Alkalmazott matematikai lapok

1975/1-2

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK KÖZLEMÉNYEI

1. KÖTET

AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA

MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK

ALKALMAZOTT MATEMATIKAI LAPJA

I. kötet 1—2. szám

Szerkesztőség: 1502 Budapest XI., Kende u. 13—17.

Kiadóhivatal: 1055 Budapest V., Alkotmány u. 21.

Az Alkalmazott Matematikai Lapok változó terjedelmű füzetekben jelenik meg, és olyan eredeti tudományos cikkeket publikál, amelyek a gyakorlatban, vagy más tudományokban közvetlenül felhasználható új matematikai eredményt tartalmaznak, illetve már ismert, de színvonalas matematikai apparátus újszerű és jelentős alkalmazását mutatják be. A folyóirat közöl cikk formájában megírt, új tudományos eredménynek számító programokat, és olyan, külföldi folyóiratban már publikált dolgozatokat, amelyek magyar nyelven történő megjelentetése elősegítheti az elért eredmények minél előbbi, széles körű hazai felhasználását.

A folyóirat feladata a Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának munkájára vonatkozó közlemények, könyvismertetések stb. publikálása is.

Kéziratok a következő címre küldendők:

Prékopa András, felelős szerkesztő
1502 Budapest XI., Kende u. 13—17.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi levelezés.

Közlésre el nem fogadott kéziratokat a szerkesztőség lehetőleg visszajuttat a szerzőhöz, de a beküldött kéziratok megőrzéséért vagy továbbításáért felelősséget nem vállal.

Az Alkalmazott Matematikai Lapok előfizetési ára kötetenként 60 forint. Belföldi megrendelések az Akadémiai Kiadó, 1055 Budapest V., Alkotmány u. 21. címen (pénzforgalmi jelzőszám 215—11 488), külföldi megrendelések a „Kultúra" Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalat, Budapest, I. Fő u. 32. címen (pénzforgalmi jelzőszám 218—10 990) lehetségesek.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztálya a következő idegen nyelvű folyóiratokat adja ki:

1. Acta Mathematica Hungaricae,
2. Acta Physica Hungaricae,
3. Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica.

BEKÖSZÖNTŐ

1975-től kezdődően a *Magyar Tudományos Akadémia Matematikai és Fizikai Tudományok Osztályának Közleményei* c. folyóirat megszűnik és helyébe az *Alkalmazott Matematikai Lapok* c. folyóirat lép, melynek első füzete az olvasó előtt fekszik.

A matematika alkalmazásaival foglalkozó szakemberek számára hosszú éveken át nem volt hazai publikációs fórum. Elsősorban ez a tény vetette fel az említett változás szükségességét. Sem a matematika elméleti területeit, sem pedig a fizikát nem éri károsodás, hiszen a *Bolyai János Matematikai Társulat* által kiadott *Matematikai Lapok* és az *Eötvös Loránd Fizikai Társulat* által kiadott *Fizikai Szemle* alkalmasak a most kimaradó magyar nyelvű cikkek befogadására.

Összesen nyolc tudományos jellegű magyar nyelvű matematikai folyóirat működött eddig: a most megszűnő *Osztályközlemények* és három jogelődje, továbbá a már említett *Matematikai Lapok* (1950—) és jogelődje, az *Eötvös Loránd Matematikai és Fizikai Társulat* által kiadott *Matematikai és Fizikai Lapok* (1892—1943); az anyagi problémák miatt rövidéletű *Műegyetemi Lapok* (1876—1878), végül az *MTA Alkalmazott Matematikai Intézetének* (1956-tól *Matematikai Kutató Intézetének*) *Közleményei* (1952—1964). Legutóbb ez a folyóirat teremtett publikációs lehetőséget országos viszonylatban az alkalmazási cikkek számára, bár a *Matematikai Lapok* is szívesen fogadott ilyen jellegű dolgozatokat.

Sem régebben, sem ma, tudományos kutató nem támaszkodhatott csupán a magyar nyelv ismeretére. Szükségtelen indokolni a világnyelveken megjelenő szakirodalom követésének fontosságát. Az is igaz, hogy jelentős tudományos eredményeinket publikálnunk kell valamely világnyelven is, mert azok csak így válnak ismertté. Ám a hazai tudományos élet és gyakorlat szempontjából a magyar nyelvű publikálásnak is igen nagy jelentősége van. Különösen áll ez az alkalmazott tudományok esetében. Az oktatás szempontjából is igen fontos szerepe van a magyar nyelvű szakirodalomnak, hiszen ezekben a könyvekben, cikkekben lát napvilágot, formálódik a magyar szaknyelv. Folyóiratunk egyik fontos célkitűzése a modern alkalmazott matematikai tudományágakban az egységes magyar terminológia kialakítása.

Az „alkalmazott matematika" vagy „a matematika alkalmazásai" elnevezések a matematika egy részének a meghatározására szolgálnak. Azoknak a matematikai tudományágaknak a gyűjtőnevei, amelyek elsősorban a gyakorlatban, vagy más tudományokban közvetlenül felhasználható ismereteket tartalmaznak. A szerkesztő bizottság szívesen fogad valószínűségelméleti, matematikai statisztikai, operációkutatási, számítástudományi jellegű és a numerikus módszerek körébe vágó cikkeket. A cikkeknek új tudományos eredményt kell tartalmazniuk. Bár elsősorban a matematikai szempontból is új eredményt hozó dolgozatok közlésére törekszünk, olyan cikkeket is elfogadunk, amelyek nem új, de színvonalas matematikai apparátus újszerű és jelentős alkalmazását mutatják be. Új tudományos eredménynek tekinthető számítógépes programok közlése is fontos feladataink közé tartozik.

A szerkesztő bizottság azt kívánja, hogy a magyar alkalmazott matematikusok — bárhol legyen is a munkahelyük — magukénak érezzék ezt az új folyóiratot, támogassák munkánkat és törekvéseinket közös ügyünk felvirágoztatása érdekében.

Szerkesztő Bizottság

Alkalmazott Matematikai Lapok **1** (1975) 3—22

A STABIL SZTOHASZTIKUS PROGRAMOZÁSI MODELL ÉS ANNAK KÍSÉRLETI ALKALMAZÁSA A MAGYAR VILLAMOSENERGIA-IPARRA

PRÉKOPA ANDRÁS
Budapest

GANCZER SÁNDOR
Budapest

DEÁK ISTVÁN
Budapest

PATYI KÁROLY
Budapest

A STABIL elnevezésű sztohasztikus programozási modell az (1.1) modell, melyben valószínűségi és további determinisztikus feltételek mellett minimalizálunk egy lineáris vagy nemlineáris célfüggvényt. A dolgozatban e modelltípus speciális esetével foglalkozunk, amikor a $g_1, \ldots, g_{m+M}, f$ függvények lineárisak. A modellt alkalmazzuk a magyar villamosenergia-ipar negyedik ötéves tervére olyan értelemben, hogy a negyedik ötéves terv megfelelő determinisztikus ágazati modelljéből indultunk ki, ennek alapján konstruáltunk egy sztohasztikus programozási modellt. Az alkalmazás kísérleti jellegű, minthogy a modell megalkotása és a számítások a már folyamatban levő negyedik ötéves tervre vonatkoznak, a tényleges gyakorlati alkalmazásra tehát már nem gondolhattunk. A dolgozatban részletesen leírjuk a modellt, a megoldó algoritmust, ismertetjük a számítógépes programrendszert, a modell paramétereit és a számítási eredményeket. Igen érdekes jelenségnek tekinthető, hogy a determinisztikus alapmodell és a megfelelő STABIL modell esetén az optimumértékek között nincs lényeges eltérés, de más optimális megoldások adódnak. A determinisztikus alapmodell optimális megoldásának valószínűségi (megbízhatósági) szintje azonban igen alacsony, a STABIL optimális megoldásé pedig megfelelően nagy. E jelenség feltárása a numerikus példát az alkalmazási jellegétől függetlenül is érdekessé teszi.

1. Bevezetés

Ebben a dolgozatban részletes leírását adjuk a STABIL elnevezésű valószínűséggel korlátozott sztohasztikus programozási modellnek, melynek megfogalmazását, továbbá elméletének és megoldó algoritmusának a leírását a [4], [5], [8] dolgozatok tartalmazzák tömörebb formában, továbbá alkalmazzuk a modellt a magyar villamosenergia-ipar ötéves tervére a negyedik ötéves terv keretein belül. A negyedik ötéves terv lineáris programozási modelljének a leírása az [1], [3] művekben található meg.

A modell STABIL elnevezését ebben a dolgozatban vezetjük be. A szó nem rövidítés, hanem csupán név, melynek megválasztása összefügg azzal, hogy a szóban forgó modell valószínűséggel korlátozott feltételt tartalmaz, tehát a modellált rendszer működési megbízhatóságára előírt (a gyakorlatban 1-hez közeli) szintet kívánunk meg.

A dolgozatban röviden ismertetjük a modellt jelentő feladat megoldó algoritmusának számítógépes programrendszerét is. A részletek iránt érdeklődő olvasó bővebb információt szerezhet a [2] dolgozatból.

Modellünk alkalmazása azért kísérleti, mert egyrészt a már megvalósulás folyamatában levő negyedik ötéves tervből kivett villamosenergia-ipari ágazati determinisztikus modellt vettük alapul a sztohasztikus programozási modell megalkotásakor, tehát az eredmények gyakorlati alkalmazására már nem lehetett gondolni, másrészt a modellben szereplő valószínűségi változók eloszlásával kapcsolatos múltbeli információk hiányosak és így az eloszlás megadása részben szubjektív megfontolások alapján történt.

Az alkalmazott STABIL elnevezésű sztohasztikus programozási modell az alább megfogalmazott

$$\begin{aligned} &G(\mathbf{x}) = P\big(g_i(\mathbf{x}) \geqq \xi_i, \quad i = 1, \dots, m\big) \geqq p, \\ (1.1) \qquad &g_i(\mathbf{x}) \geqq b_i, \quad i = m+1, \dots, m+M, \\ &\min f(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

modell speciális esete, amikor a $g_1, \dots, g_{m+M}, f$ függvények lineárisak. A modellben a $\xi_1, \dots, \xi_m$ valószínűségi változók együttes eloszlása folytonos és az együttes sűrűségfüggvény az egész téren logaritmikusan konkáv. Esetünkben nem elfajult normális együttes eloszlásról van szó, mely az előbbi tulajdonságú. Az (1.1) modellben p rögzített valószínűség, $0<p<1$, melynek megválasztása tőlünk függ és melyet a gyakorlati felhasználáskor célszerű 1-hez közelinek választani. A villamosenergiaipari feladatban p értéke 0,9, illetve 0,95. Ami az egyéb méreteket illeti, az említett feladatban $m=4$, $M=106$, ahol a (7.5) alatt felsorolt egyedi korlátok és nemnegativitási feltételek is szerepelnek, végül $\mathbf{x}$ komponenseinek a száma 46.

Azt a determinisztikus modellt, amelyre támaszkodva egy sztohasztikus programozási modellt megfogalmazunk, determinisztikus alapmodellnek nevezzük. Az (1.1) feladatot az alábbi

$$\begin{aligned} &g_i(\mathbf{x}) \geqq b_i, \quad i = 1, \dots, m, \\ (1.2) \qquad &g_i(\mathbf{x}) \geqq b_i, \quad i = m+1, \dots, m+M, \\ &\min f(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

alapfeladatra támaszkodva alkottuk meg. Az (1.2) feladatban az első sor egyenlőtlenségeiben a jobb oldalakon álló mennyiségeket valószínűségi változóknak tekintettük. A gyakorlati modellalkotás során gyakran előfordul, hogy valószínűségi változókat várható értékeikkel helyettesítik. Ilyen esetekben a sztohasztikus modell konstruálásakor a várható értékek már adottak. Az ebben a dolgozatban tárgyalandó közgazdasági probléma determinisztikus alapmodelljét az említett elvnek megfelelően konstruálták. Ezt figyelembe véve a jobb oldalakra kerülő valószínűségi változókat

$$b_i + \sigma_i \beta_i, \quad i = 1, \dots, m$$

alakba írjuk, ahol

$$(1.3) \qquad E(\beta_i) = 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

Feltehetjük még, hogy

$$(1.4) \qquad D(\beta_i) = 1, \quad i = 1, \dots, m,$$

ahol D a szórás jele.

Az E szimbólum a várható érték jele. A dolgozatban az (1.1) modell egy speciális esetének numerikus megoldásával foglalkozunk. Ez a speciális modell az (1.1) modellből oly módon származik, hogy a $g_1, \dots, g_{m+M}, f$ függvények linearitását figyelembe vesszük. Az alábbi jelöléseket alkalmazzuk

$$\begin{aligned} &g_i(\mathbf{x}) = \mathbf{a}_i' \mathbf{x}, \quad i = 1, \dots, m+M, \\ (1.5) \qquad &f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}' \mathbf{x}. \end{aligned}$$

A dolgozatban szereplő matematikai modell és a megoldó matematikai algoritmusok PRÉKOPA ANDRÁS munkái. A többdimenziós normális eloszlás eloszlásfüggvényének kiszámítási módját DEÁK ISTVÁN adta meg. Ő készítette a feladat megoldásának programrendszerét is — a KÉRI GERZSONtól származó lineáris programozási rutin kivételével — továbbá ő végezte a numerikus számításokat is. A determinisztikus alapmodellt, az ehhez tartozó adatokat, továbbá a sztohasztikus programozási modellben szereplő valószínűségi változók jellemző adatait GANCZER SÁNDOR és PATYI KÁROLY bocsátották rendelkezésre. A sztohasztikus programozási modellnek a villamosenergiaiparra való alkalmazása, tehát a modell illesztése a dolgozat szerzőinek közös munkája.

2. A sztohasztikus programozási modell részletes tárgyalása

A STABIL modellnek az a speciális esete, amelynek a numerikus megoldásával foglalkozunk, a következő:

$$G(\mathbf{x}) = P\left\{\frac{1}{\sigma_i}(\mathbf{a}_i'\,\mathbf{x}-b_i) \geqq \beta_i, \quad i = 1, \ldots, m\right\} \geqq p,$$

(2.1) $$\mathbf{a}_i'\,\mathbf{x} \geqq b_i, \quad i = m+1, \ldots, m+M,$$

$$\min \mathbf{c}'\mathbf{x},$$

ahol $\mathbf{x} \in R^n$.

Az [5], [6] dolgozatokban PRÉKOPA ANDRÁS bebizonyította, hogy ha a $\beta_1, \ldots, \beta_m$ valószínűségi változók együttes eloszlása folytonos és az együttes sűrűségfüggvény

(2.2) $$e^{-Q(\mathbf{z})}, \quad \mathbf{z} \in R^m$$

alakú, ahol $Q(\mathbf{z})$ az egész téren értelmezett konvex függvény, mely a $+\infty$ értéket is felveheti, akkor $G(\mathbf{x})$ logaritmikusan konkáv az egész R^n téren. Modellünkben feltételezzük, hogy a $\beta_1, \ldots, \beta_m$ valószínűségi változók együttes eloszlása nem elfajult normális eloszlás. Együttes sűrűségfüggvényük ekkor a következő alakú:

(2.3) $$\frac{1}{(2\pi)^{m/2}\sqrt{|\mathbf{C}|}}\, e^{-\frac{1}{2}\mathbf{z}'\mathbf{C}^{-1}\mathbf{z}}, \quad \mathbf{z} \in R^m,$$

ahol a $\mathbf{C}$ mátrix valószínűségi változóinak korreláció mátrixa,

(2.4) $$c_{ik} = E(\beta_i\beta_k), \quad i, k = 1, \ldots, m.$$

Minthogy az eloszlás nem elfajult, $\mathbf{C}$ pozitív definit mátrix. Ebből következik, hogy $\mathbf{C}^{-1}$ is pozitív definit és így a

(2.5) $$\mathbf{z}'\mathbf{C}^{-1}\mathbf{z}$$

függvény (jól ismert tétel szerint) szigorúan konkáv az egész R^m téren. A (2.3) együttes sűrűségfüggvénnyel bíró $\beta_1, \ldots, \beta_m$ valószínűségi változók esetén tehát a $G(\mathbf{x})$ függvény logaritmikusan konkáv az egész R^m téren, azaz tetszőleges $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in R^n$ vektorpár és tetszőleges $0<\lambda<1$ esetén fennáll a

(2.6) $$G(\lambda\mathbf{x}_1+(1-\lambda)\mathbf{x}_2) \geqq [G(\mathbf{x}_1)]^{\lambda}\,[G(\mathbf{x}_2)]^{1-\lambda}$$

egyenlőtlenség. Minthogy $G(\mathbf{x})>0$ minden $\mathbf{x} \in R^n$ esetén, ebből következik, hogy $\log G(\mathbf{x})$ az egész R^n téren végesértékű konkáv függvény.

A (2.1) feladat megoldó algoritmusa

A (2.1) feladat első feltételében szereplő függvény kvázikonkáv. A feladat megoldására minden olyan nemlineáris programozási módszer alkalmas, mely konvergens lineáris célfüggvény és kvázikonkáv feltételi függvények esetén. A [4], [5], [7] dolgozatokban PRÉKOPA bebizonyította, hogy ZOUTENDIJK egyik „megengedett irányok" elnevezésű módszere, az ún. P2 módszer [9, 74. old.] ilyen tulajdonságú bizonyos regularitási feltételek teljesülése esetén. Mielőtt a (2.1) feladat megoldó módszerét ismertetnénk, leírjuk, hogyan működik a már említett *Zoutendijk*-féle módszer az alábbi feladat esetén

$$
\begin{aligned}
&G(\mathbf{x}) \geqq p,\\
&\mathbf{a}_i'\mathbf{x} \geqq b_i, \quad i \in I, \qquad (2.7)\\
&\min f(\mathbf{x}),
\end{aligned}
$$

ahol a G és az f függvényeket nem specializáljuk az (1.1), (1.5) képleteknek megfelelően, hanem ezek az R^n téren értelmezett, mindegyik változójuk szerint differenciálható függvények. Feltesszük még, hogy a lineáris feltételek által meghatározott halmaz nem üres és korlátos.

Kiindulunk egy tetszőleges olyan $\mathbf{x}_1$ vektorból, mely eleget tesz a (2.7) feladat feltételeinek. Ezután indukcióval értelmezzük az egymás után következő iterációkat. Tegyük fel, hogy az $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k$ vektorokat már meghatároztuk. A következő, $k+1$-edik iterációban meghatározzuk az $\mathbf{x}_{k+1}$ vektort. Az iteráció két részből áll. Az első részben megoldjuk az alábbi, ún. *iránykereső feladatot:*

$$
\begin{aligned}
&G(\mathbf{x}_k) + \nabla G(\mathbf{x}_k)[\mathbf{x}-\mathbf{x}_k] + \vartheta y \geqq p,\\
&\mathbf{a}_i'\mathbf{x} \geqq b_i, \quad i \in I, \qquad (2.8)\\
&\nabla f(\mathbf{x}_k)[\mathbf{x}-\mathbf{x}_k] \leqq y,\\
&\min y,
\end{aligned}
$$

ahol ϑ tetszőleges, de az egész eljárás alatt rögzített pozitív szám. A (2.8) lineáris programozási feladat változóinak száma $n+1$, minthogy az $\mathbf{x}$ vektor n-komponensű, továbbá y is a változók közé tartozik. A (2.8) feladat feltételeinek eleget tevő vektor mindig létezik, ugyanis ilyen pl. az $\mathbf{x}=\mathbf{x}_k$, $y=0$ komponensekkel bíró R^{n+1}-beli vektor. Mivel $\mathbf{x}$ csak egy korlátos halmazban változhat, az y-nal egyenlő célfüggvény alulról korlátos, tehát a feladatnak van véges optimuma. Jelölje y_{opt} a (2.8) feladat optimum értékét. Ha $y_{\text{opt}}=0$, akkor az eljárás véget ér. Ha $y_{\text{opt}}\neq 0$, azaz jelen esetben $y_{\text{opt}}<0$, akkor rátérünk a $k+1$-edik iteráció második részére, a *lépéshossz meghatározására.* Jelölje $\mathbf{x}_k^*$ a (2.8) feladat egy tetszőleges optimális megoldását. Ezután mimimalizáljuk a λ változó

$$f(\mathbf{x}_k + \lambda[\mathbf{x}_k^* - \mathbf{x}_k]) \qquad (2.9)$$

függvényét azoknak a λ számoknak a halmazán, amelyekre teljesül, hogy $\lambda \geqq 0$ és az $\mathbf{x}_k+\lambda[\mathbf{x}_k^*-\mathbf{x}_k]$ vektor eleget tesz a (2.7) feladat feltételeinek. Igen általános feltételek mellett ez a minimum eléretik valamely λ esetén. Jelölje ezt λ_k. Ezek után $\mathbf{x}_{k+1}$ értelmezése a következő

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \lambda_k[\mathbf{x}_k^* - \mathbf{x}_k]. \qquad (2.10)$$

A (2.1) *feladat megoldása két fázisban.*

A tárgyalandó két fázis közül a másodikban a (2.1) feladatot oldjuk meg, feltéve, hogy ismerünk egy a feltételeknek eleget tevő $\mathbf{x}_1$ vektort. Az első fázisban célunk ilyen $\mathbf{x}_1$ vektor keresése.

A második fázisban figyelembe vesszük a G függvény jelentését és azt, hogy f az (1.5) alatti lineáris függvény. A G függvény gradiensével a következő szakaszban foglalkozunk részletesebben. Az f függvény gradiense minden $\mathbf{x}$ esetén $\mathbf{c}'$, ezt (2.8)-ban figyelembe vesszük. A (2.9) függvény nem más, mint

$$\mathbf{c}'(\mathbf{x}_k+\lambda[\mathbf{x}_k^*-\mathbf{x}_k]), \tag{2.11}$$

melyet a (2.1) feladat feltételei által meghatározott $\mathbf{x}$ vektorok halmazának korlátos és konvex volta miatt egy zárt intervallumon kell minimalizálnunk. Minthogy az $y_{\text{opt}}<0$ esetről van szó, következik, hogy $\mathbf{c}'\mathbf{x}_k^*<\mathbf{c}'\mathbf{x}_k$. Eszerint $\mathbf{x}_k^*\neq\mathbf{x}_k$, amiből következik, hogy a λ számok $0\leqq\lambda\leqq 1$ feltételnek eleget tevő halmaza része az előbb említett zárt intervallumnak, tehát ez az intervallum nem elfajult. A minimum az intervallum pozitív értékhez tartozó végpontjában valósul meg. Könnyű belátni, hogy az $\mathbf{x}_{k+1}$ vektor a feladat feltételei által meghatározott halmaz határpontja. Eszerint $\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \ldots$ mind határpont.

Az első fázisban olyan $\mathbf{x}_1$ vektort keresünk, mely eleget tesz a (2.1) feladat feltételeinek. Ugyanazt a módszert alkalmazzuk, mint amelyet a (2.7) feladat megoldására leírtunk, most azonban a (2.1) feladat G függvényét maximalizáljuk a (2.1) feladat lineáris feltételei mellett. Ez a (2.7) feladat speciális esetének fogható fel. Az így értelmezett

$$\begin{gathered}\mathbf{a}_i'\mathbf{x}\geqq b_i,\quad i\in I,\\ \max G(\mathbf{x})\end{gathered} \tag{2.12}$$

feladatra, illetve a vele ekvivalens

$$\begin{gathered}\mathbf{a}_i'\mathbf{x}\geqq b_i,\quad i\in I,\\ \min\{-G(\mathbf{x})\}\end{gathered} \tag{2.13}$$

feladatra az eljárás iterációit addig folytatjuk, míg olyan $\mathbf{x}_1$ vektor adódik, melyre teljesül a

$$G(\mathbf{x}_1)\geqq p \tag{2.14}$$

egyenlőtlenség. Ez az $\mathbf{x}_1$ alkalmas a (2.1) feladat induló megoldásának. Ami a (2.13) feladatra alkalmazott eljárást illeti, ez a következőképpen foglalható össze. Kiindulunk egy olyan $\mathbf{z}_1$ vektorból, mely eleget tesz a (2.13) feladat feltételeinek. Ilyen $\mathbf{z}_1$ vektort lineáris programozással könnyen találhatunk. Ha már meghatároztuk a $\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_k$ vektorokat, akkor $\mathbf{z}_{k+1}$ meghatározásához tekintjük az alábbi iránykereső feladatot

$$\begin{gathered}\mathbf{a}_i'\mathbf{z}\geqq b_i,\quad i\in I,\\ -G(\mathbf{z}_k)+\nabla[-G(\mathbf{z}_k)][\mathbf{z}-\mathbf{z}_k]\leqq y,\\ \min y,\end{gathered} \tag{2.15}$$

mely nyilván ekvivalens az alábbi feladattal

$$\text{(2.16)} \qquad \begin{gathered} \mathbf{a}_i' \mathbf{z} \geqq b_i, \quad i \in I, \\ \min \{-\nabla G(\mathbf{z}_k)[\mathbf{z}-\mathbf{z}_k]\}. \end{gathered}$$

A leállási szabályt és a lépéshossz megállapításának módját a (2.7) feladattal kapcsolatban már elmondtuk. Az első fázisban alkalmazott módszer végeredményben a közönséges gradiens módszer.

3. Az eljárás konvergenciája

Mint említettük, a [4], [5], [7] dolgozatokban foglalkoztunk a (2.7) feladatra vonatkozólag megadott algoritmus konvergenciájával. Az idézett művek fő tételét megismételjük az eredetinél gyengébb, de mostani céljainknak mégis megfelelő formában. Ez az alábbi tétel.

3.1. TÉTEL. Tegyük fel, hogy teljesülnek a következő feltételek.

I. A G és az f függvények az egész R^n téren értelmezett és folytonos gradienssel bíró függvények.

II. A G függvény kvázikonkáv, az f függvény pedig konvex az egész téren.

III. A $K=\{\mathbf{x}|\mathbf{a}_i'\mathbf{x}\geqq b_i,\ i\in \mathrm{I}\}$ halmaz nem üres és korlátos.

IV. Ha valamely, a feladat feltételeinek eleget tevő $\mathbf{x}$ vektor esetén $G(\mathbf{x})=p$, akkor található olyan, a feltételeknek szintén eleget tevő $\mathbf{y}$ vektor, melyre teljesül a

$$\nabla G(\mathbf{x})[\mathbf{y}-\mathbf{x}] > 0 \tag{3.1}$$

egyenlőtlenség.

Ha az eljárás véges és $\mathbf{x}_N$ az utolsó vektor, akkor

$$f(\mathbf{x}_N) = \min_{\mathbf{x}\in L} f(\mathbf{x}); \tag{3.2}$$

ha az $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots$ sorozat végtelen, akkor

$$\lim_{k\to\infty} f(\mathbf{x}_k) = \min_{\mathbf{x}\in L} f(\mathbf{x}), \tag{3.3}$$

ahol L a (2.1) feladat feltételeinek eleget tevő $\mathbf{x}$ vektorok halmaza.

A 3.1. tételre támaszkodva bebizonyíthatjuk a (2.1) feladat megoldó algoritmusának konvergenciáját. Külön tételt mondunk ki mind az első, mind a második fázisra vonatkozólag. Nyilvánvaló, hogy az első fázisnak véges sok lépésben véget kell érnie, míg a második fázisban megelégszünk a konvergenciával. Előbb a második fázis konvergenciájával foglalkozunk, erre vonatkozik az alábbi tétel.

3.2. TÉTEL. A (2.1) feladattal kapcsolatban eddig tett feltevéseken kívül tegyük még fel, hogy van olyan $\mathbf{y}\in L$ vektor, melyre

$$G(\mathbf{y}) > p. \tag{3.4}$$

Ekkor a feladatot megoldó eljárás második fázisa vagy véges és az utolsó $\mathbf{x}_N$ vektorral teljesül a (3.2) reláció, vagy végtelen és teljesül a (3.3) reláció. L továbbra is a feladat feltételi egyenlőtlenségeinek eleget tevő vektorok halmazát jelenti.

Bizonyítás. Azt kell belátnunk, hogy teljesülnek a 3.1. tétel I—IV. feltételei. Az I., II. feltételek triviálisan teljesülnek. A III. feltételt a (2.1) feladatra korábban már bevezettük. Egyedül a IV. feltétel teljesülését kell tehát ellenőriznünk. Indirekt úton járunk el. Feltesszük, hogy van olyan $\mathbf{x}\in L$, melyre $G(\mathbf{x})=p$ és minden $\mathbf{y}\in D$ esetén

$$\nabla G(\mathbf{x})\,[\mathbf{y}-\mathbf{x}] \leqq 0. \tag{3.5}$$

A $\log G$ függvény az egész téren véges értékű és konkáv. Következik tehát, hogy minden $\mathbf{y}\in R^n$ esetén fennáll az alábbi egyenlőtlenség

$$\log G(\mathbf{y})-\log G(\mathbf{x}) \leqq \nabla \log G(\mathbf{x})\,[\mathbf{y}-\mathbf{x}] = \frac{1}{G(\mathbf{x})}\nabla G(\mathbf{x})\,[\mathbf{y}-\mathbf{x}]. \tag{3.6}$$

Ha $\mathbf{y}\in L$, akkor mivel $G(\mathbf{x})>0$, (3.5) figyelembevételével az adódik, hogy

$$G(\mathbf{y}) \leqq G(\mathbf{x}) = p. \tag{3.7}$$

Ellentmondásra jutottunk; van tehát olyan $\mathbf{y}\in L$, melyre teljesül a (3.1) egyenlőtlenség. Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

Az első fázis végességével kapcsolatos állításunkat az alábbi tételben foglaljuk össze.

3.3. TÉTEL. A (2.1) feladattal kapcsolatban eddig tett feltevéseken kívül tegyük még fel, hogy van olyan $\mathbf{y}\in K$ vektor, melyre teljesül a (3.4) egyenlőtlenség. Ekkor tetszőleges $\mathbf{z}_1\in K$ vektorból kiindulva véges sok lépéssel eljutunk egy olyan vektorhoz, mely eleme az L halmaznak.

Bizonyítás. Az első fázis módszere a klasszikus *gradiens módszer*, hivatkozhatnánk tehát az azzal kapcsolatos konvergencia tételre. Az egységes tárgyalás érdekében mégis a 3.1. tételre hivatkozunk. A 3.1. tételből azonnal következik, hogy ha az első fázis módszerét nem a (2.13), hanem a

$$\begin{gathered} \mathbf{a}_i'\mathbf{z} \geqq b_i, \quad i\in I, \\ \min\{-\log G(\mathbf{z})\} \end{gathered} \tag{3.8}$$

feladatra alkalmazzuk, akkor a nyert $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \ldots$ sorozat vagy véges és az utolsó $\mathbf{z}$ vektor minimalizálja a (3.8) feladat célfüggvényét, vagy fennáll a

$$\lim_{k\to\infty}\{-\log G(\mathbf{z}_k)\} = \min_{\mathbf{z}\in K}\{-\log G(\mathbf{z})\} \tag{3.9}$$

reláció. A (3.8) feladathoz tartozó, (2.16) típusú feladat a következő

$$\begin{gathered} \mathbf{a}_i'\mathbf{z} \geqq b_i, \quad i\in I, \\ \min\left\{-\frac{1}{G(\mathbf{z}_k)}\nabla G(\mathbf{z}_k)\,[\mathbf{z}-\mathbf{z}_k]\right\}. \end{gathered} \tag{3.10}$$

A (3.9), (3.10) feladatok célfüggvényei csak egy pozitív konstans szorzóban különböznek egymástól, az optimális megoldások halmazai tehát azonosak. Ugyanez vonatkozik a k-adik iteráció második részére is, amikor a lépéshosszt állapítjuk meg, hiszen mindegy, hogy a $-G$, vagy a $-\log G$ függvényt minimalizáljuk. Ha tehát a (2.13) feladatra alkalmazott eljárással származtatunk egy $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \ldots$ sorozatot, ez alkalmas sorozat a (3.8) feladatra alkalmazott eljárás szempontjából is és így véges sorozat esetén az utolsó $\mathbf{z}_T$ vektor minimalizálja a $-\log G$, tehát egyben a $-G$ függvényt, végtelen sorozat esetén pedig (3.9) figyelembevételével azt kapjuk, hogy

$$\lim_{k\to\infty} \{-G(\mathbf{z}_k)\} = \min_{\mathbf{z}\in K} \{-\log G(\mathbf{z})\}. \tag{3.11}$$

Mivel van olyan $\mathbf{y}\in K$, melyre teljesül a $G(\mathbf{y})>p$ egyenlőtlenség, az eljárás során véges sok lépéssel eljutunk olyan vektorhoz, mely eleme az L halmaznak. Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

4. A nemlineáris feltételi függvény gradiensének meghatározása

A (2.1) feladat megoldó algoritmusának mind az első, mind a második fázisában szükségünk van a $G(\mathbf{x})$ függvény gradiensének értékeire. Ezenkívül természetesen szükségünk van függvényértékekre is, ez utóbbiak meghatározási módjára a 6. szakaszban még visszatérünk. Most azt mutatjuk meg, hogy ugyanaz a módszer, amelyet $G(\mathbf{x})$ kiszámításakor alkalmazunk, lényegében alkalmas $\nabla G(\mathbf{x})$ kiszámítására is. Míg azonban $G(\mathbf{x})$ kis kiszámításához az m-dimenziós normális eloszlás eloszlásfüggvényének értékét kell meghatározni adott helyen és adott paraméterek esetén, addig $\nabla G(\mathbf{x})$ kiszámításához az $m-1$-dimenziós normális eloszlás eloszlásfüggvényének bizonyos értékei szükségesek.

Jelölje $\varphi(\mathbf{z}; \mathbf{C})$ a (2.3) sűrűségfüggvényt és $\Phi(\mathbf{z}; \mathbf{C})$ az ehhez tartozó eloszlásfüggvényt. Vezessük be továbbá a következő jelöléseket:

$$\begin{gathered} L_i(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sigma_i}(\mathbf{a}_i' \mathbf{x} - b_i), \quad i = 1, \ldots, m, \\ \mathbf{L}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} L_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ L_m(\mathbf{x}) \end{pmatrix}. \end{gathered} \tag{4.1}$$

A $G(\mathbf{x})$ függvény a következő alakba írható:

$$G(\mathbf{x}) = \Phi(\mathbf{L}(\mathbf{x}); \mathbf{C}). \tag{4.2}$$

A valószínűségelméletből ismeretes, hogy ha $F(\mathbf{z})=F(z_1, \ldots, z_m)$ egy R^m-beli folytonos eloszlás eloszlásfüggvénye, mely együttes eloszlásfüggvénye a $\zeta_1, \ldots, \zeta_m$ valószínűségi változóknak, akkor a $\zeta_2, \ldots, \zeta_m$ valószínűségi változók $F(z_2, \ldots, z_m | z_1)$ szimbólummal jelölt $\zeta_1=z_1$ feltétel melletti feltételes eloszlásfüggvénye és az F függvény z_1 szerinti parciális deriváltja között fennáll a

$$\frac{\partial F(z_1, \ldots, z_m)}{\partial z_1} = F(z_2, \ldots, z_m | z_1) f_1(z_1) \tag{4.3}$$

egyenlőség, ahol $f_1(z)$ a ζ_1 valószínűségi változó sűrűségfüggvénye. Hasonló egyenlőség áll fenn a többi változó szerinti deriváltra. A (4.3) formulát a $\Phi(\mathbf{z}; \mathbf{C})$ eloszlás-függvényre alkalmazva, azt kapjuk, hogy

$$\frac{\partial \Phi(\mathbf{z};\,\mathbf{C})}{\partial z_1} = \Phi(z_2, \ldots, z_m | z_1)\varphi(z_1), \tag{4.4}$$

ahol $\varphi(z)$ a standard normális eloszlás sűrűségfüggvénye. Ismeretes, hogy

$$\Phi(z_2, \ldots, z_m | z_1) = \Phi\left(\frac{z_2 - r_{12}z_1}{\sqrt{1-r_{12}^2}}, \ldots, \frac{z_m - r_{1m}z_1}{\sqrt{1-r_{1m}^2}};\, \mathbf{S}^{(1)}\right), \tag{4.5}$$

ahol az $\mathbf{S}^{(1)}$ korrelációmátrix a következő $s_{ik}^{(1)}$ elemekből áll:

$$s_{ik}^{(1)} = \frac{r_{ik} - r_{i1}r_{k1}}{\sqrt{1-r_{i1}^2}\sqrt{1-r_{k1}^2}}, \quad i, k = 2, \ldots, m. \tag{4.6}$$

Hasonló formulák írhatók fel abban az esetben, amikor z_1 szerepét $z_2, \ldots, z_m$ valamelyike veszi át. A megfelelő korreláció mátrixokat $\mathbf{S}^{(2)}, \ldots, \mathbf{S}^{(m)}$ jelölik.

Az $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ vektorok komponenseire is célszerű jelölést bevezetni. Az $\mathbf{a}_j$ vektor komponenseit jelöljék rendre az $a_{j1}, a_{j2}, \ldots, a_{jn}$ szimbólumok, $j = 1, \ldots, m$. Ezek után felírjuk $\nabla G(\mathbf{x})$ kifejezését. A kellemetlen jelölés elkerülése céljából e vektor komponenseit adjuk meg és nem foglaljuk össze ezeket vektor formájában. E komponensek a következők

$$\begin{aligned}
&\Phi\left(\frac{L_2(\mathbf{x}) - r_{12}L_1(\mathbf{x})}{\sqrt{1-r_{12}^2}}, \ldots, \frac{L_m(\mathbf{x}) - r_{1m}L_1(\mathbf{x})}{\sqrt{1-r_{1m}^2}};\, \mathbf{S}^{(1)}\right)\varphi(L_1(\mathbf{x}))\frac{a_{11}}{\sigma_1} + \ldots + \\
&+\Phi\left(\frac{L_1(\mathbf{x}) - r_{m1}L_m(\mathbf{x})}{\sqrt{1-r_{m1}^2}}, \ldots, \frac{L_{m-1}(\mathbf{x}) - r_{m,m-1}L_m(\mathbf{x})}{\sqrt{1-r_{m,m-1}^2}};\, \mathbf{S}^{(m)}\right)\varphi(L_m(\mathbf{x}))\frac{a_{m1}}{\sigma_m}, \\
&\qquad\vdots \\
&\Phi\left(\frac{L_2(\mathbf{x}) - r_{12}L_1(\mathbf{x})}{\sqrt{1-r_{12}^2}}, \ldots, \frac{L_m(\mathbf{x}) - r_{1m}L_1(\mathbf{x})}{\sqrt{1-r_{1m}^2}};\, \mathbf{S}^{(1)}\right)\varphi(L_1(\mathbf{x}))\frac{a_{1n}}{\sigma_1} + \ldots + \\
&+\Phi\left(\frac{L_1(\mathbf{x}) - r_{m1}L_m(\mathbf{x})}{\sqrt{1-r_{m1}^2}}, \ldots, \frac{L_{m-1}(\mathbf{x}) - r_{m,m-1}L_m(\mathbf{x})}{\sqrt{1-r_{m,m-1}^2}};\, \mathbf{S}^{(m)}\right)\varphi(L_m(\mathbf{x}))\frac{a_{mn}}{\sigma_m}.
\end{aligned} \tag{4.7}$$

A φ függvény értékeinek numerikus meghatározása nem jelent problémát. Végeredményben tehát ugyanaz az eloszlásfüggvény értékét számító módszer alkalmazható $G(\mathbf{x})$ és $\nabla G(\mathbf{x})$ meghatározására.

5. A közgazdasági probléma megfogalmazása

A negyedik ötéves terv tervezési módszereként az *OT Tervgazdasági Intézete* egy nagyméretű lineáris programozási modellt alkotott meg. A modell naturális és értékbeli mennyiségeket egyaránt tartalmaz. Ebből a nagyméretű, egyébként ágazatok szerint dekomponált struktúrájú modellből kiragadtuk a villamosenergia-ipari ágazathoz tartozó változókat, központi és szektorfeltételeket és ezekből megalkottunk egy lineáris programozási feladatot, melyben a célfüggvény értéke a nyereséget jelenti és ezt kell maximalizálni. A többi ágazatról közben feltételeztük, hogy azok rögzített állapotban vannak. A modell kialakításakor szerepet játszottak a villamosenergia-ipar sajátosságai: hosszúak a beruházási átfutási idők, a tüzelőanyagok helyettesíthetők stb. A modell változói között vannak a termelés a már meglevő kapacitáson, a tervidőszak közben elkészülő létesítmények termelései, különbséget téve a felhasznált tüzelőanyagfajták között, a villamosenergia importja, exportja, külön a szocialista és külön a tőkés viszonylatban, az új erőművekhez kapcsolódó fejlesztési változók, a beruházások finanszírozásához szükséges pénzügyi eszközöket figyelembe vevő változók. A korlátozó feltételek között szerepelnek a létszám felhasználásra és a beruházási megkötöttségekre vonatkozó feltételek, a hitel, a deviza, a költségvetési lehetőségek feltételei, valamint a villamosenergia igényeket kifejező feltételek.

A modell számszerűsítését a már említett nagy modell adatai alapján végeztük, amelyeket egyrészt a koordinációs tervszámítások, másrészt a hivatalos statisztikák felhasználásával határoztak meg. Minthogy a tervmutatók előrejelzésen alapulnak, bizonytalanságot hordoznak (ehhez a bizonytalansághoz képest a statisztikai adatok bizonytalansága véleményünk szerint elhanyagolható), ez indokolta a sztohasztikus programozási modell megalkotását. Közgazdasági tartalmuk analizálása után a determinisztikus alapmodell négy feltételét tekintettük sztohasztikus feltételnek, tehát a (2.1) modellben $m=4$.

Az alábbiakban körvonalazzuk a sztohasztikusnak tekintett feltételek eredeti, determinisztikus modellbeli tartalmát és a négy jobb oldal jelentését. A b_1 jobboldali érték a tervezett negatív szaldót (egyenleget) jelenti, a megfelelő feltétel pedig azt írja elő, hogy a szocialista viszonylatú külkereskedelmi mérleg egyenlege (export-import) ne legyen rosszabb a tervezett értéknél. Hasonló az értelmezése a b_2 jobboldali értéknek és a megfelelő feltételnek, most azonban tőkés viszonylatról van szó. A harmadik és a negyedik sztohasztikus feltétel determinisztikus elődjei a villamosenergiaiparnak a többi ágazattal való kapcsolatát írják le. A b_3 értéke egyenlő a villamosenergia-iparon kívüli többi termelőágazatoknak és a nem termelő szektoroknak a villamosenergia-iparból származó ráfordításainak az összegével. A harmadik feltétel a népgazdasági input-output táblából a villamosenergia-iparnak megfelelő sor tartalmi összefüggését írja le, vagyis azt a követelményt fejezi ki, hogy a villamosenergia-ipari ágazatra vonatkozóan a társadalmi össztermék forrásának és felhasználásának értékbeli egyensúlya biztosítva legyen. Végül b_4 egyenlő a villamosenergia-iparon kívüli termelő ágazatok és a nem termelő szektorok együttes minimális villamosenergia igényével. A megfelelő feltétel egy naturális mértékegységben kifejezett villamosenergia termékmérleg.

A sztohasztikus programozási modellben a sztohasztikus feltételek jobb oldalain $b_1+\sigma_1\beta_1$, $b_2+\sigma_2\beta_2$, $b_3+\sigma_3\beta_3$, $b_4+\sigma_4\beta_4$ állnak. E valószínűségi változókról feltettük, hogy együttes eloszlásuk normális. Az együttes eloszlás paramétereit számszerűen a 7. szakaszban adjuk meg.

6. A számítógépes program rövid ismertetése

A (2.1) modell számítógépes programjának részletes ismertetése megtalálható a [2] dolgozatban. Itt csupán a legfontosabb részekről nyújtunk tájékoztatást.

A legfőbb problémát a $\beta_1, \ldots, \beta_m$ valószínűségi változók együttes eloszlásfüggvénye értékeinek kiszámítása jelentette. Emlékeztetünk arra, hogy a $G(\mathbf{x})$ függvény értékeinek és gradiens értékeinek meghatározásakor lényegében a Φ függvény értékeit kell meghatároznunk különböző helyeken (lásd a (4.2) és a (4.7) formulákat). A Φ függvény értékeinek meghatározását egy módosított *Monte Carlo* integrálási módszerrel működő szubrutin hajtja végre. A $\varphi(\mathbf{z}; \mathbf{C})$ függvénynek a $\{\mathbf{z}|\mathbf{z}\leqq\mathbf{u}\}$ halmazon vett integrálját a következő módon közelítjük. Választunk egy $\mathbf{u}_0$ vektort oly módon, hogy a $\{\mathbf{z}|\mathbf{u}_0\leqq\mathbf{z}\leqq\mathbf{u}\}$ halmazon vett integrál igen jó közelítéssel megegyezzék az előbbi halmazon vett integrállal. Ezt az $\mathbf{u}_0$ vektort rögzítjük. Ezután a $\{\mathbf{z}|\mathbf{u}_0\leqq\mathbf{z}\leqq\mathbf{u}\}$ halmazon egyenletes eloszlás szerint választunk igen sok véletlen pontot, majd vesszük az ezekhez tartozó függvényértékek számtani átlagát. Lehetőség van arra, hogy gyakorlatilag kielégítő biztonsággal megmondjuk, hogy előírt maximális relatív hiba esetén hány véletlen pontot kell választanunk. A konkrét modellben négydimenziós eloszlás szerepel. Az eloszlásfüggvény egy értékének a meghatározása 5% relatív hiba megengedése mellett, 0,5 másodpercig tartott.

Különös gondot kellett fordítani a lépéshossz megállapításakor az $\mathbf{x}_k$ pontból az $\mathbf{x}_k^*$ pont irányába haladó félegyenesnek a feltételek által meghatározott halmaz határával való metszéspontjának meghatározására. A normális eloszlás értékeit kiszámító szubrutin alkalmazása nem ad pontos értéket, a pontos érték a számított értékek várható értéke csupán. A metszéspont meghatározását egy lépegető algoritmus végzi, amely a félegyenesen előre-hátra mozogva, a lépéseket egyre csökkentve találja meg a keresett pontot, illetve visz annak közelébe.

Szükség volt egy „optimalitási kritérium" megfogalmazására. Erre a célra alkalmas egy olyan szabály is, mely y_{opt} értékével kapcsolatos. Célszerűbbnek tartottuk azonban a nagyobb szigorúságot ebben a vonatkozásban. Az $\mathbf{x}_k$ vektort akkor tekintjük „optimálisnak", ha az $\mathbf{x}_{k+1}$ vektorhoz tartozó célfüggvény értéknek és az $\mathbf{x}_k$ vektorhoz tartozó célfüggvény értéknek az eltérése legfeljebb az utóbbi 1%-a, a komponensekben külön-külön pedig legfeljebb 2%-os az eltérés.

A számításokat a MTA CDC 3300 típusú számítógépén végeztük. A gépen a program csak *overlay* szervezésben fért el. A program egy főprogramból és hat overlay-ből áll. A főprogram az egyes overlay-k hívását végzi. A hat overlay közül öt a szimplex módszer futtatásához szükséges szubrutinokat tartalmazza. A hatodik overlay tartalmazza a 2. szakaszban leírt iterációs módszer futtatásához szükséges szubrutinokat, valamint a normális eloszlás eloszlásfüggvényének kiszámításához szükséges szubrutinokat.

A feladatot két egymáshoz hasonló programmal kellett lefuttatni. Az egyik az első fázis, a másik a második fázis futtatását végezte.

7. Számszerű adatok és eredmények

A konkrét modell a következő alakú:

$$
\begin{gathered}
G(\mathbf{x}) = P(\mathbf{a}_i'\mathbf{x} \geqq \sigma_i\beta_i + b_i, \quad i = 1, 2, 3, 4) \geqq p, \\
\mathbf{a}_i'\mathbf{x} \geqq b_i, \quad i = 5, \ldots, 110, \\
\min \mathbf{c}'\mathbf{x}.
\end{gathered} \tag{7.1}
$$

A sztohasztikus feltételek bal oldalain álló lineáris függvények az alábbi módon specializálódnak

$$
\begin{aligned}
\mathbf{a}_1'\mathbf{x} &= -25x_{25},\\
\mathbf{a}_2'\mathbf{x} &= -16{,}67x_{26},\\
\mathbf{a}_3'\mathbf{x} &= 0{,}8696x_{24}+x_{40},\\
\mathbf{a}_4'\mathbf{x} &= 0{,}9(x_1+x_2+x_6+x_7)-0{,}115x_{24}.
\end{aligned}
\tag{7.2}
$$

A sztohasztikus feltételek jobb oldalain álló b_1, b_2, b_3, b_4 várható értékek és $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ szórások számszerű értékei a következők:

$$
\begin{aligned}
b_1 &= -48\,313, & \sigma_1 &= 483,\\
b_2 &= -426, & \sigma_2 &= 4,\\
b_3 &= 16\,000, & \sigma_3 &= 160,\\
b_4 &= 19\,000, & \sigma_4 &= 195.
\end{aligned}
\tag{7.3}
$$

A $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ valószínűségi változók várható értékei 0-val, szórásai 1-gyel egyenlők, korreláció mátrixuk pedig az alábbi $\mathbf{C}$ mátrix

$$
\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & -0{,}8 & 0{,}4 & 0{,}4 \\ -0{,}8 & 1 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}4 & 0{,}1 & 1 & 0{,}9 \\ 0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}9 & 1 \end{pmatrix}.
\tag{7.4}
$$

A (7.1) feladatban szereplő lineáris feltételeket két csoportba soroljuk. Az első csoportbeliekben az $\mathbf{a}_5'\mathbf{x}, \ldots, \mathbf{a}_{52}'\mathbf{x}$ lineáris függvények szerepelnek. Ezek részletes leírását a függelékekben adjuk meg. A második csoportba tartozó feltételek az egyes változókra vonatkozó alsó, illetve felső korlátokat tartalmazzák. Ezeket az alábbiakban soroljuk fel:

$$
\begin{aligned}
& x_1 \leqq 8300\\
4460 \leqq\ & x_6 \leqq 6000\\
40 \leqq\ & x_7 \leqq 50\\
4400 \leqq\ & x_8 \leqq 4800\\
& x_9 \leqq 1\\
& x_{10} \leqq 1\\
& x_{11} \leqq 1\\
& x_{12} \leqq 1\\
& x_{13} \leqq 1\\
& x_{16} \leqq 1400\\
6000 \leqq\ & x_{19}\\
& x_{24} \leqq 18400\\
52{,}5 \leqq\ & x_{38}\\
& x_{41} \leqq 1130{,}43\\
& x_i \geqq 0, \text{ ha az } x_i \text{ változóra}
\end{aligned}
\tag{7.5}
$$

pozitív alsó korlátot nem írunk elő.

A célfüggvény a következő (a nyereség (-1)-szerese):

$$c'\mathbf{x} = x_{35} - x_{36}, \tag{7.6}$$

a megkívánt valószínűségi szint pedig $p=0{,}9$.

Első fázis. Induló megoldás gyanánt a determinisztikus alapfeladat $\mathbf{x}_{\text{lin}}$ szimbólummal jelölt optimális megoldását választottuk. Kiszámítottuk a G függvény $\mathbf{x}_{\text{lin}}$ vektorhoz tartozó értékét. Ereményként azt kaptuk, hogy

$$G(\mathbf{x}_{\text{lin}}) = 0{,}09. \tag{7.7}$$

Az $\mathbf{x}_{\text{lin}}$ optimális megoldás tehát igen alacsony megbízhatósági szintet biztosít a rendszer számára. Ezután a $G(\mathbf{x})$ függvényt maximalizáltuk a (7.1) feladat lineáris feltételei mellett. Öt iterációt végeztünk. A $G(\mathbf{x})$ függvény értékére az alábbi számok adódtak (az első az induló érték):

$$0{,}09; \quad 0{,}13; \quad 0{,}72; \quad 0{,}90; \quad 0{,}94; \quad 0{,}97.$$

Az első fázis befejeződhet, amint egy olyan valószínűséghez érünk, mely nagyobb, mint 0,9. Eszerint tehát négy iteráció is elég lett volna. Érdekelt azonban bennünket, hogy a lineáris feltételek milyen nagy valószínűséget engednek meg a (7.1) feladat első felében álló nemlineáris függvény számára. A számolást 0,97 értéknél abbahagytuk, mert az eddigiekből már kitűnt, hogy ez a valószínűség igen nagy lehet. Az első fázist a gép 19 perc alatt végezte el, ebből 8 perc 49 másodperc időt számolt, 5 perc 19 másodperc időt vett el a perifériákkal való adatcsere.

Második fázis. Induló $\mathbf{x}_1$ vektorként azt fogadtuk el, amely az első fázis végén adódott, amelyen tehát a G függvény értéke 0,97. A program 46 percig volt a gépben. 25 perc volt a számolási idő, 12 perc a perifériákkal való adatcsere ideje. A 46 percből

a szimplex módszer előkészítésének összideje	3 perc 10 másodperc,
a szimplex módszer futásának összideje	30 perc 39 másodperc,
a lépegető eljárás futásának összideje	6 perc 34 másodperc,
az optimalitási kritériumok vizsgálatának és egyéb műveleteknek az ideje	2 perc.

Az optimalizálás 9 lépésben történt meg. A célfüggvény (a nyereség (-1)-szerese) értékei az egyes iterációkban a következők voltak:

$$-4033; \quad -4101: \quad -4366{,}9; \quad -4367; \quad -4367{,}32;$$

$$-4367{,}48; \quad -4367{,}84 \quad -4367{,}9; \quad -4369{,}71; \quad -4369{,}86.$$

Meglepő, hogy a sztohasztikus programozási modell $\mathbf{x}_{\text{stoch}}$ szimbólummal jelölt optimális megoldásán a célfüggvény értéke megegyezik az $\mathbf{x}_{\text{lin}}$ vektorhoz tartozó célfüggvény értékével. Ami a G függvényt illeti, $G(\mathbf{x}_{\text{stoch}})=0{,}9$ adódott és emlékeztetünk arra, hogy $G(\mathbf{x}_{\text{lin}})=0{,}09$. Lehetséges tehát ugyanazt a nyereséget (és nem kisebbet!) elérni lényegesen nagyobb megbízhatósági szintet képviselő vektorral. Ez a jelenség mindenképpen figyelemre méltó, függetlenül az adatok és a konkrét alkalmazás jelentésétől, jellegétől.

Az $\mathbf{x}_{\text{lin}}$ és az $\mathbf{x}_{\text{stoch}}$ vektorok egymástól 10%-nál nagyobb mértékben az alábbi komponensekben térnek el

Komponens index	$\mathbf{x}_{\text{lin}}$	$\mathbf{x}_{\text{stoch}}=\mathbf{x}_{\text{stoch}}^{(1)}$ ($p=0{,}9$ esetén)
20	0	1233,9
21	994	13,7
22	1950	714,4
23	517	1586,2
43	2370	1655,8
46	2407	1007,3

Kísérletképpen az elkészült számítógépes programot lefuttattuk még további két adatrendszer esetén. Az eredményekről az alábbiakban számolunk be az *a)* és a *b)* pont alatt.

a) A p valószínűség kivételével minden további adatot változatlanul hagytunk. p értékét felemeltük, az új érték 0,95. A célfüggvény értéke a sztohasztikus programozási feladat optimális megoldása esetén $-4365{,}8$. Nem nagy tehát a különbség a célfüggvény korábbi optimum értékéhez képest. Jelentős eltérést kaptunk mind a korábbi $\mathbf{x}_{\text{lin}}$, mind a korábbi $\mathbf{x}_{\text{stoch}}$ vektorhoz képest az optimális megoldásban. Az alábbi táblázat ismét azokat a komponenseket tartalmazza, amelyek megfelelőiktől 10%-nál nagyobb mértékben térnek el:

Komponens index	$\mathbf{x}_{\text{lin}}$	$\mathbf{x}_{\text{stoch}}^{(2)}$ ($p=0{,}95$ esetén)
5	0	0,353
10	0,1	0,003
13	0,37	0,44
20	0	11,1
21	994	1080
41	830	938
46	2407	1,24

b) Megtartottuk az eredeti $p=0{,}9$ valószínűségi szintet és a korreláció mátrix kivételével minden egyéb adatot is változatlanul hagytunk. Az új korreláció mátrix a következő

$$\mathbf{C}_1=\begin{pmatrix} 1 & -0{,}7 & 0{,}3 & 0{,}3 \\ -0{,}7 & 1 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 0{,}1 & 1 & 0{,}9 \\ 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}9 & 1 \end{pmatrix}. \tag{7.8}$$

Jelen esetben a célfüggvény optimális értéke -4292, ami lényegesen eltér az eddigi célfüggvény optimum értékektől. A 10%-nál nagyobb mértékben eltérő komponensek a következők:

Komponens index	x_{lin}	$x^{(3)}_{stoch}$ (C_1 esetén)
5	0	10,1
12	0,23	0,11
13	0,37	0,5
20	0	341
21	994	879
22	1950	1602
23	514	720
41	830	930
45	2962	2429
46	2407	38

Az x_{lin}, $x^{(1)}_{stoch}$, $x^{(2)}_{stoch}$, $x^{(3)}_{stoch}$ vektorok részletes közgazdasági elemzését e cikk keretein belül nem tűztük célul magunk elé. Érdemes azonban felfigyelni arra a jelenségre, hogy a nagyobb megbízhatóságú tervek több szén és kevesebb fűtőolaj felhasználását javasolják endogén erőművekben.

Teljesség kedvéért az alábbiakban felsoroljuk a determinisztikus alapfeladat optimális megoldásának összes komponensét.

Komponens sorszáma	Komponens értéke	Komponens sorszáma	Komponens értéke
1	6585	24	18400
2	12839	25	1933
3	4640	26	26
4	8199	27	8078
5	0	28	967
6	4562	29	242
7	43	30	57049
8	4400	31	2567
9	0,69	32	1426
10	0,1	33	994
11	0	34	110
12	0,23	35	94
13	0,37	36	4462
14	9134	37	519
15	568	38	115
16	1327	39	3224
17	499	40	1958
18	0	41	830
19	9339	42	2050
20	0	43	2370
21	994	44	3092
22	1950	45	2962
23	514	46	2407

IRODALOM

[1] BÁGER G., MORVA T. és SZABÓ L., „A negyedik ötéves terv naturális, értékbeli és pénzügyi programozási modellje", *OT Tervgazdasági Intézet Közleményei* 6 (1971) 55—130.

[2] DEÁK I., „Egy sztohasztikus programozási modell számítógépes kiértékelése", *MTA Számítástechnikai Központ Közleményei* 9 (1972) 33—49.

[3] GANCZER S. (szerk.), *Népgazdasági tervezés és programozás* (Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1973)

[4] PRÉKOPA A., "On probabilistic constrained programming", in *Proceedings of the Princeton Symposium on Mathematical Programming* (Princeton University Press, Princeton, N. J. 1970) 113—138.

[5] PRÉKOPA A., „Sztohasztikus rendszerek optimalizálási problémáiról", doktori értekezés. Magyar Tudományos Akadémia, Budapest, 1970.

[6] PRÉKOPA A., „Logarithmic concave measures with applications to stochastic programming", *Acta Scientiarum Mathematicarum* 32 (1971) 301—316.

[7] PRÉKOPA A., „A *megengedett irányok* elnevezésű nemlineáris programozási módszer kiterjesztése kvázikonkáv feltételi függvények esetére", *MTA Számítástechnikai Központ Közleményei* 9 (1972) 3—16.

[8] PRÉKOPA, A., "Contributions to the theory of stochastic programming", *Mathematical Programming* 4 (1973) 202—221.

[9] ZOUTENDIJK, G., *Methods of Feasible Directions* (Elsevier Publishing Company, Amsterdam and New York, 1960).

(Beérkezett: 1974. február 23.)

PRÉKOPA ANDRÁS
MTA SZÁMÍTÁSTECHNIKAI ÉS AUTOMATIZÁLÁSI KUTATÓ INTÉZET
1250 BUDAPEST I., ÚRI U. 49.
GANCZER SÁNDOR
ORSZÁGOS TERVHIVATAL
1051 BUDAPEST V., ARANY JÁNOS U. 6—8.
DEÁK ISTVÁN
MTA SZÁMÍTÁSTECHNIKAI ÉS AUTOMATIZÁLÁSI KUTATÓ INTÉZET
1250 BUDAPEST I., ÚRI U. 49.
PATYI KÁROLY
OT TERVGAZDASÁGI INTÉZET
1051 BUDAPEST V., MÜNNICH FERENC U. 13—15.

THE STABIL STOCHASTIC PROGRAMMING MODEL AND ITS EXPERIMENTAL APPLICATION TO THE ELECTRICAL ENERGY INDUSTRY OF THE HUNGARIAN ECONOMY

A. PRÉKOPA, S. GANCZER, I. DEÁK AND K. PATYI

The model STABIL is that special case of the model

$$G(\mathbf{x}) = P(g_i(\mathbf{x}) \geqq \zeta_i, \quad i = 1, \ldots, m) \geqq p,$$

$$g_i(\mathbf{x}) \geqq b_i, \quad i = m+1, \ldots, m+M,$$

$$\min f(\mathbf{x})$$

in which the functions $g_1, \ldots, g_m, f$ are linear. This model is applied to the fourth Five-Year Plan of the electrical energy industry of Hungary. The model is described in detail together with the solving algorithm and the computer program system. Numerical results are presented.

1. FÜGGELÉK

A változók listája

A változó sorszáma és dimenziója	A változó tartalma
1 10^6kWó	Villamosenergia termelése egzogén kapacitáson.
2 10^6kWó	Villamosenergia termelése endogén kapacitáson.
3 10^6kWó	Villamosenergia termelése endogén kapacitáson, szénnel.
4 10^6kWó	Villamosenergia termelése endogén kapacitáson, szénhidrogénnel.
5 10^6kWó	Villamosenergia termelése endogén kapacitáson, atomerőműben.
6 10^6kWó	Villamosenergia import szocialista viszonylatban.
7 10^6kWó	Villamosenergia import tőkés viszonylatban.
8 10^6kWó	Egyéb villamosenergia-ipari termelés.
9 %/100	Dunamenti erőmű II. beruházása, befejezés 1975-ben.
10 %/100	Dunamenti erőmű II. beruházása, befejezés 1977-ben.
11 %/100	Paksi atomerőmű beruházása, befejezés 1975-ben.
12 %/100	Paksi atomerőmű beruházása, befejezés 1978-ban.
13 %/100	Új szénhidrogén erőmű beruházása, befejezés 1978-ban.
14 10^6Ft	Beruházás finanszírozás vállalatfejlesztési alapból.
15 10^6Ft	Forgóalap finanszírozás vállalatfejlesztési alapból.
16 10^6Ft	Beruházás finanszírozás középlejáratú hitelből.
17 10^6Ft	Állami támogatás.
18 10^6Ft	Tartós betét.
19 10^3t	Szénfelhasználás mennyisége egzogén erőműben.
20 10^6m^3	Földgázfelhasználás mennyisége egzogén erőműben.
21 10^3t	Fűtőolaj-felhasználás mennyisége egzogén erőműben.
22 10^6m^3	Földgáz felhasználás mennyisége endogén erőműben.
23 10^3t	Fűtőolaj-felhasználás mennyisége endogén erőműben.
24 10^6Ft	Villamosenergia-ipari ágazati termelési érték.
25 10^6Ft	Villamosenergia-ipari ágazati szocalista import érték.
26 10^6Ft	Villamosenergia-ipari ágazati tőkés import érték.
27 10^6Ft	Anyagköltség.
28 10^6Ft	Bérköltség.
29 10^6Ft	Közteher.
30 10^6Ft	Állóeszköz-állomány.
31 10^6Ft	Amortizáció.
32 10^6Ft	Állóeszköz-lekötési járulék.
33 10^6Ft	Forgóeszköz-lekötési járulék.
34 10^6Ft	Egyéb költségek.
35 10^6Ft	Bérfejlesztés.
36 10^6Ft	Adóalapú nyereség.
37 10^6Ft	Szubvenció.
38 10^6Ft	Részesedési alap.
39 10^6Ft	Fejlesztési alap.
40 10^6Ft	Villamosenergia-ipari ágazati import érték.
41 10^6Ft	Ágazati összes gépigény.
42 10^6Ft	Beruházási maradék 1971-ben
43 10^6Ft	Beruházási maradék 1972-ben
44 10^6Ft	Beruházási maradék 1973-ban
45 10^6Ft	Beruházási maradék 1974-ben
46 10^6Ft	Beruházási maradék 1975-ben

2. FÜGGELÉK

A feltételek listája

A feltétel sorszáma	A feltétel tartalma
1 (Sztohasztikus feltétel)	Külkereskedelmi mérleg, rubel viszonylat.
2 (Sztohasztikus feltétel)	Külkereskedelmi mérleg, dollár viszonylat.
3 (Sztohasztikus feltétel)	Társadalmi termékmérleg, villamosenergia-ipari ágazat.
4 (Sztohasztikus feltétel)	Termékmérleg, villamosenergia.
5	A lakosság bevételeinek és kiadásainak mérlege.
6	Kiemelt beruházási korlát 1971-ben.
7	Kiemelt beruházási korlát 1972-ben.
8	Kiemelt beruházási korlát 1973-ban.
9	Kiemelt beruházási korlát 1974-ben.
10	Kiemelt beruházási korlát 1975-ben.
11	Ki nem emelt beruházás és szinttartás korlátozó feltétele.
12	Belföldi gépkeret.
13	Építési keret.
14	Szocialista importgép-keret.
15	Tőkés importgép-keret.

A feltétel sorszáma	A feltétel tartalma
16	Költségvetési juttatás korlátozása.
17	Állami költségvetés mérlege.
18	Társadalmi termék import mérleg, villamosenergia-ipar ágazat.
19	Termékmérleg, szén.
20	Termékmérleg, földgáz.
21	Termékmérleg, fűtőolaj.
22	Építési igény 1975-ben.
23	Villamosenergia-ipari ágazati import érték.
24	Ágazati összes gépigény.
25	Villamosenergia-ipari ágazati termelési érték.
26	Villamosenergia-ipari ágazati szocialista import érték.
27	Villamosenergia-ipari ágazati tőkés import érték.
28	Anyagköltség.
29	Bérköltség.
30	Közteher.
31	Állóeszköz-állomány.
32	Amortizáció.
33	Állóeszköz-lekötési járulék.
34	Forgóeszköz-lekötési járulék.
35	Egyéb költségek.
36	Bérfejlesztés.
37	Adóalapú nyereség.
38	Szubvenció.
39	Részesedési alap.
40	Fejlesztési alap.
41	Egzogén termelés szénhidrogén felhasználási korlát.
42	1978. évi villamosenergia termékmérleg.
43	Termelés endogén kapacitáson.
44	Kapacitáskorlát, endogén, atom alap.
	Kapacitás korlát, endogén, szénhidrogén alap.
46	Kapacitás korlát, endogén, szén alap.
47	Egzogén termelés kalória fedezete.
48	Endogén termelés szénhidrogén fedezete.
49	Vállalati beruházások finanszírozási feltétele.
50	Forgóalap finanszírozási feltétel.
51	1971—74. évi vállalatfejlesztési alap korlát.
52	Vállalatfejlesztési alap korlát.

3. FÜGGELÉK

A feltételek típusa és a jobboldalak értéke

A feltétel sorszáma és	dimenziója	Típus és	jobboldali érték
5	(10^{6}Ft)	≧	1082,5
6	(10^{6}Ft)	≦	2808
7	(10^{6}Ft)	≦	3787
8	(10^{6}Ft)	≦	4861
9	(10^{6}Ft)	≦	4700
10	(10^{6}Ft)	≦	3600
11	(10^{6}Ft)	≦	−10461
12	(10^{6}Ft)	≦	4021
13	(10^{6}Ft)	≦	1798
14	(10^{6}Ft)	≦	1808
15	(10^{6}Ft)	≦	221
16	(10^{6}Ft)	≦	11528
17	(10^{6}Ft)	≧	5140
18	(10^{6}Ft)	≧	0
19	(10^{3}t)	≧	−18000
20	(10^{6}m^3)	≧	−1950
21	(10^{3}t)	≧	−1600
22	(10^{6}Ft)	≦	410
23	(10^{6}Ft)	=	0
24	(10^{6}Ft)	=	−113
25	(10^{6}Ft)	=	0
26	(10^{6}Ft)	=	0
27	(10^{6}Ft)	=	0
28	(10^{6}Ft)	=	0
29	(10^{6}Ft)	=	0
30	(10^{6}Ft)	=	0
31	(10^{6}Ft)	=	−53958
32	(10^{6}Ft)	=	0
33	(10^{6}Ft)	=	0
34	(10^{6}Ft)	=	0
35	(10^{6}Ft)	=	0
36	(10^{6}Ft)	=	0
37	(10^{6}Ft)	=	0
38	(10^{6}Ft)	=	−20
39	(10^{6}Ft)	=	−19,15
40	(10^{6}Ft)	=	24,2819
41	(10^{9}Kal)	≦	25654
42	(10^{6}kWó)	≦	15384
43	(10^{6}kWó)	=	0
44	(10^{6}kWó)	≦	0
45	(10^{6}kWó)	≦	319
46	(10^{6}kWó)	≦	4640
47	(10^{6}Kal)	=	0
48	(10^{6}Kal)	=	0
49	(10^{6}Ft)	=	−10461
50	(10^{6}Ft)	≦	1640
51	(10^{6}Ft)	=	9702
52	(10^{6}Ft)	≧	−104,28

4. FÜGGELÉK

Ebben a függelékben az 5,...,52 sorszámú feltételek bal oldalain álló lineáris függvények együtthatóit soroljuk fel. A 3. Függelékben látható, hogy a bal oldalon álló lineáris függvények és a jobb oldali érték között egyenlőség, illetve milyen irányú egyenlőtlenség teljesül. Nem törekedtünk tehát arra, hogy a lineáris feltételeket azonos típusúakká rendezzük a (2.1) feladat felírásnak megfelelően. A felsorolandó együtthatókat egy mátrixban elrendezve képzeljük el, ahol a mátrix sormutatói 5-től 52-ig, oszlopmutatói 1-től 46-ig futnak. Csak a zérótól különböző elemeket soroljuk fel.

Oszlopmutató	Sormutató	Az elem értéke	Oszlopmutató	Sormutató	Az elem értéke
1	25	0,5826	10	14	907,0000
1	29	0,0100	10	15	174,0000
1	42	1,1025	10	16	4769,0000
1	47	−3000,0000	10	22	30,0000
2	25	0,5826	10	24	57,0000
2	42	1,1025	10	42	−5040,0000
2	43	1,0000	11	6	712,0000
3	19	−1,8667	11	7	1240,0000
3	43	−1,0000	11	8	2291,0000
3	46	1,0000	11	9	2680,0000
4	43	−1,0000	11	10	1706,0000
4	45	1,0000	11	12	1085,0000
4	48	−2600,0000	11	13	1885,0000
5	43	−1,0000	11	14	3640,0000
5	44	1,0000	11	15	9,0000
6	25	0,5826	11	16	9954,0000
6	26	0,4236	11	17	26,8964
6	42	0,2025	11	22	278,0000
7	25	0,5826	11	24	800,8000
7	27	0,5958	11	29	−177,7300
7	42	0,2025	11	31	7654,0000
8	25	1,0000	11	39	−45,0557
8	47	−3409,0000	11	40	18,1593
9	6	810,0000	11	42	−5022,0000
9	7	1397,0000	11	44	−5580,0000
9	8	1400,0000	12	6	517,0000
9	9	911,0000	12	7	1045,0000
9	10	178,0000	12	8	2096,0000
9	12	1693,0000	12	9	2485,0000
9	13	905,0000	12	10	1511,0000
9	14	907,0000	12	12	875,0000
9	15	174,0000	12	13	1795,0000
9	16	4797,0000	12	14	3596,0000
9	17	28,0325	12	15	9,0000
9	22	36,0000	12	16	8264,0000
9	24	57,0000	12	22	260,0000
9	29	−186,4600	12	24	750,0000
9	31	4461,0000	12	42	−5022,0000
9	39	−46,9589	13	7	200,0000
9	40	18,9264	13	8	490,0000
9	42	−5040,0000	13	9	1210,0000
9	45	−5600,0000	13	10	1810,0000
10	6	803,0000	13	12	1510,0000
10	7	1390,0000	13	13	900,0000
10	8	1393,0000	13	14	700,0000
10	9	904,0000	13	15	130,0000
10	10	171,0000	13	16	3730,0000
10	12	1693,0000	13	22	240,0000
10	13	875,0000	13	24	1360,0000

Oszlopmutató	Sormutató	Az elem értéke	Oszlopmutató	Sormutató	Az elem értéke
13	42	−5040,0000	29	37	−1,0000
14	49	−1,0000	30	31	−1,0000
14	51	1,0000	30	32	0,0450
15	50	−1,0000	30	33	0,0250
15	51	1,0000	31	17	0,4000
16	37	−0,0550	31	32	−1,0000
16	49	−1,0000	31	37	−1,0000
16	52	−0,3330	31	40	0,6000
17	38	1,0000	32	17	1,0000
18	37	0,0300	32	33	−1,0000
18	51	1,0000	32	37	−1,0000
19	19	−1,0000	33	34	−1,0000
19	47	2700,0000	33	37	−1,0000
20	20	−1,0000	34	17	1,0000
20	41	8,4000	34	35	−1,0000
20	47	8400,0000	34	37	−1,0000
21	21	−1,0000	35	36	−1,0000
21	41	9,6000	35	39	−1,0000
21	47	9600,0000	35	53	−1,0000
22	20	−1,0000	36	17	0,5700
22	48	8400,0000	36	37	−1,0000
23	21	−1,0000	36	39	0,0499
23	48	9600,0000	36	40	0,3799
24	17	0,0158	36	53	1,0000
24	18	−0,1033	37	17	−1,0000
24	25	−1,0000	37	37	1,0000
24	28	0,4390	37	38	−1,0000
24	29	0,0560	38	5	1,0000
24	34	0,0540	38	39	−1,0000
24	35	0,0060	39	40	−1,0000
24	37	1,0000	39	52	1,0000
24	50	0,1200	40	18	1,0000
25	23	1,0000	40	23	−1,0000
25	26	−1,0000	41	24	−1,0000
26	23	1,0000	42	6	1,0000
26	27	−1,0000	42	11	−1,0000
27	28	−1,0000	43	7	1,0000
27	37	−1,0000	43	11	−1,0000
28	5	1,0000	44	8	1,0000
28	29	−1,0000	44	11	−1,0000
28	30	0,2500	45	9	1,0000
28	36	0,0970	45	11	−1,0000
28	37	−1,0000	46	10	1,0000
29	17	1,0000	46	11	−1,0000
29	30	−1,0000			

Alkalmazott Matematikai Lapok 1 *(1975) 23—36*

A GAUSS—JACOBI-FÉLE KVADRATÚRAKÉPLET HIBABECSLÉSE ÉS ANNAK NÉHÁNY ALKALMAZÁSA

FREUD GÉZA

Budapest

A szerző [2] előadásában komplex vonalintegrál segítségével fejezte ki a kvadratúraképlet hibáját és annak segítségével analitikus $f(z)$ esetén $n\to\infty$-re aszimptotikusan pontos becslést adott erre a hibára. Jelen dolgozatunkban, miután a hibatag levezetését ismertetjük, annak segítségével numerikus (minden rögzített n-re használható) becslést adunk a közelítő integrálképlet hibájára. Módszerünk első alkalmazásaként hibabecslést adunk a *Padé*-féle közelítő törtnek a függvénytől való eltérésére, amennyiben utóbbi *Stieltjes transzformált* alakjában állítható elő. Második alkalmazásként képletet adunk elliptikus integrálok pontos numerikus számítására.

1. Bevezetés

Ismeretes, hogy az

$$\int_0^1 f(x)\,dx \cong \frac{1}{6}f(0)+\frac{2}{3}f\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{6}f(1) \tag{1.1}$$

Simpson-féle közelítő kvadratúraképlet minden legfeljebb harmadfokú polinomra pontos, holott az alapul vett három adat $\left(f(0), f(1/2) \text{ és } f(1)\right)$ csak másodfokú polinomot határoz meg egyértelműen. Ez adta nyilván GAUSS számára az ösztönzést, hogy az alappontok megfelelő választásával „fokszámra optimális" kvadratúraeljárások szerkesztését vizsgálja. Meghatározta minden n-re azt az

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{kn} f(x_{kn}) \tag{1.2}$$

alakú közelítő képletet, amely a függvény n pontban felvett értékére épül és minden legfeljebb $(2n-1)$-edfokú polinomra pontos. Bebizonyítja azt is, hogy nem létezik olyan kvadratúraképlet, amely n darab függvényértéket használ fel és $2n$-edfokú polinomokra is pontos lenne. A GAUSS által szerkesztett (1.2) kvadratúra sorozat tehát ebben az értelemben optimális.

GAUSS vizsgálatait C. G. J. JACOBI egészítette ki. Kimutatta, hogy az (1.2) képletben fellépő x_{kn} „*Gauss*-féle abszcisszák" nem egyebek, mint a már korábban felfedezett $P_n(x)$ *Legendre-féle polinomok* gyökei.[1] JACOBI megjegyzését G. B. CHRISTOFFEL, majd T. J. STIELTJES általánosították[2].

[1] Korabeli feljegyzések szerint JACOBI dolgozatának megjelenése után GAUSS azt állította• hogy ezt ő is tudta, csak nem volt érkezése rá, hogy publikálja. Figyelemre méltó ezzel kapcsolatban› hogy (mint G. KOVALEWSKI rámutatott) GAUSS dolgozatában nem is idézte LEGENDRE kutatásait. (*Bolyai*-kutatók figyelmébe ajánlva!)

[2] A pusztán történeti érdekességű (nem idézett) források tekintetében a szerző [1] könyvére uta lunk.

Mi STIELTJES fogalmazásából indulunk ki: Legyen $v(x)$ egy $[-1, 1]$-ben értelmezett nem fogyó függvény, melynek értékkészlete nem véges. Ilyen $v(x)$-ek egy pozitív dv mértéket generálnak $[-1, 1]$-en. Továbbá létezik egy $\{p_n(dv; x)\}$ ortogonális polinomsorozat, melyet az alábbi tulajdonságai egyértelműen meghatároznak (lásd [1], I. 1.).

1) $p_n(dv; x)$ pontosan n-edfokú és benne x^n együtthatója, amit $\gamma_n(dv)$-vel jelölünk, pozitív.

2)

$$\int_{-1}^{1} p_n(dv; x) p_m(dv; x) dv(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad m \neq n, \\ 1, & \text{ha} \quad m = n. \end{cases}$$

STIELTJES, JACOBI ötletét használva, bebizonyította, hogy egy tetszőleges, legfeljebb $(2n-1)$-edfokú $P(x)$ polinom súlyozott integrálja előállítható

$$\int_{-1}^{1} P(x) dv(x) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{kn} P(x_{kn}) \tag{1.3}$$

alakban, ahol x_{kn} $(k=1, 2, ..., n)$ a $p_n(dv; x)$ polinom gyökei ([1], I. 3). Az x_{kn} gyökök mind valósak, egyszeres multiplicitásúak és $[-1, 1]$-be esnek ([1], I. 2.).

Az ortogonális polinomok rekurziós képletnek tesznek eleget, így gépi úton igen könnyen számíthatóak. A legfontosabb esetekben, pl. ha $dv(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta dx$, az x_{kn} gyökökre is részletes táblázatok állnak rendelkezésre. Az utóbb említett esetben $p_n(dv; x)$ a gyökök értékét nem befolyásoló konstans szorzótól eltekintve egyenlő az n-edik *Jacobi-féle polinommal.* Mindez lehetővé tette, hogy az (1.3) képletet a számítástechnikában széles körben alkalmazzák. Jól kell azonban ismernünk az alkalmazás körét.

Egy közelítő integrál számításánál a pontosság javítására két alapvető út kínálkozik. Az első lehetőség, hogy az integrációs utat sok kis (pl. egyenlő) részre osztjuk és minden egyes részszakaszhoz alkalmazunk egy egyszerű felépítésű „elemi kvadratúraképletet".

Ha az elemi kvadratúraképlet az

$$\int_{a}^{b} f(x) dx = \frac{1}{2}[f(a)+f(b)]$$

elemi közelítő képlet, úgy a közismert *„trapéz-szabályra"* jutunk. Ha viszont az (1.1) *Simpson-képletet* használjuk elemi kvadratúraként, úgy az

$$\int_{0}^{n} f(x) dx \cong \tag{1.4}$$

$$\cong \frac{1}{6}f(0)+\frac{2}{3}f\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{3}f(1)+ \dots +\frac{1}{3}f(n-1)+\frac{2}{3}f\left(n-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{6}f(n)$$

alakú *Simpson-féle közelítő kvadratúrához* jutunk.

Az ilyen elemi képletekből összerakott mozaikszerű kvadratúraképleteknek sok előnye van. Először is mi választhatjuk meg az alappontokat és ez növeli a betáplált függvényérték adatok pontosságát. Másodszor a képletben fellépő együtthatók racionális számok, tehát szisztematikus lekerekítési hiba nem lép fel. Végül (és ez sok esetben a legfontosabb) egységes módszert és egységes hibabecslést kapunk a primitív függvény meghatározására a felső határ minden értékére. Mindezek alapján, ha (mint rendesen) a függvény egy hibával erősen terhelt adatsorozat formájában adott és a függvény regularitásáról nincs a priori ismeretünk, úgy *Gauss—Jacobi* típusú kvadratúráknak nincs értelme.

Gyökeresen megváltozik a helyzet, ha tabellázni kívánunk egy függvényt, melyet egy explicit integrálképlet segítségével tudunk kifejezni. Utóbbira tipikus példaként a dolgozatunk végén részletesebben is tárgyalt elliptikus integrálokat említjük. Ilyen esetben érdemes az integrandust (amely általában egy vagy több paramétertől is függ) az irracionális x_{kn} pontokban nagy pontossággal meghatározni.

A dolgozat második fejezetében levezetjük a *Gauss—Jacobi* kvadratúrákra vonatkozó hibatagképletünket, amelyet a szerző először a dublini „*Numerikus Analizis*" konferencián tartott előadásán ismertetett [2]. A harmadik fejezetben a kapott eredmény segítségével hibabecslést vezetünk be, amely egyetlen egy segédfüggvény felhasználásával tetszőleges dv-re alkalmazható. A negyedik fejezetben hibabecslésünket folytonos függvények racionális törtfüggvényekkel való közelítésére alkalmazzuk. Az ötödik fejezetben elliptikus integrálok számítására adunk használható képletet.

2. A kvadratúraképlet hibatagjának integrálalakja

Legyen $l_{kn}(x)$ az a *Lagrange-féle interpolációs polinom*, amelyre

$$l_{kn}(x_{kn}) = 1 \quad \text{és} \quad l_{kn}(x_{jn}) = 0 \quad (j \neq k).$$

Az (1.3) kvadratúra képletbe $P(x)$ helyébe az $l_{kn}^2(x)$ $(2n-2)$-tedfokú polinomot helyettesítve[3]

$$0 < \int_{-1}^{1} l_{kn}^2(x)dv(x) = \lambda_{kn}. \tag{2.1}$$

Vagyis valamennyi λ_{jn} $(j=1, 2, \ldots, n)$ pozitív. Legyen most $R(x)$ egy olyan legfeljebb $(n-1)$-edfokú valós polinom, melyre $R(x_{kn})=1$. Az (1.3) képletbe $P(x)$ helyébe $R^2(x)$-et helyettesítve

$$\int_{-1}^{1} R^2(x)dv(x) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{jn} R^2(x_{jn}) \geqq \lambda_{kn} R^2(x_{kn}) = \lambda_{kn}.$$

Ez azt jelenti, hogy

$$\lambda_{kn} = \min \int_{-1}^{1} R^2(x)dv(x), \tag{2.2}$$

ahol (ismételjük) R olyan legfeljebb $(n-1)$-edfokú polinom, melyre $R(x_{kn})=1$.

[3] Itt felhasználtuk azt a feltételt, hogy $v(x)$ értékkészlete végtelen számosságú. Ha $v(x)$ olyan szakaszonként konstans függvény, melynek csak az $y_j \neq x_{kn}$ pontokban (vagy azok egy részén) van ugrása, úgy (2.1)-ből $\lambda_{kn}=0$ következne!

Írjuk fel az $R(x)$ polinomot

$$R(x) = \sum_{r=0}^{n-1} y_r p_r(dv; x)$$

alakban; ez lehetséges, mert $p_r(dv, x)$ pontosan r-edfokú. Ilyen módon a (2.2) szélsőérték feladat analitikus alakba írható: keressük a

$$\sum_{r=0}^{n-1} y_r^2 = \int_{-1}^{1} R^2(x)\,dv(x)$$

kvadratikus alak szélsőértékét a

$$\sum_{r=0}^{n-1} y_r p_r(dv; x_{kn}) = R(x_{kn}) = 1$$

feltétel mellett. Ez a szélsőérték λ_{kn}. A feladatot pl. a *Lagrange-féle multiplikátorok módszerével* megoldva kapjuk, hogy

$$\lambda_{kn} = \left\{\sum_{r=0}^{n-1} p_r^2(dv; x)\right\}^{-1}. \tag{2.3}$$

A (2.3) jobb oldalán szereplő négyzetösszeget könnyen átalakíthatjuk. A *Christoffel—Darboux összegezési képlet* szerint ([1], I. 4.)

$$\sum_{r=0}^{n-1} p_r(dv; x)p_r(dv; y) = \tag{2.4}$$

$$= \frac{\gamma_{n-1}(dv)}{\gamma_n(dv)} \frac{p_{n-1}(dv; y)p_n(dv; x) - p_n(dv; y)p_{n-1}(dv; x)}{x-y}.$$

Ebben a képletben tartson y x-hez. A *l'Hospital szabály* segítségével

$$\sum_{r=0}^{n-1} p_r^2(dv; x) = \frac{\gamma_{n-1}(dv)}{\gamma_n(dv)} [p_{n-1}(dv; x)p_n'(dv; x) - p_{n-1}'(dv; x)p_n(dv; x)]. \tag{2.5}$$

Kombináljuk a (2.3) és (2.5) képleteket:

$$\lambda_{kn}^{-1} = \frac{\gamma_{n-1}(dv)}{\gamma_n(dv)} p_n'(dv; x_{kn})p_{n-1}(dv; x_{kn}) \tag{2.6}$$

továbbá, mivel $x_{j,n-1}$ gyöke $p_{n-1}(dv; x)$-nek:

$$\lambda_{j,n-1}^{-1} = \sum_{r=0}^{n-2} p_r^2(dv; x) = \sum_{r=0}^{n-1} p_r^2(dv; x) = \tag{2.7}$$

$$= -\frac{\gamma_{n-1}(dv)}{\gamma_n(dv)} p_{n-1}'(dv; x)p_n(dv; x).$$

(2.6) és (2.7) segítségével nyerjük azt az összefüggést, amely eredményünk kiinduló pontja. Parciális törtekre bontással ugyanis

$$\frac{1}{p_{n-1}(dv;x)p_n(dv;x)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{p_{n-1}(dv;x_{kn})p_n'(dv;x_{kn})} \frac{1}{x-x_{kn}} +$$

$$+\sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{p_{n-1}'(dv;x_{j,n-1})p_n(dv;x_{j,n-1})} \frac{1}{x-x_{j,n-1}},$$

tehát (2.6) és (2.7)-ből

$$\frac{\gamma_n(dv)}{\gamma_{n-1}(dv)} \frac{1}{p_{n-1}(dv;x)p_n(dv;x)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_{kn}}{x-x_{kn}} - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\lambda_{j,n-1}}{x-x_{j,n-1}}. \tag{2.8}$$

Alapképletünket (2.8) segítségével nyerjük. Egy $f(x)$, $dv(x)$ szerint integrálható függvény integráljának meghatározására bevezetjük az

$$\int_{-1}^{1} f(x)dv(x) \sim Q_n(dv;f) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{kn} f(x_{kn}) \tag{2.9}$$

Gauss—Jacobi-féle közelítő képletet. Erről tudjuk, hogy ha legfeljebb $(2n-1)$-edfokú polinom, úgy az integrál pontos értékét szolgáltatja. STIELTJES ismert tétele szerint a (2.9) bal oldalán álló integrál „*Riemann—Stieltjes*" értelemben való létezéséből következik, hogy

$$\lim_{n\to\infty} Q_n(dv;f) = \int_{-1}^{1} f(x)dv(x). \tag{2.10}$$

2.1. TÉTEL (lásd [2]). Legyen C egy olyan egyszeresen összefüggő zárt $\mathfrak{C}$ tartomány határa, mely tartalmazza a $[-1, 1]$ szakaszt. Ha $f(z)$ a $\mathfrak{C}$-n analitikus függvény, akkor

$$Q_n(dv;f) - Q_{n-1}(dv;f) = \frac{\gamma_n(dv)}{\gamma_{n-1}(dv)} \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(z)\,dz}{p_{n-1}(dv;z)p_n(dv;z)}. \tag{2.11}$$

Ez a tétel (2.8)-ból és a rezidumtételből következik.

2.2. TÉTEL. Az előző tétel feltételeinek teljesülése esetén

$$\int_{-1}^{1} f(x)dv(x) = Q_n(dv;f) + \sum_{r=n+1}^{\infty} \frac{\gamma_r(dv)}{\gamma_{r-1}(dv)} \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(z)\,dz}{p_{n-1}(dv;z)p_n(dv;z)}. \tag{2.12}$$

Ez nyilván következik (2.11)-ből és (2.10)-ből.

3. Hibabecslések a közelítő kvadratúrára

A (2.11) integrálformula, ill. az abból levezetett (2.12) formula jól használható hibabecslés céljára. Egyik ilyen lehetőség, amelyre a dublini előadásunkban [2] mutattunk rá, az alábbi:

3.1. TÉTEL. Legyen $f(z)$ egy analitikus egész függvény, melynek „maximum-modulus" függvénye

$$M(f;r) = \max_{|z|\le r} |f(z)|, \tag{3.1}$$

akkor $\log v'(\cos\theta)\in\mathcal{L}$ esetén

$$\left|\int_{-1}^{1} f(x)\,dv(x) - Q_n(dv; f)\right| \leqq \tag{3.2}$$

$$\leqq \pi 2^{-2n+1} \max_{r>1} \frac{M(f; r)}{r^{2n}} \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log\left[v'(\cos\theta)|\sin\theta|\right] d\theta\right\}(1+\varepsilon_n),$$

ahol

$$\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0. \tag{3.3}$$

A 3.1 tétel érdekessége abban rejlik, hogy a (3.2) jobb oldalán szereplő π szorzó nem helyettesíthető π-nél kisebb számmal. Hátránya viszont, hogy a hibabecslés csak aszimptotikus, de nem numerikus. Az alábbiakban numerikus becslést adunk, amely pontosságban csak kis mértékben marad el a (2.12)-ből kapható igen pontos aszimptotikus becslésektől, melyeket [3]-ban tárgyaltunk. Először a $\frac{\gamma_{r-1}}{\gamma_r}$ tényezőket vesszük szemügyre. Ismeretes, hogy

$$\frac{\gamma_{r-1}(dv)}{\gamma_r(dv)} = \int_{-1}^{1} x p_{r-1}(dv; x) p_r(dv; x)\,dv(x) \leqq 1 \tag{3.4}$$

(lásd [1], I. fejezet, 10. feladat).

Továbbá, ha $\log v'(\cos\theta)\in\mathcal{L}$, akkor

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\gamma_{r-1}(dv)}{\gamma_r(dv)} = \frac{1}{2}. \tag{3.5}$$

A (3.2) aszimptotikus becslés levezetésénél dublini előadásunkban (3.5)-öt használtuk; ennek előnye, hogy így összehasonlítva (3.4)-gyel, egy 1/2 tényezőt nyerhetünk. Hátránya viszont, hogy a becslés csak $r\to\infty$ határátmenetben, aszimptotikusan érvényes. A számítástechnikus nyilván előnyben részesíti a (3.4) egyenlőtlenséget, hiszen ez minden r-re igaz. Átmeneti helyzetet foglalnak el azok a dv súlyok, melyekre a $\gamma_{r-1}(dv)/\gamma_r(dv)$ hányados elemi képlettel kifejezhető. Speciálisan, ha a súly $dv_{\alpha\beta}(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$, akkor a hozzá tartozó ortogonális polinomok a *Jacobi-polinomok* és

$$\frac{\gamma_{r-1}(dv_{\alpha\beta})}{\gamma_r(dv_{\alpha\beta})} = \frac{2}{2r+\alpha+\beta}\sqrt{\frac{r(r+\alpha+\beta)(r+\alpha)(r+\beta)}{(2r+\alpha+\beta-1)(2r+\alpha+\beta+1)}} \quad (r = 2, 3, \ldots). \tag{3.6}$$

Különösen fontos az $\alpha=\beta=-1/2$ speciális eset, mikor is egyszerűen

$$\frac{\gamma_{r-1}(dv_{-1/2,\,-1/2})}{\gamma_r(dv_{-1/2,\,-1/2})} = \frac{1}{2} \quad (r = 2, 3, \ldots). \tag{3.7}$$

Ebben az elvi fontosságú speciális esetben tehát minden rögzített r-re e kifejezés pontosan a (3.5) jobb oldalán álló határértékkel egyenlő. Az $\alpha=\beta=0$ speciális eset az eredeti *Gauss*-féle (1.2) kvadratúraképletre vezet. Ekkor

$$\frac{\gamma_{r-1}(dv_{00})}{\gamma_r(dv_{00})} = \frac{r}{\sqrt{4r^2-1}} \quad (r = 2, 3, \ldots). \tag{3.8}$$

A feladat nehezebbik része a (2.11) kifejezésében az integráljel alatt szereplő $\frac{1}{p_n(dv; z)}$ becslése. Dublini előadásunkban a SZEGŐ GÁBORtól származó és ortogonális polinomok „külső aszimptotikáját" szolgáltató képletet használtuk. Gyakorlati alkalmazás során ennek hátránya (csakúgy, mint a (3.5) reláció használatának), hogy a hibatagra csak aszimptotikát, de nem becslést kapunk. Ezt a hiányosságot sikerült a később készült dolgozatunkban kiküszöbölnünk. Ennek során egy jóval korábban talált becslésünket használtuk, mely első ízben a [1] könyvünkben jelent meg nyomtatásban.

3.2. SEGÉDTÉTEL. Legyen z komplex szám, $z \notin [-1, 1]$ és $\Delta z > 0$ legyen z távolsága a $[-1, 1]$ szakasztól, akkor

$$\frac{1}{|p_n(dv; z)|} \leqq \frac{\gamma_{n-1}(dv)}{\gamma_n(dv)} \frac{\sqrt{v(1)-v(-1)}}{\Delta z\, |T_{n-1}(z)|}, \tag{3.9}$$

ahol

$$T_n(z) = \frac{1}{2}\left[\left(z+\sqrt{z^2-1}\right)^n + \left(z-\sqrt{z^2-1}\right)^n\right] \tag{3.10}$$

az n-edfokú elsőfajú *Csebisev-féle polinom.*

Lásd a szerző [1] könyve III. fejezet (7.7) képletet; a bizonyítást is ott találja meg az érdeklődő olvasó.

A (3.9) segítségével nyert becslés nem rosszabb lényegesen, mint amit a *Szegő*-féle aszimptotika segítségével nyertünk $n \to \infty$ esetén a [2] előadásunkban. Pl. $dv = dv_{-1/2, -1/2}$ választásával (3.9) $|z| \to \infty$ esetén egy $\sqrt{2}$ tényezővel lesz csak nagyobb. Ezt bőven ellensúlyozza az a rendkívül nagy előny, hogy a kapott egyenlőtlenség a dv súlytól csak egy $\sqrt{v(1)-v(-1)}$ tényező erejéig függ. Nincs szükségünk a $\log v'(\cos \theta) \in \mathscr{L}$ megszorító feltételre sem (vö. 3.1 tétellel).

A [3] dolgozatunkban bevezettük az

$$\eta_n(z) = \sum_{r=n}^{\infty} \frac{1}{T_{r-1}(z)\, T_r(z)} \tag{3.11}$$

segédfüggvényt.[4] Ez a sor minden $z \notin [-1, 1]$ számra konvergál. Az

$$r(z) = \left|z+\sqrt{z^2-1}\right| \tag{3.12}$$

Bernstein-féle paraméter bevezetésével $|z|$ nagy értékeire

$$\eta_n(z) \approx \frac{1}{2^{2n-3}} [r(z)]^{-2n+1}. \tag{3.13}$$

Alkalmazzuk a 2.2. tételt olyan módon, hogy a C kontúr, amire integrálunk, az $e(R) = \{z : r(z) = R\}$ ellipszis vonal.

[4] TARNAY GYULA *(MTA Számítástechnikai és Automatizálási Kutató Intézete)* az $\eta_n(z)$ függvényt nagy pontossággal tabellázta. Ez a tabella ismertetésre került a *keszthelyi numerikus analízis kollokviumon,* a szerző és TARNAY GYULA közös előadásában.

Legyen

$$M_e(f; R) = \sup_{z \in e(R)} |f(z)|. \tag{3.14}$$

A (3.9) becslést is felhasználva kapjuk, hogy

$$\left| \int_{-1}^{1} f(x)\,dv(x) - Q_n(dv; f) \right| \leqq \tag{3.15}$$

$$\leqq M_e(f; R) \frac{v(1)-v(-1)}{2\pi} \sum_{r=n+1}^{\infty} \frac{\gamma_{r-2}(dv)}{\gamma_{r-1}(dv)} \int_{e(R)} \frac{|d\zeta|}{\Delta\zeta\, |T_{r-2}(\zeta)|\, |T_{r-1}(\zeta)|} \leqq$$

$$\leqq M_e(f; R) \frac{v(1)-v(-1)}{2\pi} \left[\sup_{r \geqq n} \frac{\gamma_{r-1}(dv)}{\gamma_r(dv)} \right] \int_{e(R)} \frac{\eta_n(\zeta)|d\zeta|}{\Delta\zeta}.$$

A (3.15) képlet közvetlen alkalmazása R kis értékeire célszerű. R nagy értékeire további egyszerűsítés lehetséges. Az $e(R)$ ellipszis teljes egészében az $|z| \leqq R/2$ sugarú körön belül foglal helyet. Ha tehát az $f(z)$ a $|z| \leqq R/2$ körlemezen is analitikus, úgy

$$M_e(f; R) \leqq \max_{|z| \leqq R/2} |f(z)| = M(f; R/2), \tag{3.16}$$

ahol $M(f; r)$ a szokásos, körökre vonatkozó „maximum-modulus" függvény. (3.10)-ből

$$|T_n(z)| \geqq \frac{1}{2} \{[r(z)]^n - [r(z)]^{-n}\}, \tag{3.17}$$

tehát (3.11)-ből

$$\eta_n(z) \leqq \sum_{s=n}^{\infty} \frac{1}{\{[r(z)]^{s-1} - [r(z)]^{-s+1}\}\{[r(z)]^s - [r(z)]^{-s}\}} = \chi[r(z) \tag{3.18}$$

és nagy $r(z)$ értékekre ez a becslés igen pontos. Becsléseink következtében be tudjuk látni a következő tételt.

3.3. Tétel. Legyen $f(z)$ a $|z| \leqq \varrho$ körben analitikus, akkor

$$\left| \int_{-1}^{1} f(x)\,dv(x) - Q_n(dv; f) \right| \leqq \frac{1}{2} M(f; \varrho)\,[v(1) - v(-1)]\,B_n(dv) \frac{4\varrho^2 \eta_n(2\varrho)}{(2\varrho - 1)^2}; \tag{3.19}$$

ahol

$$B_n(dv) = \sup_{r \geqq n} \frac{\gamma_{r-1}(dv)}{\gamma_r(dv)} \leqq 1. \tag{3.20}$$

Bizonyítás. Alkalmazzuk a (3.15) becslést. Az $e(R)$ konvex ellipszis teljes egészében a $|z| \leqq R/2$ körön belül található, tehát kerülete kisebb, mint $2\pi R/2 = \pi R$. Elemi geometriai, de kissé hosszadalmas számítással kapjuk,[5] hogy

$$\Delta z \geqq \frac{1}{2}\{r(z)+[r(z)]^{-1}\}-1 = \delta[r(z)], \tag{3.21}$$

tehát (3.18)-ból és (3.20)-ból az $e(R)=\{z:r(z)=R\}$ ellipszisen integrálva

$$\int_{e(R)} \frac{\eta_n(z)\,dz}{\Delta z} \leqq \pi R \frac{\chi(R)}{\delta(R)}. \tag{3.22}$$

A bebizonyítandó (3.19) becslést olyan módon nyerjük, hogy a (3.15) egyenlőtlenségben felhasználjuk (3.16)-ot és (3.22)-t, továbbá $R=2\varrho$-t helyettesítünk. A (3.20) egyenlőtlenség ugyancsak bizonyítandó második fele (3.4) következménye.

A (3.19) becslés legnagyobb előnye, hogy a dv mértéktől csak a $[v(1)-v(-1)]B_n(dv)$ tényező erejéig függ és ebben is a második faktor jól becsülhető dv-től függetlenül 1-gyel, hiszen ez a tényező SZEGŐ idézett tétele szerint igen általános feltételek mellett 1/2-hez tart. Az utolsó ϱ-tól függő tényező viszont minden dv-re ugyanaz.

[5] Kiszámítjuk Δz minimumát az $e(R)$ ellipszisen. Elegendő $e(R)$ első negyedére szorítkoznunk, melynek paraméteres alakja

$$x = \frac{1}{2}(R+R^{-1})\cos\varphi, \quad y = \frac{1}{2}(R-R^{-1})\sin\varphi \quad (0\leqq\varphi\leqq\pi/2).$$

Legyen $\varphi_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ az a hely, ahol $x=1$.

Az (x, y) pontnak a $0\leqq x\leqq 1$ szakasztól való távolsága

$$\Delta(x+iy) = \frac{1}{2}(R-R^{-1})\sin\varphi, \quad \text{ha} \quad 0\leqq x\leqq 1, \quad \text{azaz} \quad \varphi_0\leqq\varphi\leqq\pi/2.$$

Ez nyilván növekedő függvénye φ-nek. Ha $x\geqq 1$, azaz $0\leqq\varphi\leqq\varphi_0$, úgy

$$|\Delta(x+iy)|^2 = \left[\frac{1}{2}(R+R^{-1})\cos\varphi-1\right]^2+\left[\frac{1}{2}(R-R^{-1})\sin\varphi\right]^2 = g(\cos\varphi),$$

ahol

$$g(t) = t^2-(R+R^{-1})t+1+\frac{1}{2}(R-R^{-1})^2.$$

A $g(t)$ görbéje olyan parabola, melynek az $\frac{1}{2}(R+R^{-1})>1$ helyen van minimuma. Tehát $0\leqq t\leqq\cos\varphi\leqq$ $\leqq 1$ szakaszon $g(t)$ a t fogyó függvénye és így $\Delta(x+iy)$ $\varphi=\arccos t$-nek növekedő függvénye. Vagyis $\Delta(x+iy)$ a φ függvényeként az egész $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ szakaszon fogyó. A minimális értéket $\Delta(x+iy)$, tehát a $\varphi=0$ pontban, vagyis a valós tengelyen veszi fel és a minimum értéke $\frac{1}{2}(R+R^{-1})-1$.

4. A racionális törtfüggvényekkel való közelítés egy módszeréről

Tekintsünk egy olyan $f(z)$ függvényt, amely a $z=\infty$ pont körül

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu z^{-\nu} \tag{4.1}$$

Laurent-sorba fejthető. Egy ilyen $f(z)$ függvényhez hozzárendeljük a $\varrho_n(f; z) = r_n(z)/R_n(z)$ *Padé*-féle közelítő törtek sorozatát. $\varrho_n(f; z)$ azzal a két tulajdonsággal jellemezhető, hogy

a) $r_n(z)$ és $R_n(z)$ legfeljebb n-edfokú polinomok,

b) $R_n(z)f(z) - r_n(z) = O(|z|^{-n-1})$.

A b) szerint az $R_n(z)f(z)$ *Laurent-sorában* z^{-k} $(k=1, 2, \dots, n)$ együtthatói eltűnnek; ez n homogén lineáris egyenletet szolgáltat az $R_n(z)$ $n+1$ darab együtthatója arányának számítására. $R_n(z)$ ismeretében $r_n(z)$ is számítható, hiszen az nem más, mint az $R_n(z)f(z)$ *Laurent-sorában* az első $n+1$ (z nemnegatív hatványait tartalmazó) tag összege.

A *Padé*-közelítés fontos speciális esete az, amikor

$$f(z) = \int_{-1}^{1} \frac{d\nu(t)}{z-t} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_{k-1}(d\nu)}{z^k}, \tag{4.2}$$

ahol a $\{\mu_k(d\nu)\}$ együtthatósorozat a $d\nu$ mérték momentumaiból áll:

$$\mu_k(d\nu) = \int_{-1}^{1} x^k \, d\nu(x). \tag{4.3}$$

Legyen

$$R_n(z) = z^n + \sum_{l=0}^{n-1} d_l z^l;$$

akkor a d_l együthatók meghatározására szolgáló egyenletrendszer

$$\sum_{l=0}^{n-1} \mu_{r-l}(d\nu) d_l = -\mu_{r-n}(d\nu) \quad (r = 0, 1, \dots, n-1). \tag{4.4}$$

A (4.4) lineáris egyenletrendszer determinánsa nem más[6], mint az

$$\int_{-1}^{1} \left(\sum_{k=1}^{n} y_k x^{n-k} \right)^2 d\nu(x),$$

az y_k változókban definit pozitív kvadratikus alak determinánsa, tehát zérustól különböző. Ennek következtében a $\varrho_n(f; z)$ *Padé-tört* létezik, egyértelműen meghatározott és nevezője pontosan n-edfokú. A b) feltétel miatt tehát

$$f(z) - \varrho_n(f; z) = O(|z|^{-2n-1}). \tag{4.5}$$

[6] A keletkező lineáris egyenletrendszer megoldhatóságának és a megoldás egyértelműségének kérdése általános esetben külön vizsgálatot igényel. A jelen dolgozatban vizsgált esetben, mikor $f(z)$ *Stieltjes-transzformált*, látni fogjuk, hogy a megoldás mindig létezik és egyértelmű.

Legyen $g_z(t) = (z-t)^{-1}$, tehát

$$f(z) = \int_{-1}^{1} g_z(t)\,dv(t).$$

4.1. SEGÉDTÉTEL. A (4.2) *Stieltjes-transzformáltként* előállítható $f(z)$ függvény n-edik *Padé*-közelítése

$$\varrho_n(f; z) = Q_n(dv; g_z). \tag{4.6}$$

Bizonyítás. (2.8) értelmében

$$Q_r(dv; g_z) - Q_{r-1}(dv; g_z) = \frac{\gamma_r(dv)}{\gamma_{r-1}(dv)} \frac{1}{p_{r-1}(dv; z) p_r(dv; z)}$$

és r szerint összegezve $r = n+1, n+2, \dots$-re

$$\int_{-1}^{1} g_z(t)\,dv(t) - Q_n(dv; g_z) = \sum_{r=n+1}^{\infty} \frac{\gamma_r(dv)}{\gamma_{r-1}(dv)} \frac{1}{p_{r-1}(dv; z) p_r(dv; z)}. \tag{4.7}$$

Ebből a (3.9), majd a (3.4) becslés felhasználásával nyerjük, hogy (3.11) és (3.12) alapján

$$|f(z) - Q_n(dv; g_z)| \leqq \tag{4.8}$$

$$\leqq \sum_{r=n}^{\infty} \frac{v(1) - v(-1)}{(\Delta z)^2} = \frac{1}{|T_{r-1}(z)|\,|T_r(z)|} = \frac{v(1)-v(-1)}{(\Delta z)^2} \eta_n(z) = O(|z|^{-2n-1}).$$

Így (4.5) és (4.8) összevetésével

$$\varrho_n(f; z) - Q_n(dv; g_z) = \varrho_n(f; z) - \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_{kn}}{z - x_{kn}} = O(|z|^{-2n-1}). \tag{4.9}$$

A (4.9) bal oldalán két olyan racionális törtfüggvény áll, melyeknek nevezője legfeljebb n-edfokú. Ezek különbségeként a baloldal olyan racionális törtfüggvény, melynek nevezője legfeljebb $2n$-edfokú. Így a (4.9) reláció csak úgy állhat fenn, ha a baloldal azonosan eltűnik.

A (4.8) egyenlőtlenség egyben becslést szolgáltatott a *Padé-törtnek* f-től való eltérésére:

4.2. TÉTEL. A (4.2) *Stieltjes-transzformált* alakjában előállítható $f(z)$ függvény n-edik *Padé-közelítése*

$$\varrho_n(f; z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_{kn}(dv)}{z - x_{kn}(dv)} \tag{4.10}$$

és ennek eltérése $f(z)$-től

$$|f(z) - \varrho_n(f; z)| \leqq \frac{v(1) - v(-1)}{(\Delta z)^2} \eta_n(z). \tag{4.11}$$

A 4.2 tételnek egy igen egyszerű, de távolról sem érdektelen speciális esete, ha $dv(t) = dt$. Ekkor a

$$\log \frac{1+z}{1-z} \approx \sum \frac{\lambda_{kn}}{z - x_{kn}} \tag{4.12}$$

közelítő képletre jutunk, ahol $\{x_{kn}\}$ a *Gauss*-féle abszcisszák sorozata, λ_{kn} pedig a *Gauss*-féle kvadratúra együtthatói.

A másik elemi képletet akkor kapjuk, ha a $dv(t) = (1-t^2)^{-1/2}dt$ helyettesítést végezzük. Ekkor $x_{kn}=\cos\frac{2k-1}{2n}\pi$ és $\lambda_{kn}=\pi/n$, tehát

$$(4.13)\qquad \frac{1}{\sqrt{z^2-1}} = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{dt}{(z-t)\sqrt{1-t^2}} \approx \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{z-\cos\frac{2k-1}{2n}\pi}.$$

Úgy a (4.12), mint a (4.13) közelítő képletekben a hiba a (4.11) egyenlőtlenség segítségével becsülhető.

5. Elliptikus integrálok számításáról

További alkalmazási példaként a

$$(5.1)\qquad \varphi(k) = \int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1+k^2x^2)}}$$

elliptikus integrálok közelítő meghatározását említenénk. Meg szeretnénk említeni, hogy egyedül a $k=1$ esetre szorítkozva, J. TODD professzor *(California Inst. of Techn.)* hatféle módon igen kiterjedt számításokat végzett és a *keszthelyi numerikus analízis kollokviumon* azokat egyórás előadásban ismertette. A szerző ott helyben kifejtette saját eljárását. Érdekességként megjegyezzük, hogy ez annyira megnyerte TODD professzor tetszését, hogy néhány héttel később az osztrák matematikai kongresszuson azt a szerző nevének említésével, saját hat eljárása mellett mint hetedik alternatívát ismertette.

Módszerünk lényege, hogy a kvadratúraképletet a $dv(x) = (1-x^2)^{-1/2}dx$ súllyal az $f_k(x) = (1+k^2x^2)^{-1/2}$ függvényre alkalmazzuk és (2.12) jobb oldalán az integrálokat a kontúr deformálásával egyszerű alakra hozzuk.

Esetünkben

$$p_n(dv;z) = p_n(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,T_n(z) \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

tehát

$$I_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{dz}{p_{n-1}(z)p_n(z)\sqrt{1+k^2z^2}} =$$

$$= \frac{1}{4i}\oint_C \frac{dz}{T_{n-1}(z)T_n(z)\sqrt{1+k^2z^2}} \qquad (n = 2, 3, \ldots),$$

ahol a C görbe pozitív irányban egyszer hurkolja a $[-1, 1]$ szakaszt, de nem tartalmazza $\pm ik^{-1}$ pontokat, ahol az $f_k(z)$ szinguláris. Ha k valós és pl. pozitív (amit fel akartunk tenni), úgy a C kontúr deformálható a képzetes tengely $(ik^{-1}, i\infty)$ és $(-i\infty, -ik^{-1})$ szakaszaira, és a pozitív képzetes tengely bal partját a $+i\infty$ felé, jobb partját az ik^{-1} irányában futjuk be, a negatív képzetes tengely esetében fordítva.

A négyzetgyök miatt az integrandus értéke a két parton csak előjelben tér el, tehát a $z=iy$ változót bevezetve

(5.2)
$$I_n = -\frac{1}{2i}\left\{\int_{k^{-1}}^{\infty} \frac{i\,dy}{T_{n-1}(iy)T_n(iy)\sqrt{1-k^2y^2}} - \int_{-\infty}^{-k^{-1}} \frac{i\,dy}{T_{n-1}(iy)T_n(iy)\sqrt{1-k^2y^2}}\right\} =$$
$$= \int_{k^{-1}}^{\infty} \frac{i}{T_{n-1}(iy)T_n(iy)} \frac{dy}{\sqrt{k^2y^2-1}}.$$

A $T_{n-1}(z)$ és $T_n(z)$ polinomok közül az egyik páratlan, a másik páros. Ismeretes továbbá, hogy $T_n(z)$-ben az együtthatók előjele alternáló. Ezért

$$T_{2r}(iy) = |T_{2r}(iy)|(-1)^r$$

és

$$i^{-1}T_{2r+1}(iy) = (-1)^r|T_{2r+1}(iy)|.$$

Ezért

(5.3)
$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1+k^2x^2)}} =$$
$$= \frac{\pi}{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1+k^2\cos^2\frac{2j+1}{2n}\pi}} - \sum_{r=n+1}^{\infty}\int_{k^{-1}}^{\infty} \frac{1}{|T_{r-1}(iy)T_r(iy)|}\frac{dy}{\sqrt{k^2y^2-1}}.$$

Az (5.3) jobb oldalán álló sor geometriai sor sebességével konvergál.

J. Todd a $\varphi(1)$ értékét az (5.3) jobb oldalán álló összeggel (vagyis magával a kvadratúraképlettel) közelítette. Ha ezt kiegészítjük oly módon, hogy ezt a (több tiz. jegy pontossággal) kiszámított összeget kiegészítjük az utána álló szumma pl. 1%-ra pontos értékével, úgy viszonylag kis erőfeszítés-többlettel, további két jeggyel növeltük a pontosságot. Ugyanezt az eredeti úton az alappontok számának növelésével, tehát lényegében az egész számítás elölről kezdésével tudnánk csak elérni.

Ennél is egyszerűbb képletekhez jutunk, ha a

(5.4)
$$\psi(k) = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \qquad (0<k<1)$$

elliptikus integrált vizsgáljuk. Az előbbi módszerrel kapjuk, hogy

(5.5)
$$\psi(k) = \frac{\pi}{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1-k^2\cos^2\frac{2j-1}{2n}\pi}} +$$
$$+ \sum_{r=n+1}^{\infty}\int_{k^{-1}}^{\infty} \frac{1}{T_{r-1}(x)T_r(x)}\frac{dx}{\sqrt{k^2x^2-1}}.$$

IRODALOM

[1] FREUD, G., *Orthogonale Polynome* (Akadémiai Kiadó, Budapest, 1969).
[2] FREUD, G., "Error estimates for Gauss—Jacobi quadrature formulae", in: *Topics in Numerical Analysis*, Ed. John J. H. Miller (Academic Press, New York and London, 1973) 113—121.
[3] FREUD, G., "An estimate of the error of Padé approximants", *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **25** (1974) 213—222.

(Beérkezett: 1974. június 10.)

DR. FREUD GÉZA
MTA MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZET
1053 BUDAPEST V., REÁLTANODA U. 13—15.

ERROR ESTIMATES FOR GAUSS—JACOBI QUADRATURE FORMULAE AND THEIR APPLICATIONS

G. FREUD

In [2] the author has expressed the error of quadrature formula by complex contour integral and by the help of it, when $f(z)$ is an analitic function, he gave an assymptoticaly exact estimation for that as $n \to \infty$. In this paper after demonstrating the error term it has been given a numerical estimation of the error of the approaching integral formula which can be used for each fixed n. For the first application of the method it has been given an error estimation of the difference of the *Pade approaching fraction* from the function, whenever the last can be represented in the form of *Stieltjes-transformation*. For a second application a formula is presented to calculate the exact numerical value of the elliptic integrals.

Alkalmazott Matematikai Lapok **1** *(1975) 37—50.*

A PROGRAMHELYESSÉG BIZONYÍTÁSÁNAK FORMÁLIS MÓDSZEREI

MAJOR PÉTER és VARGA LÁSZLÓ
Budapest

Ebben a tanulmányban megkíséreljük összefoglalni az elsőrendű logika eszközeit alkalmazó programhelyesség-bizonyítás legfontosabb módszereit. Ezeket a módszereket egy általunk, a CDC 3300-as gépre implementált, a rezolúció elvén alapuló tételbizonyító program segítségével példákon szemléltetjük.

A tanulmányt egy olyan bevezetőnek szánjuk, amely a fenti területen elért eredmények összefoglaló értékelését nyújtja.

1. Bevezetés

A programhelyesség bizonyítása egyike azoknak a megoldatlan problémáknak, amelyek ma a számítástechnikával foglalkozó kutatók érdeklődésének középpontjában állnak. Ennek a problémának a fontosságát a következők mutatják:

1. A software előállítási költsége — ellentétben a hardware előállítási költségével — évről évre növekszik. A kutatók keresik az eddigi kis hatékonyságú software előállítási technikák új, hatékonyabb technikákkal való felcserélésének lehetőségeit. Az egyik ilyen kis hatékonyságú módszer a programok helyes működésének empirikus ellenőrzése.

2. A programok segítségével ma már olyan kritikus rendszerek vezérlését végezzük el, amelyekben a program rejtett hibáinak megengedhetetlen következményei lehetnek. Ilyen feladat például az atomreaktorokban, az erőművekben lejátszódó folyamatok, az űrhajók pályájának vezérlése stb.

Ismeretes, hogy ha a kipróbált program utasításainak számát elosztjuk a program előállítására fordított napok számával, akkor — bonyolult programok esetén — 10 alatti értéket kapunk eredményül. Nyilvánvalóan ez nem azt fejezi ki, hogy a programozó közel egy óra hosszat töpreng egy-egy utasítás leírásán, hanem azt, hogy sok időt tölt el a program hibáinak megkeresésével, a hibák felismerése után az egyes programrészek újraírásával. Mindez azt mutatja, hogy a program megírására fordított időt elsősorban a program kipróbálására fordított idő csökkentésével lehet elérni. Ennek egyik lehetséges útja a programhelyesség bizonyításának automatizálása.

Az automatikus programhelyesség-bizonyítás terén a kutatómunka napjainkban elsősorban a matematikai logika síkjára terelődött. Egymás után születnek olyan programrendszerek, amelyek a programok helyességét az eddigi empirikus ellenőrzés helyett matematikai szabatossággal kívánják bizonyítani. Ezeknek a módszereknek nagy része a rezolúció elvén alapszik. Ebben a tanulmányban megkíséreljük összefoglalni az elsőrendű logika eszközeit alkalmazó programhelyesség-bizonyítás legfontosabb módszereit. Ezeket a módszereket egy általunk a CDC 3300-as gépre implementált, a rezolúció elvén alapuló tételbizonyító program segítségével példákon szemléltetjük. A tanulmányt egy olyan bevezetőnek szánjuk, amely a fenti területen elért eredmények összefoglaló értékelését nyújtja.

2. A programhelyesség bizonyításának problémája

Egy adott probléma megoldására alkalmas program elkészítésének az első lépése magának a problémának a specifikációja. Ezt követi a program kezdő adatainak és eredményeinek a specifikálása. A probléma megoldása egy olyan program kidolgozását jelenti, amely a specifikációban rögzített kezdő adatok esetén a specifikált eredményeket szolgáltatja. Az ilyen programot *helyes programnak* nevezzük.

A programoknak különböző formái vannak. A programhelyesség bizonyításának szempontjából a legfontosabb programformák a következők:

1. a program algoritmikus formája, amelyet rendszerint folyamatábra formában rögzítünk;
2. a program forrásnyelvű formája;
3. a program gépi kódú formája.

A program helyességét ennek megfelelően a program különböző megjelenési formái alapján bizonyíthatjuk be.

A program kezdő adatainak és eredményeinek a specifikációja általában nem konkrét értékek előírását jelenti. A specifikációval a program kezdő adatainak és eredményeinek szóba jöhető halmazát, valamint a kezdő adatok és eredmény-adatok között fennálló összefüggéseket rögzítjük.

A programhelyesség igazolásának ma a gyakorlatban használatos módszerei empirikus módszerek. Ezeknek a módszereknek az a lényege, hogy a program kezdő adatainak kiválasztjuk egy részhalmazát és ezekkel az adatokkal a programot lefuttatva kimutatjuk, hogy a kapott eredmények beleesnek a program eredményeinek a specifikációban rögzített halmazába. Egy ilyen módszernek az az előnye, hogy a program helyességét a program gépi kódú formájára látja be és így bizonyos mértékig figyelembe tudja venni a gép fizikai tulajdonságait is, így például a kerekítési hibákat, a túlcsordulásokat stb. Az empirikus módszernek azonban az a nagy hátránya, hogy bonyolultabb programok esetén nem tudjuk kiválasztani a kezdő adatoknak azt a részhalmazát, amely az egész halmazt szignifikánsan reprezentálja és amely mellett minden próbafuttatást reális határidőre el lehet végezni. Ezért maradhatnak a programban kiderítetlen hibák, amelyek a program használata közben fognak jelentkezni. Vegyük észre, hogy az empirikus módszerek esetén a szignifikáns bemenő adatok megválasztása olyan adatok megválasztását jelenti, amelyek alkalmasak a programban számításba jöhető hibák kimutatására.

A programhelyesség bizonyításának további módszerei az egzakt, matematikai módszerek. Ezek a módszerek a program helyességét a program algoritmikus, vagy forrásnyelvű formája alapján bizonyítják be. A program algoritmikus formája és a forrásnyelvű forma a programot végrehajtó géptől általában független forma. Ezért a program helyessége ezeknek a programformáknak az alapján csak akkor bizonyítható be, ha pontosan specifikáljuk ezeknek a formáknak a szemantikáját, azaz specifikáljuk azt a transzformáció sorozatot, amelyet az általunk leírt program az adatokon végrehajt. A matematikai programhelyesség-bizonyítás lényegét a következőképpen foglalhatjuk össze:

Legyen X és Z rendre a program szóba jöhető kezdeti, illetve eredmény-adatainak halmaza. A matematikai módszerek azt bizonyítják be, hogy valahányszor x és z a fenti halmazoknak olyan részhalmazai, amelyeket a program rendel egymáshoz, $z=\tau(x)$, ahol τ a probléma specifikációjában meghatározott leképezés.

Ezeknek a módszereknek az az előnyük, hogy a program helyességét a specifikációnak megfelelően minden szóba jöhető adatra bebizonyítják. A hátrányukat a következőképpen foglalhatjuk össze:

1. Jelenleg nincs semmilyen formális módszer, amellyel eldönthető, hogy a bemenő adatok és az eredmények specifikációja megfelel-e a probléma specifikációjának. Egy empirikus módszer esetén ez esetenként könnyebben eldönthető. Így a matematikai módszernél nincs semmi garancia arra, hogy a program helyességének bizonyítása egyben a probléma helyes megoldásának a bizonyítását is jelenti. Nem biztos tehát, hogy azt bizonyítjuk be, amit akarunk.

2. A programhoz rendelt leképezés, a program szemantikája a gépi kódú program által meghatározott leképezést csak közelítőleg írja le. A bizonyítás tehát nem a gépen futó program helyes működésének a bizonyítása.

3. További eltérések adódhatnak

— az algoritmikus forma és a forrásnyelvű forma egymáshoz rendeléséből,

— a forrásnyelvű forma hivatkozási és gépi reprezentációjának különbözőségéből.

Ezek a hibák csak akkor küszöbölhetők ki teljesen, ha a gépen futó programot specifikáljuk és annak helyességét bizonyítjuk. Történtek erre is kísérletek [5], amelyek azt mutatják, hogy az út elvileg járható, csak gyakorlatilag ma még kezelhetetlenül bonyolultnak látszik.

3. A program absztrakt és konkrét formája

A programhelyesség bizonyításához mindenek előtt pontosan meg kell határozni a programhoz rendelt leképezést. Ennek a meghatározásnak ma már többféle eszköze ismeretes. Egyik ilyen jól ismert eszköz az ún. VDL nyelv [7], amellyel először a PL/I nyelv szemantikáját írták le. A programhelyesség bizonyításánál rendszerint nem a program forrásnyelvű formájának, hanem az algoritmusának a jelentését írjuk le formális módon. A következőkben egy ilyen módszert mutatunk be, amely lényegében a [8] munkában megadott módszer kissé más módon történő megfogalmazása.

A program algoritmikus formájának lényegét egy absztrakt program modellben a következőképpen foglalhatjuk össze:

Az *absztrakt program* egy

$$P = (S, e, h, G, X, Y, Z, T, F)$$

kilences, ahol

$S=\{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ a program állapotainak egy nem üres, véges halmaza;

$e\in S$ a kezdő állapot;

$h\in S$ a terminális állapot;

G egy $n\times n$-es mátrix, amelynek elemeit a következők határozzák meg:

1. $g_{ij}=1$, ha a program végrehajtása közben az s_i állapotból közvetlenül s_j állapotba juthat és $g_{ij}=0$ különben;

2. A G mátrix i-edik sora akkor és csak akkor zérus, ha $s_i=h$;

3. A G mátrix i-edik oszlopa akkor és csak akkor zérus, ha $s_i=e$;

4. Minden $s_i \neq e$ esetén létezik a G mátrix elemeinek egy olyan csupa nem zérus elemekből álló $g_{i_1 i_2} g_{i_2 i_3} \dots g_{i_k i_{k+1}}$ sorozata, hogy

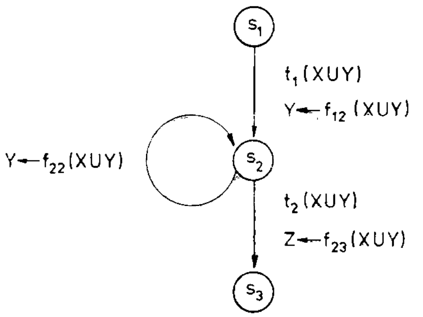
$$s_{i_1} = e, \quad s_{i_{k+1}} = h \quad \text{és} \quad i \in \{i_2, i_3, \dots, i_{k+1}\}.$$

X, Y, Z rendre a program kezdeti, változó és eredmény adatainak a specifikációban rögzített halmaza, $Z \subset Y$.

$T=\{t_1, t_2, \dots, t_{n-1}\}$ egyértékű függvények egy halmaza. A függvények értelmezési tartománya az $X \cup Y$ halmaz, és értékkészlete az S halmaz. A T halmaz elemei az $S-\{h\}$ halmaz elemeihez egyértelműen hozzá vannak rendelve.

F olyan függvények halmaza, amelyek a G mátrix nem zérus elemeihez vannak egyértelműen hozzárendelve, értelmezési tartományuk és értékkészletük egyaránt az $X \cup Y$ halmaz.

Az absztrakt program végrehajtását a T és F leképezések írják le. A program kezdetben az e állapotban van. A program az s_i állapotból a t_i függvény által meg-

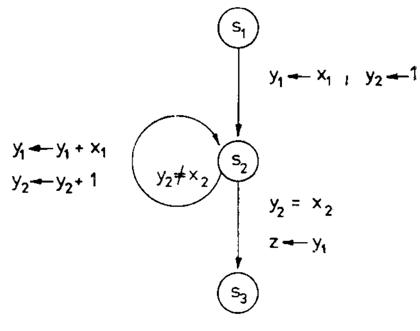


$S = \{s_1, s_2, s_3\}$; $e = s_1$; $h = s_3$;

$G = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$; X; Y; Z;

$T = \{t_1(XUY), t_2(XUY)\}$; $F = \{f_{12}(XUY), f_{22}(XUY), f_{23}(XUY)\}$

1. ábra



2. ábra

határozott s_j állapotba megy át, miközben a $g_{ij}=1$ mátrixelemhez hozzárendelt f_{ij} leképezés megtörténik. Ha a program a végrehajtás során a h állapotba jut, a program végrehajtása befejeződik, a program leáll.

Vegyük észre, hogy az absztrakt program egy irányított gráffal ábrázolható. Egy ilyen irányított gráffal ábrázolt absztrakt programot mutat az 1. ábra.

Egy absztrakt programból a konkrét programot úgy kapjuk meg, hogy specifikáljuk az X, Y és Z halmazokat és megadjuk a T, F leképezéseket. Például:

$X = \{x_1, x_2\}$, ahol x_1 pozitív egész, x_2 pozitív egész;

$Y = \{y_1, y_2, z\}$, ahol y_1, y_2 és z pozitív egész;

$Z = \{z\}$, $z = x_1 * x_2$

és

$$t_1(X \cup Y) = \{s_1\};$$

$$t_2(X \cup Y) = \begin{cases} s_3, & \text{ha } y_2 = x_2, \\ s_2, & \text{különben}; \end{cases}$$

$$f_{12}(X \cup Y) = \{y_1 \leftarrow x_1, y_2 \leftarrow 1\};$$

$$f_{22}(X \cup Y) = \{y_2 \leftarrow y_2 + 1, y_1 \leftarrow y_1 + x_1\};$$

$$f_{23}(X \cup Y) = \{z \leftarrow y_1\};$$

ahol a $\leftarrow$ az értékadást jelöli.

A konkrét program ábráját a 2. ábra mutatja.

4. A program specifikációja axiómák segítségével

Az előző pontban megadtuk az absztrakt program és annak realizációjaként a konkrét program egy lehetséges specifikációját. Ez a specifikáció összhangban van a program folyamatábrával történő ábrázolásával, a folyamatábra alapján könnyen előállítható.

Kézenfekvő gondolat a program specifikációját mint axiómák összességét felfogni, és a program helyességével kapcsolatos állításokat mint tételeket, ezeknek az axiómáknak alapján bizonyítani. A következőkben a program specifikációja alapján ezeket az axiómákat írjuk fel az elsőrendű predikátumkalkulus eszközeivel. Tekintsük először az absztrakt programot.

A program állapotváltozásai két lépésre bonthatók. Az első lépés az új állapot meghatározása, a másik lépés az adatok leképezése. Ezt a két lépést egy-egy predikátum segítségével írhatjuk le:

1. Rendeljünk hozzá a G mátrix minden nem-zérus eleméhez egy

$$P_{ij}(X \cup Y)$$

tesztelő predikátumot. Ez egy logikai függvény, amely akkor igaz, ha az s_i állapotban

$$t_i(X \cup Y) = s_j$$

2. Rendeljünk hozzá a program minden állapotához egy

$$Q_{s_i}(U \cup V)$$

elérési predikátumot, amely akkor igaz, ha az s_i állapotban az X és Y halmazok aktuális értéke U és V.

A következőkben általában a Q_{s_i} jelölés helyett a Q_i jelölést is használjuk. Megjegyezzük, hogy $s_i=e$ esetén

$$Q_i(X\cup Y) \equiv Q_i(X)$$

és $s_i = h$ esetén

$$Q_i(X\cup Y) \equiv Q_i(X\cup Z).$$

A program minden egyes állapotváltozásához a program specifikációja alapján a

$$Q_i(X\cup Y)\wedge P_{ij}(X\cup Y) \Rightarrow Q_j(X\cup Y)$$

axiómát rendelhetjük hozzá. Jelölje ezt az axiómát U_{ij}. Az U_{ij} axiómák összessége alkotja a program specifikációját. Az U_{ij} axiómák konjunkcióját a *program leíró formulájának* nevezzük, és A_p-vel jelöljük.

A konkrét program leíró formuláját úgy kapjuk meg, hogy az axiómákba a konkrét X, Y, illetve Z halmazokat írjuk be.

Példa. Írjuk fel a 2. ábrán megadott konkrét program leíró formuláját. Most

$$P_{12}(X\cup Y) \equiv \text{IGAZ},\ P_{22}(X\cup Y) = (y_2 \neq x_2),\ P_{23}(X\cup Y) = (y_2 = x_2),$$

$$Q_1(x_1, x_2) \equiv \text{IGAZ}$$

és így

$$U_{12}\colon\ Q_2(x_1, x_2, x_1, 1, z)$$

$$U_{22}\colon\ Q_2(x_1, x_2, y_1, y_2, z)\wedge y_2 \neq x_2 \Rightarrow Q_2(x_1, x_2, y_1+x_1, y_2+1, z)$$

$$U_{23}\colon\ Q_2(x_1, x_2, y_1, y_2, z)\wedge y_2 = x_2 \Rightarrow Q_3(x_1, x_2, y_1)$$

$$A_p = U_{12}\wedge U_{22}\wedge U_{23}$$

A következő feladat a kezdő adatok specifikációját meghatározó axiómák megfogalmazása az elsőrendű predikátumkalkulus eszközeivel. Nézzük ezt a feladatot is a konkrét példánk esetében. Most két axiómát kell megadni. Az axiómák azt fejezik ki, hogy x_1 és x_2 1-nél nagyobb egész számok. Tekintettel arra, hogy a példánkban minden adatunk egész, tehát csak egész számokkal végzünk műveleteket, elég megadni, hogy

$$v_1\colon\ x_1 > 1,$$

$$v_2\colon\ x_2 > 1.$$

A kezdő adatokat is egy formulával szokás leírni. A kezdő adatokat leíró axiómák konjukcióját a *kezdő adatok leíró formulájának* nevezzük, és A_I-vel jelöljük. Esetünkben

$$A_I = v_1\wedge v_2$$

Hasonlóképpen specifikálhatjuk a program eredményeinek a halmazát is, amelyhez egy A_0 leíró formulát rendelhetünk. Példánkban egy ilyen axióma van:

$$w\colon\ z = x_1 * x_2$$

és így

$$A_0 = w.$$

5. A programhelyesség automatikus bizonyítása

A programhelyesség bizonyítása könnyen automatizálható, viszonylag egyszerű tételbizonyító program segítségével elvégezhető. Ma már több ilyen programrendszer is kidolgozásra került ([2], [4], [11]). Mi a vizsgálatainkhoz a [2] munkában megadott tételbizonyító programot implementáltuk az MTA SZTAKI CDC 3300-as gépére. A program nyelve LISP. Ez a tételbizonyító program a rezolúció elvet [14] használja levezetési módszerként. A következőkben olyan példákon szemléltetjük a programhelyesség bizonyításának lehetőségeit, amelyeket a fent említett programmal oldottunk meg.

Mindenek előtt meg kell említeni, hogy a rezolúció elvet használó rendszerek az elsőrendű predikátumkalkulus nyelvével dolgoznak. Számos gyakorlati probléma azonban csak a magasabb rendű logika segítségével kezelhető egyszerűen. Ilyen az indukció problémája, amely a ciklus kezelésénél vetődik fel.

A ciklusokat tartalmazó programokat rögzítenünk kell, hogy a ciklusok a feltételezett tevékenységet véges lépésben elvégzik. Ezt a tulajdonságot az iterációs lépésekre tett indukciós feltevéssel adhatjuk meg [9]. Ezt a másodrendű logika nyelvén egyetlen axióma segítségével írhatjuk le:

$$(\forall P)\big(P(0)\wedge(\forall x)(P(x)\Rightarrow P(x+1)\big)\Rightarrow(\forall x)P(x)$$

Az elsőrendű logikában, mivel predikátumokat nem kvantifikálhatunk, ezt minden esetben, mindegyik ciklusra külön axiómában kell megadnunk. Előző példánkban a program egy ciklust tartalmaz csak, ezért egyetlen indukciós feltevést tartalmazó axiómát kell megadnunk:

$$W_1\colon\ (\exists y_2)\big(x_2>y_2\wedge Q_2(x_1,x_2,x_1,y_2,z)\wedge(\forall y_3)\big(x_2>y_3\wedge Q_2(x_1,x_2,x_1,y_3,z)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow Q_2(x_1+x_2,x_1+x_2,y_3+1,z)\big)\Rightarrow Q_2(x_1,x_2,x_1*x_2,x_2,z)$$

A tételbizonyító programnak segédaxiómaként kell megadni a programban szereplő módszerek, relációk stb. lényeges alapösszefüggéseit is. Példánkban két ilyen összefüggésre van szükség: meg kell adnunk az egyenlőség reflexív tulajdonságát, továbbá a nagyobb és az egyenlő reláció egymáshoz való viszonyát leíró axiómákat:

$$W_2\colon\ x_2=x_2$$

$$W_3\colon\ (\forall u)x_2>u\Rightarrow u\neq x_2$$

Az

$$A_s=W_1\wedge W_2\wedge W_3$$

formulát a *segédaxiómákat tartalmazó formulának* nevezzük.

Az így megadott A_p, A_I és A_s formulák konjukciójából a tételbizonyító program segítségével a program helyes működésére, és a program eredményére vonatkozó állításokat bizonyíthatunk be. Ezeket az előbbi példánkon szemléltetjük.

5.1. ÁLLÍTÁS. Adott A_p, A_I, A_s és azt állítjuk, hogy a program leáll, azaz eljut a $h\in S$ állapotba. Ismeretes [8], hogy adott $A=A_p\wedge A_I\wedge A_s$ esetén a program akkor és csak akkor áll le, ha a program $h\in S$ terminális állapotához rendelt $(\exists Z)Q_h(X\cup Z)$ predikátum az A formula logikai következménye. Ennél az állításnál tehát az A formulában foglaltuk össze az axiómákat és $(\exists Z)Q_h(X\cup Z)$ a bizonyítandó tétel.

Mivel a rezolúció elvet alkalmazó tételbizonyítás a nem kielégíthetőségen alapul, ezért most azt kell bizonyítani, hogy az

$$A_p \wedge A_l \wedge A_s \wedge \forall z \sim Q_3(x_1, x_2, z)$$

formula nem elégíthető ki. A tételbizonyító program kezdeti adatait lényegében ez a formula képezi. Megjegyezzük, hogy a rezolúció elven alapuló tételbizonyító programoknak a fenti formulát úgy kell megadnunk, hogy a formulában szereplő axiómákat és a tétel negáltját egyenként felsoroljuk. A felsorolás egyúttal magába foglalja az elemek közötti konjukciót. Ahhoz, hogy az állításunkat a program be tudja bizonyítani, az így megadott axiómákat és a tétel negáltját kvantorok nélküli konjuktív normálformára kell hozni [12]. A konjuktív normálformában felírt axiómákat és a tétel negáltját *mondatoknak* (clause) nevezzük.

Sok axióma esetén az axiómák kvantorok nélküli konjuktív normálformában történő felírása kényelmetlen feladatnak bizonyulhat. Ezért számos olyan működő rendszer létezik [4], [13], amely ezt a fázist is automatizálja. A vizsgálatainkban használt tételbizonyító programba ezt a lehetőséget nem építettük be, ezért ezt kézzel oldottuk meg. Az így kapott mondatok elemi diszjunkciókból állnak. Ilyenkor azt mondjuk, hogy a mondatok *literálok* diszjunkciói. Jelölje a formuláknak megfelelő mondatok halmazát M.

A tételbizonyító program alapstratégiája az egységrezolúció stratégia [1], amelynek az a lényege, hogy az adott M mondathalmaz elempárjai között csak akkor engedjük meg a rezolúciót, ha a mondatpár egyike legalább egység- (egy literálból álló) mondat. A program a stratégiának megfelelően a több literálból álló mondatokból megkísérel minél több egységmondatot generálni.

Az egységrezolúción kívül a programban az egységmondatokra alkalmazzuk a tartalmazás (subsumption) stratégiát [14], és a függvénymélység vizsgálatot. Ez utóbbi lényege az, hogy az egységmondatokban előforduló implicit függvények mélysége nem lehet nagyobb egy megadott korlátnál (pl. a $g(f(h(x, y)))$ implicit függvény mélysége 3). Ha a mondatban szereplő implicit függvény mélysége ezt a korlátot meghaladja, úgy a mondatot töröljük.

A tételbizonyító programot a következő kifejezésnek megfelelő LISP [10] utasítással aktivizálhatjuk:

$$tpu\,[m1;\ m2;\ m3;\ t;\ n1;\ n2;\ n3;\ n4],$$

ahol

- *tpu* a program neve;
- *m*1 egy lista, amely az összes M-beli nem negált egységmondatot tartalmazza;
- *m*2 egy lista, amely az összes M-beli negált egységmondatot tartalmazza;
- *m*3 egy lista, amely az összes M-beli egynél több literálból álló mondatot tartalmazza;
- *t* egy lista, amely annyi allistát tartalmaz, ahány eleme *m*3-nak van, minden allista *m*1 és *m*2 tetszőleges elemeiből épül fel, az allisták egymástól nem feltétlenül különbözőek és lehetnek üresek is; egy ilyen allista *m*3 megfelelő elemének a támaszhalmaza, melyet a program egységgenerálásánál vesz figyelembe;
- *n*1 egy szám, amely az M mondathalmaz elemeinek számát adja meg;
- *n*2 egy szám, amely azt mutatja, hogy *m*3 elemei közül a program hányszor válasszon egységgenerálás céljából;

*n*3 egy szám, amely azt mutatja, hogy *m*3 elemei közül a program hányszor válasszon, mielőtt függvénymélység vizsgálatot végezne az egységmondatokon;

*n*4 egy szám, amely azt a maximális függvénymélység értéket mutatja, amellyel az egységmondatban előforduló függvények rendelkezhetnek.

A bemenő adatokban a mondatok szerkezete a következő:

(*n*, *varlist*, *litlist*),

ahol

n a mondat azonosító száma;

varlist egy lista, amely a mondatban előforduló változókat tartalmazza;

litlist egy lista, amelynek a következő a szerkezete: (*lit*1, *lit*2,..., *litk*),

ahol

*lit*1 egy lista, amely a mondat első literálját tartalmazza;

⋮

litk egy lista, amely a mondat *k*-adik literálját tartalmazza.

Megjegyezzük, hogy a literálok ebben a formában történő felsorolása egyúttal azt jelenti, hogy közöttük az $\cup$ kapcsolat áll fenn. A $\sim$ műveleti jel helyett a NOT szót használjuk. További jelölésbeli megállapodások még a következők: az egyenlőségre az EQ-t, a nagyobb relációra a G-t, az összeadásra a PLUS-t és a szorzásra a TIMES szót használjuk. Az x_1 és x_2 kezdeti adatokat konstansként kezeljük. A tételbizonyító programnak ekkor a következő bemenő adatokat kell megadnunk:

```
(TPU (QUOTE ((1(Z)((Q2 X1 X2 X1 1 Z)))
             (2( )((G X1 1)))
             (3( )((G X2 1)))
             (4( )((EQ X2 X2)))))
     (QUOTE ((5(Z)((NOT Q3 X1 X2 Z)))))
     (QUOTE ((6(U)((NOT G X2 U) (NOT EQ U X2)))
             (7(Y1 Y2 Z)((NOT Q2 X1 X2 Y1 Y2 Z)
              (EQ Y2 X2)(Q2 X1 X2 (PLUS Y1 X1)(PLUS Y2 1)Z)))
             (8(Y1 Y2 Z)((NOT Q2 X1 X2 Y1 Y2 Z)
              (NOT EQ Y2 X2)(Q3 X1 X2 Y1)))
             (9(Y2 Z)((NOT G X2 Y2)(NOT Q2 X1 X2 X1 Y2 Z)
              (G X2(F Y2))(Q2 X1 X2(TIMES X1 X2) X2 Z)))
             (10(Y2 Z)(NOT G X2 Y2)(NOT Q2 X1 X2 X1 Y2 Z)
              (Q2 X1 X2 X1(F Y2)Z)(Q2 X1 X2(TIMES X1 X2)X2 Z)))
             (11(Y2 Z)((NOT G X2 Y2)(NOT Q2 X1 X2 X1 Y2 Z)
              (NOT Q2 X1 X2(PLUS X1 X1)(PLUS(F Y2)1)Z)
              (Q2 X1 X2(TIMES X1 X2)X2 Z)))))
     (QUOTE((3 4)( )(1 4 5)(1 3)(1 3)(1 3)(1 3)))
     (QUOTE 11)(QUOTE 34)(QUOTE 35)(QUOTE 0))
```

A tételbizonyító program eredménye a következő:

((18 5 8 3)
(21 4 18 2)
(25 21 9 4)
(28 3 25 1)
(29 1 28 1)
(32 21 10 4)
(36 3 32 1)
(38 1 36 1)
(41 21 11 4)
(46 3 41 1)
(49 1 46 1)
(51 29 6 1)
(56 49 7 3)
(60 38 56 1)
(CONTRADICTION 51 60)).

Az utolsó sor kivételével mindegyik sor egy ($r1$, $r2$, $r3$, $r4$) alakú négyes, amelynek jelentése a következő:

$r1$ — a generált mondat (rezolvens) azonosító száma;
$r2$ — az egységmondat azonosító száma;
$r3$ — a több literálból álló mondat azonosító száma;
$r4$ — egy szám, amely megmutatja, hogy $r3$ hányadik literálján történt a rezolúció. A rezolúciót ugyanis az $r2$ és az $r3$ mondatokon végzi el a program.

Az utolsó sor (CONTRADICTION, $r1$, $r2$) jelentése az, hogy az $r1$ és $r2$ egységmondatok ellentmondóak.

Az axiómák és a tétel negáltja együttesen nem elégíthető ki, a tétel állítása tehát igaz: a program leáll az adott feltételek esetén.

5.2. ÁLLÍTÁS. Adott A és azt állítjuk, hogy a program eredményt szolgáltat. Egy programnak akkor és csak akkor van eredménye, ha a $h \in S$ terminális állapothoz rendelt $Q_h(X \cup Z)$ formulának van levezetése rezolúcióval az A formulából ([18]).

Mivel a tételbizonyító programunk segítségével csak az üres mondatot tudjuk levezetni, ezért példánkban azt bizonyítjuk, hogy ha a $h=s_3$-hoz a $\sim Q_3(x_1, x_2, x_1 * x_2)$ formulát rendeljük, akkor az $A_p \wedge A_I \wedge A_s \wedge \sim Q_3(x_1, x_2, x_1 * x_2)$ formula nem elégíthető ki. A bizonyításnál a tételbizonyító programnak ugyanazokat a bemenő adatokat adtuk meg, mint a program-leállás bizonyításánál, csupán a bizonyítandó tételt (illetve annak negáltját) változtattuk meg:

(QUOTE(5( )((NOT Q3 X1 X2(TIMES X1 X2)))))

A tételbizonyító program eredménye megegyezett a program-leállás bizonyításánál kapott eredménnyel; az axiómák és a tétel ($Q_3(x_1, x_2, x_1 * x_2)$) negáltja nem elégíthetők ki: tehát a tétel állítása igaz, a program a $z=z_1 * x_2$ eredménnyel áll le.

5.3. ÁLLÍTÁS. Adott $A=A_p \wedge A_s \wedge A_I$, valamint az X bemenő adat, és a Z eredmény közötti $R(X \cup Z)$ összefüggés. Állítjuk, hogy a program az $R(X \cup Z)$ összefüggés szerint helyes eredményt szolgáltat. Ismeretes, hogy egy program akkor, és csak akkor helyes egy adott $R(X \cup Z)$ összefüggés szerint, ha a $\exists Z(Q_h(X \cup Z) \wedge \wedge R(X \cup Z))$ formula az A formula logikai következménye ([8]).

Tekintsük például az $R(x_1, z) = (z > x_1)$ összefüggést, amelynek a probléma specifikációja szerint a helyes eredmény eleget tesz. Bizonyítsuk be, hogy ezt az összefüggést a programunk által szolgáltatott eredmény is kielégíti.

Az *5.2. állítás* alapján $z = x_1 * x_2$. Ezért szükségtelen, hogy ismét megadjuk a program számára a program működését leíró axiómákat és a segédaxiómákat, ezeket nyilván helyettesíthetjük a

$$Q_3(x_1, x_2, x_1 * x_2)$$

formulával. Meg kell viszont adnunk most a szorzás műveletének a következő tulajdonságát:

$$\forall u \forall v (u > 1 \wedge v > 1 \Rightarrow u * v > u).$$

A bizonyítandó tétel a következő:

$$\exists z (Q_3(x_1, x_2, z) \wedge z > x_1)$$

A bizonyítás során ismét azt látjuk be, hogy az axiómák és a tétel negáltja nem elégíthetők ki.

A tételbizonyító program bemenő adatai a következők:

```
(TPU (QUOTE((1( )((G X1 1)))
            (2( )((G X2 1)))
            (3( )((Q3 X1 X2(TIMES X1 X2))))))
     (QUOTE( ))
     (QUOTE(4 (Z)((NOT Q3 X1 X2 Z)(NOT G Z X1)))
            (5(U V)((NOT G U 1)(NOT G V 1)
                    (G(TIMES U V )U)))))
     (QUOTE(1 2 3)(1 2))(QUOTE 5)(QUOTE 4)
            (QUOTE 5)(QUOTE 0))
```

A tételbizonyító program eredménye a következő:

```
((6  3  4  1)
 (7  6  5  3)
 (12 2  7  2)
 (CONTRADICTION 1 12)).
```

Az axiómák és a tétel negáltja együttesen nem elégíthetők ki, a tétel igaz: a program eredménye eleget tesz az adott összefüggésnek.

6. A programhelyesség automatikus bizonyításának tapasztalatai

A programhelyesség formális bizonyításának tapasztalatait a következőkben összegezhetjük:

1. A bemutatott példák alapján is látható, hogy a program teljes formalizálása nagyon sok axiómát jelent. Bonyolultabb programok esetén az axiómák mennyisége a ma működő tételbizonyító programok számára kezelhetetlennek bizonyulhat, ugyanis a rendelkezésre álló tárterület a bizonyítás befejezése előtt feltöltőd-

het a generált mondatokkal. Megjegyezzük még, hogy a program formalizálása is hibalehetőségeket rejt magában.

2. A feladat megoldása a jelenleg működő tételbizonyító programok segítségével hosszú ideig tart. A bemutatott példák 10 perc nagyságrendű időt vesznek igénybe a gépen. Figyelembe kell vennünk azonban, hogy a CDC 3300-as számítógépen működő LISP rendszer értelmező programmal működik. Tapasztalatok alapján [1], [13] hasonló komplexitású feladatokat kb. két nagyságrenddel gyorsabban lehet megoldani olyan módszerrel, amely fordítóprogrammal dolgozik. Mindazonáltal az így adódó futási idők is még nagyok.

3. A segédaxiómák megválasztása is komoly problémát jelent. Szükséges segédaxiómák hiánya esetén a tételbizonyító program a feladatát nem tudja elvégezni, míg a szükségesnél több segédaxióma megadása a tárterület feltöltéséhez és a bizonyításra fordított idő megnövekedéséhez vezethet.

4. A matematikai modell ugyan egyszerű, de a probléma teljes formalizálása olyan mértékű matematikai apparátus felhasználását teszi szükségessé, amely ma még nincs arányban a megoldandó (és megoldható) feladatok komplexitásával.

7. A programhelyesség bizonyítás egy kevésbé formális módszere

Részben az előző pontban említett okok miatt a programhelyesség bizonyításának ma a kevésbé formális módszerei terjedtek el. Egy ilyen módszer FLOYD-tól származik [3], amelynek alapgondolata az a felismerés, hogy a ciklust nem tartalmazó program helyességének a bizonyítása viszonylag egyszerű feladat. Bontsuk tehát fel a programot részprogramokra, úgy hogy ezek a részprogramok ciklusmentesek legyenek és adjuk meg minden egyes részprogram kezdő adatainak és eredményeinek specifikációját. Ezután bizonyítsuk be minden egyes részprogram helyességét külön-külön. Előző példánk esetében ez a következőképpen történik:

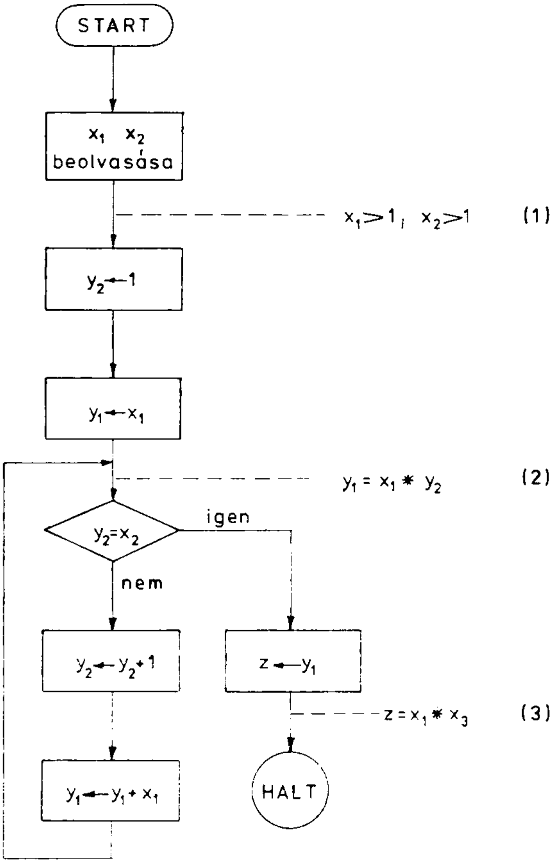
A program bemeneténél (1), a ciklus egy megfelelő pontján (2) és a kimeneténél adjuk meg az X, Y, illetve Z halmazok specifikációját (3. ábra). Ilyen módon a programot az (1)—(2); (2)—(2); (2)—(3) ciklusmentes részprogramokra, szakaszokra osztottuk.

Példánkban az első szakasz ((1)—(2)) helyességét egyszerű behelyettesítéssel láthatjuk be. A (2)—(2) szakasznál tegyük fel, hogy y_2 egy értékére már beláttuk, hogy $y_1 = x_1 * y_2$. Akkor $y_2' = y_2 + 1$, $y_1' = y_1 + x_1 = x_1 * y_2 + x_1 = x_1 * (y_2 + 1) = x_1 * y_2'$.

Végül a (2)—(3) szakaszra, ha $y_1 = x_1 * y_2$ és $y_2 = x_2$, akkor $z = x_1 * y_2 = x_1 * x_2$. Így beláttuk, hogy a program helyes, ha leáll. A programleállást külön kell belátnunk a bemenő adatokat meghatározó állításból.

A módszer előnye az, hogy a programot nem kell teljesen formalizálni. Miután a bizonyítás lépésről lépésre történik, a tételek bizonyítása egyszerűbb, mert kevesebb axiómát kell megadnunk. Problémát jelent viszont a programpontokban elhelyezett állítások helyes megfogalmazása. Ez a folyamat megkívánja, hogy az állításokat a programozó maga fogalmazza meg és helyezze el. Vegyük észre, hogy bizonyításnál a program helyességét csak az így elhelyezett állítások szerint látjuk be, azaz nincs biztosítékunk arra, hogy a program valóban helyes.

A módszer bizonyos mértékig automatizálható, és a bizonyítási eljárást forrásnyelvű programra is lehet alkalmazni. Ilyen módszert ismertet KING [6] munkájában. Ennél a módszernél a programozó az állításait a forrásnyelvű szövegbe speciális formában beépítheti. A forrásnyelvű szöveg elemzéséből automatikusan olyan formalizált állítások generálhatók, amelyek egy automatikus tétel bizonyító program



3. ábra

bemenő adatai lehetnek. Miután a bizonyítandó tételek egyszerűbbek és kevesebb axiómát kell megadni, a ma működő tételbizonyító programok ezt a kisebb feladatot könnyebben el tudják végezni.

IRODALOM

[1] CHANG, C. L., "The unit proof and the input proof in theorem proving", *Journal of the ACM* **17** (1970).

[2] CHANG, C. L. and LEE, R, CH., *Symbolic logic and mechanical theorem proving* (Academic Press, New York, 1973).

[3] ELSPAS, B. et al., "An assessment of techniques for proving program correctness", *Computing Surveys* **4** (1972).

[4] GREEN, C. C., "Application of theorem proving to question answering", Ph. D. Thesis, Stanford Univ., Stanford. 1969.

[5] HOARE, C. A. R., "An axiomatic basis for computer programming", *C. ACM* **12** (1969).
[6] KING, J. C., "A program verifier", in: *IFIP Congress '71 Booklet TA-2* (Ljubljana 1971).
[7] LEE, J. A. N., *Computer Semantics* (Van Nostrand Reinhold Co., 1972).
[8] MANNA, Z., "Properties of programs and first order predicate calculus", *Journal of the ACM* **16** (1969).
[9] MANNA, Z. and WALDINGER, R., "Toward automatic program synthesis", *C. ACM* **14** (1971)
[10] MCCARTHY, J., "Recursive functions of symbolic expressions and their computation by machine", *C. ACM* **3** (1960).
[11] MOORE, J. S., "Computational logic: structure sharing and proof of program properties", Ph. D. Thesis, University of Edinburgh, Edinburgh, 1973.
[12] PIROTTE, A., "Automatic theorem proving based on the resolution principle", *Annual Review in Automatic Programming* **7** (1972).
[13] REBOH, R. et al., "Study of automatic theorem proving", Technical Note 75 (Stanford Research Institute, Menlo Park, 1972).
[14] ROBINSON, J. A., "A machine oriented logic based on the resolution principle", *Journal of the ACM* **12** (1965).

(Beérkezett: 1974. március 19.)

MAJOR PÉTER ÉS VARGA LÁSZLÓ
MTA KÖZPONTI FIZIKAI KUTATÓ INTÉZET
1525 BUDAPEST, 114. POSTAFIÓK 49.

FORMAL METHODS FOR PROVING PROGRAM CORRECTNESS

P. MAJOR and L. VARGA

In recent years much attention has been paid to the problem of proving computer programs correct. Many different levels and methods of approaches are known aiming at this goal.

The purpose of this paper is to summarize a formal approach to program verification. A mathematical method is described by means of which the termination and the correctness of computer programs at the algorithmic level can be related to the unsatisfiability of well-formed-formulas in first order predicate calculus. Proof procedures for first-order predicate calculus can be used to prove the unsatisfiability of these well-formed formulas.

Examples are presented illustrating the application of a resolution based theorem prover program implemented on CDC 3300 computer to these problems. Experiences drawn from these examples are described and an alternative mathematical method is considered at the end of the paper

Alkalmazott Matematikai Lapok **1** *(1975) 51—64*

DIFFÚZIÓS FOLYAMATOK ISMERETLEN PARAMÉTERÉNEK BAYES-FÉLE BECSLÉSÉRŐL

ARATÓ MÁTYÁS
Budapest

A *Bayes-tétel* absztrakt alakjának, valamint diffúziós típusú folyamatok *Radon—Nikodym* deriváltjának ismeretében vizsgálja a dolgozat a diffúziós folyamat ismeretlen paraméterének aposteriori eloszlását. Ha az ismeretlen paraméter normális eloszlású és a diffúziós folyamat sztohasztikus egyenlettel történő előállításában lineárisan szerepel, az aposteriori eloszlás is normális lesz. Az egy- és többdimenziós, konstans együtthatójú sztohasztikus egyenletnek elegettevő *Markov folyamatok* konkrét vizsgálatokban korábban is szerepeltek. A dolgozat példáiban más becslésekkel való kapcsolat vizsgálata is szerepel.

1. Bevezetés

A paraméter becslési eljárások közül a *Bayes*-féle eljárás átvitele a klasszikus független megfigyelési sorozatokra vonatkozó feladatokról sztohasztikus folyamatokra önmagában is érdekes feladat. Ebben a dolgozatban elsősorban a feladat absztrakt terekre történő átfogalmazásának problémakörével foglalkozom. A Bayes-i hozzállás természetességét a többdimenziós *Markov-folyamatok* nemlineáris filtrációja feladatának megoldása szolgáltatja (vö. [4], [8]). Legyen ugyanis a $\zeta(t)= =(\theta(t), \xi(t))$ folyamat kétdimenziós *Markov-típusú*, melynek $\theta(t)$ komponense nem figyelhető meg. Kérdés, a $\xi(t)$ folyamat megfigyelése alapján, a $0\leqq s\leqq t$ intervallumban, hogyan becsülhető $\theta(t_0)$ (t_0 fix) értéke valamilyen értelemben legjobban. Az ismeretlen — valószínűségi változó — paraméter vizsgálata innen speciálisan a $\theta(t, \omega)\equiv\theta(\omega)$ esetben adódik. Ennek a speciális esetnek a vizsgálata jóval egyszerűbb az általánosnál, a meggondolások elsősorban mértékelméleti jellegűek és a *Bayes-tétel* absztrakt terekre történő megfogalmazására vezethetők vissza. A dolgozatban elsősorban a normális aposteriori eloszlás kérdésével foglalkozom s több példán keresztül is megmutatom az eljárás hasznosságát.

A Bayes-féle módszer azonban a legtöbb esetben csak közelítésként használható s nem teszi feleslegessé azokat az eredményeket, amelyek a paraméter becslések pontos eloszlásaira vonatkoznak. A dolgozatban szereplő eredmények levezethetők a nem lineáris filtrációra vonatkozó igen általános feltevések melletti eredményekből (lásd LIPCER és SIRJÁJEV összefoglaló jellegű [8] cikkét), ahol a négyzetes középben legjobb közelítés várható értékére és szórására sztohasztikus differenciálegyenletet vezetnek be a szerzők. Ezeknek az egyenleteknek a megoldásait adják a legegyszerűbb esetben $(\theta(t, \omega)=\theta(\omega))$ jelen dolgozat eredményei.

2. A Bayes-tétel absztrakt alakja

Legyenek az $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ valószínűségi mezőn $\theta(\omega)$ és $\xi(\omega)$ véletlen elemek valamilyen mérhető térbeli értékekkel, mely tereket jelölje $(\Theta, \mathfrak{B}_\theta)$, ill. $(\Sigma, \mathfrak{B}_\xi)$. Legyenek továbbá $\mathfrak{F}_\theta=\sigma\{\omega\colon \theta(\omega)\}$, $\mathfrak{F}_\xi=\sigma\{\omega\colon \xi(\omega)\}$ a θ, illetve a ξ által generált σ-algebrák. Az $(\Omega, \mathfrak{F}_\theta)$, ill. $(\Omega, \mathfrak{F}_\xi)$ mérhető tereken a mértékeket jelölje P_θ, ill. P_ξ (azaz $\mathbf{P}$ megszorítását ezeken a σ-algebrákon).

Ha $A\in\mathfrak{F}_\xi$ feltételes valószínűsége $\mathbf{E}(I_A(\omega)|\mathfrak{F}_\theta)=P_\xi(A, \omega)$[1] reguláris mérték (lásd a definíciót LOÈVE [7] vagy ARATÓ [1]), igaz a következő összefüggés:

$$P_\xi(A) = \int_\Omega P_\xi(A, \omega)\mathbf{P}(d\omega)$$

$\left(\text{azaz } B\in\mathfrak{F}_\theta \text{ esetén } P_\xi(AB) = \int_B P_\xi(A, \omega)\mathbf{P}(d\omega)\right)$

A továbbiakban feltesszük, hogy az $\mathfrak{F}_\xi$ és $\mathfrak{F}_\theta$ σ-algebrák szeparábilisak, azaz léteznek olyan $B_j\in\mathfrak{F}_\xi$ (ill. $B_j'\in\mathfrak{F}_\theta$) $j=1, 2,\dots$, halmazsorozatok, amelyekre $\sigma\{B_j\}=\mathfrak{F}_\xi$ (ill. $\sigma\{B_j'\}=\mathfrak{F}_\theta$). Ha létezik olyan $\mathbf{Q}$ mérték, hogy $P_\xi(\cdot, \tilde\omega)\ll\mathbf{Q}$, P_θ m.m. $\tilde\omega$-ra és a $P_\theta(\omega, B)=\mathbf{E}(I_B(\omega)|\mathfrak{F}_\xi)$ mértékre ugyancsak teljesül a regularitási feltétel, valamint $P_\theta(\omega, \cdot)\ll\mathbf{Q}$, P_ξ m.m. ω-ra, akkor a szeparábilitási feltétel teljesülése esetén létezik az $(\Omega\times\Omega, \mathfrak{F}_\xi\times\mathfrak{F}_\theta)$ mérhető téren olyan $\mathfrak{F}_\xi\times\mathfrak{F}_\theta$—mérhető

$$f_\xi(\omega, \tilde\omega) = \frac{dP_\xi(\cdot, \tilde\omega)}{d\mathbf{Q}}(\omega), \quad (\mathbf{Q}\times P_\theta \text{ m.m.}),$$

[illetve

$$f_\theta(\omega, \tilde\omega) = \frac{dP_\theta(\omega, \cdot)}{d\mathbf{Q}}(\tilde\omega), \quad (P_\xi\times\mathbf{Q} \text{ m.m.})\Big]$$

hogy, $A\in\mathfrak{F}_\xi$ esetén,

$$P_\xi(A) = \int_\Omega P_\xi(A, \tilde\omega)\mathbf{P}(d\tilde\omega) = \int_\Omega\int_\Omega f_\xi(\omega, \tilde\omega)\mathbf{Q}(d\omega)\mathbf{P}(d\tilde\omega)$$

[illetve, $B\in\mathfrak{F}_\theta$ esetén,

$$P_\theta(B) = \int_\Omega P_\theta(\omega, B)\mathbf{P}(d\omega) = \int_\Omega\int_\Omega f_\theta(\omega, \tilde\omega)\mathbf{Q}(d\tilde\omega)\mathbf{P}(d\omega).\Big]$$

A bizonyítás megtalálható DOOB [5] könyve 554. oldalán. Legyen $g(\omega)=g(\theta(\omega))$ $\mathfrak{F}_\theta$-mérhető függvény, amelyre $E|g(\omega)|<\infty$ és vezessük be a következő halmazfüggvényt

$$G(A) = \int_\Omega g(\omega)P_\xi(A, \omega)\mathbf{P}(d\omega), \quad A\in\mathfrak{F}_\xi. \tag{2.0}$$

Speciálisan $g(\omega)=I_B(\omega)$ esetén adódik $P_\xi(AB)$. A *Bayes*-féle tétel megszámlálható értékű valószínűségi változók esetében a következőt állítja. Legyenek $\xi(\omega)$ lehetséges

[1] $I_A(\omega)$ jelöli az A halmaz indikátor függvényét.

értékei $x_1, x_2, \ldots$ míg $\theta(\omega)$ lehetséges értékei $y_1, y_2, \ldots$; akkor fix k és i értékekre

$$\text{(2.1)} \qquad \mathbf{P}(\theta = y_k | \xi = x_i) = \frac{\mathbf{P}(\xi = x_i | \theta = y_k)\mathbf{P}(\theta = y_k)}{\sum\limits_j \mathbf{P}(\xi = x_i | \theta = y_j)\mathbf{P}(\theta = y_j)}.$$

Ha ξ és θ valószínűségi változók $h(x, y)$ együttes sűrűségfüggvénnyel és külön-külön $f_\xi(x)$, illetve $f_\theta(y)$ sűrűségfüggvénnyel és

$$f_\xi(x|y) = \frac{h(x, y)}{f_\theta(y)} \quad (\text{ha } f_\theta(y) > 0), \quad f_\theta(y|x) = \frac{h(x, y)}{f_\xi(x)} \quad (\text{ha } f_\xi(x) > 0),$$

feltételes sűrűségfüggvényekkel rendelkeznek, a *Bayes-féle tétel* a következő

$$\text{(2.2)} \qquad f_\theta(y|x) = \frac{f_\xi(x|y)f_\theta(y)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x|t)f_\theta(t)\,dt},$$

vagy

$$\mathbf{P}\{\theta \in B | \mathfrak{F}_\xi\} = \frac{\int\limits_B f_\xi(x|y)f_\theta(y)\,dy}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x|y)f_\theta(y)\,dy} = \frac{\int\limits_B f_\xi(x|y)\,dF_\theta(y)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x|y)\,dF_\theta(y)},$$

ahol $F_\theta(y)$ a θ változó eloszlásfüggvénye.

Legyen az $(\Omega, \mathfrak{A})$ tér leképezése a számegyenes *Borel-halmazaira* az $\omega \to \xi(\omega)$ leképezés esetén I_ξ, míg az $\omega \to \theta(\omega)$ leképezés esetén I_θ. Ha C *Borel-halmaz*, legyen $\mu(C) = \mathbf{P}\{T_\xi^{-1}(C)\}$, illetve $\nu(C) = \mathbf{P}\{T_\theta^{-1}(C)\}$, akkor $A \in \mathfrak{F}_\xi$ esetén

$$P_\xi(A) = \mu(T_\xi A), \quad P_\theta(A) = \nu(T_\theta A),$$

vagy

$$P_\xi(A) = \mathbf{P}(\xi^{-1}(C)), \quad P_\theta(A) = \mathbf{P}(\theta^{-1}(C)), \quad \text{ahol} \quad C = T_\xi A.$$

Ha a μ és ν mértékek abszolút folytonosak az L *Lebesque-mértékre* nézve, jelölje

$$\frac{d\mu}{dL}(\omega) = \frac{d\mu}{dL}(\xi(\omega)),$$

ill.

$$\frac{d\nu}{dL}(\omega) = \frac{d\nu}{dL}(\theta(\omega)),$$

azt a valószínűségi változót, melyet $\frac{d\mu}{dL}(x)$-ből kapunk, ha x helyébe a $\xi(\omega)$ valószínűségi változót, illetve $\frac{d\nu}{dL}(y)$-ban az y változót θ-val helyettesítjük. A $P_\xi(A, \tilde{\omega})$ feltételes valószínűség bevezetése a síkon a $\mu(T_\xi A, y)$ halmazfüggvény (y-ban ν m.m.) bevezetését jelenti. Hasonlóan vezethetjük be a $P_\theta(\omega, B)$-nak megfelelő $\nu(x, T_\theta B)$ halmazfüggvényt is. Az együttes sűrűségfüggvény létezése, valamint a feltételes sűrűségek létezése azt fejezi ki, hogy

$$f_\xi(x|y)=\frac{d\mu(\cdot,y)}{dL}(x),$$

$$f_\theta(y|x)=\frac{d\nu(x,\cdot)}{dL}(y),$$

és

$$f_\xi(x)=\frac{d\mu}{dL}(x),\quad f_\theta(y)=\frac{d\nu}{dL}(y).$$

A (2.2) összefüggés absztrakt alakjában $f_\theta(\omega,\tilde\omega)$ megfelelője $f_\theta(y|x)$, míg $f_\xi(\omega,\tilde\omega)$ megfelelője $f_\xi(x|y)$, mely függvényeket az $y=\theta(\omega)$, ill. $x=\xi(\omega)$ helyettesítéssel kapunk $f_\theta(y|x)$, ill. $f_\xi(x|y)$-ból

$$(2.2')\qquad f_\theta(\omega,\tilde\omega)=\frac{f_\xi(\omega,\tilde\omega)f_\theta(\tilde\omega)}{\int\limits_\Omega f_\xi(\omega,\tilde\omega)f_\theta(\tilde\omega)\mathbf{P}(d\tilde\omega)}=$$

$$=\frac{f_\xi(\omega,\tilde\omega)\int\limits_\Omega f_\theta(\omega,\tilde\omega)\mathbf{Q}(d\omega)}{\int\limits_\Omega\int\limits_\Omega f_\xi(\omega,\tilde\omega)f_\theta(\omega,\tilde\omega)\mathbf{Q}(d\omega)\mathbf{P}(d\tilde\omega)},$$

vagy

$$P_\theta(\omega,B)=\big(\nu(\xi(\omega),T_\theta B)\big)=\frac{\int\limits_\Omega\int\limits_\Omega T_B(\tilde\omega)f_\xi(\omega,\tilde\omega)f_\theta(\omega,\tilde\omega)\mathbf{Q}(d\omega)\mathbf{P}(d\tilde\omega)}{\int\limits_\Omega\int\limits_\Omega f_\xi(\omega,\tilde\omega)f_\theta(\omega,\tilde\omega)\mathbf{Q}(d\omega)\mathbf{P}(d\tilde\omega)}.$$

A (2.1) összefüggést $A_i\in\mathfrak{F}_\xi$ $(\bigcup_i A_i=\Omega,\ A_i\cap A_j=\emptyset$, ha $i\neq j)$ és $B_j\in\mathfrak{F}_\theta$ $(\bigcup_j B_j=\Omega$, $B_i\cap B_j=\emptyset$, ha $i\neq j)$ elemekre felírva, adódik

$$(2.1')\qquad P_\theta(B_k,A_i)=\frac{P_\xi(A_i,B_k)P_\theta(B_k)}{\sum_j P_\xi(A_i,B_j)P_\theta(B_j)}.$$

A (2.2′) összefüggés bizonyítása tetszőleges véletlen ξ, θ elemekre egyszerűen elvégezhető, ha a mértékekről feltesszük a regularitást és a σ-algebrákról a szeparabilitást (lásd pl. LOÈVE [7] könyve 371—384. oldalai, vagy DOOB [5] könyve 35. és 554—555. oldalai alapján).

Igen hasznos segédeszköz a következő egyszerű lemma, ahol θ, ξ absztrakt értékű véletlen elemek.

2.1. LEMMA. a) Ha $g(\omega)=g(\theta(\omega))$ és $\mathbf{E}|g|<\infty$, akkor a (2.0)-ban definált $G\ll P_\xi$ és

$$(2.3)\qquad \mathbf{E}\{g(\theta(\omega))|\mathfrak{F}_\xi\}=\frac{dG}{dP_\xi}(\omega),\quad (P_\xi \text{ m.m.}).$$

b) Ha $\mathbf{E}|g|<\infty$, a $P_\xi(A, \omega)$ feltételes valószínűség reguláris ($A\in\mathfrak{F}_\xi$, $\omega\in\Omega$) és $P_\xi(\cdot, \omega)\ll\mathbf{Q}(\cdot)$ (P_θ m.m.), ahol $\mathbf{Q}$ egy mérték az $(\Omega, \mathfrak{F}_\xi)$ mérhető téren, akkor

$$P_\xi \ll \mathbf{Q}, \quad G \ll \mathbf{Q}. \tag{2.4}$$

c) Ha a) és b) feltételein kívül az $\mathfrak{F}_\xi$ σ-algebra még szeparábilis is, akkor az $(\Omega\times\Omega, \mathfrak{F}_\xi\times\mathfrak{F}_\theta)$ mérhető téren létezik olyan $f_\xi(\omega, \tilde{\omega})$ $\mathfrak{F}_\xi\times\mathfrak{F}_\theta$-mérhető függvény, hogy

$$f_\xi(\omega, \tilde{\omega}) = \frac{dP_\xi(\cdot, \tilde{\omega})}{d\mathbf{Q}}(\omega), \quad [\mathbf{Q}\times P_\theta \text{ m.m.}], \tag{2.5}$$

ahol $A\in\mathfrak{F}_\xi$.

d) Az előbbi feltételek mellett

$$\frac{dG}{d\mathbf{Q}}(\omega) = \int_\Omega g(\tilde{\omega})\frac{dP_\xi(\cdot, \tilde{\omega})}{d\mathbf{Q}}(\omega)\mathbf{P}(d\tilde{\omega}) = \int_\Omega g(\tilde{\omega})f_\xi(\omega, \tilde{\omega})\mathbf{P}(d\tilde{\omega}), \tag{2.6}$$

$$\frac{dP_\xi}{d\mathbf{Q}}(\omega) = \int_\Omega \frac{dP_\xi(\cdot, \tilde{\omega})}{d\mathbf{Q}}(\omega)\mathbf{P}(d\tilde{\omega}) = \int_\Omega f_\xi(\omega, \tilde{\omega})\mathbf{P}(d\tilde{\omega}) \tag{2.7}$$

és

$$0 < \frac{dP_\xi}{d\mathbf{Q}}(\omega) < \infty \quad [P_\xi \text{ m.m.}], \tag{2.8}$$

$$\mathbf{E}[g(\omega)|\mathfrak{F}_\xi] = \frac{dG}{dP_\xi}(\omega) = \frac{\dfrac{dG}{d\mathbf{Q}}(\omega)}{\dfrac{dP_\xi}{d\mathbf{Q}}(\omega)} = \frac{\int_\Omega g(\tilde{\omega})f_\xi(\omega, \tilde{\omega})\mathbf{P}(d\tilde{\omega})}{\int_\Omega f_\xi(\omega, \tilde{\omega})\mathbf{P}(d\tilde{\omega})} \tag{2.9}$$

e) Ha a szeparábilis $\mathfrak{F}_\theta$ σ-algebrán $P_\theta(\omega, B)$ feltételes valószínűség reguláris és $P_\theta(\omega, \cdot)\ll\mathbf{Q}$($P_\xi$ m.m.), akkor az

$$f_\theta(\omega, \tilde{\omega}) = \frac{dP_\theta(\omega, \cdot)}{d\mathbf{Q}}(\tilde{\omega})$$

jelöléssel

$$f_\theta(\omega, \tilde{\omega}) = \frac{f_\xi(\omega, \tilde{\omega})\int_\Omega f_\theta(\omega, \tilde{\omega})\mathbf{Q}(d\omega)}{\int_\Omega f_\xi(\omega, \tilde{\omega})\left(\int_\Omega f_\theta(\omega, \tilde{\omega})\mathbf{Q}(d\omega)\right)\mathbf{P}(d\tilde{\omega})}. \tag{2.10}$$

A lemma bizonyítása. Mivel $\mathbf{E}\{g(\theta(\omega))|\mathfrak{F}_\xi\}$ $\mathfrak{F}_\xi$-mérhető (2.3) bizonyításához elegendő belátni, hogy tetszőleges $A\in\mathfrak{F}_\xi$ halmazra

$$\mathbf{E}\{I_A(\omega)\mathbf{E}(g|\mathfrak{F}_\xi)\} = G(A).$$

Ez viszont a következő egyenlőségsorozat következménye,

$$\mathbf{E}\{I_A(\omega)\mathbf{E}(g|\mathfrak{F}_\xi)\} = \mathbf{E}\{\mathbf{E}(I_A(\omega)g(\omega)|\mathfrak{F}_\xi)\} = \mathbf{E}\,(I_A(\omega)g(\omega)) =$$
$$= \mathbf{E}\{\mathbf{E}(I_A(\omega)g(\omega)|\mathfrak{F}_\theta)\} = \mathbf{E}\{g(\omega)\mathbf{E}(I_A(\omega)|\mathfrak{F}_\theta)\} =$$
$$= \mathbf{E}\{g(\omega)P_\xi(A, \omega)\} = G(A).$$

(2.4) a $P_\xi(A) = \int_\Omega P_\xi(A, \omega)\mathbf{P}(d\omega)$ előállításból és (2.3)-ból adódik. Az $\mathfrak{F}_\xi\times\mathfrak{F}_\theta$-mérhető

$f_\xi(\omega, \tilde{\omega})$ létezése, mely $\mathbf{Q}\times P_\theta$ m.m. eleget tesz (2.5)-nek a már említett *Doob*-féle konstrukció ([5], 554. o.) átvitele az $\mathfrak{F}_\xi\times\mathfrak{F}_\xi$ esetről az $\mathfrak{F}_\xi\times\mathfrak{F}_\theta$ esetre.

(2.6) bizonyítása következik $f_\xi(\omega, \tilde{\omega})$ mérhetőségéből, (2.5)-ből és a *Fubini-tételből*, ugyanis

$$G(A) = \int_\Omega g(\tilde{\omega})P(A, \tilde{\omega})\mathbf{P}(d\tilde{\omega}) = \int_\Omega g(\tilde{\omega})\left[\int_A f_\xi(\omega, \tilde{\omega})\mathbf{Q}(d\omega)\right]\mathbf{P}(d\tilde{\omega}) =$$

$$= \int_A \left[\int_\Omega f_\xi(\omega, \tilde{\omega})g(\tilde{\omega})\mathbf{P}(d\tilde{\omega})\right]\mathbf{Q}(d\omega).$$

Ahol $\int_\Omega f_\xi(\omega, \tilde{\omega})g(\tilde{\omega})\mathbf{P}(d\tilde{\omega})$ $\mathfrak{F}_\xi$-mérhető és b) szerint $G\ll\mathbf{Q}$, ahonnan a *Radon—Nikodym-derivált* egyértelműségéből adódik (2.6). (2.7) a (2.6) összefüggés speciális esete $(g(\omega)\equiv 1)$ és a differenciálás és integrálás felcserélhetőségét bizonyítja. (2.8) következménye a $P_\xi\ll\mathbf{Q}$ abszolút folytonosságnak és azon halmaz valószínűsége, ahol $\frac{dP_\xi}{d\mathbf{Q}}=0$ 0-val egyenlő. A $P_\xi\ll\mathbf{Q}$, $G\ll P_\xi$, $G\ll\mathbf{Q}$ láncból és az ismert deriválási szabályból adódik

$$\frac{dG}{d\mathbf{Q}} = \frac{dG}{dP_\xi}\cdot\frac{dP_\xi}{d\mathbf{Q}},$$

ahonnan (2.3), (2.6), (2.7) felhasználásával kapjuk a (2.9) összefüggést. Az előbbiek megismétlésével adódik (2.10). A lemma bizonyítása ezzel kész.

3. Diffúziós típusú folyamatok sűrűségfüggvényei

Legyen az $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ valószínűségi mezőn $(\mathfrak{F}_t, 0\leqq t\leqq T)$ σ-algebrák monoton nem csökkenő sokasága $(\mathfrak{F}_t\subset\mathfrak{A})$, $(w(t), \mathfrak{F}_t, \mathbf{P})$ standard *Brown-mozgás folyamat*, azaz folytonos, négyzetesen integrálható martingál a $w(0)=0$, $\mathbf{E}[(w(t)-w(s))^2|\mathfrak{F}_s] = t-s$ (1-valószínűséggel), $t\geqq s$, feltételekkel.

Jelölje a $[0, T]$ -ben folytonos $x = \{x(t), 0\leqq t\leqq T\}$, $x(0) = 0$, függvények mérhető terét $(C_{[0,T]}, \mathbf{B})$, ahol $\mathbf{B} = \sigma\{x\colon x(s), 0\leqq s\leqq T\}$. Legyen továbbá $\mathbf{B}_t = \sigma\{x\colon x(s), s\leqq t\}$.

Ha $B[0, T]$ a *Borel-mérhető halmazok* σ-algebrája, legyen az $\alpha(t, x)$ funkcionál $B[0, T]\times\mathbf{B}$-mérhetőségen kívül minden t-re $B[0, T]\times\mathbf{B}_t$-mérhető is, azaz „független" a jövőtől.

Legyen $\theta(\omega)$ n-dimenziós valószínűségi változó $(n\geqq 1$, fix) $\mathbf{P}(\theta(\omega)\in B)=P_\theta(B)$ eloszlással az R^n euklideszi tér B *Borel-halmazain.* Legyen $\theta(\omega)$ független a $w(t)-w(0)$ $(t>0$ tetszőleges) változóktól.

Legyen a $\xi(t, \omega)$ folyamat $\mathfrak{F}_t$-mérhető és folytonos.

3.1. Definíció. A $(\xi(t), \mathfrak{F}_t)$ folyamatot a $\theta=\theta(\omega)$ paramétertől függő diffúziós típusúnak nevezzük, ha minden θ értékre létezik olyan a jövőtől független $a_\theta(t, x)$ funkcionál, hogy

$$\mathbf{P}\left\{\int_0^T |\alpha_\theta(t, \xi(t))|\,dt < \infty\right\} = 1$$

$(\alpha_\theta(t,\xi)\equiv a_\theta(t,\xi(\omega)),\ \xi(\omega)=\{\xi(t),\ 0\leqq t\leqq T\})$ és minden $0\leqq t\leqq T$ értékre

$$\xi(t)=\int_0^t \alpha_\theta(s,\xi(s))\,ds+w(t),\quad \text{(1 valószínűséggel)}. \tag{3.1}$$

Feltesszük, hogy $\xi(t)$ minden θ-ra diffúziós típusú és $\xi(s,\omega)$ $\sigma\{\omega\colon \theta(\omega),\ w(u),\ u\leqq s\}$-mérhető minden $0\leqq s\leqq T$ értékre.

Ha $\theta(\omega)$ a fenti tulajdonságokkal rendelkező valószínűségi változó, a (3.1) differenciálegyenlet megoldása létezik. Legyen $\mu_\xi(B)=\mathbf{P}\{\omega\colon \xi(\omega)\in B\}$, $\mu_w(B)=\mathbf{P}\{\omega\colon w(\omega)\in B\}$.

Ha θ vektor értékű valószínűségi változó, a $P_\xi(A,\omega)=\mathbf{E}(I_A(\omega)|\mathfrak{F}_\theta)$ mérték reguláris (DOOB [5], 35. o.); így felhasználva, hogy minden θ értékre (LIPCER—SIRJÁJEV [10], 5. tétele alapján)

$$\frac{d\mu_{\xi,\theta}}{d\mu_w}(w)=\exp\left\{\int_0^T \alpha_\theta(t,w(t))dw(t)-\frac{1}{2}\int_0^T \alpha_\theta^2(t,w(t))\,dt\right\},\quad (\mathbf{P}\ \text{m.m.}) \tag{3.2}$$

és

$$\frac{d\mu_w}{d\mu_{\xi,\theta}}(\xi)=\exp\left\{-\int_0^T \alpha_\theta(t,\xi(t))d\xi(t)+\frac{1}{2}\int_0^T \alpha_\theta^2(t,\xi(t))\,dt\right\},\quad (\mathbf{P}\ \text{m.m.}) \tag{3.3}$$

a 2. szakasz jelöléseivel (ha $\mathbf{Q}=\mu_w$ *Wiener-mérték*, L a *Lebesque-mérték*) a következőt kapjuk:

$$f_\xi(\omega,\tilde\omega)=\frac{d\mu_{\xi,\theta}}{d\mu_w}(x,y)\Big|_{\substack{x=\xi\\ y=\theta}}= \tag{3.4}$$

$$=\exp\left\{-\frac{1}{2}\int_0^T \alpha_\theta^2(t,\xi(t))\,dt+\int_0^T \alpha_\theta(t,\xi(t))d\xi(t)\right\},$$

$$f_\theta(\tilde\omega)=\frac{dP_\theta}{dL}(y)\Big|_{y=\theta}. \tag{3.5}$$

Egyszerűség kedvéért legyen θ egydimenziós, akkor a (3.4) és (3.5) összefüggésekből adódik a következő tétel.

3.1. TÉTEL. Legyen az $\alpha_\theta(t,x)$ funkcionál θ-ban lineáris, azaz $\alpha_\theta(t,x)=-\theta g(t,x)$ és θ legyen $N(m_0,\sigma^2)$ (normális eloszlású m_0 várható értékkel és σ^2 szórásnégyzettel), akkor θ aposteriori eloszlása normális

$$\mathbf{E}(\theta|\mathfrak{F}_\xi^t)=\frac{\dfrac{m_0}{\sigma^2}-\displaystyle\int_0^t g(s,\xi(s))\,d\xi(s)}{\dfrac{1}{\sigma^2}+\displaystyle\int_0^t g^2(s,\xi(s))\,ds}, \tag{3.6}$$

$$\mathbf{E}((\theta-\mathbf{E}(\theta|\mathfrak{F}_\xi^t))^2|\mathfrak{F}_\xi^t)=\frac{1}{\dfrac{1}{\sigma^2}+\displaystyle\int_0^t g^2(s,\xi(s))\,ds}. \tag{3.7}$$

Bizonyítás. A feltevések szerint

$$f_\theta(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(\theta - m_0)}{2\sigma^2}},$$

$$f_\xi(\omega, \theta) = \exp\left\{-\theta \int_0^t g(s, \xi(s))d\xi(s) - \frac{\theta^2}{2} \int_0^t g^2(s, \xi(s))ds\right\}$$

és a (2.10) *Bayes formula* alapján $\sqrt{2\pi}\,\sigma$-val való egyszerűsítés után

$$f_\theta(\omega, \theta) = \frac{\exp\left\{-\frac{(\theta - m_0)^2}{2\sigma^2} - \theta \int_0^t g(s, \xi)d\xi - \frac{\theta^2}{2} \int_0^t g^2(s, \xi)ds\right\}}{\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{(u - m_0)^2}{2\sigma^2} - u \int_0^t g(s, \xi)d\xi - \frac{u^2}{2} \int_0^t g^2(s, \xi)ds\right\}du} =$$

$$= \frac{\exp\left\{-\frac{\theta^2}{2}\left[\frac{1}{\sigma^2} + \int_0^t g^2(s, \xi(s))ds\right] + \theta\left[\frac{m_0}{\sigma^2} + \int_0^t g(s, \xi(s))\,d\xi(s)\right] - \frac{m_0^2}{2\sigma^2}\right\}}{\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{u^2}{2}\left[\frac{1}{\sigma^2} + \int_0^t g^2(s, \xi)ds\right] + u\left[\frac{m_0}{\sigma^2} - \int_0^t g(s, \xi(s))\,d\xi(s)\right] - \frac{m_0^2}{2\sigma^2}\right\}du}.$$

Innen egyszerűsítéssel, valamint

$$v = u\sqrt{\frac{1}{\sigma^2} + \int_0^t g^2(s, \xi(s))\,ds}$$

helyettesítéssel az

$$f_\theta(\omega, \theta) =$$

$$= \frac{\exp\left\{-\frac{\theta^2}{2}\left[\frac{1}{\sigma^2} + \int_0^t g^2(s, \xi)ds\right] + \theta\left[\frac{m_\theta}{\sigma^2} - \int_0^t g(s, \xi)d\xi\right]\right\}}{\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\sigma^2} + \int_0^t g^2(s, \xi)\,ds}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{v^2}{2} + \frac{v}{\sqrt{\frac{1}{\sigma^2} + \int_0^t g^2(s, \xi)\,ds}}\left[\frac{m_\theta}{\sigma^2} + \int_0^t g^2(s, \xi)\,d\xi\right]\right\}dv}$$

összefüggést kapjuk, ahonnan a normális eloszlás sűrűségfüggvényének integrálját ismerve

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{t^2}{2} + at\right\}dt = \sqrt{2\pi}\exp\left\{\frac{a^2}{2}\right\}\right)$$

adódik, hogy

$$f_\theta(\omega, \theta) =$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{1}{\sigma^2} + \int_0^t g^2(s, \xi(s))ds}}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{\frac{1}{\sigma^2} + \int_0^t g^2(s, \xi)\,ds}{2}\left[\theta - \frac{\left(\frac{m_0}{\sigma^2} - \int_0^t g(s, \xi)\,d\xi\right)}{\frac{1}{\sigma^2} + \int_0^t g^2(s, \xi)\,ds}\right]^2\right\},$$

amit bizonyítani akartunk.

Következmény. Az $|m_0|<\infty$ és $\sigma\to\infty$ esetben[2] a jól ismert

$$\mathbf{E}(\theta|\mathfrak{F}_\xi^t) = -\frac{\int_0^t g(s,\xi(s))d\xi(s)}{\int_0^t g^2(s,\xi(s))\,ds}$$

maximum likelihood becslést kapjuk a θ paraméterre, melynek szórásnégyzete

$$\mathbf{E}((\theta-\mathbf{E}(\theta|\mathfrak{F}_\xi^t))^2|\mathfrak{F}_\xi^t) = \frac{1}{\int_0^t g^2(s,\xi(s))\,ds}.$$

Hasonló tétel bizonyítható a többdimenziós diffúziós típusú folyamatokra is, ennek kimondása helyett inkább példákra szorítkozunk.

Ismeretes, hogy θ aposteriori eloszlásának szórásnégyzete (lásd LIPCER—SIRJÁJEV [9] 5. tétel) $\gamma(t)=\mathbf{E}((\mathbf{E}(\theta|\mathfrak{F}_\xi^t)-\theta)^2|\mathfrak{F}_\xi^t)$, ha $\xi(t)$ a (3.1) diffúziós folyamat, kielégíti a

$$\frac{d\gamma(t)}{dt} = -[g(t,\xi(t))\gamma(t)]^2 \tag{3.8}$$

Riccati-típusú differenciálegyenletet. A 3.1 tételben megadott összefüggésből közvetlen számolással meggyőződhetünk, hogy a $\gamma(t)$-re adott (3.7) megoldás kielégíti a (3.8) egyenletet.

4. A 3.1 tételre vonatkozó példák

1. PÉLDA. Legyen θ egy (m,σ^2) paraméterű normális eloszlású valószínűségi változó. Ha a $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ független normális eloszlású változók $(\theta, 1)$ paraméterűek, akkor θ feltételes eloszlása az $\mathfrak{F}_\xi^n$ feltétel mellett normális eloszlás

$$\mathbf{E}(\theta|\mathfrak{F}_\xi^n) = \frac{\frac{m}{\sigma^2}+\sum_1^n \xi_i}{\frac{1}{\gamma^2}+n}, \quad \mathbf{E}\{(\theta-\mathbf{E}(\theta|\mathfrak{F}_\xi^n))^2|\mathfrak{F}_\xi^n\} = \frac{1}{\frac{1}{\sigma^2}+n} \tag{4.1}$$

középértékkel, ill. szórásnégyzettel. (4.1)-ből $\sigma=\infty$ esetén $\left(\frac{1}{n}\sum_1^n \xi_i, \frac{1}{n}\right)$ paraméterű normális eloszlás adódik. Ha θ egy $(\xi_0, 1)$ paraméterű normális eloszlású változó (ahol ξ_0 az első megfigyelés)

$$\mathbf{E}(\theta|\mathfrak{F}_\xi^n) = \frac{\sum_{i=0}^n \xi_i}{n+1}, \quad \mathbf{E}\{(\theta-\mathbf{E}(\theta|\mathfrak{F}_\xi^n))^2|\mathfrak{F}_\xi^n\} = \frac{1}{n+1}.$$

Vegyük észre, hogy ismeretlen szórásnégyzet esetén az aposteriori eloszlás csak akkor normális, ha paraméternek az $\frac{1}{\sigma_0^2}=\frac{1}{D^2\xi}$ mennyiséget vesszük.

[2] A $\sigma\to\infty$ eset az egész egyenesen egyenletes eloszlás megfelelője.

2. PÉLDA. Legyenek a $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ változók *Gauss—Markov-folyamat* elemei ($\mathbf{E}\xi_k=0$), azaz elégítsék ki a következő differencia egyenletet

$$\xi_k = \varrho\xi_{k-1}+\varepsilon_k, \quad \mathbf{E}\varepsilon_k = 0, \quad \mathbf{D}^2\varepsilon_k = 1, \quad \xi_0 = x_0 \quad \text{(fix)},$$

ahol ϱ normális eloszlású (ϱ_0, γ^2) paraméterekkel[3]. ϱ feltételes eloszlása normális

$$\text{(4.2)}\quad \mathbf{E}(\varrho\,|\,\mathfrak{F}_\xi^n) = \frac{\frac{\varrho_0}{\gamma^2}+\sum_1^n \xi_i\xi_{i-1}}{\frac{1}{\gamma^2}+\sum_1^n \xi_{i-1}^2}, \quad \mathbf{E}\{(\varrho-\mathbf{E}(\varrho\,|\,\mathfrak{F}_\xi^n))^2\,|\,\mathfrak{F}_\xi^n\} = \left\{\frac{1}{\gamma^2}+\sum_1^n \xi_{i-1}^2\right\}^{-1}$$

paraméterekkel. $\gamma\to\infty$ esetén ϱ becslésére a jólismert széria korrelációs együttható adódik. Ha a $\mathbf{D}^2\xi_k=1$ szórásnégyzetet rögzítjük $\mathbf{D}^2\varepsilon_k = (1-\varrho^2)$ lesz, s ha ϱ apriori eloszlása normális is, feltételes eloszlása nem lesz az. Ennek oka, hogy ϱ a ξ_k változók differencia egyenletében nem lineárisan szerepel (ε_k együtthatójában!). Ugyancsak elvész a feltételes normalitás, ha ξ_0 kezdeti eloszlását is figyelembe vesszük.

3. PÉLDA. (lásd LIPCER—SIRJÁJEV [8]). Legyen $\theta=\mathbf{E}\xi(t)$ normális eloszlású

$$f_\theta(\beta) = \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}}\cdot\frac{1}{\sigma}\exp\left\{-\frac{\lambda}{\sigma^2}(\beta-x_0)^2\right\}, \quad \xi(0) = x_0$$

sűrűséggel, ahol, $\xi(t)$ stacionárius *Gauss—Markov-folyamat* $\frac{\sigma^2}{2\lambda}e^{-\lambda|t|}$ kovariancia függvénnyel. θ feltételes eloszlása az $\mathfrak{F}_\xi^t$ feltétel mellett normális

$$\text{(4.3)}\qquad \mathbf{E}(\theta\,|\,\mathfrak{F}_\xi^t) = \frac{\xi(t)+\xi(0)+\lambda\int_0^t \xi(s)\,ds}{2+\lambda t},$$

$$\text{(4.4)}\qquad \mathbf{E}\{(\theta-\mathbf{E}(\theta\,|\,\mathfrak{F}_\xi^t))^2\,|\,\mathfrak{F}_\xi^t\} = \frac{\sigma^2/\lambda}{2+\lambda t}$$

paraméterekkel.

4. PÉLDA. A $\xi(t)$ *Gauss—Markov-folyamat* λ paramétere legyen (λ_0, γ^2) paraméterű *Gauss-eloszlású* változó, $\xi(0)=x_0$. λ feltételes eloszlása az $\mathfrak{F}_\xi^t$ „megfigyelés” esetén normális

$$\text{(4.5)}\qquad \mathbf{E}(\lambda\,|\,\mathfrak{F}_\xi^t) = \frac{\lambda_0}{1+\gamma^2\int_0^t \xi^2(s)\,ds} - \frac{\xi^2(t)-\xi^2(0)-t}{2\left(\frac{1}{\gamma^2}+\int_0^t \xi^2(s)\,ds\right)},$$

$$\text{(4.6)}\qquad \mathbf{E}\{(\lambda-\mathbf{E}(\lambda\,|\,\mathfrak{F}_\xi^t))^2\,|\,\mathfrak{F}_\xi^t\} = \frac{1}{\frac{1}{\gamma^2}+\int_0^t \xi^2(s)\,ds}.$$

paraméterekkel.

[3] Ha ξ_0 stacionárius eloszlású és $|\varrho|<1$, a folyamat stacinárius lesz. Ugyanez igaz a 4. és 6. példában szereplő $\xi(t)$ folyamatra a $\lambda>0$ esetben is.

A fenti példák, valamint a 3.1 tétel alapján világos, hogy a $\xi(t)$ folyamat ismeretlen, lineárisan előforduló paramétereinek feltételes sűrűségét tekintve a $\xi(0)=x_0$ feltétel mellett, ha az ismeretlen paraméter apriori eloszlása normális az a posteriori eloszlása is normális lesz. A többdimenziós esetben csak az elemi *Gauss-folyamatra* mondunk ki tételt. Az általánosítás szemmel látható és könnyen elvégezhető.

4.1. TÉTEL. Legyen az elemi *Gauss-folyamat* előállításában szereplő

$$d\boldsymbol{\xi}(t) = \mathbf{A}\boldsymbol{\xi}(t)\,dt+d\mathbf{w}(t), \quad \boldsymbol{\xi} = (\xi_0, \ldots, \xi_{k-1}), \quad \mathbf{A} = \{a_{ij}\}_{i=0,k-1}^{j=0,k-1},$$

$\mathbf{A}=\{a_{ij}\}$ mátrix elemeinek apriori eloszlása normális $(\alpha_{00}, \alpha_{01}, \ldots, \alpha_{0k-1}, \alpha_{10}, \ldots, \ldots, \alpha_{1k-1}, \alpha_{k-10}, \ldots, \alpha_{k-1k-1})$ várható értékkel és Γ_0 kovariancia mátrixszal. Legyen $\boldsymbol{\zeta}(0)=\mathbf{x}(0)$. A feltételek teljesülése eseten $\mathbf{A}$ elemeinek feltételes eloszlása az $\mathfrak{F}_\xi^t$ feltétel mellett normális eloszlás

$$\mathbf{E}(\mathbf{A}\,|\,\mathfrak{F}_\xi^t) = \Gamma(t)\Big[\Gamma_0\boldsymbol{\alpha}+\int_0^t \boldsymbol{\xi}^*(s)B_w^{-1}\,d\boldsymbol{\xi}(s)\Big], \tag{4.7}$$

$$\mathbf{E}\{(\mathbf{A}-\mathbf{E}(\mathbf{A}\,|\,\mathfrak{F}_\xi^t))(\mathbf{A}-\mathbf{E}(\mathbf{A}\,|\,\mathfrak{F}_\xi^t))^*\,|\,\mathfrak{F}_\xi^t\} = \Gamma(t) = \Big[\Gamma_0^{-1}+\int_0^t \boldsymbol{\xi}^*(s)B_w^{-1}\boldsymbol{\xi}(s)\,ds\Big]^{-1} \tag{4.8}$$

várható értékkel, ill. szórásnégyzettel (ha Γ_0 nem elfajult). Elfajult Γ_0 esetén a következő előállítás érvényes:

$$\Gamma(t) = \Big[I+\Gamma_0\int_0^t \mathbf{A}^*B_w^{-1}\mathbf{A}\,ds\Big]^{-1}\Gamma_0.$$

Bizonyítás. Az egydimenziós esethez hasonlóan járhatunk el. A sűrűségfüggvény képlete alapján (lásd ARATÓ [3])

$$\frac{d^{k^2}\mathbf{P}\{\mathbf{A}<\boldsymbol{\beta}\,|\,\mathfrak{F}_\xi^t\}}{(d\boldsymbol{\beta})^{k^2}} = \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2}[\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}, \Gamma_0^{-1}(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha})]\right\}\frac{dP_\beta}{dw}\{\xi\}}{\int\exp\left\{-\frac{1}{2}[\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}, \Gamma_0^{-1}(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha})]\right\}\frac{dP_\beta}{dw}\{\xi\}\,d\boldsymbol{\beta}} =$$

$$= \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2}[(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}), \Gamma_0^{-1}(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha})]+\int_0^t (B_w^{-1}\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\xi}(s), d\boldsymbol{\xi}(s))-\frac{1}{2}\int_0^t(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\xi}(s), B_w^{-1}\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\xi}(s))\,ds\right\}}{\int\exp\left\{-\frac{1}{2}[(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}), \Gamma_0^{-1}(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha})]+\int_0^t (B_w^{-1}\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\xi}(s), d\boldsymbol{\xi}(s))-\frac{1}{2}\int_0^t(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\xi}(s), B_w^{-1}\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\xi}(s))\,ds\right\}d\boldsymbol{\beta}}$$

ahonnan a 3.1. tétel bizonyításához hasonló átalakításokkal jutunk az állítás igazolásához. A nevező

$$\int\exp\left\{-\frac{1}{2}\Big[\boldsymbol{\beta}, \Big(\Gamma_0^{-1}+\int_0^t \boldsymbol{\xi}^*(s)B_w^{-1}\boldsymbol{\xi}(s)\,ds\Big)\boldsymbol{\beta}\Big]+\boldsymbol{\beta}\Big[\Gamma_0^{-1}\boldsymbol{\alpha}+\int_0^t(\boldsymbol{\xi}^*(s), B_w^{-1}d\boldsymbol{\xi}(s))\Big]\right\}d\boldsymbol{\beta} =$$

$$= (2\pi)^{\frac{k^2}{2}}\Big[\Gamma_0^{-1}+\int_0^t \boldsymbol{\xi}^*(s)B_w^{-1}\boldsymbol{\xi}(s)\,ds\Big]^{-1}\exp\left\{\frac{1}{2}\Big[\Gamma_0^{-1}\boldsymbol{\alpha}+\int_0^t \boldsymbol{\xi}^*(s)B_w^{-1}\,d\boldsymbol{\xi}(s)\Big]^2\Gamma(t)\right\}$$

alakú, ahonnan már adódik (4.7) és (4.8).

5. PÉLDA. Legyen $\zeta(t)=(\xi_1(t), \xi_2(t))$ komplex stacionárius *Gauss—Markov-folyamat* θ_1, θ_2 paraméterekkel, azaz elégítse ki a

$$d\xi_1(t) = -[\theta_1\xi_1(t)+\theta_2\xi_2(t)]\,dt+dw_1(t),$$
$$d\xi_2(t) = -[\theta_1\xi_2(t)-\theta_2\xi_1(t)]\,dt+dw_2(t),$$

differenciálegyenletet.

Ha $\boldsymbol{\theta}=(\theta_1, \theta_2)$ $\mathbf{m}_0, \Gamma_0$ paraméterű *Gauss-eloszlású* valószínűségi változó, akkor a 4.1 tétel alapján

$$\Gamma(t) = \Big[\Gamma_0^{-1}+\int_0^t[\xi_1^2(s)+\xi_2^2(s)]\,ds\cdot I\Big]^{-1}.$$

Ha $\Gamma_0 = 0$,

$$\Gamma(t) = I\cdot\Big[\int_0^t[\xi_1^2(s)+\xi_2^2(s)]\,ds\Big]^{-1}$$

és

$$\mathbf{E}[\boldsymbol{\theta}\,|\,\mathfrak{F}_\xi^t] = \frac{1}{\int_0^t[\xi_1^2+\xi_2^2]\,ds}\int_0^t\begin{pmatrix}-\xi_1\,d\xi_1-\xi_2\,d\xi_2\\ -\xi_2\,d\xi_1+\xi_1\,d\xi_2\end{pmatrix}, \tag{4.9}$$

azaz

$$\theta_1(t) = \theta_1-\frac{\int_0^t\xi_1(s)\,dw_1(s)+\int_0^t\xi_2(s)\,dw_2(s)}{\int_0^t[\xi_1^2(s)+\xi_2^2(s)]\,ds},$$

$$\theta_2(t) = \theta_2-\frac{\int_0^t[\xi_2\,dw_1-\xi_1\,dw_2]}{\int_0^t[\xi_1^2+\xi_2^2]\,ds}.$$

Mivel $\xi(0)$ kovariancia mátrixa $\begin{pmatrix}\frac{1}{2\theta_1} & 0\\ 0 & \frac{1}{2\theta_1}\end{pmatrix}$ független θ_2-től a $\theta_2(t)$ becslés megegyezik θ_2 maximum likelihood becslésével. A $\theta_1(t)$ becslés csak aszimptotikusan ekvivalens θ_1 maximum likelihood becslésével.

6. PÉLDA. Ha a $\xi(t)$ egydimenziós *Gauss—Markov-folyamat* várható értéke és λ paramétere is ismeretlen, azaz $\xi(t)$ kielégíti a

$$d\xi(t) = -\lambda\xi(t)\,dt+\lambda m\,dt+dw(t) \tag{4.10}$$

egyenletet, ahol $(\lambda, m)=\boldsymbol{\theta}$ normális eloszlású a $\boldsymbol{\theta}(t)$ feltételes eloszlás nem lesz normális, mivel (4.10)-ben λ, m nem lineárisan fordulnak elő. Feltéve, hogy az ismeretlen paraméterek λ és $\lambda m = a$, melyek kezdeti eloszlása normális (λ_0, a_0), $\Gamma_0^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\gamma_0} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\gamma_1} \end{pmatrix}$ paraméterekkel, a $\boldsymbol{\theta}(t)$ feltételes eloszlása $(\lambda(t), a(t))$ középértékű és $\Gamma(t)$ szórású normális eloszlású lesz. Ha $\Gamma_0^{-1} = 0$, akkor egyszerű számolással adódik, hogy

$$\Gamma(t) = \frac{\begin{pmatrix} t & \int_0^t \xi(s)\,ds \\ \int_0^t \xi(s)\,ds & \int_0^t \xi^2(s)\,ds \end{pmatrix}}{t\int_0^t \xi^2(s)\,ds - \left(\int_0^t \xi(s)\,ds\right)^2},$$

$$\boldsymbol{\theta}(t) = \begin{pmatrix} \lambda(t) \\ a(t) \end{pmatrix} = \frac{\begin{pmatrix} [\xi(t)-\xi(0)]\int_0^t \xi(s)\,ds - \frac{t}{2}\left(\xi^2(t) - \xi^2(0) - t\right) \\ [\xi(t)-\xi(0)]\int_0^t \xi^2(s)\,ds - \frac{1}{2}\int_0^t \xi(s)\,ds\,[\xi^2(t)-\xi^2(0)-t] \end{pmatrix}}{t\int_0^t \xi^2(s)\,ds - \left(\int_0^t \xi(s)\,ds\right)^2}.$$

IRODALOM

[1] ARATÓ, M., *Bevezetés a sztochasztikus folyamatok elméletébe* (Bolyai jegyzet, Budapest, 1968).
[2] ARATÓ, M., „Elemi Gauss folyamatok statisztikai problémái", doktori értekezés. Budapest, 1972.
[3] ARATÓ, M., «Точные формулы для плотностей мер элементарных гауссовских процессов», *Studia Sci. Math. Hung.* **5** (1970) 17—27.
[4] BUCY, R. S. and KÁLMÁN, R. E., "New results in linear filtering and prediction theory", *J. Basic Eng.* (*Trans. ASME*) **83 D** (1961) 95—108.
[5] DOOB, J. L., *Stochastic Processes* (John Wiley, New York, 1953)
[6] KALLIANPUR, G. and STRIEBEL, C., "Estimation of stochastic systems; arbitrary system processes with additive white noise observation errors", *AMS* **39** (1968) 786—801.
[7] LOEVE, M., *Probability Theory* (John Wiley, New York, 1953).
[8] Липцер, Р. Ш. и Ширяев, А. Н., «Нелинейная фильтрация диффузионных марковских процессов,» *Труды МИАН* **104** (1968) 135—180.
[9] Липцер, Р. Ш. и Ширяев, А. Н., «О плотности вероятностных мер процессов диффизионного типа,» *Изв. А. Н. СССР* **33** (1969) 1120—1131.
[10] Липцер, Р. Ш. и Ширяев, А. Н., «Об абсолютной непрерывности мер, соответствующих процессам диффузионного типа, относительно винеровской,» *Изв. А. Н. СССР* **36** (1972) 847—889.

(Beérkezett: 1974. március 14.)

ARATÓ MÁTYÁS
MTA SZÁMÍTÁSTECHNIKAI ÉS AUTOMATIZÁLÁSI KUTATÓ INTÉZET
1502 BUDAPEST XI., KENDE U. 13—17.

ON BAYES' ESTIMATION OF THE UNKNOWN PARAMETER OF DIFFUSION TYPE PROCESSES

M. ARATÓ

Using the abstract form (2.10) of Bayes theorem and the Radon—Nikodym derivative (3.3) for diffusion type processes the aposteriori distribution of the unknown parameter θ of process $\xi(t)$ with form (3.1) is investigated.

Theorem 3.1. states that if functional $\alpha_\theta(t, \xi)$ is linear in θ the aposteriori distribution is normal if the apriori one is also normal.

Somes examples are studied in one and multidimensional cases.

Alkalmazott Matematikai Lapok **1** *(1975) 65—72*

EGYSZERŰ LINEÁRIS RENDSTATISZTIKÁK

GYIRES BÉLA

Debrecen

Szerző [2] dolgozatában foglalkozik lineáris rendstatisztikákkal abban az esetben, ha a minta elemeinek függetlenségét nem tételezzük fel. Jelen dolgozatban e statisztikák karakterisztikus függvényeinek határértékére vonatkozó tételre építve megadjuk annak szükséges és elegendő feltételét, hogy egy *Poisson*-típusú, szimmetrikus, egyszerű lineáris rendstatisztika aszimptotikusan normális eloszlású legyen. E tételből adódik többek között a *Wilcoxon statisztika* aszimptotikájára vonatkozó közismert tétel is.

1. Bevezetés

Legyen $\{(x_1, \ldots, x_\nu)\} = R_\nu$ a $\nu = m+n$ dimenziós vektortér. Jelölje ω_0 az R_ν térnek azt a részhalmazát, amelyben a vektorok komponensei közül legalább kettő egyenlő. Tegyük fel, hogy az $(x_1, \ldots, x_\nu)$ vektor komponensei páronként különböznek. Ha e vektor komponenseinek $z_1 < \ldots < z_\nu$ nagyság szerinti elrendezésében $x_k = z_{r_k}$, akkor azt mondjuk, hogy ebben az elrendezésben $\operatorname{rang} x_k = r_k$. Jelölje $\Pi_m^{(\nu)}$ az $1, \ldots, \nu$ elemekből alkotható m-ed osztályú ismétlés nélküli variációk halmazát. Legyen

$$(1.1)\qquad \omega_{r_1 \ldots r_m} = \{(x_1, \ldots, x_\nu) \in R_\nu | x_j \neq x_k,\ j \neq k;\ \operatorname{rang} x_k = r_k,\ k = 1, \ldots, m\},$$

$$(r_1, \ldots, r_m) \in \Pi_m^{(\nu)}.$$

Nyilván e halmazok és ω_0 páronként diszjunktak és egyesítésük az R_ν teret adja.

Ismeretes, hogy a rendstatisztikák elméletében alapvető szerepet játszik a következő tétel ([6], 363, Satz 10):

Ha az azonos eloszlású $\xi_1, \ldots, \xi_\nu$ valószínűségi változóknak közös eloszlásfüggvénye változóinak szimmetrikus és folytonos függvénye, akkor

$$(1.2)\qquad P[(\xi_1, \ldots, \xi_\nu) \in \omega_{r_1 \ldots r_m}] = \frac{1}{(n+1) \ldots (n+m)}, \quad (r_1, \ldots, r_m) \in \Pi_m^{(\nu)}.$$

Ennek a tételnek feltételei teljesednek pl. akkor, ha az azonos eloszlású $\xi_1, \ldots, \xi_\nu$ valószínűségi változók függetlenek és eloszlásfüggvényük folytonos.

Ha az azonos eloszlású $(\xi_1, \ldots, \xi_\nu)$ valószínűségi változók közös eloszlásfüggvénye minden változójában folytonos ugyan, de változóinak nem szimmetrikus függvénye, akkor az említett tétel állítása már általában nem igaz. Ebben az esetben általában

$$(1.3)\qquad P[(\xi_1, \ldots, \xi_\nu) \in \omega_{r_1 \ldots r_m}] = p_{r_1 \ldots r_m},$$

ahol

$$p_{r_1 \dots r_m} \geqq 0, \qquad \sum_{(r_1, \dots, r_m) \in \Pi_m^{(\nu)}} p_{r_1 \dots r_m} = 1.$$

Teljesedjék az (1.2) feltétel. Ekkor a

$$\xi_{m,n} = r_1 + \dots + r_m, \quad (r_1, \dots, r_m) \in \Pi_m^{(\nu)}$$

valószínűségi változót *Wilcoxon-statisztikának* ([7]), az $\alpha_k \neq 0$ $(k = 1, \dots, m)$ valós számokkal képzett

$$\xi_{m,n} = \alpha_1 r_1 + \dots + \alpha_m r_m, \quad (r_1, \dots, r_m) \in \Pi_m^{(\nu)}$$

valószínűségi változót egyszerű lineáris rendstatisztikának ([3]) nevezzük. MANN és WHITNEY a momentumok módszerére építve kimutatták ([4]), hogy a *Wilcoxon-statisztika* standardizáltja $n \to \infty$ és $m \to \infty$ mellett a standardizált normális eloszláshoz konvergál, feltéve, hogy m és n az

$$\frac{m}{n} \to c > 0, \quad n \to \infty, \quad m \to \infty$$

feltételnek is eleget tesz. RÉNYI ([5], 248) és HAJEK ([5], 249) explicite állították elő a *Wilcoxon-statisztika* karakterisztikus függvényét. Erre építve megszorító feltétel nélkül sikerült igazolniuk MANN és WHITNEY tételét.

Szerző ugyancsak a karakterisztikus függvények elméletére építve MANN és WHITNEY tételének általánosításaként kimutatta ([1], Theorem 1.2.), hogy az egyszerű lineáris rendstatisztika eloszlásfüggvénye $n \to \infty$, $m \to \infty$ esetén akkor és csak akkor aszimptotikusan normális eloszlású, ha

$$\frac{\alpha_1^4 + \dots + \alpha_m^4}{(\alpha_1^2 + \dots + \alpha_m^2)^2} \to 0, \quad m \to \infty. \tag{1.4}$$

Jelen dolgozat az egyszerű lineáris rendstatisztika olyan általánosításával foglalkozik, amelyben az (1.3) valószínűségek az (1.2) formulában megadottnál általánosabb feltételnek tesznek eleget. A 2. pontban megadjuk e lineáris rendstatisztikákkal kapcsolatos definíciókat, majd annak szükséges és elegendő feltételét fogalmazzuk meg, hogy az ilyen lineáris rendstatisztikák standardizáltjának eloszlásfüggvénye $n \to \infty$, $m \to \infty$ mellett a standardizált normális eloszlásfüggvényhez konvergáljon. A 3. pontban ennek bizonyításával foglalkozunk.

2. Lineáris rendstatisztikák

Szerző [2] dolgozatában a lineáris rendstatisztikáknak az irodalomban ismert eddigi értelmezését ([3]) kiterjesztette nem független minták esetére is. E kiterjesztés az (1.3) valószínűségeknek olyan speciális megválasztását tette szükségessé, amely még mindig igen általános érvényű határeloszlás tétel megfogalmazására ([2], Theorem 3.) adott lehetőséget. Ez a határeloszlás tétel ad módot arra, hogy segítségével lineáris rendstatisztikák aszimptotikus viselkedését tanulmányozhassuk.

Az általános értelmezésből kiindulva definiáljuk az egyszerű lineáris rendstatisztikákat. Ezek közül is csak azok érdekelnek bennünket, amelyek lehetővé teszik a normális eloszláshoz való konvergenciára vonatkozó szükséges és elegendő feltétel megfogalmazását.

Legyen az

$$S = \begin{cases} p_{11} \\ p_{21} & p_{22} \\ \cdot & \cdot \\ p_{\nu 1} & p_{\nu 2} \dots p_{\nu\nu} \\ \cdot & \cdot \quad \dots \cdot \end{cases}$$

végtelen mátrix stochasztikus mátrix, azaz teljesedjenek a

$$p_{\nu j} \geqq 0, \quad \sum_{j=1}^{\nu} p_{\nu j} = 1 \quad (j = 1, \dots, \nu; \quad \nu = 1, 2 \dots)$$

feltételek.

Legyen

$$\underline{p}_\nu = \min(p_{\nu 1}, \dots, p_{\nu\nu}),$$

$$\bar{p}_\nu = \max(p_{\nu 1}, \dots, p_{\nu\nu}).$$

Legyen — mint eddig is — $\nu = m+n$, ahol m természetes, n nem negatív egész szám. Kimutatható, hogy ([2], Corollary 1)

$$G_{m\nu} = \sum_{(r_1, \dots, r_m) \in \Pi_m^{(\nu)}} p_{\nu r_1} \cdots p_{\nu r_m} \to 1 \quad n \to \infty, \quad (m = 1, 2, \dots) \tag{2.1}$$

akkor és csak akkor, ha

$$\lim_{\nu \to \infty} \bar{p}_\nu = 0. \tag{2.2}$$

Legyenek adva a valós elemű

$$A_k = \begin{cases} a_{11}^{(k)} \\ a_{21}^{(k)} & a_{22}^{(k)} \\ \cdot & \cdot \\ a_{\nu 1}^{(k)} & a_{\nu 2}^{(k)} \dots a_{\nu\nu}^{(k)} \\ \cdot & \cdot \quad \dots \cdot \end{cases} \qquad (k = 1, 2, \dots)$$

végtelen mátrixok.

2.1. Definíció. Az $\{A_k, S\}$ lineáris rendstatisztikán a

$$\xi_{m,n} = \eta_{\nu m}^{(1)} + \dots + \eta_{\nu m}^{(m)}, \quad \nu = m+n \quad (m = 1, 2, \dots; \quad n = 0, 1, 2, \dots)$$

stochasztikus folyamatot értjük, ha

$$P(\eta_{\nu m}^{(1)} = a_{\nu r_1}^{(1)}, \dots, \eta_{\nu m}^{(m)} = a_{\nu r_m}^{(m)}) = \frac{p_{\nu r_1} \cdots p_{\nu r_m}}{G_{m\nu}}, \quad (r_1, \dots, r_m) \in \Pi_m^{(\nu)}$$

és ha még teljesül a (2.2) feltétel.

A definícióban megadott valószínűségekből könnyen kiszámíthatók a

$$p_{\nu j}^{(m,k)} = P(\eta_{\nu m}^{(k)} = a_{\nu j}^{(k)}) \quad (j = 1, \dots, \nu)$$

valószínűségek.

(1.3) alapján nyilván itt a

$$p_{r_1 \dots r_m} = \frac{p_{\nu r_1} \cdots p_{\nu r_m}}{G_{m\nu}}$$

speciális esettel állunk szemben.

2.2. DEFINICIÓ. Az $\{A_k, S\}$ lineáris rendstatisztikát szimmetrikusnak mondjuk, ha

$$p_{\nu j} = p_{\nu, \nu - j + 1} \quad (j = 1, \dots, \nu; \quad \nu = 1, 2, \dots). \tag{2.3}$$

2.3. DEFINICIÓ. Az $\{A_k, S\}$ lineáris rendstatisztikát *Poisson-típusúnak* mondjuk, ha

$$\lim_{\nu \to \infty} \nu \underline{p}_\nu = \lim_{\nu \to \infty} \nu \bar{p}_\nu = 1. \tag{2.4}$$

2.4. DEFINICIÓ. Az $\{A_k, S\}$ lineáris rendstatisztikát egyszerű lineáris rendstatisztikának nevezzük, ha

$$A_k = \alpha_k A_0 \quad (k = 1, 2, \dots),$$

ahol $\alpha_k \neq 0$ valós szám és

$$A_0 = \begin{cases} 1 \\ 1 \quad 2 \\ \cdot \quad \cdot \quad \quad \cdot \\ 1 \quad 2 \dots \nu \\ \cdot \quad \cdot \dots \cdot \end{cases}$$

Ha (2.4) teljesül, nyilván teljesül a (2.2) feltétel, de megfordítva nem.

$$S_0 = \begin{cases} 1 \\ \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \\ \cdot \quad \cdot \quad \quad \cdot \\ \frac{1}{\nu} \quad \frac{1}{\nu} \dots \frac{1}{\nu} \\ \cdot \quad \cdot \dots \cdot \end{cases}$$

ún. aritmetikai középérték mátrix nyilván teljesíti a (2.2) feltételt és az $\{A_k, S_0\}$ lineáris rendstatisztika szimmetrikus és *Poisson* típusú. A 2.1. definíció szerint ezen a lineáris rendstatisztikán a

$$\underset{0}{\xi}_{m,n} = \underset{0}{\eta}_{\nu m}^{(1)} + \dots + \underset{0}{\eta}_{\nu m}^{(m)}, \quad \nu = m + n \quad (m = 1, 2, \dots; \quad n = 0, 1, 2, \dots)$$

stochasztikus folyamatot értjük, ahol most

$$P(\underset{0}{\eta}_{\nu m}^{(1)} = a_{\nu r_1}^{(1)}, \dots, \underset{0}{\eta}_{\nu m}^{(m)} = a_{\nu r_m}^{(m)}) = \frac{1}{(n+1) \dots (n+m)},$$

$$(r_1, \dots, r_m) \in \Pi_m^{(\nu)}.$$

Innen adódik, hogy

$$P(\underset{0}{\eta}_{\nu m}^{(k)} = a_{\nu j}^{(k)}) = \frac{1}{\nu} \quad (j = 1, \dots, \nu).$$

Itt most nyilván az (1.2) esettel állunk szemben.

Jelölje $E(\xi_{m,n})$, illetve $D(\xi_{m,n})$ a $\xi_{m,n}$ valószínűségi változó várható értékét, illetve szórását.

Amint arra már az 1. pontban rámutattunk, az $\{\alpha_k A_0, S_0\}$ egyszerű lineáris rendstatisztika esetében a normális eloszláshoz való konvergenciának szükséges és elegendő feltételével foglalkoztunk az [1] dolgozatban. (Ha $\alpha_k=1$ $(k=1, 2, \ldots)$, akkor a *Wilcoxon-statisztikát* kapjuk.)

Az 1. pontban adott célkitűzéseinknek megfelelően a továbbiakban ennek a tételnek általánosítását jelentő következő tételt bizonyítjuk be:

2.1. TÉTEL. Ha $\{A_k, S\}$ *Poisson*-típusú, szimmetrikus, egyszerű lineáris rendstatisztika, a

$$P\left(\frac{\xi_{m,n}-E(\xi_{m,n})}{D(\xi_{m,n})}<x\right)\to\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy,\qquad x\in R_1$$

$$n\to\infty,\quad m\to\infty$$

akkor és csak akkor teljesül, ha a valós számoknak $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ sorozata kielégíti az (1.4) feltételt.

E tétel bizonyításával foglalkozunk a következő pontban.

3. A 2.1 tétel bizonyítása

Mindenekelőtt a következőkben szerepet játszó lemmát fogalmazunk meg és bizonyítunk be.

3.1. LEMMA. Tekintsük a *Poisson*-típusú $\{A_k, S\}$ és $\{A_k, S_0\}$ lineáris rendstatisztikákat. Ha a tetszés szerinti valós szám, akkor

$$\lim_{n\to\infty}\frac{E[(\xi_{m,n}-a)^{2s}]}{E[(\underset{0}{\xi}_{m,n}-a)^{2s}]}=1,\quad (m=1,2,\ldots;\quad s=0,1,\ldots).$$

Bizonyítás. Mivel $(v=m+n)$

$$E[(\xi_{m,n}-a)^{2s}]=\sum_{(r_1,\ldots,r_m)\in\Pi_m^{(v)}}(a_{vr_1}^{(1)}+\ldots+a_{vr_m}^{(m)}-a)^{2s}\frac{p_{vr_1}\ldots p_{vr_m}}{G_{mv}}$$

és

$$E[(\underset{0}{\xi}_{m,n}-a)^{2s}]=\frac{1}{(n+1)\ldots(n+m)}\sum_{(r_1,\ldots,r_m)\in\Pi_m^{(v)}}(a_{vr_1}^{(1)}+\ldots+a_{vr_m}^{(m)}-a)^{2s},$$

ezért

$$\frac{1}{G_{mv}}\frac{(n+1)\ldots(n+m)}{v^m}(v\underline{p}_v)^m\leqq$$

$$\leqq\frac{E[(\xi_{m,n}-a)^{2s}]}{E[(\underset{0}{\xi}_{m,n}-a)^{2s}]}\leqq\frac{1}{G_{mv}}\frac{(n+1)\ldots(n+m)}{v^m}(v\bar{p}_v)^m.$$

A feltételek szerint teljesül (2.1) és (2.4), továbbá

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\dots(n+m)}{v^m} = 1,$$

amiből állításunk már következik.

3.1. KÖVETKEZMÉNY. Tekintsük a *Poisson*-típusú szimmetrikus $\{A_k, S\}$, $\{A_k, S_0\}$ egyszerű lineáris rendstatisztikákat. Ekkor a

$$\lambda_{m,n}^{(s)} = \frac{E([\xi_{m,n}-E(\xi_{m,n})]^{2s})}{E([\underset{0}{\xi}_{m,n}-E(\underset{0}{\xi}_{m,n})]^{2s})} \tag{3.1}$$

jelöléssel

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_{m,n}^{(s)} = 1, \quad (m = 1, 2, \dots; \quad s = 0, 1, \dots). \tag{3.2}$$

Bizonyítás. Mivel $\{A_k, S\}$ egyszerű, szimmetrikus lineáris rendstatisztika, az $\eta_{vm}^{(k)}$ eloszlása is szimmetrikus, azaz

$$p_{vj}^{(m,k)} = p_{v,v-j+1}^{(m,k)} \quad (j = 1, \dots, v),$$

tehát

$$E(\eta_{vm}^{(k)}) = \frac{1}{2}(v+1)\alpha_k \quad (k = 1, 2, \dots, m),$$

ezért függetlenül az S mátrixtól

$$E(\xi_{m,n}) = \frac{v+1}{2}(\alpha_1 + \dots + \alpha_m). \tag{3.3}$$

Az $a = E(\xi_{m,n}) = E(\underset{0}{\xi}_{m,n})$ helyettesítéssel lemmánkból adódik a következményben kifejezett állítás.

A (3.1) jelöléssel összhangban legyen

$$\begin{gathered} \sigma^2 = D^2(\xi_{m,n}) = \lambda_{m,n}^{(1)} D^2(\underset{0}{\xi}_{m,n}), \\ E([\xi_{1,n}-E(\xi_{1,n})]^4) = \lambda_{1,n}^{(2)} \underset{0}{M}_4 \end{gathered} \tag{3.4}$$

ahol ([1], (11))

$$D^2(\underset{0}{\xi}_{m,n}) = \frac{v+1}{12}[v(\alpha_1^2 + \dots + \alpha_m^2) - (\alpha_1 + \dots + \alpha_m)^2]$$

és

$$\underset{0}{M}_4 = E([\underset{0}{\xi}_{1,n} - E(\underset{0}{\xi}_{1,n})]^4) = \frac{\alpha_1^4}{v} \sum_{k=1}^{v} \left(\frac{v+1}{2} - k\right)^4.$$

Jelölje $\varphi_j^{(v)}(t)$ a

$$P(\eta_v^{(j)} = a_{vk}^{(j)}) = p_{vk} \quad (k = 1, \dots, v)$$

előírással értelmezett $\eta_v^{(j)}$ valószínűségi változó $\eta_v^{(j)*}$ standardizáltjának karakterisztikus függvényét. Mivel az $\{\alpha_k A_0, S\}$ egyszerű lineáris rendstatisztika szimmetrikus, ezért

$$\varphi_1^{(\nu)}(t) = E(e^{i\eta_1^{(\nu)*}t}) = \sum_{k=1}^{\nu} p_{\nu k}\cos\left[\left(\frac{\nu+1}{2}-k\right)\alpha_1\frac{t}{\sigma}\right].$$

Alkalmazva a

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2}+o(x^4)$$

relációt, arra jutunk, hogy

$$\varphi_1^{(\nu)}(t) = 1-\frac{\lambda_{1,n}^{(1)}\underset{0}{D^2}(\xi_{1,n})}{\sigma^2}\frac{t^2}{2}+o\left(\frac{\lambda_{1,n}^{(2)}\underset{0}{M_4}}{\sigma^4}\frac{t^4}{24}\right).$$

De (3.2) figyelembevételével

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\lambda_{1,n}^{(1)}\underset{0}{D^2}(\xi_{1,n})}{\sigma^2} = \frac{\alpha_1^2}{\alpha_1^2+\ldots+\alpha_m^2},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\lambda_{1,n}^{(2)}\underset{0}{M_4}}{\sigma^4} = \frac{1}{1920}\frac{\alpha_1^4}{(\alpha_1^2+\ldots+\alpha_m^2)^2}$$

és így

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_1^{(\nu)}(t) = 1-\frac{t^2}{2}\frac{\alpha_1^2}{\alpha_1^2+\ldots+\alpha_m^2}+o\left(\frac{\alpha_1^4}{(\alpha_1^2+\ldots+\alpha_m^2)^2}\right),$$

illetve

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_1^{(\nu)}(t)\ldots\varphi_m^{(\nu)}(t) = \prod_{j=1}^{m}\left[1-\frac{\alpha_j^2}{\alpha_1^2+\ldots+\alpha_m^2}\frac{t^2}{2}+o\left(\frac{\alpha_j^4}{(\alpha_1^2+\ldots+\alpha_m^2)^2}\right)\right].$$

Hogy meghatározhassuk e kifejezés határértékét abban az esetben, ha még $m\to\infty$, képezzük az utolsó kifejezés logaritmusát.

$$\log\lim_{n\to\infty}[\varphi_1^{(\nu)}(t)\ldots\varphi_m^{(\nu)}(t)] = -\frac{t^2}{2}+o\left(\frac{\alpha_1^4+\ldots+\alpha_m^4}{(\alpha_1^2+\ldots+\alpha_m^2)^2}\right),$$

ahonnan

(3.5) $$\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}[\varphi_1^{(\nu)}(t)\ldots\varphi_m^{(\nu)}(t)] = e^{-\frac{t^2}{2}}$$

akkor és csak akkor, ha az (1.4) feltétel teljesül.

A *Poisson*-típusú, szimmetrikus, egyszerű lineáris $\{\alpha_k A_0, S\}$ rendstatisztikát reprezentáló $\xi_{m,n}$ valószínűségi változó standardizáltjának karakterisztikus függvényét jelölje $\varphi_{m,n}(t)$ azaz

$$\varphi_{m,n}(t) = E\left(e^{i\frac{\xi_{m,n}-E(\xi_{m,n})}{\sigma}t}\right),$$

ahol $E(\xi_{m,n})$, illetve σ jelentését a (3.3), illetve a (3.4) formula adja meg. A [2] 8. tétele szerint t-ben egyenletesen

$$\lim_{n\to\infty}\left[\varphi_{m,n}(t)-\frac{\nu^m}{(n+1)\ldots(n+m)}\varphi_1^{(\nu)}(t)\ldots\varphi_m^{(\nu)}(t)\right] = 0,$$

azaz a (3.5) határérték létezésére való tekintettel t-ben egyenletesen

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}\varphi_{m,n}(t)=e^{-\frac{t^2}{2}},$$

ami a tételünkben kifejezett állítást igazolja.

IRODALOM

[1] GYIRES, B., "On limit distribution theorems of linear order statistics", *Publicationes Mathematicae, Debrecen* **21** (1974) 95—112.

[2] GYIRES, B., "Linear order statistics in the case of samples with non-independent elements", *Publicationes Mathematicae, Debrecen* **22** (1975), sajtó alatt.

[3] HAJEK, J.—SIDAK, Z., *Theory of rank tests.* (Czechlsl. Ac. of Sci., Prague, 1967.)

[4] MANN, H. B.—WHITNEY, D. R., "On a test whether one of two random variables in stochastically larger then other", *Annales of Mathematical Statistics* **18** (1947) 50—60.

[5] RÉNYI, A., „Újabb kritériumok két minta összehasonlítására", A *MTA Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei* II (1953) 243—265.

[6] SCHMETTERER, L., *Einführung in die mathematische Statistik.* (Springer Verlag, Wien, 1956.)

[7] WILCOXON, F., "Individual comparisons by ranking methods", *Biometrics Bulletin* **6** (1945) 80—83.

(Beérkezett: 1974. március 31.)

GYIRES BÉLA
KOSSUTH LAJOS TUDOMÁNYEGYETEM VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁSI TANSZÉK
4010 DEBRECEN 10.

LINEAR RANK STATISTICS

B. GYIRES

In his paper [2] the author investigated the linear rank statistics in the case of nonindependent sample-elements. In this paper we give a necessary and sufficient condition on the asymptotically normal distribution of what we call symmetric lineare order statistics' of *Poisson* type. The proof is based on one of our theorems concerning the limit of the characteristic functions of these statistics' ([2] Theorem 3). One gets among others as a special case of our theorem the well knowo limit theorem of the *Wilcoxon statistics.*

Alkalmazott Matematikai Lapok **1** *(1975) 73—79*

AUTOREGRESSZIÓS TÍPUSÚ FOLYAMATOK ÁLTAL GENERÁLT MÉRTÉKEK RADON—NIKODYM DERIVÁLTJAIRÓL

KRÁMLI ANDRÁS ÉS PERGEL JÓZSEF

Budapest

Bebizonyítjuk, hogy az (1.1) sztochasztikus differenciálegyenlet megoldása által a folytonos függvények terén generált mérték equivalens a standard *Wiener*-folyamat által ugyanott generált mértékkel, és a *Radon—Nikodym* deriváltra levezetjük a (2.1) képletet.

1. Bevezetés

A független megfigyeléssorozatok statisztikai vizsgálatára kidolgozott *maximum-likelihood elv* sikerrel alkalmazható diszkrét, vagy folytonos idejű sztochasztikus folyamatok statisztikájában is. Segítségével már a folyamat egyetlen realizációjának ismeretében is levonhatók statisztikai következtetések. A független megfigyeléssorozatok esetén a *maximum-likelihood elv* alkalmazásához szükség van a mintaelemek együttes sűrűségfüggvényének az ismeretlen paraméterektől függő seregének meghatározására. A folyamatok statisztikájában ennek felel meg a trajektóriák függvényterén a folyamat által generált, paraméterektől függő mértékseregnek valamilyen standard mértékre vonatkozó *Radon—Nikodym-deriváltja.*

Gauss-folyamatok (olyan folyamatok, amelyeknek véges dimenziós eloszlásai normálisak) esetén érvényes a jól ismert *Hájek—Feldmann-féle dichotomia elv:* ugyanazon a téren értelmezett két *Gauss-mérték* vagy szinguláris vagy ekvivalens. Ez a tény azt sugallja, hogy standard mértékül valamilyen analitikusan jól leírható és a vizsgálandó folyamattal egyszerű összefüggésben álló *Gauss-mértéket* válasszunk.

A gyakorlatban előforduló folytonos idejű és állapotterű folyamatok (pl. a diffúziót, a hírközlést, a bioáramokat, a napfolttevékenységet leíró folyamatok; általában minden, valamilyen egyensúlyi állapot körüli véletlen ingadozásokat leíró folyamat) jól közelíthető egy- vagy többdimenziós *stacionárius Gauss—Markov-folyamattal.* A *stacionárius Gauss—Markov-folyamatok* többféle — egymással ekvivalens — módon adhatók meg. Ezek közül legtöbb fizikai tartalommal bír a sztochasztikus differenciálegyenlet megoldásaként történő megadás; a $\xi^*(t)= =(\xi_1(t), \dots, \xi_k(t))$ k-dimenziós *stacionárius Gauss—Markov-folyamat* eleget tesz az

$$d\xi(t) = \mathbf{A}\xi(t)\,dt + dw(t) \tag{1.1}$$

sztochasztikus differenciálegyenletnek (a sztochasztikus differenciálegyenlet egzakt definícióját lásd [1] jegyzetben).

Az $\mathbf{A}$ mátrix sajátértékeinek valós része negatív — ez biztosítja a folyamat stacionaritását — a „véletlent generáló" $w(t)$ folyamatról feltesszük, hogy $\mathbf{B}_w$ lokális kovariancia mátrixú *Wiener-folyamat.*

Esetünkben célszerű standard mértékül választani a $\mathbf{B}_w$ lokális kovariancia mátrixú „feltételes" *Wiener-mérték* és a k dimenziós *Lebesques-mérték* P_w szorzatát. Ez a mérték az $\mathfrak{X}=C_k[0, T]\times R_k$ téren van értelmezve, ahol $C_k[0, T]$ a $[0, T]$ intervallumon értelmezett, $\mathbf{w}(0)=0$ feltételnek elegettevő, k-dimenziós folytonos $\mathbf{w}(t)$ függvények tere, R_k pedig a k-dimenziós euklideszi tér.

2. A Radon—Nikodym-derivált konkrét alakja

Jelöljük $P_{\mathbf{A}}$-val az (1.1) egyenletnek az $f_{\mathbf{A}}(\mathbf{w})$ kezdeti sűrűségfüggvénnyel rendelkező megoldása által generált mértéket.

2.1. TÉTEL. A $P_{\mathbf{A}}$ és P_w mértékek ekvivalensek és

$$\frac{dP_{\mathbf{A}}}{dP_w}(\mathbf{w}) = f_{\mathbf{A}}(\mathbf{w}^*(0))\exp\left\{\int_0^T \mathbf{Cw}(s)d\mathbf{w}(s)-\frac{1}{2}\int_0^T (\mathbf{Aw}(s), \mathbf{Cw}(s))ds\right\}, \tag{2.1}$$

ahol $\mathbf{C} = \mathbf{B}_w^{-1}\mathbf{A}$.

A (2.1) formulát úgy kell értelmezni, hogy majdnem minden *Wiener-trajektóriára* megadja a *Radon—Nikodym-derivált* értékét.

A tétel első változatában, egydimenziós folyamatokra, CH. STRIEBELtől származik (lásd [6]). Az eredeti bizonyítás nehezen áttekinthető számolást igényel — az itt közölt bizonyítás alapgondolata JU. V. PROHOROVtól ered.

Bizonyításunk a differenciálegyenlet megoldásának *Euler*-féle közelítésén alapuló *Prohorov*-féle módszert alkalmazza, mely a nehézkes számításokat az *invariancia elv* segítségével leegyszerűsíti. Mi az *invariancia elvnek* a legelemibb, legközismertebb változatát használjuk fel.

Bizonyítás. Mindenekelőtt megjegyezzük, hogy a két folyamat által magán a $C_k[0, T]$ téren generált feltételes mértékek egyszerűbben kezelhetők — és tételünk közvetlenül adódik a feltételes mértékekre érvényes állításból.

Jelöljük $\tilde{P}_{\mathbf{A}}$-val a $\xi(t)$ folyamat által a $C_k(0, T)$ téren rögzített kezdeti érték mellett generált feltételes mértéket, és $\tilde{P}_w$-vel a $\mathbf{w}(t)$ folyamat által generált feltételes *Wiener-mértéket.* $\tilde{P}_{\mathbf{A}}$ ekvivalens $\tilde{P}_w$-vel és

$$P_{\mathbf{A}}(\mathbf{w}) = \frac{d\tilde{P}_{\mathbf{A}}}{d\tilde{P}_w}(\mathbf{w}) = \exp\left\{\int_0^T (\mathbf{Cw}(t), d\mathbf{w}(t))-\frac{1}{2}\int_0^T (\mathbf{Aw}(t), \mathbf{Cw}(t))dt\right\}. \tag{2.2}$$

A továbbiakban a (22) formula igazolásával foglalkozunk.

Legyen $\{dn\}$ a $[0, T]$ intervallum

$$0 = t_0^{dn} < t_0^{dn} < \ldots < t_n^{dn} = T$$

beosztásainak egy olyan, egyre finomodó sorozata, hogy

$$\lim \max (t_{i+1}^{dn} - t_c^{dn}) = 0.$$

Értelmezzük a $\xi^{dn}(t)$ sztochasztikus folyamatot — rekurzív módon — a következőképpen:

$$\xi^{dn}(0) = \mathbf{w}(0) \tag{2.3}$$

$$\xi^{dn}(t) = \xi^{dn}(t_{i-1}^{dn}) + \mathbf{A}\xi^{dn}(t_{i-1}^{dn})(t-t_{i-1}^{dn}) + \mathbf{w}(t) - \mathbf{w}(t_{i-1}^{dn}), \quad \text{ha} \quad t_{i-1} \leqq t < t_i. \tag{2.4}$$

A $\xi^{dn}(t)$ folyamat nem más, mint az (1.1) egyenlet $\xi(t)$ megoldásának úgynevezett *Euler*-féle közelítése. Az *Euler*-közelítések $\{\xi^{dn}(t)\}$ sorozata két alapvető tulajdonsággal rendelkezik:

(i) Legyen $\theta_1, \dots, \theta_l \in [0, T]$ az időpontoknak egy tetszőleges véges sorozata. A $\xi^{dn}(\theta_1), \dots, \xi^{dn}(\theta_n)$ valószínűségi vektorváltozók együttes feltételes eloszlásfüggvénye (a $\xi^{dn}(0) = \mathbf{w}(0)$ feltétel mellett) tart a $\xi(\theta_1), \dots, \xi(\theta_n)$ változók együttes feltételes eloszlás függvényéhez, ha $n \to \infty$.

(ii) A $C_k[0, T]$ tér tetszőleges K' kompakt halmazához (a kompaktság a $\varrho(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) = \sup\limits_{0 \le t \le T} \|\mathbf{w}_1(t) - \mathbf{w}_2(t)\|$ metrika által definiált topológiában értendő) található olyan $K = \Phi(K')$ kompakt halmaz, amely minden d^n-re és minden $\mathbf{w}(t) \in K'$ függvényre tartalmazza a (2.3) és (2.4) formulák alapján $\mathbf{w}(t)$-ből konstruált $\xi^{dn}(t)$ függvényt.

Az (i) tulajdonság bizonyításához elegendő azt igazolni, hogy a $\xi^{dn}(t)$ folyamat feltételes várható érték és kovariancia mátrix függvényei (a $\xi^{dn}(0) = \mathbf{w}(0)$ feltétel mellett) tartanak a $\xi(t)$ folyamat megfelelő feltételes várható érték és kovarianciamátrix függvényeihez, mert a szóbanforgó folyamatok *Gauss folyamatok*. (Megjegyezzük, hogy a $\xi(t)$ folyamat $\mathbf{m}(t)$ várhatóérték függvénye kielégíti a $\frac{d\mathbf{m}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{m}(t)$ egyenletet és az $\mathbf{m}(0) = \mathbf{w}(0)$ kezdeti feltételt, míg a $\xi(t+h)$, $\xi(t)$ valószínűségi vektorváltozók kovarianciamátrix függvénye $R(t)e^{n\mathbf{A}}$ alakú, ahol $R(t)$ az $R'(t) = \mathbf{A}R(t) + R(t)\mathbf{A} + \mathbf{B}_w$ egyenlet $R(0) = 0$ kezdeti feltételt kielégítő megoldása).

A fenti határérték relációk közvetlen számolással adódnak.

Az (ii) tulajdonság a következőképpen bizonyítható. Értelmezzük az $x^{dn}(t)$ skalár függvényt a $\xi^{dn}(t)$ értelmezésével analóg módon, úgy hogy a $\mathbf{w}(t)$ vektorfüggvényt a $\bar{w} = \sup\limits_{0 \le t \le T} |\mathbf{w}(t)|$ konstanssal, az $\mathbf{A}$ mátrixot pedig $a = \|\mathbf{A}\|$-val helyettesítjük, azaz:

$$x_0 = \bar{w}$$

$$x^{dn}(t) = x^{dn}(t_{n-1}) + a x^{dn}(t_{i-1})(t - t_{i-1}^{dn}), \quad \text{ha} \quad t_{i-1} \le t < t_i.$$

Könnyen belátható, hogy $\|\xi^{dn}(t)\| \le \bar{w} + e^{d(t+\bar{w})}$, amivel igazoltuk, hogy a $\xi^{dn}(t)$ függvények egyenletesen korlátosak, ha a $\mathbf{w}(t)$ függvény befutja K' elemeit (melyek szintén egyenletesen korlátosak). Az egyenlő mértékben való folytonosság következik a $\mathbf{w}(t) \in K'$ függvények ugyanezen tulajdonságából a (2.4) formulából és a már igazolt egyenletes korlátosságból. Ezzel bebizonyítottuk az (ii) tulajdonságot is.

A *Wiener-folyamat* folytonossági modulusára vonatkozó *Lévy*-féle tételből (l. pl. [3]) és az (ii) tulajdonságból levezethető, az alábbi — alapvető — tulajdonság:

(iii) Bármely $\varepsilon > 0$ valós számhoz található olyan $K_\varepsilon \subset C_k[0, T]$ kompakt halmaz, hogy $P_{n,A}(K_\varepsilon) > 1 - \varepsilon$, ahol $P_{n,A}$ jelöli a $\xi^{dn}(t)$ közelítő folyamat által generált mértéket.

Bizonyításul megjegyezzük, hogy ha $K'_\varepsilon \subset C_k[0, T]$ olyan kompakt halmaz, amelyre $P_{\mathbf{w}}(K'_\varepsilon) > 1 - \varepsilon$ (ilyen K_ε a *Lévy*-tétel miatt létezik), akkor a $K_\varepsilon = \varphi(K'_\varepsilon)$ halmaz kielégíti az (iii)-ben megkövetelt feltételt.

Az (i) és (iii) tulajdonságok együttese a *Prohorov*-féle invariancia elv alkalmazhatóságának szükséges és elegendő feltétele (l. [4]), azaz az (i) és (iii) tulajdonságok biztosítják, hogy a $C_k([0, T]$ téren értelmezett minden korlátos $f(\mathbf{w})$ funkcionálra

$$\int\limits_{C_k[0,T]} f(\mathbf{w})\, dP_{n,\mathbf{A}} \to \int\limits_{C_k[0,T]} f(\mathbf{w})\, dP\mathbf{w}_{\mathbf{A}}.$$

Ezzel összegyűjtöttük a tétel bizonyításához szükséges segédeszközöket, s rátérhetünk a *Radon—Nikodym-derivált* konkrét kiszámítására. Első lépésünk a következő lemma bizonyítása lesz.

2.2. LEMMA. A $P_{n,\mathbf{A}}$ mértékek abszolút folytonosak a $P_{\mathbf{w}}$ mértékre nézve és

$$P_{n,\mathbf{A}}(\mathbf{w}) = \frac{dP_{n,\mathbf{A}}}{dP\mathbf{w}} = \exp\left\{\sum_{j=1}^{m}(\mathbf{C}\mathbf{w}_{j-1}, \Delta\mathbf{w}_j) - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}[\mathbf{A}\mathbf{w}_{j-1}, \mathbf{C}\mathbf{w}_{j-1}]\Delta t_j^{dn}\right\} \tag{2.5}$$

ahol $\mathbf{w}_j = \mathbf{w}(t_j)$ és $\Delta t_j^{dn} = (t_j^{dn} - t_{j-1}^{dn})$.

Bizonyítás. Vegyük észre, $p_{n,\mathbf{A}}(\mathbf{w})$ nem más, mint a $\{\xi^{dn}(t_i^{dn})\}$ és a $\{\mathbf{w}(t_i^{dn})\}$ valószínűségi vektorváltozó sorozatok együttes sűrűségfüggvényeinek hányadosa. Az *Euler*-féle közelítéseket éppen ez a tulajdonság teszi a számolás szempontjából kényelmessé. A σ-algebrák nyelvén ez a következőt jelenti: ha σ^{dn} jelöli a dn beosztás osztópontjain kívül tetszőleges értéket felvehető, folytonos függvények σ-algebráját[1] és Q^{dn} jelöli valamely Q mértéknek a σ^{dn} σ-algebrával való megszorítását, akkor $P_{n,\mathbf{A}}(\mathbf{w}) = \frac{dP_{n,\mathbf{A}}^{dn}}{dP_{\mathbf{w}}^{dn}}$. Ebből következik, hogy $\int\limits_{C_k[0,T]} P_{n,\mathbf{A}}(\mathbf{w})\,dP_{\mathbf{w}} = 1$.

Legyen dn' a dn beosztás egy finomítása, azaz

$$0 = t_0^{dn} = t_0^{dn'} < t^{dn} < \ldots < t_{i1}^{dn'} = t_1^{dn} < \ldots < t_{im}^{dn'} = t_m^{dn} = 1.$$

Közvetlen számolással meggyőződhetünk arról, hogy a $\{\xi^{dn}(t_i^{dn'})\}$ és a $\{\mathbf{w}(t_i^{dn'})\}$ valószínűségi vektorváltozó sorozat együttes sűrűségfüggvényeinek hányadosa:

$$P_{n,n'}(\mathbf{w}) = \exp\frac{1}{2}\left\{-\sum_{j=1}^{m}\sum_{i>k_{j-1}}^{k_j}\frac{(\mathbf{B}_{\mathbf{w}}^{-1}\Delta\mathbf{w}_i^{dn'} - \mathbf{C}\mathbf{w}_{j-1}^{dn}\Delta t_i^{dn'}, \Delta\mathbf{w}_i^{dn} - \mathbf{A}\mathbf{w}_{j-1}^{dn}\Delta t_i^{dn'}}{\Delta t_i^{dn'}} + \right.$$
$$\left. + \sum_{i=1}^{km}\frac{(\mathbf{B}_{\mathbf{w}}^{-1}\Delta\mathbf{w}_i^{dn'}, \Delta\mathbf{w}_i^{dn'})}{\Delta t_i^{dn}}\right\}. \tag{2.6}$$

Az előző jelöléseket alkalmazva $P_{n,n'}(\mathbf{w}) = \frac{dP_{n,\mathbf{A}}^{dn'}}{dP_{\mathbf{w}}^{dn'}}$, azaz a $\{P_{n,n'}(\mathbf{w})\}$ sorozat az egyre finomodó $\{\sigma^{dn}\}$ σ-algebra sorozatra megszorított két mérték *Radon—Nikodym deriváltjainak* a sorozata. Mint ismeretes, az ilyen sorozatok martingált alkotnak. Ismeretes az irodalomban (l. [5]) a következő tétel.

Legyen $\xi(t)$ és $\eta(t)$ két sztochasztikus folyamat a $0 \leq t \leq 1$ intervallumon, és legyen $\{dn\}$ egy olyan beosztássorozat, hogy $\lim\limits_{n\to\infty}\max\limits_i(t_{i+1}^{dn} - t_i^{dn}) = 0$, továbbá létezzenek a $\xi(t_i^{dn})\,(\eta(t_i^{dn}))$ vektorváltozók együttes sűrűségfüggvényei, és hányadosuk tartson 1 valószínűséggel egy olyan $f(\eta(t))$ funkcionálhoz, amelynek a várható értéke — az $\eta(t)$ által generált mértékre nézve egy. Ezen feltételek mellett a $\xi(t)$ által generált mérték abszolút folytonos az $\eta(t)$ által generált mértékre nézve, és a *Radon—Nikodym-deriváltjuk* éppen $f(\eta(t))$.

Könnyen látható, hogy $P_{\mathbf{w}}$ majdnem mindenütt (valójában minden folytonos $\mathbf{w}(t)$ *Wiener-trajektóriára*) $P_{n,n'}(\mathbf{w}) \to P_{n,\mathbf{A}}(\mathbf{w})$. Ez utóbbi reláció és az $\int\limits_{C_k[0,T]} p_{n,\mathbf{A}}(\mathbf{w})\,dP_{\mathbf{w}}$

[1] Azaz $A \in \sigma^{dn}$ akkor és csak akkor, ha $f \in A$ és $g(t_i) = f(t_i)$ esetén $g \in A$.

egyenlőség az idézett tétel alapján maga után vonja a lemma állítását. Minthogy a (2.5) formula kitevőjében szereplő tagok négyzetes középben tartanak $\int_0^T (\mathbf{C}\mathbf{w}(t)\, d\mathbf{w}(t))$-hez, ill. $-\frac{1}{2}\int_0^1 (\mathbf{A}\mathbf{w}(t), \mathbf{C}\mathbf{w}(t))dt$-hez, választható egy olyan $\{dn_k\}$ beosztássorozat, hogy a fenti határértékek P_w majdnem mindenütt is létezzenek, tehát $p_{n_k, \mathbf{A}}(\mathbf{w}) \to p_{\mathbf{A}}(\mathbf{w})$ P_w m.m.

Tekintsünk egy olyan K_ε kompakt halmazt, hogy minden n-re

$$P_{n,\mathbf{A}}(K_\varepsilon) = \int_{K_\varepsilon} P_{n,\mathbf{A}}(x)\, dP_w > 1-\varepsilon. \tag{2.7}$$

Minthogy K_ε elemei egyenletesen korlátosak,

$$\frac{1}{2}\left|\sum_{j=1}^{n} (\mathbf{A}\mathbf{w}_{j-1}, \mathbf{C}\mathbf{w}_{j-1})\Delta t_j^{dn}\right| < N^2 \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{C}\|,$$

ahol N a K_ε-beli függvényeknek egy közös felsőkorlátja. Ezért

$$\left(p_{n,\mathbf{A}}(\mathbf{w}(t))\right)^2 < e^{2N^2\|\mathbf{A}\|\,\|\mathbf{C}\|} p_{n,2\mathbf{A}}(\mathbf{w}(t))$$

minden $\mathbf{w}(t) \in K_\varepsilon$-ra. Ebből az egyenlőtlenségből, és az $\int_{C_k[0,T]} p_{n,2\mathbf{A}}(\mathbf{w})\, dP\mathbf{w} = 1$ összefüggésből adódik, hogy a $\left\{\int_{C_k[0,T]} (p_{n,\mathbf{A}}(\mathbf{w}))^2\, dP\mathbf{w}\right\}$ sorozat korlátos, ami — mint ismeretes — elegendő feltétel arra, hogy a $\{p_{n,\mathbf{A}}(\mathbf{w})\}$ sorozat a K_ε halmazon egyenletesen integrálható legyen. (Megjegyezzük, hogy a $\{p_{n,\mathbf{A}}(\mathbf{w})\}$ sorozat az egész téren is egyenletesen integrálható, de ennek igazolása többdimenziós folyamatok esetén igen nehézkes — ezt kerüljük el az invariancia elv alkalmazásával.)

A (2.7) egyenlőtlenségből a *Fatou-lemma* alkalmazásával nyerjük a

$$\int_{\overline{K}_\varepsilon} p_{\mathbf{A}}\, dP_w \leqq \varepsilon \tag{2.8}$$

egyenlőtlenséget. ($\overline{K}_\varepsilon$ a K_ε halmaz komplementere.)

Legyen $f(\mathbf{w})$ egy a $C_k[0, T]$ téren értelmezett tetszőleges folytonos nemnegatív funkcionál; szintén a *Fatou-lemma* alapján kapjuk a

$$\int_{C_k[0,T]} f(\mathbf{w}) p_{\mathbf{A}}(\mathbf{w})\, dP_w < \varliminf_{n\to\infty} \int_{C_k[0,T]} f(\mathbf{w}) p_{n,\mathbf{A}}(\mathbf{w})\, dP_w \tag{2.9}$$

egyenlőtlenséget.

A (2.6) és (2.9) összefüggést és az egyenletes integrálhatóságot felhasználva:

$$\varlimsup \int_{\mathfrak{X}^{(K)}} f(\mathbf{w}) p_{n,\mathbf{A}}(\mathbf{w})\, dP_{\mathbf{w}_0 k} \leqq \lim \int_{K_\varepsilon} f(\mathbf{w}) p_{n,\mathbf{A}}(\mathbf{w})\, dP_{\mathbf{w}_0 k} + \varepsilon' = \tag{2.10}$$

$$= \int_{K_\varepsilon} f(\mathbf{w}) p_{\mathbf{A}}(\mathbf{w})\, dP_{\mathbf{w}_0 k} + \varepsilon' \leqq \int_{\mathfrak{X}^{(K)}} f(\mathbf{w}) p_{\mathbf{A}}(\mathbf{w})\, dP_{\mathbf{w}_0 k} + \varepsilon',$$

$$\varepsilon' = \max_{\mathbf{w}\in\mathfrak{X}} |f(\mathbf{w})|.$$

Analóg meggondolásokat alkalmazhatunk nempozitív folytonos funkcionálokra is. Ez utóbbi megjegyzést figyelembe véve könnyen látható, hogy a (2.9) és (2.10) összefüggések tetszőleges korlátos funkcionálra maguk után vonják a

$$\int_{C_k[0,T]} f(\mathrm{w})p_{n,\mathrm{A}}\,dP\mathrm{w} \to \int_{C_k[0,T]} f(\mathrm{w})p_{\mathrm{A}}(\mathrm{w})\,dP\mathrm{w} \tag{2.11}$$

relációt, ami azt jelenti, hogy a $P_{\mathrm{A}}^*(B)=\int_B p_{\mathrm{A}}(\mathrm{w})dP\mathrm{w}$ összefüggéssel definiált mérték gyenge limesze a $\{P_{n,\mathrm{A}}\}$ mértéksorozatnak. Egy mértéksorozatnak azonban nem lehet két különböző gyenge limesze, ezért $P_{\mathrm{A}}^*=P_{\mathrm{A}}$, ami a bizonyítandó volt.

A formula alkalmazhatóságát az úgynevezett egydimenziós komplex folyamat példájával illusztráljuk: Tegyük fel, hogy $\eta(t)=\xi_1(t)+\xi_2(t)$ és $\eta(t)$ kielégíti a

$$d\eta(t)=(-\lambda-i\omega)\eta(t)\,dt+dw_1(t)+idw_2(t) \tag{2.12}$$

egyenletet, ahol $w_1(t)$ és $w_2(t)$ független standard *Wiener-folyamatok*. A (2.12) komplex egyenlet komponensenkénti alakja

$$d\xi_1(t)=\big(-\lambda\xi_1(t)+\omega\xi_2(t)\big)\,dt+dw_1(t),$$

$$d\xi_2(t)=\big(\omega\xi_1(t)-\lambda\xi_2(t)\big)\,dt+dw_2(t).$$

Stacionárius esetben a kezdeti eloszlás sűrűségfüggvénye:

$$f(w_1,w_2)=\frac{\lambda}{2\pi^2}\exp\left\{-\frac{\lambda}{\sigma^2}w_1^2(0)-\frac{\lambda}{\sigma^2}w_0^2(0)\right\}.$$

Felhasználva az $\int_0^1 w_i dw_i=\frac{1}{2}[w_i(1)^2-w_i(0)^2-1]$ összefüggést, amely a $\sum w_i(t_\nu)\Delta w_i(t_\nu)=$ $=\frac{1}{2}[w_i(1)^2-w_i(0)^2-\sum\Delta w_i(t_\nu)^2]$ azonosságból határátmenettel adódik, felírhatjuk a két mérték *Radon—Nikodym-deriváltját:*

$$\frac{dP_{\mathrm{A}}}{dP_{\mathrm{w}}}=\frac{\lambda}{\pi\sigma^2}\exp\left\{-\frac{\lambda^2+\omega^2}{2\sigma^2}\int_0^1[w_1^2(t)+w_2^2(t)]\,dt-\right. \tag{2.13}$$

$$\left.-\frac{\lambda}{2\sigma^2}[w_1^2(1)+w_2^2(1)+w_1^2(0)+w_2^2(0)]+\frac{\omega}{\sigma^2}\int_0^1[w_1(t)\,dw_2(t)-w_2(t)dw_1(t)]\right\}.$$

Az elégséges statisztika klasszikus definíciója alapján a (2.13) formulából leolvasható, hogy a következő három mennyiség λ-nak és ω-nak együttesen elégséges statisztikáját alkotják:

$$S_1=\int_0^1[w_1^2(t)+w_2^2(t)]\,dt,$$

$$S_2=w_1(1)^2+w_2(1)^2+w_1(0)^2+w_2(0)^2$$

és

$$S_3=\int_0^1[w_1\,dw_2(t)-w_2\,dw_1(t)].$$

Az S_3-ban szereplő sztochasztikus integrálok nem alakíthatók át közönséges integrállá.

IRODALOM

[1] ARATÓ, M., *Bevezetés a sztochasztikus folyamatok elméletébe* (Bolyai János Matematikai Társulat, Budapest, 1968).

[2] ARATÓ, M., «Точные формулы для плотностей мет элементарных гауссовских процессов», *Studia Sci. Math.* 5 (1970).

[3] ITO, K. and MCKEAN, H. P., *Diffusion Processes and their Sample Paths*, (Springer Verlag, Berlin, 1965).

[4] STRIEBEL, CH., "Densities for stochastic processes", *Ann. Math. Stat.* **30** (1959) 559—567.

[5] Прохоров, Ю. В., «Сходимость случайных процессов и предельные теоремы теории вероятностей», *Теор. Вероятность и ее Прим.* **1** (1956) 177—238.

[6] Ширяев, А. Н., *Случайные процессы* (Изд. МГУ, 1972).

(Beérkezett: 1974. június 10.)

KRÁMLI ANDRÁS ÉS PERGEL JÓZSEF
MTA SZÁMÍTÁSTECHNIKAI ÉS AUTOMATIZÁLÁSI KUTATÓ INTÉZET
1502 BUDAPEST XI., KENDE U. 13—17.

ON THE RADON—NIKODYM DERIVATIVES OF MEASURES GENERATED BY AUTOREGRESSION TYPE PROCESSES

A. KRÁMLI and J. PERGEL

The measure generated by the solution of the stochastic differential equation (1.1) on the space of the continuous functions is proved to be equivalent to the measure generated by the standard Brownian motion process on the same space. For their Radon—Nikodym derivative the formula (2.1) is deduced.

Alkalmazott Matematikai Lapok 1 *(1975) 81—90*

SZAKASZONKÉNT LINEÁRIS, KONVEX CÉLFÜGGVÉNYŰ SZÁLLÍTÁSI FELADAT MEGOLDÁSA DEKOMPOZÍCIÓS MÓDSZERREL

TURCHÁNYI PIROSKA

Budapest

A dolgozat a klasszikus *Hitchcock-féle szállítási feladat* olyan általánosított formájával foglalkozik, melyben egyrészt a költségfüggvény szakaszonként lineáris, konvex függvény, másrészt az ún. peremfeltételekben a termelőhelyek kínálataira nincs egészértékűségi megszorítás. Ez utóbbi tulajdonság miatt a probléma optimális megoldása sem feltételenül egész értékű.

Az eredeti feladatot egy, a termelőhelyek számával megegyező számú feltételt tartalmazó, lineáris célfüggvényű feladattá redukáljuk, WILLIAMS [2] ötletének felhasználásával lényegében a *Dantzig—Wolfe-féle dekompozíciós elv* alapján. Így a megoldási algoritmus igen előnyös, ha a termelőhelyek száma a felvevőhelyek számánál jóval kisebb, azaz az eredeti feladat feltételi- és költségmátrixában a sorok és oszlopok száma közt nagyságrendbeli különbség van. Az eredeti célfüggvény szakaszonkénti linearitása és konvexitása a redukált feladat megoldásában, mely a módosított szimplex módszerrel történik, a bázisba belépő vektorok generálását viszonylag egyszerűvé teszi.

Az algoritmusra az MTA CDC 3300 számítógépén készült program.

1. A szállítási feladat megfogalmazása, a redukált feladat felírásának előkészítése

Tekintsük a következő szállítási feladatot:

Adott m számú termelőhely
és n számú fogyasztóhely.
Jelölje S_i nem negatív valós szám az i-edik termelőhely kínálatát; $i=1, \ldots, m$
D_j pozitív egész szám a j-edik fogyasztóhely igényét; $j=1, \ldots, n$
és $\varphi_{ij}(x)$ szakaszonként lineáris, konvex függvény az i-edik telephelyről a j-edik fogyasztóhelyre szállítandó mennyiség költségét, a függvény lineáris a szomszédos egészek közötti intervallumokon; $i=1, \ldots, m$ $j=1, \ldots, n$.

A szállítási összköltség minimumát keressük:

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \varphi_{ij}(x_{ij}) \rightarrow \min! \tag{1.1}$$

az alábbi feltételek mellett:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = S_i, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{1.2}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = D_j, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{1.3}$$

$$x_{ij} \geqq 0, \quad i = 1, \ldots, m; \quad j = 1, \ldots, n. \tag{1.4}$$

A (1.2) és (1.3) feltételek azt fejezik ki, hogy az i-edik telephelyről a felvevőhelyekre a rendelkezésre álló mennyiséget teljes egészében elszállítjuk, illetőleg, hogy a j-edik felvevőhelyre együttesen szállított mennyiség éppen egyenlő az ottani D_j igénnyel. Megköveteljük még, hogy az elszállítandó mennyiségek összege megegyezzék az igények összegével:

$$\sum_{i=1}^{m} S_i = \sum_{j=1}^{n} D_j = T. \tag{1.5}$$

Az (1.2)—(1.4) alatti feltételek mindig korlátos konvex poliédert határoznak meg. Könnyen látható, hogy a megengedett megoldások halmaza nem üres és korlátos.

Feladatunkat a *Dantzig—Wolfe-féle dekompozíciós technikával* fogjuk megoldani. Ehhez szükség lesz a következő lemmára:

1.1. LEMMA. Legyenek $R_1, R_2, \ldots, R_n$ véges dimenziós euklideszi terek, $\bigtimes_{j=1}^{n} R_j = R$ ezek *Descartes szorzata.* Vegyük a $P_1 \subset R_1, P_2 \subset R_2, \ldots, P_n \subset R_n$ korlátos konvex poliédereket és *Descartes-szorzatukat:*

$$\bigtimes_{j=1}^{n} P_j = P \subset R.$$

Jelölje η_j a P_j poliéder egy tetszőleges pontját, $j=1, \ldots, n$.

Ekkor azt állítjuk, hogy

1. A P halmaz is korlátos konvex poliéder.

2. Az $\eta = \langle \eta_1, \ldots, \eta_n \rangle \in P$ pont akkor és csak akkor extremális pontja a P poliédernek, ha minden η_j extremális pontja a megfelelő P_j poliédernek.

Bizonyítás. Az 1. állítás triviális. A 2. állítás igazolásához azt mutatjuk meg, hogy ha legalább egy j-re η_j nem extremális pontja P_j-nek, akkor η sem extremális pontja P-nek; ha pedig η nem extremális pontja P-nek, akkor van olyan j index, melyre η_j nem extremális pontja P_j-nek.

a) Ha van legalább egy olyan η_j, mely nem extremális pont a P_j poliéderben, akkor vannak olyan ξ_j^1 és ξ_j^2 pontok, $\xi_j^1 \neq \xi_j^2$, melyek által meghatározott szakasznak η_j belső pontja:

$$\eta_j = \lambda \xi_j^1 + (1-\lambda) \xi_j^2; \quad 0 < \lambda < 1.$$

De $\xi_j^1 \neq \xi_j^2$ miatt a

$$\xi^1 = \langle \eta_1, \ldots, \eta_{j-1}, \xi_j^1, \eta_{j+1}, \ldots, \eta_n \rangle$$

és

$$\xi^2 = \langle \eta_1, \ldots, \eta_{j-1}, \xi_j^2, \eta_{j+1}, \ldots, \eta_n \rangle$$

különböző pontjai P-nek, és fennáll

$$\eta = \lambda \xi^1 + (1-\lambda) \xi^2$$

az előbbi λ-ra, tehát η nem extremális pont P-ben.

b) Ha $\eta = \langle \eta_1, \ldots, \eta_n \rangle$ nem extremális pontja a P poliédernek, akkor létezik olyan ξ^1, ξ^2 végpontú szakasz ($\xi^1 \neq \xi^2$), amelynek η belső pontja:

$$\eta = \lambda \xi^1 + (1-\lambda) \xi_2, \quad 0 < \lambda < 1,$$

azaz

$$\eta_j = \lambda\xi_j^1 + (1-\lambda)\xi_j^2 \tag{1.6}$$

fennáll minden $j=1, \ldots, n$ indexre.

Mivel $\xi^1 \neq \xi^2$, létezik legalább egy olyan i index, melyre $\xi_i^1 \neq \xi_i^2$, de minden ilyen i indexre az (1.6) egyenlet azt jelenti, hogy η_i nem extremális pontja P_i-nek.

Vizsgáljuk most a feladat (1.3) alatti feltételeit. Mivel mindegyik ismeretlen csak egy feltételi egyenletben jelenik meg, könnyű meghatározni ezen feltételcsoportnak eleget tevő megoldásokat. Rendezzük az $m \cdot n$ dimenziós térbeli x pont komponenseit egy m sorból, n oszlopból álló táblába. Tekintsük (1.3)-ban a j-edik feltételi egyenletet (rögzített j-re):

$$x_{1j} + x_{2j} + \ldots + x_{mj} = D_j,$$

vagyis a tábla j-edik oszlopában a komponensek összege D_j.

Extremális megoldásnak nevezünk minden

$$(x_{1j}, \ldots, x_{mj}) = D_j \mathbf{e}_i$$

vektort, az m dimenziós egységvektorok D_j-szereseit. A j-edik feltételi egyenlet nem negatív megoldásai, mint vektorok, tehát olyan korlátos konvex poliédert alkotnak, melynek extremális pontjai az egyenlet extremális megoldásai. Jelölje ezt a poliédert K_j, ez egy $(m-1)$ dimenziós szimplex az m dimenziós térben.

Ezek a megállapítások igazak j minden értékére, tehát az összes (1.3) alatti feltételnek eleget tevő x pontok halmaza a K_j szimplexek *Descartes-szorzata*, egy $m \cdot n$ dimenziós térbeli korlátos konvex poliéder, melyet jelöljünk K-val.

Így az 1.1 lemmában szereplő $R_1, \ldots, R_n$ tereknek most az m dimenziós terek, a P_j poliédereknek a K_j, P-nek a K poliéder felel meg. Alkalmazva az 1.1 lemmát, K extremális pontjai a K_j poliéderek extremális pontjaiból állíthatók elő. Tehát a K extremális pontjait (az (1.3) feltételrendszer extremális megoldásait) olyan táblákkal reprezentálhatjuk, melyeknek minden oszlopában egyetlen nem-zéró komponens áll: a j-edik oszlopban D_j.

Jelöljék K extremális pontjait

$$\xi^{(w_1, \ldots, w_n)},$$

ahol w_j a j-edik oszlopban levő nem-zéró komponens helyét jelenti, vagyis azt, hogy ez a komponens hányadik sorban van.

Tehát

$$1 \leqq w_j \leqq m, \quad j = 1, \ldots, n,$$

és $w_1, \ldots, w_n$ lehetséges értékrendszereinek száma, azaz K extremális pontjainak száma m^n.

Visszatérve az (1.3) feltételi egyenletek közül a j-edikre, ennek D_j egészértékűsége miatt van nem-negatív egész megoldása, azaz van olyan $(x_{1j}, \ldots, x_{mj})$ vektor, melynek minden komponense nem negatív egész, vagyis van K_j-nek rácspontja, $j=1, \ldots, n$; így van a K poliédernek is. K rácspontjait (az (1.3) feltételrendszer egészértékű megoldásait) olyan táblák reprezentálják, melyeknek minden elemük egész és a j-edik oszlopban levő elemük összege D_j. Az extremális pontok halmaza nyilván része a rácspontok halmazának. Jelöljék

$$\eta^1, \ldots, \eta^p$$

a K poliéder rácspontjait. Belátható, hogy

$$p=\prod_{j=1}^{n}\binom{D_j+m-1}{m-1}.$$

A (1.3) feltételrendszer tetszőleges nem-negatív megoldása (a K poliéder tetszőleges pontja) felírható a rácspontok konvex lineáris kombinációjaként, vagyis léteznek $\lambda^1, \ldots, \lambda^p \geqq 0$, $\sum_{\nu=1}^{p} \lambda^\nu = 1$ számok, amelyekkel

$$x=\sum_{\nu=1}^{p}\lambda^\nu \eta^\nu \tag{1.7}$$

1.2. Lemma. A K poliéder tetszőleges pontja előállítható

$$x=\sum_{k=1}^{p(x)}\lambda^{\nu_k(x)}\eta^{\nu_k(x)}$$

alakban is, ahol minden (i, j) párra

$$\eta_{ij}^{\nu_k(x)}=\begin{cases}[x_{ij}], & \text{vagy}\\ -[-x_{ij}], & i=1,\ldots,m;\quad j=1,\ldots,n,\end{cases}$$

azaz $\eta_{ij}^{\nu_k(x)}$ az x_{ij} értékeket közrefogó egészek valamelyike.

Bizonyítás. Tekintsük rögzített x-re az y pontok

$$[x_{ij}] \leqq y_{ij} \leqq -[-x_{ij}],\quad i=1,\ldots,m;\quad j=1,\ldots,n$$

egyenlőtlenségeknek eleget tevő halmazát. Ez korlátos konvex poliéder, melynek extremális pontjai konvex lineáris kombinációjaként bármely y előállítható. A szóbanforgó extremális pontok legyenek az $\eta^{\nu_k(x)}$ pontok. Ezek tehát részhalmazát alkotják az $\eta^1, \ldots, \eta^p$ rácspontoknak.

2. A redukált feladat

Rátérhetünk az eredeti, (1.1)—(1.4) alatti feladattal egyenértékű, de egyszerűbben megoldható feladat felírására.

Az eredeti probléma megoldáshalmaza az (1.3)—(1.4) feltételrendszer megoldáshalmazának olyan részhalmaza, mely az (1.2) feltételrendszert is kielégíti. Behelyettesítve az x pont (1.7) alatti előállítását, a következő feladat adódik:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\varphi_{ij}\left(\sum_{\nu=1}^{p}\lambda^\nu\eta_{ij}^\nu\right)\to\min! \tag{2.1}$$

$$\sum_{\nu=1}^{p}\lambda^\nu\left(\sum_{j=1}^{n}\eta_{ij}^\nu\right)=S_i,\quad i=1,\ldots,m, \tag{2.2}$$

$$\lambda^\nu \geqq 0,\quad \nu=1,\ldots,p, \tag{2.3}$$

$$\sum_{\nu=1}^{p}\lambda^\nu=1. \tag{2.4}$$

Vegyük észre, hogy az (1.5) kanonikussági feltétel teljesülése esetén $\sum_{\nu=1}^{p}\lambda^\nu=1$ következik a többiből:

$$T = \sum_{i=1}^{m} S_i = \sum_{i=1}^{m}\sum_{\nu=1}^{p}\lambda^\nu \sum_{j=1}^{n}\eta_{ij}^\nu = \sum_{\nu=1}^{p}\lambda^\nu \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\eta_{ij}^\nu = \sum_{\nu=1}^{p}\lambda^\nu \sum_{j=1}^{n} D_j = T\sum_{\nu=1}^{p}\lambda^\nu.$$

Továbbá a 2.1 lemmában bebizonyítjuk, hogy (2.1) helyett elég a

$$\sum_{\nu=1}^{p}\lambda^\nu \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\varphi_{ij}(\eta_{ij}^\nu) \tag{2.5}$$

függvény minimalizálása.

Bevezetve a

$$\sum_{j=1}^{n}\eta_{ij}^\nu = s_i^\nu,$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\varphi_{ij}(\eta_{ij}^\nu) = \gamma^\nu$$

jelöléseket, megkapjuk az ún. redukált feladat végleges formáját:

$$\sum_{\nu=1}^{p}\gamma^\nu\lambda^\nu \to \min! \tag{2.6}$$

$$\sum_{\nu=1}^{p}s_i^\nu\lambda^\nu = S_i, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{2.7}$$

$$\lambda^\nu \geqq 0, \quad \nu = 1, \ldots, p. \tag{2.8}$$

A redukált feladat feltételrendszere korlátos. Az eredeti és a redukált feladat megengedett megoldásai egymásnak megfeleltethetők:

Ha x az eredeti feladat megengedett megoldása, akkor

$$\sum_{i=1}^{m}x_{ij} = D_j, \quad j = 1, \ldots, n,$$

tehát léteznek

$$\lambda^\nu \geqq 0, \quad \nu = 1, \ldots, p, \quad \sum_{\nu=1}^{p}\lambda^\nu = 1$$

számok, melyekkel

$$x_{ij} = \sum_{\nu=1}^{p}\lambda^\nu\eta_{ij}^\nu.$$

De ha x megoldás,

$$\sum_{j=1}^{n}x_{ij} = S_i, \quad i = 1, \ldots, m$$

is teljesül, így

$$\sum_{\nu=1}^{p}s_i^\nu\lambda^\nu = S_i;$$

azaz ezen $\lambda^1, \ldots, \lambda^p$ megengedett megoldása a redukált feladatnak. Hasonlóan látható fordított irányban a megfeleltetés.

2.1. LEMMA. Ha $\lambda_0^1, \ldots, \lambda_0^p$ optimális megoldása a redukált feladatnak, akkor

$$x^0 = \sum_{\nu=1}^{p} \lambda_0^\nu \eta^\nu \tag{2.9}$$

optimális megoldása lesz az eredeti (1.1)—(1.4) feladatnak.

Bizonyítás. Azt kell megmutatnunk, hogy az eredeti feladat tetszőleges megoldásához tartozó célfüggvényérték nem kisebb, mint a (2.9)-hez tartozó. Legyen y tetszőleges megoldása az (1.1)—(1.4) feladatnak. Ekkor létezik a (2.6)—(2.8) redukált feladatnak olyan $\mu^1, \ldots, \mu^p$ megoldása, melyre

$$y = \sum_{\nu=1}^{p} \mu^\nu \eta^\nu = \sum_{k=1}^{p(y)} \mu^{\nu_k(y)} \eta^{\nu_k(y)},$$

ahol az $\eta^{\nu_k(y)}$, $k=1, \ldots, p(y)$ sorozat az 1.2 lemmában szereplő pontokat jelenti, tehát

$$\eta_{ij}^{\nu_k(y)} = \begin{cases} [y_{ij}], & \text{vagy} \\ -[-y_{ij}]. \end{cases}$$

Ekkor

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \varphi_{ij}(y_{ij}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \varphi_{ij} \left(\sum_{\nu=1}^{p} \mu^\nu \eta_{ij}^\nu \right) = \sum_{k=1}^{p(y)} \mu^{\nu_k(y)} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \varphi_{ij}(\eta_{ij}^{\nu_k(y)}),$$

hiszen φ_{ij} lineáris a szomszédos egészek közötti intervallumokon, de $(\lambda_0^1, \ldots, \lambda_0^p)$ optimalitása miatt

$$\sum_{k=1}^{p(y)} \mu^{\nu_k(y)} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \varphi_{ij}(\eta_{ij}^{\nu_k(y)}) \geqq \sum_{\nu=1}^{p} \lambda_0^\nu \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \varphi_{ij}(\eta_{ij}^\nu)$$

és kihasználva $\varphi_{ij}(x)$ konvexitását

$$\sum_{\nu=1}^{p} \lambda_0^\nu \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \varphi_{ij}(\eta_{ij}^\nu) \geqq \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \varphi_{ij} \left(\sum_{\nu=1}^{p} \lambda_0^\nu \eta_{ij}^\nu \right) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \varphi_{ij}(x_{ij}^0).$$

A redukált feladat előnye az eredeti feladattal szemben, hogy célfüggvénye lineáris és az eredeti $m+n-1$ független feltétel helyett csak m feltételt tartalmaz. Hátránya, hogy az ismeretlenek száma, p, igen nagy, speciálisan $D_1, \ldots, D_n$ értékétől is függ. De ha a redukált feladatot a módosított szimplex módszerrel oldjuk meg, nem kell explicite ismernünk az összes $\eta^1, \ldots, \eta^p$ rácspontot. A redukált feladat bázisa csak m elemű, és minden egyes szimplex iteráció során egy viszonylag egyszerű feladat megoldása generálja a bázisba kerülő vektort (illetőleg azt a rácspontot, melyből az új bázisvektort konstruáljuk).

3. Algoritmus a redukált feladat megoldására

Induló megengedett bázis konstruálásához tekintsük a K poliéder (lásd 1. szakasz)

$$\xi^{(1,\ldots,1)}, \xi^{(2,\ldots,2)}, \ldots, \xi^{(m,\ldots,m)}$$

extremális pontjait.

Tehát a k-adik bázisvektor i-edik komponense:

$$\sigma_i^k = \sum_{j=1}^{n} \xi_{ij}^{(k,\ldots,k)} = \begin{cases} T, & \text{ha} \quad i = k, \\ 0, & \text{ha} \quad i \neq k, \end{cases}$$

mert a $\xi^{(k,\dots,k)}$ extremális megoldáshoz tartozó $m \cdot n$-es táblában a k-adik sorban levő értékek $D_1, D_2, \dots, D_n$, másutt csupa zéró áll.

Így az induló bázis mátrixa az egységmátrix T-szerese. Az ehhez tartozó bázisinverz és bázismegoldás:

$$((t_{ij})) = \begin{bmatrix} \frac{1}{T} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \frac{1}{T} & \\ & & & \ddots \\ & & & & \frac{1}{T} \end{bmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \beta^1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \beta^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{S_1}{T} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{S_m}{T} \end{pmatrix}.$$

Gyűjtsük a t_{ij} táblázatba mindenkor az aktuális bázisinverzmátrix elemeit, a β^i táblázatba pedig a bázismegoldás komponenseit $i=1, \dots, m$; $j=1, \dots, n$. Minden egyes iterációs lépésben szükség lesz a bázist alkotó vektorokra vonatkozó információra. Ehhez azt kell megadnunk, hogy mely η^ν rácspontokhoz tartozó s vektorok alkotják a bázist.

Jelölje θ_{lij} a szóban forgó rácspontok közül az l-ediknek az η_{ij} komponenseit, $i=1, \dots, m$, $l=1, \dots, m$, $j=1, \dots, n$.

Az ún. szimplex szorzókat pedig jelölje

$$\pi_i, \quad i = 1, \dots, m,$$

tehát

$$\pi_i = \sum_{l=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \varphi_{kj}(\theta_{lkj}) \right) t_{li}.$$

A módosított szimplex módszerben egyes iterációk során a megoldás optimalitásának eldöntéséhez a

$$\Delta^\nu = \gamma^\nu - \sum_{i=1}^{m} \pi_i s_i^\nu \tag{3.1}$$

különbség vizsgálata szükséges. Ha $\min_\nu \Delta^\nu \geqq 0$, optimális megoldásnál vagyunk, ellenkező esetben a minimumot megvalósító s^{ν_0} vektor belép a bázisba. Kérdés, hogyan tudjuk meghatározni Δ^ν minimumát az η^ν rácspontok explicit ismerete nélkül. Mivel

$$\Delta^\nu = \gamma^\nu - \sum_{i=1}^{m} \pi_i s_i^\nu = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} [\varphi_{ij}(\eta_{ij}^\nu) - \pi_i \eta_{ij}^\nu],$$

és az $(\eta_{11}^\nu, \dots, \eta_{m1}^\nu), \dots, (\eta_{1n}^\nu, \dots, \eta_{mn}^\nu)$ komponenscsoportok lehetséges értékrendszerei függetlenek, ezért

$$\min_\nu \Delta^\nu = \sum_{j=1}^{n} \min_\nu \left(\sum_{i=1}^{m} [\varphi_{ij}(\eta_{ij}^\nu) - \pi_i \eta_{ij}^\nu] \right),$$

vagyis elegendő

$$\delta_j^\nu = \sum_{i=1}^{m} [\varphi_{ij}(\eta_{ij}^\nu) - \pi_i \eta_{ij}^\nu] \tag{3.2}$$

minimalizálása, $j=1, \ldots, n$.

Vizsgáljuk először rögzített j-re a δ_j^ν mennyiségeket. Képezzük (rögzített j-re) a $\varphi_{ij}(x)$ függvény első differenciáit a $k=1, 2, \ldots D_j$ helyeken:

$$\Delta\varphi_{ij}(k) = \varphi_{ij}(k) - \varphi_{ij}(k-1).$$

Ekkor

$$\varphi_{ij}(\eta_{ij}^\nu) = \sum_{k=1}^{\eta_{ij}^\nu} \Delta\varphi_{ij}(k) + \varphi_{ij}(0),$$

tehát

$$\delta_j^\nu = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{\eta_{ij}^\nu} \Delta\varphi_{ij}(k) - \pi_i \right) + \sum_{i=1}^{m} \varphi_{ij}(0). \tag{3.3}$$

A (3.3) alatt szereplő kifejezésben $\sum_{i=1}^{m} \varphi_{ij}(0)$ konstans, a kettős összeg pedig $\sum_{i=1}^{m} \eta_{ij}^\nu = D_j$ számú tagból áll, így a δ_j^ν minimumát megvalósító D_j számú

$$\Delta\varphi_{ij}(k) - \pi_i \tag{3.4}$$

tagot keressük.

Rendezzük az i index szerint csoportokba a (3.4) alatti különbségeket:

$$\begin{gathered}
\varphi_{1j}(1) - \varphi_{1j}(0) - \pi_1 \\
\varphi_{1j}(2) - \varphi_{1j}(1) - \pi_1 \\
\vdots \\
\varphi_{1j}(D_j) - \varphi_{1j}(D_j - 1) - \pi_1 \\
\varphi_{2j}(1) - \varphi_{2j}(0) - \pi_2 \\
\varphi_{2j}(2) - \varphi_{2j}(1) - \pi_2 \\
\vdots \\
\varphi_{2j}(D_j) - \varphi_{2j}(D_j - 1) - \pi_2 \\
\vdots \\
\varphi_{mj}(1) - \varphi_{mj}(0) - \pi_m \\
\varphi_{mj}(2) - \varphi_{mj}(1) - \pi_m \\
\vdots \\
\varphi_{mj}(D_j) - \varphi_{mj}(D_j - 1) - \pi_m .
\end{gathered}$$

Az egyes csoportokon belül növekvő sorrendben vannak az elemek, hiszen $\varphi_{ij}(x)$ konvexitása miatt $\Delta\varphi_{ij}(k)$ monoton növő k-ban. Így a D_j számú legkisebb minden csoportból felülről lefelé fog tartalmazni elemeket, tehát valóban

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{\eta_{ij}^{\nu}} (\Delta\varphi_{ij}(k)-\pi_i)$$

típusú összeg fog képződni. Ennek meghatározásához pedig nem szükséges valamennyi, azaz mD_j számú elem kiszámítása, elég D_j+m-1 elemet vizsgálni, ha a következőképpen járunk el.

Első lépésként minden csoportból kiszámítjuk a legelső, azaz legkisebb elem értékét. Ezután mindig abból a csoportból veszünk hozzá újat, amelyikben található a legutolsó lépésben kiválasztott legkisebb. Végül egy (a legkisebb) kivételével elhagyjuk minden csoportból az utolsóként választott elemet.

Mindezek végrehajtása után a (3.3) alatti δ_j^{ν} minimuma, abból pedig a (3.1) alatti Δ^{ν} minimuma egyszerűen meghatározható.

Az algoritmus egyes lépései tehát a következők:

a) Induló lépés: Meghatározzuk a kezdeti θ_{lij}, t_{ij} és β^i értékeket:

$$\theta_{lij} = \begin{cases} D_j, & \text{ha } i = l \\ 0, & \text{ha } i \neq l \end{cases} \quad i = 1, \dots, m, \quad l = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$t_{ij} = \begin{cases} \dfrac{1}{T}, & \text{ha } i = j \\ 0, & \text{ha } i \neq j \end{cases} \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$\beta^i = \frac{S_i}{T}; \quad i = 1, \dots, m.$$

b) Rekurziós lépés: Ha

$$\min_{\nu} \Delta^{\nu} = \gamma^{\nu_0} - \sum_{i=1}^{m} \pi_i s_i^{\nu_0} \geqq 0,$$

folytassuk az eljárást az *f)* pontnál, egyébként a *c)* pontnál.

c) Kiszámítjuk a

$$z_i = \sum_{k=1}^{m} s_k^{\nu_0} t_{ik} = \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} \eta_{kj}^{\nu_0} \right) t_{ik}$$

mennyiségeket. Ezek között van pozitív, mert a redukált feladat korlátos.

d) A bázist elhagyó vektor indexét megkapjuk, ha meghatározzuk a

$$\min \left\{ \frac{\beta^i}{z_i}, \, z_i > 0 \right\} = \frac{\beta^r}{z_r}$$

értéket. Ekkor az r-edik bázisvektor helyébe lép az s^{ν_0} vektor.

e) Elkészítjük az új θ_{lij}, t_{ij}, β^i értékek táblázatát $i=1, \dots, m$, $j=1, \dots, n$, $l=1, \dots, m$.

A θ_{lij} táblázatban az $l=r$-hez tartozó értékek változnak csak: θ_{rij} helyébe $\eta_{ij}^{\nu_0}$ kerül, $i=1, \dots, m$, $j=1, \dots, n$.

A t_{ij} mátrix és a β^i vektor pedig balról szorzódik az

$$\begin{bmatrix} 1 & & & -\frac{z_1}{z_r} & & & \\ & 1 & & -\frac{z_2}{z_r} & & & \\ & & \ddots & \vdots & & & \\ & & & \frac{1}{z_r} & & & \\ & & & \vdots & \ddots & & \\ & & & -\frac{z_{m-1}}{z_r} & & 1 & \\ & & & -\frac{z_m}{z_r} & & & 1 \end{bmatrix}$$

mátrixszal. Ezután az algoritmus a *b)* pontnál folytatódik, az új táblázatokkal.

f) Megkaptuk a (2.6)—(2.8) redukált feladat optimális megoldását. Ennek segítségével az (1.1)—(1.4) eredeti feladat optimális megoldásának komponensei:

$$x_{ij} = \sum_{l=1}^{m} \beta^l \theta_{lij}, \quad i = 1, \ldots, m, \quad j = 1, \ldots, n.$$

IRODALOM

[1] LASDON, L. S., *Optimization Theory for Large Systems* (The MacMillen Company, New York, 1970).

[2] WILLIAMS, A. C., "A treatment of transportation problems by decomposition", *Journal Soc. Indust. Appl. Math.* **10** (1962) 35—47.

(Beérkezett: 1974. április 3.)

TURCHÁNYI PIROSKA
MTA SZÁMÍTÁSTECHNIKAI ÉS AUTOMATIZÁLÁSI KUTATÓ INTÉZET
1250 BUDAPEST I,. ÚRI U. 49.

DECOMPOSITION PRINCIPLE APPLIED TO THE SOLUTION OF A GENERALIZED TRANSPORTATION PROBLEM

P. TURCHÁNYI

The decomposition principle of DANTZIG and WOLFE [1] is applied to the solution of a generalization of the *Hitchcock transportation problem*, in which the shipment costs are piecewise linear convex functions and only the demands D_j are positive integers, the supplies S_i are arbitrary (positive) real numbers. Thus the algorithm for the solution described in this paper ignores the integer solution property. A major point of interest of the algorithm is that a partiucular asymmetry is introduced between the rows and columns of the cost matrix. As a result in the calculation the cost matrix need be scanned only by columns. In terms of automatic computation this means that no particular problems arise when the cost matrix is too large for the internal memory.

Alkalmazott Matematikai Lapok 1 (1975) 91—100

NÉHÁNY KVADRATIKUSAN KONVERGENS FELTÉTEL NÉLKÜLI FÜGGVÉNYMINIMALIZÁLÓ MÓDSZER

ABAFFY JÓZSEF

Budapest

A cikk egy egységes iterációs sémát ismertet, amelyből a *Fletcher—Powell*, a *Broyden*, a *Pearson 2* és a *Pearson 3 módszerek* levezethetők. Leírásra kerül egy új *kvazi-Newton módszer*, valamint egy, a leírt módszerekre alkalmazható gyorsítási lehetőség is.

1. Bevezetés

Az utóbbi időben egyre gyakrabban merül fel egy $f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x}\in R^n$ függvény minimalizálásának problémája korlátozó feltételekkel vagy azok nélkül. Célunk ismertetni néhány feltétel nélküli minimalizálásra szolgáló kvadratikusan konvergens módszert.

A 4. és az 5. pontokban közlünk egy új módszert, valamint egy, az ismertetett módszerekre alkalmazható gyorsítási lehetőséget. Mindenek előtt szükségünk van egy definícióra.

1.1. Definíció. Azt mondjuk, hogy egy függvényminimalizáló séma kvadratikusan konvergens, ha egy n-változós, minimummal rendelkező kvadratikus alak minimumát legfeljebb n lépésben megadja.

Mielőtt stabilitási definíciót adnánk, megfogalmazunk egy általános iterációs sémát, amelyből a cikkben ismertetendő módszerek az új eljárás kivételével levezethetők. Vezessük be a következő jelöléseket:

Legyen a minimalizálandó $f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x}\in R^n$ függvény $\mathbf{x}_i\in R^n$ helyen felvett értéke f_i.

Legyen $\mathbf{g}_i=\operatorname{grad} f(\mathbf{x}_i)$ és $\mathbf{H}_i$ egy $n\times n$-es mátrix. Ezek után definiáljuk a következő általános iterációs sémát:

$$\mathbf{p}_i=-\mathbf{H}_i\mathbf{g}_i,\quad i=1,2,\ldots, \tag{1.1}$$

$$\mathbf{x}_{i+1}=\mathbf{x}_i+\alpha_i\mathbf{p}_i,\quad i=1,2,\ldots, \tag{1.2}$$

$$\mathbf{y}_i=\mathbf{g}_{i+1}-\mathbf{g}_i,\quad i=1,2,\ldots, \tag{1.3}$$

(1.4)
$$\mathbf{H}_{i+1}=\mathbf{H}_i+\gamma_i\mathbf{H}_i\mathbf{y}_i\mathbf{y}_i^T\mathbf{H}_i^T+\alpha_i\beta_i\mathbf{p}_i\mathbf{p}_i^T+\alpha_i\delta_{i_1}\mathbf{H}_i\mathbf{y}_i\mathbf{p}_i^T+\alpha_i\delta_{i_2}\mathbf{p}_i\mathbf{y}_i^T\mathbf{H}_i^T,\quad i=1,2,\ldots,$$

ahol T a transzponálás jele, $\alpha_i\geqq 0$, β_i, γ_i, δ_i pedig tetszőleges valós számok.

Megjegyezzük, hogy (1.4) még egyéb feltételek mellett az

$$\mathbf{H}_{i+1}\mathbf{y}_i=\alpha_i\mathbf{p}_i,\quad i=1,2,\ldots \tag{1.5}$$

definícióból jön ki.

1.2. Definició. Azt mondjuk, hogy az (1.1)—(1.4) egyenlőségekkel definiált iterációs séma stabil, ha

a) $\mathbf{H}_i$ pozitív definit mátrix, $i=1, 2, \ldots$

b) Teljesül az

$$\beta_i \mathbf{p}_i^T \mathbf{y}_i > 0, \quad \gamma_{i_1} > 0, \quad \delta_{i_1} \mathbf{p}_i^T \mathbf{y}_i > 0, \quad \delta_{i_2} > 0, \tag{1.6}$$

ha

$$\beta_i \neq 0, \quad \gamma_{i_1} \neq 0, \quad \delta_{i_1} \neq 0, \quad \delta_{i_2} \neq 0$$

feltétel.

A definíció mélyebb értelmére nem térünk ki, de megjegyezzük, hogy lényegében azonos azzal, amit Broyden [1] 1967-ben adott. Az (1.1)—(1.4) sémára a következő tételt lehet kimondani.

1.1. Tétel. Ha $\mathbf{H}_1$ pozitív definit mátrix, $\beta_i > 0$, vagy $\gamma_{i_1} > 0$ és $\alpha_i \delta_{i_1} \delta_{i_2} = \beta_i \gamma_{i_1}$, $i=1, 2, \ldots$, ahol

$$\gamma_{i_1} = \gamma_i + \frac{1}{\mathbf{y}_i^T \mathbf{H}_i \mathbf{y}_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{1.7}$$

akkor $\mathbf{H}_i$ pozitív definit mátrix marad minden $i=2, 3, \ldots$ esetén.

Bizonyítás (teljes indukcióval). $\mathbf{H}_1$ a tétel feltétele értelmében pozitív definit. Be kell látnunk, hogy ha $\mathbf{H}_k$ pozitív definit mátrix, akkor $\mathbf{H}_{k+1}$ is az, azaz $\mathbf{x}^T \mathbf{H}_{k+1} \mathbf{x} > 0$ bármely $\mathbf{x} \in R^n$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ vektorra. Az (1.4) összefüggés alapján:

$$\mathbf{x}^T \mathbf{H}_{k+1} \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \mathbf{H}_k \mathbf{x} + \gamma_k \mathbf{x}^T \mathbf{H}_k \mathbf{y}_k \mathbf{y}_k^T \mathbf{H}_k^T \mathbf{x} + \alpha_k \beta_k \mathbf{x}^T \mathbf{p}_k \mathbf{p}_k^T \mathbf{x} + \tag{1.8}$$
$$+ \alpha_k \delta_{k_1} \mathbf{x}^T \mathbf{H}_k \mathbf{y}_k \mathbf{p}_k^T \mathbf{x} + \alpha_k \delta_{k_2} \mathbf{x}^T \mathbf{p}_k \mathbf{y}_k^T \mathbf{H}_k^T \mathbf{x}.$$

Mivel $\mathbf{H}_k$ pozitív definit mátrix, létezik olyan $\mathbf{D}$ mátrix, hogy $\mathbf{H}_k = \mathbf{D}^T \mathbf{D}$.

Bevezetve a következő jelöléseket

$$\mathbf{s} = \mathbf{D}\mathbf{x},$$
$$\mathbf{u} = \mathbf{D}\mathbf{g}_i,$$
$$\mathbf{v} = \mathbf{D}\mathbf{y}_i,$$

és az (1.1), (1.7) és (1.8) összefüggéseket felhasználva azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{x}^T \mathbf{H}_{k+1} \mathbf{x} = \frac{(\mathbf{s}, \mathbf{s})(\mathbf{v}, \mathbf{v}) - (\mathbf{s}, \mathbf{v})^2}{(\mathbf{v}, \mathbf{v})} + \alpha_k \beta_k (\mathbf{s}, \mathbf{u})^2 + \gamma_{i_1} (\mathbf{s}, \mathbf{v})^2 - \tag{1.9}$$
$$- \alpha_k \delta_{k_1} (\mathbf{s}, \mathbf{v})(\mathbf{u}, \mathbf{s}) - \alpha_k \delta_{k_2} (\mathbf{s}, \mathbf{v})(\mathbf{u}, \mathbf{s}),$$

ahol $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ az $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ vektorok skaláris szorzata.

Az (1.9) első tagja a *Schwarz-egyenlőtlenség* szerint pozitív, kivéve, ha $\mathbf{s} = \mathbf{v}$, a többi tag azonban ekkor is nagyobb mint nulla, amennyiben a tétel feltételei teljesülnek, ugyanis azokat teljes négyzetté alakítva azt kapjuk, hogy

$$\alpha_k \delta_{k_1} \delta_{k_2} = \beta_k \gamma_{k_1}, \tag{1.10}$$

vagy $\gamma_{k_1} > 0$ minden $k, k_1, k_2 = 1, 2, \ldots$ értékre.

1. MEGJEGYZÉS. Amennyiben $\gamma_{i_1}>0$ helyett csak a $\gamma_i>0$ egyenlőtlenséget követeljük meg, és az (1.7) összefüggéstől eltekintünk, akkor az

$$\alpha_i \, \delta_{i_1} \, \delta_{i_2} = \beta_i \, \gamma_i, \quad i = 1, 2, \ldots$$

összefüggést kapjuk.

2. MEGJEGYZÉS. Ha $\delta_{i_1}=\delta_{i_2}$, akkor $\mathbf{H}_i$ szimmetrikus mátrix is minden $i=2,3,4,\ldots$ esetén, feltéve, hogy $\mathbf{H}_1$-et szimmetrikusnak vettük fel.

2. Szimmetrikus, kvadratikusan konvergens módszerek

Ebben a szakaszban két ismert módszert tárgyalunk.

a) *Fletcher—Powell—Davidon módszere* [2]

Legyen $\mathbf{H}_1$ szimmetrikus pozitív definit mátrix, legyen (1.4)-ben

$$\gamma_i = -\frac{1}{\mathbf{y}_i^T \mathbf{H}_i \mathbf{y}_i}, \quad (\gamma_{i_1} = 0), \quad \beta_i = \frac{\alpha_i}{\alpha_i \mathbf{p}_i^T \mathbf{y}_i}, \quad \delta_{i_1} = \delta_{i_2} = 0,$$

α_i-t pedig definiálja az

$$f(\mathbf{x}_{i+1}) = \min_{\alpha_i \geqq 0} f(\mathbf{x}_i + \alpha_i \mathbf{p}_i) \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{2.1}$$

egyenlet.

Ekkor az 1.1 tételt követő 2. megjegyzés szerint $\mathbf{H}_i=\mathbf{H}_i^T$ is teljesül és (1.4)-ből a *Fletcher—Powell—Davidon-módszer* adódik:

$$\mathbf{H}_{i+1} = \mathbf{H}_i - \frac{\mathbf{H}_i \mathbf{y}_i \cdot \mathbf{y}_i^T \mathbf{H}_i}{\mathbf{y}_i^T \mathbf{H}_i \mathbf{y}_i} + \frac{\alpha_i \mathbf{p}_i \alpha_i \mathbf{p}_i^T}{\alpha_i \mathbf{p}_i^T \mathbf{y}_i}, \quad i = 1, 2, \ldots. \tag{2.2}$$

2.1. TÉTEL. A *Fletcher—Powell—Davidon-módszer* stabil.

Bizonyítás. Az 1.1 tétel feltételei teljesülnek, ha belátjuk még, hogy

$$\beta_i = \frac{\alpha_i}{\alpha_i \mathbf{p}_i^T \mathbf{y}_i} > 0.$$

Ez azonban igaz, mert $\alpha_i>0$ ($\alpha_i=0$ esetén, már elértük a minimumot) és

$$\alpha_i \mathbf{p}_i^T \mathbf{y}_i = \alpha_i \mathbf{p}_i^T \mathbf{g}_{i+1} - \alpha_i \mathbf{p}_i^T \mathbf{g}_i = \alpha_i \mathbf{g}_i^T \mathbf{H}_i \mathbf{g}_i > 0, \tag{2.3}$$

hiszen $\alpha_i \mathbf{p}_i \mathbf{H}_i \mathbf{g}_{i+1}=0$, mert a $\mathbf{p}_i$ irány mentén elmentünk a minimumig, és $\alpha_i \mathbf{g}_i^T \mathbf{H}_i \mathbf{g}_i>0$ a $\mathbf{H}_i$ mátrix pozitív definitsége miatt.

Az 1.1 tétel feltételei tehát teljesülnek, hiszen az (1.10) összefüggés igaz, a stabilitás másik követelménye viszont triviálisan igaz, hiszen $\gamma_{i_1}=\delta_{i_1}=\delta_{i_2}=0$, az első tagra pedig $\beta_i \mathbf{p}_i^T \mathbf{y}_i=\dfrac{\alpha_i \mathbf{p}_i^T \mathbf{y}_i}{\alpha_i \mathbf{p}_i^T \mathbf{y}_i}=1>0$, minden $i=1, 2, \ldots$ értékre.

Megemlítjük, hogy ahhoz, hogy az eljárás stabil maradjon, (2.1) helyett elég lenne csupán az, hogy

$$\mathbf{g}_i^T \mathbf{H}_i \mathbf{g}_i > |\mathbf{p}_i^T \mathbf{g}_{i+1}|$$

teljesüljön. Ez a megjegyzés megmagyarázza azt a tényt, hogy a gyakorlatban az $f(\mathbf{x}_i+\alpha_i\mathbf{p}_i)$ vonalmenti minimalizálás esetén α_i-t elegendő csupán egy előre megadott pontosságig meghatároznunk (ha ez elég kicsi) és a módszer mégis stabil marad. Miután α_i pontossága lépésenként változik, nehéz egy „jó" ε-t megadni, hogy a módszer gyors is és stabil is legyen.

A *Fletcher—Powell—Davidon-módszer* kvadratikusan konvergens. Bizonyításától most eltekintünk, mert az hasonló a cikkben leírandó új módszer kvadratikus konvergenciájának bizonyításához.

b) *Broyden 1967-ben közölt módszere* [1]

Legyen $\mathbf{H}_1$ pozitív definit szimmetrikus mátrix és legyenek az (1.4) összefüggésben

$$\gamma_{i_1} = \frac{1}{(\mathbf{H}_i\mathbf{y}_i-\alpha_i\mathbf{p}_i)^T\mathbf{y}_i}, \quad \beta_i = \frac{\alpha_i}{(\mathbf{H}_i\mathbf{y}_i-\alpha_i\mathbf{p}_i)^T\mathbf{y}_i}, \quad \delta_{i_1} = \delta_{i_2} = -\frac{1}{(\mathbf{H}_i\mathbf{y}_i-\alpha_i\mathbf{p}_i)^T\mathbf{y}_i}$$

és $\alpha_i>0$-t később fogjuk meghatározni.

Az 1.1 tétel után tett 2. megjegyzés miatt $\mathbf{H}_i$ szimmetrikus minden $i=2, 3, 4, \ldots$ esetén, (1.4) helyébe tehát a következő lép

$$\mathbf{H}_{i+1} = \mathbf{H}_i + \frac{\mathbf{H}_i\mathbf{y}_i\cdot\mathbf{y}_i^T\mathbf{H}_i+\alpha_i\mathbf{p}_i\alpha_i\mathbf{p}_i^T}{\mathbf{y}_i^T\mathbf{H}_i\mathbf{y}_i-\alpha_i\mathbf{p}_i^T\mathbf{y}_i} - \tag{2.4}$$
$$-\frac{\alpha_i}{\mathbf{y}_i^T\mathbf{H}_i\mathbf{y}_i-\alpha_i\mathbf{p}_i^T\mathbf{y}_i}[\mathbf{H}_i\mathbf{y}_i\mathbf{p}_i^T+\mathbf{p}_i\mathbf{y}_i^T\mathbf{H}_i].$$

2.2. TÉTEL. A *Broyden-módszer* stabil, ha

$$\mathbf{y}_i^T\mathbf{H}_i\mathbf{y}_i > \alpha_i\mathbf{p}_i^T\mathbf{y}_i, \quad i = 1, 2, \ldots$$

Bizonyítás. Az 1.1 tétel feltételei teljesülnek, amennyiben

$$\mathbf{y}_i^T\mathbf{H}_i\mathbf{y}_i > \alpha_i\mathbf{p}_i^T\mathbf{y}_i.$$

A stabilitás b) követelménye pedig $\mathbf{H}_i$ pozitív definitségéből és a (2.3) alatti megjegyzésből következik, felhasználva azt, hogy el kell mennünk a minimumig.

2.3. TÉTEL. A fenti módszer, amelyet az (1.1), (1.2), (1.3) és (2.4) összefüggések definiálnak, kvadratikusan konvergens, ha a vonal menti minimalizálás során elmegyünk a minimumig.

Bizonyítás (teljes indukcióval). Tegyük fel, hogy

$$(\mathbf{y}_i^T\mathbf{H}_i-\alpha_i\mathbf{p}_i^T)\mathbf{y}_j = 0, \quad 1 \leqq j < i \leqq r \tag{2.5}$$

$$\mathbf{H}_i\mathbf{A}\alpha_j\mathbf{p}_j = \alpha_j\mathbf{p}_j, \quad 1 \leqq j < i \leqq r, \tag{2.6}$$

ahol $\mathbf{A}$ a kvadratikus alak *Hesse-mátrixa.*

Az indukció első lépéseként $r=2$-re belátjuk, hogy (2.5) és (2.6) igaz.

$\mathbf{H}_2\mathbf{A}\alpha_1\mathbf{p}_1 = \mathbf{H}_2\mathbf{y}_1$, mert $\mathbf{y}_1 = \mathbf{g}_2-\mathbf{g}_1 = \mathbf{A}(\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_1) = \mathbf{A}\alpha_1\mathbf{p}_1$, és $\mathbf{H}_2\mathbf{y}_1 = \alpha_1\mathbf{p}_1$, az (1.5) összefüggés szerint.

Ebből viszont (2.5) már következik, ugyanis

$$(\mathbf{y}_2^T\mathbf{H}_2-\alpha_2\mathbf{p}_2^T)\mathbf{y}_1=(\alpha_2\mathbf{p}_2^T\mathbf{A}\mathbf{H}_2-\alpha_2\mathbf{p}_2^T)\mathbf{y}_1=\alpha_2\cdot\mathbf{p}_2^T(\mathbf{A}\mathbf{H}_2\mathbf{y}_1-\mathbf{y}_1)=$$
$$=\alpha_2\mathbf{p}_2\mathbf{A}(\mathbf{H}_2\mathbf{y}_1-\alpha_1\mathbf{p}_1)=0.$$

Belátjuk most, hogy (2.5) és (2.6) igaz $i=r+1$-re is:

$$(\mathbf{y}_{r+1}^T\mathbf{H}_{r+1}-\alpha_{r+1}\mathbf{p}_{r+1}^T)\mathbf{y}_j=\mathbf{y}_{r+1}^T\mathbf{H}_{r+1}\mathbf{A}\alpha_j\mathbf{p}_j-\alpha_{r+1}\mathbf{p}_{r+1}^T\mathbf{A}\alpha_j\mathbf{p}_j=$$
$$=\mathbf{y}_{r+1}^T\mathbf{H}_r\mathbf{A}\alpha_j\mathbf{p}_j-\alpha_{r+1}\mathbf{p}_{r+1}^T\mathbf{A}\alpha_j\mathbf{p}_j=\mathbf{y}_{r+1}^T\alpha_j\mathbf{p}_j-\mathbf{y}_{r+1}^T\alpha_j\mathbf{p}_j=0,$$

ahol a második egyenlőség a (2.4) összefüggés és az indukciós feltétel miatt teljesül.

Ezt és a (2.4) összefüggést felhasználva pedig:

$$\mathbf{H}_{r+1}\mathbf{A}\alpha_j\mathbf{p}_j=\mathbf{H}_r\mathbf{A}\alpha_j\mathbf{p}_j+\frac{\mathbf{H}_r\mathbf{y}_r\mathbf{y}_r^T\mathbf{H}_r\mathbf{A}\alpha_j\mathbf{p}_j+\alpha_r\mathbf{p}_r\alpha_r\mathbf{p}_r^T\mathbf{A}\alpha_j\mathbf{p}_j}{\mathbf{y}_r^T\mathbf{H}_r\mathbf{y}_r-\alpha_r\mathbf{p}_r^T\mathbf{y}_r}-$$
$$-\frac{\alpha_r\mathbf{H}_r\mathbf{y}_r\mathbf{p}_r^T\mathbf{A}\alpha_j\mathbf{p}_j+\alpha_r\mathbf{p}_r\mathbf{y}_r^T\mathbf{H}_r\mathbf{A}\alpha_j\mathbf{p}_j}{\mathbf{y}_r^T\mathbf{H}_r\mathbf{y}_r-\alpha_r\mathbf{p}_r^T\mathbf{y}_r}=$$
$$=\mathbf{H}_r\mathbf{A}\alpha_j\mathbf{p}_j+\frac{\alpha_r\mathbf{H}_r\mathbf{y}_r\mathbf{p}_r^T\mathbf{A}\alpha_j\mathbf{p}_j+\alpha_r\mathbf{p}_r\alpha_r\mathbf{p}_r^T\mathbf{A}\alpha_j\mathbf{p}_j}{\mathbf{y}_r^T\mathbf{H}_r\mathbf{y}_r-\alpha_r\mathbf{p}_r^T\mathbf{y}_r}-$$
$$-\frac{\alpha_r\mathbf{H}_r\mathbf{y}_r\mathbf{p}_r^T\mathbf{A}\alpha_j\mathbf{p}_j+\alpha_r\mathbf{p}_r\alpha_r+\mathbf{p}_r^T\mathbf{A}\alpha_j\mathbf{p}_j}{\mathbf{y}_r^T\mathbf{H}_r\mathbf{y}_r-\alpha_r\mathbf{p}_r^T\mathbf{y}_r}=\alpha_j\mathbf{p}_j,\quad 1\leqq j<i\leqq r+1.$$

Ebből már adódik a kvadratikus konvergencia, ha az $\mathbf{y}_i$, $i=1,2,\dots,n$ vektorok és a $\mathbf{p}_i$, $i=1,2,\dots,n$ vektorok lineárisan függetlenek.

A következőkben ezt mutatjuk meg.

Elég csak a $\mathbf{p}_i$, $i=1,2,\dots,n$ vektorok lineáris függetlenségét bizonyítani, ugyanis

$$\mathbf{y}_i=\mathbf{A}\alpha_i\mathbf{p}_i\quad i=1,2,\dots,n \tag{2.7}$$

és minthogy $\mathbf{A}$ pozitív definit mátrix, következik az $\mathbf{y}_i$ vektorok lineáris függetlensége $\mathbf{p}_i$, $i=1,2,\dots,n$ lineáris függetlenségéből. Amennyiben α_i valamelyik lépésben nullává válna, az az iteráció n lépés előtti befejezést jelentené, hiszen (1.2) miatt $\mathbf{x}_{i+1}$ egybeesne $\mathbf{x}_i$-vel.

A $\mathbf{p}_i$ $i=1,2,\dots,n$ vektor halmaz lineáris függetlenségét indukcióval bizonyítjuk. Belátjuk, hogy a $\mathbf{p}_i$, $i=1,2,\dots,n$ vektorok $\mathbf{A}$-konjugált rendszert alkotnak.

Az indukció első lépéseként be kell látni, hogy $\mathbf{p}_2^T\mathbf{A}\mathbf{p}_1=0$. (1.1) és (1.5) miatt

$$\mathbf{p}_2^T\mathbf{A}\mathbf{p}_1=-\mathbf{g}_2^T\mathbf{H}_2\mathbf{A}\mathbf{p}_1=-\mathbf{g}_2^T\mathbf{H}_2\frac{\mathbf{y}_1}{\alpha_1}=-\mathbf{g}_2^T\mathbf{p}_1. \tag{2.8}$$

(2.8) pedig egyenlő nullával, ha a $\mathbf{p}_i$ irány mentén elmentünk a minimumig, azaz

$$\mathbf{p}_2^T\mathbf{A}\mathbf{p}_1=0.$$

Most feltesszük azt, hogy $\mathbf{p}_j^T\mathbf{A}\mathbf{p}_k=0$, $i\geqq j>k$ esetén és belátjuk, hogy

$$\mathbf{p}_{i+1}^T\mathbf{A}\mathbf{p}_j=0,\quad i\geqq j \tag{2.9}$$

is teljesül.

(2.9)-et két részben igazoljuk. Először belátjuk $\mathbf{p}_{i+1}^T\mathbf{A}\mathbf{p}_i=0$. (1.5)-ből következik, hogy

$$\mathbf{H}_{i+1}\mathbf{g}_{i+1} = \mathbf{H}_{i+1}\mathbf{g}_i + \alpha_i\mathbf{p}_i. \tag{2.10}$$

Innen kapjuk, hogy

$$\mathbf{p}_{i+1}^T\mathbf{A}\mathbf{p}_i = -\mathbf{g}_{i+1}^T\mathbf{H}_{i+1}\mathbf{A}\mathbf{p}_i = -\mathbf{g}_i^T\mathbf{H}_{i+1}\frac{\mathbf{y}_i}{\alpha_i} - \alpha_i\mathbf{p}_i^T\frac{\mathbf{y}_i}{\alpha_i}, \tag{2.11}$$

ahol felhasználtuk a (2.7) észrevételt is.

Minthogy (1.5) a *Broyden-módszerre* teljesül, (2.11)-ből kapjuk, hogy

$$-\mathbf{g}_i^T\mathbf{H}_{i+1}\frac{\mathbf{y}_i}{\alpha_i} - \alpha_i\mathbf{p}_i^T\frac{\mathbf{y}_i}{\alpha_i} = -\mathbf{g}_i^T\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_i^T\mathbf{g}_{i+1} + \mathbf{p}_i^T\mathbf{g}_i = -\mathbf{p}_i^T\mathbf{g}_{i+1} = 0,$$

ha a $\mathbf{p}_i$ irány mentén elmegyünk a minimumig.

Belátjuk még, hogy $\mathbf{p}_{i+1}^T\mathbf{A}\mathbf{p}_j=0$, $i>j$ esetén.

Újból a (2.10) észrevételt használva kapjuk, hogy

$$\mathbf{p}_{i+1}^T\mathbf{A}\mathbf{p}_j = -\mathbf{g}_i^T\mathbf{H}_{i+1}\frac{\mathbf{y}_j}{\alpha_j} - \alpha_i\mathbf{p}_i^T\mathbf{A}\mathbf{p}_j. \tag{2.12}$$

A (2.12) kifejezés jobb oldalának 2. tagja az indukciós feltevés miatt nulla. $\mathbf{H}_{i+1}$ helyébe (2.4) jobb oldalát beírva és felhasználva a már bebizonyított (2.6) feltételt a következőt kapjuk:

$$-\mathbf{g}_i^T\mathbf{H}_{i+1}\frac{\mathbf{y}_j}{\alpha_j} = -\mathbf{g}_i^T\mathbf{H}_i\frac{\mathbf{y}_j}{\alpha_j}.$$

(1.1) és (2.7) ismételt felhasználásával

$$-\mathbf{g}_i^T\mathbf{H}_i\frac{\mathbf{y}_j}{\alpha_j} = \mathbf{p}_i^T\mathbf{A}\mathbf{p}_j,$$

ami az indukciós feltevés miatt egyenlő nullával. Ezzel beláttuk, hogy a $\mathbf{p}_i$ vektorok lineárisan függetlenek.

Ezek szerint tehát $(\mathbf{y}_i^T\mathbf{H}_i - \alpha_i\mathbf{p}_i^T)\mathbf{y}_j = \alpha_i\mathbf{p}_i^T(\mathbf{A}\mathbf{H}_i - \mathbf{T})\mathbf{y}_j = 0$ és $i = (n+1)$-re

$$\mathbf{A}\mathbf{H}_{n+1} = \mathbf{T}.$$

3. Nem szimmetrikus, kvadratikusan konvergens módszerek

Az ötlet az első pillanatra nem látszik jónak, hiszen ha arra gondolunk, hogy egy kétszer folytonosan deriválható függvénynek a *Hesse-mátrixa* szimmetrikus, és a gyakorlatban előforduló függvények legtöbbjére ez áll, akkor nem látszik értelmesnek nem-szimmetrikus mátrixsorozattal megközelíteni a *Hesse-mátrix* inverzét. Az ötlet mégis elnyerte létjogosultságát, ami annak köszönhető, hogy I. D. PEARSONnak [3] 1969-ben sikerült egy jó *(Pearson 3.)* módszert találnia, másrészt talán annak a gondolatnak, hogy miután általában nem kvadratikus függvényeket minimalizálunk, talán egy nem szimmetrikus mátrixszal is jól le tudjuk írni a függvény helyi „egyenetlenségeit". A módszereket (1.4)-ből a következő módon kapjuk:

a) *A Pearson 2. módszer* [3]

Legyen (1.4)-ben

$$\beta_i = \frac{\alpha_i}{\alpha_i \mathbf{p}_i^T \mathbf{y}_i}, \quad \gamma_i = 0, \quad \delta_{i_1} = -\frac{1}{\alpha_i \mathbf{p}_i^T \mathbf{y}_i}, \quad \delta_{i_2} = 0,$$

α_i-re pedig $f(\mathbf{x}_{i+1}) = \min_{\alpha_i} f(\mathbf{x}_i + \alpha_i \mathbf{p}_i)$, akkor (1.4) helyett azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{H}_{i+1} = \mathbf{H}_i + \frac{\alpha_i \mathbf{p}_i \alpha_i \mathbf{p}_i^T}{\alpha_i \mathbf{p}_i^T \mathbf{y}_i} - \frac{\mathbf{H}_i \mathbf{y}_i \alpha_i \mathbf{p}_i^T}{\alpha_i \mathbf{p}_i^T \mathbf{y}_i}, \quad i = 1, 2, \ldots \tag{3.1}$$

Az 1.1 tétel értelmében

$$\alpha_i \frac{-1}{\alpha_i \mathbf{p}_i^T \mathbf{y}_i} 0 = \frac{\alpha_i}{\alpha_i \mathbf{p}_i^T \mathbf{y}_i} \frac{-1}{\mathbf{y}_i^T \mathbf{H}_i \mathbf{y}_i} \neq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{3.2}$$

azaz a stabilitás első feltételét nem tudjuk biztosítani.

b) A *Pearson 3. módszer* [3]

Legyen (1.4)-ben

$$\gamma_i = -\frac{1}{\mathbf{y}_i^T \mathbf{H}_i \mathbf{y}_i}, \quad \beta_i = 0, \quad \delta_{i_1} = 0, \quad \delta_{i_2} = \frac{1}{\mathbf{y}_i^T \mathbf{H}_i \mathbf{y}_i}, \quad i = 1, 2, \ldots,$$

α_i-re pedig $f(\mathbf{x}_{i+1}) = \min_{\alpha_i} f(\mathbf{x}_i + \alpha_i \mathbf{p}_i)$, akkor (1.4) helyett azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{H}_{i+1} = \mathbf{H}_i + \frac{\alpha_i \mathbf{p}_i \mathbf{y}_i^T \mathbf{H}_i^T}{\mathbf{y}_i^T \mathbf{H}_i \mathbf{y}_i} - \frac{\mathbf{H}_i \mathbf{y}_i \mathbf{y}_i^T \mathbf{H}_i^T}{\mathbf{y}_i^T \mathbf{H}_i \mathbf{y}_i}, \quad i = 1, 2, \ldots. \tag{3.3}$$

Az 1.1 tétel feltételei nyilvánvalóan nem teljesülnek. Mindkét módszernél az induló $\mathbf{H}_1$ mátrixot pozitív definit szimmetrikus mátrixnak kell felvenni. A kvadratikus konvergencia bizonyítására itt nem térünk ki.

4. Egy új nem szimmetrikus, kvadratikusan konvergens módszer

Legyen most $\mathbf{H}_1$ egységmátrix, és

$$\mathbf{p}_i = \mathbf{H}_i \mathbf{g}_i, \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{4.1}$$

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{g}_{i+1} - \mathbf{g}_i, \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{4.2}$$

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i + \alpha_i \mathbf{p}_i, \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{4.3}$$

$$f(\mathbf{x}_{i+1}) = \min_{\alpha_i} f(\mathbf{x}_i + \alpha_i \mathbf{p}_i), \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{4.4}$$

$$\mathbf{H}_{i+1}^T = \mathbf{H}_i^T + \frac{\mathbf{g}_i \alpha_i \mathbf{p}_i^T}{\mathbf{p}_i^T \mathbf{y}_i} - \frac{\mathbf{y}_i \mathbf{y}_i^T \mathbf{H}_i^T}{\mathbf{y}_i^T \mathbf{H}_i^T \mathbf{y}_i}, \quad i = 1, 2, \ldots. \tag{4.5}$$

4.1. TÉTEL. A (4.1)—(4.5) összefüggések által definiált módszer kvadratikusan konvergens.

Bizonyítás. Legyen a kvadratikus függvény $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{b}^T \mathbf{x} + c$, ahol $\mathbf{A}$ pozitív definit szimmetrikus mátrix, $\mathbf{b} \in R^n$ és c konstans.

Tegyük fel, hogy

(4.6) $$\alpha_i \mathbf{p}_i^T \mathbf{A} \alpha_j \mathbf{p}_j = 0, \quad 1 \leqq i < j < k,$$

(4.7) $$\mathbf{H}_k^T \mathbf{A} \alpha_j \mathbf{p}_j = \alpha_j \mathbf{p}_j, \quad i \leqq j < k.$$

Teljes indukcióval bizonyítunk. $k=2$-re belátjuk a (4.7) egyenlőséget:

$$\mathbf{H}_2^T \mathbf{A} \alpha_1 \mathbf{p}_1 = \mathbf{H}_2^T \mathbf{y}_1 = \mathbf{H}_1^T \mathbf{y}_1 + \frac{\alpha_1 \mathbf{g}_1 \mathbf{p}_1^T \mathbf{y}_1}{\mathbf{p}_1^T \mathbf{y}_1} - \frac{\mathbf{y}_1 \mathbf{y}_1^T \mathbf{H}_1^T \mathbf{y}_1}{\mathbf{y}_1^T \mathbf{H}_1^T \mathbf{y}_1} \alpha_1 \mathbf{g}_1 = \alpha_1 \mathbf{p}_1,$$

mivel $\mathbf{H}_1$ egységmátrix.

A (4.6) egyenlőséget $k=3$-ra kell csak belátni (ugyanis ekkor van csak első lépésnek értelme):

$$\alpha_1 \mathbf{p}_1^T \mathbf{A} \alpha_2 \mathbf{p}_2 = \alpha_1 \alpha_2 \mathbf{p}_1^T \mathbf{A} \mathbf{H}_2^T \mathbf{g}_2 = \alpha_2 \alpha_1 \mathbf{p}_r^T \mathbf{g}_2 = 0,$$

ha a (4.4) egyenlőség teljesül.

Ezekután belátjuk, hogy (4.6), (4.7)-ben k helyébe $k+1$-et írhatunk, amennyiben k-ra igazak az állítások. Azt kell tehát belátnunk, hogy (4.6) és (4.7) $j=k$-ra is teljesül.

Mivel $i+1<k$ esetén érvényes a

$$\mathbf{g}_k = \mathbf{g}_{i+1} + \mathbf{A}(\alpha_{i+1} \mathbf{p}_{i+1} + \dots + \alpha_{k-1} \mathbf{p}_{k-1})$$

egyenlőség, ezt balról megszorozva $\alpha_i \mathbf{p}_i^T$-vel és kihasználva az indukciós feltevést és a (4.4) egyenlőséget, azt kapjuk, hogy:

$$\alpha_i \mathbf{p}_i^T \mathbf{g}_k = \alpha_i \mathbf{p}_i^T \mathbf{g}_{i+1} + \alpha_i \mathbf{p}_i^T \mathbf{A}(\alpha_{i+1} \mathbf{p}_{i+1} + \dots + \alpha_{k-1} \mathbf{p}_{k-1}) = \alpha_i \mathbf{p}_i^T \mathbf{g}_{i+1} = 0.$$

Ebből és (4.7)-ből

$$0 = \alpha_i \mathbf{p}_i^T \mathbf{g}_k = \alpha_i \mathbf{p}_i^T \mathbf{A} \mathbf{H}_k \mathbf{g}_k = \alpha_i \mathbf{p}_i^T \mathbf{A} \mathbf{p}_k = \alpha_i \mathbf{p}_i^T \mathbf{A} \frac{\alpha_k \mathbf{p}_k}{\alpha_k} = 0.$$

A (4.7)-re pedig a következő igaz

$$\mathbf{H}_{k+1}^T \mathbf{A} \alpha_j \mathbf{p}_j = \mathbf{H}_k^T \mathbf{A} \alpha_j \mathbf{p}_j + \frac{\mathbf{g}_k \alpha_k \mathbf{p}_k^T \mathbf{A} \alpha_j \mathbf{p}_j}{\mathbf{p}_k^T \mathbf{y}_k} - \frac{\mathbf{y}_k \mathbf{y}_k^T \mathbf{H}_k^T \mathbf{A} \alpha_j \mathbf{p}_j}{\mathbf{y}_k^T \mathbf{H}_k^T \mathbf{y}_k} =$$

$$= \alpha_j \mathbf{p}_j - \frac{\mathbf{y}_k \mathbf{y}_k^T \alpha_j \mathbf{p}_j}{\mathbf{y}_k^T \mathbf{H}_k^T \mathbf{y}_k} = \alpha_j \mathbf{p}_j - \frac{\mathbf{y}_k \alpha_k \mathbf{p}_k^T \mathbf{A} \alpha_j \mathbf{p}_j}{\mathbf{y}_k^T \mathbf{H}_k^T \mathbf{y}_k} = \alpha_j \mathbf{p}_j, \quad 1 \leqq j \leqq k.$$

A $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n$ vektorok kifeszítik a teret, ezért

$$\mathbf{H}_{n+1}^T \mathbf{A} = \mathbf{I}.$$

Miután a módszer nem vezethető le (1.4)-ből, a stabilitási definíciót sem tudjuk alkalmazni és így stabilitást nem bizonyítunk.

5. A Kvázi—Newton-módszerek egy gyorsítási lehetősége

Tegyük fel, hogy a minimalizálandó kvadratikus alak *Hesse-mátrixa* diagonal mátrix.

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 0 & & \lambda_k & & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Ekkor a λ_i, $i=1, 2, \ldots, n$ számok a kvadratikus alak tengelyeinek reciprok négyzetét adják.

Legyen

$$\lambda_s = \max_{1 \leq i \leq n} \lambda_i,$$

és

$$\lambda_k = \min_{1 \leq i \leq n} \lambda_i.$$

Transzformáljuk a **D** mátrixot és az **x** vektort a következő **L** mátrixszal

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 0 & & \dfrac{\lambda_s}{\lambda_k} & & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix} \leftarrow k\text{-adik sor.}$$

Ekkor $\mathbf{D}'=\mathbf{L}\mathbf{D}\mathbf{L}^T$, $\mathbf{x}'=\mathbf{L}^{-1}\mathbf{x}$, világos, hogy ez azt jelenti, hogy a k-adik koordinátatengely mentén $\dfrac{\lambda_s}{\lambda_k}$ nagyságú nyújtást hajtottunk végre s ezzel a feladatot jól kondicionálttá tettük.

Általánosságban tegyük fel, hogy a $\mathbf{H}_i$ mátrixsorozat szigorúan diagonálisan domináns, azaz

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} |a_{ij}| \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Legyen

$$M = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|,$$

és

$$m = \min_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

Az **L** mátrix helyett most a következő $\mathbf{D}_1$ mátrixot definiálhatjuk

$$\mathbf{L}_1 = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & & \dfrac{M}{m} & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix} \leftarrow k\text{-adik sor.}$$

Elvégezve a $\mathbf{H}_i$ mátrixon és az **x** vektoron az **L** transzformációt, azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{H}_i' = \mathbf{L}\mathbf{H}_i\mathbf{L}^T,$$

$$\mathbf{x}' = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{x}.$$

Ezt a lehetőséget az eddig lényegében legjobbnak tartott *Fletcher—Powell—Davidon-módszeren* próbáltuk ki a CDC 3300-as gépen, a következő próbafüggvényeken:

$$f(\mathbf{x}) = 100(x^2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2 \quad (\textit{Rosenbrock-függvény}),$$

az induló pont $(-1.2, 1)$, $\varepsilon = 10^{-7}$;

$$f(\mathbf{x}) = (x_1 + 10x_2)^2 + 5(x_3 - x_4)^2 + (x_2 - 2x_3)^4 + 10(x_1 - x_4)^4 \quad (\textit{Powell-függvény}),$$

az induló pont $(3, -1, 0, 1)$, $\varepsilon = 10^{-7}$.

Az eredményt a következő táblázat mutatja

	függvényhívások száma	
	F—P	javított F—P
kétváltozós	169	63
négyváltozós	9956	3588

Hasonlóan jó eredmények mondhatók a felhasznált időre is, bár erre pontos méréseket nem végeztünk.

IRODALOM

[1] BROYDEN, C. G., "Quasi—Newton methods and their application to function minimization", *Math. of Computation* **21** (1971) 368—381.

[2] FLETCHER, R. and POWELL, M. J. D., "A rapidly convergent descent method for minimization", *Computer Journal* **6** (1963) 163—168.

[3] PEARSON, J. D., "Variable metric methods of minimization", *Computer Journal* **12** (1969) 171—178.

(Beérkezett: 1974. március 13.)

ABAFFY JÓZSEF
MTA SZÁMÍTÁSTECHNIKAI ÉS AUTOMATIZÁLÁSI KUTATÓ INTÉZET
1250 BUDAPEST I., ÚRI U. 49.

QUADRATIC CONVERGENT FUNCTION MINIMIZATION METHODS

J. ABAFFY

The paper discusses a unified iteration scheme from which the *Fletcher—Powell*, *Broyden*, *Pearson* 2 and *Pearson* 3 *methods*, see [4], can be deduced.

Both a new *quasi-Newton method* and an acceleration possibility for the above mentioned methods are also dealt with.

This acceleration method consists in making the eigenvalues of the *Hesse matrix* approximately equal to an appropriate transformation in a suitable (automatically defined) step of the iteration.

Alkalmazott Matematikai Lapok **1** *(1975) 101—108*

KVADRATIKUS MINIMÁLKÖLTSÉGŰ FOLYAMFELADATRÓL

KAS PÉTER

Budapest

A dolgozatban egy irányítatlan éleket tartalmazó hálózatban értelmezett, adott v értékű folyamok közül, kvadratikus célfüggvényt minimalizáló folyam megkeresésével foglalkozunk. A dolgozat négy részre tagozódik. Az első részben alapvető definíciókat és az általunk használt jelölést ismertetjük. A második részben feltesszük, hogy a folyamfüggvény értékei egészek és ekkor, az irodalomból már ismert, szükséges és elégséges feltételt ismertetünk egy folyam optimalitásának eldöntésére. A konstruktív bizonyításból egy megoldó algoritmus is kiolvasható. A harmadik részben valósértékű folyamfüggvények esetében is megfogalmazzuk az optimalitás szükséges és elegendő feltételét és rámutatunk a valós, illetve egész értékű optimális folyamfüggvények között fennálló kapcsolatra. A negyedik részben a hálózati folyamok elméletét és az ismertetett algoritmust használjuk fel a *Laplace* típusú differenciálegyenlet numerikus megoldására. Ez az utolsó rész HU [3] cikket használja fel.

1. Bevezetés

Tekintsünk egy irányítatlan élekből álló véges gráfot. A gráf csúcsainak (pontjainak) halmazát jelöljük $\mathcal{N}$-nel. A gráfban behúzott élek a gráf pontjaiból képezett rendezetlen pontpárok egy részhalmazát definiálják, jelöljük e halmazt $\mathcal{A}$-val. Legyen adva a gráf csúcsain értelmezett $\varrho(x)$, $x\in\mathcal{N}$ függvény, melyre teljesül a következő egyenlőség:

$$\varrho(\mathcal{N}) = \sum_{x\in\mathcal{N}} \varrho(x) = 0.$$

A gráf és a csúcsokon értelmezett $\varrho(x)$ függvény együttesét hálózatnak nevezzük és $[\mathcal{N},\mathcal{A}]_\varrho$-val jelöljük. Legyen $f(x, y)$ az $\mathcal{A}$ halmazon értelmezett két értékű függvény. Ezt a függvényt folyamfüggvénynek nevezzük, ha fennállnak az

$$(1.1)\qquad f(x, y) = -f(y, x) \quad (x, y)\in\mathcal{A}$$

$$(1.2)\qquad f(x, \mathcal{N}) = \sum_{(x,y)\in\mathcal{A}} f(x, y) = \varrho(x) \quad x\in\mathcal{N}$$

összefüggések. A $\varrho(x)$ függvény definíciója gyakran a következő:

$$\varrho(x) = \begin{cases} v, & \text{ha} \quad x = s, \\ -v, & \text{ha} \quad x = t, \\ 0, & \text{máskor}, \end{cases}$$

ahol s, t a hálózat két kitüntetett pontja az ún. forrás, illetve nyelőpont. Ekkor a folyamot s forrásból t nyelőbe irányulónak mondjuk. Ha a hálózatban (1.1), (1.2) feltételeket kielégítő folyam van értelmezve, akkor a

$$v = \sum_{\varrho(x)>0} \varrho(x) > 0$$

számot a folyam értékének hívjuk. A hálózat éleihez rendeljük a $c(x, y) \geqq 0$ költségeket. Legyen $c(x, y) = c(y, x)$, $(x, y) \in \mathscr{A}$ minden élre. Végezetül még egy gráfelméletben használatos definícióra lesz szükségünk: Egy gráfban körláncon $\{(x_1, x_2), (x_2, x_3), \ldots, (x_n, x_1)\}$ élek olyan sorozatát értjük, melyben $x_i \neq x_j$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$; $(x_i, x_{i+1}) \in \mathscr{A}$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$.

2. Éleken egész értékű folyamok

A dolgozatban a következő problémával foglalkozunk:

Adott $[\mathscr{N}, \mathscr{A}]_\varrho$ hálózatban keresendő, adott v értékű

$$\sum_{(x,y)\in\mathscr{A}} c(x, y) f^2(x, y) \tag{2.1}$$

célfüggvényt minimalizáló f folyam. Foglalkozzunk egyelőre egész f folyamokkal, azaz $f(x, y)$ legyen egész minden $(x, y) \in \mathscr{A}$ esetén.

2.1. Tétel. Annak szükséges és elégséges feltétele, hogy egy $[\mathscr{N}, \mathscr{A}]_\varrho$ hálózatban, egy v értékű éleken egész f folyam minimalizálja a (2.1) célfüggvényt az, hogy a

$$\left| \sum_{(x,y)\in\mathscr{L}} c(x, y) f(x, y) \right| \leqq \frac{\sum_{\mathscr{L}} c(x, y)}{2} \tag{2.2}$$

egyenlőtlenség a hálózat minden $\mathscr{L}$ körláncára teljesüljön (az összegzés $\mathscr{L}$ egy adott körüljárása mentén történik).

Bizonyítás. a) *Szükségesség:* Legyen f a (2.1) célfüggvényt minimalizáló folyam. Ekkor megmutatjuk, hogy az f folyamra fenn kell állnia (2.2)-nak. Tegyük fel, ugyanis indirekt módon, hogy létezik egy körlánc $\mathscr{L}$, hogy e mentén egyik irányban tekintett folyamok összegére:

$$\sum_{(x,y)\in\mathscr{L}} c(x, y) f(x, y) > \frac{\sum_{(x,y)\in\mathscr{L}} c(x, y)}{2} \tag{2.3}$$

lenne. Tekintsük akkor a következő g folyamot:

$$g(x, y) = \begin{cases} f(x, y) - 1, & \text{ha} \quad (x, y) \in \mathscr{L}, \\ f(x, y) + 1, & \text{ha} \quad (y, x) \in \mathscr{L}, \\ f(x, y), & \text{máskor.} \end{cases}$$

Ekkor felírva a két célfüggvény különbségét:

$$\sum_{\mathscr{A}} c(x,y)f^2(x,y) - \sum_{\mathscr{A}} c(x,y)g^2(x,y) =$$

$$= \sum_{\mathscr{L}} c(x,y)f^2(x,y) - \sum_{\mathscr{L}} c(x,y)\big(f(x,y)-1\big)^2 = 2\sum_{\mathscr{L}} c(x,y)f(x,y) - \sum_{\mathscr{L}} c(x,y) > 0.$$

A (2.3) indirekt feltétel miatt, így ellentmondásba jutottunk f minimalitásával.

b) *Elégségesség:* Legyen f olyan folyam az $[\mathscr{N},\mathscr{A}]_\varrho$ hálózatban, amelyik minden $\mathscr{L}$ körláncon teljesíti a (2.2) feltételt. Megmutatjuk, hogy f optimális. Tegyük fel ugyanis indirekt módon, hogy létezik $[\mathscr{N},\mathscr{A}]_\varrho$-ban $g \neq f$ minimális folyam. Ekkor van a hálózatnak legalább egy éle, melyen $g<f$. Ebből következik, hogy létezik a hálózatban egy $\mathscr{L}$ körlánc, hogy éleit egy körüljárás mentén tekintve $g<f$ végig az $\mathscr{L}$ körláncon. Írjuk fel a (2.2) feltételt a g folyamra ezen körlánc mentén $g<f$ irányban:

$$\sum_{\mathscr{L}} c(x,y)g(x,y) \leqq \sum_{\mathscr{L}} c(x,y)\big(f(x,y)-1\big) =$$

$$= \sum_{\mathscr{L}} c(x,y)f(x,y) - \sum_{\mathscr{L}} c(x,y) \leqq -\frac{\sum_{\mathscr{L}} c(x,y)}{2}.$$

Ha fenti egyenlőtlenség sorozatban valahol a szigorú egyenlőtlenség teljesül, akkor ellentmondásra jutottunk g optimalitásával, hiszen g folyamra is fenn kell állnia (2.2)-nek. Ha mindenütt egyenlőség teljesül az csak úgy lehet, ha:

$$g(x,y) = f(x,y)-1, \quad \text{ha} \quad (x,y)\in\mathscr{L}$$

és

$$\sum_{\mathscr{L}} c(x,y)f(x,y) = \frac{\sum_{\mathscr{L}} c(x,y)}{2}.$$

Tekintsük ekkor az f folyam következő $\hat{f}$ transzponáltját:

$$\hat{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y)-1, & \text{ha} \quad (x,y)\in\mathscr{L}, \\ f(x,y)+1, & \text{ha} \quad (y,x)\in\mathscr{L}, \\ f(x,y), & \text{máskor.} \end{cases}$$

Így a célfüggvény értékét nem változtattuk:

$$\sum_{\mathscr{A}} c(x,y)\hat{f}^2(x,y) - \sum_{\mathscr{A}} c(x,y)f^2(x,y) =$$

$$= \sum_{\mathscr{L}} c(x,y)\big(f(x,y)-1\big)^2 - \sum_{\mathscr{L}} c(x,y)f^2(x,y) = 2\sum_{\mathscr{L}} c(x,y)f(x,y) - \sum_{\mathscr{L}} c(x,y) = 0.$$

Azaz az f folyamot olyan $\hat{f}$ folyamba transzformáltuk, amelyik az $\mathscr{L}$ körlánc mentén megegyezik a g folyammal és a célfüggvény értéke nem változott. Folytatva az eljárást, újabb $g \neq \hat{f}$ élt keresve az élek számának végességéből következik, hogy az f folyamot az optimális g folyamba tudjuk transzformálni, azaz f optimális.

Megjegyzés. A 2.1 tétel bizonyítása konstruktív, algoritmust ad az optimális f folyam megkeresésére.

Algoritmus. A 2.1 tétel a módosított költségek bevezetésével a következőképpen fogalmazható át: Annak szükséges és elégséges feltétele, hogy egy $[\mathcal{N}, \mathcal{A}]_\varrho$ hálózatban egy v értékű f egész folyam minimalizálja a (2.1) célfüggvényt, az hogy tekintve a következő módosított költségeket:

$$\hat{c}_f(x, y) = c(x, y)\,(2f(x, y) - 1)$$

ne legyen a hálózatban negatív költségű körlánc. Az algoritmus tehát negatív köröket fog keresni a módosított költségek mellett. Ilyen negatív kör kereső algoritmus például a *Warshall*-féle (lásd [2] könyvben). Ha hálózatunkban a módosított élköltségek mellett nincs negatív kör, akkor optimumon vagyunk. Ha van, akkor e kör mentén a szükségesség bizonyításánál használt eljárással csökkentjük a célfüggvény értékét. Ha egy körlánc mentén javítható a folyam, akkor ott a legjobb javítást nyilván a

$$\left[\frac{\sum_{\mathcal{L}} c(x, y) f(x, y)}{\sum_{\mathcal{L}} c(x, y)}\right],$$

vagy a

$$\left[\frac{\sum_{\mathcal{L}} c(x, y) f(x, y)}{\sum_{\mathcal{L}} c(x, y)} + 1\right]$$

érték adja.

Az algoritmus végessége a célfüggvény alulról való korlátosságából következik.

A továbbiakban a minimális f folyam más megkonstruálási módjával foglalkozunk. Ehhez szükségünk lesz egy lineáris célfüggvényű hálózatokra vonatkozó lemmára. Értelmezzünk először az $[\mathcal{N}, \mathcal{A}]_\varrho$ hálózat élein egy $k(x, y) \geqq 0$, $(x, y) \in \mathcal{A}$ egész értékű függvényt, melyet kapacitásnak fogunk nevezni. Jelöljük a kapott hálózatot $[\mathcal{N}, \mathcal{A}, k]_\varrho$-val. A folyam (1.1), (1.2) definíciójához hozzá veszünk még egy feltételt: megköveteljük az $[\mathcal{N}, \mathcal{A}, k]_\varrho$-ban folyó f folyamtól, hogy $f(x, y) \leqq \leqq k(x, y)$ legyen a hálózat minden élére.

2.2. Lemma. Egy $[\mathcal{N}, \mathcal{A}, k]_\varrho$hálózatban valamely v értékű f egész folyam akkor és csak akkor minimalizálja a

$$\sum_{\mathcal{A}} c(x, y) f(x, y)$$

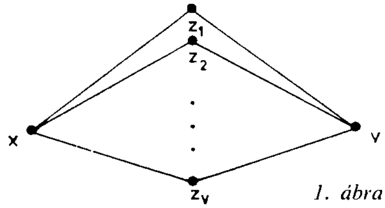
célfüggvényt, ha tekintve a:

$$\hat{c}(x, y) = \begin{cases} c(x, y) & \text{ha} \quad 0 \leqq f(x, y) < k(x, y) \\ +\infty & \text{ha} \quad f(x, y) = k(x, y) \\ -c(x, y) & \text{ha} \quad f(y, x) > 0 \end{cases}$$

módosított költségeket nincs negatív hosszúságú körlánc a hálózatban (bizonyítást lásd [2] könyvben).

Tekintsük most már eredeti problémánkat $[\mathcal{N}, \mathcal{A}]_\varrho$ hálózatban. Minden $(x, y) \in \mathcal{A}$ élt $2v$ darab új éllel fogunk helyettesíteni. Vegyünk ugyanis az x és y

csúcs közé v darab új $z_1, z_2, \ldots, z_v$ pontot, és helyettesítsük az $(x, y) \in \mathscr{A}$ élt $(x, z_1), (x, z_2), \ldots, (x, z_v), (z_1, y), (z_2, y) \ldots, (z_v, y)$ élekkel.



1. ábra

Ezen új élek mindegyikéhez rendeljünk egységnyi kapacitást és az (x, z_i) élekhez $c^*(x, y) = c(x, y)(2i-1)$ költséget, $i = 1, 2, \ldots, v$; a (z_i, y) élekhez 0 költséget, $i = 1, 2, \ldots, v$. A költségmátrix legyen szimmetrikus. Ezen új $[\bar{\mathscr{N}}, \bar{\mathscr{A}}, k]_\varrho$ hálózatban a $c^*(x, y)$ módosított költségek mellett tekintsük a

$$\sum_{\bar{\mathscr{A}}} c^*(x, y) f(x, y) \tag{2.4}$$

költséget minimalizáló f egész folyamot.

2.3. TÉTEL. A kapott f folyam — az eredeti $(x, y) \in \mathscr{A}$ él közötti új éleket újból összevonva — az $[\mathscr{N}, \mathscr{A}]_\varrho$ hálózatban minimalizálja az (2.1) célfüggvényt.

Bizonyítás. A kiegészített $[\bar{\mathscr{N}}, \bar{\mathscr{A}}, k]_\varrho$ hálózatban a (2.4) lineáris célfüggvényt az előző lemma szerint akkor és csak akkor minimalizálja az f folyam, ha nincs negatív módosított költségű körlánc. Ekkor viszont tekintsük az éleket újból összevonva az $[\mathscr{N}, \mathscr{A}]_\varrho$ hálózatban. Vegyünk egy tetszőleges $\mathscr{L}$ kört és annak egy körüljárását. Ekkor az $[\bar{\mathscr{N}}, \bar{\mathscr{A}}, k]_\varrho$ hálózatban a módosított költségek $\mathscr{L}$-en vett összegének nem-negatívságából következik, hogy $[\mathscr{N}, \mathscr{A}]_\varrho$-ban:

$$\sum_{\mathscr{L}} c(x, y)(2\tilde{f}(x, y) + 1) \geqq 0 \tag{2.5}$$

ahol $\tilde{f}$ az $[\mathscr{N}, \mathscr{A}]_\varrho$-ban szomszédos x, y csúcsok között $[\bar{\mathscr{N}}, \bar{\mathscr{A}}, k]_\varrho$-ban folyó folyamok összegét jelenti.[1] A (2.5) feltétel a 2.1. tétel szerint pedig éppen azt jelenti, hogy $\tilde{f}$ folyam $[\mathscr{N}, \mathscr{A}]_\varrho$-ban minimalizálja a $\sum_{\mathscr{A}} c(x, y) f^2(x, y)$ célfüggvényt.

3. Éleken valós értékű folyamok

Idáig minden esetben kikötöttük az f folyam egészértékűségét. Vessük most el ezt a feltételt, ebben az esetben is hasonló jellegű tételt lehet kimondani.

3.1. TÉTEL. Annak szükséges és elégséges feltétele, hogy egy v értékű f folyam a

$$\sum_{\mathscr{A}} c(x, y) f^2(x, y) \tag{3.1}$$

[1] $[\mathscr{N}, \mathscr{A}, k]$-ban egy $\mathscr{L}$ mentén adott körüljárási irányban a „legnegatívabb" kört következőképpen kapjuk: 1. ha $(x, y)\mathscr{L}$ mentén f értékű folyam folyik az adott körüljárási irányban, akkor az él költsége $c(x, y)\,(2f(x, y)+1)$; 2. ha $(x, y)\mathscr{L}$ mentén f értékű folyam folyik az adott körüljárási irányával ellenkező irányban akkor az él költsége: $c(x, y)\,(2f(x, y)-1)$.

célfüggvényt minimalizálja az adott $[\mathcal{N}, \mathcal{A}]_\varrho$ hálózatban az, hogy minden $\mathcal{L}$ körláncra és annak bármelyik irányú körüljárására a

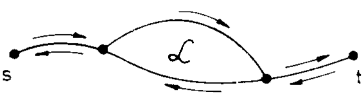
$$\sum_{\mathcal{L}} c(x, y) f(x, y) = 0$$

egyenlőség teljesüljön.

A fenti tétel bizonyítása a 2.1 tétel bizonyításához teljesen analóg módon, annak csekély változtatásával történhet. A következőkben az egész értékű és folytonos optimális folyamok közötti kapcsolatot vizsgáljuk. Egyszerűség kedvéért foglalkozzunk s forrásból t nyelőbe irányuló folyamokkal. Mondhatjuk azt, hogy van olyan $v_0 > 0$, hogy a v_0 értékű (3.1) célfüggvényt minimalizáló f folyam éppen egy éleken egész folyam. Ugyanis tekintsük az összes körlánc nélküli utat a hálózatban az s forrásból a t nyelőbe. Legyen ezek száma n. Küldjünk ezeken $x_1, x_2, \ldots, x_n$ értékű folyamot s-ből t-be. Jelölje $I_{11}, I_{22}, \ldots, I_{nn}$ az első, második, ..., n-edik útba tartozó élek halmazát. Jelölje I_{ij}^+ az i-edik és j-edik útba egyaránt beletartozó azon élek halmazát, melyeken x_i és x_j azonos irányban folyik, I_{ij}^- pedig a metszet azon éleinek halmazát, melyekre x_i, x_j ellenkező irányba folyik. Az optimalitás szükséges és elégséges feltétele ekkor mint láttuk az, hogy a hálózat minden $\mathcal{L}$ körére:

$$\sum_{\mathcal{L}} c(x, y) f(x, y) = 0 \tag{3.2}$$

legyen. A hálózat minden $\mathcal{L}$ köre nyilván kiegészíthető s, t pontokon átmenő körré.



2. ábra

Tehát (3.2) fennállása minden körláncra a következő lineáris kifejezések egymással egyenlő voltát jelenti:

$$l_1 \equiv x_1\Big(\sum_{I_{11}} c(x, y)\Big) + x_2\Big(\sum_{I_{12}^+} c(x, y) - \sum_{I_{12}^-} c(x, y)\Big) + \ldots + x_n\Big(\sum_{I_{1n}^+} c(x, y) - \sum_{I_{1n}^-} c(x, y)\Big),$$

$$l_2 \equiv x_1\Big(\sum_{I_{21}^+} c(x, y)\Big) - \sum_{I_{21}^-} c(x, y)\Big) + x_2\Big(\sum_{I_{22}} c(x, y)\Big) + \ldots + x_n\Big(\sum_{I_{2n}^+} c(x, y) - \sum_{I_{2n}^-} c(x, y)\Big),$$

$$\vdots$$

$$l_n \equiv x_1\Big(\sum_{I_{n1}^+} c(x, y) - \sum_{I_{n1}^-} c(x, y)\Big) + x_2\Big(\sum_{I_{n2}^+} c(x, y) - \sum_{I_{n2}^-} c(x, y)\Big) + \ldots + x_n\Big(\sum_{I_{nn}} c(x, y)\Big).$$

A lineáris kifejezések száma itt legalább eggyel több, mint a körök száma. Ugyanis ha a hálózat tartalmaz egy körláncot, akkor ez két körlánc nélküli utat tesz lehetővé az s forrásból a t nyelőbe és minden további kör legalább eggyel növeli a t csúcsba vezető utak számát. Így az

$$\begin{aligned} l_1 &= l_2 \\ l_1 &= l_3 \\ &\vdots \\ l_1 &= l_n \end{aligned} \tag{3.3}$$

homogén lineáris egyenletrendszer mindig megoldható, hiszen $n-1$ darab n ismeretlenes egyenletrendszer. Az együtthatók racionális mivoltából az $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ megoldások racionalitása következik. Mivel (3.3) homogén, a megoldások nevezőinek legkisebb közös többszörösével szorozva $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ egésszé tehető. A folyam értéke ekkor:

$$v_0 = \sum_{i=1}^{n} x_i^0. \tag{3.4}$$

Megjegyzés. Az egész értékű optimális folyam a 2.1 tétel által adott algoritmussal gyorsan számolható. Ha (3.4)-ben v_0 értékére becslést tudnánk adni, az általános folyamok esete is könnyen visszavezethető lenne az egész értékű esetre.

4. Alkalmazás

Végül tekintsünk olyan gyakorlati feladatot, melyre az ismertetett algoritmus alkalmazható.

Tekintsük a *két dimenziós Neumann-feladatot:*

$$\frac{\partial^2 \Phi(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Phi(x_1, x_2)}{\partial x_2^2} = 0, \quad (x_1, x_2) \in G \tag{4.1}$$

ahol G egyszeresen összefüggő tartomány, a tartomány határán a normális irányú derivált $\frac{\partial \Phi}{\partial n}$ értéke, a *Neumann*-feltétel van előírva. Ekkor az egyértelmű megoldás szükséges és elégséges feltétele:

$$\oint_{\Gamma} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right) ds = 0, \tag{4.2}$$

ahol Γ egyszerű zárt görbe a tartomány határát jelenti. Egy szokásos numerikus módszer a megoldásra (4.1) differenciálegyenletet egy differenciaegyenlettel pótolni. Azaz a G tartományt rácspontokkal felosztjuk és a kapott rácspontokban, diszkrét pontokban számított függvényértékkel közelítjük a Φ függvényt. Tekintsük a következő funkcionált:

$$D(g) = \iint_G (g_x^2 + g_y^2)\, dx\, dy$$

ahol a g függvény a G tartományban értelmezett. Ekkor a *Dirichlet-tétel* kimondja: Adott egy G tartomány, melynek Γ határa *Jordan-görbékből* áll. Legyen g folytonos $G \cup \Gamma$ halmazon, és szakaszonként sima G-ben. Legyen a $D(g)$ *Dirichlet-integrál* véges. Tekintsük azon φ függvények osztályát, melyek folytonosak $G \cup \Gamma$-ban, szakaszonként simák G-ben és Γ-n g-vel megegyező értéket vesznek fel. Ekkor létezik egyetlen u függvény, hogy $D(\varphi)$ minimumát, $d=u$-nál éri el. A kapott függvény megoldása a $\nabla^2 u = 0$ *Laplace-egyenletnek* és a határon $u = g$.

A *Dirichlet-funkcionált* diszkrét hálózatra felírva:

$$D(\Phi) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} (\Phi_i - \Phi_j)^2,$$

ha $f_{ij}=\Phi_i-\Phi_j$ helyettesítést elvégezzük:

$$D(\Phi) = D(f_{ij}) = \frac{1}{2}\sum_{i,j} f_{ij}^2,$$

így a hálózatban a következő feladatra jutunk:

$$\min \frac{1}{2}\sum_{i,j} f_{ij}^2$$

$$\sum_j f_{ij} = 0, \quad i \neq s, t,$$

$$\sum_j f_{sj} = v,$$

$$\sum_j f_{tj} = -v,$$

ahol $v=\int\limits_{\gamma} \frac{\partial \Phi}{\partial n}\, ds$, γ pedig a Γ határnak az a része, ahol az integrandus nem negatív, $\gamma=\left\{(x, y)\colon (x, y)\in\Gamma,\ \frac{\partial \Phi}{\partial n}(x, y)\geqq 0.\right\}$

A feladat megoldása most például a tárgyalt algoritmus segítségével történhet. Az e feladatra specializált algoritmus programja FORTRAN nyelven elkészült.

IRODALOM

[1] FORD, L. R., and FULKERSON, D. R., *Flows in Networks* (Princeton University Press, Princeton, 1962).
[2] HU, T. C., *Integer Programming and Network Flows* (Addison—Wesley, Massachusetts, 1969).
[3] HU, T. C., "Laplace's equation and network flows", *J. ORSA* **15** (1968) 348—356.
[4] KLAFSZKY, E., *Hálózati folyamok* (Bolyai János Mat. Társ., Budapest, 1969).
[5] KOMÁROMI, É. és ARANY, I., „Hálózati feladatok", *MTA SZK Szemináriumi füzetek 3*, 1971.
[6] ЕРМОЛЬЕВ, Ю. М. и МЕЛЬНИК, И. М., *Экстремальные задачи на графах* (Наукова Думка, Киев, 1968).

(Beérkezett: 1974. április 12.)

KAS PÉTER
MTA SZÁMÍTÁSTECHNIKAI ÉS AUTOMATIZÁLÁSI KUTATÓ INTÉZET
1250 BUDAPEST I., ÚRI U. 49.

NETWORK FLOWS WITH QUADRATIC OBJECT FUNCTIONS

P. KAS

In the present paper we are going to deal with a special problem of network flows. We consider a quadratical object function subject to linear (Kirchoff-type) constraints. A neccessary and sufficient theorem is proved which give us an efficient algorithm for finding the optimal flow. In this case we compare the optimal flows of range of integers and the minimal flows of range of real numbers. An application is treated for solving the *Laplace differential equation* with the help of this method.

Alkalmazott Matematikai Lapok **1** *(1975) 109—115*

MULTITERMINÁLIS MINIMÁLIS ÚT PROBLÉMA MEGOLDÁSA EGY ÁLTALÁNOSÍTOTT HÁLÓZATBAN

BAKÓ ANDRÁS
Budapest

A dolgozat célja kettős: egyrészt megadni és gyakorlati, számítástechnikai szempontból értékelni a probléma megoldási módszereit, másrészt egy algoritmust adni a feladat megoldására egy általánosított hálózatban.

1. A feladat megfogalmazása

Legyen $N=(x, y, \dots)$ egy véges ponthalmaz, E pedig N elemeiből alkotott rendezett pontpárok halmaza, $t(x, y) \geqq 0$ az éleken értelmezett függvény (ún. távolságfüggvény). Az $[N, E, t]$ együttest hálózatnak nevezzük.

Legyen s, s' a hálózat két rögzített pontja és $P=(s=x_0, x_1, \dots, x_r=s')$ az s pontból az s' pontba vezető út. Jelöljük $l(P)$-vel a P út hosszát:

$$l(P) = \sum_{i=0}^{r-1} t(x_i, x_{i+1}).$$

A multiterminális minimális út feladat a következő: Határozzuk meg a hálózat összes pontpárja között a legrövidebb hosszúságú útvonalakat.

A feladat megoldható bármelyik legrövidebb út algoritmussal (FORD [6]—MINTY [13], DIJKSTRA [3] stb.). Számítástechnikai szempontból ezek a módszerek nem alkalmasak a multiterminális minimális út megoldására a megoldási idő nagysága miatt.

A feladatot az ún. mátrix algoritmusokkal lehet egyszerűen megoldani. Ezen algoritmusok a $t(x, y)$ függvényből alkotott mátrixból indulnak ki, és speciális mátrix műveletek sorozataként adják meg a feladat megoldását. Ilyen jól használható dinamikus programozási elven működő eljárást közöl BELLMAN [2], KALABA [10] és SIMBELL [15]. Egy a minimális hosszúságú útra jellemző háromszög egyenlőtlenséget kihasználó módszert ír le WARSHALL [16]. További, az előző módszerektől lényegében nem sokban eltérő módszert közöl HU [9] és DANTZIG [5].

2. Dinamikus programozási módszer

A dinamikus programozás ún. optimum elvét abban a formában használjuk, hogy egy út akkor és csakis akkor minimális hosszúságú két pont között, ha minden egyes részútja is az a megfelelő pontok között.

2.1. DEFINICIÓ. Az $x \in N$ pontból az $y \in N$ pontba vezető legfeljebb r élből álló legrövidebb utat r-optimáisnak nevezzük és a hosszát $l^{(r)}(x, y)$-nal jelöljük.

A mátrix módszereknél a multiterminális minimális út feladat megoldásához $n-1$ lépésben jutunk, és eredményül az $(n-1)$-optimális utakat kapjuk, ahol n az N halmaz pontjainak a száma. Az iteráció során az

$$L^{(1)}_{n\times n} = l^{(1)}_{ij} = t(x_i, x_j) \tag{2.1}$$

mátrixból meghatározzuk a 2-optimális utakat tartalmazó $L^{(2)}$ mátrixot, a 3-optimális utakat tartalmazó $L^{(3)}$ mátrixot, ..., az $(n-1)$-optimális utakat tartalmazó $L^{(n-1)}$ mátrixot.

Az iteráció a következő $\otimes$ mátrix művelettel adható meg:

$$L^{(r)}_{n\times n} = L^{(r-1)}_{n\times n} \otimes L^{(1)}_{n\times n} \tag{2.2}$$

ahol a $\otimes$ művelet a következőt jelenti

$$l^{(r)}_{ij} = \min_{1\le k\le n} (l^{(r-1)}_{ik} + l^{(1)}_{kj}) \tag{2.3}$$

A fenti módszer alapgondolata BELLMAN-tól származik (l. [2]). A (2.2)-t elvégezve $r=2, 3, ..., (n-1)$-re megkapjuk a feladat megoldását, amit az alábbi tételben fogalmazunk meg.

2.1. TÉTEL. A multiterminális minimális út feladat megoldását a (2.1), (2.3) iterációval legfeljebb $n-1$ iterációs lépés után kapjuk meg, ahol n a hálózat pontjainak a száma.

A tétel egyszerűen bizonyítható a pontok száma szerinti teljes indukcióval.

A számolás akkor ér véget, ha valamely r-re azt kapjuk, hogy $L^{(r-1)} = L^{(r)}$. Ez azt jelenti, hogy az út hossza további műveletekkel nem csökkenthető.

3. Warshall-módszer

Egy a fentitől alapötletben eltérő módszert dolgozott ki WARSHALL [16]. A módszer ALGOL programját FLOJD [7] közli, s lényegében ugyanezt az eljárást írja le MURCHLAND [14] és használja fel HU [8].

A megoldási algoritmus n lépésből áll. Minden egyes lépésben egy speciális $\otimes$ műveletet hajtunk végre mátrixok között. Az

$$L^{(0)}_{n\times n} = l^{(0)}_{ij} = t(x_i, x_j)$$

mátrixból indulunk ki. A k-adik lépésben meghatározzuk az $L^{(k)}$ mátrixot az $L^{(k-1)}$ mátrixból:

$$L^{(k)} = L^{(k-1)} \otimes L^{(k-1)}, \tag{3.1}$$

ahol a $\otimes$ művelet a következőt jelenti:

$$l^{(k)}_{ij} = \begin{cases} l^{(k-1)}_{ij}, & \text{ha } l^{(k-1)}_{ij} < l^{(k-1)}_{ik} + l^{(k-1)}_{kj} \\ l^{(k-1)}_{ik} + l^{(k-1)}_{kj}, & \text{egyébként.} \end{cases} \tag{3.2}$$

A (3.1) mátrix műveletet $k=1, 2, ..., n$-re elvégezve megkapjuk a feladat megoldását adó $L^{(n)}$ mátrixot. A fenti állítás egyszerűen igazolható (lásd HU [8]).

4. Veszteséges hálózat multiterminális minimális út problémája és megoldási algoritmusa

A veszteséges hálózat minimális út feladatát CHARNES és RAIKE [4] vetette fel és oldotta meg. A módszerüknél egy jóval gyorsabb és praktikusabb eljárást adott a szerző [1]. Az alábbiakban megadjuk a probléma multiterminális változatának megoldását.

Az $[N, E, t]$ hálózatban, most jelentse a $t(x, y)$ függvény az egységnyi áru szállítási költségét az x pontból az y pontba. A hálózat élein egy további $k(x, y)$ ún. veszteség függvényt értelmezünk. Ennek gazdasági jelentése a következő: ha x pontból m egységnyi árut szállítunk az (x, y) él mentén, akkor az y pontba $m \cdot k(x, y)$ fog érkezni. A $k(x, y)$ függvényre feltesszük, hogy $0 < k(x, y) \leqq 1$. Az $[N, E, k, t]$ hálózatot veszteséges hálózatnak nevezzük.

Legyen a $P = (x_0, x_1, \ldots, x_k)$ út mentén az x_0 pontból induló egységnyi áru szállítási költsége az x_i pontig $l(x_0, x_i)$, és ugyanezen áru vesztesége az x_0 ponttól az x_i pontig $m(x_0, x_i)$. Ezen függvényeket az alábbi rekurzióval adhatjuk meg:

(4.1)
$$l(x_0, x_0) = 0$$
$$l(x_0, x_k) = l(x_0, x_{k-1}) + m(x_0, x_{k-1}) t(x_{k-1}, x_k)$$

és

(4.2)
$$m(x_0, x_0) = 1$$
$$m(x_0, x_k) = m(x_0, x_{k-1}) k(x_{k-1}, x_k).$$

A multiterminális minimális út feladat veszteséges hálózatban a következő: határozzuk meg minden $x, y \in N$ esetén azt a P utat, amelyre

(4.3)
$$\frac{l(x, y)}{m(x, y)}$$

minimális.

Az alábbiakban megadjuk a (4.3)-nak eleget tevő multiterminális utakat megadó eljárást.

Az iteráció a következő lépésekből áll. Kiindulákor megadjuk az $L^{(0)}_{n \times n} = l^{(0)}_{ij}$ mátrix értékeit:

(4.4)
$$l^{(0)}_{ij} = \begin{cases} t(x_i, x_j), & \text{ha} \quad (x_i, x_j) \in E \\ 0, & \text{ha} \quad i = j \\ K, & \text{egyébként,} \end{cases}$$

ahol K nagyobb az egységnyi mennyiségre eső szállítási költség maximumánál.

Az $M^{(0)}_{n \times n} = m^{(0)}_{ij}$ mátrix legyen a következő:

(4.5)
$$m^{(0)}_{ij} = \begin{cases} k(x_i, x_j), & \text{ha} \quad (x_i, x_j) \in E, \\ \dfrac{1}{c}, & \text{egyébként,} \end{cases}$$

ahol

$$c < \prod_{(x_i, x_j) \in E} k(x_i, x_j).$$

Az alábbi iterációs lépéseket a $k=1, 2, \ldots, n$ értékekre végezzük el, és az iteráció eredményeképp az $L^{(n)}$ mátrix, illetve az $M^{(n)}$ mátrix a feladat megoldását adó $l_{ij}^{(n)}$, illetve $m_{ij}^{(n)}$ értékeket tartalmazza.

A k-adik lépésben a következő transzformációt végezzük el:

a) kiszámoljuk az m_{ij} értékeket az

$$m_{ij} = m_{ik}^{(k-1)} m_{kj}^{(k-1)}, \quad i, j \neq k, \quad i \neq j \tag{4.6}$$

képletből, és az l_{ij} értékeket az

$$l_{ij} = l_{ik}^{(k-1)} + m_{ik}^{(k-1)} l_{kj}^{(k-1)} \tag{4.7}$$

képletből.

b) Az $L^{(k)}$ és $M^{(k)}$ mátrixok elemeit az $L^{(k-1)}$ és $M^{(k-1)}$ mátrixok elemeiből és a (4.6), (4.7) képletekkel meghatározott értékekből választjuk a következőképp:

$$l_{ij}^{(k)} = \begin{cases} l_{ij}^{(k-1)}, & \text{ha } \dfrac{l_{ij}}{m_{ij}} > \dfrac{l_{ij}^{(k-1)}}{m_{ij}^{(k-1)}}, \quad \text{vagy } i=k, \quad \text{vagy } j=k \\ l_{ij} & \text{egyébként,} \end{cases} \tag{4.8}$$

$$m_{ij}^{(k)} = \begin{cases} m_{ij}^{(k-1)}, & \text{ha } \dfrac{l_{ij}}{m_{ij}} > \dfrac{l_{ij}^{(k-1)}}{m_{ij}^{(k-1)}}, \quad \text{vagy } i=k, \quad \text{vagy } j=k \\ m_{ij} & \text{egyébként.} \end{cases} \tag{4.9}$$

A fenti eljárás igazolása előtt megmutatjuk, hogy a (4.1), (4.2)-ben megadott rekurzív képletek utak összekapcsolása esetén is érvényesek. Ezt mondja ki az alábbi két lemma.

Tekintsük a $P_1=(x_1, x_2, \ldots, x_j)$ a $P_2=(x_j, x_{j+1}, \ldots, x_r)$ és $P=P_1 \cup P_2$ utakat.

4.1. LEMMA. A P út mentén az $m(x_1, x_r)$ függvényt az alábbi képlettel határozhatjuk meg:

$$m(x_1, x_r) = m(x_1, x_j) \cdot m(x_j, x_r).$$

Bizonyítás. A lemma igazolását az m függvény definíciójából egyszerű számolással kaphatjuk meg:

$$m(x_i, x_r) = \prod_{l=2}^{r} k(x_{k-1}, x_l) =$$

$$= \prod_{l=2}^{j} k(x_{l-1}, x_l) \cdot \prod_{l=j+1}^{r} k(x_{l-1}, x_l) = m(x_1, x_j) \cdot m(x_j, x_r).$$

4.2. LEMMA. A P úthoz tartozó $l(x_1, x_r)$ értéket az alábbi összefüggéssel számolhatjuk ki:

$$l(x_1, x_r) = l(x_1, x_j) + m(x_1, x_j) \cdot l(x_j, x_r).$$

Bizonyítás. Az l és m függvények definícióját figyelembe véve az állítást egyszerű megmutatni. Ugyanis az $l(x_1, x_j)$ függvény az x_1 pontból induló egységnyi áru szállítási költsége a P_1 út mentén az x_j pontig. Az x_j pontban $m(x_1, x_j)$ mennyiség érkezett ugyanezen út mentén, $l(x_j, x_r)$ pedig az x_j pontból az x_r pontba a szállítási költség a P_2 út mentén.

Az alábbi tétel szerint az eljárás eredményeképp megkapjuk a feladat megoldását.

4.3. TÉTEL. A fenti iteráció eredményeképp kapott $L^{(n)}$ $M^{(n)}$ mátrixok $l_{ij}^{(n)}$, $m_{ij}^{(n)}$ elemei az x_i pontból a x_j pontba vezető utak közül azon úthoz tartoznak, amely mentén szállítva az x_i pontból x_j pontba érkező egységnyi mennyiségre eső szállítási költség minimális.

Bizonyítás. A tétel bizonyításához elegendő azt megmutatni, hogy az $L^{(k)}$ és $N^{(k)}$ mátrixhoz tartozó $l_{ij}^{(k)}/m_{ij}^{(k)}$ érték az $x_1, x_2, \ldots, x_k$ pontok egy részhalmazán átmenő utakra nézve minimális.

$k=1$-re a tétel triviális, mert vagy az eredeti értéket vesszük, vagy az x_1 ponton átmenő kisebb hányadoshoz tartozó utat.

Tegyük fel, hogy $(k-1)$-re az állítás igaz.

A k-adik lépésben két eset lehet:

Az x_k ponton nem megy át az x_i, x_j pontot összekötő, és az $x_1, \ldots, x_k$ pontok egy részhalmazán átmenő minimális út. Ekkor $l_{ij}^{(k)}=l_{ij}^{(k-1)}$, $m_{ij}^{(k)}=m_{ij}^{(k-1)}$, és az indukciós feltevés, valamint a (4.8), (4.9) képletek miatt az állítás igaz.

Ha az x_k pont közbülső pontja az x_i pontból x_j pontba vezető P útnak, akkor x_k két az $x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}$ pontok részhalmazán átmenő utat köt össze. Ezek az indukciós feltevés miatt optimálisak az $x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}$ pontokat tekintve. A fenti két lemma miatt a (4.6), (4.7) képletek erre a két út összekapcsolására is érvényesek. Az így kapott P útra vonatkozó hányados viszont kisebb a $k-1$ lépésben kapott hányadosnál a (4.8), (4.9) képletek miatt.

5. Számítástechnikai megjegyzések

A dinamikus programozási módszernél igen sok számolási lépést kell végezni. Az összes összeadások, illetve összehasonlítások száma $n^2(n-1)^2$.

Az eljárást egy kis módosítással gyorsíthatjuk. Az optimalizációs elv miatt érvényes a következő összefüggés:

$$l_{ij}^{(m+n)} = \min_{1 \leq k \leq n} (l_{ik}^{(m)} + l_{kj}^{(n)}).$$

A legcélszerűbb kettő hatványai szerint haladni, azaz egymás után meghatározni az $L^{(2)}, L^{(4)}, L^{(8)} \ldots$ mátrixokat. A feladat megoldását akkor kapjuk meg, ha valamely k-ra $L^{(2k)}=L^{(k)}$. A fenti módosítás után az összehasonlítások, illetve az összeadások száma $kn(n-1)^2$, ahol $k=\log^2(n-1)+1$.

Elektronikus számítógépen való számoláskor az $L^{(k)}$ és $L^{(2k)}$ mátrixok tárolásához $2n^2$ tárolóhelyre van szükség. FORTRAN nyelven írt program esetén — kihasználva a 24 bites opciót, és bizonyos tömörítést, a tárolási igény n^2 rövid szóra csökkenthető. Ehhez viszont a mátrixok elemei egyik lépésben sem lehetnek 999-nél nagyobbak.

A HU [9] algoritmus és a DANTZIG [5] algoritmus összeadásainak, illetve összehasonlításainak a száma n^4 nagyságrendű. Így gépidő igényük jóval nagyobb a módosított dinamikus programozási módszernél.

A fenti módszerek a gyakorlatban sokszor fontos minimális útvonalat nem adják meg, csak az útvonal hosszát. A 2. pontban közölt dinamikus programozási módszer kis módosítással az útvonalat is megadja, de a számolási igénye nagy.

A *Warshall*-módszer is megadja az útvonalat az alábbi módosítással, viszont számítási igénye sokkal kisebb, mint a 2. pontban leírt módszeré: $n(n-1)(n-2)$.

Ahhoz, hogy a minimális hosszúságú útvonalat is meg tudjuk határozni, az összes pontpár között a *Warshall*-módszerrel, egy további $M_{n\times n}$-es mátrixra van szükség, amely az útvonal meghatározásához szükséges címkéket tartalmazza.

Kiinduló lépés:

$$M^{(0)}_{n\times n} = m^{(0)}_{ij} = j.$$

A k-adik lépésben az $M^{(k-1)}$ mátrixból az $M^{(k)}$ mátrixot a következőképp határozzuk meg:

$$m^{(k)}_{ij} = \begin{cases} m^{(k-1)}_{ij}, & \text{ha } l^{(k-1)}_{ik} + l^{(k-1)}_{kj} \geqq l^{(k-1)}_{ij} \\ m^{(k-1)}_{ik}, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Eddig feltettük, hogy $t(x, y) \geqq 0$. Ha egy él hossza negatív is lehet, akkor a legtöbb algoritmus nem működik megfelelően. Tudniillik könnyen előfordul, hogy negatív ciklus van a hálózatban, és a minimális út meghatározásakor ezt a ciklust rendszerint nehéz kiszűrni. A *Warshall*-algoritmusnál ciklus keresésére felhasználhatjuk az $L^{(k)}$ mátrix fődiagonálisát. Ekkor azonban $l^{(0)}_{ii} = \infty$ az eredeti $l^{(0)}_{ii} = 0$ helyett. Ha az $l^{(k)}_{ii}$ érték negatívvá válik valamely k-ra ($k = 1, 2, ..., n$), akkor a hálózatban negatív ciklus van.

A fenti módszerek mindegyike $2n^2$ tárolóhelyet igényel.

Nagy hálózat esetén az ún. dekompozíciós módszerekkel dolgozunk. Az egyik első dekompozíciós módszert MILLS [12], és LAND és STAIRS [11] közölte. A legkönnyebben programozható és a legminimálisabb helyigényű algoritmust HU [8] adta. Ezzel a módszerrel elméletileg tetszés szerinti nagyságú hálózat multiterminális út problémáját megoldhatjuk.

A 4. pontban leírt általános probléma megoldási algoritmusa csak az egységnyi áru szállítási költségét adja meg a minimális út mentén. Ha magát az útvonalat is meg akarjuk határozni, akkor még egy további $S = s_{ij}$ mátrixra van szükség, amely a címkéket fogja tartalmazni. Kezdetben:

$$s^{(0)}_{ij} = j.$$

A k-adik mátrixot a $(k-1)$-edik mátrixból a következő iterációval határozzuk meg:

$$s^{(k)}_{ij} = \begin{cases} s^{(k-1)}_{ij}, & \text{ha } \dfrac{l_{ij}}{m_{ij}} \geqq \dfrac{l^{(k-1)}_{ij}}{m^{(k-1)}_{ij}} \\ s^{(k-1)}_{ik}, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

A módszer tárolási igénye $3n^2$.

A feladat megoldásához $n(n-1)(n-2)$ összehasonlításra, összeadásra és osztásra, és $2n^2(n-1)(n-2)$ szorzásra van szükség.

IRODALOM

[1] Bakó, A., "On the determination of the shortest path in a network having gains", *Math· Operationsforsch und Statist.* **4** (1973) 63—68.
[2] Bellman, R., "On a routing problem", *Quart. Appl. Math.* **16** (158) 269—271.
[3] Dijkstra, E. W., "A note on two problems in connection with graphs", *Numerische Mathematik* **1** (1959) 269—271.
[4] Charnes, A. and Raike, W. M., "One pass algorithms for some generalised network problems", *Op. Res.* **14** (1966) 914—924.
[5] Dantzig, G. B., "All shortest routes in a graph", *Op. Res. House Stanford Univ.* TR **66—3** (1966).
[6] Ford, L. R., *Network Flow Theory* (The Rand Corporation, 1956).
[7] Floyd, R. W., "Algorithm 97: Shortest path", *Communication ACM* **5** (1962) 345.
[8] Hu, T. C., "A democomposition algorithm for shortest path in a network", *Op. Res.* **16** (1968) 91—102.
[9] Hu, T. C., "Revised matrix algorithm for shortest path", *SIAM J.* **15** (1967) 207—218.
[10] Kalaba, R., "On some communication network problems, combinatorial analysis", in: *Proc. Symp. Appl. Math.* (1960) 261—280.
[11] Land, A. H. and Stairs, S. H., "The extension of the cascade algorithm to large graphs", *Management Science* **14** (1967) 29—33.
[12] Mills, G., "A decomposition algorithm for the shortest route problem", *Op. Res.* **14** (1966) 279—291.
[13] Minty, G. J., "A comment on the shortest route problem", *Op. Res.* **5** (1957) 724—728.
[14] Murchland, J. D., "The once-through method of finding all shortest distances in a graph from a single origin", *Graduate School of Business* S. Rep. **56** (1967).
[15] Shimbel, A., "Structure in communication nets", in: *Proc. of the Symposium on Information Network* (New York, 1954).
[16] Warshall, S., "A theorem on boolean matrices", *J. of the ACM* **9** (1962) 11—12.

(Beérkezett: 1974. május 27.)

BAKÓ ANDRÁS
MTA SZÁMÍTÁSTECHNIKAI ÉS AUTOMATIZÁLÁSI KUTATÓ INTÉZET
1250 BUDAPEST I., ÚRI U. 49.

AN ALGORITHM FOR SOLVING THE MULTITERMINAL MINIMAL PATH PROBLEM IN A GENERALISED NETWORK

A. Bakó

In this paper we deal with two problems:

— the summarisation of the algorithms for the multiterminal minimal path problem and evaluation of different aspects of the computational problems

— we give a new algorithm for solving this problem in a network having gains.

Alkalmazott Matematikai Lapok **1** *(1975) 117—124*

MÁSODRENDŰ LINEÁRIS IDŐOPTIMUM FOLYAMAT SZINTÉZISTARTOMÁNYÁRA VONATKOZÓ BECSLÉS

URBÁNSZKI FERENC

Budapest

Lineáris időoptimum folyamat szintézistartománya a síkon korlátos, ha a differenciálegyenlet-rendszer mátrixa instabilis. A cikkben felső korlátot (bizonyos esetben pontos korlátot) adunk ilyen folyamat szintézistartományára.

1. Bevezetés

Legyen adott egy másodrendű lineáris időoptimum folyamat az

$$x^1 = a_{11}x^1 + a_{12}x^2 + v^1$$

$$x^2 = a_{21}x^1 + a_{22}x^2 + v^2$$

differenciálegyenlet-rendszerrel. Ez vektoriális alakban így írható fel:

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{v}, \tag{1.1}$$

ahol

$$\mathbf{x} = (x^1, x^2) \in R^2,$$

$$\mathbf{v} = (v^1, v^2) \in V,$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

A V vezérlési tartomány egy konvex sokszög, amely tartalmazza — nem csúcspontként — az origót. Legyenek a V sokszög csúcsai $\mathbf{f}_i = (f_i^1, f_i^2)$, $i = 1, 2, \ldots, s$, és az $\mathbf{f}_i$ csúcsban az oldalak külső normálisainak szögét jelöljük α_i-vel. Tegyük fel a következőket.

I. feltétel. Az (1.1) egyenletrendszerre teljesüljön az általános helyzet feltétele (l. [2]).

Ekkor a *Pontrjagin-féle maximumelv* alapján megvalósítható az optimális trajektóriák szintézise [2]. Ha az **A** mátrix stabilis, akkor a rendszer szintézis-tartománya az egész sík. Ha az **A** mátrix instabilis, akkor az optimális trajektóriáknak legalább az egyik koordinátája korlátos marad [2]. Ezt a következőképpen szemléltethetjük.

Stabilis mátrixnak megfelelő rendszer csillapodó. A sík bármely pontját a $v=0$ vezérlésnek megfelelő trajektória tetszőlegesen közel viszi az origóhoz, ezért bármilyen vezérlési tartományból kiválasztható olyan vezérlés, amely egy adott pontot átvisz az origóba.

Instabilis mátrixnak gerjedő rendszer felel meg, amelynek csillapodását csak alkalmasan választott vezérléssel érhetjük el. Ezért egy adott vezérlési tartományból a síknak csak bizonyos pontjaira tudunk olyan vezérlést kiválasztani, amely átviszi a pontot az origóba.

II. feltétel. Az **A** mátrix, illetve annak *Jordan-alakja*, megegyezik a következő mátrixok valamelyikével:

(1) $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, ahol $a > 0, \quad b > 0$;

(2) $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, ahol $\lambda_1 > 0, \quad \lambda_2 > 0, \quad \lambda_1 \neq \lambda_2$;

(3) $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, ahol $\lambda_1 < 0, \quad \lambda_2 > 0$;

(4) $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, ahol $\lambda > 0$;

(5) $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, ahol $\lambda > 0$.

Ebben a dolgozatban felső korlátot (bizonyos esetben pontos korlátot) adunk, instabilis mátrix esetén, a szintézistartományra.

A szintézistartomány az (1), (2), (5) esetben valamely az origót tartalmazó korlátos halmaz, a (3), (4) esetben pedig sáv. A továbbiakban a felsorolt eseteket különkülön megvizsgáljuk.

2. A szintézistartományok vizsgálata

Az (1) eset részletes tárgyalása megtalálható az [1] dolgozatban.

(2) *eset.* Az (1.1) egyenletrendszer átmegy a

$$\begin{aligned} \dot{x}^1 &= \lambda_1 x^1 + v^1 \\ \dot{x}^2 &= \lambda_2 x^2 + v^2 \end{aligned} \tag{2.1}$$

alakba, ahol

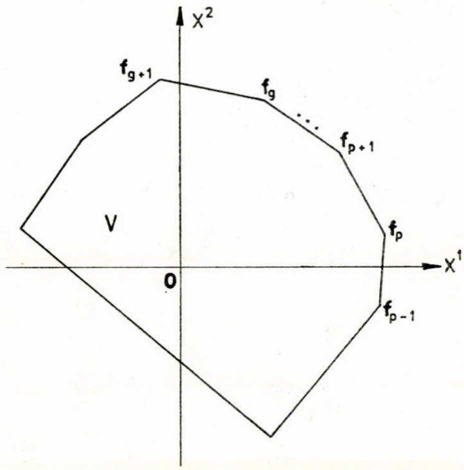
$$\lambda_1 > 0, \quad \lambda_2 > 0, \quad \lambda_1 \neq \lambda_2, \quad v \in V \quad \text{(lásd 1. ábra).}$$

Jelöljük $\mathbf{h}_i$-vel a (2.1) egyenletrendszerben az $\mathbf{f}_i$ vezérlésnek megfelelő szinguláris pontot, azaz

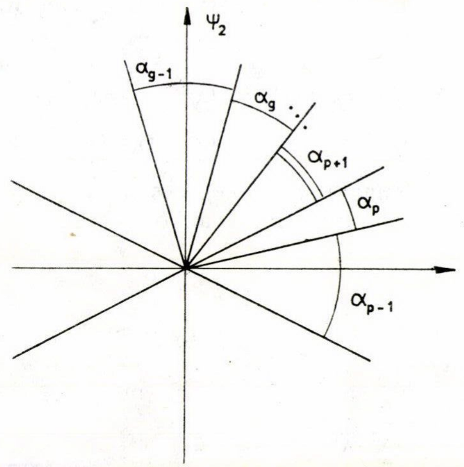
$$\begin{aligned} h_i^1 &= -\frac{f_i^1}{\lambda_1}, \\ h_i^2 &= -\frac{f_i^2}{\lambda_2}, \end{aligned} \tag{2.2}$$

és az egyértelműség kedvéért legyen $\lambda_1 > \lambda_2$.

Mivel a maximumelvben szereplő ψ segédvektor vagy párhuzamos az egyik koordinátatengellyel, vagy csak az egyik síknegyedben mozog (szögét foytonosan változtatva) l. [2], azért a részletes számításokat csak olyan optimális trajektóriákra végezzük el, amelyeknek megfelelő ψ segédvektor az első síknegyedben mozog (2. ábra).



1. ábra



2. ábra

Haladjon át a (2.1) egyenletrendszer trajektóriája az $\mathbf{M}(\mathbf{b}, \mathbf{c}, t)$ ponton a t időpillanatban, ahol $\mathbf{c}$ az egyenletrendszer szinguláris pontja és $\mathbf{M}(\mathbf{b}, \mathbf{c}, 0)=\mathbf{b}$.

2.1. Lemma. Ha $(x^1, x^2)=\mathbf{M}(\mathbf{b}, \mathbf{c}, t)$ valamely $t \leqq 0$ értékre, akkor teljesülnek a következők:

(i) vagy $c^1 \leqq x^1 \leqq b^1$, ha $c^1 \leqq b^1$,

vagy $c^1 \geqq x^1 \geqq b^1$, ha $c^1 \geqq b^1$,

(ii) vagy $c^2 \leqq x^2 \leqq b^2$, ha $c^2 \leqq b^2$,

vagy $c^2 \geqq x^2 \geqq b^2$, ha $c^2 \geqq b^2$.

Bizonyítás. A (2.1) egyenletrendszer $\mathbf{M}(\mathbf{b}, \mathbf{c}, t)$ trajektóriáját az

$$x^1 - c^1 = (b^1 - c^1)e^{\lambda_1 t},$$

$$x^2 - c^2 = (b^2 - c^2)e^{\lambda_2 t},$$

alakban kapjuk, amiből állításunk következik. Minden optimális trajektória, amelynek megfelelő segédvektor az első síknegyedben mozog, egy

(2.3) $$\emptyset\, \mathbf{a}_{g+1}\mathbf{a}_g\mathbf{a}_{g-1} \ldots \mathbf{a}_{p+1}\mathbf{a}_p\mathbf{a}_{p-1}$$

görbe része (l. [1]), ahol

$$\begin{aligned}
\emptyset\mathbf{a}_{g+1} &= \{(x^1, x^2) : (x^1, x^2) = \mathbf{M}(\emptyset, \mathbf{h}_{g+1}, t),\ 0 \geqq t \geqq -\tilde{T}_{g+1},\ \tilde{T}_{g+1} < +\infty\},\\
\mathbf{a}_{g+1}\mathbf{a}_g &= \{(x^1, x^2) : (x^1, x^2) = \mathbf{M}(\mathbf{a}_{g+1}, \mathbf{h}_g, t),\ 0 \geqq t \geqq -\tilde{T}_g,\ \tilde{T}_g \leqq T_g\},\\
\mathbf{a}_g\mathbf{a}_{g-1} &= \{(x^1, x^2) : (x^1, x^2) = \mathbf{M}(\mathbf{a}_g, \mathbf{h}_{g-1}, t),\ 0 \geqq t \geqq -\tilde{T}_{g-1},\ \tilde{T}_{g-1} \leqq T_{g-1}\},\\
&\ \vdots\\
\mathbf{a}_{p+1}\mathbf{a}_p &= \{(x^1, x^2) : (x^1, x^2) = \mathbf{M}(\mathbf{a}_{p+1}, \mathbf{h}_p, t),\ 0 \geqq t \geqq -\tilde{T}_p,\ \tilde{T}_p \leqq T_p\},\\
\mathbf{a}_p\mathbf{a}_{p-1} &= \{(x^1, x^2) : (x^1, x^2) = \mathbf{M}(\mathbf{a}_p, \mathbf{h}_{p-1}, t),\ 0 \leqq t \leqq -\tilde{T}_{p-1},\ \tilde{T}_{p-1} < +\infty\}.
\end{aligned}$$

A 2.1 lemma alapján megbecsülhetjük a (2.3) görbe pontjainak az x^1 koordinátáját. Ha $(x^1, x^2) \in \emptyset\mathbf{a}_{g+1}$, akkor

$$\text{vagy } 0 \leqq x^1 \leqq h^1_{g+1}, \text{ ha } 0 \leqq h^1_{g+1},$$

$$\text{vagy } 0 \geqq x^1 \geqq h^1_{g+1}, \text{ ha } 0 \geqq h^1_{g+1},$$

tehát

$$\min_i h^1_i \leqq x^1 \leqq \max_i h^1_i.$$

Ha $(x^1, x^2) \in \mathbf{a}_{g+1}\mathbf{a}_g$, akkor

$$\text{vagy } a^1_{g+1} \leqq x^1 \leqq h^1_g, \text{ ha } a^1_{g+1} \leqq h^1_g,$$

$$\text{vagy } a^1_{g+1} \geqq x^1 \geqq h^1_g, \text{ ha } a^1_{g+1} \geqq h^1_g,$$

és mivel

$$\min_i h^1_i \leqq a^1_{g+1} \leqq \max_i h^1_i,$$

azért

$$\min_i h^1_i \leqq x^1 \leqq \max_i h^1_i. \tag{2.4}$$

A fenti gondolatmenetet folytatva világos, hogy a (2.4) teljesül a (2.3) görbe minden pontjára. Hasonlóképpen kapjuk az x^2 koordinátákra nézve a

$$\min_i h^2_i \leqq x^2 \leqq \max_i h^2_i \tag{2.5}$$

egyenlőtlenséget.

Könnyen belátható továbbá, hogy (2.4) és (2.5) teljesül a (2.1) rendszer minden optimális trajektóriájára, és mivel azok a szinguláris pontok, amelyek (2.4)-ben és (2.5)-ben szerepelnek, nem elemei a szintézistartománynak (bár tetszőleges környezetükben van eleme a szintézistartománynak), ezért a kapott egyenlőtlenségek szigorúak, azaz

$$\min_i h^1_i < x^1 < \max_i h^1_i,$$

$$\min_i h^2_i < x^2 < \max_i h^2_i.$$

Ebből és a (2.2) összefüggésből kapjuk a következő tételt.

2.1. TÉTEL. A

$$-\frac{\max\limits_i f_i^1}{\lambda_1} < x^1 < -\frac{\min\limits_i f_i^1}{\lambda_1},$$

$$-\frac{\max\limits_i f_i^2}{\lambda_2} < x^2 < -\frac{\min\limits_i f_i^2}{\lambda_2}$$

téglalap tartalmazza a (2.1) egyenletrendszer szintézistartományát, és egyúttal ez a legkisebb olyan — a szintézistartományt tartalmazó — téglalap, amelynek oldalai párhuzamosak a koordinátatengelyekkel.

(3) *eset.* Az (1.1) egyenletrendszer átmegy a

$$\begin{aligned} x^1 &= \lambda_1 x^1 + v^1 \\ x^2 &= \lambda_2 x^2 + v^2 \end{aligned} \tag{2.6}$$

alakba, ahol $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 > 0$, $v \in V$ (lásd 1. ábra).

A (2) eset gondolatmenete ebben az esetben is helytálló azzal a különbséggel, hogy az optimális trajektóriáknak csak az x^2 koordinátájára lehet becslést adni.

2.2. TÉTEL. A

$$-\frac{\max\limits_i f_i^2}{\lambda_2} < x^2 < -\frac{\min\limits_i f_i^2}{\lambda_2}$$

sáv a (2.6) egyenletrendszer szintézistartománya.

(4) *eset.* Az (1.1) egyenletrendszer átmegy a

$$\begin{aligned} x^1 &= \lambda x^1 + v^1 \\ x^2 &= v^2 \end{aligned} \tag{2.7}$$

alakba, ahol $\lambda > 0$, $v \in V$ (lásd 1. ábra).

A (3) esethez hasonlóan megmutatható, hogy igaz a

2.3. TÉTEL. A

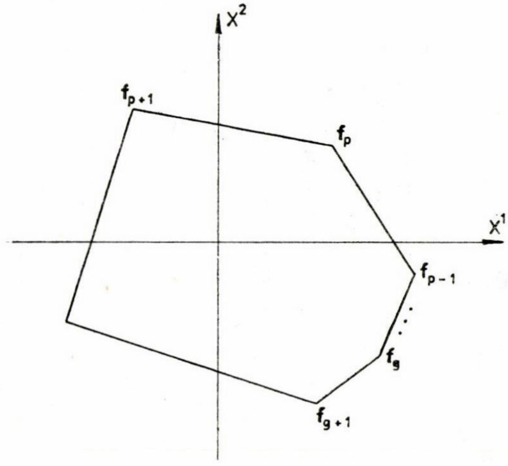
$$-\frac{\max\limits_i f_i^1}{\lambda} < x^1 < -\frac{\min\limits_i f_i^2}{\lambda}$$

sáv a (2.7) egyenletrendszer szintézistartománya.

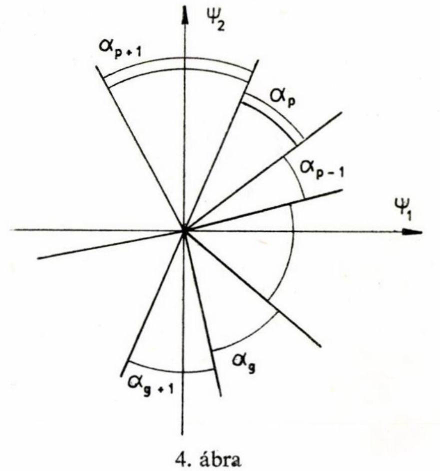
(5) *eset.* Az (1.1) egyenletrendszer átmegy a

$$\begin{aligned} x^1 &= \lambda x^1 + x^2 + v^1 \\ x^2 &= \lambda x^2 + v^2 \end{aligned} \tag{2.8}$$

alakba, ahol $\lambda > 0$, $v \in V$ (lásd 3. ábra).



3. ábra



4. ábra

Jelöljük $\mathbf{h}_i$-vel a (2.8) egyenletrendszerben az $\mathbf{f}_i$ vezérlésnek megfelelő szinguláris pontot, azaz

$$(2.9)\qquad \begin{aligned} h_i^1 &= -\frac{f_i^1}{\lambda}+\frac{f_i^2}{\lambda^2}, \\ h_i^2 &= -\frac{f_i^2}{\lambda}. \end{aligned}$$

Mivel a maximum-elvben szereplő ψ segédvektor vagy párhuzamos az x^2 tengellyel, vagy csak az egyik félsíkban mozog (szögét folytonosan változtatva), lásd [2], azért a részletes számításokat csak olyan optimális trajektóriákra végezzük el, amelyeknek megfelelő ψ a jobboldali félsíkon mozog (4. ábra).

Haladjon át a (2.8) egyenletrendszer trajektóriája az $\mathbf{M}(\mathbf{b}, \mathbf{c}, t)$ ponton a t időpillanatban, ahol $\mathbf{c}$ az egyenletrendszer szinguláris pontja és $\mathbf{M}(\mathbf{b}, \mathbf{c}, 0)=\mathbf{b}$.

2.2. Lemma. Ha $(x^1, x^2)=$ $=\mathbf{M}(\mathbf{b}, \mathbf{c}, t)$ valamely $t\leqq 0$ esetén, akkor teljesülnek a következők:

(i) $|\mathbf{x}-\mathbf{c}| < K|\mathbf{b}-\mathbf{c}|$, ahol $K=$ $=1+\dfrac{1}{\lambda}$;

(ii) vagy $c^2 \leqq x^2 \leqq b^2$, ha $c^2 \leqq b^2$,

vagy $c^2 \geqq x^2 \geqq b^2$, ha $c^2 \geqq b^2$.

Bizonyítás. A (2.8) egyenletrendszer $\mathbf{M}(\mathbf{b}, \mathbf{c}, t)$ trajektóriáját az

$$\begin{aligned} x^1-c^1 &= [(b^1-c^1)+(b^2-c^2)t]e^{\lambda t}, \\ x^2-c^2 &= (b^2-c^2)e^{\lambda t} \end{aligned}$$

rendszer szolgáltatja, amiből az (ii) állítás triviálisan következik, az (i) állítás pedig következik az

$$|\mathbf{x}-\mathbf{c}|^2 \leqq |\mathbf{b}-\mathbf{c}|^2(1-t+t^2)e^{2\lambda t} < |\mathbf{b}-\mathbf{c}|^2\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)^2$$

egyenlőtlenség-sorozatból.

Minden optimális trajektória, amelynek megfelelő ψ segédvektor a jobboldali félsíkban mozog, egy

$$\emptyset \mathbf{a}_{g+1} \mathbf{a}_g \mathbf{a}_{g-1} \dots \mathbf{a}_{p+1} \mathbf{a}_p \mathbf{a}_{p-1} \tag{2.10}$$

görbe része, lásd [1], ahol

$$\emptyset \mathbf{a}_{g+1} = \{\mathbf{x} : \mathbf{x} = \mathbf{M}(\emptyset, \mathbf{h}_{g+1}, t),\ 0 \geqq t \geqq -\tilde{T}_{g+1},\ \tilde{T}_{g+1} < +\infty\},$$

$$\mathbf{a}_{g+1} \mathbf{a}_g = \{\mathbf{x} : \mathbf{x} = \mathbf{M}(\mathbf{a}_{g+1}, \mathbf{h}_g, t),\ 0 \geqq t \geqq -\tilde{T}_g,\ \tilde{T}_g \leqq T_g\},$$

$$\mathbf{a}_g \mathbf{a}_{g-1} = \{\mathbf{x} : \mathbf{x} = \mathbf{M}(\mathbf{a}_g, \mathbf{h}_{g-1}, t),\ 0 \geqq t \geqq -\tilde{T}_{g-1},\ \tilde{T}_{g-1} \leqq T_{g-1}\},$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{a}_{p+1} \mathbf{a}_p = \{\mathbf{x} : \mathbf{x} = \mathbf{M}(\mathbf{a}_{p+1}, \mathbf{h}_p, t),\ 0 \geqq t \geqq -\tilde{T}_p,\ \tilde{T}_p \leqq T_p\},$$

$$\mathbf{a}_p \mathbf{a}_{p-1} = \{\mathbf{x} : \mathbf{x} = \mathbf{M}(\mathbf{a}_p, \mathbf{h}_{p-1}, t),\ 0 \geqq t \geqq -\tilde{T}_{p-1},\ \tilde{T}_{p-1} < +\infty\}.$$

A 2.2 lemma (i) állítása alapján becsüljük a (2.10) görbe pontjainak az origótól vett távolságát.

Ha $(x^1, x^2) \in \emptyset \mathbf{a}_{g+1}$, akkor

$$|\mathbf{x} - \mathbf{h}_{g+1}| < |\mathbf{h}_{g+1}| K,$$

tehát

$$|\mathbf{x}| < |\mathbf{h}_{g+1}| + |\mathbf{h}_{g+1}| K.$$

Ha $(x^1, x^2) \in \mathbf{a}_{g+1} \mathbf{a}_g$, akkor

$$|\mathbf{x} - \mathbf{h}_g| < |\mathbf{a}_{g+1} - \mathbf{h}_g| K \leqq (|\mathbf{a}_{g+1} - \mathbf{h}_{g+1}| + |\mathbf{h}_{g+1} - \mathbf{h}_g|) K < (|\mathbf{h}_{g+1}| K + |\mathbf{h}_{g+1} - \mathbf{h}_g|) K,$$

tehát

$$|\mathbf{x}| < |\mathbf{h}_g| + (|\mathbf{h}_{g+1}| K + |\mathbf{h}_{g+1} - \mathbf{h}_g|) K.$$

Ha $(x^1, x^2) \in \mathbf{a}_g \mathbf{a}_{g-1}$, akkor

$$|\mathbf{x} - \mathbf{h}_{g-1}| < |\mathbf{a}_g - \mathbf{a}_{g-1}| K \leqq$$

$$\leqq (|\mathbf{a}_g - \mathbf{h}_g| + |\mathbf{h}_g - \mathbf{h}_{g-1}|) K < \big((|\mathbf{h}_{g+1}| K + |\mathbf{h}_{g+1} - \mathbf{h}_g|) K + |\mathbf{h}_g - \mathbf{h}_{g-1}|\big) K,$$

tehát

$$|\mathbf{x}| < |\mathbf{h}_{g-1}| + \big((|\mathbf{h}_{g+1}| K + |\mathbf{h}_{g+1} - \mathbf{h}_g|) K + |\mathbf{h}_g - \mathbf{h}_{g-1}|\big) K,$$

$$\vdots$$

Ha $(x^1, x^2) \in \mathbf{a}_p \mathbf{a}_{p-1}$, akkor

$$|\mathbf{x}| < |\mathbf{h}_{p-1}| + \big((\dots((|\mathbf{h}_{g+1}| K + |\mathbf{h}_{g+1} - \mathbf{h}_g|) K + |\mathbf{h}_g - \mathbf{h}_{g-1}|) K + \dots$$

$$\dots + |\mathbf{h}_{p+1} - \mathbf{h}_p|) K + |\mathbf{h}_p - \mathbf{h}_{p-1}|\big) K.$$

Hasonló becslést kapunk a másik félsíkra is, és könnyű belátni, hogy az

$$R = (1 + K^s) \max_i |\mathbf{h}_i| + K^{s-1} \sum_{i=1}^{s} |\mathbf{h}_i - \mathbf{h}_{i-1}|$$

közös majoráns lesz (az összegzésben az index $\bmod s$ értendő). Következésképpen a (2.8) egyenletrendszer szintézistartománya pontjainak x^1 koordinátájára

$$|x^1| < (1+K^s)\max_i |\mathbf{h}_i| + K^{s-1}\sum_{i=1}^{s} |\mathbf{h}_i - \mathbf{h}_{i-1}|. \tag{2.11}$$

Analóg módon a (3) esethez a 2.2 lemma (ii) állításából következik, hogy

$$\min_i h_i^2 < x^2 < \max_i h_i^2. \tag{2.12}$$

Ha a (2.11)-be behelyettesítjük a

$$|\mathbf{h}_i| \leqq \frac{1}{\lambda}\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)|\mathbf{f}_i|$$

egyenlőtlenséget, azt kapjuk, hogy

2.4. TÉTEL. Az

$$|x^1| < \frac{K}{\lambda}\left[[(1+K^s)\max|f_i| + K^{s-1}\mathrm{Ker}\, V]\right],$$

$$-\frac{\max f_i^2}{\lambda} < x^2 < -\frac{\min f_i^2}{\lambda}$$

téglalap tartalmazza a (2.8) egyenletrendszer szintézistartományát, ahol $K=1+\frac{1}{\lambda}$, Ker V a V vezérlési tartomány kerülete.

Szeretném köszönetemet kifejezni N. H. Rozovnak a probléma felvetéséért és dr. KÓSA ANDRÁSnak értékes tanácsaiért.

IRODALOM

[1] URBÁNSZKI, F., „Speciális időoptimum folyamat szintézistartományára vonatkozó becslés", *MTA Számítástechnikai Központ Közleményei* **8** (1971).

[2] БОЛТЯНСКИЙ, В. Т., *Математические методы оптимального управления* (Москва, 1969).

(Beérkezett: 1974. március 18.)

URBÁNSZKI FERENC
MTA SZÁMÍTÁSTECHNIKAI ÉS AUTOMATIZÁLÁSI KUTATÓ INTÉZET
1502 BUDAPEST XI., KENDE U. 13—17.

ОЦЕНКА ОБЛАСТИ ДОСТИЖИМОСТИ ЛИНЕЙНОГО ОПТИМАЛЬНОГО БЫСТРОДЕЙСТВИЯ

Ф. Урбански

Область достижимости линейного оптимального быстродействия на плоскости будет ограничена, если матрица дифференциального управнения неустойчива. В статье дается оценка (в некотором случае точный грань) области достижимости такого процесса.

Alkalmazott Matematikai Lapok **1** *(1975) 125—138*

A HATÁRÉRTÉK-LOGIKÁK HOMOMORFIZMUSAIRÓL

DEMETROVICS JÁNOS

Budapest

Ismert tény, hogy a digitális technikában ma már a kétértékű logikán [1], [10] kívül a többértékű logikák [2] is alkalmazást nyernek. Felmerült a szükségessége egy olyan logikafogalom megalkotásának, amelynek segítségével a véges értékű logikák [2], [8] bizonyos problémái egyidejűleg tárgyalhatók — ilyen fogalom a határérték-logika, melyet Sz. V. JABLONSZKIJ vezetett be [9].

A jelen dolgozatban megvizsgálunk néhány természetesen felvetődő parciális rendezést a határérték-logikák halmazán. Ezeknek a parciális rendezéseknek a segítségével ekvivalencia relációkat definiálunk, amelyek a határérték-logikák halmazát felosztják ekvivalens osztályokra. Vizsgálataink elsősorban az ekvivalencia osztályokra irányulnak és minden egyes parciális rendezés alkalmával az is érdekel bennünket, hogy létezik-e minimális és maximális elem az alábbiakban meghatározott parciális rendezésekben.

A legismertebb és a legegyszerűbb ekvivalencia az izomorfizmus. Az [5], [6] és [9] munkákból ismeretes, hogy létezik kontinuum sok nem izomorf határérték-logika.

A jelen dolgozatban bebizonyítjuk, hogy más (lényegesen nagyobb) ekvivalenciák esetében is létezik — a bázisszámtól függetlenül — kontinuum sok határérték-logika és hogy a jelen dolgozatban vizsgált parciális rendezéseknek nincs sem minimális, sem pedig maximális eleme.

1. Alapfogalmak

A következőkben definiáljuk azokat az alapfogalmakat, amelyekre a dolgozatban szükségünk lesz.

1.1. DEFINICIÓ. Legyen E_k egy tetszőleges k-elemű halmaz ($k \geqq 2$). Jelöljük P_k^n-val ($n=0, 1, 2, \ldots$) az olyan n változós $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ függvények halmazát, amelyek változói és értékei E_k-beli elemek. *k-értékű logikának* nevezzük a $P_k = \bigcup_{n=0}^{\infty} P_k^n$ függvényhalmazt. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $E_k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$.

1.2. DEFINICIÓ. Ha az 1.1. definícióban szereplő E_k véges halmazt valamilyen $\aleph_0$ számosságú $E_{\aleph_0}$ halmazzal helyettesítjük, akkor az így kapott $P_{\aleph_0}$ függvényhalmazt *végtelen értékű logikának* nevezzük. Dolgozatunkban $E_{\aleph_0}$ mindig a nem negatív egész számok halmazát jelöli.

1.3. DEFINICIÓ. A P_k ($P_{\aleph_0}$) véges értékű (végtelen értékű) logika valamely $Q = Q_0$ részhalmazát *zárt függvényosztálynak* nevezzük ($[Q]$), ha zárt a változók permutációjára és a szuperpozícióra nézve, azaz teljesülnek a következő feltételek:

a) ha $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in Q$, akkor $f(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}) \in Q$ ($i=1, 2, \ldots, n$), ahol $\{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}\}$ az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ változók egy n-ed osztályú ismétléses variációja;

b) ha $f(x_1, x_2, ..., x_n) \in Q$ és $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$ eleme a Q-nak vagy pedig változó, akkor $f(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n) \in Q$.

1.4. DEFINICIÓ. Egy *Q függvényosztály lezártja* a Q-t tartalmazó legszűkebb zárt $[Q]$ függvényosztály.

1.5. DEFINICIÓ. Legyen $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N} \subseteq P_{\aleph_0}$, $\mathfrak{N}=[\mathfrak{N}]$. *Az $\mathfrak{M}$ részhalmaz teljes az $\mathfrak{N}$-ben*, ha $[\mathfrak{M}]=\mathfrak{N}$. *Az $\mathfrak{M}$ függvényhalmaz majdnem teljes az $\mathfrak{N}$-ben*, ha nem teljes az $\mathfrak{M}$-ben, de ha hozzá adunk bármilyen $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ függvényt az $\mathfrak{N} \setminus [\mathfrak{M}]$ halmazból, akkor az $[\{f(x_1, x_2, ..., x_n)\} \cup \mathfrak{M}]$ teljes lesz az $\mathfrak{N}$-ben.

1.6. DEFINICIÓ. Legyenek $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ függvényhalmazok. Jelöljük $\{x_1, x_2, ...\}$-vel, ill. $\{y_1, y_2, ...\}$-vel az $\mathfrak{A}$-ban, ill. $\mathfrak{B}$-ben levő függvények változóinak halmazát. Azt mondjuk, hogy az *$\mathfrak{A}$ függvényhalmazt homomorf módon leképezzük a $\mathfrak{B}$ függvényhalmazra*, ha teljesülnek a következő feltételek:

a) minden x_i változónak kölcsönösen egyértelműen megfelel egy y_i változó;

b) minden $f(x_1, x_2, ... x_n) \in \mathfrak{A}$ függvénynek megfelel egy és csak egy $g(y_1, y_2, ...$ $..., y_n) \in \mathfrak{B}$ függvény, amely a megfelelő változóktól függ.

c) minden $\mathfrak{B}$-beli elem fellép képként;

d) ha az $f(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathfrak{A}$ függvénynek megfelel a $g(y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathfrak{B}$, és $f(x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_n}) \in \mathfrak{A}$, akkor az $f(x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_n})$ függvénynek a $g(y_{i_1}, y_{i_2}, y_{i_n}) \in \mathfrak{B}$ függvény felel meg;

f) ha az $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, $f_1(x_{11}, x_{12}, ..., x_{1m_1})$, $f_2(x_{21}, x_{22}, ..., x_{2m_2})$, ..., $..., f_n(x_{n1}, x_{n2}, ..., x_{nm_n})$ függvényeknek megfelelnek rendre a $g(y_1, y_2, ..., y_n)$, $g_1(y_{11}, y_{12}, ..., y_{1m_1})$, $g_2(y_{21}, y_{22}, ..., y_{2m_2})$, ..., $g_n(y_{n1}, y_{n2}, ..., y_{nm_n})$ függvények, ahol $f_i(g_i)$ $(i=1, 2, ..., n)$ vagy változó: $x_j(y_j)$ $(j=1, 2, ..., n)$, vagy pedig függvény, és ha $f(f_1, f_2, ..., f_n) \in \mathfrak{A}$, akkor az $f(f_1, f_2, ... f_n)$ függvénynek a $g(g_1, g_2, ..., g_n) \in \mathfrak{B}$ függvény felel meg.

Ha *e* homomorf leképezés kölcsönösen egyértelmű, akkor azt mondjuk, hogy az $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ függvényhalmazok izomorfak ($\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$).

1.7. DEFINICIÓ. A $P_{\aleph_0}$ végtelen értékű logika P részhalmazát határérték-logikának nevezzük, ha teljesülnek a következő feltételek:

a) P-ben csak megszámlálható sok függvény van;

b) minden természetes k-hoz ($k \geqq 2$) létezik egy olyan A_k függvényhalmaz ($A_k \subseteq P$), amelyet homomorf módon le lehet képezni a k-értékű logikára.

1.8. DEFINICIÓ. Egy B függvénysorozatot a *Q függvényhalmaz bázisának* nevezzük, ha teljesülnek a következő feltételek:

a) B teljes Q-ban, azaz $[B]=Q$;

b) Nincs a B-nek olyan valódi részhalmaza, amely a Q-ban teljes.

1.9. DEFINICIÓ. Azt mondjuk, hogy az $f(x)$ függvény rendszáma k ($1 \leqq k \leqq \aleph_0$), ha az $[\{f(x)\}]$ függvényhalmaz számossága k.

2. Az összehasonlítható határérték-logikákról

Ebben a részben bebizonyítjuk, hogy létezik kontinuum sok határérték-logika, amelyek nem izomorfok, de kölcsönösen lefedik egymást.

2.1. DEFINICIÓ. Ha az $\mathfrak{A}$ határérték-logika homomorf módon leképezhető a $\mathfrak{B}$ logikára, akkor azt mondjuk, hogy $\mathfrak{B}$ lefedhető $\mathfrak{A}$-val ($\mathfrak{A} \geqq \mathfrak{B}$). A $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ logikákat kölcsönösen fedő logikának nevezzük ($\mathfrak{A} < > \mathfrak{B}$), ha $\mathfrak{A}$ lefedhető $\mathfrak{B}$-vel, és $\mathfrak{B}$ lefedhető $\mathfrak{A}$-val. Természetesen, hogy ezzel a határérték-logikák halmazán egy parciális rendezést adtunk meg. Könnyen belátható, hogy a kölcsönös összehasonlíthatóság ekvivalenciareláció. Nem szorul bizonyításra az a tény, hogy ha $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$, akkor $\mathfrak{A} < > \mathfrak{B}$.

Legyen $\varepsilon_i^{(1)} = \{2^{i+1}-2,\ 2^{i+1},\ 2^{i+1}+2, \dots,\ 2^{i+1}+2^{i+1}-4\}$, $(i \geqq 1)$. Definiáljuk az $\eta_i^1(x)$ függvényt a következő módon $(i = 1, 2, \dots)$:

$$\eta_i^1(x) = \begin{cases} 2^{i+1}+j, & \text{ha} \quad x = 2^{i+1}-2+j \quad (j = 0, 2, \dots, 2^{i+1}-4); \\ 2^{i+1}-2, & \text{ha} \quad x = 2^{i+1}+2^{i+1}-4; \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

Legyen

$$\eta_i^j(x) = \underbrace{\eta_i^1(\eta_i^1(\dots\, \eta_i^1}_{j\text{-szer}}(x)\dots)), \quad j = 1, 2, 3, \dots, 2^i.$$

2.1. Lemma. Az $[\{\eta_{i+m}^1(x)\}]$ függvényhalmaz homomorf módon leképezhető az $[\{\eta_i^1(x)\}]$ függvényhalmazra $(m \geqq 0)$.

Bizonyítás. Nyilvánvaló, hogy a következő leképezés a kívánt homomorfizmust szolgáltatja:

$$\eta_{i+m}^{2^i\cdot j+1}(x) \to \eta_i^1(x);$$

$$\eta_{i+m}^{2^i\cdot j+2}(x) \to \eta_i^2(x);$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\eta_{i+m}^{2^i\cdot j+2^i}(x) \to \eta_i^{2^i}(x);$$

ahol $0 \leqq j \leqq 2^m - 1$.

A lemmát bebizonyítottuk.

Legyen α egy végtelen, 0-ból és 1-ből álló számsorozat. Az α számsorozatnak feleltessük meg az F_α függvénysorozatot a következőképpen: ha az α-ban az i-edik helyen $(i = 1, 2, \dots)$ 1 (ill. 0) áll, akkor az F_α-ban az i-edik helyen álljon $\eta_i^1(x)$ $(\eta_0(x) \equiv 0)$.

2.2. Lemma. Ha az α számsorozat nem azonos a β számsorozattal, akkor $[F_\alpha] \not\cong [F_\beta]$.

Bizonyítás. Ha α és β nem azonosak, akkor létezik olyan i szám, hogy az i-edik helyen az α számsorozatban 1, (ill. 0), a β-ban pedig 0, (ill. 1) áll. Az általánosság megszorítása nélkül feltételezhetjük, hogy az α-ban az i-edik helyen 1, a β-ban pedig 0 áll. Az F_α és F_β függvény sorozat felépítéséből következik, hogy $\eta_i^1(x) \in F_\alpha$ és $\eta_i^1(x) \bar{\in} F_\beta$. Legyen $[F_\alpha] \cong [F_\beta]$. Akkor nyilvánvaló, hogy az $\eta_i^1(x) \in F_\alpha$ függvénynek az $\eta_{i+m}^j(x) \in F_\beta$ függvény felel meg, ahol $m \geqq 1$, $j \geqq 2$ és az $\eta_{i+m}^j(x)$ függvény rendszáma 2^i. Vegyük észre, hogy az $[F_\alpha]$ függvényhalmaz rendelkezik a következő tulajdonsággal: bármelyik szuperpozíció, amelyik egyidejűleg tartalmazza az $\eta_i^t(x) = [\{\eta_i^1(x)\}]$ és az $\eta(x) = [F_\alpha] \setminus [\{\eta_i^1(x)\}]$ függvényeket, azonosan egyenlő nullával. Ugyanakkor ezzel a tulajdonsággal az $[F_\beta]$ nem rendelkezik, ugyanis $\eta_{i+m}^j(\eta_{i+m}^1(x)) \not\equiv 0$.

A lemmát bebizonyítottuk.

2.3. Lemma. $[F_\alpha] < > [F_\beta]$.

Bizonyítás. Legyen α és β két nem egybeeső számsorozat. Bizonyítsuk be, hogy $[F_\alpha]$ $([F_\beta])$ lefedhető az $[F_\beta]$ $([F_\alpha])$-val $(F_\beta \geqq F_\alpha)$. Elegendő megmutatni, hogy az $\{\eta_0(x), F_\beta\}$ függvénysorozatot homomorf módon le lehet képezni az $\{\eta_0(x), F_\beta\}$ függvénysorozatra, minthogy F_α és az F_β alkotja az $[F_\alpha]$ és $[F_\beta]$ függvényhalmazok bázisát.

Válasszunk ki az F_β-ből egy F'_β függvénysorozatot úgy, hogy minden i-re $(i=1, 2, \ldots)$ az F'_β-ban az i-edik helyen az $\eta_l^1(x)$ függvény álljon, ahol $\eta_l^1(x) \in F_\beta$ és $l \geqq i$. Ilyen F'_β függvénysorozat létezik, mivel a feltételezés szerint β végtelen sok egyest tartalmaz.

A leképezést a következő módon konstruáljuk:

1. minden i-re $(i=1, 2, \ldots)$ az F'_β i-edik tagjának feleltessük meg az F_α i-edik tagját; vagyis $\eta_l^1(x) \to \eta_i^1(x)$ $(l \geqq i \geqq 0)$;

2. az $[F_\beta] \setminus [F'_\beta]$ függvényhalmaz minden egyes függvényének feleltessük meg az $\eta_0(x)$ függvényt. Ez a leképezés valóban egy megfelelő homomorfizmus, mert az $[\{\eta_l^1(x)\}]$ halmaz homomorf módon leképezhető az $[\{\eta_i^1(x)\}]$ függvényhalmazra, ha $l \geqq i$ (2.1. lemma). Vegyük még észre, hogy minden olyan szuperpozíció, amelyben egyidejűleg részt vesznek az $\eta'(x) \in [\{\eta_j^1(x)\}]$ és az $\eta''(x) \in [\{\eta_k^1(x)\}]$ $(j \neq k)$ függvények azonosan egyenlők nullával. Könnyen belátható, hogy az $\bar{\eta}'$ és az $\bar{\eta}''$ (az η' és az η'' függvények képei) is rendelkeznek ezzel a tulajdonsággal.

Legyen

$$\varepsilon_0 = \{0, 1, 3, \ldots, 2r+1, \ldots\}; \quad \varepsilon_0 = \bigcup_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k^{(2)},$$

ahol $\varepsilon_1^{(2)} = \{0\}$ és $\varepsilon_k^{(2)} = \{k(k-1)-1, k(k-1)+1, \ldots, k(k-1)+2k-3\}$, ha $k \geqq 2$.

Értelmezzük a $\varphi_k(x_1, x_2)$ $(k \geqq 2)$ és a $\varphi(x_1, x_2)$ függvényeket a következő módon:

$$\varphi_k(x_1, x_2) =$$

$$= \begin{cases} \max(x_1, x_2)+1, & \text{ha} \quad (x_1, x_2) \in \varepsilon_k^{(2)} \times \varepsilon_k^{(2)} \text{ és } x_i \neq k(k-1)+2k-3 \\ & \qquad (i = 1, 2); \\ k(k-1)-1, & \text{ha} \quad (x_1, x_2) \in \varepsilon_k^{(2)} \times \varepsilon_k^{(2)} \text{ és } x_i = k(k-1)+2k-3 \\ & \qquad (i = 1 \text{ vagy } i=2); \\ 0, & \text{különben,} \end{cases}$$

$$\varphi(x_1, x_2) = \begin{cases} \varphi_k(x_1, x_2), & \text{ha létezik olyan } k, \text{ hogy } (x_1, x_2) \in \varepsilon_k^{(2)} \times \varepsilon_k^{(2)}; \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

Jelöljük Q-val a $[\{\varphi(x_1, x_2)\}]$ függvényhalmazt.

2.4. LEMMA. Q határérték-logika.

Bizonyítás. Elegendő bebizonyítani, hogy a Q-ban létezik olyan P'_k osztály, amelyet homomorf módon le lehet képezni a k-értékű logikára. Ismert tény [4], hogy az úgynevezett *Webb-függvény*, $W_k(z_1, z_2) = \max(z_1, z_2)+1 \pmod{k}$ $(z_1, z_2 \in E_k)$ generálja a k-értékű logikát.

A $\varphi_k(x_1, x_2)$ függvény felépítéséből következik, hogy $[\{\varphi_k(x_1, x_2)\}] \cong [\{W_k(z_1, z_2)\}]$, továbbá nyilvánvaló a $\varphi(x_1, x_2) \geqq \varphi_k(x_1, x_2)$ homomorfizmus létezése.

Ezért a $\varphi(x_1, x_2) \to W_k(z_1, z_2)$ leképezés a keresett homomorfizmus.

2.1. TÉTEL. Létezik kontinuum sok nem izomorf határérték-logika, amelyek kölcsönösen lefedik egymást.

Bizonyítás. Azt bizonyítjuk be, hogy az $\{[F_\alpha \cup Q], [F_\beta \cup Q], [F_\gamma \cup Q], \ldots\}$ logikahalmaz rendelkezik a kívánt tulajdonsággal. Legyen α különböző a β-tól. Mutassuk meg, hogy $[F_\alpha \cup Q] \not\cong [F_\beta \cup Q]$. Könnyű belátni, hogy az $[F_\alpha \cup Q] \cong [F_\beta \cup Q]$ feltételezésből következik $[F_\alpha] \cong [F_\beta]$, minthogy az a szuperpozíció, amelyekben egyidejűleg a Q-ból és az $[F_\alpha]$ ($[F_\beta]$)-ból vannak függvények, azonosan egyenlő nullával. Ám ez ellentmond a 2.2 lemmának.

Mutassuk meg, hogy $[F_\alpha \cup Q] <> [F_\beta \cup Q]$. Ennek a bizonyítására elegendő megmutatni, hogy $[F_\alpha] < [F_\beta]$. Ez az állítás pedig a 2.3 lemmából következik. Minthogy $\{\alpha_i,\ i \in \mathscr{C}\}$ számossága kontinuum, az $\{[F_\alpha \cup Q], [F_\beta \cup Q], \ldots\}$ halmaz számossága is kontinuum, s ezzel a tételt bebizonyítottuk.

3. A határérték-logikák elnyelhetősége

Ebben a részben bebizonyítjuk azt, hogy léteznek olyan hatérérték-logikák, amelyek nem fedik egymást, ellenben elnyelik egymást. A 3.1 tételben felépítjük a határérték-logikának egy olyan kontinuum számosságú halmazát, amelyben minden egyes logika-pár rendelkezik a fent említett tulajdonsággal.

3.1. DEFINICIÓ. Azt mondjuk, hogy az $\mathfrak{A}$ *határérték-logika elnyeli a* $\mathfrak{B}$ *határérték-logikát* ($\mathfrak{A} \supset : \mathfrak{B}$), ha létezik egy olyan $\mathfrak{A}'$ határérték-logika az $\mathfrak{A}$-ban, amely $\mathfrak{B}$-vel kölcsönös fedésben áll ($\mathfrak{A}' <> \mathfrak{B}$). Azt mondjuk, hogy két határérték-logika, $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ kölcsönösen elnyeli egymást ($\mathfrak{A} \supset : : \subset \mathfrak{B}$), ha léteznek olyan $\mathfrak{A}'$ és $\mathfrak{B}'$ logikák ($\mathfrak{A}' \subseteq \mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}' \subseteq \mathfrak{B}$), hogy $\mathfrak{A}' <> \mathfrak{B}$ és $\mathfrak{B}' <> \mathfrak{A}$. Nyilvánvaló, hogy a kölcsönös elnyelhetőség a határérték-logikák halmazát ekvivalencia osztályokra osztja fel és az elnyelhetőség egy parciális rendezés.

Megjegyzés: Könnyű belátni, hogy ha $\mathfrak{A} <> \mathfrak{B}$, akkor azok elnyelik egymást, fordítva azonban nem igaz.

Legyen $\Pi = \{p_1, p_2, p_3, \ldots\}$ az összes prímszámok sorozata növekvő sorrendben. Határozzuk meg rekurzióval az $\varepsilon_{p_j}^{(3)}$ halmazokat: $\varepsilon_{p_0}^{(3)} = \{0\}$ ($p_0 = 0$), $\varepsilon_{p_1}^{(3)} = \{1, 2\}$, ha $j \geq 1$ és $\varepsilon_{p_j}^{(3)} = \{a_1, a_2, \ldots, a_s\}$, akkor $\varepsilon_{p_{j+1}}^{(3)} = \{a_s + 1, a_s + 2, \ldots, a_s + p_{j+1}\}$. Vegyük észre, hogy $E_{\aleph_0} = \bigcup_{j=0}^{\infty} \varepsilon_{p_j}^{(3)}$.

Legyen $\varepsilon_{p_j}^{(3)} = \{e_{p_j}, e_{p_j} + 1, \ldots, e_{p_j} + p_j - 1\}$. Definiáljuk a $\mu_{p_j}(x_1, x_2)$ ($j \geq 1$) függvényt a következő módon:

$$\mu_{p_j}(x_1, x_2) =$$

$$= \begin{cases} \max(x_1, x_2) + 1, & \text{ha } (x_1, x_2) \in \varepsilon_{p_j}^{(3)} \times \varepsilon_{p_j}^{(3)} \text{ és } x_i \neq e_{p_j} + p_j - 1 \ (i = 1, 2); \\ e_{p_j}, & \text{ha } (x_1, x_2) \in \varepsilon_{p_j}^{(3)} \times \varepsilon_{p_j}^{(3)} \text{ és } x_i = e_{p_j} + p_j - 1 \ (i = 1 \text{ vagy } i = 2); \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

Jelöljük H_{p_j}-vel a $[\{\mu_{p_j}(x_1, x_2)\}]$ függvényhalmazt.

Legyen α nullából és egyből álló végtelen számsorozat. Minden egyes α alapján építsünk fel egy H_α függvénysorozatot a következőképpen: ha az α-ban a k-adik helyen ($k = 1, 2, \ldots$) 1 (ill. 0) áll, akkor az H_α-ban a k-adik helyen $\mu_{p_{2k}}(x_1, x_2)$ (ill. $\mu_{p_{2k-1}}(x_1, x_2)$) álljon. A H_α függvénysorozatban a nulladik helyen a $\mu_{p_0}(x_1, x_2) \equiv 0$ függvény legyen.

Jelöljük $\mathfrak{H}_\alpha$-val $[H_\alpha]$-t.

3.1. Lemma. $\mathfrak{H}_\alpha$ határérték-logika.

Bizonyítás. Be kell bizonyítani, hogy minden k-ra ($k \geqq 2$) létezik a $\mathfrak{H}_\alpha$-ban egy A_k függvényosztály, amelyet homomorf módon le lehet képezni a k-értékű logikára.

Ha $k=p_i$ és $\mu_{p_i}(x_1, x_2) \in \mathfrak{H}_\alpha$, akkor az állítás nyilvánvaló, mivel $[\{\mu_{p_i}(x_1, x_2)\}] \cong \cong [\{W_k(z_1, z_2)\}]$.

Ha $k \neq p_i$, akkor válasszunk ki egy olyan p-t, hogy $p > k$ és $\mu_p(x_1, x_2) \in \mathfrak{H}_\alpha$ teljesüljön. Ilyen p létezik. Mivel a $[\{\mu_p(x_1, x_2)\}]$ izomorf a p-értékű logikával, úgy a $[\{\mu_p(x_1, x_2)\}]$-ben van a $\mu_{p,k}(x_1, x_2)$ függvény, ahol

$$\mu_{p,k}(x_1, x_2) =$$

$$= \begin{cases} \max(x_1, x_2)+1, & \text{ha} \quad e_p \leqq x_1, x_2 \leqq e_p+k-2; \\ e_p, & \text{ha} \quad e_p \leqq x_1, x_2 \leqq e_p+k-2 \text{ és } \max(x_1, x_2) = e_p+k-1; \\ 0, & \text{ha} \quad (x_1, x_2) \bar{\in} \varepsilon_p^{(3)} \times \varepsilon_p^{(3)}; \\ e_p+p-1, & \text{különben.} \end{cases}$$

A $\mu_{p,k}(x_1, x_2)$ felépítéséből következik, hogy a $\mu_{p,k}(x_1, x_2) \to W_k(z_1, z_2)$ leképzés a keresett homomorfizmus.

3.2. Lemma. A $[\{\mu_{p_j}(x_1, x_2)\}]$ függvényhalmazt nem lehet homomorf módon leképezni a $[\{\mu_{p_i}(x_1, x_2)\}]$ függvényhalmazra, ha $0 \neq i \neq j \neq 0$.

A lemma bizonyítása a [7] cikkben található.

3.3. Lemma. Ha az α és β számsorozatok nem azonosak, akkor a $\mathfrak{H}_\alpha$ és $\mathfrak{H}_\beta$ határérték-logikák nem fedik egymást.

Bizonyítás. A bizonyítás indirekt, tegyük fel, hogy α különbözik β-tól és $\mathfrak{H}_\alpha$ és $\mathfrak{H}_\beta$ logikák mégis fedik egymást. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $\mathfrak{H}_\alpha \geqq \mathfrak{H}_\beta$. Mivel α különbözik a β-tól, létezik olyan k, hogy a k-adik helyen az α-ban 1 (ill. 0), a β-ban pedig 0 (ill.1) áll. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy az α-ban a k-adik helyen 1, a β-ban 0 áll. A $\mathfrak{H}_\alpha$ és $\mathfrak{H}_\beta$ függvénysorozatok definíciója szerint $\mu_{p_{2k}}(x_1, x_2) \in \mathfrak{H}_\alpha$, $\mu_{p_{2k}}(x_1, x_2) \bar{\in} \mathfrak{H}_\beta$ és $\mu_{p_{2k-1}}(x_1, x_2) \bar{\in} \mathfrak{H}_\alpha$, $\mu_{p_{2k-1}}(x_1, x_2) \in \mathfrak{H}_\beta$. Most vizsgáljuk meg, hogy a $\mathfrak{H}_\alpha$-ból milyen függvényeket képezünk le a $\mu_{p_{2k-1}}(x_1, x_2)$ függvényre.

Tegyük fel, hogy a $\mu^{(1)}(x_1, x_2) \in H_{p_i}$, $\mu^{(2)}(x_1, x_2) \in H_{p_j}$, ... ($i \neq j$; $H_{p_i}, H_{p_j} \in \mathfrak{H}_\alpha$) függvények képe a $\mu_{p_{2k-1}}(x_1, x_2) \in \mathfrak{H}_\beta$ függvény. Könnyű belátni, hogy ebben az esetben $\mu^{(1)}(\mu^{(2)}(x_1, x_2), \mu^{(2)}(x_1, x_1)) \equiv 0$ és $\mu_{p_{2k-1}}(\mu_{p_{2k-1}}(x_1, x_1), \mu_{p_{2k-1}}(x_1, x_1)) = f(x)$, ahol az $f(x)$ rendszáma nagyobb mint egy. Ez ellentmond a feltételezésnek. Ezért legfeljebb csak egy függvény lehet a $\mu_{p_{2k-1}}(x_1, x_2)$ függvény őse. Legyen ez a $\mu^{(1)}(x_1, x_2)$ függvény, ahol $[\{\mu^{(1)}(x_1, x_2)\}] = H \subseteqq H_{p_i} \subset \mathfrak{H}_\alpha$. A 3.2 lemmából következik, hogy $\mu^1(x_1, x^2) \neq \mu_{p_i}(x_1, x_2)$, mert a $[\{\mu_{p_i}(x_1, x_2)\}]$ függvényhalmazt nem lehet homomorf módon leképezni a $[\{\mu_{p_{2k-1}}(x_1, x_2)\}]$ ($i \neq 2k-1$) halmazra. Másrészt nyilvánvaló, hogy a $\mu_{p_i}(x_1, x_2)$ függvényt a $H_{p_{2k-1}}$-be kell leképezni, mert különben a $\mu_{p_i}(\mu^{(1)}(x_1, x_1), \mu^{(1)}(x_1, x_1)) = f(x)$ függvény képe egyenlő lenne az $f(x) \equiv 0$ függvénnyel, ill. az $f(x)$ függvénynek legalább két képe lenne. Könnyen belátható, hogy ebben az esetben a $\mu_{p_i}(x_1, x_2)$ függvényt a $[\{\mu_{p_{2k-1}}(x_1, x_2)\}]$ függvényosztály bázisába kell leképezni. Ez pedig ellentmond a 3.2 lemmának.

3.1. TÉTEL. Létezik a határérték-logikáknak olyan kontinuum számosságú halmaza, amelyben bármelyik kettő nem fedi egymást, de kölcsönösen elnyeli egymást.

Bizonyítás. Bizonyítsuk be, hogy az $\mathfrak{N}=\{\mathfrak{H}_\alpha, \alpha=\alpha_1, \alpha_2, \ldots; \alpha_i=0$, vagy $\alpha_i=1\}$ határérték-logika halmaz rendelkezik a kívánt tulajdonsággal. A 3.3 lemmából következik, hogy ha $\alpha\neq\beta$, akkor $\mathfrak{H}_\alpha \not\succeq \mathfrak{H}_\beta$ és $\mathfrak{H}_\beta \not\succeq \mathfrak{H}_\alpha$.

Mutassuk meg, hogy a $\mathfrak{H}_\alpha$ ($\mathfrak{H}_\beta$) elnyeli a $\mathfrak{H}_\beta$ ($\mathfrak{H}_\alpha$) logikát, vagyis azt, hogy létezik olyan $\mathfrak{H}'_\alpha \subseteq \mathfrak{H}_\alpha$ határérték-logika, hogy $\mathfrak{H}'_\alpha <> \mathfrak{H}_\beta$.

A $\mathfrak{H}_\alpha$ sorozatból válasszunk ki egy $\mathfrak{H}'_\alpha$ részsorozatot úgy, hogy a $\mathfrak{H}'_\alpha$-ban a k-adik helyen ($k=1, 2, \ldots$) a $\mu_{p_i}(x_1, x_2)$ függvény álljon, ahol $p_i \geqq p_j$ és $\mu_{p_j}(x_1, x_2)$ a $\mathfrak{H}_\beta$-ban áll a k-adik helyen. Nyilvánvaló, hogy ilyen $\mathfrak{H}'_\alpha$ függvény sorozat létezik.

Legyen $p_i > p_j$. Határozzuk meg a $\mu_{p_i, p_j}(x_1, x_2)$ függvényt a következő módon:

$$\mu_{p_i, p_j}(x_1, x_2) =$$

$$= \begin{cases} \max(x_1, x_2)+1, & \text{ha } \ e_{p_i} \leqq x_1, x_2 \leqq e_{p_i}+p_j-2; \\ e_{p_i}, & \text{ha } \ e_{p_i} \leqq x_1, x_2 \leqq e_{p_i}+p_j-1 \text{ és } \max(x_1, x_2) = e_{p_i}+p_j-1; \\ 0, & \text{ha } \ (x_1, x_2) \bar{\in} \varepsilon_i^{(3)} \times \varepsilon_i^{(3)}; \\ e_{p_i}+p_i-1, & \text{különben.} \end{cases}$$

Könnyű belátni, hogy a $[\{\mu_{p_i, p_j}(x_1, x_2)\}] \cong p_{p_j}$, mert a $\mu_{p_i, p_j}(x_1, y_2)$ függvény *Webb-függvény* az $\{e_{p_i}, e_{p_i}+1, \ldots, e_{p_i}+p_j-1\}$ halmazon. Éppen ezért $[\{\mu_{p_i, p_j}(x_1, x_2)\}] = \cong [\{W_{p_j}(z_1, z_2)\}]$.

A fentiekből következik, hogy a H'_α-ból ki tudunk választani egy olyan H''_α határérték-logikát, amelyek kölcsönösen lefedik egymást a $\mathfrak{H}_\beta$-val.

4. A kölcsönösen elnyelő határérték-logikák számosságáról

Ebben a részben bebizonyítjuk, hogy a kölcsönösen elnyelő határérték-logikák számossága kontinuum.

Legyen $\Pi=\{p_1, p_2, \ldots\}$ az összes prímszámok sorozata növekvő sorrendben. Definiáljuk rekurzióval az $\varepsilon_{p_i}^{(4)}$ halmazok sorozatát: $\varepsilon_{p_1}^{(4)}=\{0, 1, 2\}$, és ha $\varepsilon_{p_i}^{(4)}= =\{a_1, \ldots, a_s\}$, akkor $\varepsilon_{p_{i+1}}^{(4)}=\{a_s+1, a_s+2, \ldots, a_s+p_{i+1}\}$. Legyen $\varepsilon_{p_i}^{(4)}=\{e_{p_i}, e_{p_i}+1, \ldots, \ldots, e_{p_i}+p_i-1\}$. Vegyük észre, hogy $E_{\aleph_0}=\bigcup_{i=1}^{\infty} \varepsilon_p^{(4)}$.

Definiáljuk az $f_{p_i}(x)$ ($i=2, 3, \ldots$) függvényeket a következőképpen:

$$f_{p_i}(x) = \begin{cases} x+1, & \text{ha } \ x \in \varepsilon_{p_i}^{(4)} \text{ és } x = e_{p_i}+p_i-1; \\ e_{p_i}, & \text{ha } \ x = e_{p_i}+p_i-1; \\ 0, & \text{másképp.} \end{cases}$$

Legyen $f_{p_1}(x) \equiv 0$.

Legyen α egy nullából és egyből álló végtelen számsorozat. Az α sorozathoz rendeljük hozzá az F_α függvénysorozatot: ha az α-ban az i-edik helyen 1 (ill. 0) áll, akkor az F_α-ban az i-edik helyen 0 (ill. 1) legyen.

4.1. LEMMA. Ha $\alpha\neq\beta$, akkor $[F_\alpha]$ ($[F_\beta]$) nem fedi le $[F_\beta]$ ($[F_\alpha]$)-t.

Bizonyítás. Mivel $\alpha \neq \beta$, létezik olyan i, hogy az α-ban az i-edik helyen 1 (ill. 0); a β-ban pedig (0, ill. 1) áll. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy α-ban az i-edik helyen 1, a β-ban pedig 0 áll. Ez azt is jelenti, hogy $f_{p_{2k}}(x) \in F_\alpha$, $f_{p_{2k}}(x) \overline{\in} F_\beta$ $(f_{p_{2k+1}}(x) \overline{\in} F_\alpha, f_{p_{2k+1}}(x) \in F_\beta)$. Az F_α (ill. F_β) konstrukciójából következik, hogy az F_α-ban (ill. F_β-ban) csak olyan függvények vannak, amelyeknek a rendszáma vagy egy, vagy pedig egy olyan p prímszám, amelyre igaz, hogy $f_p(x) \in F_\alpha$ (ill. $f_p(x) \in F_\beta$). Valóban, könnyű belátni, hogy az $[\{f_p(x)\}]$-ben minden függvénynek a rendszáma p és $f_{p_i}(f_{p_j}(x)) \equiv 0$, ha $i \neq j$.

Ebből következik, hogy az $[\{f_{p_{2k}}(x)\}]$ $([\{f_{p_{2k}}(x)\}]$ függvényosztályt az $[F_\beta]$ $([F_\alpha])$ egyetlen részosztályára sem lehet homomorf módon leképezni.

Ezzel a lemmát bebizonyítottuk.

Legyen $\varepsilon_1^{(5)} = \{0, 1, 2, 3\}$ és $\varepsilon_k^{(5)} = \left\{\frac{k(k-1)}{2}+3, \frac{k(k-1)}{2}+4, \ldots, \frac{k(k-1)}{2}+k+2\right\}$, ha $k \geqq 2$. Legyen $\varepsilon_k^{(6)} = \{k^2+2, k^2+3, \ldots, k^2+k+1\}$. Definiáljuk a $\delta_k(x_1, x_2)$ $(k \geqq 2)$ függvényt a következő módon:

$$\delta_k(x_1, x_2) =$$
$$= \begin{cases} \max\left(x_1, x_2 - \frac{k(k+1)}{2}+1\right)+1, & \text{ha } (x_1, x_2) \in \varepsilon_k^{(5)} \times \varepsilon_k^{(6)}, \text{ és } x_1 \neq \frac{k(k+1)}{2}+2, \\ & \qquad x_2 \neq k^2+k+1; \\ \frac{k(k-1)}{2}+3, & \text{ha } (x_1, x_2) \in \varepsilon_k^{(5)} \times \varepsilon_k^{(6)}, \text{ és } x_1 = \frac{k(k+1)}{2}+2, \\ & \qquad \text{vagy } x_2 = k^2+k+1. \end{cases}$$

Legyen $\varphi_\alpha(x_1, x_2)$ a következő függvény:

$$\varphi_\alpha(x_1, x_2) =$$
$$= \begin{cases} \delta_k(x_1, x_2), & \text{ha létezik olyan } k \ (k \geqq 2), \text{ hogy } (x_1, x_2) \in \varepsilon_k^{(5)} \times \varepsilon_k^{(6)}; \\ x_1+1, & \text{ha } 0 \neq x_1 \neq x_2 \neq 0; \\ f_{p_l}(x), & \text{ha } x_1 = x_2 + l, \text{ ahol } f_{p_l}(x) \text{ az } l\text{-edik helyen áll az } F_\alpha\text{-ban.} \end{cases}$$

Jelöljük $\mathfrak{A}_\alpha$-val a $[\{\varphi_\alpha(x_1, x_2)\}]$ függvényhalmazt.

4.2. LEMMA. $\mathfrak{A}_\alpha$ határérték-logika.

Bizonyítás. Ismeretes (lásd [4]), hogy a

$$W_k(z_1, z_2) = \max(z_1, z_2)+1 \quad (\mathrm{mod}\, k) \quad (z_1, z_2 \in E_k)$$

Webb-függvény generálja a k-értékű logikát. Továbbá az is világos, hogy $[\{W_k(z_1, z_2)\}] \cong [\{W_k'(\bar{z}_1, \bar{z}_2)\}]$, ahol $(\bar{z}_1, \bar{z}_2 \in \varepsilon_k^{(5)})$, és

$$W_k'(\bar{z}_1, \bar{z}_2) = \begin{cases} \max(\bar{z}_1, \bar{z}_2)+1, & \text{ha } \frac{k(k-1)}{2}+3 \leqq \bar{z}_1, \bar{z}_2 \leqq \frac{k(k-1)}{2}+k+1 \\ \frac{k(k-1)}{2}+3, & \text{ha } \frac{k(k-1)}{2}+3 \leqq \bar{z}_1, \bar{z}_2 \leqq \frac{k(k-1)}{2}+k+2 \\ & \text{és } \max(\bar{z}_1, \bar{z}_2) = \frac{k(k-1)}{2}+k+2. \end{cases}$$

Legyen

$$\varphi_\alpha^{[k]}(x_1, x_2) = \begin{cases} \varphi_\alpha(x_1, x_2+k), & \text{ha} \quad x_2 \neq 0; \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

Mivel $\varphi_\alpha(x_1, x_2)$ és $\varphi_\alpha(x_1, x_1) = x_1+1$ (ha $x_1 \neq 0$) eleme az $\mathfrak{A}_\alpha$-nak, $\varphi_\alpha^{[k]}(x_1, x_2) \in \mathfrak{A}_\alpha$. Például $\varphi_\alpha^{[2]}(x_1, x_2) = \varphi_\alpha[x_1, \varphi_\alpha(\varphi_\alpha(x_2, x_2), \varphi_\alpha(x_2, x_2))] = \varphi_\alpha(x_1, x_2+2)$, ha $x_2 \neq 0$. Könnyű belátni, hogy a $\varphi_\alpha^{\left[\frac{k(k+1)}{2}-1\right]}(x_1, x_2) \in \mathfrak{A}_\alpha$ függvény az $\varepsilon_k^{(5)} \times \varepsilon_k^{(5)}$ halmazon megegyezik a $W_k(z_1, z_2)$ függvénnyel, ami nem más, mint a *Webb-függvény* általánosítása a k-értékű logikára.

4.3. LEMMA. Az $\mathfrak{A}_\alpha$-ban minden bázis a következőképpen néz ki: $\varphi_\alpha(x_i, x_j)$ $(i \neq j)$.

Bizonyítás. Amennyiben $\varphi_\alpha(x_i, x_j)$ generálja az egész $\mathfrak{A}_\alpha$-t, úgy nyilvánvaló, hogy a $\varphi_\alpha(x_i, x_j)$ függvény bázis.

Az $\mathfrak{A}_\alpha$ definíciójából következik, hogy az $\mathfrak{A}_\alpha$-ban levő függvények az 1 értéket nem veszik fel és a kettőt is csak azok a függvények veszik fel, amelyeket a $\varphi_\alpha(x_i, x_j)$-ből kapunk a változók átjelölésével. Ezek a függvények is csak az (1.1) értékpáron veszik fel a kettő értéket. Ebből következik, hogy minden $\mathfrak{A}_\alpha$-ban teljes rendszer bizonyos i és j mellett feltétlenül tartalmazza a $\varphi_\alpha(x_i, x_j)$ függvényt.

4.4. LEMMA. Ha $\alpha \neq \beta$, az $\mathfrak{A}_\alpha(\mathfrak{A}_\beta)$ nem fedi le $\mathfrak{A}_\beta(\mathfrak{A}_\alpha)$-t.

Bizonyítás. A lemmát indirekt módon bizonyítjuk be. Legyen $\alpha \neq \beta$ és $\mathfrak{A}_\alpha \geqq \mathfrak{A}_\beta$. Mivel $\varphi_\alpha(x_1, x_2)$ generálja az $\mathfrak{A}_\alpha$-t, bármilyen homomorfizmus esetén a $\varphi_\alpha(x_1, x_2)$-nak megfelel egy olyan függvény az $\mathfrak{A}_\beta$-ból, amely az $\mathfrak{A}_\beta$-t generálja. A 4.3. lemmából következik, hogy az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy vagy a $\varphi_\beta(x_1, x_2)$, vagy pedig a $\varphi_\beta(x_2, x_1)$ függvényről lehet szó. Feleljen meg a $\varphi_\alpha(x_1, x_2)$-nek a $\varphi_\beta(x_1, x_2)$. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy az α-ban a k-adik helyen 1, a β-ban pedig 0 áll.

Vezessük be a következő jelölést

$$g_\gamma^1(x) = \varphi_\gamma(x, x), \quad g_\gamma^2(x) = \varphi_\gamma(g_\gamma^1(x), g_\gamma^1(x), \ldots, g_\gamma^l(x)) = \varphi_\gamma(g_\gamma^{l-1}(x), g_\gamma^{l-1}(x)),$$

ahol $\gamma = \alpha$ vagy $\gamma = \beta$.

A feltételezés szerint $\varphi_\alpha(g_\alpha^k(x), x)$ homomorf módon leképezhető a $\varphi_\beta(g_\beta^k(x), x)$ függvényre. Ebből pedig az következik, hogy $[\{f_{p_{2k}}(x)\}] \geqq [\{f_{p_{2k+1}}(x)\}]$, mivel $\varphi_\alpha(g_\alpha^k(x), x) = f_{p_{2k}}(x)$ és $\varphi_\beta(g_\beta^k(x), x) = f_{p_{2k+1}}(x)$. Ugyanakkor az $[\{f_{p_{2k}}(x)\}]$, $([\{f_{p_{2k+1}}(x)\}])$ függvényosztályban minden függvény rendszáma p_{2k} (p_{2k+1}).

Ha az $\mathfrak{A}_\beta$ határérték-logika bázisa a $\varphi_\beta(x_2, x_1)$ függvény, akkor a $[\{\varphi_\beta(g_\beta^1(x), x)\}]$ osztály tartalmaz két függvényt, amelynek a rendszáma 2, ill. 1. A $[\{\varphi_\alpha(g_\alpha^1(x), x)\}]$ osztályban pedig minden függvény rendszáma 2. Ez pedig ellentmond a feltételezésnek.

4.5. LEMMA. Létezik kontinuum sok páronként nem fedő határérték-logika.

Bizonyítás. Mivel minden egyes határérték-logikában megszámlálható sok függvény van, a határérték-logikák számossága nem lehet nagyobb kontinuumnál. Másrészt pedig a 0-ból és 1-ből álló végtelen számsorozatok számossága kontinuum. A 4.4 lemmából pedig az következik, hogyha $\alpha \neq \beta$, akkor $\mathfrak{A}_\alpha$ nem fedhető le $\mathfrak{A}_\beta$-val.

A lemmát bebizonyítottuk.

Rekurzióval definiáljuk a függvények mélységét:

1) Az x_i változó mélysége 0;

2) A $\varphi_\alpha(x_i, x_j)$ függvények mélysége 1;

3) Ha az f_1 és f_2 függvények mélysége rendre a_1 és a_2, akkor a $\varphi_\alpha(f_1, f_2)$ függvény mélysége $\max(a_1, a_2)+1$,

és pontos mélységét:

1) A $\varphi_\alpha(x_i, x_j)$ függvény pontos mélysége 1;

2) Ha az f_1 és f_2 függvények pontos mélysége $k-1$, akkor a $\varphi(f_1, f_2)$ függvény pontos mélysége k.

Megjegyzés. Könnyű belátni, hogy ha az $f_1, f_2, \ldots, f_l$ függvények pontos mélysége k, akkor a változók azonosítása esetén egyformák lesznek és

$$\varphi_\alpha^k(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad x = 0; \\ x+k, & \text{ha} \quad x \neq 0. \end{cases}$$

Azt mondjuk, hogy az f függvénynek a nem pontos mélysége k, ha a mélysége k, és a pontos mélysége nem k, vagy nincs pontos mélysége.

4.6. Lemma. Ha $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathfrak{A}_\alpha$ és az $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$-nek a nem pontos mélysége k, akkor $f(x_1, x_1, \ldots, x_1)$ csak véges sok helyen vesz fel a 0-tól különböző értéket.

Bizonyítás. A lemmát a k szerinti indukció segítségével bizonyítjuk be. Világos, hogy ha az $f(x_1, x_1, \ldots, x_1)$-nek a nem pontos mélysége 1 vagy 2, akkor a lemma igaz. Legyen a lemma igaz azokra a függvényekre, amelyeknek a nem pontos mélysége $1, 2, \ldots, k-1$.

Legyen az f-nek a nem pontos mélysége k. Akkor $f = \varphi(f_1, f_2)$, ahol legalább az egyik függvénynek — az f_1 és f_2 közül — a mélysége $k-1$. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy az f_1 mélysége $k-1$.

Különböztessük meg a következő két esetet:

a) f_1 és f_2 függvények közül legalább az egyiknek nincs pontos mélysége,

b) mindkét függvény mélysége pontos, de az f_2 függvény mélysége kisebb, mint $k-1$.

Az a) esetben a lemma állítása az indukciós lépésből következik, mivel az $f_2(f_1)$ csak véges sok helyen különbözik a 0-tól, a $\varphi_\alpha(x_1, x_2)$ pedig „megőrzi" a nullát $(\varphi_\alpha(f, 0) = \varphi_\alpha(0, f) = 0)$; a b) esetben pedig az $f_1(x_1, \ldots, x_1)$ és $f_2(x_1, \ldots, x_1)$ függvények alakja a következő:

$$f_1(x_1, \ldots, x_1) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad x_1 = 0; \\ k+x-1, & \text{ha} \quad x_1 \neq 0; \end{cases}$$

$$f_2(x_1, \ldots, x_1) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad x_1 = 0; \\ a+x, & \text{ha} \quad x_1 \neq 0, \text{ ahol } a \leqq k-2. \end{cases}$$

Vagyis azt kapjuk, hogy $f(x_1, x_1, \ldots, x_1) = \varphi_\alpha(f_1(x_1, \ldots, x_1), f_2(x_1, \ldots, x_1)) = \varphi_\alpha(k-1+x_1, a+x_1)$, ha $x_1 \neq 0$. Mivel $a \neq k-1$, úgy a $\varphi_\alpha(x_1, x_2)$ felépítéséből következik, hogy a $\varphi_\alpha(k-1+x_1, a+x_1)$ függvény csak véges sok helyen vesz fel nullától különböző értéket.

4.7. LEMMA. Ha az $f(x_1, x_2) \in \mathfrak{A}_\alpha$ függvénynek van nem pontos mélysége, akkor nem generál határérték-logikát.

Bizonyítás. Mivel az $\mathfrak{A}_\alpha$ határérték-logikának van egy egyelemű bázisa, minden függvényt generálni lehet vele. Legyen $f(x_1, x_2) = \varphi_\alpha(f_1(x_i, x_j), f_2(x_k, x_l))$, ahol az f_1 és f_2 függvények pontos mélysége $k-1$ és $\{x_1, x_2\} \subseteq \{x_i, x_j, x_k, x_l\}$. Vegyük a következő eseteket:

1) $f(x_1, x_2) = \varphi_\alpha(f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2))$. Ekkor az $f(x_1, x_2)$ a $\varphi_\alpha(x_1, x_2)$-ből a változók $k-1$ hellyel való eltolásával adódik. Éppen ezért az $[\{f(x_1, x_2)\}]$ függvényhalmazban nem létezik olyan függvény, amely valamely ε_n' ($|\varepsilon_n'| \geqq n$, $n > 2$) halmazt megőrizné ($f(\varepsilon_n', \varepsilon_n') = \varepsilon_n'$).

2) $f(x_1, x_2) = \varphi_\alpha(\varphi_\alpha^{k-1}(x_1, x_2), \varphi_\alpha^{k-1}(x_1, x_2))$, ahol $\varphi_\alpha^1(x_1, x_2) = \varphi_\alpha(x_1, x_2)$,

$$\varphi_\alpha^2(x_1, x_2) = \varphi_\alpha(\varphi_\alpha^1(x_1, x_2), \varphi_\alpha^1(x_1, x_2)), \ldots, \varphi_\alpha^l(x_1, x_2) = \varphi_\alpha(\varphi_\alpha^{l-1}(x_1, x_2), \varphi_\alpha^{l-1}(x_1, x_2)).$$

Vegyük észre, hogy ebben az esetben az $f(x_1, x_2)$-t a $\varphi_\alpha(x_1, x_2)$-ből úgy kapjuk, hogy a $\varphi_\alpha(x_1, x_2)$ minden 0-tól különböző értékéhez hozzáadunk $(k-1)$-et. A bizonyítás további menete analóg az 1) esettel.

3) $f(x_1, x_2) = \varphi_\alpha(f_1(x_1, x_2), f_2(x_2, x_1))$.

Mindenekelőtt vegyük észre, hogy minden $f_i(x_1, x_2)$ függvény az értéktáblázatban vagy a diagonális alatt, vagy pedig a diagonális felett minden sorban és minden oszlopban legfeljebb csak egy helyen vesz fel 0-tól különböző értéket. Valóban, ezt az állítást indukció segítségével könnyű belátni. Ha az $f_1(x_1, x_2)$ és az $f_2(x_1, x_2)$ függvények a diagonális alatt (felett) rendelkeznek ezzel a tulajdonsággal, akkor az $[\{f(x_1, x_2)\}]$-ben nincs olyan függvény, amely az ε_n' halmazt megőrizné.

A többi eset az 1), 2) és 3) esethez hasonlóan bizonyítható be.

4.1. TÉTEL. Létezik kontinuum sok határérték-logika, amelyek nem nyelik el egymást.

Bizonyítás. A határérték-logika meghatározásából következik, hogy legfeljebb kontinuum sok határérték-logika létezik.

A tételt indirekt módon bizonyítjuk be. Tegyük fel, hogy $\mathfrak{A}_\alpha$ és $\mathfrak{A}_\beta$ elnyelik egymást. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $\mathfrak{A}_\alpha \supset : \mathfrak{A}_\beta$, vagyis létezik olyan $\mathfrak{A}_\alpha' \subseteq \mathfrak{A}_\alpha$ logika, hogy $\mathfrak{A}_\alpha' < > \mathfrak{A}_\beta$. Mivel a $\varphi_\beta(x_1, x_2)$ függvény generálja az $\mathfrak{A}_\beta$ logikát, úgy bármilyen homomorfizmus esetében a $\varphi_\beta(x_1, x_2)$ függvénynek megfelel egy olyan $\varphi_\alpha'(x_1, x_2)$ függvény, amely az $\mathfrak{A}_\alpha'$ logikát generálja. A 4.4. lemmából következik, hogy $\mathfrak{A}_\alpha' \neq \mathfrak{A}_\alpha$. A 4.6 lemmából következik, hogy a $\varphi_\alpha'(x_1, x_2)$-nek pontos mélysége kell, hogy legyen, mert különben $[\{\varphi_\alpha'(x_1, x_1)\}]$ véges függvényhalmazt homomorf módon le lehet képezni a $[\{\varphi_\beta(x_1, x_2)\}]$ végtelen függvényhalmazra. A 4.7 lemmából következik, hogy ha a $\varphi_\alpha'(x_1, x_2)$ függvénynek van pontos mélysége, akkor semmiféle határérték-logikát nem generál.

4.2. TÉTEL. Bármilyen természetes k-ra ($k \geqq 1$) létezik kontinuum sok határérték-logika, amelyek kölcsönösen nem nyelik el egymást és mindegyik logika minden bázisa k függvényből áll.

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon_0=\{0, 1, 3, \ldots, 2r+1, \ldots\}$, $r \geqq 0$. Határozzuk meg a $\bar{\varphi}_\alpha(x_1, x_2)$ függvényt a következő módon:

$$\bar{\varphi}_\alpha(x_1, x_2) = \begin{cases} 2\varphi_\alpha\left(\dfrac{x_1+1}{2}, \dfrac{x_2+1}{2}\right)-1, & \text{ha } (x_1, x_2)\in\varepsilon_0\times\varepsilon_0; \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

Könnyű belátni, hogy $[\{\varphi_\alpha(x_1, x_2)\}]\cong[\{\bar{\varphi}_\alpha(x_1, x_2)\}]$, mivel az $\mathfrak{A}_\alpha$ határérték-logikát az $E_{\aleph_0}$ halmazról „átvittük" az ε_0 halmazra, és ily módon megkaptuk az $\bar{\mathfrak{A}}_\alpha=[\{\bar{\varphi}_\alpha(x_1, x_2)\}]$ határérték-logikát. Definiáljuk a $h_i(x)$ $(i\geqq 1)$ függvényt a következőképpen:

$$h_i(x) = \begin{cases} 4i, & \text{ha } x = 4i-2; \\ 4i-2, & \text{ha } x = 4i; \\ 0, & \text{másképpen.} \end{cases}$$

T_{k-1} jelölje a következő zárt osztályt: $[\{h_1(x), h_2(x), \ldots, h_{k-1}(x)\}]$. Könnyű belátni, hogy a T_{k-1} osztálynak csak egy bázis rendszere van, és ez éppen a $\{h_1(x), h_2(x), \ldots, h_{k-1}(x)\}$ halmaz. Azt állítjuk, hogy a tételben szereplő logikák halmaza az $\{[\bar{\mathfrak{A}}_\alpha \cup T_{k-1}]\}_\alpha$.

Valóban, mivel az $\mathfrak{A}_\alpha$, ill. az $\bar{\mathfrak{A}}_\alpha$ logika, mindenekelőtt vegyük észre, hogy minden olyan szuperpozíció, amelyben $\mathfrak{A}_\alpha$-beli és T_{k-1}-beli függvények részt vesznek azonosan egyenlő nullával. Éppen ezért az $\bar{\mathfrak{A}}_\alpha \cup T_{k-1}$ egy olyan határérték-logika, amelynek bázisát az $\bar{\mathfrak{A}}_\alpha$ és a T_{k-1} függvény osztályok bázisának az összege adja. A 4.1 tételből következik, hogy $[\bar{\mathfrak{A}}_\alpha \cup T_{k-1}]$ és $[\bar{\mathfrak{A}}_\beta \cup T_{k-1}]$ nem nyelik el egymást.

Megjegyzés. A tételt általánosítani lehet végtelen bázisú, vagy bázissal nem rendelkező határérték-logikákra is. Az első esetben a T_{k-1} osztály helyett a $T_{\aleph_0}= =\{h_1(x), h_2(x), \ldots\}$ osztályt kell venni, a második esetben pedig egy olyan T osztályt, amelynek nincs bázisa és amelyre minden szuperpozíció, amelyben a T-ből és az $\bar{\mathfrak{A}}_\alpha$-ból is vesznek részt függvények, azonosan egyenlő nullával [5], [6].

5. A mimniális és maximális elemekről a homomorf struktúrákban

Ebben a részben bebizonyítjuk, hogy a fent vizsgált homomorfizmusokban, ill. parciális rendezésekben nincs sem minimális, sem pedig maximális elem.

5.1. Definició. A P határérték-logika minimális, ha bármelyik logika elnyeli a P-t. A P határérték-logika maximális, ha a P bármelyik logikát elnyeli.

Megjegyzés. Nyilvánvaló, hogy nekünk elegendő csak ezt az egy esetet vizsgálni, mivel ha $\mathfrak{A}\cong\mathfrak{B}$, akkor $\mathfrak{A}< >\mathfrak{B}$, és ha $\mathfrak{A}< >\mathfrak{B}$, akkor $\mathfrak{A}\supset : :\subset\mathfrak{B}$.

5.1. Lemma. Nem létezik olyan P határérték-logika, amely minden határérték-logikát elnyel.

Bizonyítás. A lemmát indirekt módon bizonyítjuk be. Legyen P maximális határérték-logika. Akkor a 4.5 lemmában szereplő minden egyes $\mathfrak{A}_\alpha$ logikához létezik a P-ben egy olyan A_α logika, hogy $\mathfrak{A}_\alpha< >A_\alpha$. Ebből következik, hogy az A_α-ban létezik, $g_\alpha(x_1, x_2)$, ill. $g'_\alpha(x_1, x_2)$, hogy $[\{\varphi_\alpha(x_1, x_2)\}]\geqq[\{g_\alpha(x_1, x_2)\}]$, ill. $[\{g'_\alpha(x_1, x_2)\}]\geqq[\{\varphi_\alpha(x_1, x_2)\}]$, ahol $A_\alpha=[\{g_\alpha(x_1, x_2)\}]=[\{g'_\alpha(x_1, x_2)\}]$. A 4.4 lemmából következik még, hogy ha $\alpha \neq \beta$, akkor $\mathfrak{A}_\alpha$ nem hasonlítható össze $\mathfrak{A}_\beta$-val. A feltételezésből pedig következik, hogy a $g_\alpha(x_1, x_2)$ és a $g'_\beta(x_1, x_2)$, ill. a $g'_\alpha(x_1, x_2)$ és a $g_\beta(x_1, x_2)$ függvények nem hasonlíthatók össze. Valóban, ha $\alpha \neq \beta$ és $[\{g_\alpha(x_1, x_2)\}]$, $[\{g'_\beta(x_1, x_2)\}]$ összehasonlíthatók, akkor $[\{\varphi_\alpha(x_1, x_2)\}] \geqq [\{g_\alpha(x_1, x_2)\}] \geqq [\{g'_\beta(x_1, x_2)\}] \geqq$ $\geqq [\{\varphi_\beta(x_1, x_2)\}]$, vagyis $\mathfrak{A}_\alpha \geqq \mathfrak{A}_\beta$. Ám ez ellentmond a 4.4 lemmának. Ebből és az indirekt feltételezésből következik, hogy a P maximális logika kontinuum sok függvényt kell, hogy tartalmazzon. Ez pedig ellentmond a határérték-logika definíciójának.

5.2. LEMMA. Létezik olyan határérték-logika, amelyben minden egyváltozós függvény rendszáma véges.

Bizonyítás. Bizonyítsuk be, hogy a 3.1 lemmában szereplő határérték-logika rendelkezik ezzel a tulajdonsággal. Könnyű belátni, hogy ha $f(x) \in [\{\mu_p(x_1, x_2)\}]$, akkor az $f(x)$ rendszáma véges, és azt, hogy bármelyik szuperpozíció amelyben részt vesz az $f(x)$ és $g(x)$, azonosan egyenlő nullával, ahol $g(x) = [\{\mu_{p_i}(x_1, x_2)\}]$ $(p_i \neq p)$.

5.3. LEMMA. Létezik olyan határérték-logika, amelyben minden egyváltozós függvény rendszáma végtelen.

Bizonyítás. Vegyük a 2.4 lemmában szereplő Q határérték-logikát és bizonyítsuk be, hogy ez a logika rendelkezik a kívánt tulajdonsággal. Elegendő bebizonyítani, hogy minden $f(x, x, \ldots, x) \in [\{\varphi(x_1, x_2)\}]$ függvény, amelynek a mélysége k $(k \geqq 1)$, bármilyen j-re $(j > k)$ teljesíti az $f(j(j-1)-1, j(j-1)-1, \ldots, j(j-1)-1) =$ $= j(j-1)+2k-1$ egyenlőséget. Ezt az állítást a k szerinti indukció segítségével bizonyítjuk be. Világos, hogy ha $k=1$, ill. $k=2$, az állítás igaz. Feltételezzük, hogy az állítás igaz $k \leqq n-1$ esetében is. Bizonyítsuk be $k=n$ esetére is. Ha az f-nek a mélysége n, akkor $f = \varphi(f_1, f_2)$, ahol az f_1 és az f_2 függvény mélysége nem nagyobb mint $n-1$, és legalább az egyik függvény mélysége $n-1$. Legyen ez a függvény az f_1. Ekkor az indukciós feltételezésből következik, hogy $f_1(j(j-1), \ldots, j(j-1)) =$ $= j(j-1)+2(n-1)-1$. Vagyis azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} f\big(j(j-1)-1, \ldots, j(j-1)-1\big) &= \varphi\big(j(j-1)+2(n-1)-1, \\ f_2(j(j-1)-1, \ldots, j(j-1)-1)\big) &= \max\big(j(j-1)+2(n-1)-1, d\big)+2 = \\ &= j(j-1)+2n-1, \end{aligned}$$

ahol $d = f_2\big(j(j-1)-1, \ldots, j(j-1)-1\big) \leqq 2(n-1)+j(j-1)$.

5.4. LEMMA. Nem létezik olyan P határérték-logika, amely elnyeli az összes többi logikát.

Bizonyítás. A lemmát indirekt módon bizonyítjuk be. P legyen minimális határérték-logika. Vizsgáljunk meg két esetet:

1) P tartalmaz olyan $g(x)$ függvényt, amelynek a rendszáma véges. Nyilvánvaló, hogy a $[\{g(x)\}]$ és az $[\{f(x)\}]$ függvény osztályok kölcsönösen nem nyelik el egymást, pontosabban a $g(x)$ véges rendszámú függvényeket nem lehet homomorf módon ráképezni az $f(x)$ végtelen rendszámú függvényekre $\big(f(x)$-szel, ill. $g(x)$-szel az 5.3, ill. 5.2 lemmában szereplő függvényt jelöljük$\big)$.

2) Ha P csak olyan $f(x)$ függvényt tartalmaz, amelynek a rendszáma végtelen, akkor szintén nem lehet a $[\{g(x)\}]$-re $(\mathfrak{H}_\alpha)$ leképezni.

Az 5.1 és az 5.4 lemmából következik az:

5.1. TÉTEL. Nem létezik sem minimális, sem pedig maximális határérték-logika.

IRODALOM

[1] Post, E., *Two-valued Iterative Systems* (Princeton, 1941).

[2] Rosenberg, I., "La structure des funktions de plusieurs variables sur un ensemble fini", *C. r. Acad. Sci. Paris* **14** (1969) 413—438.

[3] Rosenberg, I., "Über die Verschidenkeit maximaler Klassen in P_k", *Rev. Roum. math. jures et appl.* **14** (1969) 413—438.

[4] Webb, P., "Generation of any n-valued logic by are binary operator" *Proc. Nat. Acad. Sci.* **21** (1935) 252—254.

[5] Гаврилов, Г. П., «О мощности множества предельных логик, обладающих конечным базисом», *Сб. Проблемы кибернетики* **21** (1969). 115—126.

[6] Деметрович, Я., «О числе попарно неизоморфных предельных логик» *Дискретный анализ* **24** (1974) 21—29.

[7] Мальцев, А. И., «Итеративные алгебры и многообразия Поста», *Алгебра и логика. Семинар.* **5** (1966) 5—24.

[8] Яблонский, С. В., «Функциональные построения в κ-значной логике» *Труды мат ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР* **51** (1958) 5—142.

[9] Яблонский, С. В., «О предельных логиках», *ДАН СССР,* **118** (1958) 657—660.

[10] Яблонский, С. В., Гаврилов, Г. П. и Кудравцев, В. Б., *Функции алгебры логики и классы Поста* (Наука, Москва, 1966).

(Beérkezett: 1974. június 10.)

DEMTROVICS JÁNOS
MTA SZÁMÍTÁSTECHNIKAI ÉS AUTÓMATIZÁLÁSI KUTATÓ INTÉZET
1502 BUDAPEST XI., KENDE U. 13—17.

О ГОМОМОРФИЗМАХ ПРЕДЕЛЬНЫХ ЛОГИК

Я. Деметрович

В настоящей работе рассматриваются некоторые естественно возникающие отношения частичного порядка на множестве всех предельных логик. С помощью этих отношений определяются отношения эквивалентности, развивающее множество всех предельных логик на классы эквивалентности. В работе доказывается, что эти эквивалентности существенно отличаются друг от друга. Далее доказывается, что число классов эквивалентности в каждом из рассматриваемых случаев равно континууму. Более того доказывается, что для любого натурального числа k $(1 \leq k \leq \aleph_0)$ максимальная мощность попарно неэквивалентных предельных логик, обладающих базисом, состоящим ровно из κ функций, равна континууму. Также показано, что для рассматриваемых отношений несуществует ни максимальных, ни минимальных предельных логик.

Alkalmazott Matematikai Lapok **1** *(1975) 139—150*

MEGJEGYZÉSEK A POPULÁCIÓFEJLŐDÉSI MODELLEK DIFFERENCIÁLEGYENLETEIRŐL

GYŐRI ISTVÁN

Szeged

A dolgozatban bebizonyítunk egy, a funkcionál differenciálegyenletekre vonatkozó új összehasonlítási tételt. A tétel felhasználásával az (1.2) és az (1.3) differenciálegyenlet megoldásainak a korlátosságát és az $x=0$ megoldás stabilitását vizsgáljuk.

1. Bevezetés

Biológiai populációk időbeli változásának leírására számos matematikai modell ismeretes. Az első ilyen modellt 1907-ben A. J. LOTKA [12] adta, majd továbbiak találhatók pl. K. L. COOKE [2] F. HOPPENSTEADT és P. WALTMAN [8, 9], K. L. COOKE és A. J. YORKE [3, 4] munkáiban.

A. J. LOTKA populáció fejlődési modelljének megalkotása során a következő feltételekből indult ki:

1. A populációt alkotó egyedek általános tulajdonságaikat tekintve egy osztályba tartoznak, különösen az életperiódusukat befolyásoló tényezőket figyelembe véve, vagy ha különböző osztályba tartoznak is (pl. hímek és nőstények az élő orgamusok sokaságában), az egyes osztályok közötti arány időben állandó;

2. Az egyedek élettartama független a populációt alkotó egyedek számától és a közöttük levő életkormegoszlástól;

3. Különösen az élettartam szempontjából a populáció általános állapotát befolyásoló külső körülmények időben állandók.

Ezekből a feltételekből LOTKA [12] a populáció fejlődésének leírására az

$$\dot{x}(t) = B_{t,x} - D_{t,x} \tag{1.1}$$

egyenletet nyerte, ahol $x(t)$ a populációban található egyedek számát, $B_{t,x}$ a t időpontban az időegység alatt született, míg $D_{t,x}$, az időegység alatt elhalt egyedek számát jelöli.

K. L. COOKE és J. A. YORKE [4] a fentieken túl feltételezte a következőt:

4. Az egységnyi idő alatt született egyedek száma csak a populáció terjedelmének függvénye, más szóval $B_{t,x}=g(x(t))$, ahol $g(x)$ adott függvény.

Tekintsük először azt az esetet, amikor a populációhoz tartozó egyedek élettartama állandó, mondjuk $r>0$. Ebben az esetben a t időpillanatban egységnyi idő alatt elhaló egyedek száma $D_{t,x}=B_{t-r,x}$, azaz $D_{t,x}=g(x(t-r))$.

Így az (1.1) alapján a populáció fejlődést az

$$\dot{x}(t) = g(x(t)) - g(x(t-r)) \tag{1.2}$$

retardált argumentumú differenciálegyenlet írja le. Ha a populációban szereplő egyedek élettartama nem azonos, hanem bizonyos időtől független $F(s)$ valószínűségi eloszlás szerint a $[0, r]$ intervallumba esik, akkor a t időpillanatban az egységnyi idő alatt elhaló egyedek száma

$$D_{t,x} = \int_0^r g(x(t-s))\,dF(s).$$

Itt r a maximális élettartamot jelöli, $F(0)=0$ és $F(r)=1$, továbbá $F(s)$ a $[0, r]$ intervallumon monoton nem-csökkenő függvény.

Így a populáció fejlődésének leírására a következő K. L. COOKE és J. A. YORKE [4]-től eredő differenciálegyenlet adódik:

$$\dot{x}(t) = g(x(t)) - \int_0^r g(x(t-s))\,dF(s). \tag{1.3}$$

Ez az egyenlet az (1.2) egyenletet is magába foglalja.

Az (1.2), illetve az (1.3) egyenlet $x(t)$ megoldásának valamely $[t_0, \infty)$ intervallumon történő meghatározásához szükségünk van az $x(t)$ értékeire a $t\in[t_0-r, t_0]$ értékeknél is. Így az (1.2), illetve (1.3) egyenlet megoldása alatt olyan, a $[t_0-r, \infty)$-en folytonos $x(t)$ függvényt értünk, amely a $[t_0, \infty)$-en eleget tesz az (1.2), illetve (1.3) egyenletnek.

E dolgozatban az általános jelölések bevezetése után bebizonyítunk egy, a funkcionál differenciálegyenletekre vonatkozó új összehasonlítási tételt. Ennek a tételnek a felhasználásával az (1.2), ill. az (1.3) differenciálegyenlet megoldásainak korlátosságát, ill. az $x\equiv 0$ megoldás stabilitását vizsgáljuk. Többek között megmutatjuk, hogy ha $g(x)$ az $x=0$ valamely környezetében folytonosan differenciálható és $|\dot{g}(0)|\cdot r<1$, akkor az (1.2) egyenlet $x\equiv 0$ megoldása stabil, míg $\dot{g}(0)r>1$ esetén nem stabil.

2. Jelölések, definíciók

A valós számok halmazát R-rel, a nem negatív valós számok halmazát R_+-szal jelöljük. Egy adott $r>0$ számra legyen C a $[-r, 0]$ intervallumon folytonos valós függvények *Banach-tere*, és bármely $\varphi\in C$-re legyen $\|\varphi\| = \max_{-r\leqq s\leqq 0} |\varphi(s)|$. Tetszőleges $L>0$ állandóra legyen $C_L=\{\varphi\in C : \|\varphi\|<L\}$, bármely monoton nem-csökkenő $\varphi_0(s)\in C$ függvényre

$$K_{\varphi_0} = \{\varphi\in C : |\varphi(-r)| \leqq |\varphi_0(-r)|,\ |\varphi(s_2)-\varphi(s_1)| \leqq \varphi_0(s_2)-\varphi_0(s_1),\ -r\leqq s_1\leqq s_2\leqq 0\}.$$

Legyen $\sigma\in R$, $a\in R_+$ és $x(t)$ a $[\sigma-r, \sigma+a)$ intervallumon folytonos függvény, ekkor bármely rögzített $t\in[\sigma, \sigma+a)$-ra x_t-vel jelöljük az $x_t = x_t(s) = x(t+s)\in C$ függvényt, ahol $-r\leqq s\leqq 0$.

A

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t) \tag{2.1}$$

egyenletet, ahol $f(t, \varphi)$: $R\times C\to R$, retardált típusú funkcionál differenciálegyenletnek, vagy röviden funkcionál differenciálegyenletnek nevezzük.

A (2.1) funkcionál differenciálegyenlet több ismert egyenlettípust foglal magába:

a) *Közönséges differenciálegyenletek.* Ha bármely $\varphi\in C$-re $f(t,\varphi)=g(t,\varphi(0))$, ahol $g(t,x)\colon R\times R\to R$, akkor a (2.1) egyenlet az

$$\dot{x}(t)=g(t,x(t))$$

közönséges differenciálegyenlet.

b) *Retardált argumentumú differenciálegyenletek.* Ha bármely $\varphi\in C$-re $f(t,\varphi)=$ $=g(t,\varphi(0))-g(t,\varphi(-r))$, ahol $g(t,x)\colon R\times R\to R$, akkor a (2.1) egyenlet az

$$\dot{x}(t)=g(t,x(t))-g(t,x(t-r))$$

retardált argumentumú differenciálegyenlet.

c) *Integro-differenciálegyenletek.* Ha pl. bármely $\varphi\in C$-re $f(t,\varphi)=\varphi(0)-$ $-\int_{r}^{0}\varphi(s)\,dP(s)$, ahol $P(s)$ a $[-r,0]$ intervallumon korlátos változású függvény, akkor a (2.1) egyenlet az

$$\dot{x}(t)=x(t)-\int_{-r}^{0}x(t+s)\,dP(s)$$

integro-differenciálegyenlet.

2.1. Definició. Az $x(t)$ függvényt a (2.1) egyenlet megoldásának nevezzük a $[\sigma-r,\sigma+a)$ intervallumon, ahol $\sigma\in R$ és $a\in R_+$ adott, ha $x(t)$ a $[\sigma-r,\sigma+a)$ intervallumon értelmezett folytonos függvény, továbbá minden $t\in[\sigma,\sigma+a)$-ra differenciálható, és kielégíti a (2.1) egyenletet.

2.2. Definició. Azt mondjuk, hogy $x(t)$ a (2.1) egyenlet (σ,φ) kezdeti értékhez tartozó megoldása a $[\sigma,\sigma+a)$ intervallumon, ahol $(\sigma,\varphi)\in R\times C$ és $a\in R_+$ adott, ha $x(t)$ a $[\sigma-r,\sigma+a)$ intervallumon a (2.1) megoldása és $x_{t_0}=\varphi$.

Most tegyük fel, hogy $f(t,0)\equiv 0$ és $f(,\varphi)\colon R_+\times C_L\to R$ folytonos függvény, $L>0$ adott.

2.3. Definició. A (2.1) egyenlet $x\equiv 0$ megoldását stabilnak nevezzük, ha tetszőlegesen rögzített $t_0\geqq 0$ esetén:

(i) található olyan $K=K(t_0)>0$ állandó, hogy a (2.1) egyenlet $(t_0,\varphi)\in R_+\times C_K$ kezdeti értékhez tartozó bármely $x(t_0,\varphi)(t)$ megoldása létezik $[t_0,\infty)$-en, és ott $x_t(t_0,\varphi)\in C_K$;

(ii) bármely $\varepsilon>0$-hoz létezik olyan $\delta=\delta(t_0,\varepsilon)>0$ állandó, hogy a (2.1) egyenlet $(t_0,\varphi)\in R_+\times C_\delta$ kezdeti értékhez tartozó bármely $x(t_0,\varphi)(t)$ megoldására $x_t(t_0,\varphi)\in C_\varepsilon$ $(t_0\leqq t<\infty)$.

3. Egy összehasonlítási tétel

Ebben a fejezetben bebizonyítunk egy új összehasonlítási tételt. Összehasonlítási tételek és ezek alkalmazásai pl. [10] és [11]-ben találhatók.

Az összehasonlítási tételekben a (2.1) egyenlet megoldásait becsüljük az

$$\dot{x}(t)=g(t,x(t),x_t)$$

majoráló differenciálegyenlet megoldásaival, feltéve, hogy

$$|f(t,\varphi)| \leqq g(t,|\varphi(0)|,|\varphi|), \quad (t,\varphi)\in[t_0,\infty)\times C.$$

Az eddig ismert összehasonlítási tételekben a majoráló differenciálegyenletben szereplő $g(t,x,\varphi)\colon [t_0,\infty)\times R_+\times C\to R_+$ függvény a φ változójában monoton nemcsökkenő.

Következő tételünkben a $g(t,x,\varphi)$ függvény φ változójában való monotonitása helyett a majoráló egyenlet megoldásának unicitását tesszük fel:

3.1. Tétel. Legyen t_0 adott állandó $f(t,\varphi)\colon[t_0,\infty)\times C_L\to R$ folytonos függvény és

$$(3.1)\qquad |f(t,\varphi)| \leqq \omega(t,|\varphi|,|\varphi(0)-\varphi|), \quad (t,\varphi)\in[t_0,\infty)\times C_L,$$

ahol $\omega(t,\varphi,\psi)\colon[t_0,\infty)\times C_L\times C_{2L}\to R_+$ bármely rögzített $t\in[t_0,\infty)$-re a φ, illetve ψ változójában monoton nem-csökkenő függvény és $0<L<\infty$. Ha $\varphi_0\in C_L$ nem negatív, nem-csökkenő függvény, és az

$$(3.2)\qquad \dot u(t) = \omega(t,u_t,u(t)-u_t), \quad t\geqq t_0,$$

egyenlet (t_0,φ_0) kezdeti értékhez tartozó megoldása létezik és egyértelműen meghatározott $[t_0,\infty)$-en, továbbá $u_t\in C_L$ $(t_0\leqq t<\infty)$, akkor a

$$(3.3)\qquad \dot x(t) = f(t,x_t)$$

egyenlet bármely $\varphi\in K\varphi_0$ kezdőfüggvényhez tartozó $x(t_0,\varphi)(t)$ megoldása létezik $[t_0,\infty)$-en, és ott

$$(3.4)\qquad |x(t_0,\varphi)(t)| \leqq u(t_0,\varphi_0)(t), \quad |\dot x(t_0,\varphi)(t)| \leqq \dot u(t_0,\varphi_0)(t).$$

Bizonyítás. A lokális egzisztenciatétel alapján (lásd [7]) található $h>0$ állandó úgy, hogy a (3.3) egyenlet (t_0,φ) kezdőértékhez tartozó $x(t)=x(t_0,\varphi)(t)$ megoldása létezik a $t_0\leqq t<t_0+h$ intervallumon és ott $x_t\in C_L$.

Legyen $[t_0,T]$ tetszőlegesen adott intervallum, amelyen $x(t_0,\varphi)(t)$ létezik. Ekkor a tétel feltételei, valamint [7] alapján található olyan n_0 egész szám, hogy az

$$(3.5)\qquad \dot u(t) = \omega(t,u_t,u(t)-u_t)+\frac{1}{n}, \quad n\geqq n_0,$$

egyenlet (t_0,φ_0) kezdeti értékhez tartozó $u^{(n)}(t)=u^{(n)}(t_0,\varphi_0)(t)$ megoldása létezik a $[t_0,T]$-n. Továbbá $u^{(n)}(t_0,\varphi_0)(t)\to u(t_0,\varphi_0)(t)$ $(n\to+\infty)$ és $u_t^{(n)}(t_0,\varphi_0)\in C_L$, minden $t\in[t_0,T]$-re.

Legyen

$$(3.6)\qquad \beta_n = \inf\{t\in[t_0,T]: |\dot x(\tau)| < \dot u^{(n)}(\tau),\ \tau\in[t_0,t)\}$$

minden $n\geqq n_0$-ra.

A (3.1), (3.3) és (3.5)-ből

$$(3.7)\qquad |\dot x(t_0)| \leqq g(t_0,|\varphi|,|\varphi(0)-\varphi|) < g(t_0,\varphi_0,\varphi_0(0)-\varphi_0)+\frac{1}{n} = \dot u^{(n)}(t_0),$$

így $\beta_n > t_0$.

Tegyük fel, hogy $\beta_n < T$. Ekkor $t \in [t_0, \beta_n)$-re

$$(3.8) \qquad |\dot{x}(t)| < \dot{u}^{(n)}(t), \quad |\dot{x}(\beta_n)| = \dot{u}^{(n)}(\beta_n),$$

így

$$(3.9) \qquad |x(t)| \leqq u^{(n)}(t), \quad t_0 \leqq t \leqq \beta_n,$$

ugyanis $|x(t_0)| = |\varphi(0)| \leqq \varphi_0(0) = u^{(n)}(t_0)$.

A (3.8) és (3.9)-ből a (3.3) és a (3.5) egyenlet felhasználásával az

$$\dot{u}^{(n)}(\beta_n) = |\dot{x}(\beta_n)| = |f(\beta_n, x_{\beta_n})| < \omega(\beta_n, u_{\beta_n}^{(n)}, u^{(n)}(\beta_n) - u_{\beta_n}^{(n)}) + \frac{1}{n} = \dot{u}_n(\beta_n)$$

ellentmondásra jutunk, így $\beta_n = T$. Mivel $[t_0, T]$ tetszőleges olyan intervallum, amelyen $x(t) = x(t_0, \varphi)(t)$ létezik, így a (3.8) és (3.9) egyenlőtlenségek alapján

$$(3.10) \qquad |x(t)| \leqq u(t) = \lim_{n \to +\infty} u^{(n)}(t), \quad |\dot{x}(t)| \leqq \dot{u}(t) = \lim_{n \to +\infty} \dot{u}^{(n)}(t)$$

minden olyan $t \geqq t_0$-ra, amelyre $x(t) = x(t_0, \varphi)(t)$ létezik.

Jelölje $[t_0, T^*)$ azt a maximális intervallumot, amelyen $x(t) = x(t_0, \varphi)(t)$ létezik. Ha $T^* < \infty$, akkor [7]-ből tudjuk, hogy

$$\lim_{t \to T^*} \max \{\|x_t(t_0, \varphi)\|, \|\dot{x}_t(t_0, \varphi)\|\} = +\infty,$$

ami ellentmond (3.10)-nek.

Így $x(t_0, \varphi)(t)$ létezik a $[t_0, \infty)$ intervallumon, és ott eleget tesz a (3.4) egyenlőtlenségnek. Ezzel a tétel bizonyítása teljes.

A fenti tétel alkalmazásaként bebizonyítjuk a következőt:

3.2. TÉTEL. Legyen $f(t, \varphi): [t_0, \infty) \times C \to R$ folytonos függvény, $t_0 \in R$ adott, és $\int_{-r}^{0} |\varphi(0) - \varphi(s)| dP(s) \neq 0$ esetén

$$(3.11) \qquad \sup_{t \geqq t_0} \left\{ \limsup_{\|\varphi\| \to 0} \frac{|f(t, \varphi)|}{\int_{-r}^{0} |\varphi(0) - \varphi(s)| \, dP(s)} \right\} = a_0 < \infty,$$

ahol $P(s)$ a $[-r, 0]$ intervallumon monoton nem-csökkenő, nem-állandó függvény.

Ha $f(t, \varphi) = 0$ minden olyan $\varphi \in C$ függvényre, amelyre $\int_{-r}^{0} |\varphi(0) - \varphi(s)| dP(s) = 0$ és

$$(3.12) \qquad b_0 = r \cdot a_0 \cdot P(0) < 1,$$

akkor van olyan $c > 0$ és $K > 0$ állandó, hogy a (2.1) egyenlet bármely $\varphi \in C_K$ kezdőfüggvényhez tartozó $x(t_0, \varphi)(t)$ megoldása létezik $[t_0, \infty)$-en és

$$(3.13) \qquad |x(t_0, \varphi)(t)| \leqq c \cdot \|\varphi\|, \quad t \in [t_0, \infty).$$

A tétel bizonyítása során felhasználjuk a következőt:

3.1. LEMMA. Legyen $Q(s)$ a $[-r, 0]$ intervallumon monoton nem-csökkenő függvény, $Q(-r) = 0$ és $r \cdot Q(0) < 1$. Ekkor a

$$\dot{x}(t) = \int_{-r}^{0} [x(t) - x(t+s)]\, dQ(s) \tag{3.14}$$

egyenletnek bármely $(t_1, \varphi) \in R \times C$ kezdeti értékhez pontosan egy $x(t_1, \varphi)(t)$ megoldása tartozik a $[t_1, \infty)$-en, és

$$|x(t_1, \varphi)(t)| \leqq c_1(t_1) \cdot \|\varphi\|, \quad t \in [t_1, \infty), \tag{3.15}$$

ahol $c_1(t_1) > 0$ állandó, továbbá

$$\lim_{t \to +\infty} x(t_1, \varphi)(t) = \frac{1}{1 + \int_{-r}^{0} s\, dQ(s)} \Big[\varphi(0) - \int_{-r}^{0} \Big\{ \int_{t_1+s}^{t_1} \varphi(u)\, du \Big\} dQ(s)\Big]. \tag{3.16}$$

Bizonyítás. Ha $(t_1, \varphi) \in R \times C$ tetszőlegesen rögzített, akkor a (t_1, φ)-n áthaladó $x(t_1, \varphi)(t)$ megoldás létezése és unicitása [7]-ben bizonyított. Ugyanakkor [13]-ból (2. tétel) nyerjük, hogy a lemma feltételei mellett

$$x(t_1, \varphi)(\infty) = \lim_{t \to +\infty} x(t_1, \varphi)(t) \tag{3.17}$$

létezik és véges. Rögzítsük t_1-et, és tetszőleges $t \in [t_1, \infty)$-re definiáljuk a $T(t; t_1): C \to C$ operátort a $T(t; t_1)\varphi = x_t(t_1, \varphi)$ összefüggéssel. Ekkor világos, hogy $T(t; t_1)$ lineáris korlátos operátorok egy paraméteres serege, továbbá $\|T(t; t_1)\varphi\| \leqq c_\varphi$ minden $(t, \varphi) \in [t_1, \infty) \times C$-re, ahol c_φ a φ-től függő állandó. Így a *Banach—Steinhaus-tétel* alapján létezik olyan $c_1 = c_1(t_1)$ állandó, amellyel (3.15) teljesül. A (3.16)-ot bizonyítandó vegyük észre, hogy a (3.14) egyenlet (t_1, φ)-n áthaladó $x(t_1, \varphi)(t)$ megoldása eleget tesz az

$$x(t) = \int_{-r}^{0} \Big\{ \int_{t+s}^{t} x(u)\, du \Big\} dQ(s) + d, \quad t \geqq t_1,$$

egyenletnek, ahol

$$d = \varphi(0) - \int_{-r}^{0} \Big\{ \int_{t_1+s}^{t_1} \varphi(u)\, du \Big\} dQ(s).$$

Ezt felhasználva nyerjük, hogy

$$x(t_1, \varphi)(\infty) = -x(t_1, \varphi)(\infty) \int_{-r}^{0} s\, dQ(s) + d,$$

amiből a (3.16) világos.

Ezzel a lemma bizonyítása teljes.

3.1. *Megjegyzés.* Legyen $Q(s) = 0$ $(s < -r)$ és $Q(s) = a$ $(s \geqq -r)$. Ekkor a (3.14) egyenlet az

$$\dot{x}(t) = a[x(t) - x(t-r)]$$

egyenlet, ahol $a > 0$ állandó. Ha $ar < 1$, akkor a (3.16) formula a [6] 4. Következményében adott összefüggés. A (3.16)-hoz hasonló formulák találhatók pl. [5]-ben.

Ezután térjünk rá a tétel bizonyítására. Legyen $a_1>0$ olyan állandó, amelyre $a_1>a_0$ és

$$b_1 = ra_1 P(0) < 1. \tag{3.18}$$

Ekkor (3.11) alapján létezik olyan $L>0$ állandó, hogy

$$|f(t, \varphi)| \leqq a_1 \int_{-r}^{0} |\varphi(0)-\varphi(s)|\, dP(s), \quad t\in[t_0, \infty), \tag{3.19}$$

minden $\varphi\in C_L$-re.

Legyen $\varphi\in C_{K_1}$ tetszőlegesen rögzített, ahol

$$K_1 = \frac{L}{2} e^{-2b_1 r}. \tag{3.20}$$

A lokális egzisztenciatétel alapján található $h>0$ állandó úgy, hogy a (2.1) egyenlet $(t_0, \varphi)\in R_+\times C_{K_1}$ kezdeti értékhez tartozó $x(t)=x(t_0, \varphi)(t)$ megoldása létezik a $t_0\leqq t\leqq t_0+h$ intervallumon, és ott $x_t\in C_L$, ugyanis $x_{t_0}=\varphi\in C_{K_1}$ és $K_1<L$. Jelölje $[t_0, t_1)$ azt a maximális intervallumot, amelyen $x(t_0, \varphi)(t)$ létezik. Ha $t_0<t_1\leqq t_0+r$, akkor [7]-ből tudjuk, hogy létezik olyan $t_0<\bar{t}<t_1$, amelyre $x_{\bar{t}}(t_0, \varphi)\notin C_L$, azaz a

$$\Gamma = \{t\in[t_0, t_1]: \|x_t(t_0, \varphi)\| = L\}$$

halmaz nem üres. Legyen $T=\inf\Gamma$. A (2.1) egyenletből és (3.19)-ből

$$\|x_t\| \leqq \|\varphi\| + \int_{t_0}^{t} |f(u, x_u)|\, du \leqq \|\varphi\| + 2b_1 \int_{t_0}^{t} \|x_u\|\, du,$$

azaz a *Bellman-egyenlőtlenség* (lásd [1]) alapján

$$\|x_t\| \leqq 2\|\varphi\| e^{2b_1(t-t_0)} \leqq 2\|\varphi\| e^{2b_1 r}, \quad t_0 \leqq t \leqq T. \tag{3.21}$$

Ez utóbbi egyenlőtlenségből és (3.20)-ból az $L=\|x_T\|<L$ ellentmondásra jutunk, azaz Γ üres halmaz. Így $x(t_0, \varphi)(t)$ a $[t_0, t_0+r]$ intervallumon létezik, és (3.21) alapján $x_t(t_0, \varphi)\in C_L$, $(t_0\leqq t\leqq t_0+r)$. Ha most $\varphi\in C_K$, ahol

$$K = \frac{L}{2+4b_1 r} e^{-2b_1 r} \frac{1}{c_1+1} < K_1 \tag{3.22}$$

és $c_1=c_1(t_0+r)$ a (3.15) összefüggésben adott állandó, akkor amint láttuk $x_{t_0+r}(t_0, \varphi)\in C_L$, és (2.1), illetve (3.19) alapján

$$|\dot{x}_{t_0+r}(s)| = |f(t_0+r+s, x_{t_0+r+s})| \leqq 2b_1 \|x_{t_0+r+s}(t_0, \varphi)\|.$$

Ezt és (3.21)-et felhasználva a (3.22)-ből azonnal adódik, hogy ha

$$\psi_0(s) = \|x_{t_0+r}(t_0, \varphi)\| + (r+s)\|\dot{x}_{t_0+r}(t_0, \varphi)\|, \tag{3.23}$$

akkor $\|\psi_0\| \leqq (2+4rb_1)e^{2b_1 r}<L$. A 3.1. lemma állítása szerint $Q(s)=a_0P(s)$ esetén a (3.14) egyenlet (t_0+r, ψ_0) kezdeti értékhez tartozó $u(t_0+r, \psi_0)(t)$ megoldása, létezik a $[t_0+r, \infty)$-en, és ott

$$0 \leqq u(t_0+r, \psi_0)(t) \leqq c_1\|\psi_0\| \leqq c_1(2+4rb_1)e^{2b_1 r}\|\varphi\|. \tag{3.24}$$

Másrészt (3.22) és (3.24)-ből $u_t(t_0+r, \psi_0)\in C_L$. Így a 3.1 tételt felhasználva nyerjük, hogy a (2.1) egyenlet $(t_0+r, x_{t_0+r}(t_0, \varphi))$ kezdeti értékhez tartozó bármely $x(t_0+r, x_{t_0+r}(t_0, \varphi))(t)$ megoldása létezik $[t_0+r, \infty)$-en, és ott

$$|x(t_0+r, x_{t_0+r}(t_0, \varphi))(t)| \leqq u(t_0+r, \psi_0)(t), \tag{3.25}$$

ugyanis (3.23) alapján $x_{t_0+r}(t_0, \varphi)\in K_{\psi_0}$. Ebből világos, hogy $x(t_0, \varphi)(t)$ létezik a $[t_0, \infty)$ intervallumon, továbbá (3.21) és (3.25)-ből

$$|x(t_0, \varphi)(t)| \leqq c\|\varphi\|, \quad \varphi\in C_K, \ t \geqq t_0,$$

ahol

$$c = \max\{2, c_1(2+4rb_1)\}e^{2b_1 r}.$$

Ezzel a tétel bizonyítása teljes.

A 3.2 tétel alapján nyerjük a következőket:

3.1. Következmény. Ha a 3.2 tétel feltételei teljesülnek és $t_0=0$, akkor a (3.3) egyenlet $x\equiv 0$ megoldása stabil.

A következmény bizonyítása a 3.2 tétel alapján világos, hiszen $\varphi\in C_K$ esetén a (3.3) egyenlet (t_1, φ) $(t_1\in R_+)$, kezdeti értékhez tartozó bármely $x(t_1, \varphi)(t)$ megoldása létezik $[t_1, \infty)$-en. Továbbá tetszőleges $\varepsilon>0$ esetén a (3.3) egyenlet $\varphi\in C_\delta$. $\delta=\min\left\{\frac{\varepsilon}{c}, K\right\}$, kezdőfüggvényhez tartozó bármely $x(t_1, \varphi)(t)$ megoldására $|x(t_1, \varphi)(t)|\leqq\varepsilon$ $(t\geqq t_1)$.

4. Az eddigi eredmények alkalmazása a populációfejlődési modell differenciálegyenleteire

A populációfejlődés leírására felállított (1.3) egyenlet speciális esete a (3.3) egyenletnek, ugyanis $P(s) = 1-F(-s)$, $0\leqq s\leqq r$, és

$$f(t, \varphi) = \int_{-r}^{0} [g(\varphi(0))-g(\varphi(s))]\,dP(s), \quad (t, \varphi)\in[t_0, \infty)\times C, \tag{4.1}$$

esetén a (3.3) egyenlet az (1.3) egyenlet. Ezt felhasználva nyerjük:

4.1. Tétel. Legyen

(i) $g(x)$ az R-en folytonos és a $(-m, m)$-en folytonosan differenciálható függvény, ahol $m>0$ állandó;

(ii) $F(s)$ a $[0, r]$-en monoton nem-csökkenő függvény, $F(0)=0$ és $F(r)=1$.

Ha $|\dot g(0)|r<1$, akkor az (1.3) egyenlet $x\equiv 0$ megoldása stabil.

Bizonyítás. Legyen $f(t, \varphi)$ a (4.1)-ben adott. Ekkor

$$\limsup_{\|\varphi\|\to 0} \frac{|f(t, \varphi)|}{\int_{-r}^{0} |\varphi(0)-\varphi(s)|\,dP(s)} = |\dot g(0)|$$

és így az $r|\dot g(0)<1$ feltétel és a 3.1 következmény alapján az állítás nyilvánvaló.

A fenti tételben a $|\dot{g}(0)|r<1$ feltétel fontos, ugyanis $\dot{g}(0)r>1$ esetén igaz a következő:

4.2. TÉTEL. Ha teljesül a 4.1 tétel (i) feltétele, továbbá $\dot{g}(0)r>1$, akkor az (1.2) egyenlet $x\equiv 0$ megoldása nem-stabil

Bizonyítás. Mivel $\dot{g}(0)r>1$, így található olyan $L>0$ állandó, amelyre

$$k_0 = r \min_{|x|\leqq L} \dot{g}(x) > 1. \tag{4.2}$$

Tegyük fel, hogy az (1.2) egyenlet $x\equiv 0$ megoldása stabil. Ha most $t_0\geqq 0$ tetszőlegesen rögzített, akkor található olyan $\delta=\delta(t_0, L)\in(0, L)$ szám, hogy bármely $\varphi\in C_\delta$ esetén az (1.2) egyenlet (t_0, φ)-hez tartozó megoldásai léteznek $[t_0, \infty)$-en. Továbbá, ha $x(t_0, \varphi)(t)$ az (1.2) egyenlet (t_0, φ)-en áthaladó megoldása, akkor $x_t(t_0, \varphi)\in C_L$ $(t_0\leqq t<\infty)$.

Legyen λ_0 a

$$\lambda = \frac{k_0}{r}[1-e^{-\lambda r}]$$

egyenlet valamely pozitív valós gyöke. Ilyen valós gyök létezése könnyen megmutatható.

Legyen $\varphi_0(s)=ce^{\lambda_0 s}$, ahol a $c>0$ állandót úgy választottuk meg, hogy $\varphi_0\in C_\delta$ fennálljon.

Ekkor az (1.2) egyenlet bármely (t_0, φ_0)-án áthaladó megoldása létezik $[t_0, \infty)$-en, és ott

$$x_t(t_0, \varphi_0)\in C_L.$$

Mivel $g(x)$ folytonosan differenciálható, és $\dot{g}(x)>0$ a $(-L, L)$-en, így könnyen megmutatható, hogy $x(t_0, \varphi_0)(t)$ az (1.2) egyenlet egyértelműen meghatározott monoton nem-csökkenő megoldása.

A $g(x)$ differenciálhatósága alapján

$$g(x(t))-g(x(t-r)) = \dot{g}(\xi(t))[x(t)-x(t-r)],$$

ahol $\min\{x(t), x(t-r)\}\leqq\xi(t)\leqq\max\{x(t), x(t-r)\}$. Legyen $(t, \varphi)\in[t_0, \infty)\times C_L$-re,

$$\omega(t, \varphi(0), \varphi(0)-\varphi) = \dot{g}(\xi(t))[\varphi(0)-\varphi(-r)]$$

ekkor $x(t_0, \varphi_0)(t)$ a (3.2) egyenlet egyértelműen meghatározott megoldása $[t_0, \infty)$-en. Ha

$$f(t, \varphi) = \frac{k_0}{r}[\varphi(0)-\varphi(-r)], \quad (t, \varphi)\in[t_0, \infty)\times C_L,$$

akkor (4.2) alapján

$$|f(t, \varphi)| = \frac{k_0}{r}|\varphi(0)-\varphi(-r)| \leqq |\dot{g}(\xi(t))|\,|\varphi(0)-\varphi(-r)| \leqq \omega(t, \varphi_0, \varphi_0(0)-\varphi_0),$$

bármely $\varphi\in K_{\varphi_0}$-ra.

Tekintsük az

$$\dot{m}(t) = \frac{k_0}{r}[m(t)-m(t-r)] \tag{4.3}$$

egyenletet. A 3.1 tétel alapján ennek az egyenletnek a (t_0, φ_0)-n áthaladó $m(t_0, \varphi_0)(t)$ megoldására:

(4.4) $$|m(t_0, \varphi_0)(t)| \leqq x(t_0, \varphi_0)(t) \leqq L, \quad t \geqq t_0.$$

Másrészt a (4.3) egyenlet $\varphi_0(s)=c \cdot e^{\lambda_0 s}$ kezdőfüggvényhez tartozó megoldása $m(t_0, \varphi_0)(t)=ce^{\lambda_0 t}$, ahol $\lambda_0>0$, ami ellentmond (4.4)-nek és az (1.2) egyenlet $x\equiv 0$ megoldása stabilitásának.

Ezzel a tétel bizonyítása teljes.

Az (1.2) egyenlet megoldásainak korlátosságát vizsgálva bebizonyítjuk a következőt:

4.3. TÉTEL. Legyen $g(x)$ az R-en folytonosan differenciálható függvény, $r>0$ állandó. Ekkor

(a) $r \limsup\limits_{x\to+\infty} |\dot{g}(x)|<1$ esetén az (1.2) egyenlet bármely, a $[t_0, \infty)$ intervallumon, $t_0 \in R_+$, értelmezett megoldása felülről korlátos;

(b) $r \liminf\limits_{x\to+\infty} \dot{g}(x)>1$ esetén az (1.2) egyenletnek létezik a $[t_0, \infty)$ intervallumon felülről nem-korlátos megoldása.

Bizonyítás. Az állítás első felét bizonyítandó, legyen $K>0$ olyan állandó, amelyre

(4.5) $$a = \sup_{x\geqq K} |\dot{g}(x)| < \frac{1}{r}.$$

Ilyen K a feltételek alapján létezik.

Tegyük fel, hogy az (1.2) egyenletnek $x(t)$ felülről nem-korlátos megoldása a $[t_0, \infty)$-en. Ekkor [[4], 2. tétel] alapján $x(t)\to+\infty$ $(t\to+\infty)$. Így létezik olyan $T>t_0$ állandó, amelyre $T-r\leqq t$ esetén $x(t)>K$. Legyen $c>0$ állandó olyan, amelyre

(4.6) $$|\dot{x}(t)| < c(ar)^{t/r}, \quad T-r \leqq t \leqq T.$$

Ekkor megmutatjuk, hogy bármely $t\geqq T$-re

(4.7) $$|\dot{x}(t)| < c(ar)^{t/r}.$$

Ha (4.7) nem teljesül minden $t\geqq T$-re, akkor a

$$\Gamma = \{t\in[T, \infty): |\dot{x}(t)| = c(ra)^{t/r}\}$$

halmaz nem üres és $\inf \Gamma=t_1>T$. A t_1 definíciója alapján $T-r\leqq t\leqq t_1$ esetén

(4.8) $$|\dot{x}(t)| < c(ra)^{t/r} \quad \text{és} \quad |\dot{x}(t_1)| = c(ra)^{t_1/r}.$$

Ugyanakkor az (1.2) egyenletből és (4.5)-ből

(4.9) $$|\dot{x}(t_1)| \leqq |g(x(t_1))-g(x(t_1-r))| \leqq a|x(t_1)-x(t_1-r)|,$$

ugyanis $x(t_1)>K$ és $x(t_1-r)>K$. A (4.8) alapján

$$|x(t_1)-x(t_1-r)| \leqq \int_{t_1-r}^{t_1} |\dot{x}(s)|\,ds < cr(ar)^{\frac{t_1-r}{r}},$$

azaz (4.9)-ből a

$$c(ra)^{t_1/r} = |\dot{x}(t_1)| < c(ra)^{t_1/r}$$

ellentmondásra jutunk. Ebből következik, hogy Γ üres halmaz, azaz a (4.7) egyenlőtlenség minden $t \geqq T$-re igaz. Így (4.7)-ből $t \geqq T$ esetén

$$K \leqq x(t) \leqq x(T) + \int_T^t |\dot{x}(s)\, ds \leqq x(T) + cr(ar)^{T/r}.$$

Ez utóbbi ellentmond feltevésünknek, amely szerint az (1.2) egyenlet $x(t)$ megoldása felülről nem korlátos a $[t_0, \infty)$-en.

Ezzel a tétel állításának első felét bebizonyítottuk.

Tekintsük a (b) esetet és legyen $K>0$ állandó olyan, amelyre

$$b = \inf_{x \geqq K} \dot{g}(x) > \frac{1}{r}. \tag{4.10}$$

Legyen $x(t)$ az (1.2) egyenlet olyan megoldása $[t_0, \infty)$-en, amelyre $x(t)>K$ $(t_0 - r \leqq t \leqq t_0)$, és

$$\dot{x}(t) > c(ar)^{t/r}, \quad t_0 - r \leqq t \leqq t_0,$$

ahol $c>0$ adott állandó.

Ekkor a (4.7) egyenlőtlenség bizonyításához hasonlóan könnyen megmutatható, hogy

$$\dot{x}(t) > c(ar)^{t/r}, \quad t_0 \leqq t < \infty.$$

Így $t \in [t_0, \infty)$-re

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t \dot{x}(s)\, ds \geqq x(t_0) + \frac{rc}{\ln ar}[(ar)^{t/r} - (ar)^{t_0/r}],$$

azaz $\lim_{t \to +\infty} x(t) = +\infty$, ugyanis $ar > 1$.

Ezzel a tétel bizonyítása teljes.

Köszönetet mondok Dr. Pintér Lajosnak, a Szegedi József Attila Tudományegyetem docensének a dolgozat elkészítése során nyújtott értékes tanácsaiért.

IRODALOM

[1] Bellman, R., "The stability of solutions of linear differential equations", *Duke Math. Journal* **10** (1943) 643—647.

[2] Cooke, K. L., "Functional-differential equations: some models and perturbation problems", in: *Differential Equations and Dynamical System* (Academic, New York, 1967) 167—183.

[3] Cooke, K. L. and Yorke, J. A., "Some delay differential equations modelling population growth, and epidemics", in: *Proceedings N. R. L. Conference on Ordinary Differential Equations* (Academic, New York, 1971) 35—53.

[4] Cooke, K. L. and Yorke, J. A., "Some equations modelling growth processes and gonorhea epidemics", *Mathematical Biociences* **16** (1973) 75—101.

[5] Driver, R. D., "Some harmless delays", in: *Delay and Functional Differential Equations and their Applications* (Academic, New York, 1972) 103—119.

[6] Driver, R. D., Sasser, D. W. and Slater, M. L., "The equation $x'(t) = ax(t) + bx(t-)$ with 'small' delay", *Notices Amer. Math. Soc.* **118** (1972) A-134.

[7] Hale, J., *Functional Differential Equations* (Springer—Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1971).

[8] Hoppensteadt, F. and Waltman, P., "A problem in the theory of epidemics", *Mathematical Biociences* **9** (1970) 71—91).

[9] HOPPENSTEADT, F. and WALTMAN, P., "A problem in the theory of epidemics II", *Mathematical Biociences* **10** (1971) 133—145.
[10] LADAS, G. and LAKSHMIKANTHAM, V., "On asymptotic behaviour of functional differenctial system", *Ann. st. Univ. Lasi, TXVII, J.* **1** (1971) 79—87.
[11] LAKSHMIKANTHAM, V. and LELLA, S., *Differential and Integral Inequalities II* (Academic Press, New York, 1969).
[12] LOTKA, A. J., "Relation between birth rates and death rates", *Am. J. Sci.* **26** (1970) 21—22.
[13] Гребеников, В. Я., «Об устойчивости решения линейного дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом», *Дифф. Урав.* **8** (1971) 2269—2280.

(Beérkezett: 1974. május 14.)

DR. GYŐRI ISTVÁN
SZEGEDI ORVOSTUDOMÁNYI EGYETEM KÖZPONTI LABORATÓRIUM
SZÁMÍTÁSTECHNIKAI KÖZPONT
6720 SZEGED, SOMOGYI BÉLA U. 4.

REMARKS ON THE DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THE MODELS OF POPULATION-GROWTH

I. GYŐRI

In this article the boundedness of the solutions as well as the stability of the solution $x\equiv 0$ of retarded differential equations and integro-differential equations used for models of population-growth are studied. The investigations are based on a new comparison theorem regarding for functional-differential equations.

Hírek és közlemények

NUMERIKUS MÓDSZEREK KONFERENCIA

Keszthely, 1973. szeptember 2—7.

A *Bolyai János Matematikai Társulat* 1973. szeptember 2—7. között numerikus módszerek konferenciát rendezett *Keszthelyen.* A konferencián kb. 90 külföldi és mintegy 60 magyar matematikus vett részt. A külföldiek nemzetiség szerinti megoszlása a következő volt:

4 matematikus a Szovjetunióból,
8 matematikus az USA-ból,
11 matematikus Nagy-Britanniából,
8 matematikus az NSZK-ból,
11 matematikus az NDK-ból,
18 matematikus Csehszlovákiából.

Ezen kívül voltak még franciák, lengyelek, románok, olaszok, osztrákok, írek, és Belgium, Svédország és Nigéria is képviseltette magát. A vendégek között üdvözölhettük a matematika élvonalában haladó, a numerikus matematika kiváló művelőit, többek között:

a magyar származású LÁNCZOS CORNEL professzort, akivel a magyar matematikusok ez alkalommal találkozhattak utoljára;

ANDREJ NIKOLAJEVICS TYIHONOV akadémikust, a moszkvai egyetem professzorát;

L. COLLATZ, L. FOX, W. GIVENS, A. R. MITCHELL, A. A. SZAMARSZKIJ, V. N. FADDEEVA, J. TODD, J. H. WILKINSON és M. ZLAMAL professzorokat, akik napjainkban a legjobban működő numerikus iskolák vezetői.

A konferencia nyitó előadását LÁNCZOS CORNEL professzor tartotta *Legendre* és *Chebisev* polinomokról. Az utóbbi években az alkalmazások és az elmélet szempontjából is egyre fontosabb kérdéskör a véges elemek módszere. Ennek jelentőségét a számítógépek nagy lendülettel fokozódó fejlődése adja, mivel ezáltal a módszerek gépi számolására is lehetőség nyílik. A kérdéskörben érdekes előadásokat tartottak A. R. MITCHELL, M. ZLAMAL és P. A. RAVIAT. A klasszikus analízis numerikus problémáival foglalkozott J. TODD, L. FOX, W. GIVENS, O. TAUSSKY-TODD, V. N. FADDEEVA, J. H. WILKINSON és A. A. ABRAMOV előadása, melyek a differenciálegyenletek numerikus megoldási módszereit, mátrix sajátérték számolási problémáit és a numerikus analízis speciális kérdéseit érintették.

A matematika alkalmazási problémáiról tartottak kiemelkedő összefoglaló előadást A. N. TYIHONOV akadémikus és L. COLLATZ professzorok, mint a témakör legismertebb szakemberei. A. A. SZAMARSZKIJ a parciális differenciálegyenletek rácspont módszerrel történő numerikus megoldása konvergencia és stabilitási problematikájának általános megfogalmazását adta.

A konferencián 10 nagyelőadás hangzott el, mégpedig a konferencia 5 munkanapjának 2—2 nyitó előadása nagyelőadás volt. Ezután a konferencia minden nap két szekcióban folytatta munkáját, így lehetőség nyílt mintegy 40 kisebb-nagyobb előadásra. Ezzel a szervezéssel elérhettük, hogy a külföldi és hazai matematikusok szereplése mellett a fiatal magyar matematikusok is szót kaphassanak.

A konferencia jól sikerült. Célunk volt, hogy numerikus módszerekkel foglalkozó magyar matematikusok találkozhassanak a témakörben jártas külföldi matematikusokkal. Ez sikerrel járt. Sok szakmai ismeretség alakult ki. Sokat tanultunk a külföldiek előadásaiból. A magyar előadók külföldi szakemberek bírálatai alapján mérhették fel témájuk érdekességét és eredményeik nemzetközi súlyát.

A konferencia külföldi és hazai matematikusok hasznos találkozója volt. Vendégeink is jól érezhették magukat, amihez hozzájárult az ideális környezet és a nagyon jó idő is.

Gergely József

II. MATEMATIKAI PROGRAMOZÁSI TÉLI ISKOLA

Mátrafüred, 1974. február 1—7.

A *Magyar Tudományos Akadémia Számítástechnikai és Automatizálási Kutató Intézete* 1974. február1—7-ig *Mátrafüreden*, a *Magyar Tudományos Akadémia* üdülőjében Matematikai Programozási Téli Iskolát rendezett. Az első Téli Iskolát a *Bolyai János Matematikai Társulat*tal közösen szervezte az Intézet 1973 februárjában. Megrendezésével az Intézet kettős célt kívánt szolgálni; egyrészt neves külföldi és hazai szakemberek meghívásával, előadások tartásával a résztvevők szakmai továbbképzésére adott lehetőséget, másrészt a résztvevők viszonylag kis létszáma (90 fő) és az üdülőben együtt eltöltött egy hét nagyon jó körülményeket biztosított a résztvevők kutatási területeinek megismerésére, vélemény- és tapasztalatcserére, a további együttműködés megalapozására.

A Téli Iskola vezetője és tudományos programjának kialakítója DR. PRÉKOPA ANDRÁS egyetemi tanár, az *MTA SZTAKI Operációkutatási Osztályának* vezetője volt, a szervezési teendőket pedig e sorok írója látta el, az Intézetben működő szervező iroda közreműködésével.

A Téli Iskolán meghívott előadók tartottak összefoglaló jellegű előadásokat, melyek az előadók saját eredményein kívül a témakör mások által elért fontos eredményeit is tartalmazták. Az előadások időtartama egy óra volt, nyelve angol és német.

Sajnálatos tény, hogy a szocialista országokból meghívott előadók közül öt annak ellenére, hogy az Intézet meghívását elfogadta, a Téli Iskolán nem tudott megjelenni.

Az iskolán tizenhét előadás hangzott el a matematikai programozás különböző területeiről elméleti, algoritmikus és számítástechnikai problémákról. A külföldi előadók száma tizenhárom volt.

Az alábbiakban rövid áttekintést nyújtunk az egyes előadások tartalmáról. A felsorolás azt a sorrendet követi, amelyben az előadások elhangzottak.

DANTZIG, G. B. *(U.S.A.), "On the Need for System Optimization Laboratories"* előadásában elmondta, hogy véleménye szerint a nagyméretű gazdasági, élelmezési, energiagazdálkodási stb. problémák modellezésének és megoldásának elengedhetetlen feltétele olyan rendszer-optimalizálási laboratóriumok szervezése, amelyek speciális teszt-modellek, számítógépes programok és a nagy rendszerek megoldásához szükséges software problémák vizsgálatával foglalkoznak. Javasolta, hogy a laboratóriumokban kidolgozott software anyagot a gyakorlatból származó nagyméretű problémákon próbálják ki és államigazgatási, tudományos és ipari problémák megoldására ezek díjtalanul használhatók legyenek.

WETS, R. *(U.S.A.), "Constraint Qualifications: A Fundamental Analysis"* előadásában a matematikai programozási problémák lokális szélsőértékeire vonatkozó *Lagrange-tétel* különböző változataival foglalkozott. Ezek két osztályba sorolhatók attól függően, hogy a problémára vonatkozó megszorítás a feltételekre vonatkozó regularitási követelményt ír elő, vagy perturbációs vizsgálaton alapuló követelményt támaszt a problémával szemben. R. WETS és M. DEMPSTER közös eredménye a két különböző osztályba tartozó változók kapcsolatának megalapozása és a problémára vonatkozó legenyhébb előírás megadása, amely mellett még érvényes a *Lagrange-tétel.*

ROCKAFELLAR, R. T. *(U.S.A.), "Stochastic Convex Programming: Duality and Optimality"* előadásában egy általánosított kétlépcsős sztochasztikus programozási problémával foglalkozott. Erre vonatkozóan ismertetett egy R. WETS-szel közösen elért elméleti eredményt: a kétlépcsős sztochasztikus programozási probléma bizonyos feltételek teljesülése esetén ekvivalens egy olyan problémával, amelyben egy függvény integráljának értékét minimalizáljuk egy speciális halmazon. A feladatban szereplő egyenlőtlenség feltételek perturbációs vizsgálata alapján az előadó definiálta a feladat *Lagrange* függvényét, majd a feladat duálját és dualitási tételt bizonyított.

PRÉKOPA A. *(MTA SZTAKI), "Discrete Unimodal Functions".* Az előadó a folytonos valószínűségeloszlásokra néhány évvel ezelőtt nyert tételei analogonjait keresi diszkrét valószínűségeloszlásokra. A kutatás jelenlegi állásáról tartott beszámoló mellett összefoglalta a logkonkáv és a kvázikonkáv számsorozatokkal kapcsolatban az irodalomban fellelhető eredményeket, továbbá megfogalmazott nemlineáris diszkrét programozásra visszavezethető sztochasztikus programozási modelleket. Ellentétben a diszkrét programozás szokásos feladataival, az ezekben a modellekben szereplő diszkrét függvények kizárólag az R^n tér rácspontjain vannak értelmezve (tehát nem egy R^n-beli konvex halmazon). A diszkrét függvények logkonkavitására (kvázikonkavitására) háromféle definíciót ismertetett, vizsgálta ezek kapcsolatait és nagy figyelmet szentelt az ilyen sorozatokkal vett konvolúció tulajdonságainak. A konvolúcióval kapcsolatos tételekre támaszkodva elemezte a megfogalmazott diszkrét sztochasztikus programozási modellek matematikai tulajdonságait.

HARTMANN, K. *(NDK), „Ganzzahlige lineare Quotientenoptimierung nach dem Schnittverfahren von Gomory"* előadásában az alábbi problémára adott egy megoldási módszert:

$$\max \frac{u(\mathbf{x})}{v(\mathbf{x})}$$

$$A\mathbf{x} = \mathbf{a}$$

$$\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in R^n, \quad x_j \text{ egész}, \quad j = 1, 2, \dots, k,$$

ahol $u(\mathbf{x}) = \mathbf{c}'\mathbf{x} - \mathbf{c}_0$, $v(\mathbf{x}) = \mathbf{d}'\mathbf{x} - \mathbf{d}_0$ és $k \leqq n$. A módszer a következő: először megoldjuk a feladatot az egészértékűségi megkötés nélkül. Legyen az optimális megoldás $\mathbf{x}^*$. Ekkor $u_0 = u(\mathbf{x}^*)$, $v_0 = v(\mathbf{x}^*)$, a célfüggvény linearizálható: $\min (u_0\mathbf{d}' - v_0\mathbf{c}')\mathbf{x}$. Alkalmazzunk egy *Gomory* vágást. Ha az egészértékűségi feltételek teljesülnek, akkor fejezzük be az eljárást. Ellenkező esetben az új u_0, v_0 értékkel ismételjük meg az eljárást.

KOVÁCS L. B. *(MTA SZTAKI), "Dynamic Programming and Group Decomposition for the Solution of Discrete Programming Problems"* előadásában az általános lineáris diszkrét feladatok dinamikus programozási megoldásait tekintette át. A már hagyományosnak tekinthető, a dinamikus programozás optimalitási elvén alapuló módszerből kiindulva a cél a feltételek számának csökkentése volt, ugyanis az ilyen típusú módszerek hatékonyságát elsősorban ez befolyásolja. Az előadó röviden kitért saját eredményeire is. Ezek közül részletesebben ismertette módszerét, mely véges *Ábel* csoportoknak ciklikus csoportokra való tényleges felbontását adja meg. Ezen a felbontáson alapul az egyik ismertetett dinamikus programozási eljárás.

OETTLI, W. *(NSZK), „Einzelschrittverfahren zur Lösung konvexer und dual konvexer Minimierungsprobleme"* — speciális nemlineáris programozási probléma megoldására adott algoritmust. A probléma a következő: $\min \{F(x_1, x_2, \dots, x_n) | x_i \in X_i,\ i = 1, 2, \dots, n\}$, ahol $X_i \subset R^{n_i}$ konvex, zárt halmazok. A megengedett tartomány ezek direkt szorzata, F konvex és differenciálható. Nevezzük az $x_i \in R^{n_i}$ vektorokat $(i = 1, 2, \dots, n)$ az $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ vektor komponenseinek. Az előadó által javasolt eljárásban egy $\mathbf{x}_0$ megengedett pontból kiindulva minimalizál egy-egy komponensre vonatkozóan, a további komponensek rögzítése mellett. A minimalizálások sorrendjét előre rögzíti, és így a minimalizálás az egyes komponensekben ciklikusan ismétlődik. A módszer speciális esete a szokásos koordinátánkénti minimalizáló eljárás, — ez akkor adódik, ha a komponensek egydimenziósak. Az előadó az eljárás konvergenciáját bizonyította, megfelelő feltételek teljesülése mellett.

HOLLATZ, H. *(NDK), "Über Verfahren der zulässigen Richtungen in der Nichtlinearen Optimierung"* előadása ügyes összefoglalása volt a megengedett irányok módszerében és alkalmazásában eddig elért eredményeknek. A módszerben szükséges iránykeresésre nyolc különböző eljárást ismertetett, a lépéshossz meghatározására és a cikcakkozás elkerülésére öt módszert mutatott. Az iránykereső és lépéshossz meghatározó problémák különböző kombinációiból az irodalomból már jól ismert eljárások nyerhetők. H. HOLLATZ a diszkrét optimális szabályozás és diszkrét minimax probléma megoldásával foglalkozott. Az általa javasolt algoritmus is a fenti iránykereső és lépéshossz meghatározó módszerek egy kombinációját alkalmazó megengedett-irány módszer.

ROBINSON, S. M. *(U.S.A.), "Determination of Rates of Convergence for Classes of Nonlinear Programming Problems"* előadásában néhány kvadratikusan konvergens algoritmus új értelmézését adta. A leírás alapjául egy érzékenységi vizsgálat szolgál, amelyben egy p paramétertől függő nemlineáris programozási feladat $Z(p)$ *Kuhn—Tucker* pontjának variációjára kap becslést. (*Kuhn—Tucker* ponton most a duálváltozókkal kiegészített vektort érti.) Ezután olyan algoritmusokat épít fel, amelyben a p paraméter maga is egy *Kuhn—Tucker* pont közelítése, és optimalitási kritérium a $p^* = Z(p^*)$ egyenlőség teljesülése. Ilyen algoritmus a WILSONtól, illetve ROBINSONtól származó korábbi algoritmus. Az algoritmus kvadratikus konvergenciája a $p_{n+1} = Z(p_n)$ iterációból kiindulva bizonyítható.

LOVÁSZ, L. *(Eötvös Loránd Tudományegyetem, Budapest) "On the Structure of Networks"* előadása megmutatta, hogy a gyakorlat számára oly fontos hálózati folyamok vizsgálata igényli a kombinatorika eszközeit is, sőt, a hálózatok struktúrájára vonatkozó igen mély eredmények nyerhetők ezen az úton.

Szimmetrikus folyamfüggvényű hálózathoz létezik folyamekvivalens fa (azaz nagyon egyszerű struktúrájú hálózat). Nagyon lényeges ezért *Lovász*nak az az eredménye, amely a kapacitásokkal jellemzi a szimmetrikus folyamfüggvényű hálózatot. A nevezetes *"Edmonds-branching"* problémára LOVÁSZ egyszerű konstruktív bizonyítást adott. A *Ford—Fulkerson-tétel* szerint gráfban két pont között az összes út lefogható a független (éldiszjunkt) utakon keresztül. Két pont helyett ponthalmazt tekintve és megkísérelve a ponthalmaz pontpárjai között húzódó utak blokkolását, egyszerű példa adható, hogy itt a független utak számánál több élre van szükség. LOVÁSZ LÁSZLÓ bebizonyította, hogy ennek négyszerese elegendő.

ELSTER, K. H. *(NDK)*, *„Über konjugierte Fenchel-Operatoren"* előadásában a $T:E\to F$ konvex operátorok tulajdonságait vizsgálta, ahol E lineáris vektortér, F pedig feltételesen teljes vektorháló. Megfogalmazta a *Hahn—Banach-tételt* ilyen operátorokra, a szokásos technikával elválasztási tételeket kapott. A konjugált konvex funkcionál analógiájára definiálta a konjugált konvex operátor fogalmát. Ezek az operátorok a funkcionálokhoz hasonló tulajdonságokkal rendelkeznek. Az előadást a *Fenchel*-féle dualitástétel operátoros alakja zárta.

KALL, P. *(Svájc)*, *"Discrete Approximation of the Probability Distribution in Stochastic Linear Programming with Complete Fixed Recourse"* című előadásában a kétlépcsős sztochasztikus programozási problémával foglalkozott. R. WETS 1964-ben javasolta, hogy a DANTZIG és MADANSKY által megalkotott programozási feladatban egy alkalmas véges, diszkrét eloszlással „közelítsük" a benne szereplő folytonos valószínűségi eloszlást és az így keletkező nagyméretű lineáris programozási feladatot a dekompozíciós szerkezet előnyeinek a kihasználásával oldjuk meg. P. KALL olyan nem túl erős feltételeket fogalmazott meg, amelyek mellett a fent említett „közelítés" elméleti szempontból értelmesnek tekinthető. Elhangzottak az előadásban konvergencia tételek és bizonyos speciális feladatok esetére az előadó hibabecslést is tudott adni.

LOMMATZSCH, K. *(NDK)*, *„Quadratische Optimierung mit Hilfe der linearen parametrischen Optimierung"* előadásában a következő: $\min_{\mathbf{x}\in M} f(\mathbf{x},\mathbf{x})$ matematikai programozási probléma megoldásához — ahol $f(\mathbf{x},\mathbf{x})=\mathbf{x}^T C\mathbf{x}+2\mathbf{p}^T\mathbf{x}$ és M zárt, konvex halmaz — a $\min_{\mathbf{x}\in M} f(\mathbf{x},\boldsymbol{\lambda})$, $\boldsymbol{\lambda}\in R^n$ lineáris parametrikus programozási problémát használta, ahol $f(\mathbf{x},\boldsymbol{\lambda})=\mathbf{x}^T C\boldsymbol{\lambda}+\mathbf{p}^T\mathbf{x}+\mathbf{p}^T\boldsymbol{\lambda}$. A lineáris parametrikus programozás eredményeinek felhasználásával K. LOMMATZSCH szükséges és elegendő feltételeket adott a kvadratikus programozási probléma lokális optimumára. Az eredményhez a

$$K_M^{\bar{\mathbf{x}}} = \{\boldsymbol{\lambda}\in R^n \mid f(\mathbf{x},\boldsymbol{\lambda}) \geqq f(\bar{\mathbf{x}},\boldsymbol{\lambda}),\ \forall\mathbf{x}\in M\},\quad \bar{\mathbf{x}}\in M$$

halmazok tulajdonságainak vizsgálata vezetett.

WEINERT, H. *(NDK)*, *"On Parametric Linear Programming Problems with Fixed Matrix of Constraints"* című előadásában a $\max\{\mathbf{x}^T\mathbf{c}(u)\mid A\mathbf{x}=\mathbf{b}(v),\ \mathbf{x}\geqq\mathbf{0}\}$ lineáris parametrikus programozási problémával foglalkozott. Ilyen problémákkal foglalkozik a NOZICKA, F., GUDDAT, J., HOLLATZ, H., BANK, B.: *Theorie des parametrischen Optimierung*, Akademie-Verlag, Berlin (nyomtatás alatt), könyv abban az esetben, ha $\mathbf{c}(u)$ és $\mathbf{b}(v)$ olyan lineáris vektorfüggvények, melyek a véges dimenziós R^p, ill. R^q tereket R^n, ill. R^m-re képezik le. Az előadás célja annak megmutatása volt, melyek azok az eredmények az említett könyvben, amelyek abban az esetben is igazak, ha $\mathbf{c}(u)$ és $\mathbf{b}(v)$ lineáris *Hausdorf* terek U, V részhalmazait R^n, ill. R^m-be leképező folytonos függvények.

EVERS, J. J. M. *(Hollandia)*, *"Linear Infinite Horizon Programming"* előadásában összefoglalta a lineáris végtelen-horizonú programozás fő eredményeit. Egy speciális végtelen horizonú lineáris programozási problémát vizsgált, majd megmutatta, hogy a *Hansen—Koopmans*-féle *von Neumann*-típusú technológiájú gazdasági modell a vizsgált feladatcsoporthoz tartozik. Láttuk, hogy a *Lemke*-féle komplementaritási algoritmus alkalmazható a LP probléma egyensúly-pontjának meghatározására. Érdeklődésre tarthat számot az előadó fenti témáról megjelent könyve: J. J. M. EVERS: *Linear programming over an infinite horizon*, Tilburg University Press, 1973.

GERENCSÉR L. *(MTA SZTAKI)*, *"Two Methods of Parametrization in Nonlinear Programming"* előadása első részében az alábbi feladattal foglalkozott:

$$\min f(\mathbf{x})$$

$$g_i(\mathbf{x}) \geqq 0,\quad i=1,2,\dots,m$$

ahol az $f(\mathbf{x})$, $-g_i(\mathbf{x})$, $i=1,\dots,m$ folytonosan differenciálható kvázikonvex függvények voltak. Ilyen típusú feladatoknál az optimum közelében egy általánosabb extrapolációs eljárást javasolt. Ennek lényege, hogy egy olyan görbesereget definiál, hogy az optimum közelében minden megengedett pontból vezessen egy görbe az optimumba. Az extrapoláció folyamán meghatározza, hogy melyik görbén van, s ennek érintője irányában lép tovább. Az előadás második részében

$$\min f(\mathbf{x})$$

$$g_i(\mathbf{x}) = 0,\quad i=1\dots m,$$

feladattal foglalkozott, ahol $f(x)$, $g_i(x)$, $i=1, 2, \ldots, m$ folytonosan differenciálható függvények voltak. A feladat megoldása során definiálja az ún. *Ljapunov* felületeket, amely az eredeti feladattal azonos állású felületek serege. Az eredeti feladatot feltétel nélküli minimalizálásra vezeti vissza, s a minimalizálás irányát úgy választja, hogy az az eredeti felület irányában történő lépés és az aktuális *Ljapunov* feltétel mentén a minimum irányában történő lépés összege lesz.

SCHOCH, M. *(NDK), „Beziehungen zwischen dem Erweiterungsprinzip und dem allgemeinen Schnittprinzip"* című előadásában a diszkrét programozásban alkalmazott metszési módszereknek elvi megalapozását és egy általános formáját megadó munkának, V. A. EMELICSEV egy munkájának hiányosságát küszöböli ki. Ez a munka az algoritmusok végességét nem bizonyítja. Az előadó egy általánosított metszési elvet ismertetett, majd megmutatta, hogy ezt az általa korábban kidolgozott kibővítési elv speciális esetének tekinthetjük.

A tervezett program szerint a felsoroltakon kívül a következők tartottak volna előadást:

FINKELSTEIN, YU. YU. *(Szovjetunió), "The ε-Approach for the Approximate Solution of Discrete Linear Programming Problems".*

POSZPELOV, G. SZ. *(Szovjetunió), "Discrete Programming Methods and Models in Planning of Scientific Research Work and Choosing of Projects".*

ORCHARD-HAYS, W. *(U.S.A.), "Prospects for Interactive M. P. Systems".*

HAMALA, M. *(Csehszlovákia), "The Trivial Duality in Convex Programming and its Applications".*

DRAGAN, I. *(Románia), "Optimal Flows in Network with Gains".*

KORBUT, A. A. *(Szovjetunió),* — előadásának címét nem közölte.

Fenti előadók azonban a Téli Iskolán nem tudtak résztvenni és ezek az előadások elmaradtak.

ORCHARD-HAYS, W. előadáskivonata szerint a nagyméretű feladatok megoldásának problémájával akart foglalkozni. Nagyon fontosnak tartja és tapasztalatai szerint igen hatékony az ilyen feladatok megoldására interaktív programrendszer kidolgozása.

Nagy érdeklődést váltott ki az a témakör is, amelyről POSZPELOV, G. SZ. tartott volna előadást. A témakörhöz kapcsolódó kerekasztal-beszélgetés szerint hasznos lett volna a fenti előadás megtartása, konkrét modell és tervezési módszer, valamint tapasztalatok megismerése.

Az előadásokon kívül a tudományos program három kerekasztal-beszélgetést tartalmazott. Ezek témája:

1. A matematika és az operációkutatás kapcsolata.
   (vezetője: G. B. DANTZIG).
2. A tudományos munka tervezhetőségéről.
   (vezetője: KUNSZT GYÖRGY, Építéstudományi Intézet).
3. A matematikai modellek szerepe komplex rendszerek leírásában és optimalizálásában.
   (vezetője: JÁNDY GÉZA, Budapesti Műszaki Egyetem).

Mindhárom beszélgetésen élénk vita alakult ki, — a beszélgetések témakörei ezek alapján nagyon aktuálisak voltak. A hozzászólások között egymásnak teljesen ellentmondó nézetek és javaslatok is elhangzottak.

A *Magyar Tudományos Akadémia Számítástechnikai és Automatizálási Kutató Intézete* a Téli Iskola munkáját nagyon eredményesnek tartja. Úgy véli, hogy a résztvétel mindenki számára hasznos volt. Az Intézet tervezi a Téli Iskola évenkénti megszervezését — azonban a nagy érdeklődés ellenére sem kívánjuk növelni a résztvevők létszámát. Véleményünk szerint a létszám emelése a Téli Iskola céljainak megvalósítását nem a kívánt irányban befolyásolná.

Strazicky Beáta

NEMZETKÖZI OPERÁCIÓKUTATÁSI KONFERENCIA

Eger, 1974. augusztus 26—30.

1974. augusztus 26—30. között a *Bolyai János Matematikai Társulat* nemzetközi operációkutatási konferenciát tartott *Egerben.* Ez a konferencia a nagyobb méretű hazai operációkutatási rendezvények sorában a hatodik volt. Az elsőt nemzetközi jelleggel 1963-ban *Budapesten* rendezte a *Bolyai Társulat.* Ezt követőleg 1967-ben *Veszprémben* a *Magyar Tudományos Akadémia,* 1970-ben *Debrecenben* a *Bolyai Társulat,* 1971-ben *Pécsett* a *Neumann János Számítógéptudományi Társaság,* végül 1973-ban *Balatonfüreden* a *Közgazdasági Társaság* rendezett operációkutatási konferenciát, melyek magyar nyelvűek és lényegében csak a hazai szakemberek tapasztalatcseréi voltak.

Az Egerbe érkező nagyszámú neves külföldi résztvevő igazolta, hogy érdemes volt nemzetközivé szélesíteni konferenciánkat. A tíztagú szovjet küldöttséget L. V. KANTOROVICS akadémikus vezette. Európa legtöbb országából érkeztek szakemberek: a Német Demokratikus Köztársaságból, Lengyelországból, Romániából, Csehszlovákiából, Jugoszláviából, Bulgáriából, Hollandiából, Franciaországból, Finnországból, Dániából, Svédországból, Belgiumból, Svájcból, Ausztriából. A tengerentúliakat az Egyesült Államok, Kanada és Venezuela 7 kutatója képviselte, Vietnamból HOANG TUY professzor látogatott Egerbe. A konferencia iránti nemzetközi érdeklődésre és a magyar operációkutatás nemzetközi tekintélyének növekedésére jellemző, hogy az *IFORS (Nemzetközi Operációkutatási Társaság)* is képviseltette magát G. KREWERAS francia professzor személyében, és jelen volt a *Matematikai Programozási Társaság* egyik megalapítója, A. ORDEN amerikai professzor is.

A 44 magyar és 43 külföldi operációkutató előadását négy szekcióba osztottuk, melyek közül általában három futott párhuzamosan az *egri MTESZ székház* és a *Liceum* előadótermeiben. A konferencia nemzetközi jellege nehézségeket is okozott. A négy idegen nyelv — angol, orosz, német, francia — mellett a magyart is elfogadtuk hivatalos nyelvként. Szinkrontolmácsolással próbáltuk áthidalni a megértési nehézségeket, de ez csak részben sikerült, a technikai lehetőségek korlátozottsága és a szakmában is jártas, gyakorlott fordítók kis száma miatt. Két előadóteremben folyt szinkrontolmácsolás, a tolmácsok minden nyelvről angolra, és angolról magyarra fordítottak.

A történelmi múltú, borairól is híres, kellemes fekvésű kulturált kis város méltó vendéglátója volt a mintegy 250 hazai és 70 külföldi résztvevőnek.

A megnyitó ülésre az *egri Gárdonyi Géza Színház* előadótermében került sor.

Először PRÉKOPA ANDRÁS professzor, a konferencia szervezőbizottságának elnöke és a *Bolyai Társulat Alkalmazott Matematikai Szakosztályának* elnöke üdvözölte a résztvevőket. GERMAIN KREWERAS professzor eredményes munkát kívánt az *IFORS* nevében, majd SZÉNÁSSY BARNA professzor tartott előadást híres alkalmazott matematikusunk, FARKAS GYULA életéről és nemzetközileg elismert munkásságáról. Ennek az az esemény adott aktualitást, hogy a konferencia megnyitó ülésén adták át először a *Bolyai János Matematikai Társulat* által alapított *Farkas Gyula emlékdíjat* a matematika alkalmazása terén legjelentősebb eredményeket elért ifjú kutatóknak. A díjakat PRÉKOPA professzor nyújtotta át öt fiatal kutatónak, BENCZUR ANDRÁSnak, KÉRI GERZSONnak, GERENCSÉR LÁSZLÓnak, NÉMETI ISTVÁNnak és SZABÓ LÁSZLÓnak.

A következőkben áttekintést adunk a négy szekcióban elhangzott, igen széles témakört felölelő, különböző, de általában színvonalas előadásokról.

Matematikai programozás

A szekció 26 előadása jól körülhatárolt témákban elért elméleti eredmények bemutatója volt, sok olyan új algoritmust ismertettek, melyek hatásosságát számítástechnikai összehasonlításokkal és gyakorlati alkalmazásokkal is alátámasztották. A legtöbb külföldi előadó ebben a szekcióban adott elő.

A nemlineáris programozás témakörében egy igen általános optimalitási feltételről szólt HOANG TUY előadása, szélsőértékkereső feladatokra vonatkozó elégséges feltételekről. Kvadratikus programozás stabilitási vizsgálatairól szólt egy NDK-beli kutató előadása. Hallottunk érdekes új eredményeket a konjugált gradiens módszerrel és a SUMT módszerrel kapcsolatban a *SZTAKI* kutatói részéről.

Szerepelt egy algoritmus dinamikus lineáris programozásra és egy előadás kétszeresen összekapcsolt feladat dekompozíciójára vonatkozó eredményekről az *INFELOR* kutatóinak előadásában.

Egy *SZTAKI* kutató beszámolt egy igen gyors leszámlálási algoritmusról olyan diszkrét lineáris programozási feladatra, mely nagyméretű speciális feladatokra és nemlineáris feltételekre is kiterjeszthető; valamint egy olyan transzformációs módszerről, mely kvadratikus diszkrét programozási feladatot halmazlefedési struktúrájú feladatra vezet vissza.

SZTAKI kutató részéről hangzott el előadás egy többlépcsős sztochasztikus programozási modell megoldásáról és alkalmazásáról a termelésirányításban, készletgazdálkodásban és vízszintszabályozásban.

Több előadó foglalkozott sztochasztikus programozási feladat megoldásával, visszavezetve azt lineáris programozási, paraméteres lineáris programozási, illetve geometriai jellegű feladatra.

Hat előadás hangzott el a hálózati folyamok elméletével kapcsolatban. A legérdekesebb F. GLOVER coloradói professzor előadása volt, mely összefoglalta a jelentősebb eredményeket, kiemelte a hálózati folyam jellegű szemlélet hatásosságát bizonyos feladatok lineáris programozási megfogalmazásával szemben, ismertetett egy algoritmust nemlineáris kifeszítő fa megadására rögzített számú él és csomópont esetén, melyet az utazó ügynök probléma megoldására és egy híradástechnikai csatolási feladatra alkalmazott. Szerepelt még új algoritmus a minimális folyam és a multiterminális minimális út megadására; egy előadás pedig a hálózati folyam módszerek játékelméletbeli alkalmazhatóságáról szólt.

Sztochasztikus problémák

Több előadó vizsgálta a sztochasztikus rendszerek optimalitási kritériumait játékelméleti alapon. A játékelmélet dinamikus folyamataival is foglalkozott egy szovjet kutató.

Négy előadás témája volt a tömegkiszolgálás elmélete. Egy telex és távíróhálózati probléma, illetve egy gépkocsiszervizben adódó sorbanállási problémáról szóltak a *Beloiannisz Híradástechnikai Gyár* és az *OVK* kutatói. *KFKI* kutatók a látszólagos várakozási idő leírásával és váltakozó számú kiszolgáló csatorna esetén a stacionér állapot jellemzésével foglalkoztak. Egy többcikkes készletmodellt szimuláció segítségével oldottak meg az *Egyetemi Számítóközpontban.*

A vízkészletgazdálkodás jelentőségét öt ilyen témájú előadás hangsúlyozta. Egy dán matematikus ismertetett egy a csoportjuk által kidolgozott szimulációs modellt, mely a vízkészlet szennyeződését és mennyiségi változását írja le. A hosszú és középtávú terv-variánsok értékeléséről, beruházási stratégiák gazdasági-szociológiai szempontból történő összehasonlításáról adott elő az *OVH* és a *Közgazdasági Egyetem* egy-egy munkatársa. Ismertettek egy víztározó vezérlési problémát és a gyakorlatban alkalmazható megoldását, valamint a tiszalöki öntözőrendszer vízkészletének hálózati folyamok alapján készített elosztási modelljét.

Gazdasági és ipari alkalmazások

A legtöbb, egyúttal mind téma, mind szívonal tekintetében legsokrétűbb előadás ebben a szekcióban hangzott el. Sok hatásos, konkrét alkalmazást hallottunk, ugyanakkor többen csak általánosságban vizsgálták az alkalmazási lehetőségeket. Az előadásokat igyekeztünk az alkalmazási terület alapján csoportosítani.

Kiemelkedő érdekességű volt L. V. KANTOROVICS szovjet akadémikus előadása a gazdasági tervezés dinamikus modelljéről. Szovjet, lengyel és finn kutatók foglalkoztak az optimális árrendszer kialakításával központi tervezés esetén, kétszintű tervezési rendszer összehangolásával, a centralizáció-decentralizáció kérdésével, a szabályozáselmélet felhasználásával a gazdasági modellezésben. Az *Országos Tervhivatal Számítástechnikai Központjá*ban új módszerek születtek makroökonómiai idősorok előrejelzésére. A *Belkereskedelmi Minisztérium*ban középtávú termelési modelleket dolgoztak ki.

Nagy figyelem kísérte a termelésirányítással, gyártástervezéssel, erőforráselosztással kapcsolatos előadásokat. Hallottunk egy Finnországban alkalmazott, fakitermelést és elszállítást optimalizáló programcsomagról, mely egy dinamikus irányítási tervet is adott.

Az *MTA SZTAKI* kutatói beszámoltak a *Borsodi Vegyi Kombinát* részére végzett modellezésről, egy dinamikus programozási megoldásról, egy, a tervvariánsokat értékelő input-output modellről, valamint a vállalati haszon felosztásának módozatait vizsgáló programról.

Egy mátrixgeneráló olajipari szimulációs programot dolgoztak ki a *Nagynyomású Kísérleti Kutató Intézet*ben. A *NIM IGÜSZI* operációkutatói gráfelméleti eszközöket használtak fel egy optimális munkatervezési eljárás meghatározására gépek állásidejének minimalizálásához. Belga előadótól egy egyszerű jobshop modellbeli általános termelési probléma megoldásáról hallottunk. Az operációkutatás igen újszerű alkalmazását láthattuk gazdasági és kommunális szervezési kérdésekben. Gráfelméleti eszközöket használtak az építőipari tervezés strukturális összefüggéseinek vizsgálatára, az *ÉTI*-ben, a városi közlekedéshálózat megtervezéséhez a *BME*-n. Vizsgálták a rendszerelmélet alkalmazhatóságát a vállalati döntéselőkészítésben, az *INFELOR* egyik kutatója a magyarországi vállalati nyereségrendszer szabályozó szerepével foglalkozott. Operációkutatási módszerek felhasználásával foglalkoznak a tanácsi kommunális feladatok elemzésénél is.

Számítógépes algoritmusok és információs rendszerek

A kelet-európai országokban sokáig nemcsak objektív tényezők gátolták a számítástechnika előrehaladását. Örvendetes, hogy hazánkban az utóbbi években egyre több operációkutatási jellegű program született.

Az előadók új algoritmusokat ismertettek, vagy már ismert algoritmusok konkrét számítógépes reprezentációjáról számoltak be, igazolva a számítástechnika növekvő jelentőségét, de az elismertetés, a fejlődés nehézségeit is.

Belga és finn kutatók a nagy jövő előtt álló interaktív programozással foglalkoztak, egy előadás többcélfüggvényű interaktív optimalizálási módszeren alapuló programcsomagot ismertetett. Öt előadás témája nemlineáris programozási algoritmusok numerikus, gépi összehasonlítása, az eljárások módosítása, gyorsítása volt. Három előadás szólt szukcesszív approximációs algoritmusokról. Szerepeltek irányításelméleti módszerek számítástechnikai realizációi is.

Indiai előadó konvex poliéder összes csúcsainak meghatározására dolgozott ki algoritmust.

A. Orden amerikai professzor a szimplex módszer konvergenciájával kapcsolatos valószínűségszámítást alkalmazó számítástechnikai eredményekről és tapasztalatokról tartott összefoglaló jellegű előadást.

Sajnálatos, hogy az egyre nagyobb szerepet kapó információs rendszerek témaköréből csak két előadás hangzott el. A deduktív információs rendszerekben elért eredményekről és a távolabbi lehetőségekről beszélt az *MTA SZTAKI* egyik fiatal kutatója, bolgár előadók pedig egy konkrét építőipari adatbankról számoltak be.

Megállapíthatjuk, hogy a hazai operációkutatás legfontosabb centrumai mind elküldték előadóikat az egri konferenciára, és a külföldi résztvevők előadásaival együtt jó áttekintést kaphattunk az operációkutatás fejlettségéről, kedvező és kedvezőtlen jelenségeiről egyaránt. Kisebb szelektálás után a konferencián elhangzott előadások anyagát könyv alakban adja ki a *North Holland Publishing Company*. A kötet megjelenése 1975 első felében várható.

Turchányi Piroska és Kelle Péter

Könyvismertetés

Bolyai János: *Appendix. A tér tudománya.* Szerkesztette, bevezetéssel, magyarázatokkal, kiegészítésekkel ellátta: *Kárteszi Ferenc.* — Akadémiai Kiadó, Budapest, 1973, 211 oldal.

Ez a külsejében is igen tetszetős könyv az *Akadémiai Kiadó* gondozásában 1952-ben megjelent *„Appendix"* című műnek második, lényegesen módosított kiadása.

Megjegyzéseinket rögtön a 2. kiadás címével kezdjük. Bolyai Jánosnak a geometriában kétségtelenül óriási jelentőségű tanulmányát ma világszerte *Appendix*ként ismerik, mindenütt így szoktuk idézni. Ez a cím azonban szigorúbban véve téves, mert az „appendix" szó csupán arra utal, hogy a tanulmány először Bolyai Farkas *„Tentamen"* című kétkötetes munkájában, az első kötet *függelék*eként látott napvilágot. Ugyanitt Bolyai János hosszabb latin szöveggel pontosan utal értekezésének a tárgyára is. Ez azonban — éppen hosszadalmassága miatt — nehézkes, viszont célszerű a kezdőszavakból alkotott *„Scientia Spatii" (=A tér tudománya)* szavaknak az *Appendix* szóhoz való illesztése. Egyébként a német nyelvű fogalmazványban Bolyai János a *„Raumlehre"* címet alkalmazta. Ma már hiábavaló lenne a nagyon megszokott *Appendix* megjelölés ellen harcolnunk, de helyesnek véljük — mint ahogy Kárteszi Ferenc teszi — a fenti cím bevezetését.

A kiadvány IV nagyobb, és ezeken belül számos kisebb fejezetre tagolódik.

Az I. rész Euklidésztől kiindulva röviden áttekinti a geometria alakulását, időrendi sorrendben nyomon követve azokat a vizsgálatokat, bizonyítási kísérleteket, eredményeket és kudarcokat, melyek a párhuzamossági axiómával kapcsolatosak, és amelyek a múlt század harmadik évtizedében végül is Bolyai János és Lobacsevszkij fölfedezéséhez vezettek. E részben nagyon hasznos azon vizsgálatok részletezése, melyeket Legendre, Schweikart, Saccheri és mások végeztek az 5. posztulátummal kapcsolatban. Külön is ki kell emelnünk Gauss elgondolásainak precíz, és — a terjedelem adta lehetőséghez mérten — részletező ismertetését. Ez azért érdemel külön figyelmet, mert Gauss ezirányú eredményeinek összegyűjtése csupán vázlatos följegyzései és levelezése révén volt lehetséges, mivel e témáról semmit sem publikált. Gauss tényleg sok mindent végig gondolt egy nem-euklideszi geometria lehetőségéről, belátta annak filozófiai konzekvenciáit is, de eredményeit nem öntötte olyan rendszerbe, mint Lobacsevszkij, vagy Bolyai János. Rendkívül árnyalt, átgondolt és tárgyilagos megfogalmazásban szerepel itt Gauss Bolyai János munkásságának elismertetése terén betöltött — sokat vitatott — kérdése is.

A könyv II. része a latin nyelvű *Appendix* fakszimile kiadását, illetve ennek magyar nyelvű fordítását tartalmazza — ez utóbbit tetszetős ábrákkal ellátva.

Megítélésünk szerint legértékesebb a III. rész, mely az *Appendix* tartalmának részletes magyarázatát adja, ragaszkodva a mű paragrafusainak rendjéhez.

Ismeretes, hogy az *Appendix* — bár meglehetős elemi matematikai eszközöket alkalmaz — tömörsége miatt igen nehéz olvasmány, megértése komoly elmélyedést igényel. Éppen ezért kommentálták már a múlt század hetvenes éveitől kezdve számosan. Nem vitás, hogy ezen magyarázatok közül tartalmilag a legpontosabb, módszerileg a legkönnyebben követhető Kárteszi Ferenc munkája. Segítségével nemcsak a kérdés szakemberei, hanem az egyetemi hallgatók és a pedagógusok is be tudnak tekinteni e csodálatos tanulmány gondolatvilágába, megértik a benne szereplő tételeket, és némi idő-ráfordítással azok bizonyítását is. Ezt azért hangsúlyozzuk, mert — valljuk be — Bolyai Jánosnak még ma is inkább különc életét ismerjük, róla a különféle megemlékezések során sok minden elhangzik, de legkevesebbet éppen a lényegről: matematikai fölfedezéséről mondunk.

A IV. rész a térfogalomnak az első nem-euklideszi geometriák utáni alakulását vázolja. E rész — idézve Kárteszi Ferencnek az előszóban írt mondatait — „...teljességre való törekvés nélkül, csupán néhány lényeges téma felvázolásával azt a hatást igyekszik érzékeltetni, amely BOLYAI JÁNOS térelméletének, eszméinek a megismerése és elterjedése után a modern matematika mai napig ívelő kialakulásában tükröződik. A régebbi szerzők az axiomatikus fejlődésben igyekeztek BOLYAI hatását nyomon követni. Ma azonban a térfogalom, az újabbnál újabb térelméletek óriási iramú fejlődésére kell rámutatnunk."

Véleményünk szerint e könyvnek ott kellene lennie minden, a matematikában csak némileg is járatos egyén íróasztalán, biztos, hogy tervbe vett angol kiadása is komoly nemzetközi visszhangot fog kiváltani.

Szénássy Barna

SZÁSZ PÁL: *Bevezetés a Bolyai—Lobacsevszkij-féle geometriába* (Disquisitiones Mathematicae Hungaricae vol. 5) Akadémiai Kiadó, Budapest, 1973, 296 oldal.

Másfél évszázada annak, hogy BOLYAI JÁNOS és vele csaknem egy időben N. I. LOBACSEVSZKIJ egymástól függetlenül felfedezték a róluk elnevezett vagy másképpen *hiperbolikus geometriát*, amellyel napjainkig számos kutatás foglalkozik szerte a világon. Ebbe a geometriába kíván bevezetést nyújtani a mű szerzője, aki a tárgykör nemzetközileg ismert nevű kiváló művelője.

Az első fejezet tárgya a hiperbolikus trigonometria felépítése. A szerző az euklideszi geometria *összetartozási, rendezési, egybevágósági* és *folytonossági axiómáiból,* továbbá az ún. *hiperbolikus szögösszeg axiómából* indul ki, mely szerint van oly háromszög, melyben a szögek összege $2R$-nél kisebb. Az ismert szögösszeg-tételeknek (mint pl. az ún. *második Legendre-féle tétel*) tárgyalása után értelmezi az $S(x)$ és $C(x)$ szögfüggvényeket, mint egy olyan derékszögű háromszög x nagyságú hegyes szögével szemben fekvő, ill. e szög mellett fekvő befogója és az átfogó közti viszony határértékét, ha az átfogó minden határon túl kisebbedik, továbbá a $K(r)$ távolságfüggvényt, mint az r sugarú kör két pontját összekapcsoló húr és a hozzá tartozó középponti szög viszonyának határértékét, ha a húr két végpontja minden határon túl közeledik egymáshoz. Majd a bevezetett függvényekre megállapított függvényegyenletek alapján megmutatja, hogy $S(x)$ és $C(x)$ az x-nek (analitikusan értelmezett) sinusával, ill. cosinusával, $K(r)$ pedig $k \operatorname{sh} \frac{r}{k}$-val egyenlő, ahol a k állandó az ún. *természetes hosszegység*. E tárgyalás mellékeredményeképpen kiadódik BOLYAI JÁNOS nevezetes sinus-tétele. Az eddigiekben talált összefüggések alapján már könnyen adódnak a derékszögű háromszög és a LAMBERT-féle négyszög trigonometriai képletei, továbbá meghatározható a derékszögű háromszög változatlan befogója mellett fekvő hegyes szög határértéke, ha a szemben fekvő befogó minden határon túl növekedik, ami nem más, mint a változatlan befogóval egyenlő távolsághoz tartozó *elpattanási szög*. Ennek segítségével értelmezhetjük valamely egyeneshez kívüle fekvő ponton át húzható *párhuzamosok* fogalmát és megállapíthatjuk a LAMBERT-féle négyszögek és a derékszögű háromszögek közt fennálló, lényegében már LOBACSEVSZKIJ-től felismert kapcsolatot, melynek alapján bebizonyítható adott távolsághoz tartozó elpattanási szög ENGEL-féle szerkesztése, továbbá értelmezhető az ún. *Engel-féle háromszöglánc*, ennek segítségével pedig megadható valamely szöghöz tartozó elpattanási távolság szerkesztése és néhány más elemi szerkesztési feladat megoldása, mint pl. az általános háromszögnek szögeiből való szerkesztése. Ezek után már könnyen levezethetjük az általános háromszög trigonometriai képleteit. Az első fejezet befejezéseképpen bebizonyítja a szerző, hogy a gömbi trigonometria érvényes a hiperbolikus geometriában is.

A második fejezet a hiperbolikus sík CAYLEY—KLEIN-féle modelljét tárgyalja és ezzel párhuzamosan bevezeti a pontok WEIERSTRASS-féle homogén koordinátáit és megállapítja a sík mozgásainak és tükrözéseinek analitikus kifejezését. Bevezeti az irányított egyenes WEIERSTRASS-féle vonalkoordinátáit és megállapítja ezek transzformációs képleteit. A ciklusok fogalmának értelmezése és legfontosabb tulajdonságaiknak megállapítása után a háromszög nevezetes pontjait, CÈVA és MENELAOS tételeinek a hiperbolikus geometriában érvényes analogonját, valamint ezek megfordítását és a talált tételeknek néhány alkalmazását tárgyalja. A továbbiakban görbeívek rektifikációjával foglalkozik: megadja az ívelem négyzetének kifejezését WEIERSTRASS-féle, derékszögű és polárkoordinátákban, továbbá megállapítja adott húrhoz tartozó paraciklusív hosszát és megmutatja, hogy az egymástól x távolságban haladó egyközepű paraciklusok ugyanazon két tengelyén fekvő pontjai által határolt íveinek viszonya e^x-szel egyenlő. Bevezeti valamely derékszögű koordinátarendszerhez tartozó paraciklus-koordináták fogalmát, megállapítja ezek összefüggését a derékszögű és a WEIERSTRASS-féle koordinátákkal, továbbá megállapítja két, paraciklus-koordinátáival adott végtelen távoli pont összekötő egyenesének egyenletét WEIERSTRASS-féle koordinátákban. A paraciklus-koordináták segítségével azután tárgyalja a POINCARÉ-féle félsík, és körmodellt, beleértve a mozgásokat és tükrözéseket ábrázoló transzformációkat is. Befejezésül a *paraciklus-négyszög* alapulvételével tárgyalja a területmérést.

A harmadik fejezet a hiperbolikus sík szerkesztéselméletének néhány különösen érdekes kérdésével foglalkozik. Megadja annak feltételét, hogy valamely kör és vele egyenlő területű szabályos sokszög szerkeszthető legyen, továbbá annak feltételét is, hogy valamely egyenesdarab adott nagyságú egyenesdarabokból szerkeszthető legyen. Ez utóbbi feltétel alapján azután megmutatja, hogy a szabályos sokszögek szerkeszthetőségének az euklideszi geometriában érvényes GAUSS-féle feltétele a BOLYAI—LOBACSEVSZKIJ-féle geometriában is érvényes, és tárgyalja a szabályos hat- és tízszög szerkesztését. Bemutatja paraciklus és hiperciklus egyenessel képezett metszéspontjának, továbbá kívül fekvő pontból a paraciklushoz és hiperciklushoz húzható érintők szerkesztését. Befejezésül az egymásba átdarabolható sokszögekkel foglalkozik és megmutatja, hogy bármely két egyenlő területű sokszög egymásba átdarabolható.

A könyv függeléke a hiperbolikus geometria ellentmondástalanságának a POINCARÉ-féle féltérmodell alapján való bebizonyításával foglalkozik.

Amint e rövidre fogott tartalmi ismertetésből is látható, a könyv nem öleli fel a hiperbolikus geometria egészét, hanem csak a szerző által legérdekesebbnek tartott részeit. Ezzel szemben sok olyan kérdésre is kitér, amelyet hasonló bevezető jellegű munkában nem szokás tárgyalni.

A szerző a hiperbolikus geometria felépítésének fő eszközéül a hiperbolikus sík trigonometriáját választja. A felépítéshez felhasznált egyes eredményeket a lehető legegyszerűbb felépítés érdekében nagy körültekintéssel válogatja össze. Ezeket és a hiperbolikus geometriára vonatkozó nagyszámú vizsgálatának eredményeit a BOLYAI—LOBACSEVSZKIJ-féle geometriának más feldolgozásaitól lényegesen eltérő, egyéni feldolgozásává ötvözi, mely a tárgykör ismerője számára is sok érdekeset és újat tartogat; még az általánosan közismert eredmények tárgyalásában is sok eredeti gondolattal találkozunk.

A szöveg fogalmazása világos, jól érthető, az ábrák gondosan vannak tervezve, jól szemléltetik a szöveg mondanivalóját és kivitelük is szép. A könyv kiállítása tetszetős.

A könyvet haszonnal olvashatják mindazok, akik a BOLYAI—LOBACSEVSZKIJ-féle geometria iránt érdeklődnek és az euklideszi geometria ismerete mellett a valós és komplex analízis elemeiben is jártasak.

Strommer Gyula

KIS OTTÓ ÉS KOVÁCS MARGIT: *Numerikus módszerek.* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1973, 547 oldal.

A könyv elemi numerikus módszerek rövid ismertetését adja. Az ismertetett módszerek használatát példákon mutatja be. Nagyon sok feladat megoldására ALGOL programot közöl. A programok után a számolás eredményei is megtalálhatók.

A könyv a RAZDAN-3 számítógép ALGOL nyelvén készült programok segítségével oldja meg feladatait, ezért alapvető az ALGOL nyelv ismerete. A könyv első fejezete ezzel foglalkozik. Az ALGOL programozási nyelvet egyszerű példákkal illusztrálva tárgyalja, ami a példák elkészítéséhez elegendő. A tárgyalás módja szemléletes, felosztása megegyezik a téma szokásos ismertetésével.

A szerzők a második fejezetben röviden összefoglalják a hibaszámítás elemeit. A numerikus módszerek alkalmazásának egy alapvető kérdése éppen az, hogy a kapott eredmények mennyire pontosak. A 2. fejezet felveti ennek gondolatát. A könyvben közölt programok számszerű eredményeinek értékelésénél ugyan nem térnek ki a szerzők az eredmények pontosságára (ugyanis a számértékek a gépből kinyomtatott formában szerepelnek, amikben nem valószínű, hogy mind a 10 kinyomtatott decimális számjegy pontos lenne), de az olvasó elvégezheti ezt az elemzést az ismertetett hibaszámolás alapján.

A 3. fejezet egyismeretlenes nemlineáris egyenletek megoldási módszereit tárgyalja. Foglalkozik a gyökök elkülönítése és behatárolása kérdéseivel. A magasabb fokú egyenletek megoldására ismerteti a *Horner-eljárást,* a *Bernoulli-* és a *Graeffe—Lobacsevszkij*-módszereket, általános nemlineáris egyenletek megoldására pedig a *számköz felezési eljárást,* a *Newton—Raphson,* a *húr,* a a *szelő,* a *fokozatos közelítés* és a *Csebisev*-módszereket. A fejezetet célszerű lett volna úgy tagolni, hogy először a csak magasabb fokú egyenletek megoldására használható módszereket ismertetni és azután a tetszőleges egyenletek megoldási módszereit tárgyalni.

A 4. fejezet a lineáris algebra numerikus módszereivel foglalkozik. Lineáris egyenletrendszerek megoldására, mátrixok invertálására ismertetett *Gauss eliminációs módszer* a legjobb és leggyakrabban használt véges módszer. Nagyon sok más lehetséges módszer ismertetése csak csökkentette volna a *Gauss-módszer* jelentőségét, így nagyon helyesen még azok rövid ismertetése is elmaradt. Bár erre a megállapításra fel kellett volna hívni az olvasók figyelmét.

Az iterációs módszereknél tárgyalt *Seidel-módszer* kis általánosításaként nem ártott volna megemlíteni az *over-relaxációs módszert*, ami jobb konvergációt biztosít, ezért gyakran használt módszer.

A mátrix sajátértékszámításra a könyv által ajánlott módszerek (az utolsó kivételével) a karakterisztikus polinom kiszámítását, majd ennek mint magasabb fokú egyenletnek a megoldását igénylik. Mindez nagyméretű mátrixok esetén nehezen valósítható meg, ezért számítógépre kevésbé ajánlható.

Az 5. fejezetben nemlineáris egyenletrendszerek megoldására ajánlott három módszer *(Newton, fokozatos közelítés, gradiens)* a leggyakrabban használt módszerek.

A 6. fejezet a függvények interpolálásával numerikus, differenciálásával és különböző típusú legjobb megközelítésével foglalkozik.

A 7. fejezet numerikus integrálással foglalkozik. Ismerteti a leggyakrabban használt quadraturaképleteket, foglalkozik azok hibabecslésével.

A 8. fejezetben a közönséges differenciálegyenletek numerikus megoldására ismertetett fokozatos közelítés és hatvány módszer inkább csak lehetőség numerikus számolásra, de kevésbé használatos. Az ugyancsak ismertetett *Runge* és *Adams típusú módszerek* a használatosabbak. A fejezet megold még néhány feladatot a közönséges differenciálegyenletek peremértékfeladatára. A fejezet röviden megfogalmazza a parciális differenciálegyenletek és integrálegyenletek numerikus megoldásának feladatát és erre közöl néhány példát.

A könyv nagyon jól használható a numerikus módszerek oktatásában. Egyetemi oktatásban gazdag példaanyagot szolgáltat numerikus gyakorlatokra. Azonban egyes módszerek alaposabb elemzésére és az elméleti részek tisztázására nem tér ki, ezért ehhez további tankönyvekre is szükség van, pontosabban szólva az ismertetett könyv hasznos segédkönyv lehet numerikus módszerekkel foglalkozó könyvek tanulmányozásához. Minthogy az egyetemi hallgatók sok kész programot találhatnak a könyvben, ezeken begyakorolhatják az ALGOL programozási nyelvet és az ismertetett módszerek használatát is.

A könyv érdeme, hogy a numerikus módszereket számítógépre támaszkodva ismerteti, a hangsúlyt a példafeladatok megoldására fekteti, éppen ezért a könyv mondanivalóját jobban tükrözte volna a „numerikus feladatok programozási gyakorlatai", vagy „numerikus módszerek számolási gyakorlatai" könyvcím.

Gergely József

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója
Műszaki szerkesztő: Sós Attila
A kézirat nyomdába érkezett: 1974. VII. 25. Terjedelem: 14,7 (A/5) ív
73-3485 — Szegedi Nyomda — Felelős vezető: Vincze György

A III. Osztály Közlemények befejező kötetei
a nyomdai munkálatok elhúzódása miatt
későbbi időpontban jelennek meg

ÚTMUTATÁS A SZERZŐKNEK

Az Alkalmazott Matematikai Lapok csak magyar nyelvű dolgozatokat közöl. A kéziratok gépelését olyan formában kérjük, hogy minden gépelt oldal 25, egyenként átlag 50 betűhelyes sort tartalmazzon. A közlésre szánt dolgozatokat három példányban a felelős szerkesztő címére kell beküldeni:

Prékopa András, felelős szerkesztő, MTA SZTAKI
1502 Budapest XI., Kende u. 13—17.

A kéziratok szerkezeti felépítésének a következő követelményeket kell kielégíteni. A fejlécnek tartalmaznia kell a dolgozat címét, a szerző teljes nevét, valamint annak a városnak a nevét, ahol a szerző dolgozik. A fejléc után egy, képletet nem tartalmazó, legfeljebb 200 szóból álló kivonatot kell minden esetben megadni. A dolgozatot címmel ellátott szakaszokra kell bontani és az egyes szakaszokat arab sorszámmal kell ellátni. Az esetleges bevezetésnek mindig az első szakaszt kell alkotnia. Az irodalomjegyzék mindig az utolsó szakasz kell hogy legyen, és azt nem kell sorszámmal ellátni. Az irodalomjegyzék után, a kézirat befejezéseképpen fel kell tüntetni a szerző teljes nevét és a munkahelye (illetve lakása) pontos postai címét. A dolgozatban előforduló képleteket szakaszonként újrakezdődően, a képlet előtt két zárójel közé írt kettős számozással kell azonosítani. Természetesen nem szükséges minden képletet számozással ellátni. Az esetleges definíciókat és tételeket (segédtételeket és lemmákat) ugyancsak szakaszonként újrakezdődő, kettős számozással kell ellátni. Kérjük a szerzőket, hogy ezeket, valamint a tételek bizonyítását a szövegben kellő módon emeljék ki. Minden dolgozathoz csatolni kell egy angol, német, francia vagy orosz nyelvű, külön oldalra gépelt összefoglalót. Amennyiben lehetséges, kérjük a nyomtatás számára különösen nehézkes matematikai jelölések használatának az elkerülését.

A dolgozat ábráit és az esetleges lábjegyzeteket a dolgozat végén, különálló lapokon kérjük beküldeni. Mind az ábrákat, mind a lábjegyzeteket a dolgozat szakaszokra bontásától független, folytatólagos arab sorszámozással kell ellátni. Az ábrák elhelyezését a dolgozat megfelelő helyén, széljegyzetként feltüntetett, ábraazonosító sorszámokkal kell megadni. A lábjegyzetekre a dolgozaton belül az azonosító sorszám felső indexkénti használatával lehet hivatkozni.

Az irodalmi hivatkozások formája a következő. Minden hivatkozást fel kell sorolni a dolgozat végén található irodalomjegyzékben, a szerzők, illetve társszerzők esetén az első szerző neve szerinti alfabetikus sorrendben úgy, hogy külön, de folytatólagos sorszámozású listát alkossanak a latin és a cirill betűs nevű szerzők műveire vonatkozó hivatkozások, és mindkét részben a megfelelő alfabetikus sorrend legyen kialakítva. A folyóiratban megjelent cikkekre [1], a könyvekre [5], a kötetben megjelent dolgozatokra [4], a disszertációkra [3] és a gépi program leírásokra [2] a következő minta szerint kell hivatkozni:

[1] Farkas, J., „Über die Theorie der einfachen Ungleichungen", *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **124** (1902) 1—27.
[2] Kéri, G., „DUALSIMP", rutin a CDC 3300-as gépekre (Magyar Tudományos Akadémia Számítástechnikai és Automatizálási Kutató Intézete, CDC 3300 felhasználói ismertetők 2. 1973. május) 19—20.
[3] Prékopa, A., „Sztohasztikus rendszerek optimalizálási problémáiról", doktori értekezés. Magyar Tudományos Akadémia, Budapest, 1970.
[4] Prabhu, N. U., "Recent research on the ruin problem of collective risk theory", in: *Inventory Control and Water Storage* Ed. A. Prékopa (János Bolyai Mathematical Society and North-Holland Publishing Company, Amsterdam—London, 1973) 221—228.
[5] Zoutendijk, G., *Methods of Feasible Directions* (Elsevier Publishing Company, Amsterdam and New York, 1960).

A dolgozatok szövegében az irodalmi hivatkozás számait szögletes zárójelben kell megadni, mint például [5] vagy [4, 76—78]. A szerzők a dolgozatukról 100 darab különlenyomatot kapnak, ezek költsége — nyomott oldalanként 25 forint — a szerzői díjat terheli.

Ára: 32,—Ft

INDEX: 26498

TARTALOMJEGYZÉK

INDEX

Alkalmazott matematikai lapok

1975/3-4

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK KÖZLEMÉNYEI

1. KÖTET

AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST

／A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA

MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK

ALKALMAZOTT MATEMATIKAI LAPJA

I. kötet 3—4. szám

Szerkesztőség: 1502 Budapest XI., Kende u. 13—17.

Kiadóhivatal: 1055 Budapest V., Alkotmány u. 21.

Az Alkalmazott Matematikai Lapok változó terjedelmű füzetekben jelenik meg, és olyan eredeti tudományos cikkeket publikál, amelyek a gyakorlatban, vagy más tudományokban közvetlenül felhasználható új matematikai eredményt tartalmaznak, illetve már ismert, de színvonalas matematikai apparátus újszerű és jelentős alkalmazását mutatják be. A folyóirat közöl cikk formájában megírt, új tudományos eredménynek számító programokat, és olyan, külföldi folyóiratban már publikált dolgozatokat, amelyek magyar nyelventörténő megjelentetése elősegítheti az elért eredmények minél előbbi, széles körű hazai felhasználását.

A folyóirat feladata a Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának munkájára vonatkozó közlemények, könyvismertetések stb. publikálása is.
Kéziratok a következő címre küldendők:

Prékopa András, felelős szerkesztő
1502 Budapest XI., Kende u. 13—17.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi levelezés.

Közlésre el nem fogadott kéziratokat a szerkesztőség lehetőleg visszajuttat a szerzőhöz, de a beküldött kéziratok megőrzéséért vagy továbbításáért felelősséget nem vállal.

Az alkalmazott Matematikai Lapok előfizetési ára kötetenként 60 forint. Belföldi megrendelések az Akadémiai Kiadó, 1055 Budapest V., Alkotmány u. 21. címen (pénzforgalmi jelzőszám 215—11 488), külföldi megrendelések a „Kultúra" Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalat, Budapest I., Fő u. 32. címen (pénzforgalmi jelzőszám 218—10 990) lehetségesek.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztálya a következő idegen nyelvű folyóiratokat adja ki:

1. Acta Mathematica Hungaricae,
2. Acta Physica Hungaricae,
3. Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica.

Alkalmazott Matematikai Lapok **1** *(1975) 163—179*

EGY LINEÁRIS PROGRAMOZÁSI DEKOMPOZÍCIÓS ELJÁRÁS ÉS ANNAK ALKALMAZÁSA

STAHL JÁNOS
Budapest

A címben jelzett dekompozíciós eljárást [4]-ben vezettük be a különféle gazdasági alkalmazások szempontjából fontos ún. kétszeresen összekapcsolt lineáris programozási feladat megoldására.

Jelen cikkben egyrészt a jelöléseket egyszerűsítendő eltértünk a [4]-beliektől, másrészt az eredményeket is kiegészítettük. Ezt — az eljárás származtatásának motiválását elhagyva — az első három rész tartalmazza. Az 1. részben előkészítő lemmákat mondunk ki, a 2. részben az eljárást fogalmazzuk meg és igazoljuk végességét, vagy közelítő voltát, a 3. részben pedig az eljárás néhány további tulajdonságát fogalmazzuk meg.

A 4. és 5. részben az eljárás alkalmazásaként a lépcsős szerkezetű lineáris programozási feladat megoldásával foglalkozunk: az előkészítő 4. rész után az 5. rész tartalmazza az ezen feladat megoldására javasolt algoritmust.

1. Az eljárás előkészítése

Tekintsük az

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{01}\mathbf{x}_1 &\leqq \mathbf{b}_0 \\ \mathbf{A}_{10}\mathbf{x}_0+\mathbf{A}_{11}\mathbf{x}_1+\mathbf{A}_{12}\mathbf{x}_2 &\leqq \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{A}_{21}\mathbf{x}_1+\mathbf{A}_{22}\mathbf{x}_2 &\leqq \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{x}_0,\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2 &\geqq \mathbf{0} \\ \max(\mathbf{c}_0\mathbf{x}_0+\mathbf{c}_1\mathbf{x}_1+\mathbf{c}_2\mathbf{x}_2)& \end{aligned} \tag{1.1}$$

és a

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_1\mathbf{A}_{10} &\geqq \mathbf{c}_0 \\ \mathbf{p}_0\mathbf{A}_{01}+\mathbf{p}_1\mathbf{A}_{11}+\mathbf{p}_2\mathbf{A}_{21} &\geqq \mathbf{c}_1 \\ \mathbf{p}_1\mathbf{A}_{12}+\mathbf{p}_2\mathbf{A}_{22} &\geqq \mathbf{c}_2 \\ \mathbf{p}_0,\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2 &\geqq \mathbf{0} \\ \min(\mathbf{p}_0\mathbf{b}_0+\mathbf{p}_1\mathbf{b}_1+\mathbf{p}_2\mathbf{b}_2)& \end{aligned} \tag{1.2}$$

primál-duál lineáris programozási feladatpárt. (A jelöléseket illetően, nagybetűvel mindig mátrixot, kisbetűvel az indexektől eltekintve vektort, görög kisbetűvel skalárt, írott nagybetűvel pedig poliédert jelölünk. Nem különböztetjük meg a jelölésben a sor és az oszlopvektort. Ha egy vektorral balról szorzunk egy mátrixot, vagy egy vektor egy ily módon adódó relációban szerepel, akkor az sorvektor, egyébként oszlopvektor.)

A továbbiakban feltesszük, hogy az

$$\mathscr{X}_1 = \{\mathbf{x}_1 \colon \mathbf{A}_{01}\mathbf{x}_1 \leqq \mathbf{b}_0, \mathbf{x}_1 \geqq \mathbf{0}\}$$

és

$$\mathscr{P}_1 = \{\mathbf{p}_1 \colon \mathbf{p}_1\mathbf{A}_{10} \geqq \mathbf{c}_0, \mathbf{p}_1 \geqq \mathbf{0}\}$$

halmazok nem üresek és korlátosak. (Ezek a feltevések a [4]-beli interpretációknál nem jelentenek az alkalmazhatóságra nézve lényeges megszorítást.)

Legyen továbbá

$$\mathscr{X}_2 = \{\mathbf{x}_2 \colon \mathbf{A}_{22}\mathbf{x}_2 \leqq \mathbf{0},\ \mathbf{x}_2 \geqq \mathbf{0}\},$$

$$\mathscr{P}_2 = \{\mathbf{p}_2 \colon \mathbf{p}_2\mathbf{A}_{22} \geqq \mathbf{0}, \mathbf{p}_2 \geqq \mathbf{0}\}.$$

$\mathscr{X}_1$ korlátossága folytán az

$$\begin{aligned} &\mathbf{A}_{01}\mathbf{x}_1 && \leqq \mathbf{b}_0 \\ &\mathbf{A}_{21}\mathbf{x}_1 + \mathbf{A}_{22}\mathbf{x}_2 && \leqq \mathbf{b}_2 \\ &\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 && \geqq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{1.3}$$

feltételrendszerrel meghatározott poliéder extremális irányaiként $(\mathbf{0}, \underline{\mathbf{x}}_2)$ alakú elemeket választ(hat)unk, ahol $\underline{\mathbf{x}}_2$ $\mathscr{X}_2$ egy extremális iránya. Ugyanis az

$$\begin{aligned} &\mathbf{A}_{01}\mathbf{x}_1 \leqq \mathbf{0} \\ &\mathbf{A}_{21}\mathbf{x}_1 + \mathbf{A}_{22}\mathbf{x}_2 \leqq \mathbf{0} \\ &\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \geqq \mathbf{0} \end{aligned}$$

egyenlőtlenségekből $\mathbf{x}_1 = \mathbf{0}$ és így $\mathbf{A}_{22}\mathbf{x}_2 \leqq \mathbf{0}$. Hasonló állítás igaz a

$$\begin{aligned} &\mathbf{p}_1\mathbf{A}_{10} \geqq \mathbf{c}_0 \\ &\mathbf{p}_1\mathbf{A}_{12} + \mathbf{p}_2\mathbf{A}_{22} \geqq \mathbf{c}_2 \\ &\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \geqq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{1.4}$$

feltételekkel meghatározott poliéder extremális irányaira.

1.1. LEMMA. Egy

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{10}\mathbf{x}_0 + \sum_i \lambda_i(\mathbf{A}_{11}\bar{\mathbf{x}}_{1i} + \mathbf{A}_{12}\bar{\mathbf{x}}_{2i}) + \sum_j \mu_j \mathbf{A}_{12}\underline{\mathbf{x}}_{2j} &\leqq \mathbf{b}_1 \\ \sum_i \lambda_i &= 1 \\ \lambda_i, \mu_j \geqq 0, \mathbf{x}_0 &\geqq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{1.5}$$

$$\max\left(\mathbf{c}_0\mathbf{x}_0 + \sum_i \lambda_i(\mathbf{c}_1\bar{\mathbf{x}}_{1i} + \mathbf{c}_2\bar{\mathbf{x}}_{2i}) + \sum_j \mu_j \mathbf{c}_2\underline{\mathbf{x}}_{2j}\right)$$

alakú, vagy a λ változókat és rájuk vonatkozó feltételeket nem tartalmazó, lineáris programozási feladatnak mindig van lehetséges megoldása. Itt az $(\bar{\mathbf{x}}_{1i}, \bar{\mathbf{x}}_{2i})$ vektorok (1.3) tetszőleges megoldásai, az $\underline{\mathbf{x}}_{2j}$ vektorok $\mathscr{X}_2$ tetszőleges elemei.

Bizonyítás. Ellenkező esetben lenne ugyanis olyan $(\mathbf{p}_1^*, \pi_0^*)$, hogy $\mathbf{p}_1^* \geqq \mathbf{0}$ és

$$\mathbf{p}_1^* \mathbf{A}_{10} \geqq \mathbf{0}$$

$$\mathbf{p}_1^*(\mathbf{A}_{11}\bar{\mathbf{x}}_{1i} + \mathbf{A}_{12}\bar{\mathbf{x}}_{2i}) + \pi_0^* \geqq 0 \quad (i = 1, 2, \ldots)$$

$$\mathbf{p}_1^* \mathbf{A}_{12}\underline{\mathbf{x}}_{2j} \geqq 0 \quad (j = 1, 2, \ldots)$$

$$\mathbf{p}_1^* \mathbf{b}_1 + \pi_0^* < 0.$$

$\mathscr{P}_1$ korlátossága folytán az első feltételből $\mathbf{p}_1^* = \mathbf{0}$, ami ellentmond az utolsó egyenlőtlenségnek. Ez a gondolatmenet érvényes akkor is, ha (1.5)-ből hiányoznak a λ és μ változók, vagy csak valamelyikük fordul elő.

Hasonlóan látható be, hogy egy

$$\mathbf{p}_0\mathbf{A}_{01} + \sum_i \sigma_i(\bar{\mathbf{p}}_{1i}\mathbf{A}_{11} + \bar{\mathbf{p}}_{2i}\mathbf{A}_{21}) + \sum_j \tau_j \underline{\mathbf{p}}_{2j}\mathbf{A}_{21} \geqq \mathbf{c}_1$$

$$\sum_i \sigma_i = 1$$

$$(1.6) \qquad \sigma_i, \tau_j \geqq 0, \mathbf{p}_0 \geqq \mathbf{0}$$

$$\min\left(\mathbf{p}_0\mathbf{b}_0 + \sum_i \sigma_i(\bar{\mathbf{p}}_{1i}\mathbf{b}_1 + \bar{\mathbf{p}}_{2i}\mathbf{b}_2) + \sum_j \tau_j \underline{\mathbf{p}}_{2j}\mathbf{b}_2\right)$$

alakú feladatnak, ahol a $(\bar{\mathbf{p}}_{1i}, \bar{\mathbf{p}}_{2i})$-k (1.4) tetszőleges megoldásai, a $\underline{\mathbf{p}}_{2j}$-k $\mathscr{P}_2$ tetszőleges elemei, van lehetséges megoldása.

Az (1.1) feladat megoldására javasolt eljárás során (1.5) és (1.6) alakú feladatok egy-egy sorozatát fogjuk megoldani. Ezeket $\mathbf{p}_1$-re, illetve $\mathbf{x}_1$-re vonatkozó feladatoknak fogjuk nevezni.

1.2. Lemma. Ha egy (1.5) alakú feladat nem korlátos, (1.4)-nek nincs lehetséges megoldása és így méginkább nincs lehetséges megoldása a duális (1.2) feladatnak.

Bizonyítás. Ha egy (1.5) alakú feladat nem korlátos, van olyan nemnegatív $\mathbf{x}_0^*$ és μ_j^*, hogy

$$\mathbf{A}_{10}\mathbf{x}_0^* + \sum_j \mu_j^* \mathbf{A}_{12}\underline{\mathbf{x}}_{2j} \leqq \mathbf{0}$$

és

$$\mathbf{c}_0\mathbf{x}_0^* + \sum_i \mu_j^* \mathbf{c}_2\underline{\mathbf{x}}_{2j} > 0.$$

Az (1.4)-beli első egyenlőtlenségeket $\mathbf{x}_0^*$-gal, a továbbiakat $\mu_j^*\underline{\mathbf{x}}_{2j}$-kkel szorozva és összegezve a

$$\mathbf{c}_0\mathbf{x}_0^* + \sum_j \mu_j^* \mathbf{c}_2\underline{\mathbf{x}}_{2j} \leqq \mathbf{p}_1\left(\mathbf{A}_{10}\mathbf{x}_0^* + \sum_j \mu_j^* \mathbf{A}_{12}\underline{\mathbf{x}}_{2j}\right) + \sum_j \mu_j^* \mathbf{p}_2\mathbf{A}_{22}\underline{\mathbf{x}}_{2j}$$

egyenlőtlenséghez jutunk, ahol a bal oldal pozitív, a jobb oldal első fele nempozitív, második fele zérus, ami ellentmondás.

Ugyanígy következik egy (1.6) feladat nemkorlátos voltából, hogy [(1.3)-nak és így méginkább] (1.1)-nek nincs lehetséges megoldása.

2. Az eljárás

A következőkben előbb megfogalmazzuk az eljárást, az eljárás verifikálását a leírást követő tétel tartalmazza. Az eljárás a következő.

a) Legyen $\bar{\mathbf{x}}_{11}\,\mathcal{X}_1$, $\bar{\mathbf{p}}_{11}$ pedig $\mathcal{P}_1$ tetszőleges eleme. Az $\mathbf{x}_1$-re vonatkozó feladat legyen a

$$\begin{gathered}\mathbf{p}_0\mathbf{A}_{01} \geqq \mathbf{c}_1\\ \mathbf{p}_0 \geqq \mathbf{0}\\ \min \mathbf{p}_0\mathbf{b}_0\end{gathered}$$

lineáris programozási feladat, a $\mathbf{p}_1$-re vonatkozó feladat pedig az

$$\begin{gathered}\mathbf{A}_{10}\mathbf{x}_0 \leqq \mathbf{b}_1\\ \mathbf{x}_0 \geqq \mathbf{0}\\ \max \mathbf{c}_0\mathbf{x}_0\end{gathered}$$

lineáris programozási feladat.

Legyen továbbá $h=1$, $\varphi_1=-\infty$ [az (1.1)-hez az eljárás során eddig talált legjobb célfüggvényérték], $\psi_1=+\infty$ [a duális (1.2)-höz az eljárás során eddig talált legjobb célfüggvényérték].

b) Oldjuk meg az

$$\begin{gathered}\mathbf{A}_{22}\mathbf{x}_2 \leqq \mathbf{b}_2-\mathbf{A}_{21}\bar{\mathbf{x}}_{1h}\\ \mathbf{x}_2 \geqq \mathbf{0}\\ \max(\mathbf{c}_2-\bar{\mathbf{p}}_{1h}\mathbf{A}_{12})\mathbf{x}_2\end{gathered}\tag{2.1}$$

lineáris programozási feladatot.

Ha a feladatnak van optimális megoldása, folytassuk c)-től az eljárást.

Ha a (2.1) feladatnak nincs lehetséges megoldása, bővítsük az $\mathbf{x}_1$-re vonatkozó feladatot egy τ-változóval. A változóhoz tartozó célfüggvény együttható $\underline{\mathbf{p}}_2\mathbf{b}_2$, a változóhoz tartozó együtthatóvektor pedig $(\underline{\mathbf{p}}_2\mathbf{A}_{21}, 0)$, ahol $\underline{\mathbf{p}}_2\,\mathcal{P}_2$ egy olyan extremális eleme, melyre $\underline{\mathbf{p}}_2(\mathbf{b}_2-\mathbf{A}_{21}\bar{\mathbf{x}}_{1h})<0$.

Ha a (2.1) feladat nem korlátos, bővítsük a $\mathbf{p}_1$-re vonatkozó feladatot egy μ változóval. A változóhoz tartozó célfüggvény együttható $\mathbf{c}_2\underline{\mathbf{x}}_2$, a változóhoz tartozó együtthatóvektor pedig $(\mathbf{A}_{12}\underline{\mathbf{x}}_2, 0)$, ahol $\underline{\mathbf{x}}_2\,\mathcal{X}_2$ egy olyan extremális eleme, melyre $(\mathbf{c}_2-\bar{\mathbf{p}}_{1h}\mathbf{A}_{12})\underline{\mathbf{x}}_2>0$.

Folytassuk d)-től az eljárást.

c) Legyen $\bar{\mathbf{x}}_{2h}$ (2.1), $\bar{\mathbf{p}}_{2h}$ pedig (2.1) duálisának egy optimális extremális megoldása. Bővítsük az $\mathbf{x}_1$-re vonatkozó feladatot egy σ-változóval. A változóhoz tartozó célfüggvény együttható $\bar{\mathbf{p}}_{1h}\mathbf{b}_1+\bar{\mathbf{p}}_{2h}\mathbf{b}_2$, a változóhoz tartozó együtthatóvektor pedig $(\bar{\mathbf{p}}_{1h}\mathbf{A}_{11}+\bar{\mathbf{p}}_{2h}\mathbf{A}_{21}, 1)$.

Bővítsük a $\mathbf{p}_1$-re vonatkozó feladatot egy λ változóval. A változóhoz tartozó célfüggvényegyüttható $\mathbf{c}_1\bar{\mathbf{x}}_{1h}+\mathbf{c}_2\bar{\mathbf{x}}_{2h}$, az együtthatóvektor pedig $(\mathbf{A}_{11}\bar{\mathbf{x}}_{1h}+\mathbf{A}_{12}\bar{\mathbf{x}}_{2h}, 1)$.

d) Oldjuk meg az $\mathbf{x}_1$-re és a $\mathbf{p}_1$-re vonatkozó feladatot. Ha az $\mathbf{x}_1$-re vonatkozó feladat nem korlátos, az eljárás véget ér, az (1.1) feladatnak nincs lehetséges megoldása.

Ha a $\mathbf{p}_1$-re vonatkozó feladat nem korlátos, az eljárás véget ér, a duális (1.2) feladatnak nincs lehetséges megoldása.

Ellenkező esetben legyen $(\bar{\mathbf{x}}_{1,h+1}, \bar{\xi}_{0,h+1})$ vagy $\bar{\mathbf{x}}_{1,h+1}$ az $\mathbf{x}_1$-re vonatkozó feladat duálisának egy optimális megoldása, ψ_{h+1} pedig a feladat optimumértéke vagy ∞, aszerint, hogy a feladat tartalmaz-e már σ változót vagy sem. $(\bar{\mathbf{p}}_{1,h+1}, \bar{\pi}_{0,h+1})$ vagy $\bar{\mathbf{p}}_{1,h+1}$ pedig legyen a $\mathbf{p}_1$-re vonatkozó feladat duálisa egy optimális megoldása és φ_{h+1} a feladat optimumértéke vagy $-\infty$ szerint, hogy a feladat tartalmaz-e már λ változót vagy sem.

Ha $\varphi_{h+1} \geqq \psi_{h+1}$, az eljárás véget ér, (1.1) egy optimális megoldása a $\mathbf{p}_1$-re vonatkozó feladat alapján adódik.

Ha $\varphi_{h+1} < \psi_{h+1}$, legyen $h=h+1$ és folytassuk b)-től az eljárást.

2.1. TÉTEL. Az a)—d) eljárás vagy véget ér az egyes lépések véges számú alkalmazása után, mikor is a d)-beli konklúziók helyesek vagy $\lim\limits_{h\to\infty} \varphi_h = \lim\limits_{h\to\infty} \psi_h$ véges érték és ez megegyezik (1.1) optimumértékével.

Bizonyítás. Az a)—d) eljárást megelőző első lemma alapján a $\mathbf{p}_1$-re, illetve az $\mathbf{x}_1$-re vonatkozó feladatnak mindig van lehetséges megoldása, tehát a d)-ben említetteken kívül más eset nincs. Az eljárás leírását megelőző második lemma szerint helyes ezen feladatok valamelyikének nem korlátos voltából adódó következtetés is.

Továbbá lévén a szóba jövő $\underline{\mathbf{x}}_2$ és $\underline{\mathbf{p}}_2$ vektorok száma véges és egy b)-ben újonnan bevezetendő τ vagy μ változó eddig még nem szerepelt ilyen elemhez tartozik, az $\mathbf{x}_1$-re, illetve $\mathbf{p}_1$-re vonatkozó feladatok előbb vagy utóbb σ, illetve λ változót is fognak tartalmazni, hacsak az eljárás nem végződik a most említett esetek valamelyikével.

Ilyen esetben, ha pl. $\mathbf{p}_1$-re vonatkozó feladat korlátos, optimális $(\mathbf{x}_0^*, \dots \lambda_i^*, \dots \dots \mu_j^*, \dots)$ megoldásához tartozó $(\mathbf{x}_0^*, \mathbf{x}_1^*, \mathbf{x}_2^*)$, ahol $\mathbf{x}_1^* = \sum\limits_i \lambda_i^* \bar{\mathbf{x}}_{1i}$, $\mathbf{x}_2^* = \sum\limits_i \lambda_i^* \bar{\mathbf{x}}_{2i} + \sum\limits_j \mu_j^* \underline{\mathbf{x}}_{2j}$, nyilván olyan megoldása (1.1)-nek, melyhez tartozó célfüggvényérték a megfelelő φ^* és ugyanígy, ha az $\mathbf{x}_1$-re vonatkozó feladatban szerepel σ változó és a feladat korlátos, akkor az (1.2) duális feladat olyan megoldása nyerhető, melyhez tartozó duál-célfüggvényérték az aktuális ψ^*. [Előbbiek alapján az előző konklúziók is némileg kiegészíthetők: ha a $\mathbf{p}_1$-re (az $\mathbf{x}_1$-re) vonatkozó feladat nem korlátos és tartalmaz λ (σ) változót, az (1.1) [az (1.2)] feladat nem korlátos és ugyanakkor az $\mathbf{x}_1$-re (a $\mathbf{p}_1$-re) vonatkozó feladat eddig nem tartalmazott σ (λ) változót.]

Mindaddig, amíg φ_h és ψ_h valamelyike nem véges, $\varphi_h \leqq \psi_h$ és az előzőek szerint ez igaz akkor is, ha mindkettőre véges érték adódik, melynek be kell következnie, ha az eljárás nem fejeződik be másképpen. Továbbá ν-vel jelölve ekkor (1.1) optimumértékét, mely most szükségképpen létezik, $\varphi_h \leqq \nu \leqq \psi_h$, amivel igazoltuk a d)-beli $\varphi_{h+1} \geqq \psi_{h+1}$ (pontosabban $\varphi_{h+1} = \psi_{h+1}$) esetre vonatkozó állítást.

Nyilván a φ_h értékek monoton nem csökkennek és a ψ_h értékek monoton nem nőnek, hiszen a $\mathbf{p}_1$-re és $\mathbf{x}_1$-re vonatkozó feladatok egymást követő előfordulásaik között új változókkal bővülnek. Az eljárás során a d)-ben definiált $\bar{\mathbf{p}}_{1h}$ és $\bar{\mathbf{x}}_{1h}$ vektorok sorozata $\mathscr{P}_1$, illetve $\mathscr{X}_1$-beli elemekből áll. Egy konvergens részsorozatot tekintve és a továbbiakban csak ezen részsorozattal foglalkozva, jelöljük $(\mathbf{p}_1^*, \mathbf{x}_1^*)$-gal ennek limeszpontját.

Elég nagy h-tól kezdve a (2.1) feladatoknak és duálisuknak is van lehetséges megoldása, következésképpen ugyanez igaz az

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{A}_{22}\mathbf{x}_2 \leqq \mathbf{b}_2 - \mathbf{A}_{21}\mathbf{x}_1^* \\
&\mathbf{x}_2 \geqq \mathbf{0} \\
&\max\, (\mathbf{c}_2 - \mathbf{p}_1^* \mathbf{A}_{12})\mathbf{x}_2
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

feladatra és duálisára, tehát van optimális megoldásuk is. Jelöljön $\mathbf{x}_2^*$ és $\mathbf{p}_2^*$ extremális ilyeneket.

Minthogy $\bar{\pi}_{0h}=\varphi_h-\bar{\mathbf{p}}_{1h}\mathbf{b}_1$, tetszőleges h-ra és annál nagyobb h'-re $(\bar{\mathbf{p}}_{1h'}, \bar{\pi}_{0h'})$ optimális voltából

$$\bar{\mathbf{p}}_{1h'}(\mathbf{A}_{11}\bar{\mathbf{x}}_{1h}+\mathbf{A}_{12}\bar{\mathbf{x}}_{2h})+\varphi_{h'}-\bar{\mathbf{p}}_{1h'}\mathbf{b}_1 \geqq \mathbf{c}_1\bar{\mathbf{x}}_{1h}+\mathbf{c}_2\bar{\mathbf{x}}_{2h},$$

azaz

$$\varphi_{h'} \geqq \mathbf{c}_1\bar{\mathbf{x}}_{1h}-\bar{\mathbf{p}}_{1h'}\mathbf{A}_{11}\bar{\mathbf{x}}_{1h}+\bar{\mathbf{p}}_{1h'}\mathbf{b}_1+(\mathbf{c}_2-\bar{\mathbf{p}}_{1h'}\mathbf{A}_{12})\bar{\mathbf{x}}_{2h}. \tag{2.3}$$

Ugyanígy

$$\psi_{h'} \leqq \mathbf{c}_1\bar{\mathbf{x}}_{1h'}-\bar{\mathbf{p}}_{1h}\mathbf{A}_{11}\bar{\mathbf{x}}_{1h'}+\bar{\mathbf{p}}_{1h}\mathbf{b}_1+\bar{\mathbf{p}}_{2h}(\mathbf{b}_2-\mathbf{A}_{21}\bar{\mathbf{x}}_{1h'}). \tag{2.4}$$

Legyen minden h-ra $\mathbf{B}_h$ az $\bar{\mathbf{x}}_{1h}$-hoz és $\bar{\mathbf{p}}_{1h}$-hoz tartozó (2.1) feladat egy optimális bázismátrixa inverzének zérusokkal történő olyan kiegészítése, hogy

$$\bar{\mathbf{x}}_{2h} = \mathbf{B}_h(\mathbf{b}_2-\mathbf{A}_{21}\bar{\mathbf{x}}_{1h}),$$

és ugyanakkor

$$\bar{\mathbf{p}}_{2h}^* = (\mathbf{c}_2-\bar{\mathbf{p}}_{1h}\mathbf{A}_{12})\mathbf{B}_h$$

lehetséges (és egyszersmind optimális) megoldása (2.1) duálisának.

Hasonlóan legyen $\mathbf{B}$ olyan, hogy

$$\mathbf{x}_2^* = \mathbf{B}(\mathbf{b}_2-\mathbf{A}_{21}\mathbf{x}_1^*),$$

és legyen

$$\bar{\mathbf{p}}_2^* = (\mathbf{c}_2-\mathbf{p}_1^*\mathbf{A}_{12})\mathbf{B}$$

(2.2) duálisának lehetséges (és egyszersmind optimális) megoldása.

Minthogy $\bar{\mathbf{x}}_{2h}$ lehetséges megoldása az

$$\mathbf{A}_{22}\mathbf{x}_2 \leqq \mathbf{b}_2-\mathbf{A}_{21}\bar{\mathbf{x}}_{1h}$$

$$\mathbf{x}_2 \geqq \mathbf{0}$$

$$\max(\mathbf{c}_2-\mathbf{p}_1^*\mathbf{A}_{12})\mathbf{x}_2$$

lineáris programozási feladatnak, $\bar{\mathbf{p}}_2^*$ pedig duálisának, ezért

$$(\mathbf{c}_2-\mathbf{p}_1^*\mathbf{A}_{12})\mathbf{B}_h(\mathbf{b}_2-\mathbf{A}_{21}\bar{\mathbf{x}}_{1h}) \leqq (\mathbf{c}_2-\mathbf{p}_1^*\mathbf{A}_{12})\mathbf{B}(\mathbf{b}_2-\mathbf{A}_{21}\bar{\mathbf{x}}_{1h}). \tag{2.5}$$

Hasonlóan adódik az

$$\mathbf{A}_{22}\mathbf{x}_2 \leqq \mathbf{b}_2-\mathbf{A}_{21}\mathbf{x}_1^*$$

$$\mathbf{x}_2 \geqq \mathbf{0}$$

$$\max(\mathbf{c}_2-\bar{\mathbf{p}}_{1h}\mathbf{A}_{12})\mathbf{x}_2$$

lineáris programozási feladatból, hogy

$$(\mathbf{c}_2-\bar{\mathbf{p}}_{1h}\mathbf{A}_{12})\mathbf{B}(\mathbf{b}_2-\mathbf{A}_{21}\mathbf{x}_1^*) \leqq (\mathbf{c}_2-\bar{\mathbf{p}}_{1h}\mathbf{A}_{12})\mathbf{B}_h(\mathbf{b}_2-\mathbf{A}_{21}\mathbf{x}_1^*). \tag{2.6}$$

Minthogy az előforduló bázisok száma véges és a $(\bar{\mathbf{p}}_{1h}, \bar{\mathbf{x}}_{1h})$ vektorok egy konvergens sorozatot alkotnak, azért egy további alkalmas részsorozatot tekintve

$$\lim_{h\to\infty}(\mathbf{c}_2-\bar{\mathbf{p}}_{1h'}\mathbf{A}_{12})\mathbf{B}_h(\mathbf{b}_2-\mathbf{A}_{21}\bar{\mathbf{x}}_{1h}) = \lim_{h\to\infty}(\mathbf{c}_2-\bar{\mathbf{p}}_{1h}\mathbf{A}_{12})\mathbf{B}_h(\mathbf{b}_2-\mathbf{A}_{21}\bar{\mathbf{x}}_{1h}). \tag{2.7}$$

Ekkor a (2.5) bal és (2.6) jobb oldalán álló kifejezésekre

$$\lim_{h\to\infty}(\mathbf{c}_2-\mathbf{p}_1^*\mathbf{A}_{12})\mathbf{B}_h(\mathbf{b}_2-\mathbf{A}_{21}\bar{\mathbf{x}}_{1h}) = \lim_{h\to\infty}(\mathbf{c}_2-\bar{\mathbf{p}}_{1h}\mathbf{A}_{12})\mathbf{B}_h(\mathbf{b}_2-\mathbf{A}_{21}\bar{\mathbf{x}}_{1h}),$$

$$\lim_{h\to\infty}(\mathbf{c}_2-\bar{\mathbf{p}}_{1h}\mathbf{A}_{12})\mathbf{B}_h(\mathbf{b}_2-\mathbf{A}_{21}\mathbf{x}_1^*) = \lim_{h\to\infty}(\mathbf{c}_2-\bar{\mathbf{p}}_{1h}\mathbf{A}_{12})\mathbf{B}_h(\mathbf{b}_2-\mathbf{A}_{21}\bar{\mathbf{x}}_{1h})$$

és az ugyanezen relációkban fellépő másik két kifejezésre

$$\lim_{h\to\infty}(\mathbf{c}_2-\mathbf{p}_1^*\mathbf{A}_{12})\mathbf{B}(\mathbf{b}_2-\mathbf{A}_{21}\bar{\mathbf{x}}_{1h}) = (\mathbf{c}_2-\mathbf{p}_1^*\mathbf{A}_{12})\mathbf{B}(\mathbf{b}_2-\mathbf{A}_{21}\mathbf{x}_1^*),$$

$$\lim_{h\to\infty}(\mathbf{c}_2-\bar{\mathbf{p}}_{1h}\mathbf{A}_{12})\mathbf{B}(\mathbf{b}_2-\mathbf{A}_{21}\mathbf{x}_1^*) = (\mathbf{c}_2-\mathbf{p}_1^*\mathbf{A}_{12})\mathbf{B}(\mathbf{b}_2-\mathbf{A}_{21}\mathbf{x}_1^*),$$

azért (2.7) alapján

$$\lim_{h\to\infty}(\mathbf{c}_2-\bar{\mathbf{p}}_{1h'}\mathbf{A}_{12})\mathbf{B}_h(\mathbf{b}_2-\mathbf{A}_{21}\bar{\mathbf{x}}_{1h}) = (\mathbf{c}_2-\mathbf{p}_1^*\mathbf{A}_{12})\mathbf{B}(\mathbf{b}_2-\mathbf{A}_{21}\mathbf{x}_1^*),$$

azaz

$$\lim_{h\to\infty}(\mathbf{c}_2-\bar{\mathbf{p}}_{1h'}\mathbf{A}_{12})\bar{\mathbf{x}}_{2h} = (\mathbf{c}_2-\mathbf{p}_1^*\mathbf{A}_{12})\mathbf{x}_2^*.$$

Ugyanígy adódik, hogy

$$\lim_{h\to\infty}\bar{\mathbf{p}}_{2h}(\mathbf{b}_2-\mathbf{A}_{21}\bar{\mathbf{x}}_{1h'}) = \mathbf{p}_2^*(\mathbf{b}_2-\mathbf{A}_{21}\mathbf{x}_1^*),$$

és így a (2.3) és (2.4) egyenlőtlenségek jobb oldala tetszőlegesen közel van

$$v^* = \mathbf{p}_1^*\mathbf{b}_1-\mathbf{p}_1^*\mathbf{A}_{11}\mathbf{x}_1^*+\mathbf{p}_2^*(\mathbf{b}_2-\mathbf{A}_{21}\mathbf{x}_1^*) = \mathbf{p}_1^*\mathbf{b}_1-\mathbf{p}_1^*\mathbf{A}_{11}\mathbf{x}_1^*+\mathbf{c}_1\mathbf{x}_1^*+(\mathbf{c}_2-\mathbf{p}_1^*\mathbf{A}_{12})\mathbf{x}_2^*\text{-}$$

hoz, amiből $\lim_{n\to\infty}\varphi_h = \lim_{n\to\infty}\psi_h$. De a φ és ψ értékek monotonitása folytán az a teljes sorozatokra is igaz, amivel a tétel valamennyi állítását beláttuk.

3. Néhány további megjegyzés

A következőkben az eljárás néhány további tulajdonságát fogalmazzuk meg. Bár ezek önmagukban is érdekesek, fontosságuk elsősorban az alkalmazásnál, az eljárást realizáló számológépi program elkészítésénél lehet.

Első megjegyzésünk, hogy $\varphi_h<\psi_h$ esetén a $\bar{\mathbf{x}}_{1,h+1}\neq\bar{\mathbf{x}}_{1h}$ és a $\bar{\mathbf{p}}_{1,h+1}\neq\bar{\mathbf{p}}_{1h}$ relációk közül legalább az egyik teljesül.

Legyen ugyanis

$$v_h = \mathbf{c}_1\bar{\mathbf{x}}_{1h}-\bar{\mathbf{p}}_{1h}\mathbf{A}_{11}\bar{\mathbf{x}}_{1h}+\bar{\mathbf{p}}_{1h}\mathbf{b}_1+\bar{\mathbf{p}}_{2h}(\mathbf{b}_2-\mathbf{A}_{21}\bar{\mathbf{x}}_{1h}) =$$
$$= \mathbf{c}_1\bar{\mathbf{x}}_{1h}-\bar{\mathbf{p}}_{1h}\mathbf{A}_{11}\bar{\mathbf{x}}_{1h}+\bar{\mathbf{p}}_{1h}\mathbf{b}_1+(\mathbf{c}_2-\bar{\mathbf{p}}_{1h}\mathbf{A}_{12})\bar{\mathbf{x}}_{1h}.$$

Ekkor $\bar{\mathbf{p}}_{h+1}\neq\bar{\mathbf{p}}_h$, ha $\mathbf{c}_1\bar{\mathbf{x}}_{1h}+\mathbf{c}_2\bar{\mathbf{x}}_{2h}-\bar{\mathbf{p}}_{1h}(\mathbf{A}_{11}\bar{\mathbf{x}}_{1h}+\mathbf{A}_{12}\bar{\mathbf{x}}_{2h})-\bar{\pi}_{0h}>0$, azaz $\varphi_h<v_h$ és $\bar{\mathbf{x}}_{h+1}\neq\bar{\mathbf{x}}_h$, ha $\bar{\mathbf{p}}_{1h}\mathbf{b}_1+\bar{\mathbf{p}}_{2h}\mathbf{b}_2-(\bar{\mathbf{p}}_{1h}\mathbf{A}_{11}+\bar{\mathbf{p}}_{2h}\mathbf{A}_{21})\bar{\mathbf{x}}_{1h}-\bar{\zeta}_{0h}<0$, azaz $v_h<\psi_h$, amiből állításunk már következik.

3.1. TÉTEL. A 2.1 tételben kimondott konvergencia igaz akkor is, ha c)-ben az $\mathbf{x}_1$-re vonatkozó feladatot csak $v_h<\psi_h$, a $\mathbf{p}_1$-re vonatkozó feladatot pedig csak $v_h>\varphi_h$ esetén bővítjük ki a megfelelő σ, illetve λ változóval.

Bizonyítás. A 2.1 tétel bizonyításához képest csak a $\lim_{h\to\infty} \varphi_h < \lim_{h\to\infty} \psi_h$ egyenlőtlenség lehetetlen voltának igazolása módosul.

Most nem feltétlenül teljesül (2.3) és (2.4) mindegyike, de az előző megjegyzésünk szerint legalább az egyik fennáll. Ha mindkettő teljesül, alkalmazható a korábbi gondolatmenet. Ha pl. csak (2.3) igaz, akkor a h-adik lépésben nem teljesült $v_h < \psi_h$. Ugyanis éppen ezért nem vezettük be az $(\bar{\mathbf{x}}_{1h}, \bar{\mathbf{x}}_{2h})$-nak megfelelő σ változót az $\mathbf{x}_1$-re vonatkozó feladatba, tehát

$$\psi_h \leqq \mathbf{c}_1\bar{\mathbf{x}}_{1h} - \bar{\mathbf{p}}_{1h}\mathbf{A}_{11}\bar{\mathbf{x}}_{1h} + \bar{\mathbf{p}}_{1h}\mathbf{b}_1 + \bar{\mathbf{p}}_{2h}(\mathbf{b}_2 - \mathbf{A}_{21}\bar{\mathbf{x}}_{1h}),$$

ahol a jobboldal tetszőlegesen közel van v^*-hoz és nyilván $\psi_{h'} \leqq \psi_h$. Minthogy (2.3) alapján $\varphi_{h'}$ nem kisebb egy v^*-hoz tetszőlegesen közel levő kifejezésnél, azért $\lim_{h\to\infty} \varphi_h < \lim_{h\to\infty} \psi_h$ lehetetlensége már következik.

Ha az a)—d) eljárás nem véges, akkor a $\mathbf{p}_1$ és $\mathbf{x}_1$-re vonatkozó feladatok sorozatát megoldva, a 2.1 tétel bizonyítása alapján együtt adódik egyrészt egy egyre jobb, φ_h célfüggvényértékű megoldása (1.1)-nek, másrészt pedig egyre kisebb, ψ_h célfüggvényértékű lehetséges megoldása a duális (1.2) feladatnak, tehát egy ψ_h értékű felső becslése (1.1) optimumértékének. Pontosabban a következő tétel érvényes.

3.2. TÉTEL. Nem lehetséges, hogy végtelen sokszor egymás után csak az egyik és mindig ugyanazon, pl. a $\mathbf{p}_1$-re vonatkozó feladatot kelljen megoldanunk az eljárás során.

Bizonyítás. Egy rögzített $\bar{\mathbf{x}}_1 = \bar{\mathbf{x}}_{1h} = \bar{\mathbf{x}}_{1,h+1} = \dots$ mellett a (2.1) feltételrendszer meghatározta poliédernek csak véges sok $\bar{\mathbf{x}}_{2i}$ extremális eleme és $\underline{\mathbf{x}}_{2j}$ extremális iránya van, melyeknek megfelelő változókkal a $\mathbf{p}_1$-re vonatkozó feladat bővíthető. Tehát elég nagy h'-re

$$\bar{\mathbf{p}}_{1h'}(\mathbf{A}_{11}\bar{\mathbf{x}}_1 + \mathbf{A}_{12}\bar{\mathbf{x}}_{2i}) + \varphi_{h'} - \bar{\mathbf{p}}_{1h'}\mathbf{b}_1 \geqq \mathbf{c}_1\bar{\mathbf{x}}_1 + \mathbf{c}_2\bar{\mathbf{x}}_{2i}$$

minden i-re, azaz

$$\varphi_{h'} \geqq \mathbf{c}_1\bar{\mathbf{x}}_{1h'} - \bar{\mathbf{p}}_{1h'}\mathbf{A}_{11}\bar{\mathbf{x}}_{1h'} + \bar{\mathbf{p}}_{1h'}\mathbf{b}_1 + (\mathbf{c}_2 - \bar{\mathbf{p}}_{1h'}\mathbf{A}_{12})\bar{\mathbf{x}}_{2h'}) = v_{h'}$$

Szeretnénk továbbá még egyszer hangsúlyozni, hogy amennyiben (1.1)-nek nincs optimális megoldása, azt az eljárás véges számú lépés végrehajtása után jelzi, valamint azt kiemelni, hogy az eljárás tetszés szerinti $\bar{\mathbf{x}}_{11} \in \mathscr{X}_1$ és $\bar{\mathbf{p}}_{11} \in \mathscr{P}_1$-ből kiindulva végrehajtható.

Megjegyezzük, hogy mivel b) két egymásutáni előfordulása között a (2.1) feladatok jobb oldala és célfüggvénye is megváltozhat, ezen feladatok megoldása az ún. paraméteres primál-duál szimplex módszerrel (lásd pl. [1], 245—249. old.) célszerű, amely természetesen alkalmas az eljárás során lehetséges olyan eset kezelésére is, mikor a jobb oldal és a célfüggvény közül csak az egyik változik meg.

c)-ben (1.3) egyetlen megoldásának megfelelő λ-változóval bővítettük a $\mathbf{p}_1$-re vonatkozó feladatot.

A dekompozíciós eljárásoknál szokásos stratégiáknak megfelelően azonban (1.3) további $(\bar{\mathbf{x}}_1, \bar{\mathbf{x}}_2)$ megoldásainak megfelelő változókkal is bővíthetjük a $\mathbf{p}_1$-re vonatkozó feladatot, ha ilyen a (2.1) megoldása során adódik. A 3.1 tétel nyújtotta lehetőséggel szemben az eljárás megfogalmazása során használt alternatíva is annak felel meg, hogy így a dekompozíciós eljárásoknál gyakorlatban elfogadott taktikát használunk. Ugyanez igaz az $\mathbf{x}_1$-re vonatkozó feladattal kapcsolatban is, mindez azonban attól függ, hogy miképpen oldjuk meg a (2.1) feladatokat, tehát általában az eljárás számológépi realizálásától.

4. A lépcsős szerkezetű lineáris programozási feladatról

A következőkben az a)—d) eljárás ismételt alkalmazásával eljárást nyerünk az

$$\begin{gathered}\mathbf{A}_{0i}\mathbf{x}_i \leqq \mathbf{b}_{0i}\\ \mathbf{A}_{i,i-1}\mathbf{x}_{i-1}+\mathbf{A}_{i0}\mathbf{x}_{0i}+\mathbf{A}_{i,i}\mathbf{x}_i+\mathbf{A}_{i,i+1}\mathbf{x}_{i+1} \leqq \mathbf{b}_i\\ \mathbf{x}_{0i},\mathbf{x}_i \geqq \mathbf{0}, \quad (i=1,2,\dots,n)\\ \max\Big(\sum_i \mathbf{c}_{i0}\mathbf{x}_{0i}+\sum_i \mathbf{c}_i\mathbf{x}_i\Big)\end{gathered} \tag{4.1}$$

alakú lineáris programozási feladat megoldására, mely pl. olyan lehetőség modellezésére alkalmas, ahol az i-edik időszakra vonatkozó $\mathbf{x}_i$ tevékenység közvetlenül csak a megelőző időszakbeli $\mathbf{x}_{i-1}$-től és a következő időszakbeli tevékenység egy részétől $\mathbf{x}_{i+1}$-től függ.

(4.1)-ben $i=1$-re az $\mathbf{x}_0$-hoz tartozó, $i=n$-re pedig az $\mathbf{x}_{n+1}$-hez tartozó tag nem szerepel. (Általában az olyan lineáris programozási feladatot szokták lépcsős szerkezetűnek nevezni, ahol (4.1)-ben minden i-re hiányzik az $\mathbf{x}_{i-1}$-hez tartozó tag, vagy pedig minden i-re az $\mathbf{x}_{i+1}$-hez tartozó tag.)

Feltesszük, hogy az

$$\mathscr{X}_i = \{\mathbf{x}_i\colon \mathbf{A}_{0i}\mathbf{x}_i \leqq \mathbf{b}_{0i},\ \mathbf{x}_i \geqq \mathbf{0}\}$$

és

$$\mathscr{P}_i = \{\mathbf{p}_i\colon \mathbf{p}_i\mathbf{A}_{i0} \geqq \mathbf{c}_{i0},\ \mathbf{p}_i \geqq \mathbf{0}\}$$

poliéderek ($i=1, 2, \dots n$) nem üresek és korlátosak. (Ha ezen poliéderek valamelyike üres, (4.1)-nek, illetve (4.1)

$$\begin{gathered}\mathbf{p}_i\mathbf{A}_{i0} \geqq \mathbf{c}_{i0}\\ \mathbf{p}_{i-1}\mathbf{A}_{i-1,i}+\mathbf{p}_{0i}\mathbf{A}_{i0}+\mathbf{p}_i\mathbf{A}_{ii}+\mathbf{p}_{i+1}\mathbf{A}_{i+1,i} \geqq \mathbf{c}_i\\ \mathbf{p}_{i0},\mathbf{p}_i \geqq \mathbf{0}\\ \min\Big(\sum_i \mathbf{p}_{i0}\mathbf{b}_{0i}+\sum_i \mathbf{p}_i\mathbf{b}_i\Big)\end{gathered} \tag{4.2}$$

duálisának nincs lehetséges megoldása.)

Feltesszük továbbá, hogy $i=1, 2, \dots n$-re

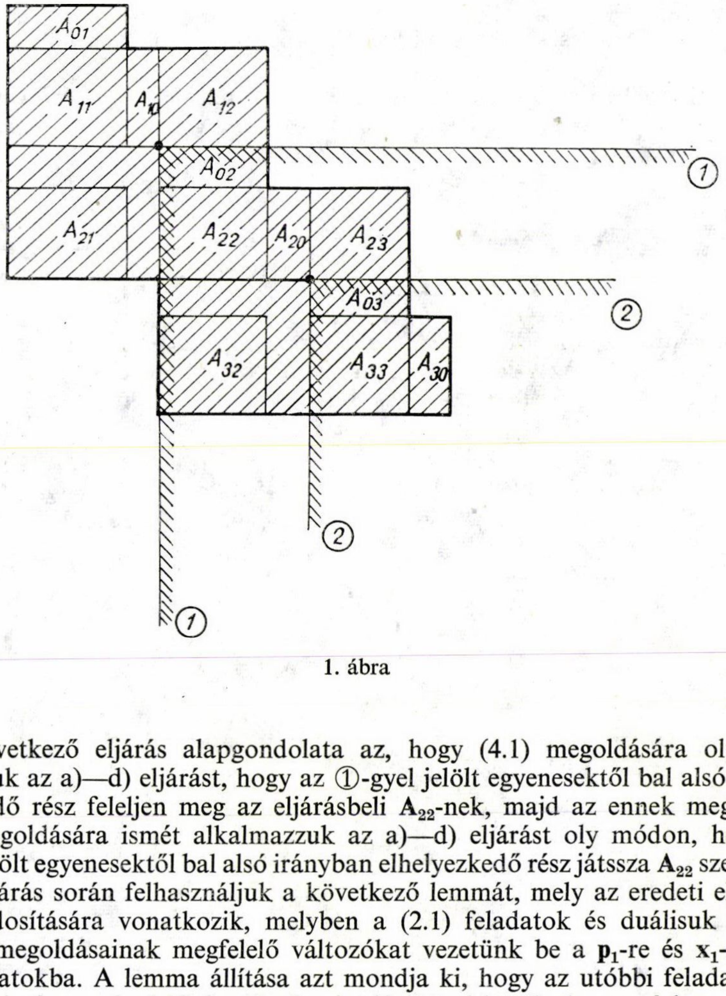
$$\{\mathbf{x}_{0i}\colon \mathbf{A}_{i0}\mathbf{x}_{0i} \leqq \mathbf{0},\ \mathbf{x}_{0i} \geqq \mathbf{0},\ \mathbf{c}_{i0}\mathbf{x}_{0i} > 0\} = \emptyset \tag{4.3}$$

és

$$\{\mathbf{p}_{i0}\colon \mathbf{p}_{i0}\mathbf{A}_{0i} \geqq 0,\ \mathbf{p}_{i0} \geqq 0,\ \mathbf{p}_{i0}\mathbf{b}_{0i} < 0\} = \emptyset. \tag{4.4}$$

(Amennyiben a (4.3) relációk valamelyike nem teljesül, akkor (4.1) — ha egyáltalán van lehetséges megoldása — nem korlátos, a (4.4) relációk valamelyikének nem teljesülése esetén pedig a (4.2) duális feladat nem korlátos, ha van lehetséges megoldása.)

A (4.1)—(4.2) lineáris programozási feladatpár mátrixát $n=3$ esetén az alábbi séma szemlélteti:



1. ábra

A következő eljárás alapgondolata az, hogy (4.1) megoldására oly módon alkalmazzuk az a)—d) eljárást, hogy az ①-gyel jelölt egyenesektől bal alsó irányban elhelyezkedő rész feleljen meg az eljárásbeli $\mathbf{A}_{22}$-nek, majd az ennek megfelelő alfeladat megoldására ismét alkalmazzuk az a)—d) eljárást oly módon, hogy most a ②-vel jelölt egyenesektől bal alsó irányban elhelyezkedő rész játssza $\mathbf{A}_{22}$ szerepét stb.

Az eljárás során felhasználjuk a következő lemmát, mely az eredeti eljárás egy olyan módosítására vonatkozik, melyben a (2.1) feladatok és duálisuk majdnem optimális megoldásainak megfelelő változókat vezetünk be a $\mathbf{p}_1$-re és $\mathbf{x}_1$-re vonatkozó feladatokba. A lemma állítása azt mondja ki, hogy az utóbbi feladatok optimumértékei véges számú lépés után így is elég közel kerülnek egymáshoz.

4.1. Lemma. Az a)—d) eljárás során legyen mindig $\overline{\mathbf{x}}_{2h}$ az

$$\mathbf{A}_{22}\mathbf{x}_2 \leqq \mathbf{b}_2 - \mathbf{A}_{21}\overline{\mathbf{x}}_{1h}$$

$$(4.5) \qquad \mathbf{x}_2 \geqq \mathbf{0}$$

$$\max\,(\mathbf{c}_2 - \overline{\mathbf{p}}_{1h}\mathbf{A}_{12})\,\mathbf{x}_2$$

alfeladat egy olyan lehetséges megoldása, $\bar{\mathbf{p}}_{2h}$ pedig a duálisának egy olyan lehetséges megoldása, hogy teljesül

$$(\mathbf{c}_2-\bar{\mathbf{p}}_{1h}\mathbf{A}_{12})\bar{\mathbf{x}}_{2h} \geqq \bar{\mathbf{p}}_{2h}(\mathbf{b}_1-\mathbf{A}_{21}\bar{\mathbf{x}}_{1h})-\varepsilon$$

és

$$|\bar{\mathbf{x}}_{2h}| \leqq \varkappa_x, \ |\bar{\mathbf{p}}_{2h}| \leqq \varkappa_p,$$

ahol $\varepsilon>0$, $\varkappa_x$ és $\varkappa_p$ rögzített.

Ha c)-ben ezen $(\bar{\mathbf{x}}_{1h}, \bar{\mathbf{x}}_{2h})$-nak megfelelő λ és $(\bar{\mathbf{p}}_{1h}, \bar{\mathbf{p}}_{2h})$-nak megfelelő σ-változóval bővítjük a $\mathbf{p}_1$-re és az $\mathbf{x}_1$-re vonatkozó feladatot, akkor az így módosított eljárás lépéseinek véges számú alkalmazása után $\varphi_h \geqq \psi_h-\varepsilon'$, ahol $\varepsilon'>\varepsilon$ rögzített, hacsak az eljárás előbb másképpen véget nem ér.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy a lemma állítása nem igaz. Minthogy a φ_h értékek ebben az esetben is monoton nemcsökkenő, a ψ_h értékek pedig monoton nemnövekvő sorozatot alkotnak és $\varphi_h \leqq \psi_h$, azért $\lim\limits_{h\to\infty} \psi_h - \lim\limits_{h\to\infty} \varphi_h \geqq \varepsilon'$.

Ugyanúgy, mint a 2.1 tétel bizonyításakor, kiválasztva az $(\bar{\mathbf{x}}_{1h}, \bar{\mathbf{p}}_{1h})$ vektorok egy $(\mathbf{x}_1^*, \mathbf{p}_1^*)$-hoz konvergáló részsorozatát (és a továbbiakban csak ezen részsorozatra szorítkozva), $h'>h$-ra most is fennáll

$$\varphi_{h'} \geqq \mathbf{c}_1\bar{\mathbf{x}}_{1h}-\bar{\mathbf{p}}_{1h'}\mathbf{A}_{11}\bar{\mathbf{x}}_{1h}+\bar{\mathbf{p}}_{1h'}\mathbf{b}_1+(\mathbf{c}_2-\bar{\mathbf{p}}_{1h'}\mathbf{A}_{12})\bar{\mathbf{x}}_{2h}$$

és

$$\psi_{h'} \leqq \mathbf{c}_1\bar{\mathbf{x}}_{1h'}-\bar{\mathbf{p}}_{1h}\mathbf{A}_{11}\bar{\mathbf{x}}_{1h'}+\bar{\mathbf{p}}_{1h}\mathbf{b}_1+\bar{\mathbf{p}}_{2h}(\mathbf{b}_2-\mathbf{A}_{21}\bar{\mathbf{x}}_{1h'}).$$

Innen

$$\psi_{h'}-\varphi_{h'} \leqq \mathbf{c}_1(\bar{\mathbf{x}}_{1h'}-\bar{\mathbf{x}}_{1h})+\bar{\mathbf{p}}_{1h'}\mathbf{A}_{11}\mathbf{x}_{1h}-\bar{\mathbf{p}}_{1h}\mathbf{A}_{11}\mathbf{x}_{1h'}+(\bar{\mathbf{p}}_{1h}-\bar{\mathbf{p}}_{1h'})\mathbf{b}_1+$$
$$+\bar{\mathbf{p}}_{2h}(\mathbf{b}_2-\mathbf{A}_{21}\bar{\mathbf{x}}_{1h'})-(\mathbf{c}_2-\bar{\mathbf{p}}_{1h'}\mathbf{A}_{12})\bar{\mathbf{x}}_{2h}.$$

Ezen egyenlőtlenség jobboldalának első sorában levő különbségek elég nagy h-ra (és így h'-re) elég kicsik. A jobboldal további tagjaira

$$\bar{\mathbf{p}}_{2h}(\mathbf{b}_2-\mathbf{A}_{21}\bar{\mathbf{x}}_{1h'})-(\mathbf{c}_2-\bar{\mathbf{p}}_{1h'}\mathbf{A}_{12})\bar{\mathbf{x}}_{2h} =$$
$$= \bar{\mathbf{p}}_{2h}(\mathbf{b}_2-\mathbf{A}_{21}\bar{\mathbf{x}}_{1h})-(\mathbf{c}_2-\bar{\mathbf{p}}_{1h}\mathbf{A}_{12})\bar{\mathbf{x}}_{2h}+\bar{\mathbf{p}}_{2h}\mathbf{A}_{21}(\bar{\mathbf{x}}_{1h}-\bar{\mathbf{x}}_{1h'})+$$
$$+(\bar{\mathbf{p}}_{1h'}-\bar{\mathbf{p}}_{1h})\mathbf{A}_{12}\bar{\mathbf{x}}_{2h} \leqq \varepsilon+\varkappa_p|\mathbf{A}_{21}|\,|\mathbf{x}_{1h}-\mathbf{x}_{1h'}|+|\mathbf{p}_{1h'}-\mathbf{p}_{1h}|\,|\mathbf{A}_{12}|\varkappa_x$$

ami ε-nál tetszőlegesen kevéssel nagyobb, ha h és (így) h' elég nagy. Ez viszont ellentmondás.

A módosított eljárásra is érvényes, hogy ha $\varphi_h<\psi_h-\varepsilon$, az $\bar{\mathbf{x}}_{1,h+1}\neq\bar{\mathbf{x}}_{1h}$ és $\bar{\mathbf{p}}_{1,h+1}\neq\bar{\mathbf{p}}_{1h}$ relációk közül legalább az egyik fennáll.

Ugyanis $\bar{\mathbf{p}}_{1,h+1}=\bar{\mathbf{p}}_{1h}$ akkor választható, ha

$$\varphi_h \geqq \mathbf{c}_1\bar{\mathbf{x}}_{1h}-\bar{\mathbf{p}}_{1h}\mathbf{A}_{11}\bar{\mathbf{x}}_{1h}+\bar{\mathbf{p}}_{1h}\mathbf{b}_1+(\mathbf{c}_2-\bar{\mathbf{p}}_{1h}\mathbf{A}_{12})\bar{\mathbf{x}}_{2h}$$

és $\bar{\mathbf{x}}_{1,h+1}=\bar{\mathbf{x}}_{1h}$ pedig akkor, ha

$$\psi_h \leqq \mathbf{c}_1\bar{\mathbf{x}}_{1h}-\bar{\mathbf{p}}_{1h}\mathbf{A}_{11}\bar{\mathbf{x}}_{1h}+\bar{\mathbf{p}}_{1h}\mathbf{b}_1+\bar{\mathbf{p}}_{2h}(\mathbf{b}_2-\mathbf{A}_{21}\bar{\mathbf{x}}_{1h}),$$

amely egyenlőtlenségekből

$$\psi_h-\varphi_h \leqq \bar{\mathbf{p}}_{2h}(\mathbf{b}_2-\mathbf{A}_{21}\bar{\mathbf{x}}_{1h})-(\mathbf{c}_2-\bar{\mathbf{p}}_{1h}\mathbf{A}_{12})\bar{\mathbf{x}}_{2h} \leqq \varepsilon.$$

A (4.1) feladat megoldására vonatkozó eljárás leírása és verifikálása megkönnyítésére vezetjük be a következő definíciókat és fogalmazzuk meg a következő lemmákat.

$i=1, 2, \ldots, n-1$-re $\mathbf{p}_i$-re vonatkozó feladatnak nevezünk egy

$$(4.6)\quad \begin{gathered} \mathbf{A}_{i0}\mathbf{x}_{0i}+\sum_j \lambda_{ij}(\mathbf{A}_{ii}\mathbf{x}_{ij}+\mathbf{A}_{i,i+1}\mathbf{x}_{i+1,j}) \leqq \mathbf{b}_i-\mathbf{A}_{i,i-1}\overline{\mathbf{x}}_{i-1} \\ \sum_j \lambda_{ij} = 1 \\ \mathbf{x}_{0i},\, \lambda_{ij} \geqq 0 \\ \max\left(\mathbf{c}_{i0}\mathbf{x}_{0i}+\sum_j \lambda_{ij}\left((\mathbf{c}_i-\overline{\mathbf{p}}_{i-1}\mathbf{A}_{i-1,i})\mathbf{x}_{ij}+\sum_{k=i+1}^{n}(\mathbf{c}_k\mathbf{x}_{kj}+\mathbf{c}_{k0}\mathbf{x}_{0kj})\right)\right) \end{gathered}$$

alakú lineáris programozási feladatot, ahol $\overline{\mathbf{x}}_{i-1}, \overline{\mathbf{p}}_{i-1}$ rögzített, az $(\mathbf{x}_{0,i+1,j}, \ldots, \mathbf{x}_{i,j}, \mathbf{x}_{i+1,j}, \ldots)$ vektorok pedig minden j-re kielégítik az

$$(4.7)\quad \begin{gathered} \mathbf{A}_{0k}\mathbf{x}_k \leqq \mathbf{b}_{0k} \\ \mathbf{A}_{k,k-1}\mathbf{x}_{k-1}+\mathbf{A}_{k0}\mathbf{x}_{0k}+\mathbf{A}_{kk}\mathbf{x}_k+\mathbf{A}_{k,k+1}\mathbf{x}_{k+1} \leqq \mathbf{b}_k \\ \mathbf{x}_{0k},\, \mathbf{x}_k \geqq \mathbf{0} \quad (k=i+1, \ldots, n) \\ \mathbf{A}_{0i}\mathbf{x}_i \leqq \mathbf{b}_{0i}, \quad \mathbf{x}_i \geqq 0. \end{gathered}$$

$\mathbf{x}_{i+1}$-feltételrendszert és hasonlóan, $\mathbf{x}_i$-re vonatkozó feladatnak nevezünk egy

$$(4.8)\quad \begin{gathered} \mathbf{p}_{i0}\mathbf{A}_{0i}+\sum_j \sigma_{ij}(\mathbf{p}_{ij}\mathbf{A}_{ii}+\mathbf{p}_{i+1,j}\mathbf{A}_{i+1,i}) \geqq \mathbf{c}_i-\overline{\mathbf{p}}_{i-1}\mathbf{A}_{i-1,i} \\ \sum_j \sigma_{ij} = 1 \\ \mathbf{p}_{i0} \geqq \mathbf{0},\, \sigma_{ij} \geqq 0 \\ \min\left(\mathbf{p}_{i0}\mathbf{b}_{0i}+\sum_j \sigma_{ij}\left(\mathbf{p}_{ij}(\mathbf{b}_i-\mathbf{A}_{i,i-1}\overline{\mathbf{x}}_{i-1})+\sum_{k=i+1}^{n}(\mathbf{p}_{kj}\mathbf{b}_k+\mathbf{p}_{k0j}\mathbf{b}_{0k})\right)\right) \end{gathered}$$

alakú lineáris programozási feladatot, ahol $\overline{\mathbf{x}}_{i-1}, \overline{\mathbf{p}}_{i-1}$ rögzített, a $(\mathbf{p}_{i+1,0,j}, \ldots, \ldots, \mathbf{p}_{ij}, \mathbf{p}_{i+1,j}, \ldots)$ vektorok pedig minden j-re kielégítik a

$$(4.9)\quad \begin{gathered} \mathbf{p}_k\mathbf{A}_{k0} \geqq \mathbf{c}_{k0} \\ \mathbf{p}_{k-1}\mathbf{A}_{k-1,k}+\mathbf{p}_{k0}\mathbf{A}_{0k}+\mathbf{p}_k\mathbf{A}_{kk}+\mathbf{p}_{k+1}\mathbf{A}_{k+1,k} \geqq \mathbf{c}_k \\ \mathbf{p}_{k0},\, \mathbf{p}_k \geqq \mathbf{0} \quad (k=i+1, \ldots n) \\ \mathbf{p}_i\mathbf{A}_{i0} \geqq \mathbf{c}_{i0},\, \mathbf{p}_i \geqq \mathbf{0} \end{gathered}$$

$\mathbf{p}_{i+1}$-feltételrendszert.

$\mathbf{p}_n$-re vonatkozó feladat az

$$(4.10)\quad \begin{gathered} \mathbf{A}_{0n}\mathbf{x}_n \leqq \mathbf{b}_{0n} \\ \mathbf{A}_{n0}\mathbf{x}_{n0}+\mathbf{A}_{nn}\mathbf{x}_n \leqq \mathbf{b}_n-\mathbf{A}_{n,n-1}\overline{\mathbf{x}}_{n-1} \\ \mathbf{x}_{0n},\, \mathbf{x}_n \geqq \mathbf{0} \\ \max\left(\mathbf{c}_{n0}\mathbf{x}_{0n}+(\mathbf{c}_n-\overline{\mathbf{p}}_{n-1}\mathbf{A}_{n-1,n})\mathbf{x}_n\right) \end{gathered}$$

alakú lineáris programozási feladat, ahol $\bar{x}_{n-1}$, $\bar{p}_{n-1}$ rögzített, az x_n-re vonatkozó feladat pedig ennek duálisa.

A következő 4.2 lemma a korábbi 1.1 és 1.2 lemmák jelen esetre vonatkozó megfelelője, a 4.3 lemmában pedig az egymásutáni i értékekhez tartozó p_i-re és x_i-re vonatkozó feladatoknak az 5. részbeli eljárás már említett alapgondolatában is bennfoglalt egymásra épülését fogalmazzuk meg.

4.2. LEMMA. Egy p_i-re vonatkozó feladatnak minden $\bar{x}_{i-1}$ és $\bar{p}_{i-1}$ mellett van optimális megoldása ($i=1, 2, \ldots, n$).

Bizonyítás. Ha $i=1, 2, \ldots, n-1$-re (4.6)-nak nincs lehetséges megoldása, akkor van olyan (p_i^*, π_i^*), hogy $p_i^* \geqq 0$ és

$$p_i^* A_{i0} \geqq 0,$$

$$p_i^*(A_{ii}x_{ij} + A_{i,i+1}x_{i+1,j}) + \pi_i^* \geqq 0$$

és

$$p_i^*(b_i - A_{i,i-1}\bar{x}_{i-1}) + \pi_i^* < 0.$$

$\mathscr{P}_i$ korlátos volta folytán $p_i^* = 0$, ami ellentmondásra vezet.

Ha (4.6) nem lenne korlátos, akkor volna olyan $\underline{x}_{0i}^* \geqq 0$, melyre

$$A_{i0}\underline{x}_{0i}^* \leqq 0$$

és

$$c_{i0}\underline{x}_{0i}^* > 0,$$

ami ellentmond feltevéseinknek.

Ugyanígy, ha a (4.10) feladatnak nincs lehetséges megoldása, akkor van olyan $\underline{p}_n^* \geqq 0$ és $\underline{p}_{n0}^* \geqq 0$, hogy

$$\underline{p}_n^* A_{n0} \geqq 0,$$

$$\underline{p}_{n0}^* A_{0n} + \underline{p}_n^* A_{nn} \geqq 0$$

és

$$\underline{p}_{n0}^* b_0 + \underline{p}_n^*(b_n - A_{n,n-1}\bar{x}_{n-1}) < 0.$$

$\mathscr{P}_n$ korlátos voltából $\underline{p}_n^* = 0$ és ellentmondásba kerülünk (4.4)-gyel. Ha (4.10) duálisának nincs lehetséges megoldása ellentmondásra jutunk $\mathscr{X}_n$ korlátos volta és (4.3) alapján, így a p_n-re vonatkozó (4.10) feladat nem lehet nem korlátos.

Hasonlóan látható be a (4.8) feladatokra és (4.10) duálisára vonatkozó azonos állítás.

(Az, hogy (4.1)-nek van optimális megoldása, nagyjából ugyanígy adódik. A tárgyalás jelen formájában ez a megfogalmazott további állítások következménye.)

4.3. LEMMA. Legyen $i=1, 2, \ldots n$-re $(\bar{x}_{0i}, \ldots, \bar{\lambda}_{ij} \ldots)$ egy olyan p_i-re vonatkozó feladat megoldása, hogy $(\bar{x}_{i-1}, \bar{\zeta}_{i-1})$ egy x_{i-1}-re vonatkozó feladat duálisának lehetséges megoldása. Akkor $(\bar{x}_{0i}, \sum_j \bar{\lambda}_{ij} x_{0,i+1,j}, \ldots, \bar{x}_{i-1}, \sum_j \bar{\lambda}_{ij} x_{ij}, \sum_j \bar{\lambda}_{ij} x_{i+1,j}, \ldots)$ kielégíti a (4.7) x_i feltételrendszert. ($i=1$-re $\bar{x}_0 \geqq 0$ tetszőleges és az x_1-feltételrendszer az eredeti (4.1) feladat feltételrendszere. $i=n$-re, ha $(\bar{x}_{0n}\bar{x}_n)$ a p_n-re vonatkozó feladat megoldása, akkor $(\bar{x}_{0n}, \bar{x}_{n-1}, \bar{x}_n)$ elégíti ki az x_{n-1}-feltételrendszert.)

Bizonyítás. Az állítás a $\mathbf{p}_i$-re vonatkozó feladatok és az $\mathbf{x}_i$-feltételrendszerek definíciója alapján nyilvánvaló. Talán annyit érdemes csak hangsúlyozni, hogy mivel $(\bar{\mathbf{x}}_{i-1}, \xi_{i-1})$ megoldása az $i-1$-hez tartozó (4.8) feladat duálisának, azért $\mathbf{A}_{0,i-1}\bar{\mathbf{x}}_{i-1} \leqq \mathbf{b}_{i-1}$ és $\bar{\mathbf{x}}_{i-1} \geqq \mathbf{0}$. Hasonló állítás igaz az $\mathbf{x}_i$-re vonatkozó feladatok megoldására és a (4.9) feltételrendszerekre.

5. Dekompozíciós eljárás a lépcsős szerkezetű lineáris programozási feladat megoldására

Legyenek a továbbiakban $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \ldots > \varepsilon_{n-1} > 0$ rögzített számok. A (4.1) feladat megoldására javasolt eljárás a következő.

(i) Legyen $\bar{\mathbf{p}}_i \in \mathcal{P}_i$ és $\bar{\mathbf{x}}_i \in \mathcal{X}_i$ tetszőleges, a $\mathbf{p}_i$-re vonatkozó feladat az

$$(5.1)\qquad \begin{gathered} \mathbf{A}_{i0}\mathbf{x}_{0i} \leqq \mathbf{b}_i - \mathbf{A}_{i,i-1}\bar{\mathbf{x}}_{i-1} \\ \mathbf{x}_{0i} \geqq \mathbf{0} \\ \max \mathbf{c}_{i0}\mathbf{x}_{0i} \end{gathered}$$

lineáris programozási feladat, az $\mathbf{x}_i$-re vonatkozó feladat pedig a

$$(5.2)\qquad \begin{gathered} \mathbf{p}_{i0}\mathbf{A}_{0i} \geqq \mathbf{c}_i - \bar{\mathbf{p}}_{i-1}\mathbf{A}_{i-1,1} \\ \mathbf{p}_{i0} \geqq \mathbf{0} \\ \min \mathbf{p}_{i0}\mathbf{b}_{0i} \end{gathered}$$

lineáris programozási feladat $(i=1, 2, \ldots, n-1)$, a $\mathbf{p}_n$-re vonatkozó feladat pedig az

$$\begin{gathered} \mathbf{A}_{0n}\mathbf{x}_n \leqq \mathbf{b}_{0n} \\ \mathbf{A}_{n0}\mathbf{x}_{0n} + \mathbf{A}_{nn}\mathbf{x}_n \leqq \mathbf{b}_n - \mathbf{A}_{n-1}\bar{\mathbf{x}}_{n-1} \\ \mathbf{x}_{0n}, \mathbf{x}_n \geqq \mathbf{0} \\ \max\,[\mathbf{c}_{n0}\mathbf{x}_{0n} + (\mathbf{c}_n - \bar{\mathbf{p}}_{n-1}\mathbf{A}_{n-1,n})\mathbf{x}_n] \end{gathered}$$

lineáris programozási feladat és legyen végül $k=n$.

(ii) Oldjuk meg a $\mathbf{p}_k$-ra és $\mathbf{x}_k$-ra vonatkozó feladatokat. A feladatok optimumértéke legyen φ_k és ψ_k.

(iii) Ha $\psi_k - \varphi_k \leqq \varepsilon_k$ és $k=1$, az eljárás véget ér. Ha $\psi_k - \varphi_k \leqq \varepsilon_k$ és $k \neq 1$, bővítsük a $\mathbf{p}_{k-1}$-re vonatkozó feladatokat a $\mathbf{p}_k$-ra vonatkozó feladat optimális megoldásából a 4.3 lemma alapján képezhető λ változóval és az $\mathbf{x}_{k-1}$-re vonatkozó feladatot az $\mathbf{x}_k$ feladat optimális megoldásából hasonlóan képezhető σ változóval. Legyen $k=k-1$ és folytassuk (ii)-től.

(iv) Ha $\psi_k - \varphi_k > \varepsilon_k$, legyen $\bar{\mathbf{p}}_k = \mathbf{p}_k^*$ és $\bar{\mathbf{x}}_k = \mathbf{x}_k^*$, ahol $(\mathbf{p}_k^*, \pi_k^*)$ a $\mathbf{p}_k$-ra vonatkozó feladat, $(\mathbf{x}_k^*, \zeta_k^*)$ pedig az $\mathbf{x}_k$-ra vonatkozó feladat duálisának egy optimális megoldása. Legyen $k=k+1$ és folytassuk (ii)-től.

5.1. TÉTEL. A fenti eljárás lépéseinek véges számú végrehajtása után befejeződik és a $\mathbf{p}_1$-re vonatkozó feladat utolsó optimális megoldásának megfelelő

$$(\mathbf{x}_{01}^*, \sum_j \lambda_{1j}^* \mathbf{x}_{0,2,j}, \ldots, \sum_{j*} \lambda_{1j}^* \mathbf{x}_{ij}, \sum_j \lambda_{1j}^* \mathbf{x}_{2j}, \ldots)$$

olyan lehetséges megoldása (4.1)-nek, melyhez tartozó célfüggvény érték (4.1) optimumértékénél legfeljebb ε_1-gyel kisebb.

Bizonyítás. Minthogy az eljárás során $\mathbf{p}_k$ és $\mathbf{x}_k$ mindig egy $\mathbf{p}_k$-ra, illetve $\mathbf{x}_k$-ra vonatkozó feladat megoldása alapján adódik, a 4.3 lemma alapján az eljárás befejezésekor rendelkezésünkre áll (4.1) egy φ_1 és (4.2) egy ψ_1 célfüggvényértékű megoldása és így csak a végességre vonatkozó állítással kell foglalkoznunk.

(ii)-ben $k=n$-re mindig $\psi_n-\varphi_n=0$. Tehát a 2.1. tétel következményeképpen véges számú lépés után $\psi_{n-1}-\varphi_{n-1}\leqq\varepsilon_{n-1}$. Minthogy (iii)-ben a $\mathbf{p}_{n-2}$-re ($\mathbf{x}_{n-2}$-re) vonatkozó feladatot mindig az $\mathbf{x}_{n-1}$ ($\mathbf{p}_{n-1}$)-feltételrendszer olyan megoldásával bővítjük, amelyben $\bar{\mathbf{x}}_{n-1}\in\mathscr{X}_{n-1}$ ($\bar{\mathbf{p}}_{n-1}\in\mathscr{P}_{n-1}$) és ezen utóbbi korlátos halmaz, a 4.1 lemma következményeképpen az eddigi lépések véges számú végrehajtása után $\psi_{n-2}-\varphi_{n-2}\leqq\varepsilon_{n-2}$.

Az, hogy a $\mathbf{p}_{n-1}$-re és $\mathbf{x}_{n-1}$-re vonatkozó feladatban bennmaradnak a korábbi változók, nem ront el semmit, mert $\mathbf{x}_{n-2}$ és/vagy $\mathbf{p}_{n-2}$ (általában $\mathbf{x}_k$ és/vagy $\mathbf{p}_k$) megváltozása a $\mathbf{p}_n$-re illetve $\mathbf{x}_n$-re vonatkozó feladaton (általában az $\mathbf{x}_{k+2}$-illetve $\mathbf{p}_{k+2}$-feltételrendszeren) nem változtat. A tétel állítása ezután teljes indukcióval adódik. (Tulajdonképpen az indukciós lépést is elvégeztük, ha az eljárást úgy definiáltuk volna, hogy bevezetünk még egy további ε_n-t, melyre $\varepsilon_{n-1}>\varepsilon_n>0$, és az eljárást úgy definiáltuk volna, hogy a (4.10) feladat és duálisa olyan megoldásainak megfelelő változókkal bővítjük a $\mathbf{p}_{n-1}$ és $\mathbf{x}_{n-1}$-re vonatkozó feladatokat, melyekhez tartozó célfüggvényértékek abszolút eltérése ε_n-nél nem nagyobb.)

A $\mathbf{p}_k$-ra és $\mathbf{x}_k$-ra vonatkozó feladatokban, a változók megőrizhetőségével kapcsolatos megjegyzés mutatja, hogy miért csak (4.1) és miért nem pl. egy

$$\mathbf{A}_{0i}\mathbf{x}_i \leqq \mathbf{b}_{0i}$$

$$\mathbf{A}_{i0}\mathbf{x}_{0i}+\sum_j \mathbf{A}_{ij}\mathbf{x}_j \leqq \mathbf{b}_i$$

$$\mathbf{x}_{0i}, \mathbf{x}_i \geqq 0 \quad (i=1, 2, \ldots, n)$$

$$\max\left(\sum_i \mathbf{c}_{i0}\mathbf{x}_{0i}+\sum_i \mathbf{c}_i\mathbf{x}_i\right)$$

alakú lineáris programozási feladat megoldására próbálkoztunk az a)—d) eljárás többszöri alkalmazásával. Ebben az esetben ugyanis új $\bar{\mathbf{p}}_{i-1}$ és $\bar{\mathbf{x}}_{i-1}$ esetén nem csak a $\mathbf{p}_i$-re és $\mathbf{x}_i$-re vonatkozó feladat jobb oldala és célfüggvénye változik meg, hanem a meglevő λ és σ változókat is el kell hagyni. Ez ugyan elvi akadályt nem jelentene, de a változók megőrzésével kapcsolatos (4.1) alakú feladat esetén adódó lehetőségtől az eljárás lépéseinek kisebb számú végrehajtását várjuk.

(i)-ben $i=1, 2, \ldots, n-1$-re $\mathbf{p}_i$-t és $\mathbf{x}_i$-t tetszőlegesen választottuk $\mathscr{P}_i$-ből, illetve $\mathscr{X}_i$-ből. Ezzel azt kívántuk érzékeltetni, hogy induló értékük megválasztására vonatkozó valamilyen előzetes információ a lépésszámot kedvezően befolyásolhatja.

Ugyancsak kézenfekvő lehetőség ezt oly módon végrehajtani, hogy $\bar{\mathbf{p}}_1$ legyen az

$$\mathbf{A}_{10}\mathbf{x}_{01} \leqq \mathbf{b}_1$$

$$\mathbf{x}_{01} \geqq \mathbf{0}$$

$$\max \mathbf{c}_{10}\mathbf{x}_{01},$$

$\bar{\mathbf{x}}_1$ pedig az

$$\mathbf{p}_{10}\mathbf{A}_{01} \geqq \mathbf{c}_1$$

$$\mathbf{p}_{10} \geqq \mathbf{0}$$

$$\min \mathbf{p}_{10}\mathbf{b}_1$$

lineáris programozási feladat duálisának egy optimális megoldása, és a további i értékekre $\bar{\mathbf{p}}_i$-nek az (5.1), $\bar{\mathbf{x}}_i$-nek pedig az (5.2) feladat duálisának egy optimális megoldását választjuk.

Az (i)—(iv) algoritmus alapgondolatát tekintve közeli a *Dantzig—Wolfe eljárás* ismételt alkalmazásához ([2], [3]). [2] eleve a lépcsős szerkezetű, [3] egy valamivel általánosabb szerkezetű lineáris programozási feladat esetét tárgyalja. Már [3]-ban is foglalkoztunk azzal a lehetőséggel, hogy az állítások érvényességének megváltozása nélkül többféleképpen is megadható az, hogy melyik i-hez tartozó $\mathbf{p}_i$-re vagy $\mathbf{x}_i$-re vonatkozó feladattal foglalkozunk és mikor.

Az (i)—(iv) algoritmus esetén is érvényesek ilyen megjegyzések.

A $\mathbf{p}_{k-1}$ és $\mathbf{x}_{k-1}$-re vonatkozó feladat bővítésével megpróbálkozhatunk $\psi_k - \varphi_k > \varepsilon_k$ esetén is. Ugyanis a 4.1. lemma utáni megjegyzésből csak az következik, hogy $\psi_k - \varphi_k \leqq \varepsilon_k$ esetén biztosan megváltozik $\bar{\mathbf{p}}_{k-1}$ és $\bar{\mathbf{x}}_{k-1}$ közül legalább az egyik, amit azzal azonosíthatunk, hogy φ_{k-1} nő, illetve ψ_{k-1} csökken (lásd 3.2. tétel). De ez megtörténhet $\psi_k - \varphi_k > \varepsilon_k$ esetén is, ha a meglevő $(\bar{\mathbf{p}}_{k-1}, \bar{\pi}_{k-1})$, illetve $(\bar{\mathbf{x}}_{k-1}, \bar{\zeta}_{k-1})$ duálmegoldásra és az $\mathbf{x}_k$, illetve $\mathbf{p}_k$-feltételrendszernek a 4.3 lemma alapján adódó megoldására teljesül a megfelelő egyenlőtlenség, azaz $\psi_{k-1} - \varphi_{k-1}$ csökkenni fog és ezzel — ugyanezen filozófia szellemében — ahhoz kerülünk közelebb, hogy $\psi_1 - \varphi_1$ csökkenjen.

Az algoritmus egy számológépi realizációjánál többféleképpen lehet megoldani azt, hogy mikor és melyik i-re oldjuk meg a $\mathbf{p}_i$-re és $\mathbf{x}_i$-re vonatkozó feladatokat. Ugyancsak több lehetőség kínálkozik arra is, hogy egy adott i-e a megfelelő feladatokat hányszor és milyen $\bar{\mathbf{x}}_{i-1}$ és $\bar{\mathbf{p}}_{i-1}$-ekkel oldjuk meg. Mindez a feladattól is függhet. A változóknak a lépcsős szerkezetből adódó, már említett megőrizhetősége ekkor lehet igazán érdekes.

Az ε_i értékek változtatásával az (i)—(iv) algoritmus megfogalmazható úgy is. hogy olyan közelítő eljárás adódjon, melynek eredménye (4.1) optimumértéke,

IRODALOM

[1] DANTZIG, G. B., *Linear Programming and Extensions.* (Princeton University Press, Princeton, 1963.)
[2] HO, J. K. and A. S. MANNE, "Nested decomposition for dynamic models", Institute for Mathematical Studies in the Social Sciences, Rept. 96, Stanford University, 1973.
[3] STAHL J., "Solving large scale linear programs via polyhedral games", *INFELOR*, 1971.
[4] STAHL J., „A kétszeresen összekapcsolt lineáris programozási feladatról", *Szigma* 7 (1974) 25—40.

(Beérkezett: 1974. május 10.)
(Újra beérkezett: 1974. augusztus 16.)

STAHL JÁNOS
SZÁMKI
1021 BUDAPEST II., TÁROGATÓ ÚT 110.

ON AN LP-DECOMPOSITION AND AN APPLICATION OF THE PROCEDURE

J. STAHL

The decomposition procedure having been discussed in the paper is for solving the dual LP-problem pair (1.1) and (1.2). In an iterative step of the procedure one has to solve a problem of type (1.5) and (1.6) resp. and the subproblem (2.1), where $\bar{\mathbf{p}}_1$ and $\bar{\mathbf{x}}_1$ are from the optimal solution of the duals to problems (1.5) and (1.6).

After the preliminary section 1 the procedure itself is discussed in section 2. If problem (1.1) has an optimal solution, then the optimal values of problems (1.5) and (1.6) converge to this value and solutions corresponding to these objective values can easily be obtained. In the other case the procedure is always finite. Section 3 deals with some further features of the procedure.

In sections 4 and 5 we give an algorithm for solving the LP-problem of staircase structure (4.1). The algorithm is a repeated application of the above procedure.

Alkalmazott Matematikai Lapok 1 *(1975) 181—187*

AZ (s, S) SZTOHASZTIKUS KÉSZLETGAZDÁLKODÁSI MODELL KITERJESZTÉSE INTERVALLUMSZERŰ ÉRKEZÉSI FOLYAMAT ESETÉRE

GERENCSÉR LÁSZLÓ és PRÉKOPA ANDRÁS

Budapest

Az (s, S) készletgazdálkodási modell egy gyakorlatban elterjedt készletgazdálkodási mód matematikai leírását adja. Ebben a dolgozatban az (s, S) modell egy kiterjesztését vizsgáljuk, amikor is a szállítási folyamatban egyszeri érkezés helyett intervallumszerű érkezést is megengedünk. A szállítási folyamatnak ilyenfajta modellezésével foglalkoznak a [6], [7], [9] dolgozatok. A dolgozat első felében levezetjük a költségfüggvény kifejezését, a dolgozat második felében pedig az optimális s, S paraméterekre adunk becsléseket. Ezek a becslések a [2], [8] dolgozatokban megadott becslések általánosításai.

1. A modell leírása és a költségfüggvény kiszámítása

A modell egyetlen cikk készletezésével kapcsolatos. A készletezett cikkel szemben egy véletlenszerű igényfolyamat jelentkezik. A $(0, t)$ időszakaszban jelentkező igények teljes tömegét $\alpha(t)$-vel jelöljük. Az $\alpha(t)$ sztohasztikus folyamatot igényfolyamatnak nevezzük. Feltesszük, hogy ez egy stacionárius független növekményű sztohasztikus folyamat. Rögzített t-re az $\alpha(t)$ valószínűségi változó eloszlásfüggvényét $F(x, t)$ jelöli, sűrűségfüggvényét $f(x, t)$. Az egységnyi időre eső átlagos igényt m jelöli, tehát

$$\int_0^{\infty} x f(x, t)\, dt = mt. \tag{1.1}$$

A készlet felülvizsgálása T időközönként történik, ez az egy periódusidőnek a tartama. A rendelési szabály a következő: amennyiben a készletállapot (l. [4], [5]) s-nél nagyobb, akkor nem rendelünk. Ha azonban a készletállapot s-nél kisebb, akkor felrendelünk egy S szintre.

A megrendelt áru szállítása a rendelés feladásától számított τ idő után kezdődik és a $\tau+T$ időpontig be kell fejeződnie. A szállítási folyamatot jellemezhetjük egy $\mu(t)$ sztohasztikus folyamattal az alább leírt módon. $\mu(t)$ a $[\tau, \tau+T)$ intervallumban értelmezett monoton nem csökkenő véletlen függvény, melyre $\mu(\tau)=0$ és $\mu(\tau+T-0)=1$. Amennyiben a 0 időpontban rendelt mennyiség x_0, akkor a t időpontig ebből

$$\eta(t) = x_0 \mu(t) \tag{1.2}$$

mennyiséget szállítanak le.

A $\mu(t)$ sztohasztikus folyamat lehet azonosan 1 $t>\tau$ esetén (ilyenkor egyszeri érkezésről beszélünk), vagy lehet egy intervallumszerű érkezést leíró sztohasztikus folyamat (l. [5]).

A modellben szereplő költségek a következők. A-val jelölt rendelési költség, amely egy rendelés feladásának a költsége, idő- és mennyiségarányos készletezési költség, végül idő és mennyiségarányos hiányköltség. Egységnyi mennyiségű árunak egységnyi időre eső készletezési költségét IC, egységnyi mennyiségű árunak egységnyi időre eső hiányköltségét $\hat{p}$ jelöli. A modell költségfüggvényén az egy időegységre eső várható költséget értjük. Ez az s, S változók függvénye.

Az s, S változók helyett új független változópárt vezetünk be, ezek S és $Q=S-s$. A költségfüggvény kiszámításához felidézünk néhány, az S szintre való felrendelés modelljével kapcsolatos eredményt.

Az S szintre való felrendelés modelljének költségfüggvényét általánosan az

$$(1.3)\qquad l(S) = IC\,D(S)+\hat{p}B(S)$$

összefüggés alapján számítjuk, ahol D az időegységre eső átlagkészlet, B pedig az időegységre eső átlaghiány. D és B értékét az [5]-ben közölt gondolatmenetet követve általános $\mu(t)$ mellett is zárt alakban felírhatjuk. Legyen a 0 időpont egy rendelési időpont, a készletállapot a rendelés előtt legyen $S-y$. Vezessük be az

$$(1.4)\qquad x(t) = y(1-\mu(t))+\alpha(t)$$

valószínűségi változót, ahol $\tau \leqq t < \tau+T$. Ennek eloszlásfüggvényét jelölje $H(x, t)$. Bevezetjük még a

$$(1.5)\qquad H(x) = \frac{1}{T}\int_{\tau}^{\tau+T} H(x,t)\,dt$$

keverékeloszlásfüggvényt.

Megmutatható, hogy

$$(1.6)\qquad D(S) = \int_0^S (S-x)\,dH(x)$$

és

$$(1.7)\qquad B(S) = \int_S^{\infty} (x-S)\,dH(x).$$

A $H(x)$ eloszlásfüggvény analitikus alakja egyszeri érkezés esetén és *Wiener-folyamattal* közelített igényfolyamat esetén [5]-ben szerepel. Ugyanott találhatók közelítő formulák intervallumszerű érkezés esetére is.

Most rátérünk az (s, S) modell költségfüggvényének kiszámítására, amelyet $K(S, Q)$-val jelölünk. A várható költséget először két szomszédos rendelést követő τ időpont között számítjuk ki. Egy ilyen időszakaszt ciklusnak nevezünk. Az egy ciklusra eső átlagos költséget elosztjuk a ciklus átlagos hosszával, így megkapjuk a keresett költségfüggvényt. Tegyük fel, hogy a 0 időpontban feladunk egy rendelést. Ekkor a τ időpontban kezdődik egy ciklus és befejeződik valamilyen $\tau+NT$ időpontban. Az egyes periódusok (véletlen) költségét jelöljék $l_1, \ldots, l_N$. Feladatunk az $l_1+\ldots+l_N$ összeg várható értékének a kiszámítása. Az első periódus $E(l_1)$ várható értékének kiszámítására az intervallumszerű érkezés modellje alkalmazható. Az (1.4)-ben szereplő y változó az előző ciklus összigényét jelenti. Az eredményt jelöljük $l_1(S)$-sel. Legyen $n \geqq 2$, a τ-t követő $n-1$ periódus együttes igénye legyen y.

Nyilvánvaló, hogy $y \leqq Q$ esetén

$$E(l_n|N \geqq n, y) = E(l_n|y) = l(S-y). \tag{1.8}$$

Mivel y sűrűségfüggvénye $f^{(n-1)}(y, T)$, ahol a felső index $(n-1)$-szeres konvolúciót jelent, kapjuk, hogy

$$A + E(l_1 + \ldots + l_N) = A + l_1(S) + \sum_{n=2}^{\infty} \int_0^Q l(S-y) f^{(n-1)}(y, T)\, dy. \tag{1.9}$$

Az A rendelési költséget csak egyszer, a ciklus elején kell számításba venni, hiszen egy cikluson belül további rendelést nem adunk fel.

Most kiszámítjuk a ciklus átlagos hosszát. Az első $(\tau, \tau+T)$ periódus mindig a ciklushoz tartozik. Annak valószínűsége, hogy a ciklus hossza legalább n egyenlő annak valószínűségével, hogy az első $n-1$ periódus alatt jelentkező összigény kisebb, mint Q, ami $F^{(n-1)}(Q, T)$. Mármost egy nemnegatív valószínűségi változó várható értékét úgy is megkaphatjuk, hogy a kiegészítő valószínűségeloszlás-függvényt integráljuk. Jelen esetben a következő összeget kapjuk:

$$1 + \sum_{n=2}^{\infty} F^{(n-1)}(Q, T). \tag{1.10}$$

Ez tehát a ciklus átlagos hossza.

Egyszerűbb kifejezést kapunk, ha bevezetjük az ún. felújítási függvényt, amit $M(x)$-szel jelölünk és az

$$M(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{(n)}(x, T) \tag{1.11}$$

képlettel definiálunk.

A felújítási függvény deriváltját $m(x)$ jelöli, ennek képlete a következő:

$$m(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f^{(n)}(x, T). \tag{1.12}$$

Az (1.9) kifejezésben az összegezés és az integrálás sorrendjét felcserélve megkapjuk a költségfüggvény következő kifejezését:

$$K(S, Q) = \frac{A + l_1(S) + \int_0^Q l(S-y) m(y)\, dy}{1 + M(Q)} \tag{1.13}$$

Ha (1.13) számlálójában parciális integrálást hajtunk végre, a költségfüggvényre a következő új kifejezést kapjuk:

(1.14)

$$K(S, Q) = \frac{A + l_1(S) + M(Q) l(S-Q) + (IC + \hat{p}) \int_0^Q H(S-y) M(y)\, dy - \hat{p} \int_0^Q M(y)\, dy}{1 + M(Q)}.$$

Feladatunk $K(S, Q)$ minimalizálása.

2. Az optimális paraméterek becslése

Az (1.13)-ban megadott $K(S, Q)$ függvény nem konvex. Ezért minimalizálását célszerű a paramétertartomány skálázásával meghatározni. Ehhez hasznos lesz a skálázandó tartomány előzetes szűkítése.

Az optimális paraméterértékeket jelöljék D^*, S^*, Q^*. Feltesszük, hogy a $K(S, Q)$ függvénv belső pontban éri el a minimumát. Ekkor S^*, Q^* kielégítik a

$$\frac{\partial K(S^*, Q^*)}{\partial S} = 0 \qquad (2.1)$$

$$\frac{\partial K(S^*, Q^*)}{\partial Q} = 0$$

egyenleteket.

Ha azonos feltételek mellett a készletgazdálkodást az S-szintre való felrendelés modellje alapján végezzük, akkor az optimális S értéket S^0-lal jelöljük.

Megmutatjuk, hogy érvényes a következő becslés

$$S^* - Q^* \leqq S^0 \leqq S^*. \qquad (2.2)$$

A (2.2) becslés levezetéséhez vizsgáljuk meg $K(S, Q)$ S szerinti deriváltját. Ehhez először az $l(y)$ költségfüggvény deriváltját írjuk fel (l. [4] és [5]).

$$\frac{dl(y)}{dy} = (IC + \hat{p})H(y) - \hat{p}. \qquad (2.3)$$

Hasonlóan az $l_1(y)$ függvényre

$$\frac{dl_1(y)}{dy} = (IC + \hat{p})H_1(y) - \hat{p} \qquad (2.4)$$

adódik. Ezek felhasználásával (1.13) alapján kapjuk, hogy

$$\frac{\partial K}{\partial S} = \frac{(IC + \hat{p})\left(H_1(S) + \int\limits_0^Q H(S-x)m(x)\,dx\right) - \hat{p}(1 + M(Q))}{1 + M(Q)}. \qquad (2.5)$$

Innen kitűnik, hogy $K(S, Q)$ S-ben konvex, S szerinti deriváltja ugyanis monoton növekedő. Rögzített Q mellett a $K(S, Q)$ függvény a minimumát érje el egy $S^*(Q)$ helyen. Az $S^*(Q)$ értéket a

$$\frac{\partial K(S, Q)}{\partial S} = 0 \qquad (2.6)$$

egyenletből határozzuk meg. A (2.6) egyenlet a következőképpen is írható

$$R_1(S, Q) = (IC + \hat{p})\left(H_1(S) + \int\limits_0^Q H(S-x)m(x)\,dx\right) - \hat{p}(1 + M(Q)) = 0. \qquad (2.7)$$

A (2.7) egyenletet írjuk át a megszokottabb

$$\frac{H_1(S)+\int\limits_0^Q H(S-x)m(x)\,dx}{1+M(Q)} = \frac{\hat{p}}{IC+\hat{p}} \tag{2.8}$$

formára. Vegyük észre, hogy intervallumszerű érkezés esetén teljesül a

$$H_1(y) \leqq H(y) \tag{2.9}$$

egyenlőtlenség minden y-ra. Ez következik a (1.4) alatti $x(t)$-kre vonatkozó $x_1(t) \geqq \geqq x(t)$ egyenlőtlenségből. Ezért (2.7) bal oldalát növeljük, ha $H_1(S)$ és $H(S-x)$ helyett mindenütt $H(S)$-et írunk:

$$\frac{H_1(S)+\int\limits_0^Q H(S-x)m(x)\,dx}{1+M(Q)} \leqq \frac{H(S)+\int\limits_0^Q H(S)m(x)\,dx}{1+M(Q)} = H(S), \tag{2.10}$$

és azt kapjuk, hogy

$$H(S^*(Q)) \geqq \frac{\hat{p}}{IC+\hat{p}}. \tag{2.11}$$

A

$$H(S^0) = \frac{\hat{p}}{IC+\hat{p}} \tag{2.12}$$

egyenlet felhasználásával (l. [4] és [5]) a következő becslést kapjuk:

$$S^*(Q) \geqq S^0 \tag{2.13}$$

amiből (2.2)-nek az egyik fele következik.

Számítsuk most ki $K(S, Q)$ Q szerinti parciális deriváltját. A költségfüggvény (1.14) alakjából indulunk ki és a következőt kapjuk:

$$\frac{\partial K}{\partial Q} = \frac{M(Q)}{(1+M(Q))^2}\Big(-A-l_1(S)+l(S-Q)-(IC+\hat{p})\int\limits_0^Q \times \\ \times H(S-x)M(x)\,dx+\hat{p}\int\limits_0^Q M(x)\,dx\Big). \tag{2.14}$$

Adott S mellett az optimális Q értéket, amelyet $Q^*(S)$-sel jelölünk a

$$\frac{\partial K(S, Q)}{\partial Q} = 0 \tag{2.15}$$

egyenletből határozzuk meg. Ez az egyenlet a következő ekvivalens alakban írható:

$$R_2(S, Q) = -A-l_1(S)+l(S-Q)-(IC+\hat{p})\int\limits_0^Q \times \\ \times H(S-x)M(x)\,dx+\hat{p}\int\limits_0^Q M(x)\,dx = 0. \tag{2.16}$$

Megmutatjuk, hogy rögzített S mellett a $K(S, Q)$ függvénynek Q-ban legfeljebb egy lokális minimuma van. Számítsuk ki az R_2 függvény Q szerinti deriváltját:

$$\frac{\partial R_2}{\partial Q} = \big(1+M(Q)\big)\big(\hat{p}-(IC+\hat{p})H(S-Q)\big). \tag{2.17}$$

A jobboldal negatív vagy pozitív aszerint, hogy $S-Q$ kisebb-e vagy nagyobb-e S^0-nál. Tehát az $R_2(S, Q)$ függvény lokális minimumát a $Q=S-S^0$ helyen éri el. A $Q=0$ helyen a függvényérték pozitív is lehet. A függvénygörbe a Q tengelyt ekkor is csak legfeljebb két pontban metszheti. Állítjuk, hogy az első metszéspont a költségfüggvény Q szerinti lokális maximumát, a második metszéspont a költségfüggvény Q szerinti lokális minimumát adja. Hogy ezt belássuk, számítsuk ki $K(S, Q)$ Q szerinti első és második parciális deriváltját:

$$\frac{\partial K(S,Q)}{\partial Q} = \frac{m(Q)}{(1+M(Q))^2} R_2(S, Q) \tag{2.18}$$

és

$$\frac{\partial K(S,Q)}{\partial Q^2} = \frac{m(Q)}{(1+M(Q))^2}\cdot\frac{\partial R_2(S,Q)}{\partial Q} + \frac{\partial}{\partial Q}\frac{m(Q)}{(1+M(Q))^2} R_2(S, Q). \tag{2.19}$$

Mivel a metszéspontban $R_2(S, Q)=0$, ezért (2.19)-ben a második tag zérus. Az első tag negatív az első metszéspontban, pozitív a második metszéspontban. Ezzel a költségfüggvényre vonatkozó állításunkat bebizonyítottuk.

Akár fellép az első metszéspont, akár nem, világos, hogy $K(S, Q)$-nak a Q szerinti minimuma egyetlen $Q^*(S)$ helyen valósul meg, és azt is beláttuk, hogy teljesül a

$$Q^*(S) \geqq S-S^0 \tag{2.20}$$

egyenlőtlenség. Ez az

$$S^0 \geqq S-Q^*(S) \tag{2.21}$$

formába is írható, amiből következik a (2.2) becslés első fele.

A dolgozat eredményei érvényesek az intervallumszerű érkezési folyamat különböző, pl. szezonhatásokat figyelembe vevő módosításaira is. Érdekes volna a modellbe beépíteni a rendelések és szállítások közötti eltéréseket is (l. [3]).

IRODALOM

[1] ARROW, K. J., HARRIS, T. and MARSCHAK, J., "Optimal Intventory Policy" *Econometrica* **19** (1961) 250—272.

[2] GERENCSÉR, L., „Az (s, S) készletgazdálkodási modell", *MTA SZTAKI Közleményei* (megjelenés előtt).

[3] GERENCSÉR, L., "Reduction of the on hand inventory on given level of reliability", in: *Inventory Control and Water Storage*, Ed. PRÉKOPA, A., (János Bolyai Mathematical Society and North-Holland Publishing Company, Amsterdam—London, 1973) 83—91.

[4] HADLEY, G. and WITHIN, T. M., *Analysis of invetory systems* (Prentice Hall, 1963).

[5] PRÉKOPA, A., „Az S szintre felrendelés elnevezésű sztochasztikus készletgazdálkodási modell és annak kiterjesztése intervallumszerű érkezés esetére", *Számológép* (*NIM*) **1** (1971) 34—45.

[6] PRÉKOPA, A., "Reliability equation for an inventory problem and its asymptotic solutions", in: *Applications of Mathematics to Economics* Ed. PRÉKOPA, A. (Akadémiai Kiadó, Budapest, 1965) 317—327.

[7] PRÉKOPA, A., "Generalization of the Theorems of Smirnov With Application to a Reliability Type Inventory Problem", *Math. Operationsforschung und Statistik* **5** (1973) 283—297.
[8] WAGNER, H. M. and VEINOTT, A. F., "Computing Optimal (s, S) Inventory Politicies", *Management Science* **11** (1965) 525—552.
[9] ZIERMANN, M., "Anwendung des Smirnovschen Sätzer auf einen Lagerhaltungsproblem", *Publications of the Mathematical Institute of the Hungarian Academy of Sciences* **8** Series B (1964) 509—518.

(Beérkezett: 1974. június 10.)
(Újra beérkezett: 1975. július 11.)

GERENCSÉR LÁSZLÓ ÉS PRÉKOPA ANDRÁS
MTA SZÁMÍTÁSTECHNIKAI ÉS AUTOMATIZÁLÁSI KUTATÓ INTÉZET
1502 BUDAPEST XI., KENDE U. 13—17.

THE EXTENSION OF THE (s, S) INVENTORY MODEL FOR THE CASE OF INTERVAL-TYPE ARRIVAL PROCESS

L. GERENCSÉR and A. PRÉKOPA

The paper formulates an inventory model, where the ordering rule is (s, S) type, while the shipping is done according to an interval-type stochastic process. This arrival-process is described in [5]. Formulas are obtained for the cost function in the first part of the paper. In the second part of the paper we give estimations for the optimal parameters. These estimations are extensions of the results of WAGNER and VEINOTT.

Alkalmazott Matematikai Lapok **1** *(1975) 189—195*

EMPIRIKUS ELOSZLÁSFÜGGVÉNY-SOROZATOK MAXIMÁLIS ELTÉRÉSÉNEK VIZSGÁLATA; ALKALMAZÁS EGY TÖBB PERIÓDUSÚ MEGBÍZHATÓSÁGI KÉSZLETMODELLRE

PINTÉR JÁNOS

Budapest

A dolgozatban először empirikus eloszlásfüggvények eltéréseinek sorozatát vizsgáljuk. Ezzel kapcsolatban — alkalmas feltételek mellett — meghatározzuk a maximális eltérés aszimptotikus eloszlását. Ezután ezt az eredményt alkalmazzuk egy megbízhatósági típusú készletmodell több egymást követő perióduson keresztül történő vizsgálatára.

1. Empirikus eloszlásfüggvény-párok maximális eltérésének vizsgálata

Tegyük fel, hogy a folytonos $G(x)$, illetve $F(x)$ eloszlásfüggvénnyel rendelkező ξ, illetve η független valószínűségi változókra vonatkozóan S számú megfigyelés sorozatot végeztünk. Minden $1 \leqq s \leqq S$ esetén az s-edik megfigyelés sorozat eredményeképpen a ξ és η valószínűségi változókra vonatkozóan azonos D számú empirikus eloszlásfüggvény-párt kaptunk. Egy ilyen párokból álló D elemű sorozaton belül jelölje a d-edik párba tartozó m, illetve n elemű mintán alapuló empirikus eloszlásfüggvényeket $G_m^d(x)$ és $F_n^d(x)$ $(d=1, \ldots, D)$. Tegyük fel, hogy nem ismeretesek azok a p_{mn} valószínűségek, amelyek a fenti empirikus eloszlásfüggvény-pár létrejöttének valószínűségét fejezik ki $\left(p_{mn} \geqq 0, \sum_{m,n} p_{mn}=1\right.$; az összegzés tetszőleges véges számú valószínűségre vonatkozhat$\left.\right)$.

A következő problémákkal foglalkozunk:

1. Megvizsgáljuk az $F(x) \equiv G(x)$ hipotézist.
2. Vezessük be a

$$\zeta_d = \sup_{-\infty < x < +\infty} \left(G_M^d(x) - F_N^d(x)\right), \quad d = 1, \ldots, D \tag{1.1}$$

jelölést, ahol most M, N valószínűségi változó, $P(M=m, N=n)=p_{mn}$; továbbá a

$$\vartheta_D = \max_{d=1, \ldots, D} \zeta_d \tag{1.2}$$

jelölést. Megvizsgáljuk ϑ_D eloszlását.

Az alábbiakban megmutatjuk, hogy alkalmas nagyságú m, n, D és S értékek esetén ezen vizsgálatok lehetségesek. Ennek érdekében írjuk fel először ζ_d eloszlásfüggvényét (a ζ_d-k feltételeink szerint azonos eloszlásúak $d=1, \ldots, D$ esetén). A teljes valószínűség tétele szerint

$$P(\zeta_d < z) = \sum_{m,n} P\Big(\sup_{-\infty<x<+\infty} (G_M^d(x) - F_N^d(x) < z | M = m, N = n\Big) p_{mn} =$$

$$(1.3) \qquad = \sum_{m,n} p_{mn} P\Big(\sup_{-\infty<x<+\infty} (G_m^d(x) - F_n^d(x)) < z\Big) \approx$$

$$\approx \begin{cases} 1 - \sum_{m,n} p_{mn} \exp\left(-2z^2 \dfrac{mn}{m+n}\right), & z > 0 \\ 0, & z \leqq 0. \end{cases}$$

A fenti aszimptotikus egyenlőség SZMIRNOVnak az empirikus eloszlásfüggvények eltérésére vonatkozó tétele (lásd [6]) alapján írható, ha az $F(x) \equiv G(x)$ hipotézis fennáll. Megjegyezzük, hogy (1.3) $n, m \geqq 30$ esetén már elég jó közelítéssel teljesül. A továbbiakban erre támaszkodva meghatározzuk ϑ_D aszimptotikus eloszlását. Erre vonatkozóan érvényes az alábbi

1.1. TÉTEL. Alkalmas A_D és B_D állandókkal teljesül a

$$(1.4) \qquad \lim_{D\to\infty} P(A_D \vartheta_D + B_D < y) = e^{-e^{-y}}, \quad -\infty < y < +\infty$$

reláció.

Bizonyítás. GNYEGYENKO egy dolgozatában ([1]) bizonyított egy tételt, amely az általunk használt jelölésekkel így szól:

Annak szükséges és elégséges feltétele, hogy a közös $K(z)$ eloszlásfüggvénnyel rendelkező ζ_d valószínűségi változók ϑ_D maximumának eloszlására (1.4) teljesüljön az, hogy létezzen olyan $A(z)$ folytonos függvény, melyre

$$(1.5) \qquad \lim_{z\to y_0-0} A(z) = 0,$$

továbbá minden y-ra teljesüljön

$$(1.6) \qquad \lim_{z\to y_0-0} \frac{1-K(z(1+A(z)y))}{1-K(z)} = e^{-y},$$

ahol $y_0 \leqq +\infty$ a $K(y_0)=1$ és a $K(y)<1$, $y<y_0$ feltételek által meghatározott szám.

Esetünkben

$$K(z) = 1 - \sum_{m,n} p_{mn} \exp\left(-2z^2 \frac{mn}{m+n}\right) \quad (z > 0),$$

így a bizonyítandó (1.6) reláció az alábbi alakot ölti:

$$(1.7) \qquad \lim_{z\to+\infty} \frac{\sum_{m,n} p_{mn} \exp\left(-2z^2 \dfrac{mn}{m+n} (1+A(z)y)^2\right)}{\sum_{m,n} p_{mn} \exp\left(-2z^2 \dfrac{mn}{m+n}\right)} = e^{-y}.$$

Vezessük be a $k_{mn} = 2\dfrac{mn}{m+n}$ jelölést. Ezután e^{-y}-t a baloldalon kiemelve és a négyzetre emelést az exponenciális tényezők kitevőjében végrehajtva a

$$(1.8)\qquad \lim_{z\to+\infty} \frac{\sum_{m,n} p_{mn} \exp(-k_{mn}z^2) \exp\left((-2k_{mn}z^2 A(z)+1)y\right) \exp\left(-k_{mn}z^2 A^2(z) y^2\right)}{\sum_{m,n} p_{mn} \exp(-k_{mn}z^2)} = 1$$

igazolandó relációt nyerjük.

Ha most feltesszük, hogy teljesül

$$(1.9)\qquad \lim_{z\to+\infty} z^2 A^2(z) = 0,$$

akkor könnyen látható, hogy elég igazolni

$$(1.10)\qquad \lim_{z\to+\infty} \frac{\sum_{m,n} p_{mn} \exp(-k_{mn}z^2) \exp\left((-2k_{mn}z^2 A(z)+1)y\right)}{\sum_{m,n} p_{mn} \exp(-k_{mn}z^2)} = 1$$

fennállását.

Vezessük be az $u_{mn} = \min\limits_{m,n} k_{mn}$ jelölést. Az (1.10) bal oldalán álló törtet $\exp(u_{mn}z^2)$-tel bővítve, a kapott

$$(1.11)\qquad \frac{\sum_{m,n} p_{mn} \exp\left(-(k_{mn}-u_{mn})z^2\right) \exp\left((-2k_{mn}z^2 A(z)+1)y\right)}{\sum_{m,n} p_{mn} \exp\left(-(k_{mn}-u_{mn})z^2\right)}$$

kifejezésből látható, hogy a kívánt limeszreláció teljesültéhez elegendő, ha (1.9) mellett még a

$$(1.12)\qquad \lim_{z\to+\infty} \exp\left((-2u_{mn}z^2 A(z)+1)y\right) = 1$$

reláció fennállását is megköveteljük. A fenti két követelmény egyidejűleg kielégíthető pl. az

$$(1.13)\qquad A(z) = \frac{1}{2u_{mn}z^2}$$

függvénnyel, amely nyilvánvalóan a tétel feltételei szerinti, a bennünket érdeklő $z>0$ tartományon. Ezzel állításunkat igazoltuk.

1.1. *Megjegyzés.* Az (1.4) reláció már $D=2$ esetén is nagy pontossággal fennáll (lásd [3], 219—220. old.) az $e^{-e^{-y}} \geqq 0{,}5$-nek megfelelő y értékek esetén; $D=10$-re a közelítés tetszőleges 0 és 1 közé eső valószínűségre teljesen kielégítő, (1—5% maximális eltéréssel).

1.2. *Megjegyzés.* A tételben szereplő A_D és B_D konstansok GNYEGYENKO idézett dolgozatának egy másik tétele alapján a

$$(1.14)\qquad \sum_{m,n} p_{mn} \exp(-k_{mn}B_D^2) = \frac{1}{D},$$

valamint a

$$(1.15)\qquad \sum_{m,n} p_{mn} \exp\left(-k_{mn}(A_D+B_D)^2\right) = \frac{1}{De}$$

formulák alapján volnának előállíthattók. Ezeket a p_{mn} valószínűségek ismeretének hiányában nem tudjuk alkalmazni. Ennek ellenére a fenti konstansok a ϑ_D-re vonatkozó S elemű minta alapján becsülhetők. Az alábbiakban egy grafikus és egy numerikus becslési módszert ismertetünk (a megfelelő általános módszerek leírását illetően lásd [2], 180—183. old., valamint [3], 28—36. old.).

a) *Grafikus becslési módszer*

A bizonyított tétel alapján fennáll (lásd (1.4)-et)

$$(1.16)\quad P(\vartheta_D < z) \approx e^{-e^{-(A_D z+B_D)}} = e^{-e^{-y}}, \quad -\infty < z < +\infty, (-\infty < y < +\infty),$$

amiből következik, hogy $-\ln\ln\frac{1}{P(\vartheta_D<z)} \approx A_D z + B_D$ z-nek aszimptotikusan lineáris függvénye. Ennek megfelelően elkészítve egy olyan valószínűségi papírt, melynek abszcisszatengelyén a z értéket, ordinátatengelyén pedig a $-\ln\ln\frac{1}{P(\vartheta_D<z)}$ értéket tüntetjük fel, ebben a koordinátarendszerben az $F(x) \equiv G(x)$ hipotézis fennállása esetén ϑ_D transzformált eloszlásfüggvénye egyenes lesz. Ezek után tekintsük a ϑ_D-re vonatkozó, a megfigyelés sorozatból nyert S elemű mintát. Ha az ebből készített rendezett minta s-edik elemét z_s jelöli, akkor a fenti koordinátarendszerben a $\left(z_s, -\ln\ln\frac{S+1}{s}\right)$ pontpárok közelítőleg egyenest határoznak meg. Ennek a közelítésnek a „jóságából" következtethetünk az $F(x) \equiv G(x)$ hipotézis fennállására. A grafikusan nyerhető közelítő egyenes iránytangense A_D, az ordinátatengellyel való metszéspontja pedig B_D becslését szolgáltatja.

b) *Numerikus becslési módszer*

Vezessük be az

$$y_s = -\ln\ln\frac{S+1}{s}, \quad s = 1, \dots, S$$

jelölést, $\left(\text{azaz } e^{-e^{-y_s}} = \frac{s}{S+1}\right)$. Képezzük ezekből az

$$(1.17)\qquad \bar{y}_S = \frac{1}{S}\sum_{s=1}^{S} y_s, \quad \overline{y_S^2} = \frac{1}{S}\sum_{s=1}^{S} y_s^2, \quad \sigma_S^2 = \overline{y_S^2} - \bar{y}_S^2$$

mennyiségeket. Képezzük ezután a z_s mintaelemekből a

$$(1.18)\qquad \overline{z_S} = \frac{1}{S}\sum_{s=1}^{S} z_s, \quad \overline{z_S^2} = \frac{1}{S}\sum_{s=1}^{S} z_s^2 \quad \tau_S^2 = \frac{S}{S-1}(\overline{z_S^2} - \bar{z}_S^2)$$

mennyiségeket.

Ezekkel a keresett A_D, B_D konstansokra az

(1.19) $$A_D = \frac{\sigma_S}{\tau_S}, \quad B_D = -\frac{\sigma_S}{\tau_S}\overline{z_S} + \overline{y_S}$$

becslések adhatók.

2. Alkalmazás egy több periódusú megbízhatósági típusú készletgazdálkodási probléma vizsgálatára

Tekintsük az alábbi készletgazdálkodási problémát, amelynek vizsgálatával a [4] és [5] dolgozat foglalkozott:

A B vállalat a $[0, T]$ időperiódus folyamán egy bizonyos anyagból rögzített mennyiséget szállít az A vállalat számára, amely ezt az anyagot a periódus folyamán felhasználja.

Jelölje ξ_t a t időpontig az A vállalat által felhasznált, η_t pedig a B vállalat által leszállított anyag mennyiségét. A $t=0$ időpontban az A vállalat bizonyos Z kezdőkészlettel rendelkezik. Határozzuk meg azt a minimális Z-t, amelyre a

(2.1) $$P(\inf_{0 \leqq t \leqq T} (Z+\eta_t-\xi_t) > 0) \geqq 1-\varepsilon$$

feltétel teljesül (itt ε 0-hoz közeli, rögzített pozitív szám). Ha a (2.1) feltétel bal oldalán szereplő valószínűség folytonos és monoton növekvő függvénye Z-nek, akkor az optimális kezdőkészletre a

(2.2) $$P(\inf_{0 \leqq t \leqq T} (Z+\eta_t-\xi_t) > 0) = 1-\varepsilon$$

egyenlet adódik.

a) Tegyük fel először, hogy az A vállalat az anyagot állandó c intenzitással használja fel, azaz $\xi_t = ct$, $0 \leqq t \leqq T$. Másrészt az η_t szállítási folyamat legyen a következő: a szállítások a $t_1^*, \ldots, t_n^*$ időpontokban történjenek, amely időpontok a $[0, T]$-n vett egyenletes eloszlású $t_1, \ldots, t_n$ pontokból képezett rendezett minta elemei. A szállítmány nagysága a t_i^* időpontban $\alpha+\delta_i$ legyen, ahol $\alpha \geqq 0$ a szállítmány minimális lehetséges nagysága, δ_i pedig a $cT-n\alpha \geqq 0$ hosszúságú intervallum $n-1$ számú (itt egyenletes eloszlású) ponttal n részre történő felosztásában az i-edik szakasz hossza. Az egységek alkalmas megválasztásával $c=T=1$ elérhető. Vezessük be a $\lambda = n\alpha$ és az $F_n(t, \lambda) = \eta_t$ jelöléseket. Ekkor a (2.2) egyenlet a

(2.3) $$P(\sup_{0 \leqq t \leqq 1} (t - F_n(t, \lambda)) < Z) = 1-\varepsilon$$

alakban írható fel.

b) Ha az A vállalat az anyagot a fent leírt szállítási folyamathoz hasonló módon használja fel, akkor bevezetve a $G_m(t, \mu) = \xi_t$ jelölést, (ahol m és μ szerepe a korábbi n-éhez és λ-éhoz hasonló), a (2.3) egyenlet megfelelője

(2.4) $$P(\sup_{0 \leqq t \leqq 1} (G_m(t, \mu) - F_n(t, \lambda)) < Z) = 1-\varepsilon$$

alakú.

PRÉKOPA ANDRÁS [4] dolgozatában bizonyította az alábbi tételeket:

2.1. TÉTEL. Érvényes a

$$(2.5)\qquad \lim_{n\to\infty} P\left(\sup_{0\leq t\leq 1}\left(t-F_n(t,\lambda)\right)<Z\right)=\begin{cases}1-\exp\left(-\dfrac{2nZ^2}{1+(1-\lambda)^2}\right), & Z>0\\ 0 & , Z\leqq 0\end{cases}$$

reláció.

2.2. TÉTEL. Érvényes a

$$(2.6)\qquad \lim_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}} P\left(\sup_{0\leq t\leq 1}\left(G_m(t,\mu)-F_n(t,\lambda)\right)<Z\right)=$$

$$=\begin{cases}1-\exp\left(-\dfrac{2mnZ^2}{m(1+(1-\lambda)^2)+n(1+(1-\mu)^2)}\right), & Z>0\\ 0 & , Z\leqq 0\end{cases}$$

reláció.

Az idézett tételek alapján a keresett Z kezdőkészletre mindkét esetben aszimptotikus becslés adható.

Tekintsük most a fenti szállítási és felhasználási folyamatot először a $\xi_t=G_m(t,\mu)$ típusú felhasználással. Ha megköveteljük valamely $1-\varepsilon_D$ valószínűséggel, hogy az ellátás D számú egymást követő periódusban folyamatos legyen, akkor ez a feltétel a

$$(2.7)\qquad P\left(\max_{d=1,\ldots,D}\left(\sup_{0\leq t\leq 1}\left(G_m(t,\mu)-F_n(t,\lambda)\right)\right)<Z\right)=$$

$$=P\left(\vartheta_D(\lambda,\mu)<Z\right)=1-\varepsilon_D$$

alakban írható fel.

Ha most az m és n számokat nem tekintjük rögzítettnek, hanem ezek valamely M és N valószínűségi változó lehetséges számértékei, akkor észrevehetjük, hogy $\vartheta_D(\lambda,\mu)$ teljesen hasonló szerepet tölt be itt, mint az általunk vizsgált ϑ_D (lásd az (1.1), (1.2) formulákat). A $\vartheta_D(\lambda,\mu)$ határeloszlására analóg tétel igaz, mint ϑ_D esetén, és ha rendelkezünk S számú D hosszúságú periódusra vonatkozó megfigyelés sorozattal, akkor ezek alapján az A_D-nek és B_D-nek megfelelő $A_D(\lambda,\mu)$ és $B_D(\lambda,\mu)$ értékek becsülhetők. Ezek alapján a D hosszúságú periódushoz tartozó optimális kezdőkészlet aszimptotikus értéke

$$(2.8)\qquad Z=Z_D\approx\frac{-\ln\ln\dfrac{1}{1-\varepsilon_D}-B_D(\lambda,\mu)}{A_D(\lambda,\mu)}.$$

Megjegyezzük, hogy teljesen hasonló módon nyerhető a $\xi_t=ct$ típusú felhasználási folyamatra vonatkozó kezdőkészlet-probléma optimális megoldása is.

IRODALOM

[1] GNEDENKO, B. V., „Sur la distribution limite du terme maximum d'une série aléatoire", *Annals of Mathematics*, **44** (1943) 423—453.

[2] GNYEGYENKO, B. V., BELJAJEV, J. K. és SZOLOVJEV, A. D.: *A megbízhatóságelmélet matematikai módszerei.* (Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1970.)

[3] GUMBEL, E. J., *Statistics of Extremes.* (Columbia University Press, New York, 1958.)

4] PRÉKOPA, A., "Generalizations of the Theorems of Smirnov with Application to a Reliability Type Inventory Problem", *Math. Operationforsch. u. Statist.*, **4** (1973) 283—297.
[5] PRÉKOPA, A., "Reliability equation for an inventory problem and its asymptotic solutions", in: *Colloquium on Appl. of Math. to Economics.* (Publ. House, Hungarian Acad. Sci., 1965) 317—327.
[6] *Смирнов, Н. В.*, «Приближение законов распределения случайных величин по эмпирическим данным», *Успехи Мат. Наук.* **10** (1944) 179—206.

(Beérkezett: 1974. október 11.)

PINTÉR JÁNOS
EGYETEMI SZÁMÍTÓKÖZPONT
1093 BUDAPEST IX., DIMITROV TÉR 8.

INVESTIGATIONS ON THE MAXIMAL DISTANCE OF EMPIRICAL DISTRIBUTION FUNCTION SERIES

J. PINTÉR

In his paper [5] Prékopa, regarding an inventory model of reliability type on the $[0, T]$ time-period, presented the asymptotic value of the optimal initial stock.

Here we consider the series of D elements, which are the supreme differences of two empirical distribution functions (owing to the same theoretical distribution function), and we give the limit distribution of the maximum value of these differences. Using this result, in the validity of more general conditions, than in [5], we can give asymptotically the optimal initial stock for D subsequent $[0, T]$ intervals.

Alkalmazott Matematikai Lapok **1** *(1975) 197—254*

AUTONÓM RENDSZEREK PERIODIKUS PERTURBÁCIÓIRÓL

FARKAS MIKLÓS*
Budapest

TARTALOM

I. FEJEZET

PERIODIKUS MEGOLDÁSOKKAL KAPCSOLATOS PROBLÉMÁK ÉS MÓDSZEREK

1. Bevezetés

A természeti, ill. a műszaki (a csillagászati, a mechanikai, az elektromágnességgel kapcsolatos, a gépszerkezettani, az aerodinamikai, a biológiai, a fiziológiai, a szabályozáselméleti stb.) jelenségek igen jelentős hányada „periodikus jelenség". Ezen azt értjük, hogy igen nagy számú, igen fontos jelenség lefolyása, ill. szerkezet, „rendszer" működése jó közelítésben periodikus függvény segítségével írható le. (Az igazság az, hogy az esetek nagy részében a jelenség még pontosabban modellez-

* A dolgozat azonos a szerző doktori értekezésével.

hető, „majdnem periodikus függvénnyel", ezzel a kérdéssel azonban itt nem foglalkozunk, lásd pl. [96, 109, 111].) Elegendő példaként csak a legközismertebb jelenségekre, a bolygók mozgására, a matematikai inga lengésére, az elektromágneses hullámok terjedésére, a rezgőkörökre, járművek vagy mozgó gépalkatrészek rezgéseire, repülőgépek szárnyának rezgéseire, a szív működésére, az emberek és állatok életfunkcióinak napi ciklusára (pl. alvás) utalnunk.

A szóban forgó jelenségek lefolyását meghatározó törvények az esetek nagy részében, matematikailag, közönséges differenciálegyenlet rendszerrel modellezhetők. Ezért vizsgálták a kutatók már igen korán, rendkívül nagy érdeklődéssel közönséges differenciálegyenlet rendszerek periodikus megoldásainak egzisztenciakérdését. Miután gyakorlatilag (kisérletileg) csak olyan periodikus megoldás észlelhető, hasznosítható, vizsgálható, mely (valamilyen értelemben) stabilis, a periodikus megoldások létezésének és egyértelműségének eldöntése mellett hasonlóan fontos kérdés azok stabilitásának vizsgálata. A problémakör első átfogó elmélete kétdimenziós, autonóm rendszerek esetére H. POINCARÉ nevéhez fűződik (lásd [76]). Az elmúlt 90 évben a problémakör vizsgálatának intenzitása nem csökkent. Míg POINCARÉ vizsgálatait elsősorban a csillagászati alkalmazások motiválták, később a kutatásoknak újabb és újabb lökést ad a rádiózás (és általában az átviteltechnika) kifejlődése (lásd [7]), a repülés fejlődése (lásd [50]), a rakétatechnika, az űrkutatás és ezzel kapcsolatban az automatikus szabályozás eredményei és követelményei (lásd [87], [118]).

Miután a lineáris rendszerek periodikus megoldásainak létezésével kapcsolatban viszonylag korán sikerült a legáltalánosabb kérdéseket tisztázni (lásd G. FLOQUET, ill. A. M. LJAPUNOV tételét, [84] 452. old., ill. [122]), a figyelem a nemlineáris rendszerek felé fordult. A „nemlineáris rezgések elméletének" óriási irodalma van. Az Irodalomjegyzék a [17, 42, 46, 52, 53, 68, 71, 82, 83, 84, 87, 90, 93, 109, 110, 118, 121, 124, 127, 132] monográfiák felsorolásával távolról sem meríti ki a témával foglalkozó könyvek jegyzékét, a dolgozatokról nem beszélve. A periodikus megoldás egzisztenciáját kimutató módszerek két nagy csoportba oszthatók.

Az első csoportot az egyszerűség kedvéért a „fixpont módszerek" csoportjának fogjuk nevezni. Ezek a módszerek valamilyen fixpont tételt (pl. a Brouwer-féle fixpont tételt, lásd pl. [84] 364. old.) és topológiai megfontolásokat alkalmaznak a periodikus megoldás létezésének bizonyítására. Lényegében ide sorolható (mivel ezúton is bizonyítható) a nevezetes Poincaré—Bendixson-féle tétel (lásd [76] és [9] 163.—167. old.). A fixpont módszerek különösen jól alkalmazhatók autonóm rendszerek esetében (lásd [3, 14, 61, 74, 116, 117, 130]), mivel autonóm rendszer a fázistér önmagába való leképezéseinek egy egyparaméteres, folytonos csoportját határozza meg. Alkalmazható azonban a fixpont módszer nem autonóm, periodikus rendszer esetén is (lásd [6, 58]), bár ilyenkor a módszer alkalmazása lényegesen nagyobb nehézségekbe ütközik. A fixpont módszerek közé sorolható bizonyos értelemben L. CESARI módszere, mely azonban már a funkcionálanalízis eszközeit is alkalmazza. Ez utóbbi módszer ugyanis a periodikus megoldás létezését egy szukcesszív approximációs eljárás konvergenciájára vezeti vissza és a konvergenciát a bizonyos feltételeknek eleget tevő periodikus függvények Banach-terében kontrakciós elven alapuló fixponttétellel igazolja (lásd [8, 41, 70] és [9] 123—136. old.).

A fixpont módszerek igen mélyen fekvő apparátus alkalmazásával ragyogó eredményeket hoztak. Ugyanakkor az esetek jelentős részében nem adnak útmutatást a periodikus megoldás előállítására nézve, nem alkalmasak unicitás bizonyítására (akkor, amikor ez fennáll) és bizonyos speciális esetektől eltekinive a stabilitás eldöntésére sem használhatók. Néhány kivételtől eltekintve, ezeket a módszereket csak kétdimenziós (másodrendű) rendszerek esetében sikerült gyakorlatilag alkalmazni. Ezzel kapcsolatban G. SANSONE és R. CONTI a következőket írja: „If the number n of equations of the system is greater than 2 the difficulties are considerable either because the theorem of POINCARÉ—BENDIXSON is not capable of extensions which are easily applied or because for $n \geqq 4$ geometric intuition is no longer effective." ([84] 428. old.)

A periodikus megoldások létezésének bizonyításában használt módszerek másik nagy csoportját a „perturbációs módszerek" alkotják. A perturbációs módszer lényege az, hogy a vizsgált differenciálegyenlet rendszerhez keresünk egy „tőle kevéssel eltérő", egyszerűbb differenciálegyenlet rendszert úgy, hogy az utóbbi rendszernek legyen periódikus megoldása. Az előbbi rendszert az utóbbi „perturbáltjának" tekintjük. Ha az utóbbi rendszer „kis perturbációkra" megőrzi azt a tulajdonságát, hogy van periodikus megoldása, akkor a feladatot megoldottuk. A módszer hátránya az, hogy feltételezi egy olyan kiindulási („perturbálatlan") rendszer létezését, melynek tulajdonságai ismertek. Előnye viszont, hogy rendszerint lehetőséget nyújt a keresett periodikus megoldás közelítő meghatározására, az unicitás, illetve a stabilitás eldöntésére. A módszer szisztematikus alkalmazása és kidolgozása ugyancsak H. POINCARÉ és A. M. LJAPUNOV érdeme ([77, 78], ill. [122]), fejlődésére és alkalmazására nézve lásd [1, 9, 11, 12, 15, 16, 21, 33, 34, 35, 41, 44, 45, 47, 48, 49, 52, 53, 54, 59, 60, 62, 63, 64, 66, 67, 68, 70, 75, 83, 89, 98, 108, 109, 113, 119, 120, 121, 124, 127, 129,]. A módszerben rejlő összes lehetőség még távolról sincs kiaknázva. A perturbáció-elmélet szoros összefüggésben van (absztrakt dinamikai) rendszerek, „strukturális stabilitásának" kérdésével, mely ma az érdeklődés homlokterében áll (lásd [102, 103, 133, 134]).

A XIX. században központi szerepet játszó csillagászati alkalmazásokban a mozgásokat meghatározó rendszerek a priori adottak voltak. Választási lehetőség csak abban volt, hogy a mozgásokat meghatározó rendszer mely tagjait lehet perturbációként felfogni. Így például a háromtest problémában bizonyos esetekben lehetséges volt a „harmadik test" hatását perturbációként tekinteni és a feladatot „perturbált kéttest problémaként" kezelni. A mai átviteltechnikai, szabályozás- és irányításelméleti stb. alkalmazásokban gyakran szabadon választható, vagy irányítható maga a perturbáció, vagy annak néhány paramétere. Ez és a „strukturális stabilitás" problémájának elvi jelentősége teszi értelmessé és fontossá azt a kérdést, hogy a perturbáció, ill. annak bizonyos paraméterei (például periódusa) milyen megválasztása mellett lesz a perturbált rendszernek periodikus megoldása, milyen feltételek mellett lesz ez egyértelműen meghatározott és stabilis stb. Ezt a kérdést vetjük fel és erre adunk választ ebben a dolgozatban (lásd még a szerző [25, 26, 27] dolgozatait). Olyan esetet tárgyalunk, amelyben a perturbáció elvileg is megváltoztatja a differenciálegyenlet rendszer struktúráját és amely éppen ezért nehezen kezelhető. A kérdésre adott válasz egyben utat nyit a periodikus megoldás létezésének eldöntéséhez abban az esetben is, amikor a perturbáció paraméterei (periódusa) nem választhatók szabadon, nem „irányíthatók".

2. Elemi fogalmak és tételek

A valós számok halmazát R-rel, a rendezett valós szám n-esek halmazát R^n-nel jelöljük. Az $x=(x_1, x_2, ..., x_n)$ rendezett szám n-est n-dimenziós vektornak (bizonyos esetekben R^n „pontjának") nevezzük és általában „oszlopvektornak" tekintjük. Ha egy vektort valamilyen betűvel, pl. y-nal jelölünk, akkor ugyanez a betű egy „alsó" i indexszel ellátva, y_i minden külön magyarázat nélkül e vektor i-edik „koordinátáját" jelöli. R^n-et euklideszi térnek és metrikus térnek tekintjük, ahol az x vektor normája $|x|=(x_1^2+x_2^2+...+x_n^2)^{1/2}$, az x és y vektor (pont) távolsága $\varrho(x, y)=[(x_1-y_1)^2+...+(x_n-y_n)^2]^{1/2}$.

Az n-edrendű (valós elemű) négyzetes mátrixok halmazát M^n-nel jelöljük. Az $A:R\to M^n$ mátrixfüggvényt, melyet közönségesen $A(t)$-vel jelölünk, ill. az $x:R\to R^n$ vektorfüggvényt $(x(t))$ folytonosnak, differenciálhatónak stb. nevezzük, ha elemei, ill. koordinátái folytonosak, differenciálhatók stb. C^r jelenti az r-szer folytonosan differenciálható függvények osztályát. A t változó szerinti differenciálást általában ponttal fogjuk jelölni.

A differenciálható $v:R^m\to R^n$ függvény derivált mátrixát $v'_u=[v'_{u_1}, v'_{u_2}, ..., v'_{u_m}]$-mel jelöljük, ahol $v'_{u_k}=(v'_{1u_k}, ..., v'_{nu_k})$ a k-adik oszlopvektor $(k=1, 2, ..., m)$.

Tekintsük az

$$\dot{y} = Ay \tag{2.1}$$

homogén lineáris differenciálegyenlet-rendszert, ahol y n-dimenziós vektor és az $A:R\to M^n$ mátrixfüggvény folytonos és periodikus $\tau>0$ (nem szükségképpen legkisebb pozitív) periódussal. Ezek szerint minden $t\in R$-re

$$A(t+\tau) = A(t). \tag{2.2}$$

A (2.1) rendszerrel párhuzamosan, vagy ahelyett tekinthetjük az

$$\dot{Y} = AY \tag{2.3}$$

mátrix-differenciálegyenletet, melynek az $Y:R\to M^n$ mátrixfüggvény akkor megoldása, ha differenciálható és

$$\dot{Y}(t) \equiv A(t)Y(t).$$

(2.3) egy reguláris Y megoldását a (2.1) rendszer egy *alapmátrixának* nevezzük. Nyilvánvaló, hogy (2.1) egy alapmátrixának oszlopvektorai a (2.1) rendszer egy alaprendszerét alkotják és fordítva, ha $y^1, y^2, ..., y^n$ (2.1) egy alaprendszere, akkor az $Y=[y^1, y^2, ..., y^n]$ négyzetes mátrix, melynek a k-adik oszlopvektora y^k, $(k=1, 2, ..., n)$, (2.1)-nek alapmátrixa. Ismeretes, hogy ha Y a (2.1) egyenlet egy alapmátrixa, akkor (2.3) bármely megoldásmátrixa előállítható YC alakban, ahol C alkalmasan választott állandó mátrix. Miután, amint ezt könnyű belátni, Y-nal együtt a $t\to Y(t+\tau)$ függvény is megoldás, ezért az Y alapmátrixhoz van egy és csak egy állandó C mátrix, melyre

$$Y(t+\tau) = Y(t)C. \tag{2.4}$$

A C mátrixot, mely (2.4)-ből a

$$C = Y^{-1}(t)Y(t+\tau) \tag{2.5}$$

alakban állítható elő, az Y alapmátrixhoz tartozó *főmátrixnak* nevezzük.

Speciálisan, ha Y az az alapmátrix, melyre $Y(0)=E$, ahol E az n-edrendű egységmátrix, akkor a megfelelő főmátrix (2.5)-ből

$$C = Y(\tau). \tag{2.6}$$

A C főmátrix sajátértékeit a (2.1) rendszer *karakterisztikus multiplikátorainak* nevezzük. Ha a λ sajátérték multiplicitása C karakterisztikus polinomjában k, akkor λ-t *k-szoros karakterisztikus multiplikátornak* nevezzük. Könnyen belátható (lásd [135] 153. old.), hogy a (2.1) különböző alapmátrixaihoz tartozó főmátrixok hasonlók, vagyis a karakterisztikus multiplikátorok valóban (2.1)-re jellemző mennyiségek és nem függenek az alapmátrix kiválasztásától.

Megjegyezzük, hogy ha τ a (2.1) rendszer A együttható mátrixának legkisebb pozitív periódusa és (2.1)-et $m\tau$ periódusú (m pozitív egész) rendszernek tekintjük, akkor főmátrixa C^m, ahol C a τ periódusúnak tekintett rendszer főmátrixa. Innen az adódik, hogy az $m\tau$ periódusúnak tekintett rendszer karakterisztikus multiplikátorai a τ periódusúnak tekintett rendszer karakterisztikus multiplikátorainak m-edik hatványai.

Legyen $\Omega\subset R^n$ nyílt és összefüggő tartomány, az $f: R\times\Omega\to R^n$ függvény koordinátái folytonosak és az $x\in\Omega$ vektor koordinátái szerint folytonosan differenciálhatók, legyen továbbá f a $t\in R$ változóban periodikus $\tau>0$ (nem szükségképpen legkisebb pozitív) periódussal, vagyis legyen minden $t\in R$-re és $x\in\Omega$-ra

$$f(t+\tau, x) = f(t, x).$$

Tekintsük az

$$\dot{x} = f(t, x) \tag{2.7}$$

periodikus differenciálegyenlet-rendszert. Bizonyos értelemben (2.7) speciális esete az

$$\dot{x} = f(x) \tag{2.8}$$

autonóm differenciálegyenlet-rendszer, melynek jobb oldala C^1 osztálybeli, nem függ t-től és amely ezért tetszőleges periódussal t-ben periodikusnak tekinthető. (2.1), (2.7), ill. (2.8) periodikus megoldásaival kapcsolatban néhány fontos, elemi tételt ismertetünk.

2.A. TÉTEL. ([12] 349. old.) *Legyen a $p: R\to\Omega$ függvény a* (2.7) *(speciálisan a* (2.1)*), vagy a* (2.8) *rendszer megoldása; p akkor és csak akkor periodikus τ periódussal, ha van $t_0\in R$, melyre*

$$p(t_0+\tau) = p(t_0). \tag{2.9}$$

Legyen $p: R\to\Omega$ a (2.7), ill. a (2.8) differenciálegyenlet-rendszer megoldása és jelöljük f'_x-szel a (2.7), ill. a (2.8) rendszer jobb oldalán álló függvény x szerinti derivált mátrixát.

Az

$$\dot{y} = f'_x(t, p(t))y, \tag{2.10}$$

ill. az

$$\dot{y} = f'_x(p(t))y, \tag{2.11}$$

lineáris rendszert (2.7), ill. (2.8) *p-re vonatkozó variációs rendszerének* nevezzük.

Ha p periodikus megoldás τ periódussal, akkor, nyilván (2.10), ill. (2.11) periodikus együtthatójú lineáris rendszer, melynek együttható mátrixa az (f-re tett feltevések miatt) periodikus.

2.B. TÉTEL. ([9] 56. old.) *A* (2.1) *periodikus rendszernek akkor és csak akkor van a triviálistól különböző periodikus megoldása τ periódussal, ha az* 1 *szám karakterisztikus multiplikátora.*

Könnyen belátható, hogy ha a (2.8) autonóm rendszernek p megoldása nemállandó és periodikus $\tau > 0$ periódussal, akkor (2.8) p-re vonatkozó (2.11) variációs rendszerének a $\dot{p}$ függvény a triviálistól különböző periodikus megoldása τ periódussal és így érvényes a

2.C. TÉTEL. ([135] 274. old.) *Ha a* (2.8) *autonóm rendszernek p nem állandó periodikus megoldása, akkor a p-re vonatkozó* (2.11) *variációs rendszernek az* 1 *szám karakterisztikus multiplikátora.*

3. Periodikus megoldások izoláltsága

Ebben a pontban azzal a kérdéssel foglalkozunk, hogyan lehet biztosítani egy rendszer periodikus megoldásának „izoláltságát". Szoros értelemben „izoláltnak" kellene neveznünk egy periodikus megoldást, ha annak integrálgörbéjétől tetszőlegesen kis távolságra nincs más periodikus megoldáshoz tartozó integrálgörbe. Mi azonban egy ennél „gyengébb" és ezért jobban kezelhető „izoláltsági fogalmat" fogunk értelmezni, mely a gyakorlatban legtöbbször elegendőnek mutatkozik.

Az izoláltság problémáját már H. POINCARE felvetette ([78] III. 201—214), és az ebben a pontban tárgyalt eredmények egy része lényegében már nála felfedezhető, bár az ő tárgyalása, mai szemmel, meglehetősen intuitív jellegű. Foglalkozott a kérdéssel igen általános szemszögből D. C. LEWIS [63.] Úgy tűnik azonban, hogy a már POINCARÉ által is vizsgált alapeset nincs „tisztába téve" az irodalomban.

3.1. DEFINÍCIÓ. Legyen p a (2.7) rendszer periodikus megoldása τ periódussal és $\Gamma = \{(t, x) \in R \times R^n : x = p(t),\ t \in R\}$ a p megoldás integrálgörbéje; azt mondjuk, hogy a p megoldás *nem izolált,* ha van egy legalább kétdimenziós, $R \times R^n$-be ágyazott C^1 (differenciálható) sokaság, P úgy, hogy P a rendszer τ periódusú periodikus megoldásai integrálgörbéinek egyesítése és $\Gamma \subset P$. Ellenkező esetben a p megoldást *izolált periodikus megoldásnak* nevezzük.

3.1. LEMMA. *Ha p a* (2.7) *rendszer τ periódusú, nem izolált periodikus megoldása és a* 3.1. *definícióban szereplő P differenciálható sokaság dimenziója,* $\dim P = m$ $(m \geq 2)$, *akkor van egy* $q: R \times Q \to R^n$ C^1 *osztálybeli függvény, ahol* $Q \subset R^{m-1}$ *nyílt és összefüggő, úgy hogy*

$$\{(t, x) \in R \times R^n : x = q(t, \alpha),\ t \in R,\ \alpha \in Q\} \subset P,$$

minden $\alpha \in Q$*-ra a* $t \to q(t, \alpha)$ *függvény a* (2.7) *rendszer τ periódusú periodikus megoldása, van* $\alpha^0 \in Q$, *melyre* $p(t) \equiv q(t, \alpha^0)$, *végül az* $\alpha = (\alpha_2, \ldots, \alpha_m)$ *jelöléssel*

$$\text{rang}\, q'_\alpha(0, \alpha^0) = m - 1 \quad (\geq 1). \tag{3.1}$$

Bizonyítás. Jelöljük R_0^n-lal az $R \times R^n$ tér $t=0$ hipersíkját, vagyis legyen

$$R_0^n = \{(0, x) \colon x \in R^n\}.$$

Nyilvánvaló, hogy p a $t=0$ helyen értelmezve van és $(0, p(0)) \in R_0^n$. Legyen P_0 a P sokaságot lefedő koordináta-környezetek közül egy olyan, mely a $(0, p(0))$ pontot tartalmazza, $t = \eta_0(\tilde{\alpha})$, $x = \eta(\tilde{\alpha})$, ahol $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m) \in R^m$, az m-dimenziós P_0 koordináta-környezet egy reguláris előállítása és $\eta_0(\tilde{\alpha}^0) = \eta_0(\alpha_1^0, \alpha_2^0, \ldots, \alpha_m^0) = 0$, $\eta(\tilde{\alpha}^0) = p(0)$. Ekkor

$$\text{(3.2)} \qquad \operatorname{rang} \begin{bmatrix} \eta'_{0\alpha_1}(\tilde{\alpha}^0) & \eta'_{0\alpha_2}(\tilde{\alpha}^0) \ldots & \eta'_{0\alpha_m}(\tilde{\alpha}^0) \\ \eta'_{\alpha_1}(\tilde{\alpha}^0) & \eta'_{\alpha_2}(\tilde{\alpha}^0) \ldots & \eta'_{\alpha_m}(\tilde{\alpha}^0) \end{bmatrix} = m.$$

(Itt az előbbi mátrix $(n+1) \times m$-es típusú, $\eta'_{\alpha_i}(\tilde{\alpha}^0)$ n-dimenziós oszlopvektor, $i = 1, 2, \ldots, m$.) A Γ integrálgörbe $(0, p(0))$ pontbeli érintővektora $(1, \dot{p}(0))$. Miután ez a vektor benne van a P_0 koordinátakörnyezet $(0, p(0))$ pontbeli érintőterében, melyet a (3.2)-ben szereplő mátrix oszlopvektorai feszítenek ki, az e mátrix első sorában álló elemek közül legalább egy zérustól különböző. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy például

$$\text{(3.3)} \qquad \eta'_{0\alpha_1}(\tilde{\alpha}^0) \neq 0.$$

Megmutatjuk, hogy $R_0^n \cap P_0$ tartalmaz egy $(0, p(0))$-at tartalmazó $(m-1)$-dimenziós koordinátakörnyezetet. Miután $\eta_0(\tilde{\alpha}^0) = 0$ és (3.3) fennáll, van egy folytonosan differenciálható $\hat{\alpha}_1 \colon \hat{Q} \to R$ függvény, ahol $\hat{Q} \subset R^{m-1}$ nyílt és összefüggő és $\alpha^0 = (\alpha_2^0, \ldots, \alpha_m^0) \in \hat{Q}$, hogy $\hat{\alpha}_1(\alpha^0) = \alpha_1^0$ és $\eta_0(\hat{\alpha}_1(\alpha), \alpha) \equiv 0$. Nyilvánvaló, hogy

$$\{(0, x) \in R \times R^n \colon x = \eta(\hat{\alpha}_1(\alpha), \alpha), \alpha \in \hat{Q}\} \subset R^n \cap P_0, \quad \text{és} \quad \eta(\hat{\alpha}_1(\alpha^0), \alpha^0) = p(0).$$

Bevezetve az $\hat{\eta}(\alpha) = \eta(\hat{\alpha}_1(\alpha), \alpha)$ jelölést

$$\hat{\eta}'_{\alpha_i}(\alpha^0) = \eta'_{\alpha_1}(\hat{\alpha}_1(\alpha^0), \alpha^0) \frac{\partial \hat{\alpha}_1(\alpha^0)}{\partial \alpha_i} + \eta'_{\alpha_i}(\hat{\alpha}_1(\alpha^0), \alpha^0), \quad (i = 2, \ldots, m),$$

továbbá az $\eta_0(\hat{\alpha}_1(\alpha), \alpha) \equiv 0$ azonosságot differenciálva

$$0 = \eta'_{0\alpha_1}(\hat{\alpha}_1(\alpha^0), \alpha^0) \frac{\partial \hat{\alpha}_1(\alpha^0)}{\partial \alpha_i} + \eta'_{0\alpha_i}(\hat{\alpha}_1(\alpha^0), \alpha^0), \quad (i = 2, \ldots, m).$$

Azt látjuk tehát, hogy az

$$\begin{bmatrix} \eta'_{0\alpha_1}(\tilde{\alpha}^0) & 0 & \ldots & 0 \\ \eta'_{\alpha_1}(\tilde{\alpha}^0) & \hat{\eta}'_{\alpha_2}(\alpha^0) & \ldots & \hat{\eta}'_{\alpha_m}(\alpha^0) \end{bmatrix}$$

mátrix a (3.2) bal oldalán álló mátrixból elemi oszlopműveletek útján keletkezett, vagyis rangja ugyancsak m. Ebből következik, hogy utolsó $(m-1)$ számú oszlopvektora lineárisan független, és miután ezek első koordinátája zérus, az $\hat{\eta}'_{\alpha_2}(\alpha^0), \ldots, \hat{\eta}'_{\alpha_m}(\alpha^0)$ vektorok is lineárisan függetlenek, más szóval

$$\text{(3.4)} \qquad \operatorname{rang} \hat{\eta}'_{\alpha}(\alpha^0) = m-1 \quad (\geqq 1).$$

Ezek szerint $\hat{\eta}'_{\alpha}$ folytonosságát is figyelembe véve, van α^0-nak olyan $Q \subset \hat{Q}$ környezete, melyre a

$$\{(0, \hat{\eta}(\alpha)) \in E \times R^n \colon \alpha \in Q\}$$

halmaz valóban $(m-1)$-dimenziós koordinátakörnyezet.

Jelöljük $\varphi(t, 0, \xi)$-vel a (2.7) rendszer azon megoldását, melyre $\varphi(0, 0, \xi)=\xi$. A $q(t, \alpha)=\varphi(t, 0, \hat{\eta}(\alpha))$, $t\in R$, $\alpha\in Q$ egyenlőséggel értelmezett q függvény kielégíti a lemmában előírt követelményeket. Ugyanis nyilvánvalóan folytonosan differenciálható; mivel minden $\alpha\in Q$-ra $(0, \hat{\eta}(\alpha))\in P_0$, ezért (2.7) τ periódusú periodikus megoldása és $q(t, \alpha)\in P$, $t\in R$. Végül (3.1)-et a következőképpen láthatjuk be. Mint ismeretes (lásd [45] 95. old.) $\varphi_\xi(t, 0, p(0))$ a (2.10) variációs rendszernek azon alapmátrixa, melyre $\varphi'_\xi(0, 0, p(0))=E$, az n-edrendű egységmátrix. Így (3.4) felhasználásával

$$\begin{aligned}\operatorname{rang} q'_\alpha(0, \alpha^0) &= \operatorname{rang}\left(\varphi'_\xi(0, 0, \hat{\eta}(\alpha^0))\hat{\eta}'_\alpha(\alpha^0)\right) = \\ &= \operatorname{rang}\left(\varphi'_\xi(0, 0, p(0))\hat{\eta}'_\alpha(\alpha^0)\right) = \\ &= \operatorname{rang}\hat{\eta}'_\alpha(\alpha^0) = m-1.!\end{aligned}$$

3.2. TÉTEL. *Ha p a (2.7) rendszer τ periódusú periodikus megoldása és a p-re vonatkozó variációs rendszernek az* 1 *szám nem karakterisztikus multiplikátora, akkor p izolált periodikus megoldás.*

Bizonyítás. A bizonyítást indirekt úton végezzük. Tegyük fel, hogy p nem izolált. Ekkor létezik a 3.1. lemma feltételeit kielégítő q függvény, vagyis egyebek között fennáll a

$$\dot{q}(t, \alpha) \equiv f(t, q(t, \alpha))$$

azonosság. DIfferenciáljuk ezt az azonosságot α_i szerinti ($i=2, ..., m$; abból, hogy q rögzített α-ra (2.7) megoldása, következik, hogy $\dot{q}$ is folytonosan differenciálható):

$$\dot{q}'_{\alpha_i}(t, \alpha) \equiv f'_x(t, q(t, \alpha))q'_{\alpha_i}(t, \alpha), \quad (i = 2, \dots, m).$$

Az $\alpha=\alpha^0$ helyettesítéssel

$$\dot{q}'_{\alpha_i}(t, \alpha^0) \equiv f'_x(t, p(t))q'_{\alpha_i}(t, \alpha^0), \quad (i = 2, \dots, m).$$

Ezek szerint a $t\to q'_{\alpha_i}(t, \alpha^0)$ függvény a (2.7) rendszer p-re vonatkozó variációs rendszerének megoldása. Miután q minden rögzített α-ra t-ben ugyanazon τ periódussal periodikus, ezért q'_{α_i} is periodikus t-ben τ periódussal. (3.1) miatt van olyan i index, hogy $q'_{\alpha_i}(t, \alpha^0)$ nem zérus. (2.7) p-re vonatkozó variációs rendszerének tehát van a triviálistól különböző periodikus megoldása és ezért a 2.B. tétel szerint az 1 szám karakterisztikus multiplikátor.!

Az előbbi elmélet, az izoláltságnak a 3.1. definícióban adott fogalma és az ezzel kapcsolatos kritérium nem alkalmazható az autonóm esetben, bár a (2.8) autonóm rendszer nyilván (2.7) speciális esetének tekinthető. Legyen ugyanis p a (2.8) rendszer nem állandó, periodikus megoldása $\tau_0>0$ periódussal (a rendszer nyilván τ_0, vagy bármilyen más valós állandó periódusú periodikus rendszernek tekinthető). Ismeretes, hogy p-vel együtt minden $\alpha_1\in R$-re a $t\to p(t+\alpha_1)$ függvény-is megoldása (2.8)-nak és természetesen az utóbbi megoldás is periodikus τ_0 periódussal. Jelölje γ a p megoldás *pályáját* (pályagörbéjét, trajektóriáját, orbitját), vagyis legyen

$$\gamma = \{x\in R^n \colon x = p(t), t\in R\},$$

γ nyilvánvalóan egyszerű zárt görbe R^n-ben. Könnyen belátható, hogy az $R\times\gamma$ „henger" ($R\times\gamma\subset R\times R^n$), mely a 3.1. definíció nem-izoláltsági feltételében szereplő követelményeket kielégítő, kétdimenziós differenciálható sokaság, a $t \to p(t+\alpha_1)$ megoldások ($\alpha_1 \in R$) integrálgörbéinek egyesítése. Ebből következik, hogy autonóm rendszer nem állandó, periodikus megoldása sohasem lehet izolált a 3.1. definíció értelmében. Egyébként a 2.C. tételből látható, hogy az izoláltságnak a 3.2. tételben adott elégséges kritériuma autonóm rendszer nem állandó, periodikus megoldása esetén nem teljesül.

Az izoláltság problémája ennek ellenére az autonóm esetben is felvethető és lényeges, csakhogy itt nem az integrálgörbe, hanem a pálya izoláltságáról kell beszélni.

3.2. Definíció. Legyen $n \geqq 2$, p a (2.8) autonóm rendszer nem állandó, periodikus megoldása $\tau_0 > 0$ periódussal és $\gamma \subset R^n$ a p megoldás pályája; azt mondjuk, hogy a p megoldás γ *pályája nem izolált,* ha van egy legalább kétdimenziós, R^n-be ágyazott C^1-(differenciálható) sokaság, P és egy C^1 osztálybeli $\tau: P \to R$ függvény úgy, hogy P a (2.8) rendszer (periodikus megoldásaihoz tartozó) zárt pályáinak egyesítése, $\gamma \subset P$, és minden $x \in P$-re $\tau(x)$ az x ponton áthaladó pályának megfelelő megoldás(ok) periódusa, (τ a γ görbe pontjaiban a τ_0 értéket veszi fel). Ellenkező esetben a p megoldást *izolált pályájú periodikus megoldásnak* nevezzük.

3.3. Lemma. *Ha p a* (2.8) *rendszer nem állandó, $\tau_0 > 0$ periódusú periodikus, nem izolált pályájú megoldása és a* 3.2. *definícióban szereplő P differenciálható sokaság dimenziója,* $\dim P = m$ ($n \geqq m \geqq 2$), *akkor van egy $q: R \times Q \to R^n$ C^1 osztálybeli függvény, ahol $Q \subset R^{n-1}$ nyílt és összefüggő, és egy $\tau: Q \to R$ C^1 osztálybeli függvény úgy, hogy*

$$\{x \in R^n:\ x = q(t, \alpha), t \in R, \alpha \in Q\} \subset P,$$

minden $\alpha \in Q$-ra a $t \to q(t, \alpha)$ függvény a (2.8) *rendszer $\tau(\alpha)$ periódusú periodikus megoldása, van $\alpha^0 \in Q$, melyre $p(t) \equiv q(t, \alpha^0)$ és $\tau(\alpha^0) = \tau_0$, végül az $\alpha = (\alpha_2, \ldots, \alpha_m)$ jelöléssel (a t szerinti deriválást itt is ponttal jelölve)*

$$\text{rang}\,[\dot{q}, q'_{\alpha_2}, \ldots, q'_{\alpha_m}]_{t=0, \alpha=\alpha^0} = m. \tag{3.5}$$

Bizonyítás. Abból, hogy p nem állandó megoldás, következik $\dot{p}(t) \neq 0$. Ugyanis, ha valamilyen $t_0 \in R$-re $\dot{p}(t_0) = 0$ lenne, akkor $\dot{p}(t_0) = f(p(t_0))$ miatt a $p(t_0)$ állandó a (2.8) rendszer egyensúlyi helyzete lenne, és akkor az unicitás miatt e ponton át nem haladhatna más pálya. Így $\dot{p}(0) \neq 0$, és tekinthetjük az R^n tér $p(0)$ ponton áthaladó, $\dot{p}(0)$-ra ortogonális hipersíkját, melyet L_0-lal jelölünk. L_0 a p megoldás γ pályájára „transzverzális", $(n-1)$ dimenziós „koordináta-környezet" (lásd [58] 49. old.). Legyen $x = \xi(\beta)$, ahol $\beta = (\beta_2, \ldots, \beta_n) \in R^{n-1}$, az L_0 hipersík egy reguláris előállítása és $\xi(0) = p(0)$. Ekkor $\text{rang}\,\xi'_\beta = n-1$ és

$$\text{rang}\,[\dot{p}(0), \xi'_\beta] = n. \tag{3.6}$$

Jelöljünk P_0-lal a P sokaságot lefedő koordináta-környezetek közül egy olyant, mely a $p(0)$ pontot tartalmazza. Legyen $x = \eta(\tilde{\alpha})$, ahol $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m) \in R^m$, az m-dimenziós P_0 környezet egy reguláris előállítása és $\eta(\tilde{\alpha}^0) = \eta(\alpha_1^0, \ldots, \alpha_m^0) = p(0)$. Ekkor $\text{rang}\,\eta'_{\tilde{\alpha}} = m$, és mivel $p(t) \in P_0$, ha $|t|$ elég kicsi, $\dot{p}(0)$ benne van P_0 $p(0)$-beli érintő terében, vagyis

$$\text{rang}\,[\dot{p}(0), \eta_{\tilde{\alpha}}(\tilde{\alpha}^0)] = m. \tag{3.7}$$

Megmutatjuk, hogy $L_0 \cap P_0$ tartalmaz egy $p(0)$-t tartalmazó $(m-1)$-dimenziós koordinátakörnyezetet. $L_0 \cap P_0$ nem üres, mivel $p(0) \in L_0 \cap P_0$. (3.6)-ból és (3.7)-ből következik, hogy van olyan i index, melyre a $\xi'_{\beta_2}(0), \dots, \xi'_{\beta_n}(0), \eta'_{\alpha i}(\tilde{\alpha}^0)$ vektorok lineárisan függetlenek. Legyen pl. ez az $i=1$; ekkor

$$\text{rang}\,[\xi'_\beta(0), \eta'_{\alpha_1}(\tilde{\alpha}^0)] = n. \tag{3.8}$$

A $\xi(\beta)-\eta(\tilde{\alpha})=0$ egyenletnek $\beta=0$, $\tilde{\alpha}=\tilde{\alpha}^0$ megoldása, az egyenlet bal oldala folytonosan differenciálható, és fennáll (3.8), ezért van az $\alpha^0=(\alpha_2^0, \alpha_3^0, \dots, \alpha_m^0)$ pontnak Q környezete ($Q \subset R^{m-1}$ nyílt és összefüggő) és egy és csak egy $\hat{\beta}: Q \to R^{n-1}$, ill. $\hat{\alpha}_1: Q \to R$ folytonosan differenciálható függvény, hogy $\hat{\beta}(\alpha^0)=0$, $\hat{\alpha}_1(\alpha^0)=\alpha_1^0$ és

$$\xi(\hat{\beta}(\alpha))-\eta(\hat{\alpha}_1(\alpha), \alpha) = 0, \quad \alpha \in Q,$$

vagyis

$$\xi(\hat{\beta}(\alpha_2, \dots, \alpha_m)) \equiv \eta(\hat{\alpha}_1(\alpha_2, \dots, \alpha_m), \alpha_2, \dots, \alpha_m).$$

Bevezetve az $\hat{\eta}(\alpha)=\eta(\hat{\alpha}_1(\alpha), \alpha)$ jelölést, fennáll

$$\hat{\eta}'_{\alpha_i}(\alpha) = \eta'_{\alpha_1}(\hat{\alpha}_1(\alpha), \alpha)\frac{\partial \hat{\alpha}_1(\alpha)}{\partial \alpha_i} + \eta'_{\alpha_i}(\hat{\alpha}_1(\alpha), \alpha), \quad (i = 2, \dots, m). \tag{3.9}$$

A $\text{rang}\,[\eta'_{\alpha_1}, \eta'_{\alpha_2}, \dots, \eta'_{\alpha_m}]=m$ egyenlőségből következik, hogy $\text{rang}\,[\eta'_{\alpha_1}, \hat{\eta}'_{\alpha_2}, \dots, \hat{\eta}'_{\alpha_m}]=m$, mivel (3.9) szerint az utóbbi mátrix az előbbiből elemi oszlopműveletekkel keletkezik. Innen viszont adódik, hogy $\text{rang}\,[\hat{\eta}'_{\alpha_2}, \dots, \hat{\eta}'_{\alpha_m}]=m-1$. Ezek szerint az $\{x \in R^n : x=\hat{\eta}(\alpha), \alpha \in Q\}$ halmaz, mely $L_0 \cap P_0$-nak részhalmaza, valóban $(m-1)$-dimenziós koordinátakörnyezet.

Jelöljük $\varphi(t, \xi)$-vel a (2.8) rendszer azon megoldását, melyre $\varphi(0, \xi)=\xi$. A

$$q(t, \alpha) = \varphi(t, \xi(\hat{\beta}(\alpha))) = \varphi(t, \hat{\eta}(\alpha)), \quad t \in R, \alpha \in Q$$

egyenlőséggel értelmezett q függvény kielégíti a lemmában előírt követelményeket. Ugyanis nyilvánvalóan folytonosan differenciálható; mivel minden $\alpha \in Q$-ra $\hat{\eta}(\alpha) \in \in P_0 \subset P$ és P a (2.8) rendszer invariáns halmaza, ezért $q(t, \alpha) \in P$ is fennáll minden $t \in R$-re; $\hat{\eta}(\alpha) \in P_0$ miatt rögzített α-ra $q(t, \alpha)$ periodikus megoldás; $p(t) \equiv q(t, \alpha^0)$ nyilvánvaló. (3.5)-öt a következőképpen láthatjuk be. Mint ismeretes (lásd [45] 95. old.) $\varphi'_\xi(t, p(0))$ a (2.11) variációs rendszernek azon alapmátrixa, melyre $\varphi'_\xi(0, p(0))=E$, az n-edrendű egységmátrix. Így

$$q'_\alpha(0, \alpha^0) = \varphi'_\xi(0, p(0))\hat{\eta}'_\alpha(\alpha^0) = \hat{\eta}'_\alpha(\alpha^0),$$

az utóbbi mátrix oszlopvektorai lineárisan függetlenek és párhuzamosak az L_0 hipersíkkal; ez utóbbira azonban $\dot{p}(0)=\dot{q}(0, \alpha^0)$ ortogonális, tehát (3.5) fennáll. A 3.2 definícióban szereplő τ és az $\hat{\eta}$ függvényből összetett $\alpha \to \tau(\hat{\eta}(\alpha))$, $\alpha \in Q$, függvény nyilvánvalóan kielégíti a lemmában a $\tau: Q \to R$ függvénnyel szemben támasztott követelményeket.!

3.4. TÉTEL. *Ha p a* (2.8) *rendszer* ($n \geqq 2$), *nem állandó, τ_0 periódusú periodikus megoldása, és a p-re vonatkozó variációs rendszernek az* 1 *szám egyszeres karakterisztikus multiplikátora, akkor a p megoldás pályája izolált.*

Bizonyítás. A bizonyítást indirekt úton végezzük. Tegyük fel, hogy p pályája nem izolált. Ekkor léteznek a 3.3 lemma feltételeit kielégítő q és τ függvények és fennállnak a

$$\dot{q}(t, \alpha) \equiv f(q(t, \alpha))$$

és a

$$q(t+\tau(\alpha), \alpha) \equiv q(t, \alpha)$$

azonosságok. Differenciáljuk az első azonosságot t, ill. α_i szerint, a másodikat α_i szerint ($i=2, 3, \ldots, m$; abból, hogy q rögzített α-ra (2.8) megoldása, következik, hogy $\dot{q}$ is folytonosan differenciálható). A következő azonosságokat kapjuk:

$$\ddot{p}(t, \alpha) \equiv f_x'(q(t, \alpha))\dot{q}(t, \alpha)$$

$$\dot{q}_{\alpha_i}'(t, \alpha) \equiv f_x'(q(t, \alpha))q_{\alpha_i}'(t, \alpha)$$

és

$$\dot{q}(t+\tau(\alpha), \alpha)\tau_{\alpha_i}'(\alpha)+q_{\alpha_i}'(t+\tau(\alpha), \alpha) \equiv q_{\alpha_i}'(t, \alpha), \quad (i = 2, 3, \ldots, m),$$

$\alpha=\alpha^0$-at helyettesítve adódik

$$\ddot{p}(t) \equiv f_x'(p(t))\dot{p}(t)$$

$$\dot{q}_{\alpha_i}'(t, \alpha^0) \equiv f_x'(p(t))q_{\alpha_i}'(t, \alpha^0) \tag{3.10}$$

és

$$\dot{p}(t+\tau_0)\tau_{\alpha_i}'(\alpha^0)+q_{\alpha_i}'(t+\tau_0, \alpha^0) \equiv q_{\alpha_i}'(t, \alpha^0), \quad (i = 2, 3, \ldots, m). \tag{3.11}$$

(3.5)-ből és (3.10)-ből következik, hogy a $\dot{p}$ és a $t \to q_{\alpha_i}'(t, \alpha^0)$ ($i=2, \ldots, m$) függvények a (2.11) variációs rendszer lineárisan független megoldásai. Jelöljük $Y(t)$-vel (2.11) azon alapmátrixát, melyre $Y(0)=E$. Ekkor

$$\dot{p}(t) \equiv Y(t)\dot{p}(0),$$

$$q_{\alpha_i}'(t, \alpha^0) \equiv Y(t)q_{\alpha_i}'(0, \alpha^0) \quad (i = 2, 3, \ldots, m).$$

Innen a $t=\tau_0$ helyettesítéssel és p periodicitásának, ill. a $t=0$ helyen vett (3.11)-nek felhasználásával kapjuk, hogy

$$\dot{p}(\tau_0) = \dot{p}(0) = Y(\tau_0)\dot{p}(0),$$

ill.

$$q_{\alpha_i}'(\tau_0, \alpha^0) = q_{\alpha_i}'(0, \alpha^0) - \tau_{\alpha_i}'(\alpha^0)\ddot{p}(0) = Y(\tau_0)q_{\alpha_i}'(0, \alpha^0), \quad (i = 2, 3, \ldots, m). \tag{3.12}$$

Miután a $\dot{p}(0)$, $q_{\alpha_i}'(0, \alpha^0)$ ($i=2, \ldots, m$) vektorok lineárisan függetlenek, bevezethető R^n-ben olyan bázis, melynek e vektorrendszer első m vektorát alkotja. Ebben a bázisban az $Y(\tau_0)$ főmátrix a következő (hozzá hasonló) „normálalakra" transzformálódik:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -\tau_{\alpha_2}'(\alpha^0) & -\tau_{\alpha_3}'(\alpha^0) & \ldots & -\tau_{\alpha_m}'(\alpha_0) & \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & B \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & \\ & & O & & & D \end{array}\right]$$

ahol O az $(n-m)\times m$-es nullmátrix, B $m\times(n-m)$-es, D pedig $(n-m)$-edrendű négyzetes mátrix. Innen látható, hogy $Y(\tau_0)$-nak az 1 szám legalább m-szeres $(m\geqq 2)$ sajátértéke.!

(3.12)-ből látható, hogy ha bizonyos i értékekre $\tau'_{\alpha_i}(\alpha^0)=0$, akkor az $Y(\tau_0)$ főmátrixnak (a $\dot{p}(0)$ vektoron kívül) több olyan lineárisan független sajátvektora van, mely az 1 sajátértékhez tartozik. Könnyű belátni, hogy ebben az esetben a p-re vonatkozó (2.11) variációs rendszernek több lineárisan független, τ_0 periódusú periodikus megoldása van. Ezt figyelembe véve, „heurisztikus okoskodással" (melyet itt nem részletezünk), „plauzibilissá lehet tenni" azt, hogy ha 1 többszörös karakterisztikus multiplikátor és hozzá egynél több lineárisan független sajátvektor tartozik, akkor a p megoldás pályája nem izolált. Más szóval úgy tűnik, hogy legalábbis bizonyos megszorítással az előző tételt meg is lehet fordítani. Ez azonban nem igaz. Az 1 karakterisztikus multiplikátor egyszeressége elégséges az izoláltsághoz, de nem szükséges, amint ezt a következő példa mutatja.

3.1. PÉLDA. Legyen az $\tilde{f}$: $R^2\to R^2$ függvény C^1 osztálybeli, $\tilde{f}=(f_1, f_2)$, tételezzük fel, hogy az

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2) \end{aligned} \tag{3.13}$$

rendszernek van $\tilde{p}=(p_1, p_2)$ nem állandó, periodikus megoldása $\tau>0$ periódussal, (3.13) $\tilde{p}$-re vonatkozó variációs rendszerének 1 egyszeres karakterisztikus multiplikátora és a másik karakterisztikus multiplikátor abszolút értékben kisebb, mint 1. Tételezzük fel továbbá, hogy $\dot{p}_1(0)=1$, $\dot{p}_2(0)=0$. Ilyen rendszer van (lásd pl. [29]), és a mondott feltételek mellett a $\tilde{p}$ megoldás aszimptotikus orbitálisan stabilis (lásd [45] 254. old. és [114] 295—312. old.). Tekintsük továbbá az

$$\begin{aligned} \dot{x}_3 &= -\frac{2\pi}{\tau}x_4 - x_3^3 \\ \dot{x}_4 &= \frac{2\pi}{\tau}x_3 - x_4^3 \end{aligned} \tag{3.14}$$

rendszert. E rendszernek a (0,0) pont izolált egyensúlyi helyzete, mely Ljapunov-értelemben aszimptotikusan stabilis. Ez utóbbi állítás LJAPUNOV direkt módszerével látható be (lásd pl. [114] 240. old.), ugyanis a $V(x_3, x_4)\equiv x_3^2+x_4^2$ függvény (3.14) pozitív definit Ljapunov-függvénye, melynek a rendszerre vonatkozó deriváltja,

$$\dot{V}_{(3.14)}(x_3, x_4) = 2x_3\left(-\frac{2\pi}{\tau}x_4 - x_3^3\right) + 2x_4\left(\frac{2\pi}{\tau}x_3 - x_4^3\right) =$$
$$= -2x_3^4 - 2x_4^4$$

negatív definit (természetesen az x_3, x_4 változók kétdimenziós terében). Ha most (3.13)-ból és (3.14)-ből összeállítjuk az

$$\dot{x} = f(x) \tag{3.15}$$

négydimenziós rendszert, ahol $x=(x_1, x_2, x_3, x_4)$ és

$$f(x) = \left(f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2), \frac{-2\pi}{\tau} x_4 - x_3^3, \frac{2\pi}{\tau} x_3 - x_4^3\right), \quad x \in R^4,$$

akkor nyilvánvaló, hogy (3.15)-nek a $p=(p_1, p_2, 0, 0)$ függvény periodikus megoldása τ periódussal. Képezzük (3.15) p-re vonatkozó variációs rendszerét, az

$$\dot{y} = f_x'(p(t))y$$

rendszert, ahol

$$f_x'(p(t)) = \begin{bmatrix} f'_{1x_1}(\tilde{p}(t)) & f'_{1x_2}(\tilde{p}(t)) & 0 & 0 \\ f'_{2x_1}(\tilde{p}(t)) & f'_{2x_2}(\tilde{p}(t)) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{2\pi}{\tau} \\ 0 & 0 & \frac{2\pi}{\tau} & 0 \end{bmatrix}.$$

Az utóbbi rendszernek van három lineárisan független periodikus megoldása τ periódussal, és pedig $\dot{p}=(\dot{p}_1, \dot{p}_2, 0, 0)$, $\left(0, 0, \cos\frac{2\pi}{\tau}t, \sin\frac{2\pi}{\tau}t\right)$ és $\left(0, 0, -\sin\frac{2\pi}{\tau}t, \cos\frac{2\pi}{\tau}t\right)$. Ebből következik, hogy az 1 szám háromszoros karakterisztikus multiplikátora. Megmutatjuk, hogy ennek ellenére p (3.15)-nek izolált pályájú periodikus megoldása. Az R^4-beli távolságot ϱ_4-gyel, az R^2-belit ϱ_2-vel jelöljük. Legyen $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)$ (3.15) egy megoldása. Ekkor (φ_1, φ_2) (3.13)-nak (φ_3, φ_4) pedig (3.14)-nek) megoldása. Ha $\varrho_4(\varphi(0)), p(0))$ elég kicsi, akkor nyilván $\varrho_2((\varphi_1(0), \varphi_2(0)), (p_1(0), p_2(0)))$ és $\varrho_2((\varphi_3(0), \varphi_4(0)), (0, 0))$ is elég kicsi. Jelöljük (3.13) $\tilde{p}$ megoldásának pályáját $\tilde{\gamma}$-mal, $\tilde{\gamma} \subset R^2$, (3.15) p megoldásának pályáját pedig γ-val, $\gamma \subset R^4$. Ha $\varrho_2((\varphi_1(0), \varphi_2(0)), (p_1(0), p_2(0)))$ elég kicsi, akkor az aszimptotikus orbitális stabilitás miatt $\varrho_2((\varphi_1(t), \varphi_2(t)), \tilde{\gamma}) \to 0$, $t \to \infty$ esetén. Ha $\varrho_2((\varphi_3(0), \varphi_4(0)), (0, 0))$ elég kicsi, akkor az aszimptotikus stabilitás miatt $\varrho_2((\varphi_3(t), \varphi_4(t)), (0, 0)) \to 0$ $t \to \infty$ esetén. Mivel a háromszög egyenlőtlenség miatt

$$\begin{aligned} \varrho_4(\varphi(t), \gamma) &\leqq \varrho_4(\varphi(t), (\varphi_1(t), \varphi_2(t), 0, 0)) + \varrho_4((\varphi_1(t), \varphi_2(t), 0, 0), \gamma) = \\ &= \varrho_2((\varphi_3(t), \varphi_4(t)), (0, 0)) + \varrho_2((\varphi_1(t), \varphi_2(t)), \tilde{\gamma}), \end{aligned}$$

ezért ha $\varrho_4(\varphi(0), p(0))$ elég kicsi, akkor $\varrho_4(\varphi(t), \gamma) \to 0$, $t \to \infty$ esetén. Ezek szerint minden γ-hoz elég közel (de γ-tól pozitív távolságra) induló megoldás γ-hoz konvergál, tehát nem periodikus.

Megjegyezzük, hogy homogén lineáris differenciálegyenlet-rendszer nemtriviális, periodikus megoldása nem lehet izolált. Legyen ugyanis (2.7)-ben $f(t, x) = A(t)x$, ahol A folytonos, periodikus mátrix függvény, $\tau > 0$ periódussal, vagyis tekintsük az

$$\dot{x} = A(t)x \tag{3.16}$$

differenciálegyenlet-rendszert. Ha ennek a $p: R \to R^n$ függvény nem-triviális, periodikus megoldása τ periódussal, akkor minden $\alpha \in R$-re a $q(t, \alpha) = \alpha p(t)$ egyenlőséggel értelmezett függvény (3.16) periodikus megoldása, $q(t, 1) \equiv p(t)$ és $q'_\alpha(0, 1) = p(0) \neq 0$.

Könnyen belátható, hogy a $\{(t, \alpha p(t)): t\in R, \alpha\in R\}$ halmaz valóban kétdimenziós differenciálható sokaság az $R\times R^n$ térben. Ekkor egyébként (3.16) önmagának (bármely megoldásra vonatkozó) variációs rendszere és így a 2.B. tétel alapján az 1 szám karakterisztikus multiplikátor.

Megjegyezzük továbbá, hogy autonóm homogén lineáris rendszer, vagyis állandó együtthatós homogén lineáris differenciálegyenlet-rendszer nem állandó, periodikus megoldásának pályája nem lehet izolált. Ugyanis ha p nem állandó, periodikus megoldás $\tau_0>0$ periódussal, akkor ugyanúgy mint az előbb, a $q(t, \alpha) = \alpha p(t)$ egyenlőtlenséggel értelmezett függvény minden $\alpha\in R$-re periodikus megoldás $\tau\equiv\tau_0$ periódussal, $q(t, 1)\equiv p(t)$, és könnyen belátható, hogy

$$\operatorname{rang}[\dot{q}(t, \alpha), q'_\alpha(t, \alpha)] = \operatorname{rang}[\alpha\dot{p}(t), p(t)] = 2, \quad t\in R, \alpha>0.$$

Innen viszont következik, hogy az $\{x=\alpha p(t): t\in R, \alpha>0\}$ halmaz kétdimenziós differenciálható sokaság az R^n térben. Mivel egy homogén lineáris differenciálegyenlet-rendszer önmagának (bármely megoldásra vonatkozó) variációs rendszere, az előbbiekből és a 3.4. tételből az az ismert tény is adódik, hogy ha egy állandó együtthatós homogén lineáris differenciálegyenlet-rendszernek van nem állandó, periodikus megoldása, akkor az 1 szám legalább kétszeres karakterisztikus multiplikátor.

4. A perturbációs módszerrel korábban elért eredmények

Ebben a pontban összefoglaljuk azokat a periodikus megoldások létezésére és stabilitására vonatkozó, fontosabb eredményeket, melyeket a perturbációs módszer segítségével a múltban elértek.

Amint az előző pont eredményei is mutatják, az autonóm eset nem vizsgálható úgy, mint a nem-autonóm, periodikus rendszer speciális esete. Mindkét alapesetben, nem-autonóm rendszer nem-autonóm perturbációja, ill. autonóm perturbációja esetén H. POINCARÉ adott elégséges feltételt periodikus megoldás létezésére ([77] Oeuvres VII. 331—343. old., [78] I. 181—182. old., lásd még [45] 415—416. old.). Ezeket a feltételeket azóta sem sikerült lényegesen javítani.

Legyen $\Omega\subset R^n$ nyílt és összefüggő tartomány, I_μ egy a zérust tartalmazó nyílt intervallum, az $f: R\times\Omega\to R^n$ függvény folytonos és az $x\in\Omega$ vektor koordinátái szerint folytonosan differenciálható, a $g: R\times\Omega\times I_\mu\to R^n$ függvény folytonos és az $x\in\Omega$ vektor koordinátái, valamint a $\mu\in I_\mu$ változó szerint folytonosan differenciálható, legyen továbbá f és g periodikus a $t\in R$ változóban $\tau_0>0$ periódussal és tekintsük az

$$\dot{x} = f(t, x)+\mu g(t, x, \mu) \tag{4.1}$$

differenciálegyenlet-rendszert. (4.1)-et az

$$\dot{x} = f(t, x) \tag{4.2}$$

„perturbálatlan" rendszer „perturbált rendszerének" fogjuk nevezni.

4.A. TÉTEL. ([45] 415. old.) *Tételezzük fel, hogy a* (4.2) *perturbálatlan rendszernek van egy* τ_0 *periódusú periodikus megoldása,* p, *és* (4.2) p*-re vonatkozó variációs rendszerének az* 1 *szám nem karakterisztikus multiplikátora (vagyis a variációs rendszernek nincs a triviálistól különböző* τ_0 *periódusú periodikus megoldása); ekkor* *minden μ-höz, melyre $|\mu|$ elég kicsi, van* (4.1)*-nek egy és csak egy τ_0 periódusú periodikus megoldása, $t \to \varphi(t, \mu)$, mely a C^1 osztályba tartozik és melyre* $\lim_{\mu \to 0} \varphi(t, \mu) = p(t)$.

A (4. 1) perturbált rendszer periodikus megoldásának stabilitására vonatkozó, következő tétel lényegében A. M. LJAPUNOVtól származik ([122] 13. és 55. pont).

4.B. TÉTEL. ([12] 350. old.) *Tételezzük fel, hogy a* (4.2) *perturbálatlan rendszernek van egy τ_0 periódusú periodikus megoldása, p, és* (4.2) *p-re vonatkozó variációs rendszerének összes karakterisztikus multiplikátora abszolút értékben kisebb, mint* 1*; ekkor teljesülnek a* 4.A. *tétel feltételei, és a* (4.1) *perturbált rendszer φ periodikus megoldása elég kis $|\mu|$-re aszimptotikusan stabilis.*

Az előbbi tételek nem alkalmazhatók abban az esetben, amikor (4.1) autonóm. Ugyanis ekkor, ha a (4.2) (ugyancsak autonóm) rendszer p periodikus megoldása nem állandó, akkor a p-re vonatkozó variációs rendszernek az 1 szám mindig karakterisztikus multiplikátora.

Legyen $\Omega \subset R^n$ nyílt és összefüggő tartomány, I_μ egy a zérust tartalmazó nyílt intervallum, az $f: \Omega \to R^n$ és a $g: \Omega \times I_\mu \to R^n$ függvény C^1 osztálybeli és tekintsük az

(4.3) $$\dot{x} = f(x) + \mu g(x, \mu)$$

perturbált, ill. az

(4.4) $$\dot{x} = f(x)$$

perturbálatlan differenciálegyenlet-rendszert.

4.C. TÉTEL. ([45] 416. old.) *Tételezzük fel, hogy a* (4.4) *perturbálatlan rendszernek van egy nem állandó, periodikus p megoldása $\tau_0 > 0$ periódussal, és* (4.4) *p-re vonatkozó variációs rendszerének az* 1 *szám pontosan egyszeres karakterisztikus multiplikátora; ekkor minden μ-höz, melyre $|\mu|$ elég kicsi, van* (4.3)*-nak egy és csak egy periodikus megoldása, $t \to \varphi(t, \mu)$, $\tau(\mu)$ periódussal úgy, hogy φ és τ a C^1 osztályba tartozik, és* $\lim_{\mu \to 0} \varphi(t, \mu) = p(t)$, $\lim_{\mu \to 0} \tau(\mu) = \tau_0$.

A (4.3) perturbált, autonóm rendszer periodikus megoldásának stabilitására vonatkozó, következő tétel az Andronov—Vitt-tétel (lásd [114] 299—312. old.) következménye.

4.D. TÉTEL. ([12] 353. old.) *Tételezzük fel, hogy a* (4.4) *perturbálatlan rendszernek van egy nem állandó, periodikus p megoldása, és* (4.4) *p-re vonatkozó variációs rendszerének $(n-1)$ számú karakterisztikus multiplikátora abszolút értékben kisebb, mint* 1*; ekkor teljesülnek a* 4.C. *tétel feltételei, és a* (4.3) *perturbált rendszer periodikus φ megoldása elég kicsi $|\mu|$-re orbitálisan aszimptotikusan stabilis.*

A (4.1), ill. a (4.3) alapeseteken kívül nyilvánvalóan még két eset jöhet számításba. Ezek közül az első, melyben a perturbálatlan rendszer nem autonóm, periodikus, és a perturbáció t-től független, vagyis az

$$\dot{x} = f(t, x) + \mu g(x, \mu)$$

rendszer, ahol f t-ben periodikus, nyilván nem túlzottan érdekes, mivel (4.1) speciális esete. Ezzel szemben az az eset, melyben a perturbálatlan rendszer autonóm és a perturbáció periodikus (t-től explicit módon függ), mind elméleti, mind pedig gyakorlati szempontból rendkívül érdekes és nehéz. Ekkor ugyanis a perturbált rendszer a következő alakú:

$$\dot{x} = f(x) + \mu g(t, x, \mu), \tag{4.5}$$

ahol g t-ben nem állandó, periodikus $\tau > 0$ periódussal, és a perturbálatlan

$$\dot{x} = f(x) \tag{4.6}$$

rendszerről fel van téve, hogy van egy nem állandó, periodikus p megoldása $\tau_0 > 0$ periódussal. Könnyen látható, hogy (4.5) sem (4.1), sem pedig (4.3) speciális esetének nem tekinthető (a 4.A., 4.B., 4.C. és 4.D. tétel vonatkozásában). Éppen ebben áll a (4.5) rendszerrel kapcsolatos probléma elméleti érdekessége és nehézsége. Gyakorlati szempontból azért érdekes, mert ilyen differenciálegyenlet-rendszer felel meg „a külső periodikus kényszernek alávetett, de önfenntartó rezgésekre (self-excited oscillations) képes rendszereknek", melyek nagy szerepet játszanak mind a műszaki lengéstanban, mind pedig a híradástechnikában, ill. az akusztikában („entrainment of frequency", „locking in", rendszerek szinkronizációja, lásd [71] XVIII. Fejezet, és [108]).

A (4.5) rendszerrel kapcsolatos feladattal igen sok szerző foglalkozott. Az eredmények túlnyomó többsége azonban arra a speciális esetre vonatkozik, melyben a perturbálatlan (4.6) rendszer lineáris. Ebben az esetben a perturbált rendszer periodikus megoldásának meghatározására szolgáló módszerek közül a legjelentősebbek N. M. Krilov és N. N. Bogoljubov [52, 53, 121], ill. L. Cesari és J. Hale [8, 41, 42] módszere. (Mindkét módszerre nézve lásd még [9] 120—136. old., az elsőre nézve [109] és [71] XVI. Fejezet). A szóban forgó esetben, vagyis az

$$\dot{x} = Ax + \mu g(t, x, \mu) \tag{4.7}$$

differenciálegyenlet-rendszer esetében, ahol A n-edrendű négyzetes, állandó mátrix, a perturbált rendszer periodikus megoldásának létezésére és (bizonyos értelemben) egyértelműségére E. A. Coddington és N. Levinson adtak világosan megfogalmazott, de igen bonyolult elégséges feltételt ([11] és [12] 356—364. old.). Ezt az esetet vizsgálta D. C. Lewis is [62].

Abban az esetben, amikor a perturbálatlan rendszer nem lineáris, sokkal gyérebbek az eredmények. Ilyenkor a szerzők általában feltételezik, hogy a perturbálatlan rendszer periodikus megoldásának pályája izolált, pontosabban, hogy teljesülnek az ezt biztosító elégséges feltételek (3.4. tétel). N. Levinson [60] a perturbált rendszer invariáns tórusz-felületének létezését mutatta ki. Mary L. Cartwright és J. E. Littlewood [6] egy igen fontos speciális egyenlet, a periodikusan perturbált van der Pol egyenlet (lásd [79, 80]) esetében adtak elégséges feltételeket periodikus megoldás létezésére és ezeket általánosították bizonyos „egy szabadságfokú", vagyis másodrendű skalár differenciálegyenlettel ekvivalens rendszerekre. Hasonló jellegű eredményeket ért el más típusú „egy szabadságfokú" rendszerre A. M. Kac [119].

Igen jelentős, de a legutóbbi időkig visszhang nélkül maradt W. S. Loud 1959-ben írt [64] dolgozata, melyben elégséges feltételt adott a (4.5) perturbált rendszer periodikus megoldásának létezésére, egyértelműségére és stabilitására a „rezonancia esetben", vagyis akkor, amikor a g függvény τ periódusa egyenlő a perturbálatlan (4.6) rendszer periodikus megoldásának τ_0 periódusával. W. S. Loud később foglalkozott azzal az esettel is, melyben ezek a periódusok nem egyenlők [65, 66], sőt felvette a perturbáció periódusát, mint a μ „amplitúdó" lineáris függvényét. Így azonban csak bizonyos mellékfeltételek teljesülése mellett tudta biztosítani a periodikus megoldás létezését és az általános esetet nem intézte el.

A hatvanas években többek között még a következők foglakoztak a témával: D. E. LEACH [55], T. MAEKAWA [67], L. D. AKULENKO [96, 97, 98, 99], A. JA. GADIONENKO [113] és mások.

Megemlíthetjük még J. HAAG korábban elért eredményeit [36, 37, 38], melyekben a perturbáció periódusa határozatlan. Ezek az eredmények azonban, jóllehet gyakorlati szempontból érdekesek, szigorú matematikai szemszögből kevéssé használhatók.

Azt az alapgondolatot, mely a jelen dolgozat fő eredményeinek elérését lehetővé tette, hogy ti. a perturbáció periódusát független paraméternek tekintjük, úgy tűnik, a szerzők nem ismerték fel, vagy nem tudták következetesen végigvinni. Ez valószínűleg részben annak a következménye, hogy az a kevés szerző, aki ennek a gondolatnak a közelébe jutott, a vizsgálat kezdetén, rögtön a független változó egy transzformációjával a rögzített periódus esetére vezette vissza a problémát (lásd pl. M. ROSEAU [83] 189. és 247. old.) Meg kell azonban említeni K. O. FRIEDRICHS gondolatgazdag előadását [34], ill. egyetemi jegyzetét [35], melyekben ragyogó „kvalitatív ötleteket" vet fel.

5. Cilindrikus rendszerek D-periodikus megoldásai

Az alkalmazásokban gyakran fellépnek olyan periodikus (vagy autonóm) differenciálegyenlet-rendszerek, melyek jobboldala nemcsak a „t független változóban", hanem az „x függő változó vektor" egy vagy több koordinátájában is periodikusak. A legklasszikusabb példa ilyen rendszerre a matematikai inga lengéseit leíró $\ddot{\vartheta}=-\frac{g}{l}\sin\vartheta$ differenciálegyenlet (g a nehézségi gyorsulás, l az inga hossza, ϑ a kitérés), mely az $x_1=\vartheta$, $x_2=\dot{\vartheta}$ jelölésekkel az

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -\frac{g}{l}\sin x_1$$

rendszerbe megy át. Az utóbbi (autonóm) rendszer jobb oldala az x_1 változóban periodikus. További fontos esetekre nézve lásd [13, 89, 107, 108].

Azokat a differenciálegyenlet-rendszereket, melyek jobb oldala az „x függő változó vektor" egy vagy több koordinátájában periodikus, *cilindrikus rendszereknek,* azokat a koordinátákat, melyekben a jobboldal periodikus, *cilindrikus koordinátáknak* szokták nevezni. Cilindrikus rendszerekkel már H. POINCARÉ is foglalkozott ([77] Oeuvres VII. 343. old. és [78] III. 80. old.) és felismerte, hogy ilyen rendszerek esetében a közönséges értelemben periodikus („elsőfajú periodikus") megoldások mellett felléphetnek un. „másodfajú periodikus megoldások". Cilindrikus rendszerekkel, „másodfajú periodikus megoldások" létezésének és stabilitásának kérdéseivel azóta is sokan foglalkoztak, így többek között S. P. DILIBERTO és G. HUFFORD [21], L. D. AKULENKO és V. M. VOLOSZOV [96, 97, 98, 99, 100, 101, 112], E. A. BARBASIN [105, 106], A. JA. GADIONENKO [113] és E. A. NAZAROV [128]. A szerzők általában a „másodfajú periodikus megoldások" POINCARÉ-tól származó, kissé nehézkes meghatározását használják. Itt e függvények egy jellemző tulajdonságát megragadó definíciót adunk, majd a cilindrikus rendszer fogalmát is egyszerűbben és némileg általánosabban határozzuk meg (lásd a szerző [24], ill. [26] dolgozatát).

5.1. DEFINÍCIÓ. Azt mondjuk, hogy a C^1 osztálybeli $\varphi\colon R\to R^n$ függvény *D-periodikus* (deriváltan periodikus, derivoperiodikus), $\tau>0$ periódussal, ha derivált függvénye $\dot\varphi$ periodikus τ periódussal.

5.1. LEMMA. *A $\varphi\colon R\to R^n$ függvény akkor és csak akkor D-periodikus $\tau>0$ periódussal, ha van $a\in R^n$ állandó vektor és $v\colon R\to R^n$ C^1 osztálybeli periodikus függvény τ periódussal, hogy*

$$\varphi(t)\equiv at+v(t). \tag{5.1}$$

Bizonyítás. Az, hogy a feltétel elégséges, nyilvánvaló. Tegyük fel, hogy φ D-periodikus függvény $\tau>0$ periódussal, ekkor fennáll

$$\dot\varphi(t+\tau)\equiv\dot\varphi(t).$$

Mindkét oldalt 0-tól t-ig integrálva kapjuk, hogy

$$\varphi(t+\tau)\equiv\varphi(t)+\varphi(\tau)-\varphi(0). \tag{5.2}$$

Vezessük be az

$$a=\frac{1}{\tau}(\varphi(\tau)-\varphi(0))=\frac{1}{\tau}\int_0^\tau\dot\varphi(t)\,dt \tag{5.3}$$

jelölést és tekintsük a $v(t)=\varphi(t)-at$ egyenlőséggel értelmezett v függvényt. E függvény nyilván C^1 osztálybeli, és fennáll a

$$\begin{aligned}v(t+\tau)&\equiv\varphi(t+\tau)-at-a\tau\equiv\\&\equiv\varphi(t)+\varphi(\tau)-\varphi(0)-at-\varphi(\tau)+\varphi(0)\equiv\\&\equiv v(t)\end{aligned}$$

azonosság, ahol felhasználtuk (5.2)-t és „a” (5.3) definícióját.!

Könnyen belátható, hogy a D-periodikus φ függvény (5.1) felírásában fellépő „a” állandó vektor és v függvény egyértelműen van meghatározva. Az (5.1)-ben szereplő „a” állandót a D-periodikus függvény *együttható vektorának* nevezzük. Amint ez (5.3)-ból látható, az együttható vektor a $\dot\varphi$ periodikus függvény integrálközepe (egy periódushossznyi intervallumon). A közönséges értelemben periodikus (C^1 osztálybeli) függvények nyilvánvalóan olyan D-periodikus függvények, melyek együttható vektora zérus.

5.2. DEFINÍCIÓ. Legyen $a\in R^n$ állandó vektor és τ pozitív állandó; azt mondjuk, hogy az $F\colon R^n\times R^m\to R^n$ függvény *periodikus az x vektorváltozóban aτ vektorperiódussal,* ha minden $x\in R^n$, $z\in R^m$-re fennáll az

$$F(x+a\tau,z)=F(x,z) \tag{5.4}$$

azonosság.

Könnyen belátható, hogy ha F „cilindrikus függvény egy vagy több változójában", akkor periodikus a vektorváltozóban. Például, ha vannak $a_1, a_2, \tau \in R$ nem zérus állandók, melyekre

$$F(x_1+a_1\tau, x_2, \dots, x_n) \equiv F(x_1, \dots, x_n)$$

és

$$F(x_1, x_2+a_2\tau, \dots, x_n) \equiv F(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

akkor természetesen

$$F(x_1+a_1\tau, x_2+a_2\tau, x_3, \dots, x_n) = F(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$$

is fennáll és F periodikus a vektorváltozóban. F-nek ekkor több vektor-periódusa is van, éspedig $(a_1\tau, a_2\tau, 0, \dots, 0)$, $(a_1\tau, 0, 0, \dots, 0)$, ill. $(0, a_2\tau, 0, \dots, 0)$.

Ezzel szemben F periodikus lehet a vektorváltozóban anélkül, hogy akár egyetlen cilindrikus változója lenne. Legyen például $F=(F_1, F_2)$ és

$$F_i(x_1, x_2) = \sin(c_1x_1+c_2x_2)+\sin(d_1x_1+d_2x_2), \quad (i = 1, 2),$$

ahol $c_k \neq 0$, $d_k \neq 0$ valós állandók és a c_k/d_k hányadosok irracionálisak $(k=1, 2)$. Ekkor F sem az x_1, sem pedig az x_2 változóban nem periodikus. Ugyanakkor mindig lehet találni k és l egész számokat, egy pozitív τ állandót és egy nem zérus $a=(a_1, a_2)$ vektort, hogy fennálljon

$$c_1a_1\tau+c_2a_2\tau = 2\pi k$$

és

$$d_1a_1\tau+d_2a_2\tau = 2\pi l.$$

Ezeknek az egyenleteknek fennállása viszont azt jelenti, hogy F periodikus a vektorváltozóban $a\tau$ vektorperiódussal.

Tehát az, hogy F periodikus a vektorváltozóban általánosabb (gyengébb) követelmény, mint az, hogy F cilindrikus egy vagy több változójában. Azt, hogy az előbbi követelmény mennyivel általánosabb az utóbbinál, mutatja a következő példa. Az $F(x_1, x_2)=(x_1+x_2)^2$ függvény periodikus a vektorváltozóban, vektorperiódusa minden α valós számra az $(\alpha, -\alpha)$ vektor.

Könnyen belátható ugyanakkor, hogy ha az 5.2 definícióban szereplő F függvénynek az $a\tau$ vektor vektorperiódusa és $a\tau \neq 0$, akkor ortogonális bázistranszformációval R^n-ben olyan új $y_1, y_2, \dots, y_n$ koordinátarendszert vezethetünk be, melynek első bázisvektora az $\frac{1}{|a\tau|}a\tau$ vektor és melyben F transzformáltja első változójában, y_1-ben periodikus lesz $|a\tau|$ periódussal.

Megjegyezzük még, hogy az $a=0$ esetet az 5.2. definícióban kényelmi okokból nem zártuk ki. Ebben az esetben természetesen az (5.4) feltétel semmitmondóvá válik. A vektor-periódust az általános esetben ugyancsak azért írtuk egy „a" vektor és egy τ szám szorzatának alakjában, mert ez a későbbiekben előnyös lesz.

Legyen $\Omega \subset R^n$ nyílt és összefüggő tartomány és rendelkezzék a következő tulajdonságokkal: ha $x \in \Omega$, akkor minden $t \in R$-re $(x+at) \in \Omega$, ahol $a \in R^n$ állandó vektor. Legyen az $F: R \times \Omega \to R^n$ függvény folytonos és az $x \in \Omega$ vektor koordinátái szerint folytonosan differenciálható. Tételezzük fel továbbá, hogy a $t \in R$ változóban periodikus $\tau > 0$ periódussal, az $x \in \Omega$ vektorváltozóban is periodikus $a\tau$ vektorperiódussal és tekintsük az

$$\dot{x} = F(t, x) \tag{5.5}$$

differenciálegyenlet-rendszert. Az (5.5) rendszernek azokkal a D-periodikus megoldásaival foglalkozunk, melyek periódusa τ és együttható vektora „a". Arra vonatkozóan, hogy (5.5) egy megoldása ilyen D-periodikus függvény legyen, érvényes a 2.A. tétel következő általánosítása:

5.2. Tétel. *Legyen $\varphi\colon R \to \Omega$ az* (5.5) *rendszer megoldása; φ akkor és csak akkor D-periodikus τ periódussal és „a" együttható vektorral, ha van $t_0 \in R$, melyre*

$$\varphi(t_0+\tau) = \varphi(t_0)+a\tau. \tag{5.6}$$

Bizonyítás. Az (5.6) feltétel nyilvánvalóan szükséges, azt kell csak bebizonyítanunk, hogy elégséges is. Mivel F periodikus az x vektorváltozóban $a\tau$ vektorperiódussal, következik, hogy a φ függvénnyel együtt a $t \to \varphi(t)+a\tau$ függvény is megoldás, ugyanis

$$\big(\varphi(t)+a\tau\big)^{\cdot} \equiv \dot{\varphi}(t) \equiv F\big(t, \varphi(t)\big) \equiv F\big(t, \varphi(t)+a\tau\big).$$

Mivel F periodikus t-ben τ periódussal, következik, hogy φ-vel együtt a $t \to \varphi(t+\tau)$ függvény is megoldás. Az (5.6) feltételből azonban azt kapjuk, hogy

$$[\varphi(t+\tau)]_{t=t_0} = \varphi(t_0+\tau) = \varphi(t_0)+a\tau =$$
$$= [\varphi(t)+a\tau]_{t=t_0},$$

vagyis a megoldások unicitása miatt

$$\varphi(t+\tau) \equiv \varphi(t)+a\tau. \tag{5.7}$$

Az utóbbi azonosságot differenciálva adódik, hogy φ valóban D-periodikus τ periódussal, és ekkor magából az azonosságból és (5.3)-ból látható, hogy együttható vektora valóban „a".!

A most bebizonyított tétel az $a=0$ speciális esetben a 2.A. tételre vezet.

Ha φ az (5.5) rendszer D-periodikus megoldása τ periódussal és „a" együttható vektorral, akkor amint ez könnyen belátható a $t \to F\big(t, \varphi(t)\big)$ és a $t \to F'_x\big(t, \varphi(t)\big)$ függvény (F'_x az F függvény x szerinti derivált mátrixa) periodikus τ periódussal. Így (5.5)-nek a φ megoldásra vonatkozó variációs rendszere,

$$\dot{y} = F'_x\big(t, \varphi(t)\big)y \tag{5.8}$$

periodikus együtthatójú homogén lineáris differenciálegyenlet-rendszer.

Ezek után D-periodikus megoldás izoláltságának kérdése ugyanúgy tárgyalható, ahogyan ez a 3. pontban, közönséges értelemben periodikus megoldás esetében történt. A tárgyalást nem részletezzük. A 3.1 definícióval analóg definíció adható D-periodikus megoldás izoláltságára. A 3.1 lemmával analóg lemma szóról szóra úgy bizonyítható, mint ott. Érvényes az

5.3. Tétel. *Ha φ az* (5.5) *rendszer D-periodikus megoldása τ periódussal és „a" együttható vektorral és a φ-re vonatkozó* (5.8) *variációs rendszernek az* 1 *szám nem karakterisztikus multiplikátora, akkor φ izolált D-periodikus megoldás.*

Bizonyítás. Analóg a 3.2. tétel bizonyításával.!

D-periodikus megoldás stabilitásával kapcsolatban érvényben marad A. M. Ljapunov tételének ([122] 55. pont) következő analogonja.

5.4. TÉTEL. *Ha az* (5.8) *variációs rendszer összes karakterisztikus multiplikátora abszolút értékben egynél kisebb, akkor* (5.5) *D-periodikus* φ *megoldása aszimptotikusan stabilis.*

Bizonyítás. A bizonyítást nem részletezzük, mivel az ugyanúgy elvégezhető, mint a közönséges értelemben periodikus megoldásokra vonatkozó megfelelő tétel esetében (lásd pl. az E. A. CODDINGTON és N. LEVINSON által közölt bizonyítást, [12] 321—322. old.) Egyetlen ponton kell az idézett bizonyítást kiegészíteni. Felírjuk, mint ott, az (5.5) rendszer megoldásainak φ-től való eltéréseire vonatkozó differenciálegyenlet-rendszert, vagyis legyen x az (5.5) rendszer tetszőleges megoldása és $z=x-\varphi$. Ekkor a z függvény a következő differenciálegyenlet rendszert elégíti ki:

$$\dot z = F(t, \varphi(t)+z)-F(t, \varphi(t)),$$

vagyis, mivel F az x vektor koordinátái szerint folytonosan differenciálható, a Lagrange-féle középértéktétel alkalmazásával

$$\dot z = F'_x(t, \varphi(t))z+R(t, z),$$

ahol az $R=(R_1, R_2, ..., R_n)$ jelöléssel

$$R_k(t, z) = [F'_{kx}(t, \varphi(t)+\vartheta_k z)-F'_{kx}(t, \varphi(t))]z, \quad 0<\vartheta_k<1, \quad (k=1, 2, ..., n), \tag{5.9}$$

és itt a jobboldalon két vektor skaláris szorzata áll. Azt kell belátnunk, hogy $R(t, z)= =o(z)$ t-ben egyenletesen. Jelöljük γ-val φ pályáját és $\hat\gamma$-vel φ $[0, \tau]$-ra való leszűkítésének pályáját, vagyis legyen

$$\gamma = \{x=\varphi(t)\colon t\in R\}$$

és

$$\hat\gamma = \{x=\varphi(t)\colon 0\leqq t\leqq \tau\}.$$

Nyilvánvaló, hogy a kompakt $\hat\gamma$ halmaznak van olyan ϱ_0 sugarú $U_{\hat\gamma}$ környezete, melynek $\overline{U}_{\hat\gamma}$ lezártja is részhalmaza Ω-nak:

$$U_{\hat\gamma} = \{x\in R^n\colon \varrho(x, \hat\gamma)<\varrho_0\}, \quad \overline{U}_{\hat\gamma}\subset \Omega.$$

Jelölje U_γ a teljes γ pálya ϱ_0 sugarú környezetét:

$$U_\gamma = \{x\in R^n\colon \varrho(x, \gamma)<\varrho_0\}.$$

Megmutatjuk, hogy $\overline{U}_\gamma\subset\Omega$. Legyen ui. $x\in\overline{U}_\gamma$. Ekkor van $t\in R$, hogy $|x-\varphi(t)|\leqq\varrho_0$ és van olyan m egész szám, melyre $m\tau\leqq t<(m+1)\tau$. Mivel φ D-periodikus τ periódussal és „a" együttható vektorral, ezért fennáll (5.7), és így

$$|x-ma\tau-\varphi(t-m\tau)| = |x-ma\tau-[\varphi(t)-ma\tau]| =$$
$$= |x-\varphi(t)| \leqq \varrho_0,$$

vagyis $0\leqq t-m\tau<\tau$ miatt $(x-ma\tau)\in\overline{U}_{\hat\gamma}\subset\Omega$. Ekkor azonban az Ω-ra tett kikötés miatt $x\in\Omega$. F'_x egyenletesen folytonos a $[0, \tau]\times\overline{U}_{\hat\gamma}\subset R\times R^n$ kompakt halmazon. Miután F'_x t-ben periodikus τ periódussal és x-ben periodikus $a\tau$ vektorperiódussal, továbbá az előbb láttuk, hogy ha $x\in\overline{U}_\gamma$, akkor van olyan m egész szám, hogy $(x-ma\tau)\in\overline{U}_{\hat\gamma}$ ezért F'_x egyenletesen folytonos az egész $R\times\overline{U}_\gamma$ halmazon is. Így (5.9) miatt $R(t, z)=o(z)$ t-ben egyenletesen.!

E pont hátralevő részében autonóm rendszerekkel foglalkozunk, melyek, amint ezt már korábban is láttuk, nem intézhetők el minden tekintetben egyszerűen úgy, mint az (5.5) típusú periodikus rendszerek speciális esetei.

Legyen $\Omega \subset R^n$ nyílt és összefüggő tartomány és rendelkezzék a következő tulajdonsággal: ha $x \in \Omega$, akkor minden $t \in R$-re $(x+a^0 t) \in \Omega$, ahol $a^0 \in R^n$ állandó vektor. Legyen az $f: \Omega \to R^n$ függvény C^1 osztálybeli és az $x \in \Omega$ vektorváltozóban periodikus $a^0 \tau_0$ vektorperiódussal, ahol $\tau_0 > 0$ állandó. Tekintsük az

$$\dot{x} = f(x) \tag{5.10}$$

autonóm differenciálegyenlet-rendszert és legyen a $p: R \to \Omega$ függvény ennek nem-állandó, D-periodikus megoldása $\tau_0 > 0$ periódussal és a^0 együttható vektorral. (5.10)-nek a p megoldásra vonatkozó variációs rendszere

$$\dot{y} = f'_x(p(t))y \tag{5.11}$$

periodikus együtthatójú homogén lineáris differenciálegyenlet-rendszer; az együttható mátrix periódusa τ_0.

Nyilvánvaló, hogy (5.11)-nek a $\dot{p}$ függvény, mely nem zérus, periodikus megoldása τ_0 periódussal, és így a 2.B. tétel alapján (5.11)-nek az 1 szám karakterisztikus multiplikátora.

5.3. DEFINÍCIÓ. Legyen $n \geqq 2$, p az (5.10) rendszer nem állandó, D-periodikus megoldása $\tau_0 > 0$ periódussal, a^0 együttható vektorral és $\gamma \subset R^n$ a p megoldás pályája; azt mondjuk, hogy a p megoldás *γ pályája nem izolált*, ha van egy legalább kétdimenziós R^n-be ágyazott C^1-sokaság, P és egy C^1 osztálybeli $\tau: P \to R$ függvény úgy, hogy P az (5.10) rendszer D-periodikus megoldásaihoz tartozó pályák egyesítése $\gamma \subset P$, minden $x \in P$-re $\tau(x)$ az x ponton áthaladó pályának megfelelő megoldás(ok) periódusa és e megoldás „a" együttható vektorára fennáll

$$a\tau(x) = a^0 \tau_0, \tag{5.12}$$

(τ a γ görbe pontjaiban a τ_0 értéket veszi fel). Ellenkező esetben a p megoldást *izolált pályájú D-periodikus megoldásnak* nevezzük.

A 3.3. lemmával analóg lemma ugyanúgy bizonyítható, mint ott. Ezt nem részletezzük.

5.5. TÉTEL. *Ha p az* (5.10) *rendszer* ($n \geqq 2$) *nem állandó, D-periodikus megoldása* $\tau_0 > 0$ *periódussal és* a^0 *együttható vektorral, és a p-re vonatkozó* (5.11) *variációs rendszernek az* 1 *szám egyszeres karakterisztikus multiplikátora, akkor a p megoldás pályája izolált.*

Bizonyítás. A bizonyítás (5.12) figyelembevételével analóg a 3.4. tétel bizonyításával.!

Autonóm, a vektorváltozóban periodikus rendszer D-periodikus megoldásának stabilitására érvényes az Andronov—Vitt-tétel analógja. A tételt O. VEJVODA [94] dolgozatában cilindrikus rendszerekre bizonyította, és mivel bizonyítása az általunk tárgyalt, kissé általánosabb esetben sem szorul lényeges változtatásra, itt nem adunk bizonyítást.

5.A. TÉTEL. ([94]). *Ha p az* (5.10) *rendszer* ($n \geqq 2$) *nem állandó, D-periodikus megoldása* $\tau_0 > 0$ *periódussal, és* a^0 *együttható vektorral, és a p-re vonatkozó* (5.11) *variációs rendszer* ($n-1$) *számú karakterisztikus multiplikátora abszolút értékben egynél kisebb, akkor p orbitálisan aszimptotikusan stabilis.*

II. FEJEZET

AUTONÓM RENDSZEREK IRÁNYÍTHATÓAN PERIODIKUS PERTURBÁCIÓI

6. Perturbációs periódus és perturbált periodikus megoldás létezése és egyértelműsége

Legyen $\Omega\subset R^n$ nyílt és összefüggő tartomány és rendelkezzék a következő tulajdonsággal: van $a\in R^n$ vektor, hogy ha $x\in\Omega$, akkor minden $t\in R$-re $(x+at)\in\Omega$. Legyenek továbbá α, τ_0 és β adott valós számok, melyekre $\alpha>0$, $0<\beta<\tau_0$ és vezessük be a következő jelöléseket: $I_\mu=\{\mu\in R: |\mu|<\alpha\}$, $I_\tau=\{\tau\in R: |\tau-\tau_0|<\beta\}$. Tételezzük fel, hogy az $f: \Omega\to R^n$ függvény C^1 osztálybeli, a $g: R\times\Omega\times I_\mu\times I_\tau\to R^n$ függvény $x(\in\Omega)$, $\mu(\in I_\mu)$ és $\tau(\in I_\tau)$ szerinti deriváltjaival, g'_x-szel, g'_μ-vel és g'_τ-val együtt C^0 osztálybeli, g periodikus az első változójában 1 periódussal, vagyis

$$g(s+1, x, \mu, \tau) = g(s, x, \mu, \tau),$$

$$s\in R, x\in\Omega, \mu\in I_\mu, \tau\in I_\tau,$$

és f is és g is periodikus az x vektorváltozóban $a^0\tau_0$ vektorperiódussal, vagyis

$$f(x+a^0\tau_0)\equiv f(x), \quad x\in\Omega$$

és

$$g(s, x+a^0\tau_0, \mu, \tau)\equiv g(s, x, \mu, \tau),$$

$$s\in R, x\in\Omega, \mu\in I_\mu, \tau\in I_\tau,$$

ahol $a^0\in R^n$ rögzített vektor. Tekintsük az

$$\dot{x} = f(x)+\mu g\left(\frac{t}{\tau}, x, \mu, \tau\right) \tag{6.1}$$

perturbált differenciálegyenlet-rendszert, ahol az előbbi feltevések szerint g periodikus a t változóban τ periódussal, és a jobboldal periodikus az x vektorváltozóban $a^0\tau_0$ vektorperiódussal.

A $t\to g\left(\frac{t}{\tau}, x, \mu, \tau\right)$ függvény τ periódusa független paraméterként fellép (6.1)-ben. Az alábbiakban következő eredmények közvetlenül és gyakorlatilag olyan rendszerek esetében alkalmazhatók, amelyeknél τ „alkalmasan választható”, vagyis olyanoknál, amelyeknél a perturbáció periódusa „irányítható”. Ilyen értelemben használjuk az *„irányíthatóan periodikus perturbáció”* elnevezést.

(6.1) jobb oldalának vektorperiódusát kényelmi okokból $a\tau$-val fogjuk jelölni, ahol az „a” vektort minden $\tau\in I_\tau$-ra az

$$a\tau = a^0\tau_0 \tag{6.2}$$

összefüggés határozza meg egyértelműen.

(6.1) mellett szerepeltetjük az

$$\dot{x} = f(x) \tag{6.3}$$

perturbálatlan differenciálegyenlet-rendszert, melyről feltesszük, hogy van egy $p: R \to \Omega$ nem állandó D-periodikus megoldása τ_0 periódussal és a^9 együttható vektorral. Ekkor (6.3) p-re vonatkozó variációs rendszerének, az

$$\dot{y} = f'_x(p(t))y \tag{6.4}$$

rendszernek a $\dot{p}$ derivált függvény nemtriviális, periodikus megoldása τ_0 periódussal és így (6.4)-nek az 1 szám karakterisztikus multiplikátora.

Szükségünk lesz a következő két lemmára.

6.1. LEMMA. *Legyen $x = Az$ egy (valós) reguláris koordináta-transzformáció R^n-ben vagyis A egy (valós) n-edrendű reguláris mátrix, tekintsük a* (6.3) *rendszer transzformáltját, a*

$$\dot{z} = A^{-1}f(Az) \tag{6.5}$$

differenciálegyenlet-rendszert és ez utóbbi $q(t) = A^{-1}p(t)$ megoldását, mely (6.3) *p megoldásának felel meg;* (6.5) *q-ra vonatkozó variációs rendszerének karakterisztikus multiplikátorai (multiplicitásokkal együtt) megegyeznek* (6.4) *karakterisztikus multiplikátoraival.*

Bizonyítás. q nyilván ugyancsak D-periodikus függvény és a q-ra vonatkozó variációs rendszer,

$$\dot{w} = A^{-1}f'_x(p(t))Aw \tag{6.6}$$

periodikus együtthatójú homogén lineáris rendszer τ_0 periódussal. Legyen $Y(t)$ (6.4)-nek egy alapmátrixa; ekkor $A^{-1}Y(t)$ (6.5)-nek alapmátrixa. (6.4), ill. (6.6) megfelelő főmátrixa

$$C_{(6.4)} = Y^{-1}(t)Y(t+\tau_0),$$

ill.

$$C_{(6.6)} = (A^{-1}Y(t))^{-1}A^{-1}Y(t+\tau_0) =$$

$$= Y^{-1}(t)AA^{-1}Y(t+\tau_0) = C_{(6.4)},$$

tehát a főmátrixok és így sajátértékeik is megegyeznek.!

Jelöljük $x(t;\, t_0, x^0, \mu, \tau)$-val a (6.1) differenciálegyenlet-rendszer azon megoldását, melyre $x(t_0;\, t_0, x^0, \mu, \tau) = x^0 \in \Omega$ és vezessük be a $p^0 = p(0)$, ill. a $\dot{p}^0 = \dot{p}(0)$ jelöléseket. Nyilvánvalóan $p(t) \equiv x(t;\, 0, p^0, 0, \tau_0)$. ($\mu = 0$ esetén a (6.1), vagyis a (6.3) rendszert τ_0 periódusú periodikus rendszernek tekintjük.) Jelöljük továbbá Π-vel az R^n tér p^0 ponton áthaladó, a $\dot{p}^0$ vektorra ortogonális hipersíkját (mint tudjuk, $\dot{p}^0 \neq 0$), vagyis legyen

$$\Pi = \{x \in R^n:\ (x-p^0)\dot{p}^0 = 0\}, \tag{6.7}$$

($(x-p^0)\dot{p}^0$ a két vektor skaláris szorzata). Érvényes a

6.2. LEMMA. *Van olyan $\varrho > 0$ szám és a $(0, p^0, 0, \tau_0) \in R \times \Omega \times I_\mu \times I_\tau$ pontnak olyan $U \subset R \times \Omega \times I_\mu \times I_\tau$ környezete, hogy minden $(t_0, x^0, \mu, \tau) \in U$-ra a* (6.1) *rend-*

szer $x(t; t_0, x^0, \mu, \tau)$ megoldásának pályája metszi a Π hipersíkot éspedig egyetlen olyan $t=\vartheta$ értéknél, melyre $\vartheta\in(-\varrho, \varrho)$, vagyis van egy és csak egy $\vartheta\in(-\varrho, \varrho)$, hogy

$$x(\vartheta: t_0, x^0, \mu, \tau)\in\Pi.$$

Bizonyítás. A Π hipersík az R^n teret két nem összefüggő, nyílt féltérre osztja; jelöljük ezek közül az egyik félteret R^n_+-szal, a másikat R^n_--szal. Mivel a p megoldás nem állandó és $\dot p^0$ ortogonális Π-re, ezért van olyan $\varrho>0$ szám, hogy $p(t)\in R^n_+$, ha $0<t\leqq\varrho$ és $p(t)\in R^n_-$, ha $-\varrho\leqq t<0$. Mint ismeretes (lásd pl. [12] 58—59. old.) a $(0, p^0, 0, \tau_0)$ pontnak van olyan U_0 környezete, hogy minden $(t_0, x^0, \mu, \tau)\in U_0$-ra az $x(t; t_0, x^0, \mu, \tau)$ megoldás értelmezve van a $[-\varrho, \varrho]$ zárt intervallumon. Jelöljük V_ϱ-val, ill. $V_{-\varrho}$-val a $p(\varrho)$, ill. a $p(-\varrho)$ pont egy olyan környezetét, melyre $V_\varrho\subset R^n_+$, ill. $V_{-\varrho}\subset R^n_-$. Ekkor, miután a megoldás a kezdeti értékek és a paraméterek folytonos függvénye (lásd uo.), a $(0, p^0, 0, \tau_0)$ pontnak van olyan U_+, ill. U_- környezete, melyre ha $(t_0, x^0, \mu, \tau)\in U_+$, ill. ha $(t_0, x^0, \mu, \tau)\in U_-$, akkor $x(\varrho; t_0, x^0, \mu, \tau)\in$ $\in V_\varrho\subset R^n_+$, ill. $x(-\varrho; t_0, x^0, \mu, \tau)\in V_{-\varrho}\subset R^n_-$. Legyen $U=U_0\cap U_+\cap U_-$. Az előbbiek szerint, ha $(t_0, x^0, \mu, \tau)\in U$, akkor $x(-\varrho; t_0, x^0, \mu, \tau)\in R^n$ és $x(\varrho; t_0, x^0, \mu, \tau)\in R^n_+$, tehát van $\vartheta\in(-\varrho, \varrho)$, melyre $x(\vartheta; t_0, x^0, \mu, \tau)\in\Pi$.

(6.1) jobb oldalának folytonossága miatt, ha U sugara és ϱ elég kicsi, akkor az $x(t; t_0, x^0, \mu, \tau)$, $(t_0, x^0, \mu, \tau)\in U$, megoldás pályája a $-\varrho<t<\varrho$ szakaszon csak „balról jobbra", vagyis R^n_--ból R^n_+-ba lépheti át Π-t ugyanúgy, mint a p megoldás pályája. Ebből következik, hogy $\vartheta\in(-\varrho, \varrho)$ egyértelműen meg van határozva.!

A most bebizonyított lemma szerint tehát minden elég kicsi $|\mu|$, $|\tau-\tau_0|$, $|t_0|$ és $|x^0-p^0|$-re a (6.1) rendszer $x(t; t_0, x^0, \mu, \tau)$ megoldása egyértelműen meghatározza azt a ϑ számot és $h\in R^n$ vektort, melyre $\vartheta\in(-\varrho, \varrho)$, $h=x(\vartheta; t_0, x^0, \mu, \tau)-p^0$ és a következő skaláris szorzat zérus:

$$h\dot p^0 = 0. \tag{6.8}$$

Fordítva is természetesen minden elég kicsi $|\vartheta|$-hez és $|h|$-hez, melyre (6.8) fennáll tartozik (6.1)-nek pontosan egy megoldása, mely a $t=\vartheta$ helyen a p^0+h értékét vesz fel. Rögzített μ és τ mellett a $\{t\to x(t; t_0, x^0, \mu, \tau):(t_0, x^0, \mu, \tau)\in U\}$ megoldáshalmaz és a (ϑ, h) párok közötti megfeleltetés egy-egyértelmű, vagyis ha (ϑ_1, h^1) és (ϑ_2, h^2) különbözők, akkor az előbbi megfeleltetésben a hozzájuk tartozó megoldások is különbözők. (Ugyanez nem mondható el nyilvánvalóan, rögzített μ és τ mellett sem, a tetszőleges (t_0, x^0) kezdeti értékek és a megoldások megfeleltetéséről.)

A továbbiakban $x(t; \vartheta, p^0+h, \mu, \tau)$-val jelöljük (6.1) azon megoldását, melyre $x(\vartheta; \vartheta, p^0+h, \mu, \tau)=p^0+h$ és (6.8) teljesül. A

$$\{t \to x(t; \vartheta, p^0+h, \mu, \tau): |\vartheta| < \varrho, |h| < \chi\} \tag{6.9}$$

függvényhalmaz, ahol ϱ és χ elég kis pozitív állandók, μ és τ rögzítettek és $|\mu|$, $|\tau-\tau_0|$ elég kicsik, az előbbiek szerint tartalmazza (6.1) összes olyan megoldását, melynek kezdeti értékei a $t_0=0$, $x^0=p^0$ értékekhez elég közel vannak, és különböző (ϑ, h) párokhoz e halmaz különböző elemei tartoznak.

6.3. TÉTEL. *Ha a* (6.4) *variációs rendszernek az* 1 *szám egyszeres karakterisztikus multiplikátora, akkor minden (μ, ϑ)-hoz, melyre $|\mu|$ és $|\vartheta|$ elég kicsi, tartozik* *pontosan egy* $\tau(\mu, \vartheta)$ *periódus és pontosan egy* (6.8)*-at kielégítő* $h(\mu, \vartheta)$ *vektor úgy, hogy ha* $\tau=\tau(\mu, \vartheta)$*-t helyettesítünk* (6.1)*-be, akkor*

(6.10) $$\varphi(t, \mu, \vartheta) = x(t; \vartheta, p^0+h(\mu, \vartheta), \mu, \tau(\mu, \vartheta))$$

a (6.1) *rendszer D-periodikus megoldása* $\tau(\mu, \vartheta)$ *periódussal és* (6.2)*-ből egyértelműen meghatározott együttható vektorral, a* τ *és a* h *függvény a* $(\mu, \vartheta)=(0, 0)$ *pont egy környezetében* C^1 *osztálybeli,* $\tau(0, 0)=\tau_0$, $h(0, 0)=0$ *és* $\varphi(t, 0, 0)\equiv p(t)$.

Bizonyítás. A bizonyítás a 4.C. tétel E. A. CODDINGTON és N. LEVINSON által adott bizonyításának vázát követi (lásd [12] 352—353. old.).

Az általánosság megszorítása nélkül feltételezhetjük, hogy a Π hipersík (lásd (6.7)) az $x_1=p_1^0$ egyenlettel jellemzett sík, vagyis $\dot{p}^0=(\dot{p}_1^0, 0, ..., 0)$, $\dot{p}_1^0\neq 0$, és ennek következtében a (6.8)-at kielégítő h vektorok pontosan a $h=(0, h_2, ..., h_n)$ vektorok, ahol $h_2, ..., h_n$ tetszőleges. Ha ui. nem ez lenne a helyzet, akkor ezt el lehet érni a koordinátarendszer egy ortogonális transzformációja útján, mely a 6.1. lemma értelmében nem változatja meg a szóban forgó karakterisztikus multiplikátorokat és nyilvánvalóan a megoldások D-periodikus jellegét sem.

Miután p minden $t\in R$-re értelmezve van, következik (lásd pl. [12] 58—59. old.), hogy ha $|\vartheta|$, $|h|$, $|\mu|$ és $|\tau-\tau_0|$ elég kicsi, akkor (6.1) $x(t; \vartheta, p^0+h, \mu, \tau)$ megoldása is értelmezve van minden $t\in R$-re. Így e megoldás az 5.2. tétel értelmében akkor és csak akkor D-periodikus τ periódussal és „a" együttható vektorral, ha

$$x(\vartheta+\tau; \vartheta, p^0+h, \mu, \tau) = x(\vartheta; \vartheta, p_0+h, \mu, \tau)+a\tau = p^0+h+a\tau.$$

Miután a tétel feltételei szerint (6.2)-nek is fenn kell állnia, a

(6.11) $$z(\vartheta, h, \mu, \tau) = x(\vartheta+\tau; p^0+h, \mu, \tau)-p^0-h-a^0\tau_0$$

jelölés bevezetésével az előbbi feltétel a

(6.12) $$z(\vartheta, h, \mu, \tau) = 0$$

alakot ölti, ahol $h=(0, h_2, ..., h_n)$. A (6.12) feltétel bal oldalán álló z függvény C^1 osztálybeli a P: $\vartheta=0, h=0, \tau=\tau_0$ pont egy környezetében, és (6.12) teljesül a P pontban. Ha a $z=(z_1, ..., z_n)$ függvényrendszer $\tau, h_2, ..., h_n$ szerinti Jacobi-determinánsa a P pontban nem zérus, akkor (6.12) egyértelműen meghatározza τ-t és h-t, mint (μ, ϑ) C^1 osztálybeli függvényét a $(\mu, \vartheta)=(0, 0)$ pont egy környezetében. Ha tehát kimutatjuk, hogy a z függvényrendszer $\tau, h_2, ..., h_n$ szerinti J Jacobi-determinánsa nem zérus a P pontban, akkor a tételt bebizonyítottuk.

z deriváltjainak kiszámításánál vegyük figyelembe, hogy $\mu=0$-nál a (6.1) rendszer jobb oldala és így $x(\vartheta+\tau; \vartheta, p^0+h, \mu, \tau)$ sem függ az utolsó változótól, τ-tól. Így

$$\frac{\partial z_i(P)}{\partial\tau} = \dot{x}_i(\tau_0; 0, p^0, 0, \tau_0) = \dot{p}_i(\tau_0) = \dot{p}_i^0 = \delta_{i1}\dot{p}_i^0,$$

továbbá

$$\frac{\partial z_i(P)}{\partial h_k} = \frac{\partial x_i(P)}{\partial h_k}-\delta_{ik}, \quad (i = 1, 2, ..., n;\ k = 2, ..., n),$$

ahol δ_{ik} a Kronecker-szimbólum. Ezek szerint

$$J = \left.\frac{\partial(z_1, \ldots, z_n)}{\partial(\tau, h_2, \ldots, h_n)}\right|_P = \begin{vmatrix} \dot{p}_1^0 & \dfrac{\partial x_1}{\partial h_2} & \ldots & \dfrac{\partial x_1}{\partial h_n} \\ 0 & \dfrac{\partial x_2}{\partial h_2}-1 & \ldots & \dfrac{\partial x_2}{\partial h_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dfrac{\partial x_n}{\partial h_2} & \ldots & \dfrac{\partial x_n}{\partial h_n}-1 \end{vmatrix}_P,$$

vagy

$$J = \dot{p}_1^0 \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_2}{\partial h_2}-1 & \ldots & \dfrac{\partial x_2}{\partial h_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial x_n}{\partial h_2} & \ldots & \dfrac{\partial x_n}{\partial h_n}-1 \end{vmatrix}_P, \tag{6.13}$$

ahol a P index azt jelöli, hogy minden elemet a P pontban kell venni.

Tekintsük most az $x(t; 0, x^0, 0, \tau_0)$ függvényt, mely minden $x^0 \in \Omega$-ra (6.3)-nak az $x^0 = x(0; 0, x^0, 0, \tau_0)$ kezdeti feltételt kielégítő megoldása. Mint ismeretes (lásd [45] 95. old.), ennek a függvénynek x^0 szerinti derivált mátrixa az $x^0 = p^0$ helyen,

$$\left.\frac{\partial x}{\partial x^0}\right|_{x^0=p^0} = \left[\frac{\partial x_i}{\partial x_k^0}\right]_{x^0=p^0}, \tag{6.14}$$

a (6.4) variációs rendszer azon alapmátrixa, melyre fennáll

$$\left.\frac{\partial x}{\partial x^0}\right|_{x^0=p^0,\, t=0} = E, \tag{6.15}$$

ahol E az n-edrendű egységmátrix. Így (6.4) karakterisztikus multiplikátorai a

$$\det\left(\left.\frac{\partial x}{\partial x^0}\right|_{x^0=p^0,\, t=\tau_0} - \lambda E\right) = 0 \tag{6.16}$$

egyenlet gyökei. Jelöljük a (6.14) mátrix első oszlopát ψ-vel, vagyis legyen

$$\psi = \left.\frac{\partial x}{\partial x_1^0}\right|_{x^0=p^0}.$$

A $t \to \psi(t)$ függvény a (6.4) egyenlet megoldása, és (6.15) miatt

$$\psi(0) = (1, 0, \ldots, 0) = \frac{1}{\dot{p}_1^0}(\dot{p}_1^0, 0, \ldots, 0) = \frac{1}{\dot{p}_1^0}\dot{p}^0.$$

Miután (6.4) homogén lineáris rendszer, innen azt kapjuk, hogy

$$\psi(t) \equiv \frac{1}{\dot{p}_1^0} \dot{p}(t),$$

vagyis ψ periodikus függvény τ_0 periódussal, $\psi(t+\tau_0) \equiv \psi(t)$ és speciálisan $\psi(\tau_0) = \psi(0)$. Ezek szerint (6.16) bal oldala a következő alakú:

$$\det\left(\left.\frac{\partial x}{\partial x^0}\right|_{x^0=p^0,\, t=\tau_0} - \lambda E\right) = \left|\begin{matrix} 1-\lambda & \frac{\partial x_1}{\partial x_2^0} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial x_n^0} \\ 0 & \frac{\partial x_2}{\partial x_2^0} - \lambda & \dots & \frac{\partial x_2}{\partial x_n^0} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \frac{\partial x_n}{\partial x_2^0} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial x_n^0} - \lambda \end{matrix}\right|_{x^0=p^0,\, t=\tau_0} =$$

$$= (1-\lambda)\left|\begin{matrix} \frac{\partial x_2}{\partial x_2^0} - \lambda & \dots & \frac{\partial x_2}{\partial x_n^0} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial x_2^0} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial x_n^0} - \lambda \end{matrix}\right|_{x^0=p^0,\, t=\tau_0}.$$

Miután a feltevés szerint az 1 szám egyszeres gyök, ezért

$$\left|\begin{matrix} \frac{\partial x_2}{\partial x_2^0} - 1 & \dots & \frac{\partial x_2}{\partial x_n^0} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial x_2^0} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial x_n^0} - 1 \end{matrix}\right|_{x^0=p^0,\, t=\tau_0} \neq 0.$$

Azonban a (6.13) jobb oldalán szereplő determináns éppen ezzel a determinánssal egyenlő és így $J \neq 0$.!

Az előző tételben tehát egyebek mellett bebizonyítottuk, hogy ha (6.4)-nek az 1 szám egyszeres karakterisztikus multiplikátora, akkor van $\alpha_1 > 0$ és $\alpha_2 > 0$ úgy, hogy ha $|\mu| < \alpha_1$, $|\vartheta| < \alpha_2$ akkor van egy és csak egy C^1 osztálybeli $\tau(\mu, \vartheta)$, melyre $\tau(0, 0) = \tau_0$, és az

$$\dot{x} = f(x) + \mu g\left(\frac{t}{\tau(\mu, \vartheta)}, x, \mu, \tau(\mu, \vartheta)\right) \tag{6.17}$$

differenciálegyenlet-rendszernek van egy és csak egy D-periodikus $t \to \varphi(t, \mu, \vartheta)$ megoldása $\tau(\mu, \vartheta)$ periódussal és $a = a^0\tau_0/\tau(\mu, \vartheta)$ együttható vektorral, melynek pályája a (6.7) hipersíkot a $t = \vartheta$ értéknél metszi, és melyre a φ (háromváltozós) függvény C^1 osztálybeli és $\varphi(t, 0, 0) \equiv p(t)$.

Az előbbi tételből a^0 és „a" helyébe mindenhová zérust írva adódik a

6.4. KÖVETKEZMÉNY. *Ha a* (6.3) *perturbálatlan rendszer nem állandó p megoldása a közönséges értelemben periodikus* τ_0 *periódussal és a* (6.4) *variációs rendszernek az* 1 *szám egyszeres karakterisztikus multiplikátora, akkor (függetlenül attól, hogy* (6.1) *periodikus-e az x vektorváltozóban, vagy nem) minden* (μ, ϑ)*-hoz, melyre* $|\mu|$ *és* $|\vartheta|$ *elég kicsi, tartozik pontosan egy* $\tau(\mu, \vartheta)$ *periódus és pontosan egy* (6.8)*-at kielégítő* $h(\mu, \vartheta)$ *vektor úgy, hogy ha* $\tau=\tau(\mu, \vartheta)$*-t helyettesítünk* (6.1)*-be, akkor*

$$\varphi(t, \mu, \vartheta) = x\big(t; \vartheta, p^0+h(\mu, \vartheta), \mu, \tau(\mu, \vartheta)\big) \tag{6.18}$$

a (6.1) *rendszer (közönséges értelemben) periodikus megoldása* $\tau(\mu, \vartheta)$ *periódussal, a* τ *és a h függvény a* $(\mu, \vartheta)=(0, 0)$ *pont egy környezetében* C^1 *osztálybeli,* $\tau(0, 0)=\tau_0$*,* $h(0, 0)=0$ *és* $\varphi(t, 0, 0)\equiv p(t)$.

A 6.3. tételből, az analitikus függvényrendszerekre vonatkozó implicit függvényrendszer egzisztenciatételéből (lásd pl. [20] 268. old.) és az analitikus differenciálegyenlet-rendszerek megoldásainak analicitását kimondó tételből (lásd pl. [58] 44. old.) adódik a

6.5. KÖVETKEZMÉNY. *Ha a* (6.1) *és* (6.5) *rendszerre vonatkozó feltevéseken kívül még az is igaz, hogy* (6.1) *jobb oldala az* $R\times\Omega\times I_\mu\times I_\tau$ *tartományon analitikus és* (6.4)*-nek az* 1 *szám egyszeres karakterisztikus multiplikátora, akkor érvényes a* 6.3 *tétel (illetve a* 6.4. *következmény) és a* $(\mu, \vartheta)=(0, 0)$ *pontnak van olyan W környezete, hogy a* 6.2. *tételben (ill. a* 6.4. *következményben) szereplő* τ *és h függvények W-ben, a* φ *függvény pedig* $R\times W$*-ben analitikusak.*

E pont befejezéseként megjegyezzük, hogy a lényegében H. POINCARÉtól származó 4.C. tétel kiadódik mint a 6.4. következmény speciális esete. Ehhez csak azt kell észrevennünk, hogy az előbbiek akkor is érvényben maradnak, ha a (6.1)-ben szereplő g függvény nem függ t-től és τ-tól (t-ben és τ-ban állandó), továbbá azt, hogy ekkor (6.1) is autonóm, így (6.18)-ra fennáll $\varphi(t, \mu, \vartheta)\equiv\varphi(t+\vartheta_0-\vartheta, \mu, \vartheta_0)$ és e függvény periódusa $\tau(\mu, \vartheta)\equiv\tau(\mu, \vartheta_0)$, ahol ϑ_0 tetszőlegesen rögzített érték.

7. A perturbált megoldás stabilitása

Tételezzük fel, hogy fennállnak a 6.3. tétel feltételei és képezzük a (6.1)-ből kapott

$$\dot{x} = f(x)+\mu g\left(\frac{t}{\tau(\mu, \vartheta)}, x, \mu, \tau(\mu, \mu)\right) \tag{7.1}$$

perturbált rendszernek a (6.10) D-periodikus megoldásra vonatkozó variációs rendszerét:

$$\dot{y} = \left[f_x'(\varphi(t, \mu, \vartheta))+\mu g_x'\left(\frac{t}{\tau(\mu, \vartheta)}, \varphi(t, \mu, \vartheta), \mu, \tau(\mu, \vartheta)\right)\right] y. \tag{7.2}$$

Jelöljük $Y(t; \mu, \vartheta)$-val (7.2) azon alapmátrixát, melyre $Y(0; \mu, \vartheta)=E$, az egységmátrix. Az ennek az alapmátrixnak megfelelő főmátrix

$$C(\mu, \vartheta) = Y(\tau(\mu, \vartheta); \mu, \vartheta). \tag{7.3}$$

Ha $(\mu, \vartheta)=(0, 0)$, akkor $\tau(0, 0)=\tau_0$, $\varphi(t; 0, 0)\equiv p(t)$ és a (7.2) rendszer (6.4)-re redukálódik. Így

$$C(0, 0) = Y(\tau_0; 0, 0). \tag{7.4}$$

A $(\mu, \vartheta)\to C(\mu, \vartheta)$ függvény C^0 osztálybeli a $(\mu, \vartheta)=(0, 0)$ pont egy elég kis környezetében, amint ez pl. a [12] 29. oldalán álló tételből következik. Ismeretes továbbá (lásd [31] I. 92. old.), hogy „egy polinom gyökei az együtthatók folytonos függvényei a konkrét együtthatók egy környezetében". Miután $C(0, 0)$-nak az 1 szám egyszeres sajátértéke, innen következik, hogy van $(\mu, \vartheta)=(0, 0)$-nak W_2 környezete, az 1 számnak $W_1\subset R$ környezete és egy és csak egy

$$\lambda: W_2 \to W_1 \tag{7.5}$$

függvény úgy, hogy $\lambda\in C^0$, $\lambda(0, 0)=1$ és minden $(\mu, \vartheta)\in W_2$-re $\lambda(\mu, \vartheta)$ a $C(\mu, \vartheta)$ mátrix egyetlen W_1-be eső sajátértéke. (Ha W_2 elég kicsi, akkor az 1 számnak, mint a komplex sík egy pontjának elég kis környezetében nem lehet $C(\mu, \vartheta)$-nak a $\lambda(\mu, \vartheta)$ értéken kívül más sajátértéke. Ezért $\lambda(\mu, \vartheta)$ szükségképpen valós; ha ui. komplex lenne, akkor konjugáltja is $C(\mu, \vartheta)$-nak az 1 szám ugyanazon környezetébe eső sajátértéke lenne.)

7.1. Lemma. *Ha a λ_0 (komplex) szám a*

$$P(\lambda, a^0_{n-1}, \dots, a^0_1, a^0_0) = \lambda^n + a^0_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a^0_1\lambda + a^0_0$$

polinom egyszeres gyöke, ahol $a^0_k\in K$ $(k=0, 1, \dots, n-1;$ K a komplex számok halmaza), akkor van az $(a^{n-1}_0, \dots, a^0_0)\in K$ pontnak olyan $U_n\subset K^n$ környezete és $\lambda_0\in K$-nak olyan $U\subset K$ környezete, hogy minden $(a_{n-1}, \dots, a_0)\in U_n$-re a $P(\lambda, a_{n-1}, \dots, a_0)= =\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\dots+a_0$ polinomnak pontosan egy (egyszeres) $\lambda(a_{n-1}, \dots, a_0)$ gyöke van U-ban, a $\lambda: U_n\to U$ függvény analitikus és $\lambda(a^0_{n-1}, \dots, a^0_0)=\lambda_0$.

Bizonyítás. Ez a lemma az analitikus függvényre vonatkozó implicit függvény egzisztenciatételéből (lásd [20] 268. old.) azonnal következik, ha figyelembe vesszük, hogy az $(n+1)$ változós P függvény analitikus és

$$P'_\lambda(\lambda_0, a^0_{n-1}, \dots, a^0_0) \neq 0,$$

mivel λ_0 a $\lambda^n+a^0_{n-1}\lambda^{n-1}+\dots+a^0_1\lambda+a^0_0$ polinom egyszeres gyöke.!

Ha a (6.1) rendszerre tett egyéb kikötések és a 6.3. tétel feltételei mellett az f és a g függvények az Ω, ill. az $R\times\Omega\times I_\mu\times I_\tau$ halmazon a C^2 függvényosztályhoz tartoznak (ill. analitikusak), akkor a [12] 30. (ill. 36.) oldalán álló tételből következik, hogy a (7.3)-mal definiált $C(\mu, \vartheta)$ mátrix C^1 osztálybeli (ill. analitikus) és a 7.1. lemmából következik, hogy ekkor a (7.5)-tel definiált $\lambda(\mu, \vartheta)$ karakterisztikus multiplikátor is C^1 osztálybeli (ill. analitikus).

7.2. TÉTEL. *Ha a* (6.1) *rendszerre tett egyéb kikötések mellett f és g a C^2 függvényosztályhoz tartoznak, fennállnak a* 6.3. *tétel feltételei és a* (6.4) *variációs rendszer* $(n-1)$ *számú karakterisztikus multiplikátora abszolút értékben kisebb mint* 1, *akkor a* $(\mu, \vartheta)=(0, 0)$ *pontnak van olyan W környezete, hogy minden* $(\mu, \vartheta)\in W$*-re, melyre*

$$\mu\lambda'_\mu(0,0) < 0, \tag{7.6}$$

a (7.1) *rendszer D-periodikus* $\varphi(t, \mu, \vartheta)$ *megoldása aszimptotikusan stabilis. (Itt* $\lambda(\mu, \vartheta)$ *a* (7.5)*-tel definiált függvény.)*

Bizonyítás. A tétel kimondása előtt tett megjegyzésből következik, hogy $C(\mu, \vartheta)$ és a (7.5)-tel definiált λ függvény folytonosan differenciálható. Miután a $C(0,0)$ mátrix $(n-1)$ számú sajátértéke a feltevés szerint abszolút értékben kisebb mint 1, ezért a $(\mu, \vartheta)=(0, 0)$ pontnak van $W_3\subset W_2$ környezete úgy, hogy minden $(\mu, \vartheta)\in W_3$-ra $C(\mu, \vartheta)$ $(n-1)$ számú sajátértéke abszolút értékben egynél kisebb és kívül van az 1 számnak egy a komplex síkbeli környezetén.

Nyilvánvaló, hogy minden $\vartheta\in R$-re

$$\varphi(t, 0, \vartheta) \equiv p(t-\vartheta) \tag{7.7}$$

és ennek következtében

$$\begin{aligned} \tau(0, \vartheta) &\equiv \tau_0, \\ h(0, \vartheta) &\equiv 0, \end{aligned} \tag{7.8}$$

és így (7.2) $\mu=0$ esetén a következő rendszerre redukálódik:

$$\dot{y} = f'_x(p(t-\vartheta))y. \tag{7.9}$$

Könnyű belátni, hogy az utóbbi rendszer egy (az $Y(t;\, 0, \vartheta)$-tól általában különböző) alapmátrixa

$$\tilde{Y}_\vartheta(t) = Y(t-\vartheta;\, 0, 0) \tag{7.10}$$

mátrix. A megfelelő főmátrix az

$$\begin{aligned} \tilde{C}_\vartheta &= \tilde{Y}_\vartheta^{-1}(t)\tilde{Y}_\vartheta(t+\tau_0) = \\ &= Y^{-1}(t-\vartheta;\, 0, 0)Y(t+\tau_0-\vartheta;\, 0, 0) = \\ &= Y^{-1}(0;\, 0, 0)Y(\tau_0;\, 0, 0) = C(0, 0). \end{aligned}$$

Tehát $\mu=0$ esetén a (7.3) rendszer karakterisztikus multiplikátorai nem függnek ϑ-tól (ϑ-ban állandók). Speciálisan innen az következik, hogy

$$\lambda(0, \vartheta) \equiv 1 \tag{7.11}$$

a $\vartheta=0$ pont egy elég kis környezetében. Legyen $\lambda'_\mu(0, 0)>0$, (<0), ekkor λ'_μ folytonossága miatt $(0, 0)$-nak van $W_4\subset W_3$ környezete, melyben $\lambda'_\mu(\mu, \vartheta)>0$ (<0), $(\mu, \vartheta)\in W_4$. Így minden rögzített ϑ_0-ra, melyre $(0, \vartheta_0)\in W_4$, a $\lambda(\mu, \vartheta_0)$ függvény szigorúan növekedő (csökkenő) a $(\mu, \vartheta_0)\in W_4$ szakaszon. Mivel $\lambda(0, \vartheta_0)=1$, ebből az következik, hogy $(0, 0)$-nak van $W\subset W_4$ környezete úgy, hogy minden $(\mu, \vartheta)\in W$-re, melyre

$\mu<0$ $(\mu>0)$, fennáll $-1<\lambda(\mu, \vartheta)<1$, vagyis $|\lambda(\mu, \vartheta)|<1$. Ezekre a (μ, ϑ) párokra tehát (7.2) összes karakterisztikus multiplikátora abszolút értékben kisebb, mint 1, így tételünk állítása az 5.4. tételből következik.!

7.3. KÖVETKEZMÉNY. *Ha a* (6.1) *rendszerre tett egyéb kikötések mellett f és g a C^2 függvényosztályhoz tartoznak, fennállnak a* 6.4. *következmény feltételei és a* (6.4) *variációs rendszer* $(n-1)$ *számú karakterisztikus multiplikátora abszolút értékben kisebb, mint* 1, *akkor a* $(\mu, \vartheta)=(0, 0)$ *pontnak van olyan W környezete, hogy minden* $(\mu, \vartheta)\in W$*-re, melyre* $\mu\lambda'_\mu(0, 0)<0$, *a* (7.1) *rendszer periodikus* $\varphi(t, \mu, \vartheta)$ *megoldása aszimptotikusan stabilis.*

Megjegyezzük, hogy a (7.6) feltételt kielégítő μ értékek csak akkor léteznek, ha $\lambda'_\mu(0, 0)\neq 0$. Ha $\lambda'_\mu(0, 0)=0$, akkor (7.6)-ot kielégítő μ érték nem létezik. Ebben az esetben azonban lehetséges, hogy a $(\mu, \vartheta)=(0, 0)$ pont a $\lambda(\mu, \vartheta)$ függvény „feltételes, lokális, szigorú maximum helye a $\mu\neq 0$ feltétel mellett". Ekkor az előbbi bizonyítás alapján a $(\mu, \vartheta)=(0, 0)$ pontnak nyilvánvalóan van olyan W környezete, hogy minden $(\mu, \vartheta)\in W$-re, melyre $\mu\neq 0$, a $\varphi(t, \mu, \vartheta)$ megoldás aszimptotikusan stabilis. A szóban forgó eset általánosságban való elintézése nem látszik egyszerűnek, mivel a lokális maximum létezésének közismert, elégséges feltételei (7.11) miatt nem alkalmazhatók. A kérdésre a 12. pontban visszatérünk.

Megjegyezzük továbbá, hogy ha a (6.1)-ben szereplő g függvény nem függ t-től és τ-tól (t-ben és τ-ban állandó), vagyis a perturbált (6.1) rendszer is autonóm, akkor (lásd a 6. pont végén tett megjegyzést) $\lambda(\mu, \vartheta)\equiv 1$, a $(\mu, \vartheta)=(0, 0)$ pont egy környezetében. Így a 7.3. következmény a 4.D. tételre redukálódik, illetve az 5.A. tétel felhasználásával a 7.2. tétel helyett megkapjuk a 4.D. tétel D-periodikus megoldásokra vonatkozó analogonját.

„Instabilitási tételekkel" helykímélés végett az eddigiekben sem foglalkoztunk, és a továbbiakban sem kívánunk ilyenekre kitérni. Itt azonban megjegyezzük, hogy a [12] könyv 317. és 321. oldalán található tételek alapján könnyen igazolható a 7.2. tételt mintegy kiegészítő

7.4. TÉTEL. *Ha a* (6.1) *rendszerre tett egyéb kikötések mellett f és g a C^2 függvényosztályhoz tartoznak és fennállnak a* 6.3. *tétel feltételei, akkor a* $(\mu, \vartheta)=(0, 0)$ *pontnak van olyan W környezete, hogy minden* $(\mu, \vartheta)\in W$*-re, melyre* $\mu\lambda'_\mu(0, 0)>0$ *a* (7.1) *rendszer D-periodikus* $\varphi(t, \mu, \vartheta)$ *megoldása nem stabilis.*

8. Egy példa

Az ebben a fejezetben kifejtett elméletet meglehetősen nehéz olyan illusztratív példán bemutatni, amely „végigszámolható", vagyis amelyben a megoldás, annak periódusa és a stabilitás szempontjából fontos $(\mu, \vartheta)\to\lambda(\mu, \vartheta)$ függvény (lásd (7.5)) pl. elemi függvények segítségével, zárt alakban előállítható. Ez azért van, mert az elmélet „annyira nemlineáris, hogy a lineáris esetet nem tartalmazza speciális esetként". Ezzel azt kívánjuk kifejezni, hogy a 3. pont végén tett megjegyzés szerint a 6.3. tétel alapvető feltétele (ti. az, hogy az 1 szám egyszeres karakterisztikus multiplikátor) lineáris esetben nem teljesülhet. A következő példa mégis illusztrálja az elméletet annak ellenére, hogy nem elégít ki minden követelményt.

Tekintsük az

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) - \mu\left(x_2 + \cos\frac{2\pi}{\tau}t\right) \tag{8.1}$$
$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) + \mu\left(x_1 + \sin\frac{2\pi}{\tau}t\right)$$

kétdimenziós differenciálegyenlet-rendszert, ahol

$$f_1(x_1, x_2) = \begin{cases} x_2 - \frac{1}{3}x_1^3 + \frac{1}{3}(1-x_2^2)^{3/2}, & \text{ha} \quad 0 \leqq x_1 \leqq 1, |x_2| \leqq 1, \\ x_2 - \frac{1}{3}x_1^3 - \frac{1}{3}(1-x_2^2)^{3/2}, & \text{ha} \quad -1 \leqq x_1 < 0, |x_2| \leqq 1, \end{cases}$$

$$f_2(x_1, x_2) = \begin{cases} -x_1 - \frac{1}{3}x_2^3 + \frac{1}{3}(1-x_1^2)^{3/2}, & \text{ha} \quad |x_1| \leqq 1, \quad 0 \leqq x_2 \leqq 1 \\ -x_1 - \frac{1}{3}x_2^3 - \frac{1}{3}(1-x_1^2)^{3/2}, & \text{ha} \quad |x_1| \leqq 1, \quad -1 \leqq x_2 < 0. \end{cases}$$

Az $f=(f_1, f_2)$ függvény tehát az x_1x_2 sík origó középpontú, a koordináta tengelyekkel párhuzamos, 2 hosszúságú oldalú, zárt négyzetlapján van értelmezve, azonban a koordináta tengelyeken, kivéve az $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$ és $(0, -1)$ pontokat, nem folytonos. A megfelelő perturbálatlan rendszer

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2), \quad \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2), \tag{8.2}$$

melynek a $p(t)=(\sin t, \cos t)$ függvény nem állandó, periodikus megoldása 2π periódussal. $p(0)=(0, 1)$, $\dot{p}(0)=(1, 0)$. (8.2) p-re vonatkozó variációs rendszere

$$\dot{y}_1 = -(\sin^2 t)y_1 + (1-\sin t\cos t)y_2 \tag{8.3}$$
$$\dot{y}_2 = -(1+\sin t\cos t)y_1 - (\cos^2 t)y_2.$$

Miután (8.3)-nak $\dot{p}(t)=(\cos t, -\sin t)$ megoldása, azért könnyű előállítani (8.3) azon $Y(t)$ alapmátrixát, mely a $t=0$ helyen az egységmátrixszal egyenlő:

$$Y(t) = \begin{bmatrix} \cos t & e^{-t}\sin t \\ -\sin t & e^{-t}\cos t \end{bmatrix} \tag{8.4}$$

(8.3) karakterisztikus multiplikátorai az $Y(2\pi)$ mátrix sajátértékei: $\lambda_1=e^{-2\pi}$, $\lambda_2=1$.

Ha (8.1)-ben elvégezzük a $\tau=2\pi(1-2\mu)^{-1}$ helyettesítést, akkor minden μ-re, melyre $|\mu|<\frac{1}{2}$, az

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) - \mu(x_2 + \cos(1-2\mu)t) \tag{8.5}$$
$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) + \mu(x_1 + \sin(1-2\mu)t)$$

rendszernek a

$$\varphi(t, \mu) = (\sin(1-2\mu)t, \cos(1-2\mu)t) \tag{8.6}$$

függvény periodikus megoldása $\tau=2\pi(1-2\mu)^{-1}$ periódussal. A $\mu=0$ esetben $\tau=2\pi$ és $\varphi(t,0)\equiv p(t)$. A (8.5) rendszer (8.6) megoldása a $t=0$ $(=\vartheta)$ értéknél metszi a $p(0)=(0,1)$ ponton áthaladó és a $\dot{p}(0)=(1,0)$ vektorra merőleges egyenest, vagyis az x_2-tengelyt. (A 6.2. lemmában bevezetett változó értékét a kezelhetőség érdekében most végig zérusnak rögzítjük.)

A (8.5) rendszernek a (8.6) megoldásra vonatkozó variációs rendszere a következő:

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= -y_1\sin^2(1-2\mu)t+y_2\big(1-\mu-\sin(1-2\mu)t\cos(1-2\mu)t\big)\\ \dot{y}_2 &= y_1\big(-1+\mu-\sin(1-2\mu)t\cos(1-2\mu)t\big)-y_2\cos^2(1-2\mu)t.\end{aligned} \tag{8.7}$$

(8.7) egy alapmátrixa (ad hoc perturbációs módszerek és intuitív okoskodás alapján):

$$Y(t,\mu)=$$

$$=\begin{bmatrix} e^{\nu_1 t}\left(\cos(1-2\mu)t-\dfrac{\mu}{1+\nu_1}\sin(1-2\mu)t\right) & e^{\nu_2 t}\left(-\dfrac{1+\nu_2}{\mu}\cos(1-2\mu)t+\sin(1-2\mu)t\right)\\ e^{\nu_1 t}\left(-\sin(1-2\mu)t-\dfrac{\mu}{1+\nu_1}\cos(1-2\mu)t\right) & e^{\nu_2 t}\left(\dfrac{1+\nu_2}{\mu}\sin(1-2\mu)t+\cos(1-2\mu)t\right)\end{bmatrix}$$

ahol

$$\nu_1=-\frac{1}{2}\big(1-\sqrt{1-4\mu^2}\big),\quad \nu_2=-\frac{1}{2}\big(1+\sqrt{1-4\mu^2}\big).$$

Könnyen belátható, hogy $\mu\to 0$ esetén $\nu_1\to 0$, $\nu_2\to -1$, $\dfrac{1+\nu_2}{\mu}\to 0$ és $\lim\limits_{\mu\to 0}Y(t,\mu)=Y(t)$, ahol $Y(t)$ a (8.3) rendszer (8.4) alapmátrixa. A (8.7) rendszer főmátrixa (2.5) alapján most már egyszerű számolással adódik:

$$C(\mu)=Y^{-1}(0,\mu)Y\big(2\pi(1-2\mu)^{-1},\mu\big)=$$

$$=\begin{bmatrix} e^{-\frac{\pi}{1-2\mu}(1-\sqrt{1-4\mu^2})} & 0\\ 0 & e^{-\frac{\pi}{1-2\mu}(1+\sqrt{1-4\mu^2})}\end{bmatrix}.$$

Ezek szerint (8.7) karakterisztikus multiplikátorai:

$$\lambda_1(\mu)=e^{-\frac{\pi}{1-2\mu}(1+\sqrt{1-4\mu^2})},\quad \lambda_2(\mu)=e^{-\frac{\pi}{1-2\mu}(1-\sqrt{1-4\mu^2})}.$$

Látható, hogy $\lambda_1(0)=e^{-2\pi}$, $\lambda_2(0)=1$ és $\lambda_2'(0)=0$. A $\mu=0$ hely a $\lambda_2(\mu)$ függvény szigorú maximumhelye és $|\lambda_1(\mu)|<1$, $|\lambda_2|\mu)|<1$, ha $|\mu|<\dfrac{1}{2}$ és $\mu\neq 0$. Sajnos, ez a tetszetős eredmény csak formális; a (8.6) megoldás aszimptotikus stabilitása ebből nem következik, mivel a (8.5) rendszer jobb oldala a legelemibb „simasági feltételeket” sem elégíti ki.

III. FEJEZET

PERTURBÁLT PERIODIKUS MEGOLDÁSOK MEGHATÁROZÁSA ÉS VIZSGÁLATA

9. A perturbációs periódus és a periodikus megoldás sorfejtése

Ebben a pontban feltételezzük, hogy fennállnak a (6.1) és (6.3) rendszerre a 6. pont elején tett kikötések, továbbá a 6.5 következmény feltételei. Feltételezzük továbbá ugyanúgy, mint a 6.3. tétel bizonyításában, hogy a (6.7)-tel definiált Π hipersíkot az $x_1=p_1^0$ egyenlet jellemzi, vagyis $\dot{p}^0=\dot{p}(0)=(\dot{p}_1^0, 0, \ldots, 0)$, $\dot{p}_1^0\neq 0$. Ekkor, mint tudjuk, a $(\mu, \vartheta)=(0, 0)$ pontnak van olyan $W\subset R^2$ környezete, hogy minden $(\mu, \vartheta)\in W$-hez tartozik pontosan egy $\tau(\mu, \vartheta)$ érték és $h(\mu, \vartheta)$ vektor, melyre az

$$\dot{x}=f(x)+\mu g\left(\frac{t}{\tau(\mu, \vartheta)}, x, \mu, \tau(\mu, \vartheta)\right) \tag{9.1}$$

differenciálegyenletnek a

$$\varphi(t, \mu, \vartheta) = x(t; \vartheta, p^0+h(\mu, \vartheta), \mu, \tau(\mu, \vartheta)) \tag{9.2}$$

megoldása D-periodikus $\tau(\mu, \vartheta)$ periódussal és $a=\frac{\tau_0}{\tau(\mu, \vartheta)}a^0$ együttható vektorral, a $\tau\colon W\to R$ és a $h\colon W\to R^n$ függvény analitikus, $\tau(0, 0)=\tau_0$, $h(0, 0)=0$, $h(\mu, \vartheta)=$ $=(0, h_2, \ldots, h_n)$, a φ megoldás az $R\times W$ tartományon analitikus és $\varphi(t, 0, 0)\equiv p(t)$.

A $\tau(\mu, \vartheta)$ periódus és a $\varphi(t, \mu, \vartheta)$ megoldás előállítására H. POINCARÉ módszerét alkalmazzuk, vagyis mindkét függvényt a μ „kis paraméter" hatványai szerint haladó hatványsorba fejtjük és a hatványsorok együtthatóit a (9.1) differenciálegyenlet-rendszerből határozzuk meg.

Rögzített μ és ϑ mellett, $(\mu, \vartheta)\in W$, bevezetjük a

$$t = \vartheta+s\tau(\mu, \vartheta) \tag{9.3}$$

egyenlettel definiált új s független változót. Az új változóban a (9.1) rendszer a

$$\frac{dx}{ds} = \tau(\mu, \vartheta)\left[f(x)+\mu g\left(s+\frac{\vartheta}{\tau(\mu, \vartheta)}, x, \mu, \tau(\mu, \vartheta)\right)\right] \tag{9.4}$$

rendszerbe megy át, melynek (9.2)-ből nyert megoldása

$$\psi(s, \mu, \vartheta) = \varphi(\vartheta+s(\mu, \vartheta), \mu, \vartheta).$$

A ψ függvény nyilvánvalóan D-periodikus, periódusa 1 és együttható vektora az $a\tau(\mu, \vartheta)=a^0\tau_0$ vektor. (9.4) ψ megoldását és a $\tau(\mu, \vartheta)$ függvényt rögzített ϑ mellett

μ hatványai szerint haladó hatványsorba fejtjük:

$$\psi(s, \mu, \vartheta) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \psi^k(s, \vartheta), \tag{9.5}$$

$$\tau(\mu, \vartheta) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \tau_k(\vartheta). \tag{9.6}$$

Könnyű belátni, hogy $\varphi(t, 0, \vartheta) \equiv p(t-\vartheta)$ és ennek következtében $\tau_0(\vartheta) = \tau(0, \vartheta) \equiv \tau_0$, ill.

$$\psi^0(s, \vartheta) = \psi(s, 0, \vartheta) = \varphi(\vartheta + s\tau_0, 0, \vartheta) = p(s\tau_0). \tag{9.7}$$

Miután a D-periodikus ψ függvény együttható vektora, $a^0\tau_0$ nem függ μ-től, és ψ periódusa, 1 is μ-től független állandó, ezért a ψ függvény μ szerinti deriváltjai, és így a $\psi^k(s, \vartheta)$ függvények is ($k=1, 2, 3, \dots$) a közönséges értelemben periodikusak 1 periódussal. Továbbá fennáll

$$\psi(0, \mu, \vartheta) = \varphi(\vartheta, \mu, \vartheta) = p^0 + h(\mu, \vartheta).$$

Mivel a $h(\mu, \vartheta)$ vektor első koordinátája azonosan zérus, innen következik, hogy ψ első koordinátája az $s=0$ helyen

$$\psi_1(0, \mu, \vartheta) \equiv p_1^0,$$

ahonnan viszont az adódik, hogy a ψ függvény μ szerinti deriváltjainak és így a $\psi^k(s, \vartheta)$ vektoroknak ($k=1, 2, 3, \dots$) első koordinátája az $s=0$ helyen zérus, vagyis

$$\psi_1^k(0, \vartheta) \equiv 0, \quad k = 1, 2, \dots. \tag{9.8}$$

Helyettesítsük be a (9.5) és (9.6) sorokat a (9.4) differenciálegyenlet-rendszerbe; a következő azonosságot nyerjük:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \frac{d\psi^k(s, \vartheta)}{ds} \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \tau_k(\vartheta) \left[f(\psi(s, \mu, \vartheta)) + \mu g\left(s + \frac{\vartheta}{\tau(\mu, \vartheta)}, \psi(s, \mu, \vartheta), \mu, \tau(\mu, \vartheta)\right)\right].$$

A jobb oldalon álló második tényezőt μ szerint hatványsorba fejtve, a bal-, ill. a jobb oldalon álló megfelelő tagok együtthatóit egyenlővé téve és (9.7)-et felhasználva a következő azonosságokat kapjuk:

$$\frac{dp(s\tau_0)}{ds} \equiv \tau_0 f(p(s\tau_0)), \tag{9.9}$$

(9.10)

$$\frac{d\psi^1(s, \vartheta)}{ds} \equiv \tau_0 f_x'(p(s\tau_0))\psi^1(s, \vartheta) + \tau_0 g\left(s + \frac{\vartheta}{\tau_0}, p(s\tau_0), 0, \tau_0\right) + \tau_1(\vartheta) f(p(s\tau_0)),$$

és hasonló, bár egyre bonyolultabb azonosságokat $\psi^k(s, \vartheta)$-ra ($k=2, 3, \dots$). Az előbbi azonosság azt jelenti, hogy az $s \to \psi^1(s, \vartheta)$ függvény kielégíti a

$$\frac{dz}{ds} = \tau_0 f'_x(p(s\tau_0))z + \tau_0 g\left(s + \frac{\vartheta}{\tau_0}, p(s\tau_0), 0, \tau_0\right) + \varkappa f(p(s\tau_0)) \tag{9.11}$$

differenciálegyenlet-rendszert, ha a $\varkappa$ paraméter értékét $\tau_1(\vartheta)$-nak választjuk.

E. A. Coddington és N. Levinson gondolatmenetének vázát követve (lásd [12] 354—356. old., ahol autonóm rendszer autonóm perturbációjának esetét intézik el) megmutatjuk, hogy az előbbi feltételek egyértelműen jellemzik a $\psi^1(s, \vartheta)$ függvényt és a $\tau_1(\vartheta)$ értéket.

9.1. Tétel. *Ha a* $\zeta\colon R \to R^n$ *differenciálható függvény és a* $\varkappa = \varkappa(\vartheta)$ *valós szám kielégíti* (9.11)*-et,* ζ *periodikus* 1 *periódussal:*

$$\zeta(s+1) \equiv \zeta(s) \tag{9.12}$$

és első koordinátája az $s=0$ *helyen zérus:*

$$\zeta_1(0) = 0, \tag{9.13}$$

akkor $\zeta(s) \equiv \psi^1(s, \vartheta)$ *és* $\varkappa(\vartheta) = \tau_1(\vartheta)$.

Bizonyítás. Vezessük be a

$$w(s) = \psi^1(s, \vartheta) - \zeta(s), \quad \gamma = \frac{1}{\tau_0}(\tau_1(\vartheta) - \varkappa(\vartheta))$$

jelöléseket, helyettesítsük $z = \zeta(s)$-et és $\varkappa = \varkappa(\vartheta)$-t (9.11)-be és az így kapott azonosságot vonjuk ki a (9.10) azonosságból. Azt kapjuk, hogy a w függvény a

$$\frac{dw}{ds} = \tau_0 f'_x(p(s\tau_0))w + \gamma\tau_0 f(p(s\tau_0))$$

inhomogén lineáris differenciálegyenlet-rendszer megoldása. (9.9) felhasználásával ez a rendszer még a

$$\frac{dw}{ds} = \tau_0 f'_x(p(s\tau_0))w + \gamma\frac{dp(s\tau_0)}{ds} \tag{9.14}$$

alakba is írható. A (9.14)-nek megfelelő homogén lineáris rendszer

$$\frac{dv}{ds} = \tau_0 f'_x(p(s\tau_0))v. \tag{9.15}$$

Az utóbbi a

$$\frac{dx}{ds} = \tau_0 f(x)$$

rendszer $p(s\tau_0)$ megoldására vonatkozó variációs rendszere (lásd (9.9)-et). Tehát

(9.15)-nek a $\frac{dp(s\tau_0)}{ds}$ függvény és így a

$$v^1(s) = \frac{1}{\tau_0 \dot{p}_1^0} \frac{dp(s\tau_0)}{ds}$$

függvény is periodikus megoldása 1 periódussal. A $\dot{p}(0)$-ra tett feltevések miatt $v^1(0)$ koordinátái

(9.16) $$v_k^1(0) = \delta_{1k} \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

ahol δ_{ik} a Kronecker-szimbólum. Közvetlen behelyettesítéssel könnyű belátni, hogy az $s \to \gamma\tau_0 \dot{p}_1^0 s v^1(s)$ függvény (9.14) megoldása, tehát a

$$v^2(s) = w(s) - \gamma\tau_0 \dot{p}_1^0 s v^1(s)$$

különbség (9.15) megoldása. Jelöljük $V(s)$-sel (9.15) azon alapmátrixát, melyre $V(0)=E$, az egységmátrix. Ekkor

$$w(s) = v^2(s) + \gamma\tau_0 \dot{p}_1^0 s v^1(s) =$$
$$= V(s)v^2(0) + \gamma\tau_0 \dot{p}_1^0 s v^1(s).$$

Mivel $w(s)$ periodikus és periódusa 1, ezért

$$0 = w(1) - w(0) = V(1)v^2(0) - Ev^2(0) + \gamma\tau_0 \dot{p}_1^0 v^1(0),$$

ahol $v^1(s)$ periodicitását is kihasználtuk. Innen

(9.17) $$\big(V(1) - E\big)v^2(0) = -\gamma\tau_0 \dot{p}_1^0 v^1(0).$$

(9.16) miatt a $V(0)=E$ mátrix első oszlopvektora éppen $v^1(0)$-lal egyenlő, tehát $v^1(s)$ a $V(s)$ alapmátrix első oszlopa. Jelöljük a $V(1)$ mátrix elemeit c_{ik}-val ($i, k = 1, 2, \dots, n$), a $v^2(0)$ vektor koordinátáit pedig v_k^2-val ($k=1, 2, \dots, n$). Miután $v^1(s)$ periodikus 1 periódussal, $V(1)$ első oszlopa $v^1(1)=v^1(0)$, vagyis $c_{i1}=\delta_{i1}$ ($i=1, 2, \dots, n$). Ezek szerint (9.17) a következő alakba írható:

(9.18) $$\begin{gathered} \sum_{k=2}^{n} c_{1k} v_k^2 = -\gamma\tau_0 \dot{p}_1^0 \\ \sum_{k=2}^{n} (c_{ik} - \delta_{ik}) v_k^2 = 0, \quad (i = 2, 3, \dots, n). \end{gathered}$$

$V(1)$ sajátértékei a (9.15) rendszer karakterisztikus multiplikátorai, ezek viszont a (6.4) rendszer karakterisztikus multiplikátoraival azonosak (multiplicitásokkal együtt), hiszen ha $Y(t)$ (6.4) alapmátrixa, akkor $Y(s\tau_0)$ (9.15) alapmátrixa. Miután feltevésünk szerint az 1 szám $V(1)$ pontosan egyszeres sajátértéke, ezért a (9.18) egyenletrendszer utolsó $(n-1)$ számú egyenletéből álló homogén lineáris egyenletrendszer determinánsa nem zérus. Innen következik, hogy $v_2^2 = v_3^2 = \dots = v_n^2 = 0$. Ezeket az értékeket (9.18) első egyenletébe helyettesítve kapjuk, hogy $\gamma=0$, vagyis $\varkappa(\vartheta)=\tau_1(\vartheta)$. Továbbá, mivel $v^2(0)$ a $v^1(0)$ vektor skalárszorosa, és $\gamma=0$ miatt $w(s)\equiv$

$\equiv v^2(s)$, ezért $w(s) \equiv cv^1(s)$, ahol c valamilyen skalár szám. Azonban (9.8)-ból és (9.13)-ból következik, hogy $w(0)$ első koordinátája zérus, míg $v^1(0)$ első koordinátája 1-gyel egyenlő. Tehát $c=0$, vagyis $w(s) \equiv 0$, ami állításunkat igazolja.!

Megjegyezzük, hogy (9.11) általános megoldása explicit módon felírható, feltéve, hogy a megfelelő homogén rendszer, vagyis (9.15) egy alapmátrixát ismerjük. Egy ilyen alapmátrixot viszont ismerünk, ha ismerjük (6.4) egy alapmátrixát. Ha (9.11) általános megoldását felírtuk, akkor a (9.12) és (9.13) feltételek felhasználásával $\varkappa = \tau_1(\vartheta)$ és a $\psi^1(s, \vartheta)$ megoldás könnyen meghatározható. Ezek szerint a *perturbált D-periodikus megoldás és annak $\tau(\mu, \vartheta)$ periódusa sorfejtéseiben az első (μ-ben elsőrendű) tagok meghatározásához semmi másra nincs szükségünk, mint a perturbálatlan rendszer D-periodikus p megoldására és a p-re vonatkozó variációs rendszer egy alapmátrixára.*

A (9.5) és (9.6) sorfejtésekben a következő tagok, $\psi^2(s, \vartheta)$, $\tau_2(\vartheta)$; $\psi^3(s, \vartheta)$, $\tau_3(\vartheta)$ és általában $\psi^k(s, \vartheta), \tau_k(\vartheta)$ meghatározására (9.11)-hez hasonló differenciálegyenlet-rendszerek szolgálnak. A hasonlóság abban áll, hogy olyan inhomogén lineáris differenciálegyenlet-rendszereket kapunk, melyeknek megfelelő homogén lineáris differenciálegyenlet-rendszer minden k-ra a (9.15) rendszer. Az inhomogén részek egyre bonyolultabbakká válnak, de azokban csak ismert, ill. korábban meghatározott mennyiségek lépnek fel, kivéve a $\varkappa$-t tartalmazó tagot, mely azonban minden k-ra a (9.11)-beli $\varkappa$-t tartalmazó taggal egyenlő. A 9.1. tétel analogonja a $k=2, 3, \ldots$ esetekben ugyanúgy bebizonyítható. Ez azt jelenti, hogy *a perturbálatlan rendszer p megoldására vonatkozó variációs rendszerének egy alapmátrixa ismeretében, elvben $\psi^k(s, \vartheta)$ és $\tau_k(\vartheta)$ $(k=1, 2, \ldots)$ rendre explicit módon előállítható.*

10. Explicit formula a perturbált megoldás stabilitásának eldöntésére

Ebben a pontban feltételezzük, hogy fennállnak a (6.1) és (6.3) rendszerre a 6. pont elején tett kikötések, továbbá a 6.5. következmény feltételei. Explicit kifejezést adunk a 7.2. tételben szereplő $\lambda'_\mu(0, 0)$ értékének meghatározására. Megmutatjuk, hogy $\lambda'_\mu(0, 0)$ kiszámításához nincs egyébre szükség, mint a (6.3) perturbálatlan rendszer p megoldására vonatkozó (6.4) variációs rendszer egy alapmátrixára (és a 9.1. tételt követő megjegyzés értelmében ennek alapján már meghatározható $\psi^1(s, 0)$ függvényre és $\tau_1(0)$ értékre).

Jelöljük $Y(t; \mu, \vartheta)$-val a (7.2) variációs rendszer azon alapmátrixát, melyre

(10.1) $$Y(0; \mu, \vartheta) = E.$$

Ekkor fennáll az

(10.2)
$$\dot{Y}(t; \mu, \vartheta) \equiv \left[f'_x(\varphi(t, \mu, \vartheta)) + \mu g'_x\left(\frac{t}{\tau(\mu, \vartheta)}, \varphi(t, \mu, \vartheta), \mu, \tau(\mu, \vartheta)\right)\right] Y(t; \mu, \vartheta)$$

azonosság.

$Y_0(t) = Y(t; 0, 0)$ a (6.4) variációs rendszer azon alapmátrixa, melyre $Y_0(0) = E$. $\mu=0$-ra (és tetszőleges $\vartheta \in R$-re) $\varphi(t, 0, \vartheta) \equiv p(t-\vartheta)$ és a (7.2) variációs rendszer az

(10.3) $$\dot{y} = f'_x(p(t-\vartheta))y$$

alakot veszi fel. Az utóbbi rendszernek $Y_0(t-\vartheta)$ egy alapmátrixa. Nyilvánvalóan fennáll az

$$(10.4)\qquad Y(t; 0, \vartheta) \equiv Y_0(t-\vartheta)Y_0^{-1}(-\vartheta)$$

azonosság (mivel mindkét oldalon (10.3) egy alapmátrixa áll és mindkét oldal a $t=0$ helyen az E egységmátrixszal egyenlő).

A (7.2) variációs rendszer

$$C(\mu, \vartheta) = Y(\tau(\mu, \vartheta); \mu, \vartheta)$$

főmátrixa a $(\mu, \vartheta)=(0, 0)$ pont egy környezetében analitikus (lásd a 7.1. lemmát követő megjegyzést) és így rögzített ϑ-ra (melynek abszolút értéke elég kicsi) μ hatványai szerint haladó, $\mu=0$ egy környezetében konvergens hatványsorba fejthető:

$$(10.5)\qquad C(\mu, \vartheta) = C_0(\vartheta)+\mu C_1(\vartheta)+\mu^2 R(\mu, \vartheta),$$

ahol R analitikus mátrix $(\mu, \vartheta)=(0, 0)$ egy környezetében. A $\tau(0, \vartheta)\equiv\tau_0$ azonosság és (10.4) felhasználásával

$$(10.6)\quad C_0(\vartheta) = C(0, \vartheta) = Y(\tau(0, 0); 0, \vartheta) = Y(\tau; 0, \vartheta) = Y_0(\tau_0-\vartheta)Y_0^{-1}(-\vartheta).$$

Speciálisan

$$(10.7)\qquad C_0(0) = C(0, 0) = Y_0(\tau_0).$$

A következőkben a $C_1(\vartheta)$ mátrix előállításával foglalkozunk.

$$(10.8)\quad C_1(\vartheta) = C'_\mu(0, \vartheta) = \dot{Y}(\tau(0, \vartheta); 0, \vartheta)\tau'_\mu(0, \vartheta)+Y'_\mu(\tau(0, \vartheta); 0, \vartheta) =$$
$$= \dot{Y}(\tau_0; 0, \vartheta)\tau_1(\vartheta)+Y'_\mu(\tau_0; 0, \vartheta),$$

ahol felhasználtuk a (9.6) sorfejtést.

(10.8) jobb oldalának első tagját annak figyelembevételével állítjuk elő, hogy a (10.4) mátrix a (10.3) rendszer alapmátrixa, vagyis

(10.9)
$$\dot{Y}(\tau_0; 0, \vartheta) = f'_x(p(\tau_0-\vartheta))Y(\tau_0; 0, \vartheta) = f'_x(p(\tau_0-\vartheta))Y_0(\tau_0-\vartheta)Y_0^{-1}(-\vartheta).$$

(10.8) jobb oldala második tagjának előállításához differenciáljuk a (10.2) azonosságot μ szerint a $\mu=0$ pontban:

$$(10.10)\qquad \begin{aligned} \dot{Y}'_\mu(t; 0, \vartheta) = {} & \Big[f''_{xx}(p(t-\vartheta))\varphi'_\mu(t, 0, \vartheta)+ \\ & +g'_x\left(\frac{t}{\tau_0}, p(t-\vartheta), 0, \tau_0\right)\Big] Y(t; 0, \vartheta)+ \\ & +f'_x(p(t-\vartheta))Y'_\mu(t; 0, \vartheta), \end{aligned}$$

ahol f''_{xx} azt az „$n\times n\times n$ típusú háromdimenziós mátrixot" jelöli, melynek elemei $f''_{ix_kx_l}$, az f vektor koordinátáinak másodrendű parciális deriváltjai, $i, k, l=1, 2, \ldots, n$, és $f''_{xx}\varphi'_\mu$ az az n-edrendű négyzetes mátrix, melynek elemei

$$\sum_{l=1}^{n} f''_{ix_k x_l}\varphi'_{l\mu} \quad (i, k = 1, 2, \dots, n)$$

(itt $\varphi'_{l\mu}$ a φ'_μ vektor l-edik koordinátája). A (9.5) sorfejtésből, (9.3) felhasználásával

$$\varphi(t, \mu, \vartheta) = \psi\left(\frac{t-\vartheta}{\tau(\mu, \vartheta)}, \mu, \vartheta\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \psi^k\left(\frac{t-\vartheta}{\tau(\mu, \vartheta)}, \vartheta\right).$$

Az utóbbi azonosság μ szerinti differenciálásával kapjuk, hogy a $\mu=0$ helyen

$$\varphi'_\mu(t, 0, \vartheta) = \frac{\partial}{\partial\mu} p\left(\frac{t-\vartheta}{\tau(\mu, \vartheta)}\tau_0\right)\Bigg|_{\mu=0} + \psi^1\left(\frac{t-\vartheta}{\tau_0}, \vartheta\right) =$$

$$= \psi^1\left(\frac{t-\vartheta}{\tau_0}, \vartheta\right) - \dot{p}(t-\vartheta)\frac{(t-\vartheta)\tau_1(\vartheta)}{\tau_0}.$$

Az utóbbi kifejezést és (10.4)-et (10.10)-be helyettesítve (10.10) jobb oldalának első tagja, melyet $B(t, \vartheta)$-val fogunk jelölni, a következő alakot veszi fel:

$$(10.11) \qquad B(t, \vartheta) = \left[f''_{xx}(p(t-\vartheta))\left[\psi^1\left(\frac{t-\vartheta}{\tau_0}, \vartheta\right) - \dot{p}(t-\vartheta)\frac{(t-\vartheta)\tau_1(\vartheta)}{\tau_0}\right] + \right.$$

$$\left. + g'_x\left(\frac{t}{\tau_0}, p(t-\vartheta), 0, \tau_0\right)\right] Y_0(t-\vartheta)Y_0^{-1}(-\vartheta).$$

Azt látjuk tehát, hogy a $t \to Y'_\mu(t; 0, \vartheta)$ mátrixfüggvény kielégíti az

$$(10.12) \qquad \dot{Y} = f'_x(p(t-\vartheta))Y + B(t, \vartheta)$$

inhomogén lineáris mátrix-differenciálegyenletet, és (10.1) miatt $Y'_\mu(0; 0, \vartheta) \equiv \equiv Y'_\mu(0; \mu, \vartheta) \equiv 0$. Miután a (10.12)-nek megfelelő (10.3) homogén rendszer egy alapmátrixa $Y_0(t-\vartheta)$, ezért „az állandó variálásának módszerével" azt kapjuk, hogy

$$(10.13) \qquad Y'_\mu(t; 0, \vartheta) = Y_0(t-\vartheta)\int_0^t Y_0^{-1}(u-\vartheta)B(u, \vartheta)\,du.$$

A (10.9) és (10.13) kifejezéseket (10.8)-ba helyettesítve kapjuk végül, hogy

$$(10.14) \qquad C_1(\vartheta) = \tau_1(\vartheta)f'_x(p(\tau_0-\vartheta))Y_0(\tau_0-\vartheta)Y_0^{-1}(-\vartheta) +$$

$$+ Y_0(\tau_0-\vartheta)\int_0^{\tau_0} Y_0^{-1}(t-\vartheta)B(t, \vartheta)\,dt.$$

Speciálisan

$$(10.15) \qquad C_1(0) = \tau_1(0)f'_x(p(\tau_0))Y_0(\tau_0) + Y_0(\tau_0)\int_0^{\tau_0} Y_0^{-1}(t)B(t, 0)\,dt,$$

ahol

$$B(t,0) = \left[f''_{xx}(p(t)) \left[\psi^1 \left(\frac{t}{\tau_0}, 0 \right) - \dot{p}(t) \frac{t\tau_1(0)}{\tau_0} \right] + \right. \tag{10.16}$$

$$\left. + g'_x \left(\frac{t}{\tau_0}, p(t), 0, \tau_0 \right) \right] Y_0(t).$$

Miután a $C(\mu, \vartheta)$ mátrix (10.5) sorfejtésének első két tagját így meghatároztuk, explicit előállítást adunk a $C(\mu, \vartheta)$ mátrix azon $\lambda(\mu, \vartheta)$ sajátértékének μ szerinti deriváltjára a $(\mu, \vartheta)=(0, 0)$ pontban, melyre $\lambda(0, 0)=1$. (A $(\mu, \vartheta)\to\lambda(\mu, \vartheta)$ függvényt (7.5)-tel definiáltuk, és a 7.1. lemmát követő megjegyzésben megmutattuk, hogy feltevéseink mellett e függvény analitikus a $(\mu, \vartheta)=(0, 0)$ pont egy környezetében.) A következő jelöléseket vezetjük be. A $C(\mu, \vartheta)$ mátrix karakterisztikus polinomja

$$(-1)^n d(\lambda; \mu, \vartheta) = \det [C(\mu, \vartheta) - \lambda E], \tag{10.17}$$

$$d(\lambda; \mu, \vartheta) = \lambda^n + \alpha_{n-1}(\mu, \vartheta)\lambda^{n-1} + \ldots + \alpha_1(\mu, \vartheta)\lambda + \alpha_0(\mu, \vartheta). \tag{10.18}$$

Nyilvánvaló, hogy a $(\mu, \vartheta)=(0, 0)$ pontnak van olyan W környezete, hogy az α_k: $W\to R$ függvények $(k=0, 1, \ldots, n-1)$ analitikusak, és analitikus természetesen a $(\lambda, \mu, \vartheta)\to d(\lambda, \mu, \vartheta)$ függvény is az $R\times W$ halmazon. A (10.5) sorfejtésben fellépő $C_0(\vartheta)$, $C_1(\vartheta)$, $R(\mu, \vartheta)$ mátrixok, ill. az E egységmátrix i-edik sorvektorát rendre $c_i^0(\vartheta)$-val, $c_i^1(\vartheta)$-val, $r_i(\mu, \vartheta)$-val, ill. e_i-vel jelöljük $(i=1, 2, \ldots, n)$. Magukra a mátrixokra használni fogjuk a

$$C_0(\vartheta) = \begin{bmatrix} c_1^0(\vartheta) \\ \vdots \\ c_n^0(\vartheta) \end{bmatrix}, \quad C_1(\vartheta) = \begin{bmatrix} c_1^1(\vartheta) \\ \vdots \\ c_n^1(\vartheta) \end{bmatrix},$$

$$R(\mu, \vartheta) = \begin{bmatrix} r_1(\mu, \vartheta) \\ \vdots \\ r_n(\mu, \vartheta) \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix}$$

jelöléseket.

10.1. TÉTEL. *Ha fennállnak a* 6.5. *következmény feltételei, akkor a* (7.5)-*tel definiált* $(\mu, \vartheta)\to\lambda(\mu, \vartheta)$ *függvényre*

$$\lambda'_\mu(0,0) = \frac{(-1)^{n+1}}{d'_\lambda(1; 0, 0)} \sum_{i=1}^{n} \det \begin{bmatrix} c_1^0(0) - e_1 \\ \vdots \\ c_{i-1}^0(0) - e_{i-1} \\ c_i^1(0) \\ c_{i+1}^0(0) - e_{i+1} \\ \vdots \\ c_n^0(0) - e_n \end{bmatrix}, \tag{10.19}$$

ahol a jobboldalon álló összeg i-edik tagját úgy kapjuk $\det [C_0(0) - E]$-*ből, hogy az i-edik sor helyébe* $c_i^1(0)$-*t írunk* $(i=1, 2, \ldots, n)$.

Bizonyítás. A (10.17) determinánst (10.5) felhasználásával az utolsó sorában álló összegek szerint determinánsok összegére bontjuk:

$$(-1)^n d(\lambda;\mu,\vartheta)=\det[C(\mu,\vartheta)-\lambda E]=$$

$$=\det\begin{bmatrix} c_1^0(\vartheta)+\mu c_1^1(\vartheta)+\mu^2 r_1(\mu,\vartheta)-\lambda e_1\\ \vdots\\ c_n^0(\vartheta)+\mu c_n^1(\vartheta)+\mu^2 r_n(\mu,\vartheta)-\lambda e_n\end{bmatrix}=$$

$$=\det\begin{bmatrix} c_1^0(\vartheta)-\lambda e_1+\mu c_1^1(\vartheta)+\mu^2 r_1(\mu,\vartheta)\\ \vdots\\ c_{n-1}^0(\vartheta)-\lambda e_{n-1}+\mu c_{n-1}^1(\vartheta)+\mu^2 r_{n-1}(\mu,\vartheta)\\ c_n^0(\vartheta)-\lambda e_n\end{bmatrix}+$$

$$+\mu\det\begin{bmatrix} c_1^0(\vartheta)-\lambda e_1+\mu c_1^1(\vartheta)+\mu^2 r_1(\mu,\vartheta)\\ \vdots\\ c_{n-1}^0(\vartheta)-\lambda e_{n-1}+\mu c_{n-1}^1(\vartheta)+\mu^2 r_{n-1}(\mu,\vartheta)\\ c_n^1(\vartheta)\end{bmatrix}+$$

$$+\mu^2 R_1(\mu,\vartheta),$$

ahol $R_1(\mu,\vartheta)$ analitikus, valós értékű függvény. A jobboldal második tagját az $(n-1)$-edik sorban álló összegek szerint újból két determináns összegére bontjuk. Ezek közül a második $(n-1)$-edik sorából a μ tényező kiemelhető, az elsőt pedig tovább bontjuk hasonlóképpen az ő $(n-2)$-edik sorában álló összegek szerint. Ily módon a következő kifejezést kapjuk:

$$(-1)^n d(\lambda;\mu,\vartheta)=$$

$$=\det\begin{bmatrix} c_1^0(\vartheta)-\lambda e_1+\mu c_1^1(\vartheta)+\mu^2 r_1(\mu,\vartheta)\\ \vdots\\ c_{n-1}^0(\vartheta)-\lambda e_{n-1}+\mu c_{n-1}^1(\vartheta)+\mu^2 r_{n-1}(\mu,\vartheta)\\ c_n^0(\vartheta)-\lambda e_n\end{bmatrix}+$$

$$+\det\begin{bmatrix} c_1^0(\vartheta)-\lambda e_1\\ \vdots\\ c_{n-1}^0(\vartheta)-\lambda e_{n-1}\\ c_n^1(\vartheta)\end{bmatrix}\mu+\mu^2 R_2(\mu,\vartheta),$$

ahol $R_2(\mu,\vartheta)$ analitikus, valós értékű függvény. Most ugyanezt az eljárást alkalmazzuk az utóbbi felbontás jobb oldalának első tagjára, melyet először az $(n-1)$-edik sorában álló összegek szerint bontunk két determináns összegére. Az eljárást tovább folytatva, végig haladva az $(n-2)$-edik, $(n-3)$-adik stb., végül az első soron, a következő kifejezést kapjuk:

$$(10.20)\qquad (-1)^n d(\lambda;\mu,\vartheta) = \det[C_0(\vartheta)-\lambda E]+\mu\sum_{i=1}^{n}\det\begin{bmatrix} c_1^0(\vartheta)-\lambda e_1\\ \vdots\\ c_i^1(\vartheta)\\ \vdots\\ c_n^0(\vartheta)-\lambda e_n\end{bmatrix}+\mu^2R_3(\mu,\vartheta),$$

ahol $R_3(\mu,\vartheta)$ analitikus, valós értékű függvény. Feltevéseink szerint az 1 szám a $d(\lambda;0,0)$ polinom pontosan egyszeres gyöke, vagyis $d(1;0,0)=0$ és $d'_\lambda(1;0,0)\neq 0$. Ezért a $d(\lambda;\mu,\vartheta)=0$ egyenlet a $(\mu,\vartheta)=(0,0)$ pont egy környezetében meghatározza $\lambda(\mu,\vartheta)$-t, mint a (μ,ϑ) változók analitikus függvényét (lásd a 7.1. lemmát és a (10.18)-at követő megjegyzést), melyre $\lambda(0,0)=1$, és

$$(10.21)\qquad \lambda'_\mu(0,0) = -\frac{d'_\mu(1;0,0)}{d'_\lambda(1;0,0)}.$$

Differenciáljuk (10.20)-at μ szerint; a $(\lambda,\mu,\vartheta)=(1,0,0)$ pontban azt kapjuk, hogy

$$d'_\mu(1;0,0) = (-1)^n\sum_{i=1}^{n}\det\begin{bmatrix} c_1^0(0)-e_1\\ \vdots\\ c_i^1(0)\\ \vdots\\ c_n^0(0)-e_n\end{bmatrix}.$$

Az utóbbi kifejezést (10.21)-be helyettesítve (10.19) adódik.!

Felhívjuk a figyelmet arra, hogy $d(\lambda;0,0)$ a (10.7) mátrix, vagyis $Y_0(\tau_0)$ karakterisztikus polinomja (a $(-1)^n$ szorzótól eltekintve), vagyis $d'_\lambda(1;0,0)$ meghatározásához csak $Y_0(\tau_0)$-t kell ismernünk. A $C_1(0)$ mátrix (10.15) előállítását és a 9.1. tételt követő megjegyzést figyelembe véve látható, hogy $\lambda'_\mu(0,0)$ (10.19) *előállításához csupán a perturbálatlan rendszer D-periodikus p megoldására és p-re vonatkozó variációs rendszerének egy alapmátrixára van szükség.*

$\lambda'_\mu(0,0)$ még másképpen is előállítható. Ha ugyanis figyelembe vesszük, hogy

$$d(\lambda;0,0) = (-1)^n\det\big(Y_0(\tau_0)-\lambda E\big) = (-1)^n\det\big(C_0(0)-\lambda E\big),$$

akkor a determináns differenciálási szabályát alkalmazva, könnyen adódik

$$(10.22)\qquad d'_\lambda(1;0,0) = (-1)^n\sum_{i=1}^{n}\det\begin{bmatrix} c_1^0(0)-e_1\\ \vdots\\ c_{i-1}^0(0)-e_{i-1}\\ -e_i\\ c_{i+1}^0(0)-e_{i+1}\\ \vdots\\ c_n^0(0)-e_n\end{bmatrix},$$

ahol a jobboldalon álló összeg i-edik tagját úgy kapjuk $\det[C_0(0)-E]$-ből, hogy az i-edik sor helyébe $-e_i$-t írunk $(i=1, 2, ..., n)$. (10.19)-ből és (10.22)-ből azt kapjuk, hogy

$$\lambda'_\mu(0,0) = -\frac{\sum_{i=1}^{n} \det \begin{bmatrix} c_1^0(0)-e_1 \\ \vdots \\ c_i^1(0) \\ \vdots \\ c_n^0(0)-e_n \end{bmatrix}}{\sum_{i=1}^{n} \det \begin{bmatrix} c_1^0(0)-e_1 \\ \vdots \\ -e_i \\ \vdots \\ c_n^0(0)-e_n \end{bmatrix}}. \tag{10.23}$$

Az előbbiek következménye a

10.2. TÉTEL. *Ha fennállnak a 6.5 következmény feltételei, a $C_0(0)$ mátrix $(n-1)$ számú sajátértéke abszolút értékben kisebb mint* 1, *és*

$$\operatorname{sgn} \sum_{i=1}^{n} \det \begin{bmatrix} c_1^0(0)-e_1 \\ \vdots \\ c_i^1(0) \\ \vdots \\ c_n^0(0)-e_n \end{bmatrix} = \operatorname{sgn} \sum_{i=1}^{n} \det \begin{bmatrix} c_1^0(0)-e_1 \\ \vdots \\ -e_i \\ \vdots \\ c_n^0(0)-e_n \end{bmatrix},$$

(*ill.*

$$\operatorname{sgn} \sum_{i=1}^{n} \det \begin{bmatrix} c_1^0(0)-e_i \\ \vdots \\ c_i^1(0) \\ \vdots \\ c_n^0(0)-e_n \end{bmatrix} = -\operatorname{sgn} \sum_{i=1}^{n} \det \begin{bmatrix} c_1^0(0)-e_1 \\ \vdots \\ -e_i \\ \vdots \\ c_n^0(0)-e_n \end{bmatrix}),$$

akkor $(\mu, \vartheta)=(0, 0)$-nak van olyan W környezete, hogy minden $(\mu, \vartheta)\in W$-re, melyre μ pozitív (ill. negatív), a perturbált (7.1) *rendszer D-periodikus $\varphi(t, \mu, \vartheta)$ megoldása aszimptotikusan stabilis.*

Bizonyítás. Az állítás a 7.2. tételnek és (10.23)-nak közvetlen következménye.!

Ennek a fejezetnek befejezéseként megjegyezzük, hogy a 9. és 10. pont konkrét eredményei, vagyis a keresett D-periodikus $\varphi(t, \mu, \vartheta)$ megoldás és a $\tau(\mu, \vartheta)$ per ódus közelítő előállítása az $o(\mu)$ tagok nélkül, továbbá $\lambda'_\mu(0, 0)$ meghatározása akko is ugyanúgy elvégezhető (a bizonyítások minimális megváltoztatásával), ha a (6.1) rendszer jobb oldaláról csak annyit teszünk fel, hogy C^2 osztálybeli. Mi a (6.1) rendszer jobb oldaláról ezekben a pontokban azért tételeztük fel az analicitást, mivel így a módszer elvileg alkalmas $\varphi(t, \mu, \vartheta)$ és $\tau(\mu, \vartheta)$ tetszőlegesen magas rendű közelítésének meghatározására, illetve a $(\mu, \vartheta)\to\lambda(\mu, \vartheta)$ függvény tetszőlegesen magas rendű μ szerinti deriváltjainak előállítására a (0, 0) pontban.

IV. FEJEZET

ALKALMAZÁSOK, KÖVETKEZMÉNYEK ÉS PROBLÉMÁK

11. A van der Pol- és a Liénard-féle differenciálegyenlet perturbációi

A II. és III. Fejezet eredményeit a szerző munkatársainak egy csoportja sikerrel alkalmazta bizonyos, a nem-lineáris rezgések elméletében központi szerepet játszó differenciálegyenletekre. Ebben a pontban röviden összefoglaljuk az ezen a téren folyó kutatások eddig elért eredményeit.

Az első ilyen természetű eredményeket FARKASNÉ URBÁN IRÉN érte el a van der Pol-féle differenciálegyenlettel kapcsolatban (lásd [30], ill. [29]).

Mint ismeretes (lásd [79, 80, 61, 64]), az

$$\ddot{u}+m(u^2-1)\dot{u}+u=0 \tag{11.1}$$

van der Pol-féle differenciálegyenletnek, ahol m pozitív állandó, van pontosan egy nem-állandó periodikus megoldása, $u_0\colon R\to R$. Jelöljük az u_0 függvény legkisebb pozitív periódusát τ_0-lal. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy

$$u_0(0)=a>0, \quad \dot{u}_0(0)=0. \tag{11.2}$$

A

$$\ddot{v}+m(u_0^2(t)-1)\dot{v}+v=0 \tag{11.3}$$

homogén lineáris differenciálegyenlet egy megoldása nyilván az $\dot{u}_0$ függvény. ((11.3) a W. S. LOUD módszere szerint (11.1)-gyel ekvivalens differenciálegyenlet rendszer megfelelő variációs rendszerével ekvivalens). Jelöljük v_0-lal (11.3) azon ($\dot{u}_0$-tól független megoldását), melyre

$$v_0(0)=0, \quad \dot{v}_0(0)=\frac{1}{a}. \tag{11.4}$$

v_0 könnyen előállítható (legalábbis lokálisan) $\dot{u}_0$ segítségével. Jelöljük az $\dot{u}_0$ és v_0 megoldások Wronski-féle determinánsát W-vel. A (11.1)-gyel ekvivalens rendszer megfelelő variációs rendszerének egyik karakterisztikus multiplikátora 1, a másik pedig

$$W(\tau_0)=e^{-m\int_0^{\tau_0}(u_0^2(t)-1)\,dt}. \tag{11.5}$$

Vezessük be az

$$R=\{t\colon -\infty<t<\infty\}, \quad I_\mu=\{\mu\colon |\mu|<\alpha\}, \quad I_\tau=\{\tau\colon |\tau-\tau_0|<\beta\}$$

jelöléseket, ahol $\alpha>0$, $0<\beta<\tau_0$ állandók, jelöljük az $(u,\dot{u})$ „fázissíkot" R^2-vel és tekintsük az

$$\ddot{u}+m(u^2-1)\dot{u}+u=\mu\gamma\left(\frac{t}{\tau}, u, \dot{u}, \mu, \tau\right) \tag{11.6}$$

perturbált van der Pol-egyenletet, ahol a $\gamma\colon R\times R^2\times I_\mu\times I_\tau\to R$ függvény analitikus és minden rögzített $\tau \in I_\tau$-ra periodikus a t változóban τ periódussal. Jelöljük $u(t;\, \vartheta, a+h, \mu, \tau)$-val (11.6) azon megoldását, melyre

$$u(\vartheta;\, \vartheta, a+h, \mu, \tau) = a+h$$

$$\dot{u}(\vartheta;\, \vartheta, a+h, \mu, \tau) = hm\left(1-a^2-ah-\frac{h^2}{3}\right). \tag{11.7}$$

A 6.2. lemma alapján belátható, hogy a $(\mu, \tau)=(0, \tau_0)$ pont egy elég kis környezetéhez tartozó (μ, τ) értékekre a (11.6) egyenlet azon megoldásai, melyek kezdeti értékei a $(t, u, \dot{u})=(0, a, 0)$ pont elég kis környezetébe esnek, ill. a $(\vartheta, h)=(0, 0)$ pont egy elég kis környezetébe eső (ϑ, h) számpárok között egy-egyértelmű a (11.7) feltételek által generált megfeleltetés. Érvényes a

11.1. TÉTEL. Ha $\int\limits_0^{\tau_0}(u_0^2(t)-1)dt \neq 0$, *akkor minden* (μ, ϑ)*-hoz, melyre* $|\mu|$ *és* $|\vartheta|$ *elég kicsi, tartozik pontosan egy* $\tau(\mu, \vartheta)$ *periódus és pontosan egy* $h(\mu, \vartheta)$ *szám úgy, hogy az*

$$\ddot{u}+m(u^2-1)\dot{u}+u = \mu\gamma\left(\frac{t}{\tau(\mu, \vartheta)}, u, \dot{u}, \mu, \tau(\mu, \vartheta)\right) \tag{11.8}$$

differenciálegyenletnek a

$$w(t, \mu, \vartheta) = u(t;\, \vartheta, a+h(\mu, \vartheta), \mu, \tau(\mu, \vartheta)) \tag{11.9}$$

megoldása periodikus $\tau(\mu, \vartheta)$ *periódussal, a* τ *és a* h *függvény a* $(\mu, \vartheta)=(0, 0)$ *pont egy környezetében analitikus (ennek következtében a* w *függvény* $R\times U$*-ban analitikus),* $\tau(0, 0)=\tau_0$, $h(0, 0)=0$ *és* $w(t, 0, 0)\equiv u_0(t)$.

Bizonyítás. Az állítás (11.5)-ből és a 6.4., valamint a 6.5. következményekből azonnal adódik. (A (11.6) differenciálegyenletet természetesen, előzőleg alkalmas módon rendszerré kell átírni, ezt azonban itt nem részletezzük.)!

γ^*-gal jelöljük azt a függvényt, mely a következőképpen van értelmezve:

$$\gamma^*(t) = \gamma\left(\frac{t+\vartheta}{\tau_0}, u_0(t), \dot{u}_0(t), 0, \tau_0\right), \quad t \in R. \tag{11.10}$$

11.A. TÉTEL. *Ha fennállnak a* 11.1. *tétel feltételei és* $|\mu|$, *valamint* $|\vartheta|$ *elég kicsi, akkor a perturbációs periódus, ill. a* (11.9) *periodikus megoldás a következőképpen állítható elő:*

$$\tau(\mu, \vartheta) = \tau_0+\mu\tau_1(\vartheta)+o(\mu), \tag{11.11}$$

ahol

$$\tau_1(\vartheta) = \int\limits_0^{\tau_0}\frac{\gamma^*(r)}{W(r)}\left(\dot{v}_0(r)-\frac{v_0(\tau_0)}{a(1-W(\tau_0))}\dot{u}_0(r)\right)dr, \tag{11.12}$$

illetve

$$w(t,\mu,\vartheta)=u_0(t-\vartheta)+\mu\left(\dot v_0(t-\vartheta)\int_0^{t-\vartheta}\frac{\gamma^*(r)\dot u_0(r)}{W(r)}\,dr-\right.\tag{11.13}$$

$$-\dot u_0(t-\vartheta)\int_0^{t-\vartheta}\frac{\gamma^*(r)v_0(r)}{W(r)}\,dr-$$

$$\left.-\frac{W(\tau_0)}{W(\tau_0)-1}\dot v_0(t-\vartheta)\int_0^{\tau_0}\frac{\gamma^*(r)\dot u_0(r)}{W(r)}\,dr\right)+o(\mu).$$

11.B. TÉTEL. *Tételezzük fel, hogy*

$$\int_0^{\tau_0}\left(u_0^2(t)-1\right)dt>0;\tag{11.14}$$

ekkor a $(\mu,\vartheta)=(0,0)$ *pontnak van olyan* U *környezete, melyre ha* $(\mu,\vartheta)\in U$ *és* $\mu\lambda'_\mu(0,0)<0$, *ahol*

$$\lambda'_\mu(0,0)=\int_0^{\tau_0}\frac{1}{W(t)}\gamma'_t\left(\frac{t}{\tau_0},u_0(t),\dot u_0(t),0,\tau_0\right)\left(\dot v_0(t)-\frac{v_0(\tau_0)\dot u_0(t)}{a\left(1-W(\tau_0)\right)}\right)dt,\tag{11.15}$$

akkor a (11.8) *egyenlet* (11.9) *megoldása aszimptotikusan stabilis. (Itt* γ'_t *a* (11.6)*-ban fellépő* γ *függvény* t *szerinti parciális deriváltja.)*

Megjegyezzük, hogy a (11.14) feltétel legalábbis nem túl nagy pozitív m esetén teljesül (lásd [93]).

A van der Pol-féle differenciálegyenlet speciális esete az

$$\ddot u+\varphi(u)\dot u+\psi(u)=0\tag{11.16}$$

általános Liénard-féle differenciálegyletnek. Feltételezzük, hogy $\varphi,\psi\in C^1$, φ páros, ψ pedig páratlan függvény, a

$$\Phi(u)=\int_0^u\varphi(s)\,ds$$

formulával értelmezett Φ függvénynek egyetlen pozitív u^* zérushelye van, $\Phi(u)<0$, ha $0<u<u^*$, $\Phi(u)>0$ és monoton növekedő az (u^*,∞) intervallumon

$$u\psi(u)>0,\quad \text{ha}\quad u\neq 0,\quad \text{és}$$

$$\int_0^\infty\varphi(u)\,du=\int_0^\infty\psi(u)\,du=\infty.$$

E feltételek mellett N. LEVINSON és O. K. SMITH bebizonyították [61], hogy (11.16)-nak van pontosan egy nem állandó, periodikus megoldása, $u_0:R\to R$. Az u_0 függvény legkisebb pozitív periódusát τ_0-lal fogjuk jelölni.

Tekintsük az

$$\ddot{u}+\varphi(u)\dot{u}+\psi(u)=\mu\gamma\left(\frac{t}{\tau},u,\dot{u},\mu,\tau\right) \tag{11.17}$$

perturbált *Liénard-féle differenciálegyenletet,* ahol a γ függvényről ugyanazokat tételezzük fel, mint (11.6)-ban. A szerző és R. I. ABDEL KARIM bebizonyították [28] a következő tételt:

11.2. TÉTEL. *Ha a $t\to\varphi(u_0(t))$ periodikus függvény integrálközepe (egy perióduson) nem zérus, akkor minden (μ,ϑ)-hoz, melyre $|\mu|$ és $|\vartheta|$ elég kicsi, tartozik egy $\tau(\mu,\vartheta)$ periódus úgy, hogy az*

$$\ddot{u}+\varphi(u)\dot{u}+\psi(u)=\mu\gamma\left(\frac{t}{\tau(\mu,\vartheta)},u,\dot{u},\mu,\tau(\mu,\vartheta)\right) \tag{11.18}$$

differenciálegyenletnek van pontosan egy periodikus $w(t,\mu,\vartheta)$ megoldása $\tau(\mu,\vartheta)$ periódussal, melyre $w(\vartheta,\mu,\vartheta)=0$, a $(\mu,\vartheta)=(0,0)$ pontnak egy U környezetében $\tau\in C^1$, az $R\times U$ halmazon $w\in C^1$, $\tau(0,0)=\tau_0$ és $w(t,0,0)\equiv u_0(t)$.

A 11.2. tétel feltételének fennállása esetén H. EL-OWAIDY [23] értekezésében sikerrel alkalmazta az elméletet a (11.16) perturbált Liénard-féle differenciálegyenletre. Explicit módon előállította a (11.18)-ba írandó $\tau(\mu,\vartheta)$ perturbációs periódust a $w(t,\mu,\vartheta)$ periodikus megoldást a μ-ben másodrendű (!) tagokig bezárólag. (11.15)-tel analóg módon explicit kifejezést adott a $w(t,\mu,\vartheta)$ perturbált periodikus megoldás aszimptotikus stabilitásának eldöntésében lényeges szerepet játszó $\lambda'_\mu(0,0)$ értékére.

12. További stabilitási feltételek

Visszatérünk az általános (6.1) rendszerre:

$$\dot{x}=f(x)+\mu g\left(\frac{t}{\tau},x,\mu,\tau\right), \tag{12.1}$$

melyről feltételezzük, hogy fennállnak a 6.5. következmény és a 7.2. tétel feltételei, vagyis a jobboldal analitikus, és a perturbálatlan

$$\dot{x}=f(x) \tag{12.2}$$

rendszer D-periodikus p megoldására vonatkozó

$$\dot{y}=f'_x(p(t))y \tag{12.3}$$

variációs rendszer $(n-1)$ számú karakterisztikus multiplikátora abszolút értékben kisebb mint 1. Ekkor megtartva a 7. pont jelöléseit (12.1) D-periodikus φ megoldására vonatkozó variációs rendszerének főmátrixát $C(\mu,\vartheta)$-val jelöljük. $\lambda(\mu,\vartheta)$-val jelöljük $C(\mu,\vartheta)$ azon sajátértékét, mely a $(\mu,\vartheta)=(0,0)$ pont egy környezetében valós, analitikus és melyre $\lambda(0,0)=1$. (7.11) miatt $\lambda'_\vartheta(0,0)=0$, és ha $\lambda'_\mu(0,0)=0$, akkor a 7.2. tétel nem alkalmazható a stabilitás eldöntésére. Ebben az esetben a $(\mu,\vartheta)=$ $=(0,0)$ pont a $(\mu,\vartheta)\to\lambda(\mu,\vartheta)$ függvény „stacionárius pontja". Elképzelhető, hogy ez a pont a függvény szélsőérték helye, bár „szigorú szélsőértékről" csak a $\mu\neq0$ feltétel mellett lehet szó, hiszen (7.11) szerint $\lambda(0,\vartheta)\equiv1$. Emiatt a szélsőérték létezésére vonatkozó, közismert, elégséges feltétel nem alkalmazható. Ugyanis $\lambda''_{\vartheta\vartheta}(0,0)=0$ és így

$$\lambda''_{\mu\mu}(0,0)\lambda''_{\vartheta\vartheta}(0,0)-[\lambda''_{\mu\vartheta}(0,0)]^2 \leqq 0. \tag{12.4}$$

Ha $\lambda''_{\mu\vartheta}(0,0)=0$, akkor (12.4)-ben egyenlőség áll, a $(\mu,\vartheta)\to\lambda(\mu,\vartheta)$ függvény második differenciálja a $(\mu,\vartheta)=(0,0)$ pontban szemidefinit és így arról, hogy van-e szélsőérték, vagy nincs, nem tudunk mondani semmit.

Ha $\lambda''_{\mu\vartheta}(0,0)\neq 0$, akkor a második differenciál indefinit és

$$\begin{aligned}\lambda(\mu,\vartheta)-\lambda(0,0) &= \lambda(\mu,\vartheta)-1 = \\ &= \frac{1}{2}(\lambda''_{\mu\mu}(0,0)\mu^2+2\lambda''_{\mu\vartheta}(0,0)\mu\vartheta)+\ldots = \\ &= \mu\left(\frac{1}{2}\lambda''_{\mu\mu}(0,0)\mu+\lambda''_{\mu\vartheta}(0,0)\vartheta\right)+\ldots\end{aligned}$$

Ekkor a $(\mu,\vartheta)=(0,0)$ pont tetszőleges kis környezetében vannak helyek, ahol $\lambda(\mu,\vartheta)<1$ és vannak helyek, ahol $\lambda(\mu,\vartheta)>1$. Azokat a helyeket, ahol $\lambda(\mu,\vartheta)<1$, vagyis amelyekre a perturbált periodikus megoldás aszimptotikusan stabilis, „közelítőleg", a (μ,ϑ)-ban harmadrendű tagok elhanyagolásával" a

$$\mu\left(\frac{1}{2}\lambda''_{\mu\mu}(0,0)\mu+\lambda''_{\mu\vartheta}(0,0)\vartheta\right)<0$$

egyenlőtlenség jellemzi. Ennek a tartománynak még ilyen közelítő jellemzése is nehéznek tűnik, mivel $\lambda''_{\mu\vartheta}(0,0)$ kiszámítása pusztán a perturbálatlan rendszer adatai alapján nem látszik keresztülvihetőnek.

Más a helyzet akkor, ha a ϑ paraméter értékét zérusban rögzítjük. H. EL-OWAIDY [23] a $C(\mu,\vartheta)$ mátrix (10.5) sorfejtését a következő tagig folytatta:

$$C(\mu,\vartheta) = C_0(\vartheta)+\mu C_1(\vartheta)+\mu^2C_2(\vartheta)+\mu^3R(\mu,\vartheta),$$

és sikerült explicit kifejezést adnia az itt szereplő $C_2(0)$ mátrixra. A 10.1. tétel jelöléseit használva és a $C_2(0)$ mátrix i-edik sorvektorát $c_i^2(0)$-val jelölve ($i=1,2,\ldots,n$) bebizonyította a következő tételt.

12.A. TÉTEL [23]. *Ha fennállnak a 6.5 következmény feltételei és $\lambda'_\mu(0,0)=0$, akkor*

$$\lambda''_{\mu\mu}(0,0) = \frac{(-1)^{n+1}2}{d'_\lambda(1;0,0)}\left\{\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{n}\det\begin{bmatrix} c_1^0(0)-e_1 \\ \vdots \\ c_{i-1}^0(0)-e_{i-1} \\ c_i^1(0) \\ c_{i+1}^0(0)-e_{i+1} \\ \vdots \\ c_{j-1}^0(0)-e_{j-1} \\ c_j^1(0) \\ c_{j+1}^0(0)-e_{j+1} \\ \vdots \\ c_n^0(0)-e_n\end{bmatrix}+\sum_{i=1}^{n}\det\begin{bmatrix} c_1^0(0)-e_1 \\ \vdots \\ c_{i-1}^0(0)-e_{i-1} \\ c_i^2(0) \\ c_{i+1}^0(0)-e_{i+1} \\ \\ \vdots \\ \\ c_n^0(0)-e_n\end{bmatrix}\right\}. \tag{12.5}$$

(12.5) alapján a perturbálatlan rendszer adataiból $\lambda''_{\mu\mu}(0, 0)$ kiszámítható. Ha $\lambda'_{\mu}(0, 0)=0$ és $\lambda''_{\mu\mu}(0, 0)<0$, akkor a $\mu=0$ pontban a $\mu\to\lambda(\mu, 0)$ függvénynek szigorú maximum helye van. Így, ha a (12.3) rendszer $(n-1)$ számú karakterisztikus multiplikátora abszolút értékben egynél kisebb, akkor a $\mu=0$ számnak van olyan U környezete, hogy minden $\mu\in U$-ra, melyre $\mu\neq 0$, a $\varphi(t, \mu, 0)$ perturbált megoldás aszimptotikusan stabilis.

13. Az elmélet alkalmazása rögzített periódusú perturbáció esetén

A II. és III. fejezetben kifejtett elmélet alkalmas arra, hogy segítségével, bizonyos esetekben, rögzített periódusú perturbáció mellett is eldöntsük a perturbált periodikus megoldás létezésének kérdését. Tekintsük az

$$\dot{x} = f(x)+\mu\tilde{g}(t, x, \mu) \tag{13.1}$$

perturbált differenciálegyenlet-rendszert. Feltételezzük, hogy az $f: \Omega\to R^n$ és a $\tilde{g}: R\times\Omega\times I_\mu\to R^n$ függvények analitikusak, $\Omega\subset R^n$ nyílt és összefüggő tartomány, $I_\mu=\{\mu\in R: |\mu|<\alpha\}$ valamilyen $\alpha>0$-ra, f és $\tilde{g}$ periodikus az x vektorváltozóban $a^0\tau_0$ vektorperiódussal ($a^0\in R^n$, $\tau_0>0$) és $\tilde{g}$ periodikus a t változóban $T>0$ periódussal:

$$\tilde{g}(t+T, x, \mu) \equiv \tilde{g}(t, x, \mu).$$

Feltételezzük továbbá, hogy az

$$\dot{x} = f(x) \tag{13.2}$$

perturbálatlan rendszernek a $p: R\to\Omega$ függvény nem-állandó, D-periodikus megoldása τ_0 periódussal és a^0 együttható vektorral, és (13.2) p-re vonatkozó variációs rendszerének, az

$$\dot{y} = f'_x(p(t))y \tag{13.3}$$

rendszernek az 1 szám pontosan egyszeres karakterisztikus multiplikátora.

Itt hívjuk fel a figyelmet arra a rendkívül fontos tényre, hogy az elmélet felépítése során *sehol sem tételeztük fel és használtuk ki azt, hogy τ_0 a p függvény legkisebb pozitív periódusa* (éppen ezért kellett mindenütt külön feltételeznünk, hogy p nem-állandó). Természetesen a p-re vonatkozó variációs rendszert, a (13.3) rendszert is τ_0 periódusú periodikus rendszernek tekintettük és ilyen értelemben beszéltünk a karakterisztikus multiplikátorairól. Az a követelés, hogy a τ_0 periódusúnak tekintett (13.3) rendszernek az 1 szám egyszeres karakterisztikus multiplikátora, erősebb mint ha ugyanezt a legkisebb pozitív periódusával periodikusnak tekintett (13.3) rendszertől követeljük meg. Tételezzük fel ugyanis, hogy p legkisebb pozitív periódusa $\frac{\tau_0}{m}$, ahol m pozitív egész szám, és f-nek az $a^0\frac{\tau_0}{m}$ vektor is vektorperiódusa. Ekkor (13.3) periodikus rendszer, melynek legkisebb pozitív periódusa $\frac{\tau_0}{m}$. Legyen $Y(t)$ a (13.3) rendszer azon alapmátrixa, melyre $Y(0)=E$. Ekkor a $\frac{\tau_0}{m}$ periódussal vett (13.3) rendszer karakterisztikus multiplikátorai az $Y\left(\frac{\tau_0}{m}\right)$ mátrix sajátértékei, a τ_0 periódussal vett (13.3) rendszer karakterisztikus multiplikátorai pedig az $Y(\tau_0)$ mátrix sajátértékei. Azonban az

$$Y\left(t+\frac{\tau_0}{m}\right) \equiv Y(t)Y\left(\frac{\tau_0}{m}\right)$$

azonosságból következik, hogy

$$(13.4) \qquad Y(\tau_0) = Y\left((m-1)\frac{\tau_0}{m}+\frac{\tau_0}{m}\right) = \left[Y\left(\frac{\tau_0}{m}\right)\right]^m.$$

Ezek szerint $Y(\tau_0)$ sajátértékei $Y\left(\frac{\tau_0}{m}\right)$ sajátértékeinek m-edik hatványai. Ha tehát $Y\left(\frac{\tau_0}{m}\right)$-nek az 1 szám egyszeres sajátértéke, de sajátértéke egy 1-től különböző m-edik egységgyök is, akkor $Y(\tau_0)$-nak az 1 szám már többszörös sajátértéke lesz.

A (13.1) rendszerrel kapcsolatos problémát beágyazzuk egy olyan problémába, melyre eredményeink alkalmazhatók. A $g\colon R\times\Omega\times I_\mu\times I_\tau\to R^n$ függvényt a következőképpen definiáljuk:

$$g\left(\frac{t}{\tau}, x, \mu\right) = \tilde{g}\left(\frac{tT}{\tau}, x, \mu\right),$$

$$(t, x, \mu, \tau)\in R\times\Omega\times I_\mu\times I_\tau,$$

ahol $I_\tau=\{\tau\in R\colon |\tau-\tau_0|<\beta\}$ valamilyen $0<\beta<\tau_0$-ra. Világos, hogy rögzített $\tau\in I_\tau$-ra a g függvény periodikus a t változóban $\tau>0$ periódussal. Tételezzük fel, hogy $T\in I_\tau$. Ekkor a $\tau=T$ helyen g a t változóban T periódussal periodikus és

$$g\left(\frac{t}{T}, x, \mu\right) \equiv \tilde{g}(t, x, \mu).$$

Az

$$(13.5) \qquad \dot{x} = f(x)+\mu g\left(\frac{t}{\tau}, x, \mu\right)$$

rendszerre érvényesek a 6.5. következmény feltételei. Ezek szerint $(\mu, \vartheta)=(0, 0)$-nak van $U\subset R^2$ környezete és U-n értelmezett $\tau\colon U\to R$ analitikus függvény, hogy az

$$\dot{x} = f(x)+\mu g\left(\frac{t}{\tau(\mu, \vartheta)}, x, \mu\right)$$

rendszernek van $\varphi(t, \mu, \vartheta)$ D-periodikus, analitikus megoldása $\tau(\mu, \vartheta)$ periódussal és $a=a^0\frac{\tau_0}{\tau(\mu, \vartheta)}$ együttható vektorral. Így a (13.1) rendszer T periódusú D-periodikus megoldása létezésének kérdése arra redukálódik, hogy a T szám eleme-e (rögzített μ mellett) a $\vartheta\to\tau(\mu, \vartheta)$ függvény értékkészletének. *Ha adott $\mu\in I_\mu$-höz van $\vartheta\in R$, hogy $(\mu, \vartheta)\in U$ és $\tau(\mu, \vartheta)=T$, akkor* (13.1)*-nek van T periódusú D-periodikus megoldása.*

A $\tau\colon U\to R$ függvény értékkészletének meghatározása elvileg a (9.6) sorfejtés alapján történhet. A 9. pont végén tett megjegyzések szerint a sorfejtés tagjainak meghatározásához a p függvényen kívül csupán (13.3) egy alapmátrixára van szükség. Gyakorlatilag, ha $|\mu|$ elég kicsi és $\vartheta=O(\mu)$, akkor

$$\tau(\mu,\vartheta)\approx\tau_0+\tau_1(\vartheta)\mu. \tag{13.6}$$

A $\tau_1(\vartheta)$ érték meghatározása a 9.1. tétel alapján történhet. Most előállítjuk a $\tau_1(\vartheta)$ meghatározására szolgáló egyenletrendszert. Jelölje $Y(t)$ (13.3) azon alapmátrixát, melyre $Y(0)=E$. Ekkor a (9.11) inhomogén lineáris differenciálegyenletrendszerhez tartozó homogén lineáris differenciálegyenlet rendszer

$$\frac{dz}{ds}=\tau_0 f'_x(p(s\tau_0))z,$$

és ez utóbbinak egy alapmátrixa az $Y(s\tau_0)$ mátrix. Az „állandók variálásának elve" alapján (9.11) azon $s\to\zeta(s)$ megoldása, melyre $\zeta(0)=c\in R^n$:

$$\zeta(s)=Y(s\tau_0)c+Y(s\tau_0)\int_0^s Y^{-1}(\sigma\tau_0)\left(\tau_0 g\left(\sigma+\frac{\vartheta}{\tau_0},\,p(\sigma\tau_0),\,0,\,\tau_0\right)+\varkappa f\big(p(\sigma\tau_0)\big)\right)d\sigma.$$

A 9.1. tétel szerint, ha $\zeta(s+1)\equiv\zeta(s)$ és $\zeta_1(0)=c_1=0$, akkor $\varkappa=\tau_1(\vartheta)$. (Ezek a feltételek egyértelműen meghatározzák a ζ megoldást és $\varkappa$-t.) Esetünkben

$$g\left(\sigma+\frac{\vartheta}{\tau_0},\,p(\sigma\tau_0),\,0,\,\tau_0\right)\equiv\tilde g\left(\sigma T+\frac{\vartheta T}{\tau_0},\,p(\sigma\tau_0),\,0\right).$$

Az első feltétel a 2.A. tétel figyelembevételével a következő alakot ölti:

$$\begin{aligned}0=\zeta(1)-\zeta(0)&=\big(Y(\tau_0)-E\big)c+\\&+Y(\tau_0)\int_0^1 Y^{-1}(s\tau_0)\left(\tau_0\tilde g\left(sT+\frac{\vartheta T}{\tau_0},p(s\tau_0),\,0\right)+\right.\\&\left.+\varkappa f\big(p(s\tau_0)\big)\right)ds,\end{aligned}$$

vagyis

$$\begin{aligned}\big(Y(\tau_0)-E\big)c+\varkappa Y(\tau_0)\int_0^1 Y^{-1}(s\tau_0)f\big(p(s\tau_0)\big)\,ds&=\\=-\tau_0 Y(\tau_0)\int_0^1 Y^{-1}(s\tau_0)\tilde g\left(sT+\frac{\vartheta T}{\tau_0},p(s\tau_0),\,0\right)ds,&\end{aligned}\tag{13.7}$$

ahol a második feltétel értelmében $c=(0,c_2,\dots,c_n)$ oszlopvektor. (13.7) n egyenletből álló inhomogén lineáris egyenletrendszer a $c_2,c_3,\dots,c_n$, $\varkappa$ ismeretlenek meghatározására, melynek a 9.1. tétel szerint egyetlen megoldása van, és e megoldásban $\varkappa=\tau_1(\vartheta)$. (13.7)-ben csak a jobboldal függ ϑ-tól. Ha tehát (13.7) jobb oldalának értékére ϑ függvényében (ϑ-ra megfelelő lépésközt választva) táblázatot készítünk, akkor $\tau_1(\vartheta)$ értékének kiszámítása ezeken a ϑ helyeken olyan szimultán lineáris egyenletrendszer-sereg megoldására vezet, melyben az együttható mátrix mindig ugyanaz.

Ha $\tau_1(\vartheta)$-ra ezt a táblázatot elkészítettük, akkor (13.6) alapján ellenőrizhető, hogy rögzített μ-re, a ϑ-ra megengedett intervallumon $\tau(\mu,\vartheta)$ felveszi-e a T értéket.

Végül megjegyezzük, hogy azóta, mióta a szerző a dolgozat fő eredményeit elérte és azokat közlésre leadta, még ketten foglalkoztak a témával. J. J. DUISTERMAAT [22] dolgozatát néhány hónappal azután adta le közlésre, mint a szerző a [25] dolgozatát és néhány hónappal azelőtt, mint a szerző a [26] dolgozatot. Dolgozatában egy a 6.3. tétellel (pontosabban a 6.4. következménnyel) rokon tételt közöl bizonyítás nélkül. Nem veszi azonban észre, hogy arra az esetre, melyre a 6.3. tétel vonatkozik, az általa idézett bizonyítások nem terjednek ki. Érdekes módon elmegy amellett a lehetőség mellett, hogy a nálunk ϑ-val jelölt „kezdőpillanatot" paraméterként szerepeltesse (lásd [22] 59. old. negyedik bekezdés). J. J. DUISTERMAAT ugyanakkor elvileg igen érdekes vizsgálatokat folytat abban az esetben, amikor a perturbálatlan rendszer periodikus megoldása nem izolált.

L. B. BUSHARD [4] két évvel a szerző után ért el más módszerrel a II. Fejezetben közölt eredményekkel analóg eredményeket.

IRODALOM

[1] BELLMAN, R., *Methoden der Störungsrechnung in Mathematik.* (Physik und Technik, R. Oldenbourg V., München—Wien, 1967.)

[2] Bender, P. R., "Recurrent solutions to systems of ordinary differential equations", *J. Diff. Equ.* **5** (1969) 271—282.

[3] BIRKHOFF, G. D., *Dynamical systems.* (Am. Math. Soc. Coll. Publ. IX., New York, 1927.)

[4] BUSHARD, L. B., "Periodic solutions of perturbed autonomous systems and locking-in", *SIAM J. Appl. Math.* **22** (1972) 519—528.

[5] BUSHARD, L. B., "Behavior of the periodic surface for a periodically perturbed autonomous system and periodic solutions", *J. Diff. Equ.* **12** (1972) 487—503.

[6] CARTWRIGHT, MARY L., "Forced oscillations in nonlinear systems", in: *Contrib. to the Theory of Nonlin Osc. I.* (Princeton Univ. Press, Princeton, 1950) 194—142.

[7] CARTWRIGHT, MARY L., "Nonlinear vibrations: a chapter in mathematical history", *Math. Gaz.* **36** (1952) 81—88.

[8] CESARI, L., "Functional analysis and periodic solutions of nonlinear differential equations", *Contr. to Diff. Equ.* **1** (1963) 149—187.

[9] CESARI, L., *Asymptotic behavior and stability problems in ordinary differential equations* (Springer, Berlin, 1963.)

[10] CHANG, K. W., "Perturbations of nonlinear differential equations", *J. Math. Anal. Appl.* **34**, (1971) 418—428.

[11] CODDINGTON, E. A. and LEVINSON, N., "Perturbations of linear systems with constant coefficients possessing periodic solutions", in: *Contrib. to the Theory of Nonlin. Osc. II.* (Princeton Univ. Press, Princeton, 1952), 19—35.

[12] CODDINGTON, E. A. and LEVINSON, N., *Theory of ordinary differential equations* (McGraw-Hill, New York, 1955).

[13] COOK, J. S., LOUISELL, W. H. and YOCOM, W. H., "Stability of an electron beam on a slalom orbit", *J. Appl. Phys.* **29** (1958) 583—587.

[14] COOPER, R. M., "A criterion for the existence of limit cycles in two dimensional differential, systems", *J. Math. Anal. Appl.* **34** (1971) 412—417.

[15] CRONIN, JANE, "Poincaré's perturbation method and topological degree", *Contrib. to the Theory of Nonlin. Osc. V.* (Princeton Univ. Press, Princeton, 1960) 37—54.

[16] CRONIN, JANE, "One-sided bifuration points" *J. Diff. Equ.* **9** (1971) 1—12.

[17] DAVIES, T. V. and JAMES, ELEANOR M., *Nonlinear differential equations.* (Addison Wesley, Reading Mass., 1966.)

[18] DAVIS, R. T. and ALFRIEND, K. T., "Solutions of van der Pol's equation using a perturbation method", *Internat. J. Nonlin. Mech.* **2** (1967) 153—162.

[19] DENJOY, A., „Sur les courbes définies par les équations différentielles á la surface du tore" *J. de Math Pures et Appliquées* IX (1932) 333—375.

[20] DIEUDONNÉ, J., *Foundations of modern analysis.* (Academic Press, New York, 1960).

[21] DILIBERTO, S. P. and HUFFORD, G., "Perturbation theorems for non-linear ordinary differential equations", in: *Contrib. to the Theory of Nonlin. Osc. III.* (Princeton Univ. Press, Princeton, 1956) 207—236.
[22] DUISTERMAAT, J. J., "Periodic solutions of periodic systems of ordinary differential equations containing a parameter", *Archive for Rat. Mech. Anal.* **38** (1970) 59—80.
[23] EL OWAIDY, H. M., "On perturbations of Liénard's equation", kandidátusi értekezés. MTA, Budapest, 1972.
[24] FARKAS, M., "On stability and geodesics", *Annales Univ. Sci. Budapest, Sectio Math.* **11** (1968) 145—159.
[25] FARKAS, M., "Controllably periodic perturbations of autonomous systems", in: Congrés Int. des Math. (Les 265 Comm. Ind., Nice, 1970.) 228.
[26] FARKAS, M., "Controllably periodic perturbations of autonomous systems", *Acta Math. Acad. Sci. Hungar* **22** (1971) 337—348.
[27] FARKAS, M., "Determination of controllably periodic perturbed solutions by Poincaré's method", *Studia Sci. Math. Hung.* **7** (1972) 259—268.
[28] FARKAS, M. and ABDEL KARIM, R., "On controllably periodic perturbations of Liénard's equation", *Periodica Polytechn. Electr. Eng.* **16** (1972) 41—45.
[29] FARKAS, I. and FARKAS, M., "On perturbations of van der Pol's equations", *Annales Univ. Sci. Budapest, Sectio Math.* **15** (1972) 155—164.
[30] FARKASNÉ, URBÁN I., „A van der Pol differenciálegyenlet irányíthatóan periodikus perturbációjáról", természettudományi doktori értekezés. ELTE, Budapest, 1971.
[31] FRICKE, R., *Lehrbuch der Algebra I—II.* (Vieweg, Braunschweig, 1924—26).
[32] FRIEDRICHS, K. O. and STOKER, J. J., "Forced vibrations of systems with nonlinear restoring force", *Quart. Appl. Math.* **1** (1943) 97—115.
[33] FRIEDRICHS, K. O. and WASOW, W. R., "Singular perturbations of nonlinear oscillations", *Duke Math. J.* **13** (1946) 367—381.
[34] FRIEDRICHS, K. O., "Fundamentals of Poincaré's Theory", in: Proc. Symp. Nonlin. Circuit Anal. (P. I. Brooklyn, New York, 1953) 56—67.
[35] FRIEDRICHS, K. O., *Advenced ordinary differential equations* (New York Univ. Press, New York 1956).
[36] HAAG, J., „Sur l'existence et la stabilité des solutions périodiques de certains systèmes différentiels", *Annales Sci. de l'École Norm. Sup.* **65** (1948) 299—335.
[37] HAAG, J., „Sur la synchronisation des systèmes oscillants non linéaires", *Annales Sci. de l'École Normale Superieure* **67** (1950) 31—392.
[38] HAAG, J., *Les mouvements vibratoires, I—II.* (Presses Univ. de France, Paris, 1952.)
[39] HAHN, W., *Theory and application of Liapunov's direct method.* (Englewood Cliffs, Prentice Hall, 1963.)
[40] HAHN, W., *Stability of motion.* (Springer, Berlin, New York, 1967.)
[41] HALE, J. K., "On differential equations containing a small parameter", *Contr. to Diff. Equ.* **1** (1963) 215—250.
[42] HALE, J. K., *Oscillations in nonlinear systems* (McGraw-Hill, New York, 1963.)
[43] HALE, J. K. and LA SALLE, J. P., *Differential equations and dynamical systems* (Acad Press,. New York, London, 1967).
[44] HALE, J. K., "Solutions near simple periodic orbits of functional differential equations", *J. Diff. Equ.* **7** (1970) 126—138.
[45] HARTMANN, P., *Ordinary differential equations.* (Wiley, New York, 1964.)
[46] HAYASHI, CH., *Nonlinear oscillations in physical systems.* (McGraw-Hill, New York, 1964.)
[47] HIRAKAWA, H., "On the existence of a periodic solution of $\ddot{x}+x=\mu f(t, x, \dot{x})$", *TRU Math.* **1** (1965) 64—65.
[48] HOPF, E., „Abzweigung einer periodischen Lösung von einer stationaren Lösung eines Differentialsystems", *Ber. über die Verhandlungen der sachsischen Ak. der Wiss. zu Leipzig (Math. Phys.)* **94** (1943) 3—22.
[49] HUFFORD, G., "Banach spaces and the perturbation of ordinary differential equations", in: *Contrib. to the Theory of Nonlin. Osc. III.* (Princeton Univ. Press, Princeton, 1956.) 173—195.
[50] KÁRMÁN T., "The engineer grapples with nonlinear problems", *Bull. Am. Math. Soc.* **46** (1940) 615—683.
[51] KOTIN, L., "A Floquet theorem for real nonlinear systems", *v. Math. Anal. Appl.* **21** (1968) 384—388.

[52] KRYLOFF, N. and BOGOLIUBOFF, N., *L'application des méthodes de la mécanique nonlinéaire a la théorie des perturbations des systémes canoniques.* (L'Academie des Sciences d'Ukraine, Kiev, 1934.)
[53] KRYLOFF, N. and BOGOLIUBOFF, N., *Introduction to non-linear mechanics.* (Princeton Univ. Press, Princeton, 1949.)
[54] KURZWEIL, J., "Invariant manifolds of differential systems", *ZAMM* **49** (1969) 11—14.
[55] LEACH, D. E., "On Poincaré's perturbation theorem and a theorem of W. S. LOUD", *J. Diff. Equ.* **7** (1970) 34—53.
[56] LEFSCHETZ, S., "Existence of periodic solutions for certain differential equations", *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **29** (1943) 29—32.
[57] LEFSCHETZ, S., "Complete families of periodic solutions of differential equations", *Comm. Math. Helv.* **28** (1954) 341—345.
[58] LEFSCHETZ, S., *Differential equations: geometric theory.* (Interscience, New York, 1957.)
[59] LEVINSON, N., "On the existence of periodic solutions for second order differential equations, with forcing term", *J. Math. and Phys.* 22 (1943) 41—48.
[60] LEVINSON, N. and SMITH, O. K., "A general equation for relaxation oscillations", *Duke Math. J,* **9** (1942) 384—403.
[61] LEVINSON, N., "Small periodic perturbations of an autonomous system with a stable orbit", *Annals of Math.* **52** (1950) 727—738.
[62] LEWIS, D. C., "On the perturbation of a periodic solution...", *J. of Rat. Mech. and Anal.* **4.** (1955) 795—815.
[63] LEWIS, D. C., "Autosynartetic solutions of differential equations", *Am. J. Math.* **83** (1961) 1—32.
[64] LOUD, W. S., "Periodic solutions of a perturbed autonomous system", *Annals of Math.* **70** (1959) 490—529.
[65] LOUD, W. S., "Locking-in in perturbed autonomous systems", in: *Труды межд. симп. по нелинейным колебаниям* (Изд. Ак. Наук УССР, Киев, 1963) 223—232.
[66] LOUD, W. S., "Phase-shift and locking-in regions", *Quart. Appl. Math.* **25** (1967) 222—227.
[67] MAEKAWA, T., "On a harmonic solution of $\ddot{x}+x+\mu x^2=\varepsilon\cos\omega t$", *Math. Jap.* **13** (1968) 143—148.
[68] MALKIN, I. G., "Oscillations of systems with several degrees of freedom, close to systems of Lyapunov", *Am. Math. Soc. Transl., Series 1* **5** (1962) 359—388.
[69] MANFREDI, BIANCA, "Esistenza e non-esistenza di soluzioni periodiche in un problema di Meccanica non lineare", *Rivista di Mat. Univ. Parma* **8** (1967) 309—316.
[70] MAWHIN, J. «Application directe de la méthode générale de Cesari a l'étude des solutions périodiques de systèmes différentiels faiblement non-linéaires», *Bull. de la Soc. Roy. des Sciences de Liège* **36** (1967) 193—210.
[71] MINORSKY, N., *Introduction to non linear mechanics* (Edwards, Ann. Arbor, 1947.)
[72] MOSER, J., "Combination tones for Duffing's equation", *Comm. Pure Appl. Math.* **18** (1965) 167—181.
[73] MULDOWNEY, J. S., "Linear systems of differential equations with periodic solutions", *Proc. Am. Math. Soc.* **18** (1967) 22—27.
[74] NEMICKII, V. V., "Topological problems of the theory of dynamical systems", *Uspehi Mat. Nauk* **34** (1949) 1—153. (Trans. No. 103, *Am. Math. Soc.*)
[75] NOHEL, J. A., "Stability of perturbed periodic metions", *J. für die reine u. ang. Math.* **203** (1960) 64—79.
[76] POINCARÉ, H., "Sur les courbes définies par les équations différentielles", *J. de Math.* **7** (1881) 375—422, **8** (1882) 251—296, **1** (1885) 167—244, **2** (1886) 151—217. (Oeuvres I.)
[77] POINCARÉ, H., «Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique», *Acta Math.* **13** (1890) 1—270. (Oeuvres VII. 262—479.)
[78] POINCARÉ, H., *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste I—II—III* (Gauthier-Villar, Paris, 1892—93—99.
[79] POL, B. VAN DER, "On oscillation hysteresis in a triode generator with two degrees of freedom", *Phil. Mag.* **1** (1922) 700—719.
[80] POL, B. VAN DER, "On relaxation oscillations", *Phil. Mag.* **2** (1926) 978—992.
[81] PONZO, P. J. and WAX, N., "Existence and stability of periodic solutions of $\ddot{y}+\mu F(\dot{y})+y=0$", *J. Math. Anal. Appl.* **38** (1972) 793—804.
[82] REISSIG, R., Sansone, G. und Conti, R., *Nichtlineare Differentialgleichungen höherer Ordnung.* (Cremonese, Roma, 1969.)
[83] ROSEAU, M., *Vibrations non-linéaires et théorie de la stabilité.* (Springer, Berlin, 1966.)
[84] SANSONE, G. and CONTI, R., *Nonlinear differential equations.* (MacMillan, New York, 1964.)

[85] SCHNEIDER, R. K., „Über die periodischen Lösungen einer Klasse nichtlinearer autonomer Differentialgleichungssysteme drtitter Ordnung", *ZAMM* **49** (1969) 444—443.

[86] SCHNEIDER, R. K., „Schranken für den Umfang und die Periode geschlossener Integralkurven von Differentialgleichungssystemen dritter und höherer Ordnung" *ZAMM* **51** (1971) 149—151.

[87] SILJAK, D. D., *Nonlinear systems.* (John Wiley, New York, 1969.)

[88] SMITH, R. A., "Period bound for autonomous Liénard oscillations", *Quart. Appl. Math.* **27** (1970) 516—522.

[89] STANISIC, M. M. and MLAKAR, P. F., "Rotating pendulum under periodic disturbance", *ZAMM* **49** (1969) 359—361.

[90] STOKER, J. J., *Nonlinear vibrations.* (Interscience, New York, 1950.)

[91] STOKER, J. J., "Mathematical methods in nonlinear vibrations theory", in: *Proc. Symp. Nonlin. Circuit Anal.* (P. I. Brooklyn, New York, 1953) 28—55.

[92] STRUBLE, R. A., *Nonlinear differential equations.* (McGraw Hill, New York, 1962.)

[93] URABE, M., *Nonlinear autonomous oscillations.* (Academic Press, New York, London, 1967.)

[94] VEJVODA, O., "On the existence and stability of the periodic solution of the second kind of a certain mechanical system", *Czech. Math. J.* **84** (1959) 390—415.

[95] YOSHIZAWA, T., "Existence of a globally uniform-asymptotically stable periodic and almost periodic solution", *Tohoku Math. J.* **19** (1967) 423—428.

[96] Акуленко, Л. Д., «К вопросу об устойчивости по Ляпунову резонансных решений некоторых многочастотных систем со слабой связью», *Дифф. Уравн.* **5** (1969) 657—661.

[97] Акуленко, Л. Д., «Нелинейные слабо связанные системы», *Дифф. Уравн.* **5** (1969) 350—356.

[98] Акуленко, Л. Д., «О некоторых системах с малым параметром», *Ж. Выч. Мат. и Мат. Физ.* **7** (1967) 208—214.

[99] Акуленко, Л. Д., «О резонансных колебаниях и вращениях в некоторых механических системах», *Вест. Моск. Унив. (Физ-Астр.)* (1967) (1) 90—97.

[100] Акуленко, Л. Д., и Волосов, В. М., «О резонансе во вращательной системе», *Вест. Моск. Унив. (Мат.-Мех.)* (1967) (1) 12—16.

[101] Акуленко, Л. Д. и Волосов, В. М., «Резонансные вращения высших степеней», *Вест. Моск. Унив. (Мат.-Мех.)* (1967) (2) 10—14.

[102] Андронов, А. А., Леонтович, Е. А., Гордон, И, И. и Майер, А. Г., *Теория бифуркаций динамических систем на плоскости.* (Наука, Москва, 1967).

[103] Арнольд, В. И., «О матрицах зависящих от параметров», *Успехи Мат. Наук,* **24** (158) (1971) 101—114.

[104] Арнольд, В. И., *Обыкновенные дифференциальные уравнения.* (Наука, Москва, 1971.)

[105] Барбашин, Е. А., «Классификация траекторий динамической системы с цилиндрическим фазовым пространством», *Дифф. Уравн.* **3** (1967) 2015—2020.

[106] Барбашин, Е. А., «Условия существания рекуррентных траекторий в динамических системах с цилиндрическим фазовым пространством», *Дифф. Уравн.* **3** (1967) 1627—1633.

[107] Барбащин, Е. А. и Табуева, В. А., *Динамические системы с цилиндрическим фазовым пространством.* (Наука, Москва, 1969.)

[108] Блехман, И. И., *Синхронизация динамических систем.* (Наука, Москва, 1971.)

[109] Боголюбов, Н. Н. и Митропольский, Ю. А., *Асимптоmические методы в теории нелинейных колебаний.* (Гос. изд. физ.-мат. лит., Москва, 1963.)

[110] Булгаков, Б. В., *Колебания.* (Гос. изд. тех.-теор. лит., Москва, 1954.)

[111] Вайнберг, М. М. и Треногин, В. А., *Теория ветвления решений нелинейных уравнений.* (Наука. Москва, 1969.)

[112] Волосов, В. М., «Усреднение в системах обыкновенных дифференциальных уравнений», *Успехи Мат. Наук* **17** (108) (1962) 3—126.

[113] Гадионенко, А. Я., «О воздействии малого периодического возмущения на нелинейные системы имеющие вращательные движения», *Укр. Мат. Ж.* **19** (1967) (5) 127—131.

[114] Демидович, Б. П., *Лекции по математической теории устойчивости.* (Наука, Москва, 1967.)

[115] Демидович, Б. П., «Об орбитальной устойчивости ограниченных решений автономной системы I—II», *Дифф. Уравн.* **4** (1968) 575—588, 1359—1373.

[116] Жительзейф, Е. Д., «О предельных циклах уравнения $\ddot{x}+f(x, \dot{x})\dot{x}+g(x) = 0$», *Дифф. Уравн.* **8** (1972) 1095—1097.

[117] Жительзейф, Е. Д., «Об одном иризнаке существования периодического решения уравнения Лиенара», *Дифф, Уравн.* 6 (1970), 1127—1130.

[118] Зубов, В. И., *Колебания в нелинейных и управляемых системах.* (Изд. Судостр. Пром. Ленинград, 1962.)
[119] Кац, А. М., «Вынужденные колебания нелинейных систем с одной степенью свободы, близких к консервативным», *Прикл, Мат. Мех.* **19** (1955) 13—32.
[120] Колмогоров, А. Н., «О сохранении условно периодических движений при малом изменении функции Гамильтона», *Доклады АН СССР* **98** (1954) 527—530.
[121] Крылов, Н. М. и Боголюбов, Н. Н., Приложение методов нелинейной механики к теории стационарных колебаний. (Укр. АН. Киев, 1934.)
[122] Ляпунов, А. М., *Общая задача об устойчивости движения (1892).* (Гос. изд. тех.-теор. лит. Москва, 1950.)
[123] Малкин, И. Г., *Теория устойчивости движения.* (Наука, Моксва, 1966.)
[124] Малкин, И. Г., *Некоторые задачи теории нелинейных колебаний.* (Гостехиздат., Москва, 1956.)
[125] Медведев, Н. В., «Периодические решения дифференциальных уравнений в Банаховом простанстве», *Доклады АН СССР* **184** (1969) 542—545.
[126] Метляев, Ю. К., «О периодических решениях одного дифференциального уравнения», *Дифф. Уравн.* **6** (1970) 1824—1830.
[127] Митропольский, Ю. А., *Проблемы асимптотической теории нестационарных колебаний* (Наука, Москва, 1964.)
[128] Назаров, Е. А., «Условия существования периодических траекторий в динамических системах с цилиндрическим фазовым пространством», *Дифф. Уравн.* **6** (1970) 377—380.
[129] Нгуен Ван Дао, «О колебаниях систем близких к существенно нелинейным», *Доклады АН СССР* **192** (1970) 1004—1006.
[130] Немыцкий, В. В. и Степанов, В. В., *Качественная теория дифференциальных уравнений* (Гос. изд. тех.-теор. лит. Москва, 1949.)
[131] Перов, А. И. и Эгле, И. Ю., К теории Пуанкаре- Данжуа многомерных дифференциальных уравнений», *Дифф. Уравн.* **8** (1972) 801—810.
[132] Плисс, В. А., *Нелокальные проблемы теории колебаний.* (Наука, Москва, 1964.)
[133] Плисс, В. А., «Об одной гипотезе Смейла», *Дифф. Уравн.* **8** (1972) 268—282.
[134] Плисс, В. А., «Анализ необходимости условии грубости Смейла и Роббина для периодических систем дифференциальных уравнений», *Дифф. Уравн.* **8** (1972) 972—983.
[135] Понтрягин, Л. С., *Обыкнобенные дифференциальные уравнения.* (Гос. изд. физ.-мат. лит., Москва, 1961.)

(Beérkezett: 1974. január 31.)

FARKAS MIKLÓS
BME GÉPÉSZMÉRNÖKI KAR MATEMATIKA TANSZÉK
1521 BUDAPEST XI., STOCZEK U. H ÉPÜLET IV. E.

PERIODIC PERTURBATIONS OF AUTONOMOUS SYSTEMS

M. FARKAS

In this paper the author's results concerning the behaviour of periodic solutions of differentia systems under periodic perturbations are presented in an expository way. The unperturbed system is autonomous and it is assumed that it has an isolated periodic solution. Rigorous definitions are given and sufficient conditions are proved for a periodic solution to be isolated. The perturbation is supposed to be "controllably periodic", i.e. it is periodic with a period which can be chosen appropriately. Under very mild conditions it is proved that to each small enough amplitude of the perturbation there belongs a one parameter family of periods such that the perturbed system has a unique periodic solution with this period. Sufficient criteria are given that ensure the asymptotic stability of the periodic solution of the perturbed system. The results are applied to *van der Pol's* and *Liénard's equation.* All the results are valid for "D-periodic" solutions, i.e. for solutions whose derivative is periodic.

Alkalmazott Matematikai Lapok 1 (1975) 255—263

TÉGLALAPMÁTRIXOK ÁLTALÁNOSÍTOTT INVERZÉRŐL

VARGA GYULA

Budapest

A cikk összefoglalja a szinguláris és téglalap alakú mátrixok *Moore—Penrose-féle általánosított inverzének* alapvető tulajdonságait, a különböző speciális és általános esetekben való előállítását, és ismerteti az általánosított inverz kiszámításának egy lehetséges számítástechnikai módszerét a *Householder-féle ortogonális felbontás* segítségével, mellékelve az eljárás FORTRAN szubrutinjait.

1. Bevezetés

Reguláris négyzetes mátrixok inverzének a fogalmát MOORE [2] és PENROSE [3] általánosította szinguláris és téglalap alakú mátrixokra. Mivel ez az általánosított inverz-fogalom nagy szerepet játszik mérési eredmények kiértékelésénél és a legkisebb négyzetek módszerének alkalmazásánál, rajtuk kívül számosan foglalkoztak vele az utóbbi időben (lásd. a [4] irodalomjegyzékét). Az általuk vizsgált inverzfogalom természetesen nem tesz eleget a reguláris négyzetes mátrixok inverzére fennálló $\mathbf{AA}^{-1}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}=\mathbf{E}$ összefüggésnek, hanem (a továbbiakban valós elemű mátrixokra szorítkozva, és az $\mathbf{A}$ mátrix általánosított inverzét $\mathbf{A}^+$-tel jelölve) fennállnak rá az

$$\mathbf{AA}^+\mathbf{A} = \mathbf{A} \qquad (\mathbf{AA}^+)^T = \mathbf{AA}^+$$

$$\mathbf{A}^+\mathbf{AA}^+ = \mathbf{A}^+ \qquad (\mathbf{A}^+\mathbf{A})^T = \mathbf{A}^+\mathbf{A}$$

összefüggések. Az általánosított inverz mindig létezik és egyértelmű.

Az MTA Számítástechnikai és Automatizálási Kutató Intézetében 2 program készült mátrixok általánosított inverzének a kiszámítására. Mielőtt a programokat ismertetnénk, tekintsük át az általánosított inverz fogalmát és néhány tulajdonságát.

2. Az általánosított inverz előállítása

A lineáris algebrában megmutatják, hogy az $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ általános, szinguláris vagy téglalapmátrixú lineáris egyenletrendszer ún. normál megoldását éppen a fent megadott tulajdonságokkal definiált általánosított inverz segítségével kaphatjuk meg az $\mathbf{x}_{\text{normál}}=\mathbf{A}^+\mathbf{b}$ képlet alapján. Ez indokolja a vele való foglalkozást számítástechnikai szempontból. Mielőtt az általános esetre rátérnénk, tekintsünk két fontos speciális esetet:

1. Az ún. túlhatározott egyenletrendszer esete, amelyben $\mathbf{A}$ $n\times m$-es téglalap-

mátrix, $n>m$ és a rangja $r(\mathbf{A})=m$. Ekkor az $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ egyenletrendszer helyett (amelynek általában nincs megoldása) az $\mathbf{A}^T\mathbf{Ax}=\mathbf{A}^T\mathbf{b}$ egyenletrendszert megoldva kapjuk az $\mathbf{x}=(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{b}$ normál megoldást, amelyből látható, hogy ez esetben $\mathbf{A}^+=$ $=(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T$, ahol $\mathbf{A}^+ m\times n$-es téglalapmátrix.

2. Az ún. alulhatározott egyenletrendszer esete, amelyben $\mathbf{A}$ $n\times m$-es téglalapmátrix, $n<m$ és a rangja $r(\mathbf{A})=n$. Ekkor az $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszernek általában végtelen sok megoldása van, ezek közül a normál megoldást az $\mathbf{x}=\mathbf{A}^T\mathbf{y}$ feltevés bevezetésével választjuk ki: az $\mathbf{AA}^T\mathbf{y}=\mathbf{b}$ egyenletrendszerből kapjuk az $\mathbf{y}=(\mathbf{AA}^T)^{-1}\mathbf{b}$-t, majd ebből az $\mathbf{x}=\mathbf{A}^T(\mathbf{AA}^T)^{-1}\mathbf{b}$ normál megoldást. Ebből látható, hogy $\mathbf{A}^+=\mathbf{A}^T(\mathbf{AA}^T)^{-1}$.

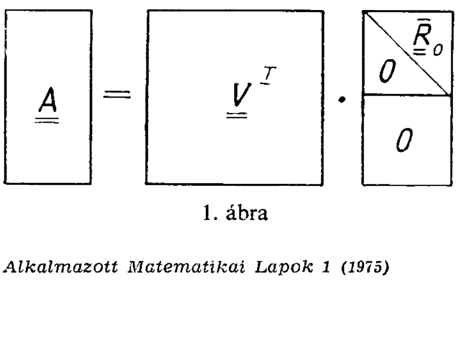
Az általános esetben legyen $\mathbf{A}$ $n\times m$-es téglalapmátrix ($n \gtreqless m$). Legyen $k=r(\mathbf{A})$ a mátrix rangja, akkor $k\leq\min(m, n)$. Ekkor, mint ismeretes, $\mathbf{A}$ felírható az $\mathbf{A}=\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}$ szorzatalakban, ahol $\mathbf{B}$ $n\times k$–s, $\mathbf{C}$ pedig $k\times m$-es téglalapmátrix. Az $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ egyenletrendszert $\mathbf{BCx}=\mathbf{b}$ alakban írva, és $\mathbf{Cx}=\mathbf{y}$-t véve, a $\mathbf{By}=\mathbf{b}$ túlhatározott egyenletrendszer normál megoldásaként kapjuk az $\mathbf{y}=\mathbf{Cx}=(\mathbf{B}^T\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{b}$ kifejezést, majd a $\mathbf{Cx}=(\mathbf{B}^T\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{b}$ alulhatározott egyenletrendszer megoldásához az $\mathbf{x}=\mathbf{C}^T\mathbf{z}$ feltevést bevezetve kapjuk $\mathbf{CC}^T\mathbf{z}=(\mathbf{B}^T\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{b}$ megoldásaként a $\mathbf{z}=(\mathbf{CC}^T)^{-1}\cdot$ $\cdot(\mathbf{B}^T\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{b}$ kifejezést, és végül az eredeti egyenletrendszer megoldásaként az $\mathbf{x}=\mathbf{C}^T(\mathbf{CC}^T)^{-1}(\mathbf{B}^T\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{b}$ kifejezést, amelyből látható, hogy $\mathbf{A}^+=\mathbf{C}^T(\mathbf{CC}^T)^{-1}\cdot$ $\cdot(\mathbf{B}^T\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^T$. Nyilvánvaló, hogy $r(\mathbf{A}^+)=r(\mathbf{A})$.

3. Számítástechnikai eljárás az általánosított inverz kiszámítására

Az előbbiekben ismertetett előállítási mód számítástechnikailag nehézkesen valósítható meg. Gyakorlatilag használható eljárást alkalmas mátrixfelbontások segítségével kaphatunk [1].

A szakirodalomban használatos módszerekről áttekintést ad [5], a *Gram—Schmidt* ortogonalizálási eljárást alkalmazza az általánosított inverz kiszámítására [4], programot is mellékelve. A szakirodalomban szereplő módszerek nagy részben direkt eljárások. Ugyanilyen típusú az ismertetésre kerülő, *Householder*-féle ortogonalizálást alkalmazó eljárás is. Az ilyen típusú eljárások kihasználják azt a tényt, hogy ha az $A=Q\bar{A}W$ felbontásban Q és W ortogonális mátrixok, akkor $A^+=W^T\bar{A}^+Q^T$. Ez egyéb felbontásokra általában nem igaz. Az invertálást „előkészítő" felbontás egyik fontos célja az A mátrix rangjának (minél pontosabb) meghatározása. Ez lényeges eleme egy használható algoritmusnak, mert a rangszám változása esetén az általánosított inverz mátrix nem folytonosan változik (l. [6]). A *Householder*-féle ortogonalizálási eljárás rendkívül stabil; a sikeresen végrehajtott transzformációs lépések száma éppen a mátrix rangját adja meg. Az ismertetésre kerülő eljárás 1. esetében ez a probléma nem lép fel, mert ott feltételezzük, hogy a rangszám megegyezik a mátrix oszlopainak számával.

Mivel, mint könnyen látható, $(\mathbf{A}^T)^+=(\mathbf{A}^+)^T$, ezért a 2. speciális eset számítástechnikai megoldása az elsőre visszavezethető, így csak az elsővel és az általános esettel foglalkozunk.

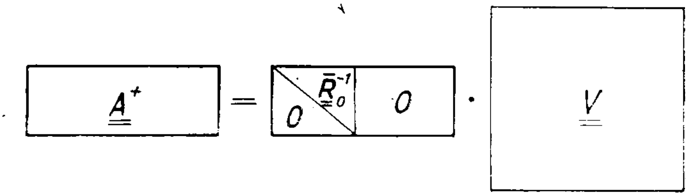


1. ábra

Az 1. esetben legyen $\mathbf{A}$ $n\times m$-es téglalapmátrix, $n>m$, $r(\mathbf{A})=m$.

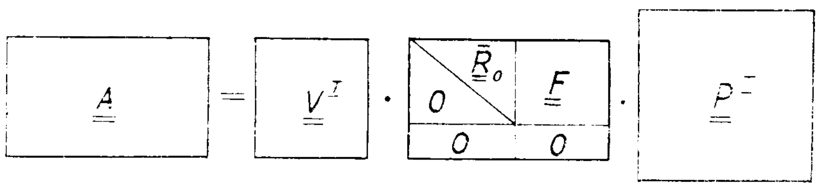
Az alábbiakban ismertetendő ortogonális mátrixfelbontási eljárással $\mathbf{A}$-t egy ortogonális és egy „háromszögmátrix" szorzatára bontjuk: $\mathbf{A}=\mathbf{V}^T\mathbf{R}$, ahol $\mathbf{R}=\begin{bmatrix}\mathbf{R}_0\\0\end{bmatrix}$, és $\mathbf{R}_0$ egy felső háromszögmátrix, amint az az 1. ábrán látható.

A felbontás után az általánosított inverz egyszerűen adódik $\mathbf{A}^+=\mathbf{R}^{-1}\mathbf{V}$ alakban, ahol $\mathbf{R}^{-1}=[\mathbf{R}_0^{-1}, 0]$, ahogyan azt a 2. ábra is mutatja. Az így kapott $m\times n$-es mátrix, mint könnyen belátható, eleget tesz az általánosított inverzre vonatkozó követelményeknek.



2. ábra

Az általános esetben legyen $\mathbf{A}$ $n\times m$-es téglalapmátrix ($n \gtrless m$), $r=r(\mathbf{A})\leq$ $\leq \min(m, n)$. Az előző esetnél említett ortogonális mátrixfelbontási eljárással $\mathbf{A}$-t egy ortogonális, egy trapéz és egy permutációs mátrix szorzatára bontjuk: $\mathbf{A}=\mathbf{V}^T\mathbf{R}\mathbf{P}^T$, ahol $\mathbf{R}=\begin{bmatrix}\mathbf{R}_0 & \mathbf{F}\\0 & 0\end{bmatrix}$, és $\mathbf{R}_0$ egy $r\times r$-es felső háromszögmátrix. Ez a felbontás szemléletesen látható a 3. ábrán. A továbbiakban $\mathbf{R}$-et egy újabb ortogonális



3. ábra

felbontással $\mathbf{R}=\mathbf{S}\mathbf{W}^T$ alakban állítjuk elő, ahol $\mathbf{S}=\begin{bmatrix}\mathbf{S}_0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$ és $\mathbf{S}_0$ alsó háromszögmátrix, $\mathbf{W}^T$ pedig ortogonális mátrix. Az eddigi felbontásokból adódik az $\mathbf{A}=\mathbf{V}^T\mathbf{S}\mathbf{W}^T\mathbf{P}^T$ mátrixegyenlőség, amelyből az általánosított inverz már megkapható az $\mathbf{A}^+=$ $=\mathbf{P}\mathbf{W}\mathbf{S}^+\mathbf{V}$ alakban, ahol $\mathbf{S}^+=\begin{bmatrix}\mathbf{S}_0^{-1} & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$.

Az ortogonális felbontásokat a *Householder-féle eljárással* (l. [1]) végezzük el. Ez olyan $\mathbf{Q}=\mathbf{Q}_m\cdot\mathbf{Q}_{m-1}\dots\mathbf{Q}_1$ ortogonális mátrixok szorzatának az előállítását követeli meg, amelyek közül a k-adik

$$\mathbf{Q}_k=\mathbf{E}-\frac{1}{h}\cdot\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}^T$$

alakú, ahol

$$\begin{aligned} u_1 &= \ldots = u_{k-1} = 0, \\ u_k &= a_{k,k}^{(k-1)} - \sigma^{1/2}, \\ u_{k+1} &= a_{k+1,k}^{(k-1)}, \\ &\vdots \\ u_n &= a_{n,k}^{(k-1)}, \\ \sigma &= (a_{k,k}^{(k-1)})^2 + \ldots + (a_{n,k}^{(k-1)})^2, \\ h &= -u_k \cdot \sigma^{1/2}. \end{aligned}$$

($\sigma < \varepsilon$ esetén oszlopcsere a hátralevő oszlopokkal, ha mindegyikre $\sigma < \varepsilon$, az eljárás befejeződik.)

Legyen az adott mátrix $\mathbf{A}_0 = \mathbf{A}$, legyen továbbá $\mathbf{A}_k = \mathbf{Q}_k \cdot \mathbf{A}_{k-1}$, akkor az $\mathbf{A}_k$ mátrix k-adik oszlopában az első $k-1$ elem változatlan marad,

$$a_{k,k}^{(k)} = \sigma^{1/2}, \quad a_{k+1,k}^{(k)} = \ldots = a_{n,k}^{(k)} = 0,$$

$$a_{i,j}^{(k)} = a_{i,j}^{(k-1)} - u_i \cdot c_j \quad (i = k, \ldots, n;\ j = k+1, \ldots, m),$$

ahol

$$c_j = \frac{1}{h} \sum_{l=k}^{n} u_l \cdot a_{l,j}^{(k-1)}.$$

Az $\mathbf{R} = \mathbf{QA}$ mátrix főátló alatti elemei zérussal egyenlők. Mivel $\mathbf{Q}$ ortogonális, $\mathbf{Q}^T\mathbf{Q} = \mathbf{E}$, tehát $\mathbf{A} = \mathbf{Q}^T\mathbf{R}$ éppen a kívánt felbontást adja meg.

Ehhez az ún. baloldali felbontáshoz hasonlóan kaphatjuk meg a jobboldali felbontást is, amelynek eredményeként a főátló feletti elemek válnak zérussá.

Az itt ismertetett számítástechnikai eljárások végrehajtása nagyon idő- és helyigényes. Általános lineáris egyenletrendszerekre való alkalmazásuk mégis célszerű olyan esetekben, ha különböző jobboldalakkal azonos mátrixú egyenletrendszereket kell megoldanunk. Ezenkívül a matematika több ágában (pl. faktoranalízis) fordulnak elő általánosított inverzzel kapcsolatos problémák.

Példaképpen tekintsük a következő téglalapmátrixot:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ennek általánosított inverze (4 tizedesre kerekítve):

$$\mathbf{A}^+ = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.2 & 0.1 \\ -0.2667 & -0.0667 & 0.1333 \end{bmatrix}.$$

4. Az eljárás programjának ismertetése

A túlhatározott egyenletrendszerhez tartozó 1. esetre és az általános esetre vonatkozó FORTRAN szubrutinokat mellékeljük, a használati utasításokkal együtt. A szubrutinok az MTA CDC 3300-as gépére készültek, és azon próbáltuk ki őket.

A közölt módszer programjának lefuttatása a [4]-ben közölt programéval összehasonlítva ugyanazon mátrixokra azonos nagyságrendű gépidőt vett igénybe.

Az 1. eset a GENINV nevű szubrutinnal számolható.

Hívás: CALL GENINV (A,N,M,EPS,IER).

Paraméterei:

A az invertálandó mátrix tömbje; az általánosított inverz transzponáltját itt kapjuk meg.

N a mátrix sorainak száma.

M a mátrix oszlopainak száma

EPS az ortogonalizálási eljáráshoz használt ε.

IER hibakód, $r(\mathbf{A})<m$ esetén IER=1, egyébként 0.

Az általános esetben a GENINV2 szubrutinnal számolunk.

Hívás: CALL GENINV2 (A,N,M,EPS,IER).

Paraméterei ugyanazok, mint a GENINV-nek, de IER=1 csak akkor következik be, ha **A** zérusmátrix.

```
      SUBROUTINE GENINV(A,N,M,EPS,IER)
      DIMENSION A(30,1),V(30,30),C(30),U(30)
      IER=0
      DO 1 I=1,N
      DO 1 J=1,N
      V(I,J)=0.
      IF (I.EQ.J) V(I,J)=1.
    1 CONTINUE
      DO 2 IR=1,M
      IR1=IR+1
      SIGMA=0.
      DO 3 I=IR,N
      U(I)=A(I, IR)
    3 SIGMA=SIGMA+U(I)*U(I)
      IF(SIGMA.GT.EPS) GO TO 4
      IER=1
      RETURN
    4 S=SQRT(SIGMA)
      U(IR)=U(IR)—S
      H=SIGMA—A(IR,IR)*S
      DO 6 K=IR1,M
      F=0.
      DO 5 J=IR,N
    5 F=F+U(J)*A(J,K)
    6 C(K)=F/H
      A(IR,IR)=S
      DO 7 I=IR,N
      DO 7 K=IR1,M
    7 A(I,K)=A(I,K)-U(I)*C(K)
      DO 8 K=1,N
      F=0.
      DO 9 J=IR,N
```

```
 9 F=U(J)*V(J,K)+F
 8 C(K)=F/H
   DO 10 I=IR,N
   DO 10 K=1,N
10 V(I,K)=V(I,K)-U(I)*C(K)
 2 CONTINUE
   DO 11 J=1,M
   L=M+1-J
   A(L,L)=1./A(L,L)
   L1=L-1
   DO 12 KI=1,L1
   K=L-KI
   K1=K+1
   F=0.
   DO 13 I=K1,L
13 F=F-A(K,I)*A(I,L)
12 A(K,L)=F/A(K,K)
11 CONTINUE
   DO 14 K=1,N
   DO 14 I=1,M
   F=0.
   DO 15 J=I,M
15 F=F+A(I,J)*V(J,K)
14 V(I,K)=F
   DO 16 I=1,N
   DO 16 J=1,M
16 A(I,J)=V(J,I)
   RETURN
   END

   SUBROUTINE GENINV2(A,N,M,EPS,IER)
   DIMENSION A(30,1),V(30,30),C(30),U(30),JEL(30),W(30,30)
   MIN=M
   IF(N.LT.M) MIN=N
   IM=0
   IER=0
   DO 1 I=1,N
   DO 1 J=1,N
   V(I,J)=0.
   IF(I.EQ.J) V(I,J)=1.
 1 CONTINUE
   DO 38 I=1,M
   DO 38 J=1,M
   W(I,J)=0.
   IF(I.EQ.J) W(I,J)=1.
38 CONTINUE
   DO 2 IR=1,MIN
```

```
      IR1=IR+1
      IS=IR
   16 SIGMA=0.
      DO 3 I=IR,N
      U(I)=A(I,IS)
    3 SIGMA=SIGMA+U(I)*U(I)
      IF(SIGMA.GE.EPS) GO TO 4
      IS=IS+1
      IF(IS.LE.MIN) GO TO 16
      GO TO 17
    4 JEL(IR)=IS
      IF(IR.EQ.IS) GO TO 18
      DO 19 I=1,N
      F=A(I,IR)
      A(I,IR)=A(I,IS)
   19 A(I,IS)=F
   18 IM=IM+1
      S=SQRT(SIGMA)
      U(IR)=U(IR)-S
      H=SIGMA-A(IR,IR)*S
      DO 6 K=IR1,M
      F=0.
      DO 5 J=IR,N
    5 F=F+U(J)*A(J,K)
    6 C(K)=F/H
      A(IR,IR)=S
      DO 14 I=IR1,N
   14 A(I,IR)=0.
      DO 7 I=IR,N
      DO 7 K=IR1,M
    7 A(I,K)=A(I,K)-U(I)*C(K)
      DO 8 K=1,N
      F=0.
      DO 9 J=IR,N
    9 F=U(J)*V(J,K)+F
    8 C(K)=F/R
      DO 10 I=IR,N
      DO 10 K=1,N
   10 V(I,K)=V(I,K)-U(I)*C(K)
    2 CONTINUE
   17 IF(IM.GT.0) GO TO 20
      IER=1
      RETURN
   20 DO 25 IR=1,IM
      IR1=IR+1
      U(IR)=A(IR, IR)
      F=0.
      DO 26 I=IR1,M
```

```
   U(I)=A(IR,I)
26 F=F+U(I)*U(I)
   IF(F.LT.EPS) GO TO 25
   F=F+U(IR)*U(IR)
   S=SQRT(F)
   U(IR)=U(IR)-S
   H=-U(IR)*S
   DO 28 I=IR1,IM
   F=0.
   DO 29 K=IR,M
29 F=F+A(I,K)*U(K)
28 C(I)=F/H
   A(IR,IR)=S
   DO 15 I=IR1,M
15 A(IR,I)=0.
   DO 30 I=IR1,IM
   DO 30 K=IR,M
30 A(I,K)=A(I,K)-C(I)*U(K)
   DO 31 I=1,M
   F=0.
   DO 32 K=IR,M
32 F=F+W(I,K)*U(K)
31 C(I)=F/H
   DO 33 I=1,M
   DO 33 K=IR,M
33 W(I,K)=W(I,K)-C(I)*U(K)
25 CONTINUE
   DO 11 I=1,IM
   A(I,I)=1./A(I,I)
   I1=I+1
   DO 12 L=I1,IM
   L1=L-1
   F=0.
   DO 13 J=I,L1
13 F=F-A(L,J)*A(J,I)
12 A(L,I)=F/A(L,L)
11 CONTINUE
   DO 34 I=1,M
   DO 34 J=1,IM
   F=0.
   DO 35 K=J,IM
35 F=F+W(I,K)*A(K,J)
34 W(I,J)=F
   DO 36 I=1,M
   DO 36 J=1,N
   F=0.
   DO 37 K=1,IM
37 F=F+W(I,K)*V(K,J)
```

```
36 A(J,I)=F
   IF(IM.EQ.MIN) GO TO 24
   DO 22 IJ=1,IM
   I=IM+1-IJ
   K=JEL(I)
   IF(I.EQ.K) GO TO 22
   DO 23 J=1,N
   U(J)=A(J,I)
   A(J,I)=A(J,K)
23 A(J,K)=U(J)
22 CONTINUE
24 RETURN
   END
```

IRODALOM

[1] HOUSEHOLDER, A. S., "Unitary Triangularization of a Non-Symmetric Matrix" *J. Assoc. Comp. Mach.* **5** (1958) 339—342.
[2] MOORE, E. H., *General Analysis Part I.* (1935).
[3] PENROSE, R. A., "A Generalized Inverse for Matrices" *Proc. Cambridge Philos. Soc.* (1955).
[4] RAO, C. R., MITRA, S. K., Generalized Inverse of Matrices and its Applications (New Yor,k Wiley 1971).

(Beérkezett: 1974. március 13.)
(Újra beérkezett: 1974. augusztus 5.)

DR. VARGA GYULA
MTA SZÁMÍTÁSTECHNIKAI ÉS AUTOMATIZÁLÁSI KUTATÓ INTÉZET
1502 BUDAPEST XI., KENDE U. 13—17.

GENERALIZED INVERSE OF RECTANGULAR MATRICES

GY. VARGA

The paper summarizes the fundamental qualities of the *Moore—Penrose generalized inverse* of singular and rectangular matrices, the determination of the inverse matrix in different special and general cases and deals with one of the practicable computational methods of its calculation using *Householder orthogonal decomposition.* Two FORTRAN subroutines representing two variants of the computation are adjoined.

Alkalmazott Matematikai Lapok 1 *(1975) 265—277*

KÖZÖNSÉGES DIFFERENCIÁLEGYENLETEKRE VONATKOZÓ EGYLÉPÉSES MÓDSZEREK AUTOMATIKUS HIBABECSLÉSEIRŐL

GALÁNTAI AURÉL

Budapest

A dolgozatban bevezetett automatikus hibabecslések a [2], [7], [9], [13] *Runge—Kutta hibabecslések* általánosításai. A lépésfelezéssel történő összehasonlítás után kimutatjuk, hogy a [2], [7], [9], [13] eljárások és általában a legfeljebb hatpontos *Runge—Kutta módszerek* lineáris hibabecslései a lépésfelezésnél „rosszabbak".

1. Alapfogalmak

Legyen $\|.\|: R^s \to R^+$ norma ($s \geqq 1$), $D \subset R^s$ nyílt tartomány, $I \subset R$ intervallum, valamint $x_k \in I$ és $x_{k+1} - x_k = h_k > 0$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$). Jelölje $y: I \to D$ a pontos, y_k pedig az x_k pontbeli közelítő megoldását az

$$y' = f(x, y); \quad y(x_0) = y_0 \tag{1.1}$$

kezdetiérték-problémának. Ekkor az egylépéses módszerek

$$y_{n+1} = y_n + h_n \Phi(x_n, y_n, h_n) \tag{1.2}$$

alakúak, ahol $\Phi(x, y, h)$ adott függvény és

$$\Phi(x, y, 0) = f(x, y). \tag{1.3}$$

Az m-pontos explicit *Runge—Kutta* (*RK*) *módszerek* esetén

$$\Phi(x, y, h) = \sum_{i=1}^{m} c_i k_i, \tag{1.4}$$

ahol

$$k_1 = f(x, y); \quad k_i = f\left(x + a_i h, y + h \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} k_j\right); \quad i = 2, 3, \ldots, m. \tag{1.5}$$

Az (1.2) módszer x ponthoz tartozó káplethibájának a

$$T(x, h) = y(x) + h\Phi\big(x, y(x), h\big) - y(x + h) \tag{1.6}$$

kifejezést nevezzük, rendje pedig az a maximális p természetes szám, amelyre fennáll, hogy

$$T(x, h) = O(h^{p+1}). \tag{1.7}$$

A képlethiba becslésének legismertebb módjára a lépésfelezésre és a *RK módszerek* rendjére vonatkozik a következő két állítás ([3], [6]).

1.1. ÁLLÍTÁS. Legyen az (1.2) módszerben a h és a p érték rögzített. Ha y^*_{n+1} az x_{n-1} pontból $2h$ lépésközzel számított megoldás, akkor

$$T(x_n, h) = \frac{y^*_{n+1} - y_{n+1}}{2^{p+1}-2} + O(h^{p+2}). \tag{1.8}$$

1.2. ÁLLÍTÁS. Ha $p^*(m)$ azt a legmagasabb rendet jelöli, amely egy m-pontos RK módszerrel elérhető, akkor igaz, hogy

$$\begin{gathered} p^*(m) = m, \quad m = 1, 2, 3, 4, \\ p^*(5) = 4, \quad p^*(6) = 5, \quad p^*(7) = 6, \quad p^*(8) = 6, \quad p^*(9) = 7, \\ p^*(m) \leqq m-2, \quad m = 10, 11, \dots . \end{gathered} \tag{1.9}$$

A [2], [7], [9], [13] RK hibabecslések általánosítását két lépésben végezzük el.

1.1. DEFINÍCIÓ. A $Q: R^l \to R^j$ leképezést $(l, j \geqq 1)$ karakterizálhatónak mondjuk, ha van olyan $K_Q \in R^+$ költségfüggvény, amely $Q(z)$ $(z \in D(Q))$ kiszámításának műveletigényét jól jellemzi.

1.2. DEFINÍCIÓ. A tetszőleges $G: I \times R^{s+1} \to R^s$ leképezést az (1.2) módszer automatikus hibabecslésének nevezzük, ha

$$G(x, y(x), h) = O(h^r) \quad (r \geqq 1, r \leqq p+1), \tag{1.10}$$

valamint a G és Φ azonos módon karakterizálhatók.

Vizsgáljuk meg a következő példát.

PÉLDA. Az (1.4) *Runge—Kutta-módszer*

$$G = h \sum_{i=1}^{m} d_i k_i \tag{1.11}$$

és

$$G = h \left(\sum_{i=1}^{m} d_{1i} k_i \right) \left(\sum_{i=1}^{m} d_{2i} k_i \right) \left(\sum_{i=1}^{m} d_{3i} k_i \right)^{-1} \quad (s = 1) \tag{1.12}$$

alakú automatikus hibabecslései az f függvénybe való behelyettesítések számával karakterizálhatók.

Az 1.2. definíció fontos következménye, hogy az automatikus hibabecslések és a lépésfelezés azonos módon karakterizálhatók. Igaz ugyanis, hogy karakterizálható Φ esetén a lépésfelezés Φ-vel azonos módon karakterizálható (jele K_l) és lépésenként $K_l \leqq 0{,}5 K_\Phi$.

A hibabecslés és a Φ lépésenkénti összköltségét az alkalmazott becslésnek megfelelően jelölje $K_{l,\Phi}$ és $K_{G,\Phi}$. Megjegyezzük, hogy $K_{l,\Phi} = K_l + K_\Phi$ és $K_{G,\Phi} \leqq$ $\leqq K_G + K_\Phi$. Jelölje továbbá $K_{l,\Phi}(\alpha, \varepsilon)$ és $K_{G,\Phi}(\alpha, \varepsilon)$ az $y(x_0+\alpha)$ közelítő értékeinek minimális kiszámítási költségét az $I_0 = [x_0, x_0+\alpha] \subset I$ $(\alpha > 0)$ és a

$$\|T(x, h)\| \leqq \varepsilon, \quad \|G(x, y(x), h)\| \leqq \varepsilon \quad (x \in I_0) \tag{1.13}$$

feltételek mellett.

Igen gyakoriak a relatív hosszú szakaszokon (nagy α/ε) történő számítások. Emiatt a következő definíciót vezetjük be.

1.3. DEFINÍCIÓ. A G automatikus hibabecslést a lépésfelezésnél rosszabbnak mondjuk, ha $0<h\leqq h^*$ és

(1.14) $$\|G(x, y(x), h)\| \geqq q_1 h^r > 0, \quad (x\in I_0)$$

esetén $\exists \varepsilon_0=\varepsilon(\alpha)>0$ küszöbszám, hogy az $\varepsilon\leqq\varepsilon_0$ értékekre

(1.15) $$K_{G,\Phi}(\alpha, \varepsilon) > K_{l,\Phi}(\alpha, \varepsilon)$$

fennáll, vagy ha $T-G=O(h^{p+1})$.

2. Kritérium automatikus hibabecslésekre

Azokat a feltételeket keressük, amelyek teljesítése esetén a G használható és nem rosszabb a lépésfelezésnél. Felhasználva a

(2.1) $$T(x, h) = \psi(x, y(x))h^{p+1}+O(h^{p+2}),$$

valamint a

(2.2) $$G(x, y(x), h) = \varphi(x, y(x))h^r+O(h^{r+1})$$

összefüggést, könnyen beláthatók a következő állítások.

2.1. ÁLLÍTÁS. Ha $r>p+1$ és ψ, $\varphi\neq 0$, akkor elég kis $h>0$ esetén $\|G(x, y(x), h)\|<$ $<\|T(x, h)\|$, azaz G a hibát alábecsüli.

2.2. ÁLLÍTÁS. Ha $r=p+1$ és $\psi\neq\varphi$, akkor G nem alkalmas a hiba becslésére, mert $T-G$ az

(2.3) $$y_{n+1} = y_n+h_n[\Phi(x_n, y_n, h_n)-\varphi(x_n, y_n)h_n^p+O(h_n^{p+1})]$$

p-edrendű egylépéses módszer képlethibájával egyenlő.

2.3. ÁLLÍTÁS. Ha $r<p+1$ és $\varphi\neq 0$, akkor elég kis $h>0$ esetén $\|G(x, y(x), h)\|>$ $>\|T(x, h)\|$, azaz G a hibát felülbecsüli.

Igaz továbbá a

2.4. ÁLLÍTÁS. Legyen $r<p+1$ és $K_{G,\Phi}$, $K_{l,\Phi}>0$ tetszőlegesek. Ekkor a G rosszabb, mint a lépésfelezés.

Bizonyítás. Jelölje h_1 a lépésfelezés, h_2 a G becslés használata esetén megengedett lépéshosszt, valamint n_1 és n_2 a nekik megfelelő lépésszámot. Ekkor nyilván

$$K_{l,\Phi}(\alpha, \varepsilon) = n_1 K_{l,\Phi}, \quad K_{G,\Phi}(\alpha, \varepsilon) = n_2 K_{G,\Phi}.$$

Legyen $q_2>0$ olyan, hogy teljesüljön

$$\|T(x, h)\|+\|O(h^{p+2})\| \leqq q_2 h^{p+1} \quad (x\in I_0, h\leqq h^*).$$

Ezt és az (1.13), (1.14) feltételeket alkalmazva

$$h_1 \leqq \sqrt[p+1]{\frac{\varepsilon}{q_2}}, \quad h_2 \leqq \sqrt[r]{\frac{\varepsilon}{q_1}},$$

ahol ε olyan kicsi, hogy fennáll a $h_1, h_2 \leqq h^*$ egyenlőtlenség. Maximális h_1, h_2 választással

$$n_1 = \left[\alpha \sqrt[p+1]{\frac{q_2}{\varepsilon}}\right] + 1, \quad n_2 = \left[\alpha \sqrt[r]{\frac{q_1}{\varepsilon}}\right] + 1.$$

Az (1.15) egyenlőtlenség biztosan fennáll, ha

$$\left(\alpha \sqrt[p+1]{\frac{q_2}{\varepsilon}} + 1\right) K_{l,\Phi} < \alpha \sqrt[r]{\frac{q_1}{\varepsilon}} K_{G,\Phi},$$

amely az alábbi ekvivalens alakba is írható

$$\sqrt[p+1]{q_2} + \frac{1}{\alpha 10^{r\tau}} < \frac{K_{G,\Phi}}{K_{l,\Phi}} \sqrt[r]{q_1}\, 10^{(p+1-r)\tau}, \tag{2.4}$$

ahol $\varepsilon = 10^{-(p+1)r\tau}$ $(\tau > 0)$. Ha τ_0 az a legkisebb pozitív szám, amelyre (2.4) fennáll, akkor az $\varepsilon_0 = 10^{-(p+1)r\tau_0}$.

Tekintsük a következő számpéldát.

PÉLDA. Az (1.4) *RK-módszer* (1.11) alakú hibabecslésére $K_{G,\Phi} = m$, $K_{l,\Phi} = 1{,}5m - 0{,}5$. Emiatt $p = r = 4$, $q_2 = 1{,}05^5$, $q_1 = 1{,}5^4$, $h^* = 0{,}2$ és $\alpha = 0{,}2$ esetén $\varepsilon_0 = 10^{-6}$ már megfelel.

A 2.1.—2.3. állítások miatt G a hibabecslésre csak akkor használható, ha $r = p+1$ és $\psi = \varphi$, vagy $r < p+1$ és $\varphi \neq 0$. A továbbiakban feltesszük, hogy G ilyen. Az $r < p+1$ esetben a 2.4. állítás, $K_{G,\Phi} > K_{l,\Phi}$ esetén pedig a definíció miatt G a lépésfelezésnél rosszabb. Ezért igaz a következő

2.1. TÉTEL. A G automatikus hibabecslés csak akkor nem rosszabb a lépésfelezésnél, ha

$$T(x, h) = G(x, y(x), h) + O(h^{p+2}) \tag{I}$$

és

$$K_{G,\Phi} \leqq K_{l,\Phi}. \tag{II}$$

3. Alkalmazás Runge—Kutta módszerekre

Az (1.4) *RK-módszerek* olyan automatikus hibabecsléseivel foglalkozunk, amelyek $G = hF(k_1, \ldots, k_m)$ alakúak, ahol az $F\colon R^s \to R^s$ karakterizálható az f függvénybe való behelyettesítések számával. Ekkor

$$K_{G,\Phi} = K_F + m. \tag{3.1}$$

A lineáris (1.11) és a nemlineáris (1.12) hibabecslésekre $K_F = 0$, de például

$$F = \sum_{j=1}^{l} \gamma_j f\left(x, y + h^2 \sum_{i=1}^{m} d_{ji} k_i\right) \tag{3.2}$$

esetén $K_F = l$.

A költségfüggvény speciális alakja és az 1.2. állítás miatt ezekre a becslésekre a (II) feltétel csak szükséges, de nem elégséges. Ezért a

$$K^*_{l,\Phi} = 1{,}5m^* - 0{,}5; \quad m^* = \min\{j \mid p^*(j) = p\} \tag{3.3}$$

jelöléssel élve az 1.3. definícióbeli (1.15) egyenlőtlenséget a

$$K_{G,\Phi}(\alpha, \varepsilon) > K^*_{l,\Phi}(\alpha, \varepsilon) \tag{3.4}$$

feltétellel helyettesítjük. Minthogy a 2.4. állítás és a 2.1. tételt megelőző okfejtés erre az esetre is érvényes, azért igaz a

3.1. TÉTEL. A fenti speciális, automatikus *RK hibabecslések* akkor és csak akkor nem rosszabbak a lépésfelezésnél, ha kielégítik az (I) és a

$$K_{G,\Phi} \leqq K^*_{l,\Phi} \tag{II*}$$

feltételeket.

Vizsgáljuk most meg az (I), (II*) és a

$$p = p^*(m) \tag{III}$$

segédfeltétel kapcsolatát.

3.1. ÁLLÍTÁS. A vizsgált feltételekre fennáll, hogy (I)$\not\Rightarrow$(II*), (II*)$\not\Rightarrow$(I), (I)$\not\Rightarrow$(III), (III)$\not\Rightarrow$(I).

Bizonyítás. ENGLAND képleténél ([2], [6]) $K_{G,\Phi}=m=6$, $p=4$ és (I) teljesül, míg MERSON képleténél ([1], [7]) $K_{G,\Phi}=m=5$, $p=4$ és (I) nem teljesül. Ezért ENGLAND képlete az első és harmadik, MERSONÉ pedig a másik két relációt igazolja.

3.2. ÁLLÍTÁS. A $K_F=0$, $1 \leqq m \leqq 9$ esetben

$$\text{(III)} \Rightarrow \text{(II*)}. \tag{3.5}$$

Bizonyítás. Az (1.9), (3.3) és a $K_{G,\Phi}=m$ feltétel miatt fennáll a következő táblázat:

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$p^*(m)$	1	2	3	4	4	5	6	6	7
$K^*_{l,\Phi}$	1	2.5	4	5.5	5.5	8.5	10	10	13

Az állítás a táblázatból könnyen leolvasható.

3.3. ÁLLÍTÁS. Ha $K_F=0$ és a (II*) feltétel teljesül, akkor $m=1, 2, 3, 5, 6$ esetén $p=p^*(m)$, az $m=4, 7, 8, 9$ esetben pedig $p^*(m)-1 \leqq p \leqq p^*(m)$.

Bizonyítás. Az állítás ismét a fenti táblázat alapján ellenőrizhető.

A 3.2.—3.3. állítások fontos következménye a

3.2. TÉTEL. Ha $K_F=0$ és $m=1, 2, 3, 5, 6$, akkor a (II*) és a (III) feltételek ekvivalensek.

A továbbiakban speciális eseteket vizsgálunk.

Lineáris hibabecslések

Először bebizonyítjuk az alábbi tételt.

3.3. TÉTEL. Nincs olyan lineáris hibabecslés, amely az (I) és (III) feltételeket egyszerre elégíti ki.

Bizonyítás. Ha $p=p^*(m)$ és G lineáris, akkor

$$T(x, h) = G(x, y(x), h)+O(h^j),$$

ahol $j\leqq p+1$. Feltéve ugyanis, hogy $j\geqq p+2$, akkor az

$$y_{n+1} = y_n+h_n \sum_{i=1}^{m} (c_i-d_i)k_i$$

RK-módszer rendje legalább $p+1$ lenne, ami ellentmond p maximalitásának.
Az eddigiek alapján már kézenfekvő a

3.4. TÉTEL. Ha $1\leqq m\leqq 6$, akkor a lineáris hibabecslések a lépésfelezésnél rosszabbak.

Bizonyítás. A 3.2. és 3.3. tételekből $m=1, 2, 3, 5, 6$ esetén az állítás triviális. Az $m=4$ esetben pedig a tételt visszavezetjük KIS OTTÓ egy tételére. A 3.3. állításból egyszerűen adódik, hogy $K_F=0$, $3\leqq m\leqq 9$ és $p<p^*(m)-1$ esetén $K_{G,\Phi}>K^*_{l,\Phi}$. Ezért, ha $m=4$ esetén létezik a lépésfelezésnél nem rosszabb lineáris hibabecslés, akkor a megfelelő

$$y_{n+1} = y_n+h_n \sum_{i=1}^{4} c_ik_i \tag{3.6}$$

RK-módszer harmadrendű, az

$$y_{n+1} = y_n+h_n \sum_{i=1}^{4} (c_i-d_i)k_i \tag{3.7}$$

RK-módszer pedig negyedrendű volna. KIS OTTÓ kimutatta [14]-ben, hogy ez nem áll fenn. A tételt ezzel igazoltuk.

Konkrét lineáris hibabecsléseket ZONNEVELD ([13]), MERSON ([7]) és ENGLAND ([2]) állítottak elő. Az előző tételből azonnal következik, hogy MERSON és ENGLAND, továbbá ZONNEVELD legfeljebb negyedrendű képletei a lépésfelezésnél rosszabbak. ZONNEVELD ötödrendű képlete pedig $r=p$ és a 3.1. tétel miatt rosszabb a lépésfelezésnél. Megjegyezzük, hogy a *Merson*-módszerről más úton (*G Taylor-sorba* fejtésével) már kimutatták, hogy $r=p$ és emiatt használata előnytelen ([1]). Példaként megadjuk

ZONNEVELD alábbi negyedrendű képletét:

$$
\begin{aligned}
k_1 &= f(x, y),\\
k_2 &= f\left(x+\frac{h}{2}, y+\frac{h}{2}k_1\right),\\
k_3 &= f\left(x+\frac{h}{2}, y+\frac{h}{2}k_2\right),\\
k_4 &= f(x+h, y+hk_3),\\
k_5 &= f\left(x+\frac{3}{4}h, y+\frac{h}{32}(5k_1+7k_2+13k_3-k_4)\right),\\
y_{n+1} &= y_n+\frac{h}{6}(k_1+2k_2+2k_3+k_4),\\
G &= \frac{2h}{3}(-k_1+3(k_2+k_3+k_4)-8k_5).
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

Nemlineáris hibabecslések

Az egyetlen ilyen típusú becslést R. E. SCRATON publikálta 1964-ben ([9]). A csak $y: I \to R$ függvényekre értelmezett képlete a következő

$$
\begin{aligned}
k_1 &= f(x, y),\\
k_2 &= f\left(x+\frac{2}{9}h, y+\frac{2}{9}hk_1\right),\\
k_3 &= f\left(x+\frac{h}{3}, y+\frac{h}{12}(k_1+3k_3)\right),\\
k_4 &= f\left(x+\frac{3}{4}h, y+\frac{3h}{128}(23k_1-81k_2+90k_3)\right),\\
k_5 &= f\left(x+\frac{9}{10}h, y+\frac{9h}{10000}(-345k_1+2025k_2-1224k_3+544k_4)\right),\\
y_{n+1} &= y_n+h\left(\frac{17}{162}k_1+\frac{81}{170}k_3+\frac{32}{135}k_4+\frac{250}{1377}k_5\right),\\
G &= -h\frac{qr}{s},
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

ahol

$$
\begin{aligned}
q &= -\frac{1}{18}k_1+\frac{27}{170}k_3-\frac{4}{15}k_4+\frac{25}{153}k_5,\\
r &= \frac{19}{24}k_1-\frac{27}{8}k_2+\frac{57}{20}k_3-\frac{4}{15}k_4,\\
s &= k_4-k_1.
\end{aligned}
$$

Dolgozatában SCRATON bizonyítás nélkül azt állítja, hogy negyedrendű módszerének G becslése $O(h^6)$ pontosságú, azaz kielégíti az (I) feltételt. Be fogjuk azonban látni, hogy ez nem igaz.

3.4. ÁLLÍTÁS. SCRATON (3.9) képlete negyedrendű.

Bizonyítás. Az [1] dolgozatbeli *Taylor-sort* használva belátható, hogy

$$T(x, h) = -\left[\frac{1}{12}D_3(f)f_y+\frac{1}{12}D_2(f)f_y^2-D_3(f)f_y^3+\frac{1}{3}D(f)D(f_y)f_y\right]\frac{h^5}{480}+O(h^6),$$

ahol

$$D_m(g) = \sum_{i=1}^{m}\binom{m}{i}f(x, y)^i\frac{\partial^m_g}{\partial x^{m-i}\partial y^i} \quad (m = 1, 2, 3, \dots).$$

3.5. ÁLLÍTÁS. SCRATON módszerének G becslése nem elégíti ki az (I) feltételt.

Bizonyítás. Állításunkkal ellentétben tegyük fel, hogy G kielégíti az (I) feltételt. Akkor az

$$y' = cx^3; \quad y(0) = 0 \quad (c \neq 0)$$

feladat esetén $T(x, h)=0$ miatt teljesülnie kell a

$$G(x, y, h) = O(h^6)$$

feltételnek. Mivel $k_1=0$, $k_i=ch^3a_i^3$ $(i=2, 3, 4, 5)$, azért

$$q = ch^3\left(\frac{27}{170}\frac{1}{3^3}-\frac{4}{15}\frac{3^3}{4^3}+\frac{25}{153}\frac{9^3}{10^3}\right) = \frac{ch^3}{80},$$

$$r = ch^3\left(-\frac{27}{8}\frac{2^3}{9^3}+\frac{57}{20}\frac{1}{3^3}-\frac{4}{15}\frac{3^3}{4^3}\right) = -\frac{19}{432}ch^3,$$

$$s = \frac{27}{64}ch^3$$

és végül $G=\frac{19}{14580}ch^4$. $G\neq 0$, ami ellentmondás. Tehát az állítás igaz.

KÖVETKEZMÉNY. A (3.9) képlet a lépésfelezésnél rosszabb.

4. Numerikus példák

ZONNEVELD (3.8) és SCRATON (3.9) módszerét számítógépen (ODRA 1304, CDC 3300) is vizsgáltuk az

(a) $y' = y, \quad y(0) = 1;$

(b) $y' = 28\cos 2x-42\sin 42x-\cos x-22x^{21}, \quad y(0) = 0;$

(c) $y' = \cos x(y+\sin y), \quad y(0) = 1;$

(d) $y' = \frac{x^4+y^4}{xy^3}, \quad y(1) = 1;$

próbafeladatok segítségével. Állandó $h=0,1$ lépésköz mellett kapott eredményeinket a következő táblázat tartalmazza.

Módszer	Feladat	A mutatott hiba (G)	A tényleges hiba
ZONNEVELD	(a)	0,0000045833	0,0000000847
	(b)	−7,3688987238	0,3166208209
	(c)	−0,0001302841	−0,0880196772
	(d)	−0,0004881191	−0,0000033444
SCRATON	(a)	0,0000000183	−0,0000000194
	(b)	−25,7214927797	0,0190249966
	(c)	0,0000003134	−0,0880216967
	(d)	−0,0000005393	0,0000000701

A mutatott és a tényleges hiba közti eltérések az eddigiek alapján nem túl meglepőek. Megjegyezzük azonban, hogy a (c) feladat arra a ritka esetre példa, amikor $r \leqq p$ és $\|G\| < \|T\|$.

IRODALOM

[1] BÉKÉSSY, A., KIS, O. és TARNAY, GY., „Tanulmány R. H. MERSON módszeréről", *MTA Aut. Kutató Int. Közl.* 4 (1969) 3—31.

[2] ENGLAND, R., "Error estimates for Runge—Kutta type solutions to systems of ordinary differential equations", *Computer J.* 12 (1969) 166—170.

[3] GEAR. C. W. *Numerical initial value problems in ordinary differential equations.* (Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs., New Jersey, 1971.)

[4] HENRICI, P., *Discrete variable methods in ordinary differential equations.* (John Wiley Sons, Inc., New York, 1962.)

[5] HULL, T. E., ENRIGHT, W. H., FELLEN, B. M. and SEDGWICK, A. E., "Comparing numerical methods for ordinary differential equations", *SIAM J. Numer. Anal.* 9 (1972).

[6] LAMBERT, J. D., *Computational methods in ordinary differential equations.* (John Wiley Sons, Inc., London, 1973.)

[7] MERSON, R. H., "An operational method for the study of integration processes". in: *Proceedings of conference on data processing and Automatic Computing Machines.* (Weapons Research Establishment, Salisbury, South Australia, 1957.)

[8] RALSTON, A., *Bevezetés a numerikus analízisbe.* (Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1969.)

[9] SCRATON, R. E., "Estimation of the truncation error in Runge—Kutta and allied processes". *Computer J.* 7 (1964) 246—248.

[10] VARGA, GY., *Numerikus módszerek programgyűjtemény I.* (MTA Számítástechnikai Központ, Budapest, 1971.)

[11] VARGA, GY., *Numerikus módszerek programgyűjteménye II.* (MTA Számítástechnikai és Automat. Kut. Int. Budapest, 1973.)

[12] VARGA, L., *Közönséges differenciálegyenletek numerikus módszerei.* (Kézirat, Budapest, 1973.)

[13] ZONNEVELD, J. A., *Automatic numerical integration.* (Matematisch Centrum, Amsterdam, 1970.)

[14] Киш, О., „О методе Рунге—Кутта", *Studia Sci. Math. Hung.* 5 (1970) 433—435.

(Beérkezett: 1974. szeptember 18.)

GALÁNTAI AURÉL
1182 BUDAPEST XVIII., SAS U. 36.

ON ERROR ESTIMATES FOR ONE-STEP SOLUTION METHODS OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

A. GALÁNTAI

This paper studies a generalization of the *Runge—Kutta error estimates* [2], [7], [9] and [13]. After a comparing with the step-halving estimate, we prove, that the processes [2], [7], [9], [13], and, in general, the linear error estimates of the at most six-point *Runge—Kutta methods* are worse than the stephalving.

Alkalmazott Matematikai Lapok 1 *(1975) 275—298*

JORDAN KÁROLY ÉLETE ÉS MUNKÁSSÁGA*

GYIRES BÉLA

Debrecen

1. Bevezetés

a) 1871. december 16-án Budapesten született. Jómódú család gyermeke. A belvárosi *Eötvös főreáliskola* növendéke volt, itt is tett érettségi vizsgát 1889-ben jeles eredménnyel. Főiskoláit külföldön végezte. Párizsban az *École Préparatoire Monge*-on folytatott tanulmányai után az *École Polytechnique*-re jelentkezők versenyvizsgáján többszáz pályázó közül a 14. helyet szerezte meg. Vegyészmérnöknek készült. Mivel az akkori franciaországi kémiatanítást nem tartotta eléggé korszerűnek, tanulmányait a zürichi *École Polytechnique*-en folytatta és ott is szerzett „Diplomingenieur in Chemie" oklevelet 1893-ban.

Ezután a manchesteri *Victoria University Owen's College*-ben PERKINS professzor kémiai laboratóriumában dogozott egy esztendeig. 1894-ben az *Université Genève*-en GUYE professzor tanszékén asszisztenskedett. Ott szerezte meg a „Docteur ès Sciences Physiques" oklevelet, majd a fizikai kémia magántanára lett. Mérnöki oklevelét a *Budapesti Műegyetemen*, doktorátusát a *Budapesti Tudományegyetemen* honosíttatta. 1896—1898-ig a genfi *Société d'Étude Electrochemique* vegyészmérnöke volt, utóbb szakértője egy laibachi magnezitgyárnak.

1899-ben családi körülményei Budapestre szólítják, vegyészmérnökként kíván elhelyezkedni. Az akkori ipari felkészültségünk nyújtotta lehetőségek azonban nem adtak módot arra, hogy tudását hazai iparágakban, vagy intézményeknél értékesítse. Így tovább bővítette tudását a *Budapesti Tudományegyetemen* csillagászati és földrengéstani irányban. 1906-ban az akkor megalakult *Budapesti Szeizmológiai Intézet* vezetésével bízták meg. Ezt a tisztét 1913-ig látta el.

Habár még ebben az időben a természettudományok iránt érzett magában vonzalmat (Lisznyai utcai lakásán vegyészeti laboratóriumot rendezett be), érdeklődése mindinkább a matematika, elsősorban a valószínűségszámítás felé fordul. Igen jó alapot nyújtott erre az *École Préparatoire.*

Az első világháború idején a várpalotai honvédiskolában fizikai, matematikai és meteorológiai tárgyak tanítására tanári megbízást kap. 1919-ben BEKE MANÓ professzor meghívására a *Budapesti Tudományegyetemen* tartott matematikai statisztikai előadásokat. 1920-tól 1950-ig, harminc éven át a *Budapesti Közgazdaságtudományi Egyetem* előadója. 1923-ban magántanári képesítést szerez valószínűségszámításból, matematikai statisztikából és differenciaszámításból. 1933. július hó 9-én egyetemi nyilvános rendkívüli tanári, 1940-ben egyetemi nyilvános rendes tanári címet kapott. Előadásait 1949-től a *Műszaki Egyetemen* folytatta.

* Elhangzott a Magyar Tudományos Akadémiának és a Bolyai János Matematikai Társulatnak Jordan Károly születése századik évfordulójának alkalmából 1971. december 15-én rendezett megemlékezésén.

1895-ben házasságot kötött MARIE BLUMAUER-rel. A házasságból származó harmadik gyermekének születése a felesége életébe került. 1900-ban kötött újabb házasságot MARTHE LAVALLÉE-vel. Ebből a házasságból három gyermeke született. Házasságának 59-ik évében meghalt a felesége és nem egészen egy félév múlva, 1959. december 24-én, 88 éves korában elhunyt JORDAN KÁROLY professzor is.

b) Publikációinak jegyzéke. (MEDGYESSY PÁL professzor volt szíves rendelkezésemre bocsátani ezt a bibliográfiai szempontok szerint általa összeállított jegyzéket.)

[1] JORDAN, CH, *Thèses présentées à la Faculté des Sciences de l'Université de Genèvé pour obtenir le grande de Docteur ès Sciences Physiques. 1 re Thèse. — Dédoublement de l'acide butanoloique 2. et recherches sur les dérivés actifs de cet acide. 2 me Thèse. — Etude numérique sur la formule transformée de MM. Thorpe et Rücker.* (Imprimerie N. Haussmann, Geneve, 1895.)

[2] GUYE, PH.—A. et JORDAN, CH., «Dédoublement de l'acide butane — 2-oloïque (α-oxybutyrique)», *Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences (Paris)* **120** (1895) 562—565.

[3] GUYE, PH.—A. et JORDAN, CH., «Dérivés de l'acide α-oxybutyrique (1-butonoloïque) actif», *Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences (Paris)* **120** (1895) 632—635.

[4] GUYE, PH.—A. et JORDAN, CH., «Éthers des acides α-oxybutyriques actifs», *Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences (Paris)* **120** (1895) 1274—1276.

[5] GUYE, PH.—A. et JORDAN, CH., «Formule simplifiée pour calculer les variations de densité des liquides avec la température», (Mémoires présentés à la Société Chimique, No. 38.) *Bulletin de la Société Chimique de Paris, Sér. 3* **15** (1896) 306—308.

[6] GUYE, PH.—A. et JORDAN, CH., «Recherches expérimentales sur les butanol — 2-oïques (α-oxybutyrique) actifs», (Mémoires présentés à la Société Chimique No 62.) *Bulletin de la Société Chimique de Paris, Sér. 3* **15** (1896) 474—498.

[7] GUYE, PH.—A. et JORDAN, CH., «Dispersion rotatoire des corps actifs liquides non polymérisés», *Comtpes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences (Paris)* **122** (1896) 883—886.

[8] JORDAN KÁROLY, „A valószínűségi számítás alkalmazása meteorológiai viszonyainkra (Applications of the theory of probability to our meteorological conditions)", *Atmosphaera (Előbb: Az Időjárás. Meteorológiai és Csillagászati Folyóirat, Budapest)* **8** (1904) 41—48.

[9] JORDAN, CH., «La propagation des ordes sismiques. Première partie: Étude de la première phase» *Revue Générale des Sciences Pures et Appliquées (Paris)* **18** (1907) 531—544. «Deuxième partie: Étude des seconde et troisième phases.» *Revue Générale des Sciences Pures et Appliquées (Paris)* **18** (1907) 571—578.

[10] JORDAN KÁROLY, „A Hévíz tó fenekének fölmérése. (Charting the basin of Lake Hévíz.)" *A Balaton tudományos tanulmányozásának eredményei.* Második kötet. A Balaton tónak és partjának biológiája. Második rész. A Balaton flórája. II. Szakasz függeléke. A Keszthelyi Hévíz trópikus tündérrózsái. Írta Lovassy Sándor. F. Függelék, 77—79. (Kilián Frigyes M. K. Egyetemi könyvárus bizománya. Hornyánszky Viktor Cs. és kir. udvari könyvnyomdája, Budapest, 1908.)

[11] JORDAN KÁROLY, „A választói rendszerekről. (On the electoral systems.)" *Huszadik század. Társadalomtudományi és Szociálpolitikai Szemle (Budapest)* **17** (1908) 538—551. *„A választójogi rendszerekről. (On the system of suffrage.)"* Különlenyomat a Huszadik Század-ból. (A Huszadik Század Könyvtára 34.) (Deutsch Zsigmond és Társa kiadása, Budapest, 1908.)

[12] JORDAN, CH. et FIEDLER, R., «Contribution à la géometrie des courbes convexes et de certaines courbes qui en dérivent», *Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences (Paris)* **154** (1912) 927—930.

[13] JORDAN, CHARLES et FIEDLER, RAYMOND, «*Contribution à l'étude des courbes convexes fermées et des certaines courbes qui s'y ratlachent*», (A. Hermann et Fils, Paris, 1912).

[14] JORDAN, C. et FIEDLER, R., «Courbes orbiformes», *Archiv der Mathematik und Physik mit besonderer Rücksicht auf die Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten, sowie die Studierenden der Mathematik und Physik, Ser. 3* **21** (1913) 226—235.

[15] JORDAN, CHARLES and FIEDLER, RAYMUND, "On a particular case of closed convex curves", *The Tôhoku Mathematical Journal* 6 (1914) 44—52.

[16] JORDAN, FIEDLER, „Vermischte Mitteilungen. Lősungen. B. Lősungen. Zu 449 (Bd. XXI, S. 288) (W. Blaschke)." *Archiv der Mathematik und Physik mit besonderer Rücksicht auf die Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten sowie die Studierenden der Mathematik und Physik, Ser. 3* **22** (1914) 362—364.
[17] JORDAN KÁROLY és FIEDLER, RAYMUND, „Zárt konvex görbékkel kapcsolatos görbékről. (On curves connected with closed convex curves.)", *Mathematikai és Physikai Lapok* **24** (1915) 207—228.
[18] JORDAN KÁROLY, „A köd. (Fog.)" *Pótfüzetek a Természettudományi Közlönyhöz* (50. Kötethez) (1918) 134—143.
[19] JORDAN KÁROLY, „A várpalotai évi jelentés. (An annual report of Várpalota.)" *Az időjárás. Meteorológiai Folyóirat* **23** (1919) 75—81.
[20] JORDAN KÁROLY, „Az arányos választó rendszerek bírálata. (A critique of the systems of proportional representation.)", *Táltos Könyvtár. Időszerű kérdések.* **12** (1919).
[21] JORDAN, CHARLES, «Sur une série de polynomes dont chaque somme partielle représente la meilleure approximation d'un degré donné suivant la méthode des moindres carrés», *Proceedings of the London Mathematical Society, Ser. 2* **20** (1921—22) 297—325.
[22] JORDAN KÁROLY, „A valószínűség a tudományban és az életben. (Probability in science and life.)", *Természettudományi Közlöny* **53** (1921) 337—349.
[23] JORDAN, KARL, „Kritik der Proportionalwahlsysteme", *Zeitschrift für die gesamte Staatswissenschaft* **76** (1921) 487—492.
[24] JORDAN KÁROLY, „Észlelések eredményeinek törvénybefoglalása polynomok segítségével. (The approximation of data of observations by polynomials.)", *Mathematikai és Physikai Lapok* **29** (1922) 49—63.
[25] JORDAN, K., „Eine vereinfachte Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate." Die Meteorologen-Tagung auf dem Hohen Sonnblick. *Meteorologische Zeitschrift* **39** (LVII. Band der Zeitschrift der Österr. Gesellschaft für Meteorologie.) (1922) 380—387.
[26] JORDAN, CHARLES, "On a new demonstration of Maclaurin's or Euler's summation formula", *The Tôhoku Mathematical Journal* **21** (1922) 244—246.
[27] JORDAN, CHARLES, "On the inversion of Bernoulli's theorem", *The London, Edinburgh and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, Ser. 6* **45** (1923) 732—735.
[28] JORDAN, CHARLES, "On the Montmort-Moivre problem". *Acta Litterarum ac Scientiarum Regiae Universitatis Hungaricae Francisco-Josephinae. A M. Kir. Ferencz József — Tudományegyetem Tudományos Közleményei. Mathematikai Tudományok* **1** (1922—23) 144—147.
[29] JORDAN, CHARLES, «Sur la théorie des erreurs d'observation», *Rendiconti del Circolo Matematico de Palermo* **47** (1923) 396—408.
[30] JORDAN, CHARLES, "On Daniel Bernouill's 'moral expectation' and on a new conception of expectation", *The American Mathematical Monthly* **31** (1924) 183—190.
[31] JORDAN, CHARLES, "On probabilty", *Proceedings of the Physico-Mathematical Society of Japan. Ser. 3* **7** (1925) 96—109.
[32] JORDAN, CHARLES, "Formules nouvelles pour comparer deux probabilités a posteriori", *Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences* **182** (1926) 198—199.
[33] JORDAN, CHARLES, «Développements nouveaux pour l'application du theoreme de Bernoulli», *Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences* **182** (1926) 303—305.
[34] JORDAN, CHARLES, «Sur l'inversion du theorème de Bernoulli», *Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences* **182** (1926) 431—432.
[35] JORDAN, CHARLES, «Sur la probabilité des epreuves répétées, le theorème de Bernoulli et son inversion», *Bulletin de la Société Mathématique de France* **54** (1926) 101—137.
[36] JORDAN, CHARLES, «Les mathémetiques appliquées à la statistique.» *Revue de la Société Hongroise de Statistique. Revue Trimestrielle Publiée par la Société Hongroise de Statistique* **4** (1926) 230—238.
[37] JORDAN KÁROLY, *„Matematikai Statisztika. (Mathematical statistics.)"* Természet és technika. Matematikai, műszaki, természettudományi könyvgyűjtemény **4.** (Az Atheneum Irodalmi és Nyomdai R. T. kiadása. Budapest, 1927.)
[38] JORDAN, CHARLES, «*Statistique mathématique.*» Avec une préface de M. d'Ocagne. (Gauthier-Villars et Cie, Paris, 1927.)
[39] JORDAN, CHARLES, "On Poisson's and Lexis's problem of probability of repeated trials", *The London, Edinbourgh and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science Ser. 7* **3** (1927) 1195—1199.
[40] JORDAN, CHARLES, «Sur un cas généralisé de la probabilité des épreuves répétées», *Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences* **184** (1927) 315—317.

[41] JORDAN, CHARLES, «Sur un cas généralisé de la probabilité des épreuves répétées». *Acta Litterarum ac Sciantiarum Regiae Universitatis Hungaricae Francisco-Josephinae. Sectio Scientiarum Mathematicarum. A M. Kir. Ferencz József — Tudományegyetem Tudományos Közleményei. Matematikai Tudományok* 3 (1927) 193—210.

[42] JORDAN, CHARLES, «Les coefficients d'intensité relative de Körösy», *Revue de la Société Hongroise de Statistique. Revue Trimestrielle Publiée par la Société Hongroise de Statistique* 5 (1927) 332—345.

[43] JORDAN KÁROLY, „Kőrösy relatívintenzitási koefficiensei. (Les coefficients d'intensité relative de Kőrösy.)" *Magyar Statisztikai Szemle* 5 (1927) 1082—1087.

[44] JORDAN KÁROLY, „A korrelációs módszerek alkalmazása a meteorológiában. (Emploi des méthodes des corrélation en météorologie.)" *Az Időjárás. A Magyar Meteorológiai Társaság Folyóirata* 31 (Új sor. III. évfolyam) (1927) 65—70 és 93—94.

[45] JORDAN KÁROLY, „A valószínűségszámítás alapfogalmai. (Les fondements de calcul des probabilités.)" *Mathematicai és Physikai Lapok* 34 (1927) 109—136.

[46] JORDAN, C., «Sur un formule d'interpolation», *Atti del Congresso Internazionale dei Matematici. Bologna* 3—10 *Settembre 1928 (VI). Tomo VI. Communicazioni. Sezione IV (A)—V—VII.* (N. Zanichelli, Bologna, 1928) 157—177.

[47] JORDAN, CHARLES, «Sur une formule d'interpolation dérivée de la formule d'Everett». *Rivista Internazionale di Statistica* 7 (1927—28) No. 3, 47—51.

[48] JORDAN, CHARLES, «Sur les polynomes analogues aux polynomes de Bernoulli et sur des formules de sommation analogues à celle de Mac Laurin—Euler», *Acta Litteratum ac Scientiarum Regiae Universitatis Hungaricae Francisco-Josephinae. Sectio Scientiarum Mathematicarum. A M. Kir. Ferencz József— Tudományegyetem Tudományos Közleményei. Mathematikai Tudományok* 4 (1928—1929) 130—150.

[49] JORDAN KÁROLY, „A matematikai reménységről. (On mathematical expectation.)" *Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok* 6 (1929—30) 37—43.

[50] JORDAN KÁROLY, „Véletlen, valószínűség és természeti törvény. (Le Hasard, la Probabilité et les Lois de la Nature.)", *Atheneum. Új Folyam* 15 (1929) 245—272 és 327—328.

[51] JORDAN, CHARLES, «Sur la détermination de la tendence séculaire des grandeurs statistiques par la méthode des moindres carrés», *Journal de la Société Hongroise de Statistique. Revue Trimestrielle Publiée par la Société Hongroise de Statistique* 7 (1929) 567—599.

[52] JORDAN KÁROLY, *„A trendvonal kiszámítása a legkisebb négyzetek elméletének alapján"*, Az Országos Gazdaságstatisztikai és Konjunktúra Bizottság Közleményei. Tanulmányok 1. szám. (Országos Gazdaságstatisztikai és Konjuktúrakutató Bizottság, Budapest, 1930.)
JORDAN, KARL, *„Berechnung der Trendlinie auf Grund der Theorie der kleinsten Quadrate"*. (Mitteilungen der Ungarischen Landeskomission für Wirtschaftsstatistik und Konjukturforschung. Studien. Nummer 1.) (Ungarische Landeskommission für Wirtschaftsstatistik und Konjukturforschung, Budapest, 1930.)

[53] JORDAN KÁROLY, „Megjegyzés a ‚Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok' 598. számú valószínűségszámítási feladatához. (VII. 54. oldal. 1930. okt.) (A note on Problem 598 of probabilistic character of „Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok')" *Középiskolai Metamatikai és Fizikai Lapok* 7 (1930—31) 101—104.

[54] JORDAN, CHARLES, "Approxamation and graduation according to the principle of least squares by orthogonal polynomials", *The Annals of Mathematical Statistics* 3 (1932) 257—357.

[55] JORDAN, CHARLES, "On Stirling's numbers", *The Tôhoku Mathematical Journal* 37 (1933) 254—278.

[56] JORDAN, CHARLES, "Interpolation without printed differences, in the case of two or three independent variables", *The Journal of the London Mathematical Society* 8 (1933) 232—240.

[57] JORDAN, C., «Problema delle probe ripetute a piu variabili indipendenti», *Giornale dell'Instituto Italiano degli Attuari* 4 (1933) 351—368.

[58] JORDAN, C., «Inversione della formula di Bernoulli relativa al problema delle prove ripetuto a piu variabili», *Giornale dell'Instituto Italiano degli Attuari* 4 (1933) 505—513.

[59] JORDAN, CHARLES, «Sur l'emploi des moyennes géometriques et arithmétiques», *Journal de la Société Hongroise de Statistique. Revue Trimestrielle publiée par la Société Hongroise de Statistique* 12 (1934) 40—48.

[60] JORDAN, C., «Teoria delle perequatzione e dell'approssimazione», *Giornale dell'Instituto Italiano degli Attuari* 5 (1934) 81—107.

[61] JORDAN, CH., «Le théoreme de probabilité de Poincaré, généralisé au cas de plusieurs variables indépendantes", *Acta Litterarum ac Scientiarum Regiae Universitatis Hungaricae Francisco-Josephinae. Sectio Scientiarum Mathematicarum* 7 (1934—35) 103—111.

[62] JORDAN, CHARLES, "On approximation and on test criteria by the test and by Bayes'theorem", *Journal de la Société Hongroise de Statistique. Revue Trimestrielle publiée par la Société Hongroise de Statistique* **15** (1937) 101—128.
[63] JORDAN, CH., «Sur l'approximation d'une fonction à plusieurs variables», *Acta Litterarum ac Scientiarum Regiae Universitatis Hungaricae Francisco-Josephinae. Sectio Scientiarum Mathematicarum* **8** (1936—37) 205—225.
[64] JORDAN KÁROLY, „A korreláció számítás alkalmazása a meteorológiában. (L'emploi des méthodes de corrélation en météorologie.)" *Az időjárás. A Magyar Meteorológiai Társaság Folyóirata* **41** (Új sorozat. XIII. évfolyam.) (1937) 93—110 és 136—140.
[65] JORDAN, CH., «*Critique de la corrélation au point de vue des probabilités*», Actualités Scientifiques et Industrielles. 740. Conférences Internationales de Sciences Mathématiques Organisées a l'Université de Genève et publiées par les soins de M. R. Wavre. VII. Colloque Consacré a la Thérie des Probabilités. Septième Partie. La Statistique Mathématique par E. Dodd, C. Jordan, N. Obrechkoff, (Hermann et Cie, Paris, 1938) 15—33.
[66] JORDAN, CHARLES, "*Calculus of finite differences*", Introduction by Harry C. Carver. (Printed by Röttig and Romwalter, Sopron, Hungary, 1939. Hungarian Agent Eggenberg Book-shop, Budapest, 1939.)
[67] JORDAN KÁROLY, „Az ismétléses variációkról. (On the variations with repetition.)", *Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok* **15** (1938—39) 189—194.
[68] JORDAN KÁROLY, „A differencia-számítás szerepe a statisztikában. (Le rôle du calcul des différences finies dans la statistique.)", *Magyar Statisztikai Szemle* **17** (1939) 1212—1215.
[69] JORDAN, CHARLES, «Problemes de la probabilité des épreuves répétées dans le cas général», *Bulletin de la Société Mathématique de France* **67** (1939) 223—242.
[70] JORDAN, CHARLES, «Le rôle de calcul des différences finies en statistiques», *Journal de la Société Hongroise de Statistique. Revue Trimestrielle Publiée par la Société Hongroise de Statistique* **17** (1939) 379—386.
[71] JORDAN KÁROLY, „A korreláció számítása. I. (Sur le calcul de la corrélation. I.)", *Magyar Statisztikai Szemle Kiadványai.* **1** (1941).
[72] JORDAN, CHARLES, «Remarques sur la loi des erreurs», *Acta Universitatis Szegediensis. Sectio Scientiarum Mathematicarum. Acta Scientiarum Mathematicarum* **10** (1941—1943) 112—133.
[73] JORDAN, CHARLES, «Complément au théorème de Simmons sur les probabilités», *Acta Universitatis Szegediensis. Sectio Scientiarum Mathematicarum. Acta Scientiarum Mathematicarum* **11** (1946—48) 19—27.
[74] RÓNA ZSIGMOND és JORDAN KÁROLY, „A légnyomás és hőmérséklet közötti kapcsolat január és július hónapban. (Corrélation entre la pression et la température en janvier et en juillet.)", *Időjárás. A Magyar Meteorológiai Társaság és a Magyar Országos Meteorológiai és Földmágnességi Intézet Hivatalos Lapja* **52** (Új sorozat. 24. évfolyam.) (1948) 157—166 és 240.
[75] JORDAN, CHARLES, "Note on approximation and graduation by orthogonal moments", *Hungarica Acta Mathematica* **1** (1949) No. 4, 4—9.
[76] JORDAN, CHARLES, *The Calculus of finite differences* Second edition. (Chelsea Publishing Company, New York, 1947.)
[77] JORDAN, CH., «Sur l'impot équitable et sur l'utilité marginale de la monnaie», *Economia Internationale. Rivista dell'Instituto di Economia Internazionale* **2** (1949) 206—220.
[78] JORDAN KÁROLY, „Periodikus menetet mutató észlelések megközelítése trigonometrikus függvénnyel. (Approxiamation, conformément au principé des moindress carrés, des observations présentant une tendance périodique.)", *Időjárás. A Magyar Meteorológiai Társaság és az Országos Meteorológiai és Földmágnességi Intézet Hivatalos Lapja* **53** (Új sor. 25. évf.) (1949) 226—231. és 274.
[79] JORDAN KÁROLY, *Elliptikus függvények és alkalmazásuk. (Elliptic functions and their applications.)* A Mérnöki Továbbképző Intézet Kiadványai. Matematika 5. szám. (Tudományos Könyvkiadó N. V., Budapest, 1950.)
[80] JORDAN KÁROLY, „Megjegyzés az éghajlat fogalmának meghatározásához. (Remarques sur la définition plus compléte du climat.)", *Időjárás. A Magyar Meteorológiai Társaság és az Orsz. Meteorológiai és Földmágnességi Intézet Hivatalos Lapja* **54** (Új sor. 26. évf.) (1950) 197—198 és 255.
[81] JORDAN KÁROLY, „Következtetések statisztikai észlelésekből. (Inference from statistical observations.)", *A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai és Természettudományi Osztályának Közleményei* **1** (1951) 218—227.
[82] JORDAN KÁROLY, „A számolás eredete és a számrendszerek. (The origin of couting and the number systems.)", *Középiskolai Matematikai Lapok. Új sorozat* **3** (1950—51) 51—61.

[83] JORDAN KÁROLY, „Megújuló sokaságok és az ipari utánpótlás valószínűségszámítási tárgyalása. (Les ensembles statistiques renouvelés et le remplacement industriel.)", *Matematikai Lapok. Bolyai János Matematikai Társulat* **2** (1951) 165—189.
[84] JORDAN KÁROLY, „Észlelések törvényszerűségének meghatározása több változó esetén. (Determination of the law in observations in the case of several variables.)", *A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai és Fizikai Osztályának Közleményei* **3** (1953) 459—466.
[85] JORDAN KÁROLY, „Van der Waals állapotegyenlete. (The equation of van der Waals.)", *Magyar Fizikai Folyóirat. A Magyar Tudományos Akadémia III. Osztályának Fizikai Közleményei* **1** (1953) 27—32.
[86] JORDAN, CH., «Sur l'équation d'état de van der Waals», *Acta Physica Academiae Scientiarum Hungaricae* **3** (1954) 335—338.
[87] JORDAN KÁROLY, „A valószínűségszámítás néhány új eredményéről. (On some new results in the theory of probability.)", *A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai és Fizikai Tudományok Osztályának Közleményei* **5** (1955) 129—145.
[88] JORDAN KÁROLY, *Fejezetek a klasszikus valószínűségszámításból. (Chapters on the classical calculus of probability.)* (Akadémiai Kiadó, Budapest, 1956.)
[89] JORDAN KÁROLY, „A differenciaszámítás szerepe a demográfiában. (On the use of the calculus of finite differences in demography.)", *Demográfia. Népességtudományi Folyóirat* **1** (1958) 197—225.
[90] JORDAN KÁROLY, *Hétjegyű logaritmustábla. (Seven-place table of logarithms.)* (Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1961.)
[91] JORDAN, KÁROLY, «*Chapters on the classical calculus of probability*», (Disquistiones Mathematicae Hungaricae 4.) Trans. by dr. P. Medgyessy. (Akadémiai Kiadó, Budapest, 1972.)
[92] JORDAN KÁROLY, „A matematikai módszerek alkalmazása a magyar szociológiai irodalomban. (Application of the mathematical methods in the Hungarian sociological literature.)", *Huszadik Század. Társadalomtudományi Szemle* **10** (1904) 531—555.
[93] JORDAN KÁROLY, „A választójog megvalósítása. (Implementation of the suffrage.)", *Népszava. A Magyarországi Szociáldemokrata Párt Központi Közlönye* **46** (1918) No. 305, (1918. december 25. szerda) 3—4.
[94] J. K. (JORDAN KÁROLY), „Az arányos választói rendszer tervezete. (Project of the system of proportional representation.)", *Népszava. A Magyarországi Szociáldemokrata Párt Központi Közlönye* **47** (1919) No. 1., (1919. január 1., szerda) 2.
[95] JORDAN KÁROLY, „A demokratikus választójog. (The democratic suffrage.)", *Huszadik Század. Társadalomtudományi és Politikai Szemle* **35** (1947) 197—206.

c) Neveltetése, anyagi körülményei lehetővé tették volna számára bármely életpálya választását. Képességei a tudományos pálya felé vonzották. Egész élete szakadatlan munkában telt el. Doktori értekezésének tézisei, tehát első tudományos eredményei 1895-ben jelentek meg, utolsó közleménye egy évvel a halála előtt. Ez alatt a 63 év alatt több mint 90 publikációja látott napvilágot, ezek között öt nagy terjedelmű monográfia is van.

Ha munkáit osztályozni akarjuk, legalkalmasabbnak látszik, ha tárgykörük szerint választjuk szét ezeket. E szerint számos értekezése van, amely tárgyánál fogva a valószínűségszámítás és a matematikai statisztika körébe esik, azután olyanok, amelyek a differenciaszámítással kapcsolatosak, továbbá olyanok, amelyek ezek egyikébe sem sorolhatók, de önálló eredményeket tartalmazó munkák. Külön helyet foglalnak el ama cikkei, amelyekben a valószínűségszámítási és a differenciaszámítási módszereket igyekszik a különböző tudományterületeken kutatók számára népszerűsíteni. Külön fejezetet érdemel könyveinek ismertetése.

Mint minden beskatulyázás, az alapul választott felosztás is mesterkélt. JORDÁN KÁROLY munkáinak legnagyobb részénél mind a matematikai statisztika, mind a valószínűségszámítás és mind a differenciaszámítás egyaránt megtalálható. Hogy melyiket melyik kategóriába soroltuk, azt általában a főtéma döntötte el. Népszerűsítő cikkeiben is mindig van valami új gondolat, ami az ő eredeti gondolata és amely miatt ezeknek a munkáknak egy része is helyet kaphatna az önálló eredményeket tartalmazó csoportok valamelyikében. Végül monográfiái is besorolhatók lettek volna a többi csoport valamelyikébe. Ezek felépítése, érdekessége és fontossága miatt azonban jobbnak látszott, ha ezekkel külön fejezetben foglalkozunk.

2. Valószínűségszámítás és matematikai statisztika

a) E fejezetben összefoglalt cikkei nagyjából a valószínűség értelmezésével és mérésével, a „meglepőség" mérésével, a várható érték különböző értelmezéseivel, az ismétléses valószínűségekkel és a matematikai statisztika egyes kérdéseivel foglalkoznak.

E témakörhöz tartozó eredményei közül különösen érdekesek a matematikai valószínűség és a „meglepőség" értelmezésével és ezek következményeivel kapcsolatosak, továbbá az ismétléses valószínűségekre vonatkozók. Ez utóbbiak elsősorban azért, mivel ezekre matematikai statisztikai módszerek épülnek.

b) Az Egyetemi Nyomda kiadásában 1929-ben „Véletlen, valószínűség és természeti törvény" címen megjelent tanulmánya ([50]), továbbá a *Proceedings of the Physico-Mathematical Society of Japan* c. folyóirat 1925. évi számában megjelent dolgozata ([31]) a matematikai, az empirikus és a filozófiai valószínűség fogalmaival foglalkozik. Empirikus valószínűségen a relatív gyakoriságot érti, míg a filozófiai valószínűség szerinte pontatlan tudásunkon alapszik és nem más, mint abban való hitünk kifejtésének foka, vajon egy esemény bekövetkezik-e, vagy egy ítélet igaz-e? Az események bekövetkezése előtti, de az események bekövetkezésére vonatkozó kijelentéseket apriori, az esemény bekövetkezése utáni ítéletet aposzteriori valószínűségi ítéletnek nevezi. Ha több esemény következhet be, és az következik be, amelynek apriori valószínűsége kicsi volt, akkor az esemény létrejötte „meglepő".

A kifejtetteknek megfelelően értelmezi a matematikai valószínűség és a „meglepőség" fogalmát. Abban az esetben, ha egy kísérlethez tartozó elemi események halmaza véges és az elemi események egyenlő valószínűek, egy esemény matematikai valószínűségén az eseményt alkotó elemi események számának az összes elemi események számával alkotott hányadosát érti.

Az a dolgozat, amelyben véges eseményhalmazok esetén a valószínűségnek fenti definícióját kifejti, 1928-ban jelent meg a *Mathematikai és Physikai Lapokban* ([45]). A definícióból kiindulva a valószínűségszámításnak néhány alapvető tételét is levezeti. Világosan hangsúlyozza, ha annak ellenére, hogy az elemi események nem egyenlő valószínűek és mégis az általa megadott definíciót alkalmazzuk, juthatunk el a valószínűségszámításnak ún. paradoxonaira. Rámutat azokra a nehézségekre is — amik a valószínűségszámítás teoretikusainak olyan sok gondot okoztak — amelyek akkor lépnek fel, ha az elemi események száma nem véges. Szóbanforgó munkájában JORDAN KÁROLY azoknak a gondolatoknak az előhírnöke, amelyek néhány év múlva teljes kiépítettségükben KOLMOGOROVnak a „Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung" című munkájában jelentkeztek.

„On statistical inference" c. sokszorosított dolgozatában vezette be 1947-ben a meglepőség fogalmát. E dolgozat megírására M. FRÉCHET-nek 1947-ben Washingtonban a *Nemzetközi Statisztikai Konferencián* elhangzott egyik megjegyzése inspirálta.

Ha az $A_1, \ldots, A_s$ esemény n számú kísérletben rendre $k_1, \ldots, k_s$ számú alkalommal következik be és ha ennek $P_{k_1,\dots,k_s}$ a valószínűsége, akkor ennek az eseménynek a meglepősége

$$1-\frac{P_{k_1,\dots,k_s}}{P_{m_1,\dots,m_s}},$$

ahol $m_1, \dots, m_s$ a legvalószínűbb eseményhez tartozó előfordulások.

Ezt a fogalmat elsősorban statisztikai vizsgálatokkal kapcsolatban használta fel. [50] dolgozatában tudományelméleti kérdésekkel, így a tudományok rendszerezésének problémájával is foglalkozott. A tudományokat az alkalmazott módszerek szempontjából három csoportba sorolja. Az elsőbe tartoznak azok, amelyek a jelenségekre csak kvalitatív megállapításokra képesek. A másodikba, amelyekben a kvantitatív megállapítás csupán gyakoriságok meghatározásából áll. A harmadikba azok, amelyek az észlelési adatokat matematikai formulákba foglalják. Ez utóbbiak segítségével következtethetünk a jövőre. Arra való tekintettel, hogy a mérési eredmények szükségképpen többé-kevésbé hibásak, az ezekre támaszkodó formulák csak megközelítők és a belőlük vont következtetések csak valószínűek lehetnek. A nyert formulák a természeti törvények. A természeti törvény tehát az ember műve, amelyet a tudomány haladása, fejlődése folytán általánosabb, valószínűbb, pontosabb, vagy egyszerűbb szabályokkal cserél fel.

c) 1924-ben az *Amer. Math. Monthly*-ban ([30]) és 1934-ben a *Magyar Statisztikai Társaság Folyóiratában* ([39]) foglalkozik az aritmetikai és geometriai közepekkel. Az elsőben történeti áttekintését adja a velük kapcsolatos problémáknak, tárgyalja a matematikai reménység és a *Daniel Bernoulli-féle erkölcsi reménység* fogalmát. A harmonikus közép segítségével értelmezi a harmonikus reménységet és konkrét esetekkel kapcsolatban rámutat arra, vannak olyan problémák, amelyekben a harmonikus reménység alkalmazása célszerűbb, mint a másik kettő közül bármelyiké. Másik dolgozatában a gyakorlati alkalmazásokat szem előtt tartva az aritmetikai és geometriai közepeket plauzibilis követelményekkel értelmezi.

1934-ben a *Szegedi Actában* megjelent értekezésében ([61]) *Poincaré tétele* néven szereplő, a valószínűségszámítás egyik igen fontos tételének általánosítását adja meg. Ha $p_1, \dots, p_m$ egy teljes eseményrendszer eseményeihez tartozó valószínűségek, és n számú független kísérletet hajtunk végre, akkor az $n \geqq m$ feltétel mellett lehetséges, hogy a teljes eseményrendszer valamelyik eseménye az n kísérlet közül legalább az egyikben realizálódjék. Ha ennek valószínűségét P jelöli, akkor Jordan eredménye szerint

$$P = 1-\sum_i (1-p_i)^n + \sum_{i,j} (1-p_i-p_j)^n - \dots + (-1)^m (1-p_1-\dots-p_m)^n.$$

Amennyiben $m=1$, akkor $P=1-(1-p)^n$ és ha még $p_1=\dots=p_m=\frac{1}{m}$, akkor $P=\frac{m!}{m^n}\gamma_n^m$, ahol a fellépő γ_n^m mennyiségek a másodfajú *Stirling-számok*.

d) Több dolgozata foglalkozik az ún. ismétléses valószínűségek problémáival. Egy változós esetben lényegében a binomiális eloszlással, több változós esetben a polinomiális eloszlással kapcsolatos kérdéskörről van szó. Fontosságot ezeknek a vizsgálatoknak az ad, hogy az ún. visszatevéses mintavétel alapjai ezen a két eloszláson nyugszanak.

A *Bull. de la Société Mathématique de France* 54. kötetében közzétett dolgozatának ([35]) első részében a binomiális eloszlásnak a *Poisson-eloszlás* paraméter szerinti deriváltjainak segítségével történő kifejtését adja meg. A második felében a *Bernoulli-féle probléma* inverz feladatával foglalkozik, amennyiben kimutatja, hogy ha egy n elemű mintában a tekintetbe vett esemény gyakorisága ν, akkor annak aposzteriori valószínűsége, hogy a tekintetbe vett esemény valószínűsége λ-nál kisebb legyen, egyenlő annak apriori valószínűségével, hogy a szóban forgó esemény gyakorisága $n+1$ elemű mintában ν legyen, feltéve, hogy a tekintetbe vett esemény valószínűsége λ. — A *Comptes Rendus* 182. kötetében e dolgozat ismertetett két részéről egy-egy előzetes közlemény ([33], [34]) jelent meg.

A *Comptes Rendus*-ban megjelent előzetes közleményben ([32]) és ennek részletes kifejtését tartalmazó, a *Philosophical Magazin*-ban 1927-ben megjelent cikkében ([39]) abból indul ki, hogy amennyiben $\psi(m, x)$ jelöli az m paraméterű x-edik Poisson-valószínűséget, akkor az $\frac{1}{\psi}\frac{d^k\psi}{dm^k}$ polinomok ortogonálisak. E polinomok segítségével alkotott *Charlier-féle sorok* együtthatói faktoriális momentumokkal fejezhetők ki. Ha olyan független kísérletekről van szó, amelyekben egy adott eseménynek a ν-edik kísérletben való előfordulási valószínűsége p_ν, akkor annak a valószínűségnek faktoriális momentumai, hogy az első n számú kísérletben az adott esemény pontosan x-szer lépjen fel, a generátorfüggvény megfelelő differenciálhányadosaival egyenlőek. Innen elindulva megkaphatjuk a *Poisson-valószínűségeknek* és az ezekhez tartozó összegvalószínűségeknek *Charlier-sorokba* való kifejtését. — Alkalmazza eredményeit arra a speciális esetre, amelyben az adott esemény valószínűsége minden kísérletben egyenlő.

Ide kívánkozik a *Szegedi Actában* 1947-ben SIMMONS tételének kiegészítésével kapcsolatos cikke ([73]). Arról van szó, ha adott egy esemény valószínűsége és véges számú független megfigyelést végzünk, mekkora lesz az átlagtóli negatív, illetve pozitív eltérés valószínűsége.

Több dolgozata a polinomiális eloszláshoz kapcsolódik. A *Giorn. Ist. Attuari* 1933. évi kötetében egymáshoz illeszkedő témájú két cikkében ([57], [58]) a polinomiális eloszlásnak a normális eloszlással való megközelítésével foglalkozik.

Amennyiben a $\xi=(\xi_1, \ldots, \xi_m)$ valószínűségi vektorváltozó eloszlása polinomiális, azaz

$$P(\xi_1 = \nu_1, \ldots, \xi_m = \nu_m) = \frac{n!}{\nu_1! \ldots \nu_m!} p_1^{\nu_1} \ldots p_m^{\nu_m},$$

meghatározza a

$$\Delta P = P\left(q_k - \frac{\Delta_k}{2} \leqq p_k \leqq q_k + \frac{\Delta_k}{2} \quad (k = 1, \ldots, m) \middle| \, \xi_1 = \nu_1, \ldots, \xi_m = \nu_m\right)$$

valószínűséget. Ama feltevéssel, hogy az $f_i = \frac{\nu_i}{n}$ $(i=1, \ldots, m-1)$ relatív gyakoriságok az $f_m = \frac{\nu_m}{n}$ relatív gyakorisághoz képest kicsinyek, igazolja a

$$\Delta P \sim (n+m-1)\ldots(n+1) \prod_{i=1}^{m-1} e^{-nq_i} \frac{(nq_i)^{\nu_i}}{\nu_i!} \Delta q_i$$

aszimptotikus formulát. Továbbá azzal a feltevéssel, hogy a ν_i számok nagyok, ugyanakkor azonban a $q_i - f_i$ mennyiségek kicsinyek, a *Stiring-formula* felhasználásával sikerül kimutatnia, hogy

$$\Delta P \sim \frac{(n+m-1)\dots(n+1)}{\sqrt{(2\pi n)^{m-1} f_1 \dots f_m}} e^{-\frac{\chi^2}{2}} \Delta q_1 \dots \Delta q_m,$$

ahol

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{m} \frac{(v_i - nq_i)^2}{v_i}.$$

A *Comptes Rendus*-ban előzetes közleményként ([40]) és a *Szegedi Acta* harmadik kötetében részletes kidolgozásban ([41]) jelent meg ugyancsak az ismétléses valószínűségek témakörébe tartozó — mai néven az *Eggenberg—Pólya-eloszlással* kapcsolatos — következő eredménye:

Tartalmazzon valamely urna a λ-val megjelölt golyókból ($\lambda=1, \dots, k+1$) α_λ darabot. Húzzunk egymásután n-szer és minden húzás után a kihúzott golyón található számmal ellátott $h+1$ számút tegyünk vissza az urnába. Szerző meghatározza annak valószínűségét, hogy az n-edik húzás után a λ-val megjelölt golyókból v_λ számú legyen a kihúzottak között. Megmutatja, hogy ennek az eloszlásnak generátorfüggvénye egy k változós hipergeometrikus függvény. — A $h=0$ eset a binomiális eloszlásra, a $h=-1$ pedig a visszatevésnélküli feladatra vezet.

1923-ban a *Philosophical Magazinne*-ban megjelent cikkében ([27]) a *Bernoulli-tétel* inverziójának a kérdésével foglalkozik, azaz binomiális eloszlás esetén alkalmazza a *Bayes-féle tételt* azzal a feltétellel, hogy az apriori eloszlás egyenletes. Megad egyben a normális eloszlással kapcsolatos aszimptotikus formulát is.

A *Szegedi Acta* 1923. évi kötetében KÜRSCHÁK JÓZSEF az egyik *Montmort-Moivre* probléma következő általánosítására adott megoldást:

n darab urna 0-ból kiindulva az egymásra következő pozitív egész számoknak véges számát tartalmazza. Mindegyikből kihúzunk egy számot. Mi a valószínűsége annak, hogy a kihúzott $x_1, \dots, x_n$ számok kielégítik az $a_1 y_1 + \dots + a_n x_n = k$ egyenletet, ahol $a_1, \dots, a_n$ adott egész számok.

A *Szegedi Acta* ugyanebben a számában ([28]) KÜRSCHÁK módszerétől eltérően a generátorfüggvények elméletének felhasználásával adja meg ugyanennek a problémának megoldását JORDAN KÁROLY.

1939-ben a *Bulletin de la Société Mathématique de France* c. folyóiratban megjelent cikkében ([69]) ismétléses valószínűségszámítási problémákat tárgyal nem független esetben. Kiszámítja a kapott eloszlásokhoz tartozó generátorfüggvényeket, továbbá a momentumokat és binomiális momentumokat is. Részletesen foglalkozik a szimmetria és a függetlenség esetével. Számos területről vett példán mutatja be a kapott eredmények alkalmazhatóságát.

A *Comptes Rendus* 182. kötetében ([32]) előzetes közleményként bizonyítás nélkül közli LAPLACE egyik valószínűségszámítási kérdésére adott approximatív megoldását. A feladat a következő: Legyen adva valamely eseményre vonatkozó független megfigyelések két sorozata. Mi annak a valószínűsége, hogy az egyik sorozatban az adott esemény valószínűsége nagyobb, mint a másikban?

e) A *Magyar Statisztikai Szemle* 1927. évfolyamában ([43]) a következő kérdés érdekli: Ha valamely alapsokaság elemeit két tulajdonság szempontjából akarjuk vizsgálni, fellép annak a szükségszerűsége, hogy e tulajdonságok közti kapcsolatok kvantitatív jellemzésére mérőszámokat vezessünk be. KÖRÖSSY speciális esetekre adott ilyen mérőszámot. Ezek általánosításával foglalkozik JORDAN KÁROLY ebben a dolgozatában. Francia nyelvű változata 1928-ban jelent meg ([42]). E kérdéskörhöz csatlakozik az *Actualitás Scientifiques et Industrielles* 740. számában megjelent összefoglalója ([65]), amelyben a korreláció mérésére szolgáló statisztikai mérőszámoknak adja meg valószínűségszámítási szempontból a kritikáját.

A *Magyar Statisztikai Társaság folyóiratának* 1937. évi számában ([62]) áttekintését adja azoknak a módszereknek, amelyek segítségével empirikus adatokat elméleti gyakorisági görbékkel közelíthetünk meg. Továbbá olyan eljárásokkal, elsősorban a *chi-négyzet módszerrel* foglalkozik, amelyek alkalmasak arra, hogy valamely statisztikai hipotézis elfogadása, vagy elvetése mellett döntsünk. Ezeknek a módszereknek erős kritikáját adja. Ezek során a módszerek közötti kapcsolatokat is vizsgálja.

Két dolgozatában, a *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* 1923. ([29]) és a *Szegedi Acta* 1941. évfolyamában ([72]) megjelent cikkeiben a hibaelmélettel foglalkozik. Miután megfelelő követelményekből kiindulva meghatározza az ún. *Gauss-féle hibatörvényt,* három fő kérdést tárgyal. Először annak valószínűségét határozza meg, hogy adott számú mérés esetén a hibák négyzeteinek átlaga adott érték legyen. Másodszor a mérési pontosságra vonatkozó aposzteriori valószínűség kiszámítása a célja. A harmadik esetben pedig független észlelések és adott szórás esetén a mérési hibák lineáris kifejezéseinek valószínűségeit vizsgálja. Ezeknek kiszámítására módszert ad.

A *MTA Mat. és Termtud. Oszt. Közleményeinek* I. kötetében ([81]) az általa adott meglepődés értelmezéséből kiindulva többek között megadja a statisztika *chi-négyzet módszerének* indokolását. A III. kötetben ([84]) pedig a többméretű regressziószámítás problémáit tárgyalja, rámutatván mindenekelőtt az egyváltozós esettel szemben itt fellépő nehézségekre. Módszert ad a regresszió végrehajtására és a kapott eredményeket alkalmazza a *Van der Waals állapotegyenletben* szereplő együtthatók meghatározására ([85], [86]).

3. Differenciaszámítás

Ebben a fejezetben az interpoláció, az ortogonális polinomokkal való közelítés, a mechanikus kvadratura, a *Stirling-számok,* a *másodfajú Bernoulli-függvények* területén elért eredményeivel foglalkozunk. Eredményei közül különösen ki kell emelnünk azokat, amelyek az általa értelmezett ortogonális polinomokkal történő közelítő eljárással kapcsolatosak, továbbá interpolációs formuláját.

JORDAN KÁROLYT mint a valószínűségszámítással és ennek kapcsán a matematikai statisztikával foglalkozó tudóst tartjuk számon. Ennek nem mond ellene az, hogy a differenciaszámítás területén is kiemelkedő eredményei vannak. Ugyanis a valószínűségszámításnak egyik igen fontos fejezete a regressziószámítás. Ez a témakör erősen kapcsolódik a differenciaszámításnak JORDAN KÁROLY részéről elsősorban művelt területeihez. Különben a differenciaszámítás mint módszer kezdettől fogva jelentős szerepet játszott a valószínűségszámításban. Nem kell talán másra hivatkoznunk, mint MONTMORT francia matematikusra, aki valószínűségszámítási könyvében problémák megoldására előszeretettel alkalmaz differenciaszámítási módszereket.

Rátérünk JORDAN KÁROLY differenciaszámítási eredményeinek részletes ismertetésére.

Bolognában 1928-ban a *Nemzetközi Matematikai Kongresszuson* tartott előadásában ([46]) ismertette új interpolációs formuláját. Ha ismeretesek az $f(x)$ függvénynek az $x=a,\ a\pm h, \ldots$ helyeken felvett értékei, akkor

$$f(a+xh) = \sum_{m=0}^{n-1} C_m(x) \sum_{k=1}^{m+1} B_{mk} I_k + R_{2n},$$

amennyiben $(2n-1)$-ed fokú polinommal közelítünk. A

$$C_m(x) = (-1)^m \binom{x+m-1}{2m}$$

és a

$$B_{mk} = (-1)^{k+1} \binom{2m+1}{k+m} \frac{2k-1}{2m+1}$$

mennyiségekre táblázatot mellékel a szerző. Az I_k faktort az

$$I_k = \frac{x+k-1}{2k-1} f(a+kh) + \frac{k-x}{2k-1} f(a-kh+h)$$

kifejezés határozza meg és

$$|R_{2n}| < h^{2n} \binom{n-\frac{1}{2}}{2n} D^{2n} f(a+\xi h),$$

ahol $-n+1<\xi<n$.

J. WISHART, A. C. AITKEN és G. J. LIDSTONE a következő lelkes szavakkal méltatják JORDAN KÁROLY új interpolációs formuláját a *Mathematical Gazette* 1932. évi kötetében ([VII.]): The Jordan formula is certainly a very interesting one, and deserves to take an honoured place beside those others associated by their names with some of the greatest of mathematicians.

A bolognai kongresszuson elhangzott előadásához csatlakozik a *Journal of London Mathematical Society* 8. kötetében megjelent cikke [(56]), amelyben speciálisan a harmadrendű esetet diszkutálja részletesen.

A *Metron* 1928. évfolyamában megjelent dolgozatában ([47]) a jól ismert *Everett interpolációs formula* elemi átalakításával olyan új formulához jut, amelyben a fellépő együtthatók aránylag egyszerűbben számíthatók ki, mint az *Everett formulában* és így tágabb az alkalmazási lehetősége is.

Matematikai vizsgálataiban kezdettől fogva érdeklődéssel fordult észlelési adatoknak a legkisebb négyzetek elve alapján ortogonális polinomokkal való megközelítésének problematikája felé.

1921-ben a *Proceedings of London Mathematical Society* közli egyik dolgozatát ([21]), amelyben adott alappontokhoz tartozó ortogonális polinomrendszerrel közelít a legkisebb négyzetek elve alapján. A kapott *Csebisev-polinomok* tulajdonságainak ügyes kihasználásával számítástechnikai szempontból teszi az eljárást könnyen kezelhetővé.

1922-ben a *Mathematikai és Physikai Lapokban* megjelent dolgozata ([24]) lényegében az előbbinek magyar nyelvű változata. Itt még azonban azzal a kérdéssel is foglalkozik, hogy a közelítés pontosságának előírása mellett hogyan határozható meg a minimális fokszámú polinom.

Az *Annals of Mathematical Statistics* 3. kötetében megjelent terjedelmes cikkében ([54]), továbbá a *Hungarica Acta Mathematica* 1. kötetében ([75]) sikerül módszerét tovább fejlesztenie és egy igen jól használható eljárást adnia a legkisebb négyzetek elve alapján észlelési adatoknak ortogonális polinomokkal való megközelítésére. Módszere a következő:

Legyenek $y_0, y_1, \ldots, y_{N-1}$ az $x=0, 1, \ldots, N-1$ alappontokhoz tartozó észlelések. Meghatározandó az az n-ed fokú $f_n(x)$ polinom, amely mellett az

$$S_n = \sum_{x=0}^{N-1} (y_x - f_n(x))^2$$

kifejezés minimális. Az $f_n(x)$ polinomnak az

$$f_n(x) = \sum_{m=0}^{n} a_m U_m(x)$$

előállításából indul ki, ahol az $U_m(x)$ $(m=0, 1, 2, \ldots)$ polinomok az $x=0, 1, \ldots, N-1$ alappontokra nézve ortogonálisak, azaz

$$\sum_{x=0}^{N-1} U_j(x) U_k(x) = 0, \quad j \neq k.$$

Az $U_m(x)$ polinomnak *Newton-féle kifejtését* az

$$U_m(x) = C_m \sum_{\nu=0}^{m} (-1)^{m+\nu} \binom{m+\nu}{m} \binom{N-\nu-1}{m-\nu} \binom{x}{\nu}$$

formula szolgáltatja, ahol a C_m konstanst célszerűségi okokból

$$C_m = \left[(m+1)\binom{N}{m+1}\right]^{-1}$$

módon választjuk meg. Azok az a_m $(m=0, 1, \ldots, n)$ együtthatók, amelyek az S_n kifejezést minimummá teszik, függetlenek az n-től. Az $f_n(x)$ *Newton-féle kifejtését az*

$$f_n(x) = \sum_{m=0}^{n} \sum_{\nu=0}^{m} C_{m\nu} \Theta_m \binom{x}{\nu}$$

kifejezés adja meg, ahol

$$C_{m\nu} = (-1)^{m+\nu}(2m+1)\binom{m+\nu}{m} \frac{\binom{N-\nu-1}{m-\nu}}{\binom{N+m}{m}}$$

és Θ_m a megfigyelésekhez tartozó m-edrendű

$$\Theta_m = \sum_{x=0}^{N-1} U_m(x) y_x = \sum_{\nu=0}^{m} \beta_{m\nu} T_\nu$$

ortogonális momentum, amelyben

$$T_m = \frac{1}{\binom{N}{m+1}} \sum_{x=0}^{N-1} \binom{x}{m} y_x \quad (m = 0, 1, 2, \ldots)$$

és

$$\beta_{m\nu} = (-1)^{m+\nu} \binom{m+\nu}{m} \binom{m}{\nu} \frac{1}{\nu+1}.$$

A négyzetes eltérést a

$$\sigma_n^2 = \sum_{x=0}^{N-1} (y_x - f_n(x))^2 = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} y_x^2 - [\Theta_0^2 + |C_{10}|\Theta_1^2 + \ldots + |C_{n0}|\Theta_n^2]$$

formula határozza meg.

A *Magyar Statisztikai Társaság* 7. kötetében francia nyelven ismerteti ([51]) a trendvonalak meghatározásának módszerét az általa bevezetett ortogonális polinomokra építve.

A *Giorn. Ist. Ital. Attuari* 5. kötetében megjelent cikkében ([60]) összefoglalja azokat a módszereket, amelyeknek segítségével megfigyelt adatokat függvényekkel közelíthetünk. E módszerek a legkisebb négyzetek elve, a momentumok módszere, e kettőnek kombinációja, a *Fisher-féle legnagyobb valószínűség elve,* a *Pearson-féle Chi-négyzet eljárás, Neyman módszere,* valószínűségi módszerek (mint a *Bernoulli-féle model,* de még inkább ennek megfordítása, a *Bayes-féle módszer*).

A *Szegedi Acta* 1937. évi kötetében ([63]) a többváltozós függvények approximációs kérdésével kapcsolatban lényegében a többméretű normális eloszlású valószínűségi változókkal foglalkozik, elsősorban az ezeket meghatározó első és második momentumokkal. Érdekesek a tárgyalt speciális esetek.

A *Tôhoku Mathematical Journal* 1922. évi kötetében ([26]) az *Euler—McLaurin-féle szummaformulának* új egyszerű bizonyítását adja.

A *Szegedi Acta* 1929. évfolyamában ([48]) bevezeti a másodfajú *Bernoulli-féle polinomokat. Newton-sorba* fejti ezeket, a fellépő koefficiensek meghatározására rekurzív formulát határoz meg. Függvényeknek *Newton-sorba* fejtésénél is felhasználja a másodfajú *Bernoulli-féle polinomokat* és ennek segítségével közelítő integrálási eljárást ad. Hasonlóak az eredményei akkor is, ha *Everett-féle polinomokkal* közelít. Mindkét esetben a *McLaurin—Euler szummaformulához* hasonló képlethez jut.

A *MTA III. Osztály Közleményeinek* 1955. évi számában megjelent cikkének ([87]) első részében függvényeknek *Poisson-féle függvényekkel* való megközelítésével foglalkozik. Diszkrét esetben a közelítő függvény egy adott fokszámú polinomnak a *Poisson-féle valószínűségekkel* alkotott szorzata. Folytonos esetben a *Poisson-faktor* módosul. Ha a polinomos tényezőt tagonként kiírjuk, ortogonális polinomokra jutunk. A kapott módszer komputeres számolásoknál is jól alkalmazható. A dolgozat második része a *Bernoulli-eloszlás* nem teljes momentumainak előállításával foglalkozik.

A *Tôhoku Mathematical Journal* 1933. évi kötetében a *Stirling-számokról* jelentetetett meg összefoglaló értekezést ([55]), amelyben ismert, de számos új eredményt is közöl. Így differenciálegyenletek segítségével származtatja a *Stirling-számokat,* meghatározza generátorfüggvényüket és többféle aszimptotikus becslést is ad meg ezekre a számokra.

4. Egyéb önálló vizsgálatok

Itt emlékezünk meg első tudományos eredményeiről, amelyek a kémiával kapcsolatosak, továbbá FIEDLER RAYMOND-dal a konvex görbék elméletében elért közös eredményeiről és végül azokról a vizsgálódásokról, amelyeket az arányos választási rendszerekkel kapcsolatban végzett.

Itt felsorolt eredményei közül matematikai szempontból a konvex görbék elméletében elért eredményeit kell elsősorban kiemelnünk.

a) Már életrajzi adatai között is említettük, hogy JORDAN KÁROLYnak egyetemi hallgató korában érdeklődése a kémia, illetve a fizika-kémia felé irányult. Ezen a téren érte el első tudományos sikereit is. Összesen hét kémiai tárgyú dolgozata van. Az első Genève-ben jelent meg 1895-ben, az ottani egyetem adta ki és doktori értekezésének téziseit tartalmazza ([1]). A második, a harmadik és a negyedik előzetes közleményként a *Comptes Rendus*-ban, valamennyi 1895-ben ([2], [3], [4]). Az ötödik és hatodik a *Bulletin de la Société Chimique de Paris* 3. kötetében 1896-ban ([5], [6]). A hetedik szintén a *Comptes Rendus*-ban 1896-ban ([7]).

A most felsorolt dolgozatok nagyobb részét Ph.= A. GUYE svájci kémikussal együtt írta. Ph.= A. GUYE a maga idejében tehetséges és sikeres kémikusnak számított. Ezt bizonyítja az is, hogy J. R. PARTINGTON munkájában (*History of Chemistry*, 4. kötet, 881. oldal, McMillen London, 1964.) még találkozhatunk a nevével. Ebben az ismertetésben azt olvashatjuk, hogy Ph.= A. GUYE munkásságából az *N* atomsúlyának meghatározására vonatkozó vizsgálatai a maradandó értékűek, éppen azok, amelyekben — a felsorolt irodalom tanúsága szerint — JORDAN KÁROLY is közreműködött.

Kémiai dolgozatai igazolják, hogy a kísérleti eredmények kiértékelésének kérdései már ekkor is érdekelték JORDAN KÁROLYT.

Érdekes volna megtalálni annak az okát, mi késztette arra, hogy kémiai kutatásaival felhagyjon és a matematikának szentelje életét. Matemetikai statisztikai vizsgálódásai közben eredményeinek alkalmazása és a matematikai módszereknek a mérő tudományok területén való elterjesztése céljából több tudományággal is szorosabb kapcsolatba került. Viszont a kémiához még ebben a vonatkozásban sem tért vissza. Pedig ezen a területen — dolgozatainak tanúsága szerint — alkotó munkára képessé tevő ismeretekkel és készségekkel rendelkezett.

b) Az integrál-geometriában jutnak nagy szerephez a konvex görbék. Ezekkel a görbékkel JORDAN KÁROLY FIEDLER RAYMOND-dal együtt több dolgozatában ([12], [14], [15], [16], [17]) foglalkozik. E dolgozatokban a többek között a következőket mutatják ki: Véges konvex tartomány határpontjainak a halmazát konvex görbének nevezvén, e görbe $p(\alpha)$ egyenlete tangenciális polárkoordinátában olyan mindenütt folytonos, 2π periódussal bíró, egyenletesen konvergens *Fourier-sorba* fejthető függvény, amelynek minden pontban léteznek jobb és bal oldali differenciálhányadosai. $p'(\alpha)$ nem szükségképpen folytonos, de szintén *Fourier-sorba fejthető*. Annak a ponthalmaznak mértéke pedig, ahol a második derivált nem létezik, zérus. Ha az ilyen tulajdonságú görbéket T_2 görbének nevezzük, kérdés, minden T_2-beli görbe egyben konvex zárt görbe is? Feleletük, akkor és csak akkor, ha a görbület nem vált előjelet. A T_2 görbéknek érdekes tulajdonsága, hogy evolutáinak algebrai hossza zérus.

T_1 görbéknek nevezik a szerzők a T_2 görbéknek azt a speciális fajtáját, amelyeknek egyenlete $p(\alpha)+p(\alpha+\pi)=0$ alakú. Megmutatják, hogy e görbék evolvensei egyenlő szélességű görbék és hosszuk a velük egyenlő szélességű kör kerületével egyenlő.

c) Hogy mennyire olyan matematikus volt JORDAN KÁROLY, aki a gyakorlat által felvetett problémáknak a megoldására modelleket igyekezett alkotni, mi sem bizonyítja jobban, mint azok a munkái, amelyek a választói rendszerekkel kapcsolatosak. Már a JÁSZI OSZKÁR szerkesztésében megjelenő *Huszadik Század* 1908. évi kötetében ([11]) részletesen foglalkozik ezzel a kérdéssel. Kiindulva abból a követelményből, egy választási rendszernek olyannak kell lennie, hogy a parlament többsége mögött feltétlenül a szavazatok többsége kell hogy álljon, akkor — amint azt JORDAN is állítja — a kérdés megoldása tisztán matematikai feladat. Foglalkozik azután az európai országokban abban az időben alkalmazott különböző arányos választási rendszerekkel, ezek kritikáját adja, végül önmaga is ad egy modellt arányos választási rendszerre, amely az említettekkel kapcsolatos valamennyi kritikát kiállja és nem komplikáltabb.

A Tanácsköztársaság ideje alatt a Monarchia idején követett választói rendszer helyett újat, jobbat kívántak életbe léptetni. Mielőtt még ebben a kérdésben a Parlament állást foglalt volna, JORDAN KÁROLY 1918 végén ([93]), illetve 1919 elején ([94]) két cikkben foglalkozott a *Népszava* hasábjain az arányos választási rendszerrel. Az első cikkében népszerű áttekintését adja ennek a kérdéskörnek, a másodikban pedig arra való tekintettel, hogy a parlamenti vitákban a Belgiumban bevezetett *Hondt-féle rendszer* elfogadása mellett foglaltak állást általában, felhívja e rendszer buktatóira a figyelmet és óva int attól, hogy e rendszer mellett törjön lándzsát a törvényhozás. 1919-ben a *Táltos Könyvtár* kiadásában 56 oldalas nagyobb terjedelmű munkát is jelentet meg az arányos választói rendszerek bírálatáról ([20]).

Visszatér erre kérdésre 1921-ben egy Tübingenben megjelent értekezésében ([23]). Ugyanis közben PÓLYA GYÖRGY is foglalkozott az arányos választási rendszerekkel, elsősorban valószínűségszámítási szempontból és ehhez fűzött megjegyzéseket JORDAN KÁROLY. Ez a kérdés úgy látszik tovább is érdekelte, mert ugyancsak a „*Huszadik Század*" folyóiratban, de most már 1947-ben ([95]) újból foglalkozik ezzel a témakörrel.

5. Népszerűsítő cikkek

Ebbe a csoportba soroltuk azokat a dolgozatait, amelyekben részben a valószínűségszámítási, illetve matematikai statisztikai módszerek felhasználásával jut el más tudományterületeken új eredményekhez, részben nem annyira új eredményeket közöl, hanem az ismert eredményekre, módszerekre hívja fel a különböző tudományok területén dolgozók figyelmét.

A *Magyar Fizikai Folyóirat* 1953. évi kötetében ([85]), illetve ennek francia nyelvű változatában, amely az *Acta Physica* 1954. évfolyamában jelent meg ([86]), megmutatja, hogy a *Van der Waals állapotegyenlet* állandóinak becslésére alkalmazott eddigi módszer hibás, amennyiben helytelen eredményekre vezet. Javasol kifogástalan módszert. Azt is megmutatja, hogy újabb paraméterek bevezetése nélkül a *Van der Waals formulával* nem lehet kritikus adatokat meghatározni.

A számítástechnikai kultúra elterjesztése céljából írta a *Magyar Statisztikai Szemlében* francia nyelven 1927-ben ([36]), ugyancsak a *Magyar Statisztikai Szemlében* 1939-ben ([68]), illetve ennek francia nyelvű változatát tartalmazó 1940-ben megjelent dolgozatát ([70]). Az elsőben a statisztikában alkalmazandó matematikai módszerekről, az utóbbiakban pedig a differenciaszámításnak a statisztikában való szerepéről értekezik.

A matematikai statisztika módszeres gyakorlati alkalmazásával kapcsolatban korán felismerte a meteorológiai megfigyelések értékes adatgyűjtésének feldolgozásában mutatkozó lehetőségeket. Ezért mind nagyobb érdeklődéssel fordult a meteorológia felé. Meteorológiai szemlélete nyújtotta számára azt a biztos támpontot, ahonnan pontosan le tudta mérni a matematika terén elért eredményeinek gyakorlati értékét.

A matematikai statisztikának a meteorológiában való alkalmazásával foglalkozó dolgozatai közé sorolhatjuk már az 1907-ben a *Revue Générale des Sciences Pures et Appliquées* című szeizmológiai folyóiratban megjelent cikkét ([9]), amelyben megfigyeléseknek matematikai statisztikai kiértékelését adja. Az *Időjárás* 1905. évfolyamában a valószínűségszámítás meteorológiai alkalmazásaira hívta fel a figyelmet ([8]). 1922-ben a *Meteorologische Zeitschrift*ben ([25]), 1930-ban a *Statisztikai Hivatal kétnyelvű kiadásában* ([52]), majd 1949-ben az *Időjárás*ban ([78]) meteorológiai megfigyeléseknek polinomokkal, illetve trigonometrikus polinomokkal való megközelítésével foglalkozik. A korrelációszámításnak ugyancsak a meteorológiában való alkalmazása kérdésének is több cikket szentel. Így ezzel a kérdéssel foglalkozik az *Időjárás* 1927. évi ([44]), 1937. évi ([64]) és 1948. évi ([74]) számában, továbbá a *Központi Statisztikai Hivatal* 1941. évi kiadványában ([71]).

Külön helyet foglalnak el ama munkái, amelyekben meteorológiai kérdéseket tárgyal, tehát nem elsődleges célja a matematikai módszerekkel való megismertetés. Így a *Balaton Tudományos Tanulmányozásának Eredményei* II. kötetében 1908-ban a Hévíz-tó fenekének felméréséről ([10]), 1918-ban a *Természettudományi Közlönyben* a ködről ([18]), az *Időjárásban* 1919-ben Várpalotával kapcsolatosan ([19]), 1950-ben az *Időjárásban* az éghajlat fogalom meghatározásáról ([80]) ír.

De nemcsak a természettudományok kutatóit igyekezett felvilágosítani arról, milyen nagy szerepe van annak, ha a megfigyeléseket matematikai statisztikai módszerekkel értékeljük ki, hanem a társadalomtudományok területén dolgozók figyelmét is felhívta az alkalmazható matematikai módszerekre.

1904-ben a *Huszadik Század* 10. kötetében ([92]) összefoglalást ad arról, milyen matematikai módszerek alkalmazhatók a szociológiai irodalomban. Genovában 1949-ben megjelent francia nyelvű cikkében ([77]) a méltányos adórendszerekről értekezik, míg a *Demográfia* 1958. évi kötetében ([89]) rámutat a differenciaszámítás szerepére a demográfiában.

A megújulási elmélet problémakörébe vág a *Matematikai Lapok* 1951. évi számában írt cikke ([83]), amelyben a megújuló sokaságok és az ipari utánpótlás valószínűségszámítási tárgyalását adja. Lényegében M. FRÉCHET módszerét ismerteti nem folytonos esetben az ún. utánpótlási függvény differenciaegyenletének felállításával és megoldásával. A megoldás birtokában részletekbe menően diszkutálja a felvetett problémával kapcsolatban felmerülő újabb kérdéseket.

Amint láttuk, nem elégedett meg csupán azzal, hogy eredményeket érjen el, hanem ezeket népszerűsíteni igyekezett a felhasználó szakemberek között, de még a középiskolások között is. Ez magyarázza meg, hogy több olyan dolgozata van, amelyek a középiskolásokhoz szólnak. Valamennyien a *Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapokban,* illetve a *Középiskolai Matematikai Lapokban* jelentek meg.

1930-ban a *Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok* egyik valószínűségszámítási feladata inspirálja cikk írására ([53]). Egy urnafeladatról volt szó, amelyben a húzás módját nem egyértelműen értelmezték, így nem volt megállapítható, melyek az egyenlően valószínű események. JORDAN KÁROLY ezzel kapcsolatban rámutatott arra, a tapasztalat döntheti el, hogy egy matematikai modell alkalmazása a valószínűségszámításban helyes-e vagy nem. Másik dolgozatában ([49]) a matematikai reménységről, ennek jelentéséről és alkalmazásáról elsősorban a játékelméletben ad ismertetést a középiskolai tanulók számára. 1939-ben megjelent cikkében ([67]) az ismétléses variációk elméletét kapcsolja össze a *Stirling-számok* elméletével és jut el egyszerű, de érdekes kombinatorikai összefüggésekre. Végül egyik közleménye ([82]) a számolás eredetével és a számrendszerekkel foglalkozik. Áttekintést ad a történelem folyamán kialakult és használatban volt számrendszerekről, írásmódokról, szimbolikáról.

6. Könyveiről

Néhány szót kell szólnunk megjelent könyveiről is. Könyveinek egyéni ízt ad az, hogy olyan témakörökről van szó bennük, amelyekben számos önálló eredményt ért el. Könyveinek előszavában hangsúlyozza, hogy könyvei megírásában nemcsak teoretikus cél vezette, hanem az is, hogy a matematikát alkalmazó haszonnal forgathassa könyveit. Cikkeiben, hacsak nem filozófiai jellegűek, vagy elvi matematikai kérdésekkel foglalkoznak, az eredmények használhatóságát mindenkor kiemeli és ha csak teheti, a számítások megkönnyítése céljából táblázatokat is közöl. Ugyanezt az eljárást követi könyveiben is.

Összesen hét könyvet írt. Ezek közül egy inkább füzetnek mondható. Időrendi sorrendben az első a Hermann et Fils, Párizs kiadásában 1912-ben megjelent *Contribution a l'Étude des Courbes Convexes Fermées et de Certaines Courbes qui s'y Rattachent* című, FIEDLER RAYMOND-dal közösen írt könyve ([13]). Azokat az eredményeket tartalmazza elsősorban, amelyeket a konvex görbékkel kapcsolatban elértek. Ezekről tudományos munkásságának ismertetése során már szóltunk.

Következő munkája az Atheneum kiadásában 1927-ben megjelent 316 oldalas *Matematikai Statisztika* című könyve ([37]). Az akkori rossz gazdasági viszonyok miatt a könyv két évig hevert kiszedve a nyomdában. Időközben megjelent a szerzőnek a Gauthier-Villars, Paris kiadásában, 1927-ben *Statistique Mathématique* című munkája ([38]). A 17 oldalas előszót nem tekintve terjedelme 344 oldal. A magyar kiadás végül is a *Központi Statisztikai Hivatal* áldozatkészsége révén jelenhetett meg. Nehogy a magyar kiadás a francia mögött elmaradjon, szerző nagyobb terjedelmű függeléket írt, amelyben a legújabb eredményeket, így a saját eredményeit is összefoglalta. Annak ellenére, hogy a természettudományi kutatások nagy része statisztikai megfigyelésekre épül, amelyeknek feldolgozása mind nagyobb mértékű matematikai felkészültséget igényel, századunk első negyedében az angol nyelvterületet kivéve csak gyér számú, inkább jelentéktelen munka jelent meg ebből a tárgykörből. Ezért nagy érdeme JORDAN KÁROLYnak, hogy megírta az első magyar nyelvű matematikai statisztikai kézi könyvet azzal a kifejezett céllal, hogy a statisztika módszereit felhasználó szakembereknek a megfelelő matematikai alapot megadja. Kevés előismeretet tételez fel, hogy a kutatóknak minél szélesebb rétege tanulmányozhassa. A módszerek alapjául szolgáló, sokszor bonyolult formulákat a statisztika, a meteorológia, a csillagászat és a közgazdaságtan területéről vett példákon igyekszik megvilágítani.

A francia kiadáshoz D'OCAGNE írt előszót. Kitűnően ismerte fel JORDAN KÁROLY tudományos egyéniségét, amikor azt írta, „Különösen értéket ad a szerző munkájának, hogy az általa tárgyalt módszereket a gyakorlatban is kipróbálta. Ugyanakkor a tapasztalt gyakorlati szakember egyben kiváló teoretikus is".

Sopronban 1939-ben — részben a saját költségén — jelent meg az aránylag nagy terjedelmű, 21 oldal bevezetés mellett 654 oldalas kézikönyve *Calculus of Finite Differences* címen ([66]). A könyv megjelenésének idején a differenciaszámítás — nagy fontosságának ellenére — eléggé elhanyagolt volt a matematikai irodalomban. A régi klasszikus munkák, mint LACROIX, BOOLE, MARKOV és SZELIVANOV munkái már elavultak voltak és nem lehetett hozzájuk jutni. Újabb német nyelvű differenciaszámítási kézikönyv csak egy volt, a Springer sárga sorozatában megjelent NÖRLUND dán matematikus könyve. Elsőrendű, nagyszabású munka, de elsősorban elméleti célokat szolgált. Francia nyelven írt modern differenciaszámítási kézikönyv nem volt. Az angol nyelvű munkák közül megemlíthetők a Londonban 1927-ben megjelent STEFFENSEN könyve *Interpolation* címmel, a WITTAKER és ROBINSON szerzőktől ugyancsak Londonban, 1924-ben napvilágot látott *Calculus of Observation* című kitűnő munkák. Ezek azonban nem ölelik fel a differenciaszámítás egész területét. MILNE—THOMSON szerzők *Calculus of Finite Differences* című könyve, amely 1933-ban jelent meg Londonban, elsősorban ugyancsak teoretikus célokat szolgál. JORDAN könyvében az alkalmazó megtalálhatja mindazt, amire szüksége lehet, lehetőleg egyszerű alakban, kevés előismeretet tételezve fel. Mivel a munka nagymértékben az alkalmazókhoz szól, talán egyedül állt az akkori matematikai irodalomban. Hogy ez mennyire így van, mutatja az a tény, hogy az amerikai egyetemeken a differenciaszámításnak ma is ajánlott tan- és kézikönyve és hogy 1950-ben ([76]) és 1965-ben változatlan formában nyomatta újra New Yorkban a Chelsea Publ. Co. A legutolsó kiadás egyik méltatója megállapítja, annak ellenére, hogy a komputerek korában szükség volna olyan differenciaszámítási kézikönyvre is, amely a módszerekhez a megfelelő algoritmusokat is tartalmazza, mégis az az anyag, amelyet JORDAN KÁROLY könyve felölel, változatlanul fontos a komputerek mellett dolgozó matematikusok számára. Valóban beteljesedett az, aminek reményét JORDAN KÁROLY a *Magyar Statisztikai Szemle* 1939. évi kötetében ([68]) fejezte ki, hosszú időre a differenciaszámításnak klasszikus kézikönyve lett ez a munkája.

A könyvhöz a bevezetőt HARRY CARVER, a michigani egyetem tanára írta, aki az *Annales of Mathematical Statistics* megalapítója és kiadója volt. A munkát elsősorban a statisztikus szemszögéből ítéli meg, azoknak a statisztikusoknak a szempontjából, akik a munkát első kiadásának megjelenésekor már nagy érdeklődéssel fogadták. A Magyar Tudományos Akadémián RADOS GUSZTÁV mutatta be meleg hangú elismerő szavak kíséretében. ([II]).

1956-ban az Akadémiai Kiadó jelentette meg a 16 oldal bevezetést és tartalomjegyzéket magába foglaló első részen kívül 616 oldalas könyvét *Fejezetek a klasszikus valószínűségszámításból* címen ([88]). A *Matematikai Statisztika* című könyvének kézirata két évig hevert a nyomdában, amíg végül kinyomatták. Hasonló a sorsa ennek a munkának is azzal a különbséggel, hogy — JORDAN saját bevallása szerint — 10 évig kellett a kéziratnak kinyomtatásra várnia, egyik fejezete, az örökléstannal foglalkozó így is kimaradt. Ebben a könyvében ötven éves tudományos kutatásainak eredményeit és 30 éven át tartott egyetemi előadásait foglalta egységbe. Ellentétben a matematikai statisztikával, és a differenciaszámítással, a valószínűségszámítás témaköréből számos elsőrangú könyv jelent meg. A nagy klasszikusok, mint POINCARÉ, BOREL, BERTRAND munkái mellett még számos más kitűnő kézikönyv is megemlíthető. Így MARKOVnak németre is lefordított érdekes könyve, vagy CZUBER munkái, USPENSKI, COOLIDGE, MISES stb. könyvei, amelyek még valamennyien az ún. klasszikus valószínűségszámítás szintjén állnak. Ebben a témakörben még ezek mellett is JORDAN KÁROLY könyve nagy jelentőségű, mert sok olyat tartalmaz, amit a felsoroltak egyike sem. Ugyanis — amint láttuk — a klasszikus valószínűségszámításnak számos fejezetében, de különösen az ismétléses valószínűségek elméletében, a hibaelméletben, a legkisebb négyzetek elméletében ért el sok és jelentős eredményt és ezeket, majdnem kivétel nélkül, beledolgozta könyvébe. Ezek mellett számos olyan klasszikus problémát is tárgyal, amelyekkel az említett könyvekben nem találkozhatunk, amelyek azonban nemcsak mint ötletes matematikai problémák, hanem mint alkalmazható modellek is érdekesek.

A klasszikus valószínűségszámítással szemben a ma általánosan használt, KOLMOGOROV-nak köszönhető mértékelméleti modell jelentőségét senki sem vonhatja kétségbe. Ennek a modellnek segítségével vált lehetővé sok olyan kérdésnek valószínűségszámítási módszerekkel való kezelése, amelyekre régebben nem is gondolhattunk. De a modern elmélet mellett a klasszikusnak is megmaradt a jelentősége. A modern elméletnek számos fejezete és eredménye arra hivatott, megmutassa, hogy a klasszikus elmélet nevezetes eloszlásaira épülő módszerek mennyiben jogosultak. JORDAN KÁROLY könyvének ebből a szempontból is megvan tehát az aktualitása. További érdeme, hogy áttekintő képet ad a valószínűségszámítás keletkezéséről és fejlődéséről és mint már említett másik két könyve, ez is nagymértékben szolgálja az alkalmazók szempontjait le egészen a számítások praktikus végrehajtásáig. Az a hatalmas és érdekes anyag, amit a könyv felölel, a valószínűségszámítás múltjából az értékes adalékok átmentése a mába, a gyakorlat szempontjait mindig szem előtt tartó tárgyalásmód mind olyan értékei ennek a munkának, amelyek megindokolják azt, hogy az Akadémiai Kiadó JORDAN KÁROLY születésének 100. évfordulójára 1972-ben angol nyelven is megjelentette *Chapters on the classical calculus of Probability* címen ([91]).

Az eddig ismertetett könyvek témakörétől elütő kérdésekkel foglalkozik a Mérnöki Továbbképző Intézet kiadásában 1950-ben közreadott munkájában, amelynek címe *Elliptikus függvények és alkalmazásuk* ([79]). De hogy mégis kapcsolatba került a szerző kutatásai során ezekkel a függvényekkel, mutatja a 19. fejezet, amelyben az ún. *Talbot-görbével* foglalkozik. Ez az a görbetípus, amely már a FIEDLERrel közösen írt, a konvex görbékkel kapcsolatos cikkeinek egy részében is előfordul. A füzet különben az elliptikus függvényekre vonatkozó olyan fontos tudnivalókat közöl, amelyekre szükség lehet egy kutató mérnöknek. Nem kell külön talán hangsúlyozni, hogy ez a munka is erősen szem előtt tartja a gyakorlati alkalmazhatóság szempontjait.

1961-ben adta ki a Műszaki Könyvkiadó 156 oldal terjedelmű hétjegyű logaritmustábláját ([90]), amelyben a természetes számok tízes alapú logaritmusait, a 10 alapú exponenciális függvény értékeit, a sinus és tangens, valamint az arcus tangens függvény értékeit, végül a sinus és tangens függvény logaritmusait adja meg. A táblák aránylag kicsi, a szokásosnak kb. tizedrész terjedelme azzal magyarázható, hogy JORDAN KÁROLY előre megadta azt a hibát (a legalacsonyabb helyértékben legfeljebb 1,7 eltérés), amely lineáris interpoláció alkalmazása esetén mint maximális felléphet, és ez szabja meg azt, hogy mely számoknak adja meg a logaritmusait.

Könyveinek ismertetésével kapcsolatban hangsúlyoztuk, de ő is ezt tette könyveinek előszavában, hogy mennyire jelentős helyet kapnak ezekben az alkalmazó szakemberek igényei. Nem volna azonban teljes a kép, ha csak ezt hangsúlyoznánk. Könyveinek igen értékes vonása az, hogy mindent, ami tárgyalásra kerül, történeti miliőbe ágyaz be. Minden problémakörnek kinyomozza eredetét, fejlődését és csak azután adja meg a maga által helyesnek ítélt megoldást és az ebből vont gyakorlati következtetéseket. JORDAN KÁROLY könyvei a teoretikus számára is nélkülözhetetlen kézikönyvek, amelyekben pontos és részletekbe menő irodalmi utalásokat is talál. Ugyanez a szemlélet jellemzi cikkeit is.

7. Méltatása

Ebben a fejezetben professzori működéséről, ennek és tudományos munkáinak hatásáról, társadalmi elismeréséről szólunk, de Jordan Károlyról, mint emberről is megemlékezünk.

a) A Közgazdasági Egyetemnek, később a József Nádor Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetemnek előbb magántanára, c. nyilvános rendkívüli, majd c. rendes tanára lett. Egyetemi előadói tevékenysége azoknak a témaköröknek tárgyalása volt, amelyekkel önmaga kutató szinten foglalkozott: a valószínűségszámítás, a matematikai statisztika, és a differenciaszámítás. E tárgykörök kollégiumai évenként ismétlődtek. A matematikai módszerek a közgazdaságtanban címen nem minden évben megismétlődő előadása is volt. Amíg évenként ismétlődő előadásait a könyveiben lefektetett szempontok és módszerek alapján építette fel, a nem rendszeresen ismétlődő matematikai közgazdaságtani előadásai előhírnökei voltak azoknak a témaköröknek, amelyeket ma ekonometria néven emlegetünk. Elsősorban a bécsi határhaszon iskola eredményeit ismertette. Érdekes, hogy amíg minden más előelőadásának témájáról számos cikke, vagyis mertetése jelent meg, addig ekonometriai előadásainak témakörével sem dolgozataiban, sem ismertetéseiben nem találkozunk. Pedig valószínűségszámítási és matematikai statisztikai szemlélete ezekben az előadásokban is érvényesült. Éppen ezért sok problémát olyan új megvilágításban tárgyalt, amiről írnia is érdemes lett volna.

A két világháború között megjelent Minerva-kötetek tanúsága szerint a középeurópai egyetemeken sem matematikai statisztikát, sem differenciaszámítást nem adtak elő. Ezért van annak nagy jelentősége, hogy JORDAN KÁROLY munkásságának hazai elismerése révén Magyarországon lehetővé vált ezeknek az alkalmazásokban olyan fontos matematikai tárgyköröknek az előadása. Nem sok hallgatója volt. A Tudományegyetemről néhány matematikus hallgató és a Közgazdasági Egyetemről kevesen, összesen nem többen, mint 5—6-an látogatták az előadásait. Hogy ezeknek mégis megvolt a maguk hatása, bizonyítja az, hogy a *MTA Alkalmazott Matematikai Intézetének* megalakulása idején, amikor ennek az intézménynek a legfőbb feladatkörét a valószínűségszámítás és a matematikai statisztika és alkalmazásaik jelentette, JORDAN KÁROLY volt tanítványaira építettek elsősorban. Több tanítványa kutatói szinten is csatlakozott azokhoz a vizsgálatokhoz, amelyeknek ő akkor Magyarországon egyetlen, nemzetközi szinten is kiemelkedő képviselője volt.

Nemcsak közvetlen tanítványai igazolják tudományterületén kifejtett hatását. Ha az első világháború után nem sokkal megindult *Annals of Mathematical Statistics* című folyóirat köteteit lapozgatjuk (e folyóirat különben hosszú ideig a matematikai statisztikának egyetlen nemzetközi szintű folyóirata volt), a kortársak közül számosnak irodalomjegyzékében szerepel JORDAN KÁROLY neve. Tudományos munkája nemzetközi szinten mozgott, mert nemzetközi érdeklődést tudott kiváltani. Széles körű nyelvtudása (tökéletes volt franciában, németben, angolban és olaszban) rendszeres és állandó jellegű levélkapcsolatot biztosított számára a korabeli vezető matematikusokkal, rendszeresen vett részt a matematikai statisztika konferenciáin, de a nemzetközi matematikai kongresszusokon is. Misem bizonyítja a nemzetközi matematikai statisztikai életre gyakorolt nagy hatását, mint az, hogy születésének 100. évfordulóján a Magyar Tudományos Akadémia és a Bolyai János Matematikai Társulat ünnepi ülésével jóformán egyidőben Londonban, Kyotoban, a párizsi Sorbonne-n, New Yorkban és Sydneyben is ünnepélyes keretek között emlékeztek meg róla és tudományos eredményeiről.

Páratlan, mintegy ötezer kötetet kitevő matematikai könyvtára volt, valószínűségszámítási és matematikai statisztikai szempontból mondhatni teljes. Talán ez is magyarázza azt, miért dominált munkáiban annyira a történeti szempont. A bölcs nyugalmával fogadta ennek az értékes könyvtárnak, naplószerű feljegyzéseinek 1956-ban történt porráégésének hírét. Hogy kutatásait továbbfolytathassa, jó ismerősei és volt tanítványai gyűjtöttek össze számára egy kisebb szakkönyvtárat.

b) Tudományos munkásságát, elért jelentős eredményeit megfelelő erkölcsi elismerés is kísérte.

1928-ban megkapja az Eötvös József Matematikai és Physikai Társulatnak a kiemelkedő eredményeket felmutató matematikusok jutalmazására alapított KÖNIG GYULA díját. 1947-ben a Magyar Tudományos Akadémia levelező tagjai sorába választja. 1956-ban matematikai eredményeinek elismeréseképpen megkapja a *Kossuth-díjat.*

Tiszteletbeli elnöke volt a Bolyai János Matematikai Társulatnak, tiszteletbeli tagja (Honorary Fellow) a Royal Statistical Society-nek, vezetőségi tagja (Fellow) az Institute of Mathematical Statistics-nek, tagja volt az Institute International de Statistique-nek, az American Statistical Assotiation-nak, a Mathematical Society of London-nak, a Société Mathématique de France-nak, a Circolo Matematico di Palermo-nak, a Physico-Mathematical Society of Japan-nak. Tiszteletbeli tagja volt a Magyar Geofizikusok Társaságának, a Magyar Meteorológusok Társaságának. Tagja volt ezenkívül számos egyéb belföldi és külföldi egyesületnek is.

c) Nem volna JORDAN KÁROLY professzorról teljes, a kép, ha nem emlékeznénk meg még egy-két olyan jellemvonásáról, amelyek ugyan nem kapcsolódnak közvetlenül tudományos munkájához, de hozzá tartoznak emberi portréjához.

Nagy természetbarát volt, pihenését mindig a szabadban töltötte. A magas hegyek megmászásában az Alpokban megszerzett gyakorlatát a hazai hegymászásban gyümölcsöztette. Maradandó nevet biztosított magának a tátrai csúcsok és gerincek egy néhányának első megmászásával. Egyetemi hallgató korában kerékpárral járta be Nyugateurópát Svédországtól Gibraltárig, majd az akkor még nagyobbrészt török fennhatóság alatt álló Balkánt. Motorkerékpárjával még hatvanas éveiben is ötszáz km-es utat tett meg egy nap alatt Budapesttől a svájci határig. Nevéhez fűződik néhány hazai barlang feltárása (pálvölgyi, révi, tapolcai, tavasbarlang). Szenvedélyes és sikeres művelője volt a vitorlássportnak. Több mint tíz évig ő tartotta a balatoni hosszútávú verseny gyorsasági rekordját.

Szellemi frissességét agg koráig megtartotta, tevékeny szelleme élete végéig szigorú napi beosztású munkálkodásra késztette.

Mély humanitás jellemezte. A választási rendszerek bírálatában a tudós tárgyilagossága mellett helyet kér az érző ember is, akit az elnyomottak problémái nem hagynak érzéketlenül. A valószínűségszámítás alapjairól, filozófiai megalapozásáról írott cikkei azt igazolják, hogy a fizikai és társadalmi jelenségek stochasztikus értelmezésén túl a stochasztikus szemlélet nála az élet minden területét szabályozó életelv, amelynek még az erkölcsi magatartás vonatkozásában is megvan a maga hatása, alkalmas arra, hogy az embereket jobbá tegye. Mi sem bizonyítja ezt jobban, mint a *Természettudományi Közlöny* 1921. évfolyamában írt cikkének ([22]) befejező sorai. „A logikai törvényeket nem tekintve, reánk semmi sem biztos, semmi sem lehetetlen, minden csak többé-kevésbbé valószínű." „A bizonyosság tudatának hiánya azonban nemcsak hogy nem veszteség az emberiségre, hanem inkább előny." „A gyakorlati életben pedig, csapások esetén a determinisztikus világnézet által nyújtott vigaszhoz, hogy t. i. a megtörtént dolgok szükségszerűek voltak, hozzájárul még az a bizonytalanság, hogy nem tudhatjuk, nem jobb-e, mintha másként történt volna." „A bizonyosság tudatának hiánya erkölcsi szempontból is nemesítőleg hat az emberiségre. Ha ítélnünk kell embertársaink felett, bizonyos jóindulatot kelt az a tudat, hogy nem vagyunk bizonyosak abban, hogy a dolog hogyan történt, nem tudjuk, nem ártatlanok-e, vagy legalább nem jóval kevésbé bűnösök-e mint gondoljuk. A hangoztatott eszmék nagy befolyást vannak hivatva gyakorolni az ember gondolkodási módjára, gyűlölet és bosszúvágy helyett szerénységet, türelmet és megértést hirdetve egyengetni fogják az utat a TAGORE által várt jövő világba, amelynek nem a hatalmi szenvedély lesz az ura, hanem a szeretet."

Amint az idézett sorokból különösen kicsendül, JORDAN KÁROLYT humanitással áthatott tudós kutatót kell, hogy magunk előtt lássunk, valahogy úgy, ahogy ex libris-én látható: egy szerzetes, aki egyik kezében tollal nagy fóliánsba rója a sorokat, a másik keze egy urnában van, nyilván azért, hogy a tapasztalattal ellenőrizze teoriáját, vagy — NÉMETH LÁSZLÓ szavaival élve — hogy „a gondolhatót szembesítse a létezővel". Olyan kutatót kell benne magunk előtt látnunk, akinek alkalma volt arra, hogy igaznak tartott eszméit az egyetemen tanítványai felé, új eredményeit a matematikai folyóiratokon át a nemzetközi tudományos közvélemény felé és tudását könyvein át a jövő nemzedékek felé közvetítse.

d) Összefoglalásként JORDAN KÁROLYra emlékezve megállapíthatjuk, hogy ő tekinthető a magyar valószínűségszámítási, matematikai statisztikai és differenciaszámítási vizsgálatok megindítójának és hazánkban ennek a témakörnek első nemzetközi elismerést is kivívó kutatójának. Ha továbbá figyelembe vesszük azt, hogy milyen lényegesnek tartotta az alkalmazások, a cselekvések szempontjából a szilárd szellemi hátteret, a matematikailag kiművelt emberfőt, Jordan Károlyt a mai terminológiával élve a legnemesebb értelemben vett alkalmazott matematikusnak, számítástechnikusnak is nevezhetnénk.

JORDAN KÁROLYRÓL SZÓLÓ IRODALOM

[I] GYIRES, B., „Károly Jordan." *Chapters on the classical calculus of Probability* (Akadémiai kiadó, Budapest, 1972.) V—XIII.
[II] RADOS, G., „Magyar szerzőnek két idegen nyelvű művéről", *Mat. Termtud. Értesítő* **58** (1939) 673—676.
[III] RÉNYI, A., „Jordan Károly matematikai munkássága", *Mat. Lapok* **3** (1952) 111-121.
[IV] SZŰCS, A., "Charles Jordan: Calculus of Finite Differences", *Math. Phys. Lapok* **46** (1939) 170—172.
[V] TAKÁCS, L., "Charles Jordan, 1871—1959.", *The Annals of Mathematical Statistics* **32** (1961) 1—11.
[VI] VINCZE, I., „Jordan Károly születésének századik évfordulója", *Magyar Tudomány* **4** (1972) 249—251.
[VII] WISHART, J., AITKEN, A. C. and LINDSTONE, G. J., „Interpolation without printed differences: I, II, III", *Math. Gazette* **16** (1932) 14—25.

(Beérkezett: 1975. április 16.)

GYIRES BÉLA
KOSSUTH LAJOS TUDOMÁNYEGYETEM VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁSI TANSZÉK
4010 DEBRECEN 10.

Alkalmazott Matematikai Lapok 1 *(1975) 299—318*

EGY ÚJ, TÖBBDIMENZIÓS GAMMA ELOSZLÁS ÉS ANNAK ILLESZTÉSE EMPIRIKUS ADATOKHOZ

PRÉKOPA ANDRÁS ÉS SZÁNTAI TAMÁS
Budapest

A dolgozatban egy új, többdimenziós gamma eloszlást értelmezünk. Ez együttes eloszlása egy olyan valószínűségi vektorváltozó komponenseinek, mely lineáris transzformáltja egy független, gamma eloszlású komponensekből álló valószínűségi vektorváltozónak. Megadunk olyan szimulációs eljárásokat, amelyek segítségével az eloszlásfüggvény bármely pontbeli értéke kielégítő pontossággal és elfogadható számolási idő felhasználással kiszámolható elektronikus számítógépen. A dolgozatban konkrét számítási eredményeket is közlünk az eloszlás illesztésére és szimulálására vonatkozóan.

1. Bevezetés

Többdimenziós gamma eloszlásoknak azokat a többdimenziós valószínűség eloszlásokat nevezzük, amelyek minden egyváltozós peremeloszlása gamma eloszlás. A matematikai statisztikai szakirodalomban több módszer található arra, hogy hogyan lehet ilyen típusú többdimenziós eloszlások sűrűségfüggvényét, momentum generáló függvényét, illetve karakterisztikus függvényét explicite előállítani.

Kétdimenziós esetben CHEREIYAN [2] vezette le független, standard gamma eloszlású valószínűségi változók alkalmas részletösszegeire a

$$G(t_1, t_2) = (1-t_1-t_2)^{-\Theta_0}(1-t_1)^{-\Theta_1}(1-t_2)^{-\Theta_2} \tag{1.1}$$

momentum generáló függvényt, ahol $\Theta_0, \Theta_1, \Theta_2$ pozitív valós paraméterek. Az (1.1) karakterisztikus függvény származtatási módjából közvetlenül következik, hogy az általa definiált kétdimenziós valószínűség eloszlás mindkét peremeloszlása standard gamma eloszlás. Később RAMABHADRAN [16] általánosította CHEREIYAN eredményét a többdimenziós esetre úgy, hogy definiálta a

$$G(t_1, t_2, \ldots, t_n) = \left(1-\sum_{j=1}^{n} t_j\right)^{-\Theta_1} \prod_{j=1}^{n} (1-t_j)^{-\Theta_j} \tag{1.2}$$

momentum generáló függvényt, ahol Θ_j, $j=0, 1, \ldots, n$ pozitív valós paraméterek, és bebizonyította, hogy az ezzel definiált n-dimenziós valószínűség eloszlás egyváltozós peremeloszlásai $\Theta_0+\Theta_j$ paraméterű standard gamma eloszlások, $j=1,2,\ldots, n$. Az (1.2) alatti $G(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ momentum generáló függvény által meghatározott valószínűség eloszlás sűrűségfüggvényére a következő integrál előállítás nyerhető:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \tag{1.3}$$

$$= \left[\prod_{j=0}^{n} \Gamma(\Theta_j)\right]^{-1} \exp\left[-\sum_{j=1}^{n} x_j\right] \int_0^{\tilde{x}} x_0^{\Theta_0-1} \left[\prod_{j=1}^{n} (x_j-x_0)^{\Theta_j-1}\right] e^{(n-1)x_0}\, dx_0,$$

$$x_j \geqq 0, j = 1, \ldots, n,$$

ahol $\tilde{x}=\min\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Az itt szereplő integrál kiszámolása sajnos megoldatlan az általános esetben. A speciális $n=2$, $\Theta_1=\Theta_2=1$ és Θ_0 egész esetre ismert azonban az $f(x_1, x_2)$ sűrűségfüggvény explicit előállítása is:

(1.4)
$$f(x_1, x_2) = (-1)^{\Theta_0}\exp(-x_1-x_2)\left\{1+e^{\tilde{x}}\left[1-\frac{\tilde{x}}{1!}+\frac{\tilde{x}^2}{2!}-\ldots+(-1)^{\Theta_0-1}\frac{\tilde{x}^{\Theta_0-1}}{(\Theta_0-1)!}\right]\right\},$$
$$x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0,$$

ahol $\tilde{x}=\min\{x_1, x_2\}$.

GAVER [3] két egymástól független, standard gamma elosztású valószínűségi változó negatív binomális eloszlású súlyokkal történő együttes keverésével állította elő a

$$(1.5)\qquad \varphi(t_1, t_2) = \{(\beta+1)(1-it_1)(1-it_2)-\beta\}^{-\alpha}, \quad \alpha>0, \quad \beta>0$$

karakterisztikus függvényt, melyre ismét igaz az, hogy az általa meghatározott valószínűség eloszlás peremeloszlásai standard gamma eloszlások. Az (1.5) karakterisztikus függvény egyszerűen általánosítható tetszőleges n dimenziószámra is a következőképpen:

$$(1.6)\qquad \varphi(t_1, t_2, \ldots, t_n) = \left\{(\beta+1)\prod_{j=1}^{n}(1-it_j)-\beta\right\}^{-\alpha}, \quad \alpha>0, \beta>0.$$

VERE-JONES [17] a két dimenziós esetre bebizonyította a definiált valószínűségeloszlás korlátlanul oszthatóságát, az együttes sűrűségfüggvényre azonban nem ismeretes semmiféle előállítás.

MORAN [13] az (eredetileg KIBBLE [8] által definiált)

$$(1.7)\qquad \varphi(t_1, t_2) = \{(1-it_1)(1-it_2)+\omega^2 t_1 t_2\}^{-\alpha}, \quad \alpha>0$$

karakterisztikus függvényről mutatta ki, hogy az általa meghatározott kétdimenziós valószínűségeloszlás mindkét peremeloszlása α paraméterű standard gamma eloszlás. Az együttes sűrűségfüggvényre három ekvivalens előállítás is ismert, nevezetesen

(1.8a)
$$f(x_1, x_2) = \sum_{j=0}^{\infty}\omega^{2j}(\alpha^{[j]}/j!)\left[\prod_{k=1}^{2}\left\{\sum_{g=0}^{j}(-1)^j\binom{j}{g}(g!)^{-1}x_h^g e^{-x_k}\right\}\right], \quad x_1\geqq 0, x_2\geqq 0;$$

$$(1.8b)\quad f(x_1, x_2) = \left\{\prod_{j=1}^{2}\left[\frac{x_j^{\alpha-1}e^{-x_j}}{\Gamma(\alpha)}\right]\right\}\left[1+\sum_{j=1}^{\infty}\varrho^j L_j^{\alpha-1}(x_1)\right], \quad x_1\geqq 0, x_2\geqq 0,$$

ahol $\alpha>0$, $0\leqq\varrho<1$ és $L_j^{\alpha-1}(x)$ a *Laguerre-polinomot* jelöli, azaz

$$L_j^{\alpha-1}(x) = \left[\frac{\Gamma(a)\Gamma(\alpha+j)}{j!}\right]^{1/2}\sum_{k=0}^{j}\frac{(-1)^h\binom{j}{h}x^h}{\Gamma(\alpha+h)};$$

(1.8c)
$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{(1-\varrho)\Gamma(\alpha)}\left(\frac{x_1x_2}{\varrho}\right)^{\frac{1}{2}(\alpha-1)} e^{-\frac{x_1+x_2}{1-\varrho}} I_{\alpha-1}\left(2\frac{\sqrt{x_1x_2\varrho}}{1-\varrho}\right), \quad x_1\geqq 0, x_2\geqq 0,$$

ahol $\alpha>0$, $0\leqq\varrho<1$ és $I_{\alpha-1}(z)$ a k-adrendű, elsőfajú, módosított *Bessel-függvény*, azaz

$$I_k(z)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}z\right)^{k+2r}}{r!\,\Gamma(k+r+1)}.$$

SARMANOV [20] a sűrűségfüggvény (1.8b) alakja helyett bevezette az általánosabb

$$(1.9)\quad f(x_1,x_2)=\left\{\prod_{j=1}^{2}\left[\frac{x_j^{\alpha-1}x^{-x_j}}{\Gamma(\alpha)}\right]\right\}\left[1+\sum_{j=1}^{\infty}c_jL_j^{\alpha-1}(x_1)L_j^{\alpha-1}(x_2)\right],\quad x_1\geqq 0,\ x_2\geqq 0$$

függvényt, ahol $c_1, c_2, c_3, \ldots$ nemnegatív valós számok egy olyan sorozata, amelyre $\sum_{j=1}^{\infty}c_j^2$ konvergens. Mivel

$$\int_0^{\infty}x^{\alpha-1}e^{-x}L_j^{\alpha-1}(x)\,dx=0,\quad \text{ha}\quad j\geqq 1,$$

azért az (1.9) alatti $f(x_1,x_2)$ függvényre továbbra is teljesül az $\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}f(x_1,x_2)dx_1dx_2=1$ feltétel. Emellett SARMANOV [20] bebizonyította, hogy annak szükséges és elégséges feltétele, hogy $f(x_1,x_2)\geqq 0$ is teljesüljön az, hogy a $c_1, c_2, c_3, \ldots$ számok egy olyan η valószínűségi változó momentumai legyenek, amelyre $P(0\leqq\eta<1)=1$. Minthogy az (1.9) sűrűségfüggvény által definiált valószínűség eloszlás peremeloszlásai továbbra is α paraméterű standard gamma eloszlások, a tett feltevések mellett az (1.9) függvény is egy kétdimenziós gamma eloszlás sűrűségfüggvényének tekinthető. SARMANOV [21] általánosította az (1.8b) sűrűségfüggvényt a nem szimmetrikus esetre is, amikor is az egyváltozós peremeloszlások különböző α_i paraméterű standard gamma eloszlások. Erre az esetre a sűrűségfüggvény a következő alakú:

(1.10)
$$f(x_1,x_2)=\left\{\prod_{j=1}^{2}\left[\frac{x_j^{\alpha_j-1}e^{-x_j}}{\Gamma(\alpha_j)}\right]\right\}\left[1+\sum_{j=1}^{\infty}a_jL_j^{\alpha_1-1}(x_1)L_j^{\alpha_2-1}(x_2)\right],\quad x_1\geqq 0,\ x_2\geqq 0,$$

ahol $\alpha_1>\alpha_2>0$ és

$$a_j=\lambda^j\sqrt{\frac{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2+j)}{\Gamma(\alpha_2)\Gamma(\alpha_1+j)}},\quad 0<\lambda<1.$$

JENSEN egészen más irányú meggondolással jutott egy az (1.8b) sűrűségfüggvénnyel analóg, kétdimenziós sűrűségfüggvényre (lásd [5]). Nevezetesen a $\xi_j=\sum_{k=1}^{\nu}\eta_{kj}^2$, $j=1,2,\ldots,n$ valószínűségi változók együttes eloszlását vizsgálta, ahol $(\eta_{k1},\ldots,\eta_{kn})$, $k=1,2,\ldots,\nu$ kölcsönösen független, standard n-dimenziós normális eloszlású valószínűségi vektor változók Σ_k kovarianciamátrixszal (melyek nem feltétlen azonosak minden k-ra). $n=2$ esetén ξ_1 és ξ_2 együttes karakterisztikus függvényére

(1.11)
$$\varphi(t_1,t_2)=[1-2it_1)(1-2it_2)]^{-\nu/2}\sum_{j=0}^{\infty}C_j(\varrho_1,\varrho_2,\ldots,\varrho_\nu)\left\{-\frac{4t_1t_2}{(1-2it_1)(1-it_2)}\right\}^j$$

adódott, ahol

$$C_j(\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_\nu) = \sum_{j_1+\ldots+j_\nu=j} \ldots \sum a_{j_1}(\varrho_1) \ldots a_{j_\nu}(\varrho_\nu),$$

$$a_j(\varrho_l) = \varrho_l^{2j} \Gamma\left(j+\frac{1}{2}\right) [\sqrt{\pi}\Gamma(j+1)]^{-1}$$

és ϱ_l az η_{l1} és η_{l2} valószínűségi változók korrelációs együtthatója. ξ_1 és ξ_2 együttes sűrűségfüggvénye pedig

(1.12)

$$f(x_1, x_2) = \left\{\prod_{j=1}^{2} \left[\frac{x_j^{\nu/2-1} e^{-x_j/2}}{2^{\nu/2}\Gamma(\nu/2)}\right]\right\} \sum_{j=0}^{\infty} \left\{\frac{j!\Gamma(\nu/2)}{\Gamma(\nu/2+j)}\right\}^2 C_j(\varrho_1, \ldots, \varrho_\nu) L_j^{\nu/2}\left(\frac{x_2}{2}\right),$$

$$x_1 \geqq 0, x_2 \geqq 0.$$

Jensen [5] $n=3$ esetén is meghatározta ξ_1, ξ_2, ξ_3 együttes valószínűség eloszlását, valamint általános n esetén $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ együttes eloszlását, feltéve, hogy a Σ_k kovarianciamátrixok mind úgynevezett *Jacobi-alakúak*, azaz csupa zéró elemet tartalmaznak, eltekintve a fődiagonálistól és a vele szomszédos két mellék diagonálistól. Zaharov és munkatársai [19] az (1.8c) alakú sűrűségfüggvény egy többdimenziós analógját vezették le:

(1.13)

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) =$$

$$= \frac{(x_1 x_n/\lambda_1\lambda_n)^{\nu/2-1} \exp\left(-\sum_{j=1}^{n} x_j/\lambda_j\right)}{K^{\nu/2}\left(\prod_{i=1}^{n-1} b_i\right)^{\nu/2} \Gamma(\nu/2) \prod_{i=1}^{n} \lambda_i} \prod_{i=1}^{n-1} I_{\nu/2-1}\left(2\sqrt{\frac{b_i x_i x_{i+1}}{\lambda_i \lambda_{i+1}}}\right), \quad x_j \geqq 0, j = 1, \ldots, n,$$

ahol

$$K = \prod_{i=1}^{n-1} \left[\frac{1-\varrho_i^2\varrho_{i-1}^2}{1-\varrho_i^2}\right], \quad \varrho_0 = 0,$$

$$b_i = \frac{\varrho_i^2(1-\varrho_{i-1}^2)(1-\varrho_{i+1}^2)}{(1-\varrho_{i-1}^2\varrho_i^2)(1-\varrho_i^2\varrho_{i+1}^2)},$$

$$\lambda_i = \frac{(1-\varrho_{i-1}^2)(1-\varrho_i^2)}{1-\varrho_{i-1}^2\varrho_i^2}$$

és $I(.)$ az elsőfajú módosított *Bessel-függvény*.

Krishnaiah és munkatársai [9] a többdimenziós normális eloszlásból nyertek először többdimenziós χ^2-eloszlást, majd ebből általánosításképpen többdimenziós gamma eloszlást. A módszerük lényege a következő. Legyen $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ egy n-dimenziós normális eloszlású valószínűségi vektor változó $\boldsymbol{\mu}$ várható érték vektorral és $\boldsymbol{\Sigma}=(\sigma_{ij})_{i,j=1}^n$ kovarianciamátrixszal, ahol $\sigma_{ii}=1$, $i=1, 2, \ldots, n$ (azaz a $\boldsymbol{\Sigma}$ kovarianciamátrix egyúttal korrelációs mátrix is). Tekintsünk a $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ valószínűségi vektorváltozóra egy ν-elemű statisztikai mintát, azaz tekintsük az

$$\begin{matrix} x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n} \\ x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2n} \\ \vdots \quad \vdots \qquad \vdots \\ x_{\nu 1}, x_{\nu 2}, \dots, x_{\nu n} \end{matrix}$$

mátrixot, amely minden sora egymástól független, és a $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ valószínűségi vektorváltozóval azonos eloszlású véletlen vektort reprezentál. Ha most definiáljuk az

$$S_j = \sum_{i=1}^{\nu} (x_{ij} - \bar{x}_{.j})^2, \quad j = 1, 2, \dots, n \tag{1.14}$$

statisztikákat, ahol $\bar{x}_{.j} = \frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^{\nu} x_{ij}$, akkor $S_1, S_2, \dots, S_n$ mindegyike $\chi^2_{\nu-1}$ eloszlású, és így az együttes eloszlásuk úgy tekinthető, mint egy többdimenziós χ^2 eloszlás. KRISHNAMOORTHY és PARTHASARATHY [11], valamint LUKACS és LAHA [12] megmutatták, hogy $S_1, S_2, \dots, S_n$ együttes karakterisztikus függvénye:

$$\varphi(t_1, t_2, \dots, t_n) = |\mathbf{I} - 2i\mathbf{\Sigma}\mathbf{D}_t|^{-\frac{\nu}{2}}, \tag{1.15}$$

ahol I az n-dimenziós egységmátrix és $\mathbf{D}_t = \mathrm{diag}\,(t_1, \dots, t_n)$ diagonál mátrix. Ahhoz, hogy az (1.5) karakterisztikus függvényt egy n-dimenziós gamma eloszlás karakterisztikus függvényének tekinthessük, a $-\frac{\nu}{2}$ kitevőt egy tetszőleges $\nu > 0$ valós szám negatívjával kellene helyettesíteni. Sajnos azonban az ilyen helyettesítés nem engedhető meg teljesen általánosan. KRISNAIAH és RAO [10] ugyanis alkalmas ellenpéldával megmutatták, hogy az (1.15) karakterisztikus függvény korlátlan oszthatóságának a feltételezése nélkül az ilyen helyettesítés nem karakterisztikus függvényt is eredményezhet. MORAN és VERE-JONES [14] bizonyították be, hogy $S_1, S_2, \dots, S_n$ együttes eloszlása az igen speciális $\sigma_{ij} = \sigma$, $i, j = 1, 2, \dots, n$ esetben, valamint $n = 3$ esetén a

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} 1 & \sigma & \sigma^2 \\ \sigma & 1 & \sigma \\ \sigma^2 & \sigma & 1 \end{pmatrix}$$

speciális esetben korlátlanul osztható. Ezért ezekre az esetekre a

$$\varphi(t_1, t_2, \dots, t_n) = |\mathbf{I} - 2i\mathbf{\Sigma}\mathbf{D}_t|^{-\nu} \tag{1.16}$$

karakterisztikus függvény valóban olyan n-dimenziós valószínűség eloszlást definiál, amely egyváltozós peremeloszlásai standard gamma eloszlások. Az így definiált többdimenziós gamma eloszlás együttes eloszlásfüggvénye azonban csak az $n = 2$ esetben ismert:

(1.17)

$$P(S_1 < s_1, S_2 < s_2) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j P\big(\chi^2_{\nu-1+2j} \leqq (1-\sigma^2)^{-1} s_1\big) P\big(\chi^2_{\nu-1+2j} (1-\sigma^2)^{-1} s_2\big),$$

ahol

$$c_j = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}(\nu-1)+j\right)(1-\sigma^2)^{\frac{1}{2}(\mu-1)}\sigma^{2j}}{j!}.$$

Megjegyezzük, hogy mivel $c_0, c_1, c_2, \ldots$ az

$$\left(\frac{1}{1-\sigma^2}-\frac{\sigma^2}{1-\sigma^2}\right)^{-\frac{1}{2}(\nu-1)}$$

negatív binomiális kifejtésének az együtthatóival egyenlő, azért $\sum_{j=0}^{\infty} c_j = 1$, és így S_1 és S_2 együttes eloszlása úgy is tekinthető, mint azon együttes eloszlások c_j súlyokkal képezett keverése, amelyekben a peremeloszlások egymástól független $\chi^2_{\nu-1+2j}$ eloszlások. A $\sigma_{ij}=\alpha$, $i,j=1,2,\ldots,n$ speciális esetre JOHNSON [6] javasolt egy közelítő formulát az együttes eloszlásfüggvény számolására, ez azonban négynél nagyobb dimenziószám esetén már csak igen durva közelítést eredményez.

Végül JENSEN a [4] dolgozatában a $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p)$ p-dimenziós, nulla várható érték vektorú és $\mathbf{\Sigma}$ kovarianciamátrixú normális eloszlású valószínűségi vektorváltozó elemeit particionálta n csoportra $[(\xi_1, \ldots, \xi_{p_1}), (\xi_{p_1+1}, \ldots, \xi_{p_1+p_2}), \ldots, \ldots, (\xi_{p-p_n+1}, \ldots, \xi_p)]$, majd az így particionált valószínűségi vektorváltozóra tekintett egy ν elemű statisztikai mintát: $\mathbf{x}_j'=(x_{1j}, x_{2j}, \ldots, x_{pj})$, $j=1,2,\ldots,\nu$. Ekkor a bevezetett particionálásnak megfelelően mind a $\mathbf{\Sigma}$ kovarianciamátrix, mind az $\mathbf{S}=\sum_{j=1}^{\nu}\mathbf{x}_j\mathbf{x}_j'$ *Wishart-mátrix* a következő alakban állítható elő:

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} \mathbf{\Sigma}_{11} & \mathbf{\Sigma}_{12} & \ldots & \mathbf{\Sigma}_{1n} \\ \mathbf{\Sigma}_{21} & \mathbf{\Sigma}_{22} & \ldots & \mathbf{\Sigma}_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{\Sigma}_{n1} & \mathbf{\Sigma}_{n2} & \ldots & \mathbf{\Sigma}_{nn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S} = \begin{pmatrix} \mathbf{S}_{11} & \mathbf{S}_{12} & \ldots & \mathbf{S}_{1n} \\ \mathbf{S}_{21} & \mathbf{S}_{22} & \ldots & \mathbf{S}_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{S}_{n1} & \mathbf{S}_{n2} & \ldots & \mathbf{S}_{nn} \end{pmatrix}.$$

Ha most képezzük az $Y_j=\operatorname{tr}\mathbf{S}_{jj}\mathbf{\Sigma}_{jj}^{-1}$, $j=1,2,\ldots,n$ valószínűségi változókat, akkor ezek mindegyike νp_j szabadsági fokú χ^2 eloszlású (lásd pl. [7] 35. fejezet, 2. rész). Ezért $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ együttes eloszlása úgy tekinthető, mint egy többdimenziós χ^2 eloszlás, vagy általánosabban (ν és p_j értékeire pozitív valós értékeket is megengedve), mint egy többdimenziós gamma eloszlás. Az együttes karakterisztikus függvény most

$$(1.18)\qquad \varphi(t_1, t_2, \ldots, t_n) = |\mathbf{I}-2i\mathbf{D}(t)\mathbf{\Sigma}|^{-\nu/2}$$

alakú, ahol $\mathbf{I}$ p-dimenziós egységmátrix és $\mathbf{D}(t)=\operatorname{diag}(t_1\mathbf{\Sigma}_{11}^{-1}, \ldots, t_n\mathbf{\Sigma}_{n}^{-1})$, egy „blokkdiagonális" mátrix. Az (1.15) és (1.18) karakterisztikus függvények egybevetéséből látható, hogy a most levezetett többdimenziós eloszlás úgy is tekinthető, mint a KRISHNAIAH és munkatársai [9] által vizsgált többdimenziós gamma eloszlás általánosítása. JENSEN [4] előállította az együttes sűrűségfüggvényt is, amely azonban túl bonyolult ahhoz, hogy gyakorlati számolásokra alkalmas legyen.

A cikkünkben olyan új típusú többdimenziós gamma eloszlásokat definiálunk, amelyek úgy is tekinthetők, mint CHEREIYAN [2], illetve RAMABHADRAN [16] eredményeinek az általánosítása. A célunk az volt, hogy olyan többdimenziós gamma eloszlást állítsunk elő, amely sikerrel illeszthető bármely olyan n-dimenziós statisztikai mintára, amely minden komponense tetszőleges paraméterű gamma eloszlású statisztikai sokaságból vett mintának tekinthető, és amely komponensei között nemnegatív korrelációk állnak fent. Az eddig ismert többdimenziós gamma eloszlások ezt nem teszik lehetővé, hiszen például az (1.3) együttes sűrűségfüggvény esetén az i-edik és a j-edik változó közötti r_{ij} korrelációs együtthatóra az

$$r_{ij} = \Theta_0[(\Theta_0+\Theta_i)(\Theta_0+\Theta_j)]^{-\frac{1}{2}}, \quad i,j = 1, 2, \dots, n$$

összefüggéseknek kell fennállni, az (1.6) karakterisztikus függvény, az (1.13) sűrűségfüggvény, valamint az (1.15) és (1.18) karakterisztikus függvények által definiált többdimenziós gamma eloszlások pedig mind olyanok, hogy az egyváltozós peremeloszlásaik mind azonos paraméterű standard gamma eloszlások. Nem törekedtünk az előállított többdimenziós gamma eloszlás együttes sűrűségfüggvényének vagy eloszlásfüggvényének az explicit kifejezésére, hiszen az eddig ismert többdimenziós gamma sűrűségfüggvények arra engednek következtetni, hogy az a bonyolultsága miatt úgysem lenne alkalmas gyakorlati számolások céljára. Ehelyett leírjuk azokat a szimulációs eljárásokat, amelyek segítségével az eloszlásfüggvény bármely pontbeli értéke kielégítő pontossággal meghatározható. Megjegyezzük, hogy a többdimenziós normális eloszlás eloszlásfüggvény értékeinek a számolása is szimulációs módszereket igényel, holott annak a sűrűségfüggvénye igen egyszerű, explicit alakban áll rendelkezésünkre. A dolgozat 5. szakaszában számítási eredményeket közlünk a bevezetett többdimenziós gamma eloszlás illesztésére és szimulálására.

2. Az új többdimenziós gamma eloszlás értelmezése

Mindenekelőtt megjegyezzük, hogy ha egy η valószínűségi változó sűrűségfüggvénye zéró, ha $x<0$ és

$$\text{(2.1)} \qquad \frac{1}{\Gamma(\vartheta)} x^{\vartheta-1}e^{-x}, \quad \text{ha} \quad x > 0,$$

ahol ϑ pozitív állandó, akkor

$$\text{(2.2)} \qquad E(\eta) = D^2(\eta) = \vartheta.$$

E a várható érték, D pedig a szórás jele. Ismeretes továbbá, hogy ha η_1 és η_2 független valószínűségi változók, külön-külön vett sűrűségfüggvényeik (2.1) típusúak ϑ_1, illetve ϑ_2 paraméterrel, akkor $\eta_1+\eta_2$ sűrűségfüggvénye is (2.1) típusú és paramétere $\vartheta_1+\vartheta_2$.

Az új többdimenziós gamma eloszlás bevezetésének a szükségessége oly módon merül fel, hogy adottak bizonyos $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ valószínűségi változók, melyek külön-külön mind (2.1) típusú gamma eloszlással bírnak, ismert $\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_n$ paraméterekkel, továbbá ismert $\mathbf{C}=(c_{ik})$ kovarianciamátrixszal, meghatározandó egy olyan többméretű eloszlás, mely teljesíti az előbbi feltételeket. A meghatározáson konstrukciót értünk és nem csupán a létezés eldöntését. Az alkalmazási feladatokban az adott eloszlással kapcsolatos számértékek (pl. az eloszlásfüggvény értékei) megközelítése szimulációval történik, ehhez pedig az eloszlás konstruktív előállításának az ismerete is szükséges.

Jelölje $\boldsymbol{\xi}$ a $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ komponensekből álló valószínűségi vektorváltozót. Ha egy $\boldsymbol{\eta}$ valószínűségi vektorváltozó komponensei függetlenek és (2.1) típusú sűrűségfüggvényű gamma eloszlással bírnak, nem feltétlenül egyenlő paraméterekkel, akkor ha az $\mathbf{A}$ mátrix 0, 1 elemekből áll, az

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\eta} \tag{2.3}$$

valószínűségi vektorváltozó komponensei is (2.1) típusú gamma eloszlásúak. Mármost olyan, előbb említett tulajdonságú $\boldsymbol{\eta}$ valószínűségi vektorváltozót és $\mathbf{A}$ mátrixot keresünk, hogy $\mathbf{A}\boldsymbol{\eta}$ komponenseinek eloszlásai rendre megegyezzenek $\boldsymbol{\xi}$ komponenseinek eloszlásaival, továbbá $\mathbf{A}\boldsymbol{\eta}$ kovariancia mátrixa egyenlő legyen $\mathbf{C}$-vel, a $\boldsymbol{\xi}$ valószínűségi vektorváltozó kovarianciamátrixával. Az $\boldsymbol{\eta}$ valószínűségi vektorváltozó keresése természetesen eloszlásban értendő, vagyis, minthogy komponenseinek együttes eloszlását a paramétereik meghatározzák, végeredményben az $E(\boldsymbol{\eta})=\boldsymbol{\vartheta}$ paramétervektort keressük.

Eddig még nem rögzítettük $\boldsymbol{\eta}$ komponenseinek a számát. Nyilvánvaló, hogy a fent leírt követelmények teljesítésére akkor van nagyobb reményünk, ha az $\mathbf{A}$ mátrix a lehető legtöbb oszlopból áll. Minthogy $\mathbf{A}$ minden oszlopa 0, 1 komponensekből alkotott vektor kell hogy legyen, ebből azonnal adódik, hogy a maximális oszlopszám 2^n-1, hiszen az n-méretű, 0, 1 komponensű vektorok száma 2^n, ám a zéró vektort figyelmen kívül lehet hagyni. Pl. az $n=4$ esetben az $\mathbf{A}$ mátrix a következő módon írható fel (az oszlopok sorrendjét önkényesen rögzíthetjük):

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1&0&0&0&1&1&1&0&0&0&1&1&1&0&1\\ 0&1&0&0&1&0&0&1&1&0&1&1&0&1&1\\ 0&0&1&0&0&1&0&1&0&1&1&0&1&1&1\\ 0&0&0&1&0&0&1&0&1&1&0&1&1&1&1 \end{pmatrix}. \tag{2.4}$$

A fentiek alapján az illeszthetőség feltétele az alábbi lineáris feltételrendszerben foglalható össze

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\vartheta}=\boldsymbol{\theta}, \tag{2.5}$$

$$\tilde{\mathbf{A}}\boldsymbol{\vartheta}=\mathbf{c}, \tag{2.6}$$

$$\boldsymbol{\vartheta}\geqq\mathbf{0}, \tag{2.7}$$

ahol $\mathbf{c}$ a $\mathbf{C}$ kovarianciamátrix $c_{11},\dots,c_{nn},c_{12},\dots,c_{1n},c_{23},\dots,c_{2n},\dots,c_{n-1,n}$ elemeiből, mint egymást ebben a sorrendben követő komponensekből alkotott $\frac{1}{2}(n+1)$-méretű vektor, $\tilde{\mathbf{A}}$ egy $\frac{1}{2}(n+1)\times(2^n-1)$ méretű mátrix. Az utóbbi oly módon származik, hogy előbb leírjuk $\mathbf{A}$ sorait, majd az egyes sorok elemenkénti szorzatai révén alkotunk új sorokat; előbb az első sort szorozzuk a másodikkal, ..., n-edikkel, majd a második sort szorozzuk a harmadikkal, ..., n-edikkel, ..., végül az $(n-1)$-edik sort szorozzuk az n-edikkel.

A (2.2) relációra való tekintettel (2.6) első n feltétele azonos a (2.5) feltételrendszerrel, emiatt a továbbiakban csak a (2.6), (2.7) feltételek említésére szorítkozunk. Az $n=4$ esetben a (2.6) feltételrendszer részletes alakja a következő:

$$
(2.8)\quad
\begin{aligned}
&\vartheta_1 + \vartheta_5 + \vartheta_6 + \vartheta_7 + \vartheta_{11} + \vartheta_{12} + \vartheta_{13} + \vartheta_{15} = c_{11}\\
&\vartheta_2 + \vartheta_5 \quad \vartheta_8 + \vartheta_9 + \vartheta_{11} + \vartheta_{12} + \vartheta_{14} + \vartheta_{15} = c_{22}\\
&\vartheta_3 + \vartheta_6 + \vartheta_8 + \vartheta_{10} + \vartheta_{11} + \vartheta_{13} + \vartheta_{14} + \vartheta_{15} = c_{33}\\
&\vartheta_4 + \vartheta_7 + \vartheta_9 + \vartheta_{10} + \vartheta_{12} + \vartheta_{13} + \vartheta_{14} + \vartheta_{15} = c_{44}\\
&\vartheta_5 + \vartheta_{11} + \vartheta_{12} + \vartheta_{15} = c_{12}\\
&\vartheta_6 + \vartheta_{11} + \vartheta_{13} + \vartheta_{15} = c_{13}\\
&\vartheta_7 + \vartheta_{12} + \vartheta_{13} + \vartheta_{15} = c_{13}\\
&\vartheta_8 + \vartheta_{11} + \vartheta_{14} + \vartheta_{15} = c_{23}\\
&\vartheta_9 + \vartheta_{12} + \vartheta_{14} + \vartheta_{15} = c_{24}\\
&\vartheta_{10} + \vartheta_{13} + \vartheta_{14} + \vartheta_{15} = c_{34}
\end{aligned}
$$

Jóllehet elsősorban közelítő eloszlás keresését tűztük célul magunk elé, ettől el is vonatkoztathatunk és a $\boldsymbol{\xi}=\mathbf{A}\boldsymbol{\eta}$ valószínűségi vektorváltozó eloszlását új többdimenziós gamma eloszlásnak tekinthetjük.

Az illeszthetőség (2.6) feltételéhez a következő megjegyzéseket fűzzük.

1. *Megjegyzés.* Bár az $\mathbf{A}\boldsymbol{\eta}$ kifejezésben 2^n-1 számú η valószínűségi változót szerepeltetünk, a konkrét alkalmazás során sohasem kell $\frac{1}{2}n(n+1)$-nél több valószínűségi változót használnunk. Ez az észrevétel igen lényeges az illesztés gyakorlati használhatóságát illetően, hiszen 2^n-1 lényegesen gyorsabban nő n növekedtével, mint $\frac{1}{2}n(n+1)$. Az állítás közvetlenül adódik abból a tényből, hogy a (2.6) egyenletrendszerben szereplő $\tilde{\mathbf{A}}$ mátrix rangja mindig kisebb vagy egyenlő mint $\frac{1}{2}n(n+1)$, pontosabban, egyenlő a $\mathbf{C}$ kovarianciamátrix felső háromszög részében található nem nulla elemek számával, és a lineáris programozás elméletéből ismert (lásd [15]), hogy ha létezik a (2.6) egyenletrendszernek nemnegatív $\boldsymbol{\vartheta}$ megoldásvektora, akkor mindig létezik legalább egy olyan megoldásvektor is, amelyben a nem nulla komponensek száma kisebb vagy egyenlő, mint az $\tilde{\mathbf{A}}$ mátrix rangja. Az a tény, hogy több $\boldsymbol{\vartheta}$ megoldásvektor is létezhet, összhangban van KRISHNAIAH és RAO [10] azon észrevételével, hogy ellentétben a többdimenziós normális eloszlással, a többdimenziós gamma eloszlást nem határozzák meg egyértelműen az egyváltozós peremeloszlásainak a paraméterei és a kovarianciamátrixa.

2. *Megjegyzés.* Nem minden nemnegatív elemű, pozitív definit $\mathbf{C}$ mátrixhoz találhatók olyan $\vartheta_i \geqq 0$ valós számok, hogy a (2.6) egyenlőségek teljesülnek. Ennek igazolására egyszerű példát mutatunk az 5. szakaszban. Sejteni lehet azonban, hogy minél nagyobb a dimenziószám, pontosabban, minél több a $\mathbf{C}$ kovarianciamátrix nemzéró elemeinek a száma, annál valószínűbb, hogy létezik a (2.6) egyenlet-

rendszernek nemnegatív komponensekből álló $\boldsymbol{\vartheta}$ megoldásvektora. (Ekkor ugyanis az egyenletrendszer változóinak a száma lényegesen gyorsabban nő, mint a sorainak a száma.) Az 5. szakaszban mutatunk példát ennek a sejtésnek az alátámasztására, nevezetesen megadunk egy olyan négydimenziós kovarianciamátrixot, melynek esetében nincs (2.6)-ot teljesítő $\boldsymbol{\vartheta}$, mégis a nemzéró elemek számát növelve, már létezik nemnegatív megoldása a (2.6) egyenletrendszernek. Megjegyezzük, hogy a kovarianciamátrix nemzéró elemeinek a számát csupán a dimenziószám növelésével gyarapítva, ez az eredmény nem mindig érhető el, hiszen az illeszthetőség egy nyilvánvaló szükséges feltétele, hogy a valószínűségi változók bármely részhalmazához illeszthető legyen ilyen típusú többdimenziós gamma eloszlás.

3. *Megjegyzés.* Hasonló módon értelmezhető új többdimenziós *Poisson-eloszlás* és további többdimenziós eloszlás is, csupán arra van szükségünk, hogy $\boldsymbol{\eta}$ komponensei függetlenek legyenek és minden η_i esetén fennálljon az $E(\eta_i)=D^2(\eta_i)$ egyenlőség.

3. A többdimenziós gamma eloszlás illesztése

A bevezetett többdimenziós gamma eloszlás illesztésének a problémája csupán a ϑ_i paramétereknek a meghatározását jelenti, $i=1, 2, \dots 2^n-1$. Ezeket a paraméter értékeket pedig úgy kell megválasztani, hogy azok eleget tegyenek a (2.6), (2.7) feltételeknek. Erre egy alkalmas algoritmus a lineáris programozás szimplex algoritmusának az első fázisa. Ez biztosítja, hogy az előállításban nem fog $\frac{1}{2}n(n+1)$-nél több η valószínűségi változó szerepelni (nem lesz $\frac{1}{2}n(n+1)$-nél több nullától különböző ϑ_i paraméter érték), és ugyanakkor véges sok lépésben azt is kimutatja, hogy egyáltalán illeszthető-e pontosan az adott n-dimenziós statisztikai sokasághoz ilyen típusú többdimenziós gamma eloszlás. Tekintettel az előző szakasz 2. megjegyzésére, a szimplex algoritmus első fázisát célszerű kisebb módosítással úgy végrehajtani, hogy közben a (2.6)-beli egyenlőségektől való eltérések abszolút értékeinek (vagy négyzeteinek) az összegét minimalizáljuk, vagy esetleg úgy, hogy a legnagyobb abszolút értékű eltérést minimalizáljuk. Ekkor, ha a megoldó algoritmus végén az tűnne ki, hogy nem lehet az adott n-dimenziós statisztikai sokasághoz pontosan illeszteni ilyen típusú többdimenziós gamma eloszlást, akkor is állíthatjuk, hogy a nyert többdimenziós gamma eloszlás bizonyos értelemben a lehető legközelebb van $\boldsymbol{\xi}$ eloszlásához, és sok esetben ez a közelítés a gyakorlatban még megengedhető. A továbbiakban vázlatosan ismertetjük a fent említett háromféle közelítés megoldási módját.

Az eltérések abszolút értékei összegének a minimalizálása

Vezessük be a (2.6) egyenlőségekhez az $u_i \geqq 0$ és a $v_i \geqq 0$, $i=1, 2, \dots, \frac{1}{2}n(n+1)$ mesterséges változókat a következőképpen:

$$\mathbf{I}\mathbf{u}-\mathbf{I}\mathbf{v}+\tilde{\mathbf{A}}\boldsymbol{\vartheta} = \mathbf{c},$$

ahol $\mathbf{I}$ az $\frac{1}{2}n(n+1)$-dimenziós egységmátrix, $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ pedig a mesterséges változókból alkotott $\frac{1}{2}n(n+1)$-dimenziós vektorok. Ha ezek után megoldjuk az

$$\mathbf{I}\mathbf{u}-\mathbf{I}\mathbf{v}+\tilde{\mathbf{A}}\boldsymbol{\vartheta} = \mathbf{c},$$

$$\mathbf{u} \geqq \mathbf{0}, \mathbf{v} \geqq \mathbf{0}, \boldsymbol{\vartheta} \geqq \mathbf{0}, \tag{3.1}$$

$$\min\left(\sum_{i=1}^{\frac{1}{2}n(n+1)} u_i + \sum_{i=1}^{\frac{1}{2}n(n+1)} v_i\right)$$

lineáris programozási feladatot, akkor abban az esetben, ha a minimum érték nullával egyenlő, a (2.6) egyenlőségekre pontos nemnegatív $\boldsymbol{\vartheta}$ megoldásvektort nyerünk, ha pedig a minimum érték pozitív, akkor olyan nemnegatív $\boldsymbol{\vartheta}$ megoldásvektort nyerünk, melynek esetében a (2.6) egyenlőségekben az eltérések abszolút értékeinek az összege minimális. Megjegyezzük, hogy mivel a $\mathbf{c}$ jobboldali vektor komponensei mind nemnegatívak, megengedett indulóbázisként használhatjuk az u_i, $i=1, 2, \ldots,$ $\ldots, \frac{1}{2}n(n+1)$ mesterséges változók oszlopvektoraiból alkotott egységmátrixot.

Kis módosítással olyan algoritmust is meg tudunk adni, mely minden esetben biztosítja azt, hogy a (2.6) egyenlőségek közül az első n számú valóban egyenlőséggel teljesüljön és emellett a további egyenlőségektől való eltérések abszolút értékeinek az összege minimális legyen. Ez a közelítés a gyakorlatban azért érdekes, mert az első n egyenlőség fennállása a peremeloszlások pontos illeszkedését biztosítja, ami fontosabb lehet, mint a kovarianciák pontos illeszkedése. Ez úgy érhető el, hogy a (3.1) lineáris programozási feladatban elhagyjuk az $u_1, u_2, \ldots, u_n$ és $v_1, v_2, \ldots, v_n$ mesterséges változókat, és az ezáltal a megengedett indulóbázisunkból elhagyott egységvektorokat az $\tilde{\mathbf{A}}$ mátrixban mindig meglevő, velük azonos vektorokkal pótoljuk. Eszerint eljárva, $n=3$ esetén a megoldandó lineáris programozási feladat a következő:

$$\begin{array}{rrrrrrrrrl}
 & & & & & & \vartheta_4+\vartheta_5+\vartheta_6+\vartheta_7 &=& c_{11}\\
 & & & & \vartheta_2+\vartheta_3 & & +\vartheta_6+\vartheta_7 &=& c_{22}\\
 & & & \vartheta_1 & +\vartheta_3 & +\vartheta_5 & +\vartheta_7 &=& c_{33}\\
u_4 & & -v_4 & & & & +\vartheta_6+\vartheta_7 &=& c_{12}\\
 & u_5 & -v_5 & & & +\vartheta_5 & +\vartheta_7 &=& c_{13}\\
 & u_6 & -v_6 & & +\vartheta_3 & & +\vartheta_7 &=& c_{23}
\end{array}$$

$$u_4 \geqq 0, u_5 \geqq 0, u_6 \geqq 0, v_4 \geqq 0, v_5 \geqq 0, v_6 \geqq 0, \vartheta_1 \geqq 0, \vartheta_2 \geqq 0, \vartheta_3 \geqq 0, \vartheta_4 = 0, \vartheta_5 \geqq 0,$$

$$\vartheta_6 \geqq 0, \vartheta_7 \geqq 0$$

$$\min(u_4+u_5+u_6+v_4+v_5+v_6),$$

és megengedett indulóbázisként a $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_4, u_4, u_5$ és u_6 változókhoz tartozó egységvektorokból képezett egységmátrixot használhatjuk.

Az eltérések négyzetösszegének a minimalizálása

A (2.6) egyenlőségekhez most csak az u_i, $i=1, 2, \ldots, \frac{1}{2}n(n+1)$ mesterséges változókat kell bevezetni, amelyekről nem tételezzük fel a nemnegativitást, azaz amelyek tetszőleges valós értékeket felvehetnek. A megoldandó feladat most egy igen egyszerű szerkezetű kvadratikus programozási feladat lesz:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{Iu} + \tilde{\mathbf{A}}\boldsymbol{\vartheta} &= \mathbf{c}, \\
\boldsymbol{\vartheta} &\geqq \mathbf{0}, \\
\min \sum_{i=1}^{\frac{1}{2}n(n+1)} u_i^2&,
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

ahol $\mathbf{I}$ ismét az $\frac{1}{2}n(n+1)$-dimenziós egységmátrix, $\mathbf{u}$ pedig a mesterséges változókból képezett $\frac{1}{2}n(n+1)$-dimenziós vektor. Ez a feladat is megoldható a szimplex algoritmus egy alkalmasan módosított első fázisának a segítségével. WOLFE [18] módszerét követve, az

$$
\begin{aligned}
\mathbf{Iu} + \tilde{\mathbf{A}}\boldsymbol{\vartheta} \qquad\qquad &= \mathbf{c} \\
-2\mathbf{Iu} \qquad -\mathbf{I}\boldsymbol{\lambda} \quad &= \mathbf{0} \\
-\tilde{\mathbf{A}}'\boldsymbol{\lambda} + \mathbf{Iv} &= \mathbf{0},
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

illetve a vele ekvivalens

$$
\begin{aligned}
\mathbf{Iu} + \tilde{\mathbf{A}}\boldsymbol{\vartheta} \qquad &= \mathbf{c} \\
2\tilde{\mathbf{A}}'\mathbf{u} \qquad + \mathbf{Iv} &= \mathbf{0}
\end{aligned}
\tag{3.3a}
$$

egyenlőségrendszer tetszőleges $\mathbf{u}$, $\boldsymbol{\vartheta} \geqq \mathbf{0}$ és $\mathbf{v} \geqq \mathbf{0}$ megoldását kellene meghatározni a pótlólagos $\mathbf{v}'\boldsymbol{\vartheta}=0$ ortogonalitási feltétel egyidejű figyelembevételével, ahol $\boldsymbol{\lambda}'=(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{\frac{1}{2}n(n+1)})$ és $\mathbf{v}'=(v_1, \ldots, v_{2^n-1})$ segédváltozók. WOLFE közölte a szimplex algoritmus első fázisának azt a módosítását, amellyel az ortogonalitási feltételt is könnyen figyelembe lehet venni, ezt az algoritmust azonban a mi feladatunkra nem lenne célszerű alkalmazni, tekintettel arra, hogy a (3.3a) egyenlőségrendszerben mind a sorok száma $\left(\frac{1}{2}n(n+1)+2^n-1\right)$, mind az oszlopok száma $\left(\frac{1}{2}n(n+1)+2(2^n-1)\right)$ igen gyorsan nő n növekedtével. Bizonyára lehetne találni a (3.2) kvadratikus programozási feladat megoldására más, sokkal könnyebben végrehajtható nemlineáris programozási eljárást, azonban nem valószínű, hogy az lényegesen gyorsabb lenne a (3.1) lineáris programozási feladat megoldásánál. Ezért a bevezetett többdimenziós gamma eloszlás illesztését a statisztikában gyakrabban alkalmazott „legkisebb négyzetek” közelítés helyett most célszerűbb a „legkisebb abszolút eltérések” közelítéssel elvégezni.

A maximális abszolút eltérés minimalizálása

A (2.6) egyenlőségekhez most először csak egyetlen $y \geqq 0$ változót vezessünk be úgy, hogy mindegyik egyenlőségtől való eltérés abszolút értékére írjuk elő, hogy az ennél az y változónál csak kisebb, vagy egyenlő értékű lehessen:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}}\boldsymbol{\vartheta} - \mathbf{c} &\leqq \mathbf{l}y \\ -\tilde{\mathbf{A}}\boldsymbol{\vartheta} + \mathbf{c} &\leqq \mathbf{l}y, \end{aligned} \tag{3.4}$$

ahol $\mathbf{l}' = (1, 1, \ldots, 1)$, egy csupa egyesekből álló, $\frac{1}{2}n(n+1)$-dimenziós vektor. Az egyenlőtlenségek eltüntetésére további $n(n+1)$ számú u_i, $i = 1, 2, \ldots, \frac{1}{2}n(n+1)$ és v_i, $i = 1, 2, \ldots, \frac{1}{2}n(n+1)$ nemnegatív segédváltozókat bevezetve nyerjük a következő ekvivalens feltételrendszert:

$$\begin{aligned} \mathbf{Iu} + \tilde{\mathbf{A}}\boldsymbol{\vartheta} - \mathbf{l}y &= \mathbf{c} \\ \mathbf{Iv} - \tilde{\mathbf{A}}\boldsymbol{\vartheta} - \mathbf{l}y &= -\mathbf{c}. \end{aligned} \tag{3.4a}$$

Ha ezek után a nemnegativitási feltételeknek és a (3.4a) feltételeknek eleget tevő $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\vartheta}, y$ változó értékekre az y értékét minimalizáljuk, azaz az

$$\begin{gathered} \mathbf{Iu} \quad + \tilde{\mathbf{A}}\boldsymbol{\vartheta} - \mathbf{l}y = \mathbf{c} \\ \mathbf{Iv} - \tilde{\mathbf{A}}\boldsymbol{\vartheta} - \mathbf{l}y = -\mathbf{c} \\ \mathbf{u} \geqq 0, \mathbf{v} \geqq 0, \boldsymbol{\vartheta} \geqq 0, y \geqq 0 \\ \min y \end{gathered} \tag{3.5}$$

lineáris programozási feladatot megoldjuk, akkor könnyen belátható, hogy olyan $\boldsymbol{\vartheta}$ megoldásvektort nyerünk, amelyre a (2.6) egyenlőségektől való eltérések közül a legnagyobb abszolút értékű eltérés is a lehető legkisebb. A (3.5) lineáris programozási feladatban a feltételi sorok száma duplázódott csak meg a (3.1) feladathoz képest és egyetlen újabb változót kellett bevezetni, így ez a feladat is viszonylag egyszerűen megoldható. Megjegyezzük, hogy bár az u_i és a v_i változókhoz tartozó egységvektorokból alkotott egységmátrix most nem szolgáltat triviális megengedett indulóbázist, tulajdonképpen most is elegendő a szimplex algoritmusnak csak az egyik fázisát végrehajtani. Ha ugyanis az y változóhoz tartozó, csupa mínusz egyesekből álló oszlopvektorral helyettesítjük az egységmátrix azon oszlopát, amely a legnegatívabb $-c_i$ jobb oldali értékeknek megfelelő v_i változóhoz tartozik, akkor az így keletkező mátrix már megengedett indulóbázisa lesz a (3.5) lineáris programozási feladatnak.

Mind a (3.1), mind a (3.5) lineáris programozási feladatot a módosított szimplex algoritmussal célszerű megoldani, amely megoldás során a feladat együttható mátrixát nem tároljuk, hanem annak egyes oszlopait szükség szerint generáljuk. Az oszlopok generálása az $\tilde{\mathbf{A}}$ mátrix speciális alakja miatt igen hatékonyan hajtható végre, ezért megvan a reális lehetősége annak, hogy 10—15 (esetleg 20) dimenziós gamma eloszlások illesztését is el lehessen végezni.

Az eddigiek során mindig csak olyan többdimenziós gamma eloszlás illesztéséről beszéltünk, melynek egyváltozós peremeloszlásai standard gamma eloszlások. Ha azonban figyelembe vesszük, hogy egy általános $\lambda > 0$ és $\vartheta > 0$ paraméterű gamma eloszlású valószínűségi változó λ-szorosa $\vartheta > 0$ paraméterű standard gamma eloszlású, továbbá, hogy tetszőleges $\lambda_i > 0$, $\lambda_j > 0$ esetén

$$\operatorname{cov}(\lambda_i \xi_i, \lambda_j \xi_j) = \lambda_i \lambda_j \operatorname{cov}(\xi_i, \xi_j), \tag{3.6}$$

akkor ha a standard gamma peremeloszlású többdimenziós gamma eloszlás illesztését a (3.6) szerint módosított kovariancia értékekre végezzük el, az így kapott valószínűségi változók $\frac{1}{\lambda_i}$-szorosai, $i=1, 2, \dots, n$, már a kívánt eloszlásúak lesznek.

4. Feltételes eloszlások

Ebben a szakaszban azzal a kérdéssel foglalkozunk, hogy a $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{A}\boldsymbol{\eta}$ valószínűségi vektorváltozó komponenseinek hogyan alakul az együttes eloszlása egy adott komponens értékének rögzített számként való feltételezése mellett. Rögzítsük mondjuk ζ_1 értékét. Vezessük be az $r = \frac{1}{2}n(n+1)$ jelölést. Állapodjunk meg továbbá abban, hogy a $\zeta_2, \dots, \zeta_r$ valószínűségi változókban foglalt, és ζ_1-gyel közös $\boldsymbol{\eta}$-beli komponensek összegeit rendre

$$\zeta_2^{(1)}, \dots, \zeta_r^{(1)}$$

jelölik. Végül legyenek

$$\zeta_2^{(2)} = \zeta_2 - \zeta_1^{(2)}, \dots, \zeta_r^{(1)} = \zeta_r - \zeta_r^{(1)}.$$

Ismeretes, hogy a

$$\frac{\zeta_2^{(1)}}{\zeta_1}, \dots, \frac{\zeta_r^{(1)}}{\zeta_1} \tag{4.1}$$

valószínűségi változók külön-külön béta eloszlásúak, $\frac{\zeta_i^{(1)}}{\zeta_1}$ paraméterei $E(\zeta_i^{(1)})$, $E(\zeta_i^{(2)})$, továbbá, hogy ezek függetlenek ζ_1-től. A (4.1) hányadosok ugyanis olyan valószínűségi változók részletösszegei, melyek maguk is hányadosok, közös, ζ_1 nevezővel és egy-egy olyan $\boldsymbol{\eta}$-komponenssel, mint számlálóval, mely ζ_1 előállításában szerepel; ez utóbbiak ζ_1-től való függetlensége közismert.

Tekintsük ezek után a $\zeta_2, \dots, \zeta_r$ valószínűségi változók feltételes eloszlásfüggvényét a $\zeta_1 = z_1$ feltétel mellett. Azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} & P(\zeta_2 < z_2, \dots, \zeta_r < z_r \mid \zeta_1 = z_1) = \\ & = P(\zeta_2^{(1)} + \zeta_2^{(2)} < z_2, \dots, \zeta_r^{(1)} + \zeta_r^{(2)} < z_r \mid \zeta_1 = z_1) = \\ & = P\left(z_1 \frac{\zeta_2^{(1)}}{\zeta_1} + \zeta_2^{(2)} < z_2, \dots, z_1 \frac{\zeta_r^{(1)}}{\zeta_1} + \zeta_r^{(2)} < z_r \mid \zeta_1 = z_1\right) = \\ & = P\left(z_1 \frac{\zeta_2^{(1)}}{\zeta_1} + \zeta_2^{(2)} < z_2, \dots, z_1 \frac{\zeta_r^{(1)}}{\zeta_1} + \zeta_r^{(2)} < z_r\right). \end{aligned} \tag{4.2}$$

Eszerint a feltételes eloszlás azonos a

$$z_1\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma} \tag{4.3}$$

valószínűségi vektorváltozó eloszlásával, ahol $\boldsymbol{\beta}$ a (4.1) komponensekkel bíró, $\boldsymbol{\gamma}$ pedig a $\zeta_2^{(2)}, \dots, \zeta_r^{(2)}$ komponensekkel bíró, $r-1$ méretű valószínűségi vektorváltozó, és $\boldsymbol{\beta}$ és $\boldsymbol{\gamma}$ függetlenek. $\boldsymbol{\gamma}$ eloszlása az e dolgozatban bevezetett többméretű gamma eloszlás, $\boldsymbol{\beta}$ komponensei pedig hasonló módon épülnek fel egy *Dirichlet-eloszlású* valószínűségi vektorváltozó komponenseiből. A *Dirichlet-eloszlású* valószínűségi vektorváltozó komponensei béta eloszlásúak, erre való tekintettel $\boldsymbol{\beta}$ eloszlását speciális többdimenziós béta eloszlásnak tekintjük.

A (4.3) valószínűségi vektorváltozó várható értéke a z_1 változó lineáris függvénye. Ebből következik, hogy tetszőleges ζ_i $(i\neq 1)$ valószínűségi változó ζ_1-re vonatkozó, és általában ζ_j-re vonatkozó $(i\neq j)$ regressziója lineáris.

Érdemes felhívni a figyelmet arra, hogy az új gamma együttes eloszlással bíró $\boldsymbol{\xi}$ valószínűségi vektorváltozó komponensei akkor és csak akkor függetlenek, ha korrelálatlanok.

5. Számítási eredmények

A dolgozatban ismertetett többdimenziós gamma eloszlást első ízben a Tisza Tokajnál mért havi vízhozam adataira illesztettük. Mivel csak a vízben szegény hónapokra korlátoztuk a vizsgálatainkat, hat darab $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_6$ valószínűségi változónk volt, amelyek rendre az április, május, ..., szeptember havi vízhozam mennyiségeknek feleltek meg, millió köbméter mértékegységben. Mindegyik valószínűségi változóra 60 megfigyeléssel rendelkeztünk, amelyeket az 1901 és 1960 között mért vízállásadatokból határoztak meg hidrológiai számításokkal. A változók empirikus várható értékei

$$\bar{x}_1 = 2337{,}21, \quad \bar{x}_2 = 1725{,}96, \quad \bar{x}_3 = 1095{,}64,$$

$$\bar{x}_4 = 985{,}96, \quad \bar{x}_5 = 734{,}24, \quad \bar{x}_6 = 728{,}44,$$

empirikus szórásai pedig

$$s_1 = 1110{,}72, \quad s_2 = 958{,}27, \quad s_3 = 522{,}99,$$

$$s_4 = 696{,}68, \quad s_5 = 553{,}40, \quad s_6 = 768{,}59.$$

Az empirikus korreláció mátrix a következő

$$\hat{\mathbf{R}} = \begin{pmatrix} 1{,}000 & 0{,}646 & 0{,}317 & 0{,}000 & 0{,}070 & 0{,}174 \\ 0{,}646 & 1{,}000 & 0{,}532 & 0{,}229 & 0{,}201 & 0{,}139 \\ 0{,}317 & 0{,}532 & 1{,}000 & 0{,}437 & 0{,}284 & 0{,}334 \\ 0{,}000 & 0{,}229 & 0{,}437 & 1{,}000 & 0{,}746 & 0{,}274 \\ 0{,}070 & 0{,}201 & 0{,}284 & 0{,}746 & 1{,}000 & 0{,}382 \\ 0{,}174 & 0{,}139 & 0{,}334 & 0{,}274 & 0{,}382 & 1{,}000 \end{pmatrix}.$$

Az egyváltozós peremeloszlásokhoz illesztett gamma eloszlásokra a paraméterértékeket és az illeszkedés jóságára jellemző χ^2-értékeket, szabadsági fokokat és valószínűség értékeket a következő táblázatban foglaljuk össze:

	λ	ϑ	χ^2	f	P
április	0,0018945	4,4277	1,4819	3	68,65%
május	0,0018796	3,2441	3,8552	3	27,75%
junius	0,0040057	4,3888	1,9108	3	59,11%
július	0.0020314	2.0029	2,3391	3	50,51%
augusztus	0,0023975	1,7603	3,2591	2	19,70%
szeptember	0,0012331	0,8983	1,1012	2	57,66%

A fenti táblázatban a P érték annak a valószínűségét adja meg százalékos alakban, hogy egy f szabadsági fokú χ^2-eloszlású valószínűségi változó a fenti táblázat megfelelő χ^2-értékénél nagyobb értéket vegyen fel. Ha az utolsó oszlopban álló számok $5^0/_0$-nál nagyobbak, akkor $95^0/_0$-os minősítési szint esetén elfogadjuk a hipotézist- A mi táblázatunkban az utolsó oszlopban $5^0/_0$-nál lényegesen nagyobb számok állnak, tehát az illeszkedés igen jónak mondható. A többdimenziós gamma eloszlás illesztése pontosnak bizonyult. Eredményként azt kaptuk, hogy

$$\zeta_1 = \frac{1}{0{,}0018945}(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +\eta_{14}+{}_{15}+\eta_{16}+\eta_{17}+\eta_{18}+\eta_{19}+\eta_{20})$$

$$\zeta_2 = \frac{1}{0{,}0018796}(\qquad\qquad\qquad \eta_7+\eta_8+\eta_9+\eta_{10}+\eta_{11}+\eta_{12}+\eta_{13} \qquad\qquad \eta_{17}+\eta_{18}+{}_{19}+\eta_{20})$$

$$\zeta_3 = \frac{1}{0{,}0040057}(\qquad \eta_3+\eta_4+\eta_5+\eta_6 \qquad +\eta_9+\eta_{10}+\eta_{11}+\eta_{12}+\eta_{13} \qquad +\eta_{16} \qquad\qquad +\eta_{20})$$

$$\zeta_4 = \frac{1}{0{,}0020314}(\quad \eta_2 \quad +\eta_4+\eta_5+\eta_6 \quad +\eta_8 \qquad +\eta_{11}+\eta_{12}+\eta_{13} \qquad\qquad\qquad\qquad)$$

$$\zeta_5 = \frac{1}{0{,}0023975}(\eta_1+\eta_2 \qquad +\eta_5+\eta_6+\eta_7+\eta_8 \quad +\eta_{10} \quad +\eta_{12}+\eta_{13} \qquad\qquad \eta_{18}+\eta_{19} \quad)$$

$$\zeta_6 = \frac{1}{0{,}0012331}(\eta_1 \qquad\qquad +\eta_6 \qquad +\eta_9 \qquad\qquad +\eta_{13} \quad +\eta_{15}+\eta_{16} \qquad +\eta_{19} \quad)$$

ahol az η_i, $i=1, 2, \ldots, 20$ standard gamma eloszlású valószínűségi változók paraméterei rendre

$$\vartheta_1 = 0{,}06794, \quad \vartheta_2 = 0{,}70346, \quad \vartheta_3 = 1{,}498655, \quad \vartheta_4 = 0{,}20576,$$

$$\vartheta_5 = 0{,}21985, \quad \vartheta_6 = 0{,}28987, \quad \vartheta_7 = 0{,}00285, \quad \vartheta_8 = 0{,}00309,$$

$$\vartheta_9 = 0{,}11489, \quad \vartheta_{10} = 0{,}09458, \quad \vartheta_{11} = 0{,}39688, \quad \vartheta_{12} = 0{,}10628,$$

$$\vartheta_{13} = 0{,}07771, \quad \vartheta_{14} = 1{,}67685, \quad \vartheta_{15} = 0{,}12304, \quad \vartheta_{16} = 0{,}17998,$$

$$\vartheta_{17} = 1{,}03670, \quad \vartheta_{18} = 0{,}14979, \quad \vartheta_{19} = 0{,}04488, \quad \vartheta_{20} = 1{,}21645.$$

Tekintsük most csak a június, július, augusztus és szeptember havi vízhozam adatokat (azaz a ζ_3, ζ_4, ζ_5, ζ_6 valószínűségi változókat) és tegyük fel, hogy az egymással nem szomszédos hónapoknak megfelelő valószínűségi változók már függetleneknek tekinthetők. Ekkor a korrelációs mátrix a következőképpen módosul:

$$\hat{\mathbf{R}} = \begin{pmatrix} 1{,}000 & 0{,}437 & 0{,}000 & 0{,}000 \\ 0{,}437 & 1{,}000 & 0{,}746 & 0{,}000 \\ 0{,}000 & 0{,}746 & 1{,}000 & 0{,}382 \\ 0{,}000 & 0{,}000 & 0{,}382 & 1{,}000 \end{pmatrix}.$$

(Mivel az $\hat{\mathbf{R}}$ mátrix aldeterminánsainak a sorozatára $\Delta_1=1{,}000>0$, $\Delta_2=0{,}809>0$, $\Delta_3=0{,}253>0$ és $\Delta_4=0{,}134>0$, $\hat{\mathbf{R}}$ is pozitív definit.) A megfelelő kovarianciamátrix a következő:

$$\hat{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} 4{,}398 & 1{,}296 & 0{,}000 & 0{,}000 \\ 1{,}296 & 2{,}003 & 1{,}401 & 0{,}000 \\ 0{,}000 & 1{,}401 & 1{,}760 & 0{,}480 \\ 0{,}000 & 0{,}000 & 0{,}480 & 0{,}898 \end{pmatrix}.$$

A (2.6) egyenletrendszer most a következő alakú:

$$\begin{aligned}
4{,}389 &= \vartheta_1 + \vartheta_5 + \vartheta_6 + \vartheta_7 + \vartheta_{11} + \vartheta_{12} + \vartheta_{13} + \vartheta_{15} \\
2{,}003 &= \vartheta_2 + \vartheta_5 + \vartheta_8 + \vartheta_9 + \vartheta_{11} + \vartheta_{12} + \vartheta_{14} + \vartheta_{15} \\
1{,}760 &= \vartheta_3 + \vartheta_6 + \vartheta_8 + \vartheta_{10} + \vartheta_{11} + \vartheta_{13} + \vartheta_{14} + \vartheta_{15} \\
0{,}898 &= \vartheta_4 + \vartheta_7 + \vartheta_9 + \vartheta_{10} + \vartheta_{12} + \vartheta_{13} + \vartheta_{14} + \vartheta_{15} \\
1{,}296 &= \vartheta_5 + \vartheta_{11} + \vartheta_{12} + \vartheta_{15} \\
0{,}000 &= \vartheta_6 + \vartheta_{11} + \vartheta_{13} + \vartheta_{15} \\
0{,}000 &= \vartheta_7 + \vartheta_{12} + \vartheta_{13} + \vartheta_{15} \\
1{,}401 &= \vartheta_8 + \vartheta_{11} + \vartheta_{14} + \vartheta_{15} \\
0{,}000 &= \vartheta_9 + \vartheta_{12} + \vartheta_{14} + \vartheta_{15} \\
0{,}480 &= \vartheta_{10} + \vartheta_{13} + \vartheta_{14} + \vartheta_{15}
\end{aligned}$$

Mivel a $\vartheta_i \geqq 0$, $i=1, 2, \ldots, 15$ megoldásokat keressük, látható, hogy csak $\vartheta_6=\vartheta_7=$ $=\vartheta_9=\vartheta_{11}=\vartheta_{12}=\vartheta_{13}=\vartheta_{14}=\vartheta_{15}=0$ lehetséges és így ezek a változók, valamint a hatodik, hetedik és a kilencedik egyenlet elhagyható az egyenletrendszerből. A megmaradó 7 egyenletből és 7 változóból álló egyenletrendszer egyetlen megoldása pedig $\vartheta_1=3{,}089$; $\vartheta_2=-0{,}697$; $\vartheta_3=-0{,}120$; $\vartheta_4=0{,}418$; $\vartheta_5=1{,}296$; $\vartheta_8=1{,}401$; $\vartheta_{10}=0{,}480$. Minthogy $\vartheta_2<0$ és $\vartheta_3<0$, a $\xi_3, \xi_4, \xi_5, \xi_6$ valószínűségi változók esetében nem illeszthető pontosan az új többdimenziós gamma eloszlás. Természetesen ebben az esetben is kereshető a teljes egyenletrendszer egy olyan $\vartheta_i \geqq 0$, $i=1, 2, \ldots, 15$ megoldása, melyre például az egyenlőségektől való eltérések abszolút értékeinek az összege minimális. Megoldásként azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\vartheta_1 &= 3{,}092, & \vartheta_2 &= 0{,}000, & \vartheta_3 &= 0{,}573, & \vartheta_4 &= 0{,}418, \\
\vartheta_5 &= 1{,}296, & \vartheta_6 &= 0{,}000, & \vartheta_7 &= 0{,}000, & \vartheta_8 &= 0{,}707, \\
\vartheta_9 &= 0{,}000, & \vartheta_{10} &= 0{,}480, & \vartheta_{11} &= 0{,}000, & \vartheta_{12} &= 0{,}000, \\
\vartheta_{13} &= 0{,}000, & \vartheta_{14} &= 0{,}000, & \vartheta_{15} &= 0{,}000.
\end{aligned}$$

Az így nyerhető

$$\zeta_3 = \frac{1}{0{,}0040057}(\eta_1 + \eta_5)$$

$$\zeta_4 = \frac{1}{0{,}0020314}(\eta_5 + \eta_8)$$

$$\zeta_5 = \frac{1}{0{,}0023975}(\eta_3 + \eta_8 + \eta_{10})$$

$$\zeta_6 = \frac{1}{0{,}0012331}(\eta_4 + \eta_{10})$$

valószínűségi változók együttes eloszlása — ahol $\eta_1, \eta_3, \eta_4, \eta_5, \eta_8$ és η_{10} rendre 3,092; 0,573; 0,418; 1,296; 0,707 és 0,480 paraméterű standard gamma eloszlású — olyan többdimenziós gamma eloszlás, melynek egyváltozós peremeloszlásai és egy kivételével korrelációs együtthatói is a kívánalomnak megfelelőek. Ez ζ_2 és ζ_3 korrelációs együtthatója, melyre 0,746 helyett 0,377 adódik.

Tekintsük ismét csak a június, július, augusztus és szeptember havi vízhozam adatokat, de csak annyit tegyünk fel, hogy a júniusnak és a szeptembernek megfelelő valószínűségi változók már függetleneknek tekinthetők. Korrelációs mátrixként fogadjuk el az alábbi mátrixot:

$$\hat{\mathbf{R}} = \begin{pmatrix} 1{,}000 & 0{,}437 & 0{,}284 & 0{,}000 \\ 0{,}437 & 1{,}000 & 0{,}746 & 0{,}274 \\ 0{,}284 & 0{,}746 & 1{,}000 & 0{,}382 \\ 0{,}000 & 0{,}274 & 0{,}382 & 1{,}000 \end{pmatrix}$$

A megfelelő (2.6) egyenletrendszerben az egyenletek száma 9, a változók száma pedig 14. Az egyenletrendszert megoldva a

$$\zeta_3 = \frac{1}{0{,}0040057}(\eta_1 + \eta_5 + \eta_{11})$$

$$\zeta_4 = \frac{1}{0{,}0020314}(\eta_5 + \eta_8 + \eta_9 + \eta_{11} + \eta_{14})$$

$$\zeta_5 = \frac{1}{0{,}0023975}(\eta_3 + \eta_8 + \eta_{10} + \eta_{11} + \eta_{14})$$

$$\zeta_6 = \frac{1}{0{,}0012331}(\eta_4 + {}_9 + {}_{10} + \eta_{14})$$

előállítást nyerjük, ahol $\eta_1, \eta_3, \eta_4, \eta_5, \eta_8, \eta_9, \eta_{10}, \eta_{11}$ és η_{14} rendre 3,092; 0,153; 0,323; 0,508; 0,339; 0,095; 0,207; 0,788 és 0,273 paraméterű standard gamma eloszlású. Ez az előállítás pontos. A korrelációs mátrix nemzéró elemei számának a növelésével javítani lehetett a leírt többdimenziós gamma eloszlás illeszthetőségén.

Az illesztett hatdimenziós gamma eloszlás eloszlásfüggvényének az értékét az $x_1=2337{,}21$; $x_2=1725{,}96$; $x_3=1095{,}64$; $x_4=985{,}96$; $x_5=734{,}24$ és $x_6=728{,}44$ helyen határoztuk meg. Az eredmény 200 darab hatdimenziós véletlen vektor előállításával 0,15, 1000 darab hatdimenziós véletlen vektor előállításával 0,171 lett. A felhasznált számolási idő 10, illetve 38 másodperc volt, CDC 3300-as számítógépen. A közölt időértékek csak tájékoztató jellegűek, mivel a szimulációs programrész javításával azok még lényegesen csökkenthetők lesznek.

IRODALOM

[1] AHRENS, J. H. and DIETER, U., "Computer methods for sampling from gamma, beta, Poisson and binomial distributions", *Computing* **12** (1974) 223—246.

[2] CHEREIYAN, K. C., "A bivariate correlated gamma-type distribution function", *Journal of the Indian Mathematical Society* **5** (1941) 133—144.

[3] GAVER, D. P., "Multivariate gamma distributions generated by mixture", *Sankhyà, Series A* **32** (1970) 123—126.

[4] JENSEN, D. R., "The joint distribution of traces of Wishart matrices and some applications", *Annals of Mathematical Statistics* **41** (1970) 133—145.

[5] JENSEN, D. R., "A generalization of the multivariate Rayleigh distribution", *Sankhyà, Series A.* **32** (1970 193—206.

[6] JOHNSON, N. L., "Some notes on the investigation of heterogeneity in interactions", *Trabajos de Estadistica* **13** (1962) 183—199.

[7] JOHNSON, N. L. and KOTZ, S., *Distributions in Statistics: Continuous Multivariate Distributions* (John Wiley, New York, 1972).

[8] KIBBLE, W. F., "A two-variate gamma type distribution", *Sankhyà, Series A* **5** (1941) 137—150.

[9] KRISHNAIAH, P. R., HAGIS, P. and STEINBERG, L., "A note on the bivariate chi-distribution", SIAM Review **5** (1963) 140—144.

[10] KRISHNAIAH, P. R. and RAO, M. M., "Remarks on a multivariate gamma distribution", *American Mathematical Monthly* **68** (1961) 342—346.

[11] KRISHNAMOORTHY, A. S. and PARTHASARATHY, M., "A multivariate gamma-type distribution", *Annals of Mathematical Statistics* **22** (1951) 549—557. (correction: **31** (1960) 229.)

[12] LUKACS, E. and LAHA, L. G., *Applications of Characteristic Functions* (Griffin's Statistical Monograph No. 14, Griffin, London, 1964)

[13] MORAN, P. A. P., "Testing for correlation between non-negative variates", *Biometrika* **54** (1967) 385—394.

[14] MORAN, P. A. P. and VERE-JONES, D., „The infinite divisibility of multivariate gamma distributions", *Sankhyà Series A* **31** (1969) 191—194.

[15] PRÉKOPA, A., *Lineáris programozás I.* (Bolyai János Matematikai Társulat, Budapest, 1968).

[16] RAMABHADRAN, V. R., „A multivariate gamma-type distribution", *Sankhyà* **11** (1951) 45—46.

[17] VERE-JONES, D., "The infinite divisibility of a bivariate gamma distribution", *Sankhyà Series A* **27** (1967) 421—422.

[18] WOLFE, PH., "The simplex method for quadratic programming", *Econometrica* **27** (1959).

[19] Захаров, В. К., Сарманов, О. В. и Севастянов, Б. А., «Последовательный критерий к », *Математический Сборник* **79** (1969) 444—460.

[20] Сарманов, О. И., «Обобщенная симметричная гамма-корреляция», *Доклады Академии Наук СССР* **179** (1968) 1279—1291.

[21] Сарманов, О. И., «Процесс гамма-корреляции и его свойсмва», *Доклады Академии Наук СССР* **191** (1970) 30—32.

(Beérkezett: 1975. április 2.)

PRÉKOPA ANDRÁS ÉS SZÁNTAI TAMÁS
MTA SZÁMÍTÁSTECHNIKAI ÉS AUTOMATIZÁLÁSI KUTATÓ INTÉZET
1502 BUDAPEST XI., KENDE U. 13—17.

A NEW MULTIVARIATE GAMMA DISTRIBUTION AND ITS FITTING TO EMPIRICAL DATA

A. Prékopa and T. Szántai

In this paper a new multivariate gamma distribution is introduced. This is the joint distribution of the components of a random vector which is linear transformed of a random vector having independent gamma-distributed components. The new gamma distibution is used to approximate multivariate distributions with prescribed gamma one dimensional marginal distributions and nonnegative prescribed correlations. Simulation technics are described with the aid of which the relevant probabilities can well be approximated using reasonable computer time. Numerical examples are also given.

Alkalmazott Matematikai Lapok 1 *(1975) 319—331*

SZÁMOLÓGÉPEK KÖZPONTI EGYSÉGÉNEK KIHASZNÁLTSÁGÁRÓL, I.

TOMKÓ JÓZSEF

Budapest

Multiprogramozású számológépek központi feldolgozó egységének (CPU) kihasználtsága alkotja a jelen dolgozat problémakörét. Mindenekelőtt a multiprogramozásban résztvevő jobok, programok CPU igénye időbeli váltakozásának statisztikai leírását adja. A [3] dolgozattól eltérően azt az esetet tárgyalja, amikor a jobok statisztikailag különbözőek. Ez esetben célszerű a jobok között a CPU lefoglalást illetően prioritást bevezetni. A dolgozat fő eredményei a különböző prioritásos illetve prioritás nélküli programfuttatásoknak az összehasonlításaival kapcsolatosak. Numerikus eredmények szemléltetik a megállapításokat.

1. Bevezetés

Számológépi programok egyik legjellegzetesebb vonása, hogy különböző műveletek egymás utáni végrehajtását igénylik, amelyek esetleg a számológép más-más egységein folynak le, s jellegüknél fogva végrehajtási idejük lényegesen eltérnek egymástól. A végrehajtási időt tekintve a műveletek két osztályba sorolhatók. Az egyikhez tartoznak azok, amelyeket a központi feldolgozó egység (a CPU) mikroszekundumok alatt hajt végre. A másik osztályba soroljuk a külső memóriákkal (mágnesszalaggal, disk-kel stb.-vel) való kapcsolattartás (írás, olvasás) műveleteit. Ezeknek, minthogy bizonyos mechanikai berendezések működését is igénylik, az előző műveletekhez képest lényegesen hosszabb a végrehajtási idejük. Általában az első osztályba tartozó műveletek egy sorozata kerül végrehajtásra, melyet azután egy periferiális egységhez való fordulás követ. Állapodjunk meg, hogy a továbbiakban az első osztályba tartozó, azaz a CPU által végrehajtandó műveletek egy sorozatát számolási periódusnak, számolási ciklusnak fogjuk nevezni, míg egy periferiális egységhez való fordulást az információ bevitele és kivitele angol terminológiája szerint Input-Output, röviden I/O periódusnak, szakasznak, ciklusnak, ill. műveletnek nevezzük.

Egy számológépi program rendszerint egy I/O művelettel (a program, a szükséges kiindulási információ bevitelével) kezdődik. A program további lefolyása számolási és I/O szakaszok váltakozásával megy végbe. Egy számológépi program matematikai leírását a számolási és I/O periódusok jellemzésével adhatjuk meg. Kézenfekvő e periódusok hosszait valószínűségi változóknak tekinteni, s hasonlóan egy programra nézve valószínűségi változónak tekinthetjük a számolási, ill. I/O szakaszok számát. A matematikai leírás következő lépése ezen valószínűségi változók közti függőségi viszony megadása. Ez a lépés igen jelentős lehet a valódi helyzet pontosabb leírása szempontjából. Másrészt figyelembe kell venni azt a tényt is, hogy függőségi viszony feltételezése jelentősen növeli a matematikai modell bonyolultságát, s szűkítheti ezáltal a megválaszolható kérdések körét. A továbbiakban éppen ezért lemondunk a függőségi viszony feltételezéséről s ezen felül a számolási, ill. az I/O idők bizonyos homogenitását is kikötjük. Alapvető feltevésünket az alábbiak szerint fogalmazzuk meg:

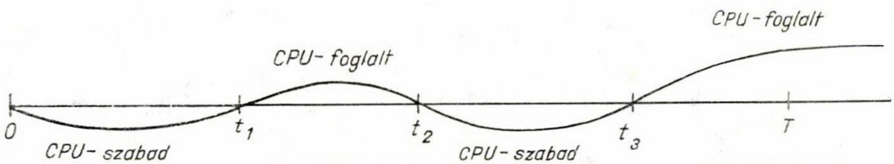
Egy program (későbbiekben job-nak is fogjuk nevezni) I/O és számolási idők váltakozásából áll, melyek független valószínűségi változók s ezen felül mind az I/O, mind a számolási szakaszok azonos eloszlásúak $F(x)$, ill. $G(x)$ eloszlásfüggvénnyel. A számolási (ill. I/O) szakaszok számáról most nem szólunk, csak lényegesen később térünk vissza rá.

A modern digitális számológépek egyik jellemző vonása a multiprogramozás lehetősége. Ez azt jelenti, hogy egyidejűleg több program lehet a gépben aktív állapotban. Az egy processzorú, azaz egyetlen CPU-val rendelkező gép esetén (s mi a továbbiakban mindig ilyen gépet fogunk feltételezni) csak egy program lehet számolási fázisban. Viszont a gépek több olyan berendezéssel, csatornával vannak ellátva, melyeken keresztül több program (legfeljebb annyi, ahány csatorna van) I/O periódusa folyhat egyidejűleg. Magától értetődő, hogy ha néhány jobot multiprogramozásban futtatunk le, akkor az összlefutási idő (az indítástól az utolsó job lefutásáig) rövidebb, mintha a jobokat egymás után futtatnánk le. Mindezt azáltal érjük el, hogy a CPU kihasználtságát, melyen az átlagos összműködési idő arányt értjük (később ennek megadjuk pontos értelmét) multiprogramozással növeljük. Jelen tanulmányban ismertetjük a CPU kihasználtságának a gépben benn levő jobok számától való függőségére vonatkozó eredményeket. Majd inhomogén jobok esetére megvizsgáljuk a prioritás bevezetésének hatását a CPU kihasználtságára. A dolgozat később megjelenő második részében a CPU kihasználtság meghatározásával foglalkozunk ciklikus (kvantált) programkiszolgálás esetén.

2. CPU-kihasználtság

Ha a CPU működését az idő folyamán vizsgáljuk, akkor ún. foglaltsági periódusokat és szabad periódusokat különböztetünk meg. Jelöljük a $(0, T)$ időszakaszra a CPU összfoglaltsági idejét $\beta(T)$-vel. Az 1. ábra szemlélteti a $\beta(T)$ képzését. A CPU foglaltsági és szabad periódusaira vonatkozó elég tág feltevések esetén is létezik a

$$\lim_{T\to\infty} \frac{M\beta(T)}{T}$$



$$\beta(T) = (T - t_3) + t_2 - t_1$$

1. ábra

határérték, melyet a továbbiakban a CPU átlagos összműködési időarányának, röviden CPU-kihasználtságnak fogunk nevezni. Megjegyezzük, hogy ha a CPU foglaltsági periódusai és szabad periódusai összességükben függetlenek és azonos eloszlásúak a, ill. b középértékekkel, akkor a CPU kihasználtság $a/(a+b)$ (lásd pl. [8]).

3. Homogén programok egyidejű futása

Tegyük fel, hogy j-számú job van egyidejűleg a gépben és hogy a programok homogének, ami alatt azt értjük, hogy azonosak mind a számolási, mind az I/O időtartamaik eloszlásai. Legyen tehát, mindegyik programra a számolási szakaszok eloszlása $F(x)$. Az I/O szakaszok eloszlására további megszorítást teszünk. Feltesszük, hogy ezek közös eloszlása exponenciális ugyanazon $\lambda > 0$ paraméterrel mindegyik programra. A CPU foglaltsági és szabad periódusainak vizsgálata az említett feltevések esetén elég egyszerű dolog, ha legalább annyi csatorna áll a perifériális egységgel való kapcsolattartás rendelkezésére, ahány program van egyidejűleg a gépben. Ez a követelmény valójában azt jelenti, hogy egy programnak sohasem kell várakoznia egy I/O műveletének megkezdésére. Az viszont előfordulhat, hogy több program várakozik a CPU-ra. A homogenitás következtében közömbös, hogy amikor egy számolási szakasz befejeződik, melyik várakozó job kezdheti el a soron következő számolási szakaszát.

Könnyű észrevenni, hogy a felsorolt feltevések következtében a CPU szabad akkor és csak akkor, ha a programok mind I/O fázisban vannak. Világos ezért, hogy a CPU szabad periódusai függetlenek és azonos $j\lambda$ paraméterű exponenciális eloszlásúak. Hasonlóan világos, hogy a CPU foglaltsági periódusai is függetlenek és azonos eloszlásúak. Mármost a CPU kihasználtságának a meghatározásához elegendő kiszámítani a foglaltsági periódus hosszának várható értékét. De eljárhatunk másképpen is. A CPU kihasználtság ugyanis egy valószínűség, pontosabban annak a stacionárius valószínűsége, hogy a CPU foglalt.

Ezt a valószínűséget a következő átfogalmazás alapján határozhatjuk meg. A programok helyett beszéljünk munkagépekről. A programok I/O fázisát a munkagépek működési szakaszának, számolási idejüket a gépek javítási idejének feleltessük meg. A munkagépek javítását egy munkás végzi, melynek foglaltsági ideje megfelel a CPU foglaltsági idejének. A tömegkiszolgálás elméletében jól ismert az átfogalmazott modellre a javító munkás foglaltsági valószínűségének kiszámítási módja (vö. [7], 195. old.). Ehhez be kell vezetnünk a következő jelöléseket. Legyen

$$\mathrm{Re}\{s\} \geqq 0\text{-ra} \quad \varphi(s) = \int_0^\infty e^{-sx}\,dF(x), \quad \beta = \int_0^\infty x\,dF(x),$$

$$C_0 = 1, \quad C_k = \prod_{i=1}^{k} \frac{\varphi(i\lambda)}{1-\varphi(i\lambda)} \quad (k \geqq 1),$$

$$S_0 = 1, \quad S_r = \frac{jC_{r-1}}{r} \frac{\sum\limits_{l=r-1}^{j-1} \binom{j-1}{l} \frac{1}{C_l}}{\left[1+j\beta\lambda \sum\limits_{l=0}^{j-1} \binom{j-1}{l} \frac{1}{C_l}\right]} \quad (r \geqq 1).$$

Ekkor annak a stacionárius valószínűsége, hogy k munkagép működőképes (k program I/O fázisban van, egy a CPU-t használja, a többi CPU-ra vár)

$$Q_k = \sum_{r=k}^{j} (-1)^{r-k} \binom{r}{k} S_r.$$

Következésképpen, most már csak az eredeti modellről beszélve, a CPU foglaltságának stacionárius valószínűsége

$$1 - Q_j.$$

Ennek alapján pl. $j=2$-re a CPU kihasználtság

$$\frac{2\beta\lambda}{\varphi(\lambda)+2\beta\lambda},$$

s foglaltsági periódushosszának várható értéke

$$\frac{\beta}{\varphi(\lambda)}.$$

A $j=3$ esetben a CPU kihasználtság

$$\frac{3\beta\lambda(1-\varphi(\lambda)+\varphi(2\lambda))}{\varphi(\lambda)\varphi(2\lambda)+3\beta\lambda(1-\varphi(\lambda)+\varphi(2\lambda))},$$

s az átlagos foglaltsági periódushossz

$$\frac{\beta(1-\varphi(\lambda)+\varphi(2\lambda))}{\varphi(\lambda)\varphi(2\lambda)}.$$

D. P. Gaver [3]-ban vizsgálta e pont tárgyát azaz a CPU kihasználtságának függését az egyidejűleg futó job-ok számától. Ő egy rekurzív szerkezetet állapít meg a CPU foglaltásgi periódusára. Módszerével nemcsak a CPU átlagos foglaltsági periódushossza határozható meg, hanem a foglaltsági periódushossz Laplace—Stieltjes transzformáltja is, ami közismert módon mélyebb statisztikai jellemzést tesz lehetővé.

4. Prioritások a CPU igénybevételére

Ismeretes, hogy a modern multiprogramozású számológépeknél prioritási osztályokat vezetnek be a CPU igénybevételének sorrendjére. Világos, hogy az osztályozásnak csak akkor van értelme, ha eltekintünk a programok homogenitásától. Ha egy program statisztikai jellemzését az 1. pontban már említett módon adjuk meg, akkor a job-ok osztályba sorolása számolási és I/O szakaszaik eloszlásai alapján történhet. A továbbiakban az egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy egyidejűleg csak két program fut egymás mellett, melyek paraméterei, a számolási és I/O szakaszok eloszlásai különböznek egymástól, azaz két különböző osztályba tartoznak. Ez esetben csak az ún. abszolút prioritásnak van értelme, ami azt jelenti, hogy ha prioritással rendelkező programra befejeződött egy I/O művelet, akkor azonnal elkezdődik a soron következő számolási ideje függetlenül attól, hogy a másik program milyen fázisban van. Más szóval a prioritás nélküli program számolása mindig csak a prioritással rendelkező program I/O periódusai alatt haladhat előre.

Megadjuk most az egyszerre futó két program részletes statisztikai jellemzését. Az egyik programra mint A-programra, a másikra mint B-programra fogunk hivatkozni.

Az A-program egy számolási idejét X-szel (esetenként indexszel ellátva) fogjuk jelölni, s a számolási idők közös eloszlása $F(x)$ lesz. Az I/O szakaszok időtartamára az η_λ (esetenként felül indexszel ellátva) jelölést vezetjük be, s feltesszük, hogy ezek $\lambda > 0$ paraméterű exponenciális eloszlásúak.

Hasonlóan adjuk meg a B-program jellemzését, csupán X helyett Y-t, $F(x)$ helyett $G(x)$-et, λ helyett $\mu > 0$-t, ill. η_λ helyett η_μ-t írunk.

Feltételezzük, hogy $F(x)$ és $G(x)$ folytonos eloszlások.

A CPU kihasználtság vizsgálatához mindenekelőtt vegyük észre, hogy a CPU szabad periódusai ez esetben is exponenciális eloszlásúak $\lambda+\mu$ paraméterrel. Továbbá annak valószínűsége, hogy egy szabad periódust az A program I/O műveletének befejeződése szakít meg $p_A = \lambda/(\lambda+\mu)$, s ugyanezen valószínűség a B-programra $p_B = \mu/(\lambda+\mu)$. A CPU foglaltsági periódusait tekintve két esetet kell megkülönböztetnünk. Egy foglaltsági periódus kezdődhet az A program számolásával, mely esetben a foglaltsági periódust δ_A-val jelöljük. Ha a B program számolása indít el egy CPU foglaltsági periódust, akkor annak hosszára a δ_B jelölést vezetjük be. Ha most az A program rendelkezik prioritással, akkor ezeket a periódusokat az alábbi szerkezet jellemzi:

$$\delta_A = \begin{cases} X, & \text{ha } X \leqq \eta_\mu \\ X+\delta_B, & \text{ha } X > \eta_\mu; \end{cases}$$

$$\delta_B = \sum_{i=1}^{\nu} X_i + Y,$$

ahol

$$\nu = \max\left\{n;\ \sum_{i=1}^{n} \eta_\lambda^{(i)} \leqq Y\right\}.$$

Ezen relációk alapján könnyű meghatározni az $M\delta_A$, $M\delta_B$ várható értékeket. Nyerhetjük, hogy

$$\begin{aligned} M\delta_A &= MX + (1-\varphi(\mu))M\delta_B, \\ M\delta_B &= MY + MX \cdot M\nu \\ &= MY - MX \cdot \lambda\psi'(0), \end{aligned}$$

ahol $\varphi(s) = Me^{-sX}$, $\psi(s) = Me^{-sY}$. Innen

$$\begin{aligned} M\delta_A &= MX + MY + \lambda MX \cdot MY - MY \cdot \varphi(\mu)(1+\lambda MX), \\ M\delta_B &= MY(1+\lambda MX). \end{aligned}$$

Ha most a B programnak adjuk a prioritást és a megfelelő foglaltsági periódusokat $\hat{\delta}_A$, $\hat{\delta}_B$-val jelöljük, akkor

$$M\hat{\delta}_A = MX(1+\mu MY),$$

$$M\hat{\delta}_B = MY + MX + \mu MY \cdot MX - MX\psi(\lambda)(1+\mu MY).$$

Ahhoz, hogy eldöntsük, befolyásolja-e a prioritás kiosztása a CPU kihasználtságot, az

$$M\delta = p_A M\delta_A + p_B M\delta_B \quad \text{és az} \quad M\hat{\delta} = p_A M\hat{\delta}_A + p_B M\hat{\delta}_B$$

mennyiségeket kell összehasonlítani. Az összehasonlítás könnyedén elvégezhető, ha mind $F(x)$, mind $G(x)$ exponenciális eloszlások. Legyen ugyanis $F(x) = 1 - e^{-\alpha x}$, $G(x) = 1 - e^{-\beta x}$. Ekkor

$$M\delta = p_A \frac{1}{\alpha} + p_A \frac{1}{\beta} + p_A \frac{\lambda}{\alpha\beta} - p_A \frac{\alpha + \lambda}{\beta(\alpha + \mu)} + p_B \frac{1}{\beta} + p_B \frac{\lambda}{\alpha\beta},$$

$$M\hat{\delta} = p_A \frac{1}{\alpha} + p_A \frac{\mu}{\alpha\beta} + p_B \frac{1}{\beta} + p_B \frac{1}{\alpha} + p_B \frac{\mu}{\alpha\beta} - p_B \frac{\beta + \mu}{\alpha(\beta + \lambda)}.$$

Innen $\lambda p_B = \mu p_A$ következtében, bevezetve $Q = \frac{\mu p_A}{\alpha\beta}$-t

$$M\delta - M\hat{\delta} = \mu p_A \frac{1}{\alpha\beta} \left(\frac{\alpha}{\mu} + \frac{\lambda}{\mu} - \frac{\alpha(\alpha + \lambda)}{\mu(\alpha + \mu)} \right)$$

$$- \lambda p_B \frac{1}{\alpha\beta} \left(\frac{\beta}{\lambda} + \frac{\mu}{\lambda} - \frac{\beta(\beta + \mu)}{\lambda(\beta + \lambda)} \right)$$

$$= Q \left(\frac{\alpha + \lambda}{\alpha + \mu} - \frac{\beta + \mu}{\beta + \lambda} \right)$$

$$= Q \frac{\lambda(\alpha + \lambda + \beta) - \mu(\alpha + \mu + \beta)}{(\alpha + \mu)(\beta + \lambda)}.$$

Megállapíthatjuk tehát a következőket. Ha mind a számolási idők, mind az I/O idők exponenciális eloszlásúak, akkor a CPU kihasználtság növelése érdekében annak a programnak kell adni a prioritást, amelyre az I/O periódusok átlagos hossza rövidebb, függetlenül attól, hogy milyen az átlagos számolási idők viszonya. Ez a megállapítás, ha a számolási idők nem exponenciális eloszlásúak, általában nem igaz. Amint a formulák mutatják, a CPU kihasználtságra a prioritással rendelkező program számolási idejének eloszlása nemcsak a várható értéken keresztül hat. Például tekintsük azt az esetet, amikor $MX = MY = 1$, $F(x) = 1 - e^{-x}$ $G(x) = 1$, ha $x \geqq 1$, s zérus máskor. Ekkor az $M\delta - M\hat{\delta}$ különbségre kapjuk a

$$\lambda(1 + \lambda) \frac{\mu}{1 + \mu} - \mu(1 + \mu)(1 - e^{-\lambda})$$

kifejezést. Megmutatható, hogy ha $\lambda = \mu + 0{,}5$, akkor elég nagy μ-re a fenti kifejezés negatívvá válik. Ez éppen azt jelenti ($\lambda > \mu$-re való tekintettel), hogy a fenti megállapításunk erre az esetre nem igaz.

Vizsgáljuk meg ezután, hogyan alakul prioritás bevezetése nélkül két különböző paraméterű programra a CPU kihasználtság. Bevezetve ez esetben a megfelelő foglaltsági periódus hosszakra a δ_A^* és a δ_B^* jelölést, ugyanúgy mint korábban, nyerjük az alábbi rekurzív szerkezeteket:

$$\delta_A^* = \begin{cases} X & \text{ha} \quad X < \eta_\mu, \\ X+\delta_B^*, & \text{ha} \quad X > \eta_\mu, \end{cases}$$

$$\delta_B^* = \begin{cases} Y \quad , & \text{ha} \quad Y < \eta_\lambda, \\ Y+\delta_A^*, & \text{ha} \quad Y > \eta_\lambda. \end{cases}$$

Áttérve a várható értékek képzésére, kapjuk, hogy

$$M\delta_A^* = MX+(1-\varphi(\mu))M\delta_B^*,$$

$$M\delta_B^* = MY+(1-\psi(\lambda))M\delta_A^*.$$

Innen

$$M\delta_A^* = \frac{MX+MY(1-\varphi(\mu))}{\varphi(\mu)+\psi(\lambda)-\varphi(\mu)\psi(\lambda)},$$

$$M\delta_B^* = \frac{MY+MX(1-\psi(\lambda))}{\varphi(\mu)+\psi(\lambda)-\varphi(\mu)\psi(\lambda)}.$$

Következésképpen a prioritás nélküli program futtatás esetén a CPU kihasználtságot az

$$M\delta^* = p_A M\delta_A^* + p_B M\delta_B^*$$

kifejezés szolgáltatja.

Hasonlítsuk most össze $M\delta^*$-ot $M\delta$, ill. $M\hat{\delta}$-val. Mindenekelőtt vegyük észre, hogy mind $M\delta_A^*$, mind $M\delta_A$ ugyanazon lineáris függvénye $M\delta_B^*$, ill. $M\delta_B$-nek, pontosabban:

$$M\delta_A^* = MX+[1-\varphi(\mu)]M\delta_B^*,$$

$$M\delta_A = MX+[1-\varphi(\mu)]M\delta_B.$$

Következésképpen elegendő a B program számolásával kezdődő foglaltsági periódus átlagértékét összehasonlítani a szóban forgó esetekre. Ha a számolási idők is exponenciális eloszlásúak, akkor formuláink a következő explicit kifejezéseket szolgáltatják

$$M\delta_B = \frac{\alpha+\lambda}{\alpha\cdot\beta},$$

$$M\delta_B^* = \frac{(\alpha+\mu)\big(\beta(\alpha+\lambda)+\alpha\lambda\big)}{\alpha\cdot\beta\big(\beta(\alpha+\mu)+\alpha\lambda\big)}.$$

Elemi átalakításokkal kapjuk, hogy

$$M\delta_B^* = \frac{\alpha+\lambda}{\alpha\beta}+\alpha\lambda\frac{\mu-\lambda}{\alpha\beta\big(\beta(\alpha+\mu)+\alpha\lambda\big)}.$$

Innen már most megállapíthatjuk, hogy ha a számolási idők is exponenciális eloszlásúak, akkor $(\lambda-\mu)(M\delta-M\delta^*)$ mindig pozitív. Mindez tehát azt jelenti, hogy ha a „rövidebb" I/O periódusú programnak prioritást adunk, akkor növeljük a CPU-kihasználtságot a prioritás nélküli program futtatás esetéhez képest. Ugyancsak megállapítható, hogy ha nem megfelelően választjuk meg a prioritást, azaz, ha a hosszabb átlagos I/O periódusú programnak biztosítunk elsőbbséget, akkor a CPU-kihasználtság csökken a prioritás nélküli program futtatás esetéhez képest is. Mindezeket összegezve, kimondhatjuk tehát, hogy $\lambda > \mu$ esetén

$$M\delta > M\delta^* > M\hat{\delta},$$

míg $\lambda < \mu$ esetén a fordított egyenlőtlenségsorozat érvényes. Az itt közölt összehasonlítás DERVADEREVICS KÁROLY V. éves matematikus egyetemi hallgatótól származik.

Áttérünk most arra az esetre, amikor kettőnél több program fut egyidejűleg multiprogramozásban. A job-okat most indexelni fogjuk s csupán arra az esetre szorítkozunk, amikor a számolási idők is exponenciális eloszlásúak. Jelölje λ_i, μ_i $i=1, 2, ..., n$ az i-edik job számolási, ill. I/O szakaszának paraméterét. Tetszőleges számú job-ra prioritásos esetben lehet a legáttekinthetőbb módon leírni a CPU-kihasználtság meghatározását. Jobok prioritása alatt most a következőket fogjuk érteni. Tetszőleges i-re $(i=1, 2, ..., n)$ az i-edik jobnak abszolút elsőbbsége van az i-nél magasabb indexű job-okkal szemben, tehát az utóbbiak számolása csak akkor folyhat, ha az i-edik job I/O alatt van. Legyen $\delta^{(n)}$ a CPU foglaltsági periódusa n számú program prioritásos futtatása esetén. Egy rekurzív összefüggést fogunk felírni az $M\delta^{(n)}$ átlagértékekre. Az alapgondolat a következő. Tekintsük az első $n-1$ programra a CPU foglaltsági és szabad periódusát egyetlen job számolási, illetve I/O szakaszának. Nevezzük e job-ot A jobnak. Ezen A-job számolási szakasza ugyan nem, de I/O szakasza exponenciális eloszlású $m_{n-1}=\mu_1+\mu_2+...+\mu_{n-1}$ paraméterrel. Az n-edik programot nevezzük B jobnak. Ennek mind számolási, mind I/O szakaszai exponenciális eloszlásúak λ_n, ill. μ_n paraméterekkel. E két program prioritásos futtatása (A-nak van elsőbbsége B-vel szemben) során adódó CPU foglaltsági szakasz azonos $\delta^{(n)}$-nel. Jelölje most $\varphi_{n-1}(s)$ $\delta^{(n-1)}$ *Laplace—Stieltjes-transzformáltját.* Ekkor

$$M\delta^{(n)} = \frac{m_{n-1}}{m_n}\left[M\delta^{(n-1)} + \frac{1}{\lambda_n}(1-\varphi_{n-1}(\mu_n))(1+m_{n-1}M\delta^{(n-1)})\right]$$

$$+\frac{\mu_n}{m_n}\frac{1}{\lambda_n}(1+m_{n-1}M\delta^{(n-1)}).$$

Ahhoz, hogy e formula alapján $M\delta^{(n)}$-t $M\delta^{(n-1)}$-en keresztül kiszámíthassuk, meg kell tudnunk határozni $\varphi_{n-1}(s)$-t. Abban a szerencsés helyzetben vagyunk, hogy a $\varphi_i(s)$, $1 \leqq i \leqq n$ sorozat is egy rekurzív összefüggésnek tesz eleget. Ennek levezetéséhez meghatározzuk a δ_A, δ_B mennyiségek *L—S-transzformáltjait.* E pont elején bevezetett jelöléseket használva, a teljes várható érték tétele alapján nyerjük, hogy

$$Me^{-s\delta_B} = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\infty}(\varphi(s))^n e^{sy}\frac{(\lambda y)^n}{n!}e^{-\lambda y}dG(y) =$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-(s+\lambda(1-\varphi(s)))y}dG(y) = \psi(s+\lambda(1-\varphi(s)),$$

$$Me^{-s\delta_A} = \int_0^{\infty} e^{-sx}e^{-\mu x}dF(x) + Me^{-s\delta_B}\int_0^{\infty} e^{-sx}(1-e^{-\mu x})\,dF(x)$$

$$= \varphi(s+\mu)+\psi(s+\lambda(1-\varphi(s)))[\varphi(s)-\varphi(s+\mu)].$$

A bevezetett $\varphi_i(s)$ meghatározását illetően, a következő szereposztást kell tekintenünk:

$$\varphi(s) = \varphi_{i-1}(s), \quad \psi(s) = \frac{\lambda_i}{\lambda_i+s},$$

$$\lambda = m_{i-1} = \mu_1+\ldots+\mu_{i-1}, \quad \mu = \mu_i.$$

Következésképpen, az említett rekurzív összefüggés

$$\varphi_i(s) = p_A M e^{-s\delta_A} + p_B M e^{-\delta_B} =$$

$$= \frac{m_{i-1}}{m_i}\left[\varphi_{i-1}(s+\mu_i) + \frac{\lambda_i[\varphi_{i-1}(s)-\varphi_{i-1}(s+\mu_i)]}{\lambda_i+s+m_{i-1}(1-\varphi_{i-1}(s))}\right] +$$

$$+\frac{\mu_i}{m_i}\cdot\frac{\lambda_i}{\lambda_i+s+m_{i-1}(1-\varphi_{i-1}(s))}.$$

Tetszőleges n-re áttekinthető explicit formulára nem számíthatunk, de a levezetett rekurzív összefüggések alapján n és a λ_i, $1 \leqq i \leqq n$; μ_i, $1 \leqq i \leqq n$ tömböket mint paramétereket tartalmazó számológépi eljárás készíthető a CPU kihasználtság meghatározására. Később e programok által nyert eredményekre visszatérünk.

Az imént bevezetett formulák alapján könnyen megválaszolható a következő kérdés. Fusson az A és a B program egyidejűleg multiprogramozásban úgy, hogy A-nak abszolút prioritása van B-vel szemben. Tegyük fel, hogy A n ciklusból áll, amely alatt azt fogjuk érteni, hogy n I/O és n számolási szakasza van, az n-edik számolási szakasz befejeződése a program lefutását eredményezi. B ciklusainak száma legyen k. Nyilvánvaló, hogy az A program lefutási idejének átlagértéke $n(1/\lambda+MX)$. B lefutási idejének átlagértéke azonban nem képezhető ilyen egyszerűen. Vegyük észre azonban, hogy a bevezetett δ_B periódus nem más mint az az időtartam, amely alatt B-nek egy számolási szakasza, figyelembe véve az A program általi megszakításokat, végrehajtódik. Következésképpen a B program lefutási idejének átlagértéke $k(1/\mu+M\delta_B)=k(1/\mu+MY)+k\lambda MX\cdot MY$. A levezetett rekurziv formulák alapján pedig több program prioritásos futtatása esetére megadható az egyes programok átfutási idejének átlagértéke, feltéve egyrészt, hogy bizonyos információnk van a programok ciklusainak számáról (pl. ismerjük az eloszlásaikat), másrészt, hogy ha egy program lefut, akkor vele azonos paraméterű és azonos prioritású job kerül közvetlenül elindításra. Pl. exponenciális struktúrájú jobokra az i-edik program egy ciklusa végrehajtási idejének átlagértéke

$$1/\mu_i + 1/\lambda_i + (\mu_1+\ldots+\mu_{i-1})M\delta^{(i-1)}\,1/\lambda_i.$$

Kettőnél több program prioritás nélküli futtatása esetén megszűnik az előző rekurzív számítási lehetőség. Most mindenekelőtt meg kell állapodnunk abban, hogy milyen legyen a CPU lefoglalásának a sorrendje, ha egyidejűleg több program, miután befejeződött a soron levő I/O szakasza, várakozik CPU-ra. Az operációs rendszerek többsége olyan, hogy ez esetben mindig az a program kapja meg a CPU-t, amely előbb érkezett vissza az I/O berendezésről. A továbbiakban a CPU ilyen lefoglalási sorrendjére FIFO jelzővel fogunk hivatkozni, ami az angol *first in first out* — előbb érkezett előbb távozik sorrend értelmező szókapcsolat rövidítése. Megint csak a teljes exponenciális esetre szorítkozunk és csupán az $n=3$ esetet részletezzük. Általános n-re szinte áttekinthetetlennek tűnik a helyzet. Ez különben az alábbiakból világossá fog válni. $n=3$ esetben a következő típusú periódusokat kell figyelembe venni. δ_i, egy program, az i-edik, számolásával kezdődik a periódus, míg a másik kettőnél I/O művelet van folyamatban. Ilyen típusú periódusból 3 van. δ_{ij} periódus, mely az i-edik program számolásával kezdődik úgy, hogy a j-edik program már CPU-ra várakozik, míg a harmadik, melynek indexe $k=6-(i+j)$, I/O fázisban van. Világos, hogy ilyen típusú periódusból 6 különböző van. Végül δ_{ijk} periódus, mely az i-edik program számolásával kezdődik úgy, hogy a másik kettő már CPU-ra várakozik, s ezek közül a j-ediknek fejeződött be előbb az I/O művelete. Az ilyen típusú periódusok száma $3!=6$.

Mielőtt e periódusok között fennálló kapcsolatokat felírnánk, bevezetünk néhány jelölést. Mint korábban, η_ν olyan exponenciális eloszlású valószínűségi változót fog jelölni, amelynek paramétere ν. Ez a ν paraméter többször λ_i és μ_i-kből képzett összeget fog képviselni. Megemlítjük még azt az egyszerű tényt, hogy $\min(\eta_\lambda, \eta_\mu)$-re $\eta_{\lambda+\mu}$ jelölés használható. Gyakran fog előfordulni az i, j, $i\neq j$, $i, j=1, 2, 3$ számpárral egy harmadik egész szám k, melyet i, j-től függően $k=6-(i+j)$ alapján értelmezünk. Az említett összefüggések ezek után a következők:

$$\delta_i = \min(\eta_{\lambda_i}, \eta_{\mu_j}, \eta_{\mu_k}) + \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad \eta_{\lambda_i} < \eta_{\mu_j+\mu_k}, \\ \delta_{ij}, & \text{ha} \quad \eta_{\mu_j} < \eta_{\lambda_i+\mu_k}, \\ \delta_{ik}, & \text{ha} \quad \eta_{\mu_k} < \eta_{\lambda_i+\mu_j}; \end{cases}$$

$$\delta_{ij} = \min(\eta_{\lambda_i}, \eta_{\mu_k}) + \begin{cases} \delta_j, & \text{ha} \quad \eta_{\lambda_i} < \eta_{\mu_k}, \\ \delta_{ijk}, & \text{ha} \quad \eta_{\lambda_i} > \eta_{\mu_k}; \end{cases}$$

$$\delta_{ijk} = \eta_{\lambda_i} + \delta_{jk}.$$

A periódushosszak várható értékeire az alábbi lineáris egyenletek adódnak.

$$M\delta_i = \frac{1}{\lambda_i+\mu_j+\mu_k} + \frac{\mu_j}{\lambda_i+\mu_j+\mu_k} M\delta_{ij} + \frac{\mu_k}{\lambda_i+\mu_j+\mu_k} M\delta_{ik},$$

$$M\delta_{ij} = \frac{1}{\lambda_i+\mu_k} + \frac{\lambda_i}{\lambda_i+\mu_k} M\delta_j + \frac{\mu_k}{\lambda_i+\mu_k} M\delta_{ijk},$$

$$M\delta_{ijk} = \frac{1}{\lambda_i} + M\delta_{jk}.$$

Ezt a 15 ismeretlenes egyenletrendszert elég könnyen visszavezethetjük csak az $M\delta_i$-ket tartalmazó egyenletekre. A keletkező 3-ismeretlenes egyenletrendszer leírásához vezessük be az alábbi mennyiségeket. Bármely i, j, $i\neq j$ értékpárra legyen

$$Q_{ij} = (\lambda_i+\mu_k)(\lambda_j+\mu_i)(\lambda_k+\mu_j) - \mu_1\mu_2\mu_3,$$

$$R_{ij} = \frac{Q_{ij}+\mu_1\mu_2\mu_3}{\lambda_i} + \frac{\mu_k}{\lambda_j}(\lambda_j+\mu_i)(\lambda_k+\mu_j) + \frac{\mu_i\mu_k}{\lambda_k}(\lambda_k+\mu_j).$$

Ezek után az $M\delta_i$-ket tartalmazó egyenletrendszer együtthatói

$$A_{ii} = 1 - \frac{\mu_1\mu_2\mu_3}{\lambda_i+m_i}\left(\frac{\lambda_k}{Q_{ij}} + \frac{\lambda_j}{Q_{ik}}\right),$$

$i\neq j$-re

$$A_{ij} = -\frac{\mu_j}{\lambda_i+m_i}\left(\frac{\lambda_i(\lambda_j+\mu_i)(\lambda_k+\mu_j)}{Q_{ij}} + \frac{\lambda_k\mu_k(\lambda_j+\mu_k)}{Q_{ik}}\right),$$

míg a jobboldalon szereplő együtthatók

$$C_i = \frac{1}{\lambda_i + m_i}\left(1 + \sum_{j \neq i} \frac{\mu_j R_{ij}}{Q_{ij}}\right)$$

ahol $m_i = \sum_{j \neq i} \mu_j$.

Az elmondottakból világos, hogy tetszőleges n esetén $\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k!$ ismeretlenes egyenletrendszerrel találjuk magunkat szemben. A kiindulási egyenletek felírása még elég egyszerűnek tűnik, de visszavezetésük n ismeretlenes egyenletrendszerre nem látszik egyszerűnek. Még $n=4$ esetén is, amikor az egyenletek száma 64, „gyötrelmes” elemi számolások fordulnak elő.

5. Numerikus eredmények

Három, multiprogramozásban együttfutó program esetére a vázolt algoritmusok számológépi programjai által exponenciális struktúrájú jobokra a következő numerikus eredményeket kaptuk.

A)

	Program paraméterek		Átlagos CPU foglaltsági idő	
	számolási	I/O	prioritásos	prioritás nélküli
1 pr.	0,9	0,5		
2 pr.	0,7	0,3	3,52	3,14
3 pr.	0,5	0,2		
1 pr.	0,9	0,5		
2 pr.	0,5	0,2	3,36	3,14
3 pr.	0,7	0,3		
1 pr.	0,7	0,3		
2 pr.	0,9	0,5	3,35	3,14
3 pr.	0,5	0,2		
1 pr.	0,7	0,3		
2 pr.	0,5	0,2	3,01	3,14
3 pr.	0,9	0,5		
1 pr.	0,5	0,2		
2 pr.	0,9	0,5	2,94	3,14
3 pr.	0,7	0,3		
1 pr.	0,5	0,2		
2 pr.	0,7	0,3	2,93	3,14
3 pr.	0,9	0,5		

	Program paraméterek		Átlagos CPU foglaltsági idő	
	számolási	I/O	prioritásos	prioritás nélküli
B)				
1 pr.	0,5	10,0		
2 pr.	0,1	0,1	1186,67	13,28
3 pr.	0,1	0,1		
1 pr.	0,1	0,1		
2 pr.	0,5	10,1	106,68	13,28
3 pr.	0,1	0,1		
1 pr.	0,1	0,1		
2 pr.	0,1	0,1	10,39	13,28
3 pr.	0,5	10,1		
C)				
1 pr.	0,9	0,1		
2 pr.	0,7	0,1	2,02	2,02
3 pr.	0,5	0,1		
bármely más sorrend esetén is			2,02	2,02
1 pr.	0,9	0,6		
2 pr.	0,7	0,6	6,46	6,46
3 pr.	0,5	0,6		
bármely más sorrend esetén is			6,46	6,46

A felsorolt táblázatok közül A) azt illusztrálja, hogy a prioritás megállapításakor elsősorban az I/O szakaszok paramétereit kell figyelembe venni. Maximális CPU-kihasználtságot úgy érhetünk el, ha a prioritást az I/O szakaszok paramétereinek nagyság szerinti rendezése alapján jelöljük ki. A B) táblázattal azt akartuk szemléltetni, hogy a helyes prioritás kijelölése milyen nagymértékű nyereséget eredményezhet a CPU kihasználtságban. Végül a C) táblázat azt illusztrálja, hogy ha a programok I/O szakaszai között nincs különbség, azaz ha azok paraméterei azonosak, akkor a prioritásos és a prioritás nélküli programfuttatásra a CPU kihasználtság ugyanaz, más szóval ilyen esetekben a CPU kihasználtságot illetően a prioritás bevezetésének nincs jelentősége.

Köszönetnyilvánítás. A dolgozat eredménye témája volt azon szemináriumsorozatnak, amelyet az MTA Számítástechnikai és Automatizálási Kutató Intézetben a Valószínűségszámítási és matematikai statisztikai, valamint a Software Osztály egy kollektívája rendez már évek óta. Ezeken a szemináriumokon vitattuk meg a [2], [4], [5], [9] és [10] dolgozatokat is, amelyek az Akadémia CDC gépe hatékonyabb üzemeltetési kérdéseivel foglalkoznak. Ezúttal is szeretnék köszönetet mondani kollégáimnak, szemináriumunk tagságának aktív figyelmükért és a dolgozat témáját formáló értékes javaslataikért.

IRODALOM

[1] *Statistical Computer Performance Evaluation*. Proceeding of a Conference held at Brown University (Academic Press, New York and London, 1971).

[2] ARATÓ, M.. KNÚTH, E., and TŐKE, P., "On stochastic control of a multiprogrammed computer based on a probability model", *Preprints of the Stochastic Contorl Symposium* (IFAC, Budapest, Hungary, 1974) 305—313.

[3] GAVER, D. P. "Probability models for multiprogramming computer systems", *J. ACM.* **14** (1967) 423—438.

[4] KNUTH, E., „Multiprogramozású számítógép rendszerek", *Mérés és Automatika* **5** (1975) 208—211.

[5] KNUTH, E., "Analysis of input strategies of multiprogramming computer systems::, in: *Proceedings of Computer Science Conference* (Székesfehérvár, Hungary, 1973) 59—62.

[6] BHAT, U. N. and NANCE, R. E., "Busy period of a time-sharing system modeled as a semi-markov process", *J. ACM* **18** (1971) 221—238.

[7] TAKÁCS, L., *Introduction to the Theory of Queues* (New York, Oxford University Press, 1962.)

[8] TAKÁCS, L., „Tartózkodási időproblémákról", *MTA III. Oszt. Közl.* 7 (1957) 371—395.

[9] TOMKÓ, J., "Studying output organization with a single finite queue", in: *Proceedings of Computer Science Conference* (Székesfehérvár, Hungary, 1973) 113—117.

[10] TŐKE, P., "Dinamical use of scratch pool", *Proceedings of Computer Science Conference* (Székesfehérvár, Hungary, 1973) 117—121.

(Beérkezett: 1975. január 20.)

TOMKÓ JÓZSEF
MTA SZÁMÍTÁSTECHNIKAI ÉS AUTOMATIZÁLÁSI KUTATÓ INTÉZET
1502 BUDAPEST XI., KENDE U. 13—17.

CPU UTILIZATION STUDY

J. TOMKÓ

The paper deals with the CPU utilization for multiprogramming computer systems. First a statistical description is given for the evolution of CPU demand of jobs, programs to be executed in multiprogramming. Contrary to Gaver's paper [3] not the homogeneous but that case is treated when the jobs are stochastically diffrent. For this case in respect of engaging the CPU it is reasonable to introduce priority between jobs. The main results of the paper are concerned with the comparison of different priority rules. Numerical examples illustrate the drawn inferences.

Alkalmazott Matematikai Lapok 1 *(1975) 333—343*

ELSŐ ÁTMETSZÉSI FELADATOKKAL KAPCSOLATOS ASZIMPTOTIKUS VIZSGÁLATOKRÓL

RADÓ PÉTER

Budapest

A dolgozat véges *Markov-láncon* adott nemnegatív kétdimenziós valószínűségi változók összegének vizsgálatával foglalkozik, ahol az összegzés addig terjed, amíg az első komponensek értéke elér egy t szintet. A *Markov-lánc* kiinduló és végállapotától függő összegek karakterisztikus függvényeinek idő szerinti *Laplace transzformáltjaiból* alkotott mátrix kiszámítható, általános esetben azonban a képlet inverz mátrixot tartalmaz, így kezelése nehézkes. Bizonyos feltételek mellet $t\to\infty$ esetén létezik határeloszlás, és ez kiszámítható. Ha a *Markov-láncnak* csak egy állapota van, a dolgozat eredményei TAKÁCS L. dolgozataihoz kapcsolódnak.

1. Bevezetés

Legyenek $\{\vec{\xi}_k^{(i)}\equiv(\tau_k^{(i)}, \gamma_k^{(i)}),\ k\geqq 1\}$, $i=1, \ldots, r$ független kétdimenziós valószínűségi vektorok sorozatai. Rögzített i mellett legyenek a sorozat tagjai $\vec{\xi}_k^{(i)}$ $(k\geqq 1)$ is függetlenek, közös

$$\varphi_i(s, \lambda)\cdot Me^{-s\tau_1^{(i)}-\lambda\gamma_1^{(i)}}$$

Laplace-transzformálttal. Tekintsünk ezután egy $\{x_n,\ n\geqq 1\}$ véges, $1, 2, \ldots, r$ állapotterű *Markov-láncot,* melynek átmenet-valószínűségi mátrixa legyen $P=(p_{ij})$. Írja le ez a *Markov-lánc* valamilyen fizikai rendszer állapotváltozásait, azaz legyenek a rendszer lehetséges állapotai indexelve az $1, 2, \ldots, r$ egész számokkal, s az állapotváltozások menjenek végbe a P átmenet-valószínűségi mátrix szerint. A rendszer állapotainak két fázisáról, A-ról és B-ről fogunk beszélni. Ha a rendszer k-adik alkalommal kerül az i-edik állapotba, akkor előbb az A fázisban $\gamma_k^{(i)}$ időt, majd a B-ben $\tau_k^{(i)}$ időt tölt.

Hozzunk most kapcsolatba rendszerünkkel egy $\{\eta(t),\ t\geqq 0\}$ folyamatot, melynek értéke 0, ha a rendszer A fázisban, 1 ha B fázisban van, függetlenül a rendszer állapotától. Tetszőleges x ideig a B fázisban eltöltött összidőt az $\left\{\int_0^x \eta(u)\,du,\ x\geqq 0\right\}$ folyamat írja le.

Tekintsük ezután tetszőleges $t\geqq 0$-ra a $\zeta(t)=\sup\left\{x\colon \int_0^x \eta(u)\,du\leqq t\right\}$ valószínűségi változót. Ennek vizsgálata képezi majd dolgozatunk fő problémakörét.

Ha a *Markov-láncnak* csak egy állapota van, akkor modellünk olyan rendszert ír le, mely váltakozva két fázisban, A-ban és B-ben lehet. Ezekre együttesen ciklusként fogunk hivatkozni. A ciklusok időben egymás után következnek, egymástól statisztikailag függetlenek, azonos kétdimenziós eloszlásfüggvény jellemzi őket.

A mi problémánk $r>1$ esetén valójában azzal az esettel ekvivalens, amikor több statisztikailag különböző, de egymás között független ciklusa lehet a rendszernek, melyek adott *Markov-lánc* szerint váltják egymást.

Visszatérve az egy ciklus esetére ($r=1$) a bevezetett változók közül pl. a B fázisban való tartózkodás összidejével TAKÁCS LAJOS foglalkozott. [3] dolgozatában még feltételezte, hogy az A és B fázisok időtartamai is függetlenek. Újabban [4] és [5]-ben eltekint ettől a megszorítástól, de különböző típusú ciklusokra még nem vettünk észre nála utalást.

A probléma alkalmazási jelentőségének illusztrálása céljából utalni szeretnénk TAKÁCS [5] dolgozatára, melyben több sorbanállási modellel kapcsolatosan veti fel az előzőekben vázolt feladatokat. Csupán futólagosan arról van szó, hogy egykiszolgálós rendszerben a kiszolgáló foglaltási, ill. szabad periódusai összidejeinek vizsgálata kitűzött feladatunk körébe tartozik. TAKÁCS LAJOS azáltal, hogy [5]-ben eltekint az A és B fázisidők függetlenségétől, az egykiszolgálós várakozási problémára vizsgálni tudja az olyan A, ill. B periódusok váltakozását, ahol az A periódus jelenti azt az időszakaszt, amikor a virtuális várakozási idő kisebb egy megadott szintnél, a B periódust pedig az ellentétes esemény fennállása jellemzi.

A mi általánosított modellünk olyan várakozási probléma során felmerülő periódus váltakozásnak (foglalt vagy szabad a kiszolgáló) a tanulmányozását teszi lehetővé, amikor a beérkező igények között különbözőségeket kell figyelembe vennünk, vagyis amikor több (pl. kiszolgálási idő szempontjából) különböző típusú igényfolyamat érkezik a rendszerbe. Ha a beérkezési folyamatok független *Poisson-folyamatok*, akkor még nincs szükség statisztikailag különböző ciklusok figyelembevételére. A beérkezési folyamatok függőségi viszonyát az irodalomban elsősorban a *fél Markov-folyamatok* segítségével írják le. Ilyen jellegű várakozási problémákat vizsgál CINLAR [1], [2] dolgozataiban, valamint TOMKÓ [6] 6. pontjában. Ilyen várakozási problémákban a kiszolgáló foglaltsági, ill. szabad periódusainak leírásához már feltétlenül szükség van különböző ciklusok figyelembevételére, melyek általában statisztikailag eltérnek egymástól. Ha a ciklus egy foglaltsági periódus kezdetétől az utána következő szabad periódus befejeződéséig tart, akkor a ciklust i-típusúnak mondjuk, ha a foglaltsági periódust egy i-típusú igény kiszolgálásának kezdete indítja el.

Megemlítjük még, hogy tekintett modellünk egy másik alkalmazási területe a korszerű számológépek memóriakihasználásának problémája, speciálisan pl. a page-elési eljárás. Ennek lényege az, hogy a programokat részekre (page-ekre, legyen számuk r) bontják, amelyek közül mindig csak egy lehet a központi memóriában, míg a többi a periferiális (lemez vagy szalag) egységeken helyezkedik el. Ha a központi memóriában levő page utasításainak végrehajtása során a program egy másik page-ére történik hivatkozás, akkor a két page helyet cserél.

Feltesszük, hogy az i-edik page után p_{ij} valószínűséggel a j-edik következik. A j-edik page k-adik bevitele — A fázis — $\gamma_k^{(j)}$ időt igényel, és ezután $\tau_k^{(j)}$ ideig a page utasításait hajtja végre a gép — B fázis. Arra a kérdésre keressük a választ, hogy egy t ideig tartó programot page-eléssel együtt mennyi idő alatt hajt végre a gép.

Nem célunk most ezeket az alkalmazási lehetőségeket tüzetesen vizsgálni, ezzel egy másik dolgozatban kívánunk majd foglalkozni.

2. $\zeta(t)$ vizsgálata

A $\sum_{k=1}^{n} \tau(x_k)$ összeg megadja a B fázisidők összegét n állapotváltozásra. ($\vec{\xi}(x_k) = \vec{\xi}_l^{(i)}$, ha a *Markov-lánc* a k-adik pillanatban l-edszer lép az i-edik állapotba.) Legyen most $t \geqq 0$,

$$\nu(t) = \max \left\{ n \colon \sum_{k=1}^{n} \tau(x_k) < t \right\}$$

mely nem más, mint az $\{x_n\}$ *Markov-láncban* $\zeta(t)$ idő alatt végbemenő állapotváltozások száma. $\zeta(t)$ felírható az alábbi véletlen összegként:

$$\zeta(t) = \sum_{k=1}^{\nu(t)} \gamma(x_k) + t, \tag{2.1}$$

mivel $\zeta(t)$ ideig a rendszer éppen t időt töltött a B és

$$\Omega(t) = \sum_{k=1}^{\nu(t)} \gamma(x_k) \tag{2.2}$$

időt az A fázisban.

2.1. Tétel. Legyen

$$\psi_{ij}(s, \lambda) = \int_0^\infty e^{-st} M(e^{-\lambda\Omega(t)}, x_{\nu(t)+1} = j | x_1 = i)\, dt. \tag{2.3}$$

$\mathbf{\Psi}(s, \lambda)$ a $\psi_{ij}(s, \lambda)$ függvényekből képzett mátrix:

$$\mathbf{\Psi}(s, \lambda) = (\psi_{ij}(s, \lambda)), \quad i, j = 1, \dots, r,$$

$\mathbf{B}(s, \lambda)$ pedig diagonális mátrix, ahol a főátlóban a $\vec{\xi}_k^{(i)} = \{\tau_k^{(i)}, \gamma_k^{(i)}\}$ valószínűségi változók *Laplace-transzformáltjai* állnak, tehát:

$$\mathbf{B}(s, \lambda) = (\varphi_i(s, \lambda)\delta_{ij}), \quad i, j = 1, \dots, r$$

(δ_{ij} a *Kronecker-szimbólum*).

Ekkor

$$\mathbf{\Psi}(s, \lambda) = \frac{1}{s} [\mathbf{E} - \mathbf{B}(s, \lambda)\mathbf{P}]^{-1} [\mathbf{E} - \mathbf{B}(s, 0)]$$

Bizonyítás. A teljes valószínűség tétele alapján:

$$P_{ij}(x, t) = P\{\Omega(t) < x, x_{\nu(t)+1} = j | x_1 = i\} = P\left\{ \sum_{k=1}^{\nu(t)} \gamma(x_k) < x, x_{\nu(t)+1} = j | x_1 = i \right\} =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} P\left\{ \nu(t) = n, \sum_{k=1}^{n} \gamma(x_k) < x, x_{n+1} = j | x_1 = i \right\}.$$

A $\{\nu(t) = n\}$ esemény ekvivalens a $\left\{ \sum_{k=1}^{n} \tau(x_k) < t, \sum_{k=1}^{n+1} \tau(x_k) \geqq t \right\}$ eseménnyel, ami viszont ugyanaz, mint a $\left\{t-\tau(x_{n+1})\leqq \sum_{k=1}^{n} \tau(x_k)<t\right\}$ esemény, tehát

$$P_{ij}(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} P\left\{t-\tau(x_{n+1}) \leqq \sum_{k=1}^{n} \tau(x_k) < t, \sum_{k=1}^{n} \gamma(x_k) < x, x_{n+1} = j|x_1 = i\right\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{u=0}^{t} \int_{v=0}^{x} P\{t-\tau(x_{n+1}) < u|x_{n+1} = j, x_1 = i\}\, dF_{ij}^{(n)}(u, v) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{u=0}^{t} \int_{v=0}^{x} P\{t-\tau_l^{(j)} < u\}\, dF_{ij}^{(n)}(u, v),$$

ahol

$$F_{ij}^{(n)}(u, v) = P\left\{\sum_{k=1}^{n} \tau(x_k) < u, \sum_{k=1}^{n} \gamma(x_k) < v, x_{n+1} = j|x_1 = i\right\}. \tag{2.4}$$

$\left(\tau(x_{n+1})=\tau_l^{(j)}\right.$, ha az $(n+1)$-edik pillanatban a *Markov-lánc* l-edszer került a j-edik állapotba.) Ha most $G_j(t-u)=P\{\tau_l^{(j)}<t-u\}$, akkor

$$\int_{u=0}^{t} \int_{v=0}^{x} P\{t-\tau_l^{(j)} < u\}\, dF_{ij}^{(n)}(u, v) = F_{ij}^{(n)}(t, x) - \int_{u=0}^{t} G_j(t-u)\, dF_{ij}^{(n)}(u, x).$$

Végül kapjuk, hogy

$$P_{ij}(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[F_{ij}^{(n)}(t, x) - \int_{u=0}^{t} G_j(t-u)\, dF_{ij}^{(n)}(u, x)\right],$$

melynek alapján

$$\psi_{ij}(s, \lambda) = \int_{t=0}^{\infty} \int_{x=0}^{\infty} e^{-st-\lambda x}\, dP_{ij}(x, t)\, dt = \tag{2.5}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{t=0}^{\infty} \int_{x=0}^{\infty} e^{-st-\lambda x}\, d\left[F_{ij}^{(n)}(t, x) - \int_{0}^{t} G_j(t-u)\, dF_{ij}^{(n)}(u, x)\right] dt.$$

Itt most az összegzés és az integrálások sorrendje megcserélhető a sor nyilvánvaló egyenletes konvergenciája miatt. Legyen

$$K_{ij}^{(n)}(t, \lambda) = \int_{x=0}^{\infty} e^{-\lambda x}\, dF_{ij}^{(n)}(t, x). \tag{2.6}$$

(2.5) jobb oldalán először az x szerinti integrálást végezve el

$$\psi_{ij}(s, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} \left[K_{ij}^{(n)}(t, \lambda) - \int_{u=0}^{t} G_j(t-u)\, dK_{ij}^{(n)}(u, \lambda)\right] dt = \tag{2.7}$$

$$= \frac{1}{s} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{t=0}^{\infty} e^{-st}\, d\left[K_{ij}^{(n)}(t, \lambda) - \int_{u=0}^{t} G_j(t-u)\, dK_{ij}^{(n)}(u, \lambda)\right].$$

(2.6)-ból azonnal következik, hogy

$$(2.8)\quad \int_0^\infty e^{-st}\,dK_{ij}^{(n)}(t,\lambda) = M\left(e^{-s\sum_{k=1}^{n}\tau(x_k)-\lambda\sum_{k=1}^{n}\gamma(x_k)},\ x_{n+1}=j|x_1=i\right) = \Phi_{ij}^{(n)}(s,\lambda).$$

Észrevéve, hogy (2.7) jobb oldalán a különbség kivonandója G_j és $K_{ij}^{(n)}$ konvolúciója, elvégezhetjük a t szerinti integrálást, melynek következtében

$$(2.9)\quad \psi_{ij}(s,\lambda) = \frac{1}{s}\sum_{n=0}^{\infty}[\Phi_{ij}^{(n)}(s,\lambda)-\Phi_{ij}^{(n)}(s,\lambda)\varphi_j(s,0)] = \frac{1-\varphi_j(s,0)}{s}\sum_{n=0}^{\infty}\Phi_{ij}^{(n)}(s,\lambda).$$

(Itt kihasználtuk, hogy

$$\int_0^\infty e^{-st}\,dG_j(t)\cdot\int_0^\infty e^{-st}\,dP\{\tau_1^{(j)}<t\} = Me^{-s\tau_1^{(j)}} = \varphi_j(s,0).)$$

A következő lépésben $\Phi_{ij}^{(n)}(s,\lambda)$-t számítjuk ki. $\{\tau_1^{(i)},\gamma_1^{(i)}\}$ és $\left\{\sum_{k=2}^{n}\tau(x_k),\ \sum_{k=2}^{n}\gamma(x_k)\right\}$ függetlenségére való tekintettel, a teljes valószínűség tétele alapján

$$(2.10)\qquad \Phi_{ij}^{(n)}(s,\lambda) = \sum_{k=1}^{r} p_{ik}\varphi_i(s,\lambda)\Phi_{kj}^{(n-1)}(s,\lambda).$$

Ez n-re rekurzív összefüggés, melynek mátrixos alakban való felírásához vezessük be a

$$\mathbf{\Phi}^{(n)}(s,\lambda) = \left(\Phi_{ij}^{(n)}(s,\lambda)\right),\quad i,j=1,\dots,r$$

jelölést. Ezek után (2.10) mátrixos alakja

$$\mathbf{\Phi}^{(n)}(s,\lambda) = \mathbf{B}(s,\lambda)\mathbf{P}\mathbf{\Phi}^{(n-1)}(s,\lambda),$$

ahonnan:

$$\mathbf{\Phi}^{(n)}(s,\lambda) = [\mathbf{B}(s,\lambda)\mathbf{P}]^{n-1}\mathbf{\Phi}^{(1)}(s,\lambda).$$

Mivel (2.8)-ból:

$$\Phi_{ij}^{(1)}(s,\lambda) = M(e^{-s\tau(x_1)-\lambda\gamma(x_1)},\ x_2=j|x_1=i) = \varphi_i(s,\lambda)p_{ij},$$

tehát

$$\mathbf{\Phi}^{(1)}(s,\lambda) = \mathbf{B}(s,\lambda)\mathbf{P},$$

és így:

$$(2.11)\qquad \mathbf{\Phi}^{(n)}(s,\lambda) = [\mathbf{B}(s,\lambda)\mathbf{P}]^n.$$

Most írjuk fel (2.9)-et mátrixos alakban:

$$\boldsymbol{\psi}(s,\lambda) = \frac{1}{s}\sum_{n=0}^{\infty}\mathbf{\Phi}^{(n)}(s,\lambda)[\mathbf{E}-\mathbf{B}(s,0)].$$

(2.11) felhasználásával

$$(2.12)\qquad \boldsymbol{\psi}(s,\lambda) = \frac{1}{s}[\mathbf{E}-\mathbf{B}(s,\lambda)\mathbf{P}]^{-1}[\mathbf{E}-\mathbf{B}(s,0)].$$

Megjegyzés. Ezzel meghatároztuk a $\psi_{ij}(s, \lambda)$ függvényeket, de általános esetben a képletben szereplő inverz mátrix kezelése nem egyszerű. Speciális esetként tételezzük fel, hogy a rendszernek csak egy állapota van A és B fázisokkal. Ekkor

$$\mathbf{B}(s, \lambda) = (\varphi(s, \lambda))$$

$$\mathbf{P} = (1)$$

Ezeket az egyelemű mátrixokat írva (2.12)-be, azt kapjuk, hogy

$$\psi(s, \lambda) = \frac{1-\varphi(s, 0)}{1-\varphi(s. \lambda)} \frac{1}{s}. \tag{2.13}$$

Ez a speciális eset hasonlít TAKÁCS [3]-ban tárgyalt problémájára. Az általa vizsgált tartózkodási idő a mi jelöléseinkkel a $\beta(t) = \int_0^t \eta(u)\,du$, $(t \geqq 0)$ mennyiség. TAKÁCS 1. tételének bizonyításából látható, hogy

$$P\{\beta(t) < x\} = P\{\Omega(t-x) < x\},$$

vagy

$$P\{\beta(t+x) < x\} = P\{\Omega(t) < x\}.$$

A (2.13) képletünkből TAKÁCS $\beta(t)$ eloszlására levezetett képlete speciális esetként következik. Ugyanis (2.13) szerint

$$\psi(s, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi^n(s, \lambda) - \varphi^n(s, \lambda)\varphi(s, 0)}{s}.$$

Bevezetve az $F_n(t, x) = P\left\{\sum_{k=1}^{n} \tau_k < t,\ \sum_{k=1}^{n} \gamma_k < x\right\}$ eloszlásokat, innen kapjuk, hogy:

$$P\{\beta(t+x) < x\} = P\{\Omega(t) < x\} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[F_n(t, x) - \int_0^t F_n(t-u, x)\,dP\{\tau_1 < u\}\right].$$

Ha most $\{\tau_k\}$ és $\{\gamma_k\}$ függetlenek, azaz $F_n(t, x) = G_n(t) H_n(x)$, akkor ebből adódik a TAKÁCS által $\beta(t)$ eloszlására levezetett képlet.

3. Aszimptotikus vizsgálatok

Térjünk vissza az általános esethez, annak (2.12)-vel felírt megoldásához, mely alkalmasnak bizonyul $\zeta(t)$, ill. $\Omega(t)$ aszimptotikus viselkedésének vizsgálatára. A következőkből indulunk ki:

A $\vec{\xi}_k^{(i)}$ vektorok egy kis paramétertől, ε-től függenek, méghozzá úgy, hogy $\sum_{k=1}^{\left[\frac{t}{\varepsilon}\right]} \vec{\xi}_k^{(i)}(\varepsilon)$, $\varepsilon \to 0$ esetén gyengén konvergál egy $\vec{z}_i(t)$ független növekményű, homogén folyamathoz, melynek kumulánsa $a(s, \lambda)$. Ha pl. $\vec{\xi}_k^{(i)}(\varepsilon) = \varepsilon \vec{\xi}_k^{(i)}$, akkor $\vec{z}_i(t) = M\vec{\xi}_k^{(i)} t$ a nagy számok tétele szerint (feltételezzük, hogy $M\vec{\xi}_k^{(i)}$ véges). Feltételünk a *Laplace*-

transzformált terminológiájában

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varphi_i(\varepsilon, s, \lambda)^{\left[\frac{t}{\varepsilon}\right]} = e^{-a_i(s,\lambda)t}.$$

Ebből $t=1$-re a következő aszimptotikus felbontást kapjuk

$$\varphi_i(\varepsilon, s, \lambda) = 1-\varepsilon a_i(s, \lambda)+o(\varepsilon).$$

Ennek alapján

$$\mathbf{B}(s, \lambda, \varepsilon) = \mathbf{E}-\varepsilon\mathbf{A}(s, \lambda)+o(\varepsilon).$$

Mivel $\xi_k^{(i)}=\xi_k^{(i)}(\varepsilon)$, tehát az egyes fázisokban töltött idők függenek ε-tól, nyilvánvaló, hogy a bennünket érdeklő $\zeta(t)$, ill. $\Omega(t)$ mennyiségek is függenek ε-tól, vagyis

$$\psi_{ij}(s, \lambda) = \psi_{ij}(s, \lambda, \varepsilon).$$

3.1. TÉTEL. Legyen a *Markov-lánc* stacionárius eloszlása $\{\Pi_j\}$ $(j=1, \dots, r)$. Ekkor:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \psi_{ij}(s, \lambda, \varepsilon) = \frac{1}{s} \frac{\Pi_j a_j(s, 0)}{\sum_{k=1}^{r} \Pi_k a_k(s, \lambda)}.$$

Bizonyítás. A $\mathbf{B}(s, \lambda, \varepsilon)$ mátrixra kapott aszimptotikus relációt (2.12)-be helyettesítve:

$$\psi(s, \lambda, \varepsilon) = \frac{1}{s}[\mathbf{E}-\mathbf{P}+\varepsilon\mathbf{A}(s, \lambda)\mathbf{P}+o(\varepsilon)]^{-1}[\varepsilon\mathbf{A}(s, \lambda)+o(\varepsilon)]. \tag{3.1}$$

Az $o(\varepsilon)$-ok nyilván elhagyhatók, így egy

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(\mathbf{E}-\mathbf{P}+\varepsilon\mathbf{M})^{-1}$$

típusú határértéket kell kiszámolnunk. Végezzünk el néhány átalakítást.

$$\varepsilon(\mathbf{E}-\mathbf{P}+\varepsilon\mathbf{M})^{-1} = \varepsilon[\mathbf{E}-(1-\varepsilon)\mathbf{P}+\varepsilon(\mathbf{M}-\mathbf{P})]^{-1} =$$

$$= \{\mathbf{E}+\varepsilon[\mathbf{E}-(1-\varepsilon)\mathbf{P}]^{-1}(\mathbf{M}-\mathbf{P})\}^{-1}[\mathbf{E}-(1-\varepsilon)\mathbf{P}]^{-1}\varepsilon.$$

Ha pótlólagosan még azt is feltesszük, hogy $\mathbf{P}$ aperiodikus mátrix, akkor

$$[\mathbf{E}-(1-\varepsilon)\mathbf{P}]^{-1} = \frac{\mathbf{\Pi}}{\varepsilon}+\mathbf{C}_\varepsilon$$

— ahol $\mathbf{\Pi}$ a $\mathbf{P}$ ergodikus eloszlásából álló azonos sorú mátrix, $\mathbf{C}_\varepsilon$ mátrix elemei pedig $\varepsilon\to 0$ esetén korlátosak. (Lásd pl. [8] 387. old.) Innen

$$\lim_{\varepsilon\to 0}[\mathbf{E}-\mathbf{P}+\varepsilon\mathbf{M}]^{-1}\varepsilon = [\mathbf{E}+\mathbf{\Pi}(\mathbf{M}-\mathbf{P})]^{-1}\mathbf{\Pi}.$$

(3.1)-ből ennek alapján nyerhető

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\mathbf{\Psi}(s, \lambda, \varepsilon) = \frac{1}{s}\{\mathbf{E}+\mathbf{\Pi}[\mathbf{A}(s, \lambda)\mathbf{P}-\mathbf{P}]\}^{-1}\mathbf{\Pi}\mathbf{A}(s, 0). \tag{3.2}$$

A jobboldalon álló mátrix elemei már explicite kiszámíthatók. Bevezetve a

$$\mathbf{D} = \mathbf{\Pi}[\mathbf{A}(s, \lambda)\mathbf{P} - \mathbf{P}]$$

mátrixot, melynek elemei

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^{r} \Pi_k [a_k(s, \lambda) - 1] p_{kj} = \sum_{k=1}^{r} \Pi_k a_k(s, \lambda) p_{kj} - \Pi_j, \tag{3.3}$$

látjuk, hogy a $\mathbf{D}$ mátrix a d_j elemekből alkotott azonos sorokból áll. Tegyük fel, hogy

$$(\mathbf{E} + \mathbf{D})^{-1} = \mathbf{E} - c\mathbf{D}, \tag{3.4}$$

ahol c később meghatározandó konstans. Innen

$$\mathbf{E} = \mathbf{E} + \mathbf{D} - c\mathbf{D} - c\mathbf{D}^2.$$

Könnyen látható, hogy esetünkben $\mathbf{D}^2 = \varrho\mathbf{D}$, ahol $\varrho = \sum_{j=1}^{r} d_j$. Ezt felhasználva

$$\mathbf{E} = \mathbf{E} - c\mathbf{D} + \mathbf{D} - c\varrho\mathbf{D},$$

ahonnan

$$c = \frac{1}{1+\varrho}. \tag{3.5}$$

(3.2)-ből (3.4) alapján

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \psi(s, \lambda, \varepsilon) = (\mathbf{E} - c\mathbf{D})\mathbf{\Pi}\mathbf{A}(s, 0)\frac{1}{s}.$$

Mivel $\mathbf{D\Pi} = \varrho\mathbf{\Pi}$, felhasználva (3.5)-öt

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \psi(s, \lambda, \varepsilon) = \frac{1}{s}(\mathbf{\Pi} - c\varrho\mathbf{\Pi})\mathbf{A}(s, 0) = \frac{1}{s} c\mathbf{\Pi}\mathbf{A}(s, 0).$$

Végül (3.3)-ból és (3.5)-ből kiszámítva c értékét kapjuk, hogy

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \psi_{ij}(s, \lambda, \varepsilon) = \frac{1}{s} \frac{\Pi_j a_j(s, 0)}{\sum_{k=1}^{r} \Pi_k a_k(s, \lambda)}. \tag{3.6}$$

Megjegyzés. Ha a rendszernek csak egy állapota van, (3.6) így módosul:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \psi(s, \lambda, \varepsilon) = \frac{1}{s} \frac{a(s, 0)}{a(s, \lambda)}.$$

Mivel $\lim_{\varepsilon \to 0} \sum_{k=1}^{\left[\frac{t}{\varepsilon}\right]} \vec{\xi}_k(\varepsilon) = \vec{\mathbf{z}}(t) = \{w(t), v(t)\}$ független növekményű homogén folyamat, kis ε-ok esetén az eredeti rendszert jól közelíti a következő, V. V. ANYISZIMOV által [7]-ben vizsgált séma. Legyen adva egy $\{w(t), v(t)\}$ független növekményű homogén folyamat, $a(s, \lambda)$ kumulánssal. Tegyük fel, hogy $w(t)$ monoton növekszik, és tekintsük a

$$\mu(t) = \inf\{u \colon w(u) \geqq t\}$$

pillanatot, amikor $w(u)$ először éri el a t szintet. Tekintsük a második komponens értékét ebben a pillanatban, azaz a $v[\mu(t)-0]$ értéket. Ennek eloszlását a [7] 1. tétele speciális eseteként adódó

$$\int_0^\infty e^{-st} M e^{-\lambda v[\mu(t)-0]}\, dt = \frac{1}{s} \frac{a(s,0)}{a(s,\lambda)}$$

képlet határozza meg, ami jól egyezik a mi eredményeinkkel.

Megjegyzés. Tegyük fel, hogy $\tau_k^{(i)}(\varepsilon)=\varepsilon\tau_k^{(i)}$ és $M\tau_k^{(i)}=m_i$ létezik. Ebben az esetben

$$a_i(s,\lambda) = m_i s + \alpha_i(\lambda),$$

ahol $\alpha_i(\lambda)$ a $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \sum\limits_{k=1}^{\left[\frac{t}{\varepsilon}\right]} \gamma_k^{(i)}(\varepsilon) = v_i(t)$ független növekményű, homogén folyamat kumulánsa, vagyis

$$Me^{-\lambda v_i(t)} = e^{-\alpha_i(\lambda)t}. \tag{3.7}$$

$a_i(s,\lambda)$ értékét (3.7)-be beírva egyszerűsítés után a

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \psi_{ij}(s,\lambda,\varepsilon) = \frac{\Pi_j m_j}{s\sum\limits_{k=1}^{r} \Pi_k m_k + \sum\limits_{k=1}^{r} \Pi_k \alpha_k(\lambda)}$$

alakot nyerjük.

A jobboldal az

$$F_j(\lambda,t) = \frac{\Pi_j m_j}{\sum\limits_{k=1}^{r} \Pi_k m_k} \exp\left\{ -\frac{\sum\limits_{k=1}^{r} \Pi_k \alpha_k(\lambda)}{\sum\limits_{k=1}^{r} \Pi_k m_k} t \right\}$$

függvény *Laplace-transzformáltja,* tehát

$$\lim_{\varepsilon\to 0} M(e^{-\lambda\Omega_\varepsilon(t)}, x_{\nu_\varepsilon(t)+1} = j/x_1 = i) = F_j(\lambda,t)$$

majdnem minden t-re. Ebből

$$\lim_{\varepsilon\to 0} M(e^{-\lambda\Omega_\varepsilon(t)}/x_1 = i) = \exp\left\{ \frac{\sum\limits_{k=1}^{r} \Pi_k \alpha_k(\lambda)}{\sum\limits_{k=1}^{r} \Pi_k m_k} t \right\}.$$

(3.7) felhasználásával

$$\lim_{\varepsilon\to 0} M(e^{-\lambda\Omega_\varepsilon(t)}/x_1 = i) = Me^{-\lambda \sum\limits_{k=1}^{r} v_k \left(\frac{\Pi_k}{\sum\limits_{j=1}^{r} \Pi_j m_j} t \right)},$$

azaz

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \Omega_\varepsilon(t) = \sum_{k=1}^{r} v_k \left(\frac{\Pi_k}{\sum\limits_{j=1}^{r} \Pi_j m_j} t \right), \tag{3.8}$$

majdnem minden t-re.

Ha még azt is feltesszük, hogy $\gamma_k^{(i)}(\varepsilon)=\varepsilon^\alpha\gamma_k^{(i)}$, azaz

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^\alpha\sum_{k=1}^{\left[\frac{t}{\varepsilon}\right]}\gamma_k^{(i)} = v_i(t),$$

akkor

$$\Omega_\varepsilon(1) = \varepsilon^\alpha\sum_{k=1}^{v\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}\gamma(x_k) = \varepsilon^\alpha\Omega\left(\frac{1}{\varepsilon}\right),$$

tehát (3.8)-ban $t=1$-et helyettesítve $\Omega_\varepsilon(1)=\varepsilon^\alpha\Omega\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)=\frac{1}{u^\alpha}\Omega(u)$ aszimptotikus viselkedésére következtethetünk. Azt nyerjük, hogy $u\to\infty$ esetén:

$$\lim_{u\to\infty}\frac{\Omega(u)}{u^\alpha} = \sum_{k=1}^{r} v_k\left(\frac{\Pi_k}{\sum_{r=1}^{r}\Pi_j m_j}\right). \tag{3.9}$$

Ha $\alpha=1$, akkor $v_i(u)=M\gamma_k^{(i)}u=m_i'u$ és ebben az esetben

$$\lim_{u\to\infty}\frac{\Omega(u)}{u} = \frac{\sum_{k=1}^{r}\Pi_k m_k'}{\sum_{k=1}^{r}\Pi_k m_k}. \tag{3.10}$$

Ezúttal szeretnék köszönetet mondani kijevi tudományos vezetőmnek, V. V. ANYISZIMOVnak, a probléma felvetéséért és a megoldása során nyújtott útmutatásaiért. Ugyancsak megköszönöm TOMKÓ JÓZSEFnek a dolgozat megírása során nyújtott értékes tanácsait.

(Beérkezett: 1975. április 9.)

RADÓ PÉTER
MTA SZÁMÍTÁSTECHNIKAI ÉS AUTOMATIZÁLÁSI KUTATÓ INTÉZET
1502 BUDAPEST XI., KENDE U. 13—17.

IRODALOM

[1] CINLAR, E., "Time dependence of queues with semi-Markovian arrivals", *Journal of Appl. Prob.* **4** (1967) 356—364.
[2] CINLAR, E., "Queqes with semi-Markovian arrivals", *Journal of Appl. Prob.* **4** (1967) 365—379.
[3] TAKÁCS, L., „Tartózkodási idő problémákról", *MTA III. Oszt. Közl.* 7 (1957) 371.
[4] TAKÁCS, L., "Sojourn time problems", *The Annals of Probability* **2** (1974) 420—431.
[5] TAKÁCS, L., *Occupation Time Problems in the Theory of Queues* in: Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, No. **91** (Springer-Verlag, 1974).
[6] TOMKÓ, J., "On the rarefaction of multivariate point processes", in: *Proceedings of the* **9**. *European Meeting of Statisticians*, (Budapest, 1972).
[7] Анисимов, В. В., «Об остановке случайного процесса в момент достяжения некоторого уровня», *Доклады, А.Н. СССР* **212** (1973).
[8] Гантмахер, Ф. Р., *Теория матриц* (Изд. Наука, Москва, 1966.)

ОБ АССИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ МОМЕНТА ПЕРВОГО ДОСТИЖЕНИЯ УРОВНЯ

П. Радо

В этой работе исследуется сумма неотрицательных двухмерных случайных величин, заданных на *цепи Маркова*, причём суммирование идёт пока сумма первых компонентов не достигает некоторого уровня Вычисляется матрица, составленная из *преобравазоний Лапласа* по врмени характеристических функций сумм, зависящих от начального и конечного состояния марковской цепи. В общем случае эта формула содержит обратную матрицу, элементы которой трудно в явном виде подсчитать, поэтому целесообразно изучить ассимптотику при $t\to\infty$. При некоторых условиях существует предельное распределение, и можно найти его в явном виде. В том случае, когда цепь имеет только одно состояние, результаты работы связаны с результатами Л. Такача.

Alkalmazott Matematikai Lapok 1 *(1975) 345—355*

VÉLETLEN SZÁMOK GENERÁLÁSA ITERÁLT ELVETÉSES MÓDSZERREL

LUX IVÁN

Budapest

A dolgozat az adott eloszlású valószínűségi változók realizációinak generálására széles körben alkalmazott elvetéses módszer egy általánosítását tárgyalja. A hagyományos módszerben [2, 5] egy könnyen mintavételezhető sűrűségfüggvényből generálunk egy realizációt és azt a keresett valószínűségi változó realizációjának fogadjuk el, ha bizonyos — függvénykapcsolatban kifejezett — feltételnek eleget tesz, és új realizációt generálunk, ha a feltétel nem teljesül.

Az iterált módszerben ez a feltétel lépésenként változik. A módszer alkalmazható egyes Taylor sorba fejthető sűrűségfüggvényekből történő sorsolásra. Lehetőség van a hagyományos és iterált módszer együttes alkalmazására is. A módszer alkalmazhatóságát a csonkított exponenciális függvényből történő sorsoláson mutatjuk be.

1. Bevezetés

Az utóbbi évtizedekben a számítógépek elterjedésével egyre nagyobb szerepet kapott a sztohasztikus folyamatok számítógépes modellezése. A *Monte Carlo-módszerek* egyik sarkalatos pontja az adott eloszlású valószínűségi változók realizációinak generálása. A számítógépek túlnyomó többségénél rendelkezésre áll olyan függvényeljárás, amely a [0, 1] intervallumban egyenletes eloszlású valószínűségi változó realizációit generálja. Kézenfekvő tehát a szóban forgó eloszlásfüggvény közvetlen inverziója útján előállítani a keresett realizációt. Legyen ugyanis a ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye $F(x)$, akkor könnyen látható, hogy az

$$\eta = F(\xi)$$

összefüggéssel definiált valószínűségi változó a [0, 1] intervallumban egyenletes eloszlású, ha tehát R az η valószínűségi változó egy realizációja, akkor az

$$x = F^{-1}(R)$$

számérték ξ egy realizációja lesz.

Számos gyakorlati esetben azonban az $F(x)$ függvény csak nehezen, vagy nagy gépidő-ráfordítással invertálható. Ezt a nehézséget hidalja át az elvetéses módszer.

Tegyük fel, hogy a ξ valószínűségi változónak létezik $f(x)$ sűrűségfüggvénye. Az elvetéses módszer legegyszerűbb formájában a következőkben foglalható össze [2, 4, 5].

Legyen $f(x)=0$, ha $x\notin[a, a+b]$ és jelölje M az $f(x)$ függvény maximumát az $[a, a+b]$ intervallumon. A generálás a következő három lépés ismételt alkalmazásával történik:

a) Generáljunk két független, a [0, 1] intervallumban egyenletes eloszlású véletlen számot, R_1-et és R_2-t.

b) Megvizsgáljuk, hogy az

$$R_1 \leqq f(a+bR_2)/M \tag{1.1}$$

egyenlőtlenség teljesül-e.

c) Ha (1.1) nem teljesül, akkor visszatérünk az a) lépésre, ha teljesül, akkor az $x=a+bR_2$ értéket elfogadjuk.

Könnyű belátni, hogy az ily módon generált x érték az $f(x)$ sűrűségfüggvényű ξ valószínűségi változó egy realizációja lesz. A kísérletek számának várható értéke Mb.

Az alapeljárást számos irányban továbbfejlesztették, amelyek közül most csak azt emeljük ki, amelynek általánosításával a továbbiakban foglalkozunk.

Tegyük fel ismét, hogy a generálandó ζ valószínűségi változónak létezik $f(z)$ sűrűségfüggvénye és az a következő alakú:

$$f(z) = M[T(z)]\, n(z)/E, \tag{1.2}$$

ahol

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} M[T(z)]\, n(z)\, dz, \quad 0 < E \leqq 1,$$

és $M(y)$ egy eloszlásfüggvény, $n(x)$ egy sűrűségfüggvény tulajdonságaival rendelkezik, míg $T(z)$ tetszőleges függvény. A sorsolás a következő lépésekből áll:

a) Generáljuk az $n(x)$ sűrűségfüggvényű ξ valószínűségi változó egy x realizációját.

b) x-től függetlenül generáljuk az $M(y)$ eloszlásfüggvényű η valószínűségi változó egy y realizációját.

c) Megvizsgáljuk, hogy az

$$y \leqq T(x) \tag{1.3}$$

egyenlőtlenség teljesül-e.

d) Ha (1.3) nem teljesül, akkor visszatérünk az a) lépésre, ha teljesül, akkor a $z=x$ értéket elfogadjuk.

Egyszerűen igazolható [2, 3], hogy az így kapott z érték az (1.2) alatt definiált sűrűségfüggvényű ζ valószínűségi változó egy realizációja lesz. A kísérletek számának várható értéke $\dfrac{1}{E}$.

2. Az iterált elvetéses módszer

Az iterált elvetéses módszerben minden sorsolásban más-más $T_i(z)$, $M_i(y)$, $n_i(x)$ függvények segítségével sorsolunk és az így generált valószínűségi változó eloszlásfüggvénye

$$F(z) = \frac{1}{E} \sum_{i=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{z} M_i[T_i(t)]\, n_i(t) F_i\, dt \tag{2.1}$$

alakú lesz, ahol

$$F_1 = 1, \quad F_i = \prod_{k=1}^{i-1} \Big(1 - \int_{-\infty}^{\infty} M_k[T_k(t)]\, n_k(t)\, dt\Big) = \tag{2.2}$$

$$= \prod_{k=1}^{i-1} (1-E_k), \quad i = 2, 3, \ldots,$$

és E a normálási tényező:

$$E = \sum_{i=1}^{\infty} E_i F_i.$$

A továbbiakban az $m_i(y) = dM_i(y)/dy$ és $n_i(x)$ $(i=1, 2, \ldots)$ függvényeket nevezzük segédsűrűségeknek, a $T_i(z)$ $(i=1, 2, \ldots)$ függvényeket pedig kritériumfüggvényeknek.

Legyen a ζ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye (2.1) és (2.2) szerinti és tegyük fel, hogy a függvényt előállító sor minden z értékre és z tart végtelen esetén is konvergens. Ekkor ζ-nak majdnem mindenütt létezik sűrűségfüggvénye a következő alakban:

$$f(z) = \sum_{i=1}^{\infty} F_i M_i[T_i(z)]\, n_i(z)/E, \tag{2.3}$$

ahol $M_i(y)$ egy eloszlásfüggvény, $n_i(z)$ egy sűrűségfüggvény tulajdonságaival rendelkezik és $T_i(z)$ tetszőleges, $i=1, 2, \ldots$.

A ζ valószínűségi változó egy realizációját a következő módon sorsoljuk:

a) Generáljuk az $n_i(x)$ sűrűségfüggvényű ξ_i valószínűségi változó egy x_i realizációját.

b) x_i-től függetlenül generáljuk az $M_i(y)$ eloszlásfüggvényű η_i valószínűségi változó egy y_i realizációját.

c) Megvizsgáljuk, hogy az

$$y_i \leqq T_i(x_i) \tag{2.4}$$

egyenlőtlenség teljesül-e.

d) Ha (2.4) nem teljesül, akkor visszatérünk az a) lépésre az $(i+1)$-edik segédlűrűségeket és kritériumfüggvényt használva, ha az egyenlőtlenség teljesül, akkor segyen $z = x_i$.

2.1. TÉTEL. A z érték a (2.1) alatti eloszlásfüggvényű ζ valószínűségi változó egy realizációja.

Bizonyítás. Az első sikeres sorsolás (amelyben (2.4) először teljesül) sorszáma legyen $\varkappa$.

Legyen B_k az az esemény, hogy a k-adik iterációs lépésben a sorsolás sikeres ((2.4) teljesül), és legyen

$$A_k = \prod_{i=1}^{k-1} \bar{B}_i,$$

azaz A_k az az esemény, hogy a k-adik sorsolás előtti sorsolások sikertelenek voltak, $k=1, 2, \ldots$. A_1 legyen definíció szerint a biztos esemény. Ha most $C_k = \{\varkappa = k\}$, vagyis C_k az az esemény, hogy az első sikeres sorsolás a k-adik lépésben következik be, akkor

$$C_k = A_k B_k, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Végül legyen S az az esemény, hogy az iteráció véges sok lépés után befejeződik:

$$S = \{\varkappa < +\infty\} = \sum_{k=1}^{\infty} C_k.$$

Az a)—d) lépésekben generált valószínűségi változó eloszlásfüggvénye a következő:

$$\Phi(z) = P(\zeta < z|S) = P(\{\zeta < z\}\cdot S)/P(S).$$

Mivel

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} C_k = \sum_{k=1}^{\infty} B_k A_k$$

és a C_k események egymást kölcsönösen kizáróak,

$$\Phi(z) = P\left(\{\zeta < z\}\sum_{k=1}^{\infty} B_k A_k\right)\Big/P(S) \tag{2.5}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} P(\{x_k < z\}B_k A_k)/P(S).$$

Továbbá, mivel az A_k esemény mind x_k-tól, mind a B_k eseménytől független,

$$P(\{x_k < z\}B_k A_k) = P(A_k)P(\{x_k < z\}B_k)$$

$$= P(A_k)\int_{-\infty}^{z} P(y_k < T_k(t))n_k(t)\,dt \tag{2.6}$$

$$= P(A_k)\int_{-\infty}^{z} M_k[T_k(t)]\,n_k(t)\,dt, \quad k = 1, 2, \dots .$$

Ebből:

$$P(B_k) = P(\{x_k < +\infty\}B_k) = \int_{-\infty}^{+\infty} M_k[T_k(t)]\,n_k(t)\,dt = E_k, \quad k = 1, 2, \dots, \tag{2.7}$$

$$P(A_k) = P\left(\prod_{i=1}^{k-1} \bar{B}_i\right) = \prod_{i=1}^{k-1} P(\bar{B}_i) = \prod_{i=1}^{k-1} (1-E_i) = F_k, \quad k = 1, 2, \dots . \tag{2.8}$$

A (2.6)—(2.8) összefüggések felhasználásával (2.5) a következő alakú lesz:

$$\Phi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} F_k \int_{-\infty}^{z} M_k[T_k(t)]\,n_k(t)\,dt/P(S).$$

Mivel pedig az S esemény definíciója és (2.2) következtében

$$P(S) = P\left(\sum_{k=1}^{\infty} B_k A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} E_k F_k = E,$$

azért

$$\Phi(z) = F(z).$$

Természetesen a módszer csak akkor alkalmazható, ha az iteráció 1 valószínűséggel véges sok lépésben véget ér, azaz

$$P(S) = E = 1.$$

Mivel azonban

$$E = \sum_{i=1}^{\infty} E_i F_i = \sum_{i=1}^{\infty} E_i \prod_{j=1}^{i-1} (1-E_j) = \sum_{i=1}^{\infty} (F_i - F_{i+1})$$
$$= F_1 - \lim_{i\to\infty} F_i$$

és feltevéseink értelmében $F_1 = 1$, valamint $\lim_{z\to+\infty} F(z) = \sum_{i=1}^{\infty} F_i/E < +\infty$, azért $\lim_{z\to+\infty} F_i = 0$ és $E=1$.

A fentiekkel analóg módon igazolható, hogy a sorsolások számának várható értéke:

$$E(\varkappa) = \sum_{i=1}^{\infty} F_i - \lim_{k\to\infty} kF_k,$$

amiből következik, hogy $E(\varkappa)$ akkor és csak akkor véges, ha

$$\lim_{k\to\infty} kF_k = 0 \quad \text{és} \quad \sum_{i=1}^{\infty} F_i < +\infty.$$

Megjegyzendő, hogy amennyiben az E_k mennyiségek ismertek, az iteráció helyettesíthető a BUTLER által bevezetett kompozíciós módszerrel [1], amelyben a következőképpen járunk el.

Előállítjuk az összes $P(C_k) = E_k F_k$ mennyiségeket és sorsolunk egy, a $[0, 1]$ intervallumban egyenletes eloszlású véletlen számot. Megvizsgáljuk, hogy melyik k értékre teljesül a

$$\sum_{i=1}^{k-1} P(C_i) \leqq R < \sum_{i=1}^{k} P(C_i)$$

egyenlőtlenség, majd az ennek a k értéknek megfelelő

$$f_k(z) = M_k[T_k(z)]\, n_k(z)/E_k$$

sűrűségfüggvényből sorsoljuk ζ egy realizációját.

3. Az iterált elvetéses módszer hatványsorok esetében

Tegyük fel, hogy a ζ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye a következő alakú:

$$f(z) = \begin{cases} \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{l_k}, & \text{ha} \quad z \in [0, 1] \\ 0, & \text{ha} \quad z \notin [0, 1] \end{cases} \tag{3.1}$$

ahol a hatványsor legyen konvergens a teljes $[0, 1]$ intervallumon, és

$$c_k \neq 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \quad l_0 = 0 < l_1 < l_2 < l_3 < \ldots.$$

Az együtthatókat előjelük szerint soroljuk két halmazba, legyen

$$P = \{k\colon c_k > 0, k > 0\}, \quad N = \{k\colon c_k < 0, k > 0\}.$$

Tegyük fel, hogy a hatványsorra teljesülnek a következő konvergencia feltételek:

$$
\begin{aligned}
&|c_1| \leqq 1, \\
(3.2)\qquad &(l_k+1)|c_{k+1}| \leqq l_k c_k, \quad \text{ha} \quad k \in P, \\
&(l_k+1)|c_{k+1}| \leqq -c_k, \quad \text{ha} \quad k \in N.
\end{aligned}
$$

A segédsűrűségek legyenek a $[0, 1]$ intervallumban azonosan 1 függvények, azaz

$$
(3.3)\qquad
\begin{aligned}
n_k(x) &= \begin{cases} 1, & \text{ha} \quad x \in [0, 1] \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}, \quad k = 1, 2, \ldots \\
M_k(y) &= \begin{cases} y, & \text{ha} \quad y \in [0, 1] \\ 1, & \text{ha} \quad y < 0 \\ 0, & \text{ha} \quad y > 1 \end{cases}, \quad k = 1, 2, \ldots
\end{aligned}
$$

A kritériumfüggvényekre írjuk elő, hogy

$$
(3.4)\qquad 0 \leqq T_k(z) \leqq 1, \quad k = 1, 2, \ldots .
$$

Ebben az esetben a módszer segítségével generált valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

$$
\varphi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} M_k[T_k(z)]\, n_k(z) F_k = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(z) F_k,
$$

ahol

$$
E_k = \int_0^1 T_k(z)\,dz, \quad k = 1, 2, \ldots, \quad F_k = \prod_{i=1}^{k-1} (1 - E_i), \quad k = 2, 3, \ldots, \quad F_1 = 1.
$$

3.1. TÉTEL. Amennyiben

$$
(3.5)\qquad T_k(z) = \begin{cases} 1 - a_k + a_k z^{l_k}, & \text{ha} \quad k \in P \\ 1 + a_k z^{l_k}, & \text{ha} \quad k \in N \end{cases},
$$

ahol

$$
(3.6)\qquad a_{k+1} = \begin{cases} (l_k+1) c_{k+1}/l_k c_k, & k \in P \\ -(l_k+1) c_{k+1}/c_k, & k \in N \end{cases},
$$

akkor a generált valószínűségi változó sűrűségfüggvénye a (3.1) alatti függvény, azaz

$$
\varphi(z) = f(z)
$$

Bizonyítás. A T_k függvényekre és az a_k együtthatókra vonatkozó (3.5)—(3.6) összefüggésekből, valamint a (3.2) konvergencia feltételekből következik a (3.4) egyenlőtlenség teljesülése, tehát csak azt kell bizonyítani, hogy

$$
\sum_{k=1}^{\infty} T_k(z) F_k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{l_k}
$$

avagy, amiből ez következik, hogy

$$
(3.7)\qquad a_k F_k = c_k, \quad k = 1, 2, \ldots, \quad \text{és} \quad \sum_{k=1}^{\infty} s_k F_k = c_0,
$$

ahol

(3.8) $$s_k = \begin{cases} 1-a_k, & \text{ha } k\in P \\ 1 & \text{ha } k\in N \end{cases}.$$

Mivel definíció szerint

(3.9) $$E_k = \int_0^1 T_k(z)\,dz = s_k + a_k/(l_k+1), \quad k = 1, 2, \dots,$$

azért

$$\sum_{k=1}^{\infty} E_k F_k = \sum_{k=1}^{\infty} [s_k F_k + a_k F_k/(l_k+1)] = E = 1.$$

Ugyanakkor

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k/(l_k+1) = \int_0^1 f(z)\,dz = 1,$$

és így az $a_k F_k = c_k$, $k=1, 2, \dots$ összefüggések teljesüléséből a $\sum_{k=1}^{\infty} s_k F_k = c_0$ összefüggés már következik.

A (3.7) összefüggések első felének igazolásához, viszont csak azt kell észrevennünk, hogy

$$F_{k+1}/F_k = 1 - E_k$$

tehát (3.9)-ből (3.8) és (3.6) felhasználásával következik, hogy

(3.10) $$F_{k+1}/F_k = \begin{cases} a_k l_k/(l_k+1), & \text{ha } k\in P \\ -a_k/(l_k+1), & \text{ha } k\in N \end{cases}.$$

(3.10) mindkét oldalát a_{k+1}/a_k-val szorozva és felhasználva az a_k együtthatókra vonatkozó (3.6) összefüggéseket, kapjuk, hogy

(3.11) $$\frac{a_{k+1} F_{k+1}}{a_k F_k} = c_{k+1}/c_k.$$

Mivel pedig definíció szerint $F_1 = 1$ és $a_1 = c_1$, így a (3.11) összefüggésekből indukcióval következik (3.7) első fele, amivel állításunkat bebizonyítottuk.

A sorsolások számának várható értéke:

$$E(\varkappa) = \sum_{k=1}^{\infty} F_k = \sum_{k=1}^{\infty} c_k/a_k,$$

amiből (3.6) segítségével egyszerűen kapható (lásd [5]), hogy

(3.12) $$E(\varkappa) = c_0 + \sum_{k\in P} c_k.$$

Itt is megjegyezhetjük, hogy mivel az

$$E_k F_k = F_{k+1} - F_k = c_{k+1}/a_{k+1} - c_k/a_k$$

mennyiségek a hatványsor együtthatóival egyszerűen kifejezhetőek, a tényleges iteráció helyettesíthető a kompozíciós módszerrel, azonban, amint ez a 4. pont példájából is kitűnik, nem feltétlenül előnyös.

Ha egy sűrűségfüggvény hatványsorba fejtésének az együtthatóira teljesülnek a (3.2) konvergencia feltételek, akkor általában a hatványsor első néhány tagja már jól közelíti a sűrűségfüggvényt, következésképp a generálandó valószínűségi változó előállításában ezek a tagok dominálnak.

Ekkor célszerű az első néhány tagot hagyományos elvetéses technikával, vagy speciális módon történő sorsolással venni figyelembe, a magasabb fokú tagokat pedig a leírt módszerrel. A két módszert egy véletlen szám segítségével komponálhatjuk.

Legyen

$$f(z) = \begin{cases} \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{m_k} = \sum_{k=0}^{N} a_k z^{m_k} + \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^{l_k}, & \text{ha} \quad z \in [0, 1] \\ 0, & \text{ha} \quad z \notin [0, 1] \end{cases}, \tag{3.13}$$

ahol $m_0 = l_0 = 0$; $m_1 < m_2 < \ldots < m_N < l_1 < l_2 < \ldots$.
Legyen

$$G = \sum_{k=0}^{N} a_k/(m_k+1)$$

és

$$g_1(z) = \sum_{k=0}^{N} a_k z^{m_k}/G,$$

$$g_2(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^{l_k}/(1-G).$$

Ekkor

$$f(z) = Gg_1(z) + (1-G)g_2(z) \tag{3.14}$$

ahol g_1 és g_2 maguk is legyenek sűrűségfüggvények; azaz megkívánjuk, hogy

$$g_1(z) \geqq 0, \quad g_2(z) \geqq 0, \quad \text{ha} \quad z \in [0, 1]$$

teljesüljön.

A sorsolás első lépésében generálunk egy, a [0, 1] intervallumban egyenletes eloszlású véletlen számot és megvizsgáljuk, hogy a

$$G \leqq R$$

egyenlőtlenség teljesül-e. Ha az egyenlőtlenség teljesül, akkor $g_1(z)$-ből a hagyományos eljárások egyikével sorsoljuk a ζ valószínűségi változó egy realizációját, ha nem teljesül, akkor $g_2(z)$-ből az iterált módszerrel.

Ez az eljárás előnyös lehet akkor is, ha a hatványsor együtthatóira vonatkozó konvergencia feltételek közül a

$$|c_1| \leqq 1$$

feltétel nem teljesül, ugyanis az eredeti függvény sorának konstans tagja g_1 és g_2 között szétosztható.

4. Alkalmazás az exponenciális eloszlásra

Illusztratív példaként tekintsük a következő sűrűségfüggvényből történő sorsolást

$$f(z) = \begin{cases} Ce^{-z}, & \text{ha } z \in [0, 1] \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases},$$

ahol $C = e/(e-1)$.

Írjuk a sűrűségfüggvényt a következő alakba:

$$f(z) = C \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^k/k! = C(1/2 - z + z^2/2) + \tag{4.1}$$

$$+ C\left(1/2 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k z^{k+2}/(k+2)!\right), \quad z \in [0, 1].$$

Most tehát

$$G = C/6, \quad g_1(z) = 3(1-z)^2, \quad g_2(z) = \frac{f(z) - Gg_1(z)}{(1-G)},$$

és könnyen igazolható módon g_1 és g_2 minden z értékre pozitív, valamint g_2 együtthatói kielégítik a (3.2) konvergencia feltételeket.

A sorsolás a következő lépésekből áll:

a) Sorsolunk egy, a [0, 1] intervallumban egyenletes eloszlású R_1 véletlen számot.

b) Megvizsgáljuk, hogy az

$$R_1 \leqq G \tag{4.2}$$

egyenlőtlenség teljesül-e.

c) Ha (4.2) teljesül, akkor sorsolunk további két, a [0, 1] intervallumban egyenletes eloszlású R_2 és R_3 véletlen számot és ζ egy realizációja a

$$z = \min \{R_1/G, R_2, R_3\}$$

érték lesz. (Megjegyzendő, hogy az R_1/G valószínűségi változó $R_1 \leqq G$ feltétel mellett a [0, 1] intervallumban egyenletes eloszlású.)

d) Ha (4.2) nem teljesül, akkor az iterált elvetés módszerével $g_2(z)$-ből sorsoljuk a z realizációt.

Határozzuk meg a sorsolandó véletlen számok számának várható értékét, ami egyben a módszer időigényességére is jellemző lesz.

Az első három lépésben várható értékben

$$n_1 = 1 + 2G = 1 + C/3$$

véletlen számot sorsolunk.

A (3.12) összefüggés értelmében a $g_2(z)$-ből történő sorsolásban az iterációk számának várható értéke:

$$E(\varkappa) = C\left(1/2 + \sum_{k=2}^{\infty} 1/(2k)!\right)\Big/(1-G)$$

$$= C(e-1)^2/2e(1-G) \approx 1{,}17$$

(Az iterációk számának alacsony értéke nem meglepő, hiszen az első iterációs lépés $E_1 = 1 - C/(1-G)4! \approx 0{,}91$ valószínűséggel sikeres lesz.)

A g_2-ből történő sorsolásra $1-G$ valószínűséggel kerül sor és minden iterációs lépésben két véletlen számra van szükség. Ha továbbá figyelembe vesszük, hogy az R_1/G véletlen szám itt is felhasználható, akkor

$$\begin{aligned} n_2 &= 2(1-G)(E(\varkappa)-1/2) = C(e-1)^2/e+G-1 \\ &= e-2+C/6. \end{aligned}$$

Tehát a generálandó véletlen számok számának várható értéke:

$$n = n_1 + n_2 = e-1+C/2 \approx 2{,}51.$$

A hagyományos elvetéses módszernél ez a szám

$$n = 2C \approx 3{,}16$$

és minden sorsolásban ki kell számítani e^{-z} értékét, melynek időigénye jelentősen felülmúlja egy véletlen szám generálásához szükséges időt.

Ez a példa valójában csak illusztratív jellegű, mert általában a logaritmusképzés időigénye csak néhányszorosa a véletlen szám generálásáénak és ezért a könnyen programozható közvetlen inverzió is nagyságrendben azonos időt igényel.

Végül megjegyezzük, hogy az ismertetett módszer széles körű alkalmazásával még nem próbálkoztunk, de az algoritmus jellegéből következően állíthatjuk, hogy az olyan [0, 1] intervallumra koncentrált, függvénysor alakjában felírt sűrűségfüggvényre, amelyet a sor első néhány tagja jól közelít, a módszer nagy hatékonyságú generálási eljárást ad. Speciálisan a *Taylor-sorba* fejthető sűrűségfüggvények közül azokra, amelyekben a sor együtthatóit a $C/n!$ sorozat majorálja az iterált elvetéses módszer kombinált alkalmazása, amint azt az előző példa is mutatja, igen hatékony.

Köszönetet mondok SZÁNTÓ GYÖRGY barátomnak a dolgozat elkészítése során adott hasznos tanácsaiért és segítségéért.

IRODALOM

[1] BUTLER, J. W., "Machine sampling from given probability distribution", in: *Symposium on Monte Carlo methods* (Wiley and Sons, New York, 1954) 249—264.
[2] KAHN, H., "Applications of Monte Carlo techniques", *AECU-3259 report* (1954).
[3] LUX, I., „Valószínűségi változó generálása iterált elvetés módszerével", szakdolgozat. ELTE TTK, Budapest, 1973.
[4] Ермаков, С. М., Метод Монте-Карло и смежные вопросы (Наука, Москва, 1971).
[5] Соболь, И. М., Численные методы, Монте-Карло (Наука, Москва, 1973).

(Beérkezett: 1975. június 2.)

LUX IVÁN
MTA KÖZPONTI FIZIKAI KUTATÓ INTÉZET
1525 BUDAPEST, 114. POSTAFIÓK 49.

ITERATIVE REJECTION METHOD FOR SAMPLING FROM GIVEN PROBABILITY DISTRIBUTION

I. LUX

This paper is dealing with a generalisation of the well known rejection method for selecting realisations of random variables with given pdf. In the conventional method a realisation is selected from an easily tractable pdf and is accepted as the realisation of the random variable in question if it satisfies some conditions — expressed by function relations — and a new sample is selected if the conditions fail.

In the iterative rejection method these conditions change step by step. The method can be adapted for generating from certain pdf which can be expanded in Taylor series. The conventional and terative methods can be used simultanously. The use of the method is demonstrated by selecting rom the truncated exponential pdf.

Alkalmazott Matematikai Lapok 1 *(1975) 357—364*

EGY KÜLSŐ PONT ELJÁRÁS KONVEX NEMLINEÁRIS PROGRAMOZÁSI FELADATOK MEGOLDÁSÁRA

RAPCSÁK TAMÁS

Budapest

Ebben a dolgozatban egy, FORGÓ FERENC által javasolt, kétparaméteres külső pont algoritmussal foglalkozunk. Itt az algoritmus konvergenciáját általánosabb feltételek mellett bizonyítjuk, majd megmutatjuk, hogy egyetlen feltétel nélküli optimalizálás egy előre megadott ε pontosságú megoldást szolgáltat, egy megengedett pontban. Ezután az eljárást alkalmazzuk PRÉKOPA ANDRÁS egy sztochasztikus programozási modelljére.

1. Bevezetés

Ennek a dolgozatnak a témája egy olyan külső pont eljárás, amely különbözik a SUMT [2] *(Sequential Unconstrained Minimization Techniques)* külső pont algoritmusaitól, mégpedig abban, hogy kétparaméteres és a büntető tag értéke a megengedett tartományon nem nulla. A módszer elnevezését az indokolja, hogy alapgondolatát és a feladat megoldási módját tekintve megegyezik az eredeti algoritmusokkal. Az eljárás FORGÓ FERENCtől származik [3]. Ebben a cikkben az eljárás konvergenciáját általánosabb feltételek mellett bizonyítjuk, majd megmutatjuk, hogy ezen feltételek mellett léteznek olyan paraméter értékek, hogy egyetlen feltétel nélküli optimalizálás egy előre megadott ε pontosságú megoldást szolgáltat egy megengedett pontban, ahol ε tetszőleges pozitív szám. Ezután az eljárást alkalmazzuk Prékopa András egy sztochasztikus programozási modelljére. Köszönetet mondok Prékopa Andrásnak és Mayer Jánosnak a dolgozat alapos átnézéséért és értékes megjegyzéseikért.

2. A feladat és az eljárás ismertetése

Tekintsük az alábbi nemlineáris programozási problémát.

$$\min f(\mathbf{x}) \tag{2.1}$$

$$g_i(\mathbf{x}) \geqq 0, \quad i = 1, \ldots, m,$$

ahol $f(\mathbf{x})$, $-g_1(\mathbf{x}), \ldots, -g_m(\mathbf{x})$ R^n-beli konvex függvények.

Rendeljük hozzá ehhez a feladathoz a következő, az egész R^n-en értelmezett függvényekből alkotott függvénysorozatot:

$$\Phi(\mathbf{x}, a_k, b_k) = f(\mathbf{x}) + \frac{1}{b_k} \sum_{i=1}^{m} e^{-a_k g_i(\mathbf{x})}, \quad k = 1, 2, \ldots . \tag{2.2}$$

Az itt szereplő a_k, b_k, $k=1, 2, \ldots$ paraméter sorozatokkal kapcsolatban az alábbi feltételezésekkel élünk:

$$0 < a_k < a_{k+1}, \quad \lim_{k\to\infty} a_k = +\infty,$$

$$(2.3) \qquad 0 < b_k < b_{k+1}, \quad \lim_{k\to\infty} b_k = +\infty,$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{\log b_k} = +\infty.$$

Ha $\mathbf{x}_0$ megengedett tartománybeli pont, akkor igaz az alábbi határérték reláció:

$$(2.4) \qquad \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{m} e^{-a_k g_i(\mathbf{x}_0) - \log b_k} = 0.$$

Ha $\mathbf{x}_0$ nem tartozik a megengedett tartományhoz, akkor található legalább egy j index, amelyre $g_j(\mathbf{x}_0) < 0$. Ekkor teljesül az alábbi reláció.

$$(2.5) \qquad \lim_{k\to\infty} e^{-a_k g_j(\mathbf{x}_0) - \log b_k} = +\infty,$$

ugyanis a (2.3) feltételek miatt

$$(2.6) \qquad \lim_{k\to\infty} \left(-\frac{a_k}{\log b_k} g_j(\mathbf{x}_0) - 1 \right) \log b_k = +\infty.$$

A $\Phi(\mathbf{x}, a_k, b_k)$ függvények bármely pozitív a_k, b_k értékpár mellett konvexek. A (2.1) feladatot a függvénysorozat ismeretében úgy oldjuk meg, hogy a fenti módon választott a_k, b_k értékek mellett meghatározzuk a $\Phi(\mathbf{x}, a_k, b_k)$ függvények feltétel nélküli minimum értékét; ezek az értékek a feladat megoldásához konvergálnak, ha k minden határon túl nő.

3. Előzetes lemmák

Az eljárással kapcsolatban fontos annak a biztosítása, hogy a $\Phi(\mathbf{x}, a_k, b_k)$, $k=1, 2, \ldots$ függvények felvegyék a minimumukat. Ezzel a kérdéssel foglalkozik az alábbi két lemma.

3.1. Lemma. Ha az $f(\mathbf{x})$, $-g_1(\mathbf{x}), \ldots, -g_m(\mathbf{x})$ függvények konvexek és a (2.1) probléma optimumpontjainak halmaza nem üres, korlátos, akkor bármely véges $k_0, k_1, \ldots, k_m$ értékek mellett az

$$\{\mathbf{x} | f(\mathbf{x}) \leqq k_0, g_i(\mathbf{x}) \geqq k_i, \quad i = 1, \ldots, m\}$$

halmaz korlátos és zárt.

A lemma a bizonyításával együtt [2]-ben megtalálható.

3.2. Lemma. Ha a (2.1) problémát tekintjük és a (2.1) probléma optimumpontjainak halmaza nem üres, korlátos, akkor tetszőleges, pozitív a_k, b_k, $k=1, 2, \ldots$ értékek mellett a $\Phi(\mathbf{x}, a_k, b_k)$, $k=1, 2, \ldots$ függvények felveszik a minimumukat.

Bizonyítás. Legyen k rögzített érték és értelmezzük minden valós M esetén az S_M halmazt az alábbi módon:

$$S_M = \{\mathbf{x}|\Phi(\mathbf{x}, a_k, b_k) \leqq M\}. \tag{3.1}$$

Mivel a $\Phi(\mathbf{x}, a_k, b_k)$ folytonos függvény, így elegendő azt belátni, hogy bármely véges M értékre S_M korlátos halmaz. Ha $S_M=\emptyset$, akkor igaz az állítás. Tegyük fel, hogy $S_M\neq\emptyset$ és az S_M halmaz nem korlátos. Ekkor létezik olyan S_M-hez tartozó $\mathbf{y}_l$, $(l=1, 2, \ldots)$ sorozat, amelyre igazak az alábbi relációk

$$\Phi(\mathbf{y}_l, a_k, b_k) \leqq M, \quad l = 1, 2, \ldots \tag{3.2}$$

$$\lim_{l\to\infty} |\mathbf{y}_l| = +\infty. \tag{3.3}$$

Mivel az $\frac{1}{b_k} \sum_{i=1}^{m} e^{-a_k g_i(\mathbf{y}_l)}$, $l=1, 2, \ldots$ kifejezések pozitívak, így az $f(\mathbf{y}_l)$, $l=1, 2, \ldots$ sorozat felülről korlátos. A 3.1. lemmát felhasználva azt kapjuk, hogy létezik olyan j index, amelyre teljesül, hogy

$$\lim_{l\to\infty} g_j(\mathbf{y}_l) = -\infty. \tag{3.4}$$

A (3.4) relációban $\mathbf{y}_l$, $l=1, 2, \ldots$ az eredeti sorozat egy részsorozatát jelöli. Tegyük fel ugyanis, hogy az eredeti $\mathbf{y}_l$ sorozatra az $f(\mathbf{y}_l)$, $l=1, 2, \ldots$ sorozat korlátos felülről és bármely i indexre $g_i(\mathbf{y}_l)\geqq k_i$, $l=1, 2, \ldots,$. Ekkor érvényes a következő tartalmazási reláció:

$$\mathbf{y}_l\in\{\mathbf{x}|f(\mathbf{x}) \leqq k_0, g_i(\mathbf{x}) \geqq k_i, \quad i = 1, \ldots, m\}, \quad l = 1, 2, \ldots. \tag{3.5}$$

A fenti halmaz a 3.1. lemma állítása szerint korlátos, s ez ellentmond a (3.3) feltételnek.

A (3.4) reláció következtében fennáll az alábbi reláció is:

$$\lim_{l\to\infty} \frac{1}{b_k} \sum_{i=1}^{m} e^{-a_k g_i(\mathbf{y}_l)} = +\infty. \tag{3.6}$$

Mivel a $\Phi(\mathbf{y}_l, a_k, b_k)$, $l=1, 2, \ldots$ sorozat felülről korlátos, a

$$\lim_{l\to\infty} f(\mathbf{y}_l) = -\infty \tag{3.7}$$

reláció teljesül. Adott ε pozitív számhoz értelmezzük az alábbi halmazt:

$$R(\varepsilon) = \{\mathbf{x}|f(\mathbf{x}) \leqq \max(M, v^*)+1, \quad g_i(\mathbf{x}) \geqq -\varepsilon, \quad i = 1, \ldots, m\}, \tag{3.8}$$

(3.9) ahol $\quad v^* = \min\{f(\mathbf{x})|\mathbf{x}\in R\}, \quad R = \{\mathbf{x}|g_i(\mathbf{x}) \geqq 0, \quad i = 1, \ldots, m\}.$

Legyen $\mathbf{x}^*$ egy optimum pont. A 3.1. lemma állítása miatt $R(\varepsilon)$ korlátos, zárt halmaz. Mivel $\mathbf{x}^*\in R(\varepsilon)$, ezért $R(\varepsilon)\neq\emptyset$. Tudjuk azt is, hogy $\mathbf{x}^*$ nem határpontja az $R(\varepsilon)$ halmaznak. Tekintsük az $\mathbf{y}_l$, $l=1, 2, \ldots$ sorozat azon elemeit, amelyekre teljesülnek az alábbi relációk:

$$\mathbf{y}_l\notin R(\varepsilon), \; l = 1, 2, \ldots, \quad f(\mathbf{y}_l) \leqq v^*, \; l = 1, 2, \ldots. \tag{3.10}$$

Képezzük az $\mathbf{x}^*$ pontból kiinduló és az $\mathbf{y}_l$, $l=1, 2, \ldots$ pontokon áthaladó sugarakat és jelöljék az $\mathbf{x}_l$, $l=1, 2, \ldots$ szimbólumok azokat a pontokat, ahol ezek a sugarak metszik az $R(\varepsilon)$ halmaz határát. Legyenek a λ_l, $l=1, 2, \dots$ értékek olyanok, amelyek kielégítik az alábbi egyenlőségeket és egyenlőtlenségeket.

$$\lambda_l \mathbf{y}_l + (1-\lambda_l)\mathbf{x}^* = \mathbf{x}_l, \quad 0 < \lambda_l < 1, \quad l = 1, 2 \dots . \tag{3.11}$$

A (3.3) feltétel teljesülése miatt igaz az, hogy

$$\lim_{l\to\infty} \lambda_l = 0. \tag{3.12}$$

Az $f(\mathbf{x})$ függvény konvexitását kihasználva következik, hogy

$$f(\mathbf{x}_l) \leqq \lambda_l f(\mathbf{y}_l) + (1-\lambda_l) f(\mathbf{x}^*) \leqq v^*, \quad l = 1, 2, \dots . \tag{3.13}$$

Eszerint $f(\mathbf{x}_l) < \max(M, v^*) + 1$, $l=1, 2, \dots$ és mivel az $\mathbf{x}_l$, $l=1, 2, \dots$ pontok a határon vannak, ezért találhatunk olyan q indexet, amelyre $g_q(\mathbf{x}_l) = -\varepsilon$. Minthogy az $R(\varepsilon)$ halmaz kompakt, a $v_1 = \min\{f(\mathbf{x})/\mathbf{x} \in R(\varepsilon)\}$ érték létezik és véges. A (3.13) egyenlőtlenségből átrendezéssel kapjuk az alábbi egyenlőtlenségeket.

$$f(\mathbf{y}_l) \geqq \frac{f(\mathbf{x}_l) - (1-\lambda_l) f(\mathbf{x}^*)}{\lambda_l} \geqq \frac{v_1 - (1-\lambda_l) v^*}{\lambda_l} = \tag{3.14}$$

$$= v^* + \frac{v_1 - v^*}{\lambda_l}, \quad l = 1, 2, \dots .$$

A g_i függvények konkávitásából és a $g_i(\mathbf{x}^*) \geqq 0$, $i=1, \dots, m$ egyenlőtlenségekből következik, hogy

$$0 > -\varepsilon = g_q(\mathbf{x}_l) \geqq \lambda_l g_q(\mathbf{y}_l) + (1-\lambda_l) g_q(\mathbf{x}^*) \geqq \lambda_l \cdot g_q(\mathbf{y}_l), \; l = 1, 2, \dots , \tag{3.15}$$

azaz tetszőleges $\mathbf{y}_l$ pont esetén találhatunk olyan q indexet, amelyre teljesül az alábbi reláció

$$-\frac{\varepsilon}{\lambda_l} \geqq g_q(\mathbf{y}_l). \tag{3.16}$$

A fenti egyenlőtlenségből következik, hogy

$$\frac{1}{b_k} e^{\frac{\varepsilon}{\lambda_l} a_k} \leqq \frac{1}{b_k} e^{-a_k g_q(y_l)} \leqq \frac{1}{b_k} \sum_{i=1}^{m} e^{-a_k g_i(y_l)}, \quad l = 1, 2, \dots . \tag{3.17}$$

(3.12) alapján írhatjuk, hogy

$$\lim_{l\to\infty} \frac{1}{b_k} e^{\frac{\varepsilon}{\lambda_l} a_k} = +\infty, \tag{3.18}$$

$$\lim_{l\to\infty} \Phi(\mathbf{y}_l, a_k, b_k) = +\infty. \tag{3.19}$$

Minthogy (3.19) ellentmondásban áll a (3.2) relációval, ezzel a 3.2. lemmát bebizonyítottuk.

4. Az eljárás konvergenciájának bizonyítása

4.1. TÉTEL. Ha a (2.1) problémát tekintjük és a (2.1) probléma optimumpontjainak halmaza nem üres, korlátos, akkor

$$\lim_{k\to\infty} \Phi(\mathbf{x}(a_k, b_k), a_k, b_k) = v^*, \tag{4.1}$$

ahol az $\mathbf{x}(a_k, b_k)$, $k=1, 2, \dots$ értékek jelentik a $\Phi(\mathbf{x}, a_k, b_k)$, $k=1, 2, \dots$ függvények minimumhelyeit, v^* pedig a feladat optimum értékét.

Bizonyítás. A (4.1) állítás bizonyításánál abból indulunk ki, hogy az $\mathbf{x}^*$ optimum hely megengedett tartománybeli pont, így teljesülnek a

$$\Phi(\mathbf{x}^*, a_1, b_1) \geqq \Phi(\mathbf{x}^*, a_k, b_k) \geqq \Phi(\mathbf{x}(a_k, b_k), a_k, b_k), \quad k = 1, 2, \dots \tag{4.2}$$

egyenlőtlenségek. Jelöljük H_δ-val az alábbi halmazt.

$$H_\delta = \{\mathbf{x}/f(\mathbf{x}) \leqq \Phi(\mathbf{x}^*, a_1, b_1), g_i(\mathbf{x}) \geqq -\delta, \quad i = 1, \dots, m\}, \quad \delta > 0. \tag{4.3}$$

A 3.1. lemma értelmében H_δ korlátos, zárt halmaz. Megmutatjuk, hogy az $\mathbf{x}(a_k, b_k)$, $k=1, 2, \dots$ sorozat minden torlódási pontja eleme a H_δ halmaznak. Ez azért igaz, mert a 3.2. lemma bizonyításával teljesen hasonló módon meg lehet mutatni, hogy a H_δ halmazon kívül az $\mathbf{x}(a_k, b_k)$, $k=1, 2, \dots$ sorozatnak legfeljebb véges sok eleme van. Mivel ez minden $\delta>0$ értékre igaz, ezért ez azt jelenti, hogy minden torlódási pont megengedett. A továbbiakban legyen δ egy fix érték. Most megmutatjuk, hogy teljesül az alábbi határérték reláció.

$$\lim_{k\to\infty} \Phi(\mathbf{x}(a_k, b_k), a_k, b_k) = v^*. \tag{4.4}$$

Tudjuk, hogy

$$\Phi(\mathbf{x}^*, a_k, b_k) \geqq \Phi(\mathbf{x}_k, a_k, b_k) \geqq f(\mathbf{x}_k), \tag{4.5}$$

így

$$\begin{aligned} v^* &= \lim_{k\to\infty} \Phi(\mathbf{x}^*, a_k, b_k) \geqq \lim_{k\to\infty} \sup \Phi(\mathbf{x}_k, a_k, b_k) \geqq \\ &\geqq \lim_{k\to\infty} \inf \Phi(\mathbf{x}_k, a_k, b_k) \geqq \lim_{k\to\infty} \inf f(\mathbf{x}_k) \geqq v^*. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Így bebizonyítottuk az állítást.

5. A (2.1) feladat megoldása egyetlen feltétel nélküli minimalizálással

Ebben a részben megmutatjuk, hogy egy előre megadott pozitív ε értékhez találhatók olyan a és b értékek, hogy a $\Phi(\mathbf{x}, a, b)$ függvényt feltétel nélkül minimalizálva a (2.1) probléma egy ε pontosságú megoldását kapjuk, egy megengedett pontban.

5.1. DEFINÍCIÓ. Egy $\mathbf{x}$ vektort a (2.1) probléma ε pontosságú megoldásának nevezünk, ha az

$$|f(\mathbf{x}) - v^*| \leqq \varepsilon \tag{5.1}$$

egyenlőtlenség teljesül, ahol v^* a feladat optimum értéke.

5.2. TÉTEL. Ha a (2.1) problémát tekintjük és a (2.1) probléma optimumpontjainak halmaza nem üres, korlátos és az R_0 halmaz nem üres, $(R_0=\{\mathbf{x}/g_i(\mathbf{x})>0, i=1, \ldots, m\})$, akkor egy előre megadott pozitív ε értékhez választhatunk egy a, b értékpárt úgy, hogy a $\Phi(\mathbf{x}, a, b)$ függvényt minimalizálva a probléma egy ε pontosságú megoldását kapjuk egy megengedett pontban.

Bizonyítás. Legyen ε egy tetszőleges pozitív érték és $\mathbf{x}_0$ egy olyan R_0-hoz tartozó pont, melyre teljesül az

$$f(\mathbf{x}_0)-f(\mathbf{x}^*) \leqq \frac{\varepsilon}{2} \tag{5.2}$$

egyenlőtlenség. Ilyen $\mathbf{x}_0$ pont az $f, -g_1, \ldots, -g_m$ függvények konvexitása miatt létezik. Legyen $b=1/\varepsilon$ és a olyan érték, amelyre igaz az

$$\frac{1}{b} \sum_{i=1}^{m} e^{-ag_i(\mathbf{x}_0)} < \frac{\varepsilon}{2} \tag{5.3}$$

egyenlőtlenség. Mivel az $\mathbf{x}_0$ R_0-hoz tartozó pont, ezért az a értékét meg tudjuk így választani. A következőkben megmutatjuk, hogy bármely nem megengedett $\mathbf{w}$ ponthoz találhatunk olyan megengedett $\mathbf{v}$ pontot, melyre teljesül az alábbi reláció

$$\Phi(\mathbf{w}, a, b) > \Phi(\mathbf{v}, a, b). \tag{5.4}$$

Legyen tehát $\mathbf{w}$ egy nem megengedett pont. Ekkor legyen $\mathbf{v}$ az a pont, amely az $\mathbf{x}_0$ és a $\mathbf{w}$ pontokat összekötő szakaszon van és amely határpontja a megengedett tartománynak. Fennáll az alábbi reláció.

$$\Phi(\mathbf{x}_0, a, b) = f(\mathbf{x}_0)+\frac{1}{b} \sum_{i=1}^{m} e^{-ag_i(\mathbf{x}_0)} \leqq f(\mathbf{x}^*)+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} < \Phi(\mathbf{v}, a, b) \tag{5.5}$$

Ugyanis a $\mathbf{v}$ pontot tekintve létezik legalább egy j index, amelyre $g_j(\mathbf{v})=0$, s így az

$$\frac{1}{b} \sum_{i=1}^{m} e^{-ag_i(\mathbf{v})} = \frac{1}{b}+\frac{1}{b} \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{m} e^{-ag_i(\mathbf{v})} > \varepsilon \tag{5.6}$$

egyenlőtlenség teljesül, másrészt a $\mathbf{v}$ pont megengedettsége miatt $f(\mathbf{x}^*)\leqq f(\mathbf{v})$. Mivel a $\mathbf{v}$ pont az $\mathbf{x}_0$ és a $\mathbf{w}$ pontokat összekötő szakaszon van $(\mathbf{v}=\mathbf{x}_0, \mathbf{v}=\mathbf{w})$, ezért létezik olyan λ érték, hogy

$$\mathbf{v} = \lambda\mathbf{x}_0+(1-\lambda)\mathbf{w}, \quad 0 < \lambda < 1. \tag{5.7}$$

A $\Phi(\mathbf{x}, a, b)$ függvény konvex, tehát teljesülnek a

(5.8)

$$\Phi(\mathbf{v}, a, b) \leqq \lambda\Phi(\mathbf{x}_0, a, b)+(1-\lambda)\Phi(\mathbf{w}, a, b) < \lambda\Phi(\mathbf{v}, a, b)+(1-\lambda)\Phi(\mathbf{w}, a, b)$$

egyenlőtlenségek. Innen adódik, hogy

$$\Phi(\mathbf{v}, a, b) < \Phi(\mathbf{w}, a, b). \tag{5.9}$$

Így a feltétel nélküli optimalizálás során a minimum értékét megengedett pontban kapjuk és erre teljesülnek a

$$v^* \leqq \Phi(\mathbf{x}(a, b), a, b) \leqq \Phi(\mathbf{x}_0, a, b) \leqq f(\mathbf{x}^*)+\varepsilon = v^*+\varepsilon \tag{5.10}$$

relációk. Ezzel bebizonyítottuk a tétel állítását.

6. Az eljárás alkalmazása Prékopa András egy sztohasztikus programozási modelljére

Ebben a modellben folytonos, logaritmikusan konkáv függvénnyel képzett feltétel fordul elő.

6.1. DEFINÍCIÓ. Egy C konvex halmazon $(C \subset R^n)$ értelmezett nemnegatív $g(\mathbf{x})$ függvény logaritmikusan konkáv, ha bármely C-hez tartozó $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ pár és $0<\lambda<1$ esetén a

$$g(\lambda \mathbf{x}_1+(1-\lambda)\mathbf{x}_2) \geqq [g(\mathbf{x}_1)]^{\lambda}[g(\mathbf{x}_2)]^{1-\lambda} \tag{6.1}$$

egyenlőtlenség teljesül.

A modellben szereplő feltétel a következő:

$$g(\mathbf{x}) \geqq p, \tag{6.2}$$

ahol $g(\mathbf{x})$ logaritmikusan konkáv függvény, p pedig 0 és 1 közé eső érték. Írjuk át a feltételt az alábbi formába

$$\log g(\mathbf{x})-\log p \geqq 0. \tag{6.3}$$

A $\log g(\mathbf{x})-\log p$ konkáv függvény, ezért az $\frac{1}{b_k} e^{-a_k(\log g(x)-\log p)}$ függvény konvex lesz. Ezt más formába írva kapjuk, hogy az

$$\frac{1}{b_k} e^{-a_k(\log g(\mathbf{x})-\ln p)} = \frac{1}{b_k}\left(\frac{p}{g(x)}\right)^{a_k} \tag{6.4}$$

egyenlőség teljesül. Tehát folytonos, logaritmikusan konkáv feltételek esetén a büntető tag értéke $\frac{1}{b_k}\left(\frac{p}{g(\mathbf{x})}\right)^{a_k}$. Ebből az is látható, hogy ha $f(\mathbf{x})$ logaritmikusan konkáv, akkor az $1/f(\mathbf{x})$ konvex függvény lesz.

Numerikus példa. Az eljáráshoz számítógépes programot is készítettünk. Példaként az alábbi kisméretű feladat megoldását említjük meg

$$\min(x_1+x_2)$$

$$P\begin{Bmatrix} 3x_1+\ x_2-6 \geqq \beta_1 \\ x_1+8x_2-8 \geqq \beta_2 \end{Bmatrix} \geqq 0.8$$

$$x_1+4x_2 \geqq 4,$$

$$3x_1+x_2 \geqq 3,$$

$$x_1 \geqq 0, \quad x_2 \geqq 0.$$

Itt β_1 és β_2 együttes eloszlása normális, nulla a várható értékük, 1 a szórásuk és 0,2 a korrelációs együtthatójuk. A valószínűségi feltételben szereplő függvény az x_1, x_2 változóknak logaritmikusan konkáv függvénye (lásd [4]). Ennek értékét DEÁK ISTVÁN szubrutinja számolta.

A feladatot különböző pontokból indulva általában 1 perc alatt oldottuk meg, 3—5 feltétel nélküli minimalizálást végezve. Amennyiben $b=100$, $a=1000$ volt, az eljárás egyetlen feltétel nélküli minimalizálással 30 másodperc alatt megtalálta az optimumot.

IRODALOMJEGYZÉK

[1] DEÁK, I., „Egy sztohasztikus programozási modell számítógépes kiértékelése", *MTA Számítástechnikai Központja Közlemények* **9** (1972) 33—49.

[2] FIACCO, A. V., and MCCORMICK, G. P., *Nonlinear programming: Sequential uncostrained minimization technique* (Wiley, New York, London, 1968).

[3] FORGÓ, F., „Egy módszer nemlineáris programozási problémák közelítő megoldására", *Szigma* **2** (1969).

[4] PRÉKOPA, A., "Contributions to the theory of stochastic programming", *Mathematical programming* **4** (1973) 202—222.

[5] ZANGWILL, W. I., "Nonlinear programming via penalty functions", *Management Science* **13** (1967) 334—358.

(Beérkezett: 1974. augusztus 25.)

RAPCSÁK TAMÁS
MTA SZÁMÍTÁSTECHNIKAI ÉS AUTOMATIZÁLÁSI KUTATÓ INTÉZET
1502 BUDAPEST XI., KENDE U. 13—17.

AN EXTERIOR-POINT ALGORITHM FOR SOLUTION OF CONVEX NONLINEAR PROGRAMMING PROBLEMS

T. RAPCSÁK

This paper deals with an exterior point algorithm suggested by F. FORGÓ. The convergence of the algorithm is proven here under more general condotions, further it will be shown that an unconstrained optimization results in a solution of ε exactness given in advance, in a feasible point. Thereafter the procedure will be applied to a stochastic programming model of A. PRÉKOPA.

Alkalmazott Matematikai Lapok **1** *(1975) 365—372*

TERVÜTEMHÁLÓK SZUBKRITIKUS ÚTJAINAK MEGHATÁROZÁSA

BAKÓ ANDRÁS

Az ismert CPM módszerek a háló kritikus éleit és egy kritikus útját adják meg. A dolgozatban két algoritmust ismertetünk. Az egyik eljárás egy háló összes útvonalának meghatározására alkalmas. A másik egy háló összes kririkus útvonalát és a második leghosszabb (ún. szubkritikus) útvonalait adja meg. Megmutatjuk az algoritmusok helyességét és kitérünk a leggazdaságosabb tárolási módszerre is.

1. Bevezetés

Legyen egy digráf pontjainak halmaza X, éleinek halmaza E, és $\tau(x, y)$ a digráf $(x, y)\in E$ élén értelmezett távolságfüggvény (tevékenységi idő). Rögzítsük le az (X, E, τ) hálózat s és t pontját.

Ha egy hálózat minden pontjába vezet az s pontból út, és a hálózat minden pontjából vezet út a t pontba, és nem tartalmaz ciklust (irányított kört), akkor tervütemhálónak vagy röviden hálónak nevezzük. Az s pont a háló kezdő, t a végpontja.

Az időütemezési feladat a háló minden $x\in X$ pontján egy olyan $\mu(x)\geqq 0$ ütemezést megadni, amelyre

$$\mu(x_j)-\mu(x_i) \geqq \tau(x_i, x_j),\ (x_i, x_j)\in E, \quad \text{és} \tag{1.1}$$

$$\mu(t)-\mu(s) \text{ minimális.}$$

Az (1.1) feladatot potenciál módszerrel oldhatjuk meg, amely megadja a μ ütemezést és az s-ből t-be vezető P leghosszabb utat. A maximális hosszúságú P út $T=\lambda(P)$ hosszára és az (1.1)-nek eleget tevő μ ütemezésre fennáll az alábbi összefüggés:

$$\lambda(P) = \mu(t)-\mu(s).$$

Gyakorlati feladatok megoldásánál sokszor szükség van az összes kritikus út meghatározására, és a 2., 3., ... leghosszabb útvonalak meghatározására. Ez utóbbiakat nevezzük *szubkritikus utaknak.* A fenti feladatok megoldásai általános hálózatban még a legrövidebb út esetén is bonyolult algoritmussal határozhatók meg. Hálók esetén közlünk két algoritmust, amelyek egyike a hagyományos tervütemezési feladat megoldási módszerének egy módosítása (2. pont), a másik módszert pedig a maximális időtartalék tulajdonságait kihasználva készítettük (3. pont).

A 2. pontban közölt algoritmus abban az esetben használható előnyösen, ha a 3., 4. leghosszabb útvonalakat is meg akarjuk határozni. A 3. pontban ismertetett módszer viszont akkor jobb hatásfokú, ha az összes kritikus útvonalat, vagy a 2. leghosszabb útvonalat, vagy mindkettőt akarjuk meghatározni.

2. Az összes útvonal meghatározása

Az alábbiakban leírunk egy olyan algoritmust, amely egy hálóban az összes útvonal meghatározására alkalmas, de alkalmas az első k leghosszabb útvonal meghatározására is. Az alábbi algoritmus lényegesen egyszerűbb, mint a k-adik optimális utakat meghatározó egyéb algoritmusok (YEN [6], FOX [1]), mivel a hálóban ciklus nincs.

A közlendő algoritmus potenciál módszerrel dolgozik. A háló minden $x_i \in X$ pontjához hozzárendelünk egy $R(x_i)=(r_1(x_i), r_2(x_i), \ldots, r_q(x_i))$ potenciálvektort, amely tartalmazza az összes lehetséges út hosszát az s ponttól az x_i pontig.

Jelöljük a $v_1, v_2, \ldots, v_r$ számsor p-edik legnagyobb elemét $\max_p (v_1, v_2, \ldots, v_r)$-rel. Legyen S azon pontok halmaza, amelyek potenciál vektorát már kiszámoltuk és legyen $T=X-S$.

A háló összes útvonalának meghatározására alkalmas algoritmus a következő lépésekből áll:

$A1$: Legyen $S=\{s\}$, $R(s)=0$.

$A2$: Keressünk egy olyan $x_j \notin S$ pontot, amelyre nincs olyan $(x_i, x_j) \in E$, hogy $x_i \notin S$ (ilyen pont van: lásd Klafszky [3] 195. old.).

$A3$: Számoljuk ki az $R(x_j)=r_i(x_j)$ potenciálvektort. Ez

$$r_i(x_j) = \max_{\substack{x_i \in S \\ (x_i, x_j) \in E}} {}_i \{r_p(x_i) + \tau(x_i, x_j)\}_{p=1}^{q}, \tag{2.1}$$

ahol q az i-edik pontban kapott potenciálvektor hossza.

$A4$: Ha $x_j = t$ készen vagyunk, egyébként folytassuk az eljárást az $A2$ pontban.

Az alábbi tétel az A algoritmus helyességét mondja ki.

2.1. TÉTEL. Az $R(t)$ potenciálvektor az s pontból t pontba vezető összes útvonal hosszát adja.

Bizonyítás. Elegendő azt megmutatni, hogy a k-adik lépésben kiszámolt $R(x_{i_k})$ tartalmazza az összes s-ből x_{i_k}-ba vezető út hosszát. Ezt az alábbiakban mutatjuk meg.

Tegyük fel, hogy az S halmazba az X halmaz pontjai a következő sorrendben kerültek be: $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Az első lépésben s-től x_1-ig egy út vezet, és az ezen út hosszát tartalmazza $R(x_1)$. Tegyük fel, hogy a tétel igaz az $S=\{x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}\}$ halmazra és az $R(x_1), R(x_2), \ldots, R(x_{k-1})$ potenciálokra. A k-adik lépésben kiszámoljuk az $R(x_k)$ potenciált és tegyük fel, hogy van egy olyan $R=(x_{i_1}=s, x_{i_2}, \ldots, \ldots, x_{i_{r-1}}, x_{i_r}=x_k)$ út, amely hossza nincs az $R(x_k)$ vektorban.

Az $R(x_k)$ elemeit úgy számoltuk ki, hogy vettük az összes $r_j(x_1)+\tau(x_i, x_k)$ összegeket, ahol $x_1 \in S$, $(x_1, x_k) \in E$.

Azonban a fenti összegben a $\tau(x_{r-1}, x_k)$ szerepelt, tehát a hossz csak úgy hiányozhat, ha a $P_1=P-x_k$ út hossza nincs az $R(x_{i_{r-1}})$ vektorban — szemben az indukciós feltevéssel.

3. Az összes kritikus és a szubkritikus útvonalak meghatározása

A kritikus út meghatározására van jó eljárás, de bonyolult az alternatív kritikus utak meghatározása. A maximális időtartalékok segítségével egy redukált hálón könnyen meg tudjuk határozni az alternatív kritikus utakat és a 2. leghosszabb utakat is.

Hasonló gondolattal próbálkozott MAES—TEUGELS a $\mu(x_j)-\mu(x_i)-\tau(x_i, x_j)$ feltételes időtartalékok felhasználásával, de algoritmusa hibás az első lépésről a 2. lépésre való áttérésnél (lásd [5], 204. old.).

Jelöljük $\delta(x_i)$-vel a t pontból visszafelé számolt ütemezési időket (az ún. legkésőbbi időket) és $\gamma(x_i, x_j)$-vel a maximális időtartalékot $\big(\gamma(x_i, x_j)=\delta(x_j)-\mu(x_i)-$ $-\tau(x_i, x_j)\big)$.

Legyen P egy tetszés szerinti út az s pontból a t pontba, és legyen a hossza $\lambda(P)$. Bontsuk a P utat három részre: $P=P_1\cup(x_i, x_j)\cup P_2$, ahol P_1 s-ből x_i-be, P_2 x_j-ből t-be vezet. A fentieknek eleget tevő P, P_1, P_2-re és az (x_i, x_j) élre, valamint a T kritikus időre az alábbi lemma teljesül.

3.1. LEMMA. A P út hossza és a T kritikus idő között az alábbi összefüggés van

$$\lambda(P) \leqq T-\big(\delta(x_j)-\mu(x_i)-\tau(x_i, x_j)\big) \tag{3.1}$$

Bizonyítás. A lemma helyességét számolással könnyen igazolhatjuk

$$\begin{aligned}\lambda(P) &= \lambda(P_1)+\tau(x_i, x_j)+\lambda(P_2) \leqq \\ &\leqq \mu(x_i)-\mu(s)+\tau(x_i, x_j)+\delta(t)-\delta(x_j) = \\ &= \delta(t)-\mu(s)-\big(\delta(x_j)-\mu(x_i)-\tau(x_i, x_j)\big).\end{aligned}$$

Ebből $\delta(t)=\mu(t)$ miatt a lemma állítását kapjuk, azaz

$$\lambda(P) \leqq T-\big(\delta(x_j)-\mu(x_i)-\tau(x_i, x_j)\big) = T-\gamma(x_i, x_j).$$

A 3.1. lemmából azonnal következik néhány egyszerű észrevétel:

a) Ha valamely élen $\gamma(x_i, x_j)>0$, úgy ez nem kritikus él;

b) Ha valamely (x_i, x_j)-re $\gamma(x_i, x_j)=0$, úgy van rajta átmenő kritikus út. Ugyanis az x_i-ig van telített út μ-ben s-ből, az x_j-től van telített út δ-ban t-ig, így a lemmában az egyenlőtlenség helyett egyenlőség áll.

c) Ha $(x_i, x_j)\in E$ esetén $\gamma(x_i, x_j)=0$, úgy $\delta(x_j)=\mu(x_j)$, ugyanis $\delta(x_j)-\mu(x_i)-$ $-\tau(x_i, x_j)=0$ és $\mu(x_i)+\tau(x_i, x_j)=\mu(x_j)$.

d) A kritikus út mentén $\mu(x_i)=\delta(x_i)$.

Ez utóbbi megjegyzést fogjuk kihasználni az alternatív kritikus utak meghatározásához.

Tekintsük az (X, E') irányított gráfot, ahol $E'=\{(x_i, x_j)|\gamma(x_i, x_j)=0\}$. Az algoritmus során az (X, E') gráf minden x_i pontjához hozzárendelünk egy $\omega(x_i)$ számot, amely a különböző (telített) utak számát adja s-ből x_i-be.

Legyen S azon x_i pontok halmaza, amelyre az $\omega(x_i)$ értéket már meghatároztuk.

Az összes kritikus út meghatározására szolgáló B algoritmus a következő lépésekből áll:

*B*1: Legyen $S=\{s\}$, $\omega(s)=0$.

*B*2: Válasszunk egy olyan $x_j\notin S$ pontot, amelyre nincs olyan $(x_i, x_j)\in E'$, hogy $x_j\notin S$.

$B3$: Számoljuk ki az $\omega(x_j)$ értéket:

(3.2) $$\omega(x_j) = \sum_{(x_i, x_j)\in E'} \omega(x_i)$$

$B4$: Ha $t=x_j$ készen vagyunk, ellenkező esetben folytatódik az eljárás a $B2$ pontban.

Az algoritmus konstrukciójából következik, hogy $\omega(t)$ a különböző kritikus utak számát adja.

A 3.1. lemmából az is következik, hogy ha valamely (x_i, x_j) esetén $T^*= =\gamma(x_i, x_j)>0$, úgy van olyan út, amely hossza $T-T^*$. Ezt az észrevételt használhatjuk a 2. leghosszabb útvonal meghatározására.

Tegyük fel, hogy

$$\gamma(x_{i0}, x_{j0}) = \min_{\gamma(x_i, x_j)>0} \big(\gamma(x_i, x_j)\big), (x_i, x_j)\in E.$$

$T_0=T-\gamma(x_{i0}, x_{j0})$ hosszúságú útvonal létezik, és s-ből x_{i0}-ig μ-ben telített, x_{j0}-tól t-ig δ-ban telített éleken megy át. Megmutatjuk, hogy ez a 2. leghosszabb útvonal éppen T_0 hosszúságú.

3.2. Lemma. Nincs olyan út, amelynek hossza T és T_0 közé esik.

Bizonyítás. Vegyünk egy tetszés szerinti T^* hosszúságú P^* utat. Megmutatjuk, hogy vagy $T^*=T$, vagy $T^*\leqq T_0$.

Ha a P^* út minden egyes (x_i, x_j) élére $\gamma(x_i, x_j)=0$, akkor ez kritikus út, így $T^*=T$.

Ha van olyan $(x_i^*, x_j^*)\in P^*$, hogy $\gamma(x_i^*, x_j^*)>0$, akkor a P^{**} út T^{**} hosszára, amely s-től x_i^*-ig μ-ben telített, x_j^*-tól t-ig δ-ban telített, fennáll a $T^*\subseteqq T^{**}$ egyenlőtlenség. Mivel $\gamma(x_0, y_0)$ minimális volt, így $T^{**}\leqq T_0$. Összefoglalva éppen a kívánt eredményt kaptuk, mivel

$$T^* \subseteqq T-\gamma(x_i^*, x_j^*) \leqq T-\gamma(x_{i0}, x_{j0}) = T_0.$$

A fenti eredmény nem általánosítható a 3. legrövidebb utak meghatározására. Azaz általában nem igaz, hogy ha $\gamma(\bar{x}_i, \bar{x}_j)$ a maximális időtartalékok között a 3. legkisebb, akkor a 3. leghosszabb út hossza $T-\gamma(\bar{x}_i, \bar{x}_j)$.

4. Címkézési technika

A fejezetben leírjuk a 2. pontban leírt A algoritmus módosítását, amely az eredeti algoritmust a címkézési technikával bővíti. Ezzel az utak hosszán kívül magukat az útvonalakat is meghatározhatjuk.

Ehhez az $R(x)$ potenciálvektor mellett egy vele azonos hosszúságú $Q(x)= =(q_i(x))$ címkevektorra is szükség van. A címkevektor elemeit az $A3$ lépésben töltjük ki a következőképpen. Ha a $\max_j\big(r_p(x_i)+\tau(x_i, x_j)\big)$ maximum érték valamely $r_{p^*}(x_i)$ potenciálérték esetén teljesül, akkor $q_j(x_j)=x_i$.

Az útvonal visszakeresését a címkevektorral végezhetjük el, de a szokásos visszakeresési eljárást módosítani kell. Könnyen belátható, hogy ez a módosítás abból adódik, hogy általában nem minden útvonal hossza különbözik. Tegyük fel, hogy meg akarjuk határozni az $r_k(t)$ értékhez tartozó útvonalat. Ekkor a $q_k(t)$ az azon pont címkéjét tartalmazza, amelyből a t pontba mentünk. Legyen ez az érték w.

A keresett útvonal w pont előtti címkéjét az alábbiak szerint határozzuk meg:

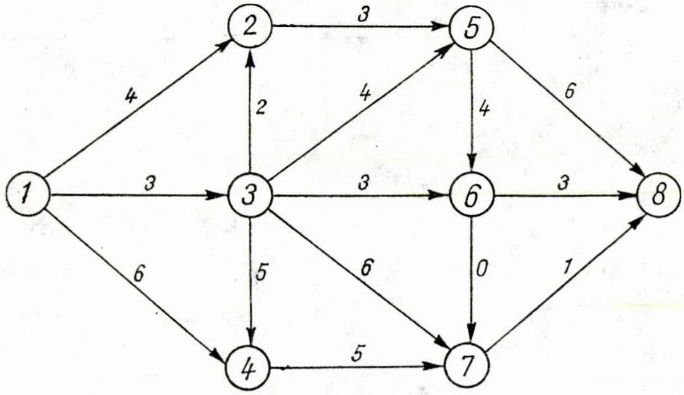
a) Kiszámoljuk a $v=r_k(t)-\tau(w, t)$ értéket.

b) Az $R(w)$ vektorban megkeressük azt az elemet, amelynek értéke v.

Ha csak egy ilyen érték van, akkor a szokásos módon megyünk tovább, azaz az ezen potenciálhoz tartozó $Q(w)$ vektor megfelelő eleme adja a következő címkét, ha több v értékű elem van $R(w)$-ben, akkor az $r_k(t)$ értékhez legalább annyi különböző útvonal tartozik, ahány v értékű elemet találtunk és $Q(w)$ megfelelő koordinátái szolgáltatják a w ponttól elágazó különböző utak előző címkéit.

A B algoritmussal a szokásos címkézési technika segítségével kaphatjuk meg a kívánt útvonalakat.

Az A algoritmust és a címkézési technikát egy számpéldán mutatjuk be. Tekintsük az 1. ábrán közölt hálózatot. A hálózat éleire írtuk a tevékenységi időket (az élhosszt). Legyen kezdő esemény 1, a befejező esemény 8, és határozzuk meg az első 5 leghosszabb útvonalat az $s=1$ pontból a $t=8$ pontba.



1. ábra

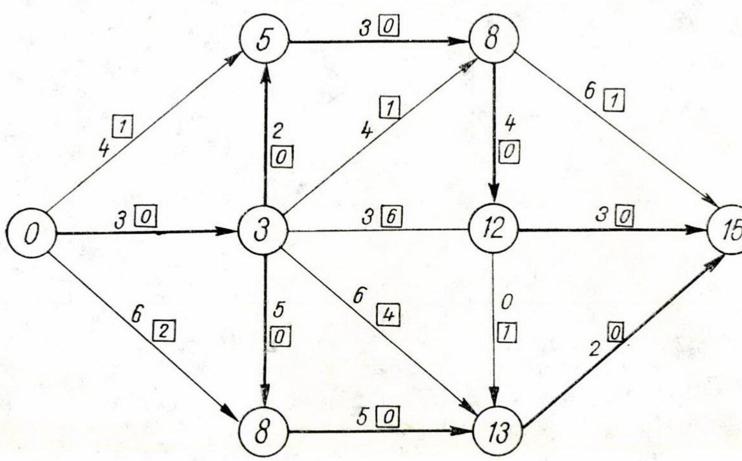
Itt minden pontba legfeljebb 5 potenciál és a hozzájuk tartozó legfeljebb 5 címke lehet. A 2. ábrán adjuk meg a potenciál- és címkeértékeket. Az ábra i-edik oszlopában az első elem az $r_1(i)$, a 2. elem a $q_1(i)$, a 3. elem az $r_2(i)$, a negyedik elem $q_2(i), \ldots$, amely értékek az i-edik ponthoz tartoznak.

Keressük meg a 14. úthosszúságú utat, amelyen a t pont előtti pont 6 (a 2. ábra 5. és 6. sora és utolsó oszlopa). Ezen az úton a 6 pont potenciálja $14-3=11$. A 6. oszlopban 11 potenciálú pont az 5-ös. Az 5 pontban a potenciál értéke 7. Végül megkapjuk a teljes útvonalat: $P=(1, 2, 5, 6, 8)$.

A B algoritmust és a 2. leghosszabb út meghatározását a 3. ábrán megadott hálózaton mutatjuk be. A pontokba írtuk be a μ és δ értékeket, amelyek a hálón megegyeznek minden pontban. Az éleken két szám van, az egyik a tevékenységi időt, a másik, bekeretezett szám a maximális időtartalékot adja meg. Az ábrán látható a két kritikus út, amely a 0 maximális időtartalékkal rendelkező részhálóból határozható meg. A 2. leghosszabb út hossza 14, mivel $\max\left(\gamma(x_i, x_j)\right)=1$, $\left(\gamma(x_i, x_j)>0\right)$. Ilyen útvonal összesen 4 van, és ezek a szokásos címkézési technikával határozhatók meg.

	1	2	3	4	5	6	7	8
Potencial	0	5	3	8	8	12	13	15
Cimke	1	3	1	3	3	5	4	6
Potencial		4		6	7	11	12	14
Cimke		1		1	2	5	6	7
Potencial					7	6	11	14
Cimke					3	3	4	6
Potencial							11	14
Cimke							6	5
Potencial							9	13
Cimke							3	7

2. ábra



3. ábra

5. Tárolási technikák

Az összes útvonal meghatározása az utak nagy száma miatt tárolási problémákba ütközik kis hálózatok esetén is. Nagy hálózatok esetén, amelyeknél a pontok száma száz, esetleg néhány ezer, csak a k-adik leghosszabb út meghatározására gondolhatunk.

Az input adatok tárolásához n^2 tárolóhelyre van szükség, ahol n az N halmaz pontjainak a száma. Az A algoritmusnál minden ponthoz két további vektort kell tárolni, a potenciál és a címke vektorokat. Így további $2n$ vektor elemeinek tárolására van szükség az algoritmus során. Ha a k-adik leghosszabb utakat akarjuk meghatározni, úgy n^2+2kn tárolóhelyre van szükség.

Mivel a hálók sűrűsége nagy méretek esetén kicsi, célszerűtlen a hálót mátrix alakban tárolni. A tároláshoz elegendő 2 vektor A és B.

Az A vektor $(2(i-1)+1)$-edik eleme mutatja meg, hogy az i-edik pontból hány él megy ki, a $(2(i-1)+2)$-edik eleme pedig azt mutatja, hogy a B vektor hányadik koordinátájánál kezdődnek az i pontból kimenő élekre vonatkozó adatok.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
A	3	1	1	7	5	9	1	19	2	21	2	25	1	29

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
B	2	4	3	3	4	6	5	3	4	5	7	6	5	4	2	2

17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
6	3	7	5	6	4	8	6	7	0	8	3	8	1

4. ábra

Legyen $d(2(i-1)+2)=q$, ekkor q-ban van az i pontból kimenő első él j_1 végpontja $b(q+1)$ tartalmazza a $d(i, j_1)$ értéket. Így összesen n pont és m él esetén $2n+2n$ tárolóhelyre van szükség. Legyen $n=1000$, $m=2000$, ekkor 1 000 000 tárolóhely helyett elegendő 6000 tárolóhellyel dolgoznunk, ami már lehetővé teszi közepes nagyságú gépek esetén is a központi memória használatát.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
C	1	1	2	5	1	7	2	9	3	13	3	19	6	25	10	37

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
D	0	1	3	1	5	3	4	1	8	3	6	1	8	2	7	2

17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
7	3	12	5	11	5	6	3	13	4	12	6	11	4	11	6

33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48
9	3	6	6	15	6	14	7	14	6	14	5	13	7	13	5

49	50	51	52	53	54	55	56
12	7	10	7	9	9	7	7

5. ábra

Az A algoritmushoz szükséges potenciál és címkevektorok tárolását is célszerű két vektorba (C, D) sűríteni. A C vektor i-edik eleme tartalmazza, hogy az $(i-1)$-edik pontig hány potenciálértéket kaptunk. Ebből kiszámolhatjuk, hogy az i-edik ponthoz tartozó potenciálok a D vektor $(2i+1)$-edik koordinátájánál kezdődnek. Azt, hogy az i-edik pontba hány potenciálérték van a $C(i+1)-C(i)$ érték adja.

A D vektor $2i$-edik elemében egy potenciálérték, a $(2i+1)$-edik elemében az ezen értékhez tartozó címke van. Tekintsük az 1. ábrán megadott hálózatot. A hálózat adatainak tárolását a fenti sűrítéssel megmutatjuk a 4. ábrán. A hálózat összes útvonalát is meghatároztuk. Összesen 10 különböző útvonal van az s pontból a t pontba. Ezen utak potenciál- és címkevektorait sűrítve tároljuk a fent elmondottak alapján (4. ábra).

GEAR [2] egy speciális tárolási eljárást javasol, amely hálók esetén a CPM algoritmus sajátosságait is figyelembe veszi. Lényegében az előbbi eljáráshoz hasonló, de az élek megtalálási idejét tekintve jóval gyorsabb tárolási technikát mutat be KNUTH ([4], 299. old.), amely duplán összekapcsolt lista struktúrával dolgozik.

IRODALOM

[1] FOX, B. L., "Calculating kth Shortest Path", *Infor.* **11** (1973) 66—70.
[2] GEAR, C. W., *Introduction to Computer Science*, (Science Research Associates, 1973).
[3] KLAFSZKY, E., *Hálózati Folyamok*, (Bolyai J. Mat. Társulat, 1969).
[4] KNUTH, E., *The Art of Computer Programming, Vol.* **1**. (Addision-Wesley P. C., 1968).
[5] MAES M. TENGELS, "Potentially Critical Path in Indeterminate Times Scheduling Graph", in: *Proceeding of Project Planning by Network Analysis* (North-Holland Publ. Co., Amsterdam, 1969) 202—206.
[6] YEN, J. Y., "Finding the K Shortest Loopless Path in a Network", *Management Sci.* **17** (1971) 712—716.

(Beérkezett: 1975. január 29.)

BAKÓ ANDRÁS
MTA SZÁMÍTÁSTECHNIKAI ÉS AUTOMATIZÁLÁSI KUTATÓ INTÉZET
1502 BUDAPEST XI., KENDE U. 13—17.

SUB-CRITICAL PATHS IN ACTIVITY NETWORK

A. BAKÓ

The known CPM algorithm defines the critical arcs and a critical path of an activity network. In this paper we discuss two algorithms. One of them determines all paths of an activity network. By the other all critical and the second longest (s.c. sub-critical) paths are obtained. We give the validity of the algorithms and show the most economical storing methods.

Alkalmazott Matematikai Lapok **1** *(1975) 373—384*

LESZÁMLÁLÁSI ALGORITMUSOK A 0—1-ES POLINOMIÁLIS PROGRAMOZÁSBAN

VIZVÁRI BÉLA

Budapest

Bár a diszkrét programozás fő vonulata még mindig a különböző típusú lineáris feladatok megoldó algoritmusainak vizsgálata, a kutatás más irányokba is megindult. Ezek közé tartozik a 0—1-es polinomális programozás is. Az eddigi irodalomban főként olyan cikkeket találunk, amelyek a feladat lineárissá való átalakítását tárgyalják és az így kapott problémát oldják meg egy már ismert módszerrel. Ezeket az eredményeket az 1. szakaszban ismertetjük röviden. A 2. szakaszban egy, ettől az irányzattól eltérő, leszámlálási algoritmust tárgyalunk, amely közvetlenül az eredeti feladatra alkalmazható. Végül az utolsó szakaszban a speciális, feltétel nélküli esetre adunk egy algoritmust.

1. Bevezetés

Ebben a szakaszban kitűzzük a megoldandó feladatot és ismertetjük a korábban javasolt módszereket.

Tekintsük a következő problémát:

$$\begin{gathered}\max f(\mathbf{x})\\ g_i(\mathbf{x}) \leqq b_i, \quad i=1,\dots,m\\ \mathbf{x}=(x_1,\dots,x_n)\\ x_j=0 \quad \text{vagy} \quad 1, \quad j=1,\dots,n\\ f, g_i, \quad i=1,\dots,m \text{ polinomok.}\end{gathered} \tag{1.1}$$

Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $f(\mathbf{0})=g_i(\mathbf{0})=0$.

A fenti problémát át lehet alakítani úgy, hogy f és g_i $(i=1,\dots,m)$ az ismeretleneknek csak lineáris kifejezései legyenek, de csak azon az áron, hogy a változók és a feltételek száma megnő.

Ilyen típusú eredményeket tartalmaz BALAS [1] és WATTERS [7] dolgozata. Az eljárás lényegét az alábbiakban tömören összefoglaljuk. Először is x_j^k helyettesíthető x_j-vel ($k \geqq 1$ és egész).[1] Legyen Q a változók indexeinek egy halmaza. Nyilván igaz a $Q \subset \{1,\dots,n\}$ reláció. Ekkor a $\prod_{q\in Q} x_q$ szorzatot helyettesítsük az x_Q változóval, melyről követeljük meg az alábbiakat:

$$\sum_{q\in Q} x_q - x_Q \leqq |Q|-1, \tag{1.2}$$

[1] A továbbiakban feltételezzük, hogy ez a helyettesítés megtörtént.

ahol $|Q|$ a Q halmaz elemeinek a számát jelöli; továbbá:

$$-\sum_{q\in Q} x_q + |Q| x_Q \leqq 0, \tag{1.3}$$

$$x_Q = 0 \quad \text{vagy} \quad 1. \tag{1.4}$$

Könnyen belátható, hogy ha az (1.2)—(1.4) feltételek teljesülnek, akkor az x_Q változó értéke valóban

$$\prod_{q\in Q} x_q$$

lesz.

Az így kapott lineáris rendszer már valamely ismert eljárással megoldható. Hibája az eljárásnak, hogy a feladat mérete — mind a sorok, mind a változók száma — nagyon megnőtt. Speciális esetben előfordulhat, hogy 2^n-n-1 új változót kellett bevezetnünk és hozzájuk $2(2^n-n-1)$ új, (1.2), ill. (1.3) típusú feltételt. GLOVER és WOOLSEY [2] cikkükben az újonnan bevezetett sorok számát redukálják némileg. Ez azonban nem oldja meg teljesen a problémát, mert a lineáris diszkrét programozási feladatok megoldásához szükséges gépidő a kombinatorikus módszerek esetében elsődlegesen a változók számától függ és egy határon túl minden módszer érzékeny a feltételek nagy számára. Előbbre lépést jelentett GLOVER és WOOLSEY [3] egy cikke, mely kiküszöböli az (1.4) feltételt, azaz x_Q változók nem diszkrétek, hanem folytonosak lesznek. Ugyanis (1.4)-től függetlenül (1.2) azt követeli meg, hogy ha valamennyi $x_q=1$, $q\in Q$, akkor x_Q legalább 1. Azt kell biztosítanunk még, hogy $x_Q>1$ ne teljesülhessen és $x_Q=0$ legyen, ha az x_q-k között van 0. Ezt biztosítja az

$$x_Q \leqq x_q, \quad q\in Q, \tag{1.5}$$

$$1 \geqq x_Q \geqq 0 \tag{1.6}$$

feltétel rendszer. Ekkor a [2]-ben (1.2)-re adott redukciók továbbra is alkalmazhatók. Továbbá az (1.5) típusú feltételek is összevonhatók. Legyen ugyanis $\hat{q}$ azon szorzatok halmaza, melyekben a q-adik változó szerepel. Mivel eddig a szorzatokat a tényezőik indexeinek halmazával jellemeztük, ezért

$$\hat{q} = \{Q\colon q\in Q\}.$$

Ekkor azok az (1.5) típusú sorok, melyekben x_q szerepel, az egyetlen

$$\sum_{Q\in\hat{q}} x_Q \leqq |\hat{q}|\, x_q \tag{1.7}$$

sorrá olvaszthatók össze. (1.7)-ből következik, hogy $x_q=0$ esetén minden megfelelő x_Q is 0.

Az eddigi eljárások az (1.1) feladatot egy vele ekvivalens lineáris feladattá írják át. Az ekvivalencia, akár az (1.1)—(1.4), akár az (1.1), (1.2), (1.5), (1.6) rendszert tekintjük is, abban az értelemben igaz, hogy az (1.1) probléma minden egyes megengedett megoldásához egyértelműen meg lehet határozni a kibővített feladat egy megengedett megoldását. Megfordítva, ha a kibővített feladat egy megengedett megoldását tekintjük, akkor ebben az $x_1, \ldots, x_n$ változók értékei az (1.1) feladat megengedett megoldását szolgáltatják. A célfüggvényértékek mindkét esetben egyenlők.

Felmerül a kérdés, hogy az (1.1) rendszert, vagy annak valamilyen átalakított formáját, milyen eljárással oldjuk meg. Ha például a korlátozás és szétválasztás módszerét választjuk, akkor GLOVER és WOOLSEY [3] eredményei feltétlenül jelentősen megkönnyítik a számítások elvégzését. Mivel azonban az eredeti (1.1) feladat tiszta 0—1-es probléma, elképzelhető volna egy leszámlálási algoritmus is. Erről lesz szó a következő szakaszban.

2. Egy leszámlálási algoritmus hatáskörének kiterjesztése

A KOVÁCS LÁSZLÓ BÉLA [4] könyvében is feldolgozott duál algoritmus lineáris rendszerekre vonatkozik:

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j,$$

$$(2.1) \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqq b_i, \quad i = 1, \ldots, m,$$

$$x_j = 0 \quad \text{vagy} \quad 1 \quad j = 1, \ldots, n.$$

Az eljárásban szereplő tesztek közül a legfontosabbak azok, amelyek közvetlenül a változók értékeire vonnak le következtetéseket.

a) *teszt (kötelező* 0 *rögzítés).* Tekintsük az i-edik feltételt:

$$(2.2) \qquad a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \leqq b_i.$$

Jelölje S az $a_{i1}, \ldots, a_{in}$ együtthatók közül a negatívok összegét. Itt és a b) tesztben is feltételezzük, hogy $S \leqq b_i$, mivel ellenkező esetben egyáltalán nincs megoldás. Ha az a_{ij} olyan, hogy

$$a_{ij} + S > b_i,$$

akkor az x_j változót 0 szinten kell rögzíteni, különben megsértenénk az i-edik feltételt.

b) *teszt (kötelező* 1 *rögzítés).* Ha az a) teszt jelöléseivel

$$S - a_{ij} > b_i,$$

akkor az x_j változót 1 szinten kell rögzíteni.

Mindkét teszt csak az együtthatók bizonyos összegeit használja fel. Valójában ezek az összegek arra alkalmasak, hogy becsüljük a (2.1) bal oldalán álló kifejezés értékét. Az, hogy melyik együtthatók szerepelnek az összegekben, azt jelenti, hogy — egy pillanatra — melyik ismeretleneket képzeltük 1 szinten, a többit pedig 0 szinten. Vegyük észre, hogy ezek a következtetések akkor is levonhatók volnának, ha nem ismeretlenekről, hanem az ismeretlenek olyan függvényeiről beszélnénk, amelyek csak a 0 vagy 1 értéket vehetik fel. Pontosabban szólva az

$$(2.3) \qquad a_{i1}f_1(\mathbf{x}) + a_{i2}f_2(\mathbf{x}) + \ldots + a_{in}f_n(\mathbf{x}) \leqq b_i,$$

$$f_j = 0 \quad \text{vagy} \quad 1$$

egyenlőtlenségre is alkalmazható mind az a), mind a b) teszt, csak ebben az esetben nem közvetlenül az ismeretlenekre, hanem azok bizonyos kifejezéseire kapunk értékeket. Az (1.1) feladatra vonatkozóan ez így fogalmazható.

Az a) teszt esetében az $f_{ij}=x_{j_1}x_{j_2}\dots x_{j_k}$ szorzat nullával egyenlő, azaz az $x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_k}$ ismeretlenek közül legalább egy a 0 értéket veszi fel. (Ennek a következménynek a további kezelésére az f) tesztben térünk vissza.)

A b) teszt esetén $f_{ij}=1$, azaz $x_{j_1}x_{j_2}\dots x_{j_k}=1$, ami csak úgy képzelhető el, ha $x_{j_1}=x_{j_2}=\dots=x_{j_k}=1$.

Vezessük be a következő fogalmakat.

2.1. DEFINÍCIÓ. Az i-edik feltételben szereplő

$$f_{ij} = \prod_{q\in Q_{ij}} x_q$$

tag hossza a szorzatban szereplő tényezők száma.

2.2. DEFINÍCIÓ. Egy x_j *változó k-ad rendű*, ha k a legrövidebb tag hossza, amelyben szerepel. Egy változó rendjének kiszámításánál definíció szerint csak a feltételekben szereplő tagokat vesszük figyelembe, a célfüggvényben levőket nem.

c) *teszt.* Ha már rögzítettünk bizonyos ismeretleneket és ezek között legalább $n-k+1$ 0-értékű van, akkor a k-adrendű ismeretlenek értéke már közömbös, a feltételek teljesülését vagy megszegését már nem befolyásolják. Ezért ha csak k-ad vagy annál magasabb rendű rögzítetlen ismeretlenünk van, akkor ezek értékét úgy kell megválasztani, hogy a célfüggvény — immár függetlenül a feltételektől — maximális legyen. Így egy

$$\max h(\mathbf{x}),$$
$$x_j = 0 \quad \text{vagy} \quad 1 \tag{2.4}$$

típusú feladatot kell megoldani, amelyben $h(\mathbf{x})$ polinom. Megjegyezzük, hogy $h(\mathbf{x})$ általában lényegesen egyszerűbb szerkezetű lesz $f(\mathbf{x})$-nél.

d) *teszt.* Mielőtt a teszt részletes ismertetésére rátérnénk, szükséges a szóhasználat tisztázása. A leszámlálás során az egyes változók értéket kapnak. Ez kétféle módon történhet: lekötéssel és rögzítéssel. Amikor az előző értékadások után valamelyik változó értéke egyértelműen meghatározható (tehát valamelyik teszt eredményes), akkor ezt a változót a megfelelő szinten lekötjük. Ha már következtetést nem tudunk levonni, akkor egy szabad változót rögzítünk, azaz a változó 0 vagy 1 értéket kap. Ezt rögzített változónak nevezzük. A rögzített változó kifejezést használjuk akkor is, ha egy már értéket kapott változót vizsgálunk, de nem tudjuk, hogy az értékadás milyen úton történt.

Amennyiben a célfüggvény monoton csökkenő, akkor alkalmazható a *Lawler—Bell teszt.* A következő lemma [6]-ban található és az ott leírt algoritmus kizárólag ezen alapul. A lemma ismertetése előtt bevezetünk két fogalmat.

2.3. DEFINÍCIÓ. *n-dimenziós vektorok parciális rendezése:* Legyen $\mathbf{x}, \mathbf{y}\in \mathbf{R}^n$, ekkor azt mondjuk, hogy

$$\mathbf{x} \leqq \mathbf{y},$$

ha minden j-re ($j=1, 2, \dots, n$)

$$x_j \leqq y_j.$$

2.4. DEFINÍCIÓ. *n-dimenziós vektorok lexikografikus rendezése:* Legyen $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$, továbbá legyen k olyan, hogy

$$x_i = y_i, \quad i = 1, \ldots, k$$

és

$$x_{k+1} < y_{k+1},$$

ekkor

$$\mathbf{x} \prec \mathbf{y}.$$

Megjegyezzük, hogy ha $\mathbf{x} \leqq \mathbf{y}$, akkor nyilván $\mathbf{x} \prec \mathbf{y}$ is teljesül.

2.1. LEMMA. Tekintsük a következő feladatot:

$$\max g(\mathbf{x}),$$

$$g_{i1}(\mathbf{x}) - g_{i2}(\mathbf{x}) \leqq b_i,$$

$$(2.5) \qquad x_j = 0 \quad \text{vagy} \quad 1, \quad j = 1, \ldots, n,$$

$$g_{i1}, g_{i2} \quad \text{monoton növekvő},$$

$$g \quad \text{monoton csökkenő}.$$

Tegyük fel, hogy az $\mathbf{x}$ vektorokat lexikografikusan növekvő sorrendben számláljuk le és az eddig talált legjobb célfüggvényértékekkel rendelkező megengedett megoldás $\hat{\mathbf{x}}$. Jelölje továbbá $\mathbf{x}^*$ a lexikografikus rendezésben az $\mathbf{x}$ után következő első olyan vektort, amelyre

$$\mathbf{x} \nleqq \mathbf{x}^*.$$

Ekkor a parciális rendezésben $\mathbf{x}$ és $\mathbf{x}^*$ között levő vektorok egyike sem lehet olyan megengedett megoldás, hogy nagyobb célfüggvényértékkel rendelkezzen, mint $\hat{\mathbf{x}}$ és $\mathbf{x}$ közül a jobbik, ha

(i) $g(\mathbf{x}) \leqq g(\hat{\mathbf{x}})$, vagy

(ii) ha $\mathbf{x}$ a feladat megengedett megoldása, vagy

(iii) ha bármely i-re

$$g_{i1}(\mathbf{x}) - g_{i2}(\mathbf{x}^{*-}) > b_i,$$

ahol $\mathbf{x}^{*-}$ az $\mathbf{x}^*$-ot a lexikografikus rendezésben közvetlenül megelőző vektor.

Ha a lemma feltételei teljesülnek, akkor olyan leszámlálást is végezhetünk, amely kizárólag a lemmából adódó tesztre épül. Ekkor a változók sorrendje előre adott. Az azonosan 0 megoldástól haladunk lexikografikusan növekvő vektorokon keresztül az azonosan 1 megoldás felé. Felmerül a kérdés, hogy a fenti eredmények alkalmazhatók-e olyan eljárásban is, amikor a változók sorrendje nem kötött és más teszteket is használunk, például a duál algoritmusban.

Természetesen mielőtt az eljárást megkezdenénk, a változók sorrendjét tetszés szerint megváltoztathatjuk. Ha egy leszámlálási algoritmus során már minden változónak értéket adtunk — akár rögzítéssel, akár lekötéssel — akkor az egyes értékadások időbeni sorrendje egyben a változók egy sorrendje is lesz, amelyik változó előbb kapott értéket, az a sorrendben előbb áll.

Amennyiben minden rögzítést 0 szinten végzünk, akkor az így kapott $\mathbf{x}$ vektor, amelyben a változók az említett új, de most rögzítettnek képzelt sorrendben állnak, a lexikografikus rendezésben az első olyan, amelyet még nem vizsgáltunk meg. Így alkalmazható rá a d) teszt, amert az ugrással nem fogunk kihagyni egyetlen olyan

x vektort sem, amelyet még meg kellene vizsgálni. Fontos hangsúlyozni, hogy ez csak akkor van így, ha a szabad változó rögzítések 0 szinten történtek.

A tesztet akkor használjuk, amikor azt gondoljuk, hogy az ágban nem lehet megengedett megoldás. A szabad változókat 0 szinten rögzítjük. A *Lawler—Bell-lemma* akkor hasznos, ha sikerül vele a feltételezést igazolni. Így feleslegessé válik a szabad változók vizsgálata. $\mathbf{x}^*$-ot úgy kapjuk, hogy meghatározzuk **x**-ben hátulról az első 0—1 párt. A 0-t 1-re változtatjuk (és a neki megfelelő változót lekötjük), a mögötte levő jegyek mind 0-k lesznek (illetve a megfelelő változók szabad változók). Ha a teszt nem eredményes, akkor a bekezdés elején említett 0 rögzítéseket töröljük.

e) *teszt.* Előállhat olyan eset, amikor az i-edik feltételnek már biztosan nem lesz következménye. Jelölje p_i az i-edik egyenlőtlenségben szereplő pozitív tagok összegét. Ha igaz az alábbi egyenlőtlenség

$$p_i \leqq b_i,$$

akkor az i-edik feltétel a változók bármely értékeire teljesülni fog. Ha ez igaz minden i-re, $i=1, \dots, m$, akkor a feltételeket nem kell figyelembe venni, hanem a c) teszthez hasonlóan a célfüggvényt kell maximalizálni, azaz egy (2.4) típusú feladatot kell megoldani.

f) *teszt (alternatív következmény).* Tegyük fel, hogy nincs kötelező 0 vagy 1 rögzítésünk. Jelentse S ugyanazt, mint az a) teszt esetén. Ha az a_{ij_1}, a_{ij_2} együtthatók olyanok, hogy

$$a_{ij_1} + a_{ij_2} + S > b_i,$$

akkor az a_{ij_1} és az a_{ij_2} mellett álló kifejezések közül az egyiknek 0-nak kell lennie. Hasonlóan

$$a_{ij_1} + a_{ij_2} + \dots + a_{ij_k} + S > b_i$$

esetén az $a_{ij_1}, a_{ij_2}, \dots, a_{ij_k}$ együtthatók mellett álló szorzatok közül kell legalább egynek 0-nak lennie.

Mind az a), mind az f) teszt következményeinek kezelése a következő módon történik:

$$\prod_{q \in Q} x_q = 0$$

ekvivalens azzal, hogy az x_q, $q \in Q$ változók közül legalább egy 0. Hasonlóan

$$\prod_{q \in Q_1} x_q = 0, \quad \text{vagy} \quad \prod_{q \in Q_2} x_q = 0, \quad \text{vagy} \dots, \quad \text{vagy} \quad \prod_{q \in Q_k} x_q = 0$$

ekvivalens azzal, hogy az x_q, $q \in \bigcup_1^k Q_r = Q$ változók közül legalább egy 0. Minden ilyen típusú feltételhez készítsük el az alábbi sorvektort:

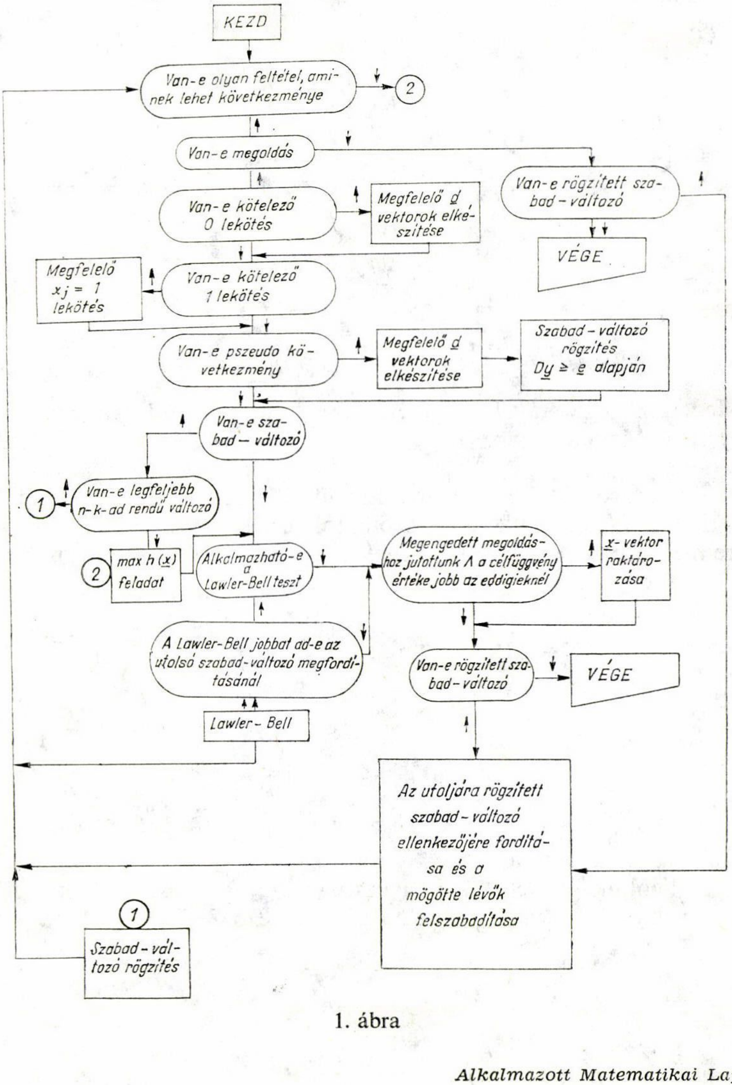
$$\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_n),$$

$$d_j = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad j \notin Q \\ 1, & \text{ha} \quad j \in Q \end{cases} \tag{2.6}$$

Az összes ilyen **d** vektor együttesen alkossa a **D** mátrixot. Tekintsük a

$$(2.7)\qquad \begin{gathered} \mathbf{D}\mathbf{y} \geqq \mathbf{e} \\ \mathbf{y} \in R^n, y_j = 0 \quad \text{vagy} \quad 1, \\ \mathbf{e}' = (1, \ldots, 1) \end{gathered}$$

feladatot. Keressük ennek egy megengedett megoldását KOVÁCS LÁSZLÓ BÉLA [5]-ban megadott heurisztikus eljárásával. A módszert arra az esetre alkalmazzuk, amikor a cél $\sum_{j=1}^{n} y_j$ minimalizálása. A kapott **y** vektort úgy használjuk fel, hogy



1. ábra

$y_j=1$ esetén $x_j=0$ *szabad változó rögzítést* végzünk. Ha $y_j=0$, akkor az x_j változó értékét egyelőre nem határozzuk meg.

A szabad változók rögzítésére vonatkozóan már láttuk, hogy amennyiben a *Lawler—Bell-tesztet* akarjuk használni, akkor mindig 0 rögzítést kell alkalmazni. A 0 rögzítés egyébként is célszerű. Különösen akkor, ha sok több tagú szorzat szerepel a feltételekben. Ugyanis a szorzatok értékét már meghatározza az, hogy ha az egyik tényező 0, míg ha bizonyos tényezők egyenlők 1-gyel és a többiről még nem tudunk semmit, akkor a szorzat még mind 0, mind 1 is lehet. Ha egy szorzat már értéket kapott, akkor azokból a feltételekből, amelyekben szerepel, lényegileg elhagyható (csak a megfelelő b_i értéket kell módosítani). Így egyetlen változó 0 választásával — a jelen esetben — több feltétel is redukálódhat, ami a feltételek könnyebb kezelését, rövid számítási időt tesz lehetővé, továbbá várhatóan megnő a következmények száma.

A fentiek felhasználásával készült algoritmus vázlata az 1. ábrán látható.

3. A feltétel nélküli feladat

Tekintsük a

$$\max h(\mathbf{x}) = \sum_{l=1}^{p} a_l \prod_{q\in Q_l} x_q, \tag{3.1}$$
$$\mathbf{x}\in \mathbf{R}^n,\ x_j = 0 \quad \text{vagy} \quad 1, \quad j=1,\ldots,n,$$
$$Q_l \subset \{1,\ldots,n\}, \quad l=1,\ldots,p$$

feladatot. Megadunk egy *szükséges* feltételt arra, hogy egy adott megoldás az optimális-e vagy sem. Megjegyezzük, hogy a feltétel nem elégséges, ennek okát is megadjuk.

Tekintsünk egy rögzített $\hat{\mathbf{x}}$ vektort. Tegyük fel, hogy $\hat{\mathbf{x}}$ a (3.1) feladatra nézve optimális. Mivel a $h(\mathbf{x})$-ben szereplő szorzatok értéke csak 0 vagy 1 lehet, ezért bármely $\mathbf{x}$-re $h(\mathbf{x})$ értéke az együtthatókból képzett összeg lesz. Pontosabban szólva van olyan $P(\hat{\mathbf{x}})=P\subset\{1,\ldots,p\}$, hogy

$$h(\hat{\mathbf{x}}) = \sum_{l\in P} a_l. \tag{3.2}$$

Ha minden

$$\prod_{q\in Q_l} \hat{x}_q \tag{3.3}$$

szorzatban legalább egy tényező 0, akkor $P=\emptyset$, ha pedig minden változó 1, akkor $P=\{1,\ldots,p\}$.

Legyen most j olyan, hogy $\hat{x}_j=1$. Vizsgáljuk a (3.2)-ben szereplő együtthatók közül azoknak az összegét, amelyekhez tartozó (3.3) szorzatban x_j szerepel. Ezt a mennyiséget jelöljük A_j-vel. Megjegyezzük, hogy a most említett (3.3) típusú szorzatok mind egyenlők eggyel. A_j tehát a következő képlettel adható meg:

$$A_j = \sum_{\substack{l \\ l\in P \\ j\in Q_l}} a_l. \tag{3.4}$$

A fentiek szerint ez a képlet tovább alakítható:

$$A_j = \sum_{\substack{l \\ l \in P \\ j \in Q_l}} a_l \prod_{q \in Q_l} \hat{x}_q .$$

Itt az $l \in P$ megkötés elhagyható, mert $l \notin P$ esetén a (3.3) kifejezés 0. Továbbá a szorzatból az x_j tényező elhagyható, mivel az értéke 1. Ekkor $Q_l - \{j\} = \emptyset$ esetén a szorzatot 1 értékűnek tekintjük. Végül azt nyertük, hogy

$$A_j = \sum_{\substack{l \\ j \in Q_l}} a_l \prod_{\substack{q \in Q_l \\ q \neq j}} \hat{x}_q \tag{3.5}$$

A_j-ről (3.4) figyelembevételével azt állíthatjuk, hogy nemnegatív. Ellenkező esetben ugyanis $\hat{\mathbf{x}}$ nem lehetne optimális, mert az $\tilde{\mathbf{x}}$:

$$\tilde{x}_q = \hat{x}_q, \quad q \neq j,$$

$$\tilde{x}_j = 0$$

megoldás jobb célfüggvényértéket adna. Ugyanis

$$h(\hat{\mathbf{x}}) = h(\tilde{\mathbf{x}}) + A_j < h(\tilde{\mathbf{x}}),$$

ami ellentmond $\hat{\mathbf{x}}$ optimalitásának.

Ezek után térjünk át a 0 szinten levő ismeretlenek vizsgálatára. Legyen tehát most j olyan, hogy $\hat{x}_j = 0$. Jelentse most A_j azoknak a tagoknak az összegét, amelyek belépnének a (3.2) jobb oldalán álló összegbe, ha $\hat{x}_j$-t 1-re módosítanánk, $\hat{\mathbf{x}}$ többi komponensét pedig változatlanul hagynánk. A_j nem lehet pozitív, mert akkor a célfüggvény érték ismét javítható lenne. Könnyen megmutatható, hogy A_j-re ismét érvényes a (3.5) képlet.

Bebizonyítottuk tehát a következő lemmát:

3.1. LEMMA. Ha egy $\hat{\mathbf{x}}$ vektor a (3.1) feladatnak optimális megoldása és A_j a (3.5) által definiált mennyiség, akkor

$$\hat{x}_j = 1 \quad \text{esetén} \quad A_j \geqq 0,$$

$$\hat{x}_j = 0 \quad \text{esetén} \quad A_j \leqq 0.$$

Azokat a pontokat, amelyek kielégítik a szükséges feltételt, helyi maximumoknak fogjuk nevezni. Egy példán keresztül mutatjuk meg, hogy a helyi maximumok nem okvetlenül a feladat optimális megoldásai. Tekintsük a következő problémát:

$$\max (x_1x_2 + x_1x_2x_3 + x_3 - x_4x_5 + 2x_4 + 3x_5 - 4x_1x_4 +$$

$$+ x_2x_4 - 2x_2x_5 - 2x_3x_5).$$

Ekkor az $x_1 = x_2 = x_3 = 1$, $x_4 = x_5 = 0$ megoldás esetén $A_1 = A_2 = A_3 = 2$, $A_4 = A_5 = -1$, tehát a lemma kívánalmai teljesülnek. A célfüggvényérték 3. Helyi maximum azonban az $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, $x_4 = x_5 = 1$ megoldás is, ugyanis $A_1 = -4$, $A_2 = A_3 = -1$, $A_4 = 1$, $A_5 = 2$. A célfüggvényérték 4 és könnyen ellenőrizhető, hogy ez az optimumhely.

Osszuk két részre a változókat. Az első csoportba tartozzon x_1, x_2, x_3; a másodikba x_4, x_5. Vonjuk össze egyetlen y, ill. z ismeretlenné az azonos csoportban (levőket. A feladatunk alakja ekkor

$$\max(3y+4z-7yz)$$

lesz.

Most

3.6) $$y=1, \quad z=0, \quad \text{ill.} \quad y=0, \quad z=1$$

helyi maximumok és az optimális megoldás az utóbbi. Általában két dimenzióban a

$$\max(ay+bz+cyz)$$

problémát tekintve, ha teljesülnek az alábbiak

$$a \geqq 0, \quad b \geqq 0,$$

$$b+c \leqq 0, \quad a+c \leqq 0,$$

akkor (3.6)-ban szereplő mindkét megoldás helyi maximum.

Itt is megadhatunk az előző szakasz a) és b) tesztjének mintájára kötelező 1, illetve 0 lekötéseket. Nevezetesen:

g) *teszt.* Ha az x_j változó olyan, hogy csak pozitív együtthatós tagokban szerepel, vagy $h(\mathbf{x})$-ben van egy ax_j tag és $a>0$, valamint azon negatív együtthatós tagok együtthatóinak összege, melyekben x_j szerepel, abszolút értékben kisebb, mint a, akkor az optimális megoldásban

$$x_j = 1.$$

h) *teszt.* Ha x_j olyan, hogy $h(\mathbf{x})$-ben az ax_j szerepel, $a<0$, és azon pozitív előjelű tagok együtthatóinak összege, melyben x_j szerepel, abszolút értékben kisebb a-nál, illetve x_j csak negatív együtthatós tagokban szerepel, akkor az optimális megoldásban

$$x_j = 0.$$

Megjegyezzük, hogy mindkét teszt általánosítható több ismeretlen egyidejű vizsgálatára, csak ekkor a helyett a g) tesztben a tekintett ismeretlenek pozitív előjelű szorzatai együtthatóinak összegéről és azon negatív együtthatós szorzatokról kell beszélni, amelyekben a vizsgált változók valamelyike szerepel. Hasonlóképpen lehet a h) tesztet is általánosítani.

A (3.1) problémát szintén egy leszámlálási algoritmussal oldjuk meg. A leszámlálás az (1, 1, ..., 1) vektorból kiindulva a (0, 0, ..., 0) vektor felé halad. Az éppen nem rögzített változók értékét 1-nek képzeljük. Ha már találtunk a szükséges feltételt kielégítő megoldást, akkor bevezetünk egy célfüggvény feltételt, amelyre majd alkalmazzuk az előző szakasz tesztjeit.

Az algoritmus a következő.

(i) Kiszámítjuk az A_j értékeket.

(ii) Alkalmazzuk a g és a h tesztet. Ha eredményesek, akkor a megfelelő változókat a megfelelő szinten lekötjük és minden egyes lekötés után módosítjuk az A_j értékeket.

(iii) Ha már van célfüggvény feltétel, akkor alkalmazzuk rá a teszteket.

α) Ha nincs megoldás, akkor megyünk a (v) lépésre.

β) Ha lehet megoldás és van következmény, akkor a megfelelő változókat lekötjük és minden egyes lekötés után az A_j értékeket módosítjuk, megyünk az (iv) lépésre.

γ) Különben megyünk az (iv) lépésre.

(iv) Ellenőrizzük a szükséges feltételt.

α) Ha teljesül a szabad változókat 1 szinten rögzítjük. Amennyiben jobb célfüggvényt kaptunk, mint az eddigi legjobb, akkor új célfüggvény feltételt képzünk. A megoldást tároljuk. Megyünk a (v) lépésre.

β) Ha nem teljesül, akkor azt a szabad változót, amelyik a legjobban megsérti, az ellenkezőjére változtatjuk és rögzítjük. Az A_j értékeket módosítjuk. Megyünk a (ii) lépésre. Ha nincs ilyen szabad változó, akkor egy tetszőlegeset 0 szinten rögzítünk. Ugyancsak az (ii) lépésre megyünk.

γ) Ha egyáltalán nincs szabad változó, akkor megyünk a (v) lépésre.

(v) Az utolsó rögzített változót ellenkezőjére változtatjuk, lekötjük és megyünk az (ii) lépésre. Ha csak lekötött változó van, akkor véget ér az algoritmus.

Megjegyzések. 1. Mindjárt az indulásnál képezhetünk célfüggvény feltételt, mert az azonosan 0, ill. azonosan 1 megoldások rendelkezésre állnak. A megfelelő célfüggvényértékek 0, ill. $\sum_{l=1}^{p} a_l$. A kettő közül a jobbat választhatjuk, a megoldást az (iv) lépés α) részének megfelelően tároljuk.

2. Az A_j értékek 1 rögzítés, ill. lekötés esetén nem változnak.

3. Az (iv) lépés α) részében az utolsó szabad változót már leköthetjük. Ugyanitt a rögzítések feleslegesek, ha minden szabad változó csak pozitív előjelű tagokban szerepel. Ekkor azonnal mehetünk a (v) lépésre.

4. Az (iv) lépés α) részében végezhetünk más rögzítéseket is. Ekkor felhasználhatjuk az (iii) lépésben kapott alternatív következményeket, melyekhez csatolhatjuk azt, hogy a szabad változók közül legalább kettőnek a 0 értéket kell majd felvennie. Ez abból következik, hogy a szükséges feltétel teljesül, tehát egyetlen változó 0-ra fordításával nem lehet jobb célfüggvényértéket elérni. Ekkor (2.7) jobb oldalán a megfelelő sorban nem 1, hanem 2 áll.

Végezetül a szerző köszönetet mond KOVÁCS LÁSZLÓ BÉLÁnak a kézirat gondos áttanulmányozásáért és hasznos tanácsaiért.

IRODALOM

[1] BALAS, E., "Extension de l'algorithme additiv a la programmation non lineaire", *C.R. Sc. Paris* (1964).

[2] GLOVER, F. and WOOLSEY, E., "Further reduction of zero-one polinomial programming problems to zero-one linear programming problems", *Operation Research* **21** (1973) 156—161.

[3] GLOVER, F. and WOOLSEY, E., "Converting the 0—1 polinomial programming problem to a 0—1 linear programm", *Operation Research* **22** (1974) 180—182.

[4] KOVÁCS, L. B., *A diszkrét programozás kombinatorikus módszerei* (Bolyai János Matematikai Társulat, Budapest, 1969).

[5] KOVÁCS, L. B., "A new solution for general set covering problem", in: *5th Conference on Optimization Techniques Part I.* (Springer Verlag, Lecture Notes in Computer Science **3**, 1973.)

[6] LAWLER, E. and BELL, M., "A method for solving discrete optimization problems", *Operation Research* **15** (1967) 1098—1112.
[7] WATTERS, L. J., "Reduction of integer polinomial programming problems to zero-one linear programming problems", *Operation Research* **15** (1967) 1171—1174.
[8] ZANGWILL, W. I., "Media selection by decision programming", *J. Avert. Res.* **5** (1965) 23—27.

(Beérkezett: 1974. október 18.)

VIZVÁRI BÉLA
MTA SZÁMÍTÁSTECHNIKAI ÉS AUTOMATIZÁLÁSI KUTATÓ INTÉZET
1502 BUDAPEST XI., KENDE U. 13—17.

ENUMERATIVE ALGORITHMS IN THE ZERO-ONE POLINOMIAL PROGRAMMING

B. VIZVÁRI

In this paper we shall discuss the problem (1.1) where f and g_i, $i=1, \ldots, m$ are polinoms. The most of earliers paper ([1], [2], [3], [7], [8]) converted this problem to a zero-one linear programming problem (ILP problem), which has substantiely increase in the number of constraints and variables (see (1.2)—(1.7)). In the second section we suggest an enumerative algorithm which was used first to solve ILP problem ([4]). This algorithm can used with a little modification. Two earlier methods are built into the algorithm. One of them is a heuristic method for setcovering problem ([5]), and the other is the *Lawler—Bell method* ([6]). We discuss the unconditional problem in the last section. It can be used when we solve the general problem. We give a necessary condition for the optimality of a solution (see 3.1 lemma). This condition is not suffecient and the cause of this fact is also given. We give an algorithm based on the necessary condition and the tests of pervious section.

Alkalmazott Matematikai Lapok **1** *(1975) 385—389*

A LOGKONKÁV MÉRTÉKEK ALAPTÉTELÉNEK ÚJ BIZONYÍTÁSA

PRÉKOPA ANDRÁS

Budapest

A dolgozatban egyszerűbb bizonyítást adunk a [2] dolgozat fő tételére. E tétel azt mondja ki, hogy ha a P valószínűségi mértéket egy logkonkáv f sűrűségfüggvény származtatja az R^m térben, akkor P logkonkáv mérték. E rövidebb bizonyításnak az a lényege, hogy az (1.3) integrálegyenlőtlenség egyszerűbben bizonyítható logkonkáv g, h függvények esetén, az integrálegyenlőtlenségből viszont az alaptétel már közvetlenül adódik.

1. Bevezetés

A [2] dolgozatban bevezettük a logaritmikusan konkáv (röviden logkonkáv) mérték fogalmát. Egy az R^m tér mérhető részhalmazain értelmezett P mértéket logkonkávnak nevezünk, ha tetszőleges A, B, R^m-beli konvex halmazok és $0<\lambda<1$ esetén fennáll az alábbi egyenlőtlenség

$$P(\lambda A+(1-\lambda)B) \geqq [P(A)]^{\lambda}[P(B)]^{1-\lambda}. \tag{1.1}$$

Egy az R^m téren értelmezett nemnegatív f pontfüggvényt logaritmikusan konkávnak (röviden logkonkávnak) nevezünk, ha tetszőleges $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in R^m$ pontpár és $0<\lambda<1$ esetén fennáll az

$$f(\lambda \mathbf{x}+(1-\lambda)\mathbf{y}) \geqq [f(\mathbf{x})]^{\lambda}[f(\mathbf{y})]^{1-\lambda} \tag{1.2}$$

egyenlőtlenség. A [2] dolgozat fő tétele a következőt mondja ki (egyszerűség kedvéért csak valószínűségi mértékkel foglalkozunk).

1.1. Tétel. Ha a P mértéket egy logkonkáv f sűrűségfüggvény származtatja, akkor P is logkonkáv.

A tétel eredeti bizonyítása egy integrálegyenlőtlenségen és a *Brunn—Minkowski-tételen* alapszik. A szóban forgó integrálegyenlőtlenség speciális esete az alábbinak

$$\int_{R^m} r(\mathbf{t})\,d\mathbf{t} \geqq \Big[\int_{R^m} g^{\frac{1}{\lambda}}(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}\Big]^{\lambda}\Big[\int_{R^m} h^{\frac{1}{1-\lambda}}(\mathbf{y})\,d\mathbf{y}\Big]^{1-\lambda}, \tag{1.3}$$

ahol g, h nemnegatív *Borel-mérhető* függvények R^m-ben, $0<\lambda<1$, továbbá

$$r(\mathbf{t}) = \sup_{\lambda\mathbf{x}+(1-\lambda)\mathbf{y}=\mathbf{t}} g(\mathbf{x})h(\mathbf{y}). \tag{1.4}$$

A [2] dolgozatban bebizonyítottuk, hogy ekkor $r(t)$ *Lebesgue-mérhető*. (A dolgozatban hibásan *Lebesgue-féle* és nem *Borel-féle mérhetőséget* kivántunk meg a szupremumban résztvevő két függvénytől, holott a bizonyítás az utóbbi esetre vonatkozik.) A [2] dolgozatban az (1.3) egyenlőtlenség $m=1$, $\lambda=\frac{1}{2}$ esetére adtunk bizonyítást. Ezt az egyenlőtlenséget LEINDLER [1] általánosította az $m=1$ és az általános λ $(0<\lambda<1)$ esetére, végül a [3] dolgozatban bizonyítottuk be az (1.3) egyenlőtlenséget.

Az (1.3) egyenlőtlenségből tételünk közvetlenül adódik, amint ez a [3] dolgozatból is kitűnik. Ehhez elegendő az (1.3) egyenlőtlenség évényessége logkonkáv f, g függvények esetére. Ezt fogjuk dolgozatunkban bizonyítani. A bizonyítás gondolata azonban alkalmazható minden további nélkül az általános esetre is. Hogy mégis erre a speciális esetre szorítkozunk, annak az az oka, hogy jelen bizonyítást elsősorban az egyetemi oktatás számára készítettük és emiatt nem akarunk LUSTERNIK tételére hivatkozni, melyre támaszkodva az általános eset tárgyalható, amint azt később meg is jegyezzük majd.

A bizonyítást ismertettem az 1974 júliusában *Oxfordban* tartott *Nemzetközi Sztohasztikus Programozási Konferencián* és részét alkotja a kiadványba leadott [4] angol nyelvű cikkemnek.

2. Az 1.1. tétel bizonyítása

Mindenekelőtt megjegyezzük, hogy ha az (1.4) képletben szereplő g, h függvények logkonkávak R^m-ben, akkor — amint az egyszerűen belátható, r is logkonkáv R^m-ben. Egy logkonkáv függvény mérhető, hiszen konvex azoknak a pontoknak a halmaza, amelyeken a függvény pozitív, e halmaz belsejében pedig a függvény folytonos. Eszerint g, h, r mérhető függvények R^m-ben.

Az (1.3) egyenlőtlenséget bizonyítjuk be logkonkáv g, h függvények esetére. Először az $m=1$ esettel foglalkozunk. Feltesszük, hogy g, h korlátosak és bevezetjük a következő jelölést

$$\sup_{x\in R^1} g(x) = U, \quad \sup_{y\in R^1} h(y) = V.$$

Könnyű belátni, hogy

$$\sup_{t\in R^1} r(t) = UV.$$

Ha U és V közül legalább az egyik zéró, akkor az (1.3) egyenlőtlenség triviálisan fennáll. Tegyük fel tehát, hogy $U>0$, $V>0$.

Közbevetőleg megjegyezzük, hogy ha k egy R^1-en értelmezett függvény, melyre fennáll, hogy $0\leqq k(x)\leqq 1$, minden $x\in R^1$ esetén, akkor érvényes az alábbi egyenlőség

$$\int_{-\infty}^{\infty} k(x)\,dx = \int_0^1 K(z)\,dz, \tag{2.1}$$

ahol

$$K(z) = \mu[\{x|k(x) \geqq z\}], \quad 0 \leqq z \leqq 1$$

és μ a *Lebesgue-mérték* jele.

Legyen $0 \leqq z < 1$ és $0 < \lambda < 1$. Értelmezzük a $G(z)$, $H(z)$, $R(z)$ értékeket az alábbi módon

$$G(z) = \mu\left[\left\{x \,\middle|\, \frac{1}{U} g(x) \geqq z^{\lambda}\right\}\right],$$

$$H(z) = \mu\left[\left\{y \,\middle|\, \frac{1}{V} h(y) \geqq z^{1-\lambda}\right\}\right],$$

$$R(z) = \mu\left[\left\{t \,\middle|\, \frac{1}{UV} r(t) \geqq z\right\}\right].$$

Fennáll a következő reláció

(2.2) $$\{t|r(t) \geqq z\} \supset \lambda\{x|g(x) \geqq z^{\lambda}\} + (1-\lambda)\{y|h(y) \geqq z^{1-\lambda}\}.$$

Mindegyik, ebben az egyenlőtlenségben szereplő, halmaz nem üres. Minthogy g, h, r logkonkávak, e halmazok intervallumok. A (2.2) relációnak igen egyszerű következménye az alábbi egyenlőtlenség (egydimenziós *Brunn-egyenlőtlenség*):

(2.3) $$R(z) \geqq \lambda G(z) + (1-\lambda) H(z).$$

Mindkét oldalon 0-tól 1-ig integrálva, majd felhasználva a (2.1) relációt, az alábbi egyenlőtlenséghez jutunk

(2.4) $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{UV} r(t)\,dt \geqq$$

$$\geqq \lambda \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{U} g(x)\right]^{\frac{1}{\lambda}} dx + (1-\lambda) \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{V} h(y)\right]^{\frac{1}{1-\lambda}} dy.$$

Innen rögtön adódik az $m=1$ esetre vonatkozó (1.3) egyenlőtlenség az aritmetikai-geometriai átlagokra vonatkozó egyenlőtlenség alapján.

Ha a g, h függvények közül legalább az egyik nem korlátos, akkor értelmezzük az alábbi függvényeket

$$g_U(x) = \begin{cases} g(x), & \text{ha } \; g(x) < U \\ U, & \text{ha } \; g(x) \geqq U, \end{cases}$$

$$h_V(y) = \begin{cases} h(y), & \text{ha } \; h(y) < V, \\ V, & \text{ha } \; h(y) \geqq V, \end{cases}$$

melyek korlátosak és logkonkávak, majd elvégezzük az $U \to \infty$, $V \to \infty$ határátmenetet a g_U, h_V függvényekre felírt (1.3) egyenlőtlenségben. Ilyenformán eljutunk az $m=1$ esetre vonatkozó általános (1.3) egyenlőtlenséghez.

Az általános m esetére vonatkozó (1.3) egyenlőtlenséget teljes indukcióval bizonyítjuk. Tegyük fel, hogy az (1.3) egyenlőtlenség fennáll a legfeljebb $(m-1)$-változós g, h függvények esetére. Legyen $p(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ az $\mathbf{u} \in R^m$, $\mathbf{v} \in R^m$ vektorokban foglalt változók logkonkáv függvénye. A logkonkavitás következtében fennáll az alábbi egyenlőtlenség

$$p(\lambda \mathbf{u}_1 + (1-\lambda)\mathbf{u}_2, \mathbf{v}) \geqq [p(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1)]^{\lambda} [p(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2)]^{1-\lambda}$$

minden $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$, $0<\lambda<1$ esetén, ahol $\mathbf{v}=\lambda\mathbf{v}_1+(1-\lambda)\mathbf{v}_2$. Ha $m_2 \leqq m-1$, akkor a (3.1) egyenlőtlenséget alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\int_{R^{m_2}} p(\lambda\mathbf{u}_1+(1-\lambda)\mathbf{u}_2, \mathbf{v})\,d\mathbf{v} \geqq$$

$$\geqq \int_{R^{m_2}} \sup_{\lambda\mathbf{v}_1+(1-\lambda)\mathbf{v}_2=\mathbf{v}} [p(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1)]^{\lambda}[p(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2)]^{1-\lambda}\,d\mathbf{v} \geqq$$

$$\geqq \Big[\int_{R^{m_2}} p(\mathbf{u}_1, \mathbf{v})\,d\mathbf{v}\Big]^{\lambda}\Big[\int_{R^{m_2}} p(\mathbf{u}_2, \mathbf{v})\,d\mathbf{v}\Big]^{1-\lambda}.$$

Ez azt jelenti, hogy a $p(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ függvénynek a $\mathbf{v}$ szerinti integrálja az $\mathbf{u}$ változó logkonkáv függvénye.

Legyen g és h két m-változós logkonkáv függvény és particionáljuk a változókat $\mathbf{x}=(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ módon, ahol $\mathbf{x}_1 \in R^{m_1}$, $\mathbf{x}_2 \in R^{m_2}$ és $1 \leqq m_1 \leqq m-1$, $1 \leqq m_2 \leqq m-1$, $m_1+m_2=$ $=m$. Ekkor írhatjuk, hogy

$$\int_{R^m} \sup_{\lambda\mathbf{x}+(1-\lambda)\mathbf{y}=\mathbf{t}} g(\mathbf{x})h(\mathbf{y})\,d\mathbf{t} =$$

$$= \int_{R^{m_1+m_2}} \sup_{\substack{\lambda\mathbf{x}_1+(1-\lambda)\mathbf{y}_1=\mathbf{t}_1 \\ \lambda\mathbf{x}_2+(1-\lambda)\mathbf{y}_2=\mathbf{t}_2}} g(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)h(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2)\,d\mathbf{t}_1\,d\mathbf{t}_2 \geqq$$

$$\geqq \int_{R^{m_2}} \sup_{\lambda\mathbf{x}_2+(1-\lambda)\mathbf{y}_2=\mathbf{t}_2} \Big[\int_{R^{m_1}} \sup_{\lambda\mathbf{x}_1+(1-\lambda)\mathbf{y}_1=\mathbf{t}_1} g(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)h(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2)\,d\mathbf{t}_1\Big]\,d\mathbf{t}_2 \geqq$$

$$\geqq \int_{R^{m_2}} \sup_{\lambda\mathbf{x}_2+(1-\lambda)\mathbf{y}_2=\mathbf{t}_2} \Big[\int_{R^{m_1}} g^{\frac{1}{\lambda}}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)\,d\mathbf{x}_1\Big]^{\lambda}\Big[\int_{R^{m_1}} h^{\frac{1}{1-\lambda}}(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2)\,d\mathbf{y}_1\Big]^{1-\lambda} d\mathbf{t}_2 \geqq$$

$$\geqq \Big[\int_{R^{m_1+m_2}} g^{\frac{1}{\lambda}}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)\,d\mathbf{x}_1\,d\mathbf{x}_2\Big]^{\lambda}\Big[\int_{R^{m_1+m_2}} h^{\frac{1}{1-\lambda}}(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2)\,d\mathbf{y}_1\,d\mathbf{y}_2\Big]^{1-\lambda} =$$

$$= \Big[\int_{R^m} g^{\frac{1}{\lambda}}(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}\Big]^{\lambda}\Big[\int_{R^m} g^{\frac{1}{1-\lambda}}(\mathbf{y})\,d\mathbf{y}\Big]^{1-\lambda}.$$

Ezzel bebizonyítottuk a (3.1) egyenlőtlenséget logkonkáv függvények esetére.

Az 1.1. tétel állítása most már igen egyszerűen következik. Értelmezzük az alábbi függvényeket

$f_1(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$, ha $\mathbf{x} \in A$ és $f_1(\mathbf{x}) = 0$ egyébként,

$f_2(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$, ha $\mathbf{x} \in B$ és $f_2(\mathbf{x}) = 0$ egyébként,

$f_3(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$, ha $\mathbf{x} \in \lambda A+(1-\lambda)B$ és $f_3(\mathbf{x}) = 0$ egyébként.

Minthogy f logkonkáv, ugyanez érvényes az f_1, f_2 függvényekre is, továbbá fennáll az alábbi egyenlőtlenség

$$f_3(\mathbf{t}) \geqq \sup_{\lambda\mathbf{x}+(1-\lambda)\mathbf{y}=\mathbf{t}} f_1(\mathbf{x})f_2(\mathbf{y}), \quad \mathbf{t} \in R^m.$$

Innen a (3.1) egyenlőtlenség felhasználásával következik, hogy

$$\int_{\lambda A+(1-\lambda)B} f(\mathbf{t})\,d\mathbf{t} = \int_{R^m} f_3(\mathbf{t})\,d\mathbf{t} \geqq$$

$$\geqq \Big[\int_{R^m} f_1(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}\Big]^{\lambda} \Big[\int_{R^m} f_2(\mathbf{y})\,d\mathbf{y}\Big]^{1-\lambda} =$$

$$= \Big[\int_A f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}\Big]^{\lambda} \Big[\int_B f(\mathbf{y})\,d\mathbf{y}\Big]^{1-\lambda}.$$

Ezzel az 1.1. tételt bebizonyítottuk.

Egyidejűleg bebizonyítottuk a következő tételt is.

2.1. TÉTEL. Ha $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, $\mathbf{x}\in R^n$, $\mathbf{y}\in R^m$ az összes változóit tekintve logkonkáv függvény, akkor az

$$\int_{R^m} f(\mathbf{x}, \mathbf{y})\,d\mathbf{y}$$

függvény az $\mathbf{x}$ változó logkonkáv függvénye.

E tételből következik, hogy logkonkáv függvények konvolúciója szintén logkonkáv. Ha ugyanis g, h logkonkávak R^m-ben, akkor $g(\mathbf{x}-\mathbf{y})h(\mathbf{y})$ logkonkáv R^{2m}-ben és az $\mathbf{y}$ szerinti integrálja az $\mathbf{x}$ változó logkonkáv függvénye lesz.

Az ebben a dolgozatban ismertetett bizonyítási módszer alkalmas az (1.3) integrálegyenlőtlenség általános esetének a bizonyítására is. A szükséges változtatás abban áll, hogy a (2.2) egyenlőtlenségből — minthogy most általában nem intervallumokra vonatkozik — a (2.3) egyenlőtlenségre LUSTERNIK egy ismert tétele alapján következtetünk.

IRODALOM

[1] LEINDLER, L., "On a certain converse of Hölder's inequality. II", *Acta Sci. Math.* **33** (1972) 217—223.

[2] PRÉKOPA, A., "Logarithmic concave measures with application to stochastic programming", *Acta Sci. Math.* **32** (1971) 301—316.

[3] PRÉKOPA, A., "On logarithmic concave measures and functions", *Acta Sci. Math.* **34** (1973) 335—343.

[4] PRÉKOPA, A., "Logarithmic concave measures and related topics", in: *Proceedings of the International Conference on Stochastic Programming*, Ed. M. A. H. Dempster (Academic Press, 1975), megjelenés előtt.

(Beérkezett: 1975. június 2.)

PRÉKOPA ANDRÁS
MTA SZÁMÍTÁSTECHNIKAI ÉS AUTOMATIZÁLÁSI KUTATÓ INTÉZET
1502 BUDAPEST XI., KENDE U. 13—17.

NEW PROOF FOR THE BASIC THEOREM OF LOGCONCAVE MEASURES

A. PRÉKOPA

In this paper we give a simple proof for the main theorem of the paper [2]. This theorem states that if the probability measure P defined in R^m is generated by a logconcave probability density function then P is a logconcave measure. This proof uses the fact that the integral inequality (1.3) can relatively simply be proved in case of logconcave functions g, h. From this special case of the integral inequality the mentioned theorem easily follows.

Alkalmazott Matematikai Lapok 1 *(1975) 391—396*

GEOMETRIAI BIZONYÍTÁSOK A LINEÁRIS EGYENLŐTLENSÉG RENDSZEREK ELMÉLETÉBEN

KUN ISTVÁN
Budapest

A dolgozat csaknem teljesen elemi geometriai bizonyítást ad az R^m-beli konvex halmazok szeparációs tételére. Ennek segítségével egyszerű bizonyítások adhatók *Farkas tételére*, valamint CSERNYIKOVnak [13] 7.4. tételében megfogalmazott alapvető eredményére: szükséges és elégséges feltételt arra, hogy egy (esetleg végtelen) lineáris egyenlőtlenség rendszer minden következménye valamilyen véges részrendszernek is következménye legyen.

1. Bevezetés

A probléma, amellyel ez a dolgozat foglalkozik, a legáltalánosabb formájában a következő:

1.1. PROBLÉMA. Legyen X lokálisan konvex topologikus vektortér (a továbbiakban LCTVS) a valós számok fölött. Legyen A tetszőleges számosságú indexhalmaz, g és f_α, $\alpha \in A$ pedig X-en értelmezett folytonos lineáris funkcionálok. Az a kérdés, mi annak a szükséges és elégséges feltétele, hogy az

$$f_\alpha(\mathbf{x}) \leqq 0, \quad \alpha \in A \tag{1.1}$$

egyenlőtlenség rendszernek következménye legyen a

$$g(\mathbf{x}) \leqq 0 \tag{1.2}$$

egyenlőtlenség, vagyis (1.1) minden megoldása kielégítse (1.2)-t is.

Az inhomogén eset visszavezethető a homogénra, pl. [13] 7.1. lemmája szerint. Legyen ugyanis P rendezett test, $L(P)$ vektortér P felett, g és f_α, $\alpha \in A$ az $L(P)$ téren értelmezett, P-beli értékű lineáris függvények, b és a_α, $\alpha \in A$ P-beli konstansok. A $g(\mathbf{x})-b \leqq 0$ inhomogén egyenlőtlenség akkor és csak akkor következménye az $f_\alpha(\mathbf{x})-a_\alpha \leqq 0$, $\alpha \in A$ inhomogén egyenlőtlenség rendszernek, ha a $g(\mathbf{x})-bt \leqq 0$ homogén egyenlőtlenség következménye az $f_\alpha(\mathbf{x})-a_\alpha t \leqq 0, \alpha \in A$; $-t \leqq 0$ homogén egyenlőtlenség rendszernek.

A továbbiakban csak homogén rendszerekkel foglalkozunk. Az inhomogén esetet tárgyalja [13], valamint a legáltalánosabb feltételek mellett [6] és [7].

Mielőtt tovább mennénk, nézzük meg, milyen alapszámtestek jöhetnek szóba a valós számokon kívül.

[1] és részben [6] komplex számtestet, [4] és [13] tetszőleges rendezett algebrai testet használ. [13] azonban a végtelen egyenlőtlenség rendszerekre vonatkozó néhány tételnél visszatér a valós számtesthez. Bár a szerző ezt nem indokolja külön, nyilván az alapszámtest topológiai zártságára van szükség.

A funkcionálanalízis egyik alapvető, RIESZtől származó tétele szerint *Hilbert-térben* minden folytonos lineáris funkcionál előállítható, mint a független változónak egy rögzített vektorral vett skaláris szorzata. Ez a tétel jelenti az „átmenetet" az 1.1. probléma legegyszerűbb és legáltalánosabb (R^n-ben, illetve LCTVS-ben felírt) alakja között.

Részletes történeti áttekintést nyújt [9, 84—89] és [13, 9—21]. Így felsorolás helyett ez a cikk inkább csak az irodalom bizonyos rendszerezését adja, a konkrét utalások pedig ennek illusztrálására szolgálnak.

Az 1.1. probléma kezelésére két, egymástól lényegesen eltérő módszertípus ismeretes: az algebrai (kombinatorikus) és a topológiai (a konvex kúpok topologikus tulajdonságain alapuló). A véges rendszerek tárgyalása általában tisztán algebrai módszerrel történik, lásd [4], [8] (az itt szereplő bizonyítást közli [9] is), [12], [1] (bár közli a topológiai tárgyalásmód matematikai apparátusát is). [6], [7], [13] a végtelen rendszerek tárgyalásakor szeparációs tételt használ. (Szeparációs tételen ebben a dolgozatban konvex halmaznak egy rajta kívül fekvő ponttól hipersíkkal való elválaszthatóságát kimondó tételt értünk.) [11] is topologikus tárgyalásmódot alkalmaz, de nem szeparációra, hanem ortogonális projekcióra alapozva. Érdekes [13] 7. fejezete, ahol a szerző végtelen rendszerekre is bizonyít néhány tételt tisztán algebrai úton. Az algebrai módszerek minden szóba jövő alapszámtestnél használhatók, de lényegében csak véges rendszerekre, a topológiaiak végtelen esetben is használhatók, de csak topológiailag zárt (pl. valós vagy komplex) alaptestnél.

Szeparációs tételt bizonyít általános LCTVS-ben [3], (ezt használja fel R^m-ben [13]), az 1.1. probléma inhomogén változatát LCTVS-ben pedig [6] és [7] tárgyalja. Véges dimenziós vektortérbeli szeparációs tételt bizonyít [1], [2], [10], [11], a *Hilbert-térre* való kiterjeszthetőséget csak említve. Ebbe a csoportba tartozik egy [5]-ben található bizonyításvázlat, amelynek alapötletét, az elemi geometriai megközelítést fel fogjuk használni.

Az említett szeparációs tételek mindegyike tulajdonképpen speciális esete a *Hahn—Banach-tétel* ún. geometriai alakjának. Ez utóbbi azonban a *Zorn-lemmán* alapszik, ezért van szükség kevésbé általános, de elemi úton bizonyítható szeparációs tételekre is.

A *Farkas-tétel* mellett további magyar vonatkozásként említsük meg, hogy végtelen lineáris egyenlőtlenségrendszerek topológiai tárgyalásával először HAAR ALFRÉD foglalkozott 1924-ben. Az általa kimondott tétel ugyan hibás, de viszonylag könnyen korrigálható volt, részletesebb elemzése [13]-ban található.

2. Szeparációs tétel

Konvex halmaznak és lezártján kívül fekvő pontnak hipersíkkal történő elválasztásáról mondunk ki tételt. Alaptérként R^m-et használjuk (bár a bizonyítás viszonylag könnyen átvihető *Hilbert-térre* is), mert a gyakorlatban főleg erre van szükség. Egy $\mathbf{t}$ vektor euklideszi normáját $\|\mathbf{t}\|$ fogja jelölni, $\mathbf{t}$ és $\mathbf{u}$ skaláris szorzatát pedig $\mathbf{t}'\mathbf{u}$.

2.1. TÉTEL. Legyen $K \subset R^m$ konvex halmaz, $\bar{K}$ K lezártja, és $\mathbf{b} \in R^m$, $\mathbf{b} \notin \bar{K}$. Ekkor $\mathbf{b}$ és K elválasztható hipersíkkal, vagyis megadható olyan $\mathbf{y} \in R^m$ vektor és α szám, hogy

$$\mathbf{y}'\mathbf{b} > \alpha, \quad \mathbf{y}'\mathbf{z} \leqq \alpha \quad \forall \mathbf{z} \in K \tag{2.1}$$

Bizonyítás. $\bar{K}$ zárt és konvex, ezért létezik egy és csak egy olyan $\mathbf{g}\in\bar{K}$ vektor, amelyre

(2.2) $$\|\mathbf{b}-\mathbf{g}\| = \min_{\mathbf{z}\in\bar{K}}\|\mathbf{b}-\mathbf{z}\|.$$

(Ebben a formában a „legközelebbi vektor" létezésének tétele *Hilbert-térben* is érvényes, és a paralelogramma-szabály segítségével igen egyszerűen igazolható.) Megjegyezzük, hogy tulajdonképpen ez a lépés a bizonyítás lényege.

Legyen

(2.3) $$\mathbf{y} = \mathbf{b}-\mathbf{g}, \quad \alpha = \mathbf{y}'\mathbf{g}.$$

$\mathbf{y}$ nem lehet nullvektor, mert $\mathbf{b}\notin\bar{K}$. Tekintsük a $\mathbf{g}$ vektor végpontját tartalmazó, $\mathbf{y}$ normálvektorú hipersíkot. Ennek egyenlete $\mathbf{y}'\mathbf{u}=\alpha$. Azt állítjuk, hogy a hipersík eleget tesz (2.1)-nek. Az állítás egyik fele triviális: $\mathbf{y}'\mathbf{b}-\alpha=\mathbf{y}'(\mathbf{b}-\mathbf{g})=\|\mathbf{y}\|^2>0$. Legyen továbbá $\mathbf{a}\in\bar{K}$ tetszőleges. Tekintsük a $\mathbf{g}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{a}$ vektorok G, B, A végpontjai által meghatározott háromszöget. Ennek teljes AG oldala $\bar{K}$-ban van, $\bar{K}$ konvexitása miatt. Ha most $\mathbf{y}'\mathbf{a}-\alpha=\mathbf{y}'(\mathbf{a}-\mathbf{g})>0$, vagyis a háromszög AG és BG oldalai hegyesszöget zárnak be, akkor az AG szakasznak van olyan pontja, amely közelebb van G-hez, mint B: ha B-ből az AG egyenesre bocsátott merőleges talppontja az AG szakaszon van, akkor ez a talppont, ellenkező esetben A. Ez pedig ellentmond (2.2)-nek, tehát (2.1) második fele is bizonyítást nyert.

A már említett [1], [2], [10], [11] bizonyítások szintén a „legközelebbi vektor" ötletén alapulnak. [11] annyiban tér el a többitől, hogy először kúpokra bizonyítja a szeparációs tételt, és onnan viszi át tetszőleges konvex halmazra.

3. Alkalmazás kúpokra — Farkas és Csernyikov tételei

Mivel a konvex kúpokkal kapcsolatban még nem alakult ki teljesen egységes terminológia, definícióval kell kezdenünk:

3.1. DEFINÍCIÓ. Egy $C\subset R^m$ halmazt konvex kúpnak nevezünk, ha bármely véges sok elemének bármely nemnegatív együtthatós lineáris kombinációját tartalmazza. Ha C előállítható egy $S\subset C$ halmazból képzett összes ilyen lineáris kombináció halmazaként, akkor azt mondjuk, hogy S generálja C-t. Ha C generálható véges halmazzal, akkor végesen generáltnak nevezzük.

A továbbiakban „konvex kúp" helyett csak „kúp"-ot mondunk, a rövidség kedvéért.

3.2. TÉTEL. Minden végesen generált kúp topológiailag zárt.

Bizonyítás: Legyen C az $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ vektorok által generált kúp és $\{\mathbf{p}_k\}_{k=1}^{\infty}\subset C$ konvergens sorozat, $\mathbf{p}$ határértékkel. A

$$\mathbf{p}_k = \sum_{i=1}^{n}\alpha_{ki}\mathbf{a}_i$$

előállítást egy lineáris egyenletrendszer megengedett megoldásaként felfogva, redukáljuk megengedett bázismegoldássá:

$$\mathbf{p}_k = \sum_{i\in I_k}\hat{\alpha}_{ki}\mathbf{a}_i,$$

ahol $\hat{\alpha}_{ki} \geqq 0$ és az I_k-beli indexű $\mathbf{a}_i$ vektorok lineárisan függetlenek. (Ilyen redukció mindig triviálisan elvégezhető, lásd [9]). Az $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ vektorhalmaz bázisainak száma véges, ezért legalább egy olyan bázis létezik, amely végtelen sok $\mathbf{p}_k$ vektorhoz tartozik. Legyen egy ilyen bázis $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_r\}$, a hozzá tartozó részsorozat pedig $\{\mathbf{q}_l\}_{l=1}^{\infty} \subset \{\mathbf{p}_k\}_{k=1}^{\infty}$. Egészítsük ki az $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_r\}$ halmazt R^m bázisává. A

$$\mathbf{q}_l = \sum_{i=1}^{r} \beta_{li} \mathbf{a}_i$$

előállításhoz vegyük hozzá 0 együtthatóval az előbbi kiegészítő vektorokat.

$$\mathbf{q}_l = \mathbf{D}\boldsymbol{\beta}_l$$

alakhoz jutunk, ahol $\boldsymbol{\beta}_l \in R^m$ és

$$\boldsymbol{\beta}_l' = (\beta_{l1}, \beta_{l2}, \ldots, \beta_{lr}, 0, \ldots 0), \tag{3.1}$$

$\mathbf{D}$ pedig $m \times m$-es nemszinguláris mátrix. Innen

$$\mathbf{D}^{-1}\mathbf{q}_l = \boldsymbol{\beta}_l.$$

Legyenek $\mathbf{D}^{-1}$ oszlopvektorai $\mathbf{d}_1^{-1}, \ldots, \mathbf{d}_m^{-1}$, akkor

$$\sum_{j=1}^{m} \|\mathbf{d}_j^{-1}\| \, |q_{lj}| \geqq \|\boldsymbol{\beta}_l\|,$$

ahol q_{lj} $\mathbf{q}_l$ j-edik koordinátája. Mivel $\{\mathbf{q}_l\}_{l=1}^{\infty}$ konvergens sorozat, így van olyan L szám, hogy

$$|q_{lj}| \leqq L < +\infty, \quad 1 \leqq j \leqq m, \quad 1 \leqq l < +\infty,$$

amiből

$$L \sum_{z=1}^{m} \|\mathbf{d}_j^{-1}\| \geqq \|\boldsymbol{\beta}_l\|,$$

vagyis a $\{\boldsymbol{\beta}_l\}_{l=1}^{\infty}$ sorozat korlátos. A *Bolzano—Weierstrass-tétel* szerint akkor ennek létezik konvergens $\{\boldsymbol{\gamma}_h\}_{h=1}^{\infty}$ részsorozata: $\lim\limits_{h \to +\infty} \boldsymbol{\gamma}_h = \boldsymbol{\gamma}_0$. A sorozat származtatása miatt $\boldsymbol{\gamma}_h \geqq \mathbf{0}$ és (3.1) alakú, $1 \leqq h < +\infty$, ezért $\boldsymbol{\gamma}_0$ is ilyen. Ebből pedig

$$\mathbf{p}_0 = \lim_{l \to +\infty} \mathbf{q}_l = \lim_{l \to +\infty} \mathbf{D}\boldsymbol{\beta}_l = \lim_{h \to +\infty} \mathbf{D}\boldsymbol{\gamma}_i = \sum_{i=1}^{m} \gamma_{0i} \mathbf{a}_i \in K.$$

Bár ez a tétel a végesen generált kúpok egyik legfontosabb tulajdonságát mondja ki, közvetlen bizonyítása viszonylag ritka. Egy másik, az általánosított inverz mátrix felhasználásán alapuló közvetlen bizonyítás szerepel [1]-ben.

3.3. LEMMA. Ha K kúp, akkor (2.3)-ban $\alpha = 0$.

Bizonyítás. A 2.1. tétel bizonyításában használt jelöléseket átvéve, két eset lehetséges. Ha $\mathbf{g} = \mathbf{0}$, készen vagyunk. Ha $\mathbf{g} \neq \mathbf{0}$, akkor $\mathbf{g}$ sugara (a $\{\lambda\mathbf{g}, \lambda \geqq 0\}$ halmaz) benne van $\bar{K}$-ban. Tekintsük $\mathbf{g}$ teljes egyenesét. Ennek $\mathbf{b}$-hez legközelebbi pontja $\mathbf{b}$ merőleges vetülete az egyenesre. A vetület nem lehet $\mathbf{g}$ sugarán kívül, mert akkor $\mathbf{0}$ közelebb volna $\mathbf{b}$-hez, mint $\mathbf{g}$. $\mathbf{g}$ sugarában viszont a $\mathbf{b}$-hez legközelebbi pont maga $\mathbf{g}$, vagyis $\mathbf{g}$ merőleges $\mathbf{y}$-ra.

3.4. TÉTEL *(Farkas-lemma)*. Legyenek $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n, \mathbf{b} \in R^m$. A következő két állítás közül az egyik és csak az egyik teljesül:

a) Léteznek olyan $x_1, x_2, \dots, x_n$ nemnegatív számok, hogy $\sum_{i=1}^{n} \mathbf{a}_i x_i = \mathbf{b}$,

b) Létezik olyan $\mathbf{y} \in R^m$, amelyre $\mathbf{y}'\mathbf{b} > 0$, $\mathbf{y}'\mathbf{a}_i \leqq 0$, $1 \leqq i \leqq n$.

Bizonyítás. a) és b) triviálisan nem teljesülhet egyszerre: b)-ben az $\mathbf{a}_i$-re vonatkozó egyenlőtlenséget x_i-vel szorozva, összegzés után $\mathbf{y}'\left(\sum_{i=1}^{n} \mathbf{a}_i x_i\right) \leqq 0$ adódna.

Tegyük fel, hogy a) nem áll fenn. Legyen K az $\mathbf{a}_1, \dots \mathbf{a}_n$ vektorok által generált kúp. A 3.2. tétel szerint K zárt, feltevésünk miatt $\mathbf{b} \notin K \equiv \bar{K}$. A 2.1. tétel és a 3.3. lemma szerint ekkor b) teljesül.

3.5. TÉTEL *(Farkas-tétel)*. Az $\mathbf{a}_i'\mathbf{z} \leqq 0$, $1 \leqq i \leqq n$ egyenlőtlenségrendszernek a $\mathbf{b}'\mathbf{z} \leqq 0$ egyenlőtlenség akkor és csak akkor következménye, ha fennáll a 3.4. tétel a) része.

Bizonyítás. A 3.4. tétel alapján triviális.

3.6. TÉTEL. Legyen $\{\mathbf{a}_\lambda, \lambda \in \Lambda\} \subset R^m$ tetszőleges halmaz, és $\mathbf{b} \in R^m$. A következő két állítás közül az egyik és csak az egyik teljesül:

a) $\mathbf{b}$ benne van az $\{\mathbf{a}_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ halmaz által generált kúp lezártjában,

b) Létezik olyan $\mathbf{y} \in R^m$, hogy $\mathbf{y}'\mathbf{b} > 0$, $\mathbf{y}'\mathbf{a}_\lambda \leqq 0$, $\lambda \in \Lambda$.

Bizonyítás. Majdnem szóról szóra a 3.4. tétel bizonyítása szerint járhatunk el. Most lehetséges $K \not\equiv \bar{K}$, de a) és b) egymás kizárását $\mathbf{b} \notin K$, $\mathbf{b} \in \bar{K}$ esetben is biztosítja a skalárszorzatnak, mint függvénynek a folytonossága, a 3.4. tétel bizonyításának második felében pedig csak $\mathbf{b} \notin \bar{K}$ kellett.

A 3.6. tételből a *Farkas-tétel* analógiájára, szintén megfogalmazható egyenlőtlenség rendszerek következményeire vonatkozó állítás, de ez az előbbiek alapján teljesen evidens. Helyette [13] 7.4. tételét bizonyítjuk be, amely [13] egyik legszebb eredménye. A bizonyítást a homogén esetre végezzük el, az inhomogén eset az idézett [13] 7.1. lemma alapján adódik.

3.7. TÉTEL *(Csernyikov)*. A következő két állítás ekvivalens az

(3.2) $$\mathbf{a}_\lambda'\mathbf{z} \leqq 0, \quad \mathbf{a}_\lambda \in R^m, \lambda \in \Lambda$$

egyenlőtlenség rendszerre nézve:

a) (3.2) minden egyes

(3.3) $$\mathbf{b}'\mathbf{z} \leqq 0$$

következményéhez található (3.2)-nek olyan véges részrendszere, amelynek (3.3) szintén következménye.

b) Az $\{\mathbf{a}_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ halmaz által generált kúp zárt.

Bizonyítás. Legyen K a szóban forgó kúp.

b)$\Rightarrow$a): Ha (3.3) következménye (3.2)-nek, akkor a 3.6. tétel b) része nem teljesül, tehát a) része teljesül, ami K zártsága esetén azt jelenti, hogy $\mathbf{b} \in K$, vagyis fennáll

(3.4) $$\mathbf{b} = \sum_{i=1}^{p} \mathbf{a}_{\lambda_i} x_{\lambda_i}, \quad \lambda_i \in \Lambda, \ x_{\lambda_i} \geqq 0, \quad 1 \leqq i \leqq p = p(\mathbf{b}),$$

azaz (3.3) következménye az

$$\mathbf{a}'_{\lambda_i}\mathbf{z} \leqq 0, \quad 1 \leqq i \leqq p = p(\mathbf{b}) \tag{3.5}$$

rendszernek, ami éppen a tétel a) része.

a)⇒b): A 3.6. tétel alapján minden $\mathbf{b} \in \bar{K}$ vektorra (3.3) következménye (3.2)-nek. Feltevésünk szerint viszont akkor (3.3) következménye egy (3.5) alakú részrendszernek, amiből a *Farkas-tétel* miatt (3.4) következik, vagyis $\mathbf{b} \in K$.

IRODALOM

[1] BEN-ISRAEL, A., "Linear equations and inequalities on finite dimensional, real or complex, vector spaces. A unified theory", *J. Math. Anal. Appl.* **27** (1969) 367—389.
[2] BLACKWELL, D. and GIRSHICK, M. A., *Theory of Games and Statistical Decisions* (John Wiley & Sons, Inc., New York—London—Sydney, 1954).
[3] BOURBAKI, N., *Éléments de mathématique. Livre V: Espaces vectoriels topologiques.* Act. Sci. et Ind. Nr. 1189. (Hermann, Paris, 1953).
[4] CHARNES, A. and COOPER, W. W., "The strong Minkowski—Farkas—Weyl theorem for vector spaces over ordered field", *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **44** (1958) 914—916.
[5] DORFMAN, R., SAMUELSON, P. A. and SOLOW, R. M., *Linear Programming and Economic Analysis* (McGraw-Hill Book Company, Inc., New York—Toronto—London, 1958).
[6] FAN, K., "On systems of linear inequalities", in: *Linear Inequalities and Related Systems*, Ed. H. W. Kuhn, and A. W. Tucker (Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1956) 99—157.
[7] FAN, K., "On infinite systems of linear inequalities", *J. Math. Anal. Appl.* **21** (1968) 475—478.
[8] GALE, D., *The Theory of Linear Economic Models* (McGraw-Hill Book Company, Inc, New York—Toronto—London, 1960).
[9] PRÉKOPA, A., *Lineáris programozás I.*, (Bolyai János Matematikai Társulat, Budapest, 1968.)
[10] ROBERTS, A. W. and VARBERG, D. E., *Convex Functions* (Academic Press, New York and London, 1973).
[11] STOER, J. and WITZGALL, C., *Convexity and Optimization in Finite Dimensions I.*, (Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York, 1970).
[12] TUCKER, A. W., "Dual systems of homogeneous linear relations", in: *Linear Inequalities and Related Systems*, Ed. H. W. Kuhn and A. W. W. Tucker (Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1956.)
[13] ЧЕРНИКОВ, С. Н., *Линейные неравенства* (Издательство „Наука", Москва, 1968.)

(Beérkezett: 1975. június 2.)

KUN ISTVÁN
MTA SZÁMÍTÁSTECHNIKAI ÉS AUTOMATIZÁLÁSI KUTATÓ INTÉZET
1502 BUDAPEST XI., KENDE U. 13—17.

GEOMETRICAL PROOFS IN THE THEORY OF SYSTEMS OF LINEAR INEQUALITIES

I. KUN

The paper gives an almost purely elementary geometrical proof of the separation theorem for convex sets in R^m. By means of this, simple proofs are given for *Farkas' theorem*, and for a fundamental result of [13] (ČERNIKOV), Theorem 7.4.: a necessary and sufficient condition, that all consequences of a (possibly infinite) system of linear inequalities be consequences of finite subsystems as well.

Alkalmazott Matematikai Lapok **1** *(1975) 397—404*

MONDATSZERKEZETŰ GRAMMATIKÁK ÉS KETTŐS VEREM-AUTOMATÁK

RÉVÉSZ GYÖRGY

Budapest

A kettős verem-automaták által felismert nyelvek osztálya megyegyezik a *Turing-gépek* által felismert nyelvek osztályával. A cikkben megmutatjuk a kettős verem-automatáknak azt az előnyös tulajdonságát, hogy nagyon egyszerűen közvetlen kapcsolatba hozhatók a megfelelő mondatszerkezetű grammatikákkal. Ehhez az utóbbiaknak egy új normál alakját használjuk fel.

A formális nyelvek elméletének nevezetes eredményei közé tartoznak azok a tételek, amelyek a *Chomsky-féle nyelvosztályok* és az automaták bizonyos típusai közötti kapcsolatokra vonatkoznak. A környezetfüggetlen nyelvek osztálya, mint ismeretes, megegyezik a verem-automatával felismerhető nyelvek osztályával, a környezetfüggő nyelvek osztálya pedig a lineárisan korlátolt automatával jellemezhető, amely a *Turing-gép* egy speciális esete. Az is ismeretes, hogy az általános mondatszerkezetű grammatikák által generált nyelvek osztálya meg éppen a *Turing-géppel* jellemezhető.

E szép eredmények egyetlen szépséghibája csupán az, hogy a verem-automata és a két utóbbi automata típus között egy törés látszik az automaták struktúrájában. A *Turing-gép* és az abból származó lineárisan korlátolt automata ugyanis csak egy olvasófejjel dolgozik, amely ugyan írni is tud, de egyszerre két jelet beolvasni nem tud. A verem-automata ezzel szemben minden lépésben két jelet tud feldolgozni, a verem tetején levő jelet és az aktuális bemenő jelet. Ez a magyarázata annak is, hogy a grammatikai megfeleltetés konstrukciója sokkal egyszerűbb a verem-automata esetében, mint a másik két automatánál.

A jelen dolgozatban a verem-automata általánosításaként olyan kettős verem-automatát vezetünk be, amely alkalmas a generatív grammatika és a *Turing-gép* közötti strukturális különbségek áthidalására. Ennek érdekében először a mondatszerkezetű grammatikákat egy megfelelő normál alakra hozzuk.

Egy G generatív grammatikát a szokásos módon egy olyan $G=(V_N, V_T, S, F)$ rendezett négyessel adunk meg, ahol V_N a nemterminális *abc*, V_T a terminális *abc*, $V_N \cap V_T = \emptyset$, $S \in V_N$ a kitüntetett kezdő szimbólum, F pedig olyan $P \to Q$ alakú helyettesítési szabályoknak egy véges halmaza, ahol $P, Q \in (V_N \cup V_T)^*$, és P legalább egy V_N-beli jelet tartalmaz.

Egy véges V *abc* betűiből képzett összes véges jelsorozatok (szavak) halmazát szokás szerint V^*-gal jelöljük, és természetesen feltesszük, hogy a $\to$ jel nem szerepel sem a V_N-ben, sem a V_T-ben. Egy tetszőleges P szónak a hosszát (betűinek számát) $|P|$-vel jelöljük. Az üres szót λ-val jelöljük, tehát $|\lambda|=0$.

A G grammatikában az X szóból egy lépésben levezethető az Y szó, *ha* van olyan $P \to Q$ helyettesítési szabály az F-ben, hogy $X=P_1PP_2$ és $Y=P_1QP_2$. Ezt az összefüggést $X \underset{G}{\Rightarrow} Y$ szimbolizálja. A $\underset{G}{\Rightarrow}$ reláció tranzitív lezárását $\overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}}$-gal jelöljük, a G grammatika által generált nyelvet pedig $L(G)$-vel. Eszerint

$$L(G) = \{P|S \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} P \quad \text{és} \quad P \in V_T^*\}.$$

A fenti definíció az általános mondatszerkezetű (0-típusú) grammatikára vonatkozik, s erre vonatkozik az alábbi tétel is.

1. TÉTEL. Bármely 0-típusú G grammatikához megadható egy olyan 0-típusú G' grammatika, hogy $L(G') = L(G)$, és a G' helyettesítési szabályai az alábbi hétféle alakúak lehetnek:

(1) $Z \to a, \quad Z \in V_N, a \in V_T,$

(2) $Z \to Y, \quad Z, Y \in V_N,$

(3) $Z \to XY, \quad X, Y, Z \in V_N,$

(4) $XZ \to XY, \quad X, Y, Z \in V_N,$

(5) $ZY \to XY, \quad X, Y, Z \in V_N,$

(6) $ZY \to Y, \quad Y, Z \in V_N,$

(7) $S \to \lambda.$

Bizonyítás. Először minden $P \to \lambda$ alakú szabályt helyettesítünk az $xP \to x$ és $Px \to x$ szabályokkal, ahol az x befutja a teljes $V_N \cup V_T$ *abc*-t. Ezáltal egy olyan G_1 grammatikát kapunk, amelyre $L(G_1) = L(G) - \{\lambda\}$. Ha $\lambda \in L(G)$, akkor a G_1-be felvesszük még az $S \to \lambda$ szabályt, s ezzel $L(G_1) = L(G)$.

Ezt követően a G_1-hez ismert módon megadhatunk egy olyan G_2 grammatikát, ahol terminális jelek csak (1) alakú szabályokban szerepelnek, és $L(G_2) = L(G_1)$. (Minden a_i terminális jel helyére az összes szabályokban egy új A_i változót írunk, és felvesszük a grammatikába az $A_i \to a_i$ szabályokat.) A G_2 grammatika összes többi szabálya tehát $P \to Q$, $P, Q \in V_N^*$, $P \neq \lambda$, $Q \neq \lambda$ alakú. Ezeknél három esetet különböztetünk meg:

1. *eset:* $|P| = 1$. Egy tetszőleges ilyen $X \to Y_1 Y_2 \dots Y_n$ alakú szabály helyett vehetjük az

$$X \to Y_1 Z_1, Z_1 \to Y_2 Z_2, \dots, Z_{n-2} \to Y_{n-1} Y_n$$

szabályokat, ahol $Z_1, Z_2, \dots, Z_{n-2}$ újonnan bevezetett változók (nemterminális jelek). Ha $n \leqq 2$, akkor nem kell átalakítani.

2. *eset:* $2 \leqq |P| \leqq |Q|$. Ha itt $|Q| = 2$, akkor egy $XY \to ZU$ alakú szabállyal van dolgunk, amelyet helyettesíthetünk az

$$XY \to XY', XY' \to X'Y', X'Y' \to X'U, X'U \to ZU$$

szabályokkal, ahol X' és Y' újonnan bevezetett változók. Ha viszont $|Q| > 2$, akkor az ilyen $X_1 X_2 \dots X_m \to Y_1 Y_2 \dots Y_n$ $(m \leqq n)$ szabályt helyettesíthetjük az

$$X_1 X_2 \to Y_1 Z_2, Z_2 X_3 \to Y_2 Z_3, \dots, Z_{m-1} X_m \to Y_{m-1} Z_m,$$

$$Z_m \to Y_m Z_{m+1}, Z_{m+1} \to Y_{m+1} Z_{m+2}, \dots, Z_{n-1} \to Y_{n-1} Y_n$$

szabályokkal, ahol $Z_2, \ldots, Z_{n-1}$ újonnan bevezetett változók. (Ezután alkalmazzuk itt is a $|Q|=2$-re vonatkozó eljárást.)

3. *eset:* $|P|>|Q|$. Egy ilyen hosszúságot csökkentő

$$X_1X_2\ldots X_m \to Y_1Y_2\ldots Y_n \quad (m > n \geqq 1)$$

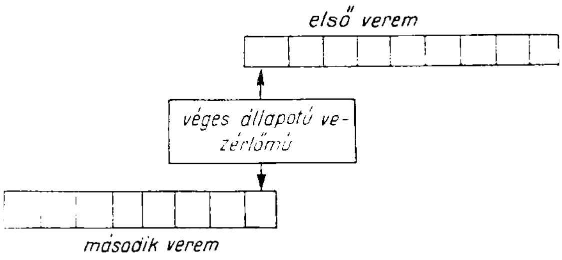
szabályt helyettesíthetünk az

$$\begin{array}{ll}
X_{m-1}X_m \to Z_mU_m, & Z_mU_m \to U_m, \\
X_{m-2}U_m \to Z_{m-1}U_{m-1}, & Z_{m-1}U_{m-1} \to U_{m-1}, \\
\vdots & \vdots \\
X_nU_{n+2} \to Z_{n+1}U_{n+1}, & Z_{n+1}U_{n+1} \to U_nY_n, \\
X_{n-1}U_n \to U_{n-1}Y_{n-1}, & \\
\vdots & \\
X_1U_2 \to U_1Y_1, & \\
U_1Y_1 \to Y_1 &
\end{array}$$

szabályokkal, ahol $U_1, \ldots, U_m$ és $Z_{n+1}, \ldots, Z_m$ újonnan bevezetett nemterminális jelek.

Mindhárom esetben tehát a $P \to Q$ szabály helyett (2)—(6) alakú szabályokat vehetünk, s ezáltal a generált nyelv nem változik. Ezt a normalizálást a G_2 grammatika minden egyes szabályával végrehajtva, megkapjuk a kívánt tulajdonságú G' grammatikát.

Definiáljuk most a kettős verem-automatát, amely szemléletesen az 1. ábrán átható.



1. ábra

1. Definíció. Egy kettős verem-automata a következő rendezett hatos $A = (Z, K, M, z_0, q_0, H)$, ahol

Z egy véges ábécé: *verem-ábécé,*
K egy véges halmaz: *állapothalmaz,*
M a $Z \times K \times Z$ halmaznak egy leképezése a $Z \times K \times \{R, L, N, E, I\}$ véges részhalmazaira: *átmenetfüggvény,*
$z_0 \in Z$ a *kezdőjel,*
$q_0 \in K$ a *kezdőállapot,*
$H \subseteq K$ a *végállapotok halmaza.*

2. Definíció. Egy kettős verem-automata pillanatnyi konfigurációján értjük azt a WqP szót, amelyre $W\in Z^*$ a második verem pillanatnyi tartalma, $q\in K$ a vezérlőmű pillanatnyi állapota, $P\in Z^*$ pedig az első verem pillanatnyi tartalma. (A P és a W szavak elhelyezése a veremben ellentett, ugyanis az első veremben a P legelső betűje van legfelül, míg a második veremben a W utolsó betűje van legfelül — lásd az 1. ábrán a két verem elhelyezését.)

Az M leképezés értelme a következő. A két verem tetején levő jelektől, valamint a vezérlőmű pillanatnyi állapotától függően az automata úgy változtatja meg a pillanatnyi konfigurációját, hogy

(1) $WxqyP \underset{A}{\Rightarrow} WxzpP,\ ha\ (z, p, R)\in M(x, q, y),$

(2) $WxqyP \underset{A}{\Rightarrow} WpzyP,\ ha\ (z, p, L)\in M(x, q, y),$

(3) $WxqyP \underset{A}{\Rightarrow} WxpzP,\ ha\ (z, p, N)\in M(x, q, y),$

(4) $WxqyP \underset{A}{\Rightarrow} WpzP,\ ha\ (z, p, E)\in M(x, q, y),$

(5) $WxqyP \underset{A}{\Rightarrow} WxpzyP,\ ha\ (z, p, I)\in M(x, q, y),$

ahol $x, y, z\in Z,\ p, q\in K$ és $W, P\in Z^*$. Szemléletesen ez azt jelenti, hogy az automata minden lépésben

— vagy az első verem hosszát eggyel csökkenti és a másodikét eggyel növeli (R: jobbra lépés),

— vagy a második verem hosszát eggyel csökkenti, az elsőét eggyel növeli (L: balra lépés),

— vagy mindkét verem hosszát változatlanul hagyja (N: nincs mozgás),

— vagy az első verem hossza változatlan marad, míg a másodiké eggyel csökken (E: törlés),

— vagy az első verem hosszát eggyel növeli, a másodikét pedig változatlanul hagyja (I: beszúrás).

Emellett pedig minden esetben egy új jelet ír az egyik verem tetejére, és átmegy a vezérlőmű egy új állapotba.

Az $\underset{A}{\Rightarrow}$ relációt tranzitív módon kiterjesztve $\overset{*}{\underset{A}{\Rightarrow}}$-gal jelöljük és az A automata által végzett átalakításnak nevezzük.

Megjegyzés. Az M leképezés definícióját a nemdeterminisztikus esetre adtuk meg, tehát az automatánk egy pillanatnyi konfigurációból általában egyszerre több konfigurációba is átmehet, de az is előfordulhat, hogy $M(x, q, y)=\emptyset$ valamely (x, q, y) hármasra, s ekkor az automata az ilyen $WxqyP$ konfigurációkban megáll.

3. Definíció. Egy kettős verem-automata által elfogadott nyelv a következő: $L(A)=\{P\mid$ van olyan $p\in H$, amelyre $z_0q_0P\overset{*}{\underset{A}{\Rightarrow}} Wp$ és $P\in T^*\}$, ahol $W\in Z^*$ egy tetszőleges szó, és $T\subseteq Z-\{z_0\}$.

Ennek a definíciónak az alapján az üres szó semmilyen A-ra sem tartozhat bele az $L(A)$ nyelvbe, hiába áll fenn a $q_0\in H$ összefüggés, mert az $\overset{*}{\underset{A}{\Rightarrow}}$ relációnál nem kötöttük ki a reflexivitást. Ez utóbbit továbbra sem szándékozunk kikötni, ehelyett külön megállapodunk abban, hogy legyen $\lambda\in L(A)$, *ha* $q_0\in H$.

2. TÉTEL. Bármely mondatszerkezetű G grammatikához megadható olyan A kettős verem-automata, amelyre $L(A)=L(G)$.

Bizonyítás. Feltehetjük, hogy a $G=(V_N, V_T, S, F)$ grammatika az előző tételünkben levezetett normál alakban van megadva. Definiáljuk akkor az A automatát a következőképpen

$$A = (V_N \cup V_T \cup \{z_0\}, \{q_0, q_1, q_2\}, M, z_0, q_0, H),$$

ahol $z_0 \notin V_N \cup V_T$, $\{q_2\}=H$, ha $\lambda \notin L(G)$, ill. $\{q_0, q_2\}=H$, ha $\lambda \in L(G)$, az M leképezés pedig a következő:

(a) $(z, q_1, N) \in M(z_0, q_0, a)$, *ha* $z \to a \in F$,

(b) $(z, q_1, N) \in M(x, q_1, a)$ minden $x \in V_N \cup \{z_0\}$-ra, ha $z \to a \in F$,

(c) $(z, q_1, N) \in M(x, q_1, y)$ minden $x \in V_N \cup \{z_0\}$-ra, ha $z \to y \in F$,

(d) $(z, q_1, E) \in M(x, q_1, y)$, ha $z \to xy \in F$,

(e) $(z, q_1, N) \in M(x, q_1, y)$, ha $xz \to xy \in F$,

(f) $(z, q_1, L) \in M(x, q_1, y)$, ha $zy \to xy \in F$,

(g) $(z, q_1, I) \in M(x, q_1, y)$ minden $x \in V_N \cup \{z_0\}$-ra, *ha* $zy \to y \in F$,

(h) $(x, q_1, L) \in M(x, q_1, y)$ minden $x, y \in V_N$-re,

(i) $(y, q_1, R) \in M(x, q_1, y)$ minden $x, y \in V_N$-re,

(j) $(S, q_2, R) \in M(z_0, q_1, S)$.

Először megmutatjuk, hogy $L(G) \subseteq L(A)$. Legyen tehát $P \in L(G)$. Ha $P=\lambda$, akkor $q_0 \in H$, s a megállapodás szerint $P \in L(A)$. Legyen tehát $P \neq \lambda$, és $P \in L(G)$. Ha most $W \in V_N^*$, és $W \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} P$ úgy, hogy ebben a levezetésben csupa $z \to a$ alakú szabályt alkalmazunk, akkor az (a), (b), (i) és (h) kikötésekből $z_0 q_0 P \overset{*}{\underset{A}{\Rightarrow}} z_0 q_1 W$ következik. Továbbá, ha valamely U, $W \in V_N^*$ szavakra $U \underset{G}{\Rightarrow} W$, akkor a (c)—(i) kikötések szerint nyilván $z_0 q_1 W \overset{*}{\underset{A}{\Rightarrow}} z_0 q_1 U$. Eszerint, ha $S \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} P$, akkor $z_0 q_0 P \overset{*}{\underset{A}{\Rightarrow}} z_0 q_1 S$. Végül pedig a (j) kikötés szerint $z_0 q_1 S \underset{A}{\Rightarrow} z_0 S q_2$, tehát $P \in L(A)$.

Másrészt viszont $L(A) \subseteq L(G)$. Ha ugyanis $P \in L(A)$ és $P=\lambda$, akkor nyilván $P \in L(G)$. Ha $P \neq \lambda$, és $z_0 q_0 P \overset{*}{\underset{A}{\Rightarrow}} W q_2$, akkor itt csak $W=z_0 S$ lehet, mert q_2 csak a (j) kikötésben fordul elő, z_0 pedig csak a konfiguráció első betűjeként. Ebből egyúttal $z_0 q_0 P \overset{*}{\underset{A}{\Rightarrow}} z_0 q_1 S$ adódik, amiből pedig az előző gondolatmenet megfordításával megkapjuk az $S \overset{*}{\underset{A}{\Rightarrow}} P$ levezetést.

KOROLLÁRIUM. Amennyiben a G grammatika környezetfüggő, azaz hosszúságot nem csökkentő, akkor a fent konstruált kettős verem-automata működése során a két verem összhosszúsága nem növekszik. (Ez a tulajdonság pontosan megfelel a lineárisan korlátolt automata jellemző tulajdonságának.)

A fenti tételnek a megfordítása is igaz, vagyis bármely A kettős verem-automatához megadható egy olyan G mondatszerkezetű grammatika, amelyre $L(G)=L(A)$. Ennek bizonyításához először bevezetjük az üres veremmel történő elfogadást.

4. DEFINÍCIÓ. Egy A kettős verem-automata által üres veremmel elfogadott nyelv a következő:

$$N(A)=\{P|z_0q_0P\overset{*}{\underset{A}{\Rightarrow}}pz \text{ valamely } p\in K\text{-ra és } z\in Z\text{-re, és } P\in T^*\}, \text{ ahol } T\subseteq Z-\{z_0\}.$$

Az üres szó elfogadására ez a definíció sem alkalmas, ezért arra ugyanazt a megállapodást tesszük, mint az $L(A)$-nál. A H halmaznak egyébként az $N(A)$ definíciójában nincs szerepe, de az elfogadás itt is mindig megállást eredményez, mert, ha bármelyik verem kiürül, akkor az automata szükségképpen megáll.

3. TÉTEL. Bármely A kettős verem-automatához megadható olyan G mondatszerkezetű grammatika, amelyre $L(G)=N(A)$.

Bizonyítás. Legyen $A=(Z, K, M, z_0, q_0, H)$, és definiáljuk ehhez a $G=(V_N, V_T, S, F)$ grammatikát úgy, hogy $V_N=(Z-T)\cup(Z\times K\times Z)\cup\{S\}$, $V_T=T$, $S\notin Z$, az F pedig a következő szabályokat tartalmazza:

(1) $x[z, p, u]\to[x, q, y]u\in F$ minden $u\in Z$-re, *ha* $(z, p, R)\in M(x, q, y)$,

(2) $[u, p, z]y\to u[x, q, y]\in F$ minden $u\in Z$-re, *ha* $(z, p, L)\in M(x, q, y)$,

(3) $[x, p, z]\to[x, q, y]\in F$, *ha* $(z, p, N)\in M(x, q, y)$,

(4) $[u, p, z]\to u[x, q, y]\in F$ minden $u\in Z$-re, *ha* $(z, p, E)\in M(x, q, y)$,

(5) $[x, p, z]y\to[x, q, y]\in F$, *ha* $(z, p, I)\in M(x, q, y)$,

(6) $[z_0, q_0, x]\to x\in F$ minden $x\in T$-re,

(7) $S\to[z_0,q,x]\in F$, *ha* $(z,p,E)\in M(z_0,q,x)$ valamely $p\in K$-ra és $z\in Z$-re.

A $P=\lambda$ esettel most is külön végezhetünk, ezért itt nem részletezzük. Először megmutatjuk, hogy $L(G)\subseteq N(A)$. Ha ugyanis $S\overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}}P$ valamely $P\in T^*$ szóra, akkor van olyan $q\in K$ és $y\in Z$, hogy $[z_0, q, y]\overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}}P$ és $z_0qy\overset{*}{\underset{A}{\Rightarrow}}pz$ valamely $p\in K$-ra és $z\in Z$-re. Továbbá bármely két szóra az $U\underset{G}{\Rightarrow}W$ reláció csak úgy teljesülhet, ha a szögletes zárójelek elhagyásával nyert U' és W' szavakra a $W'\underset{A}{\Rightarrow}U'$ reláció teljesül, feltéve, hogy az (1)—(5) szabályok valamelyikének az alkalmazásáról van szó. Az $S\overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}}P$ levezetés utolsó lépéseként nyilván egy (6) alakú szabályt kell alkalmaznunk, mert a többi szabályok mindegyikében nemterminális jel is szerepel a jobboldalon. Ezt pedig csak a szó elején alkalmazhatjuk, mivel $z_0\notin T$ és a szó elején levő z_0 másként nem tűnhet el. Mindezek alapján $z_0q_0P\overset{*}{\underset{A}{\Rightarrow}}pz$ következik, tehát, ha $P\in L(G)$, akkor $P\in N(A)$.

Megfordítva, tegyük fel, hogy $z_0q_0P\overset{*}{\underset{A}{\Rightarrow}}pz$. Ekkor itt az utolsó (esetleg egyetlen) lépés $z_0qy\underset{A}{\Rightarrow}pz$, ahol $S\underset{G}{\Rightarrow}[z_0, q, y]$. Az automata által végrehajtott átalakítást lépésről lépésre visszafelé követve most megszerkeszthető az $S\overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}}[z_0, q_0, x]P_1$ levezetés, ahol $xP_1=P$, s ebből (6) szerint $S\overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}}P$, tehát $N(A)\subseteq L(G)$.

KOROLLÁRIUM. Bármely A kettős verem-automatához megadható olyan A' kettős verem-automata, amelyre $L(A')=N(A)$.

Most még bebizonyítjuk ennek a korolláriumnak a megfordítását, amiből a kétféle elfogadási mód egyenértékűsége következik, tehát a fenti tételeinkben ezek egymással felcserélhetők.

4. TÉTEL. Bármely A kettős verem-automatához megadható olyan A' kettős verem-automata, amelyre $N(A')=L(A)$.

Bizonyítás. Legyen $A=(Z, K, M, z_0, q_0, H)$. Definiáljuk akkor az A' automatát a következő módon.

$$A' = (Z\cup\{z_0'\}, K\cup\{q_1', q_2'\}, M', z_0', q_0, \emptyset),$$

ahol $z_0'\notin Z$, $q_1', q_2'\notin K$, az M' pedig a következő:

(a) $M(x, q, y)\subseteq M'(x, q, y)$ minden $x, y\in Z$-re és $q\in K$-ra,

(b) $(z, p, R)\in M'(z_0', q, y)$, *ha* $(z, p, R)\in M(z_0, q, y)$,

(c) $(z, p, N)\in M'(z_0', q, y)$, *ha* $(z, p, N)\in M(z_0, q, y)$,

(d) $(z, p, I)\in M'(z_0', q, y)$, *ha* $(z, p, I)\in M(z_0, q, y)$,

(e) $(z, q_1', N)\in M'(z_0', q, y)$, *ha* $(z, p, L)\in M(z_0, q, y)$ vagy $(z, p, E)\in M(z_0, q, y)$,

(f) $(z, q_2', E)\in M'(x, q, y)$, *ha* $(z, p, R)\in M(x, q, y)$ és $p\in H$,

(g) $(y, q_2', E)\in M'(x, q_2', y)$ minden $x\in Z\cup\{z_0'\}$-re és $y\in Z$-re.

A konstrukcióból látható, hogy az A' a $z_0'q_0P$ konfigurációból kiindulva szimulálja az A-nak a z_0q_0P konfigurációval induló működését mindaddig, amíg az utóbbi

— ki nem üríti a második vermét

— vagy a vezérlőmű egy $p\in H$ állapotba nem kerül.

Az első esetben az A'-ben a q_1' állapotba megyünk át, ami elakadást eredményez, nehogy olyan P szó kerüljön az $N(A')$-be, amely nincs benne az $L(A)$-ban. A második esetben az A'-ben a q_2' állapot lép fel, ami a második verem teljes törlését eredményezi, miközben az első verem tartalma változatlan marad.

Végeredményben tehát $z_0'q_0P \overset{*}{\underset{A}{\Rightarrow}} q_2'z$ akkor és csak akkor áll fenn, ha $z_0q_0P \overset{*}{\underset{A'}{\Rightarrow}} Wp$ teljesül valamilyen $p\in H$-ra. (A z_0' pedig csak a q_2' állapotban törlődhet.)

Befejezésül megemlítjük, hogy nem nehéz közvetlenül is bebizonyítani a kettős verem-automata és a *Turing-gép* egyenértékűségét, amit most a mondatszerkezetű grammatika közvetítésével kimondhatunk. A *Turing-gépet* ugyanis közvetlenül is szimulálhatjuk kettős verem-automatával, és megfordítva.

IRODALOM

[1] CHOMSKY, N., "On certain formal propertias of grammars", *Information and Control* **2** (1959) 137—167.
[2] CHOMSKY, N., "Context-free grammars and pushdown storage", *MIT. Res. Lab. Electron. Quart. Prog. Rep.* **65** (1962).
[3] HOPCROFT, J. E. and ULLMAN J. D., *Formal Languages and their Relation to Automata* (Addison—Wesley, 1969).
[4] KURODA, S. Y., "Classes of languages and linear-bounded automata", *Information and Control* **7** (1963) 207—223.
[5] SALOMAA, A., *Formal Languages* (ACM Monograph Series, Academic Press, 1973).

(Beérkezett: 1975. június 2.)

RÉVÉSZ GYÖRGY
MTA SZÁMÍTÁSTECHNIKAI ÉS AUTOMATIZÁLÁSI KUTATÓ INTÉZET
1502 BUDAPEST XI., KENDE U. 13—17.

PHRASE-STRUCTURE GRAMMARS AND DUAL PUSHDOWN AUTOMATA

GY. RÉVÉSZ

Dual pushdown automata are language recognizing devices of the same power as *Turing-machines*. Their relation to phrase-structure grammars can be established in a straightforward manner using a new normal form for phrase-structure grammars.

Alkalmazott Matematikai Lapok 1 *(1975) 405—424*

A KÉTÉRTÉKŰ LOGIKA STRUKTURÁLIS VIZSGÁLATA

DEMETROVICS JÁNOS
Budapest

1921-ben jelent meg POST munkája a kétértékű logika struktúrájának a vizsgálatáról [5], amelyet 20 év múlva monográfia formájában is kiadott [6]. POST említett munkáit több szerző is átdolgozta. Ezek közül a legjelentősebb SZ. V. JABLONSZKIJ, G. V. GAVRILOV, V. B. KUDRJAVCEV munkája [12], amelyeket a szerzők maguk, illetve mások eredményeivel kiegészítettek [2, 7, 8, 10, 11].

A fent említett dolgozatok ismerete nélkül ma már elképzelhetetlen a többértékű [1, 12], határértékű [3], végtelenértékű logikák [9] teljességi problémáinak tanulmányozása, illetve digitális rendszerek tervezése, vizsgálata [4, 10].

A jelen dolgozat rövid áttekintést ad a *Boole-függvények* funkcionális teljességéről, zárt osztályairól, bázisairól és a *Boole-függvények* típusairól. A dolgozatban felépítjük POST zárt osztályainak a struktúráját és ezt a struktúrát vizsgáljuk.

1. Alapfogalmak

A következőkben definiáljuk azokat az alapfogalmakat, amelyekre a dolgozatl ban szükségünk lesz.

1.1. DEFINICIÓ. Legyen E_2 egy tetszőleges 2-elemű halmaz. Jelöljük C_1^n-ne- $(n=0, 1, 2, \dots)$ az olyan, n változós függvények halmazát, amelyek változói és értékei E_2-beliek. Az $f(x_1, \dots, x_n)$ függvényt *Boole-függvénynek*, a $C_1 = \bigcup_{n=0}^{\infty} C_1^n$ függvényhalmazt pedig *kétértékű logikának* nevezzük. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $E_2 = \{0, 1\}$. A dolgozatban az $f(x_1, \dots, x_n)$ függvény mindig az $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ változó halmazon definiált *Boole-függvényt* jelöl.

1.2. DEFINÍCIÓ. A C_1 függvényhalmaz valamely $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_0$ részhalmazát *zárt függvényosztálynak* nevezzük ($[\mathfrak{M}]$), ha zárt a változók permutációjára és a szuperpozícióra nézve, azaz teljesülnek a következő feltételek:

a) ha $f(x_1, x_2, \dots, \dots, x_n) \in \mathfrak{M}$, akkor $f(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}) \in \mathfrak{M}$ $(1 \leqq i \leqq n)$, ahol $\{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}\}$ az $x_1, x_2, \dots, x_n$ változók egy n-ed osztályú ismétléses variációja;

b) ha $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathfrak{M}$ és $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$ elemei az $\mathfrak{M}$-nek vagy pedig változók, akkor $f(\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n) \in \mathfrak{M}$.

1.3. DEFINÍCIÓ. Egy $\mathfrak{M}$ *függvényosztály (függvényhalmaz) lezártja* az $\mathfrak{M}$-t tartalmazó legszűkebb zárt $[\mathfrak{M}]$ függvényosztály.

1.4. DEFINÍCIÓ. Legyen $\mathfrak{M}$ a C_1 zárt osztálya és $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{M}$. Az $\mathfrak{N}$ függvényhalmaz teljes az $\mathfrak{M}$-ben, ha $[\mathfrak{N}] = \mathfrak{M}$. Az $\mathfrak{N}$ függvényhalmaz majdnem teljes az $\mathfrak{M}$-ben, ha nem teljes az $\mathfrak{M}$-ben, de ha hozzávesszük bármelyik $f(x_1, ..., x_n)$ függvényt az $\mathfrak{M} \setminus [\mathfrak{N}]$ függvényhalmazból, akkor az $[\{f(x_1, ..., x_n)\} \cup \mathfrak{N}]$ teljes lesz az $\mathfrak{M}$-ben.

1.5. DEFINÍCIÓ. Az $\mathfrak{N}$ függvényhalmazt az $\mathfrak{M}$ zárt osztály *bázisának* nevezünk, ha teljesülnek a következő feltételek:

a) $\mathfrak{N}$ teljes az $\mathfrak{M}$-ben, azaz $[\mathfrak{N}] = \mathfrak{M}$;

b) nincs az $\mathfrak{N}$-nek olyan valódi részhalmaza, amely az $\mathfrak{M}$-ben teljes lenne.

1.6. DEFINÍCIÓ. Azt mondjuk, hogy az $f(x_1, ..., x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, ..., x_n)$ függvény x_i változója valódi, ha létezik olyan értékpár kombináció, hogy $f(\tilde{\alpha}) \neq f(\tilde{\beta})$, ahol

$$\tilde{\alpha} = (\alpha_1, ..., \alpha_{i-1}, 0, \alpha_{i+1}, ..., \alpha_n)$$
$$\tilde{\beta} = (\alpha_1, ..., \alpha_{i-1}, 1, \alpha_{i+1}, ..., \alpha_n)$$

Itt és a továbbiakban mindig $f(\tilde{\alpha})$, ill. $f(\tilde{x})$ az $f(\alpha_1, ..., \alpha_n)$, ill. $f(x_1, ..., x_n)$ függvények rövid jelölése.

1.7. DEFINÍCIÓ. Azt mondjuk, hogy az *$f(x_1, ..., x_n)$ függvény rendszáma* $k (0 \leqq k \leqq n)$, ha a valódi változóinak a száma k.

1.8. DEFINÍCIÓ. Az $f(x_1, ..., x_n)$ függvény nem valódi változóit *fiktív változóknak* nevezzük. Két függvény ekvivalens, ha az egyiket a másokból fiktív változóknak a hozzáadásával, illetve elvételével meg lehet kapni.

A továbbiakban az $f(x_1, ..., x_n)$ függvény megadásával az f-fel ekvivalens függvényeket is adottaknak tekintjük.

Legyen $\mathfrak{N}$ az $\mathfrak{M}$ zárt osztály tetszőleges véges bázisa. $k(\mathfrak{N})$-nel jelöljük az $\mathfrak{N}$-ben levő függvények rendszámának a maximumát.

1.9. DEFINÍCIÓ. Az *$\mathfrak{M}$ véges bázisú zárt osztály rendszáma:* $k(\mathfrak{M}) = \min_{\mathfrak{N}} k(\mathfrak{N})$ természetes szám; $\mathfrak{N}$ véges bázisa az $\mathfrak{M}$-nek.

1.10. DEFINÍCIÓ. Az $f^*(x_1, ..., x_n) = \bar{f}(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_n)$ függvényt az *$f(x_1, ..., x_n)$ függvény duálisának* nevezzük. Az f függvény *önduális,* ha $f(x_1, ..., x_n) = f^*(x_1, ..., x_n)$.

1.11. DEFINÍCIÓ. Azt mondjuk, hogy az *$f(x_1, ..., x_n)$ függvény monoton,* ha tetszőleges $\tilde{\alpha} \leqq \tilde{\beta}$ $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ kombináció párra $f(\tilde{\alpha}) \leqq f(\tilde{\beta})$ $(\tilde{\alpha} \leqq \tilde{\beta}$, ha $\alpha_i \leqq \beta_i$ $(1 \leqq i \leqq n))$.

1.12. DEFINÍCIÓ. Azt mondjuk, hogy az $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ függvény

a) α függvény, ha $f(x, x, ..., x) = x$;

b) β függvény, ha $f(x, x, ..., x) = 1$;

c) γ függvény, ha $f(x, x, ..., x) = 0$;

d) δ függvény, ha $f(x, x, ..., x) = \bar{x}$.

1.13. DEFINÍCIÓ. Azt mondjuk, hogy az *$f(x_1, ..., x_n)$ függvény kielégíti az $\langle a^\mu \rangle (\langle A^\mu \rangle)$ feltételt,* $\mu \geqq 2$, ha tetszőleges μ darab $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, ..., \tilde{\alpha}_\mu$ értékkombinációra, amelyeken az f egyenlő 0-val (1-gyel), létezik olyan i, $1 \leqq i \leqq n$, hogy $\alpha_{1i} = \alpha_{2i} = ... = \alpha_{\mu i} = 0\ (=1)$. Azt mondjuk, hogy az *$f(x_1, ..., x_n)$ függvény kielégíti az $\langle a^\infty \rangle (\langle A^\infty \rangle)$ feltételt,* ha minden $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, ..., \tilde{\alpha}_t$ értékkombinációra, amelyeken az f egyenlő 0-val (1-gyel) létezik olyan $i (1 \leqq i \leqq n)$, hogy $\alpha_{1i} = \alpha_{2i} = ... = \alpha_{ti} = 0 (=1)$.

1.14. DEFINÍCIÓ. Azt mondjuk, hogy az *$f(x_1, x_2, ..., x_n)$ függvény lineáris,* ha létezik olyan c_i $(0 \leqq i \leqq n,\ c_i \in \{1, 0\})$, hogy $f(x_1, x_2, ..., x_n) = c_0 + c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_n x_n$, ahol az összeadás (mod 2) szerint történik.

2. A C_1-ben levő zárt osztályok definíciója, típusa, bázisa, rendszáma

Jelölés	Definíció	Típus	Bázis	Rend-szám
O_1	Mindazon függvények halmaza, amelyek x-szel egyenlők;	$\langle\alpha\rangle$	$\{x\}$	1
O_2	Mindazon függvények halmaza, amelyek 1-gyel egyenlők;	$\langle\beta\rangle$	$\{1\}$	0
O_3	Mindazon függvények halmaza, amelyek 0-val egyenlők;	$\langle\gamma\rangle$	$\{0\}$	0
O_4	Mindazon függvények halmaza amelyek egyenlők x-szel, ill. $\bar{x}$-sal;	$\langle\alpha, \delta\rangle$	$\{\bar{x}\}$	1
O_5	Mindazon függvények halmaza amelyek egyenlők 1-gyel, ill. x-szel;	$\langle\alpha, \beta\rangle$	$\{x, 1\}$	1
O_6	Mindazon függvények halmaza, amelyek egyenlők 0-val, ill. x-szel;	$\langle\alpha, \gamma\rangle$	$\{0, x\}$	1
O_7	Mindazon függvények halmaza, amelyek egyenlők 0-val, ill. 1-gyel;	$\langle\beta, \gamma\rangle$	$\{0, 1\}$	0
O_8	Mindazon függvények halmaza, amelyek egyenlők 0-val, 1-gyel, x-szel;	$\langle\alpha, \beta, \gamma\rangle$	$\{x, 0, 1\}$	1
O_9	Mindazon függvények halmaza, amelyek egyenlők 0-val, 1-gyel, x-szel, ill. $\bar{x}$-sal;	$\langle\alpha, \beta, \gamma, \delta\rangle$	$\{\bar{x}, 0\}$	1
S_1	Logikai összeg függvények halmaza;	$\langle\alpha\rangle$	$\{x \vee y\}$	2
S_3	S_1-beli, ill. O_2-beli függvények halmaza;	$\langle\alpha, \beta\rangle$	$\{x \vee y, 1\}$	2
S_5	S_1-beli, ill. O_3-beli függvények halmaza;	$\langle\alpha, \gamma\rangle$	$\{x \vee y, 0\}$	2
S_6	S_1-beli, O_2-beli, ill. O_3-beli függvények halmaza;	$\langle\alpha, \beta, \gamma\rangle$	$\{x \vee y, 0, 1\}$	2
P_1	Logikai szorzat függvényének halmaza;	$\langle\alpha\rangle$	$\{xy\}$	2
P_3	P_1-beli, ill. O_3-beli függvények halmaza;	$\langle\alpha, \gamma\rangle$	$\{xy, 0\}$	2
P_5	P_1-beli, ill. O_2-beli függvények halmaza;	$\langle\alpha, \beta\rangle$	$\{xy, 1\}$	2
P_6	P_1-beli, O_2-beli, ill. O_3-beli függvények halmaza;	$\langle\alpha, \beta, \gamma\rangle$	$\{xy, 0, 1\}$	2
L_1	Lineáris függvények halmaza;	$\langle\alpha, \beta, \gamma, \delta\rangle$	$\{x+y, 1\}$	2
L_2	Lineáris α és β függvények halmaza;	$\langle\alpha, \beta\rangle$	$\{x+y+1\}$	2
L_3	Lineáris α és γ függvények halmaza;	$\langle\alpha, \gamma\rangle$	$\{x+y\}$	2
L_4	Lineáris α függvények halmaza;	$\langle\alpha\rangle$	$\{x+y+z\}$	3
L_5	Lineáris, önduális függvények halmaza;	$\langle\alpha, \delta\rangle$	$\{x+y+z+1\}$	3
D_1	Önduális α függvények halmaza;	$\langle\alpha\rangle$	$\{xy \vee x\bar{z} \vee y\bar{z}\}$	3
D_2	Önduális monoton függvények halmaza;	$\langle\alpha\rangle$	$\{xy \vee xz \vee yz\}$	3
D_3	Önduális függvények halmaza;	$\langle\alpha, \delta\rangle$	$\{x\bar{y} \vee x\bar{z} \vee \bar{y}\bar{z}\}$	3
A_1	Monoton függvények halmaza;	$\langle\alpha, \beta, \gamma\rangle$	$\{xy, x \vee y, 0, 1\}$	2
A_2	Monoton α és β függvények halmaza;	$\langle\alpha, \beta\rangle$	$\{xy, x \vee y, 1\}$	2
A_3	Monoton α és γ függvények halmaza;	$\langle\alpha, \gamma\rangle$	$\{xy, x \vee y, 0\}$	2
A_4	Monoton α függvények halmaza;	$\langle\alpha\rangle$	$\{xy, x \vee y\}$	2
C_1	Kétértékű függvények halmaza;	$\langle\alpha, \beta, \gamma, \delta\rangle$	$\{x \mid y\}$	2
C_2	α és β függvények halmaza	$\langle\alpha, \beta\rangle$	$\{x \vee y, x+y+1\}$	2
C_3	α és γ függvények halmaza;	$\langle\alpha, \gamma\rangle$	$\{xy, x+y\}$	2
C_4	α függvények halmaza;	$\langle\alpha\rangle$	$\{x \vee y, x(y+z+1)\}$	3
F_1^μ $(\mu \geqq 2)$	Mindazon α függvények halmaza. amelyek kielégítik az $\langle a^\mu\rangle$ feltételt;	$\langle\alpha\rangle$	$\{x \vee y\bar{z}, h_\mu^*(\tilde{x})\}$	$\mu+1$
F_2^μ $(\mu \geqq 2)$	Mindazon monoton α függvények halmaza, amelyek kielégítik az $\langle a^\mu\rangle$ feltételt;	$\langle\alpha\rangle$	$\{x \vee yz, h_2^*(\tilde{x})\}$, ha $\mu=2$, $\{h_\mu^*(\tilde{x})\}$, ha $\mu \geqq 3$	$\mu+1$
F_3^μ $(\mu \geqq 2)$	Mindazon monoton függvények halmaza, amelyek kielégítik az $\langle a^\mu\rangle$ feltételt;	$\langle\alpha, \beta\rangle$	$\{1, h_\mu^*(\tilde{x})\}$	$\mu+1$

Jelölés	Definíció	Típus	Bázis	Rendszám
F_4^μ $(\mu\geqq 2)$	Mindazon függvények halmaza, amelyek kielégítik az $\langle a^\mu\rangle$ feltételt;	$\langle\alpha, \beta\rangle$	$\{x\vee\bar{y}, h_\mu^*(\tilde{x})\}$	$\mu+1$
F_5^μ $(\mu\geqq 2)$	Mindazon α függvények halmaza, amelyek az $\langle A^\mu\rangle$ feltételt kielégítik;	$\langle\alpha\rangle$	$\{x(y\vee\bar{z}), h_\mu(\tilde{x})\}$	$\mu+1$
F_6^μ $(\mu\geqq 2)$	Mindazon monoton α függvények halmaza, amelyek az $\langle A^\mu\rangle$ feltételt kielégítik;	$\langle\alpha\rangle$	$\{x(y\vee z), h_2(\tilde{x})\}$, ha $\mu=2$, $\{h_\mu(\tilde{x})\}$, ha $\mu\geqq 3$;	$\mu+1$
F_7^μ $(\mu\geqq 2)$	Mindazon monoton függvények halmaza, amelyek kielégítik az $\langle A^\mu\rangle$ feltételt;	$\langle\alpha, \gamma\rangle$	$\{0, h_\mu(\tilde{x})\}$	$\mu+1$
F_8^μ $(\mu\geqq 2)$	Mindazon függvények halmaza, amelyek kielégítik az $\langle A^\mu\rangle$ feltételt;	$\langle\alpha, \gamma\rangle$	$\{x\bar{y}, h_\mu(\tilde{x})\}$	$\mu+1$
F_1^∞	Mindazon α függvények halmaza, amelyek kielégítik az $\langle a^\infty\rangle$ feltételt;	$\langle\alpha\rangle$	$\{x\vee y\bar{z}\}$	3
F_2^∞	Mindazon monoton α függvények halmaza, amelyek kielégítik az $\langle a^\infty\rangle$ feltételt;	$\langle\alpha\rangle$	$\{x\vee yz\}$	3
F_3^∞	Mindazon monoton függvények halmaza, amelyek kielégítik az $\langle a^\infty\rangle$ feltételt;	$\langle\alpha, \beta\rangle$	$\{1, x\vee yz\}$	3
F_4^∞	Mindazon függvények halmaza, amelyek az $\langle a^\infty\rangle$ feltételt kielégítik;	$\langle\alpha, \beta\rangle$	$\{x\vee\bar{y}\}$	2
F_5^∞	Mindazon α függvények halmaza, amelyek az $\langle A^\infty\rangle$ feltételt kielégítik;	$\langle\alpha\rangle$	$\{x(y\vee\bar{z})\}$	3
F_6^∞	Mindazon monoton α függvények halmaza, emelyek az $\langle A^\infty\rangle$ feltételt kielégítik;	$\langle\alpha\rangle$	$\{x(y\vee z)\}$	3
F_7^∞	Mindazon monoton függvények halmaza, amelyek az $\langle A^\infty\rangle$ feltételt kielégítik;	$\langle\alpha, \gamma\rangle$	$\{0, x(y\vee z)\}$	3
F_8^∞	Mindazon függvények halmaza, amelyek az $\langle A^\infty\rangle$ feltételt kielégítik;	$\langle\alpha, \gamma\rangle$	$\{x\bar{y}\}$	2

A $h_\mu^*(x_1, \ldots, x_\mu, x_{\mu+1})$ függvény duális a $h_\mu(x_1, \ldots, x_{\mu+1})=\bigvee_{i=1}^{\mu+1} x_1 \ldots x_{i-1}x_{i+1} \ldots x_{\mu+1}$ függvényhez.

3. Az O_i, P_i, S_i és az L_i osztályok diagramjai

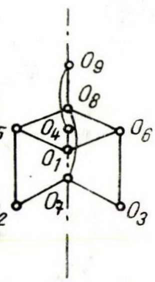
A dolgozat 3. része 4 pontból áll. Az a) pontban az összes 0 és 1 rendszámú zárt osztály diagramját szerkesztjük meg. A b) pontban a logikai összegeket vizsgáljuk. A c) pontban a b) pont duális osztályait tanulmányozzuk. Végül a d) pontban a lineáris zárt osztályok egymás közti kapcsolatait vizsgáljuk meg.

A továbbiakban osztály alatt mindig zárt osztályt értünk.

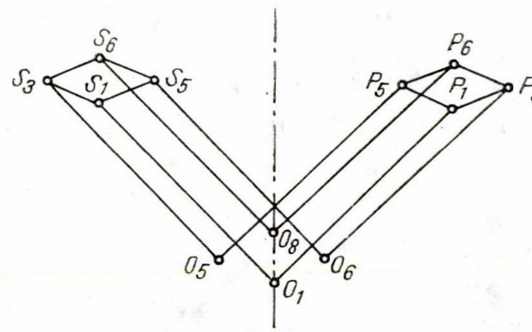
a) *A* 0 *és* 1-*es rendszámú osztályok*

Az előző részben definiált osztályok között megtalálható az O_i $(1\leqq i\leqq 9)$ osztályok meghatározása. Nyilvánvaló, hogy ezzel ki is merítettük az 1-es és a 0 rendszámú osztályok halmazát. Továbbá az is könnyen belátható, hogy az 1. ábra az O_i

osztályok egymás közötti kapcsolatát fejezi ki. Az 1. ábrán — és a továbbiakban mindig — pontokkal jelöljük a zárt osztályokat. Ha két pont egy szakasszal van összekötve, az azt jelenti, hogy köztük nincs zárt osztály — esetleg olyan függvényhalmaz lehet csak, amely nem zárt. Ha egy pont feljebb van, mint a másik, és szakasszal össze is vannak kötve, az azt jelenti, hogy a feljebb levő pontnak megfelelő osztály tartalmazza a lejjebb levő pontnak megfelelő osztályt. Pontosabban, a lejjebb levő osztály majdnem teljes a közvetlenül felette levő osztályban.



1. ábra



2. ábra

b) *A logikai összeget, valamint az O_2-t, illetve az O_3-at tartalmazó osztályok*

Nyilvánvaló, hogy az S_1, $S_3=[S_1 \vee O_2]$, $S_5=[S_1 \vee O_3]$ és az $S_6=[S_1 \vee O_2 \vee O_3]$ osztályokon kívül nincs más ilyen tulajdonságú osztály, mert az S_6 tetszőleges többváltozós függvénye (függvényhalmaza, amely tartalmaz legalább egy többváltozós függvényt) az S_i $(i=1, 3, 5, 6)$ osztályok valamelyikét generálja. Ha az S_i osztályok tetszőleges részhalmaza csak egyváltozós függvényeket, illetve konstansokat tartalmaz, akkor az az O_j $(1 \leqq j \leqq 8)$ osztályok valamelyikével lesz egyenlő.

c) *A logikai szorzatot, valamint az O_2-t, illetve az O_3-at tartalmazó osztályok*

Az ebben a pontban szereplő osztályok duálisak a b) pontban szereplőkhöz. A b) és a c) pontban szereplő osztályok közötti kapcsolatot a 2. ábra fejezi ki.

d) *A lineáris osztályok vizsgálata*

Először is azt lássuk be, hogy az $L_1=[\{x+y+1, 0\}]$ és az $L_2=[\{x+y+1\}]$ $(L_3=[\{x+y\}])$ osztályok között nincs más $\mathfrak{M}$ zárt osztály. Ha volna, az csak $\langle\alpha, \beta, \gamma, \delta\rangle$, illetve $\langle\alpha, \beta, \gamma\rangle$ típusú lehetne, mivel $L_1 \supset \mathfrak{M} \supset L_2 (L_1 \supset \mathfrak{M} \supset L_3)$. Ez azt jelentené, hogy az $\mathfrak{M}$ tartalmazza a 0-t (1-et). Mivel az $\mathfrak{M}$ tartalmazza az $x+y+1$ $(x+y)$ bázis függvényt is, úgy az $\{x+y+1, 0\} \subset \mathfrak{M}$ (ha $g(x, y)=x+y$, akkor $g(g(x, y), 1)=x+y+1$, $1+1=0$; $\{x+y+1, 0\} \subset \mathfrak{M}$). Az $\{x+y+1, 0\}$ függvényhalmaz pedig az L_1 bázisa, vagyis $[\mathfrak{M}]=L_1$.

Ugyanúgy azt is be lehet látni, hogy az L_1 és az L_5 között nincs egyetlen egy $\mathfrak{M}$ zárt