmelegítjük kb. 500—600 C°-ra, azt tapasztaljuk, hogy ekkor a kristályok kék színűek lesznek, amelyeknél az abszorpciós maximumra ezeket az értékeket kapjuk. A *Smakula* által nyert értékek tehát korrigálandók.

Az irodalomban igen sok mérési adat van, amelyeket ha megfelelően átszámolunk elektronvolt értékre, akkor már az említett optikai elektronleváltási munkák sok esetben egyezni fognak a termikus (vezetési mérésekből meghatározott) értékekkel. Az 1. táblázat ilyen irodalmi értékeket tartalmaz. A vezetési adatok *Kassel, Gyulai, Vészi, Tomka, Phipps, Lansing, Cooke, Boros* eredményei.

A mérések F centrumokat tartalmazó NaCl, KBr és KCl kristályokon történtek. Mértük a kristályok elektromos vezetőképességét, a vezetőképesség hőmérsékleti függését.

Ha a vezetőképesség hőmérsékleti függését a félvezetőkre vonatkozó $K = Ae^{-\frac{\Delta B}{2kT}}$ (K a specifikus vezetőképesség, T az abszolút hőmérséklet, ΔB a kioldási munka) formula alapján számoljuk, akkor várhatjuk, hogy az F centrumoknak megfelelő kioldási munka értékeket megkapjuk. A legelső és a legfontosabb feladat volt újabb méréseket végezni. Ha az F centrumoknak megfelelő értéket valóban megkapjuk, akkor ebből továbbiak is következnek: akkor lehetséges elektromos úton más zavaró term értékeket is megkapni. A specifikus vezetőképesség mérése áramfeszültség-mérés módszerével történt. A kristályok nagysága: 0,5 cm^2 felület, 2—3 mm vastagság. A kristályokra grafit elektródákat vittünk fel. A hőmérsékletet az elektromos mérőkályhában Haereus-féle CrNi-konstantán hőelemmel mértük preciziós Siemens-féle millivoltmérő segítségével. A vezetési áramot 10^{-10} *A* érzékenységű tükrös galvanométerrel mértük. A mérések 200—450 C° hőmérsékleti határok között történtek. *A* kristályok elszintelenedését részben ezzel a nem túl magas hőmérséklet választással, részben a mérések egy részénél kettős kommutátor alkalmazásával lehetőleg csökkentettük. Ugyancsak a mérések gyors keresztülvitele

1. TÁBLÁZAT

Optikai és elektromos úton nyert irodalmi értékek a zavaró nívókra az alkálihalogenid kristályoknál

Kristály	Elektromos úton nyert érték eV-ban**	Optikai úton nyert érték $m\mu$-ben	Optikai úton nyert érték eV-ban	Kutató neve, festés módja, stb.
NaCl				
	1,73	720	1,73	Röntgenezett kősó abs. *Ottmer*
	1,93	642	1,93	„ „ *Savostianowa*
	1,94	639	1,94	Természetes kék kősó, *Gyulai*
	1,94	640	1,94	Rádiumozott kősó, *Prizbram*
	1,95	636	1,96	Röntgenezett só, *Savostianowa*
		588	2,11	„ „ *Savostianowa*
		581	2,13	Additive festett só, *Mollwo*
	2,16	579	2,14	„ *Savostianowa*, rádiumozott *Prizbram*
	2,34	530	2,34	Viola kősó, *Gyulai*
		524	2,36	Kék kősó, *Gyulai*
	2,40	520	2,38	Rádiumozott, *Prizbram*
	2,57	483	2,57	„ *Prizbram*
	2,66	464	2,67	*F* centrum, *Gyulai, Ottmer*, stb.
	2,76	439	2,82	Viola kősó, *Gyulai*
		438	2,83	Kék kősó, *Gyulai*
		438	2,83	Forforeszcencia emisszió, *Roos*
	3,06	403	3,08	Viola kősó, fényelektromos max. *Gyulai*, foszforeszcencia, *Roos*
		367	3,38	Viola kősó, *Gyulai*
	3,41	364	3,41	Kék kősó, *Gyulai*
KBr				
	1,99	630	1,97	*F* centrum, *Ottmer*, stb.
	2,48	498	2,49	Foszforeszcencia, *Roos*
	2,69	453	2,74	„
	2,86	435	2,85	„
	3,00	416	2,97	„
	3,10	401	3,09	„
KCl				
		815	1,52	*F'* centrum, *Ottmer, Molnár*
		727	1,71	Abszorpció, *Molnár, Seitz*
	1,91	665	1,86	„ *Molnár*
	2,06	605	2,05	Foszforeszcencia, *Roos*
	2,20	566	2,19	*F* centrum, *Ottmer*, stb.
		472	2,63	Foszforeszcencia, *Roos*
	2,64	470	2,64	„
		430	2,88	„
	3,01	412	3,02	„
	3,12	397	3,12	„
	3,30	380	3,26	„

** A vezetési értékekből adódó értékek *Kassel, Gyulai, Vészi, Tomka, Phipps, Lansing, Cooke, Boros* eredményeiből adódnak, melyek az irodalomban megtalálhatók. L. irodalmi idézetek.

is csökkenti az elszíntelenedést. Ha tehát megfelelő ütemben növő vagy csökkenő hőmérséklet mellett egyidejűleg mérjük a vezetési áramot és a hőmérsékletet, ezzel szintén tovább csökkentjük az elszíntelenedést. Ilyen eljárás mellett a mérések ideje lényegesen lerövidíthető. Az ilyen módon végzett méréseknél fellépő esetleges hibák a mérési hibahatárokon belül vannak. Ezt igen gondos kontrollmérésekkel is igazoltuk. Ennek helyessége mellett szólnak különben azok a mérések is, amelyeket lassú ütemben végeztünk, vagy amelyeknél kettős kommutátort használtunk. Végül még meg kell jegyezni, hogy a mérések után a kristályok mind színesek maradtak. Egyes kristályoknál a méréseket többször is megismételtük.

2. TÁBLÁZAT

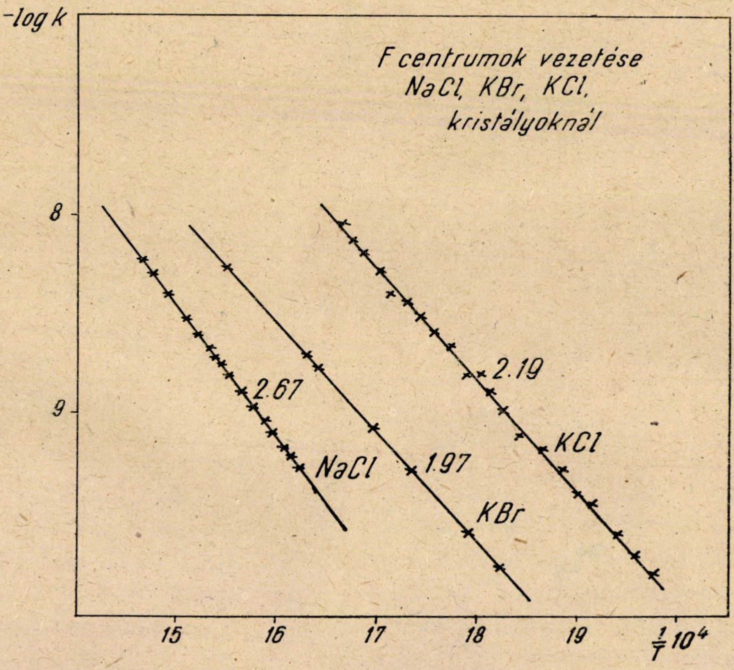
NaCl kristályok *F* centrumainak megfelelő kioldási munkák

Kristály száma	B	B eV-ban
16	15,440	2,66 ± 0,04
17	15,440	2,66 ± 0,05
Megismételve	15,540	2,68 ± 0,05
„	15,540	2,68 ± 0,05
18	15,430	2,66 ± 0,04
Megismételve	15,430	2,66 — 0,04
19	15,540	2,68 ± 0,04
22	15,440	2,66 ± 0,05
Megismételve	15,440	2,66 0,05
23	15,640	2,69 0,05
25	15,430	2,66 0,04
29	15,440	2,66 0,04

A vezetési mérések ismertetése előtt meg kell említeni azokat a munkákat, amelyek abszorpció, fényelektromos vezetés, valamint foszforeszcencia emisszió segélyével adatokat szolgáltattak NaCl, KBr és KCl kristályokhoz. Erre vonatkozólag *Eysank, Gyulai, Molnár, Ottmer, Przibram, Roos, Savostianowa* és *Seitz* munkái említhetők meg. Az 1. táblázat megadja az előbb említett kutatók eredményeit hullámhossz értékben, továbbá eV-ra átszámítva.

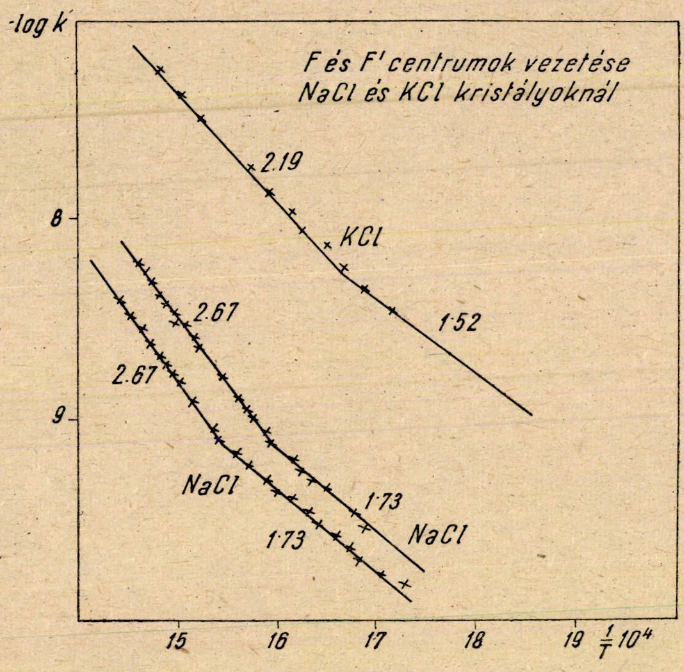
1. NaCl kristályok. A kristályok természetes kősókristályok voltak. Egy részük néhány évvel a mérések előtt, egy részük pedig közvetlenül a mérések előtt volt röntgenezve, egy részüket pedig Na gőzben színeztük. Az F centrumok abszorpciós maximuma 465 $m\mu$-nál van, mely 2,67 eV-nak felel meg.

Ilyen kristályoknál *Ottmer*[1] 720 $m\mu$-nál — 1,73 eV — is talált mellékmaximumot (*F'* centrumok). Az *F* centrumoknak megfelelő, a vezetőképességi mérésekből számított értékek össze vannak foglalva a 2. táblázatban. A *B* értékek a van't Hoff-féle $K = Ae^{-\frac{B}{T}}$ formula szerint vannak számítva, amely formula a „szilárd ionvezetők"-nél jól ismeretes. Ezek az értékek azután eV-egységre vannak átszámítva a félvezető formulának megfelelően. A táblázatban az adatok mellett meg van adva a kioldási munkák mérésének átlagos hibája is. Ez legtöbb esetben 2% körül van, ami elég jó mérési pontosság, tekintetbe véve a mérések természetét. A 1. ábrán látható az *F* centrumoknak megfelelő kioldási munka értékű vezetőképesség — hőmérsékleti függés NaCl és a többi kristályokon. Az ábrázolás az ismert módon történt: — log *k* és 1/*T* értékek vannak a koordináta tengelyekre felvíve.



1. ábra

A spec. vezetőképesség hőmérsékleti függése a legtöbb esetben nem adható meg egyetlen egyenessel, hanem egy-, két- vagy három töréssel bíró egyenes szakaszokból álló diagrammal. A törések igen élesek. Ilyen törések számos közleményben találhatók.[5, 6, 7] Ha ezekre az egyenes szakaszokra vonatkozó *B* értékeket kiszámítjuk, akkor olyan kioldási munka értékeket kapunk, amelyeket, mint abszorpciós maximumokat kapott meg kék és viola kősó kristályokon *Gyulai*[8], valamint más kutatók[9, 10, 11] különböző módon színezett kristályokon. A 3. táblázat összefoglalva megadja ezeket az értékeket. Ezek között megtalálható az F' centrumoknak megfelelő 1,73 eV érték is. Itt meg kell jegyezni, hogy a NaCl, de KCl kristályoknál is gyakorta egymás mellett jelentkezik az F és F' centrumoknak megfelelő értékű temperatura-koefficiens, úgy, mint ahogy abszorpciós méréseknél is parallel szokott ez jelentkezni. A 2. ábra mutatja ezt az eredményt, NaCl és KCl kristályokon.



