Alkalmazott matematikai lapok

2008/1

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI TUDOMÁNYOK
OSZTÁLYÁNAK KÖZLEMÉNYEI

25.
KÖTET

ALKALMAZOTT MATEMATIKAI LAPOK

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI TUDOMÁNYOK
OSZTÁLYÁNAK KÖZLEMÉNYEI

25. kötet
Szerkesztőség és kiadóhivatal: 1027 Budapest, Fő u. 68.

Az Alkalmazott Matematikai Lapok változó terjedelmű füzetekben jelenik meg, és olyan eredeti tudományos cikkeket publikál, amelyek a gyakorlatban, vagy más tudományokban közvetlenül felhasználható új matematikai eredményt tartalmaznak, illetve már ismert, de színvonalas matematikai apparátus újszerű és jelentős alkalmazását mutatják be. A folyóirat közöl cikk formájában megírt, új tudományos eredménynek számító programokat, és olyan, külföldi folyóiratban már publikált dolgozatokat, amelyek magyar nyelven történő megjelentetése elősegítheti az elért eredmények minél előbbi, széles körű hazai felhasználását. A szerkesztőbizottság bizonyos időnként lehetővé kívánja tenni, hogy a legjobb cikkek nemzetközi folyóiratok különszámaként angol nyelven is megjelenhessenek.

A folyóirat feladata a Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai) Osztályának munkájára vonatkozó közlemények, könyvismertetések stb. publikálása is.

A kéziratok a főszerkesztőhöz, vagy a szerkesztőbizottság bármely tagjához beküldhetők. A főszerkesztő címe:

Páles Zsolt, főszerkesztő
1027 Budapest, Fő u. 68.
A folyóirat e-mail címe: aml@math.elte.hu

Közlésre el nem fogadott kéziratokat a szerkesztőség lehetőleg visszajuttat a szerzőhöz, de a beküldött kéziratok megőrzéséért vagy továbbításáért felelősséget nem vállal.

Az Alkalmazott Matematikai Lapok előfizetési ára évfolyamonként 1200 forint. Megrendelések a szerkesztőség címén lehetségesek.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai) Osztálya a következő idegen nyelvű folyóiratokat adja ki:

1. Acta Mathematica Hungarica,
2. Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica.

Alkalmazott Matematikai Lapok **25** (2008), 1-74.

SZEMELVÉNYEK A KOMBINATORIKUS OPTIMALIZÁLÁS TÖRTÉNETÉBŐL (1960-IG)

ALEXANDER SCHRIJVER

FORDÍTOTTA: BERNÁTH ATTILA, FLEINER TAMÁS[1], PAP GYULA

1. Bevezetés

A kombinatorikus optimalizálás a matematika viszonylag fiatal tudományága. Kialakulását szemlélve számos, egymástól független kutatási irányt látunk, mint például az optimális hozzárendelési (optimum assignment), a minimális költségű feszítőfa (shortest spanning tree), a szállítási (transportation), a szállítmányozási (transshipment) vagy éppen az utazó ügynök (traveling salesman) feladatokat. E problémákat azonban csupán az 1950-es években sikerült egységes szerkezetbe foglalni és köztük további kapcsolatokat feltárni, mégpedig annak nyomán, hogy a lineáris és egészértékű programozás kifejlődésével az operációkutatás a figyelem homlokterébe került.

Mert valóban: a kombinatorikus optimalizálás történetének tengelyében az a lineáris programozás áll, amit éppen kombinatorikus alkalmazások (a szállítási és szállítmányozási problémák) vizsgálata nyomán fogalmazott meg Kantorovich és Koopmans. Később, a lineáris programozás általános megalapozását követően, 1947-ben Dantzig kifejlesztette a szimplex módszert, mint a megoldás eszközét. Ennek eredményeként a kombinatorikus optimalizálási problémákat egyre inkább próbálták lineáris programozási technikával megoldani, gyakran igen sikeresen.

A kombinatorikus optimalizálás gyökerei szerteágazóságának egyik oka, hogy számos olyan probléma adódik közvetlen gyakorlati alkalmazásokból, amit akkor is és ma is rutinszerűen kellett és kell tudnunk megoldani. Könnyen belátható, hogy mennyire lényeges még egy primitív társadalomban vagy akár az állatok között is, hogy legrövidebb utat találjunk, vagy például, hogy élelmet keressünk. Az utazó ügynök probléma pedig olyankor merül fel, amikor bevásárlást vagy városnézést tervezünk, vagy amikor a beteglátogató vagy a postás tervezi az útvonalát. Hasonlóképpen: nem csupán matematikusok szembesülnek olyan elemi problémákkal, mint az elvégzendő munkák munkások közötti elosztása, javak szállítása vagy éppen kapcsolatok létesítése.

[1]Fleiner Tamás köszönetet nyilvánít az OTKA K 60802 támogatásnak és az MTA-ELTE Egerváry Kutatócsoportnak.

Mindezen problémák nyomait valószínűleg megtaláljuk az egészen távoli történelemben. A jelen tanulmány azonban a fenti kérdéseknek csupán a matematikai megközelítéseit tárgyalja. Az áttekintett időhorizont másik széle 1960-ig nyúlik, így a feldolgozott anyag még kézben tartható marad. Ennek az a következménye, hogy fontos későbbi eredmények, mint például a párosítások és a matroidok elmélete Edmonds munkája nyomán vagy Cook és Karp bonyolultságelmélete (az NP-teljesség) kimaradnak a tanulmányból.

A továbbiakban az alábbi hat területet vizsgáljuk meg tüzetesebben: a hozzárendelési, a szállítási, a maximális folyam, a minimális költségű feszítőfa, a legrövidebb út és végül az utazó ügynök problémát.

2. A hozzárendelési probléma

A hozzárendelési probléma formálisan a következőképpen fogalmazható meg: egy adott $n \times n$ méretű $C = (c_{i,j})$ „költségmátrixhoz" találjuk meg az $1, \dots, n$ számok egy olyan π permutációját, melyre a

$$\sum_{i=1}^{n} c_{i,\pi(i)}$$

összeg a lehető legkisebb.

Monge (1784)

A hozzárendelési probléma az egyik legelsőként vizsgált kombinatorikus optimalizálási probléma. G. Monge [1784] egy folytonos problémának „álcázott", gyakran szállítási feladatnak nevezett változatát tanulmányozta.

Monge kiindulási feladata a földszállítás volt. Ő ezt egy molekulák áthelyezésére vonatkozó diszkrét kombinatorikus problémának tekintette. Két azonos területű tartomány közül az egyik tele van földdel, a másik üres. A cél, hogy az első tartományból a földet úgy vigyük át a másodikba, hogy eközben az össz-szállítási út a lehető legkisebb legyen. Az össz-szállítási út alatt pedig a „földmolekulák" által megtett összutat értjük. Így tehát egy hatalmas költségmátrixszal rendelkező hozzárendelési problémát kapunk. Monge az alábbiak szerint írta le a problémát:

> Lorsqu'on doit transporter des terres d'un lieu dans un autre, on a coutime de donner le nom de *Déblai* au volume des terres que l'on doit transporter, & le nom de *Remblai* à l'espace qu'elles doivent occuper après le transport.
>
> Le prix du transport d'une molécule étant, toutes choses d'ailleurs égales, proportionnel à son poids & à l'espace qu'on lui fait parcourir, & par conséquent le prix du transport total devant être proportionnel à la somme des produits des molécules multipliées chacune par l'espace parcouru, il s'ensuit que le déblai & le remblai étant donnés de figure & de position, il n'est pas indifférent que telle molécule du déblai soit transportée dans tel ou tel autre endroit du remblai, mais qu'il y a une certaine distribution à faire des molécules du premier dans le second, d'après laquelle la

somme de ces produits sera la moindre possible, & le prix du transport total sera un *minimum.*[2]

Monge érdekes geometriai módszert adott a probléma megoldására. Vegyünk egy mindkét tartományt érintő egyenest, és szállítsuk az első tartomány érintési pontjában található m molekulát a második tartomány x érintési pontja által kijelölt helyre, majd ismételjük ezt addig, amíg az összes földet át nem hordtuk. Monge indoklása arról, hogy ez optimális, egészen egyszerű: ha az m molekula valamely más helyre kerülne, úgy egy másik molekulát szállítanánk az x helyre. Ez azt jelentené, hogy a két molekula útvonala keresztezné egymást, és ezért létezne egy rövidebb összúttal bíró megoldás:

Étant données sur un même plan deux aires égales $ABCD$, & $abcd$, terminées par des contours quelconques, continus ou discontinus, trouver la route que doit suivre chaque molécule M de la premiere, & le point m où elle doit arriver dans la seconde, pour que tous les points étant semblablement transportés, ils replissent exactement la seconde aire, & que la somme des produits de chaque molécule multipliée par l'espace parcouru soit un *minimum.*

Si par un point M quelconque de la première aire, on mène une droite Bd, telle que le segment BAD soit égal au segment bad, je dis que pour satisfaire à la question, il faut que toutes les molécules du segment BAD, soient portées sur le segment bad, & que par conséquent les molécules du segment BCD soient portées sur le segment égal bcd; car si un point K quelconque du segment BAD, étoit porté sur un point k de bcd, il faudroit nécessairement qu'un point égal L, pris quelque part dans BCD, fût transporté dans un certain point l de bad, ce qui ne pourroit pas se faire sans que les routes Kk, Ll, ne se coupassent entre leurs extrémités, & la somme des produits des molécules par les espaces parcourus ne seroit pas un *minimum.* Pareillement, si par un point M' infiniment proche du point M, on mène la droite $B'd'$, telle qu'on ait encore le segment $B'A'D'$, égal au segment $b'a'd'$, il faut pour que la question soit satisfaite, que les molécules du segment $B'A'D'$ soient transportées sur $b'a'd'$. Donc toutes les molécules de l'élément $BB'D'D$ doivent être transportées sur l'élément égal $bb'd'd$. Ainsi en divisant le déblai & le remblai en une infinité d'élémens par des droites qui coupent dans l'un & dans l'autre des segmens égaux entr'eux, chaque élément du déblai doit être porté sur l'élément correspondant du remblai.

Les droites Bd & $B'd'$ étant infiniment proches, il est indifférent dans quel ordre les molécules de l'élément $BB'D'D$ se distribuent sur l'élément $bb'd'd$; de quelque manière en effet que se fasse cette distribution, la somme des produits des molécules par les espaces parcourus, est toujours la même, mais si l'on remarque que dans la pratique il convient de débleyer premièrement les parties qui se trouvent sur le passage des autres, & de n'occuper que les dernières les parties du remblai qui sont

[2]Amidőn földet kell szállítanunk egyik helyről valamely másikra, úgy rendszerint *Déblai* névvel illetjük a szállítandó földmennyiséget, & *Remblai*-nak mondjuk azon helyet, melyet az elszállított földnek a munka végén kell kitöltenie.

Miként egyetlen molekula szállításának ára (ha minden más egyezik) arányos annak súlyával és az általa megtétetett távolsággal és azért a teljes szállítási költség arányos lévén a molekulák megtett távolsággal való szorzatainak összegével, az következik, hogy – lévén a déblai és a remblai alak és elhelyezkedés szerint megadva – számít, ha a déblai egy bizonyos molekulája a remblai egyik avagy másik pontjába szállíttatik, ám létezik az előbbi molekuláknak az utóbbiakba egy bizonyos elosztása, amelynek révén ezen szorzatok összege a lehető legkisebb és a teljes szállítás ára minimális.

> dans le même cas; la molécule MM' ne devra se transporter que lorsque toute la partie $MM'D'D$ qui la précède, aura été transportée en $mm'd'd$; donc dans cette hypothèse, si l'on fait $mm'd'd = MM'D'D$, le point m sera celui sur lequel le point M sera transporté.[3]

Appell [1928] észrevette, hogy bármennyire szemléletes is, a módszer nem teljesen helyes:

> Il est bien facile de faire la figure de manière que les chemins suivis par les deux parcelles dont parle Monge ne se croisent pas. [4]

(ld. Taton [1951]).

Párosítás páros gráfokban: Frobenius (1912-1917), Kőnig (1915-1931)

A hozzárendelési probléma speciális esetének tekinthető páros gráfban egy legnagyobb méretű párosítás megtalálása. A párosításelmélet alapjait Frobenius (mátrixokat és determinánsokat vizsgálva), illetve Kőnig vetették meg. Röviden áttekintjük e munkákat.

Frobenius [1912], *Über Matrizen aus nicht negativen Elementen* című cikkében mátrixok felbontását vizsgálta. Ez vezetett az alábbi „különös determináns tétel"-hez:

---

[3]Ugyanazon síkon megadatván az $ABCD$ és $abcd$ egyenlő területek, melyeket tetszőleges folytonos vagy nem folytonos vonalak határolnak, találjuk meg azt az utat, melyet az előbbi tetszőleges M molekulájának követnie kell, és azt az m pontot, ahova meg kell érkeznie az utóbbiban úgy, hogy az összes pont hasonló áthelyezésekor azok pontosan a második tartományt töltsék ki és úgy, hogy a molekuláknak az áltuk megtett távolsággal vett szorzatainak összege minimális legyen.

Ha az első tartomány tetszőleges M pontján keresztül úgy húzunk egy Bd egyenest, hogy a BAD szelet megegyezzék a bad szelettel, amit felteszünk, hogy megválaszolhassuk a kérdést, úgy a BAD szelet minden molekuláját a bad szeletre kell vinni, és így a BCD szelet molekuláinak a vele egyenlő bcd szeletre kell kerülniük; ugyanis, ha a BAD szelet egy tetszőleges K pontja a bcd szelet k pontjába kerülne, úgy szükségképpen a BCD valamely L pontját a bad egy bizonyos l pontjába vinnénk, ami nem tehető meg anélkül, hogy a Kk és Ll utak ne kereszteznék egymást a végpontjaik között, és a molekuláknak a megtett távolságokkal vett szorzatainak összege nem lenne minimális. Hasonlóképp, ha az M-hez infinitezimálisan közeli M' ponton keresztül húzunk egy $B'd'$ egyenest oly módon, hogy a $B'A'D'$ szelet továbbra is megegyezzék a $b'a'd'$ szelettel, úgy a kérdés megválaszolásához a a $B'A'D'$ szelet molekuláit a $b'a'd'$ szeletre kell szállítanunk. Ezért a $BB'D'D$ elem minden molekuláját a vele egyenlő $bb'd'd$ elembe kell vinnünk. A déblai-t és a remblai-t ily módon végtelen sok olyan egyenessel felosztva, melyek egyenlő szeleteket vágnak az elsőből és a másodikból, a déblai minden elemét a remblai megfelelő elemébe kell vinni.

Lévén a Bd és $B'd'$ egyenesek infinitezimálisan közeliek, nem számít, hogy a $BB'D'D$ elem molekulái hogyan oszlanak meg a $bb'd'd$ elemben; valóban, bármilyen módon is osztjuk szét a molekulákat, azoknak a megtett távolsággal való szorzatainak összege mindig ugyanannyi; ám ha megfigyeljük, hogy kézenfekvő először azt a részt kiásni, ami útjában van a többinek, és csupán a legvégén feltölteni a remblai hasonló részét; az MM' molekulát csak akkor kell szállítani, ha már az azt megelőző teljes $MM'D'D$ részt $mm'd'd$-be szállítottuk; így ezzel a feltevéssel, ha $mm'd'd = MM'D'D$, úgy az M pontot éppen az m pontba kell szállítanunk.

[4]Könnyű olyan ábrát rajzolni, hogy a Monge által említett két részecske útja ne keresztezze egymást.

Die Elemente einer Determinante nten Grades seien n^2 unabhängige Veränderliche. Man setze einige derselben Null, doch so, daß die Determinante nicht identisch verschwindet. Dann bleibt sie eine irreduzible Funktion, außer wenn für einen Wert $m < n$ alle Elemente verschwinden, die m Zeilen mit $n - m$ Spalten gemeinsam haben.[5]

Frobenius kombinatorikus és algebrai bizonyítást is adott.

Erre reagált Kőnig Dénes [1915], aki észrevette, hogy Frobenius tétele ekvivalens módon megfogalmazható a páros gráfok nyelvén. Bevezette ugyanis azt a ma már megszokott konstrukciót, mely egy páros gráfot az alábbiak szerinti $(a_{i,j})$ mátrixnak feleltet meg. Az i-dik sornak a gráf v_i csúcsa, míg a j-dik oszlopnak a gráf u_j pontja felel meg, továbbá v_i és u_j pontosan akkor szomszédosak, ha $a_{i,j} \neq 0$. Kőnig ennek segítségével bizonyította be Frobenius eredményét.

Gallaitól tudjuk [1978], hogy Kőniget a halmazelmélet, azon belül pedig a számosságok izgatták: ezért érdekelték őt a gráfok, és különösen a páros gráfok: az azonos számosságú halmazokról szóló Schröder-Bernstein tétellel[6] rokon eredmények bizonyítását a gráfelméleti indoklás (különösen pedig a párosítások) kellően szemléletessé teszik. Ez vezette Kőniget arra, hogy a gráfokat, illetve azoknak a matematika más területein való alkalmazhatóságát vizsgálja.

1914. április 7-én Kőnig Párizsban a *Congrès de Philosophie mathématique* konferencián adta elő azt a tételt, mely szerint minden reguláris páros gráf tartalmaz teljes párosítást (ld. Kőnig [1916,1923]). Ennek következményeként Kőnig azt is levezette, hogy tetszőleges reguláris páros gráf felbontható teljes párosítások diszjunkt uniójára. Más szóval, minden k-reguláris páros gráf k-élszínezhető. Kőnig azt is megfigyelte, hogy mindez következik abból a tételből, mely szerint a páros gráf élszínezési száma megegyezik a maximális fokszámával. Mindezekre algoritmikus bizonyítást adott.

Frobenius [1917] annak érdekében, hogy elemi bizonyítást adjon a fenti tételére, bebizonyította a gráfelméletben ma már alaptételnek számító alábbi „Hilfsatz"-ot.

II. *Wenn in einer Determinante nten Grades alle Elemente verschwinden, welche p $(\leq n)$ Zeilen mit $n-p+1$ Spalten gemeinsam haben, so verschwinden alle Glieder der entwickelten Determinante.*

---

[5] *Legyen az n-edrendű determináns n^2 elemének mindegyike egy-egy független változó. Ezek közül néhányat 0-vá teszünk úgy, hogy a determináns ne tűnjék el mindenütt. Ekkor ez irreducibilis marad, kivéve, ha valamely $m < n$ értékre m sor és $n - m$ oszlop minden közös eleme eltűnik.*

[6] A tételt Magyarországon inkább Cantor-Bernstein néven ismerik, és azt mondja ki, hogy ha az A és B halmazok bármelyikének van injekciója a másik halmazba, akkor létezik A és B között bijekció is. A tétel története dióhéjban: 1887-ben Dedekind bebizonyította a fenti állítást, majd 1895-ben Cantor kimondta sejtésként. Bernsteinnek 1898-ban sikerült helyes bizonyítást találnia rá, míg Schröder már 1896-ban közölt egy hibásat. Bár a tételre többféle elnevezés használatos, mindezek közös vonása, hogy Dedekindre egyik sem utal (*a fordító megjegyzése*).

> *Wenn alle Glieder einer Determinante nten Grades verschwinden, so verschwinden alle Elemente, welche p Zeilen mit $n - p + 1$ Spalten gemeinsam haben für $p = 1$ oder $2, \cdots$ oder n.*[7]

Azaz, ha $A = (a_{i,j})$ egy $n \times n$ méretű mátrix, és az $\{1, \ldots, n\}$ számok minden egyes π permutációjára

$$\prod_{i=1}^{n} a_{i,\pi(i)} = 0,$$

akkor valamely p-re létezik A-nak p sora és $n-p+1$ oszlopa úgy, hogy közös elemei csupa nullákból állnak.

Más szóval, ha $|V_1| = |V_2| = n$, akkor a V_1 és V_2 színosztályokkal rendelkező $G = (V, E)$ páros gráfnak pontosan akkor van teljes párosítása, ha nem található V_1-nek p csúcsa és V_2-nek $n - p + 1$ csúcsa úgy, hogy egyáltalán ne fusson él e csúcsok között.

Frobenius rövid, kombinatorikus (jóllehet, determinánsokkal megfogalmazott) bizonyítást adott, és emellett azt is megállapította, hogy Kőnig eredményei könnyen következnek az övéből. Frobenius véleményt is nyilvánított Kőnig bizonyítási módszeréről, amivel az ő 1912-ből származó tételét igazolta:

> Die Theorie der Graphen, mittels deren Hr. KŐNIG den obigen Satz abgeleitet hat, ist nach meiner Ansicht ein wenig geeignetes Hilfsmittel für die Entwicklung der Determinantentheorie. In diesem Falle führt sie zu einem ganz speziellen Satze von geringem Werte. Was von seinem Inhalt Wert hat, ist in dem Satze II ausgesprochen.[8]

Míg Frobenius eredménye a teljes párosítást tartalmazó páros gráfokat jellemzi, Kőnig 1931-ben egy általánosabb tételt talált, ami a páros gráfok maximális párosításának méretét karakterizálja:

> Páros körüljárású graphban az éleket kimerítő szögpontok minimális száma megegyezik a páronként közös végpontot nem tartalmazó élek maximális számával.

Más szóval, páros gráfban a maximális párosítás mérete megegyezik az összes élt lefogó pontok minimális számával.

Ez levezethető Frobenius 1917-es eredményéből és Menger 1927-es tételéből is. (Kőnig rámutatott, hogy Menger bizonyításában lényeges hiány van az indukció kezdőlépésében; a részleteket a 4. rész tartalmazza.)

---

[7] II. *Ha egy n-edrendű determinánsban $p(\leq n)$ sor és $n - p + 1$ oszlop minden közös eleme eltűnik, akkor a determináns kifejtésében minden tag eltűnik.*

Ha egy n-edrendű determináns minden tagja eltűnik, akkor p sor és $n - p + 1$ oszlop minden közös eleme eltűnik, $p = 1, 2, \cdots, n$.

[8] A gráfelmélet, amellyel KŐNIG úr levezette a fenti tételt, véleményem szerint kevéssé alkalmas segítség a determinánsok elméletének fejlesztéséhez. Ebben az esetben ez egy igen speciális tételhez vezet, aminek értéke csekély. Mindazt, ami abban értékkel bír, kimondtuk a II. tételben.

Egerváry (1931)

A Mathematikai és Physikai Társulatban[9] Kőnig 1931. március 26-án tartott előadásában ismertette eredményét, amit ezt követően Egerváry Jenő [1931] általánosított a súlyozott esetre.

Ha az $\|a_{ij}\|$ *n-edrendű matrix elemei adott nem negatív egész számok, úgy a*

$$\lambda_i + \mu_j \geq a_{ij}, \quad (i, j = 1, 2, \ldots n),$$

(λ_i, μ_j nem negatív egész számok)

feltételek mellett

$$\min \sum_{k=1}^{n} (\lambda_k + \mu_k) = \max(a_{1\nu_1} + a_{2\nu_2} + \cdots + a_{n\nu_n}),$$

hol $\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_n$ az $1, 2, \ldots n$ számok összes permutációit befutják.

Egerváry bizonyítása lényegében algoritmikus. Tegyük fel, hogy az $a_{i,j}$-k egészek. Legyenek λ_i^* és μ_j^* a minimumot megvalósító vektorok. Ha létezik az $\{1, 2, \ldots, n\}$ számoknak olyan ν permutációja, amelyre $\lambda_i^* + \mu_{\nu_i}^* = a_{i,\nu_i}$ áll minden i-re, akkor ez a permutáció a maximumot valósítja meg, és teljesül a kívánt egyenlőség. Ha nem létezik ilyen permutáció, akkor Frobenius tétele miatt léteznek az $\{1, \ldots, n\}$ számoknak olyan I és J részhalmazai, amelyekre

$$\lambda_i^* + \mu_j^* > a_{i,j} \text{ áll tetszőleges } i \in I,\ j \in J \text{ esetén}$$

és amelyre $|I| + |J| = n + 1$. Azonban ha $i \in I$ és $j \notin J$ esetén $\lambda_i^* := \lambda_i^* - 1$ és $\mu_j^* := \mu_j^* + 1$ módosításokkal élünk, akkor olyan, a feltételeket kielégítő λ^* és μ^* vektorokat kapunk, amelyekre a minimalizálandó összeg csökken. Ez pedig ellentmondás.

Egerváry tétele és bizonyítási módszere adta meg a lökést az 1950-es években Kuhnnak, hogy egy újszerű, gyors eljárást találjon a hozzárendelési problémára, amit Kuhn emiatt „magyar módszernek" keresztelt. Ám ezt megelőzték még a hozzárendelési problémával kapcsolatos más fejlemények.

Easterfield (1946)

A hozzárendelési problémára az első algoritmust talán Easterfield [1946] közölte, aki így beszél a probléma eredetéről:

> In the course of a piece of organisational research into the problems of demobilisation in the R.A.F., it seemed that it might be possible to arrange the posting of men from disbanded units into other units in such a way that they would not need to be posted again before they were demobilised; and that a study of the numbers of men in the various release groups in each unit might enable this process to be carried out with a minimum number of postings. Unfortunately the unexpected ending of the

[9]Ez volt a mai Bolyai János Matematikai Társulat és az Eötvös Loránd Fizikai Társulat közös őse (*a fordító megjegyzése*).

> Japanese war prevented the implications of this approach from being worked out in time for effective use. The algorithm of this paper arose directly in the course of the investigation.[10]

Úgy tűnik, Easterfield nem ismerte a rendelkezésre álló irodalmat. Kimondott és bebizonyított egy Kőnig tételével ekvivalens tételt, és a hozzárendelési probléma megoldására leírt egy primál-duál típusú módszert is, amelyből levezethető Egerváry fenti eredménye. Easterfield algoritmusának futásideje $O(2^n n^2)$, ami jobb, mint az összes lehetséges permutáció $\Omega(n!)$ idő alatti végignézése.

Robinson (1949)

A kombinatorikus optimalizálás egyik fontos eszköze a negatív kör mentén történő javítás. Egy 1949. december 5-i keltezésű RAND beszámolóban Robinson [1949] azt mondja el, hogy az utazó ügynök probléma megoldásának egy sikertelen kísérlete vezette őt az alábbi, körmenti javításokon alapuló módszerhez a hozzárendelési problémában.

Adott $a_{i,j}$ mátrixhoz tekintsünk egy tetszőleges π permutációt. Tetszőleges i, j esetén legyen $l_{i,j} = a_{j,\pi(i)} - a_{i,\pi(i)}$, ha $j \neq \pi(i)$ és legyen $l_{i,\pi(i)} = \infty$. Ha létezik l szerint negatív költségű irányított kör, akkor a π könnyen javítható. Ha nincs ilyen kör, akkor a π permutáció optimális. Világos, hogy ez egy véges módszer. Robinson az alábbiakat jegyzi még meg:

> I believe it would be feasible to apply it to as many as 50 points provided suitable calculating equipment is available. [11]

A szimplex módszer

A hozzárendelési probléma megoldásában az áttörés akkor következett be, amikor Dantzig [1951a] megmutatta, hogy a hozzárendelési probléma egy olyan lineáris programozási problémaként is felfogható, melynek automatikusan létezik egész optimális megoldása. Ezt Birkhoff [1946] egy tétele biztosítja, amely szerint a permutációmátrixok[12] konvex burka megegyezik a duplán sztochasztikus mátrixokkal, amik olyan nemnegatív mátrixok, amelyekben minden sor- és oszlopösszeg pontosan 1. Ezért, ha a duplán sztochasztikus mátrixokon minimalizálunk egy lineáris

---

[10] Az angol légierő leszerelésének egy kérdését tanulmányozva úgy tűnt, hogy lehetséges a felszámolandó egységek embereit más egységekhez úgy átcsoportosítani, hogy őket a leszerelésükig már ne kelljen ismételten egy újabb egységhez átcsoportosítani; és elegendő lehet pusztán az egyes egységek leszerelt állományának létszámait ismerni ahhoz, hogy ezt a lehető legkevesebb átcsoportosítással végezzük el. Sajnos azonban e megközelítés következményeinek még időben történő kidolgozását és hatékony alkalmazását megelőzte a Japán háború váratlan befejezése. A cikkben található algoritmus közvetlenül a vizsgálat során adódott.

[11] Úgy hiszem, ezt alkalmazhatjuk akár 50 pontra is, feltéve, hogy megfelelő számítási apparátus áll rendelkezésre.

[12] Egy négyzetes M mátrixot *permutációmátrixnak* nevezünk, ha minden sorában és minden oszlopában pontosan egy egyes áll, M többi eleme pedig 0 (*a fordító megjegyzése*).

funkcionált (ami nyilvánvalóan egy lineáris programozási probléma), úgy optimális hozzárendelésként egy permutációmátrixot kapunk. Tehát a hozzárendelési probléma megoldható a szimplex módszerrel.

Votaw [1952] beszámolója szerint egy 10×10-es hozzárendelési probléma szimplex módszerrel történő megoldása 20 percig tartott a SEAC[13]-on. Kuhn [1991] visszaemlékezésében pedig az alábbiakat említi:

> The story begins in the summer of 1953 when the National Bureau of Standards and other US government agencies had gathered an outstanding group of combinatorialists and algebraists at the Institute for Numerical Analysis (INA) located on the campus of the University of California at Los Angeles. Since space was tight, I shared an office with Ted Motzkin, whose pioneering work on linear inequalities and related systems predates linear programming by more than ten years. A rather unique feature of the INA was the presence of the Standards Western Automatic Computer (SWAC), the entire memory of which consisted of 256 Williamson cathode ray tubes. The SWAC was faster but smaller than its sibling machine, the Standards Eastern Automatic Computer (SEAC), which boasted a liquid mercury memory and which had been coded to solve linear programs. [14]

Kuhn így folytatja:

> The 10 by 10 assignment problem is a linear program with 100 nonnegative variables and 20 equation constraints (of which only 19 are needed). In 1953, there was no machine in the world that had been programmed to solve a linear program this large! [15]

Amennyiben a „világ" az Egyesül Államok keleti partját is magában foglalja, úgy ez ellentmondani látszik Votaw [1952] fent idézett megjegyzésének.

A bonyolultság kérdése

A hozzárendelési probléma annak megértését is segítette, hogy egy algoritmus attól, hogy véges, nem feltétlenül alkalmazható a gyakorlatban, továbbá, hogy a

[13] A SEAC (a Standards Electronic/Eastern Automatic Computer rövidítése) egy, az amerikai Szabványügyi Hivatal (NBS) által 1950-ben konstruált, eredetileg 757 elektroncsövön és 10500 diódán alapuló, tranzisztormentes számítógépe. Szintén 1950-ben építette az NBS a SWAC (Standards Western Automatic Computer) nevű készüléket, ami a kor leggyorsabb számítógépe volt. (*A fordító megjegyzése.*)

[14] A történet 1953 nyarán kezdődött, amikor is a Szabványügyi Hivatal és más kormányhivatalok kiváló kombinatorikusokat és algebristákat toboroztak a Kaliforniai Egyetem kampuszára kihelyezett Numerikus Analízis Intézetbe, az INA-ba. Helyszűke okán azzal a Ted Motzkinnal osztoztunk egy szobán, akinek a lineáris egyenlőtlenségeken és rokon rendszereken végzett úttörő munkája nyomán a lineáris programozás több mint 10 évvel korábban megszületett. Az INA egy páratlan vonása volt az ott rendelkezésre álló SWAC számítógép, melynek teljes memóriáját 256 Williamson katódsugárcső alkotta. A SWAC kisebb és gyorsabb volt, mint a SEAC nevű testvére, amely folyékony higany memóriával büszkélkedhetett, és amit lineáris programok megoldására programoztak.

[15] A 10-szer 10-es hozzárendelési probléma olyan lineáris program, ami 100 nemnegatív változón 20 egyenlőség teljesülését (melyből csak 19 szükséges) kívánja meg. 1953-ban az egész világon nem létezett olyan gép, ami képes lett volna ilyen méretű lineáris program megoldására!

polinomiális és exponenciális idejű algoritmusok között jókora szakadék tátong.

Más tudományágakban is felismerték, hogy bár a hozzárendelési probléma véges, helye van a bonyolultság kérdésének. Az Amerikai Pszichológiai Szövetség (American Psychological Association) 1949. szeptember 9-én a coloradoi Denverben tartott összejövetelt. Ezen Thorndike [1950] az alkalmazottak (bizonyos munkákra történő) beosztásáról szólt:

> The past decade, and particularly the war years, have witnessed a great concern about the classification of personnel and a vast expenditure of effort presumably directed towards this end. [16]

Thorndike nemigen bízott a matematikusokban:

> There are, as has been indicated, a finite number of permutations in the assignment of men to jobs. When the classification problem as formulated above was presented to a mathematician, he pointed to this fact and said that from the point of view of the mathematician there was no problem. Since the number of permutations was finite, one had only to try them all and choose the best. He dismissed the problem at that point. This is rather cold comfort to the psychologist, however, when one considers that only ten men and ten jobs mean over three and a half million permutations. Trying out all the permutations may be a mathematical solution to the problem, it is not a practical solution.[17]

Thorndike három heurisztikát ismertetett a hozzárendelési probléma megoldására: az *Isteni Sugallat Módszerét*, a *Napi Hányad Módszert* és a *Megjósolt Hozam Módszert.*

(A hozzárendelési problémára más heurisztikákat, ill. geometriai módszereket írt le Lord [1952], Votaw és Orden [1952], Törnqvist [1953] és Dwyer [1954] (az „optimális tartományok módszerét").)

Neumann János a hozzárendelési probléma bonyolultságát vizsgálta. A Princeton Egyetem játékelmélet szemináriumán 1951. október 26-án tartott előadásában megmutatta, hogy a hozzárendelési probléma visszavezethető egy bizonyos kétszemélyes, nulla összegű játék optimális oszlopstratégiájának megtalálására, és ez megtalálható Brown és Neumann [1950] módszerével. Először a matematikai hátteret ismertetjük.

A kétszemélyes, nulla összegű játékot az A kifizetésmátrix írja le. A játékot úgy értelmezzük, hogy a „sorjátékos" egy i sorindexet, ezzel egyidejűleg az oszlopjátékos egy j oszlopindexet választ. Ezután az oszlopjátékos $A(i, j)$ összeget fizet a

[16] Az elmúlt évtizedben és különösen a háború alatt tanúi lehettünk annak, hogy mekkora gond a személyzet beosztása, és hogy milyen mérhetetlen erőfeszítésbe kerül mindez.

[17] Miként jeleztük, a dolgozók munkákhoz rendelését leíró permutációk száma véges. Amikor egy matematikussal ismertettük a korábban megfogalmazott, beosztással kapcsolatos problémát, ő erre a tényre mutatott rá, majd hozzátette, hogy matematikai szempontból ez nem probléma. Lévén a lehetséges permutációk száma véges, végig kell csupán próbálni mindegyiket, és ki kell választani a legjobbat. Ezzel pedig megoldottnak tekintette a kérdést. Ez azonban nem túl megnyugtató a pszichológus számára amikor arra jut, hogy mindössze tíz ember és tíz munka több, mint három és fél millió permutációt jelent. Az összes permutáció végigpróbálgatása lehet ugyan matematikai szempontból tökéletes megoldás, a gyakorlatban viszont egyáltalán nem az.

sorjátékosnak. Ezt a játékot sokszor egymás után játsszák le, és a legjobb stratégia a kérdés.

Legyen A egy $m \times n$ méretű mátrix. A *sorstratégia* egy olyan $x \in \mathbb{R}_+^m$ vektor, amire $\mathbf{1}^\mathsf{T} x = 1$ teljesül. Hasonlóan, *oszlopstratégia* alatt egy olyan $y \in \mathbb{R}_+^n$ vektort értünk, amire $\mathbf{1}^\mathsf{T} y = 1$ áll. Ekkor

$$\max_x \min_j (x^\mathsf{T} A)_j = \min_y \max_i (Ay)_i, \tag{1}$$

ahol x az összes lehetséges sorstratégián, y a létező oszlopstratégiákon, i a sorokon, j pedig az oszlopokon fut végig. Az (1) egyenlőség az LP dualitásból adódik.

Megmutatható, hogy a sorjátékos legjobb stratégiája az, ha (1)-ben szereplő optimális x által definiált eloszlás szerint sorsolja ki az általa megjátszott sort. Hasonlóan, az oszlopjátékos legjobb stratégiája, ha az (1)-ben található optimális y szerinti eloszlással választ oszlopot. Az átlagos kifizetés így az (1)-ben szereplő érték lesz.

Brown [1951] módszere az optimális stratégia meghatározására abból áll, hogy minden játékos úgy választja a maga számára optimálisan a soron következő sort vagy oszlopot, mintha az ellenfele az eddig látott választásokból adódó eloszlás szerint játszana. Robinson [1951] bebizonyította, hogy ez optimális stratégiákhoz konvergál. Brown és Neumann [1950] módszere ugyanennek a folytonos változata, és egy lineáris differenciálegyenlet-rendszer megoldására vezet.

Ezek után Neumann észrevette, hogy a hozzárendelési probléma egy optimális oszlopstratégia keresésére vezet az alábbiak szerint. Legyen a hozzárendelési probléma bemenete az $n \times n$ méretű $C = (c_{i,j})$ költségmátrix. Feltehetjük, hogy C pozitív. Tekintsük azt a $2n \times n^2$-es A kifizetésmátrixot, melynek oszlopait a rendezett (i,j) párok indexelik $(i,j = 1,\ldots,n)$ és elemeit az alábbiak szerint kapjuk:

$$A_{i,(i,j)} := 1/c_{i,j} \quad \text{és} \quad A_{n+j,(i,j)} := 1/c_{i,j} \quad \text{ha} \quad i,j = 1,\ldots,n,$$

illetve

$$A_{k,(i,j)} := 0$$

mindazon i,j,k esetén, melyre $k \neq i$ és $k \neq n+j$. Ekkor egy tetszőleges minimális költségű hozzárendelés (költségét jelölje γ) azt az optimális y oszlopstratégiát határozza meg, melyre $y_{(i,j)} := c_{i,j}/\gamma$ ha i-t a j-hez rendeltük, különben $y_{(i,j)} := 0$. Tetszőleges optimális oszlopstratégia előáll, mint optimális hozzárendelésekből a fentiek szerint származó stratégiák konvex kombinációja. Ezért egy optimális hozzárendelést elméletileg megtalálhatunk egy optimális oszlopstratégia megkeresésével.

Az előadásról készült feljegyzés (lásd Neumann [1951,1953]) szerint Neumann a lépésszámról szólva az alábbiakat jegyezte meg.

> It turns out that this number is a moderate power of n, i.e., considerably smaller than the "obvious" estimate n! mentioned earlier.[18]

[18] Az derül ki, hogy ez a szám az n egy nem túl magas hatványa, azaz jóval kisebb, mint a korábban említett „nyilvánvaló" n! becslés.

Indoklást azonban nem kapunk erre.

A Cowles Commission nevű közgazdasági kutatóintézet egy 1953. április 2-i keltezésű vitacikkében Beckmann és Koopmans [1953] így ír:

> It should be added that in all the assignment problems discussed, there is, of course, the obvious brute force method of enumerating all assignments, evaluating the maximand at each of these, and selecting the assignment giving the highest value. This is too costly in most cases of practical importance, and by a method of solution we have meant a procedure that reduces the computational work to manageable proportions in a wider class of cases.[19]

A magyar módszer: Kuhn (1955–1956), Munkres (1957)

A hozzárendelési probléma megoldására a fő kombinatorikus (tehát nem LP alapú) eljárás a magyar módszer. Kuhn [1955b,1956] a módszert Egerváry [1931] munkája nyomán írta le, és ezért is hívta magyar módszernek.

Kuhn [1991] „On the origin of the Hungarian method[20]" c. cikkében találjuk az alábbi visszaemlékezést az 1953 nyarától kezdődő időszakra :

> During this period, I was reading Kőnig's classical book on the theory of graphs and realized that the matching problem for a bipartite graph on two sets of n vertices was exactly the same as an n by n assignment problem with all $a_{ij} = 0$ or 1. More significantly, Kőnig had given a combinatorial algorithm (based on augmenting paths) that produces optimal solutions to the matching problem and its combinatorial (or linear programming) dual. In one of the several formulations given by Kőnig (p. 240, Theorem D), given an n by n matrix $A = (a_{ij})$ with all $a_{ij} = 0$ or 1, the maximum number of 1's that can be chosen with no two in the same line (horizontal row or vertical column) is equal to the minimum number of lines that contain all of the 1's. Moreover, the algorithm seemed to be good' in a sense that will be made precise later. The problem then was: how could the general assignment problem be reduced to the 0-1 special case?
>
> Reading Kőnig's book more carefully, I was struck by the following footnote (p. 238, footnote 2): "...Eine Verallgemeinerung dieser Sätze gab Egerváry, Matrixok kombinatorius tulajdonságairól (Über kombinatorische Eigenschaften von Matrizen), Matematikai és Fizikai Lapok, **38**, 1931, S. 16-28 (ungarisch mit einem deutschen Auszug)..." This indicated that the key to the problem might be in Egerváry's paper. When I returned to Bryn Mawr College in the fall, I obtained a copy of the paper together with a large Hungarian dictionary and grammar from the Haverford College library. I then spent two weeks learning Hungarian and translated the paper [1]. As I had suspected, the paper contained a method by which a general assignment problem could be reduced to a finite number of 0-1 assignment problems.
>
> Using Egerváry's reduction and Kőnig's maximum matching algorithm, in the fall of 1953 I solved several 12 by 12 assignment problems (with 3-digit integers

[19] Hozzá kell tennünk, hogy az összes vizsgált hozzárendelési probléma megoldható „izomból" is: felsoroljuk az összes lehetséges hozzárendelést, mindegyikre kiszámítjuk a maximalizálandó célfüggvényt, és kiválasztjuk a legnagyobb értékhez tartozó hozzárendelést. A gyakorlatban fontos esetekben azonban ez túlságosan költséges, és megoldási módszer alatt mi olyan eljárást értünk, ami az esetek egy jelentősebb halmazán kezelhető mértékűre csökkenti a számítási munkát.

[20] A magyar módszer eredetéről

> as data) by hand. Each of these examples took under two hours to solve and I was convinced that the combined algorithm was 'good'. This must have been one of the last times when pencil and paper could beat the largest and fastest electronic computer in the world.[21]

(Az [1] hivatkozás Egerváry [1931] cikkének angol nyelvű fordítása.)

A Kuhn által leírt módszer Egerváry korábban vázolt módszerét két ponton javítja: (i) (javító utas) módszert ad, ami vagy teljes párosítást, vagy a kívánt I és J halmazokat adja meg, és (ii) nem 1-gyel, hanem a lehetséges legnagyobb értékkel javítja a λ_i-ket és μ_j-ket.

Kuhn [1955b] megelégedett annak kimondásával, hogy a szükséges iterációk száma véges, de Munkres [1957] azt is megfigyelte, hogy a módszer valójában erősen polinomiális időben ($O(n^4)$ alatt) fut.

Ford és Fulkerson [1956b] a magyar módszer kapcsán az alábbi számítási tapasztalatról számoltak be:

> The largest example tried was a 20 x 20 optimal assignment problem. For this example, the simplex method required well over an hour, the present method about thirty minutes of hand computation.[22]

---

[21] Kőnig klasszikus gráfelmélet könyvét olvasgattam ekkortájt, és észrevettem, hogy a párosítási probléma az olyan páros gráfon amelynek két n elemű halmaz alkotja a csúcsait, nem más, mint egy olyan n-szer n-es hozzárendelési probléma, ahol minden $a_{ij} = 0$ vagy 1. Még ennél is fontosabb, hogy Kőnig egy (javító utakon alapuló) kombinatorikus algoritmust is adott, amivel optimális megoldást talál mind a párosítási problémára, mind pedig annak kombinatorikus (vagy lineáris programozási) duálisára. A Kőnig által megadott számos megfogalmazás egyike szerint (240. oldal, D tétel) ha adott egy n-szer n méretű $A = (a_{ij})$ mátrix, ahol $a_{ij} = 0$ vagy 1, akkor a kiválasztható 1-esek maximális száma, abban az esetben, ha nem választhatunk egyetlen vonal (azaz vízszintes sor vagy függőleges oszlop) mentén sem két 1-est, megegyezik az összes 1-est tartalmazó vonalak minimális számával. Ráadásul az algoritmus „jónak" tűnt abban az értelemben is, amit később fogunk pontosítani. A kérdés ekkor így hangzott: hogyan lehet visszavezetni az általános hozzárendelési problémát a speciális, 0-1 esetre.

Kőnig könyvét alaposabban átolvasva az alábbi lábjegyzetbe ütköztem (238. oldal, 2. lábjegyzet): „... Eine Verallgemeinerung dieser Sätze gab Egerváry, Matrixok kombinatorius tulajdonságairól (Über kombinatorische Eigenschaften von Matrizen), Matematikai és Fizikai Lapok, **38**, 1931, S. 16-28 (ungarisch mit einem deutschen Auszug) ..." Ez azt jelezte, hogy a probléma kulcsa alighanem Egerváry cikkében található. Amikor ősszel visszatértem a Bryn Mawr College-ba, a Haverford College könyvtárából megkaptam a cikk egy másolatát és kikölcsönöztem egy jókora magyar szótárat meg egy nyelvtankönyvet is. Ezután két hetet magyartanulással töltöttem, és lefordítottam az [1] cikket. Ahogy azt vártam, a cikkben szereplő módszerrel az általános hozzárendelési problémát vissza lehetett vezetni véges számú 0-1 hozzárendelési problémára.

Egerváry visszavezetését Kőnig maximális párosítás algoritmusával ötvözve, papíron számos 12-szer 12-es (bemenetként háromjegyű egészeket tartalmazó) hozzárendelési problémát oldottam meg 1953 őszén. Minden egyes ilyen probléma megoldása két órán belül megvolt, és ez meggyőzött arról, hogy az algoritmus „jó". Alkalmasint ez egyike volt azoknak az utolsó pillanatoknak, amikor papírral és ceruzával a világ legnagyobb és leggyorsabb számítógépe is legyőzhető volt.

[22] A legnagyobb kipróbált példa egy 20 x 20 optimális hozzárendelési probléma volt. Ezen a példán a szimplex módszer jóval egy órán felül teljesített, míg a jelen módszerrel, kézzel, papíron nagyjából 30 perc alatt elkészültünk.

3. A szállítási feladat

A szállítási feladat a következő: adott egy $m \times n$-es $C = (c_{i,j})$ költségmátrix, egy $b \in \mathbb{R}_+^m$ kapacitásvektor, és egy $d \in \mathbb{R}_+^n$ igényvektor, keressünk egy nemnegatív $m \times n$-es $X = (x_{i,j})$ mátrixot, melyre

$$\begin{aligned}
&\text{(i)} \sum_{j=1}^{n} x_{i,j} = b_i \quad \text{minden} \quad i = 1, \ldots, m\text{-re},\\
&\text{(ii)} \sum_{i=1}^{m} x_{i,j} = d_j \quad \text{minden} \quad j = 1, \ldots, n\text{-re},\\
&\text{(iii)} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{i,j} x_{i,j} \quad \text{a lehető legkisebb},
\end{aligned} \tag{2}$$

így a szállítási feladat speciális esete a lineáris programozásnak[23].

Tolsztoj (1930)

A szállítási feladat egy korai tanulmányát A.N. Tolsztoj [1930] írta. Ezt a Szovjet Szállítási Tanács *Minimális össztávolságú teherszállítási terv készítésének módszerei a térben* címmel egy könyvben jelentette meg, melyben megfogalmazza és tanulmányozza a szállítási feladatot, és leír számos megoldó módszert, köztük a ma jól ismert ötletet, miszerint egy optimális megoldás reziduális gráfjában[24] nem található negatív költségű kör. Valószínűleg ő figyelte meg először, hogy az optimalitáshoz szükséges ez a körökre vonatkozó feltétel. Feltette továbbá, bár explicite nem fogalmazta meg és nem bizonyította be, hogy az optimalitásnak ez a körfeltétel valójában szükséges és elégséges feltétele.

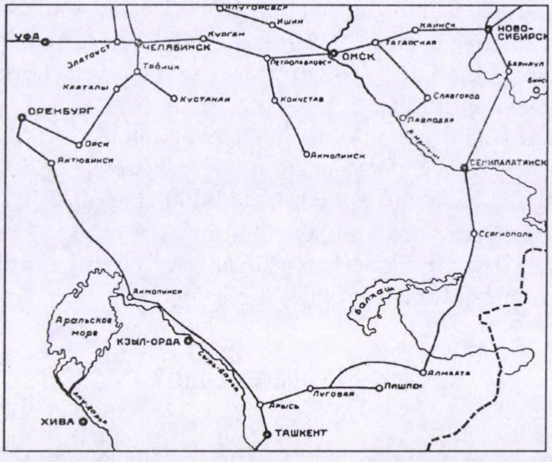
Tolsztoj a szovjet vasúti hálózaton illusztrálta módszerét: különböző kiinduló és célállomások között só, cement, és egyéb rakomány szállítására vonatkozó feladatokat oldott meg. Itt a szállítási feladat egy konkrét, akkoriban nagynak számító példáját tudta optimálisan megoldani.

Tekintsük át röviden a cikk tartamát. Tolsztoj először a szállítási feladat olyan eseteit tekinti, amikor csak két forrás van a hálózatban. Megfigyelte, hogy ebben az esetben a célállomások sorbarendezhetők a forrásoktól vett távolságaik különbsége szerint. Ekkor az egyik forrásból a lista sorrendje szerint ellátjuk a célállomásokat,

[23]Magyarázat a jelöléshez: az $1, 2, \ldots, m$ gyárak (források) termelnek egy bizonyos árut, az i-edik b_i mennyiséget, az $1, 2, \ldots, n$ fogyasztók (nyelők) pedig használják ezt az árut, a j-edik fogyasztó igénye d_j. Határozzuk meg, hogy az igényeket hogyan elégítsük ki a lehető legolcsóbban, ha még ismert az i-edik forrástól a j-edik nyelőbe az egységnyi áru szállításának a c_{ij} költsége is. (*A fordító megjegyzése.*)

[24]A *reziduális gráf*ban minden forrásból minden nyelőbe húzunk egy-egy élt, továbbá egy nyelőből egy forrásba akkor húzunk élt, ha itt a szállított mennyiség pozitív; a „vissza"-él költsége ekkor az „előre"-él költségének negatívja legyen.

amíg ki nem fogy ez a forrás. Ezután a másik forrás látja el a többi célállomást. Tolsztoj megfigyelte, hogy a lista független a kapacitásoktól és az igényektől, így ezek a listák alkalmazhatók az üzemek és termelőegységek teljes élettartama során. Ezt a táblázatot használva azonnal összeállítható az optimális szállítási terv az egész évben, ha adott a két gyár termelési kapacitása és a célállomások igényei.



1. ábra. Tolsztoj [1930] ezzel az ábrával illusztrálja a negatív kör fogalmát.

Ezután Tolsztoj abban az esetben vizsgálta a szállítási problémát, amikor minden forrás és célállomás egy kör alakú vasútvonalon helyezkedik el (1. ábra). És ebben az esetben az optimális megoldást megkapjuk a két költségösszeg különbségéből. Ezt a jelenséget *kör függőség*nek hívta.

Végül Tolsztoj a két ötletet egyetlen heurisztikus módszerré rakta össze, így megoldott egy konkrét, a szovjet vasúttársaság teherszállítására vonatkozó szállítási feladatot. A feladatban 10 forrás és 68 célállomás volt, köztük pedig összesen 155 vasútvonal (minden más távolságot végtelennek tekintett).

Tolsztoj heurisztikájában kihasználta a Szovjetunió földrajzának sajátosságait. Végigmegy az összes forráson (a legtávolabb esővel kezdve), és minden X forráshoz felsorolja azon célállomásokat, amikhez X a legközelebbi, vagy a második legközelebbi forrás. A legközelebbi és a második legközelebbi forrástól vett távolságok különbségétől függően, az X-beli árut rendeli hozzá a célállomásokhoz, amíg X ki nem fogy. (Ez nyilván ekvivalens azzal, hogy csak a 4 hosszúságú köröket vesszük figyelembe.) Amikor Tolsztoj egy negatív körre bukkan a reziduális gráfban, akkor eltér a fenti szabálytól, hogy ezt a negatív kört elkerülje. „Visszatáncolásra" nem volt szüksége.

10 lépés után, miután mind a 10 üzem szállításait megadta, Tolsztoj „ellenőrzi" a kapott megoldást a hálózat számos körének figyelembevételével, és megállapítja, hogy a kapott megoldás optimális:

Így, a különbség-módszer ismételt alkalmazásával, és az eredmény kör függésének ellenőrzésével olyan szállítási tervet sikerült összeállítani, ami minimalizálja az összesen megtett kilométerek számát.

Tolsztoj megoldásának célfüggvény-értéke 395.052 kilotonna-kilométer. Modern lineáris programozási eszközzel (CPLEX) megoldva a feladatot ellenőrizhető, hogy Tolsztoj megoldása valóban optimális. Az azonban nem világos, hogyan győződhetett meg Tolsztoj megoldásának optimalitásáról. Talán a földrajzi ismeretei segítettek neki meggyőzni magát erről. Másrészt, létezik olyan megengedett megoldás is, aminek reziduális gráfjában a Tolsztoj által számba vett körök nemnegatívak, de a megoldás mégsem optimális.

Később Tolsztoj [1939] hasonló eredményeket publikál 1939 szeptemberében *Irracionális szállítási tervek felszámolásának módszerei* címmel a *Szocialista Szállítás* folyóiratban. Ezen módszereket taglalják Parijszkaja, Tolsztoj és Moc [1947] *Az áruszállítás tervezése* című könyvükben.

Kantorovics [1987] szerint kísérletek történtek Tolsztoj munkájának bemutatására a Szovjet Szállítási Tanács megfelelő részlegében.

Kantorovics (1939)

L.V. Kantorovics, akkoriban nyilván Tolsztoj munkájának ismerete nélkül, olyan általános problémaosztályt vizsgált, mely magában foglalja a szállítási feladatot. A szállítási feladat volt a lineáris programozás mögött a nagy motiváció. Kantorovics [1987] visszaemlékezéseiben leírta, hogyan jutott el gyakorlati feladatoktól ezen problémák megfogalmazásához:

> Egyszer egy furnérozó termelőszövetkezettől néhány mérnök keresett fel, és rendkívül ügyesen előadták, hogy milyen problémájuk akadt. A furnérvágó gépeik különböző hatásfokot érnek el külünböző típusú anyagok esetén; úgy tűnt, ezen gépek termelési összteljesítménye annak eloszlásától függött, hogy melyik alapanyagot melyik géphez rendelték. Ezt a tényt vajon hogyan használhatjuk ki racionálisan?
>
> Érdekelt a kérdés, mindazonáltal nagyon speciálisnak és eleminek tűnt, így vizsgálatáért nem adtam fel többi elfoglaltságomat. A matematikai intézetünkben egy alkalommal vitára bocsátottam a kérdést, ahol olyan komoly szakértők voltak jelen, mint Gyunter, Szmirnov, Kuzmin, és Tartakovszkij. Mindnyájan figyeltek, de senkinek nem volt megoldási javaslata, és a sorrendben korábban felszólaló Kuzminhoz fordultak. Ennek ellenére a kérdés továbbra izgalomban tartott. Ebben az évben házasodtam, és ez szintén elvonta a figyelmemet. A nyári vakáció után konkrét, bizonyos szempontból hasonló, közgazdasági, mérnöki és menedzseri feladatok ötlöttek eszembe, amik lineáris feltételek sorozatával megadott maximalizálási probléma megoldását igényelték.
>
> A legegyszerűbb esetben, amikor csak egy vagy két változó van, a feladat könnyen mogoldható azáltal, hogy végignézzük az összes lehetséges extrém pontot, és vesszük a legjobbat. De mondjuk a furnérozó üzem feladatában öt gép és nyolc féle anyag esetén ebben a megközelítésben körülbelül egymilliárd egyenletrendszert kellene megoldani, ami nyilvánvalóan nem életszerű módszer. Megadtam bizonyos eszközöket, és 1938-ban a Herzen Intézet októberi tudományos ülésén talán én voltam az első, aki beszámolt erről a problémáról. Itt lényegében kitűztünk néhány feladatot és azok megoldására javaslatokat tettünk.

> Ezen problémaosztály általánossága a nehézségével együtt arral ösztönzött, hogy komolyabban vizsgáljam és hasznosítsam matematikai ismereteimet, különös tekintettel a funkcionálanalízisből merített ötletekre.
>
> Világossá vált, hogy ezek a feladatok egyrészt megoldhatóak, másrészt pedig lépten-nyomon felbukkannak, ezért meghívtuk az egyetemre az ipar képviselőit a tanulmányom vitájára.

Ez a találkozó 1939. május 13-án jött létre a Leningrádi Állami Egyetem Matematikai és Gépészeti Intézetének Matematikai Részlegében. 1939. május 26-án egy második találkozót is tartottak a Leningrádi Mérnöki és Ipari Intézetben, ahol különösen az építőiparral kapcsolatos problémákkal foglalkoztak. Ezek a találkozók alapozták meg Kantorovics [1939] *Matematikai módszerek a termelés szervezésében és tervezésében* című monográfiáját.

Ezen monográfia A.R. Marcsenko által írt előszava szerint Kantorovics munkáját nagyon dícsérték a matematikusok, ráadásul a különleges találkozón az ipari dolgozók is egyhangúlag komoly érdeklődést mutattak a munka iránt.

A monográfia hangsúlyozza a munka jelentőségét a szovjet rendszer számára:

> Ismételten nyomatékosítani szeretném, hogy a problémák, amikről szólni fogok, javarészt a termelés szervezésével és tervezésével kapcsolatosak, összefüggnek a szovjet gazdaság rendszerével, és az esetek nagy részében fel sem merülnek egy kapitalista társadalom gazdaságában. Ott a termelési döntéseket nem a terv határozza meg, hanem az egyes kapitalisták érdeke és nyeresége. A vállalat tulajdonosa azon termék termelése mellett dönt, ami az adott pilanatban a legértékesebb, legkönnyebben eladható, azaz a legnagyobb hasznot hozza. Nem azt a nyersanyagot választja, amiből az országnak legnagyobb készlete van, hanem amit a vállalat legolcsóbban szerhet be. Nem merül fel a berendezés legjobb kihasználásának kérdése; így a vállalatok többségében a kapacitásnak csak a felét hasznosítják.
>
> Eltérő a helyzet a Szovjetunióban. Mindent alárendelnek az állami terv teljesítésének, és nem az egyes vállalatok érdekeinek. Egy vállalat alapvető célja a terv teljesítése és túlteljesítése, ami az általános állami terv részét képezi. Ez nem csak az összesített eredményben jelenti a terv teljesítését (azaz a termelés összértékében, a termelés összsúlyában stb.), hanem mindenfajta termékre külön-külön vonatkozik; azaz egy termékválasztékot kell teljesíteni (a terv teljesítendő mindenfajta termék esetén, figyelembevéve az egyes legyártott elemek teljesítettségét stb.).

Az egyik vizsgált probléma a szállítási feladat egy kezdetleges változata volt:

adott: egy $m \times n$ mátrix $(c_{i,j})$;

keresendő: egy $m \times n$ mátrix $(x_{i,j})$ melyre:

(i) $x_{i,j} \geq 0$ minden i, j-re;

(ii) $\sum_{i=1}^{m} x_{i,j} = 1$ minden $j = 1, \dots, n$-re;

(iii) $\sum_{j=1}^{n} c_{i,j} x_{i,j}$ független i-től, és maximális.

Egy másik, Kantorovics által vizsgált probléma a „C Probléma", amit a következőképpen fogalmazhatunk meg:

$$
\begin{aligned}
\text{maximalizáljuk} \quad & \lambda\text{-t} \\
\text{melyre} \quad & \sum_{i=1}^{m} x_{i,j} = 1 \quad (j = 1, \ldots, n), \\
& \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{i,j,k} x_{i,j} = \lambda \quad (k = 1, \ldots, t), \\
& x_{i,j} \geq 0 \quad (i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n).
\end{aligned}
$$

Ennek magyarázata: adott n gép, amik m üzemmódban dolgozhatnak egy t alkatrészből álló végtermék előállítása érdekében. Amikor az i gép a j üzemmódban dolgozik, akkor a k alkatrészből $c_{i,j,k}$ darabot állít elő ($k = 1, \ldots, t$). Legyen $x_{i,j}$ az az időhányad, amit az i gép a j üzemmódban dolgozik. Ekkor λ lesz az előállított végtermék mennyisége. A „C Problémáról" Kantorovics javaslata alapján H.E. Scarf később kimutatta (lásd Koopmans [1959]), hogy ekvivalens az általános lineáris programozási problémával.

Kantorovics egy új módszert vázolt lineáris célfüggvény maximalizálására lineáris egyenlőtlenségi feltételek mellett. A módszer alapján duális változókat („megoldó multiplikátorokat") határoz meg és a hozzá tartozó primál megoldást. Ha a primál megoldás nem megengedett, akkor módosítja a duál megoldást egy meghatározott szabály szerint. Kantorovics rámutatott a duál változóknak az érzékenységvizsgálatban betöltött szerepére, és bebizonyította, hogy a „C Probléma" egy megengedett megoldásának optimalitása kimutatható duál változók megadásával.

A módszer hasonlít a szimplex módszerre, és Kantorovics [1987] egy lábjegyzetében fia, V.L. Kantorovics utal arra, hogy Kantorovics 1938-ban feltalálta a szimplex módszert:

> L.V. Kantorovics gyűjteményében egy 1938-as kézirat maradt fenn a „Matematikai problémák az ipar, mezőgazdaság és szállítás gazdaságában" címmel, ami tartalmilag nyilvánvalóan ezen jelentésnek felel meg, és ahol lényegében leírja a szimplex módszert a gyártási feladatra.

Kantorovics bőségesen ad gyakorlati alkalmazást a módszereihez, amiket főleg a szovjet tervgazdálkodából merít:

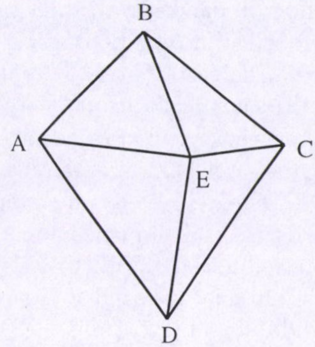
> Ebben benne foglaltatnak olyan kérdések, mint például a munkák szétosztása a vállalat egyes gépei között, a megrendelések megfelelő szétosztása a vállalatok között, különböző nyersanyagok, üzemanyag, és egyéb tényezők figyelembevételével. Mindezeket megemlítik a XVIII. Pártkongresszus határozatai.

A szállítási feladatnak a következő alkalmazásait adta:

> Először vizsgáljuk meg a következő kérdést. Egyik pontról a másikra szállíthatunk különböző fajta rakományt (olaj, gabona, gépek stb.) különböző módon; vasúton, gőzhajóval; lehet vegyesen, részben vasúton, részben közúton és így tovább. Megjegyzendő továbbá, hogy a rakomány típusától, a rakodás fajtájától függően másmás lesz a szállítási módok alkalmassága és hatékonysága. Az olaj szállítása például különösen előnyös a vízi utakon, ha rendelkezésre állnak olajtankhajók és így tovább. Módszerünkkel megoldhatók és az A vagy C problémákra visszavezethetők

azok a feladatok, melyekben különböző szállítóeszközökkel teljesíthetjünk az adott igényeket, és ezt be szeretnénk fejezni minél rövidebb idő alatt, vagy adott idő alatt a lehető legkevesebb üzemanyag felhasználásával.

Hadd említsünk meg egy további, eltérő jellegű problémát, mely, bár nem vezet közvetlenül egy A, B vagy C típusú problémára, mégis megoldható a módszerünkkel. Ez a szállítási útvonalak választása.



Adottak az A, B, C, D, E pontok (1. ábra), melyeket egymással összeköt egy vasúthálózat. A B-ből D-be menő szállításokat vezethetjük a legrövidebb BED úton, de használhatjuk a többi utat is, nevezetesen a BCD-t és a BAD-t. Adott továbbá a szállításoknak egy táblázata; azaz A-ból B-be el kell szállítani egy adott számú vagont, hasonlóan D-ből C-be egy bizonyos mennyiséget és így tovább. A probléma pedig a következő. Minden útvonalnak meg van adva a maximális kapacitása az adott feltételek mellett (ami persze megváltozhat új szállítási módozatok bevezetésével). Úgy kell elvezetni a kívánt rakományokat a különböző útvonalak mentén, hogy minimális üzemanyagfogyasztással teljesítsük a szállításokat, minimalizáljuk az üresen futó vagonok számát és vegyük figyelembe a vonalak maximális kapacitását. Amint már megmutattuk, ez a probléma is megoldható a módszerünkkel.

Munkájának fogadtatásáról a következőket írja Kantorovics [1987] az emlékirataiban:

Az egyetem azonnal kiadta a vitairatomat, és elküldték ötven tanácsnak. Csak a Szovjetunióban terjesztették, hiszen a világháború kezdete előtti napokban csupán egy ezer példányos kiadványban jelent meg.

A kapott válaszok száma nem volt túl magas. Egy rendkívül érdekes hivatkozást kaptunk a Szovjet Szállítási Tanácstól, ahol a tehervagonok átlagfogyasztására vonatkozó bizonyos optimalizálási problémákat vizsgáltak, és egy jó kritikát kapott a vitairat a 'Faipar' folyóiratban.

1940 elején munkámnak egy tisztán matematikai változatát közöltem a Doklady Akad. Nauk [76]-ban a funkcionálanalízis és az algebra terminológiáját alkalmazva. Ebben nem adtam hivatkozást a korábban kiadott vitairatomra, hiszen a körülményeket figyelembe véve nem akartam, hogy a gyakorlati munkámat az országon kívül hasznosítsák.

1939 tavaszán további beszámolókat tartottam a Politechnikai Intézetben és a Tudósok Házában, de minden alkalommal azzal az ellenérzéssel, hogy a munkám matematikai módszereket használ, és nyugaton a közgazdasági matematika anti-Marxista iskoláiban a matematikát a kapitalizmus védelmében használták. Emiatt, mikor

> a vitairatot írtam, mindent megtettem a „gazdaságos" kifejezés elkerüléséért, és inkább a termelés szervezéséről és tervezéséről beszéltem; a Lagrange multiplikátorok szerepére és jelentésére csak a második függelék végén, és szinte ezópuszi nyelven tértem ki.

(Itt a [76] hivatkozás Kantorovics [1940]-ra vonatkozik.)

Kantorovics megemlíti, hogy a munkája által megnyitott új terület határozottan szerepet játszott a Matematikai Intézet Leningrádi Ágának (LOMI) megalakításában, ahol M.K. Gavurinnal dolgozott ezen a területen. Maguktól kezdtek el foglalkozni egy kérdéssel, amiről hamar kiderült, hogy a vasút dolgozói már vizsgálták a vonatok vontatási tervének problémájaként, ugyanis ezzel lehet kezelni üresen futó vagonok számát, illetve nehéz rakomány vontatását.

Kantorovics és Gavurin kifejlesztettek egy módszert (a „potenciálok" módszerét), amit a „Matematikai módszerek alkalmazása a teherforgalom elemzésének kérdéseire" című cikkükben írtak le. Ezt a cikküket 1941 januárjában mutatták be a Leningrádi Tudósok Házának matematikai szekciójában, de Kantorovics [1987] szerint a publikáció politikai akadályba ütközött:

> A cikk publikációja számos nehézségbe ütközött. Már 1940-ben benyújtottuk a „Vasúti Teherszállítás" folyóiratba, de a matematikusok már említett félelme miatt sem ebben, sem másik folyóiratban nem jelentették meg, az akadémikus A.N. Kolmogorov és a jólismert teherszállítási szakértő és magasrangú vasúti tábornok V.N. Obraztsov támogatása ellenére sem.

(A cikket végülis Kantorovics és Gavurin [1949]-ben publikálták.) Kantorovics [1987] szerint szerencsésen meg tudták fogalmazni a probléma egy absztrakt változatát, amit később Kantorovics publikált [1942]. Ebben a szállítási feladat következő általánosítását vizsgálja.

Legyen R egy kompakt metrikus tér két mértékkel, μ-vel és μ'-vel. Legyen $\mathcal{B}$ az R bizonyos mérhető halmazainak egy családja. Nevezzünk *elmozdításnak* (tömegek elmozdításának) egy olyan $\Psi : \mathcal{B} \times \mathcal{B} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ függvényt, melyre bármely $X \in \mathcal{B}$-re a $\Psi(X,.)$ és $\Psi(.,X)$ leképezések mértékek, melyekre

$$\Psi(X,R) = \mu(X) \quad \text{és} \quad \Psi(R,X) = \mu'(X)$$

minden $X \in \mathcal{B}$-re.

Adott továbbá egy $r : R \times R \longrightarrow \mathbb{R}_+$ folytonos függvény. $r(x,y)$ értékének jelentése az a munka, mellyel egy egységnyi tömeget elmozdíthatunk x-ből y-ba. Egy Ψ elmozdítás *munkáját* így definiáljuk:

$$\int_R \int_R r(x,y)\Psi(d\mu, d\mu'). \tag{3}$$

Kantorovics azzal érvelt, hogy ha létezik egy elmozdítás, akkor létezik egy *minimális* elmozdítás is, azaz egy olyan Ψ, amely minimalizálja (3)-at.

Egy Ψ elmozdítást *potenciálnak* nevezett, ha létezik egy $p : R \to \mathbb{R}$ függvény melyre minden $x, y \in R$ esetén:

(i) $|p(x) - p(y)| \le r(x, y)$;
(ii) $p(y) - p(x) = r(x, y)$ ha $\Psi(U_x, U_y) > 0$
az x és y minden U_x és U_y környezetére.

Kantorovics kimutatta, hogy egy Ψ elmozdítás akkor és csak akkor minimális, ha potenciál. Ebbe a képbe beilleszthető a szállítási feladat $m = n$ esetén úgy, hogy R-nek az $\{1, \dots, n\}$ teret vesszük a diszkrét topológiával. Úgy tűnik Kantorovics r-ről feltételezi a háromszög-egyenlőtlenséget.

Kantorovics megjegyzi, hogy módszere valójában algoritmikus:

> Az éppen bemutatott tétel segítségével könnyen eldönthető, hogy tömegek egy adott elmozdítása minimális vagy sem. Csupán a fentiekben bemutatott eljárással megpróbálunk egy potenciált konstruálni. Ha ez a konstrukció nem sikerül, azaz az adott elmozdítás nem minimális, akkor legalábbis egy módszert kapunk az elmozdítás csökkentésére, mely végül minimálissá válik.

Kantorovics a szállítási feladatot adja alkalmazásnak:

> 1. Probléma. *Fogyasztó állomások elhelyezése termelő állomások figyelembevételével.* Az $A_1, A_2, \cdots, A_m$ állomások, egy vasúthálózattal összekötve, naponta rendre $a_1, a_2, \cdots, a_m$ vagon árut termelnek. Ezen árut ugyanebben a hálózatban a $B_1, B_2, \cdots, B_n$ állomásokban fogyasztják, naponta rendre $b_1, b_2, \cdots, b_n$ vagont, ahol $\sum a_i = \sum b_k$. Adott továbbá az $r_{i,k}$ költsége annak a műveletnek, hogy egyetlen vagont az A_i állomástól a B_k állomásba mozdítsunk el. Rendeljünk hozzá fogyasztó állomásokat a termelő állomásokhoz úgy, hogy minimálisra csökkentsük a szállítás teljes költségét.

Kantorovics [1942] szintén leír egy körmenti javításon alapuló módszert a minimális költségű szállítmányozás megtalálására (ami egy *kapacitásmentes* minimális költségű folyam feladat). Ebben szimmetrikus távolságfüggvényekre szorítkozott.

Kantorovics munkáját a nyugat sokáig nem kísérte figyelemmel. Kantorovics [1942] cikkének utánnyomásának egy bevezetőjében az 1958-as *Management Science*-ben a következő megerősítő megjegyzést teszik:

> Mégis meg kell jegyezni, hogy a cikkben nem adnak meg egy hatékony módszert egy tetszőleges probléma megoldásának tényleges meghatározására. Ilyen megoldási módszerek kifejlesztésének kategóriájában pillanatnyilag az oroszok előtt járunk.

Hitchcock (1941)

Hitchcock és Koopmans Kantorovicstól függetlenül vizsgálták a szállítási feladatot.

Hitchcock [1941] volt talán az első, aki precízen, matematikailag írta le a feladatot. A feladatot Hitchcock a következőképpen értelmezi:

> When several factories supply a product to a number of cities we desire the least costly manner of distribution. Due to freight rates and other matters the cost of a

ton of product to a particular city will vary according to which factory supplies it, and will also vary from city to city. [25]

Hitchcock kimutatta, hogy a minimum felvétetik a megengedett tartomány egy csúcsában, és vázolta a szállítási feladat egy megoldási eljárását, mely nagyban hasonlít a lineáris programozás szimplex módszerére. Tartalmazza a pivotálást (bázisváltozók be- és kilépését), és használja azt a megfigyelést, hogy bizonyos duálváltozók nemnegativitása maga után vonja az optimalitást. Kimutatja, hogy az optimalitást karakterizálja a *kiegészítő eltérések elve.*

Hitchcock egy módszert adott (2) egy kiinduló bázismegoldásának keresésére, amit ma *észak-nyugat szabályként* ismerünk: legyen $x_{1,1} := \min\{b_1, d_1\}$; ha a minimum b_1-ban vétetik fel, akkor legyen $d_1 := d_1 - b_1$, és rekurzíve keressünk egy $x_{i,j}$ bázismegoldást, melyre

$$\sum_{j=1}^{n} x_{i,j} = b_i \text{ minden } i = 2, \ldots, m\text{-re és } \sum_{i=2}^{m} x_{i,j} = d_j \text{ minden } j = 1, \ldots, n\text{-re;}$$

hasonlóan teszünk, ha a minimum d_1-ben vétetik fel. (Az észak-nyugat szabályt szintén leírta Salvemini [1939] és Fréchet [1951] egy statisztikai szövegösszefüggésben, nevezetesen egy korrelációs táblázat kiegészítésére, ha adottak a marginális eloszlások.)

Úgy tűnik, Hitchcock nem vette észre a módszer ciklizálásának lehetőségét, bár mutatott egy példát melyben néhány duálváltozó negatív, a primál megoldás mégis optimális.

Koopmans (1942–1948)

1942 márciusában Koopmanst a Brit Kereskedelmi Hajózási Küldöttség (British Merchant Shipping Mission) alkalmazta statisztikusként, később a Kombinált Hajózási Kiigazító Bizottsághoz (Combined Shipping Adjustment Board, CSAB) került, ami a második világháborúban a kereskedelmi hajózás problémájával foglalkozó brit-amerikai ügynökség volt. Tanárának, J. Tinbergennek (lásd Tinbergen [1934]) hatására tankhajók rakományával és kapacitásával foglalkozott (Koopmans [1939]). Koopmans 1942. augusztusi naplófeljegyzése szerint, míg a Bizottság szerveződött, a statisztikusoknak nem akadt sok dolguk,

and I had a fairly good time working out exchange ratio's between cargoes for various routes, figuring how much could be carried monthly from one route if monthly shipments on another route were reduced by one unit. [26]

[25] Ha több üzem szolgáltat egy terméket néhány városnak, a termék terjesztését szeretnénk a lehető legolcsóbban megoldani. Szállítási díjak és egyéb szempontok miatt az áru tonnánkénti kiszállításának költsége függ az adott várostól, illetve hogy melyik üzemből szállítjuk oda.

[26] és meglehetősen kellemesen töltöttem el az időmet azzal, hogy kidolgoztam bizonyos útvonalakra vonatkozó teherszállítási váltószámokat, illetve kigondoltam, mennyivel lehetne többet szállítani havonta egy adott útvonalon, ha egy másik útvonalon egy egységgel csökkentjük a havi szállítást.

A Bizottságban a hajók konvojokhoz való hozzárendelését tanulmányozta, melyek teljesítik az előírt szállításokat, miközben minimalizálják az üres utak számát. Feleségének emlékiratai (Wanningen Koopmans [1995]) alapján Koopmans a Bizottságban

> he had been appalled by the way the ships were routed. There was a lot of redundancy, no intensive planning. Often a ship returned home in ballast, when with a little effort it could have been rerouted to pick up a load elsewhere. [27]

A poszthumusz kiadott önéletrajzában Koopmans [1992] a következőket írja:

> My direct assignment was to help fit information about losses, deliveries from new construction, and employment of British-controlled and U.S-controlled ships into a unified statement. Even in this humble role I learned a great deal about the difficulties of organizing a large-scale effort under dual control—or rather in this case four-way control, military and civilian cutting across U.S. and U.K. controls. I did my study of optimal routing and the associated shadow costs of transportation on the various routes, expressed in ship days, in August 1942 when an impending redrawing of the lines of administrative control left me temporarily without urgent duties. My memorandum, cited below, was well received in a meeting of the Combined Shipping Adjustment Board (that I did not attend) as an explanation of the "paradoxes of shipping" which were always difficult to explain to higher authority. However, I have no knowledge of any systematic use of my ideas in the combined U.K.-U.S. shipping problems thereafter.[28]

Ebben a felterjesztésben Koopmans [1942] a CSAB Tanács számára kivizsgálta a szállítmányok optimalitásának érzékenységét az igények kismértékű változásaira. Ebben a feljegyzésben (amit először Koopmans Válogatott munkáiban adtak ki), Koopmans még nem adott módszert az optimális szállítmányozás megadására.

Későbbi vizsgálatai a szállítási feladatra vonatkozó „lokális keresés" módszerhez vezették, és kimondta, hogy a módszer elvezet az optimális megoldáshoz. Koopmans 1943-ban érte el ezeket az eredményeket, de a háborús megszorítások miatt csak a háború után publikálta őket (Koopmans [1948], Koopmans és Reiter [1949a,1949b,1951]). Wanningen Koopmans [1995] megjegyzi, hogy a módszer

[27] megdöbbent a hajók beosztásának módján. Számos redundanciát vett észre, és nem volt mélyreható tervezés. Gyakran ballaszttal tért vissza egy hajó, miközben az útiterv kisebb módosításával újabb fuvart is teljesíthetett volna.

[28] A közvetlen megbízásom szerint egységes jelentésbe kellett foglalni a veszteségekkel, új tervezésű útvonalakkal, és a brit, illetve amerikai felségjelű hajók bevetésével kapcsolatos információkat. Még ebben a szerény szerepben is sok tapasztalatot szereztem egy nagymérvű feladat kettős vezetés alatt történő megszervezésének nehézségeiről. Sőt, valójában négyes vezetésről volt itt szó: a brit és amerikai vezetés kettészakadt a hadi és civil érdekek mentén. Vizsgálataimat a különböző útvonalak optimális beosztása és árnyékköltsége alapján végeztem, hajónapokban kifejezve, miközben 1942-ben a kormányzat küszöbön álló átszervezése miatt ideiglenesen kevés sürgős feladatot kaptam. Az alább idézett felterjesztésemet kedvezően fogadta a Bizottság (ahol nem voltam jelen), magyarázatképpen a „hajózás paradoxonjaira", melyeket a felsőbb vezetésnek mindig nehéz elmagyarázni. Ennek ellenére a későbbiekben sincs tudomásom a megfigyeléseim szisztematikus használatáról a kombinált brit-amerikai problémákban.

Tjalling said that it had been well received by the CSAB, but that he doubted that it was ever applied. [29]

Koopmans [1948] a következőket írja:

Let us now for the purpose of argument (since no figures of war experience are available) assume that one particular organization is charged with carrying out a world dry-cargo transportation program corresponding to the actual cargo flows of 1925. How would that organization solve the problem of moving the empty ships economically from where they become available to where they are needed? It seems appropriate to apply a procedure of trial and error whereby one draws tentative lines on the map that link up the surplus areas with the deficit areas, trying to lay out flows of empty ships along these lines in such a way that a minimum of shipping is at any time tied up in empty movements. [30]

Megadja a kapacitások és igények következő rendszerének optimális megoldását:

Net receipt of dry cargo in overseas trade, 1925

Unit: Millions of metric tons per annum

Harbour	Received	Dispatched	Net receipts
New York	23,5	32,7	−9,2
San Francisco	7,2	9,7	−2,5
St. Thomas	10,3	11,5	−1,2
Buenos Aires	7,0	9,6	−2,6
Antofagasta	1,4	4,6	−3,2
Rotterdam	126,4	130,5	−4,1
Lisbon	37,5	17,0	20,5
Athens	28,3	14,4	13,9
Odessa	0,5	4,7	−4,2
Lagos	2,0	2,4	−0,4
Durban	2,1	4,3	−2,2
Bombay	5,0	8,9	−3,9
Singapore	3,6	6,8	−3,2
Yokohama	9,2	3,0	6,2
Sydney	2,8	6,7	−3,9
Total	266,8	266,8	0,0

Ezzel Koopmans egy 3×12-es szállítási feladatot oldott meg.

[29] Tjalling szerint a CSAB Bizottsághoz eljutott, de kétli, hogy a módszert valaha is alkalmazták volna.

[30] Az egyszerűség kedvéért (ugyanis a háborús tapasztalatról nincsenek adataink) tegyük fel, hogy egy bizonyos szervezetet megbíznak a száraz rakományok világszintű szállítmányozásával az 1925-ös tényleges szállítási teljesítmény szintjén. Hogyan oldaná meg ez a szervezet az üresen futó hajók leghatékonyabb eljuttatását az elérhetőségük helyétől arra a pontra, ahol majd szükségessé válnak? Alkalmasnak tűnik a próbálgatós módszer, melynek során egy térképre előzetesen vonalakat rajzolunk a többletes területekből a hiányos területek felé, majd megpróbáljuk ezeken a vonalakon az üres hajók folyamát úgy meghatározni, hogy mindig a lehető legkevesebb járatot köt le a hajók üres mozgatása.

Koopmans kimondta, hogy ha egy megoldáson nem javíthatunk a hajók egy kör mentén történő átirányítása által, akkor a megoldás optimális. Robinson [1950] megfigyelte, hogy ezzel egy véges algoritmust kapunk.

Koopmans ezen felül még azt is megállapítja, hogy léteznek $p_1, \ldots, p_n$ és $q_1, \ldots, q_m$ *potenciálok* melyekre $c_{i,j} \geq p_i - q_j$ minden i, j-re és $c_{i,j} = p_i - q_j$ minden i, j-re, ahol egy optimális x megoldásban $x_{i,j} > 0$.

Koopmans és Reiter [1951] a modell és a módszer közgazdasági következményeit vizsgálta:

> For the sake of definiteness we shall speak in terms of the transportation of cargoes on ocean-going ships. In considering only shipping we do not lose generality of application since ships may be "translated" into trucks, aircraft, or, in first approximation, trains, and ports into the various sorts of terminals. Such translation is possible because all the above examples involve particular types of movable transportation equipment.[31]

Egy lábjegyzetben a gráfok közgazdasági alkalmazását fontolgatják:

> The cultural lag of economic thought in the application of mathematical methods is strikingly illustrated by the fact that linear graphs are making their entrance into transportation theory just about a century after they were first studied in relation to electrical networks, although organized transportation systems are much older than the study of electricity. [32]

Lineáris programozás és a szimplex módszer (1949-1950)

A szállítási feladat döntő fontosságú volt a lineáris programozás általánosabb problémájának kifejlesztésében. A szimplex módszer, melyet 1947-ben G.B. Dantzig fedezett fel, Kantorovics, Hitchcock és Koopmans munkáit terjeszti ki. A cikket 1951-ben adta ki Dantzig [1951b]. Egy másik cikkben Dantzig [1951a] a szimplex módszer egy közvetlen alkalmazását írja le a szállítási feladatra.

Votaw és Orden [1952] korai (a SEAC-on végzett) számítási eredményekről számoltak be, és bizonyítás nélkül kimondták, hogy a szállítási feladatra a szimplex módszer polinomiális idejű (ezt Zadeh [1973] cáfolta meg):

> As to computation time, it should be noted that for moderate size problems, say $m \times n$ up to 500, the time of computation is of the same order of magnitude as the time required to type the initial data. The computation time on a sample computation in which m and n were both 10 was 3 minutes. The time of computation

[31] Az egyértelműség kedvéért az óceánjáró hajók teherszállításáról fogunk beszélni. Azzal, hogy csak hajózásról beszélünk, nem veszítünk semmit a módszer általános alkalmazhatóságából, hiszen a hajókat „lefordíthatjuk" teherautókra, repülőgépekre vagy első közelítésben vonatokra és a kikötőket bármilyen fajta terminálra. Ez a fordítás nyilván megtehető, hiszen a fenti példák mindegyikében valamilyen mozgatható szállítóeszközről van szó.

[32] A matematikai módszerek alkalmazásában a közgazdaságtan kulturális lemaradását mi sem mutatja jobban, mint a tény, hogy a lineáris gráfok körülbelül egy évszázaddal később léptek be a szállítmányozás elméletébe, mint ahogy elektromos hálózatokkal kapcsolatban vizsgálták azokat, pedig a szervezett szállítási rendszerek sokkal régebb óta léteznek, mint az elektromosság elmélete.

> can be shown by study of the computing method and the code to be proportional to $(m+n)^3$. [33]

Hamar elterjedt az ötlet, hogy lineáris programozás segítségével oldjuk meg a szállítási feladatot, de a gyakorlati alkalmazás lehetőségét számos esetben kétségbevonták. Az 1954 májusában, Londonban tartott Lineáris Programozási Konferencián (Conference on Linear Programming) Land [1954] bemutatta eredményeit a lineáris programozás alkalmazásáról a brit kokszipar szénszállítási feladatára.

> The real crux of this piece of research is whether the saving in transport cost exceeds the cost of using linear programming. [34]

Az ezt követő vitában Whitwell a Powers Samas Accounting Machines Ltd.-től megjegyezte, hogy

> that in practice one could have one's ideas of a solution confirmed or, much more frequently, completely upset by taking a couple of managers out to lunch. [35]

A szállítási feladatra további módszereket fejlesztett ki Gleyzal [1955] (egy primál-duál módszert), Ford és Fulkerson [1955,1956a,1956b], Munkres [1957] és Egerváry [1958] (a hozzárendelési feladatra vonatkozó magyar módszer kiterjesztései). Azt is megfigyelték, hogy a feladat speciális esete a minimális költségű folyam feladatnak, amire számos új algoritmust is kifejlesztettek, lásd a 4. fejezetet.

4. Menger tétele és a maximális folyam

Menger tétele (1927)

Menger tétele fontos előzménye az 1950-es években Ford és Fulkerson maximális folyam minimális vágás tételének.

A topológus Karl Menger a *Zur allgemeinen Kurventheorie* (Az általános görbeelméletről) című cikkében (Menger [1927]) a tételét a következőképpen fogalmazza:

> Satz β. Ist K ein kompakter regulär eindimensionaler Raum, welcher zwischen den beiden endlichen Mengen P und Q n-punktig zusammenhängend ist, dann enthält

[33] A futásidőről szólva meg kell jegyeznünk, hogy szerény méretű problémák esetén, mondjuk $m \times n$ legfeljebb 500, a futásidő nagyságrendileg megegyezik a kiinduló adatok beviteléhez szükséges idővel. Egy próbafutás alkalmával, mikor m és n értékét 10-nek vettük, futásidőnek 3 percet kaptunk. A számítási módszer és a programkód vizsgálatával kimutatható, hogy a futásidő arányos $(m+n)^3$-nal.

[34] Ezen kutatás legnagyobb bökkenője, hogy vajon a szállítási költség-megtakarítások fedezik-e a lineáris programozás költségét.

[35] gyakorlatban az ember a megoldási ötletét megerősítheti, vagy még gyakrabban felboríthatja azáltal, hogy néhány menedzserrel elmegy ebédelni.

> K n paarweise fremde Bögen, von denen jeder einen Punkt von P und einen Punkt von Q verbindet.[36]

Az eredmény a gráfok nyelvén így szól: Legyen $G = (V, E)$ egy irányítatlan gráf és legyen $P, Q \subseteq V$. Ekkor a diszjunkt $P - Q$ utak maximális száma egyenlő azon W ponthalmaz minimális elemszámával, melynek minden $P - Q$ úttal van közös pontja.

Menger érdeklődését a témában az általa görbéknek nevezett fogalommal kapcsolatos kutatás keltette fel: egy *görbe* egy olyan X összefüggő, kompakt topologikus tér, mely rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy minden $x \in X$ pont minden környezete tartalmazza x egy olyan környezetét, melynek határa teljesen összefüggéstelen.

Kőnig [1932] megfigyelte, hogy Menger „Satz β"-ra adott bizonyítása hiányos. Menger $|E|$-re vonatkozó indukciót használt, ahol E a G gráf éleinek halmaza. Az indukció abból az esetből indult ki, mikor P és Q valamennyi pontot tartalmazza. Menger nem vette észre, hogy ez valójában egy nemtriviális eset, ugyanis Kőnig [1931] azon tételére vezet, hogy egy $G = (V, E)$ páros gráfban a párosítás maximális mérete egyenlő az éleket lefogó pontok minimális számával. (Kőnig [1932] szerint Menger tudatta vele, hogy tudomása volt a bizonyításának ezen hiányosságáról.)

Az „n-él tétel" eredetére való visszaemlékezésében Menger [1981] a következőket írja:

> In the spring of 1930, I came through Budapest and met there a galaxy of Hungarian mathematicians. In particular, I enjoyed making the acquaintance of Dénes Kőnig, for I greatly admired the work on set theory of his father, the late Julius Kőnig—to this day one of the most significant contributions to the continuum problem—and I had read with interest some of Dénes' papers. Kőnig told me that he was about to finish a book that would include all that was known about graphs. I assured him that such a book would fill a great need; and I brought up my n-Arc Theorem which, having been published as a lemma in a curve-theoretical paper, had not yet come to his attention. Kőnig was greatly interested, but did not believe that the theorem was correct. "This evening," he said to me in parting, "I won't go to sleep before having constructed a counterexample." When we met again the next day he greeted me with the words, "A sleepless night!" and asked me to sketch my proof for him. He then said that he would add to his book a final section devoted to my theorem. This he did; and it is largely thanks to Kőnig's valuable book that the n-Arc Theorem has become widely known among graph theorists.[37]

---

[36] β tétel. Ha K egy kompakt reguláris egydimenziós tér mely két véges ponthalmaz, P és Q között n-pont összefüggő, akkor K-ban létezik n darab diszjunkt görbe, melyek mindegyike egy P-beli és egy Q-beli pontot köt össze.

[37] 1930 tavaszán Budapestre jöttem, és magyar matematikusok galaxisával találkoztam. Különösen örültem, hogy megismerhettem Kőnig Dénest, mivel nagyra tartottam apjának, Kőnig Gyulának halmazelméleti munkásságát – aki máig a legjelentősebb szerző a kontinuum problémában – és érdeklődéssel olvastam Dénes néhány cikkét. Kőnig elmondta, hogy hamarosan befejezi könyvének írását, melyben leír mindent, amit gráfokról tudunk. Biztosítottam róla, hogy egy ilyen könyvre nagy szükségünk lenne; és felhoztam az n-él tételemet, melyet a görbeelméleti cikkem egy lemmájaként közöltem, és eddig elkerülte a figyelmét. Kőniget a tétel nagyon érdekelte, de nem

Menger tételének változatai (1927–1938)

Rutt [1927,1929] az Amerikai Matematikai Társaságnak 1927. május 7-én bemutatott cikkében Kline javaslatára Menger tételének következő változatát adta. Legyen $G = (V, E)$ egy síkgráf és legyen $s, t \in V$. Ekkor a belsőleg diszjunkt $s - t$ utak maximális száma egyenlő azon $V \setminus \{s, t\}$-beli ponthalmaz minimális elemszámával, melynek minden $s - t$ úttal van közös pontja.

Ez a tétel valójában könnyen megkapható Menger tételéből úgy, hogy töröljük az s és t pontokat, és P-t és Q-t rendre az s és t pontok környezetének vesszük. (Rutt hivatkozott Mengerre és egy független bizonyítást adott a tételre.)

Szintén észrevette ezt a konstrukciót Knaster [1930], aki azt is bebizonyította, hogy fordítva, Menger tétele is levezethető Rutt tételéből általános (nem feltétlenül síkbeli) gráfokra. Egy hasonló tételt publikált Nöbeling [1932] felhasználva Menger eredményét.

Whitney [1932] Menger tételének egy következményét mutatta be 1931. február 28-án az Amerikai Matematikai Társaságnak: egy gráf akkor és csak akkor n-összefüggő, ha bármely két pontja összeköthető n belsőleg diszjunkt úttal. Whitney egy közvetlen bizonyítást adott, miközben hivatkozik Menger és Rutt cikkeire is.

Menger tételének további bizonyítását adta Hajós [1934] és Grünwald [1938] (= Gallai) – az utóbbi egy algoritmikus bizonyítást adott, hasonlóan Ford és Fulkerson [1955] maximális folyamot kereső folyam-növelő utas módszeréhez.

Gallai egy lábjegyzetében megjegyezte, hogy a tétel irányított gráfokra is teljesül:

> Die ganze Betrachtung lässt sich auch bei orientierten Graphen durchführen und liefert dann eine Verallgemeinerung des Mengerschen Satzes.[38]

Maximális folyam (1954)

A maximális folyam feladat így szól: adott egy gráf egy s „forrásponttal" és egy t „nyelőponttal", adott továbbá egy c kapacitásfüggvény az élhalmazon, keressünk egy maximális nagyságú folyamot s-ből t-be.

A *Maximális folyam egy hálózatban (Maximal Flow through a Network)* című alapvető cikkükben Ford és Fulkerson [1954] (elsőként 1954. november 19-én egy RAND Reportként megjelentetve) megemlítik, hogy a maximális folyam feladatot T.E. Harris a következőképpen fogalmazta meg:

---

hitte, hogy igaz. „Ma este" – mondta búcsúzásképpen, – „nem alszom, míg egy ellenpéldát nem készítek." Mikor másnap találkoztunk, a következő szavakkal üdvözölt: „Álmatlan éjszaka!" – és megkérte, vázoljam a bizonyításomat. Ezután azt mondta, a könyve végéhez csatol egy fejezetet, mely a tétellel foglalkozik. Ezt meg is tette; így jórészt Kőnig értékes könyvének köszönhető, hogy az n-él tétel széles körben ismertté vált a gráfelmélészek körében.

[38] Az egész levezetés irányított gráfokra is végigvihető, és ezáltal Menger tételének egy általánosítását kapjuk.

> Consider a rail network connecting two cities by way of a number of intermediate cities, where each link of the network has a number assigned to it representing its capacity. Assuming a steady state condition, find a maximal flow from one given city to the other. [39]

Az 1962-es *Hálózati folyamok (Flows in Networks)* című könyvükben Ford és Fulkerson [1962] egy pontosabb hivatkozást adnak a feladat eredetére [40]:

> It was posed to the authors in the spring of 1955 by T.E. Harris, who, in conjunction with General F.S. Ross (Ret.), had formulated a simplified model of railway traffic flow, and pinpointed this particular problem as the central one suggested by the model [11]. [41]

Ford és Fulkerson [11]-es hivatkozása Harris és Ross [1955] *Vasúti hálózatok kapacitásának kiértékelésének alapvető módszerei (Fundamentals of a Method for Evaluating Rail Net Capacities)* címmel, 1955. október 24-i dátummal[42] kiadott titkos jelentése, melyet az amerikai légierőnek írtak. Kérésünkre a Pentagon 1999. május 21-én feloldotta a jelentés titkosítását.

A Harris-Ross jelentés valójában egy viszonylag nagy méretű maximális folyam feladatot old meg a Szovjetunió nyugati részét és Kelet-Európát (a szatelitországokat) összekötő vasúthálózatban. Ford és Fulkerson állításával ellentétben Harris és Ross célja itt nem egy maximális folyam keresése volt, hanem a szovjet vasúthálózat egy minimális vágásának („szűk keresztmetszetének") megtalálása. Idézet:

> Air power is an effective means of interdicting an enemy's rail system, and such usage is a logical and important mission for this Arm.
>
> As in many military operations, however, the success of interdiction depends largely on how complete, accurate, and timely is the commander's information, particularly concerning the effect of his interdiction-program efforts on the enemy's capability to move men and supplies. This information should be available at the time the results are being achieved.
>
> The present paper describes the fundamentals of a method intended to help the specialist who is engaged in estimating railway capabilities, sothat he might more

[39]Tekintsünk egy vasúthálózatot, mely két várost köt össze több másik városon keresztül, ahol minden vonalhoz egy számot rendelünk, mely a vonal kapacitását adja meg. Fetételezve egy állandó állapotot, keressünk meg egy maximális folyamot az egyik városból a másikba.

[40]Felfedezhető egy eltérés Ford és Fulkerson RAND Reportjának dátuma (1954. november 19.) és az idézetben említett dátum között (1955 tavasza).

[41]T.E. Harris 1955 tavaszán vetette fel a szerzőknek, akik F.S. Ross (nyug. tábornok) segítségével a vasútforgalmi folyam egy egyszerűsített modelljét alkották meg, és rámutattak, hogy a modell lényegében ezt problémát sugallja [11].

[42]Könyvükben Ford és Fulkerson tévesen 1956. október 24-re dátumozták a Harris-Ross jelentést.

> readily accomplish this purpose and thus assist the commander and his staff with greater efficiency than is possible at present.[43]

A jelentésben először külön figyelmet fordítottak a vasúthálózat modellezésére: ha minden vasúti csomóponthoz egy csúcsot rendelünk, azzal (mostani célunkhoz) túl finom szerkezetű hálózatot kapnánk. Harris és Ross ezért a „vasúti részlegeket" javasolták (földrajzi alapú szervezeti egységeket) csúcsoknak, és megbecsülték a szomszédos részlegek közti vonalak összkapacitását. 1996-ban Ted Harris így emlékezett vissza (Alexander [1996]):

> We were studying rail transportation in consultation with a retired army general, Frank Ross, who had been chief of the Army's Transportation Corps in Europe. We thought of modeling a rail system as a network. At first it didn't make sense, because there's no reason why the crossing point of two lines should be a special sort of node. But Ross realized that, in the region we were studying, the "divisions" (little administrative districts) should be the nodes. The link between two adjacent nodes represents the total transportation capacity between them. This made a reasonable and manageable model for our rail system. Problems about the effect of cutting links turned out to be linear programming, so we asked for help from George Dantzig and other LP specialists at Rand. [44]

A Harris-Ross jelentés nyomatékosítja, hogy szakértők továbbra is kellenek a modell megalkotásához (ez jó stratégia egy új módszer elfogadtatásához):

> The ability to estimate with relative accuracy the capacity of single railway lines is largely an art. Specialists in this field have no authoritative text (insofar as the authors are informed) to guide their efforts, and very few individuals have either the experience or talent for this type of work. The authors assume that this job will continue to be done by the specialist.[45]

[43] A légierő hatékony eszköz az ellenség vasúthálózatának elvágására, és ennek használata logikus és fontos küldetése hadseregünknek.

Mint minden hadművelet esetén, az elvágás sikere nagyban azon múlik, mennyire teljes, pontos és jól időzített a parancsnok információja, különösen annak tekintetében, hogy az elvágási műveletnek mi a hatása az ellenség utánpótlás- és seregmozgató képességére. Ennek az információnak birtokában kell lennünk már a végrehajtás idején.

Ebben a cikkben leírjuk a vasúti kapacitást felmérő szakértők számára kidolgozott módszer alapjait annak érdekében, hogy minél hamarabb elérjék céljukat, amivel a parancsnok és személyzete számára nagyobb hatékonysággal segíthetnek, mint ahogy ez pillanatnyilag lehetséges.

[44] A vasúti szállítást azzal a Frank Ross nyugalmazott tábornokkal vizsgáltuk, aki korábban a hadsereg európai szállítási alakulatának vezetője volt. A vasúthálózatot először egy hálózatként akartuk modellezni. Először úgy tűnt, nincs értelme, mert nincs okunk két vonal kereszteződését egy speciális pontnak tekintenünk. Ross azonban észrevette, hogy az általunk vizsgált területen a „részlegeket" (kis közigazgatási egységeket) kellene pontoknak tekintenünk. Két szomszédos pontot összekötő vonal a köztük lévő teljes szállítási kapacitást jelenti. Ezzel a vasúthálózatunk egy elfogadható és kezelhető modelljét kaptuk. Vonalak elvágásának feladata valójában egy lineáris programozási feladat, ezért George Dantzig, illetve a Rand többi LP szakértője segítségét kértük.

[45] Egyetlen vasútvonal kapacitását viszonylagos pontossággal megbecsülni javarészt művészet. Ezen terület a szakértőinek (a szerzők információi szerint) nincs semmilyen útmutató anyaguk a munkájuk támogatására, és nagyon kevesen rendelkeznek az egyéni tapasztalattal vagy tehetséggel az ilyesfajta feladatok elvégzéséhez. A szerzők feltételezik, hogy ezt a fajta munkát ezután is szakértők fogák végezni.

A szerzők ezután azzal a naiv elképzeléssel foglalkoznak, hogy egy vasúthálózat csupán összekötő vonalak egy halmaza, és azok elvágása magát a hálózatot is elvágja:

> It is even more difficult and time-consuming to evaluate the capacity of a railway network comprising a multitude of rail lines which have widely varying characteristics. Practices among individuals engaged in this field vary considerably, but all consume a great deal of time. Most, if not all, specialists attack the problem by viewing the railway network as an aggregate of through lines.
>
> The authors contend that the foregoing practice does not portray the full flexibility of a large network. In particular it tends to gloss over the fact that even if every one of a set of independent through lines is made inoperative, there may exist alternative routings which can still move the traffic.
>
> This paper proposes a method that departs from present practices in that it views the network as an aggregate of railway operating divisions. All trackage capacities within the divisions are appraised, and these appraisals form the basis for estimating the capability of railway operating divisions to receive trains from and concurrently pass trains to each neighboring division in 24-hour periods. [46]

Míg a modell felállításához szakértőkre van szükség, annak megoldása rutinfeladat (ha adottak a „munkalapok"):

> The foregoing appraisal (accomplished by the expert) is then used in the preparation of comparatively simple work sheets that will enable relatively inexperienced assistants to compute the results and thus help the expert to provide specific answers to the problems, based on many assumptions, which may be propounded to him. [47]

A probléma megoldására a szerzők az „elárasztási technikát" javasolták. Ez egy olyan heurisztika, melyet A.W. Boldyreff [1955a] egy RAND jelentésben írt le 1955. augusztus 5-én. Ebben mohón a lehető legnagyobb folyamot nyomnak át a hálózaton. Ha egy csúcsban egy „szűk keresztmetszet" keletkezik (azaz több vonat érkezik, mint amennyit továbbíthat a hálózatban), a vonattöbbletet visszaküldik a kiindulópontba. Ez a technika nem garantálja az optimalitást, Boldyreff mégis a következőképpen spekulál:

[46] Még bonyolultabb és időigényesebb egy olyan vasúthálózat kapacitását kiértékelni, mely számos vasútvonalának jellemzői széles skálán változnak. A szakerülettel foglalkozó egyes szakértők munkamódszereiben jelentős eltérés mutatkozik, de valamennyi nagyon sok időt vesz igénybe. A feladat legtöbb, talán valamennyi szakértője úgy tekint a vasúthálózatra, mint összekötő vonalak összesége.

A szerzők megerősitik, hogy az eddig gyakorolt elvvel nem írható le egy nagy hálózat teljes flexibilitása. Hajlamos átsiklani a felett a tény felett, hogy még akkor is, ha minden egyes közvetlen vonal működésképtelenné válik, lehetnek esetleg alternatív útvonalak a forgalom elterelésére.

Ebben a cikkben módszereink eltérnek az eddigi elvtől, ugyanis a hálózatot vasútüzemeltető részlegek összeségének tekinti. Minden egyes részlegen belül felbecsüljük a vágányok kapacitását, és ezen becslések segítségével közelítjük a vasúti részlegek azon kapacitását, hogy egy 24 órás időszakban egyidejűleg mennyi vonatot tudnak fogadni, illetve továbbítani a szomszédos részlegek felé.

[47] A előzetes becsléseit (melyeket a szakértő állít össze) felhasználjuk a viszonylag egyszerű munkalapok előkészítésében, melyekkel már relatíve tapasztalatlan asszisztensek is elvégezhetik a számításokat, és így a szakértő részletes választ adhat a problémára a számára adott feltevések alapján.

> In dealing with the usual railway networks a single flooding, followed by removal of bottlenecks, should lead to a maximal flow. [48]

Az 1955 júniusi ORSA találkozón Boldyreff [1955b] a módszerének egyszerűségéről beszélt:

> The mechanics of the solutions is formulated as a simple game which can be taught to a ten-year-old boy in a few minutes. [49]

Ford és Fulkerson [1955] jól ismert növelőutas folyamalgoritmusukat, mely garantálja az optimalitást, még ugyanabban az évben (1955. december 29-én) egy RAND jelentésben publikálták. A szimplex algoritmusról (melyet a maximális folyam feladatra Ford és Fulkerson [1954] javasoltak) Harris és Ross megjegyzi:

> The calculation would be cumbersome; and, even if it could be performed, sufficiently accurate data could not be obtained to justify such detail. [50]

A Harris-Ross jelentésben az elárasztási technikát használták a szovjet és kelet-európai vasúthálózat egy modelljére. Adatokat a CIA szovjet és kelet-európai vasúthálózatról szóló titkos jelentéseiből merítettek. A vasúti részlegek összevonása után a hálózatnak 44 csúcsa és 105 (irányítatlan) éle volt.

Az elárasztási technika alkalmazását a jelentés függelékében lépésről lépésre mutatják be számos vasúti diagram kíséretében. (A munkalapokat is mellékelik, hogy a kapacitások későbbi változását is figyelembe vehessék.) Így egy 163.000 tonna nagyságú folyamot kaptak szovjet forrásokból a kelet-európai szatelit célpontokba (Lengyelország, Csehszlovákia, Ausztria, NDK), továbbá egy vágást, melynek kapacitása szintén 163.000 tonna. (Ezt a vágást „The bottleneck" – „szűk keresztmetszet" – felirat jelzi a 2. ábrán a Harris-Ross jelentésben.) A folyamérték és a vágás kapacitása egyenlő, így ezek optimálisak.

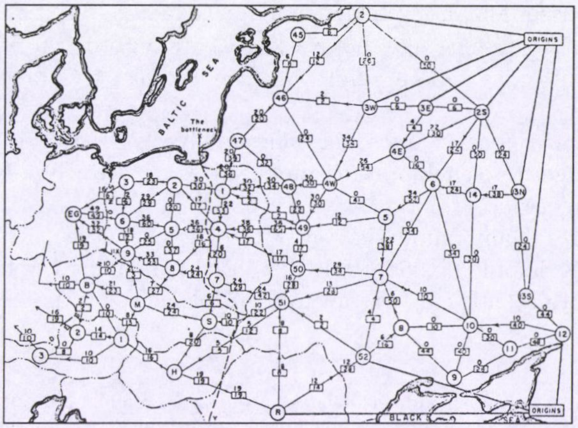
A maximális folyam minimális vágás tétel

Az 1954. november 19-i RAND jelentésben Ford és Fulkerson [1954] (miután definiálták a maximális folyam feladatot, és erre a szimplex módszert javasolják) megadták az irányítatlan gráfokra vonatkozó maximális folyam minimális vágás tételt, mely kimondja, hogy a maximális folyam nagysága egyenlő a forrást és nyelőt elvágó minimális vágás kapacitásával. Bizonyításuk nem konstruktív, de síkgráf esetén, ha a forrás és nyelő a külső tartomány határán helyezkedik el, egy

[48] Ha egy szokásos vasúthálózattal foglalkozunk, egyetlen elárasztás, majd a szűk keresztmetszetek felszámolása elvezet egy maximális folyamhoz.

[49] A megoldás mechanikáját meg lehet fogalmazni egy egyszerű játékként, melyet egy tízévesnek pár perc alatt meg lehet tanítani.

[50] A számolás fáradságos lenne; és még ha végig is lehetne vinni, nem kapnánk elég pontos értékeket a részletek ellenőrzésére.



2. ábra. Harris és Ross [1955]-ból idézve: Nyugat-Szovjetunió és Kelet-Európa vasúthálózatának sematikus diagramja alapján a maximális folyam értéke 163.000 tonna Oroszországból Kelet-Európába, és a „The bottleneck" felirat egy 163.000 tonna kapacitású vágást jelez.

polinomidejű konstruktív módszert adnak. Robacker [1955a] egy 1955. május 26-i jelentésében kimutatta, hogy a maximális folyam minimális vágás tétel levezethető Menger tételének pontdiszjunkt változatából is.

Ford és Fulkerson [1955] megfigyelték, hogy a maximális folyam minimális vágás tétel teljesül irányított gráfokban is. Dantzig és Fulkerson [1955] bebizonyították Dantzig [1951a] szállítási feladatra vonatkozó egészértékűségi eredményeit a folyamfeladatra általánosítva, hogy ha a kapacitások egészek, akkor létezik egész maximális folyam (az „egészértékűségi tétel"). Ebből Menger tételének irányított éldiszjunkt változata következik.

Kotzig is bebizonyította az éldiszjunkt Menger-tételt, de irányítatlan gráfokra szorítkozott. Az akadémiai doktori disszertációjában Kotzig [1956] $\sigma_G(u, v)$-vel jelöli egy irányítatlan G gráf u, v pontjai közti él-vágások minimális elemszámát. A következőt állítja:

> Veta 35. Nech G je l'ubovol'ný graf obsahujúci uzly $u \neq v$, o ktorých platí $\sigma_G(u, v) = k > 0$, potom existuje systém ciest $\{C_1, C_2, \ldots, C_k\}$ taký že každa cesta spojuje uzly u, v a žiadne dve rôzne cesty systému nemajú spoločnej hrany. Takýto systém ciest v G existuje len vtedy, keď je $\sigma_G(u, v) \geq k$.[51]

[51] 35. tétel. Legyen G egy tetszőleges gráf, mely tartalmazza az $u \neq v$ pontokat, és melyekre $\sigma_G(u, v) = k > 0$, ekkor létezik utaknak egy $\{C_1, C_2, ..., C_k\}$ rendszere, melyek mindegyike az u, v pontokat köti össze, és semelyik két különböző útnak nincs közös éle. Ilyen útrendszer G-ben csak $\sigma_G(u, v) \geq k$ esetén létezik.

A megoldási módszere az, hogy tekintsünk egy a vágásfeltételt teljesítő minimális gráfot, majd irányítsuk meg úgy, hogy a kapott irányított gráf minden pontjának (kivéve u és v) kifoka egyenlő a befokával, míg u kifoka k és befoka 0. Ez meg is adja az utakat.

Bár disszertációjában számos alkalommal hivatkozik Kőnig könyvére, melyben szerepel Menger tételének pontdiszjunkt változata, Kotzig nem kapcsolta össze eredményét Mengerével.

A maximális folyam minimális vágás tétel egy alternatív bizonyítását adta Elias, Feinstein és Shannon [1956] („a PGIT által 1956. július 11-én átvett kézirat"), melyben azt állítják, hogy az eredményt már ismerték a kommunikációelmélet kutatói.

> This theorem may appear almost obvious on physical grounds and appears to have been accepted without proof for some time by workers in communication theory. However, while the fact that this flow cannot be exceeded is indeed almost trivial, the fact that it can actually be achieved is by no means obvious. We understand that proofs of the theorem have been given by Ford and Fulkerson and Fulkerson and Dantzig. The following proof is relatively simple, and we believe different in principle. [52]

Elias, Feinstein és Shannon bizonyítása egy hasonló redukciós technikán alapszik, mint amit Menger [1927] használt a tételének bizonyításában.

Minimális költségű folyam

Dantzig és Fulkerson [1954] vizsgálták a *minimális költségű* folyam feladatot egy kezdetleges formában, hogy meghatározzák egy adott menetrend teljesítéséhez elegendő legkevesebb tankhajó számát. Bartlett [1957], illetve Bartlett és Charnes [1957] hasonló módszereket adtak egy adott menetrend futtatásához szükséges legkisebb vasúti állomány meghatározására.

Orden [1955] és Prager [1957] megjegyezték, hogy a minimális költségű folyam ekvivalens a kapacitásos szállítási feladattal.

A minimális költségű folyam feladatra elemi kombinatorikus algoritmust adott Ford és Fulkerson [1957] (bár álcázott formában). Ebben ismételten a reziduális gráf nulla hosszú $s-t$ útjait keresik, miután a költségeket egy potenciállal való eltolással nemnegatívvá teszik. Ha nincs nemnegatív út, akkor a potenciált módosítjuk. Ennek a módszernek a bonyolultságát vizsgálja egy jelentésben Fulkerson [1958].

[52] Ez a tétel majdnem nyilvánvalónak tűnik fizikai megfontolások alapján, és a kommunikációelmélet kutatói már jó ideje elfogadták bizonyítás nélkül. Bár az a tény, hogy ezen folyamérték nem növelhető, szinte triviális, a tény, hogy valójában el is érhető korántsem olyan nyilvánvaló. Világos, hogy ennek a tételnek bizonyítását adta Ford és Fulkerson és Fulkerson és Dantzig. A következő bizonyítás viszonylag egyszerű, és úgy gondoljuk eltérő elven alapszik.

5. Minimális költségű feszítőfák

A minimális költségű feszítőfa keresésének problémája számos alkalmazott területen bukkan fel: út, energia, ill. kommunikációs hálózatok építésekor vagy antropológiai és rendszertani adatok klaszterezésekor.

Graham és Hell [1985] cikke a minimális költségű feszítőfa algoritmusok történelmileg részletes áttekintését adja, sőt, a korabeli cikkekből számos (lefordított) szemelvényt is tartalmaz. Ebből az adatgyűjtésből táplálkozik az alábbi rész.

Borůvka (1926)

Úgy tűnik, elsőként Borůvka [1926a] vizsgálta a minimális költségű feszítőfa problémát, ugyanis az 1920-as évek elején a brnoi Nyugatmorva Elektromos Művek azt kérte, hogy a villamoshálózatot a lehető leggazdaságosabbra építsék (lásd Borůvka [1977]).

Borůvka a következőképpen fogalmazta meg a problémát:

> In dieser Arbeit löse ich folgendes Problem:
> Es möge eine Matrix der bis auf die Bedingungen $r_{\alpha\alpha} = 0$, $r_{\alpha\beta} = r_{\beta\alpha}$ positiven und von einander verschiedenen Zahlen $r_{\alpha\beta}$ $(\alpha, \beta = 1, 2, \ldots n; n \geq 2)$ gegeben sein.
>
> Aus dieser ist eine Gruppe von einander und von Null verschiedener Zahlen auszuwählen, so dass
>
> 1° in ihr zu zwei willkürlich gewählten natürlichen Zahlen p_1, p_2 $(\leq n)$ eine Teilgruppe von der Gestalt
>
> $$r_{p_1c_2}, r_{c_2c_3}, r_{c_3c_4}, \ldots r_{c_{q-2}c_{q-1}}, r_{c_{q-1}p_2}$$
>
> existiere,
> 2° die Summe ihrer Glieder kleiner sei als die Summe der Glieder irgendeiner anderen, der Bedingung 1° genügenden Gruppe von einander und von Null verschiedenen Zahlen. [53]

Tehát Borůvka kimondta, hogy a megtalált feszítőfa az egyedüli minimális költségű.

Borůvka a *párhuzamos egybeolvasztás* módszerét javasolta: minden egyes komponenst kössünk össze a hozzá legközelebbi komponenssel és ezt iteráljuk. Bár a leírás némiképp komplikált, az ezt követő cikkben Borůvkának [1926b] sikerült egyszerűbben leírnia a módszert.

---

[53] Jelen munkában az alábbi problémát oldom meg:
Egy különböző pozitív $r_{\alpha\beta}$ $(\alpha, \beta = 1, 2 \ldots n;\ n \geq 2)$ számokból álló mátrix lehet megadva az $r_{\alpha\alpha} = 0$, $r_{\alpha\beta} = r_{\beta\alpha}$ feltételek mellett.
Egymástól és nullától különböző számok csoportját kell ezekből kiválasztani úgy, hogy
1° tetszőlegesen választott p_1, p_2 $(\leq n)$ természetes számokhoz létezik ennek egy

$$r_{p_1c_2}, r_{c_2c_3}, r_{c_3c_4}, \ldots r_{c_{q-2}c_{q-1}}, r_{c_{q-1}p_2},$$

részcsoportja,
2° a tagjai összege kevesebb legyen bármely más, egymástól és nullától különböző számokból álló, 1° feltételt kielégítő csoport tagjainak összegénél.

Jarník (1929)

Jarník 1929. február 12-én Borůvkához írt levelében, a „Borůvka által tárgyalt minimumprobléma új megoldását" tárgyalja.

Az „új megoldás" lényege a *fanövelés*: nyilvántartunk egy fát a csúcsok részhalmazán, és ezt iteratív módon úgy növeljük, hogy egy legolcsóbb éllel a fához egy fán kívüli pontot csatolunk.

Jarník [1930] publikálta a levél egy kivonatát. A német összefoglalóból idézünk:

> a_1 ist eine beliebige unter den Zahlen $1, 2, \ldots, n$. a_2 ist durch
>
> $$r_{a_1,a_2} = \min_{\substack{l = 1,2,\ldots,n \\ l \neq a_1}} r_{a_1,l}$$
>
> definiert. Wenn $2 \leq k < n$ und wenn $[a_1, a_2], \ldots, [a_{2k-3}, a_{2k-2}]$ bereits bestimmt sind, so wird $[a_{2k-1}, a_{2k}]$ durch
>
> $$r_{a_{2k-1},a_{2k}} = \min r_{i,j},$$
>
> definiert, wo i alle Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_{2k-2}$, j aber alle übrigen von den Zahlen $1, 2, \ldots, n$ durchläuft.[54]

(Korte és Nešetřil [2001] cikke tartalmazza Jarník [1930] cikkének (és a Steiner-fákról szóló Jarník–Kössler [1934] cikknek) a részletes tárgyalását és angol fordítását.)

Choquet [1938] (bizonyítás nélkül) ugyancsak leírta a párhuzamos egybeolvasztást, csakúgy, mint Florek, Łukaszewicz, Perkal, Steinhaus és Zubrzycki [1951a,1951b] is. Choquet-t az útrendszerek konstrukciója érdekelte:

> Étant donné n villes du plan, il s'agit de trouver un réseau de routes permettant d'aller d'une quelconque de ces villes à une autre et tel que:
> 1° la longueur globale du réseau soit minimum;
> 2° exception faite des villes, on ne peut partir d'aucun point dans plus de deux directions, afin d'assurer la sûreté de la circulation; ceci entraîne, par exemple, que lorsque deux routes semblent se croiser en un point qui n'est pas une ville, elles passent en fait l'une au-dessus de l'autre et ne communiquent pas entre elles en ce point, qu'on appellera faux-croisement.[55]

---

[54] a_1 az $1, 2, \ldots n$ számok közül tetszőleges. a_2-t a

$$r_{a_1,a_2} = \min_{\substack{l = 1,2,\ldots,n \\ l \neq a_1}} r_{a_1,l}.$$

egyenlőség definiálja. Ha $2 \leq k < n$ és ha $[a_1, a_2], \ldots, [a_{2k-3}, a_{2k-2}]$-t már meghatároztuk, akkor $[a_{2k-1}, a_{2k}]$-t a

$$r_{a_{2k-1},a_{2k}} = \min r_{i,j},$$

definíció adja meg, ahol i az $a_1, a_2, \ldots, a_{2k-2}$ számokon, j pedig az $1, 2, \ldots, n$ számokból megmaradó számokon fut végig.

[55] Adott a síkon n város, a cél, hogy olyan úthálózatot találjunk, amelyen ezen városok bármelyikéből eljuthatunk egy másikba, és amelyre:

Choquet volt talán az első, akit izgatott a módszer bonyolultsága:

> Le réseau cherché sera tracé après $2n$ opérations élémentaires au plus, en appelant opération élémentaire la recherche du continu le plus voisin d'un continu donné.[56]

Florek és szerzőtársai antropológiai, ill. rendszertani klaszterezést végeztek. A módszert az alábbi esetekre alkalmazták:

> 1° the capitals of Poland's provinces, 2° two collections of excavated skulls, 3° 42 archeological finds, 4° the liverworts of Silesian Beskid mountains with forests as their background, and to the forests of Silesian Beskid mountains with the liverworts appearing in them as their background.[57]

Minimális költségű feszítőfák (1956–1959)

1956 és 1959 között számos cikk közölt a minimális költségű feszítőfa problémát megoldó módszert. Ezek közül több átfedi egymást, ill. Borůvka és Jarník cikkeit, de jónéhány új és általánosabb módszer is napvilágot látott.

Kruskal [1956], akit az utazó ügynök problémára való alkalmazás érdekelt, Borůvka első cikke nyomán a következőket írta (az [1] hivatkozás Borůvka [1926a] cikkére utal):

> Several years ago a typewritten translation (of obscure origin) of [1] raised some interest. This paper is devoted to the following theorem: If a (finite) connected graph has a positive real number attached to each edge (the *length* of the edge), and if these lengths are all distinct, then among the spanning trees (German: Gerüst) of the graph there is only one, the sum of whose edges is a minimum; that is, the shortest spanning tree of the graph is unique. (Actually in [1] this theorem is stated and proved in terms of the "matrix of lengths" of the graph, that is, the matrix $\|a_{ij}\|$ where a_{ij} is the length of the edge connecting vertices i and j. Of course, it is assumed that $a_{ij} = a_{ji}$ and that $a_{ii} = 0$ for all i and j.)
>
> The proof in [1] is based on a not unreasonable method of constructing a spanning subtree of minimum length. It is in this construction that the interest largely lies, for it is a solution to a problem (Problem 1 below) which on the surface is closely related to one version (Problem 2 below) of the well-known traveling salesman problem.
>
> PROBLEM 1. Give a practical method for constructing a spanning subtree of minimum length.

1° az hálózat összhossza minimális;
2° a városok kivételével egyetlen pontba sem lehet kettőnél több irányból érkezni azért, hogy biztosítsuk a forgalmat; ez maga után vonja például azt is, hogy amikor két út úgy tűnik, hogy keresztezi egymást, akkor valójában egymás felett haladnak el, és nem lehet egyikről a másikra áttérni, amit hamis kereszteződésnek hívunk.

[56] A keresett hálózatot legfeljebb $2n$ elemi művelet végrehajtása után megtaláljuk, ahol elemi műveletnek egy kontinuumnak egy másik kontinuumhoz legközelebb eső pontjának meghatározását hívjuk.

[57] 1° Lengyelország megyeszékhelyeire, 2° két ásatásból származó koponyákra, 3° 42 régészeti leletre, 4° a sziléziai Beszkidek erdeiben megjelenő májmohatelepekre és a sziléziai Beszkidek májmohát tartalmazó erdeire. (A májmohák a lombosmohákkal és a becős mohákkal alkotják a mohák három törzsét (*a fordító megjegyzése*).)

> PROBLEM 2. Give a practical method for constructing an unbranched spanning subtree of minimum length.
>
> The construction in [1] is unnecessarily elaborate. In the present paper I give several simpler constructions which solve Problem 1, and I show how one of these constructions may be used to prove the theorem of [1]. Probably it is true that any construction which solves Problem 1 may be used to prove this theorem.[58]

Kruskal eztán három algoritmust ismertet:

A konstrukció: ismételten válasszuk mindig a legrövidebb olyan élt, amit úgy adhatunk az eddigiekhez, hogy ne teremtsünk kört;

B konstrukció: rögzítsünk egy U csúcshalmazt, és ismételten válasszuk azt a legrövidebb élt, amelyik valamelyik U-t metsző komponensből kilép;

A′ konstrukció: ismételten töröljük a leghosszabb élt, ami anélkül törölhető, hogy a gráf szétesne.

Visszaemlékezéseiben Kruskal [1997] kitér Borůvka módszerére:

> In one way, the method of construction was very elegant. In another way, however, it was unnecessarily complicated. A goal which has always been important to me is to find simpler ways to describe complicated ideas, and that is all I tried to do here. I simplified the construction down to its essence, but it seems to me that the idea of Professor Borůvka's method is still present in my version.[59]

Prim [1957] a Bell Laboratórium munkatársaként a legkisebb összhosszú telefonhálózat megtalálásán dolgozott, és egy másik cikket közölt a minimális költségű feszítőfa problémáról.

---

[58] Jópár éve az [1] cikk (homályos eredetű) gépelt fordítása keltett érdeklődést. A cikket a következő tételnek szentelték: ha egy (véges) összefüggő gráf minden éléhez egy pozitív valós számot (az él *hosszát*) rendeljük, és ha ezek a hosszok különbözőek, akkor a feszítőfák (németül Gerüst-ök) között létezik egyetlenegy, amely éleinek összege minimális, azaz, a gráf legrövidebb (*értsd: minimális költségű (*a fordító megjegyzése*)*) feszítőfája egyértelmű. (E tételt [1]-ben tulajdonképpen a gráf „mátrixhosszainak" nyelvén mondták ki és bizonyították, azaz az $\|a_{ij}\|$ mátrixon, ahol a_{ij} az i csúcsot a j csúccsal összekötő él hossza. Természetesen feltesszük, hogy $a_{ij} = a_{ji}$, és hogy $a_{ii} = 0$ minden i-re és j-re.)

Az [1]-beli bizonyítás egy legrövidebb feszítőfa nem ésszerűtlen módszerrel történő konstrukcióján alapszik. Minket jórészt ez a konstrukció érdekel, ugyanis ez megoldás arra a problémára (az alábbi 1. problémára), amelyik első ránézésre a jól ismert utazó ügynök probléma (az alábbi 2. probléma) közeli rokona.

1. PROBLÉMA. Adjunk hatékony módszert a minimális összhosszú feszítőfa elkészítésére.

2. PROBLÉMA. Adjunk hatékony módszert a minimális összhosszú, elágazásmentes feszítőfa elkészítésére.

Az [1]-beli konstrukció szükségtelenül bonyolult. Jelen cikkben számos egyszerűbb konstrukciót adok, amelyek megoldják az 1. problémát, és megmutatom, hogyan lehet az [1]-ben szereplő tételt igazolni ezen konstrukciók egyikével. Valószínűleg az is igaz, hogy bármely, az 1. problémát megoldó konstrukció segítségével igazolható ez a tétel.

[59] A konstrukció módszere egyfelől igen elegáns. Másrészt viszont szükségtelenül bonyolult. Itt is az a cél vezérelt, ami mindig is fontos volt számomra, azaz hogy bonyolult fogalmakat egyszerűbben írjunk le. A konstrukciót egészen az alapokig egyszerűsítettem, azonban úgy tűnik, Borůvka professzor módszerének eszméje továbbra is jelen van az általam megadott változatban.

A problem of inherent interest in the planning of large-scale communication, distribution and transportation networks also arises in connection with the current rate structure for Bell System leased-line services.[60]

Prim az alábbi algoritmust írta le: válasszuk ki az aktuális erdő egy komponensét, és kössük össze a hozzá legközelebbivel. Prim megfigyelte, hogy a Kruskal-féle A és B konstrukciók mindegyike ennek speciális esete.

Prim azt is észrevette, hogy egy feszítőfa minimális költségű volta csupán az élhosszok nagyságviszonyán múlik.

The *shortest spanning subtree* of a connected labelled graph also minimizes all increasing symmetric functions, and maximizes all decreasing symmetric functions, of the edge "lengths."[61]

Prim a fanövelő módszer mellett érvelt, annak programozhatósága miatt:

This computational procedure is easily programmed for an automatic computer so as to handle quite large-scale problems. One of its advantages is its avoidance of checks for closed cycles and connectedness. Another is that it never requires access to more than two rows of distance data at a time—no matter how large the problem.[62]

A Prim-féle algoritmus futásideje $O(n^2)$.

Loberman és Weinberger [1957] cikkének motivációja vezetékek összekapcsolása volt.

In the construction of a digital computer in which high-frequency circuitry is used, it is desirable and often necessary when making connections between terminals to minimize the total wire length in order to reduce the capacitance and delay-line effects of long wire leads.[63]

A szerzők megfogalmazták a fanövelés és az *erdőegyesítés* módszereit. Az utóbbiban nyilvántartunk egy erdőt és ismételten egy legrövidebb éllel kötjük össze (egyesítjük) annak két (különböző) komponensét.

Loberman és Weinberger csak az algoritmusuk leírását követően vették észre, hogy Kruskal [1956] ezt már korábban megtette:

[60] A nagyléptékű kommunikációs, elosztó, ill. szállítási hálózatok tervezésének sokat vizsgált problémája szintén felmerül a Bell System bérelt vonalainak jelenlegi díjstruktúrájával kapcsolatban.

[61] Egy összefüggő élsúlyozott gráf minimális költségű feszítőfája ugyancsak minimalizál minden, az élhosszokon értelmezett szimmetrikus növekedő függvényt és maximalizál minden, az élhosszokon értelmezett szimmetrikus, csökkenő függvényt.

[62] Ez a számítási eljárás könnyen elvégeztethető automatikus számítógéppel, ily módon egészen nagyléptékű problémák is kezelhetőek. Ennek egyik előnye, hogy elkerüli a zárt körök és az összefüggőség ellenőrzését. Egy másik pedig, hogy egyszerre sohasem kell a távolságadatok közül kettőnél több sorhoz hozzáférni, függetlenül attól, hogy milyen nagy a probléma.

[63] Nagyfrekvenciájú áramköröket tartalmazó digitális számítógépek készítésekor célszerű és gyakran elengedhetetlen, hogy a hosszú vezetékek használata nyomán fellépő, nem kívánt kapacitás és késleltetés csökkentése érdekében az terminálokat összekötő huzalozás összhosszát minimalizáljuk.

> However, it is felt that the more detailed implementation and general proofs of the procedures justify this paper.[64]

A szerzők ezt követően leírták, hogyan alkalmazható Kruskal módszere, különös tekintettel az erdőegyesítésre. És akárcsak Prim, megfigyelték, hogy a feszítőfa optimális volta csupán az élhosszok sorrendjétől, és nem azok pontos értékétől függ.

> After the initial sorting into a list where the branches are of monotonically increasing length, the actual value of the length of any branch no longer appears explicitly in the subsequent manipulations. As a result, some other parameter such as the square of the length could have been used. More generally, the same minimum tree will persist for all variations in branch lengths that do not disturb the original relative order.[65]

Dijkstra [1959]-ben ismételten megfogalmazta a fanövelő módszert, amit (számítási okokból) jobbnak tartott a Kruskal, ill. a Loberman és Weinberger által megadott módszereknél. Dijkstra figyelmét elkerülte, hogy az utóbbi szerzők szintén leírták a fanövelés módszerét.

> The solution given here is to be preferred to the solution given by J.B. KRUSKAL [*1*] and those given by H. LOBERMAN and A. WEINBERGER [*2*]. In their solutions all the—possibly $\frac{1}{2}n(n-1)$—branches are first of all sorted according to length. Even if the length of the branches is a computable function of the node coordinates, their methods demand that data for all branches are stored simultaneously.[66]

(Dijkstra [1] és [2] hivatkozásai a Kruskal [1956] és a Loberman-Weinberger [1957] cikkek.) Dijkstra szintén leírt egy $O(n^2)$ implementációt.

Matroidos kiterjesztés: Rado (1957)

Rado [1957] vette észre, hogy Borůvka és Kruskal módszerei kiterjeszthetőek a minimális súlyú matroidbázis megkeresésére. Elsőként azt mutatta meg, hogy ha a matroid elemein $<$ egy lineáris rendezés, akkor egyértelműen létezik olyan minimális súlyú $\{b_1, \ldots, b_r\}$ bázis (ahol $b_1 < b_2 < \cdots < b_r$), melyre minden $i = 1, \ldots, r$ esetén az összes $s < b_i$ elem a $\mathrm{span}(\{b_1, \ldots, b_{i-1}\})$ lezártba esik. Rado szerint ez „elvezet" Borůvka [1926a] és Kruskal [1956] eredményeihez.

[64] Mindazonáltal úgy hisszük, hogy a jelen cikk mellett szól az implementáció részletesebb leírása és az eljárások általánosabb bizonyítása.

[65] Az ágak kezdeti, hossz szerinti monoton növekvő listába rendezése után következő lépésekben egyetlen konkrét ághossz sem jelenik meg. Következésképp használhatnánk más paramétereket, mint például a hosszok négyzeteit. Általánosabban, az optimális fa ugyanaz marad mindazon ághosszvariációkra, amelyekben a nagyságsorrend nem sérti az eredetit.

[66] Az itt adott megoldás szerencsésebb mint J.B. KRUSKALé [*1*], ill. mint H. LOBERMAN és A. WEINBERGER megoldásai [*2*]. Az ő megoldásaikban elsőként az összes – akár $\frac{1}{2}n(n-1)$ – ág mindegyikét rendezzük a hosszuk szerint. Még abban az esetben is, ha az ághosszok a csúcsok koordinátáiból kiszámítható függvények, a módszerek megkövetelik, hogy egyszerre tároljuk az összes ág adatait.

6. Legrövidebb út

A legrövidebb út problémájának matematikai vizsgálata viszonylag későn kezdődött, legalábbis más kombinatorikus optimalizálási problémákhoz képest, mint például a minimális súlyú feszítő fa, a hozzárendelési vagy a szállítási feladat. Ez talán annak tudható be, hogy a feladat meglehetősen elemi és egyszerű, amit az is mutat, hogy abban a pillanatban, ahogy a feladat az érdeklődés középpontjába került, egymástól függetlenül többen dolgoztak ki rá hasonló módszereket.

A feladat mégis komoly nehézségeket okozott. Sokáig heurisztikus, nem optimális megközelítéseket alkalmaztak (vö. például Rosenfeld [1956], aki heurisztikus megközelítést adott optimális közúti szállítási útvonalterv készítéséhez egy adott útvonalhálózatban).

Az útkeresés, speciálisan keresés egy labirintusban a klasszikus gráfelmélet feladatai közé tartozik, a klasszikus referenciák Wiener [1873], Lucas [1882] (aki C.P. Trémaux egy módszerét írja le) és Tarry [1895] – lásd Biggs, Lloyd és Wilson [1976]. Ezek alkotják a mélységi keresési módszerek alapjait.

Útvonalkeresési problémákat az 1950-es években más összefüggésben is vizsgálták: keressünk második legrövidebb útvonalat arra az esetre, ha a legrövidebb út használhatatlanná válik (alternatív útvonal). Ez alkalmazható az autópályahasználatra (Trueblood [1952]), de akár a telefonhívások továbbítására is. Akkoriban az Egyesült Államokban automatizálták a távolsági hívásokat, és a telefonhálózatban az alternatív útvonalat automatikusan kellett megtalálni az USA államok közti hívásokhoz. Jacobitti-t [1955] idézve:

> When a telephone customer makes a long-distance call, the major problem facing the operator is how to get the call to its destination. In some cases, each toll operator has two main routes by which the call can be started towards this destination. The first-choice route, of course, is the most direct route. If this is busy, the second choice is made, followed by other available choices at the operator's discretion. When telephone operators are concerned with such a call, they can exercise choice between alternate routes. But when operator or customer toll dialing is considered, the choice of routes has to be left to a machine. Since the "intelligence" of a machine is limited to previously "programmed" operations, the choice of routes has to be decided upon, and incorporated in, an automatic alternate routing arrangement.[67]

[67]Amikor a felhasználó távolsági hívást kezdeményez, a legnehezebb probléma az operátor számára azt meghatározni, hogy hogyan kösse össze a hívót a célállomással. Esetenként minden egyes operátornak két útvonal áll rendelkezésére, amelyek mentén elindíthatja a hívást a célállomás irányába. Az első lehetőség természetesen a legközvetlenebb útvonal. Amennyiben ez foglalt, a másodikat kell választani: a további választások az operátorra vannak bízva. Amikor operátorok kezelnek egy hívást, akkor ez az alternatív útvonalak közti választás teljesen magától értetődik. Ha azonban az operátor vagy a felhasználó csak úgy tárcsázza a hívást, akkor ezt a döntést egy gépre kell hagynunk. Mivel a gép „intelligenciája" előre „beprogramozott" műveletekre korlátozódik, az útvonalválasztást a beépített útvonalválasztó rendszernek automatikusan kell elvégeznie.

Mátrixmódszerek a legrövidebb utakra egységnyi élsúlyok esetén (1946–1953)

Egyes kutatók mátrixmódszereket fejlesztettek ki bizonyos összefüggések vizsgálatára hálózatokban, mint például egy reláció tranzitív lezártjának meghatározására; azaz azon s, t pontpárok meghatározására egy irányított gráfban, amelyekre t elérhető s-ből. Ezeket a módszereket azért vizsgálták, mert alkalmazhatók a kommunikációs hálózatokban (mint amilyenek például a neurális hálózatok) vagy az állatok szociológiájában (például csípésjog[68]).

A mátrixmódszerek az irányított gráfot mátrixszal reprezentálják, majd mátrixszorzások sorozatával kiszámítják a tranzitív lezártat. Ezt Landahl és Runge [1946], Landahl [1947], Luce és Perry [1949], Luce [1950], Lunc [1950,1952] és A. Shimbel tanulmányozták.

Shimbel érdeklődését a mátrixmódszerek iránt a neurális hálózatokban való alkalmazhatóságuk motiválta. Mátrixok segítségével elemezte, hogy egy hálózatban mely helyszínek tudnak egymással kommunikálni és ez mennyi időt igényel. Jelöljük S -el azt a $0-1$ mátrixot, amelyben $S_{i,j} = 1$ pontosan akkor, ha direkt kommunikáció van i-ből j-be (beleértve az $i = j$ esetet is). Shimbel [1951] észrevette, hogy S^t pozitív elemei azoknak a pároknak felelnek meg, amelyek között t lépésben lehetséges a kommunikáció. Egy kommunikációs rendszer *megfelelő*, amennyiben S^t pozitív valamely t-re. Shimbel [1951] egy másik észrevétele szerint egy megfelelő kommunikációs rendszerben az az idő, ami alatt minden helyszín megkap minden információt, megegyezik azzal a minimális t-vel, amelyre S^t pozitív. (Hasonló jelenséget figyelt meg Luce [1950] is.)

Shimbel [1953] megemlítette, hogy a távolság i és j között megegyezik az i, j pozíción található nullák számával a $S^0, S^1, S^2, \ldots, S^t$ mátrixsorozatban. Tehát tulajdonképen egy $O(n^4)$ futásidejű algoritmust adott az összes távolság megtalálására egy irányított gráfban *egységnyi élsúlyok esetén.*

Legrövidebb utak általában

Amennyiben adott egy $D = (V, A)$ irányított gráf és egy $l : A \to \mathbb{R}$ hosszfüggvény, megkérdezhetjük egy adott s csúcstól való távolságokat és a legrövidebb utakat a többi pontba.

Ehhez két jól ismert módszer áll rendelkezésre: a „Bellman-Ford-módszer” és a „Dijkstra-módszer”. Az utóbbi gyorsabb, de csak nemnegatív hosszfüggvény esetén használható. Az előbbi csak azt követeli meg, hogy ne legyen negatív összhosszúságú irányított kör a gráfban.

Az általános keret mindkét módszerhez a következő, Ford [1956] által leírt általános sémával adható meg. Tartsunk nyilván egy d ideiglenes távolságfüggvényt.

[68] A 'peck rights' fordítása: az együtt tartott tyúkok közötti erőviszonyokat az fejezi ki, hogy melyik csíphet oda a másiknak *(a fordító megjegyzése).*

Kezdetben legyen $d(s) := 0$ és $d(v) := \infty$ minden $v \neq s$-re. Ezután minden lépésben

$$\begin{aligned} &\text{válasszunk egy } (u,v) \text{ élt, amelyre } d(v) > d(u) + l(u,v) \\ &\qquad\qquad\qquad\text{és legyen } d(v) := d(u) + l(u,v). \end{aligned} \tag{4}$$

Amennyiben nincs ilyen él, akkor d a keresett távolságfüggvény.

A különbség a fenti módszerek között abban rejlik, hogy milyen szabály alapján választják azt az (u,v) élt, amelyre $d(v) > d(u) + l(u,v)$. A Bellman-Ford módszer sorban vizsgál mindig minden élt és alkalmazza (4)-t, ahol lehetséges, és ezt ismétli (legfeljebb $|V|$ kör elegendő). Ezt a módszert Shimbel [1955], Bellman [1958] és Moore [1959] írták le.

Dijkstra módszere egy olyan (u,v) élt javasol, amelyre $d(u)$ a lehető legkisebb (így minden él legfeljebb egyszer kerül kiválasztásra, amennyiben a hosszak nemnegatívak). Ezt Leyzorek, Gray, Johnson, Ladew, Meaker, Petry és Seitz [1957] és Dijkstra [1959] írták le. Dijkstra módszerénél kicsit lassúbbra implementálhatót adott Dantzig [1958], aki olyan (u,v) él választását javasolja, amelyre $d(u) + l(u,v)$ a lehető legkisebb.

Ezzel párhuzamosan számos további eredmény jelent meg a legrövidebb utak problémájával kapcsolatban, többek között egy lineáris programozási megközelítés és „jó karakterizációk". Ezeket többé-kevésbé kronológiai sorrendben tekintjük át.

Shimbel (1955)

Shimbel [1955] cikkét 1954 áprilisában mutatta be New Yorkban az Információs Hálózatok Szimpóziumán (Symposium on Information Networks). Korábbi, egységnyi élhosszakra kifejlesztett mátrixmódszerét továbbfejlesztve bevezette az alábbi „minimum-összeg algebrát":

> Arithmetic
> For any arbitrary real or infinite numbers x and y
>
> $$x + y \equiv \min(x,y) \text{ and}$$
> $$xy \equiv \text{the algebraic sum of } x \text{ and } y.$$ [69]

Ezt az aritmetikát átvitte a mátrixszorzásra. Az S hosszmátrixhoz tartozó távolságmátrixot 'diszperziónak' nevezte el és a következőt állította:

[69] Aritmetika
Tetszőleges x és y valós vagy végtelen számokra legyen

$$x + y \equiv \min(x,y) \text{ és}$$
$$xy \equiv \text{az } x \text{ és } y \text{ algebrai összege.}$$

> It follows trivially that S^k $k \geq 1$ is a matrix giving the shortest paths from site to site in S given that $k-1$ other sites may be traversed in the process. It also follows that for any S there exists an integer k such that $S^k = S^{k+1}$. Clearly, the dispersion of S (let us label it $D(S)$) will be the matrix S^k such that $S^k = S^{k+1}$.[70]

Ez lényegében ekvivalens a Bellman-Ford módszerrel.

Bár ezt Shimbel nem említette, de triviálisan $k \leq |V|$ választható, így ez a módszer egy $O(n^4)$ futásidejű algoritmust ad a távolságok meghatározására bármely pontpár viszonylatában.

A legrövidebb út, mint lineáris programozási feladat (1955–1957)

Orden [1955] észrevette, hogy a legrövidebb út problémája speciális esete a szállítmányozási problémának (= minimális költségű folyam probléma kapacitások nélkül), ezért megoldható a lineáris programozás eszközeivel is. Dantzig [1957] a szimplex módszert erre a feladatra a következő grafikus eljárás keretében írta le. Legyen T egy gyökeres feszítőfa az $\{1, \ldots, n\}$ halmazon, aminek 1 a gyökere. Minden $i = 1, \ldots, n$-re u_i legyen egyenlő az i-nek a gyökértől vett távolságával a T fában. Ha $u_j \leq u_i + d_{i,j}$ minden i, j-re, akkor a T-ben vett $1-i$ út egy legrövidebb út. Ha $u_j > u_i + d_{i,j}$, akkor dobjuk ki T-ből a j-be lépő élt és vegyük be helyette az (i, j) élt. Folytassuk az eljárást a módosított fával.

Az eljárás triviálisan véges sok lépésben befejeződik (mivel $\sum_{j=1}^{n} u_j$ minden lépésben csökken, és mivel csak véges sok gyökeres fa létezik). Dantzig illusztrálta módszerét egy példával, amelyben egy csomagot küldött Los Angelesből Bostonba. (Edmonds [1970] megmutatta, hogy ez az eljárás exponenciálisan sok ideig futhat.)

Dantzig [1957]-es cikkére reagálva Minty [1957] „analóg számítógépet” javasolt a legrövidebb út problémára:

> Build a string model of the travel network, where knots represent cities and string lengths represent distances (or costs). Seize the knot 'Los Angeles' in your left hand and the knot 'Boston' in your right and pull them apart. If the model becomes entangled, have an assistant untie and re-tie knots until the entanglement is resolved. Eventually one or more paths will stretch tight—they then are alternative shortest routes.[71]

[70] Triviálisan látszik, hogy S^k $k \geq 1$ megadja a legrövidebb utakat két helyszín között S-ben, amennyiben $k-1$ másik helyszínt érinthetünk útközben. Következik továbbá, hogy létezik olyan k, amelyre $S^k = S^{k+1}$. Nyilvánvalóan S diszperziója (jelöljük $D(S)$-el) az az S^k hatvány lesz, amelyre $S^k = S^{k+1}$.

[71] Készítsük el az úthálózat modelljét madzagból, ahol a csomók jelképezik a városokat, a fonalhosszúságok pedig a távolságokat (vagy a költséget). Helyezzük a „Los Angeles” feliratú csomót a bal kezünkbe, a „Boston” feliratút a jobba és húzzuk szét a két kezünket. Ha a modell bebogozódik, akkor kérjük meg a segítőnket, hogy csomózza szét és újra össze a csomókat, amíg a gubanc kisimul. Végül egy vagy több útvonal kifeszülése jelzi az alternatív legrövidebb utakat.

Dantzig „legrövidebb útjainak fája" megtalálható ezen modell segítségével, ha súlyokat erősítünk a csomópontokra és az egész modellt felemeljük a „Los Angeles" csomópontnál fogva.

Nagyon is helyénvaló megcímkézni a csomópontokat, különben egy-két használat után könnyen összekeverhetjük őket

Hasonló módszert javasolt Bock és Cameron [1958].

Ford (1956)

Egy 1956. augusztus 14-re datált RAND riportban Ford [1956] leírt egy módszert a P_0 és a P_N közti legrövidebb út megtalálására egy hálózatban, amelynek csomópontjai $P_0, \ldots, P_N$ és l_{ij} jelöli egy él hosszúságát i és j között. Idézzük:

> Assign initially $x_0 = 0$ and $x_i = \infty$ for $i \neq 0$. Scan the network for a pair P_i and P_j with the property that $x_i - x_j > l_{ji}$. For this pair replace x_i by $x_j + l_{ji}$. Continue this process. Eventually no such pairs can be found, and x_N is now minimal and represents the minimal distance from P_0 to P_N.[72]

Ez tehát az az általános keret, amit fentebb már említettünk ((4)). Ford nem ad semmilyen további javaslatot (4)-ben az (u, v) él választására.

Ford igazolta, hogy ez az algoritmus véges. Mindazonáltal Johnson [1973a, 1973b,1977] megmutatta, hogy Ford nagyvonalú választási szabálya exponenciális futásidőt is eredményezhet.

Ford módszerének helyessége következik egy olyan eredményből is, ami Beckmann, McGuire és Winsten [1956] *Studies in the Economics of Transportation* című könyvében szerepel: adott egy $(l_{i,j})$ hosszúságmátrix, a $(d_{i,j})$ távolságmátrix az a mátrix, amit egyértelműen meghatároznak az alábbiak:

$$d_{i,i} = 0 \quad \text{minden} \quad i\text{-re};$$
$$d_{i,k} = \min_j (l_{i,j} + d_{j,k}) \quad \text{minden} \quad i, k\text{-ra, amelyre } i \neq k.$$

Jó karakterizációk a legrövidebb út problémára (1956–1958)

Robacker [1956] megfigyelte, hogy a legrövidebb utakra teljesül a Menger-tételnek egyfajta duálisa: egy N gráfban a legrövidebb $P_0 - P_n$ út hossza megegyezik a páronként diszjunkt $P_0 - P_n$ vágások maximális számával. Robacker szavaival:

[72]Legyen kezdetben $x_0 = 0$ és $x_i = \infty$ minden $i \neq 0$-ra. Keressünk a hálózatban olyan P_i és P_j párt, amire $x_i - x_j > l_{ji}$. Erre a párra helyettesítsük x_i-t $x_j + l_{ji}$-vel. Folytassuk az eljárást. Végül már nem találunk ilyen párt, ekkor x_N minimális, és megegyezik P_0 és P_N távolságával.

> the maximum number of mutually disjunct cuts of N is equal to the length of the shortest chain of N from P_0 to P_n.[73]

Hasonló „jó karakterizációt" adott Gallai [1958]: egy (V, A) irányított gráf élhalmazán értelmezett $l : A \to \mathbb{Z}$ hosszfüggvény pontosan akkor nem szolgáltat negatív összhosszúságú irányított kört, ha létezik egy $p : V \to \mathbb{Z}$ függvény („potenciál"), amelyre $l(u, v) \geq p(v) - p(u)$ minden (u, v) élre.

Case Institute of Technology (1957)

A legrövidebb út problémáját a Case Institute of Technology egy kutatócsoportja is vizsgálta a Ohio állambeli Cleveland-ben a *Modellezési Technikák Vizsgálata (Investigation of Model Techniques)* projekt keretében, amelyet a hadsereg elektronikus eszközöket tesztelő alakulatának harcászati fejlesztő osztálya (Combat Development Department of the Army Electronic Proving Ground) részére végeztek. Az *Első éves beszámolójukban* (First Annual Report) Leyzorek, Gray, Johnson, Ladew, Meaker, Petry és Seitz [1957] ismertették eredményeiket.

Először is észrevették, hogy Shimbel módszere felgyorsítható azzal, hogy S^k-t iteratív négyzetre-emelésekkel határozzuk meg (a minimum-összeg algebrában). Ez $O(n^3 \log n)$ időben megoldja a legrövidebb utak problémáját az összes csúcspár között.

Ezután kezdetleges módon leírtak egy Dijkstra módszerével ekvivalens módszert. Idézzük:

> (1) All the links joined to the origin, a, may be given an outward orientation. ...
>
> (2) Pick out the link or links radiating from a, $a_{a\alpha}$, with the smallest delay. ... Then it is impossible to pass from the origin to any other node in the network by any "shorter" path than $a_{a\alpha}$. Consequently, the minimal path to the general node α is $a_{a\alpha}$.
>
> (3) All of the other links joining α may now be directed outward. Since $a_{a\alpha}$ must necessarily be the minimal path to α, there is no advantage to be gained by directing any other links toward α. ...
>
> (4) Once α has been evaluated, it is possible to evaluate immediately all other nodes in the network whose minimal values do not exceed the value of the second-smallest link radiating from the origin. Since the minimal values of these nodes are less than the values of the second-smallest, third-smallest, and all other links radiating directly from the origin, only the smallest link, $a_{a\alpha}$, can form a part of the minimal path to these nodes. Once a minimal value has been assigned to these nodes, it is possible to orient all other links except the incoming link in an outward direction.
>
> (5) Suppose that all those nodes whose minimal values do not exceed the value of the second-smallest link radiating from the origin have been evaluated. Now it is possible to evaluate the node on which the second-smallest link terminates. At this point, it can be observed that if conflicting directions are assigned to a link, in accordance with the rules which have been given for direction assignment, that link may be ignored. It will not be a part of the minimal path to either of the two nodes it joins. ...

[73] a kölcsönösen diszjunkt vágások maximális száma N-ben megegyezik a P_0 és P_n közti legrövidebb lánc hosszúságával.

Following these rules, it is now possible to expand from the second-smallest link as well as the smallest link so long as the value of the third-smallest link radiating from the origin is not exceeded. It is possible to proceed in this way until the entire network has been solved.[74]

(A fenti idézetből töröltük az ábrákra vonatkozó hivatkozásokat.)

Bellman (1958)

Miután több cikket publikált a dinamikus programozásról (ami bizonyos értelemben a legrövidebb út módszerek általánosítása) Bellman [1958] végül magáról a legrövidebb út problémáról is közölt egy cikket a *Quarterly of Applied Mathematics* folyóiratban. Ebben leírja az alábbi „függvényegyenletes" megoldást a legrövidebb utak problémájára, ami lényegében megegyezik a Shimbel [1955]-ben található módszerrel.

Tegyük fel, hogy adottak az $1, \ldots, N$ számokkal jelölt városok, és közülük bármely kettőt közvetlen út köt össze. Adott egy $T = (t_{i,j})$ mátrix, ahol $t_{i,j}$ azt az időt mutatja, ami alatt i-ből j-be közvetlenül el lehet jutni (ez nem feltétlenül szimmetrikus).

Bellman megjegyzi:

---

[74](1) Az a origót érintő összes kapcsolat kifelé mutató irányítást kaphat. ...

(2) Válasszuk ki az a origóból kimutató minimális $a_{a\alpha}$ késleltetésű kapcsolatot vagy kapcsolatokat. ... Ekkor lehetetlen az origóból a hálózat bármely más pontjába egy $a_{a\alpha}$-nál „rövidebb" úton eljutni. Tehát az általános α csúcsba $a_{a\alpha}$ minimális út.

(3) Most már az α-t érintő minden egyéb kapcsolat kifelé irányítható. Minthogy $a_{a\alpha}$-nak az α-ba futó minimális útnak kell lennie, semmi előnyünk sem származik abból, ha bármelyik kapcsolatot α felé irányítjuk. ...

(4) Miután α-t kiértékeltük, azonnal lehetségessé válik mindazon csúcsok kiértékelése, amelyek minimális értéke nem haladja meg az origóból induló második legkisebb kapcsolatot [helyesebben: késleltetést (*a fordító megjegyzése*)]. Minthogy mindezen csúcsok minimális értéke kisebb, mint az origóból közvetlenül kiinduló második legkisebb, harmadik legkisebb és további kapcsolatoké [késleltetéseké], csupán a legkisebb [késleltetésű] $a_{a\alpha}$ kapcsolat lehet része az ezen csúcsokba vezető minimális utaknak. Miután a minimális értékeket mindezen csúcsokhoz meghatároztuk, a bejövő kapcsolat kivételével minden más kapcsolatot kifelé irányíthatunk.

(5) Tegyük fel, hogy már mindazon csúcsokat kiértékeltük, melyek minimumértéke nem haladja meg az origóból kiinduló második legkisebb értéket [késleltetést]. Most már kiértékelhetjük azt a csúcsot is, amelyikbe ez a második legkisebb [késleltetésű] kapcsolat mutat. Ezen a ponton megfigyelhetjük, hogy ha a kapcsolatok irányát előíró szabályok szerint egy kapcsolat két ellentétes irányítást kap, akkor ezt a kapcsolatot figyelmen kívül hagyhatjuk. Ez ugyanis nem lesz része a két végpontjába vezető minimális utak egyikének sem. ...

Ezeket a szabályokat követve immár kiterjeszkedhetünk a második legkisebb [késleltetésű] kapcsolatról és a legkisebb [késleltetésű] kapcsolatról mindaddig, amíg [a csúcsokhoz számított értékekkel] nem haladjuk meg az origóból induló harmadik legkisebb [késleltetésű] kapcsolatot. Ily módon eljárva lehetségessé válik a teljes hálózat megoldása.

A fordító(k) megjegyzése: a fenti leírásban a csúcs „kiértékelésének" fogalma nincs pontosan meghatározva. Egy lehetséges definíció, ha az adott csúcsba irányított „kapcsolatokkal" meghosszabbított minimális utak közül vesszük a minimumértéket megvalósító utat, és ennek hossza (késleltetése) lesz a csúcs „értéke". Könnyen látható hogy az így kapott eljárás csakugyan ekvivalens Dijkstra irányítatlan gráfon alkalmazott algoritmusának rekurzív megvalósításával.

Since there are only a finite number of paths available, the problem reduces to choosing the smallest from a finite set of numbers. This direct, or enumerative, approach is impossible to execute, however, for values of N of the order of magnitude of 20.[75]

Adott egy „függvényegyenletes" megközelítést:

The basic method is that of successive approximations. We choose an initial sequence $\left\{f_i^{(0)}\right\}$, and then proceed iteratively, setting

$$f_i^{(k+1)} = \min_{j \neq i} \left(t_{ij} + f_j^{(k)}\right], \qquad i = 1, 2, \ldots, N-1,$$
$$f_N^{(k+1)} = 0,$$

for $k = 0, 1, 2 \ldots$[76]

Kiinduló $f_i^{(0)}$ sorozatnak Bellman (F. Haight javaslata alapján) az $f_i^{(0)} = t_{i,N}$ sorozatot javasolta. Bellman észrevette, hogy minden rögzített i-re az $f_i^{(k)}$ sorozat monoton csökkenő k-ban és a következőt állította:

It is clear from the physical interpretation of this iterative scheme that at most $(N-1)$ iterations are required for the sequence to converge to the solution.[77]

Mivel minden iterációt $O(N^2)$ idő alatt végre lehet hajtani, az algoritmus időigénye $O(N^3)$. A bonyolultságról Bellman a következőket mondta:

It is easily seen that the iterative scheme discussed above is a feasible method for either hand or machine computation for values of N of the order of magnitude of 50 or 100.[78]

Egy lábjegyzetben Bellman megemlíti:

---

[75]Mivel csak véges sok útvonal létezik, a probléma megoldható ezen véges halmazból a legkisebb kiválasztásával. Ez a direkt, avagy felsoroló megközelítés azonban kivitelezhetetlen már 20 körüli N-ek esetén is.

[76]Az alapvető módszer a szukcesszív approximáció. Választunk egy kiinduló sorozatot $\left\{f_i^{(0)}\right\}$, és azután iteratíve folytatjuk a következő értékadásokkal

$$f_i^{(k+1)} = \min_{j \neq i} \left(t_{ij} + f_j^{(k)}\right], \qquad i = 1, 2, \ldots, N-1,$$
$$f_N^{(k+1)} = 0,$$

minden $k = 0, 1, 2 \cdots$-re.

[77]A leírt iteratív séma fizikai interpretációjából világos, hogy legfeljebb $N-1$ iteráció szükséges ahhoz, hogy a sorozat a megoldáshoz konvergáljon.

[78]Könnyen látható, hogy a fent ismertetett iteratív séma megengedett módszert ad mind kézi, mind gépi számításokhoz akár 50 vagy 100 körüli N-ekre is.

> *Added in proof* (*December* 1957): After this paper was written, the author was informed by Max Woodbury and George Dantzig that the particular iterative scheme discussed in Sec. 5 had been obtained by them from first principles.[79]

Dantzig (1958)

Dantzig [1958] cikke $O(n^2 \log n)$ futásidejű algoritmust ad a legrövidebb út problémára nemnegatív élhosszúságok esetén. A módszer a (4)-ben olyan él választását írja elő, amelyre $d(u) + l(u, v)$ a lehető legkisebb. Dantzig feltételezte, hogy

> (a) that one can write down without effort for each node the arcs leading to other nodes in increasing order of length and (b) that it is no effort to ignore an arc of the list if it leads to a node that has been reached earlier.[80]

Megjegyezte, hogy Bellmanon, Mooreon, Fordon és önmagán kívül D. Gale és D.R. Fulkerson is javasoltak módszereket a legrövidebb utak problémájára „informális beszélgetések alkalmával".

Dijkstra (1959)

Dijkstra [1959] olyan átfogó és világos leírását adta a „Dijkstra módszernek", amely $O(n^2)$ futásidejű implementációt tesz lehetővé. A következőt állította:

> The solution given above is to be preferred to the solution by L.R. Ford [*3*] as described by C. Berge [*4*], for, irrespective of the number of branches, we need not store the data for all branches simultaneously but only those for the branches in sets I and II, and this number is always less than n. Furthermore, the amount of work to be done seems to be considerably less.[81]

(Dijkstra's [3] és [4] referenciái: Ford [1956] és Berge [1958].)

Dijkstra módszerét könnyebb implementálni ($O(n^2)$ futásidővel), mint Dantzigét, mivel nem kell az információt listákban tárolni: ahhoz, hogy a következő csúcsot megtaláljuk, ami minimalizálja $d(v)$-t, csak végig kell néznünk az összes csúcsot.

---

[79] *Nyomdába adás után:* (1957. december) Miután ez az írás elkészült, Max Woodbury és George Dantzig értesítették a szerzőt, hogy azt a bizonyos, 5. fejezetben ismertetett iteratív sémát ők is kidolgozták az alapigazságokból kiindulva.

[80] (a) fáradság nélkül felsorolhatjuk bármely pontra a belőle kimenő éleket növekvő hosszúság szerint (b) nem kerül fáradságba eltekinteni egy éltől ezen a listán amennyiben az egy korábban már elért pontba mutat.

[81] A fentebb ismertetett megoldás mindenképpen előnyösebb az L.R. Ford [*3*] által adott megoldásnál, amint az C. Berge [*4*]-ben leírta, mivel az ágak (élek) számától függetlenül nem kell tárolnunk az összes ághoz tartozó adatot egyidejűleg, hanem csak azokat, amelyek az I és II halmazokhoz tartozó ágakhoz tartoznak, és ez a szám mindig kisebb, mint n. Továbbá az elvégzendő munka jelentősen kisebbnek tűnik.

Moore (1959)

A Harvard Egyetemen 1957 áprilisában tartott Nemzetközi Kapcsoláselméleti Szimpóziumon (International Symposium on the Theory of Switching) Moore [1959], a Bell Laboratórium munkatársa „Legrövidebb kiút a labirintusból" ("The shortest path through a maze") címmel tartott előadást:

> The methods given in this paper require no foresight or ingenuity, and hence deserve to be called algorithms. They would be especially suited for use in a machine, either a special-purpose or a general-purpose digital computer.[82]

Moore számára a motivációt a távolsági telefonforgalom adta. Ismertette az A, B, C és D algoritmusokat.

Elsőnek Moore azt az esetet tekintette, amikor egy $G = (V, E)$ irányítatlan gráf adott és nincs hosszfüggvény, hanem egy olyan utat kell keresni az A pontból a B pontba, amely a lehető legkevesebb élből áll. Az A algoritmus a következő: először is címkézzük az A pontot a 0 számmal. Ezután $k = 0, 1, \ldots$-re tegyük a következőt: tegyük a $k+1$-es címkét minden olyan eddig címkézetlen pontra, amely szomszédos valamely olyan ponttal, aminek a címkéje k. Álljunk meg, mihelyst B is kapott címkét.

> If it were done as a program on a digital computer, the steps given as single steps above would be done serially, with a few operations of the computer for each city of the maze; but, in the case of complicated mazes, the algorithm would still be quite fast compared with trial-and-error methods.[83]

Az eljárás egy közvetlen implementációja valójában $O(m)$ futásidejű algoritmust eredményezne. A B és C algoritmusok abban különböznek az A-tól, hogy gazdaságosabban (kevesebb bitet használva) címkézik a pontokat.

Moore D algoritmusa abban az esetben találja meg a legrövidebb utat, amikor minden élnek nemnegatív hossza van. Ez a módszer a fent ismertetett Bellman-módszert finomítja: (i) kiterjeszti arra az esetre, ha nem bármely pontpár tud közvetlenül kommunikálni egymással, azaz egy $G = (V, E)$ gráf adott egy hosszfügvénnyel; (ii) minden iterációban csak azokat a $d_{i,j}$-ket tekinti, amelyekre u_i-t az előző iteráció csökkentette.

A módszer futásideje $O(nm)$. Moore észrevette, hogy a módszer párhuzamos megvalósítást is lehetővé tesz, $O(n\Delta(G))$-re csökkentve ezzel a futásidőt, ahol $\Delta(G)$ a maximális G-beli fokszám. Moore a következő tanulságot vonta le:

> The origin of the present methods provides an interesting illustration of the value of basic research on puzzles and games. Although such research is often frowned upon

[82] A jelen cikkben ismertetett módszerek nem igényelnek semmiféle előrelátást vagy találékonyságot, így kiérdemlik, hogy algoritmusoknak nevezzük őket. Különösképpen használhatóak lehetnek gépek számára, akár célszámítógépre, vagy általános célú digitális számítógépre gondolunk.

[83] Amennyiben egy digitális számítógép egy program formájában hajtaná végre a fenti lépéseket, azokat sorban egymás után hajtaná végre, az útvesztő minden városához csak néhány műveletet igényelve. Azonban bonyolultabb labirintusok esetében az algoritmus jelentősen gyorsabb lenne a próba-szerencse módszernél.

as being frivolous, it seems plausible that these algorithms might eventually lead to savings of very large sums of money by permitting more efficient use of congested transportation or communication systems. The actual problems in communication and transportation are so much complicated by timetables, safety requirements, signal-to-noise ratios, and economic requirements that in the past those seeking to solve them have not seen the basic simplicity of the problem, and have continued to use trial-and-error procedures which do not always give the true shortest path. However, in the case of a simple geometric maze, the absence of these confusing factors permitted algorithms A, B, and C to be obtained, and from them a large number of extensions, elaborations, and modifications are obvious.

The problem was first solved in connection with Claude Shannon's maze-solving machine. When this machine was used with a maze which had more than one solution, a visitor asked why it had not been built to always find the shortest path. Shannon and I each attempted to find economical methods of doing this by machine. He found several methods suitable for analog computation, and I obtained these algorithms. Months later the applicability of these ideas to practical problems in communication and transportation systems was suggested.[84]

A módszer további alkalmazásai között Moore ismertette azt a példát, ahol a leggyorsabb csatlakozást keressük egy adott állomásról egy másikba a vasúti menetrend ismeretében. Hasonló módszert adott Minty [1958].

1958 májusában Hoffman és Pavley [1959] a következő számítási eredményeket prezentálták a Western Joint Computer konferencián Los Angelesben Moore algoritmusáról minden pontpár távolságának meghatározására alkalmazva:

It took approximately three hours to obtain the minimum paths for a network of 265 vertices on an IBM *704*.[85]

[84]Az ismertetett módszerek eredete érdekes illusztrációját adja a rejtvényekkel és játékokkal kapcsolatos alapkutatások értékének. Bár gyakran komolytalannak ítélik ezeket a kutatásokat, úgy tűnik, hogy ezek az algoritmusok komoly összegeket spórolhatnak meg azáltal, hogy zsúfolt közlekedési vagy kommunikációs rendszerek hatékonyabb használatát teszik lehetővé. A kommunikációval és szállítással kapcsolatos valós problémákat annyira elbonyolítják a menetrendek, biztonsági előírások, hasznos jel-zaj arányok és gazdaságossági követelmények, hogy eleddig azok, akik ezeknek a megoldását keresték, nem vették észre a feladat alapvető egyszerűségét, és mindenféle próba-szerencse módszerekhez folyamodtak, amelyek nem adják meg a valójában legrövidebb utat. Mindazonáltal egy egyszerű geometriai útvesztő esetében a fenti zavaró tényezők hiánya lehetővé tette az A, B és C algoritmusok kidolgozását, ezekből pedig rengeteg féle kiterjesztés és módosítás adódik egyszerűen.

A problémát először Claude Shannon labirintus-megoldó gépével kapcsolatban oldották meg. Amikor ezt a gépet egy olyan labirintusra alkalmazták, amiben nem csak egy kiút volt, a látogató azt kérdezte, hogy vajon miért nem a legrövidebb út megtalálására készítették a gépet. Shannon és én megpróbáltunk gazdaságos módszereket találni erre, amit egy gép végre tud hajtani. Ő több olyan módszert is talált, amit analóg számítógép hajthat végre, én pedig ezeket az algoritmusokat találtam. Pár hónappal később felvetődött ezen ötletek kommunikációs és szállítási rendszerekben való gyakorlati alkalmazhatósága.

[85]Egy IBM *704*-esen körülbelül 3 órába telt egy 265 pontú hálózatban a legrövidebb utak meghatározása.

7. Az utazó ügynök probléma

Az *utazó ügynök probléma* (traveling salesman problem, TSP) a következő: adott n város és a köztes távolságaik, keressünk legrövidebb körutat, amely minden várost pontosan egyszer érint. Matematikailag az utazó ügynök probléma kapcsolatban van a Hamilton-kör problémájával; általánosítja azt. Ez a probléma Kirkmanig [1856] és Hamiltonig [1856,1858] nyúlik vissza és Kowalewski [1917b, 1917a] is tanulmányozta (lásd Biggs, Lloyd és Wilson [1976]). Összefoglalónkban az utazó ügynök probléma általános alakjára szorítkozunk.

Az utazó ügynök probléma matematikai gyökerei homályba vésznek. Dantzig, Fulkerson és Johnson [1954] a következőt mondják:

> It appears to have been discussed informally among mathematicians at mathematics meetings for many years.[86]

Az 1832-es kézikönyv

Müller és Merbach [1832] vették észre, hogy az utazó ügynök probléma természetes megfogalmazását már 1832-ben megadták egy, a sikeres utazó ügynökök részére készült kézikönyvben: *Der Handlungsreisende — wie er sein soll und was er zu thun hat, um Aufträge zu erhalten und eines glücklichen Erfolgs in seinen Geschäften gewiß zu sein — von einem alten Commis-Voyageur*[87] [1832]. (Míg a politikai korrektség manapság azt követelné, hogy az utazó ügynököt „traveling sales*person*"-nak nevezzük, addig a kézikönyv alapból feltételezi, hogy a „Handlungsreisende" férfi, és óva int a nőktől az üzletben és azon kívül is.)

A matematikamentes kis könyv a következőképpen írja le a problémát:

> Die Geschäfte führen die Handlungsreisenden bald hier, bald dort hin, und es lassen sich nicht füglich Reisetouren angeben, die für alle vorkommende Fälle passend sind; aber es kann durch eine zweckmäßige Wahl und Eintheilung der Tour, manchmal so viel Zeit gewonnen werden, daß wir es nicht glauben umgehen zu dürfen, auch hierüber einige Vorschriften zu geben. Ein Jeder möge so viel davon benutzen, als er es seinem Zwecke für dienlich hält; so viel glauben wir aber davon versichern zu dürfen, daß es nicht wohl thunlich sein wird, die Touren durch Deutschland in Absicht der Entfernungen und, worauf der Reisende hauptsächlich zu sehen hat, des Hin- und Herreisens, mit mehr Oekonomie einzurichten. Die Hauptsache besteht immer darin: so viele Orte wie möglich mitzunehmen, ohne den nämlichen Ort zweimal berühren zu müssen.[88]

---

[86] Úgy tűnik, matematikusok matematikai találkozókon már évekkel ezelőtt is beszélgettek róla.

[87] „Az utazó ügynök – milyen legyen és mit tegyen azért, hogy megrendeléseket kapjon és biztosítani tudja üzletének boldog sikerét – egy öreg utazó ügynök által"

[88] Az üzlet az utazó ügynököt hol ide, hol oda szólítja, és nemigen adhatunk olyan útvonaltervet, amely minden esetre megfelelő; mindazonáltal a körút útvonalának megfelelő kiválasztásával és megtervezésével annyi időt takaríthatunk meg, hogy nem kerülhetjük el, hogy ezzel kapcsolatban is adjunk néhány szabályt. Mindenki annyit hasznosít belőle, amennyi éppen a céljának megfelel; annyit mindenesetre biztosan mondhatunk, hogy nem lehetséges a németországi körutat gazdaságosabban megszervezni, tekintetbe véve a távolságokat és az oda-vissza való utazásokat.

A kézikönyv öt körutat javasol Németországon át (az egyik részben Svájcban halad). A 3. ábrán összehasonlítjuk az egyik ilyen körútvonalat a legrövidebb útvonallal, amelyet „modern" módszerekkel kerestünk meg. (A többi túra többnyire nem felel meg a fő feladatnak, mivel részkörutakat tartalmaznak, így egyes helyeket többször is érintenek.)

Menger hírnök-problémája (Botenproblem) (1930)

K. Menger talán az első matematikus, aki az utazó ügynök problémáról írt. Érdeklődésének gyökereit Menger [1928b] cikkében találhatjuk. Ebben tanulmányozza egy S metrikus térbeli C egyszerű görbe $l(C)$ *hosszát*, amely definíció szerint

$$l(C) := \sup \sum_{i=1}^{n-1} \operatorname{dist}(x_i, x_{i+1}),$$

ahol a szuprémumot a C-n minden $x_1, \ldots, x_n$ választása mellett kell venni *a C görbe által meghatározott sorrend szerint.* Menger azt figyelte meg, hogy ezt a C görbe véges X részhalmazaira relaxálhatjuk és az X összes lehetséges sorrendjeire minimalizálhatunk. Ennek érdekében egy metrikus tér tetszőleges véges X részhalmazára definiálta a $\lambda(X)$ mennyiséget, mint az X-en átmenő legrövidebb út (gráfos szóhasználattal: *Hamilton-út*) hosszát, és megmutatta, hogy

$$l(C) = \sup_X \lambda(X),$$

ahol a szuprémumot a C összes X véges részhalmazára kell venni. Ez annyit jelent, hogy megmutatta, hogy minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik egy X véges részhalmaza C-nek, amelyre $\lambda(X) \geq l(C) - \varepsilon$.

Menger [1929a] ezt a következőképpen élesítette tovább:

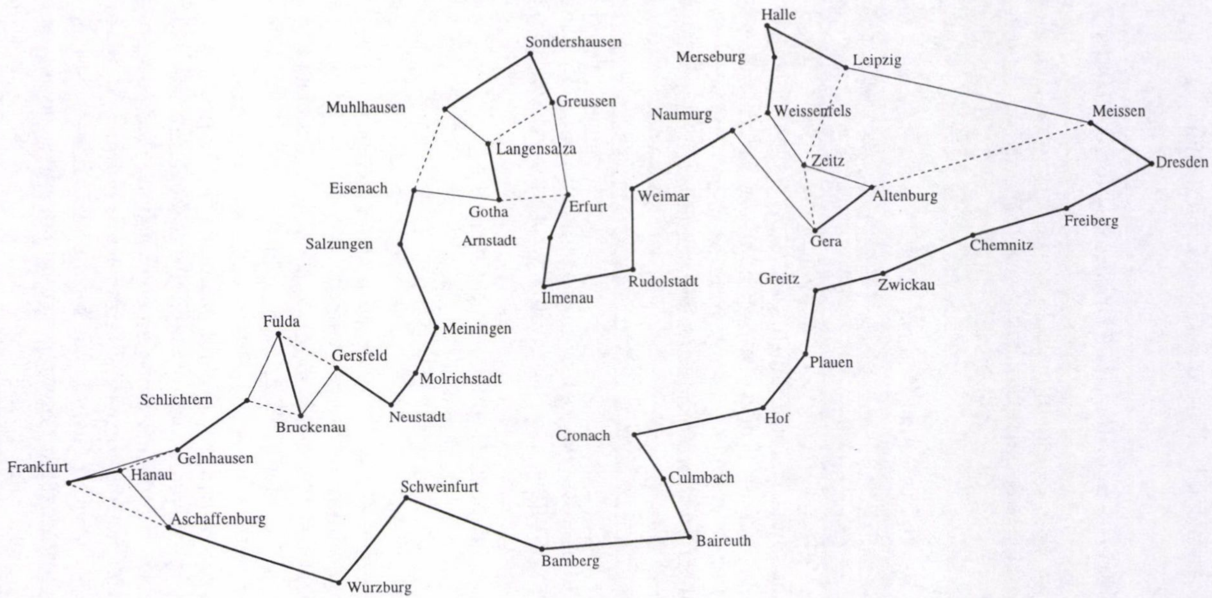
$$l(C) = \sup_X \kappa(X),$$

ahol a szuprémumot ismét a C összes X véges részhalmazaira kell venni, és $\kappa(X)$ az X egy *feszítő fájának* minimális hosszát jelenti.

Ezeket az eredményeket Menger [1930] cikkében meg is jelentette. Számos másik cikkben, úgymint Menger [1928a,1929b,1929a], hasonló karakterizációkat adott erre a hosszfüggvényre.

A $\lambda(X)$ paraméter nyilvánvalóan közel áll az utazó ügynök probléma gyakorlati alkalmazásához. Ezt a rokonságot Menger explicite is megemlítette 1930. február 5-én a bécsi *mathematisches kolloquium*-on (amelyet néhány diák kívánságára szerveztek). A Menger [1931a,1932]-ben található jelentés tanúsága szerint először megkérdezte, nem lehet-e tovább enyhíteni a formulát, $\kappa(X)$-et kicserélve a (mai szóhasználattal élve) X-et összekötő *Steiner-fa* minimális hosszával – ez egy feszítőfa az X-nél bővebb S-beli halmazon. (Tehát Menger végiglátogatott jó néhány

A fő célkitűzés mindig abból áll, hogy a lehető legtöbb helyet látogassunk meg anélkül, hogy egy helyet kétszer is érintenünk kéne.



3. ábra. A (vastag és vékony) folytonos vonalak egy 45 németországi városon átmenő, 1285 km hosszú körútvonalat mutatnak be az 1832-es utazó ügynök-kézikönyv alapján. A legrövidebb körútvonalat a vastag folytonos és a szaggatott vonal mutatja (1248 km). Ez utóbbi a földrajzi távolságot veszi figyelembe – a helyi viszonyokat is tekintetbe véve elképzelhető, hogy az 1832-es körút az optimális.

kombinatorikus optimalizálási problémát.) Ezt a feladatot Euklideszi-terekben Mimura [1933] oldotta meg.

Ezután Menger az utazó ügynök problémát a következőképpen fogalmazta meg:

> Wir bezeichnen als *Botenproblem* (weil diese Frage in der Praxis von jedem Postboten, übrigens auch von vielen Reisenden zu lösen ist) die Aufgabe, für endlichviele Punkte, deren paarweise Abstände bekannt sind, den kürzesten die Punkte verbindenden Weg zu finden. Dieses Problem ist natürlich stets durch endlichviele Versuche lösbar. Regeln, welche die Anzahl der Versuche unter die Anzahl der Permutationen der gegebenen Punkte herunterdrücken würden, sind nicht bekannt. Die Regel, man solle vom Ausgangspunkt erst zum nächstgelegenen Punkt, dann zu dem diesem nächstgelegenen Punkt gehen usw., liefert im allgemeinen nicht den kürzesten Weg.[89]

Tehát Menger a legrövidebb Hamilton-utat kereste az adott pontokon. Tisztában volt a feladat bonyolultságával, és tudta, hogy a jól ismert legközelebbi szomszéd heurisztika nem feltétlenül ad optimális megoldást.

Harvard, Princeton (1930–1934)

Menger 1930 szeptembere és 1931 februárja közötti időszakot meghívott előadóként a Harvard Egyetemen töltötte. Egyik szemináriumon tartott előadásában Menger bemutatta a fenti eredményeit görbék hosszáról és véges ponthalmazokon átmenő legrövidebb utakról. Menger [1931b]-ben azt írja, hogy Hassler Whitney, aki akkoriban épp a Ph.D.-jét írta gráfelméletből a Harvardon, egy kapcsolódó javaslatot tett. Ez a cikk azonban nem említi, hogy vajon a gyakorlati interpretáció szóba került-e ezen az előadáson.

A következő évben, 1931–32-ben Whitney a Princeton Egyetemen a Nemzeti Kutatási Tanács (National Research Council) kutatója volt, ahol több szemináriumi előadást is tartott. Egy ilyen előadáson említette meg azt a kérdést, hogy keressük meg a legrövidebb körutat az Egyesült Államok 48 államán keresztül.

Több bizonytalanság is van ebben a történetben. Nem biztos, hogy Whitney a 48 állam problémájáról ezeken az 1931–32-es előadásokon beszélt (amelyeket azonban bizonyosan megtartott), vagy esetleg később, 1934-ben, amint ezt Flood [1956] állítja az utazó ügynök problémáról szóló cikkében:

> This problem was posed, in 1934, by Hassler Whitney in a seminar talk at Princeton University.[90]

Ez az emlékezés bizonytalan lehet, mint ahogy azt a következő két idézet is bizonyítja. Dantzig, Fulkerson és Johnson [1954] megjegyzi:

---

[89]Nevezzük *hírnök problémának* a következőt (minthogy ezt a problémát gyakorlatban meg kell oldania minden postásnak, és mellesleg sok utazónak is): véges sok pontra, amelyek páronkénti távolsága adott, keressük a legrövidebb körutat, ami összeköti ezeket a pontokat. Természetesen ezt a problémát meg lehet oldani véges sok próba segítségével. Nem ismert olyan szabály, ami a szükséges próbák számát az összes permutációk számánál lejjebb tudná vinni. Az a szabály, ami szerint a kiindulópontból a legközelebbi pontba menjünk, innen szintén a legközelebbibe lépjünk és így tovább, általánosságban nem adja a legrövidebb körutat.

[90]Ezt a problémát Hassler Whitney kérdezte egy szemináriumi előadásán 1934-ben a Princeton Egyetemen.

> Both Flood and A.W. Tucker (Princeton University) recall that they heard about the problem first in a seminar talk by Hassler Whitney at Princeton in 1934 (although Whitney, recently queried, does not seem to recall the problem).[91]

Mindazonáltal David Shmoys kérdésére Tucker 1983. február 17-én levélben a következőt válaszolta (lásd Hoffman és Wolfe [1985]):

> I cannot confirm or deny the story that I heard of the TSP from Hassler Whitney. If I did (as Flood says), it would have occurred in 1931–32, the first year of the old Fine Hall (now Jones Hall). That year Whitney was a postdoctoral fellow at Fine Hall working on Graph Theory, especially planarity and other offshoots of the 4-color problem. ... I was finishing my thesis with Lefschetz on n-manifolds and Merrill Flood was a first year graduate student. The Fine Hall Common Room was a very lively place—24 hours a day.[92]

(Whitney 1932-ben szerezte Ph.D.-jét a Harvard Egyetemen.)

Szintén nem tudni biztosat arról, hogy Whitney pontosan hogyan is fogalmazta meg a problémát. Az a verzió, mely szerint a legrövidebb körutat kereste az USA 48 államán keresztül, Flood-tól származik egy 1984. május 14-én készült interjúból (Tucker [1984]), úgymint „Hassler Whitney 48 állam problémája". E tekintetben Flood meg is jegyezte:

> I don't know who coined the peppier name 'Traveling Salesman Problem' for Whitney's problem, but that name certainly has caught on, and the problem has turned out to be of very fundamental importance.[93]

TSP, Hamilton utak és iskolabusz-útvonaltervezés

Flood [1956] rengeteg kapcsolatot említ a TSP és Hamilton-játékok, illetve gráfok Hamilton-útjai között, és így folytatja:

> I am indebted to A.W. Tucker for calling these connections to my attention, in 1937, when I was struggling with the problem in connection with a schoolbus routing study in New Jersey.[94]

---

[91] Mind Flood, mind pedig A.W. Tucker (Princeton Egyetem) úgy emlékszik, hogy a problémát először Hassler Whitney-től hallották 1934-ben a Princeton-on (bár Whitney, megkérdezésünk alapján nem emlékszik a problémára).

[92] Sem megerősíteni, sem cáfolni nem tudom azt a történetet, amely szerint a TSP-t Hassler Whitney-től hallottam. Ha igen, (amint azt Flood állítja) akkor ez 1931–32-ben történt, a régi Fine Hall első évében (ma Jones Hall). Abban az évben Whitney posztdoktori ösztöndíjas volt a Fine Hallban, gráfelmélettel foglalkozott, főként síkbeliséggel és a 4-szín probléma egyéb nyúlványaival. ... Én az n-sokaságokról szóló tézisemet fejeztem be Lefschetz-cel, Merrill Flood pedig éppen diploma után volt. A Fine Hall közösségi terme akkoriban nagyon életteli volt – szinte a nap 24 órájában.

[93] Nem tudom, ki alkotta az életerősebb „utazó ügynök probléma" elnevezést Whitney problémájára, de annyi bizonyos, hogy a név rajtaragadt, és a problémáról kiderült, hogy alapvető jelentőségű.

[94] Hálával tartozom A.W. Tucker-nek, aki 1937-ben felhívta a figyelmemet ezekre a kapcsolatokra, amikor iskolabusz útvonaltervezési tanulmánnyal bajlódtam New Jerseyben.

Az alábbi, Tucker [1984] interjújából származó idézetben Flood egy másik állambeli (West Virginia) iskolabusz útvonaltervezésre hivatkozik, és megemlíti Koopmans bevonását a TSP-be, aki 1940–1941-et a Princetoni Egyetem önkormányzatának vizsgálati csoportjánál („Local Government Surveys Section of Princeton University", röviden „the Princeton Surveys") töltötte:

> Koopmans first became interested in the "48 States Problem" of Hassler Whitney when he was with me in the Princeton Surveys, as I tried to solve the problem in connection with the work by Bob Singleton and me on school bus routing for the State of West Virginia.[95]

1940

1940-ben több cikk is megjelent, amik az utazó ügynök problémát más-más szövegkörnyezetben vizsgálják. Úgy tűnik, ezek az elsők, amik matematikai eredményeket tartalmaznak a problémával kapcsolatban.

Menger *mathematisches Kolloquium*-ának amerikai folytatásában (Menger [1940]) visszatért a metrikus tér adott ponthalmazán átmenő legrövidebb út problémájához, amelyet Milgram [1940] legrövidebb Jordan-görbével kapcsolatos vizsgálatai követtek, amely lefed egy adott, nem feltétlenül véges ponthalmazt egy metrikus térben. Mivel a ponthalmaz nem feltétlenül véges, a legrövidebb görbe nem feltétlenül létezik.

Fejes [1940] az egységnégyzet n pontján átmenő legrövidebb görbe problémáját vizsgálta. Ennek következményeképpen Verblunsky [1951] megmutatta, hogy ennek hossza kisebb, mint $2+\sqrt{2.8n}$. Ez irányú későbbi munkák többek között Few [1955] és Beardwood, Halton és Hammersley [1959].

Mahalanobis [1940] alsó korlátokat vizsgált a síkon n véletlen pont legrövidebb körútjának várható értékére, hogy megbecsülje a Bengálban jutával beültetett terület földmérésének költségét. Ez a földmérés 1938-ban zajlott és a legköltségesebb tényező az emberek és eszközök szállítása volt az egyik mérési ponttól a másikig. A következőképpen becsülte a sík n véletlen pontjára illeszkedő legrövidebb körút minimális (euklideszi értelemben vett) összhosszát (bizonyítás nélkül):

> It is also easy to see in a general way how the journey time is likely to behave. Let us suppose that n sampling units are scattered at random within any given area; and let us assume that we may treat each such sample unit as a geometrical point. We may also assume that arrangements will usually be made to move from one sample point to another in such a way as to keep the total distance travelled as small as possible; that is, we may assume that the path traversed in going from one sample point to another will follow a straight line. In this case it is easy to see that the mathematical expectation of the total length of the path travelled in moving from one sample point to another will be $(\sqrt{n}-1/\sqrt{n})$. The cost of the journey from sample to sample will therefore be roughly proportional to $(\sqrt{n}-1/\sqrt{n})$. When n is large, that is, when we consider a sufficiently large area, we may expect that the time required for moving from sample to sample will be roughly proportional to $\sqrt{n}$,

[95] Koopmanst akkor kezdte el először érdekelni Hassler Whitney „48 állam problémája", amikor a Princeton Surveysnél dolgoztunk együtt, és én éppen próbáltam megoldani a feladatot egy Bob Singletonnal közös, iskolabusz útvonaltervezési munka kapcsán West Virginia állam részére.

> where n is the total number of samples in the given area. If we consider the journey time per sq. mile, it will be roughly proportional to $\sqrt{y}$, where y is the density of number of sample units per sq. mile.[96]

Ezt a kutatást Jessen [1942] folytatta, aki kísérleti úton hasonló becslést adott az l_1 távolság esetében (Manhattan távolság), amikor Iowa államban egy mintavételezési földmérés statisztikai vizsgálatában farmokkal kapcsolatos tényeket próbáltak gyűjteni.

> If a route connecting y points located at random in a fixed area is minimized, the total distance, D, of that route is[97]
>
> $$D = d\left(\frac{y-1}{\sqrt{y}}\right)$$
>
> where d is a constant.
>
> This relationship is based upon the assumption that points are connected by direct routes. In Iowa the road system is a quite regular network of mile square mesh. There are very few diagonal roads, therefore, routes between points resemble those taken on a checkerboard. A test wherein several sets of different members of points were located at random on an Iowa county road map, and the minimum distance of travel from a given point on the border of the county through all the points and to an end point (the county border nearest the last point on route), revealed that
>
> $$D = d\sqrt{y}$$
>
> works well. Here y is the number of randomized points (border points not included). This is of great aid in setting up a cost function.[98]

---

[96] Szintén nem nehéz megfigyelni, hogy az utazás időtartama hogyan fog viselkedni általában. Tegyük fel, hogy n mintavételezési egységet szórunk szét véletlenszerűen egy adott területen, és tegyük fel, hogy minden ilyen mintavételezési egységet egy mértani pontnak képzelhetünk el. Azt is feltehetjük, hogy az elrendezésben arra törekszünk, hogy úgy akarunk haladni az egyik mintavételezési ponttól a másikig, hogy a leutazott össztávolság a lehető legkisebb maradjon, azaz feltehetjük, hogy két mintavételezési pont között egyenes vonal mentén fogunk haladni. Ez esetben könnyen látható, hogy az egyik mintavételezési ponttól a másikig tartó út összhosszának matematikai várható értéke $(\sqrt{n} - 1/\sqrt{n})$ lesz. A mintahelytől mintahelyig tartó út összköltsége durván arányos lesz $(\sqrt{n} - 1/\sqrt{n})$-el. Amikor n nagy, azaz ha meglehetősen nagy területet veszünk figyelembe, arra számíthatunk, hogy az utazási idő mérési ponttól mérési pontig durván $\sqrt{n}$-el lesz arányos, ahol n a mérőhelyek száma az adott területen. Amennyiben a négyzetmérföldenkénti utazási időt tekintjük, ez durván $\sqrt{y}$-al lesz arányos, ahol y a mérőhelyek számának négyzetmérföldenkénti sűrűsége.

[97] Ezen a ponton Jessen egy lábjegyzetben Mahalanobis [1940]-re hivatkozott.

[98] Amikor egy adott területen véletlenszerűen elhelyezett y darab pontot összekötő útvonal minimális távolságát keressük, akkor ezen útvonal D összhosszúsága:

$$D = d\left(\frac{y-1}{\sqrt{y}}\right),$$

ahol d konstans.

Ez a kapcsolat azon a feltételezésen alapszik, hogy a pontokat közvetlen útvonallal kötjük össze. Iowában azonban az úthálózat egy meglehetősen szabályos négyzethálót alkot. Nagyon kevés átlós út van, ezért két pont között az útvonal inkább egy ostáblára emlékeztet. Egy kísérlet azonban, amelynek keretében több esetben különböző ponthalmazokat helyeztünk el véletlenszerűen egy Iowa-i megyei úttérképen és meghatároztuk a minimális úthosszat egy adott pontból a megye szélén, végig az összes adott ponton majd befejezve egy végponton (amely a megye szélének az

Marks [1948] bizonyítást adott a Mahalanobis-féle korlátra. Valójában azt mutatta meg, hogy $\sqrt{\frac{1}{2}A}(\sqrt{n}-1/\sqrt{n})$ egy alsó korlát, ahol A a régió területe. Ghosh [1949] olyan heurisztikát adott, ami $1.27\sqrt{An}$ összhosszúságú túrát talál, ezzel a felső korláttal tehát megmutatta, hogy a fenti alsó korlát aszimptotikusan közel van a várható értékhez. Továbbá megfigyelte a feladat bonyolultságát is:

> After locating the n random points in a map of the region, it is very difficult to find out *actually* the shortest path connecting the points, unless the number n is very small, which is seldom the case for a large-scale survey.[99]

TSP, szállítás és hozzárendelés

Mint ahogy sok más egyéb kombinatorikus optimalizálási feladatnál, a TSP kutatásánál is lényeges szerepet játszott a RAND vállalat Santa Monicában, Kalifornia államban. Hoffman és Wolfe [1985] a következőket írják:

> John Williams urged Flood in 1948 to popularize the TSP at the RAND Corporation, at least partly motivated by the purpose of creating intellectual challenges for models outside the theory of games. In fact, a prize was offered for a significant theorem bearing on the TSP. There is no doubt that the reputation and authority of RAND, which quickly became the intellectual center of much of operations research theory, amplified Flood's advertizing.[100]

A RAND kutatói arra gondoltak, hogy a szállítási feladatra kidolgozott sikeres módszerek talán átültethetők valahogyan az utazó ügynök problémára is. Flood [1956] megemlíti, hogy erre az elképzelésre Koopmans hívta fel a figyelmét 1948-ban. Tucker [1984] interjújában Flood így emlékszik:

> George Dantzig and Tjallings Koopmans met with me in 1948 in Washington, D.C., at the meeting of the International Statistical Institute, to tell me excitedly of their

utolsó ponthoz legközelebbi pontja volt), azt mutatta, hogy

$$D = d\sqrt{y}$$

itt is jól működik. Itt y a véletlen pontok száma (határpontoktól eltekintve). Ez nagyban segíti egy költségfüggvény felépítését.

[99]Miután elhelyeztük az n véletlen pontot a régió térképén, nagyon nehéz megtalálni, hogy mi is *valójában* a legrövidebb út, ami ezeket összeköti, hacsaknem az n szám nagyon kicsi, ami viszont ritkán teljesül egy nagy pontosságú felmérés esetében.

[100]John Williams 1948-ban arra ösztönözte Floodot, hogy népszerűsítse a TSP-t a RAND-nál, részben attól motiválva, hogy szellemi kihívást teremtsen olyan modellekkel kapcsolatosan is, amelyek nem a játékelmélet területéről származnak. Valójában díjat is kitűztek annak, aki a TSP-vel kapcsolatosan lényeges elméleti eredményt talál. A RAND gyorsan az operációkutatás egyik intellektuális fellegvárává nőtte ki magát, így kétségtelen, hogy a hírneve és tekintélye Flood problémájának különös súlyt adott.

> work on what is now known as the linear programming problem and with Tjallings speculating that there was a significant connection with the Traveling Salesman Problem.[101]

(Ezt a találkozót valójában 1947. szeptember 6-a és 18-a között tartották.)

A történet Julia Robinson [1949]-es RAND beszámolójával folytatódik, aki az utazó ügynök feladat megoldására tett sikertelen kísérlet kapcsán annak relaxációjára, a hozzárendelési feladatra adott egy kör mentén javító eljárást. A kapcsolat a következő: míg a hozzárendelési feladat egy optimális permutációt keres, addig az utazó ügynök feladat célja egy optimális *ciklikus* permutáció megtalálása.

Robinson RAND beszámolója talán a legkorábbi matematikai hivatkozás, ami az „utazó ügynök feladat" kifejezést használja:

> The purpose of this note is to give a method for solving a problem related to the traveling salesman problem. One formulation is to find the shortest route for a salesman starting from Washington, visiting all the state capitals and then returning to Washington. More generally, to find the shortest closed curve containing n given points in the plane.[102]

Flood (egy 1983. május 17-én E.L. Lawlernek címzett levélben) azt írja, hogy Robinson beszámolója sok beszélgetést stimulált a TSP-vel kapcsolatosan közte és tudományos segédmunkatársa, D.R. Fulkerson között 1950–1952-ben[103].

Beckmann és Koopmans [1952] megjegyzi, hogy a TSP megfogalmazható négyzetes hozzárendelési feladatként, amelyre azonban nem ismeretes gyors megoldási módszer.

Dantzig, Fulkerson, Johnson (1954)

Számottevő előrelépést az utazó ügynök feladattal kapcsolatosan a RAND-nál dolgozó Dantzig, Fulkerson és Johnson [1954] cikke hozott – amely Hoffman és Wolfe [1985] szerint „a kombinatorikus optimalizálás egyik fő eseménye". A cikk több olyan módszert is bevezet az utazó ügynök feladat megoldására, amelyek ma alapvetőek a kombinatorikus optimalizálásban. Egyik fő erénye, hogy megmutatja a *vágósíkok* jelentőségét a kombinatorikus optimalizálásban.

---

[101] George Dantziggal és Tjallings Koopmans-szal 1948-ban találkoztam Washington D.C.-ben a Nemzetközi Statisztikai Intézet találkozóján. Meg kell mondanom, nagyon izgatottan vártam ezt a találkozást a (mai nevén) lineáris programozási feladattal kapcsolatos munkájuk miatt, illetve Tjallings-szal azon spekuláltunk, hátha van ennek valamilyen közvetlen kapcsolata az utazó ügynök problémával.

[102] Írásom célja, hogy egy megoldó módszert adjak az utazó ügynök feladat egy rokon problémájára. Ennek egyik megfogalmazása szerint a legrövidebb útvonalat keressük egy üzletkötő részére, aki Washingtonból indul, végiglátogatja az összes állam fővárosait és végül Washingtonba tér vissza. Általánosabban, a legrövidebb zárt görbét keressük a sík n adott pontján keresztül.

[103] Fulkerson csak 1951 márciusában kezdett a RAND-nál.

Birkhoff [1946] egy tétele szerint az $n \times n$-es permutációs mátrixok konvex burka nem más, mint a duplán sztochasztikus mátrixok – ezek azok a nemnegatív mátrixok, amelyekben minden sorösszeg és minden oszlopösszeg 1. Más szavakkal a permutációs mátrixok konvex burkát meghatározza:

$$x_{i,j} \geq 0 \text{ minden } i,j\text{-re; } \sum_{j=1}^{n} x_{i,j} = 1 \text{ minden } i\text{-re; } \sum_{i=1}^{n} x_{i,j} = 1 \text{ minden } j\text{-re.} \quad (5)$$

Ez teszi lehetővé, hogy a hozzárendelési feladatot lineáris programozási feladatként kezeljük. Adódik az elképzelés, hogy próbáljuk meg ugyanezt a megközelítést az utazó ügynök problémára. Ehhez elsőként is lineáris egyenlőtlenségekkel kellene leírnunk a *utazó ügynök politópot* – a *ciklikus* permutációk konvex burkát. Ennek érdekében hozzáadhatjuk (5)-höz az alábbi *résztúra kiküszöbölési feltételeket*:

$$\sum_{i \in I, j \notin I} x_{i,j} \geq 1 \text{ minden egyes } I \subseteq \{1,\ldots,n\}, \text{ amelyre } \emptyset \neq I \neq \{1,\ldots,n\}. \quad (6)$$

Azonban míg ezek az egyenlőtlenségek elégségesek ahhoz, hogy levágják a nem ciklikus permutációkat a duplán sztochasztikus mátrixokból, nem adják ki az utazó ügynök politóp összes lapját (ha $n \geq 5$), mint azt Heller [1953a] megfigyelte: bármely $n \geq 5$-re vannak olyan n-edrendű duplán sztochasztikus mátrixok, amelyek kielégítik (6)-ot, de nem állíthatók elő ciklikus permutációs mátrixok konvex kombinációjaként.

Mindazonáltal a (6) egyenlőtlenségek hasznosak lehetnek a TSP-hez is, mivel alsó korlátot kapunk az optimális túrára, ha az (5) és (6) feltételek mellett minimalizálunk. Ezt az alsó korlátot megkaphatjuk a szimplex módszerrel, ha az (exponenciálisan sok) (6) feltételeket az eljárás során mint *vágósíkokat* vesszük figyelembe, amikor az eljárás megköveteli. Ezen a módon Dantzig, Fulkerson és Johnson meg tudta keresni a legrövidebb körutat az USA 48 államán és Washington DC-n keresztül. Egyébként ez a feladat közel áll ahhoz a problémához, amelyet Julia Robinson említ 1949-ben (és talán Whitney is a 1930-as években).

A Dantzig-Fulkerson-Johnson-cikk nem algoritmust ad, mint inkább egy körutat, és bebizonyítja annak optimalitását a résztúra kiküszöbölési feltételek segítségével. Ez a módszer adja az alapját sok későbbi olyan munkának, amelyekben nagyméretű utazó ügynök feladatokat oldottak meg.

Az utazó ügynök politópról az első tanulmányok a következők: Heller [1953a,1953b,1955a,1956b,1955b,1956a], Kuhn [1955a], Norman [1955] és Robacker [1955b], akik számítási eredményekkel is vizsgálták annak a valószínűségét, hogy az utazó ügynök feladat egy véletlen példányánál szükség van a (6) feltételekre (vö. Kuhn [1991]). Ez késztette Floodot a következő megjegyzésre a feladat valódi bonyolultságát illetően (Flood [1956]):

> Very recent mathematical work on the traveling-salesman problem by I. Heller, H.W. Kuhn, and others indicates that the problem is fundamentally complex. It

seems very likely that quite a different approach from any yet used may be required for succesful treatment of the problem. In fact, there may well be no general method for treating the problem and impossibility results would also be valuable.[104]

Flood az utazó ügynök problémának számos alkalmazását említi, főképp gépek ütemezésével kapcsolatban, amelyekre George Feeney egy a Columbia Egyetemen tartott 1954-es szemináriumi előadása hívta fel a figyelmét.

Az 1950-es években a következő egyéb munkák születtek az utazó ügynök feladattal kapcsolatosan: Morton és Land [1955] (egy lineáris programozási megközelítés a 3-csere heurisztikával), Barachet [1957] (egy grafikus megoldási módszer), Bock [1958], Croes [1958] (egy heurisztika), Rossman és Twery [1958]. Barachet cikkére reagálva Dantzig, Fulkerson és Johnson [1959] megmutatták, hogy módszerük kiadja a Barachet által (heurisztikus úton) talált megoldás optimalitását.

Köszönetnyilvánítás

Köszönettel tartozom Szása Karzanovnak Tolsztoj és számos más szerző cikkének a moszkvai (ex-)Lenin könyvtárban való megtalálásában nyújtott hathatós támogatásáért, Irina V. Karzanovának Tolsztoj 1930-as cikkének pontos fordításáért, Alexander Rosanak Kotzig disszertációjának elküldéséért és a kivonatának fordításáért, Frank Andrásnak és Jordán Tibornak a magyar nyelvű cikkek fordításáért, Adri Steenbeeknek és Bill Cooknak az 1832-es kézikönyvben szereplő 45 német városon átvezető legrövidebb utazó ügynök útvonalnak a megtalálásáért, Karin van Gemertnek és Wouter Mettropnak, a CWI könyvtárosainak, akik számos cikk másolatát és bibliográfiai adatait beszerezték, Alfred B. Lehmannak a tőle kapott régi Case Institute of Technology beszámolók másolataiért, Jan Karel Lenstranak az utazó ügynök problémáról szóló Albert Tuckertől David Shmoyshoz, ill. Merrill M. Floodtól Eugine L. Lawlerhez szóló levelek másolataiért, Alan Hoffmannak és David Williamsonnak a segítségért Gleyzal szállítási problémáról szóló cikkének megértéséhez, Steve Bradynek és Dick Cottlenek a klasszikus RAND reportok megszerzésében való közreműködésért, a Pentagonban, a Légierőnél dolgozó Kim H. Campbellnek és Joanne McLeannek a Harris-Ross beszámoló titkosításának feloldásáért, a RAND vállalatnál dolgozó Richard Bancroftnak és Bustave Shubertnek az ebben történő közbenjárásért, Bruno Simeonenak Salvemini cikkének elküldéséért, valamint Truus Wanningen Koopmansnak azért, mert megosztotta velem „Stories and Memories" c. visszaemlékezéseit, ill. Tj.C. Koopmans naplóidézeteit.

A másik két fordító köszönetet mond Fleiner Tamásnak, aki nagy alapossággal ellenőrizte mindkettőjük munkáját.

[104] I. Heller, H.W. Kuhn és mások új keletű matematikai munkássága az utazó ügynök feladattal kapcsolatban azt mutatja, hogy a probléma alapvetően bonyolult. Nagyon valószínűnek tűnik, hogy az eddig használtaktól lényegesen eltérő megközelítésre lehet szükség a probléma sikeres kezeléséhez. Valójában lehetséges, hogy nincs is általános módszer a probléma megoldására, és ilyen lehetetlenségi eredmények is értékesek lennének.

Hivatkozások

[1996] K.S. Alexander: *A conversation with Ted Harris*, Statistical Science **11** (1996) 150–158.

[1928] P. Appell: *Le problème géométrique des déblais et remblais* [Mémorial des Sciences Mathématiques XXVII], Gauthier-Villars, Paris, 1928.

[1957] L.L. Barachet: *Graphic solution to the traveling-salesman problem*, Operations Research **5** (1957) 841–845.

[1957] T.E. Bartlett: *An algorithm for the minimum number of transport units to maintain a fixed schedule*, Naval Research Logistics Quarterly **4** (1957) 139–149.

[1957] T.E. Bartlett, A. Charnes: [*Cyclic scheduling and combinatorial topology*: assignment and routing of motive power to meet scheduling and maintenance requirements] Part II Generalization and analysis, Naval Research Logistics Quarterly 4 (1957) 207–220.

[1959] J. Beardwood, J.H. Halton, J.M. Hammersley: *The shortest path through many points*, Proceedings of the Cambridge Philosophical Society **55** (1959) 299–327.

[1952] M. Beckmann, T.C. Koopmans: *A Note on the Optimal Assignment Problem*, Cowles Commission Discussion Paper: Economics **2053**, Cowles Commission for Research in Economics, Chicago, Illinois, 1952. október 30.

[1953] M. Beckmann, T.C. Koopmans: *On Some Assignment Problems*, Cowles Commission Discussion Paper: Economics No. **2071**, Cowles Commission for Research in Economics, Chicago, Illinois, 1953. április 2.

[1956] M. Beckmann, C.B. McGuire, C.B. Winsten: *Studies in the Economics of Transportation*, Cowles Commission for Research in Economics, Yale University Press, New Haven, Connecticut, 1956.

[1958] R. Bellman: *On a routing problem*, Quarterly of Applied Mathematics **16** (1958) 87–90.

[1958] C. Berge: *Théorie des graphes et ses applications*, Dunod, Paris, 1958.

[1976] N.L. Biggs, E.K. Lloyd, R.J. Wilson: *Graph Theory 1736–1936*, Clarendon Press, Oxford, 1976.

[1946] G. Birkhoff: *Tres observaciones sobre el algebra lineal*, Revista Facultad de Ciencias Exactas, Puras y Aplicadas Universidad Nacional de Tucuman, Serie A (Matematicas y Fisica Teorica) **5** (1946) 147–151.

[1958] F. Bock: *An algorithm for solving „travelling-salesman" and related network optimization problems [kivonat]*, Operations Research **6** (1958) 897.

[1958] F. Bock, S. Cameron: *Allocation of network traffic demand by instant determination of optimum paths* [előadva a 13th National (6th Annual) Meeting of the Operations Research Society of America konferencián, Boston, Massachusetts, 1958], Operations Research **6** (1958) 633–634.

[1955a] A.W. Boldyreff: *Determination of the Maximal Steady State Flow of Traffic through a Railroad Network*, Research Memorandum RM-1532, The RAND Corporation, Santa Monica, California, 1955. augusztus 5. [a *Journal of the Operations Research Society of America* **3** (1955) 443–465 közölte].

[1955b] A.W. Boldyreff: *The gaming approach to the problem of flow through a traffic network* [a Third Annual Meeting of the Society, New York, 1955. június 3–4., konferencián tartott előadás kivonata], Journal of the Operations Research Society of America **3** (1955) 360.

[1926a] O. Borůvka: *O jistém problému minimálním [Cseh, német összefoglalóval*; Egy minimumproblémáról], Práce Moravské Přírodovědecké Společnosti Brno [Acta Societatis Scientiarum Naturalium Moravi[c]ae] **3** (1926) 37–58.

[1926b] O. Borůvka: *Příspěvek k řešení otázky ekonomické stavby elektrovodných sítí* [Cseh; Elektromos hálózatok gazdaságos szerkesztési problémájának megoldásáról], Elektrotechnický Obzor **15:10** (1926) 153–154.

[1977] O. Borůvka: *Několik vzpomínek na matematický život v Brně*, Pokroky Matematiky, Fyziky a Astronomie **22** (1977) 91–99.

[1951] G.W. Brown: *Iterative solution of games by fictitious play*, lelőhely: Activity Analysis of Production and Allocation — Proceedings of a Conference (Proceedings Conference on Linear Programming, Chicago, Illinois, 1949; Tj.C. Koopmans, ed.), Wiley, New York, 1951, pp. 374–376.

[1950] G.W. Brown, J. von Neumann: *Solutions of games by differential equations*, lelőhely: Contributions to the Theory of Games (H.W. Kuhn, A.W. Tucker, eds.) [Annals of Mathematics Studies **24**], Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1950, pp. 73–79.

[1938] G. Choquet: *Étude de certains réseaux de routes*, Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences **206** (1938) 310–313.

[1832] ['ein alter Commis-Voyageur']: *Der Handlungsreisende — wie er sein soll und was er zu thun hat, um Aufträge zu erhalten und eines glücklichen Erfolgs in seinen Geschäften gewiß zu sein — Von einem alten Commis-Voyageur*, B.Fr. Voigt, Ilmenau, 1832 [reprint: Verlag Bernd Schramm, Kiel, 1981].

[1958] G.A. Croes: *A method for solving traveling-salesman problems*, Operations Research **6** (1958) 791–812.

[1951a] G.B. Dantzig: *Application of the simplex method to a transportation problem*, lelőhely: Activity Analysis of Production and Allocation — Proceedings of a Conference (Proceedings Conference on Linear Programming, Chicago, Illinois, 1949; Tj.C. Koopmans, ed.), Wiley, New York, 1951, pp. 359–373.

[1951b] G.B. Dantzig: *Maximization of a linear function of variables subject to linear inequalities*, lelőhely: Activity Analysis of Production and Allocation — Proceedings of a Conference (Proceedings Conference on Linear Programming, Chicago, Illinois, 1949; Tj.C. Koopmans, ed.), Wiley, New York, 1951, pp. 339–347.

[1957] G.B. Dantzig: *Discrete-variable extremum problems*, Operations Research **5** (1957) 266–277.

[1958] G.B. Dantzig: *On the Shortest Route through a Network*, Report P-1345, The RAND Corporation, Santa Monica, California, 1958. április 12. [Javított változat 1959. április 29. [a *Management Science* **6** (1960) 187–190 közölte].

[1954] G.B. Dantzig, D.R. Fulkerson: *Notes on Linear Programming: Part XV — Minimizing the Number of Carriers to Meet a Fixed Schedule*, Research Memorandum RM-1328, The RAND Corporation, Santa Monica, California, 1954. augusztus 24. [a *Naval Research Logistics Quarterly* **1** (1954) 217–222 közölte].

[1955] sc G.B. Dantzig, D.R. Fulkerson: *On the Max Flow Min Cut Theorem of Networks*, Research Memorandum RM-1418, The RAND Corporation, Santa Monica, California, 1955. január 1. [átdolgozva: Research Memorandum RM-1418-1 (= Paper P-826), The RAND Corporation, Santa Monica, California, 1955. április 15. [a *Linear Inequalities and Related Systems* (H.W. Kuhn, A.W. Tucker, eds.) [Annals of Mathematics Studies 38], Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1956, pp. 215–221] közölte].

[1954] G. Dantzig, R. Fulkerson, S. Johnson: *Solution of a Large Scale Traveling Salesman Problem*, Paper P-510, The RAND Corporation, Santa Monica, California, 1954. április 12. [a *Journal of the Operations Research Society of America* **2** (1954) 393–410 közölte].

[1959] sc G.B. Dantzig, D.R. Fulkerson, S.M. Johnson: *On a Linear-Programming-Combinatorial Approach to the Traveling-Salesman Problem: Notes on Linear Programming and Extensions-Part 49*, Research Memorandum RM-2321, The RAND Corporation, Santa Monica, California, 1959 [az *Operations Research* **7** (1959) 58–66 közölte].

[1959] E.W. Dijkstra: *A note on two problems in connexion with graphs*, Numerische Mathematik **1** (1959) 269–271.

[1954] P.S. DWYER: *Solution of the personnel classification problem with the method of optimal regions*, Psychometrika **19** (1954) 11–26.

[1946] T.E. EASTERFIELD: *A combinatorial algorithm*, The Journal of the London Mathematical Society **21** (1946) 219–226.

[1970] J. EDMONDS: *Exponential growth of the simplex method for shortest path problems*, manuscript [University of Waterloo, Waterloo, Ontario], 1970.

[1931] J. EGERVÁRY: *Matrixok kombinatorikus tulajdonságairól [Német összefoglalóval]*, Matematikai és Fizikai Lapok **38** (1931) 16–28 [H.W. Kuhn angol fordítása: On combinatorial properties of matrices, Logistics Papers, George Washington University, issue **11** (1955), paper 4, pp. 1–11].

[1958] E. EGERVÁRY: *Bemerkungen zum Transportproblem*, MTW Mitteilungen **5** (1958) 278–284.

[1956] P. ELIAS, A. FEINSTEIN, C.E. SHANNON: *A note on the maximum flow through a network*, IRE Transactions on Information Theory IT-2 (1956) 117–119.

[1940] L. FEJES: *Über einen geometrischen Satz*, Mathematische Zeitschrift **46** (1940) 83–85.

[1955] L. FEW: *The shortest path and the shortest road through n points*, Mathematika [London] **2** (1955) 141–144.

[1956] M.M. FLOOD: *The traveling-salesman problem*, Operations Research **4** (1956) 61–75 [szintén megtalálható: *Operations Research for Management — Volume IICase Histories, Methods, Information Handling* (J.F. McCloskey, J.M. Coppinger, eds.), Johns Hopkins Press, Baltimore, Maryland, 1956, pp. 340–357].

[1951a] K. FLOREK, J. ŁUKASZEWICZ, J. PERKAL, H.STEINHAUS, S. ZUBRZYCKI: *Sur la liaison et la division des points d'un ensemble fini*, Colloquium Mathematicum **2** (1951) 282–285.

[1951b] K. FLOREK, J. ŁUKASZEWICZ, J. PERKAL, H. STEINHAUS, S. ZUBRZYCKI: *Taksonomia Wrocławska [Lengyel nyelven, angol és orosz összefoglalóval]*, Przeglad Antropologiczny **17** (1951) 193–211.

[1956] L.R. FORD, JR: *Network Flow Theory*, Paper P-923, The RAND Corporation, Santa Monica, California, 1956. augusztus 14.

[1954] L.R. FORD, D.R. FULKERSON: *Maximal Flow through a Network*, Research Memorandum RM-1400, The RAND Corporation, Santa Monica, California, 1954. november 19. [a *Canadian Journal of Mathematics* **8** (1956) 399–404 közölte].

[1955] L.R. FORD, JR, D.R. FULKERSON: *A Simple Algorithm for Finding Maximal Network Flows and an Application to the Hitchcock Problem*, Research Memorandum RM-1604, The RAND Corporation, Santa Monica, California, 1955. december 29. [a *Canadian Journal of Mathematics* **9** (1957) 210–218 közölte].

[1956a] L.R. FORD, JR, D.R. FULKERSON: *A Primal Dual Algorithm for the Capacitated Hitchcock Problem* [Notes on Linear Programming: Part XXXIV], Research Memorandum RM-1798 [ASTIA Document Number AD 112372], The RAND Corporation, Santa Monica, California, 1956. szeptember 25. [a *Naval Research Logistics Quarterly* 4 (1957) 47–54 közölte].

[1956b] L.R. FORD, JR, D.R. FULKERSON: *Solving the Transportation Problem* [Notes on Linear Programming — Part XXXII], Research Memorandum RM-1736, The RAND Corporation, Santa Monica, California, 1956. június 20. [a *Management Science* **3** (1956-57) 24–32 közölte].

[1957] L.R. FORD, JR, D.R. FULKERSON: *Construction of Maximal Dynamic Flows in Networks*, Paper P-1079 [= Research Memorandum RM-1981], The RAND Corporation, Santa Monica, California, 1957. május 7. [az *Operations Research* **6** (1958) 419–433 közölte].

[1962] L.R. FORD, JR, D.R. FULKERSON: *Flows in Networks*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1962.

[1951] M. Fréchet: *Sur les tableaux de corrélation dont les marges sont données*, Annales de l'Université de Lyon, Section A, Sciences Mathématiques et Astronomie (3) **14** (1951) 53–77.

[1912] F.G. Frobenius: *Über Matrizen aus nicht negativen Elementen*, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin (1912) 456–477 [reprint: *Ferdinand Georg Frobenius, Gesammelte Abhandlungen*, Band III (J.-P. Serre, ed.), Springer, Berlin, 1968, pp. 546–567].

[1917] G. Frobenius: *Über zerlegbare Determinanten*, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin (1917) 274–277 [reprint: *Ferdinand Georg Frobenius, Gesammelte Abhandlungen*, Band III (J.-P. Serre, ed.), Springer, Berlin, 1968, pp. 701–704].

[1958] D.R. Fulkerson: *Notes on Linear Programming: Part XLVI — Bounds on the Primal-Dual Computation for Transportation Problems*, Research Memorandum RM-2178, The RAND Corporation, Santa Monica, California, 1958.

[1958] T. Gallai: *Maximum-minimum Sätze über Graphen*, Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae **9** (1958) 395–434.

[1978] T. Gallai: *The life and scientific work of Dénes Kőnig (1884–1944)*, Linear Algebra and Its Applications **21** (1978) 189–205.

[1949] M.N. Ghosh: *Expected travel among random points in a region*, Calcutta Statistical Association Bulletin **2**(1949) 83–87.

[1955] A. Gleyzal: *An algorithm for solving the transportation problem*, Journal of Research National Bureau of Standards **54** (1955) 213–216.

[1985] R.L. Graham, P. Hell: *On the history of the minimum spanning tree problem*, Annals of the History of Computing **7** (1985) 43–57.

[1938] T. Grünwald: *Ein neuer Beweis eines Mengerschen Satzes*, The Journal of the London Mathematical Society **13** (1938) 188–192.

[1934] G. Hajós: *Zum Mengerschen Graphensatz*, Acta Litterarum ac Scientiarum Regiae Universitatis Hungaricae Francisco-Josephinae, Sectio Scientiarum Mathematicarum [Szeged] **7** (1934-35) 44–47.

[1856] W.R. Hamilton: *Memorandum respecting a new system of roots of unity (the Icosian calculus)*, Philosophical Magazine **12** (1856) 446, Proceedings of the Royal Irish Academy **6** (1858) 415–416 [reprint: *The Mathematical Papers of Sir William Rowan Hamilton — Vol. III Algebra* (H. Halberstam, R.E. Ingram, eds.), Cambridge University Press, Cambridge, 1967, p. 610].

[1858] W.R. Hamilton: *On a new system of roots of unity*, Proceedings of the Royal Irish Academy **6** (1858) 415–416 [reprint: *The Mathematical Papers of Sir William Rowan Hamilton — Vol. III Algebra* (H. Halberstam, R.E. Ingram, eds.), Cambridge University Press, Cambridge, 1967, p. 609].

[1955] T.E. Harris, F.S. Ross: *Fundamentals of a Method for Evaluating Rail Net Capacities*, Research Memorandum RM-1573, The RAND Corporation, Santa Monica, California, 1955. október 24.

[1953a] I. Heller: *On the problem of shortest path between points. I [kivonat]*, Bulletin of the American Mathematical Society **59** (1953) 551.

[1953b] I. Heller: *On the problem of shortest path between points. II [kivonat]*, Bulletin of the American Mathematical Society **59** (1953) 551–552.

[1955a] I. Heller: *Geometric characterization of cyclic permutations [kivonat]*, Bulletin of the American Mathematical Society **61** (1955) 227.

[1955b] I. Heller: *Neighbor relations on the convex of cyclic permutations*, Bulletin of the American Mathematical Society **61** (1955) 440.

[1956a] I. Heller: *Neighbor relations on the convex of cyclic permutations*, Pacific Journal of Mathematics **6** (1956) 467–477.

[1956b] I. Heller: *On the travelling salesman's problem*, lelőhely: Proceedings of the Second Symposium in Linear Programming (Washington, D.C., 1955; H.A. Antosiewicz, ed.), Vol. **2**, National Bureau of Standards, U.S. Department of Commerce, Washington, D.C., 1956, pp. 643–665.

[1941] F.L. Hitchcock: *The distribution of a product from several sources to numerous localities*, Journal of Mathematics and Physics **20** (1941) 224–230.

[1959] W. Hoffman, R. Pavley: *Applications of digital computers to problems in the study of vehicular traffic*, lelőhely: Proceedings of the Western Joint Computer Conference (Los Angeles, California, 1958), American Institute of Electrical Engineers, New York, 1959, pp. 159–161.

[1985] A.J. Hoffman, P. Wolfe: *History*, lelőhely: The Traveling Salesman Problem — A Guided Tour of Combinatorial Optimization (E.L. Lawler, J.K. Lenstra, A.H.G. Rinnooy Kan, D.B. Shmoys, eds.), Wiley, Chichester, 1985, pp. 1–15.

[1955] E. Jacobitti: *Automatic alternate routing in the 4A crossbar system*, Bell Laboratories Record **33** (1955) 141–145.

[1930] V. Jarník: *O jistém problému minimálním (Z dopisu panu O. Borůvkovi)* [Cseh; Egy minimumproblémáról (egy Borůvka úrhoz írt levélből)], Práce Moravské Přírodovědecké Společnosti Brno [Acta Societatis Scientiarum Naturalium Moravicae] **6** (1930-31) 57–63.

[1934] V. Jarník, M. Kössler: *O minimálních grafech*, obsahujíciích n daných bodů, Časopis pro Pěstování Matematiky a Fysiky **63** (1934) 223–235.

[1942] R.J. Jessen: *Statistical Investigation of a Sample Survey for Obtaining Farm Facts* Research Bulletin **304**, Iowa State College of Agriculture and Mechanic Arts, Ames, Iowa, 1942.

[1973a] D.B. Johnson: *A note on Dijkstra's shortest path algorithm*, Journal of the Association for Computing Machinery **20** (1973) 385–388.

[1973b] D.B. Johnson: *Algorithms for Shortest Paths*, Doktori értekezés [Technical Report CU-CSD-73-169, Department of Computer Science], Cornell University, Ithaca, New York, 1973.

[1977] D.B. Johnson: *Efficient algorithms for shortest paths in sparse networks*, Journal of the Association for Computing Machinery **24** (1977) 1–13.

[1939] L.V. Kantorovics: *Mátyemátyícseszkije metodi organizáciji i plányiroványija proizvodsztva* [Orosz], a Leningrádi Állami Egyetem Kiadója, Leningrád, 1939 [reprint (kisebb átdolgozással): *Primenyényije mátyemátyiki v ekonomícseszkih isszlédoványiján* [Orosz; A matematika alkalmazása a közgazdaságtanban] (V.S. Nemcsinov, szerk.), Izdátyelsztvo Szociálno-Ekonomícseszkoj Lityeráturi, Moszkva, 1959, pp. 251–309] [Angol fordítás: Mathematical methods of organizing and planning production, *Management Science* **6** (1959-60) 366–422 [ugyancsak közölte: *The Use of Mathematics in Economics* (V.S. Nemchinov, ed.), Oliver and Boyd, Edinburgh, 1964, pp. 225–279]].

[1940] L.V. Kantorovics: *Ob ádnom effektivnom metogye résényija nékotórih klásszov éksztremálnüh problém[Orosz]*, Dokládi Ákágyémii Náuk SzSzSzR **28** (1940) 212–215 [Angol fordítás: An effective method for solving some classes of extremal problems, *Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'U.R.S.S.* **28** (1940) 211–214].

[1942] L.V. Kantorovics: *Á peremescsényii massz [Orosz]*, Dokládi Ákágyémii Náuk SzSzSzR **37**:7-8 (1942) 227–230 [Angold fordítás: On the translocation of masses, *Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'U.R.S.S.* **37** (1942) 199–201 [reprint: *Management Science* **5** (1958) 1–4]].

[1987] L.V. Kantorovics: *Moj puty v náuke (Predpálágávijszja doklád v Moszkovszkom mátyemátyicseszkom obscsesztve) [Orosz; Utam a tudományban (a Moszkvai Matematikai Társulat számára készített jelentés)]*, Uszpéhi Mátyemátyicseszkih Náuk **42**:2 (1987) 183–213 [Angol fordítás: *Russian Mathematical Surveys* **42**:2 (1987) 233–270 [reprint: *Functional Analysis, Optimization, and Mathematical Economics, A Collection of Papers Dedicated to the Memory of Leonid Vital'evich Kantorovich* (L.J. Leifman, ed.), Oxford University Press, New York, 1990, pp. 8–45]; ld még: *L.V. Kantorovich Selected Works Part I* (S.S. Kutateladze, ed.), Gordon and Breach, Amsterdam, 1996, pp. 17–54].

[1949] L.V. Kantorovics, M.K. Gavurin: *Primenyényije mátyemátyicseszkih métodov v váproszáh ánálizá gruzápátokov [Orosz; Matematikai módszerek alkalmazása a rakományok áramlásának analízisében]*, lelőhely: Problémi pávisenyija effektivnosztyi ráboti tránszporta [Orosz; Szállításhatékonyság növelési problémagyűjtemény], Ákágyémija Náuk SzSzSzR, Moszkva-Leningrád, 1949, pp. 110–138.

[1856] T.P. Kirkman, *On the representation of polyhedra*, Philosophical Transactions of the Royal Society of London Series A **146** (1856) 413–418.

[1930] B. Knaster: *Sui punti regolari nelle curve di Jordan*, lelőhely: Atti del Congresso Internazionale dei Matematici [Bologna 3–10 Settembre 1928] Tomo II, Nicola Zanichelli, Bologna, [1930,] pp. 225–227.

[1915] D. Kőnig: *Vonalrendszerek és determinánsok*, Mathematikai és Természettudományi Értesitő **33** (1915) 221–229.

[1916] D. Kőnig: *Graphok és alkalmazásuk a determinánsok és a halmazok elméletére*, Mathematikai és Természettudományi Értesítő **34** (1916) 104–119 [Német fordítás: *Über Graphen und ihre Anwendung auf Determinantentheorie und Mengenlehre*, Mathematische Annalen **77** (1916) 453–465].

[1923] D. Kőnig: *Sur un problème de la théorie générale des ensembles et la théorie des graphes* [Communication faite, le 7 avril 1914, au Congrès de Philosophie mathématique à Paris], Revue de Métaphysique et de Morale **30** (1923) 443–449.

[1931] D. Kőnig: *Graphok és matrixok*, Matematikai és Fizikai Lapok **38** (1931) 116–119.

[1932] D. Kőnig: *Über trennende Knotenpunkte in Graphen (nebst Anwendungen auf Determinanten und Matrizen)*, Acta Litterarum ac Scientiarum Regiae Universitatis Hungaricae Francisco-Josephinae, Sectio Scientiarum Mathematicarum [Szeged] **6** (1932–34) 155–179.

[1939] T. Koopmans: *Tanker Freight Rates and Tankship Building — An Analysis of Cyclical Fluctuations*, Publication Nr **27**, Netherlands Economic Institute, De Erven Bohn, Haarlem, 1939.

[1942] Tj.C. Koopmans: *Exchange ratios between cargoes on various routes (non-refrigerating dry cargoes)*, Memorandum for the Combined Shipping Adjustment Board, Washington D.C., 1942, 1–12 [első közlés: *Scientific Papers of Tjalling C. Koopmans*, Springer, Berlin, 1970, pp. 77–86].

[1948] Tj.C. Koopmans: *Optimum utilization of the transportation system*, lelőhely: The Econometric Society Meeting (Washington, D.C., 1947; D.H. Leavens, ed.) [Proceedings of the International Statistical Conferences — Volume V], 1948, pp. 136–146 [reprint: Econometrica **17** (Supplement) (1949) 136–146] [reprint: Scientific Papers of Tjalling C. Koopmans, Springer, Berlin, 1970, pp. 184–193].

[1959] Tj.C. Koopmans: *A note about Kantorovich's paper*, „Mathematical methods of organizing and planning production", Management Science **6** (1959–60) 363–365.

[1992] Tj.C. Koopmans: [önéletrajz] lelőhely: *Nobel Lectures including presentation speeches and laureates' biographies* — Economic Sciences 1969–1980 (A. Lindbeck, ed.), World Scientific, Singapore, 1992, pp. 233–238.

[1949a] T.C. Koopmans, S. Reiter: *Allocation of Resources in Production, I*, Cowles Commission Discussion Paper. Economics: No. **264**, Cowles Commission for Research in Economics, Chicago, Illinois, 1949. május 4.

[1949b] T.C. Koopmans, S. Reiter: *Allocation of Resources in Production II Application to Transportation*, Cowles Commission Discussion Paper: Economics: No. **264**A, Cowles Commission for Research in Economics, Chicago, Illinois, 1949. május 19.

[1951] Tj.C. Koopmans, S. Reiter: *A model of transportation*, lelőhely: Activity Analysis of Production and Allocation — Proceedings of a Conference (Proceedings Conference on Linear Programming, Chicago, Illinois, 1949; Tj.C. Koopmans, ed.), Wiley, New York, 1951, pp. 222–259.

[2001] B. Korte, J. Nešetřil: *Vojtěch Jarník's work in combinatorial optimization*, Discrete Mathematics **235** (2001) 1–17.

[1956] A. Kotzig: *Súvislosť a Pravidelná Súvislosť Konečných Grafov* [Szlovák; Véges gráfok összfüggősége és reguláris összefüggősége], Academical Doctorate Dissertation, Vysoká Škola Ekonomická, Bratislava, 1956. szeptember.

[1917a] A. Kowalewski: *Topologische Deutung von Buntordnungsproblemen*, Sitzungsberichte Kaiserliche Akademie der Wissenschaften in Wien Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse Abteilung IIa **126** (1917) 963–1007.

[1917b] A. Kowalewski: *W.R. Hamilton's Dodekaederaufgabe als Buntordnungsproblem*, Sitzungsberichte Kaiserliche Akademie der Wissenschaften in Wien Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse Abteilung IIa **126** (1917) 67–90.

[1956] J.B. Kruskal, Jr: *On the shortest spanning subtree of a graph and the traveling salesman problem*, Proceedings of the American Mathematical Society **7** (1956) 48–50.

[1997] J.B. Kruskal: *A reminiscence about shortest spanning subtrees*, Archivum Mathematicum (Brno) **33** (1997) 13–14.

[1955a] H.W. Kuhn: *On certain convex polyhedra* [kivonat], Bulletin of the American Mathematical Society **61** (1955) 557–558.

[1955b] H.W. Kuhn: *The Hungarian method for the assignment problem*, Naval Research Logistics Quarterly **2** (1955) 83–97.

[1956] H.W. Kuhn: *Variants of the Hungarian method for assignment problems*, Naval Research Logistics Quarterly **3** (1956) 253–258.

[1991] H.W. Kuhn: *On the origin of the Hungarian method*, lelőhely: History of Mathematical Programming — A Collection of Personal Reminiscences (J.K. Lenstra, A.H.G. Rinnooy Kan, A. Schrijver, eds.), CWI, Amsterdam and North-Holland, Amsterdam, 1991, pp. 77–81.

[1954] A.H. Land: *A problem in transportation*, lelőhely: Conference on Linear Programming 1954 May (London, 1954), Ferranti Ltd., London, 1954, pp. 20–31.

[1947] H.D. Landahl: *A matrix calculus for neural nets*: II, Bulletin of Mathematical Biophysics **9** (1947) 99–108.

[1946] H.D. Landahl, R. Runge: *Outline of a matrix algebra for neural nets*, Bulletin of Mathematical Biophysics **8** (1946) 75–81.

[1957] M. Leyzorek, R.S. Gray, A.A. Johnson, W.C. Ladew, S.R. Meaker, Jr, R.M. Petry, R.N. Seitz: *Investigation of Model Techniques* — First Annual Report — 1956. június 6. – 1957. július 1. — A Study of Model Techniques for Communication Systems, Case Institute of Technology, Cleveland, Ohio, 1957.

[1957] H. Loberman, A. Weinberger: *Formal procedures for connecting terminals with a minimum total wire length*, Journal of the Association for Computing Machinery **4** (1957) 428–437.

[1952] F.M. Lord: *Notes on a problem of multiple classification*, Psychometrika **17** (1952) 297–304.

[1882] É. Lucas: *Récréations mathématiques, deuxième édition*, Gauthier-Villars, Paris, 1882–1883.

[1950] R.D. Luce: *Connectivity and generalized cliques in sociometric group structure*, Psychometrika **15** (1950) 169–190.

[1949] R.D. Luce, A.D. Perry: *A method of matrix analysis of group structure*, Psychometrika **14** (1949) 95–116.

[1950] A.G. Lunc: *Prilazsényie mátricsnoj bulévszkoj álgébrü k ánálízu i szintézu relejno-kontaktnüh szhém* [Orosz; Mátrix Boole algebra alkalmazása a relékapcsolású elrendezések analízisében és szintézisében], Dokládi Ákágyémii Náuk SzSzSzR (N.S.) **70** (1950) 421–423.

[1952] A.G. Lunc: *Álgebráicseszkije métodi ánálíza i szinteza kontaknüh szhém* [Orosz; Algebrai módszerek a relékapcsolású hálózatok analízisében és szintézisében], Izvesztyija Ákágyémii Náuk SzSzSzR, Szérija Matyematyicseszkaja **16** (1952) 405–426.

[1940] P.C. Mahalanobis: *A sample survey of the acreage under jute in Bengal*, Sankhyā **4** (1940) 511–530.

[1948] E.S. Marks: *A lower bound for the expected travel among m random points*, The Annals of Mathematical Statistics **19** (1948) 419–422.

[1927] K. Menger: *Zur allgemeinen Kurventheorie*, Fundamenta Mathematicae **10** (1927) 96–115.

[1928a] K. Menger: *Die Halbstetigkeit der Bogenlänge*, Anzeiger — Akademie der Wissenschaften in Wien — Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse **65** (1928) 278–281.

[1928b] K. Menger: *Ein Theorem über die Bogenlänge*, Anzeiger — Akademie der Wissenschaften in Wien — Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse **65** (1928) 264–266.

[1929a] K. Menger: *Eine weitere Verallgemeinerung des Längenbegriffes*, Anzeiger — Akademie der Wissenschaften in Wien — Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse **66** (1929) 24–25.

[1929b] K. Menger: *Über die neue Definition der Bogenlänge*, Anzeiger — Akademie der Wissenschaften in Wien — Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse **66** (1929) 23–24.

[1930] K. Menger: *Untersuchungen über allgemeine Metrik.* Vierte Untersuchung. Zur Metrik der Kurven, Mathematische Annalen **103** (1930) 466–501.

[1931a] K. Menger: *Bericht über ein mathematisches Kolloquium*, Monatshefte für Mathematik und Physik **38** (1931) 17–38.

[1931b] K. Menger: *Some applications of point-set methods*, Annals of Mathematics (2) **32** (1931) 739–760.

[1932] K. Menger: *Eine neue Definition der Bogenlänge*, Ergebnisse eines Mathematischen Kolloquiums **2** (1932) 11–12.

[1940] K. Menger: *On shortest polygonal approximations to a curve*, Reports of a Mathematical Colloquium (2) **2** (1940) 33–38.

[1981] K. Menger: *On the origin of the n-arc theorem*, Journal of Graph Theory **5** (1981) 341–350.

[1940] A.N. Milgram: *On shortest paths through a set*, Reports of a Mathematical Colloquium (2) **2** (1940) 39–44.

[1933] Y. Mimura: *Über die Bogenlänge, Ergebnisse eines Mathematischen Kolloquiums* **4** *(1933) 20–22.*

[1957] G.J. Minty*:* A comment on the shortest-route problem, *Operations Research* **5** *(1957) 724.*

[1958] G.J. Minty*:* A variant on the shortest-route problem, *Operations Research* **6** *(1958) 882–883.*

[1784] G. Monge*:* Mémoire sur la théorie des déblais et des remblais, *Histoire de l'Académie Royale des Sciences [année 1781. Avec les Mémoires de Mathématique & de Physique, pour la même Année] (2e partie) (1784) [*Histoire: *34–38,* Mémoire:*] 666–704.*

[1959] E.F. MOORE: The shortest path through a maze, *lelőhely: Proceedings of an International Symposium on the Theory of Switching, 1957 April 2–5, Part II [The Annals of the Computation Laboratory of Harvard University Volume XXX] (H. Aiken, ed.), Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts, 1959, pp. 285–292.*

[1955] G. MORTON, A. LAND: A contribution to the travelling-salesman' problem, *Journal of the Royal Statistical Society Series B* **17** *(1955) 185–194.*

[1983] H. MÜLLER-MERBACH: Zweimal travelling Salesman, *DGOR-Bulletin* **25** *(1983) 12–13.*

[1957] J. MUNKRES: Algorithms for the assignment and transportation problems, *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics* **5** *(1957) 32–38.*

[1951] J. VON NEUMANN: The Problem of Optimal Assignment and a Certain 2-Person Game, *publikálatlan kézirat, 1951. október 26.*

[1953] J. VON NEUMANN: A certain zero-sum two-person game equivalent to the optimal assignment problem, *lelőhely: Contributions to the Theory of Games Volume II (H.W. Kuhn, A.W. Tucker, eds.) [Annals of Mathematics Studies 28], Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1953, pp. 5–12 [reprint:* John von Neumann, Collected Works, Volume VI *(A.H. Taub, ed.), Pergamon Press, Oxford, 1963, pp. 44–49].*

[1932] G. NÖBELING: Eine Verschärfung des n-Beinsatzes, *Fundamenta Mathematicae* **18** *(1932) 23–38.*

[1955] R.Z. NORMAN: On the convex polyhedra of the symmetric traveling salesman problem *[kivonat], Bulletin of the American Mathematical Society* **61** *(1955) 559.*

[1955] A. ORDEN: The transhipment problem, *Management Science* **2** *(1955-56) 276–285.*

[1947] Z.N. PARIJSZKAJA, A.N. TOLSZTOJ, A.B. MOC: Plányiroványije Távárnih Perevózok — Métodi Opregyelényija Racionálnyih Putyej Továrodvizsenyija *[Orosz; Javak Szállításának Tervezése — Az Áruszállítás Hatékony Útvonalainak Tervezési Módszerei], Gosztorgizdat, Moszkva, 1947.*

[1957] W. PRAGER: A generalization of Hitchcock's transportation problem, *Journal of Mathematics and Physics* **36** *(1957) 99–106.*

[1957] R.C. PRIM: Shortest connection networks and some generalizations, *The Bell System Technical Journal* **36** *(1957) 1389–1401.*

[1957] R. RADO: Note on independence functions, *Proceedings of the London Mathematical Society (3)* **7** *(1957) 300–320.*

[1955a] J.T. ROBACKER: On Network Theory, *Research Memorandum RM-1498, The RAND Corporation, Santa Monica, California, 1955. május 26.*

[1955b] J.T. ROBACKER: Some Experiments on the Traveling-Salesman Problem, *Research Memorandum RM-1521, The RAND Corporation, Santa Monica, California, 1955. július 28.*

[1956] J.T. ROBACKER: Min-Max Theorems on Shortest Chains and Disjoint Cuts of a Network, *Research Memorandum RM-1660, The RAND Corporation, Santa Monica, California, 1956. január 12.*

[1949] J. ROBINSON: On the Hamiltonian Game (A Traveling Salesman Problem), *Research Memorandum RM-303, The RAND Corporation, Santa Monica, California, 1949. december 5.*

[1950] J. ROBINSON: A Note on the Hitchcock-Koopmans Problem, *Research Memorandum RM-407, The RAND Corporation, Santa Monica, California, 1950. június 15.*

[1951] J. ROBINSON: An iterative method of solving a game, *Annals of Mathematics* **54** *(1951) 296–301 [reprint:* The Collected Works of Julia Robinson *(S. Feferman, ed.), American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1996, pp. 41–46].*

[1956] L. Rosenfeld: Unusual problems and their solutions by digital computer techniques, *lelőhely: Proceedings of the Western Joint Computer Conference (San Francisco, California, 1956), The American Institute of Electrical Engineers, New York, 1956, pp. 79–82.*

[1958] M.J. Rossman, R.J. Twery: A solution to the travelling salesman problem by combinatorial programming *[kivonat], Operations Research* **6** *(1958) 897.*

[1927] N.E. Rutt: Concerning the cut points of a continuous curve when the arc curve, *ab*, contains exactly *n* independent arcs *[kivonat], Bulletin of the American Mathematical Society* **33** *(1927) 411.*

[1929] N.E. Rutt: Concerning the cut points of a continuous curve when the arc curve, *AB*, contains exactly *N* independent arcs, *American Journal of Mathematics* **51** *(1929) 217–246.*

[1939] T. Salvemini: Sugl'indici di omofilia, *Supplemento Statistico* 5 *(Serie II) (1939) [= Atti della Prima Riunione Scientifica della Società Italiana di Statistica, Pisa, 1939] 105–115 [Angol fordítás: On the indexes of homophilia, lelőhely: Tommaso Salvemini — Scritti Scelti, Cooperativa Informazione Stampa Universitaria, Rome, 1981, pp. 525–537].*

[1951] A. Shimbel: Applications of matrix algebra to communication nets, *Bulletin of Mathematical Biophysics* **13** *(1951) 165–178.*

[1953] A. Shimbel: Structural parameters of communication networks, *Bulletin of Mathematical Biophysics* **15** *(1953) 501–507.*

[1955] A. Shimbel: Structure in communication nets, *lelőhely: Proceedings of the Symposium on Information Networks (New York, 1954), Polytechnic Press of the Polytechnic Institute of Brooklyn, Brooklyn, New York, 1955, pp. 199–203.*

[1895] G. Tarry: Le problème des labyrinthes, *Nouvelles Annales de Mathématiques (3)* **14** *(1895) 187–190 [Angol fordítás lelőhelye: N.L. Biggs, E.K. Lloyd, R.J. Wilson, Graph Theory 1736–1936, Clarendon Press, Oxford, 1976, pp. 18–20].*

[1951] R. Taton: L'Œuvre scientifique de Monge, *Presses universitaires de France, Paris, 1951.*

[1950] R.L. Thorndike: The problem of the classification of personnel, *Psychometrika* **15** *(1950) 215–235.*

[1934] J. Tinbergen: Scheepsruimte en vrachten, *De Nederlandsche Conjunctuur (1934) maart 23–35.*

[1930] A.N. Tolsztoj: Métodi nahozsgyényijá naiménsevá szummávová kilométrázsá pri plányirovanyii perevozok v prosztránsztve *[Orosz; A teherszállítás tervezésekor a minimális összút megtalálásának módszerei a térben], lelőhely: Plányirováyije Perevózok, Szbornyik pérvij [Orosz; Szállításszervezés, I. kötet], Transzpecsáty NKPS [a Nemzeti Szállítási Tanács kiadványa (TransPress of the National Commissariat of Transportation)], Moszkva, 1930, pp. 23–55.*

[1939] A. Tolsztoj: Métodi usztrányényija nyerácionálnyih perevozok pri plányiroványii *[Orosz; Az irracionális szállítások megszüntetésének módszerei a tervezésben], Szociáliszticseszkij Transzport* **9** *(1939) 28–51 [„pamfletként" publikálva:* Metódi usztrányényija nyerácionálnyih perevózok pri szosztávlényii operatyivnüh plánov *[Orosz; Az irracionális szállítások megszüntetésének módszerei a működési tervek szerkesztésekor], Transzheldorizdat, Moszkva, 1941].*

[1953] L. Törnqvist: How to Find Optimal Solutions to Assignment Problems, *Cowles Commission Discussion Paper: Mathematics No.* **424**, *Cowles Commission for Research in Economics, Chicago, Illinois, 1953. augusztus 3.*

[1952] D.L. Trueblood: The effect of travel time and distance on freeway usage, *Public Roads* **26** *(1952) 241–250.*

[1984] ALBERT TUCKER: Merrill Flood (with Albert Tucker) — *This is an interview of Merrill Flood in San Francisco on 1984 May 14, lelőhely: The Princeton Mathematics Community in the 1930s — An Oral-History Project [located at Princeton University in the Seeley G. Mudd Manuscript Library web at the URL:* http://www.princeton.edu/mudd/math*], Transcript Number* **11** *(PMC11), 1984.*

[1951] S. VERBLUNSKY: On the shortest path through a number of points, *Proceedings of the American Mathematical Society* **2** *(1951) 904–913.*

[1952] D.F. VOTAW, JR: Methods of solving some personnel-classification problems, *Psychometrika* **17** *(1952) 255–266.*

[1952] D.F. VOTAW, JR, A. ORDEN: The personnel assignment problem, *lelőhely: Symposium on Linear Inequalities and Programming [Scientific Computation of Optimum Programs, Project SCOOP, No.* **10**] *(Washington, D.C., 1951; A. Orden, L. Goldstein, eds.), Planning Research Division, Director of Management Analysis Service, Comptroller, Headquarters U.S. Air Force, Washington, D.C., 1952, pp. 155–163.*

[1995] T. WANNINGEN KOOPMANS: Stories and Memories, *gépelt kézirat, 1995. május.*

[1932] H. WHITNEY: Congruent graphs and the connectivity of graphs, *American Journal of Mathematics* **54** *(1932) 150–168 [reprint: Hassler Whitney Collected Works Volume I (J. Eells, D. Toledo, eds.), Birkhäuser, Boston, Massachusetts, 1992, pp. 61–79].*

[1873] CHR. WIENER: Ueber eine Aufgabe aus der Geometria situs, *Mathematische Annalen* **6** *(1873) 29–30.*

[1973] N. ZADEH: A bad network problem for the simplex method and other minimum cost flow algorithms, *Mathematical Programming* **5** *(1973) 255–266.*

ALEXANDER SCHRIJVER
CWI és Universiteit van Amsterdam.
CWI, Kruislaan 413, 1098 SJ Amsterdam, Hollandia

BERNÁTH ATTILA
Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar, Matematikai Intézet, Operációkutatási Tanszék
1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1/C
athos@cs.elte.hu

FLEINER TAMÁS
Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Villamosmérnöki és Informatikai Kar, Számítástudományi és Információelméleti Tanszék
1117 Budapest, Magyar tudósok körútja 2.
fleiner@cs.bme.hu

PAP GYULA
Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar, Matematikai Intézet, Operációkutatási Tanszék
1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1/C

gyuszko@cs.elte.hu

EXTRACTS FROM THE HISTORY OF COMBINATORIAL OPTIMIZATION

ALEXANDER SCHRIJVER

As a coherent mathematical discipline, combinatorial optimization is relatively young. When studying the history of the field, one observes a number of independent lines of research, separately considering problems like optimum assignment, shortest spanning tree, transportation, and the traveling salesman problem. Only in the 1950's, when the unifying tool of linear and integer programming became available and the area of operations research got intensive attention, these problems were put into one framework, and relations between them were laid.

Indeed, linear programming forms the hinge in the history of combinatorial optimization. Its initial conception by Kantorovich and Koopmans was motivated by combinatorial applications, in particular in transportation and transshipment. After the formulation of linear programming as generic problem, and the development in 1947 by Dantzig of the simplex method as a tool, one has tried to attack about all combinatorial optimization problems with linear programming techniques, quite often very successfully.

A cause of the diversity of roots of combinatorial optimization is that several of its problems descend directly from practice, and instances of them were, and still are, attacked daily. One can imagine that even in very primitive (even animal) societies, finding short paths and searching (for instance, for food) is essential. A traveling salesman problem crops up when you plan shopping or sightseeing, or when a doctor or mailman plans his tour. Similarly, assigning jobs to men, transporting goods, and making connections, form elementary problems not just considered by the mathematician.

It makes that these problems probably can be traced back far in history. In this survey however we restrict ourselves to the mathematical study of these problems. At the other end of the time scale, we do not pass 1960, to keep size in hand. As a consequence, later important developments, like Edmonds' work on matchings and matroids and Cook and Karp's theory of complexity (NP-completeness) fall out of the scope of this survey.

We focus on six problem areas, in this order: assignment, transportation, maximum flow, shortest tree, shortest path, and the traveling salesman problem.

Alkalmazott Matematikai Lapok **25** (2008), 75-97.

MODELLEK A MAGYARORSZÁGI ÉVES FÖLDRENGÉSSZÁMOK VIZSGÁLATÁRA

KOVÁCS ELŐD, ARATÓ MIKLÓS, LIPOVITS ÁGNES

A magyarországi éves földrengésszámokat vizsgáltuk. Célunk olyan sztochasztikus modell kiválasztása volt, amely megfelelően illeszkedik a megfigyelt adatokra, és alkalmas a jövőbeli folyamatok véletlen szimulálására. Vizsgálatunk során csak azokat a rengéseket néztük, amelyeknek magnitúdója legalább 2,9. Az adatok közül elhagytuk az – általunk adott definíció alapján kiszűrt – utórengéseket, majd megnéztük, hogy a XX. század során az egyes években hány rengés volt. Több modellt is illesztettünk az így kapott adatsorra: a biztosításmatematikában leggyakrabban használt kárszámeloszlásokat, keverék Poisson-eloszlásokat és rejtett Markov-modellt (HMM=Hidden Markov Model). Bemutatjuk a becslési módszereket és eredményeket, valamint néhány szimulációt.

1. Bevezetés

A katalógusokban a földrengéseket jellemző adatok általában: a rengés helye (3 dimenziós adat), ideje, erőssége, amelyek kiegészülhetnek más adatokkal. A magyarországi rengésekről (részben interaktív módon) részletes adatokat nyújt a *www.georisk.hu*, illetve a *www.foldrenges.hu* honlap. A [8]–[18] munkákban részletes adatsorokat találhatunk. A Pannon-régió, illetve a Kárpát-medence szeizmicitását pedig – több más szerző és tanulmány mellett – Tóth L. és társai cikke [18], illetve Zsíros T. [17] tekinti át nagyon részletesen.

1.1. A rengésszámról

A földrengésszámmal kapcsolatos egyik első vizsgálat Omori nevéhez fűződik. Az 1891-ben, Japánban, Nobiban történt rendkívül erős – 8-as magnitúdójú – földrengést követő utórengéseket vizsgálta. A főrengés óta eltelt napok t száma és az egy napra eső utórengések $n(t)$ száma között az alábbi kapcsolatot találta: $n(t) = K(t + c)^{-1}$, megfelelő K és c konstanssal (Omori, 1894). Később 44 utórengés-sorozat vizsgálatát követően Utsu ezt a következőképpen módosította: $n(t) = K(t + c)^{-p}$, ahol a p konstans gyakran 1-nél kissé nagyobb, általában 1 és $1,5$ közé esik [3]. Utóbb más, több paraméteres illesztések is születtek. Megfelelő skálák birtokában – amelyek korábban nem léteztek – a XX. század első felében kezdték vizsgálni a rengés energiája és a rengésszám közötti kapcsolatot (Wadati, 1932, Gutenberg és Richter, 1936). Az energiát erg mértékegységben mérve

(1 erg = 10^{-7} joule) Gutenberg és Richter (1956) a $\log E = 1,5 \cdot M + 11,8$ definíciót adta a rengés M magnitúdójára. (Ha az energiát joule-ban mérjük, akkor – természetesen – a $\log E = 1,5M + 4,8$ összefüggést kapjuk.) Ezekkel a jelölésekkel korábbi eredményeiket az alábbi formában írhatták fel: $\log(N(M)) = a - bM$, ahol $N(M)$ jelöli az M-nél erősebb rengések számát (adott nagyságú területen és időintervallumban), a és b pedig a területre jellemző állandó. Az a konstans értéke (természetesen) függ a vizsgált terület és időintervallum nagyságától, illetve hosszától. A megfigyelt területhez tartozó b konstans értéke általában 0,6 és 1,1 közé esik (Zsíros munkájában 0,5 és 1,5 közöttinek mondja [17]), sok terület esetén közel 1-hez [7, 3]. Ezek a konstansok egy Magyarország nagyságú területen nagyon eltérőek lehetnek.

1.2. Statisztikai megközelítés

A földrengések eloszlásának statisztikai vizsgálata a XX. század közepén vett nagy lendületet, bár a legelső, legegyszerűbb modellek már jóval korábban megszülettek. A modellek egy része az időbeli, másik része a térbeli eloszlásra koncentrált, majd születtek tér-idő modellek is.

Az időbeli eloszlás vizsgálatára elsőként stacionárius Poisson-folyamatot alkalmaztak (Schuster, 1897) [3]. Eszerint egy $[t;\ t + \Delta t]$ időintervallumban egy adott területen bekövetkező földrengések száma csak Δt-től függő $\xi_{\Delta \mathrm{t}}$ valószínűségi változó. Annak valószínűsége, hogy éppen n rengés történik az adott területen és időben:

$$P(\xi_{\Delta \mathrm{t}} = n) = (\nu \cdot \Delta t)^n \cdot \exp(-\nu \cdot \Delta t)/n!.$$

Ebben a modellben csupán a ν intenzitás becslésére van szükség, amely megfelelően nagy T hosszúságú időintervallumot tekintve N/T, ahol N az időintervallumra eső rengések száma. Később inhomogén Poisson-folyamatokkal is közelítették a rengésszámokat.

Az időbeli eloszlást vizsgáló modellek másik csoportja a felújítási folyamatok apparátusát használja. Ezek két rengés között eltelt idő jellemzőit, például várható értékét vizsgálják.

1.3. A cikkben tárgyalt modellek

Tanulmányunkban az éves rengésszámot, mint valószínűségi változót vizsgáltuk. Először feltételeztük, hogy az évenkénti rengések számai független, azonos eloszlású valószínűségi változók, és eloszlásukat kívántuk azonosítani, paramétereiket becsülni.

Miután kiderült, hogy az $(a,\ b,\ 0)$ – vagyis a Poisson, binomiális, illetve negatív binomiális – eloszlások nem illeszkednek jól, Poisson eloszlások keverékeit vizsgáltuk és paramétereiket becsültük. Ezekre két Poisson keveréke esetén:

$$P(\xi_i = n) = p \cdot e^{-\lambda_1} \cdot \frac{\lambda_1^n}{n!} + (1-p) \cdot e^{-\lambda_2} \cdot \frac{\lambda_2^n}{n!}, \qquad n \geq 0 \tag{1.1}$$

illetve három keverékét nézve:

$$P(\xi_i = n) = p \cdot e^{-\lambda_1} \cdot \frac{\lambda_1^n}{n!} + q \cdot e^{-\lambda_2} \cdot \frac{\lambda_2^n}{n!} + (1-p-q) \cdot e^{-\lambda_3} \cdot \frac{\lambda_3^n}{n!}, \qquad n \geq 0,$$

ahol az i-edik év rengéseinek számát jelöli ξ_i.

Ezt követően lemondtunk a függetlenség feltételezéséről. A keverék modellek egyfajta általánosítását tekintettük, ahol az egymást követő évek rengésszámai, mint valószínűségi változók, függenek egymástól. Egy olyan, kétállapotú modellben végeztünk paraméterbecslést, amelyben – az állapotokhoz kölcsönösen egyértelműen hozzárendelt – intenzitás paraméterek egy általunk nem megfigyelhető, stacionárius Markov-lánc szerint változnak. Feltételeztük, hogy az intenzitás paraméterek ismeretében az egyes évek rengései feltételesen független, Poisson-eloszlású valószínűségi változók, és ez a feltételes eloszlás csak az adott év állapotától függ.

A modell struktúra tehát a következő [20, 23, 24]: a diszkrét idejű sztochasztikus modellt egy rejtett, meg nem figyelhető $\{\mathbb{Z}_i\}$ Markov-lánc és egy megfigyelhető $\{\xi_i\}$ folyamat alkotja, melyekre

1. ha $\mathbb{Z}_i$ adott, akkor ξ_i-k feltételesen függetlenek, valamint
2. ha $\mathbb{Z}_i$ adott, ξ_k feltételes eloszlása csak $\mathbb{Z}_k$-tól függ minden k esetén.

Esetünkben ξ_k-k feltételes eloszlása Poisson, $\mathbb{Z}_k$-k pedig $\{0, 1\}$ értékkészletű valószínűségi változók. Ezt a modellt kétállapotú rejtett Markov-modellnek vagy keverék Markov-modellnek hívjuk (Hidden Markov Model, Markov Mixture Model, speciális esetben Poisson Hidden Markov Model).

Ebben a modellben az intenzitás paramétereket és az átmenetvalószínűségeket becsültük.

2. Az adatok

Az elmúlt 1600 év magyarországi rengéseinek rendezése, az utórezgések kiszűrése erre a célra készített számítógépes programmal, az adatok vizsgálata pedig az R programcsomag segítségével történt. (Megjegyzés: az északi szélesség $45,5-49$ fok és a keleti hosszúság $16-23$ fok közötti területet értettük „Magyarország" alatt.)

Vizsgálatunk során nem az összes ismert rengést tekintettük. Csupán a főrengéseket (mainshock) néztük, kiszűrtük az utórengéseket (aftershock). (Megemlítjük, hogy az előrengések – foreshock – azonosításával egyáltalán nem foglalkoztunk). A fenti fogalmakra univerzálisan elfogadott egzakt definíció nincs [3], bár az utórengések számára vonatkozó Omori–formula (1894), amelyet már említettünk, több mint 100 éves. Így az alábbi munka-definíciót adtuk: nevezzük utórengésnek azt az R rengést, amelyhez találunk olyan rengést, hogy

- legfeljebb 30 nappal R előtt történt,
- epicentruma R epicentrumához „nagyon közel" van és
- magnitúdója R magnitúdójánál nagyobb.

Munka-definíció: az $A(x_1, y_1)$ és $B(x_2, y_2)$ pontot térben „nagyon közelinek” tekintjük, ha

$$\left((x_1 - x_2)^2 + 1,89\,(y_1 - y_2)^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{2},$$

ahol az első koordináta hosszúsági, a második a szélességi kört jelenti (fokban).

A definíciónk szerinti utórengéseket töröltük a listából. (Először csak megjelöltük a fenti kritériumnak eleget tevőket, utána töröltük a megjelölteket. Módszerünkkel az utórengések utórengéseit is töröltük. Másik listát eredményezne az azonnali törlés.) A továbbiakban „rengés” alatt az utórengések elhagyása után megmaradt rengéseket értjük, amelyek legalább 2,9 magnitúdójúak.

Az ennél kisebb magnitúdójú rengések esetén minimális az esélye, hogy komoly kár következik be, ugyanis a 3-as magnitúdónál kisebb rengések maximális intenzitása – a tapasztalatok szerint – nagyon ritkán éri el a IV-es fokozatot, így komoly károkat nem okoznak. Az intenzitás skála a pusztítás mértékét jelzi 12 fokozat segítségével (I-től XII-ig változik). Ez utóbbi már teljes pusztulást jelent az épített környezetben, az előbbi viszont alig érzékelhető. A Munich Re Group CD-je [1] szerint a kárarány várható értéke még egy V-ös intenzitású rengés esetén is 0, 1 %-nál kisebb. Megjegyezzük, hogy több intenzitás skála ismert, a közöttük lévő kapcsolatról áttekintést ad T. Utsu munkája [2].

3. A megfigyelt rengések számának és erősségének alakulása az évszázadok során

A regisztrált magyarországi földrengések száma rendkívül gyors növekedést mutat, ennek oka – minden bizonnyal – a technikai eszközök fejlődése. Nézzünk két példát ennek szemléltetésére!

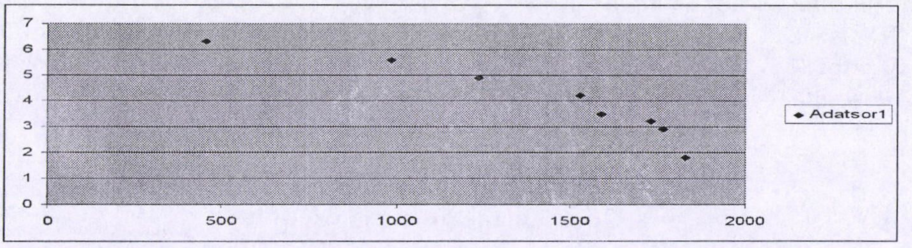
3.1. Csökkenő sorrendben tekintsük, hogy mely évből származik az első regisztráció az egyes magnitúdó értékekből! Vagyis az előzőnél kisebb magnitúdó-érték hol jelenik meg leghamarabb Magyarországon:

1. táblázat.

Magnitúdó	6,3	5,6	4,9	4,2	3,5	3,2	2,9	1,8
Év	456.	984.	1230.	1528.	1590.	1723.	1757.	1822.

Adatainkat az 1. ábrán látható grafikonon is megjelenítettük.

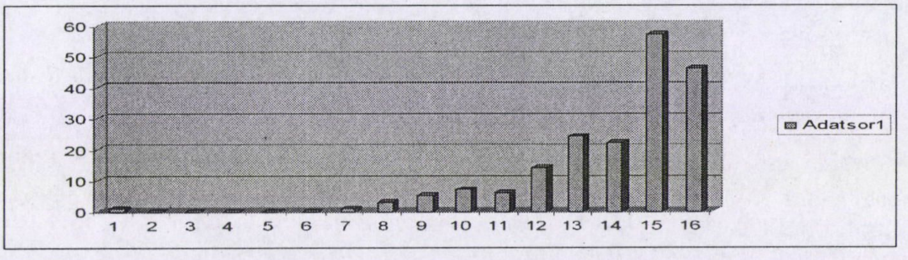
3.2. Nézzük meg, hány olyan rengésről tudunk az alábbi időintervallumokban (50 év), amelyek Magyarországon történtek, magnitúdójuk pedig legalább 4, de kisebb mint 5 (vagyis jelentős rengések). (2. táblázat, 2. ábra)



1. ábra. A korábbiaknál kisebb magnitúdójú rengések megjelenése

2. táblázat.

Év	1200-1250	1250-1300	1300-1350	1350-1400
Esemény	1	0	0	0
Év	1400-1450	1450-1500	1500-1550	1550-1600
Esemény	0	0	1	3
Év	1600-1650	1650-1700	1700-1750	1750-1800
Esemény	5	7	6	14
Év	1800-1850	1850-1900	1900-1950	1950-2000
Esemény	24	22	57	46



2. ábra. 4 és 5 magnitúdó közötti erősségű rengések észlelési gyakorisága 50 évenként

Szembeötlő a megfigyelések számának gyors növekedése. Hasonló eredményeket találhatunk Zsíros tanulmányának [17] 5. fejezetében. A legnagyobb változás éppen a XX. század elején történt, amikor közel egy tucat megfigyelő-állomásból álló hálózatot építettek ki Magyarország akkori területén, mellyel az ország az észlelés terén a világ élvonalába került [18].

4. Két lehetséges megközelítés

4.1. Megtehetjük, hogy az évenkénti (magyarországi) földrengésszám eloszlásának vizsgálatakor csupán az elmúlt kb. száz év megfigyeléseit vesszük figyelembe, „kidobva" a korábbi rengéseket. E mellett szól, hogy ezek az adatok jóval részletesebbek és megbízhatóbbak a korábbiaknál. Munkánkban ezt az utat választottuk, vállalva rengeteg adat mellőzését.

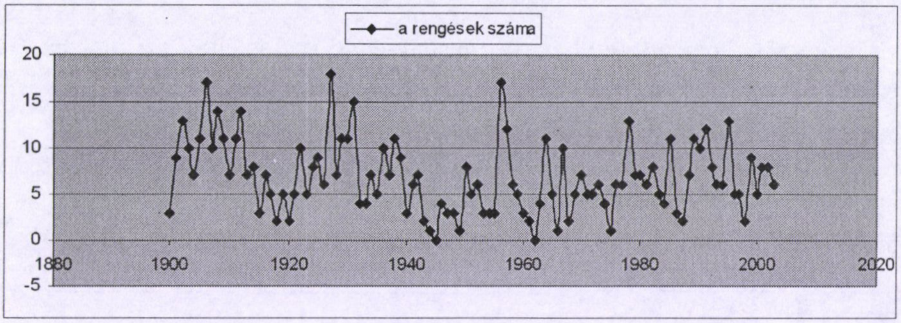
4.2. A másik út, hogy speciális statisztikai módszerekkel „összehasonlíthatóvá" tesszük a különböző korok megfigyeléseit. A kisebb magnitúdójú rengésekről csak nagyon hiányosak az adataink. Így az elmúlt 1600 év összes – utórengések nélküli – eseményét tekintve minden évben egy bizonyos „küszöb" (threshold) feletti adatokkal kell dolgoznunk [4], amikor az éves rengésszámot vizsgáljuk, illetve amikor egy-egy hipotézist ellenőrzünk. Ráadásul a feltételezett „küszöb" – részben társadalmi okokból – területenként és koronként is eltérő. Feltételezzük, hogy a „küszöb" alatti rengéseket „nem látjuk", róluk semmilyen adatunk nincs. És abban sem lehetünk biztosak, hogy a választott „küszöb" felett minden (megtörtént) rengést ismerünk. A threshold módszert földrengések vizsgálatára többek között Dargahi-Noubary alkalmazta [4], egyszerre becsülve egy adott időszakban a földrengések számát és az erősséget jellemző paramétert. Ezt az utat egy másik munkánkban akarjuk bemutatni.

5. A XX. századi adatok vizsgálata, modellek

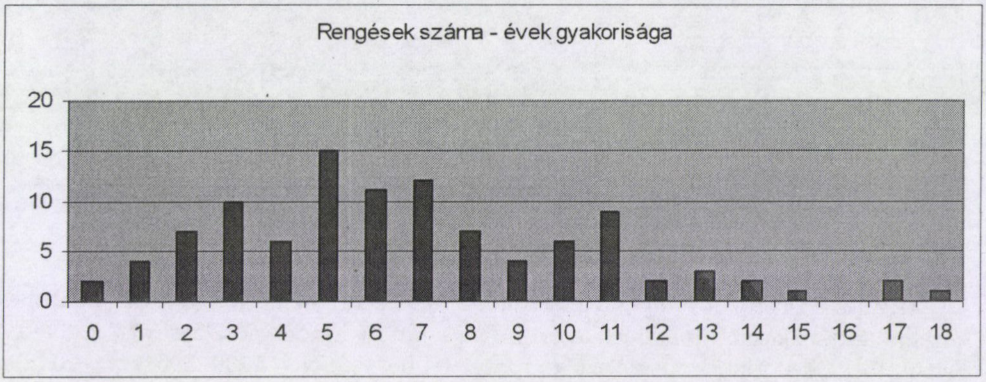
1900-tól 2003-ig az egyes években regisztrált legalább $2,9$ magnitúdójú nem-utórengések számát a 3. ábrán mutatjuk meg.

5.1. Első modellünkben feltételeztük, hogy az évenkénti rengések számai: $\xi_{1900}, \xi_{1901}, \ldots, \xi_{2003}$ függetlenek és azonos eloszlásúak. Az alábbi grafikon mutatja, hogy 1900 és 2003 között (104 év) hány olyan év volt, amikor a földrengések száma 0, 1, 2, ..., 17, 18 volt. (4. ábra)

Az évenkénti rengések száma eloszlásának azonosítása során próbálkozhatunk először a Poisson-, negatív binomiális, illetve binomiális eloszlással, lásd például Kagan és Jackson cikkét [5]. Megjegyezzük, hogy ezek az eloszlások a biztosítás-



3. ábra. Rengésszámok 1900 és 2003 között (az utórengések nélkül)



4. ábra. Az évenkénti rengések számainak gyakoriságai matematikában gyakran alkalmazott $(a, b, 0)$ eloszlások [6], melyekre

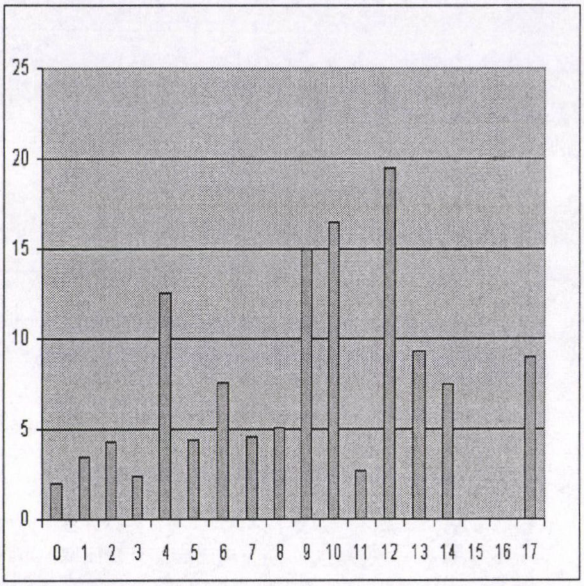
$$P(\boldsymbol{\xi} = n) = (a + b/n) \cdot P(\boldsymbol{\xi} = n - 1), \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Megnéztük, hogy adataink ilyen típusúak-e. K_n-nel jelöltük azoknak az éveknek a számát, amikor n rengés volt $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, és a

$$T_n = (n + 1) \cdot K_{n+1}/K_n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

mennyiségeket is tekintettük (ahol értelmezhető volt). Így a következő adatsorokat kaptuk, a T_n értékeket pedig grafikonon is ábrázoltuk:

Rengés	Hányszor	T_n
0	2	2
1	4	3,5
2	7	4,286
3	10	2,4
4	6	12,5
5	15	4,4
6	11	7,636
7	12	4,667
8	7	5,143
9	4	15
10	6	16,5
11	9	2,667
12	2	19,5
13	3	9,333
14	2	7,5
15	1	0
16	0	értelmetlen
17	2	9



5. ábra. A T_n értékek

Mivel a T_n sorozat nem (kvázi) monoton növekedő, nem monoton csökkenő és közel állandónak sem mondható, ezért a fent említett három eloszlást rögtön elvetettük [6]. Ellenőriztük mégis azt a hipotézist, hogy $\boldsymbol{\xi}_\mathbf{i}$ $(i = 1900, 1901, \ldots, 2003)$ független, Poisson-eloszlású (azonos paraméterrel) χ^2-próbával is. Ekkor a

$$P(\boldsymbol{\xi}_\mathbf{i} = n) = \lambda^n \cdot e^{-\lambda}/n!$$

hipotézist elfogadva a paraméterbecslés: $\hat{\lambda} = 706/104 = 6,788$. A 3. táblázat mutatja a kategóriákat, a (tényleges) megfigyelések számát (melyeket $N(n)$ jelöl) és a becsült valószínűségekkel számolt értékeket.

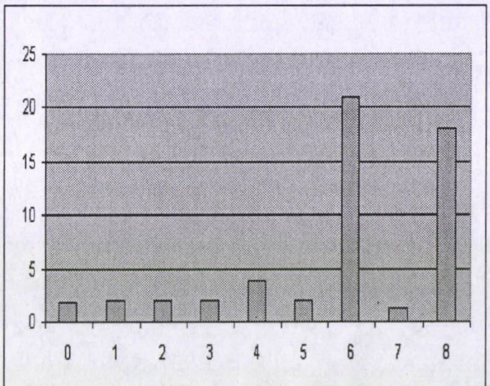
3. táblázat

n	≤ 1	2	3	4	5	6	7	8	9	≥ 10
N(n)	6	7	10	6	15	11	12	7	4	26
Becsült értékek	0,91	2,70	6,11	10,36	14,07	15,92	15,44	13,10	9,88	15,50

A becsült paraméterek száma 1, így a szabadsági fok $10 - 1 - 1 = 8$. A χ^2 statisztika értéke 55, 35. A hipotézist elvetjük, mert a χ^2 eloszlás kvantilise 99 %-os szinten 20, 09 (a szignifikancia szint közel 1).

Megvizsgáltuk a gyakoriságokat abban az esetben is, amikor a magnitúdó legalább 3, 5, illetve legalább 4. Az alábbi, összesen 263 rengést feldolgozó adatsorokat kaptuk a 3, 5-ös küszöb esetén. A T_n értékeket grafikonon is ábrázoltuk:

Rengés(n)	Gyakoriság(K_n)	T_n
0	14	1,7857
1	25	1,92
2	24	2
3	16	2
4	8	3,75
5	6	2
6	2	21
7	6	1,3333
8	1	18
9	2	0
10	0	



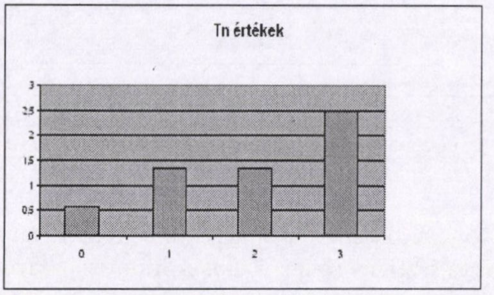
6. ábra. A T_n értékek a legalább 3, 5 magnitúdójú rengések esetén

A 7. ábrán látható adatokat pedig a 4 magnitúdós küszöbnél kaptuk (109 rengés).

Az első esetben a három említett eloszlás nem kerülhet szóba. A második esetben a növekedés negatív binomiális eloszlást sejtet, amit megerősít, hogy a várható érték becslése (1, 048) kisebb, mint a szórásnégyzet becslése ($1,22^2$) [6]. Korábbi földrengésszám vizsgálatok miatt is erre az eloszlásra gondolhatunk [5]. 5 kategóriát alkalmazva a szabadsági fok 2, a χ^2-statisztika értéke 8, 1 lett. A hipotézist elvetjük, mert a χ^2 eloszlás kvantilise 95 %-os szinten 5, 99 (a szignifikancia szint 98, 26 %).

5.2. Legteljesebb (legalább 2, 9 magnitúdójú rengéseket tartalmazó) adatsorunkat vizsgáljuk ismét. Az előző eredmények miatt (mivel az illeszkedések nem voltak megfelelők) az eloszlást 2 Poisson keverékével közelítettük. Feltételeztük, hogy az évenkénti rengések számai: $\xi_{1900}, \xi_{1901}, \ldots, \xi_{2003}$ függetlenek és az (1.1) képletnek megfelelő azonos eloszlásúak.

Rengés(n)	Gyakoriság(K_n)	T_n
0	46	$0,5869$
1	27	$1,3333$
2	18	$1,3333$
3	8	$2,5$
$4\leq$	5	



7. ábra. A T_n értékek a legalább 4 magnitúdójú rengések esetén

A likelihood függvényt az R programcsomag segítségével, közelítéssel maximalizáltuk. A közelítés a következő eredményt adta: $\hat{p} = 0,56$, $\hat{\lambda}_1 = 4,3657$, $\hat{\lambda}_2 = 9,88$. A χ^2 statisztika értéke ebben az esetben $9,129$, tehát az illeszkedés nagyon jó, a hipotézist elfogadhatjuk. (A kategóriák száma 10, a becsült paramétereké 2, így a szabadsági fok 7. A 7 szabadsági fokú χ^2 eloszlás eloszlásfüggvénye a $9,129$ helyen $75,65\,\%$).

Ezután nem meglepő, hogy a több paramétert tartalmazó 3 Poisson-eloszlású valószínűségi változó keverékével dolgozó modell még jobb illeszkedést mutatott. Csak szemléltetésül közöljük a maximum likelihood becslés eredményeit: $\hat{p} = 0,1033$, $\hat{q} = 0,5915$, $\hat{\lambda}_1 = 1,8528$, $\hat{\lambda}_2 = 5,5832$, $\hat{\lambda}_3 = 10,7964$.

5.3. Az egyes évek (utórengések nélküli) rengéseinek számát függetlennek tekintve azt tapasztaltuk, hogy a keverék Poisson-eloszlás igen jól illeszkedik az adatainkra. Mégis úgy gondoljuk (alapvetően a földrengésekkel foglalkozó külföldi irodalom alapján), hogy vizsgálnunk kell olyan modellt is, amelyben az egymást követő évek rengéseinek számai kapcsolatban állnak egymással, függenek egymástól.

Olyan modellt tekintünk, amelyben az egyes évek megfigyeléseinek (rengéseinek) számai az állapotok ismeretében feltételesen független, Poisson-eloszlású valószínűségi változók, az állapotok viszont Markov-láncot alkotnak. Így egy rejtett Markov-láncot kell vizsgálni.

6. Rejtett Markov-modell

6.1. Modell struktúra. A következő modellt építjük fel. Legyenek $\mathbb{Z}_1, \mathbb{Z}_2, \ldots, \mathbb{Z}_{\mathbb{N}}$ indikátor valószínűségi változók. $\mathbb{Z}_m$ ($m = 1, 2, \ldots, \mathbb{N}$)-re úgy tekintünk, mint az m-edik „év" állapotára. Legyen λ_0 a 0 állapot, λ_1 pedig az 1-es állapot paramétere (λ_0, $\lambda_1 > 0$). Tegyük fel, hogy az állapotok homogén Markov-láncot alkotnak:

$$P\left(\mathbb{Z}_{m+1}=j|\mathbb{Z}_m=i,\mathbb{Z}_{m-1}=z_{m-1},\ldots,\mathbb{Z}_1=z_1,\mathbb{Z}_0=z_0\right)=$$
$$=P\left(\mathbb{Z}_{m+1}=j|\mathbb{Z}_m=i\right)=p_{ij},\quad i,j\in\{0,1\},\ m\in\{0,1,\ldots,N-1\}.$$

Így az átmenet–valószínűség mátrix:

$$\Pi=(p_{ij})_{i,j\in\{0,1\}}=\begin{bmatrix} p_{00} & 1-p_{00}\\ p_{10} & 1-p_{10}\end{bmatrix}.$$

Jelölje ξ_m az m-edik év rengéseinek (megfigyeléseinek) számát. Feltesszük, hogy $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N$ feltételesen függetlenek a $\mathbb{Z}_1 = z_1$, $\mathbb{Z}_2 = z_2, \ldots, \mathbb{Z}_N = z_N$ feltételre vonatkozóan, továbbá ξ_m feltételes eloszlása Poisson, és csak $\mathbb{Z}_m$-től függ minden m esetén ($m \in \{1, 2, \ldots, N\}$), vagyis

$$P\left(\xi_m=k_m|\mathbb{Z}_1=z_1,\ \mathbb{Z}_2=z_2,\ldots,\ \mathbb{Z}_m=i,\ldots,\mathbb{Z}_N=z_N\right)=\frac{\lambda_i^{k_m}}{k_m!}e^{-\lambda_i}$$

és

$$P\left(\xi_1=k_1,\ \xi_2=k_2,\ldots,\ \xi_N=k_N|\mathbb{Z}_1=z_1,\ldots,\ \mathbb{Z}_N=z_N\right)=\prod_{j=1}^{N}\frac{\lambda_{z_j}^{k_j}}{k_j!}e^{-\lambda_{z_j}}$$

Látható, hogy az (1.1) képlettel meghatározott keverék Poisson-modell jelen modellünk speciális esete a $\boldsymbol{p}_{00} = \boldsymbol{p}_{10} = p$ paraméterválasztással. Célunk megbecsülni a $\mathbb{Z}_1, \mathbb{Z}_2, \ldots, \mathbb{Z}_N$ értékeket, $\boldsymbol{\lambda}_0$ és $\boldsymbol{\lambda}_1$-et, valamint a $\boldsymbol{p}_{00}$ és $\boldsymbol{p}_{10}$ átmenet-valószínűségeket.

6.2. Bayes-i megközelítés. Bayes-i megközelítéssel dolgozunk. Feltesszük, hogy paramétereink a priori eloszlása a következő:

$$\mathbf{p_{00}}\sim E(0,1),\quad \mathbf{p_{10}}\sim E(0,1),\quad \boldsymbol{\lambda}_0\sim\Gamma(\alpha_0,\beta_0),\quad \boldsymbol{\lambda}_1\sim\Gamma(\alpha_1,\beta_1).$$

Adottnak feltételezzük az α_0, β_0 és α_1, β_1 paramétereket.

A Bayes-formulából

$$f\left(y|\underline{x}\right)=\frac{f\left(\underline{x}|y\right)\cdot f\left(y\right)}{\int\limits_A f\left(\underline{x}|y\right)f(y)dy}\alpha f\left(\underline{x}|y\right)\cdot f(y),$$

ahol $A = \{\text{az összes lehetséges } y \text{ érték}\}$. Itt az α a Bayes-i statisztikában szokásos jelölés, azaz azt jelenti, hogy a két mennyiség konstans szorzótól eltekintve egyenlő. Ezért most

$$f_{\mathbf{p_{00}},\mathbf{p_{10}},\boldsymbol{\lambda}_0,\boldsymbol{\lambda}_1|\underline{\xi}}\left(p_{00},p_{10},\lambda_0,\lambda_1|\underline{k}\right)\alpha$$
$$\alpha P\left(\underline{\xi}=\underline{k}|\mathbf{p_{00}}=p_{00},\mathbf{p_{10}}=p_{10},\boldsymbol{\lambda}_0=\lambda_0,\boldsymbol{\lambda}_1=\lambda_1\right)\cdot f_{\mathbf{p_{00}},\mathbf{p_{10}},\boldsymbol{\lambda}_0,\boldsymbol{\lambda}_1}\left(p_{00},p_{10},\lambda_0,\lambda_1\right).$$

Ennek a függvénynek a maximumhelyét, illetve maximumhelyeit keressük.

Megjegyzés. $\underline{\xi} = \underline{k}$ feltétel a $\xi_1 = k_1$, $\xi_2 = k_2$, ..., $\xi_N = k_N$ feltételt rövidíti.

Amennyiben a $\mathbf{p_{00}}$, $\mathbf{p_{10}}$, $\boldsymbol{\lambda_0}$, $\boldsymbol{\lambda_1}$ valószínűségi változók függetlenségét feltételezzük, akkor a fentiek így írhatók:

$$P\left(\underline{\xi} = \underline{k} | \mathbf{p_{00}} = p_{00},\, \mathbf{p_{10}} = p_{10},\, \boldsymbol{\lambda_0} = \lambda_0,\, \boldsymbol{\lambda_1} = \lambda_1\right) \cdot \chi_{\{p_{00} \in [0,1]\}} \cdot \chi_{\{p_{10} \in [0,1]\}} \cdot$$
$$\cdot \lambda_0^{\alpha_0 - 1} \cdot e^{-\beta_0 \cdot \lambda_0} \cdot \frac{\beta_0^{\alpha_0}}{\Gamma(\alpha_0)} \cdot \lambda_1^{\alpha_1 - 1} \cdot e^{-\beta_1 \cdot \lambda_1} \cdot \frac{\beta_1^{\alpha_1}}{\Gamma(\alpha_1)} \alpha$$

$$\alpha P\left(\underline{\boldsymbol{\xi}} = \underline{k} | \mathbf{p_{00}} = p_{00},\, \mathbf{p_{10}} = p_{10},\, \boldsymbol{\lambda_0} = \lambda_0,\, \boldsymbol{\lambda_1} = \lambda_1\right) \cdot \lambda_0^{\alpha_0 - 1} \cdot \lambda_1^{\alpha_1 - 1} \cdot$$
$$\cdot e^{-\beta_0 \lambda_0 - \beta_1 \lambda_1} = g\left(p_{00},\, p_{10},\, \lambda_0,\, \lambda_1\right).$$

Ha pedig $\mathbb{Z}_1$, $\mathbb{Z}_2$, ..., $\mathbb{Z}_N$ értékeket is becsülni kívánjuk:

$$f_{\mathbb{Z}_1, \mathbb{Z}_2, \ldots, \mathbb{Z}_N, \mathbf{p_{00}}, \mathbf{p_{10}}, \boldsymbol{\lambda_0}, \boldsymbol{\lambda_1} | \underline{\boldsymbol{\xi}}}\left(z_1,\, z_2,\, \ldots,\, z_N,\, p_{00},\, p_{10},\, \lambda_0,\, \lambda_1 | \underline{k}\right) =$$
$$= P\left(\underline{\boldsymbol{\xi}} = \underline{k} | \mathbb{Z}_1 = z_1,\, \mathbb{Z}_2 = z_2,\, \ldots,\, \mathbb{Z}_N = z_N,\right.$$
$$\left.\mathbf{p_{00}} = p_{00},\, \mathbf{p_{10}} = p_{10},\, \boldsymbol{\lambda_0} = \lambda_0,\, \boldsymbol{\lambda_1} = \lambda_1\right) \cdot$$
$$\cdot P\left(\mathbb{Z}_1 = z_1,\, \mathbb{Z}_2 = z_2,\, \ldots,\, \mathbb{Z}_N = z_N | \mathbf{p_{00}} = p_{00},\right.$$
$$\left.\mathbf{p_{10}} = p_{10},\, \boldsymbol{\lambda_0} = \lambda_0,\, \boldsymbol{\lambda_1} = \lambda_1\right) \cdot$$
$$\cdot f_{\mathbf{p_{00}}}\left(p_{00}\right) \cdot f_{\mathbf{p_{10}}}\left(p_{10}\right) \cdot f_{\boldsymbol{\lambda_0}}\left(\lambda_0\right) \cdot f_{\boldsymbol{\lambda_1}}\left(\lambda_1\right) / P\left(\underline{\boldsymbol{\xi}} = \underline{k}\right) =$$
$$= \frac{g\left(z_1,\, z_2,\, \ldots,\, z_N,\, p_{00},\, p_{10},\, \lambda_0,\, \lambda_1\right)}{P\left(\underline{\boldsymbol{\xi}} = \underline{k}\right)} \alpha g\left(z_1,\, z_2,\, \ldots,\, z_N,\, p_{00},\, p_{10},\, \lambda_0,\, \lambda_1\right),$$

ahol

$$f_{\mathbf{p_{00}}}\left(p_{00}\right) = \chi_{\{p_{00} \in [0,1]\}}, \qquad f_{\mathbf{p_{10}}}\left(p_{10}\right) = \chi_{\{p_{10} \in [0,1]\}}$$

az $f_{\boldsymbol{\lambda_0}}\left(\lambda_0\right)$ és az$f_{\boldsymbol{\lambda_1}}\left(\lambda_1\right)$ függvény a gamma eloszlás sűrűségfüggvénye, a $P\left(\underline{\boldsymbol{\xi}} = \underline{k}\right)$ csupán egy normalizáló konstans.

Ennek az $f_{\mathbb{Z}_1, \mathbb{Z}_2, \ldots, \mathbb{Z}_N, \mathbf{p_{00}}, \mathbf{p_{10}}, \boldsymbol{\lambda_0}, \boldsymbol{\lambda_1} | \underline{\boldsymbol{\xi}}}\left(z_1,\, z_2,\, \ldots,\, z_N,\, p_{00},\, p_{10},\, \lambda_0,\, \lambda_1 | \underline{k}\right)$ függvénynek a maximumhelyét keressük. A függvény tényezőit külön-külön vizsgáljuk meg!

$$P\left(\underline{\boldsymbol{\xi}} = \underline{k} | \mathbb{Z}_1 = z_1,\, \mathbb{Z}_2 = z_2,\, \ldots,\, \mathbb{Z}_N = z_N,\right.$$
$$\left.\mathbf{p_{00}} = p_{00},\, \mathbf{p_{10}} = p_{10},\, \boldsymbol{\lambda_0} = \lambda_0,\, \boldsymbol{\lambda_1} = \lambda_1\right) =$$
$$= \prod_{i=1}^{N} \left[\frac{\left(\lambda_0 \cdot (1 - z_i) + \lambda_1 \cdot z_i\right)^{k_i}}{k_i!} e^{-(\lambda_0 (1 - z_i) + \lambda_1 \cdot z_i)}\right],$$

valamint

$$
\begin{aligned}
&P(\mathbb{Z}_1 = z_1, \mathbb{Z}_2 = z_2, \dots, \mathbb{Z}_N = z_N | \mathbf{p_{00}} = p_{00}, \mathbf{p_{10}} = p_{10}, \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \boldsymbol{\lambda_0} = \lambda_0, \boldsymbol{\lambda_1} = \lambda_1) = \\
&= P(\mathbb{Z}_N = z_N | \mathbb{Z}_{N-1} = z_{N-1}, \dots, \mathbb{Z}_1 = z_1, \mathbf{p_{00}} = p_{00}, \mathbf{p_{10}} = p_{10}, \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \boldsymbol{\lambda_0} = \lambda_0, \boldsymbol{\lambda_1} = \lambda_1) \cdot \\
&\cdot P(\mathbb{Z}_{N-1} = z_{N-1} | \mathbb{Z}_{N-2} = z_{N-2}, \dots, \mathbb{Z}_1 = z_1, \mathbf{p_{00}} = p_{00}, \mathbf{p_{10}} = p_{10}, \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \boldsymbol{\lambda_0} = \lambda_0, \boldsymbol{\lambda_1} = \lambda_1) \cdot \\
&\cdots P(\mathbb{Z}_2 = z_2 | \mathbb{Z}_1 = z_1, \mathbf{p_{00}} = p_{00}, \mathbf{p_{10}} = p_{10}, \boldsymbol{\lambda_0} = \lambda_0, \boldsymbol{\lambda_1} = \lambda_1) \cdot \\
&\cdot P(\mathbb{Z}_1 = z_1 | \mathbf{p_{00}} = p_{00}, \mathbf{p_{10}} = p_{10}, \boldsymbol{\lambda_0} = \lambda_0, \boldsymbol{\lambda_1} = \lambda_1) = \\
&\qquad\qquad = p_{00}^{\ell_{00}} \cdot (1 - p_{00})^{\ell_{01}} \cdot p_{10}^{\ell_{10}} \cdot (1 - p_{10})^{\ell_{11}} \cdot \\
&\cdot P(\mathbb{Z}_1 = z_1 | \mathbf{p_{00}} = p_{00}, \mathbf{p_{10}} = p_{10}, \boldsymbol{\lambda_0} = \lambda_0, \boldsymbol{\lambda_1} = \lambda_1),
\end{aligned}
$$

ahol ℓ_{00} jelöli a 0 állapotból 0 állapotba, ℓ_{01} jelöli a 0 állapotból 1-es állapotba, ℓ_{10} az 1-es állapotból 0 állapotba, ℓ_{11} pedig az 1-es állapotból 1-es állapotba történő átmenetek számát.

Megjegyzés. $\ell_{00} + \ell_{01} + \ell_{10} + \ell_{11} = N - 1$.

Megjegyezzük, hogy az utolsó tényező esetén $\mathbb{Z}_1$ eloszlása már független a feltételben szereplő eseményektől.

6.3. Az a posteriori eloszlások.

6.3.1. Először a $\boldsymbol{\lambda_0}$ valószínűségi változó a posteriori eloszlását vizsgáljuk.

$$
\begin{aligned}
f_{\boldsymbol{\lambda_0}|\underline{\xi}, \underline{\mathbb{Z}}}(\lambda_0 | \underline{k}, \underline{z}) &= \frac{g(z_1, z_2, \dots, z_N, \lambda_0, \lambda_1, p_{00}, p_{10})}{p(\underline{\xi} = \underline{k})} = \\
&= \frac{1}{P(\underline{\xi} = \underline{k})} \cdot K \cdot f_{\boldsymbol{\lambda_0}}(\lambda_0) \cdot \prod_{i: z_i = 0} \frac{((1-z_i)\cdot\lambda_0)^{k_i}}{k_i!} \cdot e^{-\lambda_0},
\end{aligned}
$$

vagyis a nullás állapotokat tekintjük csak. K nem tartalmaz λ_0-t, ahogy a $\frac{1}{P(\underline{\xi}=\underline{k})}$ és a $k_i!$ tényezők sem, szorzatukat C jelöli. Ekkor

$$
f_{\boldsymbol{\lambda_0}|\underline{\xi}, \underline{\mathbb{Z}}}(\lambda_0 | \underline{k}, \underline{z}) = C \cdot f_{\boldsymbol{\lambda_0}}(\lambda_0) \cdot \lambda_0^{\sum_{i: z_i = 0} k_i} \cdot e^{-\lambda_0 \cdot \sum_{i=1}^{N} (1 - z_i)}.
$$

Mivel $\boldsymbol{\lambda_0} \sim \Gamma(\alpha, \delta)$, és így sűrűségfüggvénye

$$
f_{\boldsymbol{\lambda_0}}(\lambda_0) = \frac{\delta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \cdot \lambda_0^{\alpha - 1} \cdot e^{-\delta \cdot \lambda_0} \; (\lambda_0 > 0),
$$

akkor

$$f_{\lambda_0|\underline{\xi},\underline{\mathbb{Z}}}(\lambda_0|\underline{k},\underline{z}) = h(\lambda_0) = C\cdot\frac{\delta^a}{\Gamma(\alpha)}\cdot\lambda_0^{\alpha-1+\sum\limits_{i:z_i=0}k_i}\cdot e^{-\lambda_0\left(\delta+\sum\limits_{i=1}^{N}1-z_ik_i\right)} =$$

$$= B\cdot\lambda_0^{\alpha-1+\sum\limits_{i:z_i=0}k_i}\cdot e^{-\lambda_0\left(\delta+\sum\limits_{i=1}^{N}(1-z_i)\right)}.$$

Tehát azt kaptuk, hogy $\boldsymbol{\lambda}_0$ a posteriori eloszlása:

$$\boldsymbol{\lambda}_0|\underline{\xi}=\underline{\mathbf{k}},\ \underline{\mathbb{Z}}=\underline{z}\sim\Gamma\left(\alpha+\sum_{i:z_i=0}k_i,\ \delta+\sum_{i=1}^{N}(1-z_i)\right).$$

Ugyanezt mondhatjuk el $\boldsymbol{\lambda}_1$ a posteriori eloszlásáról (α' és δ', illetve $\alpha'+\sum\limits_{i:z_i=1}k_i$ és $\delta'+\sum\limits_{i=1}^{N}z_i$ paraméterrel.) [22]

6.3.2. Áttérünk a $\mathbf{p}_{00}$ valószínűségi változó a posteriori eloszlásának vizsgálatára:

$$f_{\mathbf{p}_{00}|\underline{\xi},\underline{\mathbb{Z}}}(p_{00}|\underline{k},\ \underline{z}) = \frac{g(z_1,\ z_2,\ \dots,\ z_N,\ \lambda_0,\ \lambda_1,\ p_{00},\ p_{10})}{P(\underline{\xi}=\underline{k})} =$$

$$= C\cdot f_{\mathbf{p}_{00}}(p_{00})\cdot p_{00}^{\ell_{00}}\cdot(1-p_{00})^{\ell_{01}},$$

Megkaptuk, hogy az a posteriori eloszlás $\beta(\ell_{00}+1,\ \ell_{01}+1)$. Hasonlóan adható meg $\mathbf{p}_{01}$ a posteriori eloszlása is, amely $\beta(\ell_{10}+1,\ \ell_{11}+1)$ lesz.

6.4. MCMC (Markov Chain Monte Carlo) módszer alkalmazása. A maximumhely keresést az MCMC (Markov Chain Monte Carlo) módszerrel végezzük (lásd például a [21] összefoglaló cikket).

1. $\mathbb{Z}_1,\ \mathbb{Z}_2,\ \dots,\ \mathbb{Z}_N$ értékeit $\{0,1\}$-en diszkrét egyenletes eloszlásból, $\mathbf{p}_{00}$ és $\mathbf{p}_{10}$ értékét $E(0;1)$ eloszlásból generáljuk, $\boldsymbol{\lambda}_0$-at $\Gamma\left(3;\ \frac{1}{1{,}5}\right)$, $\boldsymbol{\lambda}_1$-et $\Gamma\left(5;\ \frac{1}{2}\right)$ eloszlásból választjuk ki. Az így kapott értékek lesznek iterációs eljárásunk kezdőértékei.

(Bár választásainkat a paraméterek esetén „indokolni" nem tudjuk, a következő meggondolásból születtek: a keverék Poisson-modell esetén a várható értékek becslései $\hat{\lambda}_1 = 4{,}38$ és $\hat{\lambda}_2 = 9{,}88$ voltak; most pedig $3\cdot\frac{1}{\frac{1}{1{,}5}} = 4{,}5$ és $5\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}} = 10$ a fenti értékekhez közeliek.)

2. A $\{1,2,\dots,N\}$-ből visszatevéses mintavétellel kiválasztjuk $i_1,\ i_2,\ \dots,\ i_N$-t. Jelölje $g*(i_1)$ azt a függvényértéket, melyet úgy kapunk, hogy z_{i_1}-et $1-z_{i_1}$-re változtatjuk, a többi argumentumot változatlanul hagyjuk.

Ha $\dfrac{g*(i_1)}{g(z_1,\ \dots,\ z_N,\ \lambda_0,\ \lambda_1,\ p_{00},\ p_{00})} > 1$, akkor z_{i_1}-et $1-z_{i_1}$-re változtatjuk.

Ha $\dfrac{g * (i_1)}{g\,(z_1,\, z_2,\, \ldots,\, z_N,\, \lambda_0,\, \lambda_1,\, p_{00},\, p_{00})} = a < 1$, akkor „$a$” valószínűséggel kicseréljük, $1 - a$ valószínűséggel meghagyjuk z_{i_1} értékét.

Hasonlóan járunk el $i_2,\, i_3,\, \ldots,\, i_N$ esetén is. (Ez a lépés a Metropolis–Hastings algoritmusnak felel meg.)

3. Új értéket generálunk $\boldsymbol{\lambda_0}$ a posteriori eloszlásából, jelölje ezt λ_0^*. λ_0-t λ_0^*-ra változtatjuk, a többi argumentumot változatlanul hagyjuk.

4. Hasonlóan járunk el az aktuális λ_1, p_{00} és p_{10} értékkel szemben is. (A 3. és 4. lépést Gibbs-lépésnek nevezzük.)

5. A 2–4. pontban leírtakat megfelelően sokszor – néhány tízezerszer – megismételjük.

6. A $\boldsymbol{\lambda_0}$ és $\boldsymbol{\lambda_1}$, valamint a $\mathbf{p_{00}}$ és $\mathbf{p_{10}}$ becslése az algoritmus során használt értékeik átlaga lesz. (Az első néhány ezer adatot – az iterációk mintegy tizedrészét – nem vesszük figyelembe.)

7. A $\mathbb{Z}_i$ $(i = 1, 2, 3, \ldots, N)$ becslése az az állapot, melyben a rendszer az algoritmus során többször tartózkodott.

Az iterációs becslési eljárás elvégzéséhez programot dolgoztunk ki, amelynek alkalmazásával a következő eredményeket kaptuk:

5 000 figyelembe nem vett iteráció után 100 000 iterációt végeztünk. Az alábbi táblázatban láthatóak becsléseink. Az „összesített” becslés az első („Átlag”) sorban látható, a további sorok 100–100 iteráció során kapott átlagot mutatják (vagyis csupán 1 200 iteráció eredményét tartalmazza az 1–12. sor, az első viszont 100 000-ét). Az utolsó két oszlop azt jelzi, hogy az utolsó 2 évben az iterációk hány százalékában volt az egyes állapotban a rendszer.

	l0	l1	p00	p10	z103	z104
Átlag	4,182047578	9,595539041	0,732472625	0,272438237	73,505	53,007
1.	4,051910094	9,457883732	0,701145060	0,281892006	68	57
2.	4,404168520	9,884150196	0,759503698	0,313682174	68	42
3.	4,123858765	9,403907699	0,719902759	0,247088922	81	57
4.	4,164482130	9,424047812	0,746502007	0,235290183	92	70
5.	4,305467640	9,759515695	0,743700170	0,282466375	72	51
6.	4,122284966	9,526731139	0,716296275	0,283679996	86	48
7.	4,035598721	9,356752326	0,730958985	0,251609114	88	69
8.	4,064423719	9,425677438	0,702309667	0,264378470	83	56
9.	4,156852810	9,540712504	0,745310557	0,257037332	87	65
10.	4,137226495	9,399213003	0,749120459	0,234497373	82	71
11.	3,920489485	9,383593921	0,671171453	0,269699750	79	50
12.	3,925001458	9,083686216	0,699076408	0,235576461	99	77

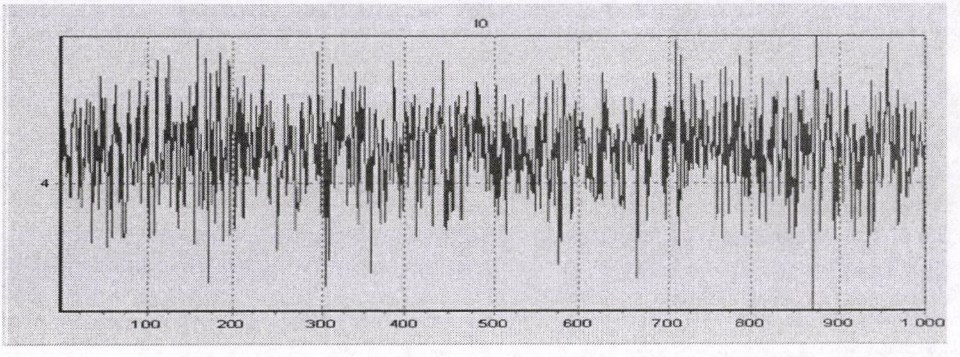
Megjegyezzük, hogy az előbbivel megegyező feltételekkel történő másik két futtatás eredménye (a fenti sorrendben):

λ_0 becslése	λ_1 becslése	$\mathbf{p}_{00}$ becslése	$\mathbf{p}_{10}$ becslése	$\mathbb{Z}_{103}$ becslése	$\mathbb{Z}_{104}$becslése
4, 2667	9, 5401	0, 2717	0, 7385	72, 29	51, 81
4, 1848	9, 5976	0, 2727	0, 7333	73, 64	53, 06

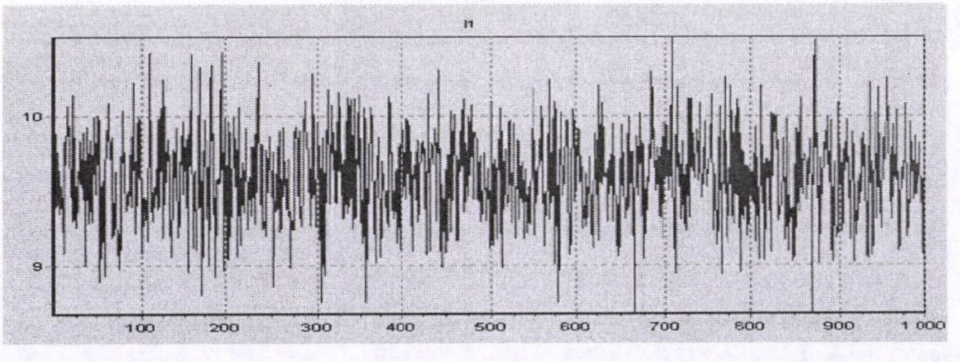
Látható, hogy $\mathbf{p}_{00}$ és $\mathbf{p}_{10}$ becslései igen távol állnak egymástól és a futási eredmények alapján elutasítható az a hipotézis, hogy egyenlőek (már említettük, hogy ez felelne meg a keverék Poisson-eloszlás (1.1) modelljének).

$\boldsymbol{\lambda}_0$ és $\boldsymbol{\lambda}_1$ a priori eloszlásának paramétereit megváltoztatva hasonló becsléseket kaptunk.

Az iterációkat 100-asával csoportosítva $\boldsymbol{\lambda}_0$ és $\boldsymbol{\lambda}_1$ becsült értékeit ábrázolja az alábbi két grafikon:

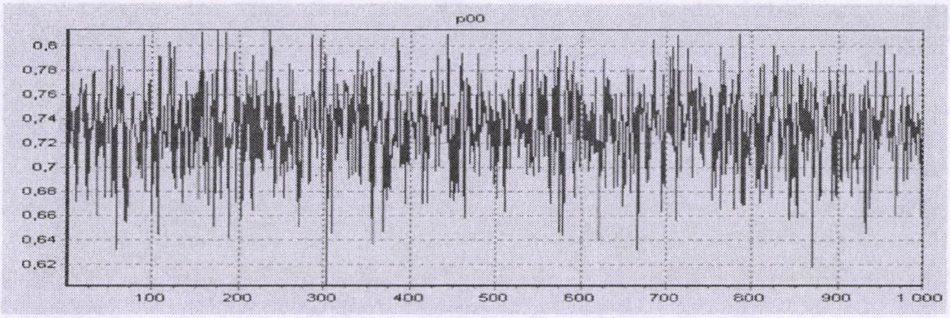


8. ábra. A $\boldsymbol{\lambda}_0$ becslései az iterációkat százasával csoportosítva

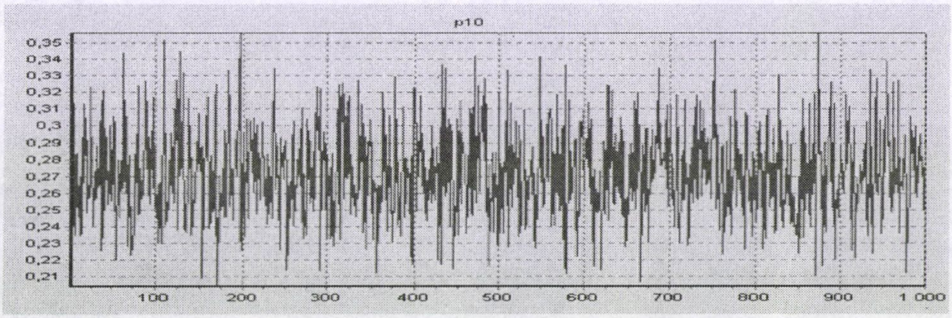


9. ábra. A $\boldsymbol{\lambda}_1$ becslései az iterációkat százasával csoportosítva

Az átmenetvalószínűségek becslése pedig a következőképpen alakult $\mathbf{p}_{00}$, illetve $\mathbf{p}_{10}$ esetén:



10. ábra. A $\mathbf{p}_{00}$ becslései az iterációkat százasával csoportosítva



11. ábra. A $\mathbf{p}_{10}$ becslései az iterációkat százasával csoportosítva

7. A becslések eredményeinek összehasonlítása, előrejelzések

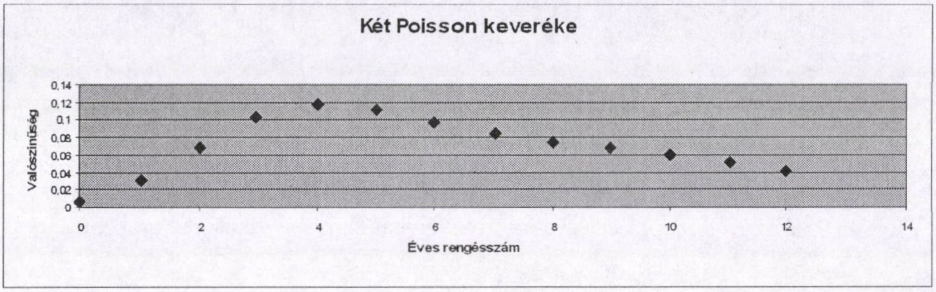
7.1. Két Poisson-eloszlású valószínűségi változó keverékének eloszlása esetén a becslésekre a következők adódtak: $\hat{p} = 0,56$, $\hat{\lambda}_1 = 4,3657$, $\hat{\lambda}_2 = 9,88$. A 12. ábra mutatja a becsült paraméterekkel a rengésszám eloszlását.

Adatainkat grafikonon is ábrázoltuk.

Látható, hogy négy rezgésre számíthatunk legnagyobb eséllyel, illetve például annak esélye, hogy legalább 10 rengés lesz egy év során 0,2396 e modell szerint. Az illesztett eloszlás mediánja 6.

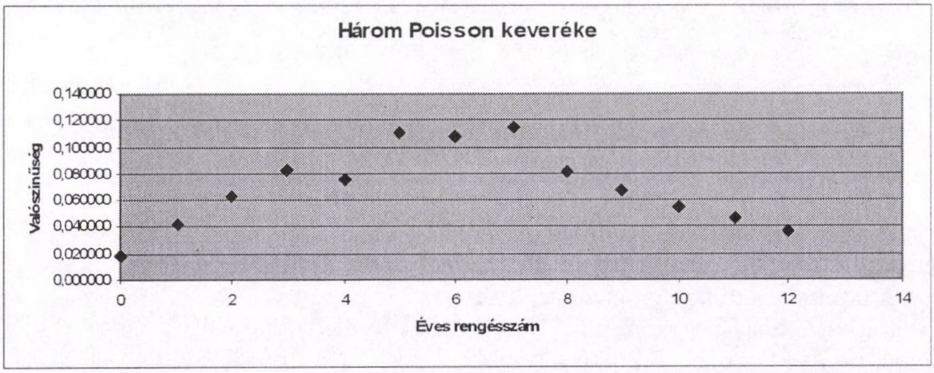
7.2. Három Poisson-eloszlású valószínűségi változó keveréke esetén $\hat{p} = 0,1033$, $\hat{q} = 0,5915$, $\hat{\lambda}_1 = 1,8528$, $\hat{\lambda}_2 = 5,5832$, $\hat{\lambda}_3 = 10,7964$ adódott. Az eloszlást és a hozzá tartozó grafikont a 13. ábra mutatja.

Gyakoriság	0	1	2	3	4	5	6
Valószínűség	0,0071	0,0313	0,0689	0,1023	0,1166	0,1117	0,0975
Gyakoriság	7	8	9	10	11	12	>12
Valószínűség	0,0837	0,074	0,067	0,0599	0,0514	0,0414	0,0872



12. ábra. Két Poisson keverékének eloszlása a becsült paraméterekkel

Gyakoriság	0	1	2	3	4	5	6
Valószínűség	0, 018422	0, 042497	0, 062834	0, 083002	0, 076011	0, 111148	0, 108231
Gyakoriság	7	8	9	10	11	12	>12
Valószínűség	0, 115015	0, 080752	0, 066643	0, 055092	0, 045506	0, 036976	0, 097869



13. ábra. Három Poisson keverékének eloszlása a becsült paraméterekkel

A legnagyobb valószínűséggel hét rengés történik évente a modell szerint. (Öt és hat rengésnek is szinte ugyanennyi az esélye.) Az éves rengésszám mediánjának becslése e modellben is 6. Legalább 10 rengés lesz $0,2354$ valószínűséggel, így várhatóan kb. 4 évente lesz legalább 10 rengés.

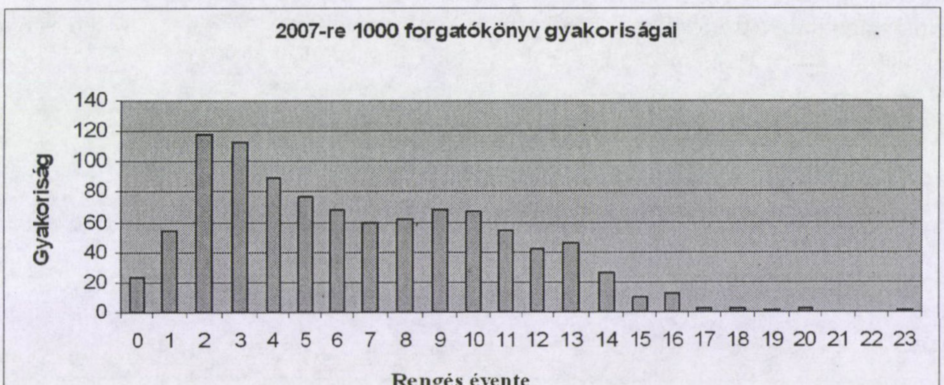
7.3. Az MCMC módszer egyik előnye, hogy segítségével a következő évek történéseit is szimulálni tudjuk. A becslési iteráció minden (vagy például minden 100.) lépésénél a pont aktuális paraméterekkel a feladatnak megfelelő számú év eredményét sztochasztikusan generáljuk. Ezáltal a módszer alapja lehet más vizsgálatoknak is (például földrengések modellezésének).

Az alábbi táblázat soraiban egy-egy előrejelzés látható 2004-től 2023-ig. A paraméterek becslése után állapotokat generáltunk 20 évre a megfelelő átmenetvalószínűségekkel, majd az állapothoz tartozó (szintén becsült) paraméterrel Poisson-eloszlásból adatokat generáltunk:

5	11	6	9	12	5	3	0	4	3	11	6	3	11	2	11	2	4	12	2
9	6	4	4	3	0	6	4	9	5	8	4	7	11	1	3	4	16	10	3

A 20 év rengésszámainak generálását 1000–szer végeztük el. A 2007–es évre (amely a negyedik generált adatot jelenti) az alábbiakat mondhatjuk:

7.3.1. A rengésszám gyakorisága a következőnek adódott 1000 forgatókönyv vizsgálata során:

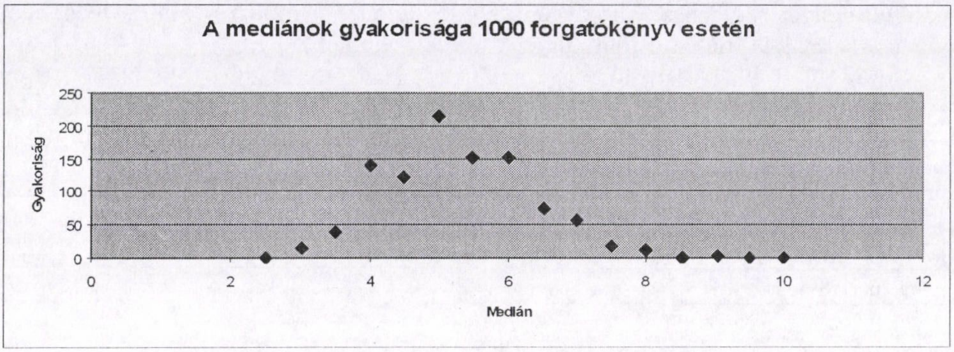


14. ábra. A 2007-es évre generált adatok gyakorisága 1000 forgatókönyv esetén

7.3.2. Az említett évre a rengésszám kvantilisére 99%-os szinten 16, 95%-os szinten pedig 13 adódott. Meg kell jegyezni, hogy a keverék Poisson-eloszlású modellben a becsült paraméterekkel nagyon hasonló értékek jönnek ki.

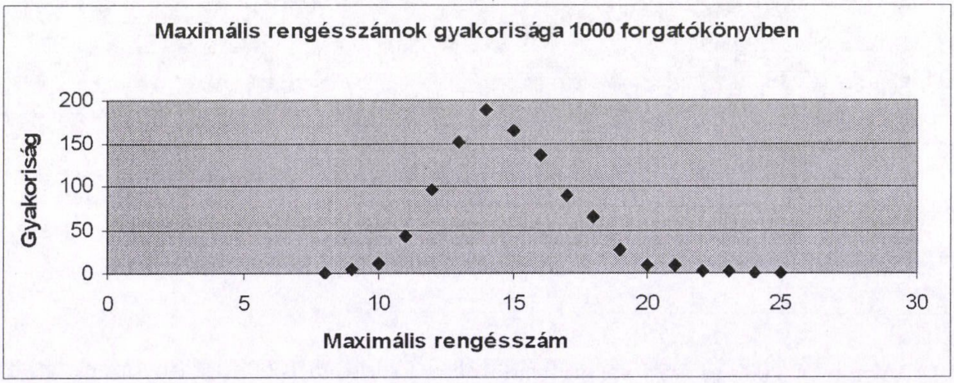
$$P(\xi_i \leq 13) = 94,4\%, \quad P(\xi_i \leq 14) = 96,6\%,$$
$$P(\xi_i \leq 16) = 98,9\%, \quad P(\xi_i \leq 17) = 99,4\%$$

7.3.3. A 20 év mediánjának gyakorisága a 15. ábrán látható. A legtöbbször az 5, utána 4, 5, 5, 5 és 6 jött ki.



15. ábra. A mediánok gyakorisága 1000 forgatókönyv esetén

7.3.4. A 20 év generált rengéseit tartalmazó 1000 forgatókönyvben a maximális rengésszámokat vizsgálva az esetek több mint felében legalább 13 volt a maximális éves rengésszám. Leggyakrabban 14-et kaptunk maximumnak, és nem elhanyagolható (0, 05 és 0, 1 közötti) azoknak az éveknek a relatív gyakorisága, amikor 17 vagy 18 eseményt generáltunk maximálisan (20 év alatt).



16. ábra. A 20 évenkénti maximális rengésszámok gyakoriságai 1000 forgatókönyv esetén

8. Összefoglalás

Dolgozatunkban megpróbáltuk bemutatni a Magyarországon bekövetkező éves földrengésszámok statisztikai vizsgálatának néhány lehetséges megközelítését. Céljaink közé tartozott, hogy az utóbbi években egyre népszerűbb MCMC-módszer hasznosságát egy érdekes adatsoron szemléltessük.

Megállapítottuk, hogy a leggyakrabban alkalmazott eloszlások nem illeszkednek jól adatainkra. A keverék Poisson-eloszlással a gyakoriságokat megfelelően közelítettük, de a rejtett Markov-modell becslésénél kapott eredmények azt sejtetik, hogy az éves rengésszámok nem függetlenek egymástól.

A kidolgozott programmal a jövőbeli események könnyen szimulálhatók, felhasználhatók például biztosítási számításokhoz. A továbbiakban tervezzük kisebb területek földrengésszámainak leírását tér-idő modellek segítségével is, de úgy gondoljuk, hogy az eddig kapott eredmények segítséget nyújthatnak ezekhez a vizsgálatokhoz is.

Köszönjük Szeidovitz Győző segítségét, akitől több hasznos tanácsot kaptunk a földrengések szakirodalmával kapcsolatban. Köszönjük továbbá a lektor hasznos észrevételeit.

Hivatkozások

[1] Munich Re Group: *World of Natural Hazards.* CD (2004)

[2] Utsu, T.: *Relationships between Magnitude Scales.* In: International Handbook of Earthquake and Engineering Seismology, Chapter 44, Academic Press, (2002)

[3] Utsu, T.: *Statistical Features of Seismicity.* In: International Handbook of Earthquake and Engineering Seismology, Chapter 43, Academic Press, (2002)

[4] Dargahi–Noubary, G.R.: *The use of modern statistical theories in assessment of earthquake hazard, with application to quiet regions of eastern North America.* Soil Dynamics and Earthquake Engineering **22** (2002), 361–369.

[5] Kagan, Y.Y., Jackson, D.D.: *Probabilistic earthquake forecasting.* Geophys. J. In. **143** (2000), 438–453.

[6] Arató, Miklós: *Általános Biztosításmatematika.* ELTE Eötvös Kiadó, Budapest (1997)

[7] Vere-Jones, D.: *Forecasting earthquakes and earthquake risk.* International Journal of Forecasting **11** (1995), 503–538.

[8] Tóth, L., Mónus, P., Zsíros, T.: *Hungarian Earthquake Bulletin, 1996.* GeoRisk, Budapest (1997)

[9] Tóth, L., Mónus, P., Zsíros, T.: *Hungarian Earthquake Bulletin, 1997.* GeoRisk, Budapest (1998)

[10] Tóth, L., Mónus, P., Zsíros, T.: *Hungarian Earthquake Bulletin, 1998.* GeoRisk, Budapest (1999)

[11] TÓTH, L., MÓNUS, P., ZSÍROS, T.: *Hungarian Earthquake Bulletin, 1999.* GeoRisk, Budapest (2000)

[12] TÓTH, L., MÓNUS, P., ZSÍROS, T., KISZELY, M., KOSZTYU, Z.: *Hungarian Earthquake Bulletin, 2000.* GeoRisk, Budapest (2001)

[13] *Hungarian Earthquake Bulletin 2001.* GeoRisk, Budapest (2002)

[14] *Hungarian Earthquake Bulletin, 2002.* Georisk, Budapest (2003)

[15] *Hungarian Earthquake Bulletin, 2003.* Georisk, Budapest (2004)

[16] ZSÍROS, T., MÓNUS, P., TÓTH, L.: *Hungarian earthquake catalog (456-1986).* MTA GGKI, Budapest (1988)

[17] ZSÍROS, T.: *A Kárpát medence szeizmicitása és földrengés veszélyessége: Magyar földrengés katalógus (456-1995).* MTA GGKI, Budapest (2000)

[18] TÓTH, L., MÓNUS, P., ZSÍROS, T., KISZELY, M.: *Seismicity in the Pannonian Region – earthquake data, EGU Stephan Mueller Special Publication Series.* **3** (2002), 9–28.

[19] JACKSON, D.D., KAGAN,Y.Y: *Testable earthquake forecast for 1999.* Seim. Res. Let. **70** (1999), 393–403.

[20] RYDÉN, T.: *Hidden Markov models.* In Encyclopedia of Actuarial Science, Vol *2* (J. Teugels and B. Sundt, eds.), Wiley (2004), 821–827.

[21] BROOKS, S.P.: *Markov Chain Monte Carlo Method and Its Application, The Statistican* Vol. **47**, No. **1** (1998), 69–100.

[22] CHIB, S.: *Calculating posterior distributions and modal estimates in Markov mixture models.* Journal of Econometrics **75** (1996), 79–97.

[23] PAROLI, R., REDAELLI, G., SPEZIA, L.: *Poisson Hidden Markov Models for Time Series of Overdispersed Insurance Counts*

[24] EPHRAIM, Y., MERHAV, N.: *Hidden Markov Processes.* IEEE Transactions on Information Theory, Vol. **48**, No. **6** (2002)

(Beérkezett: 2006. június 8.)

KOVÁCS ELŐD
Veszprémi Egyetem
Matematikai és Számítástechnikai Tanszék
8200 Veszprém, Pf. 158.
kovacse@almos.vein.hu

ARATÓ MIKLÓS
Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar, Valószínűségelméleti és Statisztika Tanszék

1117 Budapest, Pázmány Péter s. 1/c
aratonm@ludens.elte.hu

LIPOVITS ÁGNES
Veszprémi Egyetem
Matematikai és Számítástechnikai Tanszék
8200 Veszprém, Pf. 158.
lipovitsa@szt.vein.hu

MODELLING OF ANNUAL FREQUENCY OF EARTHQUAKES IN HUNGARY

ELŐD KOVÁCS, MIKLÓS ARATÓ, ÁGNES LIPOVITS

Some possible approaches of the annual earthquake numbers' statistical investigation happening in Hungary is tried to be presented in the essay. We aimed to demonstrate an interesting series of data the usefulness of the MCMC method, which is getting more and more applied in the last years.

We pointed out that the distributions applied most often do not apt well to our data. We approached the frequencies with the mixed Poisson distribution acceptably, but the results, received by the evaluation of the hidden Markov model, suggest that the annual numbers of frequencies are not independent of one another.

Future events might be easily simulated with the presented program, applying for insurance calculations for example.

Alkalmazott Matematikai Lapok **25** (2008), 99-117.

EGY KONSTRUKTÍVAN DEFINIÁLT TÖBBDIMENZIÓS GAMMA-ELOSZLÁS ILLESZTHETŐSÉGI FELTÉTELÉVEL KAPCSOLATOS KOMBINATORIKUS PROBLÉMÁKRÓL

KÉRI GERZSON ÉS SZÁNTAI TAMÁS

A jelenlegi dolgozat célja a [4] dolgozatban bevezetett, és a [6] dolgozatban tovább vizsgált, konstruktívan definiált többdimenziós gamma-eloszlás empirikus adatokhoz való illeszthetőségére vonatkozó új eredmények közlése. A többdimenziós gamma-eloszlás és alkalmazási lehetőségeinek bővebb tárgyalását az érdeklődő olvasó az [1], [2], [3] és [5] könyvekben találhatja meg. Azt már a [4] dolgozat szerzői megmutatták, hogy az általuk bevezetett többdimenziós gamma-eloszlás nem feltétlenül illeszthető tetszőleges nemnegatív tapasztalati kovariancamátrixú adathalmazhoz. A [6] dolgozatban a szerző a kovarianciamátrix elemeire vonatkozó szükséges feltételeket fogalmazott meg az illeszthetőségre vonatkozóan. Ezekről a 4-nél nem nagyobb dimenziós eloszlások esetében meg tudta mutatni, hogy elégségesek is. Nagyobb dimenzió esetén e szükséges feltételek elégségessége nyitott kérdés maradt. Ebben a dolgozatban megmutatjuk, hogy magasabb dimenzióban a [6]-ban felsoroltakon kívül további szükséges feltételeket is könnyen meg lehet adni. A mai fejlettebb számítástechnikai eszközök birtokában megadtuk az 5 és a 6 dimenziós esetekre is az illeszthetőség elégséges feltételeit. Ennek során kiderült, hogy 5 dimenzió esetén a szükséges és elégséges feltételek összességére még tetszetős, kerek meghatározás adható, 6 dimenzió esetén azonban e feltételek oly módon bővülnek, hogy már nem összegezhetők a 4 és 5 dimenziós esethez hasonlóan, és kezdenek szinte kaotikusnak látszó formát ölteni. Megkíséreltük a 7 dimenziós eset megoldását is, erről azonban menet közben lemondtunk, amikor kiderült, hogy az elvégzendő számítás gépidő igénye a vártnál jóval tetemesebb.

1. Bevezetés

A [4] cikkben a szerzők bevezettek egy új, többdimenziós gamma-eloszlást a Tisza Tokajnál mért havi vízhozam adatainak a modellezésére. Ezt az eloszlást illesztették a hat egymás utáni vízszegény hónap vízhozam adataihoz és sikeresen alkalmazták azt egy sztochasztikus optimalizálási probléma megoldásában. A [6] cikkben a szerző annak feltételét vizsgálja, hogy egy empirikus kovarianciamátrixhoz létezzen a mátrix adataira illeszkedő többdimenziós gamma-eloszlás. Ez a vizsgálat kapcsolódik a [4] cikk eredményeihez, melyben a szerzők három módszert dolgoztak ki a tárgyalt többdimenziós gamma-eloszlás empirikus adatokhoz történő közelítő illesztésére. A [6] cikk alapötlete annak felismerése, hogy a többdimenziós gamma-eloszlás illeszthetőségének a problémája a következő lineáris egyenletrendszer megoldhatóságának a kérdésére vezethető vissza:

Milyen feltételek mellett teljesül, hogy adott $n \times n$ méretű valós szimmetrikus $\mathbf{C}$ mátrix esetén a

$$\sum_{l=1}^{p} \mathbf{a}_l \mathbf{a}_l^T \vartheta_l = \mathbf{C} \tag{1}$$

egyenletrendszernek a ϑ_l-ekre van nemnegatív megoldása? Itt $p = 2^n - 1$, az $\mathbf{a}_l \in R^n, l = 1, 2, \ldots, p$ vektorok pedig az összes olyan R^n-beli vektort jelentik, melyek komponensei 0 vagy 1 értékűek, de nem mind 0 értékű.

A $\mathbf{C}$ mátrix szimmetrikus volta miatt elég az (1) egyenletrendszernek a $\mathbf{C}$ mátrix felső háromszög részéhez tartozó egyenleteit tekinteni. Ekkor az $\mathbf{a}_l \mathbf{a}_l^T$ diádoknak is csak a felső háromszög része marad az egyenletrendszerben. A felső háromszög mátrixok elemeiből $\frac{1}{2}n(n+1)$ méretű vektorokat képezve, (1)-ből az

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}}\vartheta &= \mathbf{c} \\ \vartheta &\geq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{2}$$

feltételrendszert kapjuk, ahol $\tilde{\mathbf{A}}$ egy $\frac{1}{2}n(n+1) \times (2^n - 1)$ méretű mátrix.

A [6] cikkben a szerző az (1) egyenletrendszer nemnegatív megoldásának létezésére a következő szükséges feltételt találta, melyről megmutatta, hogy $n \leq 4$ esetén elégséges is. (Idézzük az említett cikk 2.1. tételét.)

1.1. Tétel. *Ha egy* $\mathbf{C}$ *empirikus kovarianciamátrixra létezik az (1) feltételeknek eleget tevő, csupa nemnegatív komponensből álló* $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_p$ *paraméter halmaz, akkor* $\mathbf{C}$ *elemeire teljesülnie kell a*

$$\sum_{i \in I_1} c_{ii} - \sum_{i \in I_1, k \in I_2} c_{ik} + \sum_{i \in I_1, k \in I_1, i<k} c_{ik} + \sum_{i \in I_2, k \in I_2, i<k} c_{ik} \geq 0 \tag{3}$$

feltételrendszernek, ahol $I_1, I_2 \subseteq I = \{1, 2, \ldots, n\}$ *és* $I_1 \cap I_2 = \emptyset$.

E szükséges feltételek segítségével egy új, az előzőeknél hatékonyabb algoritmus készült a pontosan illeszkedő többdimenziós gamma-eloszlás meghatározására, melynek alkalmazása során úgy épül fel lépésről lépésre a pontosan illeszkedő többdimenziós gamma-eloszlás, hogy a fennmaradó rész kovariancia mátrixa mindig eleget tesz a rá vonatkozó szükséges feltételeknek, vagy legalábbis azok közül a leglényegesebbeknek. Az algoritmus lépései során mindig csak az általunk eddig ismert szükséges feltételek teljesülését követeljük meg a fennmaradó rész kovariancia mátrixára vonatkozóan, ezért előfordulhat, hogy az algoritmus úgy fejeződik be, hogy a szükséges feltételek teljesülnek ugyan, mégsem lehet a fennmaradó részt pontosan előállítani. Ennek esélyével kapcsolatos számításokat a cikk végén, a 4. szakaszban ismertetünk. A közbeeső részekben (2–3. szakasz) az 1.1. tételben megadott szükséges feltételek általánosítására, majd $n = 5$ és $n = 6$ esetén szükséges és elégséges feltételek megadására és osztályozására vonatkozó újabb eredményekről számolunk be.

2. Egy módszer a szükséges feltételek bővítésére

Ebben a szakaszban ismertetjük és bebizonyítjuk az 1.1. tétel általánosítása formájában megfogalmazott bővebb szükséges feltételrendszer létezését $n > 4$ esetén. Az általánosítás előkészítéseként először egy lemmát bizonyítunk be.

2.1. Lemma. *Ha egy* $\mathbf{C}$ *empirikus kovarianciamátrixra létezik az (1) feltételeknek eleget tevő, csupa nemnegatív komponensből álló* $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_p$ *paraméter halmaz, akkor* $\mathbf{C}$ *elemeire teljesülnie kell a*

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\rho_i(\rho_i+1)}{2} c_{ii} + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=i+1}^{n} \rho_i \rho_k c_{ik} \geq 0 \tag{4}$$

feltételnek tetszőleges $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ *egészek esetén (melyek között lehetnek azonosak is).*

Bizonyítás. Az (1) egyenletrendszer szerint

$$c_{ik} = \sum_{l=1}^{p} a_{il} a_{kl} \vartheta_l$$

ahol $a_{1l}, a_{2l}, \ldots, a_{pl}$ az $\mathbf{a}_l$ vektor komponensei. E kifejezéseket a (4) egyenlőtlenség bal oldalába helyettesítve azt kapjuk, hogy

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\rho_i(\rho_i+1)}{2} c_{ii} + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=i+1}^{n} \rho_i \rho_k c_{ik} =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{p} \left[\sum_{i=1}^{n} (\rho_i^2 + \rho_i) a_{il}^2 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=i+1}^{n} \rho_i \rho_k a_{il} a_{kl} \right] \vartheta_l =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{p} \left[\left(\sum_{i=1}^{n} \rho_i a_{il} \right)^2 + \sum_{i=1}^{n} \rho_i a_{il}^2 \right] \vartheta_l =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{p} \left(\sum_{i=1}^{n} \rho_i a_{il} \right) \left(\sum_{i=1}^{n} \rho_i a_{il} + 1 \right) \vartheta_l \geq 0.$$

Az átalakítás utolsó lépésében felhasználtuk, hogy $a_{il}^2 = a_{il}$, mivel a_{il} értéke csak 0 vagy 1 lehet. ■

Az általánosítást kimondó tétel megfogalmazásához jelöljük a 0-tól és egymástól is különböző ρ_i egészek számát s-sel, és gyűjtsük össze az azonos ρ_i egészek indexeit az $I_1, I_2, \ldots, I_s$ indexhalmazokba. (Természetesen lehetséges, hogy valamennyi nemnulla ρ_i különbözik egymástól, ebben az esetben az $I_1, I_2, \ldots, I_s$ indexhalmazok mind egyeleműek.) Most tetszőleges $p \in \{1, 2, \ldots, s\}$ esetén legyen $r_p = \rho_i$ ahol $i \in I_p$. E jelölésekkel nyilvánvalóan adódik a 2.1. lemma alábbi következménye:

2.1. TÉTEL. *Ha egy* **C** *empirikus kovarianciamátrixra létezik az (1) feltételeknek eleget tevő, csupa nemnegatív komponensből álló* $\vartheta_1, \dots, \vartheta_p$ *paraméterhalmaz, akkor* **C** *elemeire teljesülnie kell a*

$$\sum_{p=1}^{s}\left(\frac{r_p(r_p+1)}{2}\sum_{i\in I_p} c_{ii}\right)+\sum_{p=1}^{s}\left(r_p^2\sum_{i\in I_p,k\in I_p,i<k} c_{ik}\right)+$$
$$+\sum_{p=1}^{s-1}\sum_{q=p+1}^{s}\left(r_pr_q\sum_{i\in I_p,k\in I_q} c_{ik}\right)\geq 0$$

feltételeknek, ahol $I_1, I_2, \dots, I_s \subseteq I = \{1, 2, \dots, n\}$, $I_p \cap I_q = \emptyset$, *ha* $p \neq q$, $r_1, r_2, \dots r_s$ *pedig tetszőleges 0-tól és egymástól különböző egész számok.*

Vegyük észre, hogy a 2.1. tételből az 1.1. tételt úgy kapjuk meg, hogy a paramétereknek azokra az értékeire szorítkozunk, melyekre $s = 1$, $r_1 = -1$, vagy $s = 2$, $r_1 = 1$, $r_2 = -1$.

Megjegyezzük, hogy már az 1.1. tétel is tartalmazott redundáns feltételeket, ez még inkább így van a végtelen számosságú feltételt tartalmazó 2.1. tétel esetén. A [6] dolgozat feltárta, hogy az 1.1. tétel esetén melyek a redundáns feltételek, megmutatva, hogy tetszőleges n-re az 1.1. tétel feltételrendszere ekvivalens azzal a szűkebb feltételrendszerrel, amit úgy kapunk, hogy az eredeti feltételekből csak azokat vesszük figyelembe, melyekre

$$\begin{array}{rcl} n_1 = 0 & \text{és} & n_2 = 2, \\ \text{vagy } n_1 = 1 & \text{és} & 1 \leq n_2 \leq n - n_1, \\ \text{vagy } n_1 \geq 2 & \text{és} & 2 \leq n_2 \leq n - n_1. \end{array}$$

Itt és a továbbiakban is n_p-vel az I_p halmaz elemszámát jelöljük.

A 2.1. tétel esetében általános értelemben nem, de $n = 5$ esetére a későbbi 1. táblázatban megadunk egy hasonló, redundanciát már nem tartalmazó szűkített feltételrendszert. E feltételrendszer meghatározásához számítógépes módszert használtunk. Ugyanez a kérdés $n > 5$ esetén nagyon nehéznek látszik, viszont egy ilyen, az általános esetre vonatkozó vizsgálat jelentőségét amúgy is nagy mértékben csökkenti az az – ugyancsak számítógép segítségével kapott – meglepő eredmény, mely szerint $n = 6$ esetén már az 1.1. tételhez képest lényeges bővítéseket tartalmazó 2.1. feltételei sem adnak elégséges feltételt.

A 4. szakaszban $n = 5$ esetére két konkrét példát látunk olyan kovarianciamátrixokra, melyek az 1.1. tétel feltételrendszerét még teljesítik, de a 2.1. tétel feltételrendszerét nem. Ezek az ott $\mathbf{C}_1$-gyel és $\mathbf{C}_2$-vel jelölt mátrixok.

3. Az $n = 5$ és az $n = 6$ eset számítógépes megoldása

Amint már a [6] dolgozat is részletesen kifejtette, a szükséges és elégséges feltételek vizsgálata ekvivalens bizonyos konvex poliedrikus kúpok extremális irányai meghatározásának a kérdésével.

s	n_1	n_2	n_3	r_1	r_2	r_3	feltétel típus
1	2	–	–	−1	–	–	$c_{12} \geq 0$
2	1	1	–	1	−1	–	$c_{11} - c_{12} \geq 0$
2	1	2	–	1	−1	–	$c_{11} + c_{23} - c_{12} - c_{13} \geq 0$
2	1	3	–	1	−1	–	$c_{11} + c_{23} + c_{24} + c_{34} - c_{12} - c_{13} - c_{14} \geq 0$
2	1	4	–	1	−1	–	$c_{11} + c_{23} + c_{24} + c_{25} + c_{34} + c_{35} + c_{45} -$ $- c_{12} - c_{13} - c_{14} - c_{15} \geq 0$
2	2	2	–	1	−1	–	$c_{11} + c_{22} + c_{12} + c_{34} - c_{13} - c_{14} - c_{23} - c_{24} \geq 0$
2	2	3	–	1	−1	–	$c_{11} + c_{22} + c_{12} + c_{34} + c_{35} + c_{45} -$ $- c_{13} - c_{14} - c_{15} - c_{23} - c_{24} - c_{25} \geq 0$
2	3	2	–	1	−1	–	$c_{11} + c_{22} + c_{33} + c_{12} + c_{13} + c_{23} + c_{45} -$ $- c_{14} - c_{15} - c_{24} - c_{25} - c_{34} - c_{35} \geq 0$
2	4	1	–	−1	2	–	$3c_{55} + c_{12} + c_{13} + c_{14} + c_{23} + c_{24} + c_{34} -$ $- 2c_{15} - 2c_{25} - 2c_{35} - 2c_{45} \geq 0$
3	1	3	1	1	−1	2	$c_{11} + 3c_{55} + c_{23} + c_{24} + c_{34} + 2c_{15} -$ $- c_{12} - c_{13} - c_{14} - 2c_{25} - 2c_{35} - 2c_{45} \geq 0$
3	3	1	1	1	−1	−2	$c_{11} + c_{22} + c_{33} + c_{55} + c_{12} + c_{13} + c_{23} + 2c_{45} +$ $- c_{14} - c_{24} - c_{34} - 2c_{15} - 2c_{25} - 2c_{35} \geq 0$
3	2	2	1	1	−1	−2	$c_{11} + c_{22} + c_{55} + c_{12} + c_{34} + 2c_{35} + 2c_{45} -$ $- c_{13} - c_{14} - c_{23} - c_{24} - 2c_{15} - 2c_{25} \geq 0$

1. táblázat. Szükséges és elégséges feltételek $n = 5$ esetén

Jelölje $\mathcal{C}_n$ azoknak az $n \times n$ méretű valós szimmetrikus $\mathbf{C}$ mátrixoknak a halmazát, melyekre az (1) feltételrendszernek létezik nemnegatív megoldása. Jelölje $\mathcal{D}_n$ azoknak az $n \times n$ méretű valós szimmetrikus $\mathbf{D}$ mátrixoknak a halmazát, melyek elemeire teljesül

$$\sum_{j=1}^{s} \sum_{k=1}^{s} d_{i_j i_k} \geq 0$$

az $i_1, i_2, \ldots, i_s$ $(1 \leq s \leq n)$ indexek minden olyan rendszere esetén, ahol $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_s \leq n$. [6]-ban a szerző megmutatja, hogy a $\mathcal{C}_n$ és $\mathcal{D}_n$ halmazok konvex kúpok a szimmetrikus mátrixok mint vektorok $\frac{n(n+1)}{2}$ dimenziós euklideszi terében, melyekre fennáll, hogy $\mathbf{D} \in \mathcal{D}_n$ akkor és csak akkor, ha

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} c_{ik} d_{ik} \geq 0 \quad \text{minden} \quad \mathbf{C} \in \mathcal{C}_n \text{ esetén,}$$

és $\mathbf{C} \in \mathcal{C}_n$ akkor és csak akkor, ha

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} c_{ik} d_{ik} \geq 0 \quad \text{minden} \quad \mathbf{D} \in \mathcal{D}_n \text{ esetén.} \tag{5}$$

Az ilyen tulajdonságú kúp párokat egymás duálisának (vagy polárjának) szokták nevezni, gyakran fordított egyenlőtlenségekkel értelmezve, de az általunk végzett vizsgálatok szempontjából mindegy, hogy a lehetséges értelmezések melyik módozatát választjuk.

Az előbbi megállapítás alapján kimondhatjuk, hogy egy **C** empirikus kovarianciamátrixra akkor és csak akkor létezik az (1) feltételeknek eleget tevő, csupa nemnegatív komponensből álló $\vartheta_1, \dots, \vartheta_p$ paraméter halmaz, ha fennáll (5). Ebből következik az alábbi szükséges és elégséges feltétel. (Ez lényegében a [6] dolgozat 4.2′. állítása.)

3.1. TÉTEL. *Egy* **C** *empirikus kovarianciamátrixra akkor és csak akkor létezik az (1) feltételeknek eleget tevő, csupa nemnegatív komponensből álló* $\vartheta_1, \dots, \vartheta_p$ *paraméter halmaz, ha*

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} c_{ik}d_{ik} \geq 0 \quad \textit{minden olyan} \quad \mathbf{D} \in \mathcal{D}_n \textit{ esetén,}$$

mely a $\mathcal{D}_n$ *kúpnak extremális iránya.*

E tétel gyakorlati értéke azon múlik, hogy meg tudjuk-e határozni $\mathcal{D}_n$ extremális irányait.

A 2.1. lemma alapján annyi rögtön látszik, hogy a következő mátrixok mind elemei (de nem okvetlenül extremális irányai) a $\mathcal{D}_n$ halmaznak. (Ehhez a 2.1. lemma (4) formuláját írjuk át a főátló alatti elemeket is tartalmazó $\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\rho_i\rho_k c_{ik} + \sum_{i=1}^{n}\rho_i c_{ii} \geq 0$ alakba.)

$$\begin{pmatrix} \rho_1(\rho_1+1) & \rho_1\rho_2 & \rho_1\rho_3 & \dots & \rho_1\rho_n \\ \rho_2\rho_1 & \rho_2(\rho_2+1) & \rho_2\rho_3 & \dots & \rho_2\rho_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho_n\rho_1 & \rho_n\rho_2 & \rho_n\rho_3 & \dots & \rho_n(\rho_n+1) \end{pmatrix} \tag{6}$$

A $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$ paraméterek itt is előjelben nem korlátozott egész értékeket vehetnek fel, közöttük lehetnek 0-k és azonosak is.

Ismét összegyűjtve az azonos ρ_i értékeket az $I_1, I_2, \dots, I_s$ indexhalmazokba és bevezetve az $I_0 = \{1, 2, \dots, n\} \setminus \bigcup_{p=1}^{s} I_p$ jelölést, a (6) alatti $\mathbf{D} \in \mathcal{D}_n$ mátrix elemei a következőképpen is megadhatók:

$$d_{ii} = \begin{cases} r_p(r_p+1) & \text{ha } i \in I_p,\ 1 \le p \le s, \\ 0 & \text{ha } i \in I_0, \end{cases} \tag{7}$$

$$d_{ik} = \begin{cases} r_p^2 & \text{ha } i,k \in I_p,\ i \neq k,\ 1 \le p \le s, \\ 0 & \text{ha } i,k \in I_0,\ i \neq k, \end{cases} \tag{8}$$

$$d_{ik} = \begin{cases} r_p r_q & \text{ha } i \in I_p,\ k \in I_q,\ 1 \le p,\ q \le s,\ p \neq q \\ 0 & \text{ha } i \in I_0 \text{ vagy } k \in I_0. \end{cases} \tag{9}$$

Az összes extremális irány számának meghatározása $n = 5$-re és $n = 6$-ra a kettős leíró módszerre (double description method) Fukuda által implementált cdd+ programrendszer (lásd [7]) használatával történt. Az eredmény:

A $\mathcal{D}_5$ halmaz extremális irányainak száma 210.
A $\mathcal{D}_6$ halmaz extremális irányainak száma 38780.

Izomorfia (vagyis ekvivalencia) vizsgálat alapján ezek a számok jelentősen csökkenthetők. Két azonos méretű szimmetrikus mátrixot izomorfnak és egyúttal ekvivalensnek tekintünk, ha szimmetrikus sor-oszlop permutáció egyiket a másikba viszi.

Nyilvánvaló, hogy ha $\mathbf{D} \in \mathcal{D}_n$ extremális irány, akkor az összes D-vel ekvivalens mátrix is eleme és extremális iránya a $\mathcal{D}_n$ kúpnak. Saját készítésű gépi program használatával $n = 5$ és $n = 6$ esetére meghatároztuk az egymással nem ekvivalens extremális irányok számát, melyre a következő eredményt kaptuk:

A $\mathcal{D}_5$ halmaz egymással nem ekvivalens extremális irányainak száma 12.
A $\mathcal{D}_6$ halmaz egymással nem ekvivalens extremális irányainak száma 145.

Az alkalmazott módszer lényege, hogy valamilyen szisztematikus leszámlálási eljárással minden esetben az egymással nem ekvivalens struktúrák (esetünkben extremális irányok vagy, ha úgy tetszik, mátrixok) számát határozzuk meg. E célból valamilyen lexikografikus rendezési elv alapján minden ekvivalenciaosztályból egyet, a lexikografikus értelemben legkisebbet tároljuk a leszámlálás során.

Az $n = 5$ esetre az izomorf alakzatok kizárása után kapott 12 extremális irány a 2.1. tétel feltételrendszeréből is kikövetkeztethető, ha az 1. táblázatban megadott s, n_i és r_i paraméterekkel írjuk fel a 2.1. tétel feltételeit. E táblázatban felsoroljuk először a 8 korábban (az 1.1. tétel alapján) is ismert feltétel fajtát, majd a vízszintes vonal alatt folytatjuk a később talált 4 feltétel fajtával.

A mátrixelemek indexeit variálva, a táblázatban felsorolt 12 feltételtípusból típusonként 10, 20, 30, 20, 5, 30, 10, 10 (eddig összesen 135 régi), 5, 20, 20, 30, mindösszesen 210 feltétel adódik. A $\mathcal{D}_5$ konvex kúpnak ugyanennyi extremális irányát kapjuk meg a 2. táblázatban felsorolt mátrixokból a sorok és oszlopok szimmetrikus permutációi segítségével.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ -2 & -2 & -2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & -2 & -2 & 6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & -2 & -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & -2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

2. táblázat. $\mathcal{D}_n$ extremális irányai $n = 5$ esetén

Megjegyezzük, hogy számítógép nélkül, standard matematikai módszerekkel elméleti úton is bizonyítható, hogy az 1. táblázatban felsorolt feltételek között – az indexek variációit is figyelembe véve – nincsenek redundánsak. Az elméleti bizonyítást az olvasóra bízzuk, és ennek megkönnyítésére felsoroljuk az extremális irányoknak megfelelő mátrixokat is (2. táblázat).

Struktúrák ekvivalenciaosztályainak vizsgálata során illik megadni az egyes osztályok automorfizmus-csoportjának rendjét. Szimmetrikus mátrixok ekvivalenciaosztályai esetén automorfizmusok azok a – sorok és oszlopok szimmetrikus permutációjával értelmezett – leképezések, amelyek az adott mátrixot változatlanul hagyják. Megvizsgálva ebből a szempontból a 2. táblázatban megadott mátrixokat, könnyen látható, hogy e mátrixok esetén automorfizmusok azok az indexpermutációk, amelyek csak az azonos (n_i, r_i) párokhoz tartozó indexeket, továbbá az esetleges csupa 0 értéket tartalmazó sorok indexeit permutálják. Az automorfizmuscsoportok tehát ezekben az esetekben kisméretű szimmetrikus csoportok direkt összegei. A táblázatban megadott mátrixok automorfizmus-csoportjának rendje eszerint minden esetben a

$$\prod_{i=0}^{s} n_i! \quad \left(\text{ahol } n_0 = n - \sum_{i=1}^{s} n_i\right) \tag{10}$$

képlettel kapható meg, és így a 12 mátrix automorfizmus-csoportjának a rendjére sorrendben a 12, 6, 4, 6, 24, 4, 12, 2, 24, 6, 6, 4 értéket kapjuk.

Itt érdemes mindjárt megjegyezni, hogy a (10) képlet tetszőleges n esetén is érvényes minden olyan szimmetrikus mátrixra, melynek elemeit a (7)–(9) előírással képezzük.

Rátérve az $n = 6$ eset vizsgálatára, a 145 egymással nem ekvivalens extremális irány, illetve az ezeknek megfelelő mátrixok áttekintése során az derült ki, hogy ezek közül csak 31 mátrix adható meg a 2.1. tételben és a (7)–(9) formuláknál használt jelölésekkel. Sajnos, ez azt is jelenti, hogy az $n = 6$ esetre érvényes szükséges és elégséges feltételrendszer feltételei közül ezeknek csak körülbelül egynegyede vezethető le a 2.1. tétel alapján. Ezek közül 12 mátrix az 1. táblázat soraihoz tartozó (és a 2. táblázatban szemléltetett) 12 mátrixnak egy-egy csupa 0 elemű sorral és oszloppal történő kiegészítéseként adódik. Az ott még nem szerepelt újabb 19 esetnek a felsorolását a 3. táblázat tartalmazza. Az e táblázat sorainak megfelelő egyenlőtlenség feltételek az 1. táblázathoz, azok mátrix reprezentációi a 2. táblázathoz hasonló módon írhatók fel.

s	n_1	n_2	n_3	n_4	r_1	r_2	r_3	r_4
2	1	5	–	–	1	−1	–	–
2	2	4	–	–	1	−1	–	–
2	3	3	–	–	1	−1	–	–
2	4	2	–	–	1	−1	–	–
2	4	2	–	–	−1	2	–	–
2	5	1	–	–	−1	2	–	–
3	1	4	1	–	1	−1	2	–
3	2	3	1	–	1	−1	2	–
3	2	3	1	–	1	−1	−2	–
3	3	1	2	–	1	−1	−2	–
3	3	2	1	–	1	−1	−2	–
3	4	1	1	–	1	−1	−2	–
2	4	2	–	–	1	−2	–	–
2	5	1	–	–	−1	3	–	–
3	1	4	1	–	1	−1	3	–
3	3	2	1	–	1	−1	−3	–
3	4	1	1	–	1	−1	−3	–
4	1	3	1	1	1	−1	2	−2
4	2	2	1	1	1	−1	2	−2

3. táblázat. Néhány további szükséges feltétel $n = 6$ esetén

A hátralévő további 114 extremális irány mátrixa közül a legtöbb egyáltalán nem, vagy alig rendelkezik felismerhető struktúrával. Ezért ezeknek a mátrixoknak az egyenkénti vizsgálata nem túlságosan érdekes. A részletes vizsgálat helyett csak néhány példát mutatunk itt $\mathcal{D}_6$ olyan extremális irányaira, melyek nem vezethetők le a 2.1. tételből:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 & 1 & -2 & -2 \\ -1 & -1 & 1 & 2 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 & -2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & -2 & -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -2 & -2 \\ -1 & -1 & -1 & 2 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & -2 & 2 & 6 & 3 \\ -2 & -2 & -2 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ezek még viszonylag szabályos struktúrával rendelkező mátrixok. (Az egymással nem ekvivalens extremális irányok teljes listáját a Függelék tartalmazza.)

4. Az illeszthetőség vizsgálata rácspontok esetén

Ebben a szakaszban azzal a kérdéssel foglalkozunk, hogy mekkora annak a veszélye, hogy a (3) szükséges feltételen alapuló illesztő algoritmus nem állít elő pontosan illeszkedő többdimenziós gamma-eloszlást. E célból kiszámítjuk és összehasonlítjuk a rácspontok számát a (3) feltételnek eleget tevő $\mathbf{C}$ mátrixok halmazának, illetve a $\mathcal{C}_n$ halmaznak korlátos metszeteiben (adott élhosszúságú kockákban). A továbbiakban ismertetjük a leszámlálásra alkalmazott módszer részleteit és eredményét.

A gamma-eloszlás illeszthetőségének, tehát az (1) egyenletrendszer megoldhatóságának a kérdését itt olyan $\mathbf{C}$ szimmetrikus mátrixok esetén vizsgáljuk, melyeknek minden elemére teljesül

$$\left.\begin{array}{l} 0 \le c_{ij} \le \lambda \\ c_{ij} \text{ egész} \end{array}\right\} \quad (1 \le i,j \le n). \tag{11}$$

Kis n-ek és λ-k esetén ($n \le 6$, $\lambda \le 9$, de az utóbbinak a korlátja n-től is függ) meghatározzuk az olyan $\mathbf{C}$ mátrixok számát, melyek kielégítik az 1.1. tétel, illetve a 3.1. tétel feltételrendszerét, és egyidejűleg eleget tesznek a (11) korlátossági és egészértékűségi követelménynek is. Ellenőrzési célból összeszámoljuk az olyan különböző **C** empirikus kovarianciamátrixok számát is, melyek úgy adódnak, hogy λ-nál nem nagyobb nemnegatív egész értékű ϑ_l értékeket helyettesítünk be az (1) feltételrendszer bal oldalán álló kifejezésbe minden lehetséges módon, és meghatározzuk, hogy az így kapott különböző **C** mátrixok közül hányra teljesül, hogy minden mátrixelem abszolút értéke legfeljebb λ.

A leszámlálás eredményét az 4. táblázatban mutatjuk be. (E táblázatból az is látható, hogy a különböző n értékek esetén milyen λ-kra végeztük el az összehasonlító leszámlálást.) A leszámlálásra és ekvivalenciavizsgálatra készített programok helyességének teszteléseként először $n = 3$-ra és $n = 4$-re végeztük el a számítást, és azt találtuk, hogy ezekre az n-ekre $\lambda \leq 9$-ig a különböző módon elvégzett leszámlálások azonos eredményt adnak. Ez nem meglepő, mivel tudjuk, hogy a (3) feltétel $n \leq 4$ esetén szükséges és elégséges. Mégis kaptunk ezzel egy nem túl erős, de talán ennek ellenére említést érdemlő mellékeredményt:

4.1. TÉTEL. *Ha valamely* 3×3 *vagy* 4×4 *méretű* **C** *mátrix minden eleme* 10*-nél kisebb egész és az (1) rendszernek van nemnegatív megoldása, akkor van (1)-nek olyan nemnegatív megoldása is, amely csupa egész értékű komponensből áll.*

Megjegyezzük, hogy $n = 3$-ra az 4.1. tételben megfogalmazott állítás a $\lambda < 10$ korlát nélkül is igaz. Ez könnyen látható a [6] cikk 4. szakaszában közölt gondolatmenetből, amely $n = 3$ esetén a (3) illeszthetőségi feltételek elégségességét bizonyítja.

$\lambda \backslash n$	2	3	4	5			6		
1	4	7	12	19	19	19	30	30	30
2	10	32	108	373	371	370	1365	1339	1332
3	20	110	759	6593	6549	6546	75567	73498	73265
4	35	313	4230	90667	90152	90144	3259603	3177039	3174592
5	56	771	19190	929050	924671	924660			
6	84	1702	73239						
7	120	3442	241999						
8	165	6487	709746						
9	220	11533	1884440						

4. táblázat. Az egymással nem ekvivalens **C** mátrixok száma 3 különböző értelmezésben

A 4. táblázat $n = 5$-re és $n = 6$-ra három oszlopot tartalmaz. Ilyenkor az azonos n-hez tartozó három oszlop közül a balra lévő (kisebb fontmérettel nyomtatott) oszlop a (3) feltételrendszernek eleget tevő **C** mátrixok számát, a középső (normál mérettel nyomtatott) oszlop a szükséges és elégséges feltételrendszernek eleget tevő $\mathbf{C}$ mátrixok számát mutatja, a jobbra lévő (megint kisebb mérettel nyomtatott) oszlop pedig a nemnegatív ϑ_l értékek behelyettesítése útján nyert $\mathbf{C}$ mátrixok számát.

Az $n = 2$-höz tartozó oszlop értékeit meghatározó fájlokat még közvetlenül generáltuk az alábbi észrevétel alapján: $n = 2$ és tetszőleges λ esetén az e paraméterértékeknek megfelelő fájl azon 2×2 méretű szimmetrikus $\mathbf{C}$ mátrixokból áll, melyek elemeire fennáll

$$0 \leq c_{12} \leq c_{11} \leq c_{22} \leq \lambda,$$

az ilyen (c_{12}, c_{11}, c_{22}) hármasok száma pedig

$$\binom{\lambda+3}{3}.$$

$n \geq 3$ esetén az n-hez tartozó fájl elkészítéséhez a program inputként használja az $(n-1)$-hez tartozó fájlt.

A leszámlálás eredményei bizonyos mértékig választ adnak arra a kérdésre, hogy a (3) feltételekre épülő algoritmus mennyire megbízható. Ez jórészt azon múlik, hogy a (3) feltételrendszernek eleget tevő $\mathbf{C}$ mátrixok között milyen arányban fordulnak elő „hamis megoldások", vagyis olyanok, amelyek nem elemei a $\mathcal{C}_n$ halmaznak. Az előzőekben specifikált rácspontokra $n = 5\,; \lambda = 2, 3, 4, 5$, illetve $n = 6$, $\lambda = 2, 3, 4$ esetén a 4. táblázat adataiból kiszámítható, hogy ez a részarány a vizsgált esetekben 0,47 és 2,74 százalék között van, és ez elég megnyugtatónak tűnik.

Végül két példát mutatunk „hamis megoldás" előfordulására. Válasszuk ehhez a 4. táblázatban a legegyszerűbb olyan esetet, amikor a különböző értelemben vett leszámlálások eredményei között eltérés van. Ez az $n = 5$, $\lambda = 2$ eset. Most tekintsük azokat a 0, 1, 2 elemű 5×5 méretű mátrixokat, amelyek a (3) feltételrendszernek eleget tesznek, viszont egész értékű ϑ_l-ek behelyettesítésével nem állíthatók elő. Három ilyen mátrix van, mivel a leszámlálás 373 mátrixot generált az első, 370 mátrixot a harmadik esetben. Ezek a mátrixok a következők:

$$\mathbf{C}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{C}_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

A mátrixelemek behelyettesítésével verifikálható, hogy mindhárom mátrix maradéktalanul eleget tesz a (3) feltételrendszernek, viszont $\mathbf{C}_1$ és $\mathbf{C}_2$ esetén (1)-nek mégsincs nemnegatív megoldása, tehát $\mathbf{C}_1$ és $\mathbf{C}_2$ mint empirikus kovarianciamátrixok esetén a gamma eloszlás nem illeszthető pontosan.

Konkrét számításhoz (1) helyett célszerűbb a vektoriális (2) feltételrendszert tekinteni. Az ebben előforduló $\tilde{\mathbf{A}}$ mátrix $n = 5$ esetén a következő:

$$\tilde{\mathbf{A}} = \left(\begin{array}{*{31}{c}}
1 & & & & & 1 & 1 & 1 & 1 & & & & & & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & & & & 1 & 1 & 1 & 1 & & 1 \\
& 1 & & & & 1 & & & & 1 & 1 & 1 & & & & 1 & 1 & 1 & & & & 1 & 1 & 1 & & 1 & 1 & 1 & & 1 & 1 \\
& & 1 & & & & 1 & & & 1 & & & 1 & 1 & & 1 & & & 1 & 1 & & 1 & 1 & & 1 & 1 & 1 & & 1 & 1 & 1 \\
& & & 1 & & & & 1 & & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & 1 & & 1 & 1 & 1 & & 1 & 1 & 1 & 1 \\
& & & & 1 & & & & 1 & & & 1 & & 1 & 1 & & & 1 & & 1 & 1 & & 1 & 1 & 1 & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
& & & & & 1 & & & & & & & & & & 1 & 1 & 1 & & & & & & & & 1 & 1 & 1 & & & 1 \\
& & & & & & 1 & & & & & & & & & 1 & & & 1 & 1 & & & & & & 1 & 1 & & 1 & & 1 \\
& & & & & & & 1 & & & & & & & & & 1 & & 1 & & 1 & & & & & 1 & & 1 & 1 & & 1 \\
& & & & & & & & 1 & & & & & & & & & 1 & & 1 & 1 & & & & & & 1 & 1 & 1 & & 1 \\
& & & & & & & & & 1 & & & & & & 1 & & & & & & 1 & 1 & & & 1 & 1 & & & 1 & 1 \\
& & & & & & & & & & 1 & & & & & & 1 & & & & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & 1 \\
& & & & & & & & & & & 1 & & & & & & 1 & & & & & 1 & 1 & & & 1 & 1 & & 1 & 1 \\
& & & & & & & & & & & & 1 & & & & & & 1 & & & 1 & & & 1 & 1 & & & 1 & 1 & 1 \\
& & & & & & & & & & & & & 1 & & & & & & 1 & & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & 1 & 1 \\
& & & & & & & & & & & & & & 1 & & & & & & 1 & & & 1 & 1 & & & 1 & 1 & 1 & 1
\end{array}\right)$$

(Az áttekinthetőség kedvéért a 0-k helyét üresen hagytuk a mátrixban.)

Szorozzuk meg a (2) feltételrendszerben álló egyenlőségrendszer mindkét oldalát balról az

$$(1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 2, -2, -2,\ 1, -1, -1, -1, -1,\ 1)$$

sorvektorral. Ezáltal azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
&\vartheta_1 + \vartheta_4 + \vartheta_5 + 3\vartheta_6 + 3\vartheta_7 + \vartheta_{10} + 3\vartheta_{15} + 6\vartheta_{16} + \vartheta_{17} + \\
&+ \vartheta_{18} + \vartheta_{19} + \vartheta_{20} + \vartheta_{24} + \vartheta_{25} + 3\vartheta_{26} + 3\vartheta_{27} + \vartheta_{31} = \\
&= c_{11} + c_{44} + c_{55} + 2c_{12} + 2c_{13} - 2c_{14} - 2c_{15} + \\
&+ c_{23} - c_{24} - c_{25} - c_{34} - c_{35} + c_{45} = -1,
\end{aligned}$$

és ez ellentmond a ϑ vektorra megkövetelt nemnegativitásnak.

Hasonló módszert alkalmazhatunk a $\mathbf{C}_2$ mátrixra is, de ehhez a

$$(3,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 2, -2, -2, -2, -1, -1, -1,\ 1,\ 1,\ 1)$$

sorvektorral érdemes szorozni, hogy a kívánt célt elérjük. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
&3\vartheta_1 + \vartheta_2 + 6\vartheta_6 + \vartheta_7 + \vartheta_8 + \vartheta_9 + \vartheta_{13} + \vartheta_{14} + \vartheta_{15} + 3\vartheta_{16} + \\
&\quad + 3\vartheta_{17} + 3\vartheta_{18} + 3\vartheta_{25} + \vartheta_{26} + \vartheta_{27} + \vartheta_{28} + \vartheta_{30} \\
&= 3c_{11} + c_{22} + 2c_{12} - 2c_{13} - 2c_{14} - 2c_{15} - c_{23} - \\
&\quad - c_{24} - c_{25} + c_{34} + c_{35} + c_{45} = -1,
\end{aligned}$$

ami ismét ellentmond ϑ nemnegativitásának.

Egész más a helyzet a $\mathbf{C}_3$ mátrixszal. Ez a mátrix arra az esetre példa, amikor a (2) feltételrendszernek van nemnegatív megoldása, de nincs egész értékű nemnegatív megoldása. Egy nemnegatív megoldás a következő:

$$\vartheta_l = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{ha } l \in \{7, 8, 9, 10, 11, 12, 29, 30\} \\ 0 & \text{az összes többi } l \text{ indexre.} \end{cases}$$

Ilyen esetek előfordulása magyarázza, hogy a 4. táblázatban az $n = 5$-höz és $n = 6$-hoz tartozó három számoszlop közül a második és a harmadik oszlop kissé eltér egymástól.

FÜGGELÉK

A $\mathcal{D}_6$ halmaz egymással nem ekvivalens extremális iránya

d_{11}	d_{22}	d_{33}	d_{44}	d_{55}	d_{66}	d_{12}	d_{13}	d_{14}	d_{15}	d_{16}	d_{23}	d_{24}	d_{25}	d_{26}	d_{34}	d_{35}	d_{36}	d_{45}	d_{46}	d_{56}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	−1
0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	−1	−1
0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	−1	1	−1	−1
0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	1	1	1	−1	1	1	−1	1	−1	−1
0	0	0	0	0	2	1	1	1	1	−1	1	1	1	!1	1	1	−1	1	−1	−1
0	0	0	0	2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	−1	−1	−1	−1	1
0	0	0	0	2	2	0	0	0	0	0	1	1	−1	−1	1	−1	−1	−1	−1	1
0	0	0	0	2	2	1	1	1	−1	−1	1	1	−1	−1	1	−1	−1	!1	−1	1
0	0	0	2	2	2	0	0	0	0	0	1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	1	1	1
0	0	0	2	2	2	1	1	−1	−1	−1	1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	1	1	1
0	0	2	2	2	2	1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	1	1	1	1	1	1
0	0	4	4	4	4	3	−2	−2	−2	−2	−2	−2	−2	−2	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	6	0	0	0	0	0	1	1	1	−2	1	1	−2	1	−2	−2
0	0	0	0	0	6	1	1	1	1	−2	1	1	1	−2	1	1	−2	1	−2	−2
0	0	0	0	6	6	1	1	1	−2	−2	1	1	!2	−2	1	−2	−2	−2	−2	4
0	0	0	0	0	12	1	1	1	1	−3	1	1	1	−3	1	1	−3	1	−3	−3
2	2	2	2	2	2	1	1	1	−2	−2	1	1	−2	−2	1	−2	−2	−2	−2	4
0	0	0	0	0	6	1	1	1	2	−2	1	1	2	−2	1	2	−2	2	−2	−3
0	0	0	0	0	12	1	1	1	2	−3	1	1	2	−3	1	2	−3	2	−3	−5
0	0	0	2	2	2	0	0	0	0	0	1	−1	−1	2	−1	−1	2	1	−2	−2
0	0	0	2	2	2	1	1	−1	−1	2	1	−1	−1	2	−1	−1	2	1	−2	−2
0	0	2	2	2	2	0	0	0	0	0	−1	−1	−1	2	1	1	−2	1	−2	−2
0	0	2	2	2	2	1	−1	−1	−1	2	−1	−1	−1	2	1	1	−2	1	−2	−2
0	2	2	2	2	2	−1	−1	−1	−1	2	1	1	1	−2	1	1	−2	1	−2	−2
0	2	2	2	2	2	−1	−1	−1	2	2	1	1	−2	−2	1	−2	−2	−2	−2	4
0	0	2	2	2	2	1	−1	−1	2	2	−1	−1	2	2	1	−2	−2	−2	−2	3
0	0	2	4	4	4	3	5	−2	−2	−2	5	−2	−2	−2	−3	−3	−3	1	1	1
0	2	4	4	4	4	5	−2	−2	−2	−2	−3	−3	−3	−3	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	2	6	0	0	0	0	0	1	1	−1	−2	1	−1	−2	−1	−2	2
0	0	0	0	2	6	1	1	1	−1	−2	1	1	−1	−2	1	−1	−2	−1	−2	2
0	0	0	2	2	6	1	1	−1	−1	−2	1	−1	−1	−2	−1	−1	−2	1	2	2
0	0	2	2	2	6	1	−1	−1	−1	3	−1	−1	−1	3	1	1	−3	1	−3	−3
0	2	2	2	2	6	−1	−1	−1	−1	3	1	1	1	−3	1	1	−3	1	!3	−3
0	0	0	2	6	6	1	1	−1	2	−2	1	−1	−2	−2	−1	−2	−2	2	2	3
0	0	0	0	2	12	1	1	1	−1	−3	1	1	−1	−3	1	−1	−3	−1	!3	3
0	0	0	4	6	6	1	1	3	−2	−2	1	3	−2	−2	3	−2	−2	−5	−5	3
0	0	0	0	6	12	1	1	1	−2	−3	1	1	−2	−3	1	−2	−3	−2	−3	5
0	0	0	0	4	4	0	0	1	−1	−1	1	2	−1	−1	2	−1	−1	−2	−2	1
0	0	0	4	4	4	0	1	−1	−1	−1	2	−1	−1	−1	−2	−2	−2	1	1	1
0	0	0	4	4	4	1	2	−1	−1	−1	3	−2	−2	−2	−2	−2	−2	1	1	1
0	0	0	0	0	6	0	1	1	1	−1	1	1	1	−2	1	1	−2	1	−2	−2
0	0	0	0	2	2	1	1	1	0	−1	1	1	0	−1	1	−1	0	−1	0	−1
0	0	0	2	2	2	0	0	1	1	−1	1	−1	−1	2	−1	−1	2	1	−2	−2
0	0	2	2	2	2	0	1	1	1	−1	−1	−1	−1	2	1	1	−2	1	−2	−2
0	0	0	2	2	4	0	0	1	1	−1	1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	1	0	0
0	0	0	2	4	4	0	0	1	−1	−1	1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	0	0	1
0	0	2	2	2	4	0	−1	−1	−1	1	1	1	1	−2	1	1	−2	1	−2	−2

d_{11}	d_{22}	d_{33}	d_{44}	d_{55}	d_{66}	d_{12}	d_{13}	d_{14}	d_{15}	d_{16}	d_{23}	d_{24}	d_{25}	d_{26}	d_{34}	d_{35}	d_{36}	d_{45}	d_{46}	d_{56}
0	0	0	0	2	4	1	1	2	−1	−1	1	2	−1	−1	2	−1	−1	−1	−2	0
0	0	0	2	4	4	1	2	−1	−1	−1	2	−1	−1	−1	−1	−2	−2	0	0	1
0	0	0	0	2	6	1	1	1	0	−2	1	1	0	−2	1	−1	−2	−1	−2	1
0	0	0	0	2	6	1	1	2	−1	−2	1	2	−1	−2	2	−1	−2	−1	−3	2
0	0	0	0	4	6	1	1	2	−1	−2	1	2	−1	−2	2	−1	−2	−2	−3	1
0	0	0	0	6	6	1	1	1	−1	−2	1	1	−2	−2	1	−2	−2	−2	−2	3
0	0	0	0	6	12	1	1	2	−2	−3	1	2	−2	−3	2	−2	−3	−3	−5	5
0	0	2	2	2	4	1	−1	−1	2	−1	−1	−1	2	−1	1	−2	0	−2	0	−1
0	2	2	2	2	4	−1	−1	−1	2	1	1	1	−2	−2	1	−2	−2	−2	−2	3
0	2	2	2	2	4	−1	−1	−1	2	−2	1	1	−2	2	1	−2	2	−2	2	−3
0	2	2	2	2	4	1	1	1	−1	−2	1	1	−2	−2	1	−2	−2	−2	−2	3
0	0	0	2	2	6	1	1	−1	2	−2	1	−1	2	−2	−1	2	−2	−2	2	−4
0	0	2	2	2	6	1	−1	−1	2	−2	−1	−1	2	−2	1	−2	2	−2	2	−4
0	2	2	2	2	6	−1	−1	−1	2	3	1	1	−2	!3	1	−2	!3	−2	−3	5
0	0	2	2	2	10	1	−1	−1	2	−3	−1	−1	2	−3	1	−2	3	−2	3	−5
0	0	2	2	2	10	1	−1	2	2	−3	−1	2	2	−3	−2	−2	3	3	−5	−5
0	2	2	2	2	10	−1	−1	2	2	−3	1	−2	−2	3	−2	−2	3	3	−5	−5
0	0	0	2	4	6	1	1	−1	−1	−2	1	−1	−1	−2	−1	−1	−2	0	2	1
0	0	0	2	4	6	1	1	−1	3	−2	1	−1	3	−2	−1	3	−2	−3	2	−5
0	0	2	4	6	6	1	−1	3	−2	−2	−1	3	!2	−2	−3	2	2	−5	−5	3
0	2	2	2	4	6	−1	−1	−1	−2	3	1	1	2	−3	1	2	−3	2	−3	−5
2	2	2	2	4	6	1	1	−2	2	−3	1	!2	2	−3	−2	2	−3	−3	5	−5
0	0	0	0	4	4	0	0	1	−1	−1	1	0	−1	−1	1	−1	−1	−1	−1	1
0	0	0	0	4	4	0	1	2	−1	−1	2	1	−1	−1	3	−2	−2	−2	−2	1
0	0	0	0	2	2	0	1	1	0	−1	1	1	−1	0	1	−1	−1	−1	−1	1
0	0	0	0	2	2	0	1	1	0	−1	1	1	−1	1	1	−1	0	−1	0	−1
0	0	0	2	2	2	0	1	0	−1	−1	1	−1	1	1	−1	0	0	−1	−1	1
0	0	0	2	2	2	0	0	−1	1	1	1	0	−1	−1	1	−1	−1	−1	−1	1
0	0	0	0	2	4	0	0	1	1	−1	1	2	−1	−1	2	−1	−1	−1	−2	0
0	0	0	0	2	4	0	1	1	0	−1	1	1	−1	−1	1	−1	−1	−1	−1	0
0	0	0	2	2	4	0	1	−1	−1	1	1	1	1	−2	0	0	−1	1	−2	−2
0	0	0	2	4	4	0	1	1	−1	−1	2	−1	−1	−1	−1	−2	−2	0	0	1
0	0	0	0	2	6	0	1	1	−1	−1	1	1	1	−2	1	0	−2	0	−2	−1
0	0	0	0	2	6	0	1	1	0	−1	1	1	−1	−2	1	−1	−2	−1	−2	2
0	0	0	0	6	6	0	1	1	−1	−2	1	1	!2	−1	1	−2	−2	−2	−2	3
0	0	0	2	2	2	1	1	0	−1	1	1	−1	−1	2	−1	−1	2	1	−2	−2
0	0	2	2	2	2	1	0	0	−1	1	−1	−1	−1	2	1	1	−2	1	−2	−2
0	0	2	2	2	2	0	0	1	−1	−1	−1	−1	1	1	0	−1	−1	−1	−1	1
0	0	2	2	2	2	1	0	−1	−1	2	1	−1	−1	2	−1	−1	1	1	−2	−2
0	0	2	2	2	2	1	0	0	−1	−1	−1	−1	0	−1	1	−1	1	−1	1	0
0	0	2	2	2	2	1	0	0	−1	1	−1	−1	0	2	1	−1	−2	−1	−2	1
0	0	2	2	2	2	1	0	1	−1	−1	1	0	−1	−1	0	−1	−1	−1	−1	1
0	0	0	2	2	4	0	0	1	−1	−1	1	−1	2	−1	−1	2	−1	−2	0	−1
0	0	2	2	2	4	0	1	1	−1	−1	−1	−1	2	−1	1	−2	0	−2	0	−1
0	0	0	2	2	4	1	1	0	−1	−1	1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	1	0	0
0	0	2	2	2	4	0	0	−1	−1	1	−1	1	1	−2	−1	−1	2	1	−2	−2
0	0	2	2	2	4	0	1	1	−1	−2	−1	−1	2	1	1	−2	−2	−2	−2	3
0	0	2	2	2	4	1	−1	−1	2	−1	−1	−1	2	−2	1	−2	2	−2	2	−3
0	0	2	2	2	4	1	0	−1	−1	−1	1	−1	−1	−2	−1	−1	−2	1	2	2
0	0	2	2	2	4	1	0	0	−1	−1	1	1	−1	−2	1	−1	−2	−1	−2	2
0	0	2	2	2	4	1	0	0	−1	−1	−1	−1	0	1	1	−1	−2	−1	−2	2
0	0	0	2	2	6	1	1	−1	1	−2	1	−1	2	−2	−1	2	−2	−2	2	−3

d_{11}	d_{22}	d_{33}	d_{44}	d_{55}	d_{66}	d_{12}	d_{13}	d_{14}	d_{15}	d_{16}	d_{23}	d_{24}	d_{25}	d_{26}	d_{34}	d_{35}	d_{36}	d_{45}	d_{46}	d_{56}
0	0	0	2	2	6	1	1	0	−1	−1	1	−1	0	−2	−1	0	−2	−1	2	−1
0	0	0	2	2	6	1	1	0	−1	−2	1	−1	−1	−2	−1	−1	−2	1	1	2
0	0	0	2	2	6	1	1	0	−1	−2	1	0	−1	−2	−1	0	−2	−1	1	1
0	0	0	2	2	6	1	1	0	−1	−2	1	0	−1	−2	1	−1	−2	−1	−1	2
0	0	0	2	2	6	1	1	0	1	−2	1	−1	2	−2	−1	2	−2	−2	1	−3
0	0	0	2	4	6	1	2	−1	−1	−2	2	−1	−1	!2	−1	−2	−3	0	2	1
0	2	2	2	2	2	−1	−1	−1	−1	2	0	1	1	−1	1	1	−2	1	−2	−2
0	2	2	2	2	2	−1	−1	−1	2	2	1	1	−1	!2	1	−2	−2	−2	−2	3
0	2	2	2	2	2	0	−1	−1	−1	2	0	−1	−1	1	1	1	−2	1	−2	−2
0	2	2	2	2	2	0	0	−1	−1	1	1	−1	1	!2	−1	1	−2	0	1	−2
0	2	2	2	2	4	0	−1	−1	2	−1	−1	−1	1	!2	1	−2	2	−2	2	−3
0	2	2	2	2	4	1	−1	−1	2	−2	−1	−1	1	!2	1	−2	2	−2	2	−3
0	0	2	2	2	6	1	−1	−1	2	−2	−1	−1	2	!2	1	−2	1	−2	2	−3
0	2	2	2	4	6	−1	−1	2	−2	3	1	−2	2	−3	−2	2	−3	−3	5	−5
2	2	2	2	2	2	0	1	1	−1	−2	1	1	!2	−1	1	−2	−2	−2	−2	3
0	0	0	0	0	4	0	0	1	1	−1	1	0	1	−1	1	0	−1	0	−1	−1
0	0	0	0	2	2	0	0	1	−1	1	1	0	1	−1	1	0	−1	−1	0	−1
0	0	0	0	2	4	0	0	1	−1	−1	1	0	1	−1	1	0	−1	−1	−1	0
0	0	0	2	2	2	0	0	−1	−1	1	1	0	1	−1	1	0	−1	0	−1	−1
0	0	0	2	2	2	0	1	0	−1	1	1	−1	0	−1	−1	−1	0	1	0	−1
0	0	0	2	2	2	0	1	0	1	−1	1	−1	−1	1	−1	0	0	0	−1	−1
0	0	0	2	2	2	1	1	0	−1	−1	1	−1	0	−1	−1	−1	−1	0	1	1
0	0	0	2	2	2	1	1	0	0	−1	1	0	−1	−1	−1	−1	0	1	−1	0
0	0	0	2	2	2	1	1	0	0	−1	1	0	−1	−1	1	−1	−1	−1	−1	1
0	0	0	2	2	2	1	1	0	0	−1	1	0	−1	0	−1	0	−1	−1	1	−1
0	0	0	2	2	2	1	1	0	0	−1	1	0	−1	0	1	−1	−1	−1	−1	0
0	0	0	2	2	4	0	0	−1	1	−1	1	0	−1	−1	1	−1	−1	−1	0	0
0	0	0	2	2	4	0	1	0	−1	−1	1	−1	0	−1	−1	−1	−1	1	0	0
0	0	0	2	2	4	0	1	0	−1	−1	1	−1	1	−1	−1	0	−1	−1	0	0
0	0	0	2	2	4	0	1	0	−1	1	1	−1	1	!2	−1	0	−1	−1	2	−2
0	0	0	2	2	6	0	1	0	−1	−1	1	−1	1	!2	−1	0	−2	−1	2	−1
0	0	2	2	2	2	0	0	−1	1	−1	−1	0	−1	1	1	0	−1	−1	0	−1
0	0	2	2	2	2	1	0	−1	−1	−1	−1	0	−1	−1	−1	0	1	1	0	1
0	0	2	2	2	2	1	0	−1	−1	1	−1	0	−1	2	−1	1	−2	0	1	−2
0	0	2	2	2	2	1	0	−1	−1	2	−1	−1	−1	2	0	1	−1	1	−2	−2
0	0	2	2	2	2	1	0	−1	−1	2	−1	0	−1	2	−1	0	−1	1	−1	−2
0	0	2	2	2	2	1	0	0	−1	−1	−1	−1	0	0	1	0	−1	−1	−1	1
0	0	2	2	2	2	1	0	0	−1	−1	−1	1	−1	−1	−1	0	1	−1	−1	1
0	0	2	2	2	2	1	0	0	−1	−1	0	−1	0	−1	−1	−1	−1	0	1	1
0	0	2	2	2	2	1	0	0	−1	−1	0	−1	0	−1	1	−1	−1	−1	0	1
0	0	2	2	2	2	1	0	0	−1	−1	1	−1	0	−1	−1	0	−1	−1	0	1
0	0	2	2	2	4	1	0	−1	2	−1	1	−1	2	−2	−1	1	−2	−2	2	−3
0	0	2	2	2	6	1	0	−1	1	−2	−1	−1	2	−2	1	−2	1	−2	2	−3
0	2	2	2	2	2	−1	−1	−1	2	2	0	1	−1	−2	1	−2	−1	−2	−2	3
0	2	2	2	2	2	0	−1	−1	−1	2	0	−1	1	−1	1	1	−2	0	−1	−2

Köszönetnyilvánítás

A szerzők köszönetüket fejezik ki Hujter Mihálynak a kézirat alapos átnézéséért, hasznos észrevételeiért, valamint tanácsaiért, melyekkel segítette a dolgozat végső formájának kialakítását.

Hivatkozások

[1] KOTZ, S., BALAKRISHNAN, N. AND JOHNSON, N. L.: *Continuous Multivariate Distributions Volume I: Models and Applications, Second Edition*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 2000, pp. 434, 442–443, 458–459.

[2] PRÉKOPA, A.: *Valószínűségelmélet műszaki alkalmazásokkal*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1974.

[3] PRÉKOPA, A.: *Stochastic programming*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1985.

[4] PRÉKOPA, A. ÉS SZÁNTAI, T.: *„Egy új, többdimenziós gamma eloszlás és annak illesztése empirikus adatokhoz"*, Alkalmazott Matematikai Lapok 1 (1975) 299–318.

[5] RÉNYI, A.: *Valószínűségszámítás*, Tankönyvkiadó, 1966.

[6] SZÁNTAI, T.: *„Új algoritmus a többdimenziós gamma eloszlás empirikus adatokhoz történő illesztésére"*, Alkalmazott Matematikai Lapok **10** (1984) 35-60.

[7] FUKUDA, K.: *„cdd and cddplus homepage"*, http://www.ifor.math.ethz.ch/~fukuda/cdd_home/index.html.

(Beérkezett: 2006. szeptember 4.)

KÉRI GERZSON
MTA SZTAKI
Operációkutatás és Döntési Rendszerek Kutatócsoport
keri@sztaki.hu

SZÁNTAI TAMÁS
BME TTK
Matematikai Intézet, Differenciálegyenletek Tanszék
szantai@math.bme.hu

COMBINATORIAL PROBLEMS ACCORDING TO CONDITIONS ON FITTING A CONSTRUCTIVELY DEFINED MULTIVARIATE GAMMA DISTRIBUTION TO EMPIRICAL DATA

G. KÉRI AND T. SZÁNTAI

The main goal of this paper is to give new results according to fitting the multivariate gamma distribution introduced in paper [4] to empirical data. This problem was investigated before also in paper [6]. More details of the multivariate gamma distribution and its applications can be found in the books [1], [2], [3] and [5]. The authors of paper [4] proved that the new multivariate gamma distribution not always can be fitted to empirical data when the empirical covariance matrix has all nonnegative components. In paper [6] necessary conditions of the fitting were given and the sufficiency of these conditions was proved for dimension 4. For higher dimensions the question of sufficiency of the necessary conditions remained an open question. In this paper we formulate further necessary conditions. This way we prove that the necessary conditions given earlier are not sufficient. Using the more efficient computation tools we are able now to give the sufficient conditions for dimensions 5 and 6 as well. However, for higher dimensions we have only necessary conditions and the sufficiency of these conditions remains an open question.

Alkalmazott Matematikai Lapok **25** (2008), 119-129.

ÉLDISZJUNKT ÚTRENDSZER KITERJESZTÉSE

SZABÓ JÁCINT[1]

A dolgozatban egy újfajta problématípussal, az úgynevezett kiterjesztési problémával foglalkozunk. Az *off-line kiterjesztési problémában* adott egy G hálózat egész élkapacitásokkal, valamint egy H_1 és egy H_2 igénygráf egységnyi igényekkel ugyanazon a ponthalmazon. Feladatunk meghatározni az olyan $F \subseteq E(H_1) \cap E(H_2)$ élhalmazok méretének maximumát, amelyeknek van olyan G-beli egész útkiosztása, amely kiterjeszthető H_1, valamint H_2 egy-egy egész G-beli útkiosztásává. Az *online kiterjesztési problémában* adott egy G hálózat egész élkapacitásokkal, egy H igénygráf egy G-beli útkiosztással, valamint egy H_2 igénygráf egységnyi igényekkel, amelyre $E(H) \subseteq E(H_2)$ teljesül. Kérdés, mekkora az olyan $F \subseteq E(H)$ élhalmazok méretének maximuma, amelyekre az adott útkiosztás F-re való megszorítása kiterjeszthető H_2 egy egész útkiosztásává? Attól függően, hogy a gráfok irányítottak vagy irányítatlanok, négy különböző feladatot kapunk. Mind a négy NP-teljes, de e dolgozatban teljes megoldást adunk e feladatokra abban az esetben, amikor G egy gyűrű és az igénygráfok csillagok.

1. Bevezetés

A következő fogalmakat irányított és irányítatlan gráfokra is értjük. Egy $c : E \to \{0, 1, 2, \ldots\}$ kapacitás-függvénnyel ellátott $G = (V, E)$ gráfot *hálózatnak* hívunk. Legyen adott egy G hálózat és egy H igénygráf ugyanazon a V ponthalmazon. H-nak lehetnek párhuzamos élei, de feltesszük, hogy H semely éle nem hurok. $E(H)$-nak egy $\mathcal{P}$ leképezését H egy G-beli *útkiosztásának* hívjuk, ha minden s és t közötti $f \in E(H)$ élre $\mathcal{P}(f)$ egy st-út G-ben, és minden $e \in E$ élt legfeljebb $c(e)$ ilyen út használ. Az e-t használó $\mathcal{P}$-beli utak száma az e *terhelése*, ezt $l_{\mathcal{P}}(e)$-vel jelöljük. $F \subseteq E(H)$ esetén azt mondjuk, hogy H-nak a $\mathcal{P}$ útkiosztása *kiterjeszti* F-nek a $\mathcal{P}_F$ útkiosztását, ha $\mathcal{P}_F = \mathcal{P}|_F$.

1.1. Definíció. Az OFF-LINE KITERJESZTÉSI PROBLÉMÁBAN adott egy $G = (V, E)$ hálózat a $c : E \to \{0, 1, 2, \ldots\}$ kapacitásfüggvénnyel, valamint $i = 1, 2$-re egy H_i igénygráf ugyanazon a V ponthalmazon egy-egy G-beli útkiosztással. Jelölje $\varphi_{\mathrm{off}}(G; H_1, H_2)$ azon $F \subseteq E(H_1) \cap E(H_2)$ élhalmazok méretének maximumát, amelyeknek létezik egy olyan G-beli útkiosztása, amely kiterjeszthető H_1 és H_2 egy-egy G-beli útkiosztásává. Feladat meghatározni $\varphi_{\mathrm{off}}(G; H_1, H_2)$-t.

[1]A kutatás a France Telecom R & D, az OTKA K60802 és TS049788 pályázatai, valamint az ADONET Marie Curie RTN (504438 sz. FP6 szerződés) támogatásával folyt.

1.2. Definíció. Az ONLINE KITERJESZTÉSI PROBLÉMÁBAN adott egy $G = (V, E)$ hálózat a $c : E \to \{0, 1, 2, \dots\}$ kapacitásfüggvénnyel, egy H igénygráf egy G-beli $\mathcal{P}$ útkiosztással és egy másik H_2 igénygráf egy G-beli útkiosztással úgy, hogy $E(H) \subseteq E(H_2)$ teljesül. Jelölje $\varphi_{\text{on}}(G; \mathcal{P}; H_2)$ azon $F \subseteq E(H)$ élhalmazok méretének maximumát, amelyekre $\mathcal{P}|_F$ kiterjeszthető H_2 egy G-beli útkiosztásává. Feladat meghatározni $\varphi_{\text{on}}(G; \mathcal{P}; H_2)$-t.

Ezen feladatokat távközlési hálózatok útkiosztási problémái motiválják. Tegyük fel, hogy adott egy ilyen hálózat, és egymás után különböző igénygráfok váltják egymást, amelyeknek azonnal útkiosztást kell biztosítani. Ezt lehetőleg úgy akarjuk, hogy egy igénygráf-váltásnál minél kevesebb a váltást túlélő igénynek kelljen új utat kiosztani. Ez épp az ONLINE KITERJESZTÉSI PROBLÉMA. Figyeljük meg, hogy egy igénygráf-váltásra koncentrálva feltehetjük, hogy a korábbi igénygráf részgráfja az újnak. Az OFF-LINE KITERJESZTÉSI PROBLÉMA akkor merül fel, ha például valamilyen napszaktól függő struktúrája van az igénygráfoknak, így elég számítási kapacitásunk van arra, hogy előre kiszámítsuk igénygráfok egy sorozatának útkiosztását. Ezt szintén lehetőleg úgy szeretnénk, hogy minél kevesebb megmaradó igénynek kelljen új utat kiosztani. Bevezethetnénk tehát az OFF-LINE k-KITERJESZTÉSI PROBLÉMÁT is, ahol egy k igénygráfból álló sorozatnak kell útkiosztást adni, ebben a cikkben azonban csak a $k = 2$ esettel foglalkozunk. Távközlési hálózatokról bővebben [6]-ban olvashatunk.

A kiterjesztési problémák fenti definíciójában azért tettük fel, hogy H_1-nek és H_2-nek adott egy-egy G-beli útkiosztása, hogy a kiterjesztési probléma ne tartalmazza az útkiosztás keresésének NP-teljes feladatát. Bebizonyítható, hogy még így is NP-teljes a kiterjesztési probléma mind a négy változata

Ebben a dolgozatban a kiterjesztési problémát egy speciális esetben oldjuk meg.

1.3. Definíció. Az *oda-vissza irányított kör* egy irányított gráf a $\{v_1, v_2, \dots, v_n = v_0\}$ $(n \geq 3)$ ponthalmazon a $\{v_i v_{i+1}, v_{i+1} v_i : 0 \leq i \leq n-1\}$ élhalmazzal (azaz két ellentétesen irányított kör ugyanazon a ponthalmazon). *Gyűrű* alatt irányítatlan vagy oda-vissza irányított kört értünk.

A 2. fejezetben az irányított esettel foglalkozunk. Mind az off-line, mind az online változatra egy minimax formulát mondunk ki abban a speciális esetben, amikor G egy oda-vissza irányított kör és az igénygráfok minden élének ugyanaz a pont a forráspontja. Az off-line esetben bizonyítást is adunk, az online eset bizonyítása pedig a [5] dolgozatban található.

A 3. fejezetben az irányítatlan esetet tárgyaljuk azon feltételezés mellett, hogy G egy irányítatlan kör, és az igénygráfok éleinek egyik végpontja közös. Bizonyítás nélkül kimondunk egy minimax formulát az off-line változatra, és egy polinomiális algoritmust adunk az online esetre. Itt az a meglepő helyzet áll elő, hogy úgy tűnik, a másik három esettől eltérően az irányítatlan online változatban nem létezik szép minimax formula.

Vegyük észre, hogy ha csak egy csillag igénygráfunk volna, akkor a maximális folyam – minimális vágás tétel miatt a jól ismert vágásfeltétel szükséges és elégséges egy útkiosztás létezéséhez. A kiterjesztési problémában viszont a válasz jóval bonyolultabb abban az egyszerű esetben is, amikor a hálózat egy gyűrű.

A távközlési hálózatokban betöltött fontos szerepe miatt számosan vizsgálták az útkiosztási problémát gyűrűn, egy igénygráf feltételezése mellett. Ha a kapacitások egészek, az igények egységnyiek, és a $\mathcal{P}$ útkiosztás tört st-folyamokból áll st-utak helyett, akkor tört útkiosztásról beszélünk. A vágásfeltétel nem elegendő tört útkiosztás létezéséhez oda-vissza irányított kör hálózat esetén, ami megmagyarázza azt, hogy erre a problémára az egyetlen ismert módszer egy lineáris program megoldása. Irányítatlan kör esetében viszont a vágásfeltétel elegendő tört útkiosztás létezéséhez, és az első kombinatorikus algoritmus vázlatát Schrijver, Seymour és Winkler [4] adták. Módszerüket később Király [3] javította.

Az útkiosztás e cikkben használt fogalmára térve, Wilfong és Winkler [7] leírtak egy elegáns algoritmust útkiosztás keresésére egész élkapacitású oda-vissza irányított kör hálózatban, feltéve, hogy tört útkiosztás létezik. Az irányítatlan esetben Frank [2] egy módszerével adható polinomiális idejű algoritmus.

Ha az igények egészek, de nem feltétlenül egységnyiek, és megköveteljük, hogy az útkiosztás osztatlan legyen, azaz minden d_f igényű s és t közti f igényélre az útkiosztásnak egy d_f értékű st-utat kell tartalmaznia, akkor NP-teljes problémát kapunk abban az egyszerű esetben is, ha a hálózat egy gyűrű (Cosares és Saniee [1]). Az irányítatlan esetben Schrijver, Seymour és Winkler [4] egy olyan kombinatorikus közelítő algoritmust adtak, amely tört útkiosztás létezése esetén egy olyan osztatlan útkiosztást ad, amely legfeljebb $\frac{3}{2}D$-vel sérti a kapacitásokat, ahol D az igények maximuma. Megoldásuk könnyen kiterjeszthető az irányított esetre is.

A „kiterjesztés" gondolata más érdekes kérdéseket is felvet a kombinatorikus optimalizálás témakörében. Például, egy páros gráf élei pirosra, zöldre és pirVeszöldre vannak színezve. Határozzuk meg a maximális méretű piros-zöld élhalmazt, ami kiterjeszthető piros, ill. zöld teljes párosítássá is. A szerző tudomása szerint ezen probléma komplexitása nyitott.

2. Az irányított eset

Legyen $G = (V, E)$ egy oda-vissza irányított kör. Egy irányított igénygráf egy $s \in V$ középpontú *csillag*, ha minden élének forráspontja s. Ebben a fejezetben H, H_1 és H_2 ilyen irányított gráfokat fognak jelölni. A fejezetben mind az OFF-LINE, mind az ONLINE KITERJESZTÉSI PROBLÉMÁRA kimondunk egy minimax formulát abban a speciális esetben, amikor G egy oda-vissza irányított kör és H_1, valamint H_2 egy-egy $s \in V$ középpontú csillag. A rövidség kedvéért az online eset bizonyítását kihagyjuk, ez megtalálható [5]-ben.

2.1. Definíció. A G oda-vissza irányított kör két lehetséges iránya közül az egyik legyen az *előre*, a másik pedig a *hátra* irány. Ennek megfelelően, egy $e \in E$ él lehet előre- vagy hátraél, és az $u, v \in V$ pontokra a két lehetséges $u \to v$-út közül $[u, v]$ jelöli az előre-, és $\overleftarrow{[u, v]}$ a hátrautat (ha $u = v$, akkor mindkét út egyetlen pontból áll). Legyen $(u,v] = [u,v] - u$. Végül legyen $\overleftarrow{e} \in E$ az $e \in E$ él ellentétesen irányított párja.

Mint látni fogjuk, csillag igénygráfok útkiosztása speciális alakúnak választható.

2.2. Definíció. A H igénygráf $\mathcal{P}$ útkiosztása *sima*, ha létezik egy $z \in V - s$ pont, hogy minden $t \neq z$ nyelőpontú $f \in E(H)$ igényre, ha $t \in V[s,z]$ ($t \in V[z,s]$), akkor $\mathcal{P}(f)$ az előre (hátra) $s \to t$-út. A z nyelőpontú igényeknek bármely út ki lehet osztva. z-t a $\mathcal{P}$ egy *ellenpontjának* hívjuk.

2.1. Lemma. *A G oda-vissza irányított körön egy H csillag igénygráf minden $\mathcal{P}$ útkiosztásához létezik H-nak egy $\mathcal{P}'$ sima útkiosztása úgy, hogy $l_{\mathcal{P}'} \leq l_{\mathcal{P}}$.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy a $t_1 \neq t_2$ nyelőpontú f_1, f_2 igényekre $\mathcal{P}(f_i)$ tartalmazza t_{3-i}-t $i = 1, 2$-re. Ekkor mindkét igénynek az ellentétesen irányított utat kiosztva, semely él terhelését nem növeljük, sőt valamelyik élét még csökkentjük is. Vagyis véges sok lépés után a módosított $\mathcal{P}'$ útkiosztásban már nem lesz ilyen f_1, f_2 igénypár, és így $\mathcal{P}'$ sima. □

2.3. Definíció. Az s középpontú H csillag igénygráfra és az $u, v \in V$ pontokra legyen

$$d_H(u,v) = |\{f : f \in E(H) \text{ nyelőpontja } [u,v]\text{-beli}\}|.$$

Azt mondjuk, hogy a t_1 nyelőpontú $e_1 \in E$ előreél és a t_2 nyelőpontú $e_2 \in E$ hátraél *szembenéznek*, ha $t_1 \in V(s,t_2]$. Legyen $d_H(e_1,e_2) = d_H(t_1,t_2)$. Végül $e \in E$-re legyen

$$r_H(e) = \min\{c(\overleftarrow{e}) + c(e') - d_H(\overleftarrow{e}, e') : e' \in E \text{ szembenéz } \overleftarrow{e}\text{-vel}\}.$$

Először az off-line esetre bizonyítunk egy minimax formulát.

2.1. Tétel. *Legyen $G = (V,E)$ egy oda-vissza irányított kör, H_1, H_2 pedig $s \in V$ középpontú csillag igénygráfok, egy-egy G-beli útkiosztással. H-val jelöljük a V ponthalmazon az $E(H_1) \cap E(H_2)$ élhalmazú gráfot. Ekkor*

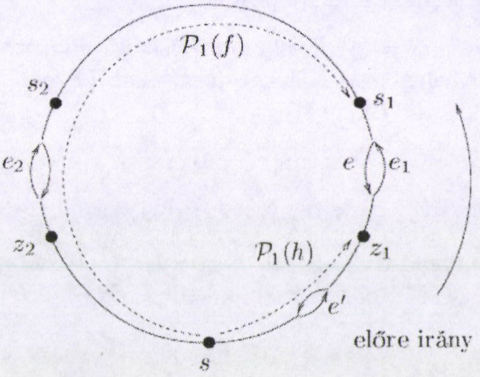
$$\varphi_{\text{off}}(G; H_1, H_2) \leq |E(H)| - \max\{d_H(e_1,e_2) - r_{H_1}(e_1) - r_{H_2}(e_2)\},$$

ahol a maximum szembenéző $e_1, e_2 \in E$ párokon fut. Továbbá vagy egyenlőség áll egy szembenéző $e_1, e_2 \in E$ élpárra, vagy $\varphi_{\text{off}}(G; H_1, H_2) = |E(H)|$.

Bizonyítás. Vegyük észre, hogy H minden $\mathcal{P}$ útkiosztásában $l_{\mathcal{P}}(e) \leq r_H(e)$ teljesül minden $e \in E$ élre. Az egyenlőtlenség tehát nyilvánvaló.

A másik állításhoz hívjuk egy $F \subseteq E(H)$ élhalmaz egy kiterjeszthető $\mathcal{P}$ útkiosztását *szép*nek, ha minden $E(H) - F$-beli igény nyelőpontja $\mathcal{P}$-nek ellenpontja. $F = \emptyset$ üres útkiosztása szép, ezért tekintsünk egy maximális méretű $F \subseteq E(H)$ halmazt, amelynek van szép kiterjeszthető $\mathcal{P}$ útkiosztása. Jelöljük $H_i - F$ kiterjesztő útkiosztását $\mathcal{P}_i$-vel, $i = 1, 2$-re. A 2.1. lemma miatt feltehetjük, hogy $\mathcal{P}_1$ és $\mathcal{P}_2$ simák a z_1, z_2 ellenpontokkal. Feltehetjük, hogy $z_1 \in V(s, z_2]$ és válasszuk meg z_1-et és z_2-t úgy, hogy az $[s, z_1]$ és $[z_2, s]$ utak a lehető legrövidebbek legyenek. Lásd az 1. ábrát.

Ha $|F| = |E(H)|$, akkor készen vagyunk. Egyébként $s_1 \in V(s, s_2]$ mellett legyen $[s_1, s_2]$ az a minimális gráf, amely tartalmazza az összes $f \in E(H) - F$ igény nyelőpontját. Ha $\mathcal{P}_1(f) = \mathcal{P}_2(f)$ előreút egy s_1 nyelőjű $f \in E(H) - F$ igényre, akkor $F + f$-nek létezne szép kiterjeszthető útkiosztása, ellentmondásban F maximalitásával. Hasonlóan érvelhetünk s_2 esetén, ahonnan az $[s_1, s_2] \subseteq [z_1, z_2]$ összefüggés adódik. További következmény, hogy $z_1 \neq z_2$ esetén $\mathcal{P}_1(f)$ hátraút és $\mathcal{P}_2(f)$ előreút minden $f \in E(H) - F$ igényre. A $z_1 = z_2$ esetben pedig, ha léteznek olyan $f_1, f_2 \in E(H) - F$ igények, hogy $\mathcal{P}_1(f_1)$ előreút és $\mathcal{P}_1(f_2)$ hátraút, akkor $\mathcal{P}_1$-ben mindkét igényt a másik úton elvezetve F-et megnövelhetnénk $\{f_1, f_2\}$-vel, ami nem lehetséges. Vagyis H_1 és H_2 szerepét esetleg felcserélve a $z_1 = z_2$ esetben is feltehetjük, hogy $\mathcal{P}_1(f)$ hátraút és $\mathcal{P}_2(f)$ előreút minden $f \in E(H) - F$ igényre.



1. ábra. Az off-line változat az irányított esetben.

Legyen $f \in E(H) - F$ egy s_1 nyelőjű igény, mint az 1. ábrán látható. Ha f-et elvezethetnénk $\mathcal{P}_1$-ben az előreúton, akkor $F + f$-nek volna egy szép kiterjeszthető útkiosztása, ellentmondásban F maximalitásával. Vagyis létezik egy $e' \in E[s, s_1]$ előreél, hogy $l_{\mathcal{P}_1}(e') + l_{\mathcal{P}}(e') = c(e')$. Vegyük észre, hogy $l_{\mathcal{P}_1}(e') > 0$, mivel $\mathcal{P}_2(f)$ terheli e'-t. Következésképp $e' \in E[s, z_1]$, és választhatunk egy $h \in E(H_1) - F$ igényt z_1 nyelővel, amire $\mathcal{P}_1(h)$ előreút. $\mathcal{P}_1(g)$ hátraút minden $g \in E(H) - F$ igényre, ezért $h \in E(H_1) - E(H)$. F maximalitása miatt nem lehet f és h mindegyikét a másik úton elvezetni, ezért létezik egy $e \in \overleftarrow{E[s_1, z_1]}$ hátraél, hogy $l_{\mathcal{P}_1}(e) + l_{\mathcal{P}}(e) = c(e)$. Mivel s_1 ellenpontja $\mathcal{P}$-nek, $l_{\mathcal{P}}(e) = 0$ teljesül. Legyen $e_1 = \overleftarrow{e}$. Összefoglalva, s_1 ellenpontja $\mathcal{P}$-nek, z_1 ellenpontja $\mathcal{P}_1$-nek, $e' \in E[s, z_1]$ és $e \in \overleftarrow{E[s_1, z_1]}$, vagyis

$$\begin{aligned} r_{H_1}(e_1) \le c(e) + c(e') - d_{H_1}(e, e') &= (l_{\mathcal{P}_1}(e) + l_{\mathcal{P}_1}(e')) + l_{\mathcal{P}}(e') - d_{H_1}(e, e') = \\ &= d_{H_1 - F}(e, e') + (d_F(e, e') + l_{\mathcal{P}}(e_1)) - d_{H_1}(e, e') = l_{\mathcal{P}}(e_1). \end{aligned}$$

Így $l_{\mathcal{P}}(e_1) = r_{H_1}(e_1)$. Hasonlóan, létezik egy $e_2 \in \overleftarrow{E[z_2, s_2]}$ hátraél az $l_{\mathcal{P}}(e_2) = r_{H_2}(e_2)$ tulajdonsággal. Mivel s_1 és s_2 ellenpontjai $\mathcal{P}$-nek,

$$d_F(e_1, e_2) = l_{\mathcal{P}}(e_1) + l_{\mathcal{P}}(e_2)$$

teljesül. Végezetül,

$$d_H(e_1, e_2) - r_{H_1}(e_1) - r_{H_2}(e_2) =$$
$$d_{H-F}(e_1, e_2) + d_F(e_1, e_2) - l_{\mathcal{P}}(e_1) - l_{\mathcal{P}}(e_2) = d_{H-F}(e_1, e_2) = |E(H) - F|,$$

és készen vagyunk. □

A fenti bizonyítás algoritmikus. $F = \emptyset$-nek az üres $\mathcal{P}$ útkiosztásából indulva minden lépésben növeljük F méretét, míg az el nem éri a 2.1. tételbeli korlátot.

Az irányított ONLINE KITERJESZTÉSI PROBLÉMA speciális esetére vonatkozó alábbi tétel bizonyítása megtalálható [5]-ben.

2.2. TÉTEL. *Legyen $G = (V, E)$ egy oda-vissza irányított kör és H_2 egy $s \in V$ középpontú csillag igénygráf egy G-beli útkiosztással. Legyen H a H_2 egy részgráfja egy G-beli $\mathcal{P}$ útkiosztással. Ekkor*

$$\varphi_{\text{on}}(G; \mathcal{P}; H_2) \leq$$
$$\leq |E(H)| - \max\left\{d_{H_2 - E(H)}(e_1, e_2) + l_{\mathcal{P}}(e_1) + l_{\mathcal{P}}(e_2) - c(e_1) - c(e_2)\right\},$$

ahol a maximum szembenéző $e_1, e_2 \in E$ párokon fut. Továbbá vagy egyenlőség áll egy szembenéző $e_1, e_2 \in E$ élpárra, vagy $\varphi_{\text{on}}(G; \mathcal{P}; H_2) = |E(H)|$.

3. Az irányítatlan eset

Az irányítatlan H gráfot egy $s \in V$ középpontú *csillag*nak hívjuk, ha H minden éle illeszkedik s-re. Ebben a fejezetben a kiterjesztési probléma azon speciális esetét vizsgáljuk, amikor $G = (V, E)$ egy irányítatlan kör, H_1, valamint H_2 pedig $s \in V$ középpontú csillagok. Bizonyítás nélkül kimondunk egy minimax formulát az offline változatra, valamint algoritmust adunk az online esetre, amely egy maximális kiterjeszthető útkiosztást keres meg.

Az előre és hátra irány, simaság és ellenpont fogalmát ugyanúgy definiáljuk, mint az irányított esetben. Az st-út előre (hátra), ha s-ből t-be irányítva egy előre- (hátra-) utat kapunk. Az irányított eset (2.1. lemma) bizonyításában szereplő elgondolás alapján belátható a következő lemma.

3.1. LEMMA. *A G körön egy H csillag igénygráf minden $\mathcal{P}$ útkiosztásához létezik H-nak egy $\mathcal{P}'$ sima útkiosztása úgy, hogy $l_{\mathcal{P}'} \leq l_{\mathcal{P}}$.*

3.1. Definíció. Az s középpontú H igénygráfra és az $u, v \in V$ pontokra legyen

$$d_H(u, v) = |\{f : f \in E(H) \text{ egy } [u, v]\text{-beli pont és } s \text{ között fut}\}|.$$

Az $e_i = u_i v_i \in E$ $(i = 1, 2)$ élekre azt mondjuk, hogy a rendezett (e_1, e_2) pár *szembenéz*, ha ezen pontok sorrendje az előre irányban s, u_1, v_1, u_2, v_2 (néhány közülük egybeeshet). Ez esetben legyen $d_H(e_1, e_2) = d_H(v_1, u_2)$. Végül $u \in V[s, v]$ mellett az $e = uv \in E$ élre legyen

$$r_H^+(e) = \min\{c(e) + c(e') - d_H(e', e) : e' \in E[s, u]\}, \text{ és}$$
$$r_H^-(e) = \min\{c(e) + c(e') - d_H(e, e') : e' \in E[v, s]\}.$$

Könnyen látható, hogy az $F \subseteq E(H_1) \cap E(H_2)$ élhalmaz minden olyan útkiosztásában, amely kiterjeszthető H_i egy G-beli útkiosztásává $i = 1, 2$-re, az $e \in E$ élt legfeljebb $\lfloor r_{H_i}^+(e)/2 \rfloor$ előre-, és legfeljebb $\lfloor r_{H_i}^-(e)/2 \rfloor$ hátraút terheli. Az off-line változatra a következő minimax formula bizonyítható [5].

3.1. TÉTEL. *Legyen $G = (V, E)$ egy irányítatlan kör, H_1 és H_2 pedig csillag igénygráfok $s \in V$ középponttal és egy-egy G-beli útkiosztással. Legyen H az a gráf, amelynek ponthalmaza V és élhalmaza $E(H_1) \cap E(H_2)$. Ekkor*

$$\varphi_{\text{off}}(G; H_1, H_2) \le |E(H)| - \max\left\{d_H(e_1, e_2) - \left\lfloor \frac{r_{H_1}^+(e_1)}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{r_{H_2}^-(e_2)}{2} \right\rfloor\right\},$$

ahol a maximum szembenéző (e_1, e_2) párokon fut. Továbbá vagy egyenlőség áll egy szembenéző (e_1, e_2) párra, vagy $\varphi_{\text{off}}(G; H_1, H_2) = |E(H)|$.

Most az ONLINE KITERJESZTÉSI PROBLÉMA irányítatlan változatára térünk. Azt mondjuk, hogy $F \subseteq E(H)$ *kiterjeszthető*, ha $\mathcal{P}|_F$ kiterjeszthető H_2 egy G-beli útkiosztásává. A következő tétel bizonyításának magva egy polinomiális algoritmus, amely egy maximális méretű kiterjeszthető $F \subseteq E(H)$ halmazt keres. A 3.2. tételben előfordulhat, hogy semely szembenéző (e_1, e_2) pár nem ad egyenlőséget, emiatt nem tudunk itt szép minimax formulát bizonyítani, a többi három esettel meglepő ellentétben. Azonban, mint látni fogjuk, ha $\varphi_{\text{on}}(G; \mathcal{P}; H_2) < |E(H)|$, akkor a különbség az egyenlőtlenség két oldala között legfeljebb 1.

3.2. Definíció. e_1, $e_2 \in E$-re jelölje $\mathcal{P}_{e_1,e_2}$ azon $f \in E(H)$ igények halmazát, amelyekre $\mathcal{P}(f)$ tartalmazza e_1-et és e_2-t is.

3.2. TÉTEL. *Legyen $G = (V, E)$ egy irányítatlan kör és H_2 egy $s \in V$ középpontú igénygráf egy G-beli útkiosztással. Legyen H a H_2 egy részgráfja egy G-beli $\mathcal{P}$ útkiosztással. Ekkor*

$$\varphi_{\text{on}}(G; \mathcal{P}; H_2) \le \mu := |E(H)| - \max\left\{|\mathcal{P}_{e_1,e_2}| - \left\lfloor \frac{c(e_1) + c(e_2) - d_{H_2}(e_1, e_2)}{2} \right\rfloor\right\},$$

ahol a maximum szembenéző (e_1, e_2) párokon fut. Továbbá

$$\varphi_{\text{on}}(G; \mathcal{P}; H_2) \in \{|E(H)|, \mu, \mu - 1\}.$$

Polinomiális időben található egy maximális méretű kiterjeszthető $F \subseteq E(H)$ élhalmaz.

Bizonyítás. H_2 minden útkiosztásában azon utak száma, amelyek e_1-et és e_2-t is tartalmazzák, legfeljebb

$$\left\lfloor \frac{c(e_1) + c(e_2) - d_{H_2}(e_1, e_2)}{2} \right\rfloor.$$

Az egyenlőtlenség ezért világos. Az alábbi algoritmus egy $\varphi_{\text{on}} := \varphi_{\text{on}}(G; \mathcal{P}; H_2)$ méretű kiterjeszthető $F \subseteq E(H)$ halmazt talál, és egyben arra is bizonyítékot szolgáltat, hogy $\varphi_{\text{on}} \in \{|E(H)|, \mu, \mu - 1\}$. Az algoritmus nyilvántart egy $F \subseteq E(H)$ kiterjeszthető halmazt, valamint $H_2 - F$-nek egy $\mathcal{P}_2$ kiterjesztő útkiosztását. Legyen $\mathcal{P}' = \mathcal{P}|_F$. Minden lépésben vagy növeljük F méretét, vagy bizonyítékot nyerünk, hogy F maximális méretű.

Start. Legyen $F = \emptyset$ és $\mathcal{P}_2$ a H_2 adott útkiosztása. Menjünk az **1. lépésre**.

1. lépés. A 3.1. lemma alapján tegyük $\mathcal{P}_2$-t simává, majd minden olyan $f \in E(H) - F$ igényt, amelyre $\mathcal{P}_2(f) = \mathcal{P}(f)$, adjunk F-hez és töröljük $\mathcal{P}_2(f)$-et $\mathcal{P}_2$-ből. Ha $F = E(H)$ akkor megállunk. Egyébként ha $\mathcal{P}_2(f)$ előreút minden $f \in E(H) - F$ igényre, akkor lépjünk az *1. eset*re, ha $\mathcal{P}_2(f)$ hátraút minden $f \in E(H) - F$ igényre, akkor cseréljük át az irányt és lépjünk az *1. eset*re, különben lépjünk a *2. eset*re.

$\mathcal{P}_2$-t módosítani fogjuk a továbbiakban, de amennyiben $\mathcal{P}_2$ sima, z_1 és z_2 olyan ellenpontokat fognak jelölni, amelyekre $[s, z_1]$ és $[z_2, s]$ a lehető legrövidebbek.

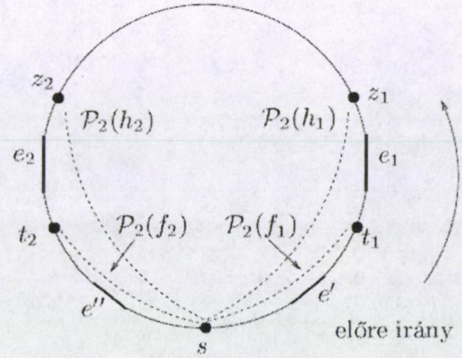
1. eset. $\mathcal{P}_2(f)$ előreút minden $f \in E(H) - F$ igényre. Amíg lehetséges, válasszunk egy leghosszabb $\mathcal{P}_2$-beli P előreutat, és irányítsuk át hátraúttá. Ha P egy $f \in E(H) - F$ igényhez tartozott, akkor megállunk, f-et F-hez adjuk, és az **1. lépésre** lépünk. Ha ez az eset soha nem fordul elő, akkor $E(H) - F$ nemürressége miatt egyszer megakadunk, aminek az oka egy $e_2 \in E[z_1, s]$ él az $l_{\mathcal{P}_2}(e_2) + l_{\mathcal{P}'}(e_2) = c(e_2)$ tulajdonsággal. Tekintsünk egy $f \in E(H) - F$ igényt s és t között, amire $[t, z_1]$ minimális. $\mathcal{P}(f)$ mutatja, hogy valójában $e_2 \in E[z_2, s]$, és hogy választhatunk egy $h \in E(H_2) - E(H)$ igényt s és z_2 között, amire $\mathcal{P}_2(h)$ hátraút. Ha mind f-et, mind h-t át tudjuk irányítani $\mathcal{P}_2$-ben, akkor adjuk f-et F-hez és menjünk az **1. lépésre**. Ha nem tudjuk, akkor találhatunk egy $e_1 \in E[t, z_2]$ élt, hogy $l_{\mathcal{P}_2}(e_1) + l_{\mathcal{P}'}(e_1) \geq c(e_1) - 1$. Az f él választása miatt $E(H) - F \subseteq \mathcal{P}_{e_1,e_2}$ teljesül. Vagyis

$$\begin{aligned} c(e_1) + c(e_2) - d_{H_2}(e_1, e_2) \leq \\ &\leq (l_{\mathcal{P}_2}(e_1) + l_{\mathcal{P}_2}(e_2)) + (l_{\mathcal{P}'}(e_1) + l_{\mathcal{P}'}(e_2)) - d_{H_2}(e_1, e_2) + 1 = \\ &= d_{H_2 - F}(e_1, e_2) + (2|F \cap \mathcal{P}_{e_1,e_2}| + d_F(e_1, e_2)) - d_{H_2}(e_1, e_2) + 1 = \\ &= 2|F \cap \mathcal{P}_{e_1,e_2}| + 1, \end{aligned} \qquad (1)$$

azaz $|F| = \mu$, és készen vagyunk.

2. eset. Léteznek olyan f_1, $f_2 \in E(H) - F$ igények s, valamint t_1 és t_2 között, amelyekre $\mathcal{P}_2(f_1)$ előreút és $\mathcal{P}_2(f_2)$ hátraút. Lásd a 2. ábrát. Azt mondjuk, hogy $F' \subseteq E(H)$ *szép*, ha nem léteznek olyan $f' \in F'$, $f'' \in E(H) - F'$ igények, hogy $\mathcal{P}(f'')$ valódi részútja $\mathcal{P}(f')$-nek. Ha F nem szép, akkor helyettesítsük F-et $F - f' + f''$-vel, és $\mathcal{P}'$-t $\mathcal{P}'' = \mathcal{P}|_{F-f'+f''}$-vel, amely nyilván kiterjeszthető H_2 útkiosztásává. Mivel $\mathcal{P}''$ terheléseinek összege kevesebb $\mathcal{P}'$-énél, ez az eljárás előbb-utóbb egy szép kiterjeszthető F halmazt eredményez.

Válasszuk most f_1-et úgy, hogy minimalizálja $[t_1, z_1]$-et, és f_2-t úgy, hogy minimalizálja $[z_2, t_2]$-t. Legyen $h_i \in E(H_2) - F$ egy s és z_i közti igény $i = 1, 2$-re úgy, hogy $\mathcal{P}_2(h_1)$ előreút és $\mathcal{P}_2(h_2)$ hátraút ($h_i = f_i$ elképzelhető). Ha mind f_1, mind h_2 átirányítható $\mathcal{P}_2$-ben, akkor adjuk f-et F-hez és menjünk az **1. lépésre**. Ha ez nem lehetséges, akkor létezik egy $e_1 \in E[t_1, z_2]$ él, hogy $l_{\mathcal{P}_2}(e_1) + l_{\mathcal{P}'}(e_1) \geq c(e_1) - 1$. Mind $\mathcal{P}(f_1)$, mind $\mathcal{P}(f_2)$ terhelik $[z_1, z_2]$ éleit, ezért $e_1 \in E[t_1, z_1]$. Hasonlóan, vagy növelhető F, vagy létezik egy $e_2 \in E[z_2, t_2]$ él, hogy $l_{\mathcal{P}_2}(e_2) + l_{\mathcal{P}'}(e_2) \geq c(e_2) - 1$. Ha e_1 vagy e_2 megválasztható úgy, hogy itt szigorú egyenlőtlenség áll, akkor készen vagyunk, mivel $E(H) - F \subseteq \mathcal{P}_{e_1,e_2}$ az f_1 és az f_2 választása miatt, így érvelhetünk úgy, mint (1)-nél.



2. ábra. Az online változat az irányítatlan esetben.

Maradt tehát az az eset, amikor

$$l_{\mathcal{P}_2}(e) + l_{\mathcal{P}'}(e) \leq c(e) - 1 \text{ minden } e \in E[t_1, z_1] \cup E[z_2, t_2]$$

élre. $\mathcal{P}(f_1)$ és $\mathcal{P}(f_2)$ miatt ez minden $e \in E[z_1, z_2]$ élre is áll. Ha ez minden $e \in E[t_2, s]$ élre is teljesül, akkor $\mathcal{P}_2$-ben f_1 átirányítható, és így F növelhető. Ez esetben menjünk az **1. lépésre**. Feltehetjük tehát, hogy létezik egy $e'' \in E[t_2, s]$ él, hogy $l_{\mathcal{P}_2}(e'') + l_{\mathcal{P}'}(e'') = c(e'')$, és hasonlóan, egy $e' \in E[s, t_1]$ él, hogy

$$l_{\mathcal{P}_2}(e') + l_{\mathcal{P}'}(e') = c(e').$$

3.2. Lemma. *F maximális méretű kiterjeszthető halmaz.*

Bizonyítás. Ugyanúgy, mint (1)-ben kapjuk, hogy

$$c(e_1) + c(e_2) - d_{H_2}(e_1, e_2) \le 2|F \cap \mathcal{P}_{e_1,e_2}| + 2. \qquad (2)$$

Tegyük fel, hogy létezik egy $F^* \subseteq E(H)$ kiterjeszthető halmaz az $|F^*| = |F| + 1$ tulajdonsággal. Persze feltehetjük, hogy F^* szép. Legyen $\mathcal{P}^* = \mathcal{P}|_{F^*}$ és legyen $\mathcal{P}_2^*$ a $H_2 - F^*$ egy kiterjesztő útkiosztása. Felhasználva, hogy $E(H) - F \subseteq \mathcal{P}_{e_1,e_2}$, kapjuk

$$\begin{aligned} 2|F^* \cap \mathcal{P}_{e_1,e_2}| &\ge^1 2|F \cap \mathcal{P}_{e_1,e_2}| + 2 \ge c(e_1) + c(e_2) - d_{H_2}(e_1, e_2) \ge^2 \\ &\ge^2 (l_{\mathcal{P}_2^*}(e_1) + l_{\mathcal{P}_2^*}(e_2)) + (l_{\mathcal{P}^*}(e_1) + l_{\mathcal{P}^*}(e_2)) - d_{H_2}(e_1, e_2) \ge^3 \\ &\ge^3 d_{H_2-F^*}(e_1, e_2) + (2|F^* \cap \mathcal{P}_{e_1,e_2}| + d_{F^*}(e_1, e_2)) - d_{H_2}(e_1, e_2) = 2|F^* \cap \mathcal{P}_{e_1,e_2}|, \end{aligned}$$

vagyis végig egyenlőség áll. $\ge^1$ miatt $E(H) - F^* \subseteq \mathcal{P}_{e_1,e_2}$. $\ge^2$-ből kapjuk, hogy

$$l_{\mathcal{P}_2^*}(e_i) + l_{\mathcal{P}^*}(e_i) = c(e_i) \text{ áll } i = 1, 2\text{-re},$$

és emiatt $l_{\mathcal{P}_2}(e_i) = l_{\mathcal{P}_2^*}(e_i)$, hiszen $l_{\mathcal{P}^*}(e_i) = l_{\mathcal{P}'}(e_i) + 1$. Végül $\ge^3$ szerint semely $f' \in E(H_2) - F^*$ igényre nem tartalmazza a $\mathcal{P}_2^*(f')$ út e_1 és e_2 mindegyikét. A

$$\mathcal{P}_- = (\mathcal{P}' \cup \mathcal{P}_2)|_{E(H_2) \setminus \mathcal{P}_{e_1,e_2}} \text{ és a } \mathcal{P}_-^* = (\mathcal{P}^* \cup \mathcal{P}_2^*)|_{E(H_2) \setminus \mathcal{P}_{e_1,e_2}}$$

jelölésekkel tehát $l_{\mathcal{P}_-}(e) = l_{\mathcal{P}_-^*}(e)$ minden $e \in E[s, t_1] \cup E[t_2, s]$ élre. Ha

$$|\{f \in F^* : \mathcal{P}(f) \text{ előreút}\}| - |\{f \in F : \mathcal{P}(f) \text{ előreút}\}| = g > 0,$$

akkor szükségképpen

$$|\{f \in F : \mathcal{P}(f) \text{ hátraút}\}| - |\{f \in F^* : \mathcal{P}(f) \text{ hátraút}\}| = g - 1.$$

Mivel F és F^* szép, ebből az következik, hogy

$$l_{\mathcal{P}^* \cup \mathcal{P}_2^*}(e') \ge l_{\mathcal{P}' \cup \mathcal{P}_2}(e') + g - (g - 1) = c(e') + 1,$$

ami ellentmondás. Hasonlóan érvelhetünk, ha

$|\{f \in F^* : \mathcal{P}(f) \text{ hátraút}\}| - |\{f \in F : \mathcal{P}(f) \text{ hátraút}\}| > 0.$ □

(2) szerint $|F| \ge \mu - 1$, vagyis készen vagyunk a *2. eset*ben is. □

Köszönetnyilvánítás

Szeretnék köszönetet mondani Csizmadia Zsoltnak a probléma felvetéséért, valamint Szegő Lászlónak a hasznos megbeszélésekért.

Hivatkozások

[1] S. COSARES, I. SANIEE: *An optimization problem related to balancing loads on SONET rings.* Telecom. Systems (1994) **3** 165–181.

[2] A. FRANK: *Edge-disjoint paths in planar graphs.* J. Combin. Theory, Ser. B. (1985) **38** 164–178.

[3] Z. KIRÁLY: *An $O(n^2)$ algorithm for ring routing.* EGRES Technical Report TR-2005-10, `www.cs.elte.hu/egres`

[4] A. SCHRIJVER, P. SEYMOUR, P. WINKLER: *The ring loading problem.* SIAM J. Discrete Math. (1998) **11** 1–14.

[5] J. SZABÓ: *Upgrading edge-disjoint paths in a ring.* EGRES Technical Report TR-2005-17, `www.cs.elte.hu/egres`, beküldve

[6] A. TANENBAUM: *Computer Networks*, Prentice Hall, New Jersey, 2003

[7] G. WILFONG, P. WINKLER: *Ring routing and wavelength translation.* Proceedings of the Ninth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (San Francisco, CA), (1998) 333–341.

(Beérkezett: 2007. január 30.)

SZABÓ JÁCINT
Eötvös Loránd Tudományegyetem
Matematikai Intézet, Operációkutatási Tanszék, MTA-ELTE Egerváry Kutatócsoport
1117 Budapest, Pázmány P. s. 1/C
jacint@elte.hu

UPGRADING EDGE-DISJOINT PATHS IN A RING

JÁCINT SZABÓ

In this paper we introduce the **upgrading problem** of edge-disjoint paths. In the **off-line upgrading problem** a supply graph G with integer capacities and two demand graphs H_1 and H_2 with unit demands are given on the same vertex set. Our task is to determine the maximum size of a set $F \subseteq E(H_1) \cap E(H_2)$ such that F has an integer routing in G which can be extended both to an integer routing of H_1 and to an integer routing of H_2. In the **online upgrading problem** we are given a supply graph G with integer capacities, a demand graph H with an integer routing and another demand graph H_2 with unit demands such that $E(H) \subseteq E(H_2)$. Our task is to determine the maximum size of a set $F \subseteq E(H)$ such that the restriction of the given routing to F can be extended to an integer routing of H_2. Thus, depending on whether the graphs are directed or undirected, we have four different versions. We give algorithmic proofs to minimax formulas for the case when G is a ring and the demand graphs are stars with the same center. All four versions are NP-complete for general graphs.

Alkalmazott Matematikai Lapok **25** (2008), 131-136.

TERMÉSZETES KIVÁLASZTÁS ÉS RIEMANN-GEOMETRIA

FARKAS MIKLÓS

Felírjuk a szelekció Fisher-féle differenciálegyenletét, tárgyaljuk ennek legfontosabb tulajdonságait. Kimondjuk a Kimura-féle maximumelvet, és új metrika bevezetésével igazoljuk azt.

1. Bevezetés

Ha egyetlen fajt tekintünk, és változatlan körülmények között, a többi együttélő fajtól elkülönítve vizsgáljuk, a darwini természetes kiválasztás egy egyszerűsített változatát viszonylag könnyen modellezhetjük matematikailag. Feltételezzük, hogy genetikailag minden egyes egyed egy *diploid* sejtből fejlődik ki. A diploid *zigóta* két haploid ivarsejt, két *gaméta* összeolvadásából jön létre, amelyek az egyed két szülőjétől, az anyától és az apától érkeznek a reprodukció során és hordozzák a szülők genetikailag átörökíthető anyagát. A gamétákat *genome-típusokba* soroljuk; egy i típusú és egy k típusú gaméta egy ik típusú zigótát alkot. Az ik típust azonosnak tekintjük a ki típussal, vagyis nem különböztetjük meg a gamétákat aszerint, hogy az anyától vagy az apától érkeztek-e. A reprodukció során az ik típusú zigóta egy i és egy k típusú gamétát produkál, ezek azután más gamétapárt keresnek maguknak. Az egyszerűség kedvéért azonban úgy képzeljük, hogy az ik típusú zigóta egy ugyanolyan típusút reprodukál, és figyelmen kívül hagyjuk a mutációkat és a cross-overt (azt, hogy egyes gének véletlenszerűen kicserélődnek, illetve azt, hogy a zigótát alkotó gaméták kromoszómáin egyes szakaszok helyet cserélhetnek). A „létért való küzdelem" a zigóták között zajlik; az életképesebb típusok elszaporodnak, a gyengébbek kihalnak. Jelöljük b_{ik}-val, illetve d_{ik}-val az ik zigóta szaporodási, ill. halálozási rátáját; ekkor a

$$m_{ik} = b_{ik} - d_{ik}$$

különbséget az ik zigóta *fitneszének* nevezzük. Az előbbiek szerint $m_{ik} = m_{ki}$. Ez az időben állandónak tekintett érték határozza meg a zigóta sikerét a versenyben, vagyis azt, hogy melyik zigóta *genotípus* marad fenn és örökít át, és melyik hal ki. Az itt szereplő fogalmakra és a következőkre nézve lásd [1] és az abban szereplő hívatkozásokat.

A következő pontban bevezetjük a gaméta genome típusok állapotterét és felírjuk a dinamikájukat leíró *Fisher-féle differenciálegyenletet.* A 3. pontban kimondjuk a *Kimura-féle maximumelvet,* bevezetjük a *Shahshahani-metrikát* és igazoljuk a maximumelv érvényességét.

2. Az állapottér és a Fisher-féle differenciálegyenlet

Legyen n a különböző, figyelembe vett gaméta genome típusok száma és $x_i(t) \geq 0$ az i-edik genome típus mennyisége ($i = 1, 2, \ldots, n$) a t időpontban. Feltételezzük, hogy a populáció „jól kevert", vagyis bármely gaméta egyenlő valószínűséggel találkozik bármelyik másik gamétával, és a létszámok olyan nagyok, hogy a relatív gyakoriságokat egyenlőnek vehetjük a valószínűségekkel. Az ik típusú zigóták száma legyen x_{ik}, az összes zigóta száma $\overline{x} = \sum_{i,k=1}^{n} x_{ik}$, az összes gaméta száma $2\overline{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i$. Az ii típusú *homozigóták* egy főre eső száma időegység alatt m_{ii}-vel, az ezeket alkotó i gaméták száma ennek kétszeresével változik. Az ik típusú *heterozigóták* egy főre eső száma időegység alatt m_{ik}-val, az ezekben lévő i gaméták száma ugyanennyivel változik. Az i gaméták számának dinamikáját a következő differenciálegyenlet-rendszer írja le:

$$\frac{dx_i}{dt} = 2m_{ii}x_{ii} + \sum_{k \neq i} m_{ik}x_{ik}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{1}$$

Minket a különböző genome típusok gyakorisága, a genome típusok eloszlása érdekel. Az i genome típus gyakorisága $p_i = \frac{x_i}{2\overline{x}}$, az ik és az ii zigóta genotípus gyakorisága

$$p_{ik} = \frac{x_{ik}}{\overline{x}} = 2p_i p_k, \quad i \neq k,$$

illetve

$$p_{ii} = \frac{x_{ii}}{\overline{x}} = p_i^2,$$

mivel ennyi annak valószínűsége, hogy egy i gamétát tartalmazó zigóta egy k (illetve egy ugyanolyan i) gamétát tartalmazó zigótával találkozzék és ilyen utódokat hozzon létre (ez az ún. *Hardy-Weinberg-törvény*; a heterozigóták esetében ugyanaz a genotípus kétféleképpen jöhet létre: anyától-apától, illetve apától-anyától). Az állapottér

$$R_+^n = \{(x_1, \ldots, x_n) : \; x_i \geq 0, \; i = 1, \ldots, n\},$$

a gyakoriságok dinamikája azonban e tér

$$S = \left\{(p_1, \ldots, p_n) \in R_+^n : \; p_1 + \cdots + p_n = 1\right\}$$

szimplexéhez van kötve. A következőkben $(p_1, \ldots, p_n)$ mindig e szimplex pontját jelöli. Nem túl nehéz számolás után (1)-ből levezethető a *természetes szelekció*

Fisher-féle differenciálegyenlete:

$$\frac{dp_i}{dt} = p_i\left(\sum_k m_{ik}p_k - \sum_{k,j} m_{kj}p_kp_j\right), \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{2}$$

Az

$$m_i(p) = \sum_k m_{ik}p_k$$

kifejezés az i gamétát tartalmazó zigóták fitneszének súlyozott számtani közepe; ezt az *i gaméta fitneszének* nevezzük.

$$\overline{m}(p) = \sum_{k,j} m_{kj}p_kp_j = \sum_j m_j(p)p_j$$

a populáció *átlagfitnesze*. A (2) differenciálegyenlet ezekkel a mennyiségekkel még a következőképpen is felírható:

$$\dot{p}_i = p_i(m_i(p) - \overline{m}(p)), \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{2'}$$

A (2′) egyenleteket összeadva látható, hogy ha a kezdeti érték $p(0) \in S$, akkor $\sum_i \dot{p}_i(0) = 0$, vagyis a megoldás trajektoriája rajta marad az S szimplexen. Továbbá, ha az i gaméta fitnesze nagyobb az átlagfitnesznél, akkor gyakorisága nő, ha pedig kisebb, akkor gyakorisága csökken. Egyensúlyi állapotba akkor kerül a rendszer, ha az összes (megmaradt) genome típus fitnesze egyenlő. Egyszerű számolás mutatja, hogy a tárgyalt esetben (szimmetrikus fitnesz mátrix) érvényes a következő:

2.1. TÉTEL. *(A populációgenetika alaptétele). A (2) differenciálegyenlet megoldásai mentén a populáció átlagfitnesze növekedik.*

Valóban kiadódik, hogy

$$\overline{m}^{\cdot}(p(t)) = 2D^2 \geq 0, \quad \text{ahol} \quad D^2 = \sum_i p_i\left(m_i - \sum_k p_km_k\right)^2$$

a genome fitneszek eloszlásának szórásnégyzete. Egyenlőség csak akkor áll fenn, ha a szórás zérus. Az előző egyenlőtlenségből az is látható, hogy az átlagfitnesz annál gyorsabban növekszik, minél nagyobb a szórás. Ekkor gyorsan csökken az átlag alatti gaméták gyakorisága és növekszik az átlag fölöttieké.

3. A Kimura-féle maximumelv, a Shahshahani-metrika

A *Kimura-féle maximumelv*, amelynek érvényességét intuitive elvárjuk, azt mondja ki, hogy az evolúció során nemcsak az igaz, hogy a populáció átlagfitnesze állandóan növekedik, hanem az is, hogy az eloszlás a leggyorsabb növekedés irányában változik. Matematikailag ezt a következőképpen fogalmazhatjuk meg.

3.1. TÉTEL. *A Fisher-féle differenciálegyenlet megoldásai trajektóriáinak érintővektora, vagyis a (2) differenciálegyenlet jobboldalán álló vektor párhuzamos az átlagfitnesz gradiens vektorának az* S szimplexre vetett vetületével.

Ha elvégezzük a számításokat, kiderül, hogy a Tétel állítása nem teljesül. Látszólag vagy a Kimura-féle maximumelvet, vagy a Fisher-féle differenciálegyenletet el kellene vetni. Az ellentmondást Shahshahani oldotta fel [2] dolgozatában azzal, hogy a gaméta genome típusok mennyiségeinek fázisterében más metrikát kell bevezetni. Az R^n_+ fázistérben két „szomszédos" pont, $(x_1, \ldots, x_n)$ és $(x_1 + dx_1, \ldots, x_n + dx_n)$ távolságának négyzete, az „ívelemnégyzet" (azért, hogy összhangban maradjunk a korábbiakkal, a koordináták indexeit továbbra is alulra írjuk, és nem fogjuk az Einstein-konvenciót használni):

$$ds^2 = \frac{1}{x_1} dx_1^2 + \cdots + \frac{1}{x_n} dx_n^2, \qquad x_i > 0, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{3}$$

Ez a *Shahshahani-metrika*, amit fázisterünkben használni kell. Intuitív jelentése az, hogy a dx_i megváltozás annál jelentősebb, minél kisebb x_i, és nagy x_i esetén elhanyagolható. A (3) metrika bevezetésével a fázistér látszólag Riemann-térré alakul. Azonban az

$$x_i = \frac{\widetilde{x_i}^2}{4}, \qquad dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial \widetilde{x_i}} d\widetilde{x_i} = \frac{1}{2} \widetilde{x_i} d\widetilde{x_i}, \qquad i = 1, \ldots, n \tag{4}$$

koordinátatranszformáció a (3) ívelemnégyzetet a

$$ds^2 = d\widetilde{x_1}^2 + \cdots + d\widetilde{x_n}^2$$

alakra transzformálja, ami azt jelenti, hogy a tér euklideszi maradt, bevezethető Descartes-féle koordinátarendszer, csupán az eredeti (mármint az x_i rendszer) nem az.

Ezek után kiszámítjuk az átlagfitnesz gradiensét és annak vetületét az S szimplex érintősíkjára. A hullámos, Descartes-féle koordinátarendszerben S egyenlete

$$\widetilde{x_1}^2 + \cdots + \widetilde{x_n}^2 = 4, \qquad \widetilde{x_i} \geq 0, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

vagyis a Shahshahani-metrikában S az $(n-1)$ dimenziós, 2 sugarú, origó középpontú gömbfelületnek a pozitív ortánsba eső része. Az átlagfitneszt áttranszformáljuk az új koordinátarendszerbe:

$$\overline{m}(\widetilde{x}) = \sum_{i,k} m_{ik} x_i(\widetilde{x}) x_k(\widetilde{x}) = \frac{1}{16} \sum_{i,k} m_{ik} \widetilde{x_i}^2 \widetilde{x_k}^2.$$

Ha egy Riemann-térben egy skalármező gradiensét kiszámítjuk, akkor elsődlegesen a vektor kovariáns koordinátáit kapjuk meg. Euklideszi térben, Descartes-féle koordinátarendszerben azonban ezek megegyeznek a kontravariáns koordinátákkal. Tehát az átlagfitnesz gradiensének kontravariáns koordinátái

$$\widetilde{\nabla}\overline{m}(\widetilde{x}) = \frac{1}{4}\left[\sum_k m_{1k}\widetilde{x_1}(\widetilde{x_k})^2, \sum_k m_{2k}\widetilde{x_2}(\widetilde{x_k})^2, \ldots, \sum_k m_{nk}\widetilde{x_n}(\widetilde{x_k})^2\right].$$

E vektor S érintősíkjára vett vetületének kiszámításához látnunk kell, hogy az S gömbfelület $\widetilde{x}$ pontjában a normálvektora $\widetilde{x}$, ennek abszolút értéke 2, vagyis a normál egységvektor $\frac{\widetilde{x}}{2}$. A gradiens vetülete S érintősíkjára tehát

$$\begin{aligned}\widetilde{v}(\widetilde{x}) &= \widetilde{\nabla}\overline{m}(\widetilde{x}) - \left(\widetilde{\nabla}\overline{m}(\widetilde{x})\cdot\frac{\widetilde{x}}{2}\right)\frac{\widetilde{x}}{2} = \widetilde{\nabla}\overline{m}(\widetilde{x}) - \overline{m}(\widetilde{x})\widetilde{x} \\ &= \left[\widetilde{x_1}\left(\sum_k m_{1k}\frac{(\widetilde{x_k})^2}{4} - \overline{m}(\widetilde{x})\right), \ldots, \widetilde{x_n}\left(\sum_k m_{nk}(\frac{\widetilde{x_k})^2}{4} - \overline{m}(\widetilde{x})\right)\right].\end{aligned}$$

A (4) transzformációs formulát alkalmazva a kontravariáns vektorkoordinátákra

$$\begin{aligned}v^i(x) &= \frac{\widetilde{x}_i}{2}\widetilde{x}_i\left(\sum_k m_{ik}\frac{(\widetilde{x_k})^2}{4} - \overline{m}(\widetilde{x})\right) \\ &= 2x_i\left(\sum_k m_{ik}x_k - \overline{m}(x)\right) \\ &= 2x_i(m_i(x) - \overline{m}(x)),\end{aligned}$$

ahol $\sum_i x_i = 1$. Ez (2′) jobb oldalának kétszerese. Ezzel a 3.1. tételt bebizonyítottuk.

Vannak, akik a természetes kiválasztáson alapuló evolúcióból azt a következtetést vonják le, hogy az egyes fajok változatlan körülmények között a lehető legéletképesebb színvonalra fejlődnek, illetve fejlődtek, hogy a ma élő oroszlán, szúnyog, tölgyfa, vagy ember maga a tökéletesség. Ez hamis következtetés. Amikor hosszú időre állandó körülmények jönnek létre (időjárás, együttélő fajok, stb), az adott faj az ún. *fitnesz táj* (fitness landscape) egy meghatározott pontján található. A fitnesz táj az átlagfitnesz grafikonja a gamétaeloszlások szimplexe fölött. Úgy képzeljük ezt el, mint egy holdbéli tájat, vagy egy vulkánikus csúcsokkal tarkított „kamcsatkai" vidéket. Amikor az evolúció elkezdődik, a populáció a Kimura-elv szerint elkezd mászni fölfelé azon a hegyen, amelyen éppen van, vagyis gaméta összetétele ahhoz a ponthoz tart, amely fölött a hegy csúcsa helyezkedik el. Ha ezt a pontot elérte, nyugalomba kerül, hiszen innen már nem tud elmozdulni (úgy, hogy átlagfitnesze növekedjék). Innen vágyakozva tekinthet más közeli, vagy távoli, magasabb hegycsúcsokra, ahol már nem lenne vakbele, nem kapna rendszeresen torokgyulladást és könnyebben megértené a matematikát. Más pontba csak akkor juthat el, ha a körülmények változása következtében, az időben a fitnesz táj változik, átalakul úgy, hogy lehetővé tegye a mozgást, illetve akkor, ha igen kis valószínűségű, lényeges, hasznos mutáció történik.

Hivatkozások

[1] FARKAS, M.: *Dynamical Models in Biology.* Academic Press, San Diego, 2001

[2] SHAHSHAHANI, S.: *A new mathematical framework for the study of linkage and selection.* Memoires Amer. Math. Soc. 211., 1979

(Beérkezett: 2007. február 21.)

FARKAS MIKLÓS
BP. Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Matematikai Intézet
1521 Budapest

NATURAL SELECTION AND RIEMANNIAN GEOMETRY

MIKLÓS FARKAS

The Fisher differential equation of natural selection is presented and discussed. The Kimura maximum principle is stated and proved by introducing a new metric, the Shahshahani metric in the space of gameta genome types.

Alkalmazott Matematikai Lapok **25** (2008), 137-142.

FARKAS GYULA MUNKÁSSÁGÁNAK MEGÚJULÓ HATÁSAI

GURKA DEZSŐ

Születésének százötven éves évfordulója kapcsán Farkas Gyula neve a szakmai körökön túl is ismertté vált, az életmű minél teljesebb megismerése és bemutatása pedig mind többek személyes ügyévé lett. A munkásságával foglalkozó cikkek számának gyors gyarapodása abból a tényből adódik, hogy Farkast mind az operációkutatás, mind a termodinamika kutatói szakterületük klasszikusai között tartják számon, a tudós személye iránt megnyilvánuló rokonszenv magyarázata pedig – a tudományos életmű tisztelete mellett – alighanem a sokoldalú teljesítmény mögött álló sokszínű személyiségben keresendő.

Farkas Gyula 1847. március 28-án született Pusztasárosdon, ahol édesapja az ottani Esterházy-birtok uradalmi ispánja volt. A kisbarnaki előnevet viselő köznemesi család Zala megyéből származott. A sárosdi római katolikus parókián található keresztelési anyakönyv tanúsága szerint édesanyjának, Hoffman Cecíliának a családja szintén nemesi eredetű volt.[1] Farkas a gimnáziumi éveit a győri bencéseknél töltötte, majd kapcsolatba került Jedlik Ányossal, s az ő ösztönzésére fordult érdeklődése a fizika felé. Rövid székesfehérvári tanárkodását követően a báró Miske, majd a gróf Batthyány családnál vállalt házitanítói állást.

Jól zongorázó édesanyjától kapott indíttatása nyomán kezdetben intenzíven érdeklődött a zenei pálya iránt. A zene szeretete későbbi éveit is végigkísérte, önéletrajzának tanúsága szerint Győrött, Tolnán, Székesfehérvárott és Nizzában klasszikus zongoradarabokkal koncertezett.[2] 1865-ben, nemesi előnevét használva, Kisbarnaky aláírással három cikket is közölt a Zenészeti Lapokban, majd 1869-ben ugyanitt jelent meg tőle ***A diatonikus kemény hangrovat*** című zeneelméleti tanulmány. E munkáinak köszönhetően neve szerepel a *Zenei lexikon*ban is.[3]

A fiatal tanár tudományos ambícióit igazolja, hogy 1874-ben azzal a kéréssel fordult az Magyar Tudományos Akadémiához, hogy a III. osztály ülésén tegyék lehetővé számára egy dolgozata felolvasását. Az Akadémiai Értesítő szerint sor is került a nyomtatott formában beterjesztett *A fénysugarak törésmutatója és rezgés száma közt fennálló törvény* című hétoldalas tanulmány előadására. Eötvös Loránd

[1] A Farkas család címere „kék pajzsban zöld mezőn zöldlombos pálmafa alatt jobbról ágaskodó farkas, balról álló oroszlán". (Csánki Dezső (szerk.): Somogy vármegye, Budapest, 1914, 615.) A Hoffman család Krassó megyéből származott (Nagy Iván: Magyarország családai V., Ráth, Pest, 1859, 128.).

[2] Ortvay Rudolf: Farkas Gyula rendes tag emlékezete, (A Magyar Tudományos Akadémia elhunyt tagjai fölött tartott emlékbeszédek, XXI. kötet, 15. szám), Magyar Tudományos Akadémia, Budapest, 1933, 7.

[3] Szabolcsi Bence – Tóth Aladár (szerk.): Zenei lexikon I., Zenemű, Budapest, 1965, 602.

kéziratban fennmaradt véleménye kiemeli, hogy a Cauchy egyik dolgozata eredményeit helyesbíteni kívánó szerző egyenletei csak néhány „szűkkörű esetre" igazak. Eötvös bírálatát így fejezte be: „Bármennyire is örülünk annak, hogy vidéki tanár tudományos búvárlatokkal foglalkozik, s bármennyire is szeretnők e törekvést pártolni, mégis Farkas úrnak jelen értekezését a kinyomatásra nem ajánlhatjuk. Reményljük, hogy e bírálat szerzőnek kezéhez jutva lelkesedését csökkenteni nem fogja, s hogy az irodalmi ismeretek megszerzése czéljából magát szakemberekkel érintkezésbe téve újabb feladatokkal szerencsésebben fog foglalkozni."[4]

Farkas Gyula következő néhány éve valóban az Eötvös által felvázolt követelmények jegyében telt el: a kísérleti fizikai témákról áttért a matematikára, széleskörű szakmai olvasottságot és hasznos külföldi ismeretségeket szerezett, s egy jó évtized múltán az elméleti fizika területéhez visszatérve már figyelemre méltó eredményeket tudhatott maga mögött.

Farkas tudományos pályakezdésében a Batthyány család jelentős szerepet játszott. A polgárdi kastély fizikai laboratóriuma ideális körülményeket biztosított a fiatal tudós számára, viszonylagos anyagi függetlensége pedig lehetővé tette, hogy 1877-ben Genfben kiadja Baltzer *A determinánsok elmélete* című könyve első részének fordítását. A könyvet, a magyarázó jegyzeteken túl, saját eredményeivel is kiegészítette. A következő évben saját költségén publikálta három matematikai tanulmányát.[5]

Mivel Farkas arisztokrata tanítványait távolabbi útjaikra is elkísérte, külföldi szakmai kapcsolatokra is szert tehetett. Megismerkedett Hermite és Villarceau matematikusokkal, akik ismertették Farkas Franciaországban megjelenő cikkeit. 1878-ban ismét beküldött az Akadémiának egy kéziratos dolgozatot *Az* $xm + ax = b$ *egyenlet minden gyökének egész általánosságban való meghatározása* címmel.[6] A III. osztály ülésén felolvasott tanulmányról rövid összefoglaló jelent meg az Akadémiai Értesítőben.

Noha Farkas első jelentősebb munkái az algebra területén születtek, 1880-tól a komplex függvénytan magántanára lett a budapesti egyetemen, s ekkoriban új, az analízis területéhez tartozó témák is megjelentek cikkeiben, mindenek előtt a Hamilton-Jacobi-féle differenciálegyenletek.

1887-ben Farkas Gyulát kinevezték a kolozsvári egyetem matematikai fizika tanszékének professzorává. Helyzete azért különleges, mert tudományos pályájának kezdetén matematikusként, később inkább elméleti fizikusként tartották számon, a tudósi életmű mégis egységesnek mutatkozik, ugyanis fizikai cikkeinek legfőbb sajátossága a szigorú matematikai megalapozottság maradt. A vektoralgebra és a vektoranalízis fizikai vizsgálatainak gyakorta használt eszköze volt, s e témáról *Vektortan* című munkájában adott összegzést, amely a maga 160 oldalával Farkas legterjedelmesebb műve.

[4] MTA Kézirattára, Ms 1255 és 1285.

[5] Gábos Zoltán: „A természet a matematika nyelvén szól hozzánk", Természet Világa, 1997/7, 291.

[6] Akadémiai Értesítő, 1878, 34.

1893-ban Farkas Gyula képviselte a kolozsvári egyetemet a padovai Galilei ünnepségeken, ahol „tiszteleti doktorrá" avatták.[7] Az ünnepségekről készített hangulatos beszámoló Farkas írói vénájáról tanúskodik.[8] Az életművének súlypontját képező cikkek keletkezése éppen a padovai Galilei ünnepségekhez kötődik, mivel ez alkalomból készült el *A virtuális sebességek elve Galileinél* című tanulmánya. Ezt követően vizsgálatainak visszatérő témájává vált a mechanika e részterülete.

Az 1893 és 1926 közé eső időszakban a virtuális sebességgel, s az ennek kapcsán fölmerülő matematikai problémákkal Farkas kilenc dolgozata foglalkozott, amelyeknek az optimalizáláselméletre gyakorolt hatását elsőként Prékopa András mérte fel.[9] *A Fourier-féle elv mechanikai alkalmazása* című 1894-es cikkben szerepel először a Farkas-tétel kimondása.[10] A tétel eredetileg a mechanikai egyensúly leírására szolgált. Farkas matematikai eredményei a *Theorie der einfachen Ungleichungen* című, a Crelle Journal 1902-es évfolyamában megjelent munkája alapján váltak ismertté, s egyszersmind ennek a cikknek az 1950-es újrafelfedezése tette őt az optimalizáláselmélet sokat idézett klasszikusává.[11]

Kevésbé szerencsésen alakult annak a publikációjának a későbbi sorsa, amelyben a Caratheodory nevéhez fűződő termodinamikai elvet körvonalazta. Bár Farkas cikke tizennégy évvel előzte meg az elv névadójának 1909-es közleményét, nem váltott ki különösebb visszhangot. A legújabb kutatások bebizonyították, hogy a termodinamika Farkas-féle megalapozása Charatheodoryétól teljesen eltérő, s ugyanakkor jóval egyszerűbb utat követett.[12]

Ezzel együtt mégiscsak a termodinamikai cikkeinek sorozata, pontosabban azoknak matematikai precizitása hozta meg Farkas Gyula számára az első jelentős kortárs elismerést. Munkásságának külföldi visszhangjáról ezt írta: „Észrevehetően emelkedett itthon tudományos hitelem, midőn 1896-ban megjelent az akkor nagyhírű göttingai professor, Woldemár Voigt *Mathemathische Physik*-jének máso-

[7] Filep László: Farkas Gyula élete és munkássága, Matematikai Lapok, 1978-81/4, 231-44.

[8] A Galileiről és a páduai Galilei-ünnepségekről című írás a Természettudományi Közlöny 1893. áprilisi számában jelent meg. Fontosabb részleteinek újraközlése: Természet Világa, 1997/7, 295-96. és Martinás Katalin (szerk.): *Farkas Gyula élete és munkássága*, Eötvös Loránd Fizikai Társulat Termodinamikai Szakcsoportja, Budapest, 2003, 45-48.

[9] Prékopa András: Az optimalizáláselmélet kialakulásának történetéről, Alkalmazott Matematikai Lapok, 1978/4, 165-191.

[10] Farkas Gyula: A Fourier-féle mechanikai elv alkalmazásai, Matematikai és Természettudományi Értesítő, 1894, 457-72. A Fourier-elvvel kapcsolatos kutatásokba Farkas bevonta tanítványát, Kacsóh Pongrácot is. A később zeneszerzőként híressé vált tanítvány nála írta meg *Az egyenlőségi és egyenlőtlenségi elv viszonya a mechanikában* című doktori értekezését. (Gábos Zoltán: Farkas Gyula vizsgálatai a Fourier-elv és a relativitáselmélet köréből, Fizikai Szemle, 1997/10, 318.)

[11] Vizvári Béla: Farkas Gyula élő matematikai munkássága, in: Martinás Katalin (szerk.): *Farkas Gyula élete és munkássága*, Eötvös Loránd Fizikai Társulat Termodinamikai Szakcsoportja, Budapest, 2003, 30-33.

[12] Brodszky Ildikó – Martinás Katalin: Az integráló-osztó története, Fizikai Szemle, 1997/10, 323-26.; Erdei Alex – Martinás Katalin: Farkas Gyula új termodinamika-felépítése, Fizikai Szemle, 1997/10, 328-33.

dik kötete."[13] Voigt ugyanis – Beltrami és Boltzmann mellett – Farkas Gyulának is köszönetet mondott korábbi cikke pontatlanságainak helyesbítéséért.[14] A növekvő hazai elismertség jeleként Farkas Gyulát a Magyar Tudományos Akadémia 1898-ban levelező, majd 1914-ben rendes tagjává választotta. Hét alkalommal a kolozsvári egyetem dékánja, az 1907/1908-as tanévben pedig rektora volt.

Farkas Gyula kolozsvári jelenléte, Vályi Gyuláé mellett, nagyban hozzájárult ahhoz, hogy ez idő tájt éppen a kolozsvári tudományegyetem matematika tanszéke lett (a műegyetemi tanszék mellett) az ország egyik legfontosabb matematikai centruma. Farkasnak szerepe volt a kolozsvári matematikai hagyományok továbbfejlődésében is, nevezetesen abban, hogy Schlésinger, Fejér, Riesz és Haar az erdélyi egyetemi városba került.

Farkas Gyula a korabeli tudományos élet legfrissebb jelenségeire széleskörű érdeklődése mellett is gyorsan reagált, és időnként megelőzte kortársai jelentős részét egy-egy problémakör fontosságának felismerésében. Piccard függvénytani tételét például megjelenése után néhány hónappal már felhasználta. Igen korán felismerte a relativitáselmélet jelentőségét is, de „Lorenz gátolta abban, hogy Einsteinig eljusson".[15] Filep László az 1970-es években felkutatta Farkas akkor még élő rokonait, akiknek visszaemlékezése szerint Farkas Gyula levelezésben állt Einsteinnel.[16]

Erősödő szembetegsége egyre inkább megnehezítette az idősödő professzor tudományos munkáját, ezért nyugdíjaztatását kérte. Kolozsvári tanszékét Ortvay Rudolf örökölte. Az Ortvay kinevezéséhez gratuláló levélében, Farkasra jellemző módon, egyszerre van jelen az udvariasság és a fanyar tényszerűség: „Fogadja legmélyebb örvendezésem nyilvánítását abban a bizonyosságban, hogy a legjobb választást tette a miniszter úr a különben is egyedül kínálkozó lehetőségben".[17]

1915-től Farkas Budapesten élt. Bekapcsolódott a Mathematikai és Physikai Lapok megalapításába, s két alkalommal tagja volt a Kőnig Gyula-díjat odaítélő bizottságnak is. (Az 1924-es díjjal a Kürschák József, Farkas Gyula, Kőnig Dénes és Riesz Frigyes összetételű bizottság Szegő Gábort jutalmazta.[18])

Farkas Gyula 1930-ban halt meg Pestszentlőrincen. Az akadémiai emlékbeszédet Ortvay Rudolf tartotta róla, aki már 1927-ben is (akkor a nyolcvanéves tudóst köszöntve) értékelte a fizika és a matematika számos területét átfogó életmű eredményeit.

[13]Idézi: Ortvay Rudolf: *Farkas Gyula rendes tag emlékezete* (A Magyar Tudományos Akadémia elhunyt tagjai fölött tartott emlékbeszédek, XXI. kötet, 15. szám) Budapest, 1933, 7.

[14]Voigt, Woldemar: *Kompendium der theoretischen Physik II.*, Göttingen, 1896, 810. Voigt Max Bornnak is tanára volt, aki professzorának eredményeiből kiindulva s Bródy Imrével együttműködve dolgozta ki a kristályok termodinamikáját. (Born, Max: *Válogatott tanulmányok*, Gondolat, Budapest, 1985, 141.)

[15]Gábos Zoltán: Farkas Gyula vizsgálatai a Fourier-elv és a relativitáselmélet köréből, Fizikai Szemle, 1997/10, 318.

[16]Filep László: *Farkas Gyula élete és munkássága* (egyetemi doktori értekezés), Debrecen, 1977, 12. jegyzet. A Szénássy Barna témajavaslatára készült disszertáció a Farkas életrajz adatainak mindmáig leggazdagabb forrása.

[17]Füstöss László: *Ortvay Rudolf*, Akadémiai, Budapest, 1984, 58-59.

[18]Névai, Paul: Szegő Gábor (1895-1985), Magyar Tudomány, 1986/8-9, 730.

Farkas eredményeinek jelentőségét már több kortársa is felmérte. Kürschák József így összegezte Farkas tudományos munkásságának fő vonulatát: „Matematikai szempontból a lineáris egyenlőtlenségekre vonatkozó fontos vizsgálatait kell kiemelnünk (...) ismételve olyan érdeklődéssel tért vissza a tárgyra, amilyen odaadással a tudománynak szentelt egész életén át az elméleti fizika átalakulásának minden fázisát figyelemmel kísérte, eredményeit lelkébe fogadta és reájuk dolgozataival reagált."[19] Haar Alfréd 1918-ban így jellemezte egykori kolozsvári tanártársának eredményeit, utalva azok tudománytörténeti helyére is: „A lineáris egyenlőtlenségek elmélete Farkas Gyulától és Minkowski Hermanntól ered. Egymástól függetlenül és különböző utakon jutottak el az elmélet két főtételéhez: a lineáris egyenlőtlenségek alaptételéhez és azok paraméteres megoldásához."[20]

A homogén lineáris egyenlőtlenségek Crelle Journalban publikált alaptétele Farkas-tétel néven vált a matematikatörténet részévé. Harold W. Kuhn és Albert W. Tucker 1950-ben rábukkant Farkas tételére, és felhasználta azt a bizonyításaiban.[21] Lineáris egyenlőtlenségekkel kapcsolatos értekezéseinek késői újrafelfedezése maradandó helyet biztosított Farkas Gyula számára, így a lineáris programozás, a matematikai és a közgazdaságtani optimalizálás és a játékelmélet klasszikus előfutárainak sorában.[22]

Munkássága az optimalizálás történetének szakirodalmában kiemelkedő helyen szerepel, az egyik legújabb, a Grattan-Guinness által szerkesztett matematikatörténeti szintézis pedig a lineáris programozás történeti előzményeiből hangsúlyozottan Farkas tételét tartja a legfontosabbnak.[23]

A Bolyai János Matematikai Társulat 1974-ben Farkas díjat alapított az alkalmazott matematika területén jelentős eredményt elért fiatal kutatók jutalmazására. Sírjára a Magyar Tudományos Akadémia 1981-ben állíttatott síremléket, amely egy későbbi városrendezés során a temetővel együtt megsemmisült.

A sárosdi szülőházat 1997-ben a Bolyai Társaság, az Eötvös Loránd Fizikai Társulat és a helyi önkormányzat emléktáblával jelölte meg. A szülőhely álta-

[19] Kürschák József: *Az utolsó száz év matematika történetéből Magyarországon*, Magyar Tudományos Akadémia, Budapest, 1926, 20.

[20] Haar Alfréd: A lineáris egyenlőtlenségekről, in: *Haar Alfréd összegyűjtött munkái*, Akadémiai, Budapest, 1959, 421-38.

[21] Prékopa András „Farkas Gyula élete és munkásságának jelentősége az optimalizálás elméletben" című cikkében így írja le a cikk újrafelfedezésének történetét: „Tucker elmondta, hogy amikor a nemlineáris programozás ún. szükséges optimalitási feltételének bizonyításán dolgozott Kuhnnal, akkori doktoranduszával együtt, megakadtak egy ponton, ahol szükségük volt a lineáris egyenlőtlenségrendszerekkel kapcsolatos eredményekre. Miután Tucker leküldte tanítványát a könyvtárba, hogy kutasson, hátha talál valamit, amire támaszkodva a bizonyítást teljessé tudják tenni, a tanítvány csakhamar ráakadt Farkas Gyula cikkére, melynek fő tétele pontosan azt mondja ki, amire szükségük volt". (Prékopa András: Farkas Gyula élete és munkásságának jelentősége az optimalizálás elméletében, in: Komlósi Sándor - Szántai Tamás (szerk.): *Új utak a magyar operációkutatásban*, Dialóg Campus, Budapest - Pécs, 1999, 16.)

[22] Kettőjükön kívül még számos magyar vagy magyarországi származású tudós vett részt a játékelmélet elméleti alapjainak kidolgozásában: Kőnig Dénes, Kalmár László, Haar Alfréd, Wald Ábrahám, John Kemeny, S. Vajda és Harsányi János.

[23] Grattan-Guinness, Ivor (ed.): *Companion Encyclopediae of the Mathemathical Sciences II.* London, 1994, 829.

lános iskolája felvette Farkas Gyula nevét, s 2000 óta évente megrendezésre kerülő emlékversennyel is tisztelegnek a községükben született tudós emléke előtt.

Születésének 150. évfordulója alkalmából a Fizikai Szemle hat, a Természet Világa két cikket közölt Farkas Gyula életéről és munkásságáról. Az *Új utak a magyar operációkutatásban* című kötet a Matematikai Kutatóintézetben megrendezett konferencia több előadását tartalmazza. 2003-ban *Farkas Gyula élete és munkássága* címmel jelent meg egy hatvan oldalas tanulmánykötet.[24] Az örvendetesen terebélyesedő Farkas-kultusz legkiemelkedőbb eseménye a Kolozsvárott megrendezett nemzetközi tudományos konferencia volt. Az egyetem épületében szobrot állítottak az egykori professzornak, akinek az arcképe is felkerülhetett a róla elnevezett terem falára – a róla elnevezett sárosdi általános iskola ajándékaként.

Farkas Gyula budapesti lakóhelyeit nem jelöli emléktábla, holott itteni lakásainak címe is ismert: I. ker. Nagyenyed u. 3., VI. ker. Podmaniczky u. 87. és XVIII. ker. Fürst Sándor u. 23-25. Noha Farkas Gyula emlékezetét legméltóbban éppen műveinek megújuló hatása őrzi, mindenképpen kívánatos lenne, ha nem csupán a sárosdi szülőházán lévő emléktáblája és a kolozsvári egyetemen 2005-ben felavatott szobra válhatnának matematika-, illetve fizikatörténeti emlékhelyekké, hanem életének jelenleg még kevéssé ismert budapesti helyszínei is...

GURKA DEZSŐ
Tessedik Sámuel Főiskola
Pedagógiai Főiskolai Kar
5540 Szarvas, Szabadság út 4.
email: gurka@drotposta.hu

THE REVIVAL EFFECTS OF GYULA FARKAS' SCIENTIFIC WORK

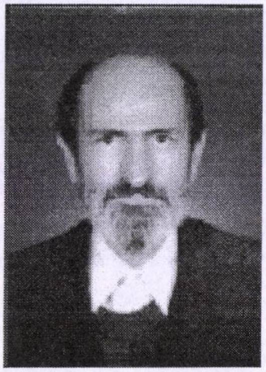
DEZSŐ GURKA

Gyula Farkas (1847–1931), professor at the University of Kolozsvár, was a well-known scientist in his age due to his thermodynamic achievements, but today he is also noted as one of the founders of operation research. At the beginning of his scientific career he was noted more as a mathematician, later more as a theoretical physicist, yet his scientific oeuvre looks homogeneous, because all of his articles had a strict mathematical background. Between 1893 and 1926 Farkas wrote nine articles about Galilean virtual speed and the mathematical problems relating to it, which made an effect on the theory of optimalization. The Farkas Theorem, his main achievement in mathematics, became known by his article Theorie der einfachen Ungleichungen published in the Crelle Journal in 1902. The rediscovery of this article by Harold W. Kuhn and Albert W. Tucker in 1950 made him the often cited classic of the theory of optimalization. Nowadays Farkas is recognized as the predecessor of several areas of modern science (e.g.: linear programming, economic and mathematical optimalization).

[24] Fizikai Szemle, 1997/10, 309-32.; Természet Világa, 1997/7, 290–95.; Komlósi Sándor – Szántai Tamás (szerk.): *Új utak a magyar operációkutatásban*, Dialóg Campus, Budapest – Pécs, 1999.; Martinás Katalin (szerk.): *Farkas Gyula élete és munkássága*, Eötvös Loránd Fizikai Társulat Termodinamikai Szakcsoportja, Budapest, 2003.

Alkalmazott Matematikai Lapok **25** (2008), 143-154.

EMLÉKEZÉS NEMETZ TIBORRA (1941–2006)



Nemetz Tibor matematikus 1941-ben született Balatonújlakon.
Szakmai munkásságával jelentős hatást váltott ki több szakterületen is, melyek közül kiemelésre érdemes

- tudományos kutatómunkája;
- oktatói tevékenysége, új matematikai témakörök bevezetése az egyetemi és középiskolai oktatásba;
- egyes matematikai eredmények gyakorlati alkalmazása;
- ismeretterjesztő tevékenysége.

Szakmai pályafutásának főbb állomásai:

1964:	*Matematikusi diploma*, Eötvös Loránd Tudományegyetem, TTK,
1970:	*Egyetemi doktori cím*, Eötvös Loránd Tudományegyetem, TTK,
1971-72:	ösztöndíjas előadó: Carleton University, Ottawa, Canada,
1973:	A matematika tudomány *kandidátusa*,
1979-80:	Meghívott professzor: J.W. Goethe University, Frankfurt, NSZK,
1982-83:	Meghívott professzor: Technical University, Wien, Austria,
1992-94:	Meghívott professzor: Middle East Technical University, Ankara, Törökország,
1994:	A matematika tudomány doktora,
1998:	Habilitáció, Eötvös Loránd Tudományegyetem, TTK.

Főbb munkahelyei: MTA Matematikai Kutató Intézete (Rényi Intézet), ELTE TTK Valószínűségelméleti és Statisztika Tanszék.

Tudományos kutatómunkáját elsősorban az információelmélet egyes témaköreiben és annak határterületein végezte. Több mint 110, többnyire neves folyóiratokban megjelent publikációjában ismertette eredményeit, mely eredmények közül az alábbiakban szemléltetésül csak néhányat emelhetünk ki:

Általános *információelméleti kutatásai* közül jelentősek a Győrfi Lászlóval közös cikkekben megjelentetett (több valószínűségi mérték különbözőségének mérésére vonatkozó) f-disszimilaritással kapcsolatos vizsgálatai.

Fontos eredményeket ért el az elméleti és gyakorlati *entrópia-vizsgálatok* területén is:

- például a nem ismert valószínűségeloszlással rendelkező diszkrét, emlékezet nélküli forrás entrópiája relatív gyakoriságokból történő becslésének konvergenciájára vonatkozóan;
- gyakorlati vizsgálatokat folytatott (Szilléry András, Szászné Simon Judit és más társszerzőkkel) az „értelmes" írott magyar nyelv entrópiájának meghatározására, továbbfejlesztve a Shannon-féle „Guessing game" és a Cover-King-féle „gambling" idő- és mintaigényes technikákat;
- az írott szövegek redundanciájának vizsgálatából új típusú hibajelző eljárást dolgozott ki, mely lényegesen növelte az adott forráseloszlásra vonatkozó hatékonyságot (az üzenethossz növelése nélkül).

Jelentős eredményeket ért el az *optimális, egyértelműen dekódolható kódok vizsgálatában.* Kiemelkedőek az optimális kódok egyedi kódhosszának felső becslései, valamint a bináris prefix kódok aszimptotikus számára vonatkozó formula levezetése (exponenciálisan sok ilyen kód van, ahol az exponens egy transzcendens egyenlet megoldásával határozható meg). A Huffman-kódok témájában Katona Gyulával közösen elért eredményeinek érdekessége, hogy az optimális bináris (Huffman) kódok hosszának becsléseiben éppen a Fibonacci-számok szerepelnek. (Ezt az – IEEE Trans. on Info. Theory, 1976-ban megjelent – eredményt használta fel Travis Gagie a távközlésben fontos – torlódásokat csökkentendő – korlátozott kódhosszú Huffman-kódokkal foglalkozó értekezésében is, ld. http://www.cs.utoronto.ca/~travis/msc.pdf).

Információelméleti vizsgálatait kiterjesztette az adatvédelem, *kriptográfia* területére, nagyszámú, részben önállóan, részben társszerzőkkel (pl. Katona Gy., Papp P., Ureczky J., Vajda I.) közösen megjelentetett publikációval gazdagítva ezt a dinamikusan fejlődő alkalmazott matematikához kapcsolódó szakterületet. Ezen eredmények közül kiemeljük a véletlen sorozatok kriptográfiai tesztelését, valamint felhasználását a lineáris bonyolultság növelésére.

Nemetz Tibor az elméleti kutatások mellett nagy hangsúlyt fektetett az alkalmazásokra, a gyakorlati felhasználást segítendő **közéleti tevékenység**re is. Az alábbiakban csak néhány fontos elemet emelünk ki ezen funkciókból:

1969-től:	két évtizedes választmányi tagság a Bolyai János Matematikai Társulatban és a TIT-ben,
1986-88:	a magyar nemzeti IMU (Int. Mathematical Unio) bizottság titkára,
1988:	Matematikatanárok Világkonferenciájának főszervezője,
1991-1992:	az IACR (International Association of Cryptologic Research) igazgatósági tagja,
1992:	az Eurocrypt'92 konferencia főszervezője,

1997:	Magyarország képviselete az OECD kriptográfiai irányelvekkel foglalkozó ülésén Párizsban,
1998:	a Digitális Azonosítási Konferencia (DAK) szakmai program szervezője,
1998:	IFIP'98, EDI/EC (Elektronikus Kereskedelem) meghívott előadó,
1998:	"Secure Internet Connection" (BIK) konferencia egyik szervezője,
1999:	az ABET adatbiztonsági konferencia főszervezője,
1999-2001:	részvétel a hazai digitális aláírás törvény technikai előkészítésében.

Hatalmas hatást gyakorolt **oktatói tevékenység**én keresztül. Egyetemi tanárként oktatott az ELTE TTK Valószínűségelméleti és Statisztika tanszékén, kiemelkedő oktatási tevékenységet végzett a matematikusok, matematikatanárok képzésében, segítette szakdolgozatot készítők, doktoranduszok kutatásait.

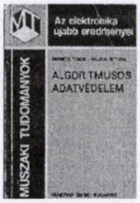
A matematika tanításának módszertanával, ezen belül elsősorban a valószínűségszámítás és statisztika tanításával is igen sokat, szívesen foglalkozott. A 80-as években az MTA matematikai közoktatási munkabizottságának tagja. Részt vett tantervek írásában, tanártovábbképző előadások tartásában és kísérleti tanításában. Nemetz Tibor volt a Bolyai János Matematikai Társulat részéről a fő szervezője az 1988-ban Budapesten rendezett ICME nemzetközi matematikaoktatási konferenciának (Sixth International Congress on Mathematical Education). Nemetz Tibor kezdeményezésére alakult a BJMT-ben a Matematika műveléséért és matematika oktatásáért Alapítvány. 1989-1991 között az Európai Matematikai Unió Matematika Oktatási Bizottságának elnöke.

Társszerzője volt a sok kiadást megért gimnáziumi fakultatív B változatú IV. osztályos Matematika tankönyvnek, és ő írta a speciális matematika tagozatos osztályok számára készült „Valószínűségszámítás" című tankönyvet (ez is több mint 10 kiadást ért meg).

Mint minden nagy oktatónak, diákjai tudásában, gondolkodási képességében élnek tovább tanításai, de fennmaradnak legendás mondásai is. Matematika tanár szakosok előtt – megszólítva hallgatóit – említette: *"A hallgatók és a leendő tanárok... A kettő nem ugyanaz!"*

Sokat tett a matematika oktatásáért, a tanítás megkedveltetéséért, a matematikatanárok továbbképzéséért, azért, hogy megmaradjanak a pályán.

Kedves humorával is hozzájárult a hallgatók és kollégák szeretetének elnyeréséhez.



Nemetz Tibor professzor 1989-től elindította az első hivatalosan is elismert hazai egyetemi kriptográfiai kurzust. 1991-ben Vajda István (BME) professzorral közösen kiadott kriptográfiai tankönyve alapművé vált részben a téma oktatásában, részben a gyakorlati alkalmazásokat művelők körében.

Emberi kapcsolatait, a matematikához való hozzáállását jellemzik a közös kutatások, a társszerzőkkel megjelentetett publikációk nagy száma, kiemelkedő oktatói, oktatásszervezői, -segítői tevékenysége, továbbá az **ismeretterjesztés**ben végzett munkája is.

A valószínűségszámítás és az adatvédelem területén kiemelten foglalkozott továbbképzéssel, speciális ismereteivel segítette az informatikai biztonság hazai színvonalának emelését.

Kiemelkedő szerepet vállalt az adatbiztonság növelésében különböző államigazgatási szervezetek munkájának segítésével is. Például a Hírközlési Főfelügyelet (mai nevén Nemzeti Hírközlési Hatóság) vezetői, munkatársai számára kriptográfiai tanfolyamot tartott.

A PTE Állam- és Jogtudományi Kara 2000-ben rendezte meg az Informatikai Szakmai Nap nevű szemináriumát joghallgatók, valamint elméleti és gyakorlati területen dolgozó jogászok számára. A rendezvény témája: az elektronikus aláírások, illetve okiratok jogi szabályozásának aktuális kérdései. Nemetz Tibor jogászoknak tartott előadásának címe: A digitális okiratok hitelesítésének kriptológiai kérdései.

Ismeretterjesztéssel kapcsolatos publikációi között jelentősek Az informatika biztonság kézikönyve c. alapműben írt fejezetei (Verlag Dashöfer kiadó, 2001-2007) Cikkeket jelentetett meg az Élet és Tudományban (Véletlen számok generálása és használata, 2000), valamint több folyóiratban (pl. A Springer rejtjeles levele, Matematikai Lapok, 1991; Statisztikai következtetés kis mintákból, avagy nem kell egy tojást megenni ahhoz, hogy megtudjuk: záp, Szakmódszertani Lapok, Matematika, 2000).

Jelentős munkásságát több díjjal ismerték el, ezek közül az alábbiakat emeljük ki:

1972:	Grüenwald-díj (fiatal matematikusok számára),
1980:	MTA elnöki díja,
1980, 1981:	Középiskolai Tankönyvek Nívódíjjal való elismerése,
1982:	Beke Manó-díj matematika- oktatási tevékenység elismerésére
1986:	TIT Díj
1989:	MTESZ Díj
2001:	Kalmár László-díj

Befejezésül ismét Tőle idézünk: egyik óra elején hangzott el egy témáról, hogy *"Miben különbözik az előzőtől? Először is abban, hogy a múlt héten erre már nem maradt idő..."*

Sajnos több órára, több tudományos cikkre, több tankönyvre nem maradt idő. Az életmű szerencsére itt maradt eredményekben, tankönyvekben, bennünk.

SZABÓ ISTVÁN, volt tanítványa, kollégája
ELTE TTK
Valószínűségelméleti és Statisztika Tanszék
szaboi@cs.elte.hu

NEMETZ TIBOR PUBLIKÁCIÓS JEGYZÉKE

KATONA G.O.H., NEMETZ T., SIMONOVITS M.: *Újabb bizonyítás a Turán-féle gráftételre és megjegyzések bizonyos általánosításaira*, MAT. Lapok, **15** (1964), 228–238.

NEMETZ T., VARGA GY.: *Határeloszlástételek kiterjesztéséről*, MTA III. Oszt. Közl. XIV. (1964), 415–421. Angol fordítása: "On the extension of limit theorems" In: Selected Translations in Math. Stat. and Prob., 12. AMS, Providence R.I. (1973) 59–66.

T. NEMETZ: *Information Theory and Testing Hypotheses*, Proc. Coll. Inform. Theory, Debrecen, 1967, Vol. II., 283–293.

NEMETZ T.: *Maximális információt tartalmazó döntésfüggvények*, MTA III. Oszt. Közl., XVII (1967), 454–465.

BAKOS T., NEMETZ T., TUDNÁDY G.: *Egy számelrendezés szomszédos párjainak különbségéről.* Köz. MAT. Lapok, **36** (1968), 202–205.

KATONA G.O.H., NEMETZ T.: *Néhány megjegyés a shift-regiszter generátorokról*, MTA Számítástechnikai Központ Közl., **5** (1969), 1–10.

NEMETZ T.: *Permutációk szisztematikus és véletlenszerű generálása*, MTA III. Oszt. Közl. XIX. (1969), 235–245.

NEMETZ T.: *Megjegyzések az 1224. sz. gyakorlathoz*, Köz. MAT. Lapok, **38** (1969), 193–194.

NEMETZ T.: *Információelmélet és hipotézisvizsgálat*, MAT. Lapok, **20** (1969), 241–275.

T. NEMETZ: *Notes on the rate of convergence of the information provided by an experiment*, Studia Sci. Math. Hungar., **5** (1970), 277–281.

NEMETZ T.: *Szekvenciális dekódolás*, TKI Szemináriumi Közlemények, (1970. december)

NEMETZ T.: *Egy lehetőség valószínűségszámítási fogalmak bevezető szemléltetésére*, A Matematika Tanítása, XVII (1970), 143–149.

NEMETZ T.: *A teljes gráf adott Hamilton körével adott számú közös élt tartalmazó Hamilton körök számáról*, MAT. Lapok, **21** (1970), 68–81.

NEMETZ T.O.H.: *Short note on the most informative decision*, Studia Sci. Math. Hungar., **5** (1970) 457–460.

T. NEMETZ: *On computer-generated permutations*, (Hungarian) Magyar Tud. Akad. Mat. Fiz. Oszt. Közl., **19** (1970) 235–245.

NEMETZ T.: *A teljes gráf adott Hamilton körével adott számú közös élt tartalmazó Hamilton körök aszimptotikus számáról*, MAT. Lapok, **22** (1971), 59–64.

T. NEMETZ: *Information theoretic concepts in testing hypotheses, Revue Internationale de Philosophie*, **25** (1971), 160–166.

T. NEMETZ: *On the experimental determination of the entropy*, Kybernetik, **10** (1972), 137–139.

T. NEMETZ: *On the orthogonality of probability measures*, Studia Sci. Math. Hungar., **7** (1972), 111–115.

T. NEMETZ: *Information type measures and finite decision problems*, Mathematical Lecture Notes, No. **17.**, Carleton University, Ottawa, Ont., 1972, No. **2.** i + 163 pp.

NEMETZ T.: *Adatsorozatok rövidítésének egy iteratív modellje*, MTA. Mat. Fiz. Oszt. Közl., **21** (1973), 385–398.

T. NEMETZ: *Bounds on error probability*, Studia Sci. Math. Hungar. **8** (1973), 341–345.

T. NEMETZ: *Finite data reduction in the case of a long sequence of observations*, Problems of Control and Information Theory, **3** (1974), 19–34.

T. NEMETZ: *On the ?-divergence rate for Markov-dependent hypotheses*, Problems of Control and Information Theory, **3/2** (1974), 147–155.

T. NEMETZ: *Goals and means of mathematics teaching at pre-university level in Hungary*, UNESCO, Techn. Report, 1974.

T. NEMETZ: *Equivalence-orthogonality dichotomies of probability measures*, in: Limit Theorems of Probability Theory (Colloq., Keszthely, 1974), Colloq. Math. Soc. János Bolyai, Vol. **11**, North-Holland, Amsterdam, 1975. 183–191.

NEMETZ T.: *A matematikáról, néhány torzkép ürügyén*, Magyar Nemzet (1974. április 9.)

L. GYŐRFI, T. NEMETZ: *f-dissimilarity: a general class of separation measures of several probability measures*, in: Topics in Information Theory (Second Colloq., Keszthely, 1975), Colloq. Math. Soc. János Bolyai, Vol. **16**, North-Holland, Amsterdam, 1977. 309–321.

T. NEMETZ, J. SIMON: *Self-information and optimal codes*, in: Topics in Information Theory (Second Colloq., Keszthely, 1975), Colloq. Math. Soc. János Bolyai, Vol. **16**, North-Holland, Amsterdam, 1977. 457–468.

G.O.H. KATONA, T. NEMETZ: *Huffman codes and self-information*, IEEE Trans. Inform. Theory, IT-22/3 (1976), 337–340.

A. KRÁMLI, T. NEMETZ: *Book reviews.* Period Math. Hungar., **7** (1976), No. **3–4**, 321.

L. GYŐRFI, T. NEMETZ: *On the dissimilarity of probability measures*, Problems of Control and Information Theory, **6** (1977), 263–267.

K. BOGNÁR, T. NEMETZ: *On teaching of probability at secondary level*, Educational Studies in Mathematics, **8** (1977), 399–404.

T. NEMETZ: *Entropy estimation via recoonstruction of mutilated texts*, Publications de Colloque International du CNRS, Cachan, (France) 1977. No. **276**, 389–397.

T. NEMETZ: *On a finite decision model*, Trans. 7th Prague Conf. on Inform. Theory etc., 1978, 379–390.

T. NEMETZ: *Transmission game: a problem in coding theory*, (Hungarian) MAT. Lapok. **29** (1977/81), No. **1–3**, 61–69.

L. GYŐRFI, T. NEMETZ: *f-dissimilarity: a generalization of the affinity of several distributions*, Ann. Inst. of Statist. Math., Tokyo, **30** (1978), 105–113.

T. NEMETZ, J. SIMON: *On estimating the entropy of written Hungarian by gambling technique*, Trans. 8th Prague Conf. on Inform. Theory etc., 1978, Reidel, Dordrecht-Boston, Mass., 1978, 69–76.

BOGNÁR J–NÉ, NEMETZ T., TUSNÁDY G.: *Ismerkedés a véletlennel*, A Matematika Tanítása, **25** (1978), 1–6.

BARABÁS B., NEMETZ T.: *Ismerkedés a véletlennel, Tanítási tapasztalatok*, A Matematika Tanítása, **25** (1978) No. **3**. 68–73.

BOGNÁR J–NÉ, NEMETZ T., TUSNÁDY G.: *Ismerkedés a véletlennel*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1979.

Y. HORIBE, T. NEMETZ: *On the Max-Entropy Rule for a Binary Search Tree*, Acta Informatica, **12** (1979) No. **1.**, 63–72.

NEMETZ T., SZILLÉRY A.: *Nyelvstatisztikai Táblázatok*, Alkalmazott Matematikai Lapok, **5** (1979), 69–87.

T. NEMETZ: *On the word-length of Huffman codes*, Problems of Control and Information Theory, **9** (1980), 231–242.

NEMETZ T.: *A véletlen elemi matematikája*. Kísérleti tankönyv és tanári útmutató hozzá. ESzK. 1980.

BOGNÁR J–NÉ, NEMETZ T.: *Játék és valószínűség*, A Matematikai Tanítása, **27** (1980), 76–85.

T. NEMETZ: *The place of probability in the curriculum*. Proceedings of ICME-4 held at Berkeley 1980. M. Zweng (ed.), Birkhauser, Boston, 1983., 195–198.

T. NEMETZ: *Stochastics in the Hungarian schools: pre-university level*, in: Convegno l'insegnamento pre-universitario della Statistica con particolare referimento alla scuola secondaria superiore Bressanone, 19–21 settembre 1979, 53–71. (Olasz fordításban is megjelent).

T. NEMETZ: *Pre-university stochastical education in Hungary*, Comparative Studies of Mathematical Curricula - Change and Stability, IDM. Bielefeld, 1980, 478–485.

T. NEMETZ: *Run-test discrimination between written Hungarian and random sequences*, The first Pannonian Symposium on Math. Stat., P. Révész et. al. (eds.), Lecture Notes in Statist., **8**, Springer, New York-Berlin, 1981. 182–194.

NEMETZ T.: *Közvetítési játék: Egy kódelméleti probléma*, Matematikai Lapok, **29** (1981), 61–69.

HAJNAL I., NEMETZ T., PINTÉR L.: *Matematika III.*, B Fakultáció, Budapest, 1981.

T. Nemetz: *Stochastic für das Gymnasium im neuen Ungarischen Unterrichtsystem*, in: Stochastic in Schulunterricht, W. Dörfler, R. Fischer, (eds.), Hölder-Pichler-Tempky, Wien, 1981., 117–123.

T. Nemetz: *Teaching Statistics to 16–18 year olds: Dreams and Reality*, Proc. of the first ICOTS, Sheffield, 1982.

Gyapjas F., Nemetz T.: *Matematika IV. Osztály.* Szakközépiskolai Tankönyvkiegészítő, Tankönyvkiadó, 1982.

Hajnal I., Nemetz T., Pintér L., Urbán J.: *Matematika IV., B Fakultáció*, Tankönyvkiadó, 1982.

T. Nemetz: *Pre-university stochastics teaching in Hungary*, in: Teaching Statistics in Schools throughout the World, V. Barnett (ed.), Ch. 4. Voorburg, 1982, 85–112.

N. Kusolitsch, T. Nemetz: *On the longest run of coincidences*, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und verw. Gebiete, **61** (1982) No. **1**., 59–73.

N. Kusolitsch, T. Nemetz: *A method of investigating random graphs*, Annals of Probability, **11** (1983), 217–221.

G. Longo, T. Nemetz: *Once more on the word-lenght of Huffman codes*, Trans. of the 9th Prague Conf. on Inform. Theory, Stat. Decision Function, Random Processes, Prague, 1982, B. D. Reidel, Boston, 1983, 63–69.

N. Kusolitsch, T. Nemetz: *A method of investigating the longest paths in certain random graphs.* Ann. Probab. **11** (1983), No. **1**, 217–221.

N. Kusolitsch, T. Nemetz: *Erdős-Révész-type asymptotic bounds on the length of longest paths in certain random graphs*, in: Limit Theorems in Probability and Statistics, Vol. I, II (Veszprém, 1982), Colloq. Math. Soc. János Bolyai, **36**, North-Holland, Amsterdam, 1984. 649–665.

J. Komlós, W. Moser, T. Nemetz: *On the asymptotic number of prefix codes*, Mitteilungen aus dem Math. Seminar Giessen, Heft 165, Coxeter-Festschrift, Teil III., 1984, 35–48.

Hajnal I., Nemetz T., Pintér L.: *Kézikönyv a matematika B-fakultáció tanításához*, Tankönyvkiadó, 1984.

Nemetz T.: *Valószínűségszámítás és statisztika.* Segédanyag az intenzív tanártovábbképzéshez, Műv. Min., 1985.

T. Nemetz: *A random linear secret key encryption*, Proc. of the 5th Pannonian Symposium on Math. Stat., Visegrád, 1985, 171–180.

Nemetz T.: *Valószínűségszámítás*, Gimnáziumi tankönyv, Tankönyvkiadó, 1986.

N. Kusolitsch, T. Nemetz: *Exercises to improve the subjective approach to probability*, Teaching Statistics, **8** (1986), 78–82.

A.G. Howson, J.P. Kahane, P.J. Kelly, P. Luginie, T. Nemetz, F.M. Simons, C.A. Taylor, E. De Turkheim: *Mathematics as a Service Subject*, ICMI Publication, 1986. (Reprinted in: Selected papers on the teaching of mathematics as a service subject, eds. R.R. Clements et al., Springer, 1988, 1–16.

Nemetz T.: *Szórakozzunk számokkal*, Háttér, 1986–87, No **1**. 20–21.

T. Nemetz, J. Ureczky: *A random linear secret-key encryption*, in: Probability Theory and Mathematical Statistics with Applications (Visegrád, 1985), Grossmann et. al. (eds.) Reidel, Dordrecht, 1988. 171–180.

Nemetz T.: *Szórakozva tanuljunk!* Háttér, 1987, 86–87.

Nemetz T.: *Matematikát keverek a betűrakásba*, Háttér, **16** (1987), 35–36.

T. Nemetz.: *Summary of the Hungarian educational system with special attention to mathematics teaching*, in: Selected Papers on the Teaching of Mathematics as a Service Subject, R.R. Clements et. al., (eds.), Springer, 1988, 63–68.

Nemetz T.: *A matematika oktatóinak világkongresszusa*, Köznevelés, 1988. szept. 23., 13.

Nemetz T.: *Iskolai nevelés a Jemeni Népi Demokratikus Köztársaságban*, Köznevelés, XLV (1989), No. **13**, 11–12.

Nemetz T.: *A Malawi Köztársaság iskolarendszere*, Köznevelés, XLV (1989), No. **18**., 13.

T. Nemetz.: *Report on two Hungarian contests for school children (age 10–14)*, Mathematical Competitions, **1** (1988), No. **2**., 9–12.

Nemetz T.: *Matematikaoktatási világkongresszus Budapesten*, Magyar Tudomány, 1989, No. **1**., 57–63.

T. Nemetz: *Prospects of teaching probability and statistics*, L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate, 12. (1989), No. **4**, 504–511.

N. Kusolitsch, T. Nemetz: *A paradox concerning order statistics*, News Bulletin of Calcutta Mathematical Society, 12 (1989 July), 1–6.

Nemetz T., Simon J.: *Hiányos szövegek rekonstrukciója és a magyar nyelv entrópiája*, Magyar Nyelv, LXXXV (1989), No. **4**., 427–438.

T. Nemetz: *Automatic discrimination of written languages from random strings with an application to error detection*, in: Teaching Mathematical Modelling and Applications, M. Niss (ed.), Ellis Horwood, (1991), 230–241.

T. Nemetz: *Popularization of mathematics in Hungary*, in: Popularization of Mathematics, ICMI Study Series, A.G. Howson, J-P. Kahane (eds.) Cambridge University Press. (1990), 160–169.

Nemetz T.: *A matematika népszerűsítéséről*, Kilátó, VII. (1989), No. **2**., 37–43.

T. Nemetz: *Mathematics education in Hungary*, in: Moving into the Twenty-first Century, R. Morris, M.S. Arora (eds.), Studies in Mathematics Education, Vol. **8**., Unesco, (1992), 105–112.

Nemetz T., Vajda I.: *Bevezetés az algoritmikus adatvédelem elméletébe*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1991.

Nemetz T.: *A Springer rejtjeles levele*, Matematikai Lapok, **3** (1991), 7–18.

T. Nemetz, I. Vajda: *Substitution of characters in q-ary m-sequences*. In: Applied Algebra, Algebraic Algorithms and Error-Correcting Codes (Tokyo, 1990), Lecture Notes in Comput. Sci., 508, Springer, Berlin, 1991. 96–105.

T. Nemetz: *Cryptology: a rich source of applications offering entertaining mathematical instructions*, in: Teaching Mathematical Modelling and Applications, de Lange (ed.), Ellis Vorwood, New York. 1991, 230–244.

T. NEMETZ: *Counting domino arrangements*, in: Sets, Graphs and Numbers (Budapest, 1991), Colloq. Math. Soc. János Bolyai, **60**, North-Holland, Amsterdam, 1992, 507–512.

NEMETZ T.: *Egy kis matematika*, Polygon, II. (1992), 123-128.

P. BLACK, T. NEMETZ: *Science, Mathematics, Engineering and Technology Education for the 21st Century*, NSF publication, Washington D.C., 1993.

E. CAKIROGLU, T. NEMETZ: *Secret codes in statistical education, Proceedings of the first Scientific Meeting of IASE*, L. Brunelli, G. Cichitelli (eds.), University of Perugia, Italy, 1993, 367–376.

Y. ERSOY, T. NEMETZ: *Students' views on edutational aspects of stochaistics*, Proceedings of the first Scientific Meeting of IASE, L. Brunelli, G. Cichitelli (eds.), University of Perugia, Italy, 1993, 453.

Y. ERSOY, T. NEMETZ: *Project work in teacher training*, in: Advances and Perspectives in the Teaching of Mathematical Modelling and Application, C. Sloyer (ed.), Waterstreet Mathematics, Yorklyn, 1995, 263–273.

T. NEMETZ: *Guide for organizers of new datasecurity systems.* Proceedings of the Hungarian Datasecurity Conference, Mátraháza, 1995. COMPA-REAL, 1995, 1–9. (in Hungarian)

T. NEMETZ, O. VANCSO, G. WINTSCHE: *Report on pre-university statistics education in Hungary*, Version A: ICMI Bulletin No. **39.**, 1995. dec. 18–20.; Version B: News on the Royal Stat. Soc., Jan. 1996.

T. NEMETZN: *Statistics and probability at the secondary level*, ISI NEWSLETTER, **20/3** (1996), 18–19.

NEMETZ T.: *Adatvédelmi filozófiák*,(Philosophy behind Data Security), Proceedings of the Conference "Datasecurity in Informatics", Siófok, 1996, COMPA-REAL, 1996, 17–23.

NEMETZ T.: *Milyen titkos üzenetet hozott Verne postagalambja*, Módszertani Lapok, Matematika, **3** (1996–97), No. **3**.

Z. HIVES, T. NEMETZ: *Computer aided introduction to statistical decisions in school*, Proceedings of the Tartu Conference on Computational Stat. and Stat. Educ., E-M. Tiit (ed.), Univ. of Tartu, 1997, 56–58.

T. NEMETZ: *An overview of the teaching of probability in secondary schools*, Papers on Statistical Education presented at ICME-8, Seville, July 14–21, 1996, B. Phillips (ed.), Swisburne University Press, 1997, 75–86. Also published in the Newsletter of SEFI, 1996, No. 4.

Z. HIVES, T. NEMETZ: *Teaching statistics in schools*, Statistika Oepetamine koolis arvuti abil, Statistika Koolis, Proceedings of: Arvutusstatitika ja Statistikaharidus '96, TARTU, 1997, 47–61. (in Estonian)

T. NEMETZ: *Teaching probability at secondary level: State of Art*, Newsletter of SEFI, 1997.

R. LIMBEK, T. NEMETZ, I. VAJDA: *A cryptographic element based on number-system conversion*, Second Joint Conference on Modern Applied Mathematics, Illyefalva, Románia, 1997. jún. 2–8.

NEMETZ T.: *A statisztika jelentősége napjainkban*, A Matematika Tanítása, V. (1997), No. **5**, 17–22.

NEMETZ T.: *Új utak és lehetőségek a valószínűségszámításban és a statisztikában*, konferenciakiadvány, Szerk.: Erdős G., Pintér F., Nagykanizsa, 1997. október 2–4.

NEMETZ T.: *Hitelesítési rendszerek áttekintése*, EDI/EC '98 Conference on Electronic Commerce, ed.: Zelnyánszki L., Elektronikai Kereskedelmi Fórum Kht., 1998, 249–255.

NEMETZ T.: *Írott nyelvek redundanciája*, Új Alaplap, **14/8** (1998).

N. KUSOLITSCH, T. NEMETZ: *Mathematical project work in school*, Proc. of the Int. Conf. on Teaching Maths., Samos, Greece, July 3–6, 1998, ed. by B. Barker, pp. 191–194.

T. NEMETZ: *International Mathematical Project Competition in Izmit*, ICMI Bulletin, **44** (1998), 26–29.

T. NEMETZ, P. PAPP: *Hybrid Random Byte Generators*, Global IT Security, Proc. of the 14th Int. Conf. on Info. Security, Wien, Gy. Papp, R. Posch, eds., Wien, 1998, pp. 366–380.

NEMETZ T., WINTSCHE G.: *Valószínűség, statisztika mindenkinek*, Ajánlott középiskolai segédkönyv, Polygon Kiadó, Szeged, 1999, 243 oldal.

N. KUSOLITSCH, T. NEMETZ: *A guide to the empire of random*, Typotex Kiadó, Budapest, 1999.

NEMETZ T.: *Valószínűségszámítás*, Speciális matematika tankönyvek, Typotex - Nemzeti Tankönyvkiadó, 1999, 292 oldal

NEMETZ T.: *Digitális dokumentum*, digitális aláírás (népszerűsítő cikk), Print & Publishing, **10/56** (1999), 100–102.

T. NEMETZ, P. PAPP: *Data-compression aiding data-security*, IFIP/SEC2000: Information Security, (Bejing, 2000), (Sihan Qing, J.H.P. Eloff, eds.), International Academic Publishers, 2000, 61–64.

NEMETZ T.: *A hálón utazó okirat*, Új Alaplap, XVIII/**2** (2000), 14–18.

NEMETZ T.: *Digitális aláírás*, Detektor plusz, **7/3–4** (2000).

NEMETZ T.: *Statisztikai következtetés kis mintákból, avagy nem kell egy tojást megenni ahhoz, hogy megtudjuk: záp*, Szakmódszertani Lapok, Matematika, **7/1** (2000), 8–14.

NEMETZ T.: *Véletlenszámok generálása és használata*, Élet és Tudomány, **55** (2000), 525–527.

NEMETZ T., PAPP P.: *Adattömörítés és adatbiztonság*, Híradástechnika, **55/11** (2000), 13–18.

NEMETZ T., PAPP P.: *Belga titkosítók Amerikában*, BYTE Magyarország, **5/3** (2001), 38–40.

NEMETZ T.: *A digitális okiratok azonosításának kriptológiai kérdései*, Mi újság, 2001. november, 6-7. oldal.

NEMETZ T.: *Egyéni azonosító: A digitális aláírás*, eBu Magazin, **2/1** (2002), 15.

T. NEMETZ: *A rejtjelzés, az elektronikus dokumentumok azonosítása és a digitális aláírás.* in: Az Informatikai Biztonság Kézikönyve, (szerk. Muha L.), Verlag Dashöfer Szakkiadó, Budapest, 2002.

NEMETZ T.: *Matematika a kriptográfiában: ízelítő*, in: Közgyűlési Előadások 2000, Az MTA 175 éve, (szerk. Glatz F.), Magyar Tudományos Akadémia, 2002, 187–206.

T. NEMETZ, P. PAPP: *Increasing data security by data compression*, Stud. Sci. Math. Hungar., **42/4** (2005), 343–353.

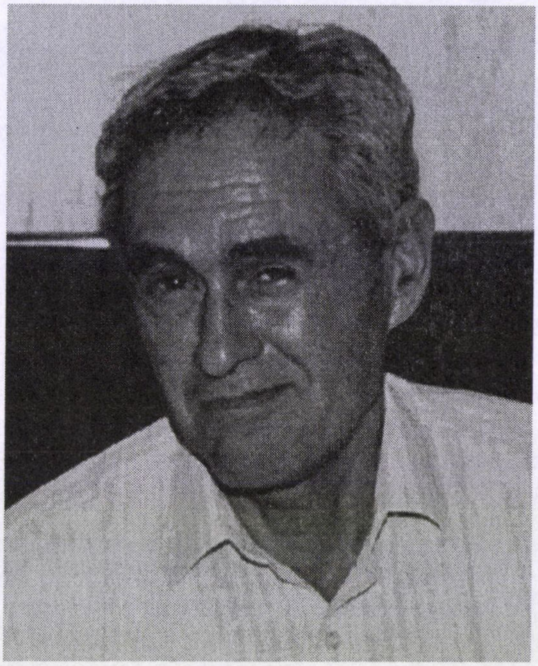
T. Nemetz: *Mathematics in cryptography.* (Hungarian) Alkalmaz. MAT. Lapok, **23** (2006), No. **2**, 295–312.

G. Borbás, T. Nemetz, P. Papp: *Generating and testing cryptographically secure random numbers.* (Hungarian) Alkalmaz. MAT. Lapok, **23** (2006), No. 2., 313–333.

Összeállította: Szakonyi Erzsébet és Simon Gábor

Alkalmazott Matematikai Lapok **25** (2008), 155-161.

FARKAS MIKLÓS (1932-2007)



Farkas Miklós 1932-ben született Budapesten.

A legelső, nem-tanár szakos matematikus évfolyam tagjaként szerzett kitüntetéses diplomát az Eötvös Loránd Tudományegyetemen.

Hajós Görgy tanítványaként differenciálgeometria témából lett kandidátus. Akadémiai doktori értekezését differenciálegyenletek témában írta, „Autonóm rendszerek periodikus perturbációiról" címmel (Budapest, 1973).

Ötven évig volt a Műegyetem oktatója. Mintegy húsz éven át vezette a Gépészmérnöki Kar Matematika Tanszékét, amelynek jogutódján, a BME TTK Matematika Intézete Differenciálegyenletek Tanszékén volt egészen haláláig professor emeritus.

A hatvanas évek elején a differenciálegyenletek területén paradigmaváltás történt – a geometrikus, kvalitatív elmélet került előtérbe – amelyhez Farkas Miklós jó időérzékkel, saját kutatómunkájában is témát váltva csatlakozott, és amelynek első magyarországi munkása, tanára, és szervezője lett. Strukturális stabilitásról, bifurkációkról, katasztrófaelméletről a hazai matematikusok közül elsőként beszélt a katedrán és írt nemzetközi rangú szakfolyóiratokban.

Publikációs jegyzéke 77 szakcikket, továbbá 15 tankönyvet és egyetemi jegyzetet sorol fel, közöttük az alkalmazott matematika legnagyobb presztízsű sorozatában megjelent csaknem hatszáz oldalas „Periodic Motions" (Applied Mathematical Sciences No. 104, Springer, Berlin, 1994) nagymonográfiát.

A nagyközönség Farkas Miklóst leginkább mint a Matematikai Kislexikon (Műszaki Könyvkiadó, Budapest,1972) főszerkesztőjét ismerheti, amely fontos szerepet játszott a magyar nyelvű matematikai kultúra ápolásában.

Minden erejével azon volt, hogy a matematikus szakma műegyetemi beágyazottságát növelje. Kereste a mérnökökkel való szakmai kapcsolatokat, és munkatársait is erre ösztönözte. Gáspár Zsolttal, Kollár Lajossal, Michelberger Pállal, Stépán Gáborral írt közös cikkeket az Acta Technica folyóiratban. A mérnökök és a matematikusok közötti együttműködés javításáért azzal tette a legtöbbet, hogy Béda Gyula akkori dékánnal együtt 1974/1975-ben létrehozta a Gépészmérnöki Kar (sajnos a kilencvenes évek közepére elsorvasztott) matematikus-mérnök szakát, amely az egyetemi öt év folyamán végig külön, kiscsoportos képzésként szerveződött, és mágnesként vonzotta a kiemelkedő képességű hallgatókat. Közülük később sokan a gazdasági (Sparing László Graphisoft), politikai (Kovács Kálmán informatikai miniszter), tudományos (Stépán Gábor akadémikus) életben vezető szerephez jutottak, sőt egyikük (Haller György - MIT, Morgan & Stanley) a BME tiszteletbeli doktora lett. Az itt tanító professzorok között külön is meg kell említeni az akkor már nyugdíjas Borbély Samu akadémikus nevét, aki csaknem ötven évvel korábban maga is matematikus-mérnökként végzett, mint a TU Berlin-Charlottenburg növendéke.

Farkas Miklós minden lehetséges fórumon, így a Felsőoktatási Szemlében, a Magyar Tudományban, országos és egyetemi bizottságokban (az „elefántcsonttorony-matematika" nem egy képviselőjével személyes konfliktusokat is vállalva) küzdött az alkalmazott matematika elismertetéséért. Azt a véleményt képviselte, hogy az „alkalmazott matematika" legjava nem szorul a „tiszta matematika" legjava mögé és hogy mindkettőben a minőség az – jóllehet ennek kritériumai nem teljesen azonosak az „alkalmazott" és a „tiszta" matematikában –, ami egyedül számít. Neumann János életműve, vagy a Navier-Stokes egyenlet példája mutatja, hogy a tiszta és az alkalmazott matematika mennyire átjárhatja egymást a legmagasabb szinteken is.

Dolgozatokat írt a differenciálegyenletek közgazdasági és biológiai alkalmazásairól is. Idős korában ez utóbbiakkal foglalkozott a legtöbbet, amire a „Dynamical Models in Biology" (Academic Press, New York, 2001) szakkönyv a legfőbb bizonyíték. Utolsó egyetemi kurzusát is erről a témáról tartotta.

Tanszékvezetőként iskolateremtő egyéniség volt.

Kamaszkora óta élénken érdeklődött társadalmi-politikai kérdések iránt. Cikket írt a Magyar Filozófiai Szemle 1978-as számában, „A társadalmi rendszer fejlődésének katasztrófaelméleti modellje" címmel.

A híres XIX. századi gondolkodóhoz hasonlóan az ő jeligéje is lehetett volna a nagy firenzei mondása, "Segui il tuo corso e lascia dir le genti".

„Menj utadon, s ne bánd, hogy mit beszélnek."

Szemelvényes élettörténetét mintegy kétszáz oldalon „A huszadik század, ahogy megéltem" (Bíbor Kiadó, Miskolc, 2003) címmel írta meg, amely dokumentumértékű részleteket is tartalmaz.

Tanítványai kétnapos differenciálegyenletek konferenciát rendeztek 75-ik születésnapja tiszteletére a Reáltanoda utcai Intézetben, amelyen egyre súlyosbodó betegsége miatt az ünnepelt már csak nagy önfegyelemmel, szakaszosan, hosszabb pihenési periódusokat közbeiktatva tudott résztvenni. Nagyon örült annak, hogy olyan sokan vettük őt körül ragaszkodásunkkal.

Befejezésül álljon itt néhány mondat a köszöntő beszédek egyikéből:

„Farkas Miklóst mindig tenni akaró, jobbító szándékú embernek ismertem meg, aki egyszerre tudott konfliktusvállaló és kiegyensúlyozó lenni. Emlékszem, hogy tanszékén védelmet nyújtott Bajcsay Pálnak, aki terhelt tanú volt a hatvanas évek egyik bírósági eljárásában és Gyökér Soltnak, aki akkor járt rendszeresen a 301-es parcellába, amikor azt még nem ültetett virágok borították. Ezeket azért említem, mert nem közismertek, és talán az sem az, hogy Farkas Miklósban mindannyian olyan embert tisztelhetünk, aki elkötelezett tagja a József Attila vers címéről elnevezett Eszmélet Körnek, a hazai baloldali gondolkodás egyik hiteles szellemi műhelyének.

Differenciálegyenletek megoldását régen integrálásnak hívták, amint arra az „első integrál" fogalma ma is emlékeztet bennünket, vagy az I betű az ENIAC, Neumann János első számítógépének nevében: numerikus integrátor. A régi és a mostani tanítványok nevében köszönöm Farkas Miklósnak, hogy megtanított bennünket differenciálegyenleteket megoldani, azaz integrálni – ami egyébként a newtoni Principia Mathematica általa gyakran idézett mondata szerint nagyon is helyénvaló tevékenység – és köszönöm, köszönjük neki egy teljes, intéger és integráló személyiség példáját."

2007 nyarának végén halt meg. Sokan emlékeznek rá tisztelettel és nagyrabecsüléssel.

Tanítványai és kollégái a BME Differenciálegyenletek Tanszéken

Farkas Miklós Publikációi

Matematikai Szakkönyvek:

[A] *Speciális függvények műszaki-fizikai alkalmazásokkal*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1964, pp. 416.

[B] (társszerző: Farkas I.) *Introduction to Linear Algebra*, Adam Hilger Ltd. & Akadémiai Kiadó, London & Budapest, 1975, pp. 205.

[C] *Periodic Motions*, Springer, Berlin, 1994, pp. 577.

[D] *Dynamical Models in Biology*, Academic Press, New York, 2001, pp. 200.

MATEMATIKAI SZAKCIKKEK:

[1] *Discussion of the geometry of affinely connected spaces by direct method*, Publ. Math. Debrecen **8** (1961), 25–54.

[2] *On differential geometric investigation of ordinary differential equations*, International Congress of Mathematicians, 1962, Stockholm, 74.

[3] *Másodrendű közönséges differenciálegyenletek egy osztályának differenciálgeometriai vizsgálata*, Mat. Lapok **13** (1962), 289–297.

[4] *Constructing affinely connected spaces by direct method*, Trudy Sem. Vector Tensor Anal. (Moscow State Univ.) **12** (1963), 5–6. (in Russian)

[5] *A proof of Gauss-Bonnet's theorem*, Nigerian J. Sci. **1** (1967), 175–178.

[6] *On stability of geodesics*, Abacus (J. Math. Assoc. Nigeria) **6** (1967), 25–28.

[7] *On stability and geodesics*, Ann. Univ. Sci. Budapest, Sect. Math. **11** (1968), 145–159.

[8] *Controllably periodic perturbations of autonomous systems*, Congres International des Mathématiciens, Nice, 1970, 228.

[9] *Controllably periodic perturbations of autonomous systems*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **22** (1971), 337–348.

[10] *Determination of controllably periodic perturbed solutions by Poincaré's method*, Studia Sci. Math. Hungar. **7** (1972), 257–266.

[11] (TÁRSSZERZŐ: R. A. KARIM) *On controllably periodic perturbations of Liénard's equation*, Per. Polytechnica Budapest, Sect. Electr. Eng. **16** (1972), 4–45.

[12] (TÁRSSZERZŐ: FARKAS I.) *On perturbations of van der Pol's equation*, Ann. Univ. Sci. Budapest, Sect. Math. **15** (1972), 155-164.

[13] *A feltételes szélsőértékről*, Mat. Lapok **24** (1973/75), 113–129.

[14] *On isolated periodic solutions of differential systems*, Ann. Mat. pura applicata **106** (1975), 233–243.

[15] *A szimultán tanulás dinamikai elmélete*, Alk. Mat. Lapok **2** (1976/77), 103–114.

[16] *Folyamatok kvalitatív vizsgálatáról*, Alk. Mat. Lapok **2** (1976/77), 237–257.

[17] *Estimates on the existence regions of perturbed periodic solutions*, SIAM J. Math. Anal. **9** (1978), 876–890.

[18] *A társadalmi rendszer fejlődésének katasztrófaelméleti modellje*, Magyar Filoz. Szemle **22** (1978), 802–808.

[19] (TÁRSSZERZŐK: LŐKÖS Á., MILE I.) *A szimultán tanulás hatása a tudásmennyiség növekedésére*, Magyar Pedagógia **18** (1978), 220–225.

[20] *Isolation of trajectories of periodic solutions of systems of differential equations*, Trudy Moskov. Orden. Lenin. Energet. Inst. **357** (1978), 107–108. (in Russian)

[21] *A model of the development of the societal system in catastrophe theory*, Acta Philos. Acad. Sci. Hungar. **5** (1978), 235–244.

[22] (TÁRSSZERZŐK: J. FRITZ, P. MICHELBERGER) *On the effect of stochastic road profiles on vehicles travelling with varying speed*, Acta Techn. Acad. Sci. Hungar. **91** (1980), 303–319.

[23] *The attractor of Duffing's equation under bounded perturbation*, Ann. Mat. pura applicata **128** (1980), 123–132.

[24] (TÁRSSZERZŐK: LŐKÖS Á., MILE I.) *A dynamic model of simultaneous memorization*, Acta Cient. Venezolana **32** (1981), 132–137.

[25] *Attractors of systems close to periodic ones*, Nonlin. Anal. **5** (1981), 845–851.

[26] *Attractors of systems close to autonomous ones*, Acta Sci. Math. Szeged **44** (1982), 329–334.

[27] *Mathematics and objective reality*, Acta Cient. Venezolana **33** (1982), 275-279.

[28] *Attractors of systems under bounded perturbation*, In Proc. Equadiff No. 5 (Bratislava, 1981), Teubner, Leipzig, 1982, pp. 91–94.

[29] *The attractor of perturbed van der Pol's equation*, Z. angew. Math. Mech. **63** (1983), T44–T45.

[30] *Duffing's equation under bounded perturbation*, In Proc. Int. Conf. Nonlin. Oscillations No. 9, Vol. I. (Kiev, 1981), Naukova Dumka, Kiev, 1984, pp. 371–373.

[31] *Stable oscillations in a predator prey model with time lag*, J. Math. Anal. Appl. **102** (1984), 175–188.

[32] *Stability of bifurcating orbits in a predator-prey model*, In Mathematical Modelling in Science and Technology (Zürich, 1983), Pergamon Press, Oxford, 1984, pp. 925–927.

[33] *Zip bifurcation in a competition model*, Nonlin. Anal. **8** (1984), 1295–1309.

[34] *A cusp model for the evolution of the social systems*, Science of Science **4** (1984), 285–293.

[35] *Stabilis együttélés és bifurkációk a populációdinamikában*, Alk. Mat. Lapok **10** (1984), 203–229.

[36] *A zip bifurcation arising in population dynamics*, In Proc. Int. Conf. Nonlin. Oscillations No. 10 (Varna, 1984), Bulgarian Acad. Sci., Sofia, 1985, pp. 150-155.

[37] (TÁRSSZERZŐK: FARKAS A., KAJTÁR L.) *On Hopf bifurcation in a predator-prey model*, In Differential Equations: Qualitative Theory, Vol. I. (Szeged, 1984), North Holland, Amsterdam, 1986, pp. 283–290.

[38] (TÁRSSZERZŐK: L. SPARING, SZABÓ G.) *On Hopf bifurcation of Rayleigh's equation*, Per. Polytechnica Budapest, Sect. Mech. Eng. **30** (1986), 263–271.

[39] *Competitive exclusion by zip bifurcation*, In Dynamical Systems (Sopron, 1985), Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems 287, Springer, Berlin, 1987, pp. 165–178.

[40] (TÁRSSZERZŐK: GARAY B. M., SZABÓ G., SZÉPKÚTI L., NAGY I. V.) *Modeling of depth filtration*, Ann. Univ. Sci. Budapest, Sect. Comput. **7** (1987), 67–73.

[41] (TÁRSSZERZŐK: GÁSPÁR Z., KOLLÁR L., PATKÓ G., POMÁZI L., STÉPÁN G.) *Stability investigations of mechanical systems: state of art*, Acta Techn. Acad. Sci. Hungar. **100** (1987), 67–99.

[42] (TÁRSSZERZŐ: BRÓDY A.) *A gazdaság mozgásformáiról*, Közgazd. Szemle **34** (1987), 1178–1184.

[43] (TÁRSSZERZŐK: FARKAS A., SZABÓ G.) *Bifurcation charts for predator-prey models with memory*, In Proc. Int. Conf. Nonlin. Oscillations No. 11 (Budapest, 1987), J. Bolyai Math. Soc., Budapest, 1987, pp. 808–811.

[44] (TÁRSSZERZŐ: BRÓDY A.) *Forms of economic motion*, Acta Oecon. Acad. Sci. Hungar. **38** (1987), 361–370.

[45] (TÁRSSZERZŐ: FARKAS A.) *Stable oscillations in a more realistic predator-prey model with time lag*, In Asymptotic Methods of Mathematical Physics (Kiev, 1987), Naukova Dumka, Kiev, 1988, pp. 250–256.

[46] (TÁRSSZERZŐK: FARKAS A., SZABÓ G.) *Multiparameter bifurcation diagrams in predator-prey models with time lag*, J. Math. Biol. **26** (1988), 93–103.

[47] (TÁRSSZERZŐ: H. I. FREEDMAN) *The stable coexistence of competing species on a renewable resource*, J. Math. Anal. Appl. **138** (1989), 461–472.

[48] (TÁRSSZERZŐ: H. I. FREEDMAN) *Stability conditions for two predator one prey systems*, In Evolution and Control in Biological Systems (Laxenburg, 1987), Acta Appl. Math. **14** (1989), 3–10.

[49] *On the stability of one-predator two-preys systems*, In G. J. Butler Mem. Conf. Diff. Equat. Math. Biol. (Edmonton, 1988), Rocky Mountain J. Math. **20** (1990), 909–916.

[50] *On the local stability of n predators (preys) one prey (predator) systems*, In Qualitative Theory of Diff. Equat. (Szeged, 1988), North Holland, Amsterdam, 1990, pp. 181–191.

[51] (TÁRSSZERZŐK: DANCSÓ A., FARKAS H., SZABÓ G.) *Hopf bifurcation in some chemical models*, React. Kinet. Catal. Lett. **42** (1990), 325–330.

[52] (TÁRSSZERZŐ: GYŐKÉR S.) *On robustness of stable food chains*, Acta Cient. Venezolana **42** (1991), 9–12.

[53] (TÁRSSZERZŐK: DANCSÓ A., FARKAS H., SZABÓ G.) *Investigations into a class of generalized two-dimensional Lotka–Volterra schemes*, Acta Appl. Mathematicae **23** (1991), 103–127.

[54] (TÁRSSZERZŐ: STÉPÁN G.) *On perturbations of the kernel in infinite delay systems*, Z. angew. Math. Mech. **72** (1992), 153–156.

[55] (TÁRSSZERZŐ: KOTSIS M.) *Modelling predator-prey and wage-employment dynamics*, In Dynamic Economic Models and Optimal Control (Vienna, 1991), North–Holland, Amsterdam, 1992, pp. 513–526.

[56] (TÁRSSZERZŐ: M. CAVANI) *Bifurcations in a predator-prey model with memory and diffusion*, In Proc. Int. Conf. Diff. Equat., Vol. I. (Barcelona, 1991), World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1993, pp. 379–384.

[57] (TÁRSSZERZŐ: M. CAVANI) *Bifurcations in a predator-prey model with memory and diffusion: I. Andronov-Hopf bifurcation*, Acta Math. Hungar. **63** (1994), 213–229.

[58] (TÁRSSZERZŐ: M. CAVANI) *Bifurcations in a predator-prey model with memory and diffusion: II. Turing bifurcation*, Acta Math. Hungar. **63** (1994), 375–393.

[59] *On the distribution of capital and labour in a closed economy*, In Proc. Int. Conf. Applied Analysis (Hanoi, 1993), South-East Asian Bull. Math. **19** (1995), 27–36.

[60] *Spatial inhomogenity due to Turing bifurcation in an economy*, In Dynamic Systems and Applications, Vol. II. (Atlanta, 1995), Dynamic Publishers, Atlanta, 1996, pp. 153–166.

[61] *Two ways of modelling cross-diffusion*, In Proc. 2nd World Congress Nonlin. Analysts (Athens, 1996), Nonlin. Anal. **30** (1997), 1225–1233.

[62] (TÁRSSZERZŐ: J. R. GRAEF, C. QIAN) *Asymptotic periodicity of delay differential equations*, J. Math. Anal. Appl. **226** (1998), 150–165.

[63] *Comparison of different ways of modeling cross-diffusion*, Diff. Equat. Dyn. Systems **7** (1999), 121–137.

[64] (TÁRSSZERZŐK: HORVÁTH Z., MEYER D.) *Egy kétszektorú növekedési modell háromdimenziós dinamikája*, Szigma **30** (1999), 197–207.

[65] (TÁRSSZERZŐK: P. VAN DEN DRIESSCHE, M. L. ZEEMAN) *Bounding the number of cycles of O.D.E.s in* $\mathbf{R}^n$, Proc. Amer. Math. Soc. **129** (2001), 443–449.

[66] *On time-periodic patterns*, Nonlin. Anal. **44** (2001), 669–678.

[67] *On the stability of stationary age distributions*, Appl. Math. Comp. **131** (2002), 107–123.

[68] *The result of even allocation of funds for postgraduate training*, Ann. Univ. Sci. Budapest, Sect. Math. **44** (2002), 193–197.

[69] (TÁRSSZERZŐ: BOCSÓ A.) *Political and economic rationality leads to velcro bifurcation*, Appl. Math. Comp. **140** (2003), 381–389.

[70] (TÁRSSZERZŐ: S. ALY) *Bifurcations in a predator-prey model in patchy environment with diffusion*, Nonlin. Anal. Real World Appl. **5** (2004), 519–526.

[71] (TÁRSSZERZŐ: S. ALY) *Competition in patchy environment with cross diffusion*, Nonlin. Anal. Real World Appl. **5** (2004), 589–595.

[72] (TÁRSSZERZŐ: S. ALY) *Bifurcations in a predator-prey model with cross diffusion*, Ann. Univ. Sci. Budapest, Sect. Math. **47** (2004), 35–45.

[73] (TÁRSSZERZŐ: S. ALY) *Prey-predator in patchy environment with cross difffusion*, Diff. Equat. Dyn. Systems **13** (2005), 311–321.

[74] (TÁRSSZERZŐK: J. DIAS FERREIRA, P.C.C. TABARES) *Degenerate center in a predator-prey system with memory*, Ann. Univ. Sci. Budapest, Sect. Comp. **25** (2005), 53–65.

[75] (TÁRSSZERZŐK: E. SÁEZ, SZÁNTÓ I.) *Velcro bifurcation in competition models with generalized Holling functional response*, Miskolc Math. Notes, **6** (2005), 185–195.

[76] *Természetes kiválasztás és Riemann-geometria*, Alk. Mat. Lapok **25** (2008), 131–136.

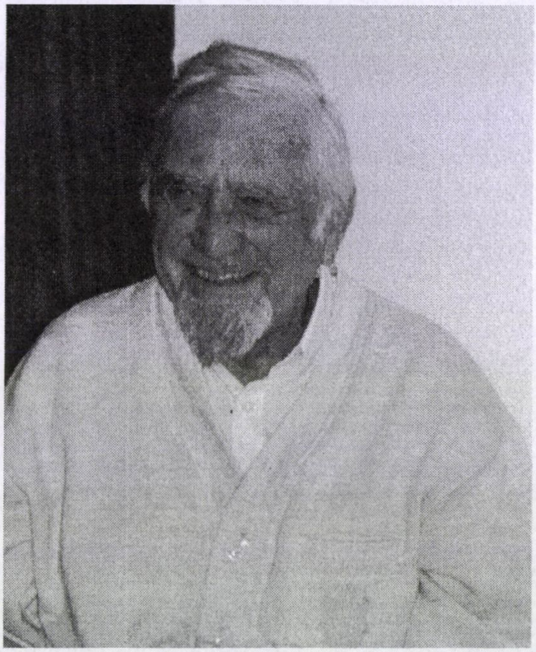
[77] (TÁRSSZERZŐK: KISS K., KOVÁCS S.) *Qualitative behaviour of a ratio-dependent predator-prey system*, Nonlin. Anal. Real World Appl. (megjelenés alatt)

[78] *Egy kis klasszikus differenciálgeometria, a Gauss-Bonnet tétel bizonyítása*, Alk. Mat. Lapok (megjelenés alatt)

Alkalmazott Matematikai Lapok **25** (2008), 163-171.

MARTOS BÉLA (1920–2007)[1] SZABÁLYOZÁSELMÉLETI MUNKÁSSÁGA[2]

SIMONOVITS ANDRÁS



1. Bevezetés

Martos Béla 1960 és 1975 között a nemlineáris programozás terén ért el világra szóló sikereket (vö. Rapcsák, 2006). Kornai János (1971) Anti-equilibriumának megjelenésével párhuzamosan Martos érdeklődése fokozatosan áttevődött a szabályozáselméletre, bár már az Andorka – Dányi – Martos (1967) kötet is ebbe az

[1] Martos Béla optimalitáselméleti munkásságának méltatása az Alkalmazott Matematikai Lapok 23(2006) kötetében található. (*A szerkesztő megjegyzése.*)

[2] Martos Béla halála alkalmával felkért az Alkalmazott Matematikai Lapok szerkesztősége, hogy írjak szabályozáselméleti munkásságáról. Hálával tartozom Vizvári Bélának a tanulmány előző változatához fűzött értékes megjegyzéseiért.

irányba mutatott. Kornai (1971) megjelenésével szinte párhuzamosan jelent meg Kornai–Martos (1971) cikk a vegetatív szabályozásról. Martos a hetvenes évek közepén kezdett el foglalkozni a szabályozások ekvivalenciájával. Kornai (1980) *A hiány*ával szinte egy időben jelent meg Kornai és Martos (1981) szerkesztésében a vegetatív szabályozás addigi modelljeinek egységesített tárgyalása. Végül a kutatás koronájaképpen készült el Martos (1990), amelyben az ekvivalencia mellett a működőképesség is teret kapott. Bár a 75. születésnap alkalmával már írtam egy hasonló visszatekintést, most célszerűnek tartottam egy újat írni, ahol a modellek leegyszerűsítése révén nemcsak tételeket, hanem bizonyításvázlatokat is adhatok. E rövid visszatekintésben e nevezett kérdésekkel a következő felosztásban foglalkozom: 2. A vegetatív szabályozás alapmodellje. 3. Ekvivalens szabályozások. 4. A szabályozások működőképessége. 5. Szubjektív megjegyzések.

2. A vegetatív szabályozás alapmodellje

Folytonos idejű statikus *szabályozási rendszer*ről beszélünk, ha az n-dimenziós $x(t)$ állapotvektor és az m-dimenziós $u(t)$ szabályozási vektor között a következő összefüggések teljesülnek:

Állapotegyenlet

$$\dot{x} = f(x, u),$$

Statikus szabályozási egyenlet

$$u = g(x),$$

ahol a jelöletlen t időváltozó a $[0, \infty)$ félegyenesen fut végig, a változó feletti pont az idő szerint deriváltat jelzi, f és g megfelelően definiált függvény, és adott az x_0 kezdeti állapot.

A neoklasszikus közgazdaságtant bírálva vezette be Kornai (1971) a *vegetatív* szabályozást, amely a piaci és a tervszabályozás alatt működik. Lényege: a termelők elsősorban saját információjukra támaszkodva döntenek: *decentralizáció.* A *készletjelzéses* szabályozás alapmodelljét a következőképpen írhatjuk le. Legyen n a gazdaság ágazatainak száma, és legyen az n-dimenziós $A = (a_{ij})$ négyzetes mátrix az ágazati kapcsolatok mátrixa (egykorú részletes elemzést lásd Bródy, 1969, 1970). Azaz a j-edik ágazat egységnyi kibocsátásához közvetlenül a_{ij} egységre van szükség az i-edik termékből. Ha az n-dimenziós $y(t) = (y_j(t))$ és a $c = (c_j)$ vektor az időben változó kibocsátás, illetve az időben változatlan végső fogyasztás vektora, és $v(t) = (v_i(t))$ az időben változó n-dimenziós készletvektor, akkor definíció szerint fennáll a következő készletváltozási egyenlet:

$$\dot{v} = y - Ay - c,$$

és a v_0 kezdeti készletvektor adott.

Feltesszük, hogy a termelést a lehető legegyszerűbben szabályozzák:

$$y = \bar{y} - \eta v,$$

ahol $\bar{y}$ az n-dimenziós kapacitásvektor és $\eta > 0$ a visszacsatolási együttható. Szóban: minél nagyobb a készlet adott időpontban, arányosan annál kevésbé használják ki a kapacitásokat.

Normál változókról beszélünk, és a v^*, y^* jelölést alkalmazzuk, ha a rendszer időben változatlan marad, azaz

$$v = v^*, \quad \text{azaz} \quad y^* - Ay^* - c = 0, \quad \text{azaz} \quad y^* = (I - A)^{-1}c.$$

A közgazdasági alkalmazásokban (de a matematikai programozásban is) fontos szerepet játszik a *működőképesség,* azaz sem a termelési-, sem a készletvektor nem lehet negatív. Ehhez a mindenkori készletvektornak, v-nek kisebbnek kell lennie, mint $\bar{v} = \bar{y}/\eta$: $0 < v < \bar{v}$. Emellett a normális kibocsátásnak kisebbnek kell lennie, mint a kapacitás: $0 < y^* < \bar{y}$.

Szokás szerint feltesszük, hogy $A \geq 0$, A irreducíbilis, és A spektrálsugara kisebb, mint 1. (Ezek a feltételek természetesek, és ha nem teljesülnének, akkor a rendszer részekre esne szét vagy felrobbanna.) Ekkor az ún. Leontief-inverz, vagy a matematikában ismert kifejezéssel élve, a rezolvens mátrix 1 helyen vett értéke (elemenként) pozitív: $(I - A)^{-1} > 0$, tehát $y^* > 0$. Mi a helyzet a stabilitással, azaz mikor tart aszimptotikusan a készlet a $v^* = (\bar{y} - y^*)/\eta$ normálkészlethez és az y kibocsátás az y^* normál kibocsátáshoz? (Közgazdaságtanban az aszimptotikus jelzőt gyakran elhagyják a stabilitás mellől.) Vezessük be a normától való eltérések vektorát:

$$\hat{v} = v - v^* \quad \text{és} \quad \hat{y} = y - y^*.$$

Ekkor az inhomogén lineáris készletváltozási és termelési egyenlet homogénná válik:

$$\dot{\hat{v}} = (I - A)\hat{y} \quad \text{és} \quad \hat{y} = -\eta\hat{v}.$$

Behelyettesítéssel

$$\dot{\hat{v}} = -\eta(I - A)\hat{v}.$$

Jól ismert, hogy e kezdetiérték-feladat megoldása

$$\hat{v}(t) = e^{-\eta(I-A)t}\hat{v}_0.$$

A korábbi feltevések szerint A minden sajátértéke a nyílt komplex egységkörbe esik, ezért a $-\eta(I - A)$ mátrix összes sajátértékének a valós része negatív, azaz a szabályozás lokálisan stabil, tehát működőképes.

Érdekes módon az úttörő Kornai – Martos cikk jóval bonyolultabb modellt vizsgált. A készleteket felosztotta output és input készletekre, és a termelés mellett megjelent a vétel is. Az A mátrix és c vektor időben tág tartományban változhatott, és a szabályozás is sokkal bonyolultabb volt. Az itt leírt szabályozás csak később, Bródy (1973)-ban, majd Martos (1990)-ben jelent meg. A megértés szempontjából azonban az itt bemutatott szabályozás is elegendő.

3. Ekvivalens szabályozások

Bródy (1973) visszatért a hagyományos ár–profit–termelés-szabályozáshoz, de az árakat a készletektől tette függővé. Legegyszerűbb változatban legyen $p(t) = (p_i(t))$ az időben változó n-dimenziós árvektor, és az időegységre jutó árváltozás legyen egyenlő a profit ellentettjével:

$$\dot{p} = -(I - A)y.$$

A kibocsátás változása pedig a profittal egyezik:

$$\dot{y} = (I - A')p,$$

ahol a $'$ a mátrixtranszponálás jele. Belátható, hogy az egyesített rendszer ciklikusan ingadozik a (p^*, y^*) normálállapot körül.

Érdemes megfigyelni, hogy míg a készletjelzés *decentralizált*, azaz az i-edik vállalat termelési döntése csak saját készletállapotától függ, addig az árszabályozás *centralizált*: az i-edik vállalatnak minden piaci árat ismernie kell, holott azok mindegyikéről más és más vállalat dönt.

A pár éve elhunyt, inkább gyakorlati gazdaságpolitikusként (sőt, később politikusként) ismert Tardos Márton vetette fel annak idején a kérdést egy Közgazdaságtudományi Intézeti vitán: mikor *ekvivalensek* egymással a készlet- és az árszabályozások? Martos Béla 1975 és 1990 között számos tanulmányban vizsgálta e kérdést. Anélkül, hogy teljes definíciót adnánk, két szabályozási rendszert akkor tekinthetünk ekvivalensnek, ha azonos bemenőjelekhez azonos kimenőjelek tartoznak.

Feladva Bródy centralizált árszabályozását, Martos decentralizált árszabályozást is modellezett. Itt csak azt mondhatjuk el, hogy a decentralizált készlet- és árszabályozás nem lehet egymással ekvivalens. Tágabb értelemben viszont hasonlók egymáshoz.

Felhívjuk a figyelmet arra, hogy az ekvivalenciavizsgálatot Martos a műszaki irányításelméletben jól ismert Laplace-transzformációra építette. Ez nemcsak magyar, de nemzetközi tekintetben is úttörő kezdeményezés volt; sajnos nem akadtak követői.

4. A szabályozások működőképessége

Eddig a szabályozás működőképességét a szabályozás lokális stabilitásából vezettük le. Martos (1990), (1998) és (2000) azonban nem elégedett meg ezzel a kerülő úttal, hiszen egyrészt ciklikus vagy akár kaotikus szabályozás is adhat működőképes pályát, másrészt a lokális stabilitás adós marad a működőképes induló állapotok meghatározásával. Ellentétben Simonovits (1996)-tal, a rövidség kedvéért ezúttal saját, diszkrét idejű, absztraktabb, de lineáris modellemet idézem (Simonovits, 1998). Legyen $t = 0, 1, 2 \ldots$, az időváltozó, x_t és u_t a t-edik időszak állapot- és szabályozási vektora, azonos n-dimenzióval. Legyen B olyan n-dimenziós négyzetes mátrix, amelyre az állapotegyenlet

$$x_{t+1} = x_t + Bu_t, \qquad x_0 \text{ adott.}$$

Skálázással elérhető, hogy B minden átlós eleme egységnyi legyen: $b_{ii} = 1$, $i = 1, \ldots, n$. Jelölje a B mátrix főátlón kívüli elemeinek, az ún. keresztthatásoknak a mátrixát $-N$, azaz $B = I - N$, és tegyük fel, hogy $N \geq 0$, N spektrálsugara kisebb, mint 1. (Ezek a feltevések teljesülnek az általunk vizsgált speciális modellekre.) Vezessük be az

$$u_t = -\langle k \rangle x_t$$

decentralizált visszacsatolást, ahol $\langle k \rangle$ egy n-dimenziós k vektorú diagonális mátrix.

Egyszerű számolással belátható, hogy az egymás utáni állapotvektorokra a következő rekurzió igaz:

$$x_{t+1} = x_t - B\langle k \rangle x_t = [I - (I - N)\langle k \rangle]x_t = [I - \langle k \rangle + N\langle k \rangle]x_t = Mx_t.$$

Ha $0 < k \leq 1$, akkor $M \geq 0$ és $k > Nk$. Bevezetve az x vektor $||x||$ oszlopösszeg-normáját és a hozzá tartozó $||M||$ mátrixnormát, adódik az $||x_{t+1}|| < ||M||\ ||x_t||$ egyenlőtlenség. Ennek az egyenlőtlenségnek a segítségével már könnyű explicit kifejezést találni a működőképes induló állapotok résztartományára.

5. Szubjektív megjegyzések

Miután felvillantottam néhány eredményt Martos Béla gazdag és jelentős szabályozáselméleti munkásságából, szeretnék néhány szubjektív megjegyzést tenni.

A Kornai Jánossal közösen írt úttörő cikke hamarosan a matematikai közgazdaságtan vezető lapjában, az Econometricában jelent meg (Kornai – Martos, 1973). A gazdasági mechanizmusok összehasonlításáról szóló Martos (1979) cikk is neves szerkesztők által jegyzett kötetben jelent meg. A Kornai – Martos (1981a, b) szerkesztette kötetet a magyar kiadással egy időben angolul is kiadták. Martos (1990) monográfiája is egy rangos nemzetközi kiadónál jelent meg. Dinamikus modellekről szóló saját tankönyvemben (Simonovits, 1998) is bőségesen hivatkoztam a vegetatív szabályozásra, és azon belül is Martos munkáira. Azonban az igazságnak tartozunk azzal, hogy a szabályozáselméleti siker elmaradt a nemlineáris programozásétól. De ez nem Bélán, hanem a világon múlott.

A Szigma szerkesztőjeként és hazai, valamint külföldi konferenciák állandó vendégeként sokan hallhatták mindig jól felépített és érdekfeszítő előadásait, szellemes kommentárjait. Mindenki becsülte eredményeit, és szerette közvetlen modorát. Kár, hogy csak külföldön taníthatott!

Nem szerencsés, ha másokról írva az ember saját magáról kezd el írni. De e megemlékezés végére érve nem hallgathatom el, hogy Béla munkáit nemcsak, sőt nem elsősorban kinyomtatott cikkeiből és könyveiből, hanem kéziratból (gépiratból) ismertem meg. Bélával személyesen 1969-ben találkoztam először, és haláláig tartott a kezdetben szakmai, később barátivá bővülő kapcsolat. Amíg bejárt az MTA Közgazdaságtudományi Intézetébe, addig rendszeresen megbeszéltük közös dolgainkat: először a szabályozáselmélet, majd a nyugdíjrendszer kérdéseit. Születésük folyamatában láttam eredményeit, gyakran mint baráti vagy felkért lektor.

Emléked megőrizzük.

Hivatkozások

[1] ANDORKA, R. – D+NYI, D – MARTOS, B. (1967): *Dinamikus népgazdasági modellek,* Budapet, KJK.

[2] BRÓDY, A. (1969): *Érték és újratermelés*, Budapest, KJK.

[3] BRÓDY, A. (1970): *Planning, Proportions and Prices*, Amsterdam, North Holland.

[4] BRÓDY, A. (1973): *„Szabályozási modellekről"*, Szigma **6**, 93–103.

[5] KORNAI, J. (1971A): *Anti-Equilibrium*, Budapest, Akadémiai Kiadó.

[6] KORNAI, J. (1971B): *Anti-Equilibrium*, Amsterdam, North-Holland.

[7] KORNAI, J. (1980A): *A hiány*, Budapest, KJK.

[8] KORNAI, J. (1980B): *The Economics of Shortage*, Amsterdam, North-Holland.

[9] KORNAI, J. – MARTOS, B. (1971): *„Gazdasági rendszerek vegetatív működése"* Szigma **4**, 34–50.

[10] KORNAI, J. – MARTOS, B. (1981A) SZERK: *Szabályozás árjelzések nélkül*, Budapest, Akadémia.

[11] KORNAI, J. AND MARTOS, B., EDS. (1981B): *Non-Price Control*, Amsterdam, North-Holland.

[12] KORNAI, J. AND MARTOS, B. (1973): *„Autonomous Functioning of the Economic System"* Econometrica **41**, 509–28.

[13] MARTOS, B. (1976): *„Öt mechanizmus"* Szigma **9**, 213–226.

[14] MARTOS, B. (1979): *„Comparison of economic mechanisms"* JANSSEN, J. M. – PAU, L. F. – SZTRASZAK, A. (1979): *Models and Decision Making in National Economies*, Amszterdam, North-Holland, 193–200.

[15] MARTOS, B. (1984): *„Nem walrasi szabályozási mechanizmusok"* Szigma **17**, 123–145.

[16] MARTOS, B. (1990): *Economic Control Structures*, Amsterdam, North Holland.

[17] MARTOS, B. (1998): *„Működőképes irányítások tartományai"* GÁCS, J. – KÖLLŐ, J. (1998) SZERK: *A túlzott központosítástól az átmenet stratégiájáig*, 27–36.

[18] MARTOS, B. (2000): *„Viable domains in the control space"* MASKIN, E. – SIMONOVITS, A. (2000) EDS. *Planning, Shortage and Transformation: Essays in honor of János Kornai*, Cambridge MA, MIT Press, 47–56.

[19] RAPCSÁK, A. (2006): *Martos Béla optimalitáselméleti munkásságának méltatása az Egerváry-emlékplakett alkalmából*, Alkalmazott Matematikai Lapok **23**, 1–4.

[20] SIMONOVITS, A. (1996): *„Martos Béla szabályozáselméleti munkássága"* Szigma **27**, 11–17.

[21] SIMONOVITS, A. (1998): *Matematikai módszerek a dinamikus közgazdaságtanban*, Budapest, KJK.

SIMONOVITS ANDRÁS

MTA KTI, BME Matematikai Intézet, CEU, Department of Economics

Martos Béla publikációinak jegyzéke

MARTOS B.: *Hyperbolic programming.* (Hungarian. English, Russian summaries), Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci., Ser. B **5**, (1960), 383-406.

MARTOS B. – VARGA D. – BALLA J.: *Az operációkutatás szakkifejezései öt nyelven.* Budapest, MTA KTI, (MTA KTI Tájékoztatós Közleményei; 5.), (1963), 80 p.

MARTOS B.: *Hyperbolic programming.* (English) Nav. Res. Logist. Q. **11**, (1964), 135–155.

MARTOS B.: *Optimierungsprobleme mit Betragssummen linearer Formen.* (German), Colloq. Appl. Math. Econom., Budapest, (1965), 279–284.

MARTOS B.: *The direct power of adjacent vertex programming methods.* (English), Manage. Sci., Ser. A **12**, (1965), 241-252.

MARTOS B.: *Nem-lineáris programozási módszerek hatóköre.* Budapest, MTA KTI, (MTA KTI Közlemények, 20.), (1966), 104 p.

MARTOS B.: *Quasi-convexity and quasi-monotonicity in nonlinear programming.* (English), Stud. Sci. Math. Hung. **2**, (1967), 265–273.

ANDORKA R. – DÁNYI D. – MARTOS B.: *Dinamikus népgazdasági modellek.* Budapest, KJK, (1967), 410 p.

MARTOS B.: *Subdefinite matrices and quadratic forms.* (English), SIAM J. Appl. Math. **17**, (1969), 1215–1223.

MARTOS B.: *Tegnapi és mai ideák a matematikai programozásban. Gazdasági fejlődés és tervezés.* Budapest, KJK, (1969), 90-107.

MARTOS B.: *Quadratic programming with quasiconvex objective function.* (Hungarian), Szigma **2**, (1969), 199–212.

MARTOS B.: *Quadratic programming with a quasiconvex objective function.* (English), Oper. Res. **19**, (1971), 87–97.

KORNAI J. – MARTOS B.: *Gazdasági rendszerek vegetatív működése*, Szigma **4**, (1971), 34–50.

KORNAI J. – MARTOS B.: *Autonomous control of the economic system.* (English), Econometrica **41**, (1973), 509–528.

MARTOS B.: *Nonlinear programming. Theory and methods.* (English) Amsterdam – Oxford: North-Holland Publishing Company; New York: American Elsevier Publishing Co., (1975), Inc. 279 p.

MARTOS B.: *Öt mechanizmus*, Szigma **9**, (1976), 213–225.

MARTOS B.: *Gazdasági szabályozási rendszerek összehasonlítása.* Budapest, MTA KTI, (1976), 100 p. (Melléklet: Opponensi vélemény: Tardos Márton 12 p.) MARTOS B.: *Comparison of economic mechanisms*, JANSSEN, J. M. – PAU, L. F. – SZTRASZAK A.: *Models and Decision Making in National Economies*, Amsterdam, North-Holland, (1979), 193–200.

MARTOS B.: *Szabályozás árjelzések nélkül.* Szerk.:Kornai J. – Martos B., Budapest, Akadémiai Kiadó, (MTA KTI), (1981), 302 p.

KORNAI J. – MARTOS B.: *Non-price control.* (Contributions to Economic Analysis; Vol.**133**.) Amsterdam, North-Holland, (1981), 334 p.

MARTOS B.: *Nonlinear programming. Theory and methods.* (Programowanie nieliniowe. Teoria i metody). (Polish). Transl. from the English by Józef Wdowiak. (English) Warszawa: Panstwowe Wydawnictwo Naukowe. (1983), 252 p.

MARTOS B.: *Nem walrasi szabályozási mechanizmusok*, Szigma **17**, (1984), 123–145.

MARTOS B.: *Economic control structures: A non-Walrasian approach.* Amsterdam, North-Holland, (Contributions to Economic Analysis; Vol.**188**), (1990), 250 p.

MARTOS B.: *Viable control trajectories in linear system.* (English) Probl. Control Inf. Theory **20**, (1991), 267–280.

MARTOS B.: *A nyugdíjak egyenlőtlensége és dekompozíciója: Résztanulmány.* Budapest, MTA KTI, (MT–DP **16**.), (1993), 47 p.

MARTOS B.: *A nyugdíjak egyenlőtlensége és dekompozíciója.* Közgazdasági Szemle **41**, (1994), 26–48.

AUGUSZTINOVITS M. – MARTOS B.: *Számítások és következtetések nyugdíjreformra.* Közgazdasági Szemle **42**, (1995), 993–1023.

MARTOS, B.: *Point system of individual pension: Setup and operation. Human resources and social stability during transition in Hungary.* San Franciso, ICEG, (1995).

MARTOS B.: *Az egyéni nyugdíjak pontrendszere: indulás és működés. Nyugdíjrendszer és nyugdíj-reform.* Budapest, MTA Világgazdasági Kutató Intézet, (1995), 96–112.

MARTOS B.: *Nyugdíjformulák öt európai országban.* Közgazdasági Szemle **44**, (1997), 521–530.

AUGUSZTINOVITS M. – MARTOS B.: *Calculations and conclusions.* Acta Oeconomica **48**, (1997).

MARTOS B.: *Működésképes irányítások tartományai. A „túlzott központosítástól" az „átmenet stratégiájáig": Tanulmányok Kornai Jánosnak.* Budapest, KJK, (1998), 27–36.

MARTOS B.: *Viable dominans in the control space. Planning, Shortage, and Transformation: Essays in honor of János Kornai*, London, MIT Press, (2000), 47–56.

BÉLA MARTOS – CONTRIBUTION TO CONTROL THEORY

András Simonovits

Between 1960 and 1975 Béla Martos obtained results on nonlinear programming which made him worldwide-known (cf. Rapcsák, 2006). In parallel with János Kornai's Anti-equilibrium (1971), Martos's interest step-by-step shifted to control theory, although the Volume by Andorka–Dányi–Martos (1967) already overshadowed this change. Kornai–Martos (1971) on the autonomous functioning of economic systems was published at the same time as Kornai (1971). Martos started to study the equivalence between different control mechanisms around 1975. Another parallelism: In 1981 Kornai and Martos edited a volume on the autonomous functioning simultaneously with Kornai's The Economics of Shortage (1980). Finally, Martos synthesized his control-theoretic works in Martos (1990), in which he studied both equivalence and viability. The present article surveys this path-breaking contribution.

Alkalmazott Matematikai Lapok **25** (2008), 173-174.

KÖNYVISMERTETÉS

Járai Antal:
Modern alkalmazott analízis, Elméleti matematika
Typotex, Budapest, 2007

SZÉKELYHIDI LÁSZLÓ

A könyv szerzője az ELTE Komputer Algebra Tanszékének tanszékvezető egyetemi tanára, valamint egyetemi tanár a BME Analízis Tanszékén. Könyvében azokat az ismereteket foglalta össze, amelyekre fizikusoknak, programtervező matematikusoknak, elméleti matematikusoknak, illetve villamosmérnököknek a kalkuluson túl szükségük lehet tanulmányaik vagy mindennapi munkájuk során.

A könyv nyolc fejezetből áll, s strukturált felépítésű, amennyiben a szerző az elméleti ismereteket törzsanyagra és kiegészítő anyagra osztotta, ugyanakkor a gyakorló feladatok mellett szerepelnek olyan haladottabb problémák is, melyek megértése és megoldása nélkül nem lehet továbblépni.

A könyv fejezeteinek rövid tartalmát a következőkben ismertetem.

A „Bevezetés"-t követő első fejezet címe: „Mérték és integrál". Ebben a fejezetben a szerző ismerteti a Lebesgue-féle mérték- és integrálelméletnek a külső mérték fogalmán alapuló felépítését. Különös hangsúlyt kap a tárgyalás során annak bemutatása, hogy a Lebesgue-féle integrálfogalom a Riemann-félénél sokkal jobb választ ad a differenciálás és az integrálás közti kapcsolat kérdésére.

A második fejezet a „Funkcionálanalízis" címet viseli, s a funkcionálanalízis alapvető struktúráit és fogalmait (metrikus terek, normált terek, lineáris operátorok, Hilbert terek, kompakt operátorok, differenciálszámítás normált terekben), valamint legfontosabb tételeit (Uriszon-lemma, Tietze kiterjesztési tétele, Tyihonov tétele, Baire-tétel, Banach-féle fixponttétel, Riemann átrendezési tétele, Mertens tétele, Abel tételei, Euler összegezési formulája, Stirling-formula, Bolzano–Weierstrass-tétel, Riesz-lemma, Arzèla–Ascoli-tétel, a Riesz–Fischer-tétel, Bochman–Korovkin-tétel, Weierstras approximációs tételei, Stone-tétel, Hahn–Banach-tétel, Bohnenblust–Sobczik-tétel, Szegő tétele, Harsiladze–Lozinszkij-tétel, Lebesgue-tétel lineáris projekciókról, zárt gráf tétel, Kolmogorov–Rademacher-tétel, Mensov-lemma, Tandori-tétele, Hellinger–Toeplitz-tétel, spektráltétel, kompakt operátorok Riesz-elmélete, Hilbert–Schmidt-tétel, implicit függvény tétel, inverz függvény tétel, Kantorovics tétele) és módszereit (Aitken-módszer, legjobb approximáció Hilbert térben, Fourier-sorok, Gram–Schmidt-féle ortogonalizálás, ortogonális polinomok, spektrálintegrál, lineáris iteráció, Fredholm-alternatíva, sajátértékek módszere, Jordan-normálalak, Taylor-formula, lokális szélsőértékszámítás, Newton-módszer, iránymenti csökkentés módszere, algebrai egyenletek megoldása) mutatja be.

A következő fejezet címe: „Vektoranalízis". Ebben a fejezetben a szerző ismerteti a differenciálgeometria alapjait, a Stieltjes-integrál és a görbementi integrál fogalmát és alkalmazásait, valamint a differenciálformák integrálását, az ezzel kapcsolatos legfontosabb tételeket (divergenciatétel, Green-tétel, Stokes-tétel, Poincaré–Stokes-tétel), illetve ezek felhasználási területeit a geometriában, fizikában.

A negyedik fejezet „Komplex függvénytan" címmel az analitikus, a holomorf és a meromorf függvények elméletével kapcsolatos legfontosabb ismereteket tartalmazza. Helyet kapnak ebben a fejezetben többek között a Cauchy–Riemann-egyenletek, a Cauchy–Hadamard-tétel, a Taylor-tétel, az analitikus folytatásról szóló tétel, a nyílt leképezések tétele, a Cauchy-féle integráltétel és integrálformulák, Liouville tétele, Morera tétele, Laurent-sorok, a reziduumtétel, a parciális törtekre bontás módszere, az argumentum-elv, valamint eliptikus integrálokkal kapcsolatos tudnivalók.

A következő fejezetet a Fourier-soroknak, illetve Fourier-integráloknak szentelte a szerző, címe: „Fourier-elmélet". Itt a klasszikus Fourier-sorok mellet az ortogonális polinomokkal, valamint a Fourier-transzformációval kapcsolatos legfontosabb alapismeretek tárgyalását találja az olvasó. Ugyancsak számos példa és feladat szerepel a gyakorlati alkalmazásokra a differenciálegyenletek és az interpolációelmélet területéről.

A hatodik fejezet címe: „Variációszámítás", melyben a fő hangsúly természetesen az Euler–Lagrange-egyenletek különböző alkalmazásaira helyeződik.

Végül az utolsó két fejezetben közönséges, illetve parciális differenciálegyenletekkel foglalkozik a szerző. A „Közönséges differenciálegyenletek" című fejezetben az alapvető fogalmak értelmezése után elemi megoldási módszerekkel ismerkedhet meg az olvasó, majd az egzisztencia- és unicitástételek tárgyalását a lineáris egyenletekre vonatkozó legfontosabb eredmények és módszerek bemutatása követi. A fejezet a stabilitás fogalmának ismertetésével és a kapcsolatos főbb eredményekkel foglalkozik. A „Parciális differenciálegyenletek" című záró fejezetben általános megoldási módszereket ismertet a szerző, majd bepillantást nyerünk a disztribúciók elméletébe. A fejezetet Cauchy-feladatokkal, peremérték problémákkal és vegyes feladatokkal kapcsolatos eredmények és megoldási módszerek ismertetése zárja.

A könyv rendkívül igényes, magas színvonalú munka. A fenti rövid ismertetésből is kitűnhet, hogy milyen hatalmas anyagot ölel fel, ám olvasását mégis élvezetessé teszi a számos idézet, történeti utalás, amelyeket a szerző a fejezetek, illetve szakaszok elején helyezett el. Bár a könyv mérete első látásra rémületet ébreszthet a potenciális olvasóban, aki esetleg az alkalmazot tudományok területéről érkezett, ám rövid tanulmányozás után rájöhetünk, hogy a látszat csal: a szerző nagy rutinnal és pedagógiai érzékkel vegyíti az „olvasnivalót" a mélyebb tartalommal, így munkája tankönyvként és kézikönyvként egyaránt rendkívül hasznos lehet mindazoknak, akik a modern analízis eredményeit és módszereit meg akarják ismerni, illetve saját szakterületükön, az alkalmazott matematikában, a fizikában, a kémiában vagy a mérnöki tudományok legkülönbözőbb szféráiban kívánják felhasználni.

Az Alkalmazott Matematikai Lapok megjelenését támogatja
a Magyar Tudományos Akadémia Könyv- és Folyóiratkiadó Bizottsága.

A kiadásért felelős a BJMT főtitkára
Szedte és tördelte Éliás Mariann

Nyomta a Nagy és Társa Kft., Budapest
Felelős vezető: Fódi Gábor

Budapest, 2008
Megjelent 18 (A/5) ív terjedelemben
250 példányban
HU ISSN 0133-3399

ÚTMUTATÁS A SZERZŐKNEK

Az Alkalmazott Matematikai Lapok csak magyar nyelvű dolgozatokat közöl. A közlésre szánt dolgozatokat e-mailen az `aml@math.elte.hu` címre kérjük elküldeni az ábrákat tartalmazó fájlokkal együtt. Előnyben részesülnek a LaTeX-ben elkészített dolgozatok.

A kéziratok szerkezeti felépítésének a következő követelményeket kell kielégíteni. A fejlécnek tartalmaznia kell a dolgozat címét és a szerző teljes nevét. A fejléc után egy, képletet nem tartalmazó, legfeljebb 200 szóból álló kivonatot kell minden esetben megadni. A dolgozatot címmel ellátott szakaszokra kell bontani, és az egyes szakaszokat arab sorszámozással kell ellátni. Az esetleges bevezetésnek mindig az első szakaszt kell alkotnia. Az irodalomjegyzék után, a kézirat befejezéseképpen fel kell tüntetni a szerző teljes nevét és a munkahelye (illetve lakása) pontos címét. A dolgozatban előforduló képleteket szakaszonként újrakezdődően, a képlet előtt két zárójel közé írt kettős számozással kell azonosítani. Természetesen nem szükséges minden képletet számozással ellátni. Az esetleges definíciókat és tételeket (segédtételeket és lemmákat) ugyancsak szakaszonként újrakezdődő, kettős számozással kell ellátni. Kérjük a szerzőket, hogy ezeket, valamint a tételek bizonyítását a szövegben kellő módon emeljék ki. Minden dolgozathoz csatolni kell egy angol, német francia vagy orosz nyelvű, külön oldalra gépelt összefoglalót.

Mind az ábrákat, mind a lábjegyzeteket a dolgozat szakaszokra bontásától független, folytatólagos arab sorszámozással kel ellátni. Az ábrák elhelyezését a dolgozat megfelelő helyén, széljegyzetként feltüntetett, ábraazonosító sorszámokkal kell megadni. A lábjegyzetekre a dolgozaton belül az azonosító sorszám felső indexkénti használatával lehet hivatkozni.

Az irodalmi hivatkozások formája a következő. Minden hivatkozást fel kell sorolni a dolgozat végén található irodalomjegyzékben, a szerzők, illetve a társszerzők esetén az első szerző neve szerint alfabetikus sorrendben úgy, hogy a cirill betűs szerzők nevét a Mathematical Reviews átírási szabályai szerint latin betűsre kell átírni. A folyóiratban megjelent cikkekre [1], a könyvekre [5], a kötetben megjelent dolgozatokra [4], a disszertációkra [3] és a gépi program leírásokra [2] a következő minta szerint kell hivatkozni:

[1] FARKAS, J.: *Über die Theorie der einfachen Ungleichungen.* Journal für die reine und angewandte Mathematik **124**, (1902) 1–27.

[2] KÉRI, G.: „DUALSIMP", rutin a CDC 3300-ás gépekre (Magyar Tudományos Akadémia Számítástechnikai és Automatizálási Kutató Intézete, CDC 3300 felhasználói ismertetők 2. 1973. május) 19–20.

[3] PRÉKOPA, A.: *„Sztochasztikus rendszerek optimalizálási problémáiról"*, doktori értekezés. Magyar Tudományos Akadémia, Budapest, 1970.

[4] PRABHU, N. U.: *„Recent research on the ruin problem of collective risk theory"*, in: Inventory Control and Water Storage. Ed. A. Prékopa (János Bolyai Mathematical Society and North-Holland Publishing Company, Amsterdam–London, (1973) 221–228.

[5] ZOUTENDIJK, G.: *Methods of Feasible Directions* (Elsevier Publishing Company, Amsterdam and New York, 1960).

A dolgozatok szövegében az irodalmi hivatkozás számait szögletes zárójelben kell megadni, mint például [5] vagy [4, 76–78]. A szerzők a dolgozatukról 50 darab ingyenes különlenyomatot kapnak. A dolgozatok után szerzői díjat az Alkalmazott Matematikai Lapok nem fizet.

TARTALOMJEGYZÉK

INDEX

Alkalmazott matematikai lapok

2008/2

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI TUDOMÁNYOK
OSZTÁLYÁNAK KÖZLEMÉNYEI

25.
KÖTET

ALKALMAZOTT MATEMATIKAI LAPOK

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MATEMATIKAI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK KÖZLEMÉNYEI

26. kötet
Szerkesztőség és kiadóhivatal: 1027 Budapest, Fő u. 68.

Az Alkalmazott Matematikai Lapok változó terjedelmű füzetekben jelenik meg, és olyan eredeti tudományos cikkeket publikál, amelyek a gyakorlatban, vagy más tudományokban közvetlenül felhasználható új matematikai eredményt tartalmaznak, illetve már ismert, de színvonalas matematikai apparátus újszerű és jelentős alkalmazását mutatják be. A folyóirat közöl cikk formájában megírt, új tudományos eredménynek számító programokat, és olyan, külföldi folyóiratban már publikált dolgozatokat, amelyek magyar nyelven történő megjelentetése elősegítheti az elért eredmények minél előbbi, széles körű hazai felhasználását. A szerkesztőbizottság bizonyos időnként lehetővé kívánja tenni, hogy a legjobb cikkek nemzetközi folyóiratok különszámaként angol nyelven is megjelenhessenek.

A folyóirat feladata a Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai) Osztályának munkájára vonatkozó közlemények, könyvismertetések stb. publikálása is.

A kéziratok a főszerkesztőhöz, vagy a szerkesztőbizottság bármely tagjához beküldhetők. A főszerkesztő címe:

Páles Zsolt, főszerkesztő
1027 Budapest, Fő u. 68.
A folyóirat e-mail címe: aml@math.elte.hu

Közlésre el nem fogadott kéziratokat a szerkesztőség lehetőleg visszajuttat a szerzőhöz, de a beküldött kéziratok megőrzéséért vagy továbbításáért felelősséget nem vállal.

Az Alkalmazott Matematikai Lapok előfizetési ára évfolyamonként 1200 forint. Megrendelések a szerkesztőség címén lehetségesek.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai) Osztálya a következő idegen nyelvű folyóiratokat adja ki:

1. Acta Mathematica Hungarica,
2. Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica.

Alkalmazott Matematikai Lapok **26** (2009), 1-7.

MODELLVEZÉRELT SZOFTVEREK KÉSZÍTÉSE I.

KILIÁN IMRE*

A „modellvezérelt szoftverkészítés" (Model Driven Architecture, MDA) kifejezést az OMG használta a hasonló című projektjében [3]. A szóban forgó projekt nevében azonban a modellvezéreltség, mint jelző inkább a „szoftverkészítésre" vonatkozik. Az OMG elképzelésének kiindulási pontja szerint ugyanis a szoftvert a gépi és egyéb környezeti viszonyoktól teljesen elvonatkoztatva, független módon tervezzük meg, és a különböző szoftver és hardver környezeteket leíró metamodellek és átalakítási szabályok segítségével környezetfüggő modellé alakítjuk.

A jelen írás egy másik, de az előzőtől nem független és nem is idegen megközelítést alkalmaz. A modellvezérelt jelző nem a szoftverkészítésre vonatkozik, hanem az elkészített szoftverre magára. A futó szoftver az, amely magát a vizsgált célterület modelljét is tartalmazza és kezeli, és a tárolt modell alapján bizonyos egyöntetűen megvalósítható műveleteket végez.

1. Kétszintű szoftverek

A „modellvezéreltség" mellett alkalmazható másik jelző a „kétszintűség", ami szintén jól magyarázza a megoldást. Hagyományosan készített szoftverek ugyanis „egyszintűek". A szoftver maga testesíti meg a modellt, hiszen annak átalakított, „kódgenerált" változata, amihez a fejlesztő még hozzákapcsolja az egyedi részeket, felhasználó felületet, egyes algoritmusok egyedileg megírt részeit és másokat. A szoftver maga az általa által kezelt, átalakított és a számítógép tárában futásidőben létrejövő adatok metaszintjének tekinthető.

A „meta-" előtag görög eredetű, jelentése valami felett álló, valamin túl fekvő (pl. metagalaxis, metafizika). Modellezési értelemben a „meta-" valamilyen adattömeg leírását, kezelését, ill. a felette értelmezett műveletek szintjét jelenti, ezért egy szoftver mindig az általa kezelt adatok metaszintje. Az egyszintű szoftverek bonyolultsága részben a szoftver modelljébe van betervezve, másrészt viszont a bonyolultság az osztályfüggvények megvalósításába van bekódolva, amit a szoftver terv már nem tartalmaz.

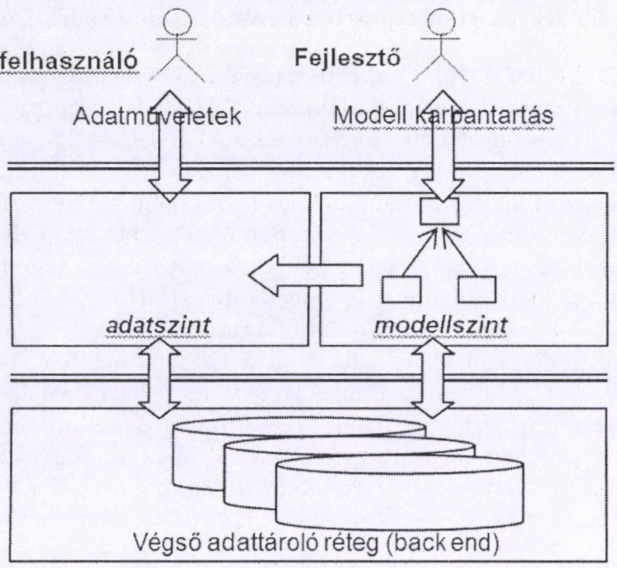
A hagyományosan készített egyszintű szoftverek olyan korlátokat állítanak a saját fejlődésük elé, melyek kétszintű felépítménnyel feloldhatók:

1. Nehéz változtathatóság: a modellszint rögzített, a legkisebb újabb bővítési elképzelés esetén is modellbővítés, a megvalósítás nyelvén újabb programcsomagok megírása, lefordítása és szerkesztése szükséges.

2. A modellek programnyelvekbe történő leképezésének használatos megoldásai esetenként túlságosan nehézsúlyúak, de esetenként korlátokat is állítanak (pl. objektum orientált nyelvek esetében a többszörös öröklődés tiltásával). Ennek következményeképpen már a tervezés folyamán ügyelni kell egyes megvalósítási részletekre is, pl. ha a tervből a programkódba átvivő gépi leképezés nem szolgáltat elegendően „pihesúlyú" programobjektumokat, akkor már a modellben sem építhető fel a probléma igényeinek megfelelően aprólékos osztályszerkezet. Vagyis már a tervezés során is figyelembe kell vennünk egyes, a feladat belső lényegén és összefüggésein túlmutató szempontokat.
3. Egyedileg meg kell valósítani minden olyan eljárást, amelyek az egyes egymással is összefüggő modellosztályok elemeire vonatkozóan adatokat gyűjtenek össze, ill. alakítanak át, noha ezek egyöntetű, magasszintű adatelérő, ill. -átalakító nyelven történő megfogalmazása kézenfekvőbb és egyszerűbb lehetne.
4. Ha mégis a modellszint tárolásához hasonló adatszerkezetek ábrázolása szükséges a szoftverben, akkor az is egyedi megoldással történik, ami egy egységes megoldáshoz képest lényegesen megnövelheti a fejlesztés befektetésigényét, és növeli a hibakockázatot.

A kétszintű vagy modellvezérelt szoftverek (1. ábra) mindezen hátrányok kiküszöbölésére törekszenek. Ezekben a program természetesen ugyanannyira kötött, mint más szoftverekben. A szoftver által kezelt adatok azonban két részre különíthetők el. Az egyik a modellszint vagy metaszint, a másik pedig a tényleges adatok szintje. Ezekre a következők a jellemzők:

- A modellszinten tároljuk a világ vizsgált részének modelljét, és ez vezérli az adatszintet. Ehhez a modellhez tartozhatnak egyedileg beprogramozott függvények (a modellek osztályfüggvényei vagy módszerei) is, amelyek az adatszintről önműködően hívódnak meg, de erre a képességre nincs mindig szükség.
- Az adatszinten vagy példányszinten folynak azok az üzleti modellnek megfelelő adat-átalakítások, amelyek a háttértár rétegét a megjelenítés rétegével összekapcsolják. Ezek a műveletek nincsenek közvetlenül beprogramozva, hanem csak néhány tipikus és általános művelet van megvalósítva. Az adatszint nyitott annyiban, hogy a modellszintről vezérelve objektumpéldányokat hozhatunk létre, és ugyanígy végrehajthatjuk a rajtuk definiált műveleteket, ill. a modellszinten beprogramozott függvényeket (dinamikus típuslekötés és hívhatóság).
- Kétszintű programfelépítmény létrehozása során technikai jellegű dolog ugyan, de igen fontos említést tenni a programfutást túlélő (perzisztens) objektumok tárolását megvalósító végső adattároló (back end) rétegről is. Itt tároljuk az adatszint objektumait, de a modell-leíró elemeket is.



1. ábra. Kétszintű szoftverfelépítmény

A rendszerhez a végfelhasználó az adatszinten keresztül kapcsolódik. Itt modellvezérelt általános célú eszközök állnak rendelkezésre, amelyek megjelenítő felületen keresztül működtethetők.

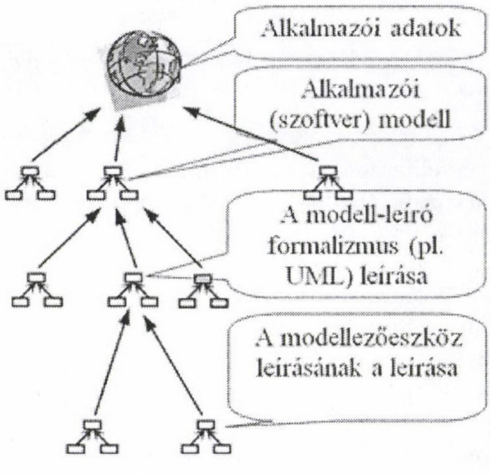
A modellszinten a modellező/fejlesztő elsődlegesen egy modellépítő és -karbantartó eszközön keresztül kapcsolódik a rendszerhez. Ez az eszköz lehet grafikus jellegű, de mindenképpen lehetővé kell tennie a modellek betöltését, mentését, és osztályfüggvények (módszerek) létrehozását. Vagyis egy olyan integrált fejlesztői környezetre van szükség, amelyik programkód szerkesztésére, majd dinamikus fordításra-betöltésre is alkalmas.

Az adat és a modellszint ilyen kettéválasztásának a legfőbb haszna, hogy az alkalmazás létrehozása során elsődlegesen a célalkalmazás logikai/formális modelljére összpontosíthatunk, a programozási részletkérdésekkel nem kell törődnünk. Az adatszint maga is adhat eszközöket egyéb alkalmazás- és környezetfüggő dolgok (pl. felhasználói felület) automatikus vagy félautomatikus elkészítésére, de mindez a modellszinttel semmilyen módon nem keverhető össze.

Modellvezérelt rendszerek esetében tehát a célszoftverek adatai, vagy azok egy része nem rendelkeznek kötött modell-leírással, hanem a modell maga is a program adatainak része, amely a többi adat szerkezetét írja le. A lehetséges modellek leírására alkalmas a metamodelljük, amely immár lehet kötött is, és amely igen erősen meghatározhatja a ténylegesen felismert és értelmezett modellek, valamint az azok alapján feldolgozható adatok és adatműveletek körét.

2. Az OMG négyrétegű metamodell szerkezete

Az Object Management Group egy objektum orientált technológiai szabványokat kidolgozó nyereségmentes alapítvány, amelynek munkatársai többek között az UML tervezőnyelvet is létrehozták. Tevékenységük legvégső modelljeként a négyrétegű metamodell szerkezetet állítják (2. ábra). Ez az „alkalmazói adatok/alkalmazói modell/ metamodell/meta-metamodell négyes", amit az ábrán látható fával jellemezhetünk. A fa csomópontjai között a „példánya" viszony áll fenn, vagyis az alkalmazói adattömeg példánya az alkalmazói modellnek, ez utóbbi modell viszont példánya a metamodellnek, ill. a metamodell példánya a meta-metamodellnek. Általánosságban a faszerkezet n-edik szintjén levő modellek példányai az $n+1$-edik szintről feléjük mutató modelleknek. A faszerkezet is jelzi, hogy a modellalkotási folyamattól függően egy adott példány-adatkészlethez többféle modell is létrehozható. A fa magassága elvben nem korlátos, vagyis a modellalkotás folyamatát elvben bármilyen sokszor ismételhetjük, a gyakorlatban azonban a meta-meta szintnél távolabbi elvonatkoztatásnak nincs jelentősége. Tekintsük ennek a fának a szintjeit:



2. ábra. Az UML négyrétegű metamodell szerkezete

- Az alkalmazói adatok szintjén a szoftver által kezelt konkrét adatokat, személyeket, számlákat stb. értjük.
- Az alkalmazói adatok példányai az alkalmazói szoftver modellben leírt osztályoknak. Ezt a szoftver tervezője hozza létre, ebből generáljuk ki a futó szoftver programkódját is. A konkrét adatok részben a számítógép tárában, részben háttértáron jönnek létre. A programkód maga a modell egy másik megjelenési formája, ami tartalmazza a később példányfüggően

létrejövő adatelemeket, valamint a példányfüggetlen eljárások kódját.

- Az OMG elképzelés harmadik szintjén az alkalmazott tervezési nyelv, esetünkben az UML metamodellje áll. Ez a nyelv által biztosított modellelemeket és azok összefüggéseit írja le, (esetünkben az osztály, tulajdonság, kapcsolat stb. fogalmakat). Ha a kétszintű rendszerünkben a modellszinten rögzített metamodellt kívánunk használni, akkor a legcélszerűbb a metamodellt kiegészíteni, esetleg abból levezetni a saját modellelemeinket, majd azt megvalósítani.
- A legmagasabb elvonatkoztatási szinten a meta-metamodell áll. Ezt akkor használatos, ha valamilyen modellvezérelt szoftverben még a metamodell sem rögzített. Vagyis olyan esetben, ha a szoftvert „háromszintűként" használva, különböző metamodellű rendszerekre kívánjuk használni, ill. esetleg, ha az egyetlen metamodell az idők során változna, fejlődne.

3. A modellszint műveletei

Modellvezérelt szoftverek kritikus pontja a modellszint megvalósítása. Ezen a szinten ugyanis a modellkarbantartó műveleteket kell megvalósítani, amelyeket csak a fejlesztést végző szakemberek működtethetnek.

A modellkarbantartás tipikus műveletei:

- Modell mentés-betöltés, amelynek során valamiféle szöveges jellegű modellleíró nyelv és a modelltárház közötti adatcsere történik. Ez az adatcsere maga is lehet modellvezérelt abban az esetben, ha a modelltárház maga is modellvezérelt. Ilyenkor a harmadik szoftver szinten található metamodell a szöveges modell-leíró nyelv nyelvtanát is tartalmazza. A modellszinten ezek után csak a szöveg-generáló és a szöveg felismerő műveletek futnak, amelyek a metamodellhez kapcsolt nyelvtanleírás alapján dolgoznak.
- Modelleken végzett inkrementális szemléletű szerkesztési műveletek, amelyek során a modell egyes elemein kisebb mérvű módosításokat végzünk.
- Modellellenőrzés, amely kétféle felfogásban működhet. A modell statikus szemantikus ellenőrzése alatt a modellre vonatkozó, a metamodellben rögzíthető megszorítások ellenőrzését értjük (pl. hogy nem hivatkozhatunk nem definiált modellelemre). Ez a lépés viszonylag kézenfekvő műveleteket tartalmaz, elsősorban formai vonásokat ellenőriz, és könnyen elvégezhető. A modell teljes ellenőrzése alatt a modellelemek formális logikai átalakítását és a létrejövő logikai állításrendszer ellentmondásmentességének vizsgálatát értjük. Megjegyezzük, hogy ez a feladat matematikai logikai értelemben nem eldönthető, vagyis nem készíthető olyan szoftver, ami egy modell tartalmi ellentmondásait teljes körűen fel tudná deríteni. Biztató részeredményről számol mégis be a [8] írás.

Hasonló modelltárházat valósított meg a SILK projektum [6], amelynek végső célja azonban nem a modellvezérelt szoftverek technológiájának kifejlesztése volt, hanem különböző modellű rendszerek közötti intelligens adat integráció megvalósítása. A munka a lezárása után azonban további kutatási tevékenységek kiindulópontjaként is szolgált.

4. Modellvezérelt alkalmazások

Modellvezérelt alkalmazások alatt az adatszinten megvalósítható műveletek bizonyos köreit értjük. A következő szakaszban ilyen lehetőségeket villantunk fel.

Adatműveletek

Modellvezérelt adatelérő és -módosító eszköz az ODMG OQL lekérdező nyelve [4]. Ez a relációs adatbázisok SQL kezelőnyelvének egyfajta kiterjesztése objektum-orientált adatbázisokra. A modellvezérelt adatkezelés lényege, hogy csak az objektum-orientált és a nyelvi alapműveletek vannak rögzítetten megvalósítva. Ezen túl minden más művelet modellvezérelt, még a számtani vagy logikai alapműveleteket is a modellben megadott műveletmegvalósítások hajtják végre.

Megjegyezzük, hogy az OQL nyelv logikai ereje igen távolra mutató, a teljes megvalósításra azonban nincs mindig szükség. Adott célra a teljes nyelvnél szerényebb követelmények és megoldások, vagyis csupán az OQL egy részhalmazának megvalósítása is elképzelhető.

Szövegszerű mentés-betöltés

Kézenfekvő művelet a rendszer adatállományának szövegszerű mentését és betöltését megvalósítani. Egy ilyen műveletkör a megvalósítást tekintve megegyezik a modellekre vonatkozó modellvezérelt mentés-betöltés művelettel is, azzal a különbséggel, hogy itt minden egy metaszinttel lejjebb szállt. Most nem a metamodell tartalmazza a modellre vonatkozó szintaktikus leírást, hanem a modell tartalmazza az adatokra vonatkozó hasonló leírást. Megjegyezzük, hogy adattartalom szövegszerű mentésére és betöltésére az OMG is adott egy paraméterezhető szabványjavaslatot [5], ami azonban a viszonylag merev paraméterezési konvenció miatt csak része a jelen tanulmányban javasoltnak.

Modellvezérelt modelltárház

Ha a modelltárház maga is modellvezérelt, akkor a tárház magát a modellt tekinti az adatszintjének, vagyis a modellszinten a metamodellt találjuk. Egy ilyen szoftverben nem a metamodell rögzített, hanem annak metaszintje, a metametamodell. Ennek a megközelítésnek az előnye a metamodell módosíthatósága, ill. esetleg több, különböző metamodellt használó rendszer felépíthetősége. A metametaszinten csak a legalapvetőbb betöltési-mentési, ill. szerkesztési műveleteket érdemes megvalósítani, a többi szint műveletei megegyeznek a tiszta kétszintű megoldásával.

A tanulmány 2. részében (amely egy későbbi számban jelenik meg) az imént felvillantott megoldásokat részletesebben is bemutatjuk.

Hivatkozások

[1] JOAQUIN MILLER-JISHNU MUKERJI: *Model Driven Architecture*, OMG Document July 2001.

[2] JON SIEGEL: *Developing in OMG's Model-Driven Architecture*, OMG White Paper, November 2001.

[3] JOAQUIN MILLER-JISHNU MUKERJI: *MDA Guide Version 1.0*, OMG Document July 2003.

[4] R. G. G. CATTELL - D. BARRY ÉS MÁSOK: *The Object Data Standard: ODMG 3.0*, Morgan Kaufmann Publishers San Francisco, USA 1999.

[5] *Human-Usable Textual Notation (HUTN) Specification Version 1.0*, OMG August 2004.

[6] *SILAN – the SILK language*, IQSOFT, Hungary 2000

[7] RUMBAUGH - JACOBSON - BOOCH: *Unified Modelling Language Reference Manual*, Addison-Wesley-Longman Inc. 1999.

[8] KILIÁN IMRE: *Mixed strategy reasoning* An approach for resolution based verification of OCL constraints in UML models Pollack Periodica, Volume 2 Supplement Akadémiai Kiadó, Budapest 2007.

(Beérkezett: 2005. október 18.)

KILIÁN IMRE
PTE-TTK Informatika tanszék
7624 Pécs, Ifjúság u. 6.
kilian@gamma.ttk.pte.hu

MODEL DRIVEN SOFTWARE ARCHITECTURE

IMRE KILIÁN

The expression of 'model driven software architecture' was first used by OMG in their MDA (Model Driven Architecture) project. The phrase 'model driven' refers in heir case to the process of software development. In their model software artifacts are designed independently from the software and hardware environments and platforms. Such platform independent models are later semi-automatically transformed to platform dependent models by using metamodels for the different platforms and transformation rules between them.

The present article uses the term in an other meaning. It refers to the runtime architecture of the software. This means that beyond the data required by the application the software contains also the domain model as an input of the software. The software maintains the model, and the model controls the calculation carried out by the software on the data including uniformly implemented data manipulations which realize the model.

Alkalmazott Matematikai Lapok **26** (2009), 9-15.

EGY KIS KLASSZIKUS DIFFERENCIÁLGEOMETRIA, A GAUSS–BONNET-TÉTEL BIZONYÍTÁSA

SZEMLÉLETES BIZONYÍTÁST ADUNK A FELÜLETELMÉLET FONTOS TÉTELÉRE

FARKAS MIKLÓS

1. Bevezetés

1956 nyarán a Bolyai János Matematikai Társulat kollokviumot tartott Balatonvilágoson. Ezen adtam elő akkor talált új bizonyításomat a *Gauss–Bonnet-tételre.* Sokáig nem publikáltam, majd három éves nigériai vendégtanárságom idején kérésre leközöltem a Nigerian Journal of Science-ben [1]. A folyóirat ma már nem nagyon érhető el, de úgy gondolom, hogy kár lenne a bizonyítást veszni hagyni, annyira szépek és szemléletesek a benne felhasznált klasszikus felületelméleti eszközök. Az a gyanúm, hogy a modern differenciálgeometria mai kiváló művelői körében ezek egy része talán feledésbe is merült.

A több mint 150 éves *Gauss–Bonnet-tétel* (Bonnet, 1848) a felületdarab teljes görbülete és a felületdarabot határoló felületi görbe geodetikus görbülete között állapít meg összefüggést. Általános érvényű tétel, amely n-dimeziós Riemann-tér felületeire is kimondható, mi azonban itt az egyszerű, szemléletes esetre korlátozódunk, felületre a háromdimenziós euklideszi térben. A tételnek számos egyszerű következménye és speciális esete van a sík- és a szférikus geometriában.

Ismertnek tételezzük fel egy korszerű Differenciálgeometria kurzus anyagát, de a következő pontban ismertetjük azokat a szükséges fogalmakat és tételeket, amelyek feltehetőleg már kiestek a mai kurrikulumokból. A 3. pontban mondjuk ki a tételt és végezzük el a bizonyítást.

2. Előzmények

Először is a *Levi-Civita-féle párhuzamos eltolás* fogalmára és tulajdonságaira lesz szükségünk (lásd pl. [2,3]). A fogalmat a 20. század elején vezette be Tullio Levi-Civita azzal a céllal, hogy analízist művelhessünk felületi vektormezőkön. Nyilvánvaló ugyanis, hogy ha egy felületi vektort a beágyazó euklideszi térben, a közönséges értelemben párhuzamosan eltolunk a görbült felület egy másik pontjába, az ott már általában nem lesz felületi vektor.

Legyen F egyszerű, sima felületdarab, g sima felületi görbe, P és Q e görbe két pontja és v felületi vektor a P pontban. Tekintsük a felületnek a g görbe pontjaihoz tartozó érintősíkjait. E síksereg burkolófelülete síkba fejthető vonalfelület [4]. Fejtsük ezt a vonalfelületet síkba, a P-nek megfelelő pontbeli v síkvektort toljuk el párhuzamosan a sík Q-nak megfelő pontjába, majd „fejtsük vissza" a burkolófelületet a g görbére. Ily módon a Q pontban kapunk egy felületi vektort. Azt mondjuk, hogy ez a vektor a P ponbeli v vektorból a g görbe mentén történt Levi-Civita-féle párhuzamos eltolással keletkezett.

Az előbbi geometriai konstrukcióval ekvivalens a következő meghatározás. Legyen $D \subset R^2$ egyszeresen összefüggő, korlátos, mérhető síktartomány, $r : D \longrightarrow R^3$ diffeomorfizmus (C^3 osztálybeli), amely D-t az F felületbe képezi le: $(u^1, u^2) \in D \longrightarrow r\,(u^1, u^2) \in F \subset R^3$, legyen továbbá $m(u^1, u^2)$ a felület egység normálvektora és $g : (u^1(t), u^2(t))$ sima felületi görbe, $t \in [a, b]$.

2.1. Definíció. Azt mondjuk, hogy a g görbe pontjaiban értelmezett $v(u^1(t), u^2(t))$ felületi vektormező a *g görbe mentén Levi-Civita-féle értelemben párhuzamos,* ha kielégíti a következő egyenletrendszert:

$$m \times \frac{dv}{dt} = 0, \qquad mv = 0, \tag{1}$$

ahol az első egyenletben vektoriális, a másodikban skalár szorzat szerepel.

(1) első egyenlete azt fejezi ki, hogy ha a vektor a görbe mentén Levi-Civita-értelemben párhuzamos, akkor két „közeli" („szomszédos") pontbeli értékének különbsége első rendben merőleges a felület érintősíkjára, differenciálja párhuzamos a felületi normálissal. A második egyenlet biztosítja, hogy a vektormező értéke minden pontban felületi vektor. Ha az $(u^1(a), u^2(a))$ pontban megadjuk a v_0 felületi vektort, akkor, amint ez könnyen belátható, az (1) rendszer egyértelműen meghatározza azt a $v(t)$ felületi vektormezőt, amely kielégíti a $v(a) = v_0$ kezdeti feltételt. Azt mondjuk ekkor, hogy $v(t)$ a v_0 vektorból a *g görbe mentén történő Levi-Civita értelemben vett párhuzamos eltolással keletkezett.*

Könnyen belátható, hogy a Levi-Civita párhuzamos eltolás rendelkezik a következő tulajdonságokkal. Két ugyanazon görbe mentén eltolt felületi vektor skaláris szorzata állandó. Ebből következik, hogy párhuzamosan eltolt felületi vektor hossza állandó, továbbá két ugyanazon görbe mentén párhuzamosan eltolt felületi vektor által bezárt szög is állandó. Ha az $(u^1(a), u^2(a))$ pontbeli v_0 vektort egy *másik* görbe mentén toljuk el párhuzamosan az $(u^1(b), u^2(b))$ pontba, akkor általában más vektort kapunk: a párhuzamos eltolás függ az úttól. Másképpen kifejezve ugyanezt, ha a g görbe zárt, vagyis $(u^1(a), u^2(a)) = (u^1(b), u^2(b))$ és a v_0 vektort párhuzamosan „körbetoljuk" a görbe mentén, rendszerint nem kapjuk vissza a kiindulási pontban az eredeti vektort. Azokat a felületeket, amelyeken a párhuzamos eltolás független az úttól, *abszolút párhuzamossággal rendelkező felületeknek* nevezzük. Egy felület akkor és csak akkor rendelkezik abszolút párhuzamossággal, ha Gauss-féle szorzatgörbülete zérus.

Legyen most a felületi görbe ívhossz paraméterezéssel adott: $r(s)$, ahol s az ívhossz (valamely pontjából mérve). Jelöljük $\kappa(s)$-sel a görbe görbületét és $n(s)$-sel főnormális egységvektorát. Az első *Frenet-formula* szerint $\frac{d^2r}{ds^2} = \kappa n$. Az utóbbi vektort bontsuk fel egy érintő síkbeli és egy felületi normális irányú komponensre:

$$\kappa n = \gamma m \times \frac{dr}{ds} + \eta m, \tag{2}$$

ahol vektoriális szorzat áll. Az ily módon definiált $\gamma(s)$ mennyiséget a görbe *geodetikus görbületének* nevezzük. A geodetikus görbület azt adja meg, „mennyire görbül a görbe az érintősíkban". Azokat a felületi görbéket, amelyeknek geodetikus görbülete azonosan zérus, *geodetikus vonalaknak* nevezzük. Ezek egyben a két felületi pontot összekötő görbék közül az ívhosszra nézve a stacionáriusak: elegendően rövid szakaszaik a két végpontjukat összekötő felületi görbék közül a legrövidebbek.

2.1. TÉTEL. *Legyen a $v(s)$ felületi vektor párhuzamosan eltolt az ívhossz paraméterezésben adott$r(s)$ egyenletű felületi görbe mentén, jelöljük $\gamma(s)$-sel a görbe geodetikus görbületét és $\theta(s)$-sel a $v(s)$ és a görbe $\frac{dr(s)}{ds}$ egység érintővektora közötti irányított szöget, ekkor érvényes a következő:*

$$\frac{d\theta}{ds} = -\gamma(s). \tag{3}$$

Bizonyítás. Az általánosság megszorítása nélkül tegyük fel, hogy $|v(s)| = 1$. Differenciáljuk a $v\frac{dr}{ds} = \cos\theta$ egyenletet:

$$\frac{dv}{ds} \cdot \frac{dr}{ds} + v\frac{d^2r}{ds^2} = -\sin\theta\frac{d\theta}{ds}.$$

Az első tag a bal oldalon zérus, mivel $\frac{dv}{ds}$ (1) szerint párhuzamos a felület normálvektorával. Frenet első formulája szerint $v \cdot \kappa n = -\sin\theta\frac{d\theta}{ds}$. Behelyettesítve (2)-ből

$$\gamma v \cdot m \times \frac{dr}{ds} + \eta v \cdot m = -\sin\theta\frac{d\theta}{ds}.$$

(1) szerint a második tag a bal oldalon zérus, vagyis

$$\gamma\cos(\pi/2 - \theta) = -\sin\theta\frac{d\theta}{ds},$$

tehát

$$\gamma\sin\theta = -\sin\theta\frac{d\theta}{ds}.$$

Innen az állítás következik. (Ha diszkrét pontokban $\sin\theta$ zérus, akkor a folytonosságból, ha egy egész szakaszon zérus, akkor ez a szakasz geodetikus és a szög deriváltja is zérus). □

A (3) formula mutatja, hogy a geodetikus görbület a görbe érintővektora iránya megváltozásának sebessége az ívhosszra vonatkoztatva egy párhuzamosan eltolt vektor irányához (vagyis az „állandónak tekinthető" irányhoz) képest. Ebből az is következik, hogy geodetikus vonal érintővektora a geodetikus vonal mentén párhuzamosan eltolt vektor. (Megjegyezzük, hogy Euklidesz még „definiálta" az egyenest, mint olyan görbét, mely „mindenütt ugyanabba az irányba" halad. A geodetikus vonal ebben az értelemben is az egyenesnek felel meg görbült felületen).

Legyen most g szakaszonként sima, egyszerű, zárt görbe véges sok töréspont-tal: $(u^1(a), u^2(a)) = (u^1(b), u^2(b))$. A töréspontokban az érintővektor törésszögét jelöljük α_i -vel, $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Osszuk fel a görbét kis részekre úgy, hogy a töréspontok is osztópontok legyenek, és kössük össze az osztópontokat geodetikus ívekkel. Ily módon egy a g görbébe írt zárt g_p „geodetikus poligont" kapunk. Jelöljük g_p töréspontjaiban érintővektorának törésszögeit ψ_k–val, $(k = 1, 2, \ldots, N)$. Legyen P a g görbe egy töréspontja és v_0 egy felületi vektor P-ben. Toljuk el v_0-at párhuzamosan g, ill. g_p mentén körbe, míg visszajutunk P-be. Az ilyen módon P-ben kapott vektorokat jelöljük v_g-vel, ill. v_{g_p}-vel. Legyen v_g és v_0, illetve v_{g_p} és v_0 szöge $\Delta\psi_g$, ill. $\Delta\psi_{g_p}$. A (3) formulából azonnal következik, hogy

$$\Delta\psi_g = \int_g \gamma(s)ds + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i, \tag{4}$$

$$\Delta\psi_{g_p} = \sum_{k=1}^{N} \psi_k, \tag{5}$$

mivel g_p geodetikus görbülete zérus. Finomítsuk a g görbe felosztását minden határon túl. Ekkor $g_p \longrightarrow g$, $v_{g_p} \longrightarrow v_g$, $\Delta\psi_{g_p} \longrightarrow \Delta\psi_g$, ahonnan

$$\lim \sum_{k=1}^{N} \psi_k = \int_g \gamma(s)ds + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \tag{6}$$

következik.

Azok számára, akik differenciálgeometria Ricci-kalkuluson alapuló tárgyalásához szoktak, megjegyezzük, hogy a párhuzamos eltolásra adott definíciónkból levezethető az $(u^1(t), u^2(t))$ görbe mentén párhuzamosan eltolt $v(t)$ vektor differenciálegyenlete:

$$\frac{dv^i}{dt} + \Gamma^i_{jk}(u^1(t), u^2(t))\frac{du^j(t)}{dt}v^k = 0,$$

ahol Γ a Christoffel-szimbólum, v^i a v vektor kontravariáns koordinátája, és az Einstein-konvenciót használtuk (vagyis összegzés fent és lent lévő egyforma indexekre 1-től 2-ig).

Áttérünk a felület gömbi leképezésének néhány tulajdonságára. Az F felületet párhuzamos normálisok módszerével leképezzük az S egységgömb felületre. Ezen azt értjük, hogy a $P \in F$ pontnak, amelyben a felületi egység normálvektor m, megfeleltetjük a gömbfelület m helyvektorú $\widetilde{P}$ pontját. A leképezésnél, nyilván, egymásnak megfelelő pontokban a felület, illetve a gömb érintősíkja párhuzamos.

Az $r(u^1(t), u^2(t))$ egyenletű g felületi görbe képe a gömbfelületen a $m(u^1(t), u^2(t))$ egyenletű $\widetilde{g}$ gömbfelületi görbe. Toljuk el az $(u^1(a), u^2(a))$ pontbeli v_0 felületi vektort Levi-Civita értelemben párhuzamosan a g görbe mentén. Az érintősíkok párhuzamossága miatt az így kapott $v(t)$ vektormező megegyezik a v_0 vektornak a $\widetilde{g}$ gömbfelületi görbe mentén történt párhuzamos eltolása útján nyert $\widetilde{v}(t)$ vektormezővel: $v(t) = \widetilde{v}(t)$, $t \in [a, b]$.

Jelöljük g_{ik}-val az F felület metrikus tenzorának koordinátáit ($i = 1, 2$, $k = 1, 2$), és legyen $g = (g_{11}g_{22} - g_{12}^2)^{1/2}$. Ekkor F felszíne:

$$mesF = \iint\limits_D g(u^1, u^2) du^1 du^2.$$

Jelöljük F Gauss-féle szorzatgörbületét $K(u^1, u^2)$-vel és F gömbi képének felszínét Σ-val. Ismeretes, hogy ha F a gömbfelületbe egy-egyértelműen képződik le és K előjele állandó, akkor K felszín szerinti integrálja egyenlő a gömbi kép előjeles felszínével:

$$\iint\limits_D K(u^1, u^2) g(u^1, u^2) du^1 du^2 = \pm\Sigma, \tag{7}$$

ahol a jobb oldalon a pozitív, ill. a negatív előjelet kell figyelembe venni aszerint, amint $K >$, ill. < 0. A formula az általános esetben is érvényes, ha F-et felbontjuk olyan részekre, amelyek egy-egyértelműen képződnek le, illetve amelyeken a szorzatgörbület előjele állandó. A formula szemléletes jelentése az, hogy minél nagyobb a felület görbülete, annál kisebb a felszíne a gömbi kép felszínéhez viszonyítva.

3. A Gauss–Bonnet-tétel

3.1. TÉTEL. *Legyen $D \in R^2$ egyszeresen összefüggő, mérhető, korlátos síktartomány, $r : D \longmapsto R^3$ háromszor folytonosan differenciálható diffeomorfizmus, $F := \{r(u^1, u^2) \in R^3 : (u^1, u^2) \in D\}$ egyszeresen összefüggő, sima felületdarab, amelyet az egyszerű, szakaszonként sima, zárt g görbe határol, és használjuk az előző pontban bevezetett jelöléseket, ekkor érvényes a következő:*

$$\iint\limits_D K(u^1, u^2) g(u^1, u^2) du^1 du^2 = 2\pi - \int\limits_g \gamma(s) ds - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i, \tag{8}$$

ahol α_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$az érintővektor (előjeles) törésszögei a görbe töréspontjaiban.

Ez a tétel tehát azt mondja ki, hogy a felületdarabot határoló zárt görbe geodetikus görbülete meghatározza a felületdarab teljes görbületét (a Gauss-féle szorzatgörbület felszín szerinti integrálját).

Alkalmazzuk a tételt az R sugarú gömb egy geodetikus (főkörívek által határolt) H háromszögére. Ekkor $K(u^1, u^2) = 1/R^2$, $\gamma = 0$ és ha a gömbi háromszög belső szögeit λ, μ, ν-vel jelöljük,

$$\frac{1}{R^2} mesH = 2\pi - (\pi - \lambda) - (\pi - \mu) - (\pi - \nu),$$

vagyis $mesH = ((\lambda + \mu + \nu) - \pi))R^2$. Visszakaptuk a gömbháromszögtan ismert formuláját gömbi háromszög felszínére.

Próbáljuk meg alkalmazni a tételt az euklideszi sík háromszögére, bár, mint látni fogjuk, a bizonyítás az euklideszi síkra nem működik. Ekkor $K = 0$, $\gamma = 0$, és ha a háromszög szögeit λ, μ, ν-vel jelöljük, $0 = 2\pi - (\pi - \lambda) - (\pi - \mu) - (\pi - \nu)$, vagyis $\lambda + \mu + \nu = \pi$. Nem kaptuk meg a területet, de visszakaptuk, hogy a háromszög szögeinek összege π.

Bizonyítás. Az F felületet leképezzük a párhuzamos normálisok módszerével az S egységgömb felületre. A g görbe gömbi képét jelöljük $\widetilde{g}$-mal. A $\widetilde{g}$ görbe ugyancsak szakaszonként sima, jelöljük töréspontjaiban érintővektorának törésszögeit β_i–vel $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Írjunk be $\widetilde{g}$-be egy zárt, szférikus poligont és jelöljük e poligon felszínét $mes\widetilde{P}$-mal. Az ismert szférikus geometriai formula szerint

$$mes\widetilde{P} = \sum_{k=1}^{r} \omega_k - (r-2)\pi,$$

ahol ω_k a poligon k-adik szöge. Bevezetve e poligon érintővektorának ψ_k törésszögeit

$$mes\widetilde{P} = 2\pi - \sum_{k=1}^{r} \psi_k. \tag{9}$$

Ha az osztópontok számát $\widetilde{g}$-on minden határon túl növeljük, a szférikus poligon $\widetilde{g}$-hoz tart és $mes\widetilde{P}$ az F felület gömbi képének Σ felszínéhez. Alkalmazzuk most (6)-ot a gömbi képre:

$$\lim \sum_{k=1}^{r} \psi_k = \int_{\widetilde{g}} \widetilde{\gamma}(\widetilde{s}) d\widetilde{s} + \sum_{i=1}^{n} \beta_i,$$

ahol $\widetilde{\gamma}$ és $\widetilde{s}$ a $\widetilde{g}$ görbe geodetikus görbülete, ill. ívhossza. Egyenlővé téve (9) két oldalának határértékét

$$\Sigma = 2\pi - \left(\int_{\widetilde{g}} \widetilde{\gamma}(\widetilde{s}) d\widetilde{s} + \sum_{i=1}^{n} \beta_i \right). \tag{10}$$

Vegyünk most egy v_0 felületi vektort g egy Q pontjában és jelöljük $\widetilde{v_0}$ -mal a v_0-lal egyenlő gömbfelületi vektort a gömb Q-nak megfelelő $\widetilde{Q} \in \widetilde{g}$ pontjában. Toljuk el g -n körbe Levi-Civita értelemben párhuzamosan v_0-at és $\widetilde{g}$-on körbe $\widetilde{v_0}$-at. Jelöljük az ily módon Q-ban, ill. $\widetilde{Q}$-ban nyert vektorokat v_1-gyel, ill $\widetilde{v_1}$–mal. A

2. pontban mondottakból azonban következik, hogy $v_1 = \widetilde{v_1}$. Ezek szerint v_1 és v_0 szöge megegyezik $\widetilde{v1}$ és $\widetilde{v_0}$ szögével. A (4) formulát és annak $\widetilde{g}$-ra felírt analogonját egyenlővé téve

$$\int\limits_{\widetilde{g}} \widetilde{\gamma}(\widetilde{s})d\widetilde{s} + \sum_{i=1}^{n} \beta_i = \int\limits_{g} \gamma(s)ds + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i .$$

Az utóbbi egyenletből (10)-be helyettesítve és (7)-et figyelembe véve kapjuk a (8) formulát. □

Hivatkozások

[1] FARKAS, M.: *A proof of Gauss-Bonnet's theorem*, Nigerian Journal of Science I. (1967) No. **2**, 175–178.

[2] KLINGENBERG, W.: *A Course in Differential Geometry* (Springer-Verlag, New York, 1978)

[3] NORDEN, A.P.: *Teoria poverchnosztyej* (Gosz. Izd. Tech-Teor. Lit., Moszkva, 1956)

[4] SZŐKEFALVI-NAGY GYULA: *Differenciálgeometria* (Műszaki K., Budapest, 1979)

(Beérkezett: 2007. február 10.)

FARKAS MIKLÓS
Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Matematikai Intézet
1521 Budapest

LITTLE CLASSICAL DIFFERENTIAL GEOMETRY,
A PROOF OF GAUSS-BONNET THEOREM

$\boxed{\text{Miklós Farkas}}$

A simple proof is given to this classical theorem The proof is based on properties of parallel displacement in the sense of Levi Civita.

Alkalmazott Matematikai Lapok **26** (2009), 17-46.

SZTOCHASZTIKUS HÁLÓZATOKKAL KAPCSOLATOS, RITKÁN BEKÖVETKEZŐ ESEMÉNYEK VALÓSZÍNŰSÉGBECSLÉSE EXPONENCIÁLIS, ILLETVE BÉTA ELOSZLÁS ESETÉN[1]

GOUDA ASHRAF[2] ÉS SZÁNTAI TAMÁS[3]

A dolgozat sztochasztikus hálózatokkal kapcsolatos, ritkán bekövetkező események valószínűségbecslésével foglalkozik. Ehhez hatékony eszköznek bizonyul a jól ismert fontosság szerinti mintavétel (*Importance Sampling*, IS). Az IS alapgondolata az, hogy a véletlen rendszert módosított paraméter halmaz mellett szimuláljuk, mely által a különben ritkán bekövetkező esemény nagyobb eséllyel következik be. A legnagyobb probléma az, hogy az IS-eljárásban használandó optimálisan módosított paraméter halmazt, az úgynevezett vonatkoztatási paramétereket általában nehéz meghatározni. Az IS-eljárás ezen problémájának megoldására Rubinstein (1997) kidolgozta a kereszt entrópia (*Cross Entropy*, CE) módszert, majd a munkatársaival együtt alkalmazta azt sztochasztikus hálózatokkal kapcsolatos, ritkán bekövetkező események valószínűségbecslésére exponenciális eloszlás esetén (lásd De Boer, Kroese, Mannor és Rubinstein (2002)).

Ebben a dolgozatban teszteljük ezt a szimulációs eljárást közepes- és nagyméretű sztochasztikus hálózatokra, valamint a nyers Monte Carlo (*Crude Monte Carlo*, CMC) szimulációval történő összehasonlításával megadjuk annak hatékonyságát. A szóráscsökkentéses szimulációs algoritmus hatékonyságát a következőképpen mérjük. Kiszámítjuk a becslés szórásnégyzetének és a meghatározásához szükséges CPU-időnek a szorzatát, majd ezt a szorzatot viszonyítjuk a CMC-módszerre számított hasonló szorzat értékhez. Ezt a mutatót eredetileg Hammersley és Handscombe (1967) javasolták különböző szóráscsökkentő algoritmusok hatékonyságának összemérésére.

A dolgozat fő eredményeként kiterjesztjük a CE-módszert sztochasztikus hálózatokkal kapcsolatos, ritkán bekövetkező események valószínűségbecslésére béta eloszlás esetén. Ekkor az IS-eloszlás vonatkoztatási paramétereinek meghatározásához nemlineáris egyenletrendszer numerikus megoldására van szükség. Ezt Newton–Raphson-iterációval tesszük meg, mikor is a vonatkoztatási paraméterek meghatározására fordított CPU-idő már nem hanyagolható el. Erre vonatkozó numerikus eredményeket is megadunk a dolgozatban.

Kulcsszavak: kereszt entrópia (CE), fontosság szerinti mintavétel (IS), ritkán bekövetkező események, legrövidebb út probléma, exponenciális és béta eloszlás, Newton–Raphson-módszer.

---

[1]Elhangzott a XXVII. Magyar Operációkutatási Konferencián, Balatonőszödön (2007. június 7-9.).

[2]A BME Matematika Intézet volt PhD hallgatója

[3]A dolgozat megírásához vezető munkát részben az OTKA T047340 számú pályázata támogatta.

1. Bevezetés

A sztochasztikus szimuláció hasznos eszköznek bizonyul a gyakorlatban, széles körben alkalmazzák különböző becslési feladatok megoldására. Hasznos segédeszköznek bizonyul továbbá sztochasztikus programozási feladatok numerikus megoldása során is, lásd Prékopa András sztochasztikus programozás könyvét, Prékopa (1995). A könyv megjelenése óta Deák István, lásd Deák (2001), (2002), illetve Fábián Csaba és Szőke Zoltán, lásd Fábián, Szőke (2007) dolgoztak ki sztochasztikus szimuláción alapuló, illetve azt haszonnal alkalmazó, sztochasztikus programozási feladatokat megoldó numerikus optimalizálási algoritmusokat. Sok esetben azonban a standard sztochasztikus szimuláció alkalmazása korlátokba ütközik. A standard sztochasztikus szimulációval nem kezelhető problémák egy fontos osztálya az, amely ritkán bekövetkező események szimulációját igényli. Mivel ezek az események egy standard szimuláció során csak rendkívül ritkán következnek be, olyan nagy elemszámú mintát kellene szimulálni, ami túl nagy CPU-időt igényelne. Ezért az elmúlt évtizedtől kezdődően különböző módszereket, eljárásokat fejlesztettek ki a ritkán bekövetkező események valószínűségbecslésére.

Lieber, Rubinstein és Elmakis (1997) és Rubinstein (1997) kidolgozták a CE (*Cross Entropy*) módszert. Ez egy adaptív eljárás az IS (*Importance Sampling*) eljárásban használt, úgynevezett vonatkoztatási paraméterek becslésére. A CE-módszert úgy lehet tekinteni, mint egy modell alapú optimalizálási eljárást, amely a következő két fázisból áll:

1. Véletlen vektorok mintájának adott véletlen mechanizmus szerinti generálása.
2. A véletlen mechanizmus paramétereinek az eredmények ismeretében történő megváltoztatása, hogy a következő iterációban bizonyos értelemben jobb mintát lehessen előállítani.

A CE-módszer legfontosabb tulajdonsága az, hogy fejlett szimulációs módszeren alapuló, szabatos matematikai keretet ad a vonatkoztatási paraméterek bizonyos értelemben „optimális” aktualizálására. A ritkán bekövetkező események valószínűségbecslése pedig azért fontos feladat, mert ezzel garantálni lehet különféle mérnöki rendszerek megbízható működését. Tekintsünk példaként egy telekommunikációs rendszert, amely nagyon sok felhasználó hívásait fogadja. Normális működési körülmények között bármelyik felhasználó hívását csak nagyon kis valószínűséggel utasíthatja vissza a rendszer. Ahhoz, hogy ezt a nagyon kis valószínűséget becsülni tudjuk, az egész rendszert nagyon hosszú ideig kellene valós működési körülmények között szimulálni. Az ilyen valószínűségek becslésére jobb ezért az IS-eljárást használni, amely során a rendszert megváltoztatott paraméterekkel szimuláljuk úgy, hogy a különben ritkán bekövetkező esemény nagyobb valószínűséggel következzen be. Ennek az eljárásnak az alkalmazásában a legnagyobb nehézséget az okozza, hogy általában nagyon nehéz a szimuláció során alkalmazandó működtetési paramétereket optimálisan megválasztani. A CE-módszer előnye az, hogy egyszerű adaptív eljárást ad a közel optimális vonatkoztatási paraméterek becslésére, mely által lehetővé válik, hogy a rendszer módosított körülmények közötti szimulációjával becsülni tudjuk az egyes hívások normális működési körülmények közti visszautasításának a nagyon kicsi valószínűségét is, azaz, hogy alkalmazni tudjuk az IS-eljárást. A CE-módszer egy további jó tulajdonsága az aszimptotikus konvergencia is.

A dolgozat további részeiben a következők szerint fogunk haladni. A 2. szakaszban a CE-módszer alap módszertanát ismertetjük. A 3. szakaszban exponenciális, illetve béta eloszlású véletlen mennyiségekkel leírt sztochasztikus hálózatokban fellépő, ritkán bekövetkező események becslési eljárásait adjuk meg. Végül a 4. szakaszban numerikus példákon hasonlítjuk össze a nyers Monte Carlo-módszerrel és a CE-módszerrel meghatározott vonatkoztatási paraméterekkel működtetett IS-eljárással nyert becslések hatékonyságát.

2. A CE-módszeren alapuló IS-eljárás általános módszere

Ebben a szakaszban röviden áttekintjük azokat az alapelveket, amelyek a ritkán bekövetkező események valószínűségbecslésre alkalmazott CE alapú IS-eljárás helyességét igazolják. Tekintsünk egy véletlen rendszert, amelyet az $\mathcal{X}$ térben értékeket felvevő $\mathbf{X}$ véletlen vektor ír le. Legyen $f(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ egy, az $\mathcal{X}$ tér fölötti paraméteres sűrűségfüggvény család. Tegyük fel, hogy a rendszert leíró $\mathbf{X}$ véletlen vektor sűrűségfüggvénye $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}^*)$, ahol $\mathbf{v}^*$ egy rögzített paraméter vektor. Legyen $S(\mathbf{X})$ a vizsgált véletlen rendszer egy jellemzője, és keressük annak a valószínűségét, hogy $S(\mathbf{X})$ értéke nagyobb, mint egy γ valós szám. Így tehát diszkrét esemény szimulációval becsülnünk kell az

$$L = P(S(\mathbf{X}) > \gamma) = E[H(\mathbf{X})] \tag{1}$$

valószínűséget, ahol E a várható érték és $H(\mathbf{x})$ az alábbi karakterisztikus függvény:

$$H(\mathbf{x}) = I_{\{S(\mathbf{x})>\gamma\}} = \begin{cases} 1, & \text{ha } S(\mathbf{x}) > \gamma, \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

Az (1) valószínűség közvetlenül is becsülhető CMC-szimulációval, ha veszünk egy $\mathbf{X}^{(1)}, \ldots, \mathbf{X}^{(n)}$ mintát az $f(\mathbf{x}; \mathbf{v}^*)$ sűrűségfüggvénnyel definiált valószínűségeloszlásból és kiszámítjuk L-re az alábbi torzítatlan becslést:

$$\hat{L} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} H\left(\mathbf{X}^{(i)}\right).$$

Ha azonban γ elég nagy, akkor az L valószínűség nagyon kicsi tud lenni, és ekkor az $\{S(\mathbf{X}) > \gamma\}$ esemény ritkán bekövetkezőnek lesz nevezhető. Ebben az esetben a CMC-szimuláció az L érték elég pontos becsléséhez nagyon nagy mintát fog igényelni, azaz n-nek nagyon nagynak kell lenni. Egy másik lehetőség az IS-eljárás alkalmazása, lásd Rubinstein és Melamed (1998), Rubinstein (1997) és Rubinstein (1999). Ha az $\mathbf{X}^{(1)}, \cdots, \mathbf{X}^{(n)}$ mintát egy, az $\mathcal{X}$ tér fölötti tetszőleges másik $g(\mathbf{x})$ sűrűségfüggvénnyel definiált valószínűségeloszlásból vesszük, akkor az L érték becslését a következőképpen kaphatjuk meg:

$$\hat{L} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} H\left(\mathbf{X}^{(i)}\right) W\left(\mathbf{X}^{(i)}; \mathbf{v}^\star\right), \tag{2}$$

ahol $W(\mathbf{x}; \mathbf{v}^\star) = f(\mathbf{x}; \mathbf{v}^\star)/g(\mathbf{x})$ az úgynevezett likelihood hányados. Ennek a becslésnek a torzítatlanságát a következő átalakítás-sorozat igazolja:

$$\begin{aligned} L &= P(S(\mathbf{X}) > \gamma) = E_f\left[H(\mathbf{X})\right] \\ &= \int I_{\{S(\mathbf{x})>\gamma\}} f(\mathbf{x}; \mathbf{v}^\star) d\mathbf{x} \\ &= \int I_{\{S(\mathbf{x})>\gamma\}} \frac{f(\mathbf{x}, \mathbf{v}^\star)}{g(\mathbf{x})} g(\mathbf{x}) dx \\ &= \int I_{\{S(\mathbf{x})>\gamma\}} W(\mathbf{x}, \mathbf{v}^\star) g(\mathbf{x}) dx \\ &= E_g\left[H(\mathbf{X}) W(\mathbf{X}; \mathbf{v}^\star)\right] \end{aligned}$$

A $g(\mathbf{x})$ sűrűségfüggvény megfelelő választása mellett ezt a becslést IS-eljárásnak nevezhetjük. A cél az, hogy a szimuláció alapjául szolgáló mértéket olyanra cseréljük, azaz a $g(\mathbf{x})$ sűrűségfüggvényt úgy válasszuk meg, hogy a (2) torzítatlan becslés szórása a lehető legkisebb legyen. Könnyen belátható, hogy ennek a problémának a megoldását a

$$g(\mathbf{x}) = \frac{H(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}; \mathbf{v}^\star)}{C} \tag{3}$$

sűrűségfüggvény adja, ahol a normáló tényező értéke

$$C = \int H(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}; \mathbf{v}^\star) d\mathbf{x}.$$

Ez azt jelenti, hogy a módosított szimulációhoz használható legjobb eloszlás az eredeti $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}^\star)$ sűrűségfüggvény által generált eloszlásnak a ritkán bekövetkező eseménnyel, mint feltétellel vett feltételes eloszlása lenne, hiszen a (3) sűrűségfüggvénnyel alkalmazott IS-eljárás a keresett valószínűség nulla szórású, torzítatlan becslését adná. Ezt az eloszlást azonban nem tudjuk használni, mivel a normáló tényezőjét nem ismerjük, hiszen az éppen a becsülni kívánt valószínűség értékével azonos:

$$C = \int H(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}; \mathbf{v}^\star) d\mathbf{x} = E_f\left[H(\mathbf{X})\right] = P(S(\mathbf{X}) > \gamma) = L.$$

Ezért csak arra törekedhetünk, hogy a (3) sűrűségfüggvényt jól közelítő sűrűségfüggvényt találjunk.

Két valószínűségi mérték közti távolság mérésére a Kullback–Leibler-féle kereszt entrópiát használhatjuk. Ez a következő. Legyen $g(\mathrm{x})$ és $h(\mathrm{x})$ két sűrűségfüggvény. Ezek Kullback–Leibler-féle kereszt entrópiája definíció szerint

$$CE = \int g(\mathrm{x}) \log \frac{g(\mathrm{x})}{h(\mathrm{x})} d\mathrm{x}. \tag{4}$$

Ha $g(\mathrm{x})$ és $h(\mathrm{x})$ azonosak, akkor $CE = 0$, különben $CE > 0$.

A (3) optimális sűrűségfüggvényt jól közelítő sűrűségfüggvény keresésekor korlátozzuk a figyelmünket azokra, amelyek ugyanabba a paraméteres sűrűségfüggvény családba tartoznak, mint az eredeti. Így a feladatunk olyan $\hat{\mathrm{v}}$ paraméter vektor keresése, hogy az $f(\mathrm{x}; \hat{\mathrm{v}})$ sűrűségfüggvény a lehető legjobban közelítse a (3) sűrűségfüggvényt. Ebből a célból helyettesítsük a (4) képletben a $g(\mathrm{x})$ sűrűségfüggvényt az optimális (3) sűrűségfüggvénnyel, a $h(\mathrm{x})$ sűrűségfüggvényt pedig $f(\mathrm{x}; \mathrm{v})$-vel és keressük azt a $\hat{\mathrm{v}}$ paraméter vektort, amelyre az így nyert kifejezés minimális értékű:

$$\begin{aligned}
\hat{\mathrm{v}} &= \arg\min_{\mathrm{v}} \int CH(\mathrm{x}) f(\mathrm{x}; \mathrm{v}^\star) \log \frac{CH(\mathrm{x}) f(\mathrm{x}, \mathrm{v}^\star)}{f(\mathrm{x}; \mathrm{v})} dx \\
&= \arg\min_{\mathrm{v}} [\int CH(\mathrm{x}) f(\mathrm{x}; \mathrm{v}^\star) \log CH(\mathrm{x}) f(\mathrm{x}, \mathrm{v}^\star) dx \\
&\quad - \int CH(\mathrm{x}) f(\mathrm{x}; \mathrm{v}^\star) \log f(\mathrm{x}; \mathrm{v}) dx] \\
&= \arg\max_{\mathrm{v}} \int H(\mathrm{x}) \log f(\mathrm{x}; \mathrm{v}) f(\mathrm{x}; \mathrm{v}^\star) dx.
\end{aligned} \tag{5}$$

Ennek a maximalizálási feladatnak a közelítő megoldására Rubinstein (1997) egy iterációs algoritmus dolgozott ki. Ehhez legyen $\mathrm{v}_0, \mathrm{v}_1, \ldots, \mathrm{v}_k, \ldots$ paraméter vektorok egy sorozata, és annak v_k elemével írjuk az (5) maximalizálási feladatot a következő alakba:

$$\begin{aligned}
\hat{\mathrm{v}} &= \arg\max_{\mathrm{v}} \int H(\mathrm{x}) \log f(\mathrm{x}; \mathrm{v}) f(\mathrm{x}; \mathrm{v}^\star) dx \\
&= \arg\max_{\mathrm{v}} \int H(\mathrm{x}) \log f(\mathrm{x}; \mathrm{v}) \frac{f(\mathrm{x}; \mathrm{v}^\star)}{f(\mathrm{x}; \mathrm{v}_k)} f(\mathrm{x}; \mathrm{v}_k) dx \\
&= \arg\max_{\mathrm{v}} E_{\mathrm{v}_k} [H(\mathrm{x}) W(\mathrm{x}; \mathrm{v}^\star, \mathrm{v}_k) \log f(\mathrm{x}; \mathrm{v})],
\end{aligned} \tag{6}$$

ahol

$$W(\mathrm{x}; \mathrm{v}^\star, \mathrm{v}_k) = \frac{f(\mathrm{x}; \mathrm{v}^\star)}{f(\mathrm{x}; \mathrm{v}_k)}.$$

A következő algoritmus Rubinstein CE-algoritmusának egy módosított változata, melyet De Boer és munkatársai dolgoztak ki (lásd De Boer at el. (2002)). A módosítás az algoritmus 5. lépésében látható és egy új λ simító paraméter bevezetéséből áll.

2.1. Algoritmus. Az általános CE-módszeren alapuló IS-eljárás.

1. Lépés. Válasszunk egy kezdő $\mathbf{v}_0$ paraméter vektort. Erre megfelel például $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}^\star$. Válasszunk egy nullához közeli ρ pozitív számot a rendszerjellemző függvény mintaértékei $(1-\rho)$ kvantilisének számításához. Legyen $k = 0$, és menjünk a 2. lépésre az iteráció elkezdéséhez.
2. Lépés. Generáljunk egy $f(\mathbf{x}; \mathbf{v}_k)$ sűrűségfüggvény szerinti $\mathbf{X}^{(1)}, \ldots, \mathbf{X}^{(n)}$ véletlen mintát.
3. Lépés. Számítsuk ki a rendszerjellemző függvény $S^{(i)} = S(\mathbf{X}^{(i)})$ mintaértékét minden i-re és rendezzük azokat nagyság szerint növekvő sorrendbe: $S^{(1)} \leq \cdots \leq S^{(n)}$. Legyen $\hat{\gamma}_{k+1}$ a rendszerjellemző függvény mintaértékeinek az $(1-\rho)$ kvantilise, azaz $\hat{\gamma}_{k+1} = S^{(\lceil(1-\rho)n\rceil)}$, feltéve, hogy ez az érték kisebb, mint γ. Különben legyen $\hat{\gamma}_{k+1} = \gamma$.
4. Lépés. Ugyanezt a véletlen mintát használva, a

$$\sum_{i=1}^{n} I_{\{S(\mathbf{X}^{(i)}) > \hat{\gamma}_{k+1}\}} W\left(\mathbf{X}^{(i)}; \mathbf{v}^\star, \mathbf{v}_k\right) \nabla \log f\left(\mathbf{X}^{(i)}; \mathbf{v}\right) = \mathbf{0}^T. \tag{7}$$

   egyenlet megoldásával adjunk becslést a $\mathbf{v}_{k+1}$ vektorra.
5. Lépés. Simítsuk az új paraméter vektort az alábbi képlet szerint:

$$\mathbf{v}_{k+1} := \lambda \mathbf{v}_{k+1} + (1-\lambda)\mathbf{v}_k,$$

   ahol $0 \leq \lambda \leq 1$ előre rögzített simító paraméter.
6. Lépés. Ha $\hat{\gamma}_{k+1} = \gamma$, akkor legyen az utolsó $\mathbf{v}_{k+1}$ paraméter vektor a $\hat{\mathbf{v}}$ vonatkoztatási paraméter, és menjünk a 7. lépésre, különben legyen $k = k+1$, és ismételjük a 2–6. lépéseket, ameddig el nem érjük a $\hat{\gamma}_{k+1} = \gamma$ egyenlőséget.
7. Lépés. Generáljunk egy $f(\mathbf{x}; \hat{\mathbf{v}})$ sűrűségfüggvény szerinti $\mathbf{X}^{(1)}, \ldots, \mathbf{X}^{(N)}$ véletlen mintát. Becsüljük a ritkán bekövetkező esemény valószínűségét az alábbi IS-becsléssel:

$$\hat{L} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} H\left(\mathbf{X}^{(i)}\right) W\left(\mathbf{X}^{(i)}; \mathbf{v}^\star, \hat{\mathbf{v}}\right).$$

   Ekkor a becslés becsült szórásnégyzete:

$$\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} H\left(\mathbf{X}^{(i)}\right) W^2\left(\mathbf{X}^{(i)}; \mathbf{v}^\star, \hat{\mathbf{v}}\right) - \hat{L}^2\right) / N.$$

3. Alkalmazás a legrövidebb út hosszára vonatkozó valószínűség becslésére

A legrövidebb út probléma egy hálózat egy adott csúcsából egy másikba vezető legrövidebb út megkeresését jelenti. Az út mentén az egymás utáni csúcsokat összekötő éleknek mindig a haladási irányba kell mutatni. Az ilyen utakat szokás irányított utaknak is nevezni. Tegyük fel, hogy adott egy $G(N, A)$ véletlen hálózat, ahol N a csúcsok halmaza és A az élek halmaza. Az élekhez tevékenységek $X^{(1)}, \ldots, X^{(n)}$ véletlen időtartamait rendeljük, miközben feltesszük, hogy azok nemnegatívak.

Egy adott csúcsból, mondjuk O-ból megkeresni a legrövidebb utat egy másik csúcsba, mondjuk R-be nem könnyebb, mint több, akár az összes csúcsból az R-be vezető legrövidebb utak megkeresése. Ezért gyakran definiálják úgy is a legrövidebb út problémát, mint az összes N-beli csúcsból egy rögzített $R \in N$ csúcsba vezető legrövidebb út megkeresésének a feladatát. A továbbiakban amikor legrövidebb útról beszélünk, azalatt mindig az O kiindulási csúcsból az R cél csúcsba vezető legrövidebb utat fogjuk érteni.

Tegyük fel először, hogy az $X^{(1)}, \ldots, X^{(m)}$ tevékenységi időtartamok független, $\alpha_1^\star, \ldots, \alpha_m^\star$ várható értékű, exponenciális eloszlású valószínűségi változók, ezért az együttes valószínűségi sűrűségfüggvényük a következő:

$$f\left(\mathbf{x}; \alpha^\star\right) = \exp\left(-\sum_{j=1}^{m} \frac{x_j}{\alpha_j^\star}\right) \prod_{j=1}^{m} \frac{1}{\alpha_j^\star}.$$

Ekkor a (6) képletbeli likelihood hányados:

$$\begin{aligned} W\left(\mathbf{X}^{(i)}; \alpha^\star, \alpha_k\right) &= \frac{f\left(\mathbf{X}^{(i)}; \alpha^\star\right)}{f\left(\mathbf{X}^{(i)}; \alpha_k\right)} \\ &= \exp\left(-\sum_{j=1}^{m} X_j^{(i)} \left(\frac{1}{\alpha_j^\star} - \frac{1}{\alpha_{kj}}\right)\right) \prod_{j=1}^{m} \frac{\alpha_{kj}}{\alpha_j^\star}, \end{aligned}$$

ahol $\alpha_k = (\alpha_{k1}, \ldots, \alpha_{km})^T$ a k-adik iteráció paraméter vektora és $\mathbf{X}^{(1)}, \ldots, \mathbf{X}^{(n)}$ egy az $f(\mathbf{x}; \alpha_k)$ sűrűségfüggvényű eloszlásból vett véletlen minta. A $f\left(\mathbf{x}; \alpha\right)$ sűrűségfüggvény logaritmusa:

$$\log f\left(\mathbf{x}; \alpha\right) = -\sum_{j=1}^{m} \log \alpha_j - \sum_{j=1}^{m} \frac{x_j}{\alpha_j}.$$

α_j szerinti parciális deriválás után:

$$\frac{\partial \log f\left(\mathbf{x}; \alpha\right)}{\partial \alpha_j} = -\frac{1}{\alpha_j} + \frac{x_j}{\alpha_j^2}.$$

Így a (7) egyenlet most a következő speciális alakot ölti:

$$\sum_{i=1}^{n} I_{\{S(\mathbf{X}^{(i)})>\hat{\gamma}_{k+1}\}} W\left(\mathbf{X}^{(i)};\alpha^{\star},\alpha_k\right)\left(-\frac{1}{\alpha_j}+\frac{x_j}{\alpha_j^2}\right)=0,\ j=1,\ldots,m. \quad (8)$$

A (8) egyenletből $\alpha_j, j=1,\ldots,m$ explicit módon kifejezhető, ezért a 2.1. algoritmus a következőképpen alakul:

3.1. Algoritmus. A CE-módszeren alapuló IS-eljárás exponenciális eloszlás esetén.

1. Lépés. Válasszuk kezdésnek az $\alpha_0=\alpha^{\star}$ paraméter vektort. Legyen ρ egy nullához közeli pozitív szám, melyet a rendszerjellemző függvény mintaértékei $(1-\rho)$ kvantilisének számításához használunk. Legyen $k=0$, és menjünk a 2. lépésre az iteráció elkezdéséhez.
2. Lépés. Generáljunk egy $f(\mathbf{x};\alpha_k)$ sűrűségfüggvényű exponenciális eloszlás szerinti $\mathbf{X}^{(1)},\ldots,\mathbf{X}^{(n)}$ véletlen mintát.
3. Lépés. Számítsuk ki az $S^{(i)}=S\left(\mathbf{X}^{(i)}\right)$ legrövidebb úthosszakat minden i-re, és rendezzük ezeket monoton növekvő sorrendbe: $S^{(1)}\le\cdots\le S^{(n)}$. Legyen $\hat{\gamma}_{k+1}$ a legrövidebb utak $(1-\rho)$ minta kvantilise, azaz $\hat{\gamma}_{k+1}=S^{[(1-\rho)n]}$, feltéve, hogy ez kisebb, mint γ. Különben legyen $\hat{\gamma}_{k+1}=\gamma$.
4. Lépés. Ugyanezt a véletlen mintát használva, az

$$\alpha_{k+1,j}=\frac{\sum_{i=1}^{n} I_{\{S(\mathbf{X}^{(i)})>\hat{\gamma}_{k+1}\}} W\left(\mathbf{X}^{(i)};\alpha^{\star},\alpha_k\right)X_j^i}{\sum_{i=1}^{n} I_{\{S(\mathbf{X}^{(i)})>\hat{\gamma}_{k+1}\}} W\left(\mathbf{X}^{(i)};\alpha^{\star},\alpha_k\right)},\ j=1,\ldots,m.$$

   explicit képletek segítségével adjunk becslést a α_{k+1} paramétervektorra.
5. Lépés. Simítsuk az új paraméter vektort az alábbi képlet szerint: $\alpha_{k+1}:=\lambda\alpha_{k+1}+(1-\lambda)\alpha_k$, ahol $0\le\lambda\le 1$ előre rögzített simító paraméter.
6. Lépés. Ha $\hat{\gamma}_{k+1}=\gamma$, akkor legyen az utolsó α_{k+1} paraméter vektor az $\hat{\alpha}$ vonatkoztatási paraméter, és menjünk a 7. lépésre, különben legyen $k=k+1$, és ismételjük a 2–6. lépéseket, ameddig el nem érjük a $\hat{\gamma}_{k+1}=\gamma$ egyenlőséget.
7. Lépés. Generáljunk egy $\hat{\alpha}$ paraméter vektorú, exponenciális eloszlású $X^{(1)},\ldots,X^{(N)}$ véletlen mintát. Becsüljük a ritkán bekövetkező esemény valószínűségét az alábbi IS-becsléssel:

$$\hat{L}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} H\left(\mathbf{X}^{(i)}\right)W\left(\mathbf{X}^{(i)};\alpha^{\star},\hat{\alpha}\right).$$

Ekkor a becslés becsült szórásnégyzete:

$$\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} H\left(\mathbf{X}^{(i)}\right) W^2\left(\mathbf{X}^{(i)};\alpha^\star,\hat{\alpha}\right) - \hat{L}^2\right)/N.$$

Tegyük fel most, hogy az $X^{(1)},\ldots,X^{(m)}$ tevékenységi időtartamok független, $\alpha_i^\star,\beta_i^\star, i=1,\ldots,m$ paraméterű, béta eloszlású valószínűségi változók, ezért az együttes valószínűségi sűrűségfüggvényük a következő:

$$\begin{aligned} f\left(\mathbf{x};\alpha^\star,\beta^\star\right) = \prod_{j=1}^{m} &\frac{\Gamma\left(\alpha_j^\star+\beta_j^\star\right)}{\Gamma\left(\alpha_j^\star\right)\Gamma\left(\beta_j^\star\right)}\left(\frac{1}{b-a}\right)^{\alpha_j^\star+\beta_j^\star-1} \\ &\times(x_j-a)^{\alpha_j^\star-1}(b-x_j)^{\beta_j^\star-1}, \end{aligned}$$

ahol

$$a\le x_j\le b,\ \alpha_j^\star>0,\ \beta_j^\star>0,\ j=1,\ldots,m.$$

A (6) képletbeli likelihood hányados a következőképpen alakul:

$$\begin{aligned} W\left(\mathbf{X}^{(i)};\alpha^\star,\beta^\star,\alpha_k,\beta_k\right) &= \frac{f\left(\mathbf{X}^{(i)};\alpha^\star,\beta^\star\right)}{f\left(\mathbf{X}^{(i)};\alpha_{\mathbf{k}},\beta_{\mathbf{k}}\right)} \\ &= \prod_{j=1}^{m}\frac{\Gamma\left(\alpha_j^\star+\beta_j^\star\right)}{\Gamma\left(\alpha_j^\star\right)\Gamma\left(\beta_j^\star\right)}\frac{\Gamma\left(\alpha_{kj}\right)\Gamma\left(\beta_{kj}\right)}{\Gamma\left(\alpha_{kj}+\beta_{kj}\right)}(b-a)^{\alpha_{kj}+\beta_{kj}-\alpha_j^\star-\beta_j^\star} \\ &\quad\times(b-X_j^{(i)})^{\beta_j^\star-\beta_{kj}}(X_j^{(i)}-a)^{\alpha_j^\star-\alpha_{kj}}. \end{aligned}$$

Az $f\left(\mathbf{x};\alpha,\beta\right)$ sűrűségfüggvény logaritmusa:

$$\begin{aligned} \log f\left(\mathbf{x};\alpha,\beta\right) = \sum_{j=1}^{m} &[\log\Gamma(\alpha_j+\beta j) - \log\Gamma(\alpha_j) - \log\Gamma(\beta_j) \\ &+ (1-\alpha_j-\beta_j)\log(b-a) + (\alpha_j-1)\log(x_j-a) \\ &+ (\beta_j-1)\log(b-x_j)]\,. \end{aligned}$$

α_j szerinti parciális deriválás után:

$$\frac{\partial\log f\left(\mathbf{x};\alpha,\beta\right)}{\partial\alpha_j} = \psi(\alpha_j+\beta j) - \psi(\alpha_j) - \log(b-a) + \log(x_j-a).$$

β_j szerinti parciális deriválás után:

$$\frac{\partial\log f\left(\mathbf{x};\alpha,\beta\right)}{\partial\beta_j} = \psi(\alpha_j+\beta j) - \psi(\beta_j) - \log(b-a) + \log(b-x_j).$$

Itt

$$\psi(x) = \frac{d \log(\Gamma(x))}{dx} = \frac{\frac{d}{dx}\Gamma(x)}{\Gamma(x)}$$

az úgynevezett digamma függvény.

Így a (7) egyenlet most a következő két egyenletrendszer alakját ölti:

$$\begin{gathered}\sum_{i=1}^{n} I_{\{S(\mathbf{X}^{(i)})>\hat{\gamma}_{k+1}\}} W\left(\mathbf{X}^{(i)}; \alpha^\star, \beta^\star, \alpha_k, \beta_k\right) \times \\ \times \left[\psi(\alpha_j + \beta_j) - \psi(\alpha_j) - \log(b-a) + \log\left(X_j^{(i)} - a\right)\right] = 0, \\ j = 1, \ldots, m\end{gathered} \tag{9}$$

és

$$\begin{gathered}\sum_{i=1}^{n} I_{\{S(\mathbf{X}^{(i)})>\hat{\gamma}_{k+1}\}} W\left(\mathbf{X}^{(i)}; \alpha^\star, \beta^\star, \alpha_k, \beta_k\right) \times \\ \times \left[\psi(\alpha_j + \beta_j) - \psi(\beta_j) - \log(b-a) + \log\left(b - X_j^{(i)}\right)\right] = 0, \\ j = 1, \ldots, m.\end{gathered} \tag{10}$$

A (9) és (10) egyenletrendszerekből azt kapjuk, hogy

$$\psi(\alpha_j + \beta_j) - \psi(\alpha_j) - \log(b-a) = A_j, \qquad j = 1, \ldots, m \tag{11}$$

$$\psi(\alpha_j + \beta_j) - \psi(\beta_j) - \log(b-a) = B_j, \qquad j = 1, \ldots, m \tag{12}$$

ahol

$$A_j = \frac{-\sum_{i=1}^{n} I_{\{S(\mathbf{X}^{(i)})>\hat{\gamma}_{k+1}\}} W\left(\mathbf{X}^{(i)}; \alpha^\star, \beta^\star, \alpha_k, \beta_k\right) \log\left(X_j^{(i)} - a\right)}{\sum_{i=1}^{n} I_{\{S(\mathbf{X}^{(i)})>\hat{\gamma}_{k+1}\}} W\left(\mathbf{X}^{(i)}; \alpha^\star, \beta^\star, \alpha_k, \beta_k\right)}$$

és

$$B_j = \frac{-\sum_{i=1}^{n} I_{\{S(\mathbf{X}^{(i)})>\hat{\gamma}_{k+1}\}} W\left(\mathbf{X}^{(i)}; \alpha^\star, \beta^\star, \alpha_k, \beta_k\right) \log\left(b - X_j^{(i)}\right)}{\sum_{i=1}^{n} I_{\{S(\mathbf{X}^{(i)})>\hat{\gamma}_{k+1}\}} W\left(\mathbf{X}^{(i)}; \alpha^\star, \beta^\star, \alpha_k, \beta_k\right)}.$$

Az α_j, β_j, $j = 1, \ldots, m$ változókra vonatkozó (11) és (12) nemlineáris egyenletrendszert Newton–Raphson-módszerrel oldjuk meg, jelölje a megoldásvektort $\hat{\alpha}_j, \hat{\beta}_j$, $j = 1, \ldots, m$.

3.2. Algoritmus. A CE-módszeren alapuló IS-eljárás béta eloszlás esetén.

1. Lépés. Válasszuk kezdésnek az $\alpha_0 = \alpha^*, \beta_0 = \beta^*$ paraméter vektorokat. Legyen ρ egy nullához közeli pozitív szám, melyet a rendszerjellemző függvény mintaértékei $(1-\rho)$ kvantilisének számításához használunk. Legyen $k = 0$, és menjünk a 2. lépésre az iteráció elkezdéséhez.
2. Lépés. Generáljunk egy $f(\mathrm{x}; \alpha_k, \beta_k)$ sűrűségfüggvényű béta eloszlás szerinti $\mathbf{X}^{(1)}, \ldots, \mathbf{X}^{(n)}$ véletlen mintát.
3. Lépés. Számítsuk ki az $S^{(i)} = S\left(\mathbf{X}^{(i)}\right)$ legrövidebb úthosszakat minden i-re, és rendezzük ezeket monoton növekvő sorrendbe: $S^{(1)} \leq \cdots \leq S^{(n)}$. Legyen $\hat{\gamma}_{k+1}$ a legrövidebb utak $(1-\rho)$ minta kvantilise, azaz $\hat{\gamma}_{k+1} = S^{[(1-\rho)n]}$, feltéve, hogy ez kisebb, mint γ. Különben legyen $\hat{\gamma}_{k+1} = \gamma$.
4. Lépés. Ugyanezt a véletlen mintát használva a (11), a (12) nemlineáris egyenletrendszer Newton–Raphson-módszerrel történő megoldásával adjunk becslést az α_{k+1}, β_{k+1} paraméter vektorokra .
5. Lépés. Simítsuk az új paraméter vektort az alábbi képlet szerint: $\alpha_{k+1} := \lambda\alpha_{k+1} + (1-\lambda)\alpha_k$ és $\beta_{k+1} := \lambda\beta_{k+1} + (1-\lambda)\beta_k$, ahol $0 \leq \lambda \leq 1$ előre rögzített simító paraméter.
6. Lépés. Ha $\hat{\gamma}_{k+1} = \gamma$, akkor legyenek az utolsó α_{k+1}, β_{k+1} paraméter vektorok az $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ vonatkoztatási paraméter vektorok, és menjünk a 7. lépésre, különben legyen $k = k+1$, és ismételjük a 2–6. lépéseket, ameddig el nem érjük a $\hat{\gamma}_{k+1} = \gamma$ egyenlőséget.
7. Lépés. Generáljunk egy $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ paraméter vektorú, béta eloszlású $X^{(1)}, \ldots, X^{(N)}$ véletlen mintát. Becsüljük a ritkán bekövetkező esemény valószínűségét az alábbi IS-becsléssel:

$$\hat{L} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} H\left(\mathbf{X}^{(i)}\right) W\left(\mathbf{X}^{(i)}; \alpha^*, \beta^*, \hat{\alpha}, \hat{\beta}\right).$$

Ekkor a becslés becsült szórásnégyzete:

$$\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} H\left(\mathbf{X}^{(i)}\right) W^2\left(\mathbf{X}^{(i)}; \alpha^*, \beta^*, \hat{\alpha}, \hat{\beta}\right) - \hat{L}^2\right)/N.$$

A CE-módszeren alapuló IS-eljárás alapgondolata az, hogy a $\rho(>> L)$ paraméter érték választásától függően létrehoz egy $\{\hat{v}_k\}$ és egy $\{\hat{\gamma}_k\}$ sorozatot, melyek közül az első tart az IS-eljárásban majd használandó vonatkoztatási paraméter vektorhoz, a második pedig monoton nemcsökkenő módon tart a ritkán bekövetkező esemény megadásában szereplő γ paraméter értékéhez. Sajnos azonban a ρ paraméter helytelen megválasztásával az is előfordulhat, hogy a ρ paramétertől függő minta kvantilisek értékeire a $\hat{\gamma}(\mathbf{v}_k,\rho) > \hat{\gamma}(\mathbf{v}_{k-1},\rho)$ egyenlőtlenség egyetlen k értékre sem következik be, mikor is az eljárás nem konvergál. Ezért is érdemes az eljárás alkalmazásakor nem túl kicsi ρ paraméter értéket használni. Hogy ezt a problémát biztosan elkerüljük, azért a CE-módszeren alapuló IS-eljárás következő módosítását javasoljuk. Ha a $\hat{\gamma}(\mathbf{v}_k,\rho)$ minta kvantilis nem teljesíti a $\hat{\gamma}(\mathbf{v}_k,\rho) > \hat{\gamma}(\mathbf{v}_{k-1},\rho)$ egyenlőtlenséget, akkor helyettesítsük a $\hat{\gamma}(\mathbf{v}_k,\rho)$ minta kvantilist az előző $\hat{\gamma}(\mathbf{v}_{k-1},\rho)$ értékkel, és azzal becsüljük a vonatkoztatási paraméter vektorokat, ha pedig $\hat{\gamma}(\mathbf{v}_k,\rho) \geq \gamma$, akkor legyen $\hat{\gamma}(\mathbf{v}_k,\rho) = \gamma$, és kezdjük el az IS-becslés számítását. Minden más esetben menjünk a következő iterációra, és addig folytassuk az eljárást, ameddig a konvergencia meg nem valósul. Az alábbiakban megadjuk a módosított algoritmus általános alakját, amely azután a korábbiakhoz hasonló módon specializálható az exponenciális, illetve béta eloszlású tevékenységi időkkel bíró sztochasztikus hálózatokban a legrövidebb út problémával kapcsolatos, ritkán bekövetkező esemény valószínűségének a becslésére.

3.3. Algoritmus. Az általános CE-módszeren alapuló IS-eljárás módosított változata.

1. Lépés. Válasszunk egy kezdő $\mathbf{v}_0$ paraméter vektort. Erre megfelel például $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}^*$. Válasszunk egy nullához közeli ρ pozitív számot a rendszerjellemző függvény mintaértékei $(1-\rho)$ kvantilisének számításához.
2. Lépés. Generáljunk egy $f(\mathbf{x};\mathbf{v}_0)$ sűrűségfüggvény szerinti $\mathbf{X}^{(1)},\ldots,\mathbf{X}^{(n)}$ véletlen mintát. Számítsuk ki a rendszerjellemző függvény $S^{(i)} = S\left(\mathbf{X}^{(i)}\right)$ mintaértékét minden i-re, és rendezzük azokat nagyság szerint növekvő sorrendbe: $S^{(1)} \leq \cdots \leq S^{(n)}$. Legyen $\hat{\gamma}_0$ a rendszerjellemző függvény mintaértékeinek az $(1-\rho)$ kvantilise, azaz $\hat{\gamma}_0 = S^{(\lceil(1-\rho)n\rceil)}$. Legyen $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_0$, $k = 1$, és menjünk a 3. lépésre az iteráció elkezdéséhez.
3. Lépés. Generáljunk egy $f(\mathbf{x};\mathbf{v}_k)$ sűrűségfüggvény szerinti $\mathbf{X}^{(1)},\ldots,\mathbf{X}^{(n)}$ véletlen mintát. Számítsuk ki a rendszerjellemző függvény $S^{(i)} = S\left(\mathbf{X}^{(i)}\right)$ mintaértékét minden i-re, és rendezzük azokat nagyság szerint növekvő sorrendbe: $S^{(1)} \leq \cdots \leq S^{(n)}$. Legyen $\hat{\gamma}_k$ a rendszerjellemző függvény mintaértékeinek az $(1-\rho)$ kvantilise, azaz $\hat{\gamma}_k = S^{(\lceil(1-\rho)n\rceil)}$.
4. Lépés. Ha $\hat{\gamma}_k \geq \gamma$, akkor legyen $\hat{\gamma}_k = \gamma$; különben, ha $\hat{\gamma}_k < \hat{\gamma}_{k-1}$, akkor legyen $\hat{\gamma}_k = \hat{\gamma}_{k-1}$, és a (7) egyenlet megoldásával adjunk becslést a $\mathbf{v}_k$ vektorra.
5. Lépés. Simítsuk az új paraméter vektort az alábbi képlet szerint: $\mathbf{v}_k := \lambda\mathbf{v}_k + (1-\lambda)\mathbf{v}_{k-1}$, ahol $0 \leq \lambda \leq 1$ előre rögzített simító paraméter.
6. Lépés. Ha $\hat{\gamma}_k = \gamma$, akkor legyen az utolsó $\mathbf{v}_k$ paraméter vektor a $\hat{\mathbf{v}}$ vonatkoztatási paraméter, és menjünk a 7. lépésre, különben legyen $k = k+1$, és ismételjük a 3–6. lépéseket, ameddig el nem érjük a $\hat{\gamma}_k = \gamma$ egyenlőséget.
7. Lépés. Generáljunk egy $f(\mathbf{x};\hat{\mathbf{v}})$ sűrűségfüggvény szerinti $\mathbf{X}^{(1)},\ldots,\mathbf{X}^{(N)}$ véletlen mintát. Becsüljük a ritkán bekövetkező esemény valószínűségét

az alábbi IS-becsléssel:

$$\hat{L} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} H\left(\mathbf{X}^{(i)}\right) W\left(\mathbf{X}^{(i)}; \mathbf{v}^{\star}, \hat{\mathbf{v}}\right).$$

Ekkor a becslés becsült szórásnégyzete:

$$\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} H\left(\mathbf{X}^{(i)}\right) W^2\left(\mathbf{X}^{(i)}; \mathbf{v}^{\star}, \hat{\mathbf{v}}\right) - \hat{L}^2\right)/N.$$

A ρ paraméter értéke központi szerepet játszik a CE-algoritmus konvergenciájában, sőt a konvergencia várhatóan csak akkor valósul meg, ha ρ már „kellőképpen" kicsi értékű. Annak az előre történő meghatározása, hogy milyen kicsi ρ érték fogadható már el, igen nehéz feladat. Ezt a problémát áthidalandó ρ értékét adaptív módon lehet változtatni (lásd Rubinstein (1999), Homem-de Mello és Rubinstein (2002)). A 2.1. algoritmus egy ilyen értelmű módosítását jelenti a következő algoritmus. Ehhez a következő konstansok használatára van szükség: ρ; $(0.01 \leq \rho \leq 0.1)$, $\theta > 1.0$, $\delta > 0.0$ és $0.0 < \lambda \leq 1.0$.

3.4. Algoritmus. Az általános CE-módszeren alapuló IS-eljárás Homem-de Mello és Rubinstein-féle módosítása.

1. Lépés. Válasszunk egy kezdő $\mathbf{v}_0$ paraméter vektort. Erre megfelel például $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}^{\star}$. Válasszunk egy nullához közeli ρ_0 pozitív számot a rendszerjellemző függvény mintaértékei $(1-\rho_0)$ kvantilisének számításához.
2. Lépés. Generáljunk egy $f(\mathbf{x}; \mathbf{v}_0)$ sűrűségfüggvény szerinti $\mathbf{X}^{(1)}, \ldots, \mathbf{X}^{(n)}$ véletlen mintát. Számítsuk ki a rendszerjellemző függvény $S^{(i)} = S\left(\mathbf{X}^{(i)}\right)$ mintaértékét minden i-re, és rendezzük azokat nagyság szerint növekvő sorrendbe: $S^{(1)} \leq \cdots \leq S^{(n)}$. Legyen $\hat{\gamma}_0$ a rendszerjellemző függvény mintaértékeinek az $(1-\rho_0)$ kvantilise, azaz $\hat{\gamma}_0 = S^{(\lceil(1-\rho_0)n\rceil)}$. Legyen $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_0$, $k = 1$, és menjünk a 3. lépésre az iteráció elkezdéséhez.
3. Lépés. Az aktuálisan rendelkezésre álló mintát használva, a (7) egyenlet megoldásával adjunk becslést a $\mathbf{v}_k$ paraméter vektorra.
4. Lépés. Generáljunk egy $f(\mathbf{x}; \mathbf{v}_k)$ sűrűségfüggvény szerinti új $\mathbf{X}^{(1)}, \ldots, \mathbf{X}^{(n)}$ véletlen mintát, és legyen $\rho_k = \rho$.
5. Lépés. Számítsuk ki a rendszerjellemző függvény $S^{(i)} = S\left(\mathbf{X}^{(i)}\right)$ mintaértékét minden i-re, és rendezzük azokat nagyság szerint növekvő sorrendbe: $S^{(1)} \leq \cdots \leq S^{(n)}$. Legyen $\hat{\gamma}_k$ a rendszerjellemző függvény mintaértékeinek az $(1-\rho_k)$ kvantilise, azaz $\hat{\gamma}_k = S^{(\lceil(1-\rho_k)n\rceil)}$.
6. Lépés. Ha $\hat{\gamma}_k \geq \gamma$, akkor legyen $\hat{\gamma}_k = \gamma$, és a (7) egyenlet megoldásával adjunk becslést a $\mathbf{v}_k$ paraméter vektorra. Legyen ez a $\hat{\mathbf{v}}$ vonatkoztatási paraméter és menjünk a 8. lépésre.

7. Lépés. Különben ellenőrizzük, hogy létezik-e olyan $\bar{\rho}$ érték, hogy $S^{[(1-\bar{\rho})n]} \geq \min\{\gamma, \hat{\gamma}_{k-1} + \delta\}$.

   7.1. Ha $\bar{\rho} = \rho_k$, akkor legyen $k = k + 1$, és ismételjük az iterációt a 3. lépéstől.

   7.2. Ha $\bar{\rho} < \rho_k$, akkor legyen $\rho_k = \bar{\rho}$, és menjünk az 5. lépésre.

   7.3. Ha létezik ilyen $\bar{\rho}$, akkor legyen $n = \theta n$, és menjünk a 4. lépésre.

8. Lépés. Generáljunk egy $f(\mathrm{x}; \hat{\mathrm{v}})$ sűrűségfüggvény szerinti $\mathrm{X}^{(1)}, \ldots, \mathrm{X}^{(N)}$ véletlen mintát. Becsüljük a ritkán bekövetkező esemény valószínűségét az alábbi IS-becsléssel:

$$\hat{L} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} H\left(\mathrm{X}^{(i)}\right) W\left(\mathrm{X}^{(i)}; \mathrm{v}^{*}, \hat{\mathrm{v}}\right).$$

Ekkor a becslés becsült szórásnégyzete:

$$\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} H\left(\mathrm{X}^{(i)}\right) W^{2}\left(\mathrm{X}^{(i)}; \mathrm{v}^{*}, \hat{\mathrm{v}}\right) - \hat{L}^{2}\right) / N.$$

4. Numerikus eredmények

Ebben a szakaszban olyan numerikus példákat mutatunk be, amelyek szemléltetik a CE-módszeren alapuló IS-eljárás alkalmazhatóságát, és a nyers Monte Carlo-módszerhez viszonyított hatékonyságát exponenciális, illetve béta eloszlású tevékenységeket tartalmazó kis, közepes és nagyméretű sztochasztikus hálózatokkal kapcsolatos, ritkán bekövetkező események valószínűségbecslésére. A nyers Monte Carlo-módszerhez viszonyított hatékonyságot a Hammersley és Handscombe (1967) klasszikus könyvében javasolt

$$\text{hatékonyság} = \frac{\text{szórásnégyzet} \times \text{CPU-idő (CMC)}}{\text{szórásnégyzet} \times \text{CPU-idő (CE)}}$$

mutatóval fogjuk mérni.

A számításokat Fortran nyelvű kóddal, 2.4 GHz órajelű, Intel © Pentium © processzoros számítógépen végeztük el.

4.1. Példa. Kisméretű sztochasztikus hálózat esete, amelyben a tevékenység idők béta eloszlásúak.

Ebben a példában egy 4 csúcsú és 5 élű sztochasztikus hálózatot tekintünk ([6] 1. ábra). Felteszszük, hogy a tevékenységi idők független, béta eloszlású valószínűségi változók. Legyenek a kezdeti paraméterek a következők:

$$\alpha = (0.350, 0.400, 0.310, 0.430, 0.420) \text{ és } \beta = (0.350, 0.440, 0.310, 0.430, 0.420).$$

Tegyük fel, hogy annak a valószínűségét akarjuk becsülni, hogy a legrövidebb út hossza nagyobb, mint $\gamma = 1.99$. Az $N = 200000$ mintaelemszámú CMC-eljárás 8.0×10^{-5} becslést adott, míg a CE-módszeren alapuló IS-eljárás $\rho = 0.05$ paraméterrel, $n = 2000$ elemszámú mintával végzett 5 iterációt követő $N = 200000$ mintaelemszámú IS-becsléssel 4.2×10^{-5} becslést eredményezett. Az ehhez szükséges többlet számolási igény minimális volt, ezért az IS-eljárás által elért szóráscsökkenés 1312 hatékonyságot eredményezett. Az alábbi táblázat a béta eloszlások vonatkoztatási paramétereinek és a $\hat{\gamma}_k = S^{\lceil(1-\rho)n\rceil}$ $(1-\rho)$-kvantilisek konvergáló sorozatát mutatja:

1. táblázat. A béta eloszlású vonatkoztatási paraméterek iterációnkénti változása.

k	$\hat{\alpha}$					$\hat{\beta}$					$\hat{\gamma}_k$
0	0.35	0.40	0.31	0.43	0.42	0.35	0.44	0.31	0.43	0.42	
1	0.58	0.69	0.31	0.75	0.71	0.35	0.45	0.31	0.45	0.43	1.42
2	1.25	1.26	0.31	1.35	1.53	0.36	0.46	0.30	0.45	0.44	1.70
3	3.05	2.70	0.32	2.52	2.59	0.36	0.46	0.31	0.46	0.44	1.93
4	6.23	5.55	0.31	5.09	5.26	0.37	0.47	0.30	0.48	0.45	1.96
5	12.1	10.3	0.31	10.1	11.6	0.37	0.50	0.31	0.50	0.47	1.99

Az alábbi táblázat a nyers Monte Carlo-szimulációnak erre a feladatra elért eredményeit tartalmazza. A továbbiak során ehhez fogjuk viszonyítani a különböző CE-módszereken alapuló IS-eljárások hatékonyságát.

2. táblázat. Kisméretű hálózat nyers Monte Carlo-szimulációval nyert eredményei.

a csúcsok száma = 4	az élek száma = 5	$\gamma = 1.99$	minta méret = 2×10^5
	becslés	szórás	CPU-idő
CMC	8.0×10^{-5}	1.9×10^{-5}	2.42

3. táblázat. A CE-módszeren alapuló IS-eljárás különböző verziói és kezdőparaméterei melletti eredményeinek összehasonlító táblázata.

		Alap			Módosított			Homem de Mello és Rubinstein		
		$n = 2 \times 10^3$			$n = 2 \times 10^3$			$n = 2 \times 10^3$		
		$N = 2 \times 10^5$			$N = 2 \times 10^5$			$N = 2 \times 10^5$		
ρ	λ	becslés	szórás	haté-kony-ság	becslés	szórás	haté-kony-ság	becslés	szórás	haté-kony-ság
0.10	0.1	4.3×10^{-5}	2.2×10^{-7}	5126.5	4.3×10^{-5}	2.2×10^{-7}	5106.3	4.2×10^{-5}	3.6×10^{-7}	**1113.2**
0.10	0.5	4.2×10^{-5}	2.2×10^{-7}	5346.9	4.2×10^{-5}	2.8×10^{-7}	3454.4	4.2×10^{-5}	6.8×10^{-7}	418.1
0.10	0.7	4.2×10^{-5}	1.7×10^{-7}	**9190.5**	4.2×10^{-5}	1.8×10^{-7}	**9302.8**	4.3×10^{-5}	4.7×10^{-7}	879.5
0.10	1.0	4.2×10^{-5}	2.7×10^{-7}	3717.7	4.2×10^{-5}	2.8×10^{-7}	3568.1	4.3×10^{-5}	9.4×10^{-7}	219.5
0.05	0.1	4.3×10^{-5}	3.7×10^{-7}	1900.6	4.3×10^{-5}	3.6×10^{-7}	1934.4	4.2×10^{-5}	7.4×10^{-7}	311.2
0.05	0.5	4.2×10^{-5}	2.5×10^{-7}	4208.7	4.2×10^{-5}	2.5×10^{-7}	4215.5	4.1×10^{-5}	9.0×10^{-7}	238.3
0.05	0.7	4.2×10^{-5}	3.4×10^{-7}	2393.2	4.2×10^{-5}	3.4×10^{-7}	2389.7	4.3×10^{-5}	7.1×10^{-7}	395.2
0.05	1.0	4.0×10^{-5}	1.1×10^{-6}	223.2*	4.0×10^{-5}	1.1×10^{-6}	226.7*	4.3×10^{-5}	7.6×10^{-7}	353.8
0.01	0.1	4.3×10^{-5}	4.3×10^{-7}	1426.6	4.3×10^{-5}	4.3×10^{-7}	1424.8	4.2×10^{-5}	1.5×10^{-6}	85.0
0.01	0.5	4.2×10^{-5}	2.2×10^{-7}	5788.9	4.2×10^{-5}	2.2×10^{-7}	5755.5	3.9×10^{-5}	1.9×10^{-6}	51.2
0.01	0.7	4.2×10^{-5}	2.7×10^{-7}	3990.4	4.2×10^{-5}	2.7×10^{-7}	3958.7	4.2×10^{-5}	1.9×10^{-6}	54.1
0.01	1.0	4.2×10^{-5}	1.9×10^{-7}	7127.4	4.2×10^{-5}	1.9×10^{-7}	7193.9	4.2×10^{-5}	2.0×10^{-6}	65.3

4. táblázat. A $\hat{\gamma}_t$, $t = 1, 2, \ldots$ értékek különböző CE-verziók melletti konvergenciája, amikor $\rho = 0.1$, $\lambda = 0.1$, $\gamma = 1.99$, $n = 2 \times 10^3$

t	Alap	Módosított	HdM és R
1	1.195	1.197	1.197
2	1.414	1.417	1.417
3	1.575	1.588	1.620
4	1.722	1.725	1.750
5	1.828	1.828	1.832
6	1.894	1.893	1.899
7	1.937	1.936	1.934
8	1.961	1.961	1.958
9	1.973	1.973	1.973
10	1.983	1.983	1.981
11	1.989	1.989	1.990
12	1.990	1.990	

5. táblázat. A $\hat{\gamma}_t$, $t = 1, 2, \ldots$ értékek különböző CE-verziók melletti konvergenciája, amikor $\rho = 0.05$, $\lambda = 0.7$, $\gamma = 1.99$, $n = 2 \times 10^3$

t	Alap	Módosított	HdM és R
1	1.395	1.395	1.398
2	1.419	1.419	1.908
3	1.908	1.908	1.990
4	1.985	1.984	
5	1.990	1.990	

6. táblázat. A $\hat{\gamma}_t$, $t = 1, 2, \ldots$ értékek különböző CE-verziók melletti konvergenciája, amikor $\rho = 0.01$, $\lambda = 0.5$, $\gamma = 1.99$, $n = 2 \times 10^3$

t	Alap	Módosított	HdM és R
1	1.741	1.741	1.741
2	1.777	1.777	1.990
3	1.983	1.983	
4	1.990	1.990	

7. táblázat. A CE-módszeren alapuló IS-eljárás különböző verziói és kezdőparaméterei melletti eredményeinek az összehasonlító táblázata

		Alap			Módosított			Homem de Mello és Rubinstein		
		$n = 2 \times 10^3$			$n = 2 \times 10^3$			$n = 2 \times 10^3$		
		$N = 2 \times 10^5$			$N = 2 \times 10^5$			$N = 2 \times 10^5$		
ρ	λ	becslés	szórás	haté-kony-ság	becslés	szórás	haté-kony-ság	becslés	szórás	haté-kony-ság
0.10	0.1	6.7×10^{-6}	2.1×10^{-7}	1514.6	7.1×10^{-6}	2.4×10^{-7}	996.9	6.6×10^{-6}	2.9×10^{-7}	303.1
0.10	0.5	8.3×10^{-6}	8.0×10^{-7}	136.7	8.1×10^{-6}	9.8×10^{-7}	91	6.6×10^{-6}	2.4×10^{-7}	1531.4
0.10	0.7	8.7×10^{-6}	1.4×10^{-6}	47.4	9.4×10^{-6}	2.3×10^{-7}	17.2	7.0×10^{-6}	4.2×10^{-7}	485.9
0.10	1.0	2.8×10^{-5}	1.5×10^{-5}	0.38	7.1×10^{-6}	1.6×10^{-6}	32.6	6.6×10^{-6}	3.8×10^{-7}	621
0.05	0.1	7.5×10^{-6}	2.6×10^{-7}	1116.1	7.2×10^{-6}	2.4×10^{-7}	1399.8	7.3×10^{-6}	2.5×10^{-7}	911.8
0.05	0.5	6.6×10^{-6}	3.6×10^{-7}	668.8	2.9×10^{-6}	3.6×10^{-7}	677.4	7.4×10^{-6}	4.7×10^{-7}	391.6
0.05	0.7	6.2×10^{-6}	5.0×10^{-7}	366	3.7×10^{-8}	5.0×10^{-9}	366.7	6.7×10^{-6}	4.9×10^{-7}	369.6
0.05	1.0	6.3×10^{-6}	6.4×10^{-7}	223.3	6.8×10^{-6}	6.4×10^{-6}	226.8	8.9×10^{-6}	2.4×10^{-6}	15.1
0.01	0.1	6.9×10^{-6}	5.0×10^{-7}	344.0	6.8×10^{-6}	4.7×10^{-7}	394.8	6.8×10^{-6}	6.8×10^{-7}	182
0.01	0.5	6.3×10^{-6}	1.4×10^{-6}	4.7	1.2×10^{-6}	3.6×10^{-6}	6.9	1.7×10^{-5}	6.4×10^{-6}	2.1
0.01	0.7	6.6×10^{-6}	1.7×10^{-6}	31.3	6.9×10^{-8}	7.0×10^{-7}	182.4	2.9×10^{-6}	1.4×10^{-6}	47.6
0.01	1.0	1.7×10^{-6}	3.1×10^{-7}	946.7	1.7×10^{-10}	2.6×10^{-6}	13.1	9.1×10^{-6}	7.9×10^{-6}	1.5

4.2. Példa. Közepes méretű sztochasztikus hálózat esete, amelyben a tevékenység idők béta eloszlásúak.

A következő példában a Prékopa, Long és Szántai (2003) dolgozatban közölt közepes méretű sztochasztikus hálózatot használtuk. Ennek 28 csúcsa és 66 éle van. Az 1-es és a 28-as csúcsok rendre a kezdő- és a végcsúcsok. Az élek tevékenységi időket reprezentálnak, amelyek független béta eloszlásúak.

A paraméter vektorok komponenseinek véletlenszerűen adtunk $1.0 + u(0,1)$ kezdeti értékeket (melyek a valódi paraméter értékekkel egybeesnek). Itt $u(0,1)$ a $[0,1]$ intervallumon egyenletes eloszlású véletlen számot jelent. A CE-fázis minta elemszáma $n = 2000$ volt, a ρ paramétert a $0.01 \leq \rho \leq 0.1$, a λ paramétert a $0.0 < \lambda < 1.0$ feltételnek elegettevően választottuk. Annak a valószínűségét becsültük, hogy a legrövidebb út hossza nagyobb, mint $\gamma = 3$. Az $N = 200000$ mintaelemszámú CMC-eljárás 1.5×10^{-5} becslést adott. A különböző CE-módszeren alapuló IS-eljárások hatékonyságát ehhez az eredményhez viszonyítva adtuk meg a következő táblázatban.

8. táblázat. A $\hat{\gamma}_t$, $t = 1, 2, \ldots$ értékek különböző CE-verziók melletti konvergenciája, amikor $\rho = 0.05$, $\lambda = 0.7$, $\gamma = 3$, $n = 2 \times 10^3$

t	Alap	Módosított	HdM és R
1	2.171	2.164	2.167
2	2.456	2.171	2.436
3	2.663	2.456	2.728
4	2.875	2.663	3.000
5	3.000	2.875	
6		3.000	

9. táblázat. A $\hat{\gamma}_t$, $t = 1, 2, \ldots$ értékek különböző CE-verziók melletti konvergenciája, amikor $\rho = 0.1$, $\lambda = 0.1$, $\gamma = 3$, $n = 2 \times 10^3$

t	Alap	Módosított	HdM és R
1	2.030	2.044	2.044
2	2.112	2.111	2.112
3	2.138	2.135	2.150
4	2.205	2.187	2.195
5	2.197	2.215	2.255
6	2.272	2.245	2.288

9. táblázat: (folytatás)

t	Alap	Módosított	HdM és R
7	2.278	2.279	2.306
8	2.343	2.311	2.356
9	2.359	2.349	2.418
10	2.385	2.374	2.434
11	2.415	2.383	2.481
12	2.431	2.408	2.513
13	2.453	2.459	2.541
14	2.461	2.484	2.577
15	2.491	2.488	2.603
16	2.533	2.516	2.649
17	2.574	2.539	2.676
18	2.578	2.557	2.709
19	2.592	2.578	2.749
20	2.600	2.591	2.769
21	2.631	2.635	2.818
22	2.671	2.640	2.863
23	2.665	2.663	2.869
24	2.696	2.663	2.914
25	2.719	2.672	2.939
26	2.747	2.698	3.000
27	2.759	2.722	
28	2.740	2.740	
29	2.769	2.754	
30	2.774	2.776	
31	2.809	2.783	
32	2.837	2.822	
33	2.851	2.839	
34	2.852	2.851	
35	2.887	2.884	
36	2.909	2.899	
37	2.957	2.906	
38	2.974	2.929	
39	3.000	2.948	

9. táblázat: (folytatás)

t	Alap	Módosított	HdM és R
40		2.960	
41		2.978	
42		2.999	
43		3.000	

10. táblázat. A $\hat{\gamma}_t$, $t = 1, 2, \ldots$ értékek különböző CE-verziók melletti konvergenciája, amikor $\rho = 0.01$, $\lambda = 0.5$, $\gamma = 3$, $n = 2 \times 10^3$

t	Alap	Módosított	HdM és R
1	2.388	2.421	2.421
2	2.699	2.743	2.743
3	2.962	3.000	3.000
4	3.000		

4.3. Példa. Nagyméretű sztochasztikus hálózat esete, amelyben a tevékenység idők béta eloszlásúak.

Ebben a példában egy véletlenszerűen előállított, viszonylag nagyméretű sztochasztikus hálózatot használtunk. Ennek 500 csúcsa és 1000 éle volt. Az élek sztochasztikusan független, béta eloszlású tevékenységi időket reprezentáltak. A paraméter vektorok komponenseinek véletlenszerűen adtunk $0.1 + 8.0 \times u(0, 1)$ kezdeti értékeket (melyek a valódi paraméter értékekkel egybeesnek). A CE-fázis minta elemszáma $n = 2000$ volt, a ρ paramétert a $0.01 \leq \rho \leq 0.1$, a λ paramétert a $0.0 < \lambda < 1.0$ feltételnek elegettevően választottuk. Annak a valószínűségét becsültük, hogy a legrövidebb út hossza nagyobb, mint $\gamma = 52.0$. Az $N = 200000$ mintaelemszámú CMC-eljárás 5.0×10^{-5} becslést adott. A különböző CE-módszeren alapuló IS-eljárások hatékonyságát ehhez az eredményhez viszonyítva adtuk meg a következő táblázatban.

11. táblázat. A CE-módszeren alapuló IS-eljárás különböző verziói és kezdőparaméterei melletti eredményeinek az összehasonlító táblázata ($\rho = 0.01$ esetén mindig $n = 4 \times 10^3$ elemszámú mintát használtunk)

		Alap			Módosított			Homem de Mello és Rubinstein		
		$n = 2 \times 10^3$			$n = 2 \times 10^3$			$n = 2 \times 10^3$		
		$N = 2 \times 10^5$			$N = 2 \times 10^5$			$N = 2 \times 10^5$		
ρ	λ	becslés	szórás	haté-kony-ság	becslés	szórás	haté-kony-ság	becslés	szórás	haté-kony-ság
0.10	0.1	3.3×10^{-5}	3.4×10^{-6}	12.42	3.3×10^{-5}	3.4×10^{-6}	12.4	3.5×10^{-5}	5.3×10^{-6}	4.3
0.10	0.5	1.9×10^{-5}	4.6×10^{-6}	8.1*	1.9×10^{-5}	4.6×10^{-6}	8.2*	1.3×10^{-5}	2.0×10^{-6}	40.4
0.10	0.7	4.9×10^{-6}	1.5×10^{-6}	69.4	4.9×10^{-6}	1.5×10^{-6}	69.8	5.4×10^{-5}	4.0×10^{-5}	0.1
0.10	1.0	1.0×10^{-6}	4.4×10^{-6}	763.1	1.0×10^{-6}	4.4×10^{-7}	765.1	2.9×10^{-6}	1.1×10^{-6}	122.8
0.05	0.1	3.5×10^{-5}	7.9×10^{-6}	2.6	3.7×10^{-5}	7.8×10^{-5}	3.09	3.0×10^{-5}	3.4×10^{-6}	12
0.05	0.5	2.3×10^{-6}	5.4×10^{-7}	546.9	4.7×10^{-6}	2.0×10^{-6}	39.5	1.8×10^{-5}	9.4×10^{-7}	2.0
0.05	0.7	1.2×10^{-6}	4.4×10^{-7}	767.9	3.8×10^{-7}	1.4×10^{-7}	7388.8	2.4×10^{-6}	8.7×10^{-7}	209.5
0.05	1.0	1.9×10^{-7}	8.5×10^{-8}	20001.3	1.9×10^{-7}	5.5×10^{-8}	48182.2	1.2×10^{-6}	4.1×10^{-6}	986.7
0.01	0.1	1.7×10^{-5}	3.5×10^{-5}	12.7	1.7×10^{-5}	3.5×10^{-5}	12.7	3.0×10^{-5}	6.8×10^{-5}	2.8
0.01	0.5	5.1×10^{-7}	3.5×10^{-7}	1279.2	5.1×10^{-7}	3.5×10^{-7}	1307.8	2.3×10^{-5}	1.5×10^{-5}	0.7
0.01	0.7	2.5×10^{-10}	1.5×10^{-10}	∞	2.5×10^{-10}	1.5×10^{-10}	∞	1.3×10^{-7}	6.0×10^{-8}	47212.8
0.01	1.0	7.5×10^{-9}	1.8×10^{-9}	56069280	2.1×10^{-9}	1.8×10^{-9}	56126172.1	3.0×10^{-5}	1.2×10^{-5}	1.0

12. táblázat. A $\hat{\gamma}_t$, $t = 1, 2, \ldots$ értékek különböző CE-verziók melletti konvergenciája, amikor $\rho = 0.02$, $\lambda = 0.05$, $\gamma = 52$, $n_1 = 2 \times 10^3$

1	48.139	48.371	48.371
2	48.447	48.371	48.520
3	48.674	48.520	48.692
4	48.887	48.676	48.719
5	49.102	48.904	49.002
6	49.077	49.097	49.206
7	49.510	49.335	49.486
8	49.700	49.463	49.683
9	49.796	49.468	49.756
10	50.027	49.630	50.073
11	50.152	50.008	50.190
12	50.448	50.197	50.409
13	50.436	50.522	50.409
14	50.575	50.610	50.417
15	50.857	50.726	50.939
16	51.268	51.418	50.965
17	51.361	51.418	51.026
18	51.506	51.472	51.370
19	51.777	51.472	51.669
20	51.564	51.806	52.000
21	51.885	52.000	
22	52.000		

13. táblázat. A $\hat{\gamma}_t$, $t = 1, 2, \ldots$ értékek különböző CE-verziók melletti konvergenciája, amikor $\rho = 0.01$, $\lambda = 0.5$, $\gamma = 52$, $n_1 = 2 \times 10^3$

t	Alap	Módosított	HdM és R
1	48.855	48.855	48.855
2	48.865	48.865	52.000
3	50.736	50.736	
4	52.000	52.000	

14. táblázat. A $\hat{\gamma}_t$, $t = 1, 2, \ldots$ értékek különböző CE-verziók melletti konvergenciája, amikor $\rho = 0.05$, $\lambda = 0.7$, $\gamma = 52$, $n_1 = 2 \times 10^3$

t	Alap	Módosított	HdM és R
1	47.439	47.537	47.566
2	49.391	49.409	49.508
3	51.159	51.131	52.000
4	52.000	52.000	

4.4. Példa. Kisméretű sztochasztikus hálózat esete, amelyben a tevékenység idők exponenciális eloszlásúak.

Ebben a példában ugyanazt a 4 csúcsú és 5 élű sztochasztikus hálózatot tekintjük, mint amelyet a béta eloszlású, kisméretű sztochasztikus hálózat esetén már használtunk. Felteszszük, hogy a tevékenységi idők független, exponenciális eloszlású valószínűségi változók. Legyenek a kezdeti paraméterek a következők: $\mathbf{v} = (0.350, 0.400, 0.310, 0.430, 0.420)$. Tegyük fel, hogy annak a valószínűségét akarjuk becsülni, hogy a legrövidebb út hossza nagyobb, mint $\gamma = 2$. A CE-eljárási részben mindig $n = 2000$ elemű mintát használtunk, kivéve a $\rho = 0.04$ eseteket, amikor a 3. iterációt követően áttértünk az $N = 200000$ elemű minták használatára. Az alábbi táblázat az exponenciális eloszlások vonatkoztatási paraméterei, valamint a $\hat{\gamma}_k = S^{[(1-\rho)n]}$ $(1-\rho)$-kvantilisek konvergáló sorozatát mutatja:

15. táblázat. Az exponenciális eloszlású vonatkoztatási paraméterek iterációnkénti változása.

k	$\hat{v}_1$	$\hat{v}_2$	$\hat{v}_3$	$\hat{v}_4$	$\hat{v}_5$	$\hat{\gamma}$
0	0.25	0.40	0.10	0.30	0.20	
1	0.64	0.74	0.10	0.58	0.45	0.78
2	1.45	1.44	0.11	0.53	0.64	1.66
3	1.69	1.66	0.11	0.66	0.75	2.00

Az alábbi táblázat a nyers Monte Carlo-szimulációnak erre a feladatra elért eredményeit tartalmazza. A továbbiak során ehhez fogjuk viszonyítani a különböző CE-módszereken alapuló IS-eljárások hatékonyságát.

16. táblázat Kisméretű hálózat nyers Monte Carlo-szimulációval nyert eredményei

a csúcsok száma = 4	az élek száma = 5	$\gamma = 2$	minta méret $= 2 \times 10^5$
	becslés	szórás	CPU-idő
CMC	3.5×10^{-5}	1.9×10^{-5}	0.20

17. táblázat. A CE-módszeren alapuló IS-eljárás különböző verziói és kezdőparaméterei melletti eredményeinek az összehasonlító táblázata

		Alap			Módosított			Homem de Mallo és Rubinstein		
		$n = 2 \times 10^3$			$n = 2 \times 10^3$			$n = 2 \times 10^3$		
		$N = 2 \times 10^5$			$N = 2 \times 10^5$			$N = 2 \times 10^5$		
ρ	λ	becslés	szórás	haté-kony-ság	becslés	szórás	haté-kony-ság	becslés	szórás	haté-kony-ság
0.10	0.1	1.6×10^{-5}	3.0×10^{-7}	765.1	1.6×10^{-5}	3.0×10^{-7}	1094.7	1.7×10^{-5}	3.0×10^{-7}	1020
0.10	0.5	1.7×10^{-5}	3.3×10^{-7}	945.5	1.7×10^{-5}	3.3×10^{-7}	809.8	1.7×10^{-5}	3.3×10^{-7}	1013.9
0.10	0.7	1.6×10^{-5}	3.2×10^{-7}	885.5	1.6×10^{-5}	3.1×10^{-7}	739.1	1.7×10^{-5}	3.2×10^{-7}	946.5
0.10	1.0	1.6×10^{-5}	3.1×10^{-7}	930.2	1.6×10^{-5}	3.2×10^{-7}	708.7	1.6×10^{-5}	3.1×10^{-7}	985.2
0.05	0.1	1.6×10^{-5}	3.0×10^{-7}	1172	1.7×10^{-5}	3.4×10^{-7}	824.1	1.6×10^{-5}	3.0×10^{-7}	1245
0.05	0.5	1.6×10^{-5}	3.0×10^{-7}	966.4	1.6×10^{-5}	3.4×10^{-7}	606.2	1.6×10^{-5}	4.0×10^{-7}	1013.5
0.05	0.7	1.6×10^{-5}	3.0×10^{-7}	1001	1.7×10^{-5}	3.2×10^{-7}	712.5	1.6×10^{-5}	3.0×10^{-7}	1065.4
0.05	1.0	1.6×10^{-5}	3.7×10^{-7}	550.6	1.6×10^{-5}	3.1×10^{-7}	764.9	1.6×10^{-5}	5.7×10^{-7}	577.7
0.01	0.1	1.7×10^{-5}	3.9×10^{-7}	660.5	1.7×10^{-5}	4.9×10^{-7}	368.6	1.7×10^{-5}	4.0×10^{-7}	712.4
0.01	0.5	1.6×10^{-5}	3.2×10^{-7}	727.2	1.7×10^{-5}	4.2×10^{-7}	419.8	1.6×10^{-5}	3.2×10^{-7}	770.3
0.01	0.7	1.7×10^{-5}	3.2×10^{-7}	740.6	1.6×10^{-5}	3.5×10^{-7}	586.6	1.7×10^{-5}	3.2×10^{-7}	773.2
0.01	1.0	1.6×10^{-5}	4.6×10^{-7}	370.3	1.6×10^{-5}	4.6×10^{-7}	369.2	1.6×10^{-5}	4.6×10^{-6}	384.8

4.5. Példa. Közepes méretű sztochasztikus hálózat esete, amelyben a tevékenység idők exponenciális eloszlásúak.

A következő példában is a Prékopa, Long és Szántai (2003) dolgozatban közölt közepes méretű sztochasztikus hálózatot használtuk. Ennek 28 csúcsa és 66 éle van. Az 1-es és a 28-as csúcsok rendre a kezdő- és a végcsúcsok. Az élek tevékenységi időket reprezentálnak, amelyek független exponenciális eloszlásúak. A paraméter vektorok komponenseinek véletlenszerűen adtunk $1.0 + u(0,1)$ kezdeti értékeket (melyek a valódi paraméter értékekkel egybeesnek). Itt $u(0,1)$ a $[0,1]$ intervallumon egyenletes eloszlású véletlen számot jelent. A ρ paramétert a $0.001 \leq \rho \leq 0.01$, a λ paramétert a $0.0 < \lambda < 1.0$ feltételnek elegettevően választottuk. Annak a valószínűségét becsültük, hogy a legrövidebb út hossza nagyobb, mint $\gamma = 2$.

Az alábbi táblázat a nyers Monte Carlo-szimulációnak erre a feladatra elért eredményeit tartalmazza. A továbbiak során ehhez fogjuk viszonyítani a különböző CE-módszereken alapuló IS-eljárások hatékonyságát.

18. táblázat. Kisméretű hálózat nyers Monte Carlo-szimulációval nyert eredményei

a csúcsok száma = 4	az élek száma = 5	$\gamma = 2$	minta méret = 2×10^5
	becslés	szórás	CPU-idő
CMC	1.5×10^{-5}	8.6×10^{-6}	10.13

19. táblázat. A CE-módszeren alapuló IS-eljárás különböző verziói és kezdőparaméterei melletti eredményeinek az összehasonlító táblázata

		Alap			Módosított			Homem de Mello és Rubinstein		
		$n = 4 \times 10^3$			$n = 4 \times 10^3$			$n = 4 \times 10^3$		
		$N = 2 \times 10^5$			$N = 2 \times 10^5$			$N = 2 \times 10^5$		
ρ	λ	becslés	szórás	haté-kony-ság	becslés	szórás	haté-kony-ság	becslés	szórás	haté-kony-ság
0.001	0.1	1.2×10^{-7}	5.6×10^{-8}	∞	2.5×10^{-6}	4.3×10^{-7}	277.2	6.8×10^{-7}	2.6×10^{-7}	541
0.001	0.5	2.7×10^{-9}	1.7×10^{-9}	∞	3.5×10^{-7}	2.7×10^{-7}	811.8	1.7×10^{-8}	1.2×10^{-8}	∞
0.001	0.7	1.0×10^{-11}	9.0×10^{-12}	∞	8.4×10^{-7}	4.5×10^{-7}	296.5	1.1×10^{-10}	5.2×10^{-10}	∞
0.001	1.0	1.6×10^{-14}	9.3×10^{-16}	∞	3.7×10^{-9}	3.2×10^{-9}	∞	1.6×10^{-11}	1.3×10^{-11}	∞
0.005	0.1	2.2×10^{-6}	5.5×10^{-7}	113.8	3.7×10^{-6}	7.3×10^{-7}	112.8	7.9×10^{-7}	4.7×10^{-7}	167.7
0.005	0.5	1.8×10^{-7}	1.1×10^{-7}	4071	7.3×10^{-7}	4.6×10^{-7}	273.6	1.8×10^{-7}	1.1×10^{-7}	4113.6
0.005	0.7	4.8×10^{-16}	4.8×10^{-16}	∞	3.6×10^{-7}	1.0×10^{-7}	5396.9	4.2×10^{-16}	4.1×10^{-16}	∞
0.005	1.0	* * **	* * **	–	3.2×10^{-8}	2.9×10^{-8}	∞	* * **	* * **	–
0.010	0.1	1.3×10^{-8}	6.3×10^{-9}	∞	3.0×10^{-6}	5.1×10^{-7}	142.2	2.8×10^{-7}	1.4×10^{-7}	1462.7
0.010	0.5	6.7×10^{-12}	5.4×10^{-12}	∞	1.8×10^{-6}	5.7×10^{-7}	170.6	6.8×10^{-12}	5.4×10^{-12}	∞
0.010	0.7	2.2×10^{-7}	6.8×10^{-8}	∞	3.4×10^{-10}	2.1×10^{-10}	∞	6.9×10^{-15}	6.8×10^{-15}	∞
0.010	1.0	* * **	* * **	–	9.0×10^{-9}	2.4×10^{-10}	∞	* * **	* * **	–

Hivatkozások

[1] ASMUSSEN, S. AND RUBINSTEIN, R.Y., (1995). *Steady state rare events simulation in queueing models and its complexity properties.* In Advances in Queueing: Theory, Methods and Open Problems, 429–461. CRC Press.

[2] DEÁK, I., (2001). *Computer experiences with successive regression approximations for solving equations*, Optimization Theory (F. Gianessi, P. Pardalos, T. Rapcsák eds.) Kluwer Academic Publishers, Dordrecht 65–80.

[3] DEÁK, I., (2002). *Computing two-stage stochastic programming problems by successive regression approximations*, Stochastic Optimizatin Techniques – Numerical Methods and Technical Applications (ed. K. Marti) Springer LNEMS Vol. **513**, 91–102.

[4] DE BOER,.P.T., (2000). *Analysis and efficient simulation of queueing models of telecommunication systems.* Ph.D. thesis, University of Twente.

[5] DE BOER,P.T., KROESE, D.P. AND RUBINSTEIN, R.Y., (2002). *A fast cross entropy method for estimating buffer overflows in queueing networks.* In Fourth Workshop on Rare Event Simulation and Related Combinatorial Optimization Problems, RESIM/COP 2002.

[6] DE BOER, P.T., KROESE, D.P., MANNOR, S. AND RUBINSTEIN, R.Y., (2005). *A tutorial on the cross entropy method.* Annals of Operations Research **134** (1) 19–67.

[7] DE BOER, P.T., NICOLA, V.F. AND RUBINSTEIN, R.Y., (2000). *Adaptive importance sampling simulation of queueing networks*, www.cs.utwente.nl/~ptdeboer/ce/html.

[8] FÁBIÁN, C. I. AND SZŐKE, Z., (2007). *Solving two-stage stochastic programming problems with level decomposition*, Computational Management Science 4 (2007), 313–353.

[9] GARVELS, M.J.J., (2000). *The splitting method in rare event simulation.* Ph.D. thesis, University of Twente.

[10] HAMMERSLEY, J.M. AND HANDSCOMB, D.C., (1967). *Monte Carlo Methods.* London Methuen & Coltd.

[11] HOMEM-DE MELLO, T. AND RUBINSTEIN, R.Y., (2002a). *Rare event probability estimation for static models via cross-entropy and importance sampling.* Submitted for publication.

[12] HOMEM-DE MELLO, T. AND RUBINSTEIN, R.Y., (2002b). *Estimation of Rare event probabilities using cross-entropy.* In Proceedings of the 2002 Winter Simulation Conference, ed. E. Yucesan C.-H. Chen, J.L. Snowdon, and J.M. Charnes.

[13] KEITH, J. AND KROESE, D.P., SABRES: *Sequence Alignment by Rare Event Simulation.* Submitted, www.maths.uq.edu.au/~kroese/publications.html.

[14] LIEBER, D., RUBINSTEIN, R.Y. AND ELMAKIS, (1997). *Quick estimation of rare events in stochastic networks.* IEEE Transactions on Reliability., **46(2)**, 254–265.

[15] KLEIJNEN, J.P.C. AND RUBINSTEIN, R.Y., (1996). *Optimization and sensitivity analysis of computer simulation models by the score function method.* European Journal of Operations Research, **88**, 413–427.

[16] MCLACHLAN, G. AND KRISHNAN, T., (1997). *The EM algorithm and extensions.* John Wiley & Sons..

[17] PRÉKOPA A., (1995). *Stochastic Programming*, Kluwer Academic Publisher, Dordrecht és Akadémiai Kiadó, Budapest.

[18] PRÉKOPA, A., LONG, J. AND SZÁNTAI, T., (2003). *New bounds and approximation for the probability distribution of the length of the critical path.* in: Marti K, Ermoliev Y, Pflug G. (eds) Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems. Dynamical Stochastic Optimization, Vol. **532**. Springer, Berlin, 293–320.

[19] RUBINSTEIN, R.Y., (1997). *Optimization of computer simulation models with rare events.* European Journal of Operations Research, **99**, 89–112.

[20] RUBINSTEIN, R.Y., (1999). *The Cross-Entropy method for combinatorial and continuous Optimization.* Methodology and Computing in Applied Probability, **1**, 127–190.

[21] RUBINSTEIN, R.Y., (2001). *Combinatorial optimization, cross-entropy, ants and rare events.* In S. Uryasev and P.M. Pardalos, editors, Stochastic Optimization: Algorithms and Applications, Kluwer, 304–358.

[22] RUBINSTEIN, R.Y., (2002). *Cross-entropy and rare events for maximal cut and partition problems*, Acm Transactions on Modeling and Computer Simulation, Vol. **12**, No. **1**, 27–53.

[23] RUBINSTEIN, R.Y. AND KROESE, D., (2002). *Lecture notes on the cross-entropy method.* Manuscript.

[24] RUBINSTEIN, R.Y. AND MELAMED, B., (1998). *Modern Simulation and Modeling*, John Wiley & Sons, New York.

[25] RUBINSTEIN, R.Y. AND SHAPIRO, A., (1993). *Discrete Event Systems: Sensitivity Analysis and Stochastic Optimization via the Score Function Method*, John Wiley & Sons, New York.

[26] SHAHABUDDIN, P., (1995). *Rare Event Simulation of Stochastic Systems*, Proceedings of the 1995 Winter Simulation Conference, Washington, D.C., IEEE Press, 178–185.

(Beérkezett: 2007. szeptember 25.)

GOUDA ASHRAF és SZÁNTAI TAMÁS
BMGE, TTK
Matematikai Intézet
1111 Budapest, Műegyetem rkp. 3.
szantai@math.bme.hu

ESTIMATION OF RARE EVENT PROBABILITIES IN STOCHASTIC NETWORKS WITH EXPONENTIAL AND BETA PROBABILITY DISTRIBUTIONS

ASHRAF GOUDA AND TAMÁS SZÁNTAI

The paper is dealing with estimation of rare event probabilities in stochastic networks. The well known variance reduction technique, called Importance Sampling (IS) is an effective tool for doing this. The main idea of IS is to simulate the random system under a modified set of

parameters, so as to make the occurrence of the rare event more likely. The major problem of the IS technique is that the optimal modified parameters, called reference parameters to be used in IS are usually very difficult to obtain. Rubinstein(1997) developed the Cross Entropy (CE) method for the solution of this problem of IS technique and then he and his collaborators applied this for estimation of rare event probabilities in stochastic networks with exponential distribution (see P.T. De Boer, D.P. Kroese, S. Mannor and R.Y. Rubinstein(2004)). In this paper we test this simulation technique also for medium sized stochastic networks and compare its effectiveness to the simple crude Monte Carlo (CMC) simulation. The effectiveness of a variance reduction simulation algorithm is measured in the following way. We calculate the product of the necessary CPU time and the estimated variance of the estimation. This product is compared to the same for the simple Crude Monte Carlo simulation. This was originally used for comparison of different variance reduction techniques by Hammersley and Handscombe (1967). The main result of the paper is the extension of CE method for estimation of rare event probabilities in stochastic networks with beta distributions. In this case the calculation of reference parameters of the importance sampling distribution requires numerical solution of a nonlinear equation system. This is done by applying a Newton–Raphson iteration scheme. In this case the CPU time spent for calculation of the reference parameter values can not be neglected. Numerical results are also presented.

Alkalmazott Matematikai Lapok **25** (2008), 47-59.

A KIVÁLASZTÁSI FÜGGVÉNY RACIONALITÁSA ÉS RACIONALIZÁLHATÓSÁGA AZ OPCIONÁLIS HALMAZRENDSZER FÜGGVÉNYÉBEN

BODÓ BEÁTA

Ebben a dolgozatban azt vizsgáljuk, hogy egy döntési struktúra opcionális halmazrendszerének bővítése, illetve szűkítése hogyan befolyásolja a döntési struktúra racionáltságát, illetve racionalizálhatóságát. Célunk olyan feltételek megadása, amelyek mellett a döntési struktúra által kinyilvánított preferencia megőrizhető az opcionális halmazrendszer bővítése, ill. szűkítése után kapott döntési struktúrára is. Megmutatjuk, hogy ebben az értelemben bármely ellentmondásos valódi döntési mechanizmus R-racionalizálható.

1. Bevezetés

Életünkben szinte naponta döntések sorozatával kell szembenéznünk. Ha bemegyünk egy ruházati szaküzletbe kabátot venni, akkor előttünk megjelennek alternatívaként a különböző kollekciók elemei különböző színben, fazonban, árban stb. Az azonos szempont szerint elénk rakott kabátokról könnyen el tudjuk dönteni, melyek felelnek meg az ízlésünknek. De ebből következik-e, hogy az összes szempont figyelembevételével is racionálisan döntünk? Egyáltalán, mit jelent a racionalitás? És ha az eladó egy újabb szempont szerint is rak elénk egy kollekciót? Befolyásolhatja ez a korábbi döntésünket?

Hasonló problémák fogalmazhatók meg egy tender elbírálásánál is. A pályázók, akik a lehetséges alternatívákat jelentik, a vállalandó feladat részfeladataiban különböző technológiákat alkalmazhatnak; lehet, hogy a költségek részproblémánként másként oszlanak meg a különböző pályázatokban. Vagyis különböző szempontok szerint lehet csoportosítani a pályázatokat. Lehet, hogy két pályázó az egyik szempont szerint azonos, a másik szempont szerint különböző részcsoportba kerül. Egy adott szempont szerint azonos csoportban lévő alternatívák között viszonylag könnyű eldönteni, hogy az adott szempont szerint melyek az előnyösebbek. De vajon az egyes szempontok szerinti választás meghatározza-e azt a preferenciarendszert, ami eldönti, melyik alternatívá(ka)t kell választanunk? És ha bővítjük a szempontrendszert, vagy elhanyagolunk bizonyos szempontokat, vagy összevonunk bizonyos szempontokat, ez hogyan hat a döntésünkre? Ha nem tudunk racionális döntést hozni, akkor új szempontok bevezetésével vagy más szempontok elvetésével racionalizálható-e a döntésünk? Ha racionális volt a döntésünk, akkor az mennyire stabil, mennyire érzékeny a szempontrendszer egy-egy elemmel való változtatására?

Az ilyen és az ezekhez hasonló problémák motiválják azt a kutatást, aminek eredményeit e dolgozat következő fejezeteiben tárgyaljuk.

2. Alapvető fogalmak és tételek

Ebben a fejezetben áttekintjük azokat a kiválasztási függvénnyel kapcsolatos fogalmakat és tételeket, amelyekre a következő fejezetekben kutatásainkban szükségünk lesz.

Legyen $\Omega = \{x_1, \ldots, x_n\}$ egy véges *alternatívahalmaz*. Jelölje 2^Ω az Ω részhalmazainak halmazát, és legyen adott egy $\mathcal{B} \subseteq 2^\Omega \setminus \emptyset$ halmazrendszer, amit *opcionális halmazrendszer*nek nevezünk.

Az opcionális halmazrendszer elemei a gyakorlatban az alternatívák olyan részhalmazai, amelyeket a döntéshozatalban azonos szempontok szerint kezelünk.

2.1. Definíció. Az $X \in \mathcal{B}$ halmazokhoz a $C : \mathcal{B} \to 2^\Omega$ $C(X) \subseteq X$ hozzárendeléssel definiált halmaz-halmazfüggvényt a $\mathcal{B} \subseteq 2^\Omega$ halmazrendszer *kiválasztási függvény*ének nevezzük.
Ha $C : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$, akkor azt mondjuk, hogy C *injektív.*

A kiválasztási függvény tehát az azonos szempont szerint kezelt alternatívák közül a döntéshozó számára megfelelő alternatívákat választja ki. Meg kell jegyeznünk, hogy ugyanaz a döntéshozó különböző szempontok szerint is értékelhet, azaz az opcionális halmazrendszer különböző elemeihez is rendelhet kiválasztást, ezért nem a döntéshozókkal azonosítjuk az opcionális halmazrendszer elemeit.

2.2. Definíció. A $\mathcal{D} = (\Omega, \mathcal{B}, C)$ struktúrát *valódi döntési mechanizmus*nak nevezzük, ha kielégíti a következő feltételeket:

1. $\emptyset \notin \mathcal{B}$;
2. a $\mathcal{B} \subseteq 2^\Omega$ opcionális halmazrendszer lefedi az Ω alternatívahalmazt, azaz
$$\Omega = \bigcup_{X \in \mathcal{B}} X;$$
3. $C(X) \neq \emptyset \quad \forall X \in \mathcal{B}$;
4. a $\mathcal{B} \subseteq 2^\Omega$ opcionális halmazrendszer 2^Ω bármely elemét legfeljebb egyszer tartalmazza.

Ha teljesül továbbá, hogy

5. $\mathcal{B} = 2^\Omega \setminus \emptyset$,

akkor *tökéletes döntési mechanizmus*ról beszélünk.

Ezek a feltételek a reális döntés igényéből adódnak. Ugyanis, ha valamely szempontot egyik alternatíva sem tükrözi, akkor az a szempont a választás szempontjából érdektelen. Ha egy alternatíva a döntés egyetlen szempontja szerint sem értékelhető, akkor ez nem valódi alternatíva, így elhagyható az Ω alternatívahalmazból. A 3. feltétel a döntési kényszer megfogalmazása. A 4. feltétel azt fejezi ki, hogy ha az alternatívák egy részhalmaza több szempont szerint is értékelhető, akkor ezeket a szempontokat összevontan kell kezelni. Végül, a tökéletes döntési mechanizmus egy ideális struktúra, feltételezve, hogy létezik olyan - a valós döntési problémák esetén szinte soha meg nem adható - szempontrendszer, amely minden alternatíva-csoportot tud jellemezni.

2.3. Definíció. Egy $\mathcal{D} = (\Omega, \mathcal{B}, C)$ struktúrát *P-racionálisnak*, *normálisnak* vagy *P-ellentmondásmentesnek* nevezünk, ha létezik egy olyan P bináris reláció az Ω alternatívahalmazon, hogy minden $X \in \mathcal{B}$ esetén $C(X)$ az X maximális elemeinek $C_P^{MAX}(X)$ halmaza, azaz

$$C(X) = C_P^{MAX}(X) \quad \forall X \in \mathcal{B},$$

ahol

$$C_P^{MAX}(X) = \{x \in X : xPy \quad \forall y \in X\}.$$

Itt és a későbbiekben P-vel mindig egy tetszőleges relációt jelölünk. A későbbiekben, ha speciális tulajdonságú relációval foglalkozunk, akkor a jelölés erre feltétlenül utalni fog.

Megjegyezzük, hogy számos publikáció kizárólag a tökéletes döntési mechanizmussal foglalkozik. Mivel ebben a dolgozatban valós problémák motiválják vizsgálatainkat, és éppen azt vizsgáljuk, hogy a döntési mechanizmus racionálitása hogyan reagál az opcionális halmazrendszer bővítésére, ill. szűkítésére, így kilépünk ebből a kutatási körből.

Minden valódi döntési mechanizmus kinyilvánít két bináris relációt Ω-n, nevezetesen (ld. [7], [8]):

2.4. Definíció. R a C *által* $\mathcal{B}$*-n kinyilvánított Richter-reláció*, ha

$$xRy \Leftrightarrow \exists X \in \mathcal{B} : x \in C(X), \quad y \in X. \tag{1}$$

2.5. Definíció. S a C *által* $\mathcal{B}$*-n kinyilvánított Samuelson-reláció*, ha

$$xSy \Leftrightarrow \exists X \in \mathcal{B} : x \in C(X), \quad y \in X \setminus C(X).$$

A kinyilvánított relációk nagy mértékben függnek a valódi döntési mechanizmust meghatározó $\mathcal{B} \subseteq 2^{\Omega}$ opcionális halmazrendszertől, ill. annak halmazain megadott $C(X)$, $X \in \mathcal{B}$ kiválasztási függvénytől.

Másrészt a $\mathcal{D} = (\Omega, \mathcal{B}, C)$ valódi döntési mechanizmus nem feltétlenül racionális sem a Richter-, sem a Samuelson-relációval. Azonban mindig fennáll a következő tartalmazás (ld. [5]):

2.1. ÁLLÍTÁS. *Legyen adott egy $\mathcal{D} = (\Omega, \mathcal{B}, C)$ valódi döntési mechanizmus. Akkor $\forall X \in \mathcal{B}$ esetén*

$$C_S^{ND}(X) \subseteq C(X) \subseteq C_R^{MAX}(X),$$

ahol

$$C_S^{ND}(X) = \{x \in X : y\overline{S}x \quad \forall y \in X\}, \tag{2}$$

Megjegyezzük, hogy általában bármely P reláció esetén

$$C_P^{ND}(X) = C_{P^d}^{MAX}(X) \quad \forall X \in \mathcal{B},$$

ahol $P^d = \overline{P^{-1}}$ a P reláció duálisa. Így a (2) is felírható az S duálisa szerinti maximális elemek halmazaként.

A Richter- és Samuelson-relációk kinyilvánító ereje abban van, hogy általuk olyan alternatívacsoporthoz is rendelhetünk kiválasztást, amelyek a $\mathcal{B}$ opcionális halmazrendszerben nem szerepelnek. Így fontos szerepük van a racionalitás és a racionálhatóság kérdésében. Ezt a tényt fogjuk a továbbiakban kihasználni, de ebben a dolgozatban kizárólag a Richter-reláció alkalmazásával foglalkozunk.

Számos publikáció foglalkozik a racionálitás kérdésével. Ezek közül, a teljesség igénye nélkül, néhányat említünk: [1], [4], [5], [6], [7], [9], [10] stb.

Ebben a dolgozatban fontos szerepet játszanak az R-racionális döntési mechanizmusok.

A 2.3. definíciónak megfelelően egyaránt fogjuk használni a *R-ellentmondásos* fogalmat mind a $\mathcal{D} = (\Omega, \mathcal{B}, C)$ valódi döntési mechanizmusra, ha

$$\exists X \in \mathcal{B} \quad \text{hogy} \quad C(X) \subset C_R^{MAX}(X),$$

mind magukra a szigorú tartalmazást realizáló $X \in \mathcal{B}$ halmazokra.

3. Az opcionális halmazrendszer Richter-relációt tartó bővíthetősége

Ebben a fejezetben azt vizsgáljuk, milyen hatással van az alternatívahalmaz egy új részhalmazának a $\mathcal{B}$ halmazrendszerhez való kapcsolásának és a hozzákapcsolt halmazon a kiválasztás megválasztásának úgy, hogy a döntési mechanizmusban ne jelenjenek meg újabb ellentmondások, vagyis ha a $\mathcal{D} = (\Omega, \mathcal{B}, C)$ valódi döntési mechanizmus R-racionális volt, akkor $\mathcal{D}^+ = (\Omega, \mathcal{B}^+, C')$ is R-racionális maradjon, ha pedig a $\mathcal{D} = (\Omega, \mathcal{B}, C)$ valódi döntési mechanizmus nem volt R-racionális, akkor a $C(X) \subset C_R^{MAX}(X)$ szigorú tartalmazás továbbra is csak azokra az $X \in \mathcal{B}$ halmazokra teljesüljön, amikre a $\mathcal{D} = (\Omega, \mathcal{B}, C)$ esetében is teljesült.

A bővítést illetően általában kétféle követelménnyel élhetünk:

- vagy azt követeljük meg, hogy a $\mathcal{B}$-beli halmazokon ne változzon a kiválasztás,

- vagy, ha a $\mathcal{D} = (\Omega, \mathcal{B}, C)$ valódi döntési mechanizmus P-racionális volt, akkor a $\mathcal{D}^+ = (\Omega, \mathcal{B}^+, C')$ valódi döntési mechanizmus P'-racionális legyen, ahol $P = P'$ nem feltétlenül teljesül.

Ezen dolgozatban csak a első típusú bővítés feltételeit vizsgáljuk. Ebben a megközelítésben természetesnek tűnik, hogy az opcionális halmazrendszerbe bevont új halmazhoz az R-szerinti maximális elemek halmazát rendeljük kiválasztásként. A második típusú bővítés feltételeit [3]-ban vizsgáltuk.

3.1. Definíció. Legyen $\mathcal{D} = (\Omega, \mathcal{B}, C)$ egy valódi döntési mechanizmus, R a C által $\mathcal{B}$-n kinyilvánított Richter-reláció és $\emptyset \neq X' \in 2^\Omega \setminus \mathcal{B}$. A

$$\mathcal{B}^+ = \mathcal{B} \cup \{X'\} \tag{3}$$

$$C'(X) = \begin{cases} C(X), & \text{ha} \quad X \in \mathcal{B}, \\ C_R^{MAX}(X), & \text{ha} \quad X \in 2^\Omega \setminus \mathcal{B}. \end{cases} \tag{4}$$

opcionális halmazzal és kiválasztási függvénnyel definiált $\mathcal{D}^+ = (\Omega, \mathcal{B}^+, C')$ struktúrát a $\mathcal{D} = (\Omega, \mathcal{B}, C)$ valódi döntési mechanizmus X'-vel való *R-szerinti bővítésének* nevezzük.

3.1. ÁLLÍTÁS. *Legyen $\mathcal{D} = (\Omega, \mathcal{B}, C)$ egy valódi döntési mechanizmus. A bővített $\mathcal{B}^+ = \mathcal{B} \cup \{X'\}$ opcionális halmazrendszeren a (3) és (4) feltételekkel definiált $\mathcal{D}^+ = (\Omega, \mathcal{B}^+, C')$ struktúrán kinyilvánított R^+ Richter-reláció megegyezik az eredeti $\mathcal{D} = (\Omega, \mathcal{B}, C)$ struktúrán kinyilvánított R Richter-relációval.*

Bizonyítás. Megmutatjuk, hogy $R = R^+$. Valóban, xR^+y pontosan akkor teljesül, ha létezik olyan $Y \in \mathcal{B}^+$, hogy $x \in C(Y)$ és $y \in Y$. Ez kétféleképpen teljesülhet. Az első esetben létezik $Y \in \mathcal{B}$, hogy

$$x \in C(Y) \quad \text{és} \quad y \in Y,$$

vagyis xRy. A második esetben $Y = X'$, azaz

$$y \in X' \quad \text{és} \quad x \in C'(X') = C_R^{MAX}(X').$$

Az utóbbi tartalmazásból viszont következik, hogy xRy $\forall y \in X'$, ami az állításunkat igazolja. ∎

A fenti állítás azt garantálja, hogy a 3.1. definíció szerinti bővítéssel újabb ellentmondás nem kerül a rendszerbe (vagyis pontosan azokra az $X \in \mathcal{B}$ halmazokra teljesül a $C'(X) \subset C_R^{MAX}(X)$ feltétel, amelyekre a bővítés előtt is teljesült). Ha tehát a $\mathcal{D} = (\Omega, \mathcal{B}, C)$ R-racionális volt, akkor a $\mathcal{D}^+ = (\Omega, \mathcal{B}^+, C')$ is az lesz. Ilyenkor a 3.1. definícióban a (4) előállítás helyett egységesen írhatjuk, hogy

$$C'(X) = C_R^{MAX}(X) \quad \forall X \in \mathcal{B}^+.$$

A fenti bővítéssel azonban nem feltétlenül kapunk valódi döntési mechanizmust. Ehhez még az is szükséges hogy a $C_R^{MAX}(X') \neq \emptyset$ feltétel is teljesüljön. Erre ad szükséges és elégséges feltételt a következő állítás.

3.2. ÁLLÍTÁS. *A $\mathcal{D} = (\Omega, \mathcal{B}, C)$ valódi döntési mechanizmus 3.1. definíció szerinti $\mathcal{D}^+ = (\Omega, \mathcal{B}^+, C')$ bővítése az X' halmazzal pontosan akkor lesz valódi döntési mechanizmus, ha létezik az opcionális halmazrendszernek olyan $\emptyset \neq \mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$ részrendszere, hogy*

$$X' \subseteq \bigcup_{X \in \mathcal{B}'} X, \tag{5}$$

$$X' \bigcap \left(\bigcap_{X \in \mathcal{B}'} C(X) \right) \neq \emptyset. \tag{6}$$

Bizonyítás.

Szükségesség. Ha a $\mathcal{D}^+ = (\Omega, \mathcal{B}^+, C')$ valódi döntési mechanizmus, akkor teljesül a $C'(X) \neq \emptyset \ \ \forall X \in \mathcal{B}^+$ feltétel, így $C'(X') = C_R^{MAX}(X') \neq \emptyset$.

Legyen $x^* \in C_R^{MAX}(X')$. Ekkor minden $x \in X'$ esetén fennáll az $x^* R x$ reláció. Az R reláció (1) definíciója szerint minden $x \in X'$ elemhez létezik olyan $X \in \mathcal{B}$, hogy $x^* \in C(X)$ és $x \in X$. Jelölje ezen X halmazok rendszerét $\mathcal{B}'$. Ezek a halmazok együttesen lefedik az X' halmazt, azaz

$$X' \subseteq \bigcup_{X \in \mathcal{B}'} X, \quad \text{másrészt} \quad x^* \in \bigcap_{X \in \mathcal{B}'} C(X),$$

tehát teljesül az

$$X' \bigcap \left(\bigcap_{X \in \mathcal{B}'} C(X) \right) \neq \emptyset$$

feltétel is.

Elégségesség. A valódi döntési mechanizmus definíciójában szereplő 1., 2. és 4. feltételek triviálisan teljesülnek, így elegendő belátnunk a 3. feltétel teljesülését az X' halmazra (a többire (4) miatt automatikusan teljesül, mivel $\mathcal{D} = (\Omega, \mathcal{B}, C)$ valódi döntési mechanizmus).

Tegyük fel, hogy létezik a tételben megkívánt $\emptyset \neq \mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$ halmazrendszer és válasszunk tetszőleges

$$x^* \in X' \bigcap \left(\bigcap_{X \in \mathcal{B}'} C(X) \right)$$

alternatívát. Ekkor $x^* \in X'$. Másrészt

$$x^* \in \bigcap_{X \in \mathcal{B}'} C(X), \quad \text{azaz} \quad x^* \in C(X) \quad \forall X \in \mathcal{B}'.$$

Innét az R reláció (1) definíciója szerint $x^* R x \ \forall x \in X$ és $\forall X \in \mathcal{B}'$ esetén. Vagyis

$$x^* R x \quad \forall x \in \bigcup_{X \in \mathcal{B}'} X.$$

Mivel $X' \subseteq \bigcup_{X \in \mathcal{B}'} X$, így $x^* R x \ \forall x \in X'$, vagyis $x^* \in C_R^{MAX}(X')$, következésképpen $C_R^{MAX}(X') \neq \emptyset$. ■

A 3.1. állítást követő megjegyzés szerint a $C'(X') = C_R^{MAX}(X')$ definícióval újabb ellentmondás nem került a rendszerbe, de ha $\mathcal{D} = (\Omega, \mathcal{B}, C)$ ellentmondásos volt, akkor a $\mathcal{D}^+ = (\Omega, \mathcal{B}^+, C')$ is az maradt.

3.1. KÖVETKEZMÉNY. *A $\mathcal{D} = (\Omega, \mathcal{B}, C)$ valódi döntési mechanizmus 3.1. definíció szerinti $\mathcal{D}^+ = (\Omega, \mathcal{B}^+, C')$ valódi döntési mechanizmussá való bővítése ekvivalens a $\mathcal{D}'' = (\Omega, \mathcal{B}^+, C'')$ bővítéssel, ahol*

$$C''(X') = \begin{cases} C(X'), & \text{ha} \quad X' \in \mathcal{B} \\ \{x \in X' : \exists \emptyset \neq \mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B} \ \ \text{melyekre} & \\ x \in \bigcap\limits_{X \in \mathcal{B}'} C(X) \text{ és } X \subseteq \bigcup\limits_{X \in \mathcal{B}'} X\} \neq \emptyset, & \text{ha} \quad X' \in 2^{\Omega} \setminus \mathcal{B}. \end{cases}$$

Bizonyítás. A jobb és baloldali halmazok közti két irányú tartalmazás a 3.2. állítás szükségességét és elégségességét bizonyító rész következménye. ■

A $\mathcal{D} = (\Omega, \mathcal{B}, C)$ struktúrán vezessük be tetszőleges $a \in \Omega$ alternatívához a

$$Z(a) = \bigcup \{Y \in \mathcal{B} : a \in C(Y)\}. \tag{7}$$

halmazt.

A következő állítás bizonyításához szükségünk lesz a következő lemmára.

3.1. LEMMA. *Bármely $a \in \Omega$ alternatíva esetén a $\mathcal{D} = (\Omega, \mathcal{B}, C)$ struktúrán a (7) szerint értelmezett $Z(a)$ halmazra*

$$C_R^{MAX}(Z(a)) = \{x \in Z(a) : Z(a) \subseteq Z(x)\}, \tag{8}$$

ahol R a $\mathcal{D} = (\Omega, \mathcal{B}, C)$ által kinyilvánított Richter-reláció.

Bizonyítás. Ha $Z(a) = \emptyset$, akkor az állítás triviális. Legyen $Z(a) \neq \emptyset$. Ekkor

$$x^* \in C_R^{MAX}(Z(a))$$
$$\Leftrightarrow$$
$$x^* R y \quad \forall y \in Z(a)$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\forall y \in Z(a) \quad \exists X_y \in \mathcal{B} : x^* \in C(X_y), \quad y \in X_y$$
$$\Leftrightarrow$$
$$Z(a) \subseteq \bigcup \{X_y : y \in Z(a)\} \quad \text{és} \quad x^* \in \bigcap \{C(X_y) : y \in Z(a)\}$$
$$\Leftrightarrow$$
$$Z(a) \subseteq \bigcup \{X_y : y \in Z(a)\} \quad \text{és} \quad X_y \subseteq \bigcup \{Y \in \mathcal{B} : x^* \in C(Y)\} \quad \forall y \in Z(a)$$
$$\Leftrightarrow$$
$$x^* \in Z(x^*) \subseteq \{x \in Z(a) : Z(a) \subseteq Z(x)\}$$

■

A fenti lemma még nem garantálja, hogy $C_R^{MAX}(Z(a)) \neq \emptyset$ minden $a \in \Omega$.

3.3. ÁLLÍTÁS. *Legyen $\mathcal{D} = (\Omega, \mathcal{B}, C)$ egy R-racionális valódi döntési mechanizmus. Válasszunk $a \in \Omega$ alternatívát úgy, hogy teljesüljön a*

$$\emptyset \neq Z(a) \notin \mathcal{B} \tag{9}$$

feltétel, ahol $Z(a)$ a (7) szerint definiált. Akkor a $\mathcal{B}^+ = \mathcal{B} \cup \{Z(a)\}$ opcionális halmazrendszeren a (4) kiválasztási függvénnyel definiált $\mathcal{D}^+ = (\Omega, \mathcal{B}^+, C')$ struktúra szintén valódi döntési mechanizmus lesz.

Bizonyítás. A valódi döntési mechanizmus definíciójában szereplő 1., 2. és 4. feltételek triviálisan teljesülnek, így elegendő belátnunk a 3. feltétel teljesülését az $Z(a)$ halmazra (a többire a 3.1. definíció miatt automatikusan teljesül, mivel $\mathcal{D} = (\Omega, \mathcal{B}, C)$ valódi döntési mechanizmus).

Mivel $Z(a) \neq \emptyset$, ezért $a \in Z(a)$, így $C_R^{MAX}(Z(a))$ (8) szerinti előállítása miatt $a \in C_R^{MAX}(Z(a))$. ■

Az (9) feltétel miatt a $\mathcal{B}$ opcionális halmazrendszer legalább két Y halmazának teljesítenie kell az $a \in C(Y)$ feltételt.

4. Az opcionális halmazrendszer Richter-relációt megtartó szűkíthetősége

Az opcionális halmazrendszer szűkítése általában akkor merül fel, ha az opcionális halmazrendszer elemein redundánsnak tűnő kiválasztásokat észlelünk abban az értelemben, hogy a kinyilvánított Richter-reláció definiálásában valamelyik kiválasztás már nem játszik szerepet, vagy ha az ellentmondásos kiválasztásokat akarjuk kiszűrni a mechanizmusból.

Ebben a fejezetben azt vizsgáljuk, milyen feltételek mellett lehet az opcionális halmazrendszerből elhagyni egy halmazt, hogy a maradék rendszer olyan valódi döntési mechanizmus legyen, amely megőrzi az eredeteti rendszer által kinyilvánított Richter-relációt.

4.1. Definíció. Legyen $\mathcal{D} = (\Omega, \mathcal{B}, C)$ egy valódi döntési mechanizmus, R a C által $\mathcal{B}$-n kinyilvánított Richter-reláció és $X' \in \mathcal{B}$. A

$$\mathcal{B}^- = \mathcal{B} \setminus \{X'\} \tag{10}$$

$$C'(X) = C(X) \quad \forall X \in \mathcal{B}^- \tag{11}$$

opcionális halmazzal és kiválasztási függvénnyel definiált $\mathcal{D}^- = (\Omega, \mathcal{B}^-, C')$ struktúrát a $\mathcal{D} = (\Omega, \mathcal{B}, C)$ valódi döntési mechanizmus X'-vel való *R-tartó szűkítésének* nevezzük, ha teljesül az

$$R^- = R,$$

egyenlőség, ahol R^- a C' által $\mathcal{B}^-$-n kinyilvánított Richter-reláció.

4.1. ÁLLÍTÁS. *Az R-tartó szűkítéssel definiált $\mathcal{D}^- = (\Omega, \mathcal{B}^-, C')$ struktúra valódi döntési mechanizmus.*

Bizonyítás. A valódi döntési mechanizmus 2.2. definíciójában szereplő kritériumok közül az 1., 3. és 4. triviálisan teljesül. Azt kell megmutatnunk, hogy

$$\Omega = \bigcup_{X \in \mathcal{B}^-} X.$$

Tegyük fel, hogy $a \in \Omega$, de $a \notin \bigcup_{X \in \mathcal{B}^-} X$. Mivel $\mathcal{D} = (\Omega, \mathcal{B}, C)$ valódi döntési mechanizmus, így

$$a \in \Omega = \bigcup_{X \in \mathcal{B}} X.$$

Innét következik, hogy $a \in X'$, de $a \notin X \quad \forall X \in \mathcal{B}^-$. Minthogy $\mathcal{D} = (\Omega, \mathcal{B}, C)$ valódi döntési mechanizmus, ezért $C(X') \neq \emptyset$. Legyen $x \in C(X')$. Akkor xRa, de $x\overline{R^-}a$, így $R \neq R^-$, ami ellentmond az R-tartó szűkítés definíciójának. ■

A (7)-ben a $\mathcal{D} = (\Omega, \mathcal{B}, C)$ struktúrán definiált $Z(a)$ halmaz mellé, annak analógiájára definiáljuk a $\mathcal{D}^- = (\Omega, \mathcal{B}^-, C')$ struktúrán a

$$Z^-(a) = \bigcup \{Y \in \mathcal{B}^- : a \in C(Y)\}$$

halmazt is.

4.2. ÁLLÍTÁS. *Legyen $\mathcal{D} = (\Omega, \mathcal{B}, C)$ egy valódi döntési mechanizmus és $X' \in \mathcal{B}$. A (10) és (11) formulákkal adott $\mathcal{D}^- = (\Omega, \mathcal{B}^-, C')$ struktúra pontosan akkor lesz R-tartó szűkítés, ha teljesül a*

$$Z(a) = Z^-(a) \quad \forall a \in C(X') \tag{12}$$

vagy a vele ekvivalens

$$\bigcap_{a \in C(X')} Z^-(a) \supseteq X' \tag{13}$$

feltétel.

Bizonyítás. Először belátjuk a (12) feltétel szükségességét és elégségességét.

Tegyük fel, hogy $\mathcal{D}^- = (\Omega, \mathcal{B}^-, C')$ struktúra R-tartó szűkítés az X' halmazzal. Legyen $a \in C(X')$ és $y \in Z(a)$ tetszőleges. Felhasználva az R-tartó szűkítés $R = R^-$ feltételét, kapjuk a következő ekvivalenciasort:

$$\begin{aligned} y \in Z(a) &\Leftrightarrow \exists X \in \mathcal{B} : a \in C(X),\ y \in X \\ &\Leftrightarrow aRy \\ &\Leftrightarrow aR^-y \\ &\Leftrightarrow \exists Y \in \mathcal{B}^- : a \in C'(Y),\ y \in Y \\ &\Leftrightarrow y \in Z^-(a). \end{aligned}$$

Tegyük fel hogy $Z(a) = Z^-(a)$ teljesül minden $a \in C(X')$ esetén.

Legyenek $a \in \Omega$ és $y \in \Omega$ tetszőleges alternatívák. Ekkor

$$\begin{aligned} aR^-y &\Leftrightarrow \exists Y \in \mathcal{B}^- \subset \mathcal{B} : a \in C'(Y) = C(Y) \quad \text{és} \quad y \in Y \\ &\Rightarrow aRy, \end{aligned}$$

vagyis $R^- \subseteq R$.

Másrészt $aR^-y \Leftrightarrow \exists Y \in \mathcal{B} : a \in C(Y)$ és $y \in Y$. Ha $Y \neq X'$, akkor $Y \in \mathcal{B}^-$, így aR^-y. Ha $Y = X'$, akkor $a \in C(X')$ és $y \in X' \subseteq Z(a) = Z^-(a)$. Ez azt jelenti, hogy $\exists V \in \mathcal{B}^- : a \in C'(V), y \in V$, vagyis aR^-y, azaz $R \subseteq R^-$.

A következőkben azt látjuk be, hogy a (12) feltétel ekvivalens a (13) feltétellel. Valóban, figyelembe véve, hogy $\forall a \in C(X') : X' \subseteq Z^-(a)$ és $Z(a) = Z^-(a) \cup X'$, fennállnak a következő állítások közti ekvivalenciák:

$$Z(a) = Z^-(a) \quad \forall a \in C(X')$$

$$\Leftrightarrow$$

$$X' \subseteq Z(a) = Z^-(a) \quad \forall a \in C(X')$$

$$\Leftrightarrow$$

$$X' \subseteq Z^-(a) \cup X' = Z^-(a) \quad \forall a \in C(X')$$

$$\Leftrightarrow$$

$$X' \subseteq \bigcap_{a \in C(X')} Z^-(a).$$

■

5. A döntési mechanizmus Richter-relációt tartó racionalizálása

Az előző fejezetekben bővítési és szűkítési technikák lehetőséget adnak arra, hogy egy nem racionális döntési mechanizmust racionáljunk. A [4] dolgozat ad két racionalizáló algoritmust, de azt nem vizsgálja, hogy ezek az algoritmusok valódi döntési mechanizmushoz vezetnek-e. Nem nehéz olyan döntési struktúrákat konstruálni, amelyek azt mutatják, hogy az ott adott algoritmusokkal a $C_R^{MAX}(X) \neq \emptyset$ feltétel nem mindig teljesíthető.

Legyen adott egy $\mathcal{D} = (\Omega, \mathcal{B}, C)$ egy valódi döntési mechanizmus a következő tulajdonságokkal:

C-1: A $\mathcal{D} = (\Omega, \mathcal{B}, C)$ struktúrával adott döntési mechanizmusban minden $x \in \Omega$-ra az $x \in C(X)$ tartalmazás legalább két $X \in \mathcal{B}$-ra teljesül;

C-2: $\exists \mathcal{CB} \subset \mathcal{B}$, $\mathcal{CB} \neq \emptyset$ opcionális részrendszer, amelyen az adott kiválasztás R-ellentmondásos, azaz

$$C(X) \subset C_R^{MAX}(X) \quad \forall X \in \mathcal{CB},$$

ahol R a $\mathcal{D} = (\Omega, \mathcal{B}, C)$ struktúrán kinyilvánított Richter-reláció.

5.1. ÁLLÍTÁS. *Bármely, a* **C-1** *és* **C-2** *feltételeket teljesítő valós döntési mechanizmus R-tartó szűkítések és R-szerinti bővítések sorozatával egy, az eredeti $\mathcal{B}$ opcionális halmazrendszerrel adott R-racionális valós döntési mechanizmussá alakítható.*

Bizonyítás. Legyen $X' \in \mathcal{CB}$. X' nem lehet egyelemű, mert $C(\{x\}) \neq \emptyset$ miatt $C(\{x\}) = \{x\}$, így xRx, vagyis $C_R^{MAX}(\{x\}) = \{x\} = C(\{x\})$.

Legyen $X' \in \mathcal{CB}$ kételemű halmaz, azaz $X' = \{a, b\}$. Az X' halmaz kiválasztásának R-ellentmondásosságból következik, hogy X' elemei közül pontosan az egyik lehet kiválasztva, és $C_R^{MAX}(X') = \{a, b\} = X'$. Tegyük fel, hogy $\{a\} = C(X')$. Legyen $\mathcal{B}^- = \mathcal{B} \backslash \{X'\}$. A **C-1** feltétel miatt létezik legalább egy olyan $\mathcal{B} \ni Y \neq X'$, vagyis $Y \in \mathcal{B}^-$ halmaz, hogy $a \in C(Y)$. Így

$$Z^-(a) \neq \emptyset \quad \text{és} \quad Z(a) = Z^-(a) \cup X'.$$

Ha $X' \not\subset Z^-(a)$ teljesül, akkor $b \notin Z^-(a)$, azaz $\nexists Y \in \mathcal{B}^-$, melyre $b \in Y$ és $a \in C(Y) \subseteq Y$, vagyis $b\overline{R}a$, ami ellentmond annak, hogy $b \in C_R^{MAX}(X')$. Tehát $X' \subset Z^-(a)$, azaz teljesül az R-tartó szűkíthetőség 4.2. állításban adott feltétele. Legyen $\mathcal{B}'$ a $Z^-(a)$-t előállító halmazrendszer. Az R-tartó szűkítés elvégzése után kapott új döntési mechanizmus, melynek opcionális halmazrendszere már nem tartalmazza az X' halmazt, R-szerinti bővítéssel visszabővíthető az X' halmazzal, mivel teljesülnek a 3.2. állítás feltételei a $\mathcal{B}'$ halmazrendszerrel. $\mathcal{B}$ minden ellentmondásos kételemű halmazával elvégezve a szűkítést-bővítést, a kapott új valós döntési mechanizmust - a jelelölések egyszerűsítése végett - jelöljük újra $\mathcal{D} = (\Omega, \mathcal{B}, C)$-vel. Ez már nem tartalmaz kételemű R-ellentmondásos halmazt, és az elvégzett szűkítések és bővítések a Richter-relációt nem változtatták meg. Jelölje most is $\mathcal{CB}$ a $\mathcal{B}$ opciós halmazrendszer R-ellentmondásos halmazainak részhalmazrendszerét. Ha $\mathcal{CB} = \emptyset$, akkor készen vagyunk.

Tegyük fel, hogy $X' \in \mathcal{CB}$ legalább három elemű. Vezessük be a

$$S = \{a \in C(X') : Z(a) \supset Z^-(a)\}$$

halmazt.

Ha $S = \emptyset$, azaz teljesül az R-tartó szűkíthetőség 4.2. állításban adott feltétele, akkor az R-tartó szűkítést ezzel a halmazzal elvégezve, a kapott új döntési mechanizmus, melynek opcionális halmazrendszere már nem tartalmazza az X' halmazt, R-szerinti bővítéssel visszabővíthető az X' halmazzal, mivel teljesülnek a 3.2. állítás feltételei a $\mathcal{B}' = \{Y \in \mathcal{B}^- : C(X') \cap C(Y) \neq \emptyset\}$ halmazrendszerrel.

Ha $S \neq \emptyset$, akkor definiáljuk az Ω kételemű halmazaiból a

$$\mathcal{B}_2 = \big\{X' = \{a, b\} \notin \mathcal{B} : a \in S,\ b \in Z(a) \setminus Z^-(a)\big\}$$

halmazrendszert.

$\mathcal{B}_2$ minden elemével végrehajthatunk egy R-szerinti bővítést, mivel teljesülnek a 3.2. állítás feltételei a $\mathcal{B}' = \{Y \in \mathcal{B}^- : C(X') \cap C(Y) \neq \emptyset\} \cup \mathcal{B}_2$ halmazrendszerrel.

Jelölje az így kapott döntési mechanizmust $D^+ = \{\Omega, \mathcal{B}^+, C'\}$. Vezessük be a

$$Z^{\pm}(a) = \bigcup \{Y \in \mathcal{B}^+ \setminus \{X'\} : a \in C(Y)\}$$

halmazt. Mivel

$$\bigcup_{a \in C(X')} Z^{\pm}(a) \supset X',$$

így a döntési mechanizmusunk szűkíthető az X' halmazzal a Richter-reláció változatlanul hagyásával. Másrészt a $Z^{\pm}(a)$, $a \in C(X')$ halmazok előállításában szereplő halmazok együttese teljesíti a 3.2. állításban a $\mathcal{B}'$ halmazrendszertől megkívánt tulajdonságokat, így a döntési mechanizmusunk visszabővíthető R-szerinti bővítéssel.

Az itt leírt szűkítés-bővítést elvégezve minden R-ellentmondásos $\mathcal{B}$-beli halmazra, egy olyan döntési struktúrát kapunk, amely már R-ellentmondásmentes, de ebben a döntési struktúrában az opcionális halmazrendszer számossága megnőtt mindazoknak a kételemű halmazoknak a számával, amelyeket az ellentmondásos halmazok eltávolítása érdekében vittünk be a rendszerbe. Ezek a halmazok viszont ebből a döntési struktúrából el is távolíthatók R-tartó szűkítéssel, mivel teljesülnek a 4.2. állításban adott feltételek. ∎

Azt a folyamatot, amely egy nem R-racionális valódi döntési mechanizmusból R-racionális valódi döntési mechanizmust konstruál, nevezzük a valódi döntési mechanizmus *R-racionalizálásá*nak.

A fenti állítás bizonyításából látszik, hogy az R-racionalizálás gyakorlatilag az ellentmondásos halmazok $C(X)$ kiválasztásának a $C_R^{MAX}(X)$-re való cseréjét jelenti.

Hivatkozások

[1] Aizerman M., Aleskerov F., *Theory of choice*. North Holland, 1995

[2] Arrow K. J., Rational choice functions and orderings. *Economica*, **26**(1959), 121-127.

[3] Bodó B., Kovács M., On the stability of the R-rational choice function, *Annal. Univ. Sci. Budapst, Sect. Comp.* **28**(2008), 79–95.

[4] Kovács M., Rádonyi Á. and Rózsa K., The application of valued choice functions in group-decision, In: *Proc. MS'2000 Int. Conf. of Modelling and Simulation, Las Palmas de Gran Canaria, 2000.*. 933-940, 2000.

[5] Magyarkúti Gy., Note on generated choice and axioms of revealed preferences, *Central European Journal of Operation Research*, **8**(2000), 57-62.

[6] Plott C., Path independence, rationality and social choice, *Econometrica*, **41** (6)(1973), 1075–1091.

[7] RICHTER M., Revealed preference theory, *Econometrica*, **34**(1966), 635-545.

[8] SAMUELSON P., *Foundation of Economic Analysis*, Harvard University Press,1947.

[9] SEN, A.K., Choice functions and revealed preference, *Review of Economic studies* **38**(1971), 307-317.

[10] SUZUMURA, K., Rational choice and revealed preference, *Review of Economic studies* **43**(1976), 149-158.

(Beérkezett: 2007. október 8.)

BODÓ BEÁTA
TEMETŐ U. 631,
GABČÍKOVO 93005
SLOVAKIA
Email: bodo.beata@freemail.hu

ON THE RATIONALITY AND RATIONALIZABILITY OF THE CHOICE FUNCTION WITH RESPECT TO THE OPTIONAL SET SYSTEM

BEÁTA BODÓ

In this paper we discuss the following problem: how effect for the rationality or rationalizability of the decision structure the extension or reduction of the optional set system. Our main aim is to find such conditions under which the decision structure preserves the revealed preference after the extension or reduction, too. We will show that any contradicted decision structure can be rationalized.

Alkalmazott Matematikai Lapok **25** (2008), 61-79.

A MÁSODRENDŰ DIFFERENCIÁLEGYENLETTEL MODELLEZETT OPTIMALIZÁLÓK MEGENGEDETT PARAMÉTEREINEK ELEMZÉSE[1]

HAJBA TAMÁS

A [6] dolgozatban vizsgáltuk néhány másodrendű differenciálegyenlettel modellezett optimalizáló eljárás konvergenciáját. Ebben a dolgozatban azt vizsgáljuk, hogy a konvergencia elégséges feltételeként a paraméterfüggvényekre adott korlátok milyen függvényekkel teljesíthetők. Erre vonatkozóan elemzünk néhány paraméterosztályt. A különböző megengedett paraméterfüggvényekkel néhány tesztfeladaton összehasonlító vizsgálatokat végzünk.

1. Bevezetés

Tekinsük az

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} f(x)$$

optimalizálási feladatot, ahol $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvény. Az ilyen feladatok minimumpontjának meghatározására többféle numerikus módszer ismert.

Az iteratív numerikus módszerek egy jelentős része a következő eljáráson alapul: egy adott $x_1 \in \mathbb{R}^n$ kezdő pontból kiindulva egy minimalizáló sorozatot állítunk elő a következőképpen: minden lépésben választunk egy keresési irányt, és ennek mentén lépünk mindaddig, amíg csökken a függvény. A minimalizáló sorozatot tehát az

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{1.1}$$

iterációs sorozat állítja elő, ahol p_k-k a keresési irányok, az α_k paramétereket pedig úgy választjuk meg, hogy

$$\alpha_k \in \operatorname*{argmin}_{\alpha>0} (x_k + \alpha p_k)$$

teljesüljön. Általános esetben p_k függ egy, esetleg több megelőző ponttól, illetve függhet egy vagy több megelőző keresési iránytól.

[1] Elhangzott a XXVII. Magyar Operációkutatási Konferencián, Balatonőszödön (2007. június 7–9.).

Az egyes módszerek a keresési irányok megválasztásában térnek el. Például a gradiens módszernél

$$p_k = -f'(x_k),$$

a Newton módszernél pedig

$$p_k = -[f''(x_k)]^{-1} f'(x_k),$$

ahol tehát ezeket az irányválasztásokat nem befolyásolják közvetlenül a megelőző keresési irányok, a konjugált gradiens típusú eljárásoknál az irányválasztás $p_{k+1} = g(f'(x_k), f'(x_{k+1}), p_k)$ alakú, ahol g egy vektorfüggvény.

Ha p_k előállítása, mint a gradiens- és a Newton-módszer esetében, kizárólag az x_k iterációs ponttól függ, azaz $p_k = p(x_k)$, és eltekintünk attól, hogy a keresési irány mentén megtaláljuk a minimumot, hanem csak kis lépésekkel megyünk tovább, akkor az (1.1) típusú módszereket tekinthetjük úgy is, mintha a

$$\dot{x} = \alpha(t)p(x), \quad x(0) = x_0 \tag{1.2}$$

differenciálegyenletet oldanánk meg 1 lépéshosszú Euler-módszer segítségével. Az elsőrendű (1.2) differenciálegyenletet az adott módszer *elsőrendű folytonos modell*jének nevezzük.

Ha p_{k+1} előállítása az aktuális x_k ponttól és a megelőző p_k keresési iránytól is függ, és ez utóbbitól lineárisan, akkor az iteratív eljárás (1.1) lépése kiegészül a

$$p_{k+1} = g(x_k) + \beta_k p_k \tag{1.3}$$

lépéssel. (1.1)-(1.3) is tekinthető egy

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha(t)p \\ \dot{p} &= \overline{g}(x,p,t) \end{aligned} \qquad k = 1, 2, \ldots \tag{1.4}$$

elsőrendű kezdetiérték feladat, vagy a vele ekvivalens x-ben másodrendű kezdetiérték feladat numerikus integráltjának, ahol $\overline{g}$ egy vektorfüggvény. Az (1.4) differenciálegyenletet az (1.1)-(1.3) iterációs lépésekkel meghatározott módszer *másodrendű folytonos modell*jének nevezzük.

A folytonos modellekkel több cikk is foglalkozik, (pl. [1, 3, 4, 7, 9, 11] stb.), de ezen cikkek szinte kizárólag a gradiens, illetve a Newton-módszert vizsgálták. [2] ugyan tárgyalja egy speciális konstans paraméterű másodrendű differenciálegyenlet trajektóriáinak egy függvény minimumhelyéhez való konvergálását, de a diffegyenletet nem egy diszkrét módszerből, hanem fizikai megfontolásokból származtatja.

2. A vizsgált folytonos modellek

Ebben a fejezetben megadjuk azokat a másodrendű folytonos modelleket, amelyeket a későbbiekben vizsgálunk. Ezeket a Fletcher-Reeves féle konjugált gradiens módszer motiválta.

A Fletcher és Reeves-féle konjugált gradiens módszer [5], mely egy tetszőleges x_0 pontból és $p_0 = -f'(x_0)$ iránnyal indulva előállítja az

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k + \alpha_k p_k \\ p_{k+1} &= -f'(x_{k+1}) + \beta_k p_k \end{aligned} \qquad k = 1, 2, \dots$$

pontpárokat, ahol α_k-t úgy választjuk meg, hogy optimális megoldása legyen a $\min_{\alpha \in \mathbb{R}}(f(x_k + \alpha p_k)$ feladatnak; míg a β_k paraméterre több választási lehetőség van, például

$$\beta_k = \frac{||f'(x_{k+1})||^2}{||f'(x_k)||^2}.$$

Látható, hogy ennél a módszernél az új keresési irány az adott pontbeli negatív gradiens és a régi keresési irány kombinációja.

2.1. Általános modell

A Fletcher és Reeves-féle konjugált gradiens módszer folytonos modellje

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha(t)p \\ \dot{p} &= -f'(x + \alpha(t)p) + \beta(t)p \\ x(t_0) &= x_0; \quad p(t_0) = p_0 \end{aligned} \tag{2.1}$$

alakban írható. Ezt a későbbiekben *általános modell*nek fogjuk nevezni.

Ebben a dolgozatban az általános modellt kizárólag az

$$f(x) = \frac{1}{2}\langle x, Qx\rangle + \langle c, x\rangle \tag{2.2}$$

kvadratikus célfüggvények esetén vizsgáljuk, ahol az $n \times n$-es Q mátrix pozitív definit. (Itt és a későbbiekben $\langle \cdot, \cdot \rangle$ két vektor skalárszorzatát jelöli.) Az itt vizsgálandó modell tehát

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha(t)p \\ \dot{p} &= -Qx + (\beta(t)I - \alpha(t)Q)p - c \\ x(t_0) &= x_0; \quad p(t_0) = p_0, \end{aligned} \tag{2.3}$$

ahol I az $n \times n$-es egységmátrix.

2.2. Egyszerűsített modell

Minthogy a folytonos modelleknél gyakorlatilag csak kis elmozdulásokat végzünk, a célfüggvény folytonosan differenciálhatóságát feltételezve a modell egyszerűsíthető azzal, hogy a gradienst az $x + \alpha(t)p$ pont helyett az x pontban számítjuk, így az *egyszerűsített modell* a következő alakot ölti:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha(t)p \\ \dot{p} &= -f'(x) + \beta(t)p \\ x(t_0) &= x_0; \quad p(t_0) = p_0. \end{aligned} \tag{2.4}$$

3. Korábbi eredmények

A [6] dolgozatban mind az egyszerűsített, mind az általános modell esetén elégséges feltételeket adtunk az $\alpha(t)$ és $\beta(t)$ paraméterfüggvények közötti kapcsolatra, melyek teljesülése esetén minden trajektória az f függvény minimumpontjához tart. Mivel ezekre az eredményekre a későbbiekben szükségünk lesz, ebben a fejezetben ismertetjük őket.

A (2.4) és (2.1) differenciálegyenletek trajektóriáinak minimumhelyhez konvergálását az *erősen konvex függvények* osztályára korlátoztuk.

3.1. Definíció. Egy $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvényt *erősen konvexnek* nevezünk $\kappa > 0$ *konvexitási modulussal*, ha

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y) - \kappa\alpha(1-\alpha)||x-y||^2$$
$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n \text{ és } \forall \alpha \in [0,1].$$

Az erősen konvex függvény egyik fontos tulajdonsága, hogy pontosan egy minimumpontja van. Belátható, hogy f pontosan akkor erősen konvex a $\kappa > 0$ konvexitási modulussal, ha a $g(x) = f(x) - \kappa||x||^2$ függvény konvex. Továbbá az egyszer, ill. kétszer folytonosan differenciálható függvények osztályán az erős konvexitás karakterizálható a

$$\langle f'(x) - f'(y), x - y\rangle \geq 2\kappa \parallel x - y \parallel^2 \qquad \forall u, v \in \mathbb{R}^n$$

és

$$\langle f''(x)\xi, \xi\rangle \geq 2\kappa \parallel \xi \parallel^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad \text{és} \quad \xi \in \mathbb{R}^n$$

egyenlőtlenségekkel. Az utóbbi egyenlőtlenségből következik, hogy minden pozitív definit Q mátrixszal definiált függvény erősen konvex, és a konvexitási modulusa $\kappa = \lambda/2$, ahol λ a Q mátrix legkisebb sajátértéke. Részletesebb ismereteket találhatunk az erősen konvex függvényekről például [8]-ban.

3.1. Az egyszerűsített modell trajektóriáinak konvergenciája

3.1. TÉTEL. *Tegyük fel, hogy teljesülnek a következő feltételek:*

1. *az $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható erősen konvex függvény $\kappa > 0$ konvexitási modulussal;*

2. *$\alpha(t)$ pozitív, folytonosan differenciálható függvény;*
3. *$\beta(t)$ nempozitív, folytonos függvény;*
4. *a)$\dfrac{-\dot\alpha(t)}{\alpha(t)} - \alpha(t) \le 2\alpha(t) + \beta(t) < 0$ minden $t_0 < t$-re;*

   b)$-\kappa \le 2\alpha(t) + \beta(t)$ minden $t_0 < t$-re;

   c)$\int\limits_{t_0}^{\infty}(2\alpha(t) + \beta(t))dt = -\infty$.

Ekkor létezik pontosan egy $x_* \in \mathbb{R}^n$, melyre

$$\inf_{x\in\mathbb{R}^n} f(x) = f(x_*)$$

és a (2.4) egyszerűsített modell minden trajektóriájára

$$\lim_{t\to\infty} f(x(t)) = f(x_*), \qquad \lim_{t\to\infty} ||x(t) - x_*|| = 0, \qquad \lim_{t\to\infty} ||p(t)|| = 0.$$

3.2. Az általános modell trajektóriáinak konvergenciája kvadratikus célfüggvény esetén

3.2. TÉTEL. *Legyen a (2.2) kvadratikus függvényt definiáló Q mátrix pozitív definit 2κ legkisebb sajátértékkel. Legyen $x^* \in \mathbb{R}^n$ a (2.2) kvadratikus függvény minimumpontja. Tegyük fel továbbá, hogy teljesülnek a következő feltételek:*

1. *$\alpha(t)$ pozitív és folytonosan differenciálható függvény;*
2. *$\beta(t)$ nempozitív és folytonos függvény;*
3. *az $\alpha(t)$ és $\beta(t)$ paraméterek között a következő összefüggések állnak fenn:*

   a)$-\dfrac{\dot\alpha(t)}{\alpha(t)(\alpha(t)+1)} - \dfrac{2\alpha(t)}{\alpha(t)+1} \le \alpha(t) + \beta(t) < 0$ minden $t_0 < t$ esetén;

   b)$-\kappa \le \alpha(t) + \beta(t)$ minden $t_0 < t$ esetén;

   c)$\int\limits_{t_0}^{\infty}(\alpha(t) + \beta(t))dt = -\infty$;

Ekkor (2.3) minden trajektóriájára

$$\lim_{t\to\infty} ||x(t) - x^*|| = 0.$$

4. A paraméterfüggvények választása

A 3.1. és 3.2. tételek elégséges feltételeket adnak az $\alpha(t)$ és $\beta(t)$ paraméterek közti kapcsolatra, melyek teljesülése esetén a (2.4), ill. a (2.3) diffegyenlet minden trajektóriája az f függvény minimum pontjához tart. A paraméterek megválasztásában azonban nagy szabadságunk van. A következőkben azt vizsgáljuk, hogy ha az $\alpha(t)$ paraméterfüggvényt egy adott függvényosztályból választjuk, akkor a $\beta(t)$ milyen választása garantálja a 3.1. és 3.2. tételek feltételeinek kielégíthetőségét.

Vezessük be a következő függvényosztályokat:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{K} &= \{g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ : g(t) \equiv konstans\};\\
\mathcal{H}_s &= \{g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ : \frac{g'(t)}{g(t)} + g(t) = q \ \forall t > 0,\\
&\qquad\qquad g(0) = g_0 > 0,\ q > 0\};\\
\mathcal{H}_g &= \{g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ : \frac{g'(t)}{g(t)(g(t)+1)} + \frac{2g(t)}{(g(t)+1)} = q\\
&\qquad\qquad \forall t > 0,\ g(0) = g_0 > 0,\ q > 0\};\\
\mathcal{R}(\tau) &= \{g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ : g(t) = \frac{c}{(t-\tau+1)^b},\ b \neq 0,\ c > 0\};\\
\mathcal{L}(\mathcal{A}) &= \{g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ : g(t) = Ar(t) + B,\\
&\qquad\qquad r \in \mathcal{A},\ A \in \mathbb{R},\ B \in \mathbb{R}\};\\
\mathcal{L}(\mathcal{A}, \mathcal{R}(\tau)) &= \{g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ : g(t) = Ar(t) + Bs(t),\\
&\qquad\qquad r \in \mathcal{A},\ s \in \mathcal{R}(\tau),\ A \in \mathbb{R},\ B \in \mathbb{R}\};
\end{aligned}
$$

ahol $\mathbb{R}^+$ a pozitív számok halmazát, $\mathcal{A}$ pedig a $\mathcal{K}$, $\mathcal{R}(\tau)$, $\mathcal{H}_s$, $\mathcal{H}_g$ függvényosztályok valamelyikét jelöli.

Ebben a fejezetben azt vizsgáljuk, milyen feltételek mellett lehet

$$(\alpha, \beta) \in \mathcal{A} \times \mathcal{L}(\mathcal{A}) \quad \text{vagy} \quad (\alpha, \beta) \in \mathcal{A} \times \mathcal{L}(\mathcal{A}, \mathcal{R}(\tau)).$$

Látni fogjuk ugyanis, hogy ha az $(\alpha(t),\ \beta(t))$ függvénypárt ezekből az osztályokból választjuk, akkor a 3.1. tétel 4c feltétele nyilvánvalóan teljesíthető.

4.1. Az egyszerűsített modell paramétereinek választása

4.1.1. $\alpha(t) \in \mathcal{K}$

Tegyük fel, hogy az f függvény κ erős konvexitási modulusát ismerjük. Válasszuk a (2.4) modell $\alpha(t)$ paraméterfüggvényét $\mathcal{K}$-belinek, azaz legyen

$$\alpha(t) \equiv \alpha_0, \qquad \alpha_0 > 0.$$

Ekkor a 3.1. tétel 4a-4b feltételei a

$$\max(-\kappa, -\alpha_0) \leq 2\alpha_0 + \beta(t) < 0$$

alakra egyszerűsödnek. Vagyis minden $t > 0$-ra

$$-2\alpha_0 - \min(\kappa, \alpha_0) \leq \beta(t) < -2\alpha_0.$$

1. eset:
Legyen $\beta \in \mathcal{L}(\mathcal{K})$, azaz

$$\beta(t) = \begin{cases} -(2\alpha_0 + \kappa)A - 2\alpha_0(1 - A) = -2\alpha_0 - \kappa A, & \text{ha } \kappa \le \alpha_0 \\ -3\alpha_0 A - 2\alpha_0(1 - A) = -(A + 2)\alpha_0, & \text{ha } \kappa > \alpha_0, \end{cases} \tag{4.1}$$

ahol $A \in (0, 1]$.

A (4.1) formulából következik, hogy $\beta(t) < 0$. Másrészt

$$2\alpha(t) + \beta(t) = \begin{cases} -A\kappa, & \text{ha } \kappa \le \alpha_0 \\ -A\alpha_0, & \text{ha } \kappa > \alpha_0, \end{cases}$$

így a 3.1. tétel 4a feltételének jobboldali egyenlőtlensége és 4c feltétele is teljesül.

Ha az A paraméter befutja a teljes $(0, 1]$ intervallumot, akkor a (4.1) függvények megadják az összes lehetséges $\mathcal{L}(\mathcal{K})$-beli megengedett $\beta(t)$ függvényt.

2. eset:
Legyen $\beta \in \mathcal{L}(\mathcal{K}, \mathcal{R}(0))$, azaz

$$\beta(t) = \begin{cases} A(-2\alpha_0 - \kappa) + B\dfrac{\alpha_0}{(t+1)^b}, & \text{ha } \kappa \le \alpha_0 \\ -3\alpha_0 A + B\dfrac{\alpha_0}{(t+1)^b}, & \text{ha } \kappa > \alpha_0. \end{cases}$$

$\beta(t)$ a B előjelétől függően monoton csökkenő vagy növekvő.

Az A és B paraméterek értéke a $\beta(0)$-ra és a $\lim_{t\to\infty} \beta(t)$-re adható értékekből határozható meg.

- Ha $\beta(t)$ monoton növekvő és $\kappa \le \alpha_0$, akkor legyen

  $$\beta(0) = -(2\alpha_0 + \kappa)A + B\alpha_0 = -2\alpha_0 - \kappa$$

  és

  $$\lim_{t\to\infty} \beta(t) = -(2\alpha_0 + \kappa)A = -2\alpha_0.$$

  Innét $A = \dfrac{2\alpha_0}{2\alpha_0 + \kappa}$ és $B = -\dfrac{\kappa}{\alpha_0}$, így

  $$\beta(t) = -2\alpha_0 - \frac{\kappa}{(t+1)^b}.$$

  $\beta(t) < 0$, és mivel $2\alpha(t) + \beta(t) = -\dfrac{\kappa}{(t+1)^b}$, így a 3.1. tétel 4a feltételének jobboldali egyenlőtlensége teljesül. A 4c feltétel pedig pontosan akkor teljesül, ha $0 < b \le 1$.

- Ha $\beta(t)$ monoton növekvő és $\kappa > \alpha_0$, akkor legyen

$$\beta(0) = -3\alpha_0 A + B\alpha_0 = -3\alpha_0$$

és

$$\lim_{t\to\infty} \beta(t) = -3\alpha_0 A = -2\alpha_0.$$

Innét $A = \frac{2}{3}$ és $B = -1$, így

$$\beta(t) = -2\alpha_0 - \frac{\alpha_0}{(t+1)^b}.$$

$\beta(t) < 0$, és mivel $2\alpha(t) + \beta(t) = -\frac{\alpha_0}{(t+1)^b}$, így a 3.1. tétel 4a feltételének jobboldali egyenlőtlensége teljesül. A 4c feltétel pedig pontosan akkor teljesül, ha $0 < b \leq 1$.

- Ha $\beta(t)$ monoton csökkenő és $\kappa \leq \alpha_0$, akkor legyen

$$\beta(0) = -(2\alpha_0 + \kappa)A + B\alpha_0 = -2\alpha_0$$

és

$$\lim_{t\to\infty} \beta(t) = -(2\alpha_0 + \kappa)A = -(2\alpha_0 + \kappa).$$

Innét $A = 1$ és $B = \frac{\kappa}{\alpha_0}$, így

$$\beta(t) = -(2\alpha_0 + \kappa) + \frac{\kappa}{(t+1)^b}.$$

$\beta(t) < 0$, és mivel $2\alpha(t) + \beta(t) = -\kappa + \frac{\kappa}{(t+1)^b}$, így a 3.1. tétel 4a feltételének jobboldali egyenlőtlensége teljesül. A 4c feltétel pedig pontosan akkor teljesül, ha $b > 0$.

- Ha $\beta(t)$ monoton csökkenő és $\kappa > \alpha_0$, akkor legyen

$$\beta(0) = -3\alpha_0 A + B\alpha_0 = -2\alpha_0$$

és

$$\lim_{t\to\infty} \beta(t) = -3\alpha_0 A = -3\alpha_0.$$

Innét $A = 1$ és $B = 1$, így

$$\beta(t) = -3\alpha_0 + \frac{\alpha_0}{(t+1)^b}.$$

$\beta(t) < 0$, és mivel $2\alpha(t) + \beta(t) = -\alpha_0 + \frac{\alpha_0}{(t+1)^b}$, így a 3.1. tétel 4a feltételének jobboldali egyenlőtlensége teljesül. A 4c feltétel pedig pontosan akkor teljesül, ha $b > 0$.

4.1.2. $\alpha(t) \in \mathcal{R}(0)$

A 3.1. tételben szereplő 4b feltétel bizonyos $t_0 \geq 0$ mellett akkor is teljesíthető minden $t \geq t_0$, ha a κ konvexitási modulus nem ismert. Abban az esetben, ha a $2\alpha(t) + \beta(t)$ függvény monoton növő, és

$$\lim_{t \to \infty} 2\alpha(t) + \beta(t) = 0, \tag{4.2}$$

akkor létezik olyan $t_0 \geq 0$, hogy a 4b feltétel automatikusan teljesül minden $t_0 \geq 0$ esetén. Most ilyen $\alpha(t)$-ra és $\beta(t)$ függvényekre mutatunk példát.

Legyenek $\alpha(t) \in \mathcal{R}(0)$ és $\beta(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{R}(0))$, azaz

$$\alpha(t) = \frac{\alpha_0}{(t+1)^b} \quad \text{és} \quad \beta(t) = -A\alpha(t) + B,$$

ahol $\alpha_0 > 0$, $b > 0$, $A > 0$, $B \in \mathbb{R}$. Ekkor (4.2) miatt a 3.1. tétel 4b feltétele teljesül. Ahhoz, hogy a 4c feltétel teljesüljön, szükséges, hogy $0 < b \leq 1$ és $2\alpha_0 - A\alpha_0 < 0$ teljesüljön. Másrészt, ugyancsak (4.2)-ből következik, hogy $B = 0$.

A 4a feltételének egyenlőtlenségeiből

$$\frac{b}{t+1} \leq (3 - A)\alpha(t),$$

$$(2 - A)\alpha(t) < 0.$$

Ezeknek az egyenlőtlenségeknek $t = 0$-nál is fenn kell állniuk, így, bevezetve az $A\alpha_0 = \beta_0$ együtthatót, kapjuk hogy a

$$\beta(t) = -\frac{\beta_0}{(t+1)^b}$$

függvény a

$$2\alpha_0 < \beta_0 \leq 3\alpha_0 - b$$

feltétel mellett lesz megengedett.

4.1.3. $\alpha(t) \in \mathcal{H}_s$

A $\mathcal{H}_s$ osztályt meghatározó differenciálegyenlet parciális törtekre bontással kiintegrálható, így a $\mathcal{H}_s$-beli $\alpha(t)$-re

$$\alpha(t) = \frac{q}{1 - \left(1 - \frac{q}{\alpha_0}\right) \cdot e^{-qt}}$$

adódik. Könnyen látható, hogy az így kapott $\alpha(t)$ függvény mindig pozitív; $\alpha_0 < q$ esetén monoton növekvő, $\alpha_0 > 0$ esetén pedig monoton csökkenő. (Az $\alpha_0 = q$ esetén $\alpha(t) \equiv q$, konstans függvénnyel egyenlő, így ez a már tárgyalt $\alpha \in \mathcal{K}$ esetet jelenti.)

A 3.1. tétel 4a-4b feltételei most a

$$\max(-q, -\kappa) \le 2\alpha(t) + \beta(t) < 0$$

alakra egyszerűsödnek, vagyis teljesülnie kell a

$$\begin{aligned} -\kappa - 2\alpha(t) &\le \beta(t) < -2\alpha(t), \quad \text{ha } \kappa \le q \\ -q - 2\alpha(t) &\le \beta(t) < -2\alpha(t), \quad \text{ha } \kappa > q \end{aligned}$$

feltételek valamelyikének.

Az így választott megengedett $(\alpha(t), \beta(t))$ paraméterpárt *határparaméternek* nevezzük, mivel a 3.1. tétel 4a baloldali és a 4b egyenlőtlenségei közül legalább az egyik egyenlőséggel teljesül, sőt $q = \kappa$ esetén mindkettő.

Legyen $\beta(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_s)$, azaz keressük $\beta(t)$-t

$$\beta(t) = \begin{cases} A(-\kappa - 2\alpha(t)) + (1 - A)(-2\alpha(t)) = -A\kappa - 2\alpha(t), & \text{ha } \kappa \le q \\ A(-q - 2\alpha(t)) + (1 - A)(-2\alpha(t)) = -Aq - 2\alpha(t), & \text{ha } \kappa > q, \end{cases}$$

alakban, ahol $A \in (0, 1]$.

$\beta(t) < 0$ minden $t > 0$. Másrészt, mivel $2\alpha(t) + \beta(t) = konstans$, így a 3.1. tétel minden feltétele teljesül.

4.2. Az általános modell paramétereinek választása kvadratikus célfüggvény esetén

4.2.1. $\alpha(t) \in \mathcal{K}$

Válasszuk a (2.3) modell $\alpha(t)$ paraméterfüggvényét $\mathcal{K}$-belinek, azaz legyen

$$\alpha(t) \equiv \alpha_0, \quad \alpha_0 > 0.$$

Ekkor a 3.2. tétel 3a-3b feltételei a

$$\max(-\kappa, -2\frac{\alpha_0}{\alpha_0 + 1}) \le \alpha_0 + \beta(t) < 0$$

alakra egyszerűsödnek. Vagyis minden $t > 0$-ra teljesülnie kell a következő egyenlőtlenségeknek

$$-\alpha_0 - \min(\kappa, \frac{2\alpha_0}{\alpha_0 + 1}) \le \beta(t) < -\alpha_0.$$

1. eset:

Legyen $\beta \in \mathcal{L}(\mathcal{K})$ az alsó és felső korlátok konvex kombinációja, azaz

$$\beta(t) = \begin{cases} -\alpha_0 - \kappa A, & \text{ha } \kappa \le \frac{2\alpha_0}{\alpha_0 + 1}; \\ -\alpha_0(1 + \frac{A}{\alpha_0 + 1}), & \text{ha } \kappa > \frac{2\alpha_0}{\alpha_0 + 1}, \end{cases} \tag{4.3}$$

ahol $A \in (0, 1]$.

A (4.3) formulából következik, hogy $\beta(t) < 0$. Másrészt

$$\alpha(t) + \beta(t) = konstans$$

így a 3.2. tétel 3a feltételének jobboldali egyenlőtlensége és 3c feltétele is teljesül.

Ha az A paraméter befutja a teljes $(0, 1]$ intervallumot, akkor a (4.3) függvények megadják az összes lehetséges $\mathcal{L}(\mathcal{K})$-beli megengedett $\beta(t)$ függvényt.

2. eset:

Legyen $\beta \in \mathcal{L}(\mathcal{K}, \mathcal{R}(0))$, azaz

$$\beta(t) = \begin{cases} A(-\alpha_0 - \kappa) + B\dfrac{\alpha_0}{(t+1)^b}, & \text{ha } \kappa \le \dfrac{2\alpha_0}{\alpha_0 + 1} \\ -\alpha_0(1 + \dfrac{1}{\alpha_0 + 1})A + B\dfrac{\alpha_0}{(t+1)^b}, & \text{ha } \kappa > \dfrac{2\alpha_0}{\alpha_0 + 1}. \end{cases}$$

$\beta(t)$ a B előjelétől függően monoton csökkenő vagy növekvő.

Hasonlóan, mint az egyszerűsített modell esetében, az A és B paraméterek értéke a $\beta(0)$-ra és a $\lim_{t\to\infty} \beta(t)$-re adható értékekből határozható meg. A részletes számolási metódus leírását mellőzve kapjuk $\beta(t)$ választására a következőket:

- Ha $\beta(t)$ monoton növekvő és $\kappa \le \dfrac{2\alpha_0}{\alpha_0 + 1}$, akkor

$$\beta(t) = -\alpha_0 - \frac{\kappa}{(t+1)^b}.$$

  $\beta(t) < 0$, és mivel $\alpha(t) + \beta(t) = -\dfrac{\kappa}{(t+1)^b}$, így a 3.2. tétel 3a feltételének jobboldali egyenlőtlensége teljesül. A 3c feltétel pedig pontosan akkor teljesül, ha $0 < b \le 1$.

- Ha $\beta(t)$ monoton növekvő és $\kappa > \dfrac{2\alpha_0}{\alpha_0 + 1}$, akkor

$$\beta(t) = -\alpha_0 - \frac{\alpha_0}{\alpha_0 + 1}\frac{1}{(t+1)^b}.$$

  $\beta(t) < 0$, és mivel $\alpha(t) + \beta(t) = -\dfrac{\alpha_0}{\alpha_0 + 1}\dfrac{1}{(t+1)^b}$, így a 3.2. tétel 3a feltételének jobboldali egyenlőtlensége teljesül. A 3c feltétel pedig pontosan akkor teljesül, ha $0 < b \le 1$.

- Ha $\beta(t)$ monoton csökkenő és $\kappa \le \dfrac{2\alpha_0}{\alpha_0 + 1}$, akkor

$$\beta(t) = -(\alpha_0 + \kappa) + \frac{\kappa}{(t+1)^b}.$$

  $\beta(t) < 0$, és mivel $\alpha(t) + \beta(t) = -\kappa + \dfrac{\kappa}{(t+1)^b}$, így a 3.2. tétel 3a feltételének jobboldali egyenlőtlensége teljesül. A 3c feltétel teljesül, ha $b > 0$.

- Ha $\beta(t)$ monoton csökkenő és $\kappa > \frac{2\alpha_0}{\alpha_0+1}$, akkor

$$\beta(t) = -\alpha_0(1 + \frac{1}{\alpha_0+1}) + \frac{\alpha_0}{\alpha_0+1} \cdot \frac{1}{(t+1)^b}.$$

$\beta(t) < 0$, és mivel $\alpha(t) + \beta(t) = -\frac{\alpha_0}{\alpha_0+1}(1 - \frac{1}{(t+1)^b})$, így a 3.2. tétel 3a feltételének jobboldali egyenlőtlensége teljesül. A 3c feltétel teljesül, ha $b > 0$.

4.2.2. $\alpha(t) \in \mathcal{H}_g$

A $\mathcal{H}_g$ függvényosztályt meghatározó differenciálegyenlet a $z(t) = \frac{1}{\alpha(t)}$ helyettesítéssel kiintegrálható, így, ha $\alpha(t) \in \mathcal{H}_s$, akkor

$$\alpha(t) = \frac{q}{2 - q + (\frac{q}{\alpha_0} + q - 2)e^{-qt}}$$

alakú.

Könnyen látható, hogy az így kapott $\alpha(t)$ akkor lesz pozitív minden $t \geq 0$ esetén, ha $q \leq 2$.

Az $\alpha(t)$ függvény $\alpha_0 \leq q$ esetén monoton növekvő, $\alpha_0 > 0$ esetén pedig monoton csökkenő.

A 3.2. tétel 3a-3b feltételei most a

$$\max(-q, -\kappa) \leq \alpha(t) + \beta(t) < 0$$

alakra egyszerűsödnek, vagyis teljesülnie kell a

$$\begin{aligned} -\kappa - \alpha(t) \leq \beta(t) < -\alpha(t), &\quad \text{ha } \kappa \leq q \\ -q - \alpha(t) \leq \beta(t) < -\alpha(t), &\quad \text{ha } \kappa > q \end{aligned}$$

feltételek valamelyikének.

Az így választott megengedett $(\alpha(t), \beta(t))$ paraméterpárt itt is *határparaméternek* nevezzük, mivel a 3.2. tétel 3a baloldali és a 3b egyenlőtlenségei közül legalább az egyik egyenlőséggel teljesül. Itt azonban a mindkét egyenlőtlenség egyidejű egyenlőségként való teljesítése csak akkor lehetséges, ha $q = \kappa \leq 2$.

Legyen $\beta(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_g)$. Keressük $\beta(t)$-t az alulról és felülről korlátozó függvények konvex kombinációjaként

$$\beta(t) = \begin{cases} -A\kappa - \alpha(t), & \text{ha } \kappa \leq q; \\ -Aq - 2\alpha(t), & \text{ha } \kappa > q, \end{cases}$$

alakban, ahol $A \in (0, 1]$.

$\beta(t) > 0$ minden $t > 0$. Másrészt, mivel $\alpha(t) + \beta(t) = konstans$, így a 3.2. tétel minden feltétele teljesül.

4.2.3. $\alpha(t) \in \mathcal{R}(t_0)$

Ha κ-t nem ismerjük/számoltuk ki, de az $\alpha(t)$ és $\beta(t)$ paramétereket úgy választjuk, hogy

$$\lim_{t\to\infty} \alpha(t) + \beta(t) = 0, \tag{4.4}$$

legyen, akkor létezik olyan $t_0 \geq 0$, hogy a 3.2. tétel 3b feltétele minden $t \geq t_0$ esetén teljesül.

Legyenek $\alpha(t) \in \mathcal{R}(0)$ és $\beta(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{R}(0))$, azaz

$$\alpha(t) = \frac{\alpha_0}{(t+1)^b} \quad \text{és} \quad \beta(t) = -A\alpha(t) + B,$$

ahol $\alpha_0 > 0$, $b > 0$, $A > 0$, $B \in \mathbb{R}$. Ekkor (4.4) miatt a 3.1. tétel 3b feltétele teljesül, továbbá csak a $B = 0$ lehetséges. Ahhoz, hogy a 3c feltétel is teljesüljön, szükséges, hogy $0 < b \leq 1$ és $\alpha_0 - A\alpha_0 < 0$ is teljesüljön.

A $\beta_0 = A\alpha_0$ jelölést bevezetve a 3.1. tétel 3a feltétele

$$b \leq (3\alpha_0 - \beta_0)(1+t)^{1-b} + \alpha_0(\alpha_0 - \beta_0)(1+t)^{1-2b}$$

alakra egyszerűsödik. A $\frac{1}{2} \leq b \leq 1$ választás esetén a jobb oldal a $3\alpha_0 - \beta_0 > 0$ feltétel esetén monoton növekvő; így az egyenlőtlenség akkor teljesül minden $0 \leq t$ esetén, ha

$$\beta_0 \leq \frac{(\alpha_0)^2 + 3\alpha_0 - b}{1 + \alpha_0} \quad \text{és} \quad 3\alpha_0 - \beta_0 \geq 0.$$

Vagyis azt kaptuk, hogy a

$$\beta(t) = -\frac{\beta_0}{(t+1)^b}$$

függvény a

$$\alpha_0 < \beta_0 \leq \min\left(\frac{(\alpha_0)^2 + 3\alpha_0 - b}{1 + \alpha_0}, 3\alpha_0\right) \quad \text{és} \quad \frac{1}{2} \leq b \leq 1$$

feltételek mellett lesz megengedett.

5. Numerikus tesztek

Ebben a fejezetben konkrét numerikus példákon hasonlítjuk össze, hogy a különböző paraméterfüggvények választása hogyan befolyásolja a futási eredményeket.

Az előző fejezet tételeinek értelmében bizonyos feltételek teljesülése esetén az f függvényhez tartozó egyszerűsített/általánosított modell trajektóriái a függvény minimumpontjához tartanak. Ebben a fejezetben ezt felhasználva a következőképpen próbáljuk megkeresni egy függvény minimumpontját: az f-hez tartozó egyszerűsített/általánosított modell differenciálegyenletét a harmadrendű Runge-Kutta módszerrel oldjuk meg addig, míg az aktuális pontban a gradiens normája $0,01$ alá nem csökken. Az így kapott pont a minimumhely egy közelítő értéke lesz (természetesen minél kisebb értéket követelünk meg a gradiens normájára a megállási kritériumban, annál jobb közelítést kapunk). A táblázatok harmadik oszlopában mindig a Runge-Kutta módszer által végzett lépésszámot, a negyedik oszlopban pedig a kapott pontnak az optimumtól való távolságát tüntettük fel. A szükséges számításokat Matlabban írt program segítségével végeztük el.

5.1. Példa. Legyen $f(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + xy + y^2 + 2x + 3y$. Ez a függvény erősen konvex a $\kappa = \frac{3-\sqrt{5}}{4}$ konvexitási modulussal, továbbá f a (-1,-1) pontban veszi fel a minimumát.

Az egyszerűsített modellt az $x_0 = (-3,2)$ és $p_0 = (-1,-4)$ kezdetiértékekkel használva, a Runge-Kutta-módszerben pedig a lépéshosszt $0,1$-nek választva a kapott eredményeket az 1. táblázat tartalmazza.

$\alpha(t)$	$\beta(t)$	lépésszám	távolság
κ	-3κ	279	$0,0257$
$\frac{\kappa}{1-(1-\kappa)e^{-\kappa t}}$	$-2\alpha(t)-\kappa$	278	$0,0258$
$\frac{2}{t+1}$	$-\frac{5}{t+1}$	204	$0,0255$
$\frac{3}{t+1}$	$-\frac{8}{t+1}$	264	$0,0259$
$\frac{2}{\sqrt{t+1}}$	$-\frac{5}{\sqrt{t+1}}$	345	$0,0260$

1. táblázat.

A táblázatból látható, hogy a különféleképpen megválasztott paraméterekkel nagyon hasonló eredményeket kaptunk. Az első két sorban lévő paraméterek határparaméterek voltak, (azaz a 3.1. tétel 4a és 4b feltételei mindig egyenlőséggel teljesülnek), és gyakorlatilag ugyanazt az eredményt produkálták. A következő három sorban lévő paraméterekre a 4b feltétel kezdetben nem teljesül, csak minden $t_0 \le t$ esetén. Ez a t_0 mindhárom esetben kiszámolható, és az $\alpha(t) = \frac{2}{1+t}$ esetben a legkisebb; az eredményekből leolvasható, hogy e három esetből pontosan ekkor konvergált a leggyorsabban a módszer. Általában is ez várható: ha a 4b feltétel csak egy bizonyos időponttól kezdve teljesül, akkor a módszer csak ettől az időponttól kezdve konvergál, vagyis minél kisebb ez a t_0, annál gyorsabb az algoritmus.

Ennek megfelelően az várhatjuk, hogy az $\alpha(t) = \alpha_0(1+t)^{-b}$ típusú választások annál gyorsabbak lesznek, minél nagyobb az f függvény konvexitási modulusa.

Kipróbálhatjuk azt is, hogy mennyit módosít a futási eredményeken, ha a Runge-Kutta-módszerben megváltoztatjuk a lépéshosszt. A korábbi $0,1$-del szemben $0,05$-nak választva a lépéshosszt a 2. táblázat eredményeit kaptuk.

$\alpha(t)$	$\beta(t)$	lépésszám	távolság
κ	-3κ	557	0,0259
$\frac{\kappa}{1-(1-\kappa)e^{-\kappa t}}$	$-2\alpha(t)-\kappa$	555	0,0260
$\frac{2}{t+1}$	$-\frac{5}{t+1}$	408	0,02556
$\frac{3}{t+1}$	$-\frac{8}{t+1}$	528	0,0259
$\frac{2}{\sqrt{t+1}}$	$-\frac{5}{\sqrt{t+1}}$	689	0,0224

2. táblázat.

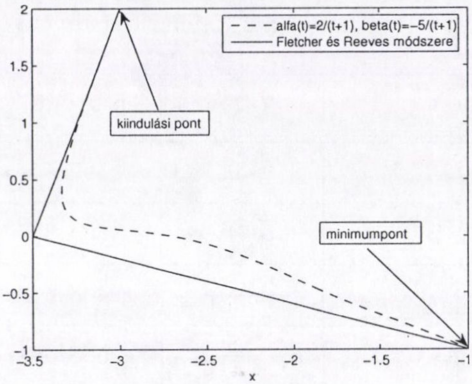
Látható, hogy a lépéshossz megváltoztatásával gyakorlatilag nem értünk el változást; a lépésszám lényegében megduplázódott, és a pontosság sem javult tőle.

Ugyanerre a feladatra az általános modellt alkalmazva $0,1$-es lépéshosszal a 3. táblázat eredményei adódtak.

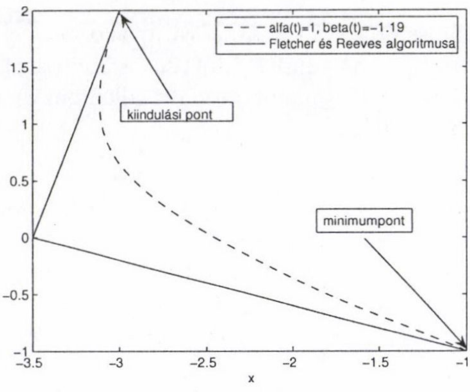
$\alpha(t)$	$\beta(t)$	lépésszám	távolság
1	$-1,19$	299	0,02260
$\frac{\kappa}{2-\kappa+(2\kappa-2)e^{-\kappa t}}$	$-\alpha(t)-\kappa$	1462	0,0262
$\frac{1}{\sqrt{t+1}}$	$-\frac{1,5}{\sqrt{t+1}}$	915	0,00261

3. táblázat.

Az eredményeket az egyszerűsített modell eredményeivel összevetve a legszembetűnőbb változás, hogy az algoritmus lépésszáma minden esetben "drasztikusan„ megugrott. A pontosságban lényegi változás nem következett be; vagyis azt mondhatjuk, hogy ezen a példán az egyszerűsített modell jobban működött az általánosítottnál. Az 1. és 2. ábrán a két modellhez tartozó trajektóriákat megvizsgálva felfedezhetünk azonban még egy eltérést is. A feladatot az egyszerűsített modellel megoldva a trajektóriában kis hullámzás fedezhető fel, míg az általános modellel kapott megoldásnál ez a hullámzás eltűnik (viszont a konvergencia lassabb).



1. ábra. Egyszerűsített modell



2. ábra. Általános modell

5.2. Példa. Legyen $f(x,y) = x^4+2(x-2)^2+y^4+2(y+2)^2$. Az f függvény erősen konvex a $\kappa = 2$ konvexitási modulussal, a minimumát pedig az $(1,-1)$ pontban veszi fel. Az f-hez tartozó egyszerűsített modellt az $x_0 = (-3,2)$ és $p_0 = (3,-1)$ kezdeti értékekkel oldottuk meg. Az eredményeket a 4. táblázat tartalmazza.

Látható, hogy ebben a példában a konvergencia jóval gyorsabb volt, mint az 1. példában a kvadratikus feladatban. Ennek oka abban keresendő, hogy az előző példában a függvény konvexitási modulusa $0,2$ körül volt, míg itt most 2. Általában

$\alpha(t)$	$\beta(t)$	lépésszám	távolság
2	-6	29	0,00053
$\frac{2}{1+e^{-2t}}$	$-2\alpha(t)-2$	31	0,00053
$\frac{2}{t+1}$	$-\frac{5}{t+1}$	194	0,00061
$\frac{3}{t+1}$	$-\frac{8}{t+1}$	64	0,00059

4. táblázat.

is az várható, hogy minél nagyobb az f függvény konvexitási modulusa, a módszer annál gyorsabban konvergál a minimumponthoz.

Az eredményekből továbbá az is kiolvasható, hogy az első, illetve második sorban használt paraméterekkel a módszer lényegében ugyanúgy viselkedett; továbbá mindkét esetben gyorsabban és pontosabb eredményt adtak, mint a 3. és 4. sorban használt paraméterek esetén. Ez azzal magyarázható, hogy az első két esetben a paraméterek határparaméterek voltak, azaz a 3.1. tétel 4a feltételének jobb oldali egyenlőtlensége és a 4b feltétel egyenlőséggel teljesülnek, míg a másik két esetben csak a 4a feltétel teljesül egyenlőséggel. Továbbá a harmadik és negyedik sorbeli paraméterek közül az adott jobb eredményt, amelyiknél a 4b feltételben közelebb vagyunk a határhoz. Általában is elmondható, minél közelebb vagyunk a határhoz, a módszer annál gyorsabban konvergál.

6. Nyitott problémák

Ebben az elemzésben nyilvánvalóan látszik, hogy a Fletcher-Reeves-eljárás folytonosítása akár az általános, akár az egyszerűsített modellel egy sor paraméterrel konvergens lesz, és a paraméterek választása túlságosan nem befolyásolja a konvergencia sebességét. A Fletcher-Reeves-eljárásnak van egy nagyon szép tulajdonsága, nevezetesen n-változós kvadratikus célfüggvény esetén legfeljebb n lépés után véget ér, és az egymást követő irányok Q-konjugáltak. A vizsgált folytonos modelleknél ezek a feltételek nem teljesülnek. Felmerül a következő két kérdés:

- létezik-e olyan paraméter-pár, amelyek mellett véges T idő alatt elérjük az optimumot;
- vannak-e olyan $t_0, t_1, \ldots, t_n$ időpontok, amelyekben a p irányok Q-konjugáltak?

Ezen kérdések megválaszolása még további kutatást igényel.

Hivatkozások

[1] ANTIPIN, A. S.: *Minimization of convex functions on convex sets by means of differential equations*, Differential Equations **30** (1994), N^o9. 1365–1375.

[2] BAHVALOV, N. Sz.: *A gépi matematika numerikus módszerei*, Műszaki Kiadó, Budapest, 1977. Oroszból fordítva, az eredeti cikk: BAKHVALOV, N. S. *Chislennye metody*, Nauka, 1975.

[3] EVTUSHENKO, YU. G., ZHADAN, V. G.: *Application of the method of Lyapunov functions to the study of convergence of numerical methods.* U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys. **15** (1976) N^o1. 96–108. Oroszból fordítva, az eredeti cikk: EVTUSHENKO, YU. G., ZHADAN, V. G. *Primeneniya metoda funktsiĭ Lyapunova dlya issledovaniya skhodimosti chislennykh metodov*, Zh. vychisl. mat. i mat. fiz. **15** (1975), N^o1., 101–112.

[4] FLÅM, S. D.: *Solving convex programming by means of ordinary differential equations*, Mathematics of Operations Research **17** (1992), N^o2., 290–302.

[5] FLETCHER, R., REEVES, C. M.: *Function minimization by conjugate gradients*, Comput. J. **7** (1964), 149–154.

[6] HAJBA, T.: *Optimization methods modeled by second order differential equation*, Annales Univ. Sci. Budapest, Sect. Comp. **26** (2006), 145–158.

[7] HAUSER, R., NEDIĆ, J.: *The continuous Newton-Raphson method can look ahead*, SIAM J. Optim. **15** (2005), N^o3, 915-925.

[8] KOVÁCS, M.: *A nemlineáris programozás elmélete*, Typotex, 2000.

[9] KOVÁCS, M.: *Continuous analog of gradient-type iterative regularization.* J. Mosc. Univ. Comput. Math. Cybern. **3** (1979), 37–44. Oroszból fordítva, az eredeti cikk: KOVACH, M., *NVestnik Mosk. un-ta, Ser.* XV. *Vychisl. mat. i kibern.* **3** (1979), 36–42.

[10] KOVÁCS, M.: *Some convergence theorems on nonstationary minimization precesses.* Math. Operationsforschung u. Statist. **15** (1984), N^o2, 203-210.

[11] VENEC, V. I., RYBASHOV M. V.: *The method of Lyapunov function in the study of continuous algorithms of mathematical programming.* U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys. **17** (1977), 64–73. Oroszból fordítva, az eredeti cikk: VENETS, V. I., RYBASHOV, M. V., *Metod funktsiĭ Lyapunova v issledovanii nepreryvnykh algoritmov matematicheskogo programmirovaniya.* Zh. vychisl. mat. i mat. fiz. **17** (1977), N^o3., 622-633.

(Beérkezett: 2007. október 15.)

HAJBA TAMÁS
SZÉCHENYI ISTVÁN EGYETEM
MŰSZAKI TUDOMÁNYI KAR MATEMATIKA ÉS SZÁMÍTÁSTUDOMÁNY TANSZÉK
9026 GYŐR, EGYETEM TÉR 1.
e-mail: hajbat@sze.hu

PARAMETER ANALYSIS OF OPTIMIZATION METHODS MODELED BY SECOND ORDER DIFFERENTIAL EQUATION

Tamás Hajba

In [6] the convergence of some optimization methods modeled by second order differential equation have been studied. In this paper we introduce some class of functions and analyze which functions belonging to these classes satisfy the sufficient conditions of the convergence. Finally, we illustrate the obtained results on numerical examples.

Alkalmazott Matematikai Lapok **26** (2009), 81-96.

EGY ADALÉK A NEMLINEÁRIS OPTIMALIZÁLÁS TÖRTÉNETI ELŐZMÉNYEIHEZ[1]

SZABÓ PÉTER GÁBOR

A két világháború közötti magyar matematikai élet egyik szép elismerésének számított az, ha valaki megkaphatta a Kőnig Gyula-jutalmat. Az 1922 és '44 között kétévente kiadott díjat 1938-ban Lipka Istvánnak a M. Kir. Ferencz József Tudományegyetem magántanárának adták. A Kőnig Gyula-jutalmat odaítélő bizottság, annak egyik tagját – és vele egyszemélyben az előző díjazottat – Kalmár Lászlót kérte fel arra, hogy szegedi kollégájának addigi munkásságát egy összefoglaló dolgozatban ismertesse. Kalmár sorra vette Lipka matematikai írásait – számszerint 17 munkát – és a 6. sz. cikk bemutatását az alábbiakkal kezdte [2]:

„Az analízisnek egy a mechanikával is összefüggő, végeredményben azonban egy algebrai kérdésre visszavezethető problémájával foglalkozik LIPKA 6. sz. dolgozatában. A feltételes szélsőérték-feladatoknál csak azt az esetet szokás tárgyalni, amikor a feltételi relációk mind egyenletek; pedig bizonyos mechanikai kérdések, pl. egy természetes konzervatív rendszer egyensúlya stabilitásának kérdése, ha a kényszerfeltételek részben egyenlőtlenségek, olyan szélsőérték-feladatra vezetnek, amelynél egyenlőtlenség-feltételek is vannak. LIPKA az ilyen feladatokat a következő kérdésre vezeti vissza: adva van egy quadratikus alak; eldöntendő, vajjon ez a változók pozitív értékeinél pozitív-e. Ez az algebrai kérdés PÓLYA egy kritériumának segítségével is megoldható; LIPKA egy másik, a kérdés quadratikus természetének jobban megfelelő megoldást ad."

A szóban forgó dolgozat a berlini Crelle's Journalban jelent meg [4]: S. Lipka, Ein Extremalproblem, nebst Anwendung auf eine Stabilitätsfrage, *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik* 166(1931), 9–15. A németül írt cikket Csendes Tibor fordította magyarra, amelyet ebben a formájában most először teszünk közzé.

Elsősorban a témaválasztása miatt tartjuk fontosnak, hogy felhívjuk a figyelmet erre a dolgozatra. A szerző a hagyományos egyenlőség-feltételes szélsőértékszámítás helyett már egyenlőtlenség-feltételekkel foglalkozik, ezért úgy gondoljuk, hogy jó számon tartanunk adalékként ezt a cikket is, mint a nemlineáris programozás történeti előzményeinek egy hazai vonatkozású eredményét.

A nemlineáris programozásnak, mint önálló diszciplínának a megindulását H.W. Kuhn és A.W. Tucker 1951-ben megjelent 'Nonlinear Programming' c. dolgozatától [1] szokás eredeztetni. Persze voltak már korábban is olyan eredmények

[1] Elhangzott a XXVII. Magyar Operációkutatási Konferencián, Balatonőszödön (2007. június 7–9.).

(mint például a Newton-módszer (1669), a Lagrange-féle multiplikátoros módszer (1788) vagy a Cauchy által felfedezett gradiens módszer (1847)), amelyeket ma a nemlineáris programozás témaköréhez is szoktunk sorolni. Kuhn és Tucker munkájának novuma azonban az volt, hogy éppen az egyenlőtlenség-feltételes nemlineáris optimalizálási feladatra közölték az optimalitás szükséges feltételeit.

Amint azt Prékopa Andrásnak az optimalizálás elméletének kialakulásáról írott dolgozataiból [5, 6] tudjuk, az analitikus mechanika keretein belül lényegében már Farkas Gyula is eljutott az egyenlőtlenség-feltételes nemlineáris optimalizálás szükségességi kritériumához az ún. Fourier-féle mechanikai elv duálisának vizsgálatakor. Szintén ismeretes, hogy Kuhnt és Tuckert megelőzve 1939-ben a diplomamunkájában W. Karush [3] is megfogalmazta az ún. KKT-feltételeket.

Lipka István írása, amely 1932-ben jelent meg – de amint az a dolgozatból is kiderül már 1929. december 1-én elkészült – szintén az egyenlőtlenség-feltételes nemlineáris optimalizálási feladatok tárgyalásának egy korai munkája. Erről a dolgozatról azért is szólunk most, mivel semmilyen az optimalizással vagy az optimalizálás elméletének történetével kapcsolatos szakmunkában még megemlítve sem láttuk ezt a cikket. Úgy gondoljuk, hogy bár Lipka a Kuhn-Tucker tételhez nem jut el, mindenesetre ott a helye a magyar vonatkozású nemlineáris optimalizálás történeti előzményeit tárgyaló irodalomban legalább a megemlítés szintjén.

Lipka egy mechanikai feladattól motiválva foglalkozik optimalizálással. A konzervatív rendszerek stabilitási problémájában a Lagrange–Dirichlet-tétel alkalmazása a potenciális energiafüggvény minimalizálását igényli, mivel ha az előbbi függvénynek egy adott helyen izolált minimuma van, akkor a rendszer ott stabil egyensúlyi helyzetben van. A szerző általános kényszerfeltételek (egyenlőtlenségek) mellett tárgyalva a kérdést jut el az egyenlőtlenség-feltételes optimalizáláshoz.

A tekintett dolgozat alapvetően három problémát vizsgál:

1. Határozzuk meg, hogy milyen feltételek mellett lesz a

$$\begin{aligned} &\min V(q_1, q_2, \ldots, q_n) \\ &\text{f.h. } f_1(q_1, q_2, \ldots, q_n) \geq 0 \\ &\qquad \vdots \\ &\qquad f_k(q_1, q_2, \ldots, q_n) \geq 0 \\ &\qquad 0 < k < n \end{aligned}$$

feladatnak a $\underline{q}^0$ olyan lokális optimális megoldása, amelyre minden feltétel aktívvá válik, ahol

a) $V, f_1, \ldots, f_k$ kétszer folytonosan differenciálható valós függvények,

b) a feltételrendszerbeli függvények alkotta Jacobi-mátrixnak a $\underline{q}^0$ helyen a rangja k (vagyis teljes sorrangú a mátrix),

c) és a Jacobi-mátrix első k oszlopa által meghatározott mátrix determinánsa nem 0.

Érdekes, hogy a vizsgálat bár úgy indul, hogy a tekintett szélsőérték feladat feltételei „nem csak egyenleteket, hanem egyenlőtlenségeket is tartalmazhat", ezután Lipka csak egyenlőtlenség-feltételekkel dolgozik tovább. Azt írja, hogy az egyenlőség-feltétel „csak a független változók számának csökkenését jelenti".

A feladatból új $x_1, x_2, \dots, x_n$ koordináták bevezetésével egy olyan új optimalizálási problémát készít, amelyben az első k változóra nemnegativitási feltétel van előírva, a többi változó előjelkötetlen. Meglepő, hogy bár néven nem nevezi, de az implicit függvény tételt próbálja explicit módon használni. Ez ritka esetben valóban véghezvihető, de gyakorlati szempontból ez a tárgyalási mód nem megfelelő. Az új feladat a következő lesz:

2. Határozzuk meg, hogy mikor van a

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

valós függvénynek olyan lokális $\underline{x}$ optimumhelye, amelyre $0 < k < n$ és

$$x_1, x_2, \dots, x_k \geq 0.$$

Ezt a feladatot annak az esetnek a tárgyalására viszi át, miszerint annak megvizsgálása jelent csak problémát, hogy a

$$\sum_{(1 \leq i < j \leq n)} \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j} \delta x_i \delta x_j$$

kvadratikus alak pozitív-e a

$$\delta x_1 \geq 0, \dots, \delta x_k \geq 0$$

esetben. A $\delta x_{k+1}, \dots, \delta x_n$ mennyiségek előjelkötetlenek, ahol δx_i az x_i változó variációját jelöli, vagyis egy olyan kicsi mennyiséget, amelyre az $(x_i + \delta x_i)$ vektor még lehetséges megoldás. Lipka itt arra hivatkozik, hogy ennek eldöntéséhez elég megállapítani az előbbi kvadratikus alak relatív pozitív definitségét, amelyet lehet Pólya módszerével, vagy az általa kidolgozott most közlendő módon. A relatív pozitív definitség megállapítása az alábbi feladat megoldását jelenti.

3. Határozzuk meg annak szükséges és elégséges feltételét, hogy egy

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} x_i x_j$$

kvadratikus alak

$$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$$

esetén mindig pozitív (leszámítva az $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ esetet).

Lipka itt kidolgozott módszerének ismertetését ismét Kalmár jelentéséből idézzük:

1. ábra. Lipka István az 1928-as szegedi matematikus találkozón készült felvételen (az alsó sorban balról a második helyen ül).

„Szorítkozzunk egyszerűség kedvéért háromváltozós quadratikus alakokra. Egy ilyen alak biztosan bír a kívánt sajátsággal, azaz az első térnyolcadban pozitív, ha pozitív az egységkocka három, nem a koordinátasíkokban fekvő lapján. Azaz csak azt kell megvizsgálnunk, vajjon a quadratikus alaknak ezeken a lapokon felvett minimumai pozitívok-e. Amennyiben valamelyik minimum a lap belsejében éretik el, a szokásos módszerrel meghatározható; ellenkező esetben valamelyik élen éretik el s ekkor megint vagy az él belső pontjában, amikor is szintén az analízis szokásos módszerével határozható meg, vagy pedig valamelyik csúcsban.

Lipka tehát meghatározza a szóbanforgó lapok síkján és élek egyenesén a quadratikus alak minimumát, továbbá értékét a csúcsokban; a kívánt viselkedéshez szükséges és elegendő, hogy e minimumok közül azok, amelyek magán a lapon, illetve élen (és nem a meghosszabbításán) éretnek el, valamint a csúcsokban felvett értékek, pozitívok legyenek. Részletesebb diszkussziót csak az az eset igényel, amikor valamelyik lap síkján nem egy pontban éretik el a minimum, hanem egy egyenes mentén; ebben az esetben meg kell még néznünk, átmegy-e ez az egyenes a lap belsején. Ennek megfelelően az általános (akárhányváltozós) esetben szükség lehet arra, hogy megvizsgáljuk, van-e egy bizonyos lineáris egyenlőtlenségrendszernek megoldása: ez pedig Dines egy módszerével könnyen eldönthető.”

Nézzünk egy konkrét példát Lipka koordináta-transzformációs módszerének használatára. Tekintsük a következő kvadratikus programozási feladatot:

$$\begin{gathered}\min q_1^2 + q_2^2 - 6q_1 - 4q_2 + 13 \\ \text{f.h. } 3 - q_1 - 2q_2 \geq 0.\end{gathered}$$

Könnyen látható, hogy a feladat megoldása a $\underline{q}^0 = \left(\frac{11}{5}, \frac{2}{5}\right)$ vektor lesz, az optimum értéke pedig $\frac{16}{5}$ (pl. a grafikus módszert használva, világos, hogy a célfüggvényhez hozzárendelhető olyan kör, amelynek a feltételhez tartozó félsíkot meghatározó egyenessel vett egyetlen közös $\underline{q}^0$ pontja lesz az optimumhely).

Lipka módszerével megmutatjuk, hogy $\underline{q}^0$ minimumhely. Először is új koordinátákat vezetünk be:

$$\begin{aligned}x_1 &:= 3 - q_1 - 2q_2,\\ x_2 &:= q_2.\end{aligned}$$

A $\underline{q}^0$ vektorhoz tartozó új pont koordinátái:

$$\begin{aligned}x_1^0 &:= f_1(\underline{q}^0) = 0,\\ x_2^0 &:= \frac{2}{5}.\end{aligned}$$

Fejezzük ki a q_1, q_2 változókat az újonnan bevezetett x_1 és x_2 változók segítségével:

$$\begin{aligned}q_1 &= 3 - x_1 - 2q_2 = 3 - x_1 - 2x_2,\\ q_2 &= x_2.\end{aligned}$$

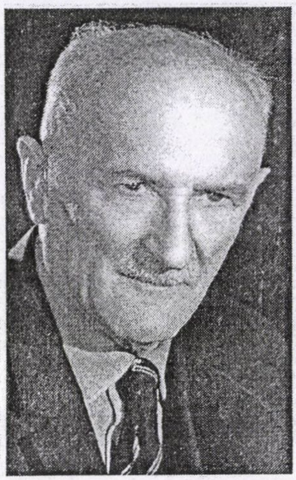
Helyettesítsük be őket az eredeti célfüggvénybe, majd írjuk fel a kapott új feladatot:

$$\begin{gathered}\min g(x_1, x_2) = x_1^2 + 5x_2^2 + 4x_1x_2 - 4x_2 + 4 \\ \text{f.h. } x_1 \geq 0.\end{gathered}$$

Vizsgálva az új célfüggvény első parciális deriváltjait

$$\frac{\partial g}{\partial x_1} = 2x_1 + 4x_2, \qquad \frac{\partial g}{\partial x_2} = 10x_2 + 4x_1 - 4.$$

Látható, hogy az $\underline{x}^0$ pontban pozitív értéket vesz fel az x_1 szerinti parciális derivált (az x_2 szerinti eltűnik), így a $\underline{q}^0$ minimumhelye lesz az eredeti feladatnak.



2. ábra. Lipka Istvánnak egy idősebb korában készült arcképe.

Végül szóljunk röviden a cikk szerzőjéről is, hiszen annak ellenére, hogy a mai napig jelennek meg olyan matematikai munkák, amelyekhez az inspirációt Lipka valamelyik dolgozata adta, a szerzőt sokan csak az 1928-as szegedi matematikus találkozón készült fényképről ismerik (1. ábra). Nevét hiába is keressük a Magyar Nagylexikonban vagy a Magyar Tudóslexikonban, nincs hozzá szócikk. (Az előbb említett két lexikonban viszont a csoportkép összes többi magyar tudósáról külön szócikkek szólnak.)

Lipka István (1899–1990) a bp.-i tudományegyetem matematika-fizika szakán és vele párhuzamosan a Műegyetemen tanult. 1923-ban szerzett középiskolai tanári oklevelet, és még ugyanebben az évben doktorált is matematikából, valamint elméleti és kísérleti fizikából. Három évig a várpalotai gimnáziumban tanított, majd 1926-ban a szegedi tudományegyetem geometriai tanszékére került tanársegédnek. 1929-ben egy szemeszteren át a hamburgi egyetemen volt ösztöndíjas (az előbb tárgyalt munkáját ez év végén írta). 1933-tól a szegedi egyetem magántanára, 1935-től adjunktus, majd 1942-től intézeti tanár a geometriai tanszéken. 1945-ben politikai okokból távoznia kellett az egyetemről. Ezt követően az iparban helyezkedett el, volt statisztikus a Csepel Műveknél, majd gyártmányvezető a szerszámgépgyárban. 1954-ben a Szerszámgép Fejlesztési Intézetbe került és az intézet vezető kutatója lett. 1967-ben vonult nyudíjba. 1976-ban a műszaki tudományok doktora lett. Számos dolgozata jelent meg matematikából és a műszaki gépészet tárgyköréből. A matematikai kutatásai elsősorban a funkcionális algebrára (a komplex számok algebrájára) és a függvénytannak az algebrával összefüggő kérdéseire terjedtek ki.

* * *

Egy szélsőérték feladat egy stabilitási kérdésre való alkalmazással

Lipka István (Szeged)

1. Egy mechanikai rendszer valamely helyzetben való egyensúlyi helyzete stabil jellegű, ha a rendszer a következő tulajdonságokkal rendelkezik: mozgása közben az említett hely közelében marad, ha a rendszer kiindulási pontjait elegendően kis mértékben változtatjuk meg, és a pontoknak megfelelően kis kezdeti sebességet adunk.

A tárgyalásunkat egy stabilitási kérdéssel kezdjük, amely egy szélsőérték feladathoz vezet. Természetes-konzervatív mechanikai rendszereket vizsgálunk. Egy mechanikai rendszer akkor természetes-konzervatív, ha az energiaintegrál alakja $T + V = konstans$, ahol T a kinetikai energia, a sebesség másodfokú függvénye, és V a potenciális energia, amely csak azon koordinátákat tartalmazza, amelyek meghatározzák a rendszer állapotát. Ilyen rendszerekre vonatkozik Lagrange következő tétele, amelyet először Dirichlet igazolt[2]. *Amennyiben a potenciálfüggvénynek egy tetszőleges helyen izolált maximuma van, akkor a rendszer ott stabil egyensúlyi helyzetben van.* A potenciálfüggvény maximuma helyett a potenciális energiafüggvény minimumáról beszélhetünk. Természetes-konzervatív rendszerek estén az összefüggések koordinátái között nem szerepel az idő. Az összefüggéseket szokás szerint egyenletekkel adják meg, amelyek segítségével a koordináták száma csökkenthető oly módon, hogy a fennmaradó koordináták egymástól függetlenek lesznek. Ezután a potenciálfüggvénynek is egymástól független változói lesznek, úgy, hogy a stabilitás kérdését a Lagrange–Dirichlet-tétellel egy szokásos szélsőérték feladatra lehet visszavezetni. A következő megfontolásokban feltesszük, hogy azon koordináták közti összefüggések, amelyek a rendszer állapotát meghatározzák, általános értelemben természetesek, tehát azt, hogy az összefüggések nem csak egyenleteket, hanem egyenlőtlenségeket is tartalmazhatnak. Az ilyen összefüggések köztudottan általános kényszerfeltételeket fejeznek ki. Dirichlet tárgyalásmódját át lehet vinni ilyen rendszerekre, és ez azt adja, hogy egy tetszőleges hely egyensúlya akkor stabil, ha a potenciálfüggvény ugyanott relatív maximummal rendelkezik azzal a feltétellel, hogy a megfelelő egyenletek és egyenlőtlenségek teljesülnek. Ez alapján a feladatunkat a következő alakban fogalmazhatjuk meg. Legyen a $V(q_1, q_2, \ldots, q_n)$ függvény a $q_1, q_2, \ldots, q_n$ változók szerint kétszer folytonosan differenciálható. A változó értékek elégítsék ki a $(q_1^0, q_2^0, \ldots, q_n^0) = (q_i^0)$ hely környezetében a következő egyenlőtlenségrendszert:

$$\begin{gathered} f_1(q_1, q_2, \ldots, q_n) \geq 0 \\ \vdots \\ f_k(q_1, q_2, \ldots, q_n) \geq 0 \\ 0 < k < n. \end{gathered} \tag{1}$$

A (q_i^0) helyen legyen $f_1(q_1^0, \ldots, q_n^0) = \cdots = f_k(q_1^0, \ldots, q_n^0) = 0$.[3] Feltesszük, hogy az (1) feltételek nem tartalmaznak egyenlőséget, mert egy egyenlőség csak a független

[2] L. Dirichlet, Über die Stabilität des Gleichgewichtes, Journal für die Reine und Angewandte Mathematik 32(1846), S. 85

[3] Mert ha egy függvény az (1)-ből a (q_i^0) helyen pozitív lenne, akkor ez a függvény a (q_i^0) pont egy környezetében is pozitív lenne, és így az érintett egyenlőtlenség a változókra nem jelentene megszorítást.

változók számának csökkentését jelenti. Legyenek az $f_1, f_2, \dots, f_n$ függvények kétszer folytonosan differenciálhatók, a

$$\left\| \frac{\partial f_h}{\partial q_j} \right\| \qquad h = 1, 2, \dots, k; \qquad j = 1, 2, \dots, k, \dots, n$$

függvénymátrix a (q_i^0) helyen k rangú; és az általánosság korlátozása nélkül feltehetjük mindjárt, hogy a $\frac{\partial(f_1,\dots,f_k)}{\partial(q_1,\dots,q_k)}$ Jacobi-determináns a (q_i^0) helyen nem nulla. Ezek után a feladatunk a következő: *Milyen feltételek mellett lesz a $V(q_1, q_2, \dots, q_n)$ függvénynek feltételes szélsőértéke a (q_i^0) helyen, éspedig egy olyan, amely a (1) feltételeknek megfelel?* Új koordinátákat vezetünk be, és erre a célra tekintjük a következő függvényrendszert:

$$\begin{aligned} x_1 &= f_1(q_1, q_2, \dots, q_n), \dots, x_k = f_k(q_1, q_2, \dots, q_n), \\ x_{k+1} &= q_{k+1}, \dots, x_n = q_n, \\ x_i^0 &= f_i(q_1^0, \dots, q_n^0), \qquad && (i = 1, 2, \dots, k), \\ x_i^0 &= q_i^0, && (i = k+1, k+2, \dots, n). \end{aligned}$$

Ennek a függvényrendszernek a Jacobi-determinánsa a (q_i^0) helyen a feltevéseink szerint nem nulla, tehát az $(x_1^0, \dots, x_n^0)$ pont egy környezetében a függvényrendszerből $q_1, \dots, q_k$ kifejezhető, és

$$q_i = \varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \qquad (i = 1, 2, \dots, n), \tag{2}$$

ahol a $\varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ egyértelmű és az x_i változók szerint kétszer folytonosan differenciálható függvények. Most az x_i változókat az (2) egyenletek segítségével behelyettesítjük a $V(q_1, \dots, q_n)$ függvénybe; ezzel egy új, $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ függvényt kapunk. Az x_i változók értékkészlete az (1) alapján

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_k \geq 0, \tag{3}$$

az $x_{k+1}, \dots, x_n$ változók tetszőleges értéket vehetnek fel. Ha tehát a $g(x_1, \dots, x_n)$ függvénynek az (x_i^0) helyen olyan szélsőértéke van, amely a (3) feltételeknek megfelel, akkor a $V(q_1, \dots, q_n)$ függvénynek az (1) feltételeknek megfelelő szélsőértéke van a (q_i^0) helyen. *Tehát azt kell megvizsgálnunk, hogy mikor van a $g(x_1, \dots, x_n)$ függvénynek olyan relatív szélsőértéke (pl. minimuma), amely a (3) feltételeket kielégíti.* A minimum esetén a

$$g\left(x_1^0 + \delta x_1, \dots, x_n^0 + \delta x_n\right) - g\left(x_1^0, \dots, x_n^0\right) = \sum_{(i)} \frac{\partial g}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{1}{2} \sum_{(i,j)} \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j} \right)' \delta x_i \delta x_j,$$

kifejtésből[4] következik, hogy az első parciális deriváltak az (x_i^0) helyen a

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x_j} &\geq 0, \qquad && j = 1, 2, \dots, k \\ \frac{\partial g}{\partial x_h} &= 0, && h = k+1, \dots, n \end{aligned} \tag{4}$$

[4] A vessző itt azt jelenti, hogy a deriváltat valahol az (x_i^0) és a $(x_i^0 + \delta x_i)$ hely között kell venni.

feltételeket kielégítik. Ha egy a (4) deriváltak közül biztos pozitív, akkor a $g(x_1, \dots, x_n)$ függvénynek az (x_i^0) helyen minimuma van, az ellenkező esetben, tehát amikor a (4) deriváltak mind eltűnnek, akkor a

$$\delta x_1 \geq 0, \dots, \delta x_k \geq 0, \qquad \delta x_{k+1}, \dots, \delta x_n$$

értékekre a

$$\sum_{(i,j)} \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j} \delta x_i \delta x_j$$

kvadratikus alaknak pozitívnak kell lennie ahhoz, hogy a $g(x_1, \dots, x_n)$ függvénynek az (x_i^0) helyen relatív minimuma legyen. A feladatunkat egyszerűsítendő jelentsen ε_i egy olyan változót, amely a $+1$ és -1 értékeket veheti fel úgy, hogy az $\varepsilon_{k+1}, \varepsilon_{k+2}, \dots, \varepsilon_n$ sorozat a $+1$ és -1 elemekből álló $(n-k)$-adik ismétléses variációkat reprezentálja. Ezen variációk száma 2^{n-k}. Legyen még $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \cdots = \varepsilon_k = 1$. Tekintsük a

$$\sum_{(i)} \varepsilon_i y_i (a_{i1} y_1 \varepsilon_1 + a_{i2} y_2 \varepsilon_2 + \cdots + a_{in} y_n \varepsilon_n) = \sum_{(i,j)} \varepsilon_i \varepsilon_j a_{ij} y_i y_j \qquad (i, j = 1, 2, \dots, n)$$

kvadratikus alakok összességét. Ezen alakok száma szintén 2^{n-k}. Ha az y_i változók az

$$y_1 \geq 0, \qquad y_2 \geq 0, \quad \dots \quad y_n \geq 0$$

feltételeknek eleget tesznek, akkor ezen alakok értékkészlete belátható módon azonos a

$$\sum_{(i,j)} a_{ij} x_i x_j$$

kvadratikus alak értékkészletével, ahol az n változó csupán az

$$x_1 \geq 0, \qquad x_2 \geq 0, \quad \dots, \quad x_k \geq 0, \qquad k < n$$

teljesítik. *Tehát annak a szükséges és elegendő feltételét kell megadnunk, hogy egy* $\sum_{(i,j)} a_{ij} x_i x_j$ *kvadratikus alak*

$$x_1 \geq 0, \qquad x_2 \geq 0, \quad \dots, \quad x_n \geq 0$$

esetén pozitív. Az $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ eset természetesen kivétel. Azt az alakot, amely ezzel a tulajdonsággal rendelkezik, *relatív pozitív definit alak*nak nevezzük.

2. Ezen feladatra vonatkozóan meg kell hogy említsem, hogy G. Pólya[5] nemrég a következő fontos tételt bizonyította: Egy olyan n változós $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ alak amely a változók minden nemnegatív értékére (az azonosan nulla értékek kivételével) pozitív értékeket vesz föl, előállítható két kizárólag pozitív együtthatós alak hányadosaként. Pólya többek között igazolta, hogy amennyiben egy alak az említett tulajdonsággal rendelkezik, akkor ebből az alakból kiindulva, az $x_1 + x_2 + \cdots + x_n$-nel való ismételt szorzással olyan alakot kapunk, amely csak pozitív együtthatókkal rendelkezik. Ha tehát egy kvadratikus alak relatív pozitív definit, akkor ezt a tulajdonságot véges számú lépésben igazolni lehet. Mi azonban itt egy olyan módszert akarunk kidolgozni, amelyik *kizárólag a kvadratikus*

[5] G. Pólya, Über positive Darstellung von Polynomen, Vierteljahrschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich **73** (1928).

alak együtthatói segítségével, éspedig *véges sok lépésben* eldönti, hogy az alak relatív pozitív definit, vagy sem.

Először a feladatunkat egy speciális esetben vizsgáljuk, és ebben a szakaszban feltesszük, hogy a kvadratikus alak diszkriminánsa *főminorai mind nullától eltérők*. Jegyezzük még meg, hogy a módszerünk minden olyan kérdés megválaszolására is alkalmas, hogy mikor pozitív definit egy kvadratikus alak (a szokásos értelemben).

A fölvetett feladatot egy minimalizálási problémára vezetjük vissza, éspedig: Jelöljék az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ értékek az n-dimenziós tér egy pontját. A kvadratikus alak értékét minden olyan pontban vizsgáljuk, amely az n-dimenziós tér első 2^n-ed részében van (tehát az $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0$ tartományban). Az

$$\begin{aligned} x_i &= \rho y_i \qquad\qquad i = 1, 2, \ldots, n \\ \rho &= \max(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

transzformációkat bevezetve, mivel $0 \leq y_i \leq 1$, az említett nem korlátos térrész átmegy egy korlátos halmazba. Ez a halmaz az egyesítése a következő $n-1$ dimenziós halmazoknak:

$$\begin{array}{llcll} y_1 = 1, & 0 \leq y_2 \leq 1, & \ldots, & 0 \leq y_n \leq 1 & (e_1) \\ 0 \leq y_1 \leq 1, & y_2 = 1, & \ldots, & 0 \leq y_n \leq 1 & (e_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 \leq y_1 \leq 1, & 0 \leq y_2 \leq 1, & \ldots, & y_n = 1 & (e_n) \end{array}$$

Ezek a halmazok az n-dimenziós egységkocka oldalai. Ezen oldalak egyesítését jelöljük (e)-vel. A

$$\sum_{(ij)} a_{ij} x_i x_j = Q(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \rho^2 (y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

képlet azt mutatja, hogy a következőekben az (e) halmazra korlátozódhatunk. Ezután a szükséges és elégséges feltételét adjuk meg annak, hogy a kvadratikus alak minden előbb megadott $(n-1)$-dimenziós oldalon pozitív alsó korláttal rendelkezik. Megvizsgálunk tehát minden (e_i) részt, és G-vel jelöljük (e_i)-nek azt a pontját, amelyre a

$$Q(y_1, y_2, \ldots, y_{i-1}, 1, y_{i+1}, \ldots, y_n) = Q_{y_i}$$

kvadratikus kifejezés az alsó határát felveszi. A G pont lehet (e_i) egy belső pontja, vagy kerülhet (e_i) egy $(n-k)$-dimenziós oldalára. Az (e_i) egy $(n-k)$-dimenziós oldalán a következőt értjük:

$$\begin{array}{lll} y_{r_1} = y_{r_2} = \cdots = y_{r_\nu} = y_i = 1 & & \\ y_{\rho_1} = y_{\rho_2} = \cdots = y_{\rho_\mu} = 0 & \nu + \mu = k - 1 & (e_i') \\ 0 \leq y_j \leq 1, \ \text{ha } j \neq r_1, r_2, \ldots, r_\nu, i, \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_\mu. & & \end{array}$$

Ha egy G pont (e_i) belső pontja, akkor Q_{y_i}-nek helyi minimuma van a G pontban. A Q_{y_i} kifejezés tehát az alsó korlátját csak olyan pontban veheti fel, ahol Q_{y_i}-nek vagy helyi minimuma van, vagy ami az (e_i) egyik oldalára esik. A Q_{y_i} kifejezésnek akkor és csak akkor van helyi minimuma (e_i)-ben vagy annak határán, ha a következő mindkét feltétel teljesül:

1. Az

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{\partial Q_{y_i}}{\partial y_1} &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1,i-1}y_{i-1} + a_{1,i+1}y_{i+1} + \dots + a_{1n}y_n + \\
&\quad + a_{1i} = 0 \\
&\ \ \vdots \\
\frac{1}{2}\frac{\partial Q_{y_i}}{\partial y_{i-1}} &= a_{i-1,1}y_1 + a_{i-1,2}y_2 + \dots + a_{i-1,i-1}y_{i-1} + a_{i-1,i+1}y_{i+1} + \dots + \\
&\quad + a_{i-1,n}y_n + a_{i-1,i} = 0 \\
\frac{1}{2}\frac{\partial Q_{y_i}}{\partial y_{i+1}} &= a_{i+1,1}y_1 + a_{i+1,2}y_2 + \dots + a_{i+1,i-1}y_{i-1} + a_{i+1,i+1}y_{i+1} + \dots + \\
&\quad + a_{i+1,n}y_n + a_{i+1,i} = 0 \\
&\ \ \vdots \\
\frac{1}{2}\frac{\partial Q_{y_i}}{\partial y_n} &= a_{n,1}y_1 + a_{n,2}y_2 + \dots + a_{n,i-1}y_{i-1} + a_{n,i+1}y_{i+1} + \dots + \\
&\quad + a_{n,n}y_n + a_{n,i} = 0
\end{aligned}$$

egyenletrendszernek olyan $y_1^*, \dots, y_{i-1}^*, y_{i+1}^*, \dots, y_n^*$ megoldása van, amelyre az $1 \geq y_j^* \geq 0$ reláció teljesül[6].

2. Az előző egyenletrendszer determinánsa egy $y_1, \dots, y_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_n$ változókra definiált pozitív definit kvadratikus alak diszkriminánsát adja.

Amikor 1. és 2. teljesül, akkor Q_{y_i} valóban felveszi az alsó határának értékét az $y_1^*, \dots, y_{i-1}^*, y_{i+1}^*, \dots, y_n^*$ pontban, mivel a 2. szerint a

$$Q\left(y_1^* + y_1, \dots, y_{i-1}^* + y_{i-1}, 1, y_{i+1}^* + y_{i+1}, \dots, y_n^* + y_n\right) =$$
$$Q\left(y_1^*, \dots, y_{i-1}^*, 1, y_{i+1}^*, \dots, y_n^*\right) + \sum_{h,j \neq i} a_{hj}y_hy_j > Q\left(y_1^*, \dots, y_{i-1}^*, 1, y_{i+1}^*, \dots, y_n^*\right)$$

egyenlőtlenség érvényes. Amennyiben az 1. és 2. feltételek valamelyike nem teljesül, akkor Q_{y_i} az alsó határát biztos, hogy az (e_i) egy (e_i') oldalán veszi fel. Lehetséges, hogy ez az oldal egyetlen pontból áll; ebben az esetben Q_{y_i} az alsó határát az n-dimenziós egységkocka egy csúcsában veszi fel. Amikor az illető oldal $(n-k>0)$ dimenziós, akkor az alsó korlát ezen (e_i') oldal belső pontjában vétetik fel. Az (e_i) ilyen pontjában a

$$Q(y_1, \dots, y_{i-1}, 1, y_{i+1}, \dots, y_n) = \overline{Q}(y_{\lambda_1}, y_{\lambda_2}, \dots, y_{\lambda_{n-k}})$$

$$\begin{aligned}
&y_{r_1} = y_{r_2} = \dots = y_{r_\nu} = 1 \\
&y_{\rho_1} = y_{\rho_2} = \dots = y_{\rho_\mu} = 0 \qquad\qquad \nu + \mu = k - 1
\end{aligned}$$

kvadratikus alaknak helyi minimuma kell hogy legyen, aminek megfelelően:

A) Az

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \overline{Q}}{\partial y_{\lambda_1}} = 0, \qquad \frac{1}{2}\frac{\partial \overline{Q}}{\partial y_{\lambda_2}} = 0, \quad \dots, \quad \frac{1}{2}\frac{\partial \overline{Q}}{\partial y_{\lambda_{n-k}}} = 0,$$

[6]Az egyenletrendszer determinánsa egy főminora a diszkriminánsnak, tehát nem nulla.

egyenletrendszernek léteznie kell olyan megoldásának, amire az

$$1 > y^*_{\lambda_1} > 0, \qquad 1 > y^*_{\lambda_2} > 0, \quad \ldots, \quad 1 > y^*_{\lambda_{n-k}} > 0$$

relációk érvényesek.

B) Az előző egyenletrendszer determinánsa egy $n-k$ változós pozitív definit kvadratikus alak diszkriminánsa kell hogy legyen.

Tehát a feladatunk az eddigi megfontolásaink alapján a következő módon oldható meg: *Tekintsük az összes lehetséges*

$$\begin{aligned}
a_{\lambda_1\lambda_1} y_{\lambda_1} + a_{\lambda_1\lambda_2} y_{\lambda_2} + \cdots + a_{\lambda_1\lambda_\kappa} y_{\lambda_\kappa} &= -\sum_{k=1}^{\nu} a_{\lambda_1 \lambda_{r_k}} \\
a_{\lambda_2\lambda_1} y_{\lambda_1} + a_{\lambda_2\lambda_2} y_{\lambda_2} + \cdots + a_{\lambda_2\lambda_\kappa} y_{\lambda_\kappa} &= -\sum_{k=1}^{\nu} a_{\lambda_2 \lambda_{r_k}} \\
&\vdots \\
a_{\lambda_\kappa\lambda_1} y_{\lambda_1} + a_{\lambda_\kappa\lambda_2} y_{\lambda_2} + \cdots + a_{\lambda_\kappa\lambda_\kappa} y_{\lambda_\kappa} &= -\sum_{k=1}^{\nu} a_{\lambda_\kappa \lambda_{r_k}},
\end{aligned} \tag{5}$$

egyenletrendszert, ahol $1 \le \kappa \le n$, $q \le \nu \le n-\kappa$, *továbbá* $r_k \ne \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\kappa$ $(k = 1, 2, \ldots, \nu)$.

Az ilyen rendszerek száma

$$\sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i} \sum_{k=0}^{n-i-1} \binom{n-i}{k} = 3^n - 2^{n+1} + 1.$$

Jelölje $(y^*_{\lambda_i})$ *a (5) egyenletrendszer megoldását, továbbá* $Q(y_{\lambda_1}, y_{\lambda_2}, \ldots, y_{\lambda_\kappa})$ *azt a kvadratikus kifejezést, amelyet a* $Q(y_1, y_2, \ldots, y_n)$*-ből a*

$$\begin{aligned}
&y_{\rho_1} = y_{\rho_2} = \cdots = y_{\rho_\mu} = 0 && \mu = n - \kappa - \nu \\
&y_{r_1} = y_{r_2} = \cdots = y_{r_\nu} = 1 && \rho_i \ne \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\kappa, r_1, r-2, \ldots, r_\nu; i = 1, 2, \ldots, \mu
\end{aligned}$$

helyettesítéssel kapunk. Azt állítjuk, hogy a kvadratikus alak akkor és csak akkor lesz pozitív változókra pozitív, ha:

I. A (5) minden olyan megoldására, amelyre $y^*_{\lambda_i} \ge 0$, *a*

$$Q(y^*_{\lambda_1}, y^*_{\lambda_2}, \ldots, y^*_{\lambda_\kappa}) > 0$$

egyenlőtlenség teljesül.

II. A kvadratikus alak az n-dimenziós egységkocka minden csúcsában pozitív értékű, kivéve a $(0, 0, \ldots, 0)$ *pontot.*

Az I., II. feltételek szükségessége világos. A fenti megfontolásokból az is következik, hogy az I., II. feltételek elegendőek. Amennyiben ugyanis $Q(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ az alsó határát egy (e_i) vagy (e'_i) oldal belsejében veszi fel (lásd A és B), akkor ez az alsó határ I. alapján pozitív. Ez II. alapján ugyanígy pozitív, amikor azt a kocka egy csúcsában éri el.

3. Az eddigi tárgyalás során feltettük, hogy a kvadratikus alak diszkriminánsának *minden főminora nullától különböző*. Ezen feltevés következtében a kvadratikus alak helyi minimumpontjai száma legfeljebb egy volt; amit az I. feltételnél is kihasználtunk. Most azt feltételezzük, hogy az említett főminorok között bizonyosak nullák, tehát hogy a (5) egyenletrendszerek közül egyesek eltűnő determinánsúak. Ezen egyenletrendszerek közül is csak azokat vizsgáljuk, amelyek egyértelműen megoldhatók. A következőkben egy ilyen egyenletrendszert tárgyalunk.

4. Az együtthatók mátrixa rangja $r < \kappa$. A $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\kappa$ indexek megfelelő felcserélése után (5) minden megoldására a

$$y_{\lambda_k} = b_k + c_{k_1} y_{\lambda_{r+1}} + c_{k_2} y_{\lambda_{r+2}} + \cdots c_{k_{\kappa-r}} y_{\lambda_\kappa} \qquad k = 1, 2, \ldots, r, \tag{6}$$

ahol az $y_{\lambda_{r+1}}, y_{\lambda_{r+2}}, \ldots, y_{\lambda_\kappa}$ értékeket tetszőlegesen megválaszthatjuk. Ha az (6) lineáris kifejezéseket behelyettesítjük a

$$Q(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \overline{Q}$$

$$\begin{aligned} &y_{r_1} = y_{r_2} = \cdots = y_{r_\nu} = 1 \\ &y_{\rho_1} = y_{\rho_2} = \cdots = y_{\rho_\mu} = 0 \qquad\qquad \nu + \mu = k - 1 \end{aligned}$$

$r_j \neq \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\kappa$, $j = 1, 2, \ldots, \nu$, $\rho_i \neq r_1, r_2, \ldots, r_\kappa$, $\rho_i \neq \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\kappa$, $i = 1, 2, \ldots, \mu$ kvadratikus alakba, a $\overline{Q}$ kvadratikus kifejezés csak az $y_{\lambda_{r+1}}$, $y_{\lambda_{r+2}}, \ldots, y_{\lambda_\kappa}$ változókat tartalmazza. Ezt a kifejezést Q^*-al jelöljük. Most megmutatjuk, hogy Q^* konstans. Érvényes ugyanis

$$\frac{\partial Q^*}{\partial y_{\lambda_s}} = \sum_{i=1}^{\kappa} \frac{\partial \overline{Q}}{d y_{\lambda_i}} \frac{\partial y_{\lambda_i}}{d y_{\lambda_s}}, \qquad s = r+1, r+2, \ldots, \kappa. \tag{7}$$

Másrészt a

$$\frac{\partial \overline{Q}}{\partial y_{\lambda_i}} = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, \kappa$$

lineáris egyenletrendszernek, tehát a (5) egyenletrendszernek olyan y_{λ_i} értékrendszer felel meg, amelyben $y_{\lambda_{r+1}}, y_{\lambda_{r+2}}, \ldots, y_{\lambda_\kappa}$ tetszőleges, és y_{λ_1}, $y_{\lambda_2}, \ldots, y_{\lambda_r}$, az (6)-nek megfelelően választott. Ebből következik, hogy (7) alapján

$$\frac{\partial Q^*}{\partial y_{\lambda_s}} = 0, \qquad s = r+1, \ldots, \kappa.$$

Az eddigi eredményünk tehát a következő: *Amennyiben a kvadratikus alak diszkriminánsának van egy eltűnő főminora, akkor a $\overline{Q}$ minimumhelyei száma végtelen lehet*[7], *azonban a hozzájuk tartozó minimum értékek megegyeznek.* Ha ilyen minimumhelyek léteznek, akkor felmerül a kérdés, hogy van-e ezen minimumhelyek között olyan, amelynek

[7] Ez akkor következik be, ha 1. a (5) egyenletrendszer megoldható, 2. a (5) egyenletrendszer determinánsa egy pozitív definit vagy pozitív szemidefinit kvadratikus alak diszkriminánsa.

nemnegatív koordinátái vannak, más szóval, hogy a

$$
\begin{aligned}
b_1 + c_{11}y_{\lambda_{r+1}} + c_{12}y_{\lambda_{r+2}} + \cdots + c_{1,\kappa-r}y_{\lambda_\kappa} &\geq 0 \\
b_2 + c_{21}y_{\lambda_{r+1}} + c_{22}y_{\lambda_{r+2}} + \cdots + c_{2,\kappa-r}y_{\lambda_\kappa} &\geq 0 \\
&\vdots \\
b_r + c_{r1}y_{\lambda_{r+1}} + c_{r2}y_{\lambda_{r+2}} + \cdots + c_{r,\kappa-r}y_{\lambda_\kappa} &\geq 0 \\
y_{\lambda_{r+1}} &\geq 0 \\
y_{\lambda_{r+2}} &\geq 0 \\
&\vdots \\
y_{\lambda_\kappa} &\geq 0
\end{aligned}
$$

egyenlőtlenségrendszernek van-e megoldása. A lineáris egyenlőtlenségek elméletét H. Minkowski[8], Farkas Gyula[9], és újabban Haar Alfréd[10] fejlesztette ki. L.L. Dines[11] egy fontos munkában az „egyenlőtlenségrang” fogalmát vezette be. Ezen fogalom segítségével el lehet dönteni, hogy egy lineáris egyenlőtlenségrendszernek van-e megoldása, vagy sem. Egy lineáris egyenlőtlenségrendszer mátrixa „egyenlőtlenségrang”-ját további mátrixok egymás utáni előállításával lehet meghatározni. Tehát pusztán a rendszer együtthatói segítségével el lehet dönteni, hogy létezik-e megoldás. Ha a rendszernek van megoldása, és a kvadratikus alak pozitív definit, akkor a közös minimumérték, amelyet a Q kvadratikus alak az (6)-ben megadott végtelen sok helyen felvesz, pozitív kell hogy legyen. Ezt elegendő egyetlen ilyen pontra igazolni, például az

$$y_{\lambda_1} = b_1, y_{\lambda_2} = b_2, \ldots, y_{\lambda_r} = b_r, \qquad y_{\lambda_{r+1}} = y_{\lambda_{r+2}} = \cdots = y_{\lambda_n} = 0$$

pontra.

4. Végül megemlítjük azt az esetet, amikor a (5) egyenletrendszerek között nincs olyan, amelyiknek van nemnegatív megoldása. Ekkor $\mu = n-2$, $\nu = 1$-re a (5)-ből adódó

$$a_{\lambda_1\lambda_1}y_{\lambda_1} = -a_{\lambda_1 r_1}, \qquad 1 \leq \lambda_1 \leq n, \quad 1 \leq r_1 \leq n$$

egyenleteknek van negatív megoldása. Ez azonban triviális módon elegendő ahhoz, hogy a kvadratikus alak a változók pozitív értékére pozitív legyen.

(Szeged, 1929. december 1.)

[8] H. Minkowski, Geometrie der Zahlen, 39–45. o.

[9] J. Farkas, Theorie der einfachen Ungleichungen, Journal für die Reine und Angewandte Mathematik, 124(1901) 1-27.

[10] A. Haar, Über lineare Ungleichungen, Acta Szeged 2(1924–1926), 1–14.

[11] L.L. Dines, Systems of linear inequalities, Annals of Mathematics 20(1918–1919) 191–199.

Köszönetnyilvánítás

Ezúton is köszönöm *dr. Csendes Tibornak* (SZTE, Kalmár Intézet), hogy Lipka István eredeti dolgozatát lefordította magyar nyelvre és hozzájárult annak közzétételéhez. Szintén köszönettel tartozom *dr. Filep Lászlónénak* (Nyíregyházi Főiskola, PR-Iroda), hogy betekintést engedett néhai *dr. Filep László* (1941-2004) matematikatörténeti tárgyú anyagaiba. A dolgozat 2. ábrájának fényképe *Filep László* gyűjtéséből származik. Végezetül köszönöm *dr. Varga Antalnak* (SZTE, Bolyai Intézet), hogy felhívta a figyelmem Lipka István egykori munkájára.

Hivatkozások

[1] H.W. Kuhn and A.W. Tucker: *Nonlinear programming.* In: Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, 1950, pp. 481–492, University of California Press, Berkeley and Los Angeles, 1951.

[2] Kalmár László: *Jelentés az 1938. évi Kőnig Gyula-jutalomról,* Mat. és Fiz. Lapok **45** (1938), 1-17.

[3] W. Karush: *Minima of Functions of Several Variables with Ineqaualities as Side Conditions,* Master's Thesis (Department of Mathematics, University of Chicago), 1939.

[4] Stephan Lipka: *Ein Extremalproblem, nebst Anwendung auf eine Stabilitätsfrage,* J. Reine und Angewandte Mathematik **166** (1932), 9–15. Letölthető a `http://dz-srv1.sub.uni-goettingen.de/sub/digbib/loader?did=D280262` címről is.

[5] Prékopa András: *Az optimalizáláselmélet kialakulásának történetéről,* Alkalmazott Matematikai Lapok **4** (1978), 165–191.

[6] András Prékopa: *On the development of optimization theory,* American Mathematical Monthly **87** (1980), 527–542.

(Beérkezett: 2007. október 16.)

SZABÓ PÉTER GÁBOR
Szegedi Tudományegyetem
Számítógépes Optimalizálás Tanszék
6701, Szeged, Pf. 652
e-amil: pszabo@inf.u-szeged.hu

A CONTRIBUTION TO THE PRELIMINARY HISTORY OF NONLINEAR OPTIMIZATION

Péter Gábor Szabó

The paper presents a forgotten article in subject of Nonlinear Optimization. This article published in Crelle's Journal in 1932, and its author was István Lipka (1899-1990) a Hungarian mathematician. In his work, Lipka has considered the inequality constrained nonlinear optimization problem motivated by an analytical mechanical investigation. He reduced the problem to solve an algebraic question which based on quadratical forms. The paper contains Lipka's full work in Hungarian translation, historical comments, biographical data and two photos about the author.

Alkalmazott Matematikai Lapok **26** (2009), 97-127.

TÖMEGHATÁS TÍPUSÚ REAKCIÓDIFFÚZIÓ-RENDSZEREK STABILITÁSA

MAYA MINCHEVA ÉS DAVID SIEGEL

Fordította: Egri Edit

Kétféle típusú, megfordítható, illetve aciklikus gráffal megadott kémiai reakció stabilitásával kapcsolatos eredményeket terjesztünk ki reakciódiffúzió-rendszerekre. Főként a Ljapunov-függvények módszerével igazoljuk a térben homogén stacionárius állapot aszimptotikus stabilitását. Néhány példával illusztráljuk az elmondottakat.

1. Bevezetés

Tekintsünk egy n anyagfajtából és m lépésből álló kémiai rendszert:

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} A_k \xrightarrow{k_i} \sum_{k=1}^{n} \beta_{ik} A_k \qquad (i = 1, \ldots, m). \tag{1}$$

Jelölje A_k, $k = 1, \ldots, n$ a kémiai anyagfajtákat. A k_i konstans az i-edik reakció sebességi együtthatója és pozitív minden i-re. Az α_{ik}, β_{ik} nemnegatív egészek az i-edik reakcióban résztvevő részecskék számát adják meg. Jelölje u_k a reakcióban jelenlevő A_k anyagfajták koncentrációját. Feltételezve, hogy fennáll a tömeghatás törvénye, az i-edik reakció sebessége a következőképpen írható:

$$f_i(\mathbf{u}) = k_i u_1^{\alpha_{i1}} \ldots u_n^{\alpha_{in}} \qquad (i = 1, \ldots, m).$$

Feltételezzük, hogy $(u_k)^0 = 1$, ha $u_k \geq 0$ $(k = 1, \ldots, n)$. Legyen $\gamma_{ik} = \beta_{ik} - \alpha_{ik}$ minden i, k esetén. A

$$\frac{\mathrm{d}u_k}{\mathrm{d}t}(t) = \sum_{i=1}^{m} \gamma_{ik} f_i(\mathbf{u}(t)) \qquad (k = 1, \ldots, n) \tag{2}$$

$$u_k(0) = (u_k)^0 \geq 0 \tag{3}$$

[0]Ez a dolgozat fordítása a következőnek: Mincheva, M. and Siegel, D., "Stability of mass action reaction-diffusion systems", *Nonlinear Analysis*, **56**(8)(2004) 1105–1131. A fordítás a T.047132 OTKA-pályázat támogatásával készült.

kezdetiérték-feladat u megoldása az A_k $(k = 1, \ldots, n)$ anyagfajták koncentrációjának időbeli változását adja meg. A (2)–(3) probléma nem függ a reakcióban résztvevő kémiai anyagfajták atomi felépítésétől. Érdi és Tóth [5]-ben rámutattak, hogy az atomfüggetlen sztöchiometria Volpert [18], valamint Horn és Jackson [7] írásával kezdődik. A (2)–(3) problémát kémiai kinetikai kezdetiérték-problémának nevezzük.

Volpert [19, 12. fejezet] tömeghatás típusú kémiai kinetikai kezdetiérték-problémák stabilitását tanulmányozza. Először egy aciklikus gráf (a fogalmat a 4. szakaszban értelmezzük) esetében mutatja ki: $\mathrm{u}(t)$-nek létezik határértéke, mikor $t \to +\infty$, és $\lim_{t\to+\infty} \mathrm{u}(t) = \overline{\mathrm{u}}$, ahol $\overline{\mathrm{u}}$ stacionárius pont. Az eredményhez úgy jut el, hogy lineáris Ljapunov-függvényt alkalmaz, amelynek a megválasztása azonban nem egyértelmű. Ugyanazt a függvényt használja fel periodikus megoldás nemlétének kimutatására is.

Egy későbbi fejezetben, lásd [19, 635. oldal], a megfordítható reakciók elméletét tanulmányozza (értelmezésük az 5. fejezetben). Ez némiképp megegyezik a komplex kiegyensúlyozottság elméletével, amelyet Horn, Jackson és Feinberg dolgozott ki az 1970-es években, noha ez utóbbi általánosabb eredményhez vezet. [19, 642. oldal] tétele megfordítható reakciókra vonatkozó stabilitási eredményeket ír le. A bizonyítás felhasználja a (21) egyenletben szereplő nemlineáris Ljapunov-függvényt. Egy megoldás ω-határhalmaza vagy nemnegatív stacionárius pontokból vagy egyetlen pozitív stacionárius pontból áll. Mindegyik pozitív stacionárius pont benne van egy invariáns síkban. Ebben az invariáns síkban a megoldás relatíve aszimptotikusan stabilis, egyébként csak stabilis. A szerző a Ljapunov-függvény alkalmazásával igazolja azt is, hogy nem létezik periodikus pálya.

Ezek [19] eredményei, amelyeket itt kiterjesztünk reakciódiffúzió-rendszerekre. Munkánk a fentiekre épül és a [10, 11] írásokra.

Ebben a cikkben feltételezzük, hogy az u_k koncentrációk függenek az x térbeli változótól is. Ennek következtében reakciódiffúzió-egyenletrendszert kapunk a megfelelő kezdetiérték- és peremfeltétellel:

$$\frac{\partial u_k}{\partial t}(\mathrm{x},t) = d_k \Delta_k \mathrm{u}(\mathrm{x},t) + \sum_{i=1}^{m} \gamma_{ik} f_i(\mathrm{u}(\mathrm{x},t)), \qquad (\mathrm{x},t) \in \Omega \times (0,T], \tag{4}$$

$$u_k(\mathrm{x},0) = (u_k)_0(\mathrm{x}) \geq 0, \qquad \mathrm{x} \in \overline{\Omega}, \tag{5}$$

$$\frac{\partial u_k}{\partial \nu}(\mathrm{x},t) = 0, \qquad (\mathrm{x},t) \in \partial\Omega \times (0,T], \tag{6}$$

ahol $k = 1, \ldots, n$. T lehet $+\infty$ is, amikor stabilitást tárgyalunk. Jelölje $\mathrm{u} = (u_1, \ldots, u_n)^T$ az n számú u_k $(k = 1, \ldots, n)$ koncentrációból alkotott vektort. Feltételezzük, hogy az összes d_k diffúziós együttható állandó és $d > 0$-val egyenlő. Az Ω halmaz $\mathbb{R}^s$-beli $(s > 0)$ korlátos tartomány, megfelelően sima határral. Az (1) kémiai rendszert zártnak tekintjük abban az értelemben, ami zéró fluxusú peremfeltételnek felel meg. A ν vektor a külső (kifelé mutató) normális egységvektor Ω határán, $\partial\Omega$-n.

[9]-ből tudjuk, hogy $u(x,t) \geq 0$ minden $x \in \Omega$ és $t \geq 0$ esetén mindaddig, míg létezik a megoldás. Csak olyan $u_0(x) \geq 0$ kezdeti értékeket fogunk tekinteni, amelyekre $u(x,t) > 0$ teljesül minden $(x,t) \in \overline{\Omega} \times (0,T]$ esetén. Ezt a típusú szigorú pozitivitást [9] tárgyalja.

A parciális differenciálegyenlet felállításánál tekintsük a Volpert által tanulmányozott két típusú rendszert. Mindkét esetben Ljapunov-függvényt használva megmutatjuk, hogy a PDE-nek létezik olyan megoldása, amely $\forall\, t > 0$ esetére értelmezve van.

Fő eredményeink a következők: aciklikus gráf esetén $u(x,t)$ olyan állandó megoldáshoz, $\overline{u}$-hoz konvergál, amint $t \to +\infty$, amely a megfelelő közönséges differenciálegyenlet-rendszer (KDE-rendszer) stacionárius pontja. Megfordítható reakciók esetén a megoldás ω-határhalmaza vagy egyetlen pozitív stacionárius pontja lesz, vagy pedig nemnegatív stacionárius pontjai lesznek a megfelelő KDE-rendszernek.

Érdekes lesz megvizsgálni a fenti rendszer megoldásának stabilitását, mikor a diffúziós együtthatók különbözőek. Először igazolnunk kell, a Ljapunov-függvénytől eltérő módszert használva, hogy az $u(x,t)$ megoldás létezik minden $t \geq 0$ esetén. Például néhány sajátos esetben alkalmazhatók az invariáns téglalapok, lásd [3]. Az egyedüli eredmény[1] ez irányban, amiről tudomásunk van, félcsoportelméletet használ annak igazolására, hogy az

$$A + B \underset{k_{-1}}{\overset{k_1}{\rightleftharpoons}} C$$

reakcióban szereplő anyagfajták koncentrációja térben homogén stacionárius ponthoz tart [13]. Ugyanaz a stabilitási eredmény áll fenn, mint amelyet itt mutatunk be (lásd 3. példa), amikor a három diffúziós együttható különbözik. Ugyanezen kémiai kinetikai kezdeti-peremérték feladat megoldásának globális létezését igazolják [2]-ben, a priori korlátokat használva. Viszont a stabilitás kérdését [2] nem tárgyalja.

Írásunk a következőképpen épül fel: a 2. fejezet háttértájékoztatót tartalmaz. A fő eredményeket a 3. fejezetben jelentjük ki, és a 4. és 5. fejezetben bizonyítjuk be. A 6. fejezet példákat tartalmaz. Az 5. fejezetbeli eredmények kibővítését megfordítható reakciókról gyengén megfordítható esetekre a 7. fejezet vázolja.

[1]Néhány további eredmény található itt:

- R.H. Martin, Lecture notes in mathematics; Nonlinear semigroups, partial differential equations and attractors; Proceedings of a symposium held in Washington, D.C., August 5–8, 1985, Springer-Verlag, page 121, Proposition 2.
- A.M. Turing, The chemical basis of morphogenesis, Phil. Trans. Ray. Soc. London, B237, 37–72 (1952) (Two variable systems)
- George R. Gavalas: Nonlinear Differential Equations of Chemically Reacting Systems, Springer-Verlag New York Inc. 1968, pages 86–96 (Stability of nonconstant stationary states).(A fordító)

2. Néhány jelölés, feltevés és felhasznált eredmény

Az u függvény értékkészlete $\mathbb{R}^n$-beli, és $\mathbb{R}^n$-ben az euklideszi normát $\|\cdot\|$ jelöli. Az $\mathbf{u} > 0$, ill. $\mathbf{u} \geq 0$ jelölés jelentése: $u_k > 0$, ill. $u_k \geq 0$, minden $k = 1, \ldots, n$ esetén. A $\mathbf{w} : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ Hölder-folytonos függvény esetén jelölje $\|\cdot\|_\alpha$, $0 < \alpha \leq 1$ a Hölder-normát,

$$\|\mathbf{w}\|_\alpha := \sup_{\substack{\mathbf{x} \neq \mathbf{y} \\ \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \overline{\Omega}}} \frac{\|\mathbf{w}(\mathbf{x}) - \mathbf{w}(\mathbf{y})\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^\alpha}.$$

Ha w a $C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ Banach-térből van, akkor

$$\|\mathbf{w}\|_{2+\alpha} := \|\mathbf{w}\|_\infty + \sum_{p=1}^{s} \left\| \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x_p} \right\|_\infty + \sum_{p,r=1}^{s} \left\| \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial x_p \partial x_r} \right\|_\infty + \sum_{p,r=1}^{s} \left\| \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial x_p \partial x_r} \right\|_\alpha, \tag{7}$$

ahol $\|\cdot\|_\infty$ a szuprémumnorma. A (7) definíció első három tagja a $C^2(\overline{\Omega})$ tér normáját képezi. Ezt jelölje $\|\cdot\|_2$.

Ω határa, $\partial\Omega$, $C^{2+\alpha}$ sima. Szükségünk van mindezen technikai feltételezésekre, hogy biztosítsuk a lokális megoldás létezését. Egy pillanatra sokkal általánosabb rendszerre térünk át:

$$\mathbf{u}_t(\mathbf{x}, t) = d\Delta \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{g}(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)), \qquad (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times (0, T], \tag{8}$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \geq 0, \qquad \mathbf{x} \in \overline{\Omega}, \tag{9}$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \nu}(\mathbf{x}, t) = 0, \qquad (\mathbf{x}, t) \in \partial\Omega \times (0, T]. \tag{10}$$

Tekintsük az alábbi tételt. Első része a lokális létezésre vonatkozólag [1]-ből származik, míg a második, $C^{2+\alpha}$-beli globális korlátosságról szóló, [12]-ből.

2.1. TÉTEL. *Feltételezzük, hogy $d > 0$, $\mathbf{u}_0 \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ és $\partial \mathbf{u}_0/\partial \nu = 0$ $\partial\Omega$-n. Feltételezzük továbbá, hogy g lokálisan Lipschitz-tulajdonságú függvény. Akkor létezik $T > 0$ úgy, hogy a (8)–(10) rendszernek egyetlen lokális klasszikus megoldása van, $\mathbf{u} \in C^2(\Omega \times [0, T]) \cap C^1(\overline{\Omega} \times [0, T])$. Ha találunk egy a priori becslést*

$$\|\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)\| \leq K, \tag{11}$$

úgy, hogy K független t-től, akkor minden $t > 0$ esetén a megoldás létezik és korlátos $C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$-ban,

$$\sup_{t \geq 0} \|\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)\|_{2+\alpha} = K_1 < +\infty.$$

Az u függvény globális korlátossága, amely a (11) becslésből adódik, biztosítja, hogy az $\{\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) | t \geq 0\}$ halmaz relatív kompakt halmaz $C^2(\overline{\Omega})$-ban. A kompakt halmaz értelmezése szerint, ha adott egy $\{t_k\} \to +\infty$ sorozat, akkor létezik ennek olyan $\{\tau_k\} \to +\infty$ részsorozata, amelyre

$$\mathbf{v} = \lim_{k \to \infty} \mathbf{u}(\cdot, \tau_k) \quad C^2(\overline{\Omega})\text{-ban}.$$

Bevezetjük a (8)–(10) rendszer $\mathbf{u}$ megoldásához tartozó ω-határhalmaz fogalmát, mikor $T = +\infty$.

2.1. Definíció. Az $\mathbf{u}$ megoldás ω-határhalmaza a következő függvények halmaza:

$$\omega^+ = \Big\{\mathbf{v} \in C^2(\overline{\Omega}) \,|\, \lim_{k\to+\infty} \|\mathbf{u}(\cdot, t_k) - \mathbf{v}\|_2 = 0,$$
$$\text{valamilyen } \{t_k\} \to +\infty \text{ sorozat esetén}\Big\}.$$

[11] 1. tétele szerint az ω^+ halmaz nem üres és kompakt részhalmaza $C^2(\overline{\Omega})$-nak, ha $\mathbf{u}$ korlátos $C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$-ban.

Idézünk néhány lemmát [10]-ből, mivel szükségünk lesz rájuk a továbbiakban. A bizonyítások és hivatkozások [10]-ben elérhetőek.

2.1. Lemma. *Ha a $\varphi, \psi \in C^2(\Omega \times (0,T]) \cap C^1(\overline{\Omega} \times [0,T])$ függvények teljesítik a*

$$\varphi_t(\mathbf{x}, t) \le L(\varphi)(\mathbf{x}, t) + g(\varphi(\mathbf{x}, t)),$$

illetve

$$\begin{aligned}
&\psi_t(\mathbf{x}, t) \ge L(\psi)(\mathbf{x}, t) + g(\psi(\mathbf{x}, t)), && (\mathbf{x}, t) \in (\Omega \times (0,T]),\\
&\varphi(\mathbf{x}, 0) \le \psi(\mathbf{x}, 0), && \mathbf{x} \in \overline{\Omega},\\
&\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}(\mathbf{x}, t) \le \frac{\partial\psi}{\partial\nu}(\mathbf{x}, t), && (\mathbf{x}, t) \in (\partial\Omega \times (0,T]),
\end{aligned}$$

feltételeket, ahol L egyenletesen elliptikus operátor és g lokálisan Lipschitz-tulajdonságú függvény, akkor $\varphi(\mathbf{x}, t) \le \psi(\mathbf{x}, t)$, ha $(\mathbf{x}, t) \in \overline{\Omega} \times [0,T]$.

2.2. Lemma. *Feltételezzük, hogy a $\varphi \in C^2(\Omega \times (0,T]) \cap C^1(\overline{\Omega} \times [0,T])$ függvény teljesíti a*

$$\begin{aligned}
&\varphi_t(\mathbf{x}, t) = d\Delta\varphi(\mathbf{x}, t) && (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times (0,\infty),\\
&\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}(\mathbf{x}, t) = 0 && (\mathbf{x}, t) \in \partial\Omega \times (0,\infty)
\end{aligned}$$

feltételeket, és hogy $\varphi(\cdot, 0) \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$. Ekkor

$$\lim_{t\to+\infty} \|\varphi(\cdot, t) - c\|_2 = 0,$$

ahol

$$c := \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega \varphi(\mathbf{x}, 0)\, d\mathbf{x},$$

$|\Omega|$ pedig Ω térfogatát jelenti.

2.3. LEMMA. *Feltételezzük, hogy* $\mathbf{u}$ *és* $\mathbf{v}$ *olyan megoldása a* (8)–(10) *rendszernek, amelyek kezdeti értékei teljesítik az alábbi feltételt:*

$$\|\mathbf{u}(\mathbf{x},0)-\mathbf{v}(\mathbf{x},0)\| \le \rho \quad (\mathbf{x}\in\overline{\Omega}).$$

Ha $\mathbf{g}:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *kielégíti a Lipschitz-féle feltételt, vagyis*

$$\|\mathbf{g}(\mathbf{z})-\mathbf{g}(\mathbf{z}')\| \le M\,\|\mathbf{z}-\mathbf{z}'\|,$$

akkor

$$\|\mathbf{u}(\mathbf{x},t)-\mathbf{v}(\mathbf{x},t)\| \le \rho e^{Mt} \qquad (\mathbf{x},t)\in\overline{\Omega}\times[0,T].$$

2.4. LEMMA. *Tegyük fel, hogy a* V *függvényre teljesül a* $V_t(\mathbf{x},t)-d\Delta V(\mathbf{x},t)\le 0$ *egyenlőtlenség, ha*

$$(\mathbf{x},t)\in\Omega\times(0,+\infty) \quad \text{és} \quad \partial V(\mathbf{x},t)/\partial\nu=0, \quad \text{ha} \quad (\mathbf{x},t)\in\partial\Omega\times(0,+\infty).$$

Feltételezzük, hogy V *alulról korlátos. Akkor a*

$$h(t):=\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega V(\mathbf{x},t)\,\mathrm{d}\mathbf{x}$$

függvény csökkenő, valamint $\lim_{t\to+\infty}h(t)=a$ *és* $\lim_{t\to+\infty}V(\mathbf{x},t)=a$*, egyenletesen* $C^2(\overline{\Omega})$*-ban.*

3. A fő eredmények megfogalmazása

A (2)–(3) rendszer bármely $\mathbf{u}$ megoldása, mikor nincs jelen diffúzió, benne marad egy invariáns síkban. Legyen $\Gamma=(\gamma_{ik})$ a (2) egyenletben szereplő együtthatók $m\times n$-es mátrixa, és legyen $\{\lambda_l\}$ a $\Gamma\lambda=0$ rendszer alapmegoldásainak halmaza. Ha $\operatorname{rang}(\Gamma)=r$, akkor létezik $n-r$ számú lineárisan független megoldás: $\lambda_l, l=1,2,\dots,(n-r)$. Ezek egy olyan Λ mátrixot alkotnak, melynek sorai $\lambda_l^T, l=1,\dots,(n-r)$. A Λ mátrix $(n-r)\times n$-es. A π invariáns síkot a következőképpen értelmezzük

$$\pi(\mathbf{u}_0)=\{\mathbf{u}\in\mathbb{R}^n|\Lambda(\mathbf{u}-\mathbf{u}_0)=0\},$$

ahol $\mathbf{u}_0$ állandó vektor. Ha $\mathbf{u}(0)\in\pi(\mathbf{u}_0)$ akkor $\mathbf{u}(t)\in\pi(\mathbf{u}_0)$, lásd [19, 637. oldal].

Most egy hasonló eredményt mutatunk be a (4)–(6) PDE-rendszer $\mathbf{u}$ megoldásairól, feltételezve, hogy a megoldások minden $t\ge 0$ esetén léteznek. Skalárisan megszorozzuk (4)-et Λ soraival, λ_l^T-vel, $l=1,\dots,n-r$. Felhasználva, hogy $\lambda_l^T\Gamma^T=0$, következik, hogy $(\Lambda\mathbf{u})_t=d\Delta(\Lambda\mathbf{u})$. Miután alkalmazzuk Λ-t $\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$-ra, a kezdetiérték $\Lambda\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$ lesz. A peremfeltételre pedig kapjuk

$$\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial\nu}=0 \quad\Rightarrow\quad \Lambda\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial\nu}=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial(\Lambda\mathbf{u})}{\partial\nu}=0.$$

Ha most $w(\mathrm{x},t) := \Lambda\mathrm{u}(\mathrm{x},t)$, akkor erre a következő rendszert kapjuk:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{w}_t(\mathrm{x},t) = d\Delta\mathrm{w}(\mathrm{x},t), && (\mathrm{x},t) \in \Omega \times (0,\infty),\\
&\mathrm{w}(\mathrm{x},0) = \Lambda\mathrm{u}_0(\mathrm{x}), && \mathrm{x} \in \overline{\Omega},\\
&\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial \nu} = 0, && (\mathrm{x},t) \in \partial\Omega \times (0,\infty).
\end{aligned}$$

A 2.2. lemma szerint

$$\lim_{t\to+\infty} \|\mathrm{w}(\cdot,t) - \hat{\mathrm{c}}\|_2 = 0, \qquad \hat{\mathrm{c}} := \frac{1}{|\Omega|}\int\limits_{\Omega} \Lambda\mathrm{u}_0(\mathrm{x})\, d\mathrm{x}.$$

Most bevezetünk egy formális definíciót $\hat{\pi}(\mathrm{u}_0(\mathrm{x}))$-re, az invariáns határsíkra:

3.1. Definíció. A (4)–(6) rendszer egy megoldására nézve (amelyről feltételezzük, hogy létezik $\forall\ t \geq 0$-ra), invariáns határsíknak nevezzük az alábbi halmazt

$$\hat{\pi}(\mathrm{u}_0) = \left\{\mathrm{u} \in \mathbb{R}^n_+ | \Lambda\mathrm{u} = \mathrm{a}\right\},$$

ahol

$$\mathrm{a} := \frac{1}{|\Omega|}\int\limits_{\Omega} \Lambda\mathrm{u}_0(\mathrm{x})\, d\mathrm{x}.$$

Megemlítettük, hogy Ljapunov-függvényeket fogunk használni a fő eredmények bizonyításában. Aciklikus gráf esetén (lásd 4. fejezet) a Ljapunov-függvény (14) alakú. Megfordítható reakciók esetén (lásd 5. fejezet) a Ljapunov-függvény (21) alakú.

Most a fontosabb tételek kimondásával folytatjuk, amelyeket az aciklikus gráffal rendelkező és a megfordítható reakciók esetén külön-külön bebizonyítunk. Az alábbi két tételben – a megfordítható reakciók esetében – feltételezzük, hogy teljesül az **A** Feltétel (lásd 5. fejezet).

3.1. TÉTEL. *Tekintsük a* (4)–(6) *rendszert aciklikus gráf, illetve megfordítható reakciók esetében. Mutatunk egy* (11) *típusú a priori becslést, ennélfogva* $\mathrm{u}(\mathrm{x},t)$ *globálisan létezik* $\forall t \geq 0$ *mellett. Az* ω^+*-határhalmaz kizárólag konstans függvényeket tartalmaz. Ez azt jelenti, hogy ha* $\mathrm{c} \in \omega^+$, *akkor* $\mathrm{c} \in \mathbb{R}^n$ *és létezik olyan* $\{t_k\} \longrightarrow +\infty$ *sorozat, amellyel*

$$\lim_{t_k\to+\infty} \|\mathrm{u}(\cdot,t_k) - \mathrm{c}\|_2 = 0.$$

A lenti tétel a [11]-ben található 2. tételen alapszik. Ez utóbbi egy általánosítása a La Salle–Ljapunov-féle tételnek parabolikus egyenletrendszerekre. A szerzők utalnak egy problémára abban az esetben amikor $V_{uu} \geq 0$ teljesül $V_{uu} > 0$ helyett, de ez nem befolyásolja tételük ide vonatkozó részét.

3.2. TÉTEL. *Feltéve, hogy a 3.1. tétel feltételei teljesülnek, az* ω^+ *határhalmaz a* $\hat{\pi}(\mathrm{u}_0)$ *invariáns határsíkban fekszik. Az invariáns határsík pozitív invariáns halmaza a megfelelő KDE-rendszernek. Jelölje* H *vagy a* (14)*-ban szereplő* F *Ljapunov-függvényt, vagy* V*-t* (26)*-ban,* (2)–(3) *egy* u *megoldása mentén. Ekkor* $\dot{H} = \nabla H \cdot (\Gamma^T \mathrm{f})$.

Az ω^+ *határhalmaz, mint* $\mathbb{R}^n$ *részhalmaza, invariáns halmaza a megfelelő* $\dot{\mathrm{u}} = \Gamma^T \mathrm{f} \circ \mathrm{u}$ *KDE-rendszernek és* $\dot{H}$ *eltűnik* ω^+*-ban.*

Aciklikus gráf esetén az ω^+ *halmaz csak egyetlen pontot tartalmaz. Ha a reakció megfordítható,* ω^+ *vagy egyetlen pozitív részletesen kiegyensúlyozott stacionárius pontból áll, vagy pedig a* $\hat{\pi}(\mathrm{u}_0)$ *határsíkbeli nemnegatív részletesen kiegyensúlyozott stacionárius pontokból. Minden pozitív stacionárius pont aszimptotikusan stabilis az azonos invariáns határsíkokkal rendelkező megoldások között.*

A részletesen kiegyensúlyozott stacionárius pontokat az 5. fejezetben értelmezzük. Ezek stacionárius pontok. A 3.2. tétel értelmében ω^+ részhalmaza az invariáns határsíknak, és részhalmaza a KDE-re vonatkozó legnagyobb olyan invariáns halmaznak, ahol $\dot{H}$ eltűnik. Tulajdonképpen a [10]-ben szereplő 2.4. lemma szerint, mivel $\forall t \geq 0$ esetén létezik és korlátos az u megoldás, ezért

$$\lim_{t \to +\infty} \operatorname{dist}(\mathrm{u}(\cdot, t), \omega^+) = 0,$$

ahol dist a C^2-norma szerinti távolság. A következő tétel azt állítja, hogy a (4)–(6) rendszernek nincs periodikus megoldása.

3.3. TÉTEL. *Aciklikus gráf vagy megfordítható reakciók esetén* (4)–(6) *nem rendelkezik nemnegatív, nemkonstans periodikus megoldással.*

A 3.1–3.3. tételt kiterjesztjük gyengén megfordítható esetekre is a 7. szakaszban.

4. Aciklikus gráfok esete

Volpert a [18] cikkben a kémiai reakció fogalmát mint gráfot vezeti be. Erre a gráfra Volpert-gráf néven hivatkozunk, lásd [5]. Egy kémiai reakció Volpert-gráfjának csúcsai két halmazba sorolhatók. Az egyikbe a kémiai reakcióban résztvevő $A = \{A_1, \ldots, A_n\}$ anyagfajtákat soroljuk, míg a másikba a $B = \{B_1, \ldots, B_m\}$ reakciólépéseket. Ha a B_i reakcióban α_{ik} egység (molekula, atom) A_i anyag vesz részt, ezt a gráf (A_k, B_i) élén α_{ik} súllyal jelöljük. Hasonlóképpen rendelünk a (B_i, A_k) élhez β_{ik} súlyt, amely arra utal, hogy β_{ik} egység A_k anyag keletkezett a B_i reakciólépés során. Ha $\alpha_{ik} = 1$ vagy $\beta_{ik} = 1$, akkor ezt a Volpert-gráf élein nem tüntetjük fel. Azokat a gráfokat, amelyek csúcsait két diszjunkt halmazba sorolhatjuk, páros gráfoknak nevezzük. Bővebb magyarázatok és példák [19, 608–609. oldal]-on találhatók.

Most megmagyarázzuk az aciklikus gráf fogalmát. Ez olyan gráf, amely nem tartalmaz köröket, azaz a páros Volpert-gráfban nem létezik olyan útvonal (irányított élek sorozata), amely több mint egyszer halad keresztül egy csúcson. Az aciklikus gráf valamelyest ellentettje a Horn, Jackson és Feinberg elmélete szerinti megfordítható (lásd a következő fejezetben) vagy gyengén megfordítható gráfoknak. Ennek ellenére a kapott eredmény tipikus viselkedést mutat: konvergenciát egy térben homogén stacionárius állapothoz.

Itt a Λ mátrix jelentése eltér a 3. fejezetben szereplőétől. Tekintsük az

$$L_i(\lambda) = \sum_{k=1}^{n} \gamma_{ik}\lambda_k \leq 0, \qquad i = 1, \dots, m, \tag{12}$$

egyenlőtlenségrendszer λ megoldásait. Ez a rendszer n lineárisan független nemnegatív megoldással rendelkezik, jelölje ezeket λ^l ($l = 1, \dots, n$), lásd [19, a 624. oldal tétele]. Tekintsük a Λ mátrixot $(\lambda^1)^T, \dots, (\lambda^n)^T$ sorokkal. Ez alsó háromszögmátrix, az átlóján 1-esekkel. A [19, 626. oldal] következményének értelmében létezik olyan megoldás, legyen ez épp λ^n, amely pozitív vektor, és amelyre (12) szigorú egyenlőtlenséggé válik, azaz

$$\mu_i := \sum_{k=1}^{n} \gamma_{ik}\lambda_k^n < 0 \qquad (i = 1, \dots, m). \tag{13}$$

Legyen

$$F(\mathbf{u}) := \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^n u_k \tag{14}$$

a (4)–(6) reakciódiffúzió-rendszer Ljapunov-függvénye aciklikus gráf esetén. Ugyanezt a Ljapunov-függvényt használja [19, 633. oldal] a megfelelő KDE-rendszerre.

Bizonyítás. (3.1. tétel)

Először $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ globális létezésével foglalkozunk. $F(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t))$-re egy differenciális egyenlőtlenséget alkalmazunk, így igazoljuk $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ globális korlátosságát, mikor $(\mathbf{x}, t) \in \Omega \times [0, +\infty)$. Tekintsük az alábbi összefüggést

$$\begin{aligned}(F \circ \mathbf{u})_t - d\Delta(F \circ \mathbf{u}) &= \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^n \left(\frac{\partial u_k}{\partial t} - d\Delta u_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^n \sum_{i=1}^{m} \gamma_{ik} f_i \circ \mathbf{u} = \\ &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^n \gamma_{ik} f_i \circ \mathbf{u} = \sum_{i=1}^{m} \mu_i f_i \circ \mathbf{u} \leq 0.\end{aligned}$$

Az utolsó egyenlőtlenség (13)-ból és $f_i \circ \mathbf{u} \geq 0$-ból következik, mivel $f_i \circ \mathbf{u}$ [9] szerint az $\mathbf{u}_k \geq 0$ ($k = 1, \dots, n$) nemnegatív koncentrációk szorzata. Mivel $\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) \geq 0$, az $(F \circ \mathbf{u})(\mathbf{x}, 0)$ kezdeti érték az alábbi összefüggést elégíti ki:

$$(F \circ \mathbf{u})(\mathbf{x}, 0) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k(\mathbf{x}, 0) \geq 0, \qquad \mathbf{x} \in \overline{\Omega}.$$

Mivel u teljesíti a (6) egyenletet, következik, hogy

$$\frac{\partial(F\circ \mathbf{u})}{\partial\nu}=\sum_{i=1}^{n}\lambda_k\frac{\partial u_k}{\partial\nu}=0.$$

Tehát $(F\circ\mathbf{u})(\mathbf{x},t)$-re teljesülnek az alábbiak:

$$\begin{aligned}
&(F\circ\mathbf{u})_t(\mathbf{x},t)-d\Delta(F\circ\mathbf{u})(\mathbf{x},t)\le 0, && (\mathbf{x},t)\in\Omega\times(0,T],\\
&(F\circ\mathbf{u})(\mathbf{x},0)\ge 0, && \mathbf{x}\in\overline{\Omega}\\
&\frac{\partial(F\circ\mathbf{u})}{\partial\nu}(\mathbf{x},t)=0, && (\mathbf{x},t)\in\partial\Omega\times(0,T].
\end{aligned}$$

Most alkalmazzuk a 2.1. lemmát $\varphi=F\circ\mathbf{u}$ és $\psi=\xi$ esetében, ahol

$$\xi\ge\max_{\mathbf{x}\in\overline{\Omega}}F(\mathbf{u}(\mathbf{x},0)).$$

Kapjuk, hogy $0\le F(\mathbf{u}(\mathbf{x},t))\le\xi$, és ezért $0\le u_k(\mathbf{x},t)\le\delta$ $(k=1,\dots,n)$. A δ konstans csak ξ-től függ, azaz az $(F\circ\mathbf{u})(\cdot,0)$ kezdetiérték-függvénytől és T-től nem. Mivel a megoldásnak euklideszi normában T-től független korlátja van, a 2.1. tétel értelmében u korlátos $C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$-ban, azaz

$$\sup_{t\ge0}\|\mathbf{u}(\cdot,t)\|_{2+\alpha}=K_1<+\infty. \tag{15}$$

Így igazoltuk, hogy $\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$ létezik, $\forall\ t\ge0$–ra.

Legyen $\mathbf{v}\in\omega^+$. (15)-ből következik, hogy létezik olyan $\{t_k\}$ sorozat, amelyre $t_k\to+\infty$ és

$$\lim_{k\to\infty}\mathbf{u}(\cdot,t_k)=\mathbf{v}\qquad C^2(\overline{\Omega})-\text{ban}.$$

Ki fogjuk mutatni, hogy $\nabla\mathbf{u}(\mathbf{x},t_k)\to0$ x-ben egyenletesen konvergál, mikor $\{t_k\}\to+\infty$. Ebből következni fog, hogy a $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ állandó vektor, vagy $\nabla\mathbf{v}(\mathbf{x})=0$. A $\Lambda=(\lambda_k^l)$ mátrix olyan alsó háromszög-mátrix, amelyre $\lambda_k^l=1$, ha $k=l$; $\lambda_k^l=0$, ha $k>l$; és $\lambda_k^l\ge0$, ha $k<l$.
Tekintsük az

$$(F\circ\mathbf{u})^{(l)}(\mathbf{x},t)=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^l\mathbf{u}_k(\mathbf{x},t),\qquad l=1,\dots,n \tag{16}$$

függvényeket. Mivel $\mathbf{u}_k(\mathbf{x},t)\ge0$, mindegyik $(F\circ\mathbf{u})^{(l)}\ge0$, és

$$\begin{aligned}
(F\circ\mathbf{u})_t^{(l)}-d\Delta(F\circ\mathbf{u})^{(l)}&=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^l\sum_{i=1}^{m}\gamma_{ik}f_i\circ\mathbf{u}=\\
&=\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^l\gamma_{ik}\right)f_i\circ\mathbf{u}=\sum_{i=1}^{m}L_i(\lambda^l)f_i\circ\mathbf{u}\le0,
\end{aligned}$$

mivel (12) szerint $L_i(\lambda^l) \leq 0$, és $f_i \circ \mathbf{u} \geq 0$ $(i = 1, \ldots, m)$.

Tekintsük továbbá a következő integrálokat:

$$I^{(l)}(t) := \frac{1}{2} \int_\Omega [(F \circ \mathbf{u})^{(l)}(\mathbf{x}, t)]^2 \, d\mathbf{x} \geq 0.$$

Ha ezt deriváljuk, a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned} \dot{I}^{(l)}(t) &= \int_\Omega (F \circ \mathbf{u})^{(l)}(\mathbf{x}, t)(F \circ \mathbf{u})_t^{(l)}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} \leq \\ &\leq d \int_\Omega (F \circ \mathbf{u})^{(l)}(\mathbf{x}, t) \Delta (F \circ \mathbf{u})^{(l)}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = \\ &= -d \int_\Omega \left\| \nabla_x (F \circ \mathbf{u})^{(l)}(\mathbf{x}, t) \right\|^2 d\mathbf{x} \leq 0. \end{aligned} \tag{17}$$

Ez utóbbi számolásnál felhasználtuk az

$$(F \circ \mathbf{u})^{(l)}(F \circ \mathbf{u})_t^{(l)} \leq d(F \circ \mathbf{u})^{(l)} \Delta (F \circ \mathbf{u})^{(l)}$$

összefüggést, a divergencia tételét és a zéró fluxusú peremérték-feltételt, amely teljesül $F^{(l)}$-re $\forall\, l$ esetén. Az $I^{(l)}$ függvény monoton csökkenő, alsó korlátja 0. Így a

$$\lim_{t \to +\infty} I^{(l)}(t) = a_l \geq 0$$

határérték létezik, és minden $l = 1, \ldots, n$ esetén

$$\dot{I}^{(l)}(t) \to 0, \text{ mikor } t \to +\infty. \tag{18}$$

(18) érvényessége attól függ, hogy $\ddot{I}^l(t)$ korlátos-e, ha $t \to +\infty$, lásd [14, 101. oldal]. $(F \circ \mathbf{u})_{tt}^{(l)}$ korlátossága (vagy, ami ezzel egyenértékű: $\mathbf{u}_{tt}$ korlátossága) [4, 16, 225–226. oldal] érveléséhez hasonlóan bizonyítható. A 2.1. tételből már tudjuk, hogy

$$\sup_{t \geq 0} \|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{2+\alpha} = K_1.$$

Vegyük (4)-ből a k-adik egyenletet $T = +\infty$-re, és legyen $w(\mathbf{x}, t) := u_k(\mathbf{x}, t)$, valamint

$$g := \sum_{i=1}^m \gamma_{ik} f_i.$$

Tehát egy adott időpontban csak egy egyenletet tekintünk:

$$w_t(\mathbf{x}, t) = d\Delta w(\mathbf{x}, t) + g(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)),$$

ahol $g \circ \mathbf{u}$ differenciálható és egyenletesen korlátos $\overline{\Omega} \times [0, \infty)$-ben. Figyeljük meg, hogy ez utóbbi azért igaz, mivel $g(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t))$ olyan u_i-k szorzata, amelyek nemnegatív egész hatványokra vannak emelve. Az [1]-ben szereplő 1. tétel szerint $w(\cdot, t)$ korlátos $C^{2+\alpha}$-ban, $\forall\ t \geq 0$-ra, tehát w_t egyenletesen korlátos $\forall\ t \geq 0$-ra $C^\alpha(\overline{\Omega})$-ban. Mivel ez utóbbi fennáll minden u_k-ra ($k = 1, \ldots, n$), $\mathbf{u}_t$ egyenletesen korlátos $C^\alpha(\overline{\Omega})$-ban. Deriváljuk a fenti egyenletet t szerint:

$$w_{tt} = d\Delta w_t + \nabla_{\mathbf{u}} g \circ \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_t.$$

A reakciós tag ismét egyenletesen korlátos minden $t \geq 0$ esetén. Ebből következik, hogy $w_t \in C^{2+\alpha}$, tehát w_{tt} egyenletesen korlátos $\forall\ t \geq 0$ mellett, lásd [16, 225. oldal]. Így $\mathbf{u}_{tt}$ egyenletesen korlátos, és ennélfogva $(F \circ \mathbf{u})_{tt}^{(l)}$ is az. (18) és (17) szerint ebből az következik, hogy $\{t_k\} \to +\infty$ esetében

$$\nabla_x (F \circ \mathbf{u})^{(l)}(\mathbf{v}(\mathbf{x})) = 0, \forall\ l.$$

Tekintsük rendre az $F^{(l)}(\mathbf{v}(\mathbf{x}))$-eket ($l = 1, \ldots, n$). Ha $l = 1$, akkor

$$F^{(1)}(\mathbf{v}(\mathbf{x})) = v_1(\mathbf{x}),$$

azaz $\nabla v_1 = 0$. Ha $l = 2$, $F^{(2)}(\mathbf{v}) = \lambda_1^2 v_1 + v_2$, és következik, hogy $\lambda_1^2 \nabla v_1 + \nabla v_2 = 0$, innen pedig

$$\nabla v_2 = (\lambda_1^2 \nabla v_1 + \nabla v_2) - \lambda_1^2 \nabla v_1 = 0.$$

Alkalmazzuk a matematikai indukciót. Feltételezzük, hogy

$$\nabla v_k = 0, k = 1, \ldots, j-1.$$

Használva az

$$(F \circ \mathbf{u})^{(j)}(\mathbf{v}(\mathbf{x})) = \sum_{k=1}^{j-1} \lambda_k^j v_k(\mathbf{x}) + v_j(\mathbf{x})$$

összefüggést és alkalmazva a

$$\nabla (F \circ \mathbf{u})^{(j)} = 0,\ \nabla v_k = 0,\ (k = 1, \ldots, j-1)$$

egyenlőségeket, következik, hogy:

$$\nabla v_j = \left(\sum_{k=1}^{j-1} \lambda_k^j \nabla v_k + \nabla v_j \right) - \sum_{k=1}^{j-1} \lambda_k^j \nabla v_k = 0.$$

Tehát $\nabla(\mathbf{v}(\mathbf{x})) = 0$ bármely $\mathbf{x} \in \Omega$ mellett. Ezért $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{c}$, ahol $\mathbf{c}$ konstans vektor. Ezzel a 3.1. tétel bizonyítását befejeztük. □

Megjegyzés. A [11]-ben lévő elmélet nem alkalmazható a (14)-ben szereplő lineáris Ljapunov-függvény esetében. Az

$$(F \circ \mathbf{u})_t - d\Delta(F \circ \mathbf{u}) \leq 0$$

művelet elvégzése után az egyenlőtlenség bal oldalán nem fog szerepelni a $-c\,\|\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{u}\|$, $c > 0$ tag.

Bizonyításunk során egy energiát jelentő integrált használtunk, hogy megkapjuk $\mathbf{u}$ gradiensét.

Bizonyítás. (3.2. tétel)

Csak a bizonyítás második felét ismertetjük. A [11] 2. tétele szerint az ω^+ határhalmaz, mint $\mathbb{R}^n$ részhalmaza, invariáns halmaza az $\dot{\mathbf{u}} = \Gamma^T\mathbf{f}(\cdot, \mathbf{u})$ KDE-rendszernek és $\dot{H}(\mathbf{u})$ eltűnik az ω^+ halmazon.

Kimutatjuk, hogy $\omega^+ \subset \hat{\pi}(\mathbf{u}_0(\mathbf{x}))$. Amint korábban bizonyítottuk, ha $\mathbf{v} \in \omega^+$, akkor létezik olyan $\{t_k\} \to +\infty$ sorozat, hogy $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t_k) \to \mathbf{v}(\mathbf{x})$ $\mathbf{x}$-ben egyenletesen. A 3.1. tétel értelmében $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{p}$, ahol $\mathbf{p}$ konstans. Tehát $\Lambda\mathbf{u}(\mathbf{x}, t_k) \to \Lambda\mathbf{p}$, mikor $\{t_k\} \to +\infty$. Viszont a 2. értelmezés szerint $\Lambda\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \to \mathbf{a}$, ha $t \to +\infty$. Így $\Lambda\mathbf{p} = \mathbf{a}$ és $\mathbf{p} \in \hat{\pi}(\mathbf{u}_0(\mathbf{x}))$. Az invariáns sík definíciójából könnyen következik, hogy $\hat{\pi}(\mathbf{u}_0(\mathbf{x}))$ pozitív invariáns a (2)–(3) KDE-rendszerre nézve.

Felhasználjuk azt a tényt, hogy ω^+ részhalmaza az alábbi halmaznak:

$$\left\{ \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n \,|\, \dot{H}(\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^{m} \mu_i f_i(\mathbf{u}) = 0 \right\},$$

ahol μ_i az, amit (13) értelmez. Aciklikus gráf esetén

$$\omega^+ \subset \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n \mid f_i(\mathbf{u}) = 0, \forall\, i = 1, \ldots, m\}.$$

Ebből következik, hogy legalább egy k értékre $u_k = 0$ $(k = 1, \ldots, n)$. Tehát egyes kémiai anyagfajták elfogynak, amire a reakció véget ér.

Most kimutatjuk, hogy ω^+ csak egyetlen pontot tartalmaz. Felhasználjuk a (16)-ban értelmezett F^l $(l = 1, \ldots, n)$ függvényeket. Tekintsük a

$$G^{(l)}(t) := \frac{1}{|\Omega|} \int\limits_{\Omega} F^{(l)}(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t))\,\mathrm{d}\mathbf{x}$$

integrálokat. Mivel $F^{(l)}(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) \geq 0$, következik, hogy $G^{(l)}(t) \geq 0$. Majd felhasználva a

$$\partial F^{(l)}/\partial\nu = 0, \;\; F_t^{(l)} - d\Delta F^{(l)} \leq 0$$

összefüggéseket és a divergencia tételét, kapjuk:

$$\frac{\mathrm{d}G^{(l)}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{|\Omega|} \int\limits_{\Omega} (F \circ u)_t^{(l)} \leq \frac{1}{|\Omega|} \int\limits_{\Omega} d\Delta F^{(l)} = 0.$$

Tehát $G^{(l)}(t) \to g^{(l)}$, ha $t \to +\infty$, ahol $g^{(l)}$-ek állandók ($l = 1, \dots, n$). Ezért, ha $t \to +\infty$, felírhatjuk, hogy

$$G^{(1)}(t) = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega u_1(\mathrm{x}, t)\,\mathrm{dx} \to g^{(1)} = p_1,$$

$$G^{(2)}(t) = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega (\lambda_1^2 u_1(\mathrm{x}, t) + u_2(\mathrm{x}, t))\,\mathrm{dx} \to g^{(2)} = \lambda_1^2 p_1 + p_2,$$

$$\vdots$$

$$G^{(n)}(t) = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega \left(\sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k^n u_k(\mathrm{x}, t) + u_n(\mathrm{x}, t) \right) \mathrm{dx} \to g^{(n)} = \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k^n p_k + p_n.$$

Mivel mindegyik $G^{(i)}$ konvergens, ha $t \to +\infty$, következik, hogy

$$\mathrm{U}(t) := \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega \mathrm{u}(\mathrm{x}, t)\,\mathrm{dx} \to \mathrm{p}, \quad t \to +\infty.$$

Legyen $\mathrm{q} \in \omega^+$, vagyis bizonyos $\{t_k\} \to +\infty$ esetén $\mathrm{u}(\mathrm{x}, t_k) \to \mathrm{q}$, ha $k \to +\infty$. Feltételezzük, hogy létezik egy másik $\{\tau_k\} \to +\infty$ sorozat, amelyre

$$\mathrm{u}(\mathrm{x}, \tau_k) \to \hat{\mathrm{q}}, \ k \to +\infty \quad \text{és} \quad \mathrm{q} \neq \hat{\mathrm{q}}.$$

Ekkor viszont $\mathrm{U}(t_k) \to \mathrm{q}$ és $\mathrm{U}(\tau_k) \to \hat{\mathrm{q}}$, $k \to +\infty$. Ez azonban ellentmond annak, hogy $\mathrm{U}(t) \to \mathrm{p}$, ha $t \to +\infty$. Ténylegesen $\mathrm{u}(\mathrm{x}, t) \to p$, ha $t \to +\infty$. □

Megjegyzés.

1. Amint Volpert tárgyalja [19, 12. fejezet]-ben, KDE-ek esetén a fenti elmélet más kémiai reakciókra is vonatkozik, nem csak aciklikus Volpert-gráffal rendelkezőkre, mindaddig, míg a (12) egyenlőtlenségnek létezik pozitív megoldása. Bizonyításunkban felhasználtuk azt a tényt, hogy a (12) rendszernek n nemnegatív megoldása van. Levonhatjuk azt a következtetést, hogy ez a kiterjesztés reakciódiffúzió-rendszerekre nem érvényes. [20, 299. oldal]-án található olyan példa, amelyben (12)-nek van pozitív megoldása, de nincs n számú nemnegatív megoldása. A páros gráf, amely a reakciót fejezi ki, nem bizonyul aciklikusnak.

2. Az a stacionárius pont, amelyhez a megoldás konvergál, függhet a k_i reakciósebességi együtthatóktól, amint ez látható [19, 627. oldal] II. példájában. Ez a helyzet bekövetkezhet PDE-ek esetén is, lásd a 6. fejezet 6.2. példáját.

Most kiterjesztjük a [19, 632. oldal] tételének második részét. Ez azt mondja ki, hogy aciklikus gráf esetében (2)–(3) megoldása nem lehet nemnegatív nemtriviális periodikus megoldás.

Bizonyítás. (3.3. tétel)

A (14) Ljapunov-függvényt fogjuk használni a (13) feltételekkel. Legyen $\mathbf{u}$ egy nemtriviális, nem állandó megoldása (4)–(6)-nak. Ha $\mathbf{u}$ periodikus megoldás, akkor $\exists \overline{T} > 0$, hogy $\forall\ \mathbf{x} \in \Omega$ és $t \geq 0$ esetén

$$\mathbf{u}\left(\mathbf{x}, t + \overline{T}\right) = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t).$$

Ebből következik, hogy

$$F\left(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)\right) = F\left(\mathbf{u}\left(\mathbf{x}, t + \overline{T}\right)\right).$$

Tekintsük az F Ljapunov-függvényt az $\overline{\Omega} \times [0, T]$ halmazon, ahol $\overline{T} < T$. Ekkor $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) > 0$, ha $(\mathbf{x}, t) \in \overline{\Omega} \times (0, T]$. Tehát $f_i(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) > 0$ $(i = 1, \ldots, m)$. Figyelembe véve (13)-at, a (19) egyenlőtlenség szigorú lesz:

$$\begin{aligned}
(F \circ \mathbf{u})_t(\mathbf{x}, t) - d\Delta(F \circ \mathbf{u})(\mathbf{x}, t) &= \sum_{i=1}^{m} \mu_i f_i(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) < 0, && (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times (0, T], \\
F(\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0)) &\leq \xi, && \mathbf{x} \in \overline{\Omega}, \\
\frac{\partial (F \circ \mathbf{u})}{\partial \nu}(\mathbf{x}, t) &= 0, && (\mathbf{x}, t) \in \partial\Omega \times (0, T].
\end{aligned} \tag{19}$$

A (19)-ben szereplő szigorú egyenlőtlenségnek és a nulla fluxusú peremfeltételnek tulajdoníthatóan $F(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t))$ eléri a maximumát $t = 0$-ban. Feltételezzük, hogy ez valamely $\mathbf{x}_0 \in \overline{\Omega}$ mellett következik be. Akkor minden $(\mathbf{x}, t) \in \overline{\Omega} \times (0, T]$ esetén

$$F(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) < F(\mathbf{u}(\mathbf{x}_0, 0)) = F(\mathbf{u}(\mathbf{x}_0, \overline{T})).$$

Legyen $F(\mathbf{u}(\mathbf{x}_0, 0)) > 0, \mathbf{x}_0 \in \Omega$. Így a maximumát $(\mathbf{x}_0, \overline{T}) \in \Omega \times (0, T]$-ben éri el. Ez ellentmond a (19)-beli szigorú egyenlőtlenségnek. Ha $F(\mathbf{u}(\mathbf{x}_0, 0)) = 0$, ellentmondásba kerülünk $F(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) \geq 0$-val.

Ha $\mathbf{x}_0 \in \partial\Omega$, akkor F az $(\mathbf{x}_0, \overline{T}) \in \partial\Omega \times (0, T]$ pontban éri el a maximumát. A nulla fluxusú peremfeltétel $(\mathbf{x}_0, \overline{T})$-ban ellentmond az erős maximumelvnek. □

5. Megfordítható reakciók

Megfordítható reakciók az alábbi típusú kémiai reakciók

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} A_k \underset{k_i^-}{\overset{k_i^+}{\rightleftarrows}} \sum_{k=1}^{n} \beta_{ik} A_k, \qquad i = 1, \ldots, m, \tag{20}$$

ahol $k_i^+, k_i^- > 0$ az i-edik reakció előre-, ill. visszafele mutató reakciósebességi együtthatói. Egy megfordítható reakció Ljapunov-függvénye lehet az a

$$V(\mathbf{u}) = \sum_{k=1}^{n} u_k(\ln(u_k) - (c_k + 1)) \tag{21}$$

függvény, ahol mindegyik c_k konstans. A V függvény tartalmaz egy logaritmikus tagot, ami azt jelenti, hogy $V(\mathbf{u})$ csak $\mathbf{u} > 0$-ra van értelmezve. Emlékeztetünk, hogy csak olyan megoldások érdekelnek bennünket, amelyekre

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) > 0, \qquad (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times (0, \infty).$$

A $V(\mathbf{u})$ függvény folytonossá tehető a nemnegatív ortánson, mivel

$$\lim_{u \to 0^+} u \ln(u) = 0.$$

Részletesen kiegyensúlyozott stacionárius pont az olyan $\mathbf{u}$ pont, amelyre az

$$f_i^+ = k_i^+ \prod_{k=1}^{n} u_k^{\alpha_{ik}} \qquad \text{és} \qquad f_i^- = k_i^- \prod_{k=1}^{n} u_k^{\beta_{ik}} \tag{22}$$

sebességértékek azonosak. Tehát részletesen kiegyensúlyozott stacionárius pont esetén $f_i^+ = f_i^-$ $(i = 1, \ldots, m)$. Megmutatható, hogy egy részletesen kiegyensúlyozott stacionárius pont stacionárius pontja a (2)–(3) KDE-nek. Most bevezetünk egy, a részletesen kiegyensúlyozott stacionárius pontok létezésére és egyértelműségére vonatkozó feltételt.

A. FELTÉTEL: Feltételezzük, hogy létezik $\overline{\mathbf{u}}$ pozitív részletesen kiegyensúlyozott stacionárius pont PDE-re.

Ha az A. feltétel teljesül, akkor [19, 613. oldal] tétele szerint minden invariáns síkban létezik egyetlen $\overline{\mathbf{u}}$ pozitív részletesen kiegyensúlyozott stacionárius pont. Legyen a (21)-ben szereplő c_k olyan, hogy $\overline{u}_k = \exp(c_k)$. A V függvény bizonyos tulajdonságokkal rendelkezik, amelyet [19] tárgyal KDE-rendszerek esetén:

1. $\exists\, \overline{\mathbf{u}} \in \hat{\pi}(\mathbf{u}_0(\mathbf{x}))$ úgy, hogy $V(\mathbf{u}) \geq V(\overline{\mathbf{u}})$, $\forall\, \mathbf{u} \in \hat{\pi}(\mathbf{u}_0(\mathbf{x}))$, ahol $\mathbf{u} \geq 0$, azaz $\overline{\mathbf{u}}$ abszolút minimumhely.
2. $V(\mathbf{u}) \to +\infty$, ha $\|\mathbf{u}\| \to +\infty$ és $V(\mathbf{u}) \to 0$, ha $\|\mathbf{u}\| \to 0$.

A KDE esetét lásd bővebben [17, 19]-ben.

Bizonyítás. (3.1. tétel)

Tekintsük a $V(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t))$ függvényt, ahol $\mathbf{u}$ megoldása a (4)–(6) reakciódiffúziórendszernek. Először kimutatjuk, hogy

$$(V \circ \mathbf{u})_t(\mathbf{x}, t) - d\Delta(V \circ \mathbf{u})(\mathbf{x}, t) \leq 0, \qquad (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times (0, T]$$

Kiszámoljuk V_t-t:

$$(V \circ \mathbf{u})_t = (\nabla_{\mathbf{u}} V) \circ \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_t = \sum_{k=1}^{n} (\ln(u_k) - c_k) \left(d\Delta u_k + \sum_{i=1}^{m} \gamma_{ik} f_i \circ \mathbf{u} \right).$$

ΔV kiszámolása végett kiszámítjuk az alábbi parciális deriváltakat:

$$\frac{\partial(V \circ \mathrm{u})}{\partial x_j} = \nabla_{\mathrm{u}} V \cdot \frac{\partial \mathrm{u}}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^{n} (\ln(u_k) - c_k) \frac{\partial u_k}{\partial x_j},$$

illetve

$$\frac{\partial^2(V \circ \mathrm{u})}{\partial x_j^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{u_k} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right)^2 + \sum_{k=1}^{n} (\ln(u_k) - c_k) \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j^2}.$$

Tehát

$$\Delta(V \circ \mathrm{u}) = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial^2(V \circ \mathrm{u})}{\partial x_j^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{u_k} \|\nabla u_k\|^2 + \sum_{k=1}^{n} (\ln(u_k) - c_k) \Delta u_k.$$

Most tekintsük a $(V \circ \mathrm{u})_t - d\Delta(V \circ \mathrm{u})$ kifejezést:

$$\begin{aligned}(V \circ \mathrm{u})_t - d\Delta(V \circ \mathrm{u}) &= \sum_{k=1}^{n} (\ln(u_k) - c_k)(d\Delta u_k + \sum_{i=1}^{m} \gamma_{ik}(f_i \circ \mathrm{u})) - \\ &\quad - d\left[\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{u_k} \|\nabla u_k\|^2 + \sum_{k=1}^{n} (\ln(u_k) - c_k)\Delta u_k\right] = \\ &= \sum_{k=1}^{n} (\ln(u_k) - c_k) \sum_{i=1}^{m} \gamma_{ik}(f_i \circ \mathrm{u}) - d \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{u_k} \|\nabla u_k\|^2 \leq 0.\end{aligned}$$

A második összeg nem pozitív, mivel

$$d > 0,\ u_k > 0, \quad \text{és} \quad \|\nabla u_k\|^2 \geq 0 \ (k = 1, \ldots, n).$$

Az első összeg a KDE esetében is szereplő $\dot{H}$, és egyenlő az alábbival:

$$-\sum_{i=1}^{m} (f_i^+ - f_i^-)(\ln(f_i^+) - \ln(f_i^-)) \leq 0,$$

ahol f_i^+ és f_i^- a (22) képlettel értelmezett kifejezések. Az egyenlőtlenség érvényes, mivel $(a - b)(\ln(a) - \ln(b)) \geq 0$, ha $a, b > 0$. A teljes számítás megtalálható itt: [19, 641. oldal].

Lévén, hogy $V(\cdot, 0)$ folytonos $\overline{\Omega}$-ban, feltételezzük, hogy létezik olyan ξ konstans, amelyre fennáll:

$$\max_{\mathrm{x} \in \overline{\Omega}} V(\mathrm{x}, 0) \leq \xi.$$

Az u-ra vonatkozó nulla fluxusú peremérték-feltételből következik, hogy

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(V\circ \mathrm{u})}{\partial \nu} &= \left(\nabla_{\mathrm{u}} V \cdot \frac{\partial \mathrm{u}}{\partial x_1}, \dots, \nabla_{\mathrm{u}} V \cdot \frac{\partial \mathrm{u}}{\partial x_s}\right) \cdot \nu \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n} (\ln(u_k) - c_k) \frac{\partial u_k}{\partial x_1}, \dots, \sum_{k=1}^{n} (\ln(u_k) - c_k) \frac{\partial u_k}{\partial x_s}\right) \cdot \nu \\
&= \sum_{j=1}^{s} \sum_{k=1}^{n} (\ln(u_k) - c_k) \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \nu_j \\
&= \sum_{k=1}^{n} (\ln(u_k) - c_k) \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \nu_j \\
&= \sum_{k=1}^{n} (\ln(u_k) - c_k) \nabla u_k \cdot \nu = 0.
\end{aligned}$$

A fentieket összegezve V-re kapjuk:

$$\begin{aligned}
&(V\circ \mathrm{u})_t(\mathrm{x},t) - d\Delta(V\circ \mathrm{u})(\mathrm{x},t) \le 0, && (\mathrm{x},t) \in \Omega \times (0,T], \\
&V(\mathrm{x},0) \le \xi, \mathrm{x} \in \overline{\Omega}, && \\
&\frac{\partial V}{\partial \nu}(\mathrm{x},t) = 0, && (\mathrm{x},t) \in \partial\Omega \times (0,T].
\end{aligned}$$

A $\varphi = V \circ \mathrm{u}$ és $\psi = \xi$ függvényekre alkalmazzuk az 2.1. lemmát az $\overline{\Omega} \times [0,T]$ halmazon. Következésképpen $V(\mathrm{u}(\mathrm{x},t)) \le \xi$. Így $0 \le u_k(\mathrm{x},t) \le \delta$, $\overline{\Omega} \times [0,T]$-ben, mivel $V(\mathrm{u}) \to +\infty$, ha $\|\mathrm{u}\| \to +\infty$. Ez az eredmény nem függ T-től. Tehát az u megoldás $C^{2+\alpha}$ norma szerinti globális korlátossága következik a 2.1. tételből.

Legyen ω^+ az u megoldás ω-határhalmaza. A [10]-ben szereplő 2.1. tétel bizonyítása szerint járunk el annak igazolására, hogy ha $\overline{\mathrm{v}} \in \omega^+$, akkor $\overline{\mathrm{v}} = konstans$. Legyen

$$\overline{\mathrm{v}} := \lim_{k\to+\infty} \mathrm{u}(\circ, t_k), \quad C^2(\overline{\Omega})$$

ω^+ tetszőleges eleme. Legyen v megoldása a (4)–(6) rendszernek a $\mathrm{v}(\mathrm{x},0) = \overline{\mathrm{v}}(\mathrm{x})$ kezdetiérték-feltétellel.

A tömeghatás típusú kémiai kinetikai rendszerek megoldásának pozitivitására és szigorú pozitivitására vonatkozó elméletből [9] mindegyik v_k komponensre két lehetőség áll fenn: vagy $v_k(\mathrm{x},t) \equiv 0$ minden t esetén, vagy $v_k(\mathrm{x},t) > 0$ minden $\mathrm{x} \in \overline{\Omega}$ és $t > 0$ esetén.

A (4)–(6) rendszerből kizárjuk az összes olyan v_k-ra vonatkozó egyenletet, amelyre $v_k(\mathrm{x},t) \equiv 0$. A megmaradó egyenletekben valahányszor $v_k = 0$ egy többszörös f_i^+, ill. f_i^--ban, egyenlővé tesszük 0-val. Tulajdonképpen minden i esetén van f_i^+ és f_i^- pozitív, ha $t > 0$, vagy mindegyik azonosan 0. Ha $f_i^+ = 0$ akkor legalább az egyik A_k (20) bal oldalán 0 koncentrációjú lesz. Tehát a (20) jobb oldalán szereplő valamely A_j termék nem fog tudni létrejönni, és nulla koncentrációjú lesz, f_i^--t nullává téve. A (20) bal oldalán előforduló összes A_k kémiai anyag megfelelő $v_k > 0$ koncentrációja esetén $f_i^+ > 0$. Ekkor a (20) jobb oldalán előforduló összes A_j termék létre fog jönni, maga után vonva az $f_i^- > 0$ egyenlőtlenséget, lásd [9]. Most van egy (4) típusú alrendszerünk a megfelelő kezdeti- és peremérték feltétellel úgy, hogy $v_k(\mathrm{x}, t) > 0$, $\forall$ $\mathrm{x} \in \Omega, t > 0$. Ugyanazt a jelölést fogjuk használni a leegyszerűsített rendszer $\mathrm{v}(\mathrm{x}, t)$ megoldására. Legyen $W(\mathrm{x}, t) = V(\mathrm{v}(\mathrm{x}, t))$ a v megoldáshoz tartozó Ljapunov-függvény. Rögzített t esetén alkalmazzuk a 2.3. lemmát $\mathrm{u}(\mathrm{x}, t_k + t)$-re, illetve $\mathrm{v}(\mathrm{x}, t)$-re:

$$\|\mathrm{u}(\mathrm{x}, t_k + t) - \mathrm{v}(\mathrm{x}, t)\| \leq \|\mathrm{u}(\mathrm{x}, t_k) - \overline{\mathrm{v}}(\mathrm{x})\|_2 \, \mathrm{e}^{Mt},$$

ahol M az

$$F(\mathrm{u}) = \left(\sum_{i=1}^{m} \gamma_{i1} f_i(\mathrm{u}), \ldots, \sum_{i=1}^{m} \gamma_{in} f_i(\mathrm{u}) \right)$$

vektorfüggvényhez tartozó Lipschitz-állandó az $\{\mathrm{u} \in \mathbb{R}_+^n : V(\mathrm{u}) \leq \xi\}$ kompakt konvex halmazon. Tehát a

$$\lim_{k \to +\infty} \mathrm{u}(\mathrm{x}, t_k + t) = \mathrm{v}(\mathrm{x}, t)$$

konvergencia egyenletes x-ben, mivel $t = 0$-ra teljesül a

$$\lim_{k \to +\infty} \mathrm{u}(\cdot, t_k) = \overline{\mathrm{v}}$$

összefüggés $C^2(\overline{\Omega})$-ban. Ebből következik, hogy

$$\lim_{k \to \infty} V(\mathrm{u}(\cdot, t_k + t)) = V(\mathrm{v}(\cdot, t)) = W(\cdot, t) \qquad C^2(\overline{\Omega})\text{-ban.} \tag{23}$$

Ugyanakkor $W(\mathrm{x}, t)$-re fennáll

$$W_t - d\Delta W = -d \sum_k \frac{1}{v_k} \|\nabla v_k\|^2 - \sum_i (f_i^+ - f_i^-)(\ln(f_i^+) - \ln(f_i^-)) \leq 0, \tag{24}$$

ahol az első összeg $v_k > 0$-ra vonatkozik, míg $\sum_i$-t csak a pozitív f_i^+, f_i^- értékekre vesszük. A 2.4. lemma szerint a $\lim_{t \to +\infty} V(u(\mathrm{x}, t + t_k)) = konstans$ konvergencia egyenletes x-ben, és (23) szerint $W(\mathrm{x}, t) = konstans$ bármely $\mathrm{x} \in \overline{\Omega}$, $t > 0$ esetén. Tehát (24) bal oldala 0, így $\|\nabla v_k(\mathrm{x}, t)\| = 0$ minden olyan k-ra, amely esetén $v_k(\mathrm{x}, t) > 0$, ha $t > 0$. Tehát $\mathrm{v}(\mathrm{x}, t) = konstans$ és a folytonosság szerint $\overline{\mathrm{v}}(\mathrm{x}) = \mathrm{v}(\mathrm{x}, 0) = konstans$. Ezzel a 3.1. tétel bizonyítását megfordítható reakciók esetére befejeztük. □

Bizonyítás. (3.2. tétel)

A 3.2. tétel első része ugyanaz, mint aciklikus gráfok esetében. Legyen $\overline{\mathrm{u}}$ a

$$\hat{\pi} = \{\mathrm{u} \in \mathbb{R}^n_+ \mid \Lambda \mathrm{u} = \mathrm{a}\}$$

síkban egy pozitív részletesen kiegyensúlyozott stacionárius pont, bizonyos a-ra, ahol

$$\mathrm{a} = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega \Lambda \mathrm{u}_0(\mathrm{x})\, d\mathrm{x}. \tag{25}$$

Az $\overline{\mathrm{u}}$ részletesen kiegyensúlyozott stacionárius pont létezése és egyértelműsége az A. feltételen alapszik. [19, 645. oldal]-át követjük. Vegyük az $\mathrm{u}(\mathrm{x}, 0)$ kezdetiérték feltételt a

$$D_C = \{\mathrm{u} > 0 \mid V(\mathrm{u}) \le C\},$$

halmazból, ahol C-t a

$$V(\overline{\mathrm{u}}) < C < V_s = \min_{S'} V(\mathrm{u})$$

összefüggés adja, és $S' := \partial \mathbb{R}^n_+ \cap \{\mathrm{u} \in \hat{\pi}\}$.

Kimutatjuk, hogy D_C pozitívan invariáns halmaza $\mathrm{u}(\mathrm{x}, t)$-nek. Alkalmazva a 2.1. lemmát $\varphi = V(\mathrm{u}(\mathrm{x}, t))$-re és $\psi = C$-re, következik, hogy $V(\mathrm{u}(\mathrm{x}, t)) \le C$, mikor $t \to +\infty$. Tehát $\omega^+ \subset D_C$. Ez az érvelés kizárja annak lehetőségét, hogy $\mathrm{u}(\mathrm{x}, t)$ egy határon fekvő stacionárius ponthoz tartson, lásd a 6. fejezet 6.4. példáját. Tudjuk, hogy $\omega^+ \in S = \hat{\pi} \cap \{\mathrm{u} \in \mathbb{R}^n \mid \dot{H} = 0\}$. Ha teljesül az A. feltétel, akkor a [19, 644. oldal]-án szereplő tétel szerint mindegyik invariáns sík egyetlen stacionárius pontot tartalmaz, amely pedig részletesen kiegyensúlyozott stacionárius pont. Tehát $\overline{\mathrm{u}}$ részletesen kiegyensúlyozott stacionárius pont. Mivel $\omega^+ \ne \emptyset$ és $S = \{\overline{\mathrm{u}}\}$, következik, hogy $\omega^+ = \{\overline{\mathrm{u}}\}$. Így $\overline{\mathrm{u}}$ aszimptotikusan stabilis azon megoldások között, amelyek teljesítik (25)-öt. □

Bizonyítás. (3.3. tétel)

Feltételezzük, hogy a (4)–(6) PDE-rendszer rendelkezik periodikus megoldással. Ekkor létezik $\overline{T} > 0$ úgy, hogy $\mathrm{u}(\mathrm{x}, t + \overline{T}) = \mathrm{u}(\mathrm{x}, t)$, $\forall\ x \in \overline{\Omega}$. Feltételezzük, hogy ez a periodikus megoldás nem egy konstans stacionárius pont. Tudjuk, hogy a $V \circ \mathrm{x}$ függvényre teljesül

$$(V \circ \mathrm{u})_t - d\Delta(V \circ \mathrm{u}) = -\sum_{i=1}^{m} (f_i^+ - f_i^-)(\ln(f_i^+) - \ln(f_i^-)) - d \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{u_k} \|\nabla u_k\|^2 \le 0. \tag{26}$$

Tekintsük $V \circ \mathrm{u}$-t $\overline{\Omega} \times [0, T]$-ben, bizonyos $T > \overline{T}$-ra. Ez eleget tesz az alábbi problémának:

$$\begin{aligned}
&(V \circ \mathrm{u})_t - d\Delta(V \circ \mathrm{u}) \le 0, && (\mathrm{x}, t) \in \Omega \times (0, T],\\
&V(\mathrm{x}, 0) = V_0(\mathrm{x}), \mathrm{x} \in \overline{\Omega}, &&\\
&\frac{\partial (V \circ \mathrm{u})}{\partial \nu}(\mathrm{x}, t) = 0, && (\mathrm{x}, t) \in \partial\Omega \times (0, T].
\end{aligned}$$

V eléri a maximumát bizonyos $(\mathrm{x}, t) \in \overline{\Omega} \times [0, T]$ pontban.

Tételezzük fel, hogy a maximum valamely $(\mathrm{x}, t_1) \in \Omega \times [0, T]$ pontban következik be, bizonyos $t_1 > 0$-ra. Ekkor az erős maximumelv szerint $V((\mathrm{x}, t)) = konstans$ és

$$(V \circ \mathrm{u})_t(\mathrm{x}, t) = \Delta(V \circ \mathrm{u})(\mathrm{x}, t) = 0,$$

ahol $(\mathrm{x}, t) \in \overline{\Omega} \times [0, t_1]$. Ily módon (26) szerint, felhasználva, hogy egyik összeg sem negatív, azt kapjuk, hogy $\mathrm{u}(\mathrm{x}, t)$ kielégíti a

$$\|\nabla \mathrm{u}(\mathrm{x}, t)\| = 0 \quad \text{és} \quad f_i^+(\mathrm{u}(\mathrm{x}, t)) = f_i^-(\mathrm{u}(\mathrm{x}, t))$$

feltételeket minden $\mathrm{x} \in \Omega$, $t \in (0, t_1]$ esetén $(i = 1, \ldots, m)$. Ekkor a folytonosság szerint

$$\|\nabla \mathrm{u}(\mathrm{x}, 0)\| = 0, \quad \text{és} \quad f_i^+(\mathrm{u}(\mathrm{x}, 0)) = f_i^-(\mathrm{u}(\mathrm{x}, 0)),$$

ahol $\mathrm{x} \in \Omega$ $(i = 1, \ldots, m)$. Tehát $\mathrm{u}(\mathrm{x}, 0)$ egy állandó, részletesen kiegyensúlyozott stacionárius pont. A (4)–(6) rendszer $\mathrm{u}(\mathrm{x}, t)$ megoldásának egyértelműségéből következik, hogy $\mathrm{u}(\mathrm{x}, t)$ konstans megoldás és részletesen kiegyensúlyozott stacionárius pontja az $(\mathrm{x}, t) \in \overline{\Omega} \times [0, T]$-nek. Így ellentmondásba kerültünk azzal a feltételezéssel, hogy $\mathrm{u}(\mathrm{x}, t)$ nem konstans megoldás.

Ha $V(\mathrm{u}(\mathrm{x}, t))$ maximumát valamely $(\mathrm{x}, 0)$ pontban éri el, ahol $\mathrm{x} \in \Omega$, akkor abból a feltételezésből, hogy $\mathrm{u}(\mathrm{x}, t)$ periodikus, következni fog, hogy $V(\mathrm{u}(\mathrm{x}, t))$ az $(\mathrm{x}, \overline{T})$ pontban eléri a maximumát. Ugyanaz a megfontolás, mint az előbbi bekezdésben levő átvihető az $\overline{\Omega} \times [0, \overline{T}]$ tartományra.

Ha $V(\mathrm{u}(\mathrm{x}, t))$ maximumát $(\mathrm{x}, t) \in \partial\Omega \times (0, T]$-ben éri el, akkor az erős maximumelv szerint

$$\partial V \circ \mathrm{a}/\partial\nu(\mathrm{x}, t) > 0, \qquad (\mathrm{x}, t) \in \partial\Omega \times (0, T],$$

ami azonban ellentmond a nulla fluxusú határfeltételnek. Ha pedig a maximum $\mathrm{x} \in \partial\Omega$-ban fordul elő, és $t = 0$, akkor ez $(\mathrm{x}, \overline{T}) \in \partial\Omega \times (0, T]$-ben van. Így ellentmondásba ütközünk az erős maximumelvvel.

Tehát u nem lehet nemkonstans, nemnegatív, periodikus megoldás. □

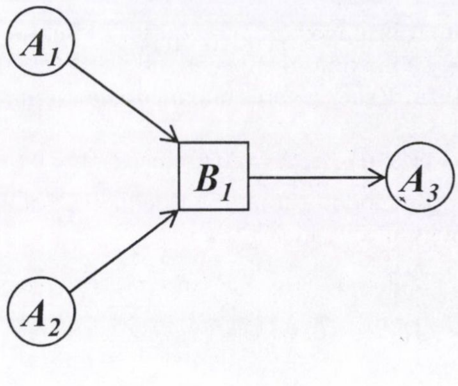
6. Példák

Először két aciklikus gráffal rendelkező kémiai reakciót veszünk. Azokat pedig két megfordítható reakció követi.

6.1. Példa. Tekintsük az egyszerű

$$A_1 + A_2 \xrightarrow{k} A_3$$

kémiai reakciót, amelyet elemi reakciónak nevezünk. Mindegyik A_i $(i = 1, 2, 3)$ kémiai anyagfajtát jelöl, $k > 0$ pedig a reakciósebességi együttható. (1)-nek megfelelően a (nullától különböző) sztöchiometriai együtthatók a következők: $\alpha_{11} = \alpha_{12} = \beta_{13} = 1$. Volpert-gráfját az 1. ábra szemlélteti.



1. ábra. A 6.1. példabeli reakció Volpert-gráfja

A reakció aciklikus, tehát a 4. fejezetben szereplő elmélet alkalmazható rá. Felállítjuk a PDE-problémát:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u_1}{\partial t}(\mathbf{x},t) = d\Delta u_1(\mathbf{x},t) - ku_1(\mathbf{x},t)u_2(\mathbf{x},t), \\
&\frac{\partial u_2}{\partial t}(\mathbf{x},t) = d\Delta u_2(\mathbf{x},t) - ku_1(\mathbf{x},t)u_2(\mathbf{x},t), \qquad (\mathbf{x},t) \in \Omega \times (0,\infty), \\
&\frac{\partial u_3}{\partial t}(\mathbf{x},t) = d\Delta u_3(\mathbf{x},t) + ku_1(\mathbf{x},t)u_2(\mathbf{x},t), \\
&u_i(\mathbf{x},0) = (u_i)_0(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{x} \in \overline{\Omega}, \quad i = 1,2,3, \\
&\frac{\partial u_i}{\partial \nu}(\mathbf{x},t) = 0, \qquad (\mathbf{x},t) \in \partial\Omega \times (0,\infty), \quad i = 1,2,3.
\end{aligned}$$

Az $\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$ vektor az A_i anyagfajta $u_i(\mathbf{x},t)$ $(i = 1,2,3)$ koncentrációit tartalmazza. A $\Gamma = (-1,-1,1)$ mátrix lesz a sztöchiometriai mátrix, míg a sebességfüggvény $f(\mathbf{u}) = ku_1u_2$. Tehát a reakciós tag $\Gamma^T\mathbf{f}(\mathbf{u})$. Feltételezzük, hogy

$$u_1(\mathbf{x},0) \geq 0, \quad u_2(\mathbf{x},0) \geq 0,$$

és mindegyik

$$u_1(\mathbf{x},0) > 0, \quad u_2(\mathbf{x},0) > 0$$

valamilyen pozitív mértékű $\mathbf{x} \in \overline{\Omega}$ mellett, de $u_3(\mathbf{x},0) \equiv 0$. Következik, hogy $\mathbf{u}(\mathbf{x},t) > \mathbf{0}$, ha $t > 0$, lásd [9].

Most leírjuk a Λ mátrixot úgy, hogy (12) teljesüljön, és innen kiszámítjuk az F Ljapunov-függvényt. Arra a következtetésre fogunk jutni, hogy $\mathbf{u}(\mathbf{x},t_k) \to \mathbf{c}$ valamilyen $\{t_k\} \to +\infty$ esetén, mint ahogy ezt kimutattuk a 4. fejezetben.

Szükségünk van a $\Gamma\lambda \leq 0$, vagy $\lambda_3 \leq \lambda_1 + \lambda_2$ egyenlőtlenség három lineárisan független megoldására. Λ meghatározásának algoritmusa megtalálható [19, 624–625. oldal]-án. A számítások a következő mátrixot adják:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

ami egy alsó háromszög-mátrix, az átlóin 1-esekkel, amint vártuk. Tehát (14) szerint a Ljapunov-függvény

$$F(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) = \lambda^3 \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^{3} u_i(\mathbf{x}, t)$$

lesz. A 3.1. tétel értelmében az ω-határhalmaz, ω^+, konstans függvényekből áll. A 3.3. tétel szerint ez abban a $\hat{\pi}(\mathbf{u}_0(\mathbf{x}))$ invariáns határsíkban fekszik, amelyre:

$$u_1 + u_3 = a_1,$$
$$u_2 + u_3 = a_2,$$

ahol

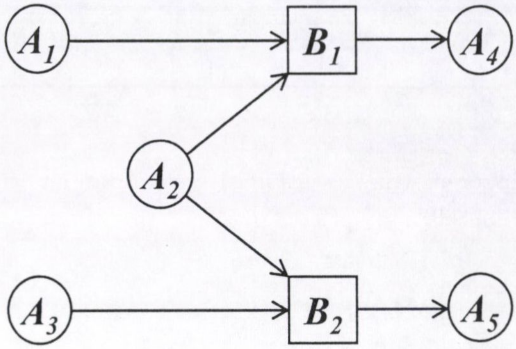
$$a_i := \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega u_i(\mathbf{x}, 0)\, \mathrm{d}\mathbf{x}, \qquad i = 1, 2.$$

Mivel $u_i(\mathbf{x}, 0)$-t nem vettük identikusan nullának Ω-n, ezért $a_i > 0\,(i = 1, 2)$. A 3.2. tétel értelmében $\omega^+ \subset \{\mathbf{u}|\dot{H}(\mathbf{u}) = 0\}$. Mivel $\mathbf{u} \in \omega^+$, ezért $\dot{H} = -ku_1u_2 = 0$ maga után vonja azt, hogy vagy $u_1 = 0$, vagy pedig $u_2 = 0$. Mivel $\omega^+ \subset \hat{\pi}(\mathbf{u}_0(\mathbf{x}))$, ha $u_1 = 0$, akkor $u_3 = a_1$ és $u_2 = a_2 - a_1$. Ez akkor következik be, ha $a_2 \geq a_1$. Ha $u_2 = 0$, akkor $u_3 = a_2$ és $u_1 = a_1 - a_2$. Ez pedig akkor teljesül, ha $a_1 \geq a_2$. Az $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ megoldás $\mathbf{x}$ szerint egyenletesen konvergál $t \to +\infty$-re az $E_1 = (0, a_2 - a_1, a_1)$ ponthoz, ha $a_2 \geq a_1$, vagy az $E_2 = (a_1 - a_2, 0, a_2)$ ponthoz, ha $a_1 \geq a_2$. Mindkét esetben vagy az A_1, vagy az A_2 anyagfajta elfogy.

6.2. Példa. Tekintsük az

$$A_1 + A_2 \xrightarrow{k_1} A_4,$$
$$A_2 + A_3 \xrightarrow{k_2} A_5$$

reakciólépésekből álló kémiai reakciót. Itt mindegyik (nullától különböző) sztöchiometriai együttható értéke 1. A reakció páros gráfja a 2. ábrán látható. A gráf aciklikus, mivel nem tartalmaz köröket. A KDE esetére vonatkozó bővebb magyarázat áll rendelkezésünkre [19, 627. oldal]-án.



2. ábra. A 6.2. példabeli reakció Volpert-gráfja

Írjuk fel a reakcióhoz tartozó PDE-problémát:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u_1}{\partial t}(\mathbf{x},t) &= d\Delta u_1(\mathbf{x},t) - k_1u_1(\mathbf{x},t)u_2(\mathbf{x},t),\\
\frac{\partial u_2}{\partial t}(\mathbf{x},t) &= d\Delta u_2(\mathbf{x},t) - k_1u_1(\mathbf{x},t)u_2(\mathbf{x},t) - k_2u_2(\mathbf{x},t)u_3(\mathbf{x},t),\\
\frac{\partial u_3}{\partial t}(\mathbf{x},t) &= d\Delta u_3(\mathbf{x},t) - k_2u_2(\mathbf{x},t)u_3(\mathbf{x},t), \qquad (\mathbf{x},t)\in\Omega\times(0,\infty),\\
\frac{\partial u_4}{\partial t}(\mathbf{x},t) &= d\Delta u_4(\mathbf{x},t) + k_1u_1(\mathbf{x},t)u_2(\mathbf{x},t),\\
\frac{\partial u_5}{\partial t}(\mathbf{x},t) &= d\Delta u_5(\mathbf{x},t) + k_2u_2(\mathbf{x},t)u_3(\mathbf{x},t),\\
u_i(\mathbf{x},0) &= (u_i)_0(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{x}\in\overline{\Omega},\quad i=1,2,3,4,5,\\
\frac{\partial u_i}{\partial \nu}(\mathbf{x},t) &= 0, \qquad (\mathbf{x},t)\in\partial\Omega\times(0,\infty),\quad i=1,2,3,4,5.
\end{aligned}
$$

Az $u_i(\mathbf{x},0)$ kezdeti koncentrációkat pozitív mértékű halmazon nem azonosan nullának vesszük $i=1,2,3$-ra és $u_i(\mathbf{x},0)\equiv 0$-nak $i=4,5$-re. Ekkor a [9]-ben szereplő elmélet szerint $\mathbf{u}(\mathbf{x},t)>\mathbf{0}$ a $t>0$ esetén.

A továbbiakban megadjuk Λ-t és az F Ljapunov-függvényt. Megoldjuk az alábbi egyenlőtlenségrendszert:

$$
\begin{aligned}
\lambda_4 &\le \lambda_1+\lambda_2,\\
\lambda_5 &\le \lambda_2+\lambda_3.
\end{aligned}
$$

A [19, 624–625. oldal]-án található algoritmust alkalmazva a megoldások a

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

mátrixot alkotják. Tehát a Ljapunov-függvény

$$F(\mathbf{u}) = \lambda^5 \cdot \mathbf{u} = \sum_{i=1}^{5} u_i$$

lesz. A 3.1. tétel szerint ω^+ konstans függvényekből áll. Lássuk, milyen $\mathbf{c}$ konstanshoz tart $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$. Meghatározzuk $\mathbf{u}$-t úgy, hogy $\dot{H} = 0$ legyen, mert a 3.2. tételt felhasználva $\omega^+ \subset \{\mathbf{u} \,|\, \dot{H} = 0\}$. Mivel

$$\dot{H} = -f_1(u) - f_2(u) = -k_1 u_1 u_2 - k_2 u_2 u_3 \leq 0,$$

ezért $\dot{H} = 0$, ha $u_1 u_2 = 0$ és $u_2 u_3 = 0$. Ha egy $\mathbf{u}$ megoldás ω^+-ban van, akkor vagy az $u_2 = 0$ eset, vagy pedig az $u_1 = u_3 = 0$ eset áll fenn. Az $\mathbf{u}$ megoldás $t \to +\infty$-re az alább megadott invariáns határsíkhoz tart:

$$\begin{aligned} u_1 + u_4 &= a_1, \\ u_3 + u_5 &= a_3, \\ u_2 + u_4 + u_5 &= a_2, \end{aligned}$$

ahol

$$a_i := \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u_i(\mathbf{x}, 0)\, d\mathbf{x}, \qquad i = 1, 2, 3.$$

Mivel $u_i(\mathbf{x}, 0)$ $(i = 1, 2, 3)$ nem azonosan nulla valamely pozitív mértékű halmazon, következik, hogy $a_i > 0$ minden i-re.

Ha $u_2 \neq 0$ és $a_2 > a_1 + a_3$, akkor $\omega^+ = \{E_1\}$, ahol

$$E_1 = (0, a_2 - a_1 - a_3, 0, a_1, a_3).$$

Ha $u_2 = 0$, akkor $a_2 < a_1 + a_3$-ra, és minden olyan α paraméterre, amely esetén

$$\max\{0, a_1 - a_2\} < \alpha < \min\{a_1, a_1 + a_3 - a_2\}, \qquad \omega^+ = \{E_2\},$$

ahol

$$E_2 = (\alpha, 0, a_1 + a_3 - a_2 - \alpha, a_1 - \alpha, a_2 - a_1 + \alpha).$$

Az α-ra vonatkozó egyenlőtlenségek E_2 nemnegatív stacionárius voltát biztosítják minden α-ra. A KDE esetében az u megoldás olyan stacionárius ponthoz tart, amely nem csak az u(0) kezdeti értéktől függ, de a k_1, k_2 reakciósebességi együtthatóktól is. Az α paraméter egyértelműen kifejezhető a k_1, k_2 reakciósebességi együtthatókkal a

$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{\ln(\alpha) - \ln(u_1(0))}{\ln[(u_1(0) + u_3(0) - u_2(0) - \alpha)] - \ln(u_3(0))}$$

egyenletből. Az $u_k(0) > 0$ ($k = 1, 2, 3$) konstansok kezdeti értékei az $u_k(t)$-nek. A PDE esetében nem tudunk hasonló összefüggést találni a-ra és α-ra. Mindazonáltal tudunk következtetni arra, hogy ω^+ egyetlen pontból áll a 3.2. tétel értelmében.

6.3. Példa. Tekintsük az első példában szereplő kémiai reakciót, és adjuk hozzá a fordított irányú reakciót:

$$A_1 + A_2 \underset{k_-}{\overset{k_+}{\rightleftarrows}} A_3.$$

Felírhatjuk a reakcióhoz tartozó PDE problémát:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u_1}{\partial t}(\mathrm{x},t) = d\Delta u_1(\mathrm{x},t) - k_+ u_1(\mathrm{x},t)u_2(\mathrm{x},t) + k_- u_3(\mathrm{x},t), \\
&\frac{\partial u_2}{\partial t}(\mathrm{x},t) = d\Delta u_2(\mathrm{x},t) - k_+ u_1(\mathrm{x},t)u_2(\mathrm{x},t) + k_- u_3(\mathrm{x},t), \qquad (\mathrm{x},t) \in \Omega \times (0,\infty), \\
&\frac{\partial u_3}{\partial t}(\mathrm{x},t) = d\Delta u_3(\mathrm{x},t) + k_+ u_1(\mathrm{x},t)u_2(\mathrm{x},t) - k_- u_3(\mathrm{x},t), \\
&u_i(\mathrm{x},0) = (u_i)_0(\mathrm{x}), \qquad \mathrm{x} \in \overline{\Omega}, \quad i = 1,2,3, \\
&\frac{\partial u_i}{\partial \nu}(\mathrm{x},t) = 0, \qquad (\mathrm{x},t) \in \partial\Omega \times (0,\infty), \quad i = 1,2,3.
\end{aligned}$$

Akár $u_1(\mathrm{x},0)$-t és $u_2(\mathrm{x},0)$-t választhatjuk nem azonosan nullának, akár $u_3(\mathrm{x},0)$-t. Ezért feltételezhetjük, hogy $u_1(\mathrm{x},0) \equiv 0$, $u_2(\mathrm{x},0) \equiv 0$, és $u_3(\mathrm{x},0) > 0$ bizonyos $\mathrm{x} \in \Omega$-ra, amelyek halmazának mértéke pozitív. Tehát $\mathrm{u}(\mathrm{x},t) > \mathbf{0}$, ha $t > 0$, lásd [9].

Példánkra alkalmazzuk az 5. fejezetben szereplő elméletet. A 3.1. tétel értelmében az ω-határhalmaz csak konstansokból áll. Az u megoldás $t \to +\infty$ esetén ahhoz az invariáns határsíkhoz tart, amelyet a következőképpen értelmezünk:

$$\begin{aligned}
u_1 + u_3 &= a_3, \\
u_2 + u_3 &= a_3.
\end{aligned}$$

Az

$$a_3 := \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega u_3(\mathrm{x},0)\,\mathrm{d}x$$

konstans pozitív, mivel $u_3(\mathbf{x},0)$ nem azonosan nulla. Mint tudjuk, a 3.2. tétel szerint az ω-határhalmaz egy invariáns határsíkban fekszik. Ugyanakkkor az $\{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n_+ \mid f^+(\mathbf{u}) = f^-(\mathbf{u})\}$ halmazban is benne van minden olyan u-ra, amely esetén $k_+u_1u_2 = k_-u_3$. Ahhoz, hogy megtaláljuk az egyetlen pozitív stacionárius megoldást, meg kell oldanunk a

$$\begin{aligned} u_1 + u_3 &= a_3, \\ u_2 + u_3 &= a_3, \\ k_+u_1u_2 &= k_-u_3. \end{aligned}$$

rendszert. Némi számolás után a

$$\mathbf{P} = \left(\frac{\sqrt{4ka_3+1}-1}{2k}, \frac{\sqrt{4ka_3+1}-1}{2k}, \frac{2ka_3+1-\sqrt{4ka_3+1}}{2k}\right)$$

pontot kapjuk, ahol $k = k_+/k_-$. Következésképpen $\omega^+ = \{\mathbf{P}\}$.

A következő példa arra mutat rá, miért fontos, hogy az u megoldás ne legyen az $\mathbb{R}^n_+$ határán, mint ahogy ezt a 3.2. tétel is állítja.

6.4. Példa. Ebben a példában tekintjük a

$$2A_1 \underset{k_-}{\overset{k_+}{\rightleftarrows}} A_1 + A_2$$

megfordítható reakciót.

A reakcióhoz tartozó PDE-probléma:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u_1}{\partial t}(\mathbf{x},t) = d\Delta u_1(\mathbf{x},t) - k_+u_1^2(\mathbf{x},t) + k_-u_1(\mathbf{x},t)u_2(\mathbf{x},t), \\ &\frac{\partial u_2}{\partial t}(\mathbf{x},t) = d\Delta u_2(\mathbf{x},t) + k_+u_1^2(\mathbf{x},t) - k_-u_1(\mathbf{x},t)u_2(\mathbf{x},t), && (\mathbf{x},t) \in \Omega \times (0,\infty), \\ &u_i(\mathbf{x},0) = (u_i)_0(\mathbf{x}), && \mathbf{x} \in \overline{\Omega}, \quad i = 1,2, \\ &\frac{\partial u_i}{\partial \nu}(\mathbf{x},t) = 0, && (\mathbf{x},t) \in \partial\Omega \times (0,\infty), \quad i = 1,2. \end{aligned}$$

Ahhoz, hogy biztosítsuk az $\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$ megoldás pozitivitását, tételezzük fel, hogy $u_1(\mathbf{x},0) > 0$ az $x \in \Omega$ pontok pozitív mértékű halmazán, és $u_2(\mathbf{x},0) \equiv 0$ minden $\mathbf{x} \in \Omega$-ra. A 3.1. tétel értelmében az $\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$ megoldás konstanshoz konvergál valamely $\{t_k\} \to +\infty$ sorozatra. A $\hat{\pi}(\mathbf{u}_0(\mathbf{x}))$ invariáns határsíkot az

$$u_1 + u_2 = a_1$$

egyenlet írja le, ahol

$$a_1 := \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega u_1(\mathbf{x},0)\,d\mathbf{x} > 0.$$

Az ω-határhalmaz, ω^+ benne van az $\{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n_+ \mid f^+(\mathbf{u}) = f^-(\mathbf{u})\}$ halmazban. Itt az $f^+(\mathbf{u}) = f^-(\mathbf{u})$ egyenlet $k_+u_1^2 = k_-u_1u_2$-nek felel meg, és két megoldással rendelkezik: $u_1 = 0$ és $u_2 = ku_1$, ahol $k = k_+/k_-$. Tehát az invariáns határsíkban két stacionárius pont van: $(0, a_1)$ és $\mathbf{P} = (a_1/(1+k), ka_1/(1+k))$. Az első pont $\mathbb{R}^2_+$ határán helyezkedik el. A 3.2. tétel szerint $\omega^+ \subset \{(0, a_1), \mathbf{P}\}$, kivéve, ha a kezdeti értéket nem a D_C halmazból vesszük.

Ezt a feltevést nem használó további bizonyítást adunk az $\omega^+ = \{\mathbf{P}\}$ egyenlőségre.

Legyen $t_1 > 0$ és

$$\min_{\mathbf{x}\in\overline{\Omega}} u_i(\mathbf{x}, t_1) = \mu_i \qquad i = 1, 2,$$

$$\max_{\mathbf{x}\in\overline{\Omega}} u_i(\mathbf{x}, t_1) = \overline{\mu}_i \qquad i = 1, 2.$$

A szigorú pozitivitásból következik, hogy $\mu_i > 0$, $\overline{\mu}_i > 0\,(i = 1, 2)$, lásd [9]. A következő halmaz a PDE-rendszer invariáns téglalapja:

$$R = \{(u_1, u_2) \mid r \le u_1 \le \overline{r},\ kr \le u_2 \le k\overline{r}\},$$

és $\overline{r} > r > 0$ esetén (μ_1, μ_2), illetve $(\overline{\mu}_1, \overline{\mu}_2)$ R-hez tartozik. Az invariáns téglalapokról bővebben lásd [3]-at és [16]-ot. Következésképpen $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \in R$, mikor $t \ge t_1$. Tehát $w^+ \subset R$. Így $(0, a_1) \notin \omega^+$, és $\omega^+ = \{\mathbf{P}\}$.

7. Komplex kiegyensúlyozottság

A gyengén megfordítható reakciók esetére Horn, Jackson és Feinberg kifejlesztett egy általánosabb elméletet. Ez magába foglalja az 5. fejezetbeli megfordítható reakciók esetét is. Azon olvasók számára, kik nem jártasak a témában, könnyebb a megfordítható reakciók esetét követni, mint a gyengén megfordíthatókét, mert ez utóbbinál több szakszóra és jelölésre van szükség. A teljesség kedvéért megmagyarázzuk azt a néhány módosítást, amelyekre a bizonyításaink során szükség volt, mikor gyengén megfordítható reakciót tekintettünk. Az a tény, hogy gyengén megfordítható reakcióknál a (21) Ljapunov függvény teljesen ugyanaz marad, leegyszerűsíti a megfordítható reakciókról a gyengén megfordítható reakciók esetére való kibővítést.

Most bevezetünk néhány új szakszót. Tekintsük az (1) kémiai rendszert. A kémiai anyagfajtáknak a nyíl bal, illetve jobb oldalon szereplő lineáris kombinációit komplexeknek nevezzük. Ha feltételezzük, hogy p számú különböző komplexünk van, jelölje ezeket $C_1, C_2, \ldots, C_p$, akkor (1) a következőképpen ábrázolható:

$$C_i \xrightarrow{k_{ij}} C_j, \qquad i, j = 1, 2, \ldots, p,$$

ahol

$$C_i = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} A_k$$

egy komplex, C_j hasonlóan definiálható, és k_{ij} a reakciósebességi együtthatója annak a reakciónak, amelyben a reagenskomplex C_i, míg a termékkomplex C_j.

7.1. Definíció. Az $\overline{\mathrm{u}}$ koncentráció (2) komplex kiegyensúlyozott stacionárius pontja, ha a kémiai rendszer minden C_s $(s = 1, 2, \ldots, p)$ komplexe esetén a C_s-et, mint reagenst tartalmazó reakciók sebességeinek összege megegyezik a C_s-et, mint terméket tartalmazó reakciók sebességeinek összegével. Azt mondjuk, hogy a reakció komplex kiegyensúlyozott, ha rendelkezik pozitív komplex kiegyensúlyozott stacionárius ponttal.

Két komplex, C és C' akkor és csakis akkor tartozik ugyanahhoz a láncosztályhoz, ha léteznek $D_1, \ldots, D_q$ komplexek és léteznek reakciólépések úgy, hogy $C \longleftrightarrow D_1 \longleftrightarrow D_2 \longleftrightarrow \ldots \longleftrightarrow D_q \longleftrightarrow C'$, ahol a $\longleftrightarrow$ szimbólum jelentése a következő: fennáll vagy az előre, vagy a visszafele mutató reakció. Ha a kémiai reakció megfordítható reakciólépéseket tartalmaz, azaz minden $C \longrightarrow C'$ reakció esetén a $C' \longrightarrow C$ fordított reakció is jelen van a rendszerben, akkor a megfordítható reakció jól ismert esetével van dolgunk. Ha az ugyanabban a láncosztályban levő összes $C \longrightarrow C'$ reakcióhoz létezik egy $C' \longrightarrow D_1 \longrightarrow D_2 \longrightarrow \ldots \longrightarrow D_q \longrightarrow C$ reakciólépésekből alkotott lánc, ahol $D_1, D_2, \ldots, D_q$ komplexeket jelöl, akkor azt mondjuk, hogy a kémiai reakció gyengén megfordítható. Ebből következik, hogy a gyengén megfordíthatóság magába foglalja a megfordíthatóságot. A megfordítható reakciók elméletében feltételeztük egy $\overline{\mathrm{u}}$ pozitív részletesen kiegyensúlyozott stacionárius pont létezését. Horn, Jackson és Feinberg elmélete olyan elegendő feltételt szolgáltat, amely biztosítja pozitív komplex kiegyensúlyozott stacionárius pont létezését gyengén megfordítható reakciók esetében.

Jelölje l az (1) kémiai rendszer láncosztályainak számát. Legyen s a Γ sztöchiometriai mátrix rangja, a már említett p pedig a komplexek száma. A $\delta = p - l - s$ számot az (1) kémiai rendszer deficienciájának nevezzük. Horn [7]-ben kimutatta, hogy az (1) kémiai rendszer tetszőleges pozitív sebességi együtthatók mellett akkor és csak akkor komplex kiegyensúlyozott, ha az (1) reakció gyengén megfordítható és deficienciája 0: $\delta = 0$. Ezt később kiterjesztette a zéródeficiencia-tételre, amely azt állítja, hogy egy zéró deficienciájú, gyengén megfordítható rendszer minden invariáns síkban, KDE esetében egyetlen aszimptotikusan stabilis pozitív stacionárius pontot tartalmaz, lásd [6], [7], [8]. A Horn-, Jackson-, Feinberg-féle eredmények általánosítják a megfordítható reakciók esetét gyengén megfordíthatókra, és választ adnak a pozitív komplex kiegyensúlyozott stacionárius pont létezésének és egyértelműségének kérdésére minden invariáns síkban, ha $\delta = 0$. A [15]-ben található 3.2. tétel a stabilitást az ω-határhalmaz felhasználásával adja meg, általánosítva Volpert megfordítható reakciókra vonatkozó tételét.

Már említettük, hogy a (21) egyenletben szereplő V Ljapunov-függvény ugyanaz lesz gyengén megfordítható reakcióknál is. Mikor az (1) kémiai rendszer gyengén megfordítható és komplex kiegyensúlyozott, akkor egyetlen $\overline{\mathrm{u}}$ komplex kiegyensúlyozott stacionárius pontja létezik a KDE-rendszernek, és ez aszimptotikusan stabilis minden invariáns síkban. A $(V \circ \mathrm{u})_t - d\Delta(V \circ \mathrm{u})$ kifejtésében szereplő első összeg, amely $\dot{H}$-nak felel meg, nempozitív lesz [15] 3.4. tétele értelmében. Tehát a 3.1. tétel bizonyítása ugyanaz marad. Most tekintsük a 3.2. tétel bizonyítását. [15] 3.4. tételéből és a stacionárius pont egyértelműségéből a 3.2. tétel bizonyítása következik. Hasonlóan hivatkozhatunk a [15]-ben szereplő 3.4. tételre a 3.3. tétel bizonyítása során, mivel $\dot{H} = 0$ és $\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = 0$ akkor és csak akkor áll fenn, ha $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}$, vagyis $\mathbf{u}$ megegyezik a komplex kiegyensúlyozott stacionárius ponttal. Tehát a 3.1–1.3. tételek a gyengén megfordítható komplex kiegyensúlyozott esetben is teljesülnek, csakhogy itt a részletesen kiegyensúlyozott egyensúlyú stacionárius pont helyett komplex kiegyensúlyozott stacionárius pontot kell vennünk.

Hivatkozások

[1] Amann, H.: *Invariant sets and existence theorems for semilinear parabolic and elliptic systems*, J. Math. Anal. Appl., **65** (1978), 432–467.

[2] Chen, W., Li, C. and Wright, E.: *On a nonlinear parabolic system – modelling chemical reactions in rivers*, Comm. Pure & App. Anal. **4**(4) (2005), 889–899.

[3] Cheuh, K.H., Conley, C.C. and Smoller, J.A.: *Positively invariant regions for systems of nonlinear diffusion equations*, Indiana Univ. Math. J., **26** (1977), 373–392.

[4] Conway, E., Hoff, D. and Smoller, J.: *Large time behavior of systems of nonlinear reaction-diffusion equations*, SIAM J. Appl. Math., **1**(35) (1978), 1–16.

[5] Érdi, P. and Tóth, J.: *Mathematical Models of Chemical Reactions: Theory and Applications of Deterministic and Stochastic Models*, Princeton University Press, Princeton, 1978.

[6] Feinberg, M.: *Complex balancing in general kinetic systems*, Arch. Ratl. Mech. Anal., **49** (1972), 187–194.

[7] Horn, F.: *Necessary and sufficient conditions for complex balancing in chemical kinetics*, Arch. Ratl. Mech. Anal., **49** (1972), 172–186.

[8] Horn, F. and Jackson, R.: *General mass action kinetics*, Arch. Ratl. Mech. Anal., **47** (1972), 81–116.

[9] Mincheva, M. and Siegel, D.: *Nonnegativity and positiveness of solutions to reaction-diffusion systems modeling mass action chemical kinetics*(submitted).

[10] Redheffer, R., Redlinger, R. and Walter, W.: *A theorem of La Salle-Lyapunov type for parabolic systems*, SIAM J. Math. Anal., **1**(19) (1988), 121–132.

[11] Redheffer, R. and Walter, W.: *On parabolic systems of Volterra predator-prey type*, J. Nonlinear Anal., **7** (1983), 333–347.

[12] Redlinger, R.: *Über die C^2-Kompaktheit der Bahn von Lösungen semilinearer parabolischer System*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A, **93** (1982), 99–103.

[13] Rothe, F.: *Global Stability of Reaction-Diffusion Systems*, Springer, 1984, Berlin.

[14] RUDIN, W.: *Principles of Mathematical Analysis*, 3rd edition, McGraw-Hill, 1976, New York.

[15] SIEGEL, D. AND MACLEAN, D.: *Global stability of complex balanced mechanisms*, J. Math. Chem., **27** (2000), 89–110.

[16] SMOLLER, J.: *Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations*, Springer, 1983, New York.

[17] VASILEV, V., VOLPERT, A. AND KHUDAYEV, S.: *A method of quasi-stationary concentrations for the equations of chemical kinetics*, Zh. Vychisl. Mat. Fiz., **3**(13) (1973), 683–697.

[18] VOLPERT, A.I.: *Differential equations on graphs*, Mat. Sb., **130**(88) (1972), 571–582.

[19] VOLPERT, A.I. AND HUDYAEV, S.I.: *Analyses in Classes of Discontinuous Functions and Equations of Mathematical Physics*, Martinus Nijhoff Publishers, 1985, Dordrecht.

[20] VOLPERT, A.I. AND VOLPERT, V.A. AND VOLPERT, VL.A.: *Traveling Wave Solutions of Parabolic Systems*, American Mathematical Society, 1994, Providence, RI.

MAYA MINCHEVA
DAVID SIEGEL
Department of Applied Mathematics, University of Waterloo
Waterloo, Ont., N2L 3G1
Kanada

EGRI EDIT
Babeş–Bolyai Tudományegyetem, Matematikai és Informatikai Kar
400084 Kolozsvár, M. Kogălniceanu u. 1.
Románia
egriedit@yahoo.com

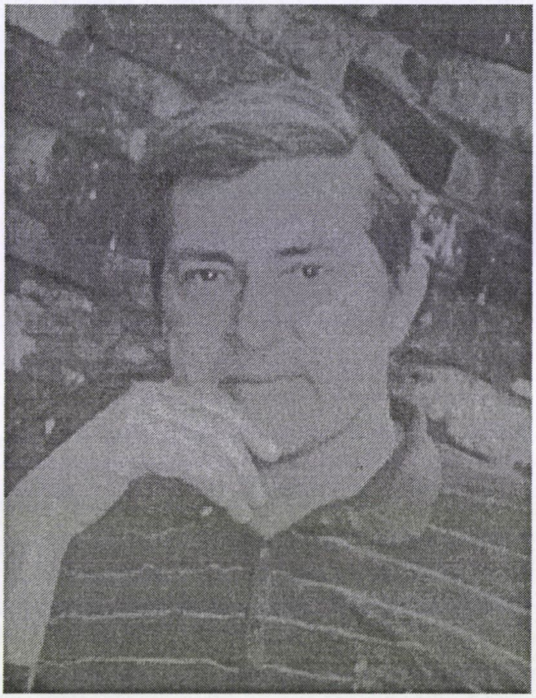
STABILITY OF MASS ACTION REACTION-DIFFUSION SYSTEM

MAYA MINCHEVA AND DAVID SIEGEL
TRANSLATED BY EDIT EGRI

Results on stability of two types of chemical reactions, one represented by an acyclic graph and the other as a reversible reaction have been extended to the case of reaction-diffusion systems. Lyapunov functions are used as the major method for showing asymptotic stability of spatially homogeneous equilibria. Some examples are considered for illustration.

Alkalmazott Matematikai Lapok **26** (2009), 129-142.

RAPCSÁK TAMÁS (1947–2008)



Rapcsák Tamás tudományos életútja

Rapcsák Tamás 1947. március 18-án született Debrecenben, tanulmányait is itt folytatta. 1965 és 1970 között a Kossuth Lajos Tudományegyetem matematikus szakát végezte el. A matematika iránti szeretetét és tehetségét a szülői házból hozta. Édesapja, Rapcsák András a debreceni egyetem matematika professzora, az MTA rendes tagja, a differenciálgeometria nemzetközi hírű tudósa volt.

A diploma megszerzése után, 1970 augusztusában került az MTA SZTAKI egyik elődjébe, az MTA Számítástechnikai Központjába, a Prékopa András vezette Operációkutatási Osztályra. Az MTA SZTAKI 1973-ban két kutatóintézet, a Számítástechnikai Központ és az Automatizálási Kutatóintézet egyesüléséből jött létre, tehát pályája kezdetétől az MTA SZTAKI, illetve elődje volt a fő munkahelye, de nemzetközileg elismert kutatóként, szakértői munka és ösztöndíjak keretében sokat járt külföldön is.

Saját életrajzaiban két fő területre bontotta tudományos tevékenységét. Az első a nemlineáris optimalizálás strukturális kérdéseivel és egyensúlyi rendszerekkel foglalkozik. Ez meghatározó volt tudományos életútja során, különböző témákon dolgozva mindig kapcsolódott ehhez a területhez. Másik fő kutatási területe a döntéstámogató és szakértői rendszerek, valamint a térbeli döntési problémák voltak, ezek a kutatások az 1980-as évek második felében kezdődtek. Az első területre az alap- és módszertani kutatások, a másodikra pedig a módszertani kutatások, implementációk és alkalmazások voltak a jellemzőek. Tudományos életútjának áttekintésekor ezen két fő területen végzett tevékenységét foglaljuk össze.

A nemlineáris optimalizálás strukturális kérdései és egyensúlyi rendszerek

Rapcsák Tamás pályája kezdetén bekerült egy, Prékopa András által vezetett multidiszciplináris kutatási projektbe, amely sztochasztikus programozási eszközöket alkalmazott sorbakapcsolt tározórendszerek tervezésére. A projektben elsősorban nemlineáris programozási eszközök kidolgozása és implementálása volt a feladata, elindítva őt az egész tudományos életútja során sikeresen művelt nemlineáris programozási kutatások területén. Emellett a vízmérnökökkel való közös munka sikere a következő évtizedekben még több, környezeti modellezéssel kapcsolatos kutatást is inspirált.

A projektben elért eredményeit az [1] disszertációban foglalta össze, és egyetemi doktori címet szerzett 1974-ben a Debreceni Kossuth Lajos Tudományegyetemen. A kutatási projekt számára több társszerzős [4, 10, 11] és önálló [2, 3, 5, 12] publikációt is eredményezett, illetve inspirált.

1976-ban ösztöndíjjal fél évet Párizsban töltött az Électricité de France Pierre Huard által vezetett kutatócsoportjában. Itt a nemlineáris programozás új területeivel ismerkedett meg, továbbá itt nyert megerősítést az a számára már korábban ismert ötlet és kibontakozó kutatás, amely differenciálgeometriai eszközöket alkalmaz nemlineáris programozásban.

Hazatérte után mechanikai szerkezetek optimális méretezésénél felmerülő nemlineáris programozási feladatokkal foglalkozott, több cikket is írt Halmos Emillel közösen [6, 7, 8, 9, 15], illetve önállóan [13, 17, 21, 24] ebből a témából. Ez a munka a későbbiekben Szenthe Jánossal a mechanikai erőegyensúly és a nemlineáris programozás kapcsolatára irányuló közös kutatás [28, 39] előzményének is tekinthető.

Egy két éves algériai szakértői munka [16, 18] után 1980-tól folytatta korábbi kutatásait a differenciálgeometriai eszközök nemlineáris programozásban való alkalmazásának témájában. Addig elért eredményeit az 1985-ben megvédett kandidátusi disszertációjában [19] foglalta össze. Ezek közül a legfontosabbak az optimalitási feltételek geometriai tartalmára [14, 20, 22, 23], illetve az ívkonvexitásra [25, 30] vonatkozó eredmények.

A kandidátusi disszertáció után egyre jobban kiszélesítette a nemlineáris programozás területén végzett kutatást speciális kérdések vizsgálatával. A geodetikus konvexitás [31, 37, 43, 52, 68], a tenzoroptimalizálás [40, 63], a differenciálható sokaságokon való optimalizálás [29, 36], a változó metrikájú algoritmusok [67], a komplementaritási rendszerek [53, 54, 63], a szorzatfüggvények konkávitási tulajdonságai [26, 38], általánosított konvexitási kérdések [35, 44], valamint a nemlineáris koordináta-transzformációk [49, 50, 62] voltak kutatásainak középpontjában.

Széleskörű nemzetközi tudományos kapcsolatrendszeréből meg kell említeni Franco Giannessi (University of Pisa) nevét. Giannessi professzor a nemlineáris programozás és általánosított konvexitás egyik vezető kutatója. Rapcsák Tamás tudományos együttműködés keretében sokszor töltött nagyon hasznos heteket Pisában, és Giannessi professzor is többször járt nálunk. Tudományos együttműködésük közös cikket [60] és közösen szerkesztett kiadványokat [116, 118] is eredményezett.

1997 volt az az év, amikor addigi legfontosabb eredményeit két műben is összefoglalta. Az egyik *A nemlineáris optimalizálás strukturális kérdéseiről és a többkritériumú döntési problémákról* című, sikeresen megvédett MTA doktori értekezés, a másik pedig a Kluwer kiadónál *Smooth Nonlinear Optimization in* R^n címmel megjelent könyv [112].

Ezen két meghatározó mű után is folytatta a kutatást a témában, általános kérdéseket (variációs egyenlőtlenségek [72, 81], általánosított konvexitás [79, 100], sima optimalizálás [80, 89, 105], egyensúlyi rendszerek [77, 94], konvexifikálás [86], geodetikusok [73], görbületek [109]) és speciális feladatokat (Fenchel-probléma [69, 104, 106], optimalizálás Stiefel-sokaságokon [87, 88, 93, 95, 97, 99], pszeudolineáris kvadratikus törtfüggvények [108, 111]) is vizsgálva.

Döntéstámogató és szakértői rendszerek, térbeli döntési problémák

Rapcsák Tamás elméleti és módszertani kutatómunkája mellett szívesen vett részt alkalmazásokban is. A már korábban említettek mellett mérnöki méretezési [27], termeléstervezési [32, 34] és szállításoptimalizálási [58, 59, 65] projektekben is tevékenykedett. Legsikeresebb alkalmazási területének azonban a döntéstámogató rendszerekkel kapcsolatos alkalmazásokat tekinthetjük. Az MTA SZTAKI Operációkutatási Osztályán az 1980-as évek második felében kezdődött meg a kutatás a döntéstámogató és szakértői rendszerek területén [45]. Ez a kutatómunka folytatódott a később általa vezetett Operációkutatás és Döntési Rendszerek Osztályon kifejlesztett WINGDSS rendszer kapcsán [46, 48, 55, 56, 57]. A szoftver és a mögötte levő módszertan olyan döntési helyzetekben alkalmazható, amikor döntéshozók egy csoportjának több alternatívát kell több szempont szerint értékelnie, rangsorolnia. Rapcsák Tamás számos alkalmazási projektet vezetett, melyekben a kidolgozott módszertan és szoftver is felhasználásra került. Az alkalmazási skála széles, a kormányzati és nagyvállalati tendereztetéssel kapcsolatos döntéselőkészítés támogatásától [47, 51, 70, 82, 84, 103] az összetett többszempontú környezeti és térbeli problémák modellezéséig és megoldásáig [64, 74, 75, 76, 78, 83, 85, 90, 98, 101, 115] terjed.

A többszempontú környezeti és térbeli döntési feladatokkal kapcsolatban meg kell említeni Verrasztó Zoltán (Közép-Duna-völgyi Környezetvédelmi Felügyelőség) nevét, aki sok közös projektben biztosította a szakmai hátteret. Rapcsák Tamással együtt felismerték, hogy a környezettel kapcsolatos döntési feladatok lényegében többszempontú döntési feladatok, hiszen olyan környezeti szempontokat mint a víz, a levegő, a zaj, a rezgés stb. is figyelembe kell venni az egyéb, társadalmi, gazdasági és financiális szempontok mellett. A többszempontú környezeti alkalmazások új fejlesztési irányokat is nyitottak. Kiderült, hogy a térinformatikai rendszerek hatékony eszközt szolgáltatnak a döntési feladattal kapcsolatos információk összegyűjtésére, térképen való megjelenítésére és az időtől függő dinamikus kapcsolatok vizsgálatára.

A többszempontú döntéstámogatással kapcsolatos fejlesztések és alkalmazások fontos elméleti és módszertani kérdéseket is felvetettek. Rapcsák Tamás Mészáros Csabával közösen egy hatékony érzékenységvizsgálati módszert dolgozott ki [66, 102]. Fontos cikket írt Saul Gass (University of Maryland) társszerzővel a csoportos döntések szintetizálásáról [71], illetve a szinguláris érték felbontás AHP módszertanban való alkalmazásáról [96]. Tanítványával, Bozóki Sándorral közösen páros összehasonlítás mátrixok inkonzisztenciáját vizsgálták [110].

Egyetemi oktatás

Az Eötvös Loránd Tudományegyetemen matematikus és programozó matematikus hallgatóknak lineáris és nemlineáris programozás tárgyakat adott elő (1972–1978). A Budapesti Műszaki Egyetem Mérnöktovábbképző Intézetében nemlineáris és sztochasztikus programozást oktatott (1975).

Alapítója és egyetemi tanárként vezetője volt a Budapesti Corvinus Egyetem MTA SZTAKI-ba kihelyezett Gazdasági Döntések Tanszékének (1996–2008). A Forgó Ferenc, majd Temesi József által vezetett Operációkutatási Tanszékkel közösen alakította ki a Gazdasági Döntések mellékszakirányt. Zalai Ernővel együtt alapították a gazdaságmatematikai elemző közgazdász szakot. Kidolgozta a többszempontú döntési módszerekkel és a nemlineáris programozással [113] foglalkozó tárgyak tematikáját, és ezeket oktatta is.

Szakmai társaságok és bizottságok

A szakmai társaságokban és bizottságokban végzett munkát mindig nagyon komolyan vette. Alapító és meghatározó tagja a Magyar Operációkutatási Társaságnak, amelynek alelnöke (1991–1994), elnöke (1994–1996 és 1998–2000) és vezetőségi tagja (2006-tól). Alelnöke (1996–1999), majd elnöke (2000–2005) az MTA Operációkutatási Bizottságának. A tudományos közéletben való részvételéhez publikációk is kapcsolódnak [33, 61, 107].

A szakmai társaságok meghatározó tagjaként nagyon sokat tett azért, hogy az operációkutatáshoz is kapcsolható két nagy magyar tudós, Farkas Gyula és Egerváry Jenő munkássága megfelelő elismerést és tiszteletet kapjon itthon és külföldön is [92].

További adatok

Kutatási és oktatói tevékenységéért több szakmai kitüntetésben is részesült: Farkas Gyula-díj (1978), ANBAR Citation of Highest Quality Rating (1996), Széchenyi Professzori Ösztöndíj (1999–2002), Budapesti Corvinus Egyetem Aranyérme (2003), Bolyai Farkas-díj (2003), valamint az MTA SZTAKI Intézeti Díja és Intézeti Publikációs Díja számos alkalommal.

Tagja volt az MTA Matematikai Doktori Bizottságának, az MTA SZTAKI Tudományos Tanácsának, a Budapesti Corvinus Egyetem Közgazdaságtudományi Kari Tanácsának, OTKA zsűriknek és habilitációs bizottságoknak.

Több folyóirat szerkesztőbizottságának munkájában is részt vett: Journal of Optimization Theory and Applications, Journal of Global Optimization, Central European Journal of Operational Research, Pure Mathematics and Applications, Alkalmazott Matematikai Lapok, Journal of ICT, Optimization Letters.

Számos hazai és nemzetközi konferencia szervező- és programbizottságának volt elnöke vagy tagja, valamint társszerkesztője a kapcsolódó kiadványnak [91, 114, 116–120]. Ezek közül kiemelkedik a 2000-ben Budapesten megrendezett EURO XVII. konferencia, melynek megszervezésében a Magyar Operációkutatási Társaság elnökeként fontos szerepet játszott.

* * *

Rapcsák Tamás halálával a magyar operációkutatás és tudományos közélet jeles egyéniségét, szakmájának nemzetközileg elismert művelőjét veszítettük el. Hátramaradt viszont életműve, sok lezáratlan, izgalmas kutatási témával. Emlékét akkor tudjuk legjobban megőrizni, ha folytatjuk ezeket a kutatásokat.

Rapcsák Tamás publikációi

Cikkek, könyvrészletek, dolgozatok

[1] RAPCSÁK, T.: *Egy tározó modell számítástechnikai megoldása*, Egyetemi doktori disszertáció, Kossuth Lajos Tudományegyetem, Debrecen, 1974.

[2] RAPCSÁK, T.: *Egy külső pont eljárás konvex nemlineáris programozási feladatok megoldására*, Alkalmazott Matematikai Lapok **1** (1975) 357–364.

[3] RAPCSÁK, T.: *Megjegyzés a logaritmikusan konkáv függvények elméletéhez,* MTA SZTAKI Közlemények **14** (1975) 25–29.

[4] PRÉKOPA, A., RAPCSÁK, T. ÉS ZSUFFA, I.: *Egy új módszer sorbakapcsolt tározórendszerek tervezésére*, Alkalmazott Matematikai Lapok **2** (1976) 189–201.

[5] RAPCSÁK, T.: *A SUMT módszer alkalmazása nem konvex programozási feladatok esetén*, Alkalmazott Matematikai Lapok **2** (1976) 427–437.

[6] HALMOS, E. ÉS RAPCSÁK, T.: *Gépjármű vázszerkezetelemek legkisebb súlyra történő méretezésének néhány szempontja*, KTMFF Tudományos Közlemények **1** (1977) 63–72.

[7] HALMOS, E. ÉS RAPCSÁK, T.: *Statikailag határozatlan könnyűszerkezetek méretezése súlyminimum alapján*, Járművek, Mezőgazdasági Gépek **24** (1977) 361–364.

[8] HALMOS, E. ÉS RAPCSÁK, T.: *Statikailag határozatlan rácsos tartók minimális súlyra történő méretezése*, Alkalmazott Matematikai Lapok **3** (1977) 171–183.

[9] HALMOS, E. AND RAPCSÁK, T.: *Minimum weight design of the statically indeterminate trusses*, Mathematical Programming Study **9** (1978) 109–111.

[10] PRÉKOPA, A., RAPCSÁK, T. AND ZSUFFA, I.: *A new method for serially linked reservoir system design using stochastic programming*, in: Studies in Application of Stochastic Programming, ed.: A. Prékopa, MTA SZTAKI Tanulmányok **80** (1978) 75–99.

[11] PRÉKOPA, A., RAPCSÁK, T. AND ZSUFFA, I.: *Serially linked reservoir system design using stochastic programming*, Water Resources Research **14** (1978) 672–678.

[12] RAPCSÁK, T.: *A SUMT módszer alkalmazása logaritmikusan konkáv függvények esetén*, MTA SZTAKI Közlemények **19** (1978) 17–29.

[13] RAPCSÁK, T.: *Autóbuszok erőátviteli láncának optimális méretezése mechanikus sebességváltó esetén*, Alkalmazott Matematikai Lapok **4** (1978) 229–243.

[14] RAPCSÁK, T.: *Az optimalitás másodrendű feltételeiről*, Alkalmazott Matematikai Lapok **4** (1978) 109–116.

[15] HALMOS, E. AND RAPCSÁK, T.: *Design of the statically indeterminate optimal trusses*, in: Survey of Mathematical Programming, ed.: A. Prékopa, Akadémiai Kiadó **3** (1979) 169–179.

[16] RAPCSÁK, T.: *Lineáris programozási modell egy tereprendezési feladat megoldására*, Alkalmazott Matematikai Lapok **7** (1981) 99–105.

[17] RAPCSÁK, T.: *Minimális súlyú rácsos tartók méretezése dekompozíciós módszerrel*, Alkalmazott Matematikai Lapok **8** (1982) 237–245.

[18] RAPCSÁK, T.: *A linear programming model for the optimal levelling of an irrigation surface*, European Journal of Operational Research **13** (1983) 369–373.

[19] RAPCSÁK, T.: *A nemlineáris programozás differenciálgeometriai vonatkozásairól*, Kandidátusi értekezés, Budapest, 1983.

[20] RAPCSÁK, T.: *A nemlineáris programozási feladat optimalitási feltételeinek differenciálgeometriai vizsgálata*, Alkalmazott Matematikai Lapok **9** (1983) 73–84.

[21] RAPCSÁK, T.: *Global minimum weight optimization of trusses with a decomposition method*, Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik **63** (1983) 418–419.

[22] RAPCSÁK, T.: *Megjegyzés az egyenlőtlenség feltételek melletti minimalizálásról*, Alkalmazott Matematikai Lapok **9** (1983) 387–391.

[23] RAPCSÁK, T.: *On the second-order sufficiency conditions*, Journal of Information & Optimization Sciences **4** (1983) 183-191.

[24] RAPCSÁK, T.: *The optimal power transmission of buses in case of a mechanical speed gear*, Advances in Management Studies **2** (1983) 1–22.

[25] RAPCSÁK, T.: *Az ívkonvexitásról*, Alkalmazott Matematikai Lapok **10** (1984) 115–123.

[26] RAPCSÁK, T. ÉS BORZSÁK, P.: *Szorzatfüggvények konkávitási tartományáról*, Alkalmazott Matematikai Lapok **11** (1985) 311–318.

[27] RAPCSÁK, T. ÉS SZIJJÁRTÓ, T.: *Zártszelvényű csatornahálózatok méretezése számítógéppel*, Hidrológiai Közlöny **2** (1985) 119–124.

[28] RAPCSÁK, T. ÉS SZENTHE, J.: *A mechanikai erőegyensúly és a nemlineáris programozás kapcsolatáról*, Alkalmazott Matematikai Lapok **12** (1986) 161–174.

[29] RAPCSÁK, T.: *Convex programming on Riemannian manifolds*, in: Proceedings of the 12th IFIP Conference, eds.: A. Prékopa, J. Szelezsán and B. Strazicky, Springer-Verlag (1986) 733–741.

[30] RAPCSÁK, T.: *Arcwise-convex functions on surfaces*, Publicationes Mathematicae **34** (1987) 35–41.

[31] RAPCSÁK, T. *On geodesically convex functions*, Seminarbericht Nr. **90**, Berlin (1987) 98–107.

[32] HELM, L. ÉS RAPCSÁK, T.: *Számítógéppel segített gyártástervezés az IKARUS-ban*, Ipari Szemle **4** (1988) 80–83.

[33] RAPCSÁK, T.: *Az operációkutatás kialakulásáról és hazai helyzetéről*, Magyar Tudomány **4** (1988) 259–265.

[34] HELM, L., RAPCSÁK, T. ÉS TÓTH, A.: *DAIDALOS rugalmas termelés tervező rendszer az IKARUS BUSZ I. Gyáregységében*, Neumann János Számítógéptudományi Társaság IV. Országos Kongresszus, Alkalmazás'89 Kiadványa (1989) 37–43.

[35] RAPCSÁK, T.: *A konvex programozási feladat általánosításáról*, Alkalmazott Matematikai Lapok **3–4** (1989) 449-459.

[36] RAPCSÁK, T.: *Minimum problems on differentiable manifolds*, Optimization **20** (1989) 3-13.

[37] RAPCSÁK, T.: *On geodesic convex programming problems*, in: Proceedings of the Conference on Differential Geometry and its Applications, June 26–July 3, 1988, Dubrovnik, Yugoslavia, Novi Sad (1989) 315–322.

[38] RAPCSÁK, T. AND BORZSÁK, P.: *On separable product functions*, Optimization **21** (1990) 831–841.

[39] RAPCSÁK, T. AND SZENTHE, J.: *On the connection between mechanical force equilibrium and nonlinear programming*, Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik **70** (1990) 557–564.

[40] RAPCSÁK, T.: *Tensor optimization*, MTA SZTAKI Report **34** (1990) 1–10.

[41] BIRÓ, M., MAYER, J., RAPCSÁK, T. AND VERMES, M.: *On building mathematical programming expert systems*, in: Proceedings of the Second Conference on Artificial Intelligence, eds.: I. Fekete and P. Koch, John von Neumann Society for Computer Sciences, Budapest 1 (1991) 155–163.

[42] LEHEL, J. ÉS RAPCSÁK, T.: *A publikációk súlyozásáról*, Magyar Tudomány **11** (1991) 1248–1253.

[43] RAPCSÁK, T.: *Geodesic convexity in nonlinear programming*, Journal of Optimization Theory and Applications **69** (1991) 169–183.

[44] RAPCSÁK, T.: *On pseudolinear functions*, European Journal of Operational Research **50** (1991) 353–360.

[45] BIRÓ, M., MAYER, J., RAPCSÁK, T. ÉS VERMES, M.: *Matematikai programozási szakértői rendszerekről*, Alkalmazott Matematikai Lapok **16** (1992) 217–278.

[46] CSÁKI, P., CSISZÁR, L., FÖLSZ, F., KELLER, K., MÉSZÁROS, CS., RAPCSÁK, T. AND TURCHÁNYI, P.: *A flexible framework for group decision support: WINGDSS Version 3.0*, in: Symposium on Applied Mathematical Programming and Modeling, APMOD93, Volume of Extended Abstracts, ed.: Maros I., Akaprint, Budapest (1993) 102–109.

[47] CSÁKI, P., CSISZÁR, L., FÖLSZ, F., KELLER, K., MÉSZÁROS, CS., RAPCSÁK, T. AND TURCHÁNYI, P.: *A decision model for appraisal of hotels*, in: Proceedings of the Third Conference on Artificial Intelligence, ed.: P. Koch, John von Neumann Society for Computer Sciences (1993) 69–78.

[48] CSÁKI, P., RAPCSÁK, T., TURCHÁNYI, P. AND VERMES, M.: *WINGDSS, a group decision support system under MS Windows*, in: Proceedings of the 32nd Annual Symposium of AGIFORS, 4–9 October, 1992, Budapest, Hungary (1993) 319–327.

[49] CSENDES, T. AND RAPCSÁK, T.: *Nonlinear coordinate transformations for unconstrained optimization*, I. Basic transformations, Journal of Global Optimization **3** (1993) 213–221.

[50] RAPCSÁK, T. AND CSENDES, T.: *Nonlinear coordinate transformations for unconstrained optimization*, II. Theoretical background, Journal of Global Optimization **3** (1993) 359–375.

[51] CSÁKI, P., CSISZÁR, L., FÖLSZ, F., KELLER, K., LÓRÁNT, G., MÉSZÁROS, CS., RAPCSÁK, T. ÉS TURCHÁNYI, P.: *A vezetői döntéshozatal folyamatának támogatása személyi számítógépen, Windows környezetben*, Szigma 4 (1994) 169–190.

[52] RAPCSÁK, T.: *Geodesic convexity on R^n*, in: Generalized convexity, eds.: S. Komlósi, T. Rapcsák and S. Schaible, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems **405**, Proceedings, Pécs, Hungary, 1992, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1994) 91–103.

[53] RAPCSÁK, T.: *On the connectedness of the solution set to linear complementarity systems*, Journal of Optimization Theory and Applications **80** (1994) 501–512.

[54] RAPCSÁK, T.: *On the connectedness of the solution set to nonlinear complementarity systems*, Journal of Optimization Theory and Applications **80** (1994) 619–631.

[55] CSÁKI, P., CSISZÁR, L., FÖLSZ, F., KELLER, K., LÓRÁNT, G., MÉSZÁROS, CS., RAPCSÁK, T. AND TURCHÁNYI, P.: *A flexible framework for group decision support: WINGDSS Version 3.0*, Annals of Operations Research **58** (1995) 441-453.

[56] CSÁKI, P., FÖLSZ, F., KELLER, K., LÓRÁNT, G., MÉSZÁROS, CS., RAPCSÁK, T. AND TÓTH, Á.: *Visualization in the decision support system WINGDSS 4.0*, Proceedings of KOI'95, the 5th Conference on Operational Research, eds.: T. Hunjak, L. Martic and L. Neralic, Croatian Operational Research Society (1995) 1–32.

[57] CSÁKI, P., RAPCSÁK, T., TURCHÁNYI, P. AND VERMES, M.: *Research and development for group decision aid in Hungary by WINGDSS, a Microsoft Windows based group decision support system*, Decision Support Systems **14** (1995) 205–217.

[58] FÖLSZ, F., MÉSZÁROS, CS. ÉS RAPCSÁK, T.: *A töltőüzemektől a cseretelepekre történő minimális költségű szállítás megtervezése*, IV. Országos Térinformatikai Konferencia Kiadványa, szerk.: Pethő S., (1995) 126–131.

[59] FÖLSZ, F., MÉSZÁROS, CS. AND RAPCSÁK, T.: *Distribution of gas cylinders*, European Journal of Operational Research **87** (1995) 613–623.

[60] GIANNESSI, F. AND RAPCSÁK, T.: *Images, separation of sets and extremum problems*, in: Recent trends in optimization theory and applications, ed: R.P. Agarwal, World Scientific Publishing Company (1995) 79–106.

[61] HARNOS, ZS., KOMLÓSI, S., RAPCSÁK, T. AND SZÁNTAI, T.: *On the practice of OR in Hungary*, European Journal of Operational Research **87** (1995) 452–455.

[62] RAPCSÁK, T. AND THANG, T.T.: *On nonlinear coordinate representations of smooth optimization problems*, Journal of Optimization Theory and Applications **86** (1995) 459-489.

[63] RAPCSÁK, T.: *Tensor approximations of smooth nonlinear complementarity systems*, in: Variational inequalities and network equilibrium problems, eds.: F. Giannessi and A. Maugeri, Plenum Press (1995) 235–249.

[64] FÖLSZ, F., HORVÁTH, F. AND RAPCSÁK, T.: *TERMET meta-database on monitoring projects: a tool for managing biodiversity monitoring and overviewing the results*, in: Proceedings of research, conservation and management conference, eds.: E. Tóth and F. Horváth, Aggtelek National Directorate (1996) 131–137.

[65] FÖLSZ, F., MÉSZÁROS, CS. AND RAPCSÁK, T.: *Transport optimization of gas cylinders*, Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik **76** (1996) 425–426.

[66] MÉSZÁROS, CS. AND RAPCSÁK, T.: *On sensitivity analysis for a class of decision systems*, Decision Support Systems **16** (1996) 231–240.

[67] RAPCSÁK, T. AND THANG, T.T.: *A class of polynomial variable metric algorithms for linear programming*, Mathematical Programming **74** (1996) 319–331.

[68] RAPCSÁK, T.: *Geodesic convexity on R^n_+*, Optimization **37** (1996) 341–355.

[69] RAPCSÁK, T.: *An unsolved problem of Fenchel*, Journal of Global Optimization **11** (1997) 207–217.

[70] CSÁKI, P., FÖLSZ, F., RAPCSÁK, T. AND SÁGI, Z.: *On tender evaluations*, Journal of Decision Systems **7** (1998) 179–194.

[71] GASS, S.I. AND RAPCSÁK, T.: *A note on synthesizing group decisions*, Decision Support Systems **22** (1998) 59–63.

[72] RAPCSÁK, T. AND VÁSÁRHELYI, A.: *On a relation between problems of calculus of variations and mathematical programming*, in: Stochastic programming methods and technical applications. Proceedings of the 3rd GAMM/IFIP-Workshop, Neubiberg, München, 1995, eds.: K. Marti and P. Kall, Springer-Verlag, New York (1998) 238–248.

[73] RAPCSÁK, T.: *Variable metric methods along geodesics*, in: New trends in mathematical programming, eds.: F. Giannessi, S. Komlósi and T. Rapcsák, Kluwer Academic Publishers (1998) 257–275.

[74] BALLA, K., KÉRI, G., NÉMETH, E., RAPCSÁK, T., SÁGI, Z., TÓTH, T. ÉS VERRASZTÓ, Z.: *A Ráckevei (Soroksári) Duna-ág vízminőségi modellezése többszempontú döntési módszerek felhasználásával*, Szigma **4** (1999) 135–159.

[75] KÉRI, G., ORSOVAI, I. ÉS RAPCSÁK, T.: *Egy transzportmodell alkalmazása a Gyál térségében létesítendő hulladéklerakó esetleges talajszennyező hatásának vizsgálatára (Esettanulmány)*, Alkalmazott Matematikai Lapok **19** (1999) 169–183.

[76] MÉSZÁROS, CS., RAPCSÁK, T. AND SÁGI, Z.: *Pollution transmission in the air*, in: Large scale computations in air pollution modelling, eds.: Z. Zlatev et al., NATO Science Series, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London (1999) 235–247.

[77] RAPCSÁK, T.: *Mechanikai egyensúly és egyensúlyi rendszerek, Új utak a magyar operációkutatásban*; In memoriam Farkas Gyula, szerk.: Komlósi S. és Szántai T., Dialóg Campus Kiadó (1999) 32–42.

[78] KÉRI, G. ÉS RAPCSÁK, T.: *A talajvíz-szennyeződés modellezése és számítása Nagykáta térségében*, Alkalmazott Matematikai Lapok **20** (2000) 61–73.

[79] MASTROENI, G. AND RAPCSÁK, T.: *On convex generalized systems*, Journal of Optimization Theory and Applications **104** (2000) 605–627.

[80] RAPCSÁK, T.: *Global Lagrange multiplier rule and smooth exact penalty functions for equality constraints*, in: Nonlinear optimization and related topics, eds.: G. Di Pillo and F. Giannessi, Kluwer Academic Publishers (2000) 351–368.

[81] RAPCSÁK, T.: *On vector complementarity systems and vector variational inequalities*, in: Vector variational inequalities and vector equilibria, Mathematical theories, ed.: F. Giannessi, Kluwer Academic Publishers (2000) 371–380.

[82] RAPCSÁK, T., SÁGI, Z., TÓTH, T. AND KÉTSZERI, L.: *Evaluation of tenders in information technology*, Decision Support Systems **30** (2000) 1–10.

[83] MÁRTON, S. AND RAPCSÁK, T.: *The possible effect of a turbine testing plant on the quality of the air*, in: A case study for air pollution transmission, ERCIM News **46** (2001) 72–73.

[84] NÉMETH, S.Z., RAPCSÁK, T. ÉS TEMESI, J.: *A Gazdaságfejlesztési Pályázat hatékonyságának vizsgálata*, Szigma **32**(1-2) (2001) 13–28.

[85] ZSUFFA, I. AND RAPCSÁK, T.: *A Tápió patak vízjárásának matematikai statisztikai jellemzése*, Hidrológiai Közlöny **2** (2001) 73-84.

[86] RAPCSÁK, T.: *Convexification of functions by nonlinear coordinate transformations*, in: Optimization Theory, eds.: F. Giannessi, P. Pardalos and T. Rapcsák, Kluwer Academic Publishers (2001) 179–189.

[87] RAPCSÁK, T.: *Minimalizálás Stiefel-sokaságon*, Közgyűlési előadások 2000, Operációkutatás, Millennium az Akadémián, Magyar Tudományos Akadémia (2001) 525–537.

[88] RAPCSÁK, T.: *On minimization of sums of heterogeneous quadratic functions on Stiefel manifolds*, in: From local to global optimization, eds.: A. Migdalas, P. Pardalos and P. Varbrand, Kluwer Academic Publishers (2001) 277–290.

[89] Rapcsák, T.: *Smooth nonlinear nonconvex optimization*, in: Encyclopedia of Optimization, eds.: C.A. Floudas and P.M. Pardalos, Kluwer Academic Publishers **5** (2001) 234–237.

[90] Balla, K., Kéri, G. and Rapcsák, T.: *Pollution of underground water – a computational case-study by using a transport model*, Journal of Hydroinformatics **4** (2002) 255–264.

[91] Illés, T., Terlaky, T. and Rapcsák, T.: *IPM 2000. Continuous optimization*, European Journal of Operational Research **143** (2002) 231–233.

[92] Rapcsák, T.: *Egerváry Jenő élete és munkássága*, Szigma XXXIII (2002) 1–12.

[93] Rapcsák, T.: *On minimization on Stiefel manifolds*, European Journal of Operational Research **143** (2002) 365–376.

[94] Rapcsák, T.: *Mechanical equilibrium and equilibrium systems*, in: Equilibrium problems and variational models, eds.: P. Daniele, F. Giannessi and A. Maugeri, Kluwer Academic Publishers (2003) 379–399.

[95] Balogh, J., Csendes, T. and Rapcsák, T.: *Some global optimization problems on Stiefel manifolds*, Journal of Global Optimization **30** (2004) 91–101.

[96] Gass, S.I. and Rapcsák, T.: *Singular value decomposition in AHP*, European Journal of Operational Research **154** (3) (2004) 573–584.

[97] Rapcsák, T.: *Some optimization problems in multivariate statistics*, Journal of Global Optimization **28** (2004) 217–228.

[98] Balla, K., Márton, S. and Rapcsák, T.: *Air pollution modelling in action*, in: Proceedings of the NATO ARW held in Borovetz, eds.: I. Faragó et al., Springer, Advances in Air Pollution Modeling for Environmental Security, NATO Science Series: IV: Earth and Environmental Sciences **54** (2005) 11–12.

[99] Balogh, J., Csendes, T. és Rapcsák, T.: *Globális optimalizálás Stiefel-sokaságokon – egy érdekes diszkretizálási eredmény*, Alkalmazott Matematikai Lapok **22** (2005) 163–176.

[100] Crouzeix, J.P. and Rapcsák, T.: *Integrability of pseudomonotone differentiable maps and the revealed preference problem*, Journal of Convex Analysis **12** (2) (2005) 431–446.

[101] Márton, S. and Rapcsák, T.: *Air pollution transmissions - case-studies*, Central European Journal of Operations Research **13** (2005) 271–287.

[102] Mészáros, Cs. and Rapcsák, T.: *A remark on: Rudolf Vetschera, Strict preference and sensitivity analysis in additive utility functions with interval data*, Central European Journal of Operations Research **13** (2005) 209–210.

[103] NÉMETH, S., RAPCSÁK, T. AND TEMESI, J.: *Evaluation of tenders for developing the economy*, Central European Journal of Operations Research **13** (2005) 299–317.

[104] RAPCSÁK, T.: *Fenchel problem of level sets*, Journal of Optimization Theory and Applications **127** (2005) 177–191.

[105] RAPCSÁK, T.: *Local convexity on smooth manifolds*, Journal of Optimization Theory and Applications **127** (2005) 165–176.

[106] RAPCSÁK, T.: *Survey on the Fenchel problem of level sets*, in: Variational analysis and applications, eds.: F. Giannessi and A. Maugeri, Springer (2005) 935–950.

[107] RAPCSÁK, T.: *Martos Béla optimalizáláselméleti munkásságának méltatása az Egerváry emlékplakett átadása alkalmából*, Alkalmazott Matematikai Lapok **23** (2006) 1–4.

[108] RAPCSÁK, T.: *On pseudolinearity of quadratic fractional functions*, Optimization Letters **1** (2007) 193–200.

[109] RAPCSÁK, T.: *Sectional curvatures in nonlinear optimization*, Journal of Global Optimization **40** (2008) 375–388.

[110] BOZÓKI, S. AND RAPCSÁK, T.: *On Saaty's and Koczkodaj's inconsistencies of pairwise comparison matrices*, Journal of Global Optimization **42** (2008) 157–175.

[111] RAPCSÁK, T. AND UJVÁRI, M.: *Some results on pseudolinear quadratic fractional functions*, Central European Journal of Operations Research **16** (2008) 415–424.

Könyvek

[112] RAPCSÁK, T.: Smooth nonlinear optimization in R^n, Kluwer Academic Publishers, (1997). (374 p)

[113] RAPCSÁK, T.: *Nemlineáris optimalizálás*, Aula Kiadó, Budapest, 2006.

Szerkesztett könyvek, folyóirat különszámok

[114] Generalized convexity, eds.: S. Komlósi, T. Rapcsák and S. Schaible, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems 405, Proceedings, Pécs, Hungary, 1992, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1994). (404 p)

[115] *Nemzeti Biodiverzitás-monitorozó Rendszer I. Informatikai alapozás*, szerk.: Horváth F., Rapcsák T. és Szilágyi G., Magyar Természettudományi Múzeum (1997). (164 p)

[116] New trends in mathematical programming, eds.: F. Giannessi, S. Komlósi and T. Rapcsák, Kluwer Academic Publishers (1998). (314 p)

[117] *Special Issue* in Central European Journal of Operations Research, eds.: T. Csendes and T. Rapcsák **8** (1) 2000.

[118] Optimization theory, Recent developments from Mátraháza, eds.: F. Giannessi, P. Pardalos and T. Rapcsák, Kluwer Academic Publishers (2001). (278 p)

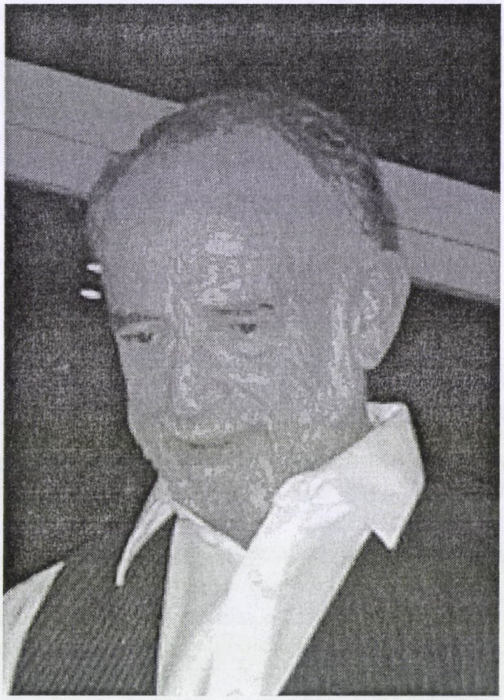
[119] *Közgyűlési előadások 2000, Millennium az Akadémián, Operációkutatás,* szerk.: Prékopa A. és Rapcsák T., Magyar Tudományos Akadémia (2001).

[120] *Special Issue* in European Journal of Operational Research, eds.: T. Illés, T. Rapcsák and T. Terlaky **143** (2) 2002.

Alkalmazott Matematikai Lapok **26** (2009), 143-149.

STAHL JÁNOS

(1939. január 3. – 2008. június 11.)



Amikor Stahl János jellegzetes alakját felidézzük a később született olvasó számára, akkor fel kell idéznünk azt kort és szakmai környezetet is, amiben pályája elindult, és ahol legnagyobb sikereit aratta.

1962-ben végzett az ELTE matematikus szakán, 23 évesen. Ekkor még jó 15 évig sehol a világon nem léteztek személyi számítógépek. Csak úgynevezett mainframe gépek voltak nagy, légkondicionált termekben, ahol a gép és a perifériák, vagyis a mágnesszalag, mágneslemez, nyomtató és egyéb egységek külön-külön is legalább egy szekrénynyi helyet foglaltak el. A berendezések teljesítménye akár a futási időt, akár a memóriát nézzük, a mai gépekhez képest elenyésző volt. Mégis csodát lehetett rajtuk művelni, még mai szemmel is. A számítógépeket igen magas áron adták, ha adták egyáltalán, mert a vasfüggönynek ezen az oldalán sokáig alig létezett gyártás. A nyugatiak pedig embargó alatt tartottak bennünket. Csak azt adtak el, ami egy ún. COCOM lista szerint eladható volt. Azért lassan szivárogtak be gépek, de mindig más, talán mi voltunk az az ország, amelyiknek a gépparkja a legszínesebb volt.

Minden főhatóság, azaz a minisztériumok, a különböző országos szintű hivatalok igyekeztek kiépíteni a maguk külön számítóközpontját. Stahl János első munkahelye is egy ilyen intézmény, a Kohó- és Gépipari Minisztérium Ipargazdasági és Üzemszervezési Intézete volt, ahol Rabár Ferenc osztályára került. Ott is matematikai módszerek vállalati alkalmazásaival foglalkozott. 1965-ben a Központi Statisztikai Hivatal Rabár Ferenc igazgatása alatt létrehozta az INFELOR-t. A név az „Információ feldolgozási laboratóriumot" rövidíti. Stahl János többekkel átment az új intézetbe, ami igen szerencsés választásnak bizonyult, mert az INFELOR a magyar számítástechnika egyik bölcsője volt. Az INFELOR szinte belakta egész Budapestet, mindenütt voltak részlegei. Az Operációkutatási Osztály, ahova került, a Várban, egy lakásban működött. Az operációkutatással az egyetemen Prékopa András előadásaiból ismerkedett meg.

A számítógépek viszonylagos elterjedése Magyarországon az 1960-as években lényeges változásokat hozott az üzleti és gazdasági problémák kezelésében. Korábban reménytelennek tekintett méretű feladatok megoldása reális közelségbe került, de a megoldások az akkori számítógépek teljesítményének korlátai mellett matematikusok, közgazdászok és programozók szoros együttműködését követelték meg. Informatikus képzés a 60-as években még nem volt, sőt még maga a szakma se létezett. Így a feladatokat fiatal matematikusokkal és közgazdászokkal próbálták megoldani. Az előzmények hiánya miatt a számítógépes alkalmazásokon dolgozók nemigen támaszkodhattak „nagy öregek" tapasztalataira és a tehetséges kezdők 30 éves korukra nagy öregekké válhattak. Stahl János vitathatatlanul ebbe a körbe tartozott. Mint az INFELOR Operációkutatási osztályának a „nagy öregje" szinte egy iskolát szervezett. Az általa vezetett szemináriumokon hétről hétre felkészítette a friss diplomásokat a feladatokhoz. Ezeken a szemináriumokon többek között a lineáris programozás, egészértékű programozás, dekompozíciós eljárások, termelésirányítási módszerek témakörökben könyveket, a legfrissebb hazai és külföldi eredményeket ismertető cikkeket dolgoztak fel. Olyan volt, mint az akkor még nem elterjedt „posztgraduális" képzés.

A tanulás igazán nem csak a szemináriumokon való részvételt jelentette. Az ott dolgozó fiatalok Stahl János és néhány ugyancsak fiatal közgazdász irányítása alatt megtanultak több szakmát. Megtanultak egy vállalati feladatot felmérni, matematikai modellel leírni, a modell megoldására egzakt és heurisztikus algoritmust kidolgozni, végül beprogramozni és átadni. Stahl János elvárta mindenkitől a színvonalas munkát, még akkor is, ha arra nem mindig volt igény.

Az INFELOR vállalatként működött, bevételt kellett hozni, tehát megbízásokat kellett teljesíteni. Sokféle projekt folyt az osztályon az öntözőrendszer gátjainak beállításától az országos gabona és lisztszállítások, valamint a csavargyári gépsorok többlépcsős optimalizálásáig. A 70-es évek elejére visszatekintve a számítástechnikai alkalmazásokban is azt a kettősséget látjuk, amely az egész korszakot jellemezte.

Egyrészt a fiatal szakemberek lelkesedését a makro- és mikrogazdaságban a racionális, kiszámítható megoldások, modellek iránt, másrészt a bürokratikus módszerek időnkénti „mindenhatóságát". Rendelet szabályozta, hogy a vállalati döntéseket számítástechnikai eszközökkel kell alátámasztani. Sokszor egy megbízás csak azt a célt szolgálta, hogy egy vállalati vezető már meghozott döntését számítástechnikai eszközökkel kellett alátámasztani. Stahl János ilyen estekben is elvárta a színvonalas, komoly munkát, és volt, hogy a megrendelőt éppen az elkészült termék győzte meg a számítástechnika használhatóságáról.

A számítógépek akkori alacsony kapacitása miatt transzformálni, szabdalni kellett a feladatokat, biztosítva, hogy a részmegoldásokból az eredeti feladat megoldása megkapható legyen, azaz tudományos kifejezéssel élve dekompozíciót kellett alkalmazni. Mára a számítógépek teljesítményei lehetővé teszik a legtöbb ilyen feladat kész programcsomagok használatával való megoldását. Így aztán a később született generációk valószínűleg nem is találkoznak a problémamegoldásokhoz szükséges fenti együttműködés állandó kényszerével. Rendkívül rugalmasan, nyitottan fordult a társterületekről érkező ötletekhez, kérésekhez, és képes volt azok integrált, az elméleti megoldás mellett gyakorlati eredményt hozó kezelésére is.

Több fontos eredménye is a dekompozícióhoz kötődik. A nagyméretű programozási feladatok részekre bontásának „klasszikus" megoldása a Dantzig–Wolfe-dekompozíciós eljárás. Ettől függetlenül született a Kornai–Lipták kétszintű tervezési eljárás. Mindkét megoldás általános jellegű abban az értelemben, hogy semmilyen kikötést nem tartalmazott a „szektor" feladatok jellegére. Ebből adódóan nagy méretek esetén a részfeladatok megoldása könnyen kapacitás korlátokba ütközhetett. Két konkrét esetben, egy szállítással kombinált, ill. egy sok technológiai lépést tartalmazó termelésoptimalizálási feladat esetében ez be is következett. A szektorfeladatok szerkezete azonban mindkét esetben speciális volt. Ezt kihasználva Stahl János speciális dekompozíciós eljárást dolgozott ki, amely lehetővé tette a gyakorlati megoldást. További előnye volt az eljárásnak, hogy minden iteráció után becslést lehetett adni az optimumtól való távolságról, és így kellő közelség esetén dönteni lehetett a további iterációk elhagyásáról. Mai szemmel ez nehezen érthető, de akkoriban egy-egy szektorfeladat megoldása több órát, esetenként egy-egy éjszakát is igényelt, 20 szektor, 50 iteráció...

1968-ban vezették be az ún. „új gazdasági mechanizmust", ami a piacgazdaság egyes elemeit szimuláló rendszer volt. A vállalatok érdekeltsége a mennyiségi tervteljesítés helyett a nyereséges működés lett. Sajátos szabályozás, levezethető, hogy a célfüggvény egy tört értékének maximalizálása, azaz hiperbolikus programozás. Gyakorlati probléma, hogy a trösztök – a hasonló profilú vállalatokat ilyen egységekbe szervezték – szintjén értelmezett célfüggvény maximalizálása. Jó-e, ha minden egység saját törtjét maximalizálja? Bár intuitíven is érezhető, hogy nem, a János által kidolgozott dekompozíciós eljárás ezt bizonyítja is. Az eljárás megoldást is ad arra, hogy mi a központi céllal konzisztens tagvállalati célfüggvény. Ez a duál feladatból vezethető le. Az egyedi feladat megoldásán túl az eljárás alapvető közgazdasági tételt is bizonyít: az alkalmazott szabályozás nemzetgazdasági szinten rossz hatékonyságú.

Kandidátusi disszertációját, amit 1974-ben védett meg, szintén ezen területről írta, a kétszeresen összekapcsolt feladatokról, melyekben nem csupán összekötő feltételek vannak, mint a Dantzig–Wolfe-dekompozíció feladatában, hanem összekötő változók is.

Kezdeményezőkészsége, sokoldalú érdeklődése tükröződött abban is, hogy meghatározó szerepet játszott az e területen dolgozó kutatók és „alkalmazók" tudományos fórumai létrehozásában, működtetésében. Ebben az időszakban jött létre a Bolyai Társaság Alkalmazott Matematikai Szakosztálya, az MKT Matematikai-közgazdasági Szakosztálya és a Neumann János Társaság Operációkutatási Szakosztálya is. Ezek munkájába mind bekapcsolódott. Lassan a múlt ködébe vésznek a három terület közösen, még pontosabban felváltva rendezett konferenciái, amelyek „szinergikus" hatásuk révén sok esetben hozzájárultak egyrészt újabb kutatási irányok kialakulásához, újabb részeredmények megszületéséhez, másrészt a gyakorlati alkalmazások körének bővüléséhez.

Az INFELOR-ból később átszervezés folytán SZÁMKI lett. Ebben az időben érte a csapatot a kihívás, hogy a rendelkezésre álló gépi kapacitást figyelembe véve készítsen számítástechnikai programrendszert a népességnyilvántartás bevezetéséhez és folyamatos üzemeltetéséhez. (A személyi szám bevezetéséhez kb. 200 mágnesszalagon tárolt adatmennyiséget kellett biztonságosan feldolgozni, majd üzemeltetni egy olyan gépen, amelyik egyidejűleg csak az adatbázis töredékét tudta kezelni.) Stahl János a rá jellemző módon, lelkesen vetette bele magát a nem éppen matematikai feladat megtervezésébe, majd a végrehajtás levezénylésébe. Nem kis része volt abban, hogy a feladatot a SZÁMKI eredményesen és határidőre megoldotta. Később útja a DATORG-ba vezetett, majd az Állami Népességnyilvántartó Hivatalban dolgozott. 1982-től volt a Corvinus Egyetem jogelődjének Matematikai Intézetében előbb docens, majd egyetemi tanár. Közben átképezte magát aktuáriussá. 1992 és 1994 között az Állami Biztosításfelügyelet vezető matematikusa. Innen az OTP-Garancia Biztosító Rt.-hez megy, ahol elnöki tanácsadó. Mivel olyan ember volt, aki képes sok mindent átlátni, tevékenységi köre a biztosítási matematika, az informatika és a kontrolling határán mozgott. Élete utolsó évtizedében a PSZÁF-ban dolgozott, és több cikket is írt a magyar nyugdíjrendszerről. Emellett a Corvinus Egyetemen tanított operációkutatást.

Sokan gondoljuk, hogy a szakmai-tudományos eredmények mellett legalább olyan fontos volt a kialakult jó hangulat, amelynek megteremtésében Stahl János komoly érdemekkel bír. Munka után vagy konferencián este, emberekkel teli szobában egy üveg vodka vagy cseresznyepálinka mellett folytatott kötetlen szakmai és „világmegváltó" beszélgetések is részei voltak a mindennapoknak.

Stahl János publikációi

[1] *Két újabb eljárás hiperbolikus programozási feladatok megoldására*, MTA Matematikai Kutató Intézet Közleményei. 1964/B.4

[2] *Eine Problemder produktionsplanung.* Unternehmensforschung, 1965/1. (Rabár Ferenccel)

[3] *An existence theorem for polyhedral games.* A, Prékopa (ed); Colloquium on Applications of Mathatics to Economics. Akadémiai Kiadó. 1965

[4] *Über den optimalen Zuschnitten von Plattenmaterialen, Unternehmensforschung.* 19G5/3. (Lampl Tamással)

[5] *Operációkutatás*, Felsőfokú Technikumi Jegyzet. Műszaki Könyvkiadó. 1965. (Krajcsovits Mártonnal és Lampl Tamással)

[6] *Szállítási feladatokról.* Közgazdasági Szemle. 1966/78.

[7] *Az optimum értekének becslése LP feladatoknál.* Információ Elektronika. 1966/2

[8] *The Optimal Volume of Foreign Trade and the Exchange Rate, Econometrica.* 1967/1. (Nagy Andrással)

[9] *Ágazati termelési függvények a magyar iparban.* Közgazdasági Szemle. 1967/6. (Szakolczay Györggyel)

[10] *Adott hálózat legrövidebb utjainak meghatározása.* Információ Elektronika. 1968/1

[11] *Increasing and Decreasing Returns to Scale in the CES Production Function.* Review of Economics and Statistics, 1969/1. (Szakolczay Györggyel)

[12] *Dekompoziciós eljárás a szén termelésének és elosztásának optimalizálására.* Szigma, -1970/2. (Kovács Álmossal)

[13] *Algoritmus poliéderjátékok megoldására.* Szigma. 1970/4.

[14] *A vállalati beruházási politika optimálásának egy modellje.* Szigma. 1971/1-2. (Kovács Álmossal)

[15] *Speciális termékösszetétel optimalizáló feladatokról.* Információ Elektronika, 1971/3. (Kovács Álmossal)

[16] *On minimizing water loss by modifying lock dates.* Colloquia Mathmatica Societatis Janes Bolyai. 7. A; Prékopa (ed): Inventory Control and Water Storage, North Holland. 1972.

[17] *Optimum, árak és egyensúly a nemzetközi kereskedelemben.* Szigma. 1972/4. (Simon Andrással)

[18] *Dekompoziciós eljárás a vállalati érdekeltség mutatójának maximalizálására,* Szigma. 1973/2. (Kovács Álmossal)

[19] *Poliéderjátékok megoldásából származtatott dekompoziciós eljárások.* Kandidátusi értekezés. 1973

[20] *A kétszeresen összekapcsolt LP-feladatról.* Szigma, 1974/1-2.

[21] *Egy LP-dekompoziciós eljárásról.* Szigma. 1974/4.

[22] *Vízkészletgazdálkodás a Tiszalöki Öntözőrendszerben.* Szigma, 1975/3. (Dávid Lászlóval és Nagy Péternével)

[23] *Egy LP dekompoziciós eljárás és annak alkalmazása.* Alkalmazott Matematikai Lapok, 1975/2.

[24] *Dekompoziciós eljárások nemlineáris programokra.* Szigma. 1976/1. (Somos Endrével)

[25] *Decomposition procedures for convex programs,* Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems 117. Springer Verlag. 1976.

[26] *On an LP decomposition procedure,* Colloquia Mathematica Societatis Janos Bolyai. 12. A. Prékopa (ed): progress in Operations Research, North Holland,

[27] *Egy osztályozási feladat megoldása.* Alkalmazott Matematikai Lapok. 1976/3-4. (Heppes Aladárral és Mályusz Károllyal)

[28] *On large scale linear fractional programs.* Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems 121, Springer Verlag. 1976. (Kovács Álmossal)

[29] *Operációkutatás a gyakorlatban – esettanulmányok,* Közgazdasági es Jogi Könyvkiadó. 1977.

[30] *Egy nagyméretű LP-feladat megoldasáról: egy esettanulmány,* Szigma, 1977/2 és Szigma 1979/3. (Az első rész egy változata szerepel a IXth International Symposium on Mathematical Programming Közleményeiben is, Maróti Lászlóval és Mócsi Zoltánnéval)

[31] *Lineáris programozási dekompoziciós eljárások.* Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó. 1978.

[32] *On decomposition procedures for doubly coupled LP-s.* G. B. Dantzig. M. Dempster, M. Kallio (eds): Large Scale Linear Programming, IIASA Coll. Froc. Series. 1981

[33] *Lineáris vektormaximum problémák efficiens pontjainak létezéséről.* Szigma. 1981/1-2.

[34] *Hányados programozási feladatok dekompozíciójáról.* Szigma. 1982/4.

[35] *Termelésprogramozás és készletgazdalkodás.* Közgazdasági es Jogi Könyvkiadó. 1982. (Kovács Álmossal és Elek Györgynével)

[36] *Egy nagy adatrendszer karbantartásáról,* Alkalmazott Matematikai Lapok. 1984/2,

[37] *Complex Economic Analysis of a Dam Construction Project,* Papers on Applications, BEU. 1987/1. (Meszéna Györggyel. Mikó Gyulával és Temesi Józseffel)

[38] *The Solution of a Warehouse Control Problem,* Papers on Applications. BEU. 1987/1. (Temesi Józseffel)

[39] *Optimumszámítás.* Egyetemi jegyzet. Aula Kiadó. 1989,1991. 1993. 1995.

[40] *Decision Support System for Production control: Multiple Criteria Decision Making in Practice.* Engineering Costs and Production Economics, 1990/3. (Por Andrással es Temesi Józseffel)

[41] *An Application of Group Decision making Methods for Tender Evaluation.* PUMA. 1991/C.1. (Temesi Józseffel)

[42] *On the OKHB Courier Transportation Routes,* Operational Management (ed. by J. Tihanyi), BBU, 1992.

[43] *Matematikai programmozás és a biztosítás illeszkedési problémája,* Szigma. 1994/1-2.

[44] *On certain quotient type early warning systems,* 1994.

[45] *Az adósságkezelésről.* 1996.

[46] *Hogyan lesz nyugdíj a magánpénztárba befizetett járulékból?* In: Körkép reform után: tanulmányok a nyugdíjrendszerről, szerk: Augusztinovics Mária, Bp. Közgazdasági Szemle Alapítvány, 2000.

[47] *A magyar nyugdíjrendszer az 1998-as reform előtt és után,* Közgazdasági Szemle **49** (2002) 473–517, (Augusztinovics Máriával, Gál Róbert Ivánnal, Matits Ágnessel, Máté Leventével és Simonovits Andrással).: angolul: 'The Hungarian Pension Reform Before and After the 1998 Reform', Chapter 1 in Pension Reform in Central and Eastern Europe, Vol. I (ed. by Fultz, E.) 25–93, 2002.

Az Alkalmazott Matematikai Lapok megjelenését támogatja
a Magyar Tudományos Akadémia Könyv- és Folyóiratkiadó Bizottsága.

A kiadásért felelős a BJMT főtitkára
Szedte és tördelte Éliás Mariann

Nyomta a Nagy és Társa Kft., Budapest
Felelős vezető: Fódi Gábor

Budapest, 2009
Megjelent 18 (A/5) ív terjedelemben
250 példányban
HU ISSN 0133-3399

ÚTMUTATÁS A SZERZŐKNEK

Az Alkalmazott Matematikai Lapok csak magyar nyelvű dolgozatokat közöl. A közlésre szánt dolgozatokat e-mailen az aml@math.elte.hu címre kérjük elküldeni az ábrákat tartalmazó fájlokkal együtt. Előnyben részesülnek a LaTeX-ben elkészített dolgozatok.

A kéziratok szerkezeti felépítésének a következő követelményeket kell kielégíteni. A fejlécnek tartalmaznia kell a dolgozat címét és a szerző teljes nevét. A fejléc után egy, képletet nem tartalmazó, legfeljebb 200 szóból álló kivonatot kell minden esetben megadni. A dolgozatot címmel ellátott szakaszokra kell bontani, és az egyes szakaszokat arab sorszámozással kell ellátni. Az esetleges bevezetésnek mindig az első szakaszt kell alkotnia. Az irodalomjegyzék után, a kézirat befejezéseképpen fel kell tüntetni a szerző teljes nevét és a munkahelye (illetve lakása) pontos címét. A dolgozatban előforduló képleteket szakaszonként újrakezdődően, a képlet előtt két zárójel közé írt kettős számozással kell azonosítani. Természetesen nem szükséges minden képletet számozással ellátni. Az esetleges definíciókat és tételeket (segédtételeket és lemmákat) ugyancsak szakaszonként újrakezdődő, kettős számozással kell ellátni. Kérjük a szerzőket, hogy ezeket, valamint a tételek bizonyítását a szövegben kellő módon emeljék ki. Minden dolgozathoz csatolni kell egy angol, német francia vagy orosz nyelvű, külön oldalra gépelt összefoglalót.

Mind az ábrákat, mind a lábjegyzeteket a dolgozat szakaszokra bontásától független, folytatólagos arab sorszámozással kel ellátni. Az ábrák elhelyezését a dolgozat megfelelő helyén, széljegyzetként feltüntetett, ábraazonosító sorszámokkal kell megadni. A lábjegyzetekre a dolgozaton belül az azonosító sorszám felső indexkénti használatával lehet hivatkozni.

Az irodalmi hivatkozások formája a következő. Minden hivatkozást fel kell sorolni a dolgozat végén található irodalomjegyzékben, a szerzők, illetve a társszerzők esetén az első szerző neve szerint alfabetikus sorrendben úgy, hogy a cirill betűs szerzők nevét a Mathematical Reviews átírási szabályai szerint latin betűsre kell átírni. A folyóiratban megjelent cikkekre [1], a könyvekre [5], a kötetben megjelent dolgozatokra [4], a disszertációkra [3] és a gépi program leírásokra [2] a következő minta szerint kell hivatkozni:

[1] Farkas, J.: *Über die Theorie der einfachen Ungleichungen.* Journal für die reine und angewandte Mathematik **124**, (1902) 1–27.

[2] Kéri, G.: „DUALSIMP", rutin a CDC 3300-ás gépekre (Magyar Tudományos Akadémia Számítástechnikai és Automatizálási Kutató Intézete, CDC 3300 felhasználói ismertetők 2. 1973. május) 19–20.

[3] Prékopa, A.: *„Sztochasztikus rendszerek optimalizálási problémáiról"*, doktori értekezés. Magyar Tudományos Akadémia, Budapest, 1970.

[4] Prabhu, N. U.: *„Recent research on the ruin problem of collective risk theory"*, in: Inventory Control and Water Storage. Ed. A. Prékopa (János Bolyai Mathematical Society and North-Holland Publishing Company, Amsterdam–London, (1973) 221–228.

[5] Zoutendijk, G.: *Methods of Feasible Directions* (Elsevier Publishing Company, Amsterdam and New York, 1960).

A dolgozatok szövegében az irodalmi hivatkozás számait szögletes zárójelben kell megadni, mint például [5] vagy [4, 76–78]. A szerzők a dolgozatukról 50 darab ingyenes különlenyomatot kapnak. A dolgozatok után szerzői díjat az Alkalmazott Matematikai Lapok nem fizet.

TARTALOMJEGYZÉK

INDEX