2. ábra

A kioldási munka értékek között szerepel a *Gyulai* által kék kősón talált négy abszorpciós maximumnak megfelelő érték: 1,94, 2,36, 2,83, 3,41 eV. Ezeken kívül még néhány más érték is, melyek azonban optikai mérésekből ugyancsak ismeretesek. A táblázatban meg van adva, hogyan nyerhetők ezek az értékek, valamint a kutató neve is. Ezekhez az eredményekhez meg kell még a következőket jegyezni: a kősó (szintelen) alacsony hőmérsékleti vezetésének B kioldási munkája 10,300 *(Smekal)*. Ezt az értéket átszámítva 1,78 eV-t kapunk. A különbség tehát e között és az Ottmer-féle F' centrumoknak megfelelő érték között 0,05 eV. A színes kristályoknál talált értékek jobban felelnek meg az Ottmer-féle mellékmaximumnak. A *Gyulai* által kék kősónál talált négy maximum közül (1,94, 2,36, 2,83, 3,41) három igen gyakran fordul elő, a harmadik — 2,83 eV — azonban ritkábban. Az utóbbi értéknek megfelelő abszorpció is igen gyenge. A 3,41 eV értékhez meg kell még jegyezni azt, hogy *Vészi*[12] disszertációjában 19,800—19,900 értékeket kapott. Az ő kris-

3. TÁBLÁZAT

NaCl kristályok egyéb optikai értékének megfelelő kioldási munkák

Kristály száma	B	B eV-ban átlagos hibával		Optikailag talált érték
16	10,050	1,73	± 0.02	
17	9,910	1,71	0,04	1,73
Megismételve	9,750	1,69	0,04	abszorpciós maximum
18	10,180	1,75	0,03	
Megismételve	10,180	1,75	0,03	*Ottmer*
19	10,000	1,72	0,03	
22	10,090	1,74	0,03	
23	10,170	1,75	0,03	
Megismételve	9,920	1,71	0,03	
24	10,000	1,72	0,03	
25	10,000	1,72	0,03	
29	10,000	1,72	0,03	
17	11,220	1,93	± 0,04	
Megismételve	11,260	1,94	0,04	1,94
19	11,270	1,94	0,04	abszorpciós maximum
21	11,170	1,93	0,04	*Gyulai, Savostianowa*
26	10,950	1,89	0,05	*Prizbram*
28	11,170	1,23	0,04	1,88 (2.0,94)
Megismételve	11,170	1,93	0,04	elektronmozgékonyság, *Smakula*
16	12,500	2,15	0,05	2,15 abszorpciós maximum
17	12,300	2,11	0,05	*Prizbram, Savostianowa*
17	13,600	2,34	0,04	
19	13,610	2,34	0,06	2,34 abszorpciós maximum viola
20	13,450	2,32	0,06	2,36 „ „ kék
Megismételve	13,450	2,32	0,06	krislályokon, *Gyulai*
21	13,610	2,34	0,06	
23	12,540	2,33	0,06	
24	13,770	2,37	0,05	
28	13,600	2,34	0,05	
24	14,850	2,56	0,06	2,57 abszorpciós maximum, *Prizbram*
28	14,930	2,57	0,05	
29	14,930	2,57	0,05	
20	16,660	2,87	0,06	2,83 abs. max. kék és viola kristályo-
Megismételve	16,660	2,87	0,06	kon *Gyulai;* foszforeszcencia emisz-
23	16,410	2,83	0,05	szió, *Roos*
17	17,970	3,10	0,09	3,07 foszforeszcencia, *Roos*
19	17,830	3,07	0,07	fényelektromos max. viola kristályo-
24	17,830	3,07	0,07	kon, *Gyulai*
17	19,830	3,42	0,06	
Megismételve	19,830	3,42	0,06	3,41 abszorpciós max. fényelektromos
20	19,840	3,42	0,07	áram max. kék kősón, *Gyulai*
21	19,830	3,42	0,08	
Megismételve	19,830	3,42	0,08	
23	19,820	3,42	0,09	
29	19,660	3,39	0,08	
17	23,000	3,97	0,08	Kiegészítő term
20	23,000	3,97	0,08	3,41

tályai mesterségesek, szintelenek voltak. Ugyanilyen eredményeket kapott ő NaCl pasztillákon is. Tíz különböző preparátum közül hétnél kapott magas hőmérsékleten ilyen értéket. Diszertációjában ezek az értékek nincsenek kiszámítva, abban csak az összetartozó hőmérséklet és spec. vezetőképesség értékek vannak táblázatban összeállítva. Ha most a *B* értékeket kiszámítjuk és a félvezető formulát felhasználjuk, akkor ugyanazt a 3,41 eV értékeket kapjuk, amit a színes kristályoknál nyertünk. Ugyanilyen eredményre jutunk, ha a Landolt—Börnstein táblázatok vonatkozó adatait számoljuk át. A táblázat *Phipps, Lansing* és *Cooke*[13] eredményeit adja. Az ő méréseikből is kiadódik a 3,41-es érték, valamint alacsony hőmérsékleten még az 1,94 eV-os eredmény is. Ugyanilyen eredményeket kapunk, ha a Smekal-féle referátum[7] értékeit átszámoljuk. Ezek között van olyan is, amelyik az *F* centrumoknak felel meg. Az intézetben folyó vizsgálatok számos ilyen eredményt adtak. Ezekről a közeljövőben külön közleményben fogunk beszámolni. Ezen eredmények után kétségtelenül fel kell tenni a kérdést, nem szükséges-e revizió alá venni az alkálihalogenidek saját vezetésének mechanizmusáról eddigelé alkotott képünket. A vezetésről alkotott mostani felfogás — véleményünk szerint — azért szorul revizióra, mert a kioldási munkáknak a sokféleségét és ezeknek az optikai adatokkal való ilyen egyezését a régi ionos vezetési felfogással megmagyarázni nem lehet. A 3. táblázatban még szerepel egy érték 23,000 (3,97 eV), amelyik a tiszta kristályok magas hőmérsékleti vezetésénél is jól ismeretes.

Ezt az értéket a tiszta kristályoknál csak magasabb hőmérsékleteken (500 C° fölött) nyerhetjük. Ennek az értéknek megfelelő optikai érték az irodalomban nem található. Az abszorpcióban nyerhető legmagasabb érték — az ú. n. *U* centrumoktól eltekintve — 3,41 eV. A 3,41 és 3,97 értékek összege 7,38 eV-ot ad. Ez az összeg nagy megközelítéssel megadja a vezetési sáv és a valencia sáv távolságát.[14] A vezetési sáv alsó szélétől 3,41 eV távolságban lévő zavaró nívó tehát kettős szerepet játszhat. Felesleg vezetésnél elektronokat szolgáltat a vezetési sávba. A 3,97 eV-nak megfelelő kioldási munkát úgy próbálhatjuk értelmezni, hogy az előbb megadott nívó a valencia sávból vesz fel elektronokat. Ebben az esetben a valencia sávnak van szerepe a vezetésben, azaz „defekt vezetés" lép fel. Ennek a feltevésnek helyességét igazolni látszik az a tény, hogy a 3,97 eV értéket *Gyulai* kék kősón megkapta fényelektromos méréseknél, mint „quantumszerű maximumot".

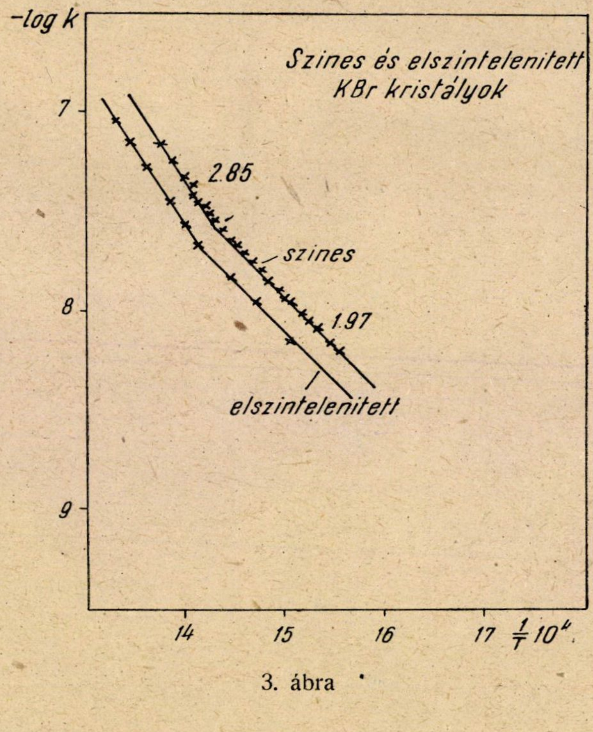
2. *KBr kristályok.* A kristályok egy része a göttingeni Fizikai Intézetből származik, másrészt az itteni intézetben magunk is növesztettünk és festettünk kristályokat. Az *F* centrumoknak megfelelő abszorpciós maximum az irodalom szerint 630 $m\mu$ = 1,97 eV. A 4. táblázatban össze vannak foglalva a vezetéssel meghatározott és az *F* centrumoknak megfelelő kioldási munka értékek. A 13. és 14. kristályok mérés után árammal vannak elszíntelenítve. Az elszíntelenítés után újra mértünk ezeken a kristályokon. Ezeknél az elszíntelenített kristályoknál a van't Hoff-féle egyenesek párhuzamosan mennek a színes kristályok

4. TÁBLÁZAT

KBr kristályok *F* centrumainak megfelelő kioldási munkák

Kristály száma	B	B eV-ban	átlagos hiba
1	11,430	1,97	±0,04
5	11,380	1,96	0,04
13	11,380	1,96	0,04
Megismételve,	11,450	1,97	0,04
Árammal elszínteleńítve	11,450	1,97	0,04
14	11,380	1,96	0,03
Megismételve,	11,380	1,96	0,03
Árammal elszínteleńítve	11,480	1,96	0,04

egyeneseivel. A specifikus vezetőképesség-értékek azonban kisebbek. Az elszíntelenített kristályokon ugyanolyan kioldási munka értékeket kapunk, mint a színes kristályokon. Az 5. táblázatban más kioldási munka értékek vannak összefoglalva. Ezek egyike megfelel a *Smakula* által talált érték kétszeresének 2·0,84 = 1,68 eV-nak. Más értékek megfelelnek olyan értékeknek, amelyeket Roos[15] foszforeszcencia emissziónál kapott. Az elszínteleńített kristályok itt is úgy viselkednek, mint a színesek.



3. ábra

5. TÁBLÁZAT

KBr kristályok egyéb optikai értékének megfelelő kioldási munkák

Kristály száma	B	B eV-ban	Más úton nyert érték
11	9,580	1,65 ± 0,03	1,68 elektron mozgékonyságból
12	9,750	1,68 0,03	*Smakula*
13	9,620	1,66 0,03	
14	14,380	2,48 0,04	2,49 foszforeszcencia, *Roos*
5	15,970	2,75 0,04	2,74 foszforeszcencia
12	15,750	2,71 0,04	
elszíntelenítve	15,860	2,74 0,04	
13	16,550	2,85 0,06	2,85 foszforeszcencia
elszíntelenitve	16,550	2,85 0,07	

6. TÁBLÁZAT

KCl kristályok kioldási munka értékei

Kristály száma	B	B eV-ban	Más úton nyert érték
9	9,010	1,55	
Megismételve	8,850	1,52	1,52 abszorpciós maximum
„	8,850	1,52	*Ottmer, Seitz, Molnár*
10	8,880	1,53	
8	10,000	1,72	1,70 abs. maximum, *Pick*
10	10,000	1,72	1,71 „ „ *Seitz* és *Molnár*
3	10,850	1,87	1,86 abs. maximum, *Seitz* és *Molnár*
9	10,750	1,85	
15	10,750	1,85	
3	12,550	2,07	2,05 foszforeszcencia
3	12,560	2,16	2,19 az *F* centrumok abszorpciós maximuma
8	12,430	2,14	
9	12,750	2,20	
Megismételve	12,630	2,18	
15	12,540	2,16	
Megismételve,	12,650	2,18	
elszíntelenítve,	12,630	2,18	
ezt ismételve	12,630	2,18	
8	15,220	2,62	2,63 foszforeszcencia
15	15,260	2,63	
Megismételve	15,300	2,64	
3	16,660	2,87	2,87 foszforeszcencia

3. KCl kristályok. E krisztályok egy része szintén göttingeni eredetű és festésű. Másrészük saját növesztésű és additív festésű. Az *F* centrumoknak megfelelő érték 563 $m\mu$, 2,19 eV. Az eredmények össze vannak foglalva a 6. táblázatban, továbbá az 1. és 2. ábrán. Az *F* centrumoknak megfelelő értékek itt is megtalálhatók; azután az Ottmer-féle mellékmaximum (*F'* centrum) némely esetben az *F* centrumok mellett. Továbbá más kutatók által talált értékek is[15, 16, 17]. A 15. kristályt árammal elszínteleníttettük. Újra mérve ez esetben ismét megkaptuk az *F* centrumnak megfelelő értéket.

Gyulai[5] ilyen elszíntelenített kristályoknál ugyancsak kapott ilyen értékeket: 12,500 = 2,16 eV, 12,780 = 2,20 eV. Ezek mellett további olyanokat, amelyek színeseknél is megkaphatók: 11980 ~ 2,06 eV, 15,320 ~ 2,64 eV.

Összefoglalás:

1. Mértük színezett NaCl, KBr és KCl kristályok vezetőképességének hőmérsékleti függését. Valamennyi fajta kristálynál megkaptuk az *F* centrumoknak megfelelő értéket. Meg lehet tehát állapítani, hogy a félvezetőknél a zavaró termek elektromos úton meghatározhatók.

2. Az *F* centrumok mellett más olyan energia értékeket is nyertünk, amelyek optikai mérésekből (abszorpció, foszforeszcencia, emisszió) szintén megkaphatók.

3. A vezetés hőmérsékleti függése legtöbbnyire tört egyenesekkel adható meg, ahol a törések élesek.

4. NaCl kristályoknál az *F* és *F'* centrumok mellett kaptunk olyan értékeket, amelyek *Gyulai* kék kősónál végzett abszorpciós mérése négy abszorpciós maximumának felelnek meg.

5. Az áram által elszíntelenített kristályoknál ugyancsak megkaphatók az *F* centrumoknak megfelelő értékek. Ezek az eredmények az alkálihalogenid kristályok vezetéséről alkotott mai képünkkel igen nehezen érthetők meg.

A méréseket a Budapesti Műszaki Egyetem Kísérleti Fizikai Intézetében végeztük. E helyen is köszönetet kell mondanunk az Intézet igazgatójának, dr Gyulai Zoltán a M. T. A. lev. tagjának, aki állandó érdeklődésével és értékes tanácsaival segítségünkre volt.

Budapesti Műszaki Egyetem
Kísérleti Fizikai Intézete.

IRODALOM

[1] *Boros J.:* ZS. f. Phys. *126,* (1949), 721; Fizikai Szemle II. évf. (1952) 34.
[2] *B. Gudden* und *W. Schottky:* Phys. ZS. *36,* (1935), 717.
[3] *A. Smakula:* Gött. Nachr. *55,* 1934.
[4] *R. Ottmer:* ZS. f. Phys. 46, (1928), 788.
[5] *Gyulai Z.:* ZS. f. Phys. *113,* (1939), 28.
[6] *Phipps and Partridge:* Journ. of Am. Chem. Soc. *51,* (1929), 1331.
[7] *A. Smekal:* Hb. d. Phys. XXIV. *2,* 882.
[8] *Gyulai Z.:* ZS. f. Phys. 35, (1926), 411.
[9] *E. Eysank:* Sitz. Ber. d. Wien. Ak. II. a. *145,* (1936), 387.
[10] *K. Przibram:* ZS. f. Phys. *102,* (1936), 331.
[11] *M Savostianowa:* ZS. f. Phys. *64,* (1930), 262.
[12] *G. Vészi:* Diszertáció, Göttingen, 1926.
[13] *Phipps, Lansing* and *Cooke:* Journ. of. Am. Chem. Soc. *48,* (1926), 122.
[14] *de Boer:* Elektronemission und Absorption. S. 182.
[15] *W. Roos:* Ann. d. Phys. (5) *20,* (1934), 783.
[16] *O. Pick:* Ann. d. Phys. (5) *51,* (1938), 365.
[17] *F. Seitz:* Rew. of. Mod. Phys. *18,* (1946), 384.

A SCHRÖDINGER-GORDON EGYENLET

NOVOBÁTZKY KÁROLY r. tag

Előadta az 1952. november 3-án tartott felolvasó ülésen

A kvantummechanika modern elmélete egységesen *Born* álláspontjára helyezkedik, amely szerint az elmélet kijelentései statisztikusan értékelendők. A statisztikus teória jellegzetessége, hogy sokaságokat definiál, melyen bizonyos szabályok szerint átlagol. Különös, hogy az általánosan elfogadott statisztikus álláspont ellenére nem találunk törekvést a statisztikus sokaság definiciójára és sajátságainak felkutatására. Rövid közleményben kísérletet tettem ebben az irányban. Ott a nem-relativisztikus kvantumelmélet volt a vizsgálat tárgya. Most a relativisztikus Schrödinger—Gordon egyenletet akarjuk teljes általánosságban tárgyalni.

Kiindulópont a relativisztikus pontmechanika. A tömegpont, melynek nyugalmi tömege m_0, töltése e, a φ_i négyespotenciállal jellemzett elektromágneses tér hatása alatt álljon. A Hamilton—Jacobi-féle mozgásegyenlet ekkor:

$$\frac{1}{2\,m_0}\sum\left(\frac{\partial S}{\partial x_i}-\frac{e}{c}\varphi_i\right)^2+\frac{m_0c^2}{2}=0. \tag{1}$$

Az első karakterisztikus egyenlet adja a négyessebességet:

$$\frac{dx_i}{d\tau}=u_i=\frac{1}{m_0}\left(\frac{\partial S}{\partial x_i}-\frac{e}{c}\varphi_i\right). \tag{2}$$

Az ismert feltétel:

$$\sum\left(\frac{dx_i}{d\tau}\right)^2=-c^2$$

(1) szerint teljesítve van. $\frac{\partial S}{\partial x_i}$ eliminációja az első és második karakterisztikus egyenletből tudvalevőleg a helyes mozgásegyenletre vezet:

$$\frac{d}{d\tau}(m_0u_i)=\frac{e}{c}F_{ik}u_k, \tag{2'}$$

ahol $F_{ik}=\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_i}-\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_k}$. — A megalkotandó statisztikának alapgondolata úgy mint az első közleményben abból a felismerésből fakad, hogy az $S(x_k)$ hatásfüggvény (2) szerint sebességteret ad meg, és ilyen módon végtelen pontsokaság mozgását írja le. Ezt választjuk statisztikus sokaságnak. Mivel a pontszám ϱ_0 nyugalmi sűrűsége pozitív, legyen $\varrho_0=A^2$. A pontszám megmaradása megkívánja a következő kontinuitási egyenlet fennállását:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\varrho_0 u_i) \equiv \frac{\partial}{\partial x_i}\left[A^2 \frac{1}{m_0}\left(\frac{\partial S}{\partial x_i} - \frac{e}{c}\varphi_i\right)\right] = 0. \tag{3}$$

A^2 jelenti a nyugalmi köbcentiméterben foglalt pontok számát. Az (1) és (3) egyenlet variácos elvből következik, melynek Lagrange-függvénye:

$$L = 2A^2 \left\{ \frac{1}{2m_0} \sum \left(\frac{\partial S}{\partial x_i} - \frac{e}{c}\varphi_i\right)^2 + \frac{m_0 c^2}{2} \right\}. \tag{4}$$

Variálandó függvények A és S.

A nehézség, amelyet meg kell szüntetni, abban áll, hogy az S általános megoldásában szereplő határozatlan konstansok a statisztikus pontsokaságot lényegesen befolyásolják. A nehézség csak úgy kerülhető el, hogy A és S számára reguláris megoldásokat követelünk, amelyek tudvalevőleg nem tartalmaznak önkényes állandókat. Mivel azonban a közönséges mechanika fordulóponttal bíró mozgások esetében ϱ_0 regularitását kizárja, a mechanika megfelelő általánosításra szorul. Az első közleményben foglalt módszert követve relativisztikus esetben a következő általánosított Lagrange-függvényt nyerjük:

$$L = 2A^2 \left\{ \frac{1}{2m_0} \sum \left(\frac{\partial S}{\partial x_i} - \frac{e}{c}\varphi_i\right)^2 + \frac{m_0 c^2}{2} \right\} + \frac{\hbar^2}{m_0} \sum \left(\frac{\partial A}{\partial x_i}\right)^2. \tag{5}$$

A belőle folyó Euler-féle egyenletek így hangzanak:

$$\frac{1}{2m_0} \sum \left(\frac{\partial S}{\partial x_i} - \frac{e}{c}\varphi_i\right)^2 + \frac{m_0 c^2}{2} - \frac{\hbar^2}{2m_0}\frac{\Box A}{A} = 0, \tag{6}$$

valamint a (3) kontinuitási egyenlet. Képezzük A-ból és S-ből a következő komplex függvényt:

$$\psi = A e^{\frac{i}{\hbar} S}. \tag{7}$$

Ekkor a (3) és (6) főegyenletek a Schrödinger—Gordon-egyenletté olvadnak össze:

$$\left\{ \frac{1}{2m_0} \sum \left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{e}{c}\varphi_i\right)^2 + \frac{m_0 c^2}{2} \right\} \psi = 0. \tag{8}$$

Ennek az egyenletnek valós része adja a (6)-ot, az imaginárius része a (3)-at. A (8) relativisztikus hullámegyenlet tehát teljesen ekvivalens (3)-mal és (6)-tal, pontsokaság mozgását írja le. Az előzőekben már leszögeztük, hogy csak reguláris megoldások jöhetnek tekintetbe. (7)-ből következik:

$$A^2 = \psi^* \psi \tag{9}$$

és

$$S = \frac{\hbar}{2i} \log \frac{\psi}{\psi^*}. \tag{10}$$

Ha ezt a két kifejezést behelyettesítjük a (3) kontinuitási egyenletbe, nyerjük:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{\hbar}{2im_0}\left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x_i} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial x_i}\right) - \frac{e}{m_0 c}\varphi_i \psi^* \psi\right] = 0.$$

A négyesáram komponensei tehát:

$$s_i = \frac{\hbar}{2im_0}\left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x_i} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial x_i}\right) - \frac{e}{m_0 c}\varphi_i \psi^* \psi. \tag{11}$$

Ez a kvantumelméletből jólismert kifejezés. Míg azonban ott a jelentése, mint valószínűségi áram, axiomatikusan vezetendő be, itt magától következik. s_i egyszerűen megadja a sokaságnak azt a pontmennyiségét, mely 1 sec alatt merőlegesen átfolyik 1 cm²-en. Minél nagyobb ez a pontmennyiség, annál nagyobb a statisztikus valószínűsége annak, hogy egy áthaladó tömegpontra bukkanunk. A négyesáramra még visszatérünk.

Előbb meg kell mutatnunk, hogy a (6) általánosított Jacobi-féle egyenlet a pontsokaságnak egy teljesen klasszikus-relativisztikus mozgását írja le. Ehhez szükséges, hogy megállapítsuk az általánosítás révén módosult pontszám-sűrűséget és négyessebességet. A (3) egyenlet értelmében írható:

$$\frac{A^2}{m_0}\left(\frac{\partial S}{\partial x_i} - \frac{e}{c}\varphi_i\right) = \varrho_0 u_i.$$

Az egyenletet négyzetre emeljük és összegezünk $i = 1, 2, 3, 4$-re. Akkor

$$\frac{A^4}{m_0^2}\sum\left(\frac{\partial S}{\partial x_i} - \frac{e}{c}\varphi_i\right)^2 = -\varrho_0^2 c^2$$

vagy

$$\varrho_0^2 = -\frac{A^4}{m_0^2 c^2}\sum\left(\frac{\partial S}{\partial x_i} - \frac{e}{c}\varphi_i\right)^2.$$

(6)-ból számítva a jobboldal $-A^4\left(1 - \frac{\hbar^2}{m_0^2 c^2}\frac{\Box A}{A}\right)$, és ebből, ha bevezetjük az $m_0' = m_0\sqrt{1 - \frac{\hbar^2}{m_0^2 c^2}\frac{\Box A}{A}}$ jelölést, kiadódik, hogy

$$\varrho_0 = A^2 \frac{m_0'}{m_0}, \quad u_i = \frac{1}{m_0'}\left(\frac{\partial S}{\partial x_i} - \frac{e}{c}\varphi_i\right). \tag{12}$$

Látható, hogy a $-\frac{\hbar^2}{2m_0}\frac{\Box A}{A}$ tag fellépése a (6) egyenletben azt eredményezi, hogy a sokaság minden pontjának nyugalmi tömege megváltozik. A (6) Jacobi-féle mozgásegyenlet könnyű átalakítás után az új nyugalmi tömeggel így írható:

$$\frac{1}{2m_0'}\sum\left(\frac{\partial S}{\partial x_i} - \frac{e}{c}\varphi_i\right)^2 + \frac{m_0' c^2}{2} = 0. \tag{13}$$

Ennek az alaknak első karakterisztikus egyenlete most már négyessebességre vezet:

$$u_i = \frac{dx_i}{d\tau} = \frac{1}{m_0'}\left(\frac{\partial S}{\partial x_i} - \frac{e}{c}\varphi_i\right). \tag{14}$$

(13) biztosítja a $\Sigma u_i^2 = -c^2$ feltétel teljesítését. A második karakterisztikus

egyenlet, ha (13) baloldalát egy pillanatra F-fel jelöljük:

$$\frac{d}{d\tau}\frac{\partial S}{\partial x_i}=-\frac{\partial F}{\partial x_i}.$$

Ebbe az egyenletbe behelyettesítjük $\frac{\partial S}{\partial x_i}$ kifejezését, amint (14)-ből adódik, és meggondoljuk, hogy x_i az m_0'-ben és φ_i-ben fordul elő, akkor következik:

$$\frac{d}{d\tau}\left(m_0' u_i+\frac{e}{c}\varphi_i\right)=\frac{1}{2m_0'^2}\sum\left(\frac{\partial S}{\partial x_k}-\frac{e}{c}\varphi_k\right)^2\frac{\partial m_0'}{\partial x_i}+$$

$$+\frac{1}{m_0'}\sum\left(\frac{\partial S}{\partial x_k}-\frac{e}{c}\varphi_k\right)\frac{e}{c}\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_i}-\frac{c^2}{2}\frac{\partial m_0'}{\partial x_i}.$$

Baloldalon $\frac{d\varphi_i}{d\tau}$ helyébe írható $\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_k}u_k$, jobboldalon az első tag (12) folytán $-\frac{1}{2}\frac{\partial m_0'}{\partial x_i}c^2$. Kiadódik tehát a következő végleges mozgásegyenlet:

$$\frac{d}{d\tau}(m_0' u_i)=-\frac{\partial}{\partial x_i}(m_0' c^2)+\sum\frac{e}{c}F_{ik}u_k. \qquad (15)$$

Az összehasonlítás (2')-vel megmutatja, hogy a (6)-ban szereplő $-\frac{\hbar^2}{2m_0}\frac{\Box A}{A}$ toldaléktag miatt a mozgásegyenletben az $m_0'c^2$ négyespotenciál lép fel. Az eredmény abban a megállapításban foglalható össze, hogy a Schrödinger—Gordon-egyenlet egy pontsokaság klasszikus mozgását írja le, aszerint a jólismert törvény szerint, hogy a négyesimpulzus sajátidőszerinti változása egyenlő a mozgató négyes erővel. Csak maga az erő változott meg, az $m_0'c^2$ négyespotenciál fellépése folytán.

Közbeszúrva megjegyzendő, hogy az állandó m_0 nyugalmi tömeg átmenete a változó m_0'-be akkor mindig bekövetkezik, ha a négyespotenciál meg van adva és ezért a négyes munka nem tűnik el azonosan. Legyen például adva a $V(x)$ négyespotenciál, akkor a mozgásegyenletek rendszere:

$$\frac{d}{d\tau}(m_0' u_i)=-\frac{\partial V}{\partial x_i}, \text{ vagy } u_i\frac{dm_0'}{d\tau}+m_0'\frac{du_i}{d\tau}=-\frac{\partial V}{\partial x_i}.$$

Ha $-u_i$-vel szorzunk, következik:

$$+c^2\frac{dm_0'}{d\tau}=+\frac{\partial V}{\partial x_i}u_i=\frac{dV}{d\tau}.$$

Tehát $\frac{dm_0'}{d\tau}=\frac{1}{c^2}\frac{dV}{d\tau}$ és integrált alakban $m_0'=m_0+\frac{V}{c^2}$. A V négyespotenciálnak $\frac{V}{c^2}$ tömegértéke megnöveli a nyugalmi tömeget. Ennek a mozgásproblémának Jacobi-féle egyenlete

$$\frac{1}{2m_0'}\sum\left(\frac{\partial S}{\partial x_i}\right)^2+\frac{m_0'c^2}{2}=0.$$

A karakterisztikus egyenletek az eredeti mozgásegyenletekre vezetnek.

Könnyű számítás mutatja, hogy esetünkben a tömegpont energiája

$$E = e\,\Phi + \frac{m_2' c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

Az a körülmény, hogy a (6) Jacobi egyenlet klasszikus-relativisztikus mozgást ír le, megengedi, hogy a pontsokaságnak erre a mozgására a relatívitás elméletének minden megállapítását alkalmazzuk. Ismeretes, hogy *Dirac* nem ismeri el a Schrödinger—Gordon-egyenletnek korrekt hullám-egyenlet jellegét, mert az időben másodrendű. Viszont *Pauli* és *Weisskopf* szuperkvantált formában elfogadja. A megütközés igazi oka a (11) formulában rejlik. $i=4$ esetére az következik belőle, hogy

$$s_4 = i\varrho = \frac{\hbar}{2im_0}\left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x_4} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial x_4}\right) - \frac{e}{m_0 c}\varphi_4 \psi^* \psi. \tag{16}$$

Mivel egy bizonyos t_0 időpontban úgy ψ, mint $\frac{\partial \psi}{\partial x_4}$ szabadon választható, feltétlenül elérhető, hogy a jobboldali kifejezés a kijelölt időpontban negatív imagináriussá válik. Ez negatív ϱ sűrűségre vezet, vagyis annak valószínűsége, hogy a részecskét egy megadott hely környezetében megtaláljuk, negatívvá válik. Éppen ezért a mai álláspont szerint a ψ hullámfüggvényről nem ismerik el, hogy alkalmas a részecske állapotának leírására. (Lásd pl. March A. könyvét, 1951, p. 177.) A tiszta ψ-álláspont alapján ez ellen nem is emelhető kifogás, mert nem tudunk magunknak számot adni, honnan is ered a képtelenség. Az itt adott kvantumelméleti értelmezés szerint a kérdés egész világossá válik. A ψ függvény nem egy részecskének, hanem egy pontsokaságnak a mozgását írja le, tehát úgy a ϱ_0 nyugalmi, mint a ϱ rendszer-sűrűségnek jól definiált értelme van. A két mennyiség a következő kapcsolatban áll:

$$\varrho = \frac{\varrho_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{ic}\varrho_0 u_4.$$

Mivel $\varrho_0 = \psi^* \psi \frac{m_0'}{m_0}$ mindig pozitív, ϱ csak az által válhat negatívvá, hogy a $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ kifejezést negatív előjellel írjuk, másképp kifejezve u_4-et negatív imagináriusnak választjuk. Ekkor azonban a képtelenségek egész sora áll be. A pozitív nyugalmi hosszúságú mérőrúd rendszerhossza negatívvá válik és hasonlóan pozitív nyugalmi időtartamnak a rendszerbeli megfelelője. Most világosan látható, hogy a negatív ϱ rendszer-sűrűségnek gyökerei nem nyúlnak le fizikai mélységekbe. A (8) egyenlethez egyszerűen hozzáfűzendő az a megjegyzés, hogy a kezdeti értékek úgy választandók, hogy a (16) kifejezés pozitív imagináriussá váljék.

Más kényszerítő módon is bemutatható, hogy u_4-nek, vagy (14) szerint $\left(\frac{\partial S}{\partial x_4} - \frac{e}{c}\varphi_4\right)$-nek pozitív imagináriusnak kell lennie. Mert csak ebben az esetben megy át a (8) egyenlet a $c \rightarrow \infty$ határátmenettel a nem relativisztikus Schrödinger-egyenletbe. Ennek az átmenetnek lehetőségét feltétlenül meg kell követelnünk. (6)-ból következik:

$$\frac{\partial S}{\partial x_4} - \frac{e}{c}\varphi_4 = \pm i \sqrt{m_0^2 c^2 + \sum_1^3 \left(\frac{\partial S}{\partial x_i} - \frac{e}{c}\varphi_i\right)^2 - \hbar^2 \frac{\Box A}{A}} \tag{17}$$

vagy

$$\frac{\partial S}{\partial t} + e\Phi = \mp c \sqrt{m_0^2 c^2 + \sum_1^3 \left(\frac{\partial S}{\partial x_i} - \frac{e}{c}\varphi_i\right)^2 - \hbar^0 \frac{\Box A}{A}} =$$

$$= \mp m_0 c^2 \left\{ 1 + \frac{\sum_1^3 \left(\frac{\partial S}{\partial x_i} - \frac{e}{c}\varphi_i\right)^2 - \hbar^2 \frac{\Box A}{A}}{m_0 c^2} \right\}^{1/2}. \tag{18}$$

A sorfejtést a második taggal befejezhetjük, mert a többi tag nevezőjében c szerepel, tehát a határátmenetnél kiesik. Az $E_0 = m_0 c^2$ nyugalmi energia, mint adott mennyiség természetesen nem vethető alá határátmenetnek. $\Box A$ átmegy ΔA-ba. Ennél fogva $c \rightarrow \infty$-re nyerjük:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + e\Phi = \mp \left\{ E_0 + \frac{1}{2m_0} \sum_1^3 \left(\frac{\partial S}{\partial x_i} - \frac{e}{c}\varphi_i\right)^2 - \frac{\hbar^2}{2m_0} \frac{\Delta A}{A} \right\}.$$

A jobboldali kifejezésnek pozitív előjellel kell állnia, hogy az első közlemény (9) Schrödinger egyenletét adja. A felső előjel érvényes tehát (17)-ben is, vagyis $\left(\frac{\partial S}{\partial x_4} - \frac{e}{c}\varphi_4\right)$-nek, ill. u_4-nek pozitív imagináriusnak kell lennie. Hozzá kell tennünk, hogy a határátmenetnél a (3) kontinuitási egyenlet is átmegy az első közlemény (10) egyenletébe.

(18)-ból még egy érdekes következtés vonható. A stacionárius esetnek megfelelően legyen $\frac{\partial S}{\partial t} = -Et$ és legyen egyszersmind $\Phi = 0$. Akkor E a kinetikai energiát jelenti és az egyenlet az alsó (hamis) előjellel adná, hogy

$$E = -c \sqrt{m_0^2 c^2 + \sum_1^3 \left(\frac{\partial S}{\partial x_i} - \frac{e}{c}\varphi_i\right)^2 + \hbar^2 \frac{\Box A}{A}},$$

a kinetikai energia tehát negatív lehetne, úgy mint *Dirac*nál. A különbség azonban, hogy míg *Dirac*nál a negatív kinetikai energia pozitív sűrűséggel kapcsolatban lép fel, addig itt negatív energia csak negatív sűrűség esetén lép fel. Az egész megállapítás különben azonnal következik a kinetikai energiának $\frac{m_0' c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ alakjából.

*Pauli*nak és *Weisskop*nak az a megállapítása, hogy ϱ kettős előjelénél fogva csak elektromos töltés sűrűséget jelenthet, láthatólag nem helytálló. A tömegpontnak egyáltalán nem kell töltéssel rendelkeznie, az elektromágneses tér helyett pedig tetszőleges tömegre ható erőt vezethetünk be. A Schrödinger—

Gordon egyenlet csak nem válik azáltal értelmetlenné. A fentiek szerint semmi esetre. Az egyenlet azonkívül nem hozható összefüggésbe semmiféle szétsugárzással. Ezt a pontszám (3) kontinuitási egyenlete nem engendi meg.

A kezdeti feltétel megbeszélt megszorítása mellett a Schrödinger—Gordon egyenlet korrekt hullámegyenletnek bizonyul. Igaz, hogy stacionárius esetben nincsenek kezdeti értékek. Akkor a következőt kell meggondolnunk. A helyes relatívisztikus hullámegyenlet a felső előjellel vett (17) egyenlet, kapcsolatban a (3) kontinuitási egyenlettel. A Schrödinger—Gordon egyenlet nem egyszerű összefoglalása ennek a két egyenletnek, hanem (17)-et négyzetre emelt racionális formában tartalmazza. A racionális egyenlet megoldását tehát az irracionális (17)-be kell helyettesítenünk, hogy érvényességéről dönthessünk. Így pl. az $\frac{e^2}{r}$ repulziós potenciál (proton és pozitron között) stacionárius esetben negatív sűrűségre vezet. Következtetés: ennek a potenciálnak nem felelnek meg stacionárius állapotok.

Ebben az értelemben a Schrödinger—Gordon egyenlet szpin nélküli részecskék számára a helyes relativisztikus „egy-részecske" hullámegyenlet, mely értelmezhetősége céljából nem szorul szuperkvantálásra.

Budapesti Eötvös Loránd Tudományegyetem
Fizikai Intézete.

EGY EGYSZERŰ KÍSÉRLET A SZELÉNEGYENIRÁNYÍTÓ ZÁRÓRÉTEGÉNEK ISMERETÉHEZ

SELÉNYI PÁL lev. tag

Előadta az 1952. december 1-én tartott felolvasó ülésen

Mind a rézoxidul egyenirányító, mind pedig a szelénegyenirányító szerkezetileg két fém között: az alaplemez és a fedőelektróda között helyet foglaló félvezetőrétegből áll. A rézoxidul egyenirányító esetén mind a két fém még kémiailag is azonos lehet: az alaplemez itt vörösréz, de az ú. n. fedőelektróda is lehet vörösrézből, úgy hogy az egész szerkezet látszólag szimmetrikus s ennek ellenére az áramot egyik irányban sokszorosan jobban ereszti át, mint a másik irányban. Ebből érthető, hogy az egyenirányítók vizsgálatának kezdettől fogva egyik legérdekesebb kérdése az volt, hogy ebben a látszólagos szimmetrikus szerkezetben hol van az aszimmetria székhelye. A rézoxidul egyenirányítóról hosszadalmas vizsgálatok kiderítették, hogy ez az aszimmetrikusan vezető „záróréteg" az alaplemez és a rajta kb. 1040^0 C-on történt izzítással létrehozott Cu_2O bevonat között foglal helyet és kb. 0,0001 cm vastag, sztöchimetrikusan tiszta Cu_2O rétegből áll, amely egy rézfelesleggel, illetve oxigénfelesleggel biró rézoxidul réteg közé van beágyazva. A rézoxidul réteg szabad felülete és a reá alkalmazott pl. rézből való fedőelektróda között ilyen réteg nincs és azért ott aszimmetrikus vezetés sem lép fel.

A szelénegyenirányitóról már 1940-ben, mikor ezeknek a gyártásával és vizsgálatával foglalkozni kezdtem, ismeretes volt, hogy itt a záróréteg a szelénbevonat külső, szabad felülete és a fedőelektróda között van, mely utóbbi rendszerint bizmut, kadmium és ón eutektikus ötvözetéből szokott készülni, hogy azonban az alapfém és a szelén között záróréteg miért nem jön létre, arra nézve abban az időben még semmi irodalmi adat nem volt található.

A higanygőznek a szelénegyenirányítóra és a szelénfényelemre gyakorolt hatásáról szóló legutóbbi közleményemben[1,2] megemlítettem, hogy a szelénegyenirányitó gyártása közben szerzett tapasztalatok már 1943—44-ben arra a meggyőződésre vezettek, hogy a „szelénnek belső, az alaplemezzel érintkező oldalán azért nincs záróréteg, mivel ott vasszelenidből vagy nikkelszelenidből álló átmeneti réteg képződik". *R. Brill* és *H. Krebs* német kutatók[3] egy ilyen, nikkelszelenidből álló átmeneti réteg jelenlétét röntgenvizsgálat segélyével valóban ki is mutatták olyan egyenirányítókon, amelyeknek alaplemeze nikkelezett vastárcsa. Kimutatták azt is, hogy az alumínium alaplemezre eredetileg a szelén tapadása céljából felvitt kb. 1 2000 mm vastag bizmutréteg a hőkezelés alatt bizmutszeleniddé alakul át és megjegyzik, hogy a záróréteg kiküszöbölése ezen vegyület képződésének tulajdonítható. Mindez legjobb megegyezésben áll említett közleményemben közölt megállapításaimmal, hogy a záróhatás ugyancsak megszűnik, ha a szelén legfelső rétegét higanyszeleniddé, illetve ólomszeleniddé alakítjuk át.

Az alábbiakban egy egyszerű kísérletet ismertetek, amely ugyancsak a fenti felfogás helyességét bizonyítja, hogy t. i. a záróképesség megszűnik, ha a szelén felületén elektromosan vezető fémszelenidből álló átmeneti réteg képződik, illetve van jelen. A kísérletet még 1943 májusában végeztem, a reá vonatkozó feljegyzésekre azonban régi kísérleti jegyzőkönyvemben csak nemrégiben bukkantam rá.

Ismeretes,[4] hogy a szelénegyenirányító gyártásánál az olvadt állapotban felkent amorf szelénréteget nyomásos hőkezeléssel viszik át kristályos módosulatába, miközben két-két tárcsa egymásnak fordított szelénrétege közé egy-egy csillámlemezt helyeznek. A csillám beszerzésének akkori nehézségei arra indítottak, hogy a csillámot más valamivel pótoljam. Tudomásom volt arról, hogy külföldi cégek e célra fényesre csiszolt alumíniumtárcsát jó sikerrel alkalmaznak, nyilván azért, mivel az alumínium ilyen körülmények között a szelénnel nem vegyül, sőt nem is tapad hozzá. Abban az időben az alumínium sem lévén könnyen hozzáférhető, megkíséreltem a préseléshez fényesre csiszolt és nikkelezett, illetve krómozott acéltárcsákat használni. Az ilymódon készült tárcsák teljesen hasznavehetetlennek bizonyultak: áteresztő irányban ellenállásuk a szokott kicsiny volt, ellenben zárásnak nyomát is alig mutatták. Míg egy jó tárcsa záró- és áteresztőellenállásának viszonya 1 V-on mérve jó néhány ezer, addig ezeken a tárcsákon a záróellenállás csupán háromszor volt nagyobb az átmenő irányúnál. A tárcsák külső megjelenése sem volt kifogástalan: a préselés után foltosak voltak és ilyenek maradtak a második hőkezelés után is. Mindez arra mutatott, hogy a nikkel, ill. króm már a préselésnél alkalmazott, kereken 110° C hőmérsékleten a szelénnel kémiailag egyesül. Ezt egyszerűen úgy próbáltam megakadályozni, hogy a krómozott acéltárcsát mindkét oldalán zapon-lakkal vastagon bekentem és a lakkot óvatosan beszárítottam. A két darab szeléntárcsából, amelyek préseléséhez ezeket a lakkozott tárcsákat használtam, kifogástalan egyenirányítók lettek, ugyanolyan jók, mint amelyeket csillámmal préseltünk. Hasonló jó eredményeket kaptam egy második kísérletben négy darab egyenirányítóval, amelyeket fényesre kadmiumozott és belakkozott acéltárcsákkal préseltem, míg a harmadik hasonló kísérlet olyan egyenirányítókat eredményezett, amelyek elég jól formálhatók voltak ugyan, de nem érték el a csillámmal préselt tárcsák minőségét. A kísérleteket természetesen folytatni kellett volna. A zapon-lakk, ami éppen kezem ügyébe esett, erre a célra természetesen nem volt éppen a legalkalmasabb: a préselés alatt foltokban levált sráragadt a szelénre. Feljegyzéseim szerint tervbe vettem az acéltárcsára ráégetett, hőálló zománclakkal próbálkozni. Erre akkor nem került sor s ma már ez az egész nyomásos hőkezelés félig-meddig elavult eljárás. Ez a néhány egyszerű megfigyelés azonban — azt hiszem — valóságos „experimentum crucis" jellegével bír: ha a szelén felső rétegének módjában van a vele érintkező fémmel szeleniddé egyesülni, a zárás megszűnik; ha ilyen közbenső szelenid-réteg létrejöttét megakadályozzuk, a záróréteg kialakul. Ebben a tekintetben ezeknek a kísérleteknek majdnem akkora meggyőző erőt tulajdoníthatunk, mint a fent idézett német kutatók vizsgálatának, akik — mint említettük — a közbenső réteget igen körülményes eljárás után röntgen-elhajlással mutatták ki.

Meg kell említenünk, hogy nem minden fémszelenidnek van ilyen káros hatása, sőt az ellenkezőre is ismerünk példát. Így pl. ismeretes, hogy a szelénegyenirányító zárását megjavíthatjuk, ha a szelénrétegre kadmiumot viszünk fel és így vetjük alá kb. 210° C-on történő hőkezelésnek. Hogy ilyen körülmények között itt is kadmiumszelenid képződik, az kiderül pl. *Masao Tomura* vizsgálataiból,[5] aki azt tapasztalta, hogy a szelénfényelem közönséges, kb. 5700 Å-nél fekvő színérzékenységi maximumán kívül a CdSe-re jellemző, kb. 7100 Å-nél fekvő maximum is jelentkezik, ha a szelénfelületet Cd-réteggel borítva, azt utólag vakuumban még kb. 4 órán keresztül 200° C-on tartja. Ugyanő az ekkor keletkező CdSe-réteget elektrondiffrakcióval ki is mutatta, azonban a CdSe-nek a zárást javító hatására vonatkozólag eddig az irodalomban közelebbi felvilágosítást nem találtam.

Budapesti Eötvös Loránd Tudományegyetem
Fizikai Intézete.

IRODALOM

1 *Selényi Pál,* M. Tud. Akadémia III. oszt. Közleményei *2* (1952), 51.
2 *Selényi, P.*, Proc. Phys. Soc. B, *65* (1952), 552.
3 *J. I. O. A.* Final Report No. 56. 15 és 20.
4 *Selényi Pál,* Elektrotechnika *36* (1943), 107 és 210.
5 *Masao Tomura,* Bull. Chem. Soc. Japan *22* (1949), 145. ld.: Chemical Abstracts *45* (1951), 32.

AZ ELEMI RÉSZEK KÖLCSÖNHATÁSAIRÓL*

(Összefoglaló referátum)

MARX GYÖRGY

Célunk áttekintést adni az elemi részek kölcsönhatásairól. Az alábbiakban nem foglalkozunk az elemi részek általános, mindegyik részecsketípusra közös problémáival, hanem csak azokat a törvényszerűségeket tárgyaljuk, melyek az egyes elemi részek speciális kölcsönhatásainak leírására alkalmasak.

*

A kvantumelmélet kiépítésének befejeződése, 1930 óta a fizikai kutatás eredményei közül elvi szempontból a legfigyelemreméltóbbaknak az elemi részek nagy számban való felfedezése és azok nagy átalakulási készségének felismerése mondható. E téren a felfedezések olyan gyors ütemben követik egymást, hogy az elemi részekre vonatkozó tudásunk szinte hónapról hónapra változik. 1930-ban kizárólag elektronokból és protonokból felépítettnek képzeltük az anyagot, ismertük ezen kívül a bizonyos szempontokból az elemi részecskék közé sorolható fotont is. 1940-ig az ismert elemi részek száma 3-ról 8-ra, 1950-ig 14-re emelkedett, ma pedig 20 körül járunk. Az I. táblázatban csak

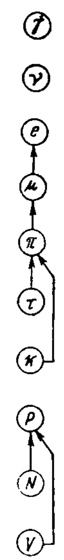
I. TÁBLÁZAT

Jel	Név	Felfed. éve	Tömeg	Spin	Tölt.	Élettartam (sec)	Bomlástermékek	Irodalom
γ	foton	1905	0	1	0	∞	—	—
ν	neutrinó	1931	0?	$1/2$	0	∞	—	1, 2.
e^-	elektron	1897	1	$1/2$	—	∞	—	3.
e^+	pozitron	1932	1	$1/2$	+	∞	—	3.
μ^-	μ-mezon	1937	212	$1/2$	—	$2{,}15.10^{-6}$	$e^- + \nu + \nu$?	4, 5.
μ^+	μ^+ mezon	1937	212	$1/2$	+	$2{,}15.10^{-6}$	$e^+ + \nu + \nu$?	4, 5.
π^0	π-mezon	1949	270?	0	0	10^{-14}?	$\gamma + \gamma$	6, 7.
π^+	π-mezon	1947	274	0	+	$1{,}6.10^{-8}$	$\mu^+ + \nu$	4, 5, 8.
π^-	π-mezon	1947	274	0	—	$1{,}6.10^{-8}$	$\mu^- + \nu$	4, 5.
τ^0	τ-mezon	1947	796?	0?	0	10^{-9}?	$\pi^+ + \pi^-$?	9, 10.
τ^+	τ-mezon	1944	966?	0?	+	10^{-9}?	$\pi^+ + \pi^+ + \pi^-$	11.
τ^-	τ-mezon	1948	966?	0?	—	10^{-9}?	$\pi^+ + \pi^- + \pi^-$	11, 12.
$\varkappa^+$	$\varkappa$-mezon	1951	1260?	0?	+	10^{-10}?	$\mu^+ + \nu$?	13, 14, 15.
$\varkappa^-$	$\varkappa$-mezon	1951	1260?	0?	—	10^{-10}?	$\mu^- + \nu$?	13, 14, 15.
P^+	proton	1816	1836,5	$1/2$	+	∞	—	—
N^0	neutron	1932	1839	$1/2$	0	10^3?	$P^+ + e^- + \nu$	16.
V^0	V-részecske	1950	2370	$1/2$?	0	10^{-10}?	$P^+ + \pi^-$?	17.

* Az Osztályközlemények ezentúl összefoglaló referátumokat is közöl az osztályhoz tartozó tudományágak köréből.

azok az elemi részek szerepelnek, amelyek létezését általánosan elfogadták, melyekről nagyszámú felvétel vagy más közvetett adat áll rendelkezésre.

A természetben fellelhető elemi részek nagy száma különösen meglepő az elméleti fizikus számára. Míg az elsőnek felfedezett részecskék létezésének szükségességét előrelátták (neutrinó, pozitron, töltött és semleges π-mezon), vagy felfedezésük komoly elvi nehézségeket oldott meg (neutron), addig a nagyszámú új felfedezés teljesen váratlanul következett be. Az újonnan felfedezett részecskéket nemcsak hogy nem várta kész hely az elmélet épületében, hanem soknak közülük még ma sem sikerült a helyét megtalálni. A részecskék sokfélesége mellett a másik legmeglepőbb jelenség a részecskék nagy átalakulási készsége. A XX. század első harmadában azt gondoltuk, hogy az elemi részek a természetben az állandóságot képviselik, ezek azok a változatlan építőkövek, melyekből a változó molekulák, atomok és atommagok felépülnek. Ma viszont tudjuk, hogy az elemi részek elenyésző kis része állandó, az instabilitás inkább szabály, mint kivétel az elemi részek körében. Legtöbbjük a másodperc milliomod részénél rövidebb idő alatt önként átalakul más részecskékké. A bomlási folyamatokat az I. számú táblázat megfelelő oszlopai, vagy szemléletesebben az 1. ábra tünteti fel. A bomlási folyamatok az átalakulásoknak csak egy részét képezik. Két elemi rész találkozása igen sok esetben azok megsemmisülésére és újabb elemi részek keletkezésére vezet. Ez alól az egyébként stabil részecskék sem kivételek. Mindnyájunk előtt ismeretes például az elektronnak az a képessége, hogy pozitronnal találkozva elektromos sugárzássá alakuljon át:



1. ábra. Az elemi részek bomlásfolyamatai

$$e^- + e^+ \rightarrow 2\gamma,$$

vagy pedig az atommagba behatolva, ott egy protont neutronná alakítson:

$$e^- + P^+ \rightarrow N^- + \nu.$$

Az utóbbi folyamat mint a radioaktivitás egyik formája K-befogás néven ismeretes. Általában mondhatjuk a következőket: Megfigyelhető minden elemi rész keletkezése és megsemmisülése, pontosabban más részecskékké való átalakulása. Egy elemi rész nemcsak egy-, hanem többféle módon is átalakulhat más részekké, például spontán széteséssel, atommagba való befogással stb. A lehetséges ismert átalakulásoknak a száma ezért jóval nagyobb, mint maguknak az elemi részeknek a száma. Az egyes bomlásfolyamatok a legkülönbözőbb felezési idővel jöhetnek létre. A neutron felezési ideje 20 perc körül van, a semleges π-mezoné 10^{-14} sec. A befogások hatáskeresztmetszete is sok nagyságrendben különbözhet. Még az egyes folyamatok kvalitatív lefolyásának kiismerése is nehéz feladat, nem is szólva az egyes folyamatok hatáskeresztmetszetét, felezési idejét pontosan megadó törvények felállításáról.

A szinte áttekinthetetlennek látszó kísérleti anyag elméleti feldolgozása mégsem reménytelenül nehéz. A kiindulópontot éppen az a felismerés képezheti, hogy az elemi részek átalakulási készsége inkább törvény, mint elszigetelt, kivételes jelenség. Azt kell mondanunk, hogy az elemi részek közt minden olyan átalakulás végbemegy, amelyet valamilyen általános érvényű fizikai törvény meg nem tilt. Ilyen általános fizikai törvénynek tekintendő mindenesetre az energiamegmaradás tétele. Tekintsük például a következő folyamatot: Egy nyugalomban lévő M_0 tömegű részecske szétesik két másik, M_1 és M_2 tömegű részre. A bomló rész nyugalmi energiájának kell fedeznie a keletkező részek nyugalmi energiáját és azok kinetikus energiáját.

$$M_0c^2 = M_1c^2 + M_2c^2 + E_1 + E_2.$$

Ebből következik, hogy egy részecske spontán bomlással nem alakulhat át nála nehezebb részecskévé. (Az 1. ábra nyilai mind egyirányban, a kisebb tömegek felé mutatnak.)

A másik fontos törvény, mely az elemi részek világában is fennáll, az impulzus-megmaradás tétele. Ennek a tételnek a következménye, hogy az elektron és pozitron szétsugárzásánál az

$$e^- + e^+ \rightarrow \gamma$$

egy-fotonos szétsugárzás nem jöhet létre, csak az a folyamat, melynél két foton keletkezik:

$$e^- + e^+ \rightarrow 2\gamma.$$

Ugyancsak az energia- és impulzus-tétel tiltja meg azt, hogy a (zérus nyugalmi tömegűnek feltételezett) neutrinó instabil legyen: spontán több véges nyugalmi tömegű részecskére essen szét.

A harmadik fontos tétel, melyet az elemi részeknek ki kell elégíteniök átalakulásaik során, az impulzusmomentum megmaradásának tétele. Az elemi részek saját impulzusmomentuma, spinje az elemi részeknek elméleti szempontból talán legjellegzetesebb adata. A spin megmaradásának tétele sok fontos felismeréshez vezetett az atommagfizikában. Többek közt ez volt az egyik lényeges adat, mely az atommag összetételének kiderítéséhez vezetett, a spinmegmaradás tétele volt az egyik fontos érv az észlelhetetlen neutrinó feltételezésénél is.

Az elmondott három tétel, az energia, impulzus és impulzusmomentum megmaradásának tétele dinamikai természetű. Mindhárom a mozgásegyenletekből, lényegében *Newton* axiómáiból adódik. A dinamikai jellegű megmaradási tételek azonban korántsem elegendőek minden jelenség megmagyarázására. Ezek megengednék például azt, hogy az elektron szétsugározzon, spontán egy fotonra és egy neutrinóra essen szét:

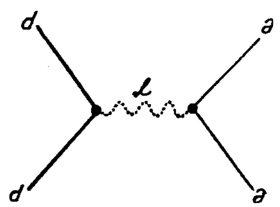
$$e^- \rightarrow \gamma + \nu,$$

hasonlóan például a semleges π-mezon spontán szétsugárzásához:

$$\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma.$$

(Termodinamikai meggondolások arra engednek következtetni, hogy a sugárzás az anyagnak stabilisabb formája.) De tudjuk, hogy mi akadályozza meg az elektron szétsugárzását: az elektronnak elektromos töltése van és ez a töltés nem semmisülhet meg. Az elektronnál nehezebb töltött részek egész sorozata, a $\varkappa, \tau, \pi, \mu$-mezonok mind átalakulhatnak neutrinó kisugárzása közben elektronná, de az elektron — lévén a természetben ismert legkönnyebb töltött elemi részecske — már szükségképpen stabil. Stabilitását a töltésmegmaradás tétele biztosítja.

Elektromos töltéssel rendelkező részecskéknek azokat nevezzük, melyek az elektromos térrel közvetlen kölcsönhatásban állnak, annak kvantumait, a fotonokat abszorbeálni és emittálni képesek. Az elektromágneses tér különböző töltött részecskék közt közvetett kölcsönhatásokat is létrehozhat. Ezek közül a legfontosabb a proton és elektron közt ható Coulomb-kölcsönhatás, mely az atomburok stabilitását biztosítja. Ezt *Feynman* nyomán mint egy (virtuális) foton elektron által való emisszióját és proton által való abszorpcióját a következő gráffal szemléltethetjük:



2. ábra. Elektromágneses kölcsönhatás elektron és proton közt ($e.e$-kölcsönhatás).

A kölcsönhatási energia a részecskéket ábrázoló vonalak csomópontjaihoz tartozó kölcsönhatási állandók (itt: P—γ csomópontban: e proton-töltés, e—γ csomópontban: —e elektrontöltés) szorzatával arányos.

Az I. táblázat azt mutatja, hogy az elemi részek tömegei a legkülönfélébb értékeket veszik fel. Érdekes és fontos azonban az a körülmény, hogy az összes ismert töltött elemi rész elektromos töltése abszolút értékben egyenlő. Mikor először az elektronnál és protonnál, később a többi felfedezett résznél megállapították ezt a törvényszerűséget, először magyarázat nélkül álltak a felfedezés előtt. Tudomásom szerint Fermi[18] mutatott rá először arra, hogy a töltésmegmaradás tétele a különböző részecskék elektromos töltésének egyenlőségét magyarázni tudja. Csak azt kell figyelembe venni, hogy az összes töltött elemi részek — közvetve vagy közvetlenül — semleges részecskék kibocsátása közben egymásba átalakulni képesek, és ezen átalakulás során az elektromos töltés nem változik meg. Az elektromos töltések egyenlő volta azt jelenti, hogy minden töltött részecske egyforma intenzitású elektromos teret kelt maga körül, vagy általánosabban: az elektromágneses térrel egyenlő mértékű kölcsönhatásban állanak.

A töltésmegmaradás tétele nem vezethető le a mozgásegyenletekből, ez megkülönbözteti az előbb említett három dinamikai jellegű megmaradási tételtől. Levezethető azonban a tétel az elektromágneses tér egyenleteiből, a Maxwell-egyenletekből.

Ha megnézzük az 1. ábrát, azt találjuk, hogy a szétesséssel szemben való stabilitás az elektronon kívül még egy helyen, a protonnál is megfigyelhető. Az elektronon kívül egyedül a proton stabil a zérustól különböző nyugalmi tömeggel rendelkező részecskék közül. Ennek a stabilitásnak a természetben nagy szerepe van. Mint tudjuk, az elektron és proton stabilitása biztosítja az atomok állandóságát. A proton stabilitása nem magyarázható a felsorolt négy megmaradási tétel (energia, impulzus, spin és töltés megmaradás) egyikével sem. Egyik tétel sem tiltaná meg például — közvetett vagy közvetlen átalakulás formájában — a

$$P^{+} \rightarrow e^{+} + \gamma + \gamma$$

folyamatot, ami egy

$$e^{+} + e^{-} \rightarrow \gamma + \gamma$$

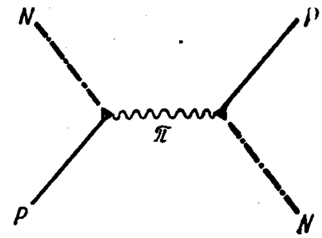
reakcióban folytatódva végeredményben a szilárd anyag szétsugárzásához vezetne. Vagy elképzelhető volna a közvetlen

$$P^{+} + e^{-} \rightarrow \gamma + \gamma$$

szétsugárzási folyamat.

Wigner Jenő[19] vetette fel először 1949-ben azt a gondolatot, hogy a proton elemi részek körében kivétel számba menő stabilitását valamilyen eddig ismeretlen fizikai törvény okozza. Figyelemre méltó, hogy a proton és a nála nehezebb elemi részek csak egymásba képesek átalakulni, protonnál könnyebb részekre való szétesés egyiknél sem figyelhető meg. Nevezzük a protonokat és a nála nehezebb részecskéket (neutron, *V*-részecske) közös néven nukleonoknak. (A név arra utal, hogy közülük adódnak az atommagok — latinul nucleus — alkotórészei.) *Wigner Jenő* a nukleonokra a következő megmaradási tételt állította fel: „Az elemi részek kölcsönhatásai során a kezdeti és vég-állapotban a nukleonok száma egyenlő." Ha ezt a tételt elfogadjuk, magyarázatát találjuk annak, hogy a proton miért nem eshet szét spontán nála könnyebb részecskékre. A proton a legkönnyebb nukleon, ezért az egyetlen stabil nukleon. A nála nehezebb neutron és *V*-részecske képes spontán protonná alakulni anélkül, hogy ez a nukleonszám megmaradásának tételét megsértené. A *Wigner* által kimondott nukleon-megmaradási tételt nagyszámú megfigyelés támasztja alá. Az összes magreakció tanúbizonyság a tétel érvényessége mellett.

Az eredeti Wigner-féle megfogalmazásban a tétel nem annyira magyarázata, mint inkább leszögezése a proton, illetve általában a nukleonok stabilitásának. Nem világos azonban, hogy miért éppen a proton, a neutron és *V*-részecske foglal el ezen tétel értelmében kitüntetett helyet a többi elemi részecskével szemben. A probléma mélyebb megértéséhez jutunk, ha meggondoljuk a következőket: A nukleonok (proton és neutron) közt fellép egy nem elektromágneses természetű kölcsönhatás is, amely az atommag egyes részecskéit tartja össze. Ezt a kölcsönhatást szokták általában „magerőnek" nevezni. A magerők létrejöttéről ma a következő elképzelésünk van[20, 21, 5]. A nukleonok maguk körül egy erőteret keltenek, melynek energiakvantumai a π-mezonok. Ezt az erőteret nevezzük mezontérnek. A mezontér közvetítésével jön létre a két nukleon közt ható magerő. Ha például egy neutron egy szomszédos proton által keltett mezontérbe jut, akkor a mezontérben a neutronra erő hat, mely azt a pályájáról eltéríti. Az eltérítés például szóráskísérletekkel észlelhető. Szokás a jelenséget a Coulomb-kölcsönhatáshoz hasonlóan egy „virtuális" π-mezon segítségével leírni. A folyamat gráfja:



3. ábra. Magerő-kölcsönhatás két nukleon közt ($g.g$-kölcsönhatás).

Az egyes nukleonok mezonterének erősségét egy g csatolási állandóval szoktuk leírni, mely az e elektromos töltés analogonja. Ezt a g kölcsönhatási állandót nevezzük nukleontöltésnek, ennek értéke szabja meg két nukleon kölcsönhatásának erősségét. Egy g_1 és g_2 nukleontöltéssel rendelkező nukleon közt a kölcsönhatási energia, ha a két nukleon távolsága r,

$$V = -g_1 g_2 P \frac{e^{-r/a}}{r}.$$

Itt a a π-mezon Compton-hullámhossza, P egy egységnyi nagyságrendű kifejezés, mely a nukleonok töltésétől, spinbeállásától függhet. A 3. ábrán látható gráf csomópontjaiban, és általában ott, ahol nukleon és mezontér kölcsönhatása bekövetkezik, a csatolási energia g-vel arányos. A két csomópontú, magerőket szemléltető Feynman-gráf szerint a magerők kölcsönhatási energiája $g_1 \cdot g_2$-vel arányos, ahol g_1 és g_2 a nukleonok nukleontöltése.

Kézenfekvő mármost feltételezni a következőket: A proton stabilitása könnyebb, nukleontöltéssel nem rendelkező részecskékre való széteséssel szemben onnan származik, hogy a g nukleontöltésre is megmaradási tétel érvényes. A proton azért stabil, mert ez legkönnyebb nukleontöltéssel biró részecske, hasonlóan az elektronhoz, mely a legkönnyebb az elektromos töltéssel biró részecskék közül.

Nukleontöltése van a protonon kivül a neutronnak is. Ismeretes, hogy a természetben megfigyelhető neutronnak protonná való átalakulása:

$$N^0 \rightarrow P^+ + e^- + \nu.$$

Mivel az elektronnak és a neutrinónak nukleontöltése nincsen és a nukleontöltés a reakció során megmarad, szükséges, hogy a kiindulásul szolgáló neutron és a keletkezett proton nukleon-töltése egyenlő legyen. Ez viszont azt jelenti, hogy a proton- és neutron által keltett mezontér egyforma intenzitású, azaz proton-proton, proton-neutron és neutron-neutron közt ható magerő erőssége egyenlő. (Ebből azonban nem következik az, hogy a magerők képletében szereplő P kifejezés folytán nagyságrendet nem érintő különbségek ne lépjenek fel.) Ezt a nukleontöltés megmaradási tételéből adódó szabályt a magerők töltésfüggetlensége néven régen felismerték az atommagfizikában. Az atommagok kötési energiájában és a szóráskísérletek eredményeiben a magerők töltésfüggetlensége világosan megmutatkozik.[22]

A tétel egy további érdekes következményére *L. I. Schiff* mutatott rá 1952-ben.[23] Mint már volt róla szó, a szabad neutron és a V-részecske spontán protonná alakul át:

$$N^0 \rightarrow P^+ + e^- + \nu,$$
$$V^0 \rightarrow P^+ + \pi^-.$$

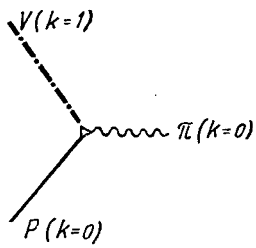
Ezzel szemben nem ismeretes a neutron és V-rész olyan elbomlása, mely negatív protont és pozitív könnyű részecskét eredményezne:

$$N^0 \rightarrow P^- + e^+ + \nu,$$
$$V^0 \rightarrow P^- + \pi^+.$$

Ez azért érdekes, mert a proton 1/2 spinű részecske, tehát a Dirac-egyenletnek engedelmeskedik, e szerint viszont bármelyik részecske pozitív és negatív töltésű állapota teljesen szimmetrikus. Ezt az elektron és pozitron, negatív és pozitív μ-mezon egyező sajátságai bizonyítják. (Az, hogy a pozitronok általában csak rövid ideig léteznek, nem a pozitron elektronnal szemben mutatott különleges instabilitással függ össze. Egyszerűen azzal magyarázható, hogy a pozitronnak sokkal több alkalma van a minden atomban fellelhető elektronnal találkoznia és elektromágneses sugárzássá átalakulnia, mint az elektronnak pozitronnal valő találkozásra.) A jelenség magyarázható a nukleontöltés megmaradásának tétele alapján. A Dirac-egyenlet értelmében a negatív töltésű protonhoz, az antiprotonhoz a protonéval ellentétesen egyenlő elektromos töltésen kívül ellentétesen egyenlő nukleontöltés tartozik. Ha a protonéval egyenlő g töltésű neutron vagy V-rész $-g$ töltésű antiprotonra bomlana, megsértené a nukleontöltés megmaradási tételét, ezért a bomlásfolyamat tiltott.

Az elektromos töltés megmaradását a 2., 3. és következő ábrákon az juttatja kifejezésre, hogy a folytonos (töltött részecskéket ábrázoló) vonalak mindig folyamatosan, szakadás és elágazás nélkül haladnak. A nukleon-töltés megmaradását a vastagon rajzolt (nukleonokat ábrázoló) vonalak folytonos volta biztosítja.

Az a körülmény, hogy a nukleontöltés megmaradásának tétele magyarázni képes olyan távolálló jelenségeket, mint a nukleonszám megmaradása, magerők töltésfüggetlensége, neutron és *V*-rész aszszimetrikus bomlása, arra enged következtetni, hogy benne egy új, általános természettörvényt ismertünk meg. Hogy a tételt ebben a végleges alakjában ki fogalmazta meg, nehéz megállapítani. Valószínűleg az 1952-es év folyamán több fizikus egymástól függetlenül jött rá. Mindenesetre tisztán fellép a tétel *Wigner Jenő*nek[24] és *Ja. B. Zeldovics*nak[25] egymástól függetlenül az év közepén megjelent dolgozataiban. (Zárójelben megjegyezzük, hogy a magerőkkel kapcsolatban *A. Pais*nak[26] a τ- és $\varkappa$-mezon, valamint *V*-részecske viszonylag hosszú átlagos élettartamát is sikerült megmagyarázni a következőkben: A τ- és $\varkappa$-mezont a π-mezon gerjesztett állapotának tekintjük, melyet a $k = 1$-es gerjesztési kvantumszámmal jellemezhetünk. Az alapállapotban lévő π-mezonhoz $k = 0$ gerjesztési kvantumszám tartozik. Ugyanígy a *V*-részecskéhez, mint gerjesztett nukleonhoz 1-es, a protonhoz és neutronhoz, mint alapállapotban lévő nukleonhoz 0-s gerjesztési kvantumszámot rendelünk. Ha a nukleon-mezon-kölcsönhatásban eltűnt és keletkezett részecskék gerjesztési kvantumszámainak összege páros — ez a helyzet a 3. ábra által szemléltetett magerőknél —, a kölcsönhatás megengedett. Ha azonban a kvantumszámok összege páratlan — ez a helyzet például a *V*-rész bomlásánál, 4. ábra, kvantumszámok összege $+1$ —, akkor a megfelelő kölcsönhatás első közelítésben tiltott. Az ilyen tiltott kölcsönhatások Pais posztulátuma szerint 10^{-10}-szerte kisebb valószínűséggel mehetnek végbe.)



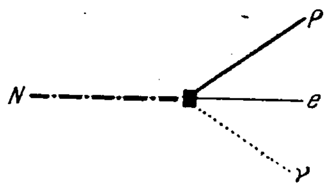
4. ábra. *V*-részecske bomlása (tiltott *g*-kölcsönhatás).

Láttuk, hogy az összes töltött elemi részek *e* elektromos töltését és az összes nukleonok *g* nukleontöltését abszolút értékben egyenlőnek véve a magerőkkel és elektromágneses térrel kapcsolatos összes kölcsönhatást kvantitatív pontossággal le tudjuk írni. (Részletkérdésekben, például a magerők spinfüggésének kérdésében maradtak még problémák). De ezeken kívül mástípusú kölcsönhatásokat is ismerünk. Legismertebb ezek közül a β-bomlás és ennek fordítottja, a *K*-befogás. Ezeknél a nukleonok elektront, pozitront emittálnak vagy abszorbeálnak. Példa erre a szabad neutron bomlása:

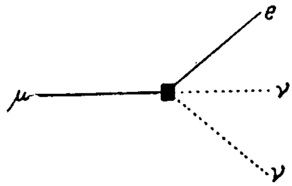
$$N^0 \rightarrow P^+ + e^- + \nu.$$

Fermi nyomán a folyamatot mint a nukleonok és könnyű részek (elektron, neutrinó) közvetlen kölcsönhatását értelmezzük. (5. ábra) Egy másik, hasonló típusú kölcsönhatás az, amely a μ-mezon és elektron-neutrinó közt játszódik le és a μ-mezon spontán bomlását írja le (6. ábra):

$$\mu^{\pm} \rightarrow e^{\pm} + \nu + \nu.$$



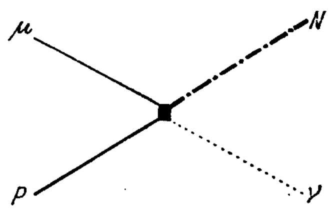
5. ábra. Neutron bomlása (F-kölcsönhatás).



6. ábra. μ-mezon bomlása (F-kölcsönhatás).

A harmadik hasonló kölcsönhatást a μ-mezon és a nukleonok közt kell feltételeznünk, ez hozza létre a μ-mezonnak atommagba való befogását (7. ábra):

$$\mu^- + P^+ \rightarrow N^0 + \nu.$$



7. ábra. μ-mezon befogása (F-kölcsönhatás).

Mindhárom most felsorolt folyamat közös jellemzője, hogy a kölcsönhatásban négy részecske szerepel és mind a négy 1/2 spinű részecske, fermion. (Az 5, 6, 7. ábra gráfjainak csomópontjában mindig négy egyenes, fermiont ábrázoló vonal fut össze.) Mind a négy kölcsönhatás viszonylag gyönge az elektromágneses kölcsönhatáshoz és a magerőkhöz képest. Ez kifejezésre jut például a β-bomlások és K-befogások viszonylag hosszú élettartamában. (A fermion-kölcsönhatás szempontjából gerjesztettnek tekinthető 40-es atomsúlyú K-atom felezési ideje K-befogással szemben 240 millió év. Hasonlítsuk ezt össze az elektromágneses sugárzás szempontjából gerjesztett atomok 10^{-9} sec vagy a π-mezon-emisszió szempontjából gerjesztett atommagok még sokkal rövidebb élettartamával.) A kölcsönhatási energia ezeknél a folyamatoknál (ellentétben a Coulomb-erők és szóráskísérletek formájában a magerők közvetlen kimérésével) közvetlenül nem határozható meg, azonban a felezési időből és a befogási hatáskeresztmetszetekből következtethetünk rá. Az elektromágneses kölcsönhatások után a légbővebb tapasztalati anyagunk a β-folyamatokra van. Ezek kölcsönhatási energiáját Fermi nyomán így írjuk fel:[27, 28, 18, 2]

$$V = F\int (\psi_1^* \alpha \psi_2)\cdot(\psi_3^* \beta \psi_4)\, dx.$$

Itt ψ_i-k a folyamatban szereplő fermionok állapotfüggvényeit, α és β valamilyen Dirac-féle matrixot jelentenek. Az F kölcsönhatási állandó értéke minden β-bomlásra ugyanaz, értéke a tapasztalatból határozható meg. A kölcsönhatási energia Fermi-féle alakja a megfigyeléssel egyező eredményeket szolgáltat.

A másik két, μ-mezonokkal kapcsolatos kölcsönhatás energiáját is hasonló alakban írjuk fel.[29] A meglepő az, hogy mindhárom felsorolt fermion-kölcsönhatásnál az F állandó értéke a tapasztalattal való összehasonlítás alapján (a megfigyelések és az elmélet hibahatárán belül) egyenlőnek adódik:

$$F \approx 2\cdot 10^{-49}\,\mathrm{erg\,cm}^3.$$

A három folyamat kölcsönhatási állandójának egyezését egymástól függetlenül többben felismerték 1949-ben.[29] *Fermi*[18] az elemi részekről írott könyvében ezt mondja: „A három állandó értékének hasonlósága valószinűleg nem véletlen összeesés, hanem mélyebb jelentéssel bir, amelyet azonban ma még nem értünk meg."

A három fermion-folyamat kölcsönhatási állandójának egyezése valóban nem vezethető le egyik ismert fizikai törvényből sem. Az elmondottak után kézenfekvőnek látszik a feltevés, hogy itt is egy újabb, kölcsönhatási állandóra érvényes megmaradási tétellel állunk szemben, mely tétel az e elektromos és g nukleontöltésre érvényes megmaradási tétel analogonja. Feltételezhetjük a következőket[30]: A felsorolt három reakcióban résztvevő fermionoknak az esetleges e és g töltésen kivül még egy fajta töltése, f-fel jelölhető fermion-töltése van. Ezek a fermion-töltések határozzák meg a részecskék közt létesülő kölcsönhatások erősségét. Négy fermion közt a kölcsönhatási energia feltevésünk szerint

$$V = \int (f_1\psi_1^*)\,\alpha(f_2\psi_2)\cdot(f_3\psi_3^*)\beta(f_4\psi_4)\, dx$$

módjára adódna, azaz

$$F = f_1 f_2 f_3 f_4.$$

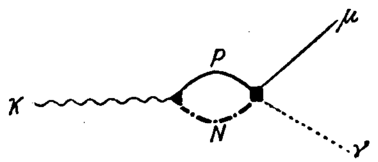
Tételezzük fel azt, hogy az egyes átalakulások során az f fermion-töltés is megmaradási tételnek engedelmeskedik. Mivel a felírt folyamatok szerint az összes feles spinű részecskéknek egymásba való átalakulása megfigyelhető, a megmaradási tétel értelmében minden feles spinű részecske fermion-töltésének egyenlőnek kell lennie:

$$|f_1| = |f_2| = |f_3| = |f_4| = f = \sqrt[4]{F}.$$

A Dirac-féle értelemben antirészecskéknek nevezhető fermionok (pozitron stb.) fermion-töltése $-f$. Ez az eredmény természetes módon magyarázza azt a körülményt, hogy a háromféle fermion-kölcsönhatás miért azonos csatolási állandóval játszódik le: mindegyikre

$$F = f^4.$$

Mikor például a μ-mezon elektronra bomlik, a μ-mezon f fermion-töltése változatlan értékkel átmegy az elektronra. Ez a magyarázata annak, hogy az elektron és nukleonok közt ugyanolyan intenzív a K-befogás formájában megfigyelhető kölcsönhatás, mint az azelőtt a μ-mezon és nukleon közt megfigyelhető volt. (*A. Pais*[26] mutatott rá arra, hogy a $\varkappa$-mezon μ-mezonra való bomlása is értelmezhető közvetett folyamatként az ismertetett típusú kölcsönhatásokkal, ha a $\varkappa$-mezon és nukleon közt fellépő [g-vel arányos magerő-] kölcsönhatáson kívül a nukleon, V-rész, $\varkappa$-mezon és neutrinó közt egy [F-fel arányos] fermion-kölcsönhatást is feltételezünk. A bomlást a 8. ábra gráfja szemlélteti. A gráfnak egy g-s és egy F-es csomópontja van, tehát a teljes kölcsönhatási energia $g \cdot F$-fel arányos. Ez a $\varkappa$-mezon élettartamára jó értéket szolgáltat. Az egyezés közvetett bizonyítéknak tekinthető arra vonatkozólag, hogy a V-rész is a többiekkel azonos f-töltéssel rendelkező fermion. Ez az f-töltés megmaradásából következik is.)



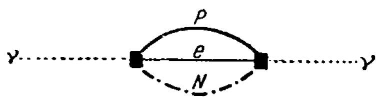
8. ábra. $\varkappa$-mezon bomlása ($g.F$-kölcsönhatás).

Az e, f, g kölcsönhatási állandókra érvényes megmaradási tételt, mint az elemi részek kölcsönhatási állandóinak általános megmaradási tételét foglalhatjuk össze. Az f-töltéssel jellemzett fermion-kölcsönhatások mégis bizonyos mértékig eltérnek az elektromos és magerőkkel kapcsolatos kölcsönhatásoktól. Az 5, 6, 7. ábrák gráfjának csomópontjai abban különböznek a 2, 3, 4. ábrák csomópontjaitól, hogy bennük négy részecskét ábrázoló vonal fut össze, míg az elektromágneses és magerő-kölcsönhatásokat jelentő csomópontokban három. Az elektromos kölcsönhatás esetében (2. ábra) egy csomópontban két töltött részt ábrázoló (folytonos) vonal találkozik, a harmadik vonal töltetlen objektumot (γ) jelent: az elektromágneses teret, illetve annak kvantumát, a fotont, mely az elektromágneses kölcsönhatást a töltött részecskék közt közvetíti. Ugyanígy a magerőknél (3. ábra) egy csomópontban csak két g-töltésű nukleon (vastagon húzott) vonala fut össze, a harmadik vonal (π) g-töltéssel nem rendelkező objektumot: mezonteret, ill. π-mezont ír le. Itt is különbséget tehetünk tehát a g-töltésű, teret keltő „részecskék" és a köztük kölcsönhatást közvetítő, töltetlen „erőtér" közt. A fermion-kölcsönhatásoknál (5, 6, 7. ábra) a gráf csomópontjába négy f-töltésű részecskét ábrázoló (egyenesen húzott) vonal fut össze, ezért itt már nem tehetünk különbséget töltött „részecskék" és töltetlen „erőtér" közt. A fermion-kölcsönhatások ebből eredő különbözősége az f állandó elektromos töltéstől különböző dimenziójában és a kölcsönhatási energia előbbiektől eltérő alakjában is kifejezésre jut.

II. TÁBLÁZAT

Jel	Spin	Dirac-jelleg	Elektr. töltés	Fermi. töltés	Nukl. töltés	Gerj. kv. sz.	Jel	Spin	Dirac-jelleg	Elektr. töltés	Fermi. töltés	Nukl. töltés	Gerj. kv. sz.
γ	1	—	0	0	0	—	τ^0	0?	—	0	0	0	1
ν	$^1/_2$	rendes	0	$+f$	0	—	τ^+	0?	—	$+e$	0	0	1
ν^*	$^1/_2$	anti	0	$-f$	0	—	τ^-	0?	—	$-e$	0	0	1
e^-	$^1/_2$	rendes	$-e$	$+f$	0	0?	$\varkappa^+$	0?	—	$+e$	0	0	1
e^+	$^1/_2$	anti	$+e$	$-f$	0	0?	$\varkappa^-$	0?	—	$-e$	0	0	1
μ^-	$^1/_2$	rendes	$-e$	$+f$	0	1?	P	$^1/_2$	rendes	$+e$	$+f$	$+g$	0
μ^+	$^1/_2$	anti	$+e$	$-f$	0	1?	P^*	$^1/_2$	anti	$-e$	$-f$	$-g$	0
π^0	0	—	0	0	0	0	N	$^1/_2$	rendes	0	$+f$	$+g$	0
π^+	0	—	$+e$	0	0	0	N^*	$^1/_2$	anti	0	$-f$	$-g$	0
π^-	0	—	$-e$	0	0	0	V	$^1/_2$?	rendes	0	$+f$	$+g$	1

Feltehető, hogy az f-töltéssel is jár bizonyos sajátenergia. Például egy neutrinónál sajátenergia adódik az elektronokkal és nukleonokkal való kölcsönhatásból[30] (virtuális „nukleonok" emissziójából és „reabszorpciójából", 9. ábra). Ez azonban közvetett folyamat (a gráfnak két F-es csomópontja van), ezért a kölcsönhatási energia F^2-tel arányos, tehát sok nagyságrenddel kisebb például az e^2-tel arányos elektromágneses sajátenergiákhoz képest. (A kérdés a neutrinó nyugalmi tömegével kapcsolatban érdemel részletesebb vizsgálatot.)



9. ábra. Neutrinó sajátenergia-gráfja (F^2-kölcsönhatás).

Az elmondottakat a következőkben foglalhatjuk össze: Az elemi részek kölcsönhatásait, átalakulásait kormányozó megmaradási tételek két csoportját állíthatjuk fel:

I. DINAMIKAI JELLEGŰ TÉTELEK, melyek a mozgásegyenletekből következnek:

1. Energia megmaradása.
2. Impulzus megmaradása.
3. Impulzusmomentum megmaradása.

II. KÖLCSÖNHATÁSI ÁLLANDÓKRA VONATKOZÓ TÉTELEK.

1. e elektromos töltés megmaradása.
2. f fermion-töltés megmaradása.
3. g nukleon-töltés megmaradása.

A kölcsönhatási állandókra felállított tételek mélyebb kifejezését adják annak a felismerésnek, hogy az összes ismert elemi részek azonos jellegű kölcsönhatási állandói a tapasztalat szerint jó közelítésben, feltehetőleg pontosan egyenlőek. Ez lehetővé teszi azt, hogy közel húsz ismert részecske összes, húsznál lényegesen több megfigyelt kölcsönhatását azok igen különböző átalakulási idejével, hatáskeresztmetszetével pontosan vagy jó közelítésben elméletileg tárgyalni tudjuk, és ehhez mindössze három kölcsönhatási állandó, *e*, *f*, *g* értékének ismerete szükséges. (Figyelembe vesszük még a gerjesztett részecskéknél a Pais-féle kiválasztási szabályt.) Természetesen még nem beszélhetünk minden területen végleges, százszázalékosan bevált eredményekről, ezt azonban — néhány hónappal, vagy néhány évvel ezelőtt felfedezett jelenségekről lévén szó — nem is várhatjuk. Az elemi részek néhány törvényének körvonalait véljük csak felismerni, ez azonban már képessé tesz arra, hogy hozzáfogjunk az egyre bővülő kisérleti anyag rendezéséhez.

A kölcsönhatási állandókra vonatkozó megmaradási tételek feltehetőleg a megfelelő téregyenletekből, állapotegyenletekből vezethetők le.[31] Tudjuk, hogy az elektromágneses tér Maxwell-féle egyenleteiből következik az elektromos töltés megmaradási tétele. A magerők és β-bomlás pontos elméletének kidolgozásánál talán támpontot nyujthat az a követelmény is, hogy a helyes téregyenleteknek a megfelelő (*g*- és *f*-töltésre vonatkozó) megmaradási tételeket is tartalmazniok kell.

Budapesti Eötvös Loránd Tudományegyetem
Fizikai Intézete.

IRODALOM

A dolgozat összefoglaló jellege részletesebb irodalmi összeállítást tesz indokolttá. Az alábbiakban ezért az összefoglaló jellegű, ill. legkésőbb megjelent dolgozatokat közöljük egy-egy tárgykörből. Ezekben a kérdés további irodalma megtalálható. Ugyanezen okból vettük fel a magyarnyelvű közleményeket is.

[1] *Crane*, Rev. Mod. Phys. *20*, (1948), 278.
Pontecorvo, Rep. Prog. Phys. *11*, (1948), 32.
Fenyves E., Természettudomány *2*, (1947), 237.
[2] *Marx Gy.*, Fizikai Szemle *3*, No. 1. (1953).
[3] *V. A. Kizelj*, Uszephi Fiz. Nauk *45*, (1951), 470.
Faragó Péter, Természettudomány *3*, (1948), 161.
[4] *C. F. Powell*, Rep. Prog. Phys. *13*, (1950).
[5] *Marx Gy.*, Fizikai Szemle *1*, No. 4. (1951).
[6] *Bjorklund* et al., Phys. Rev. *77*, (1950), 218.
[7] *Carlson*, Phil. Mag. *41*, (1950), 701.
[8] *C. O'Ceallaigh*, Phil. Mag. *41*, (1950), 838.
[9] *Leighton*, Phys. Rev. *83*, (1951), 843.
[10] *Armenteros* et al., Phil. Mag. *42*, (1951), 1113.
[11] *P. H. Fowler* et al., Phil. Mag. *42*, (1951), 1032.
[12] *L. Leprince—Ringuet*, Rev. Mod. Phys. *21*, (1949), 42.
[13] *C. O'Ceallaigh*, Phil. Mag. *42*, (1951), 1040.

[14] *M. D.*, Uszpehi Fiz. Nauk. *46,* (1952), 118.
[15] *Daniel* et al., Phil. Mag. *43,* (1952), 753.
[16] *A. H. Snell,* Nucleonics *8,* (1951)
[17] *Armenteros* et al., Phil. Mag. *43,* (1952), 587.
K. H. Barker et al., Phil. Mag. *43,* (1952), 1201.
[18] *E. Fermi:* Elementary Particles, Oxford Univ. Press (1951).
[19] *Wigner J.,* Proc. Amer. Philos. Soc. *93,* (1949), 521.
[20] *H. Yukawa,* Proc. Math. Phys. Soc. Japan. *17,* (1935), 48.
H. Yukawa, Rev. Mod. Phys. *21,* (1949), 475.
[21] *Gombás P.,* M. T. Akadémia III. O. Közl. *2,* (1952), 28.
[22] *L. Rosenfeld:* Nuclear Forces, North-Holland, Amsterdam, p. 158. (1948).
[23] *L. I. Schiff,* Phys. Rev. *85,* (1952), 374.
[24] *Wigner J.,* Proc. Nat. Acad. Sci. *38,* (1952), 449.
[25] *Ja. B. Zeldovics,* Dokladi Ak. Nauk SzSzSzR. *86,* (1952), 505.
[26] *A. Pais,* Phys. Rev. *86,* (1952), 663.
[27] *E. Fermi,* Z. Physik *88,* (1934), 161.
[28] *Konopinski,* Rev. Mod. Phys. *15,* (1943), 209.
[29] *Tiomno—Wheeler,* Rev. Mod. Phys. *21,* (1949), 153.
[30] *Marx Gy.,* Acta Physica Hung., megjelenőben.
[31] *P. Jordan,* Z. Naturf. *7a,* (1952), 78, 701.

Ára: 22·— Ft.

TARTALOMJEGYZÉK

TUDOMÁNYOS KÖZLEMÉNYEK

Oldal

Marx György: Valós állapotfüggvények szerepe a kvantummechanikában 329
Neugebauer Tibor: A nullapontmozgás realitásának problémája a kvantummechanikában 333
Novobátzky Károly: A kvantumelmélet statisztikus sokasága 343
Fenyves Ervin és *Haiman Ottó:* Geiger—Müller csövek holt idejével kapcsolatos vizsgálatok 351
Gáspár Rezső: Az alumínium fém kötéséről 361
Aujeszky László: Energiaeloszlás a függőleges légoszlopban 373
Gáspár Rezső: Atomelektronok sajátfüggvényének és energiájának közelítő meghatározására szolgáló analitikus módszerről 391
Boros János és *Sibalszky Zoltán:* Elektronvezetés színes alkálihalogenid kristályokban 407
Novobátzky Károly: A Schrödinger—Gordon egyenlet 419
Selényi Pál: Egy egyszerű kísérlet a szelénegyenirányító zárórétegének ismeretéhez . 427

* * *

Marx György: Az elemi részek kölcsönhatásairól (Összefoglaló referátum) 431

Megjelent 650 példányban.

Technikai szerkesztő: Erdős Lajosné

Akadémiai Kiadó (Budapest, V, Alkotmány-u. 21.) Felelős: Mestyán János

Csongrádmegyei Nyomdaipari Vállalat, Szeged. 524862 Felelős vezető: Vincze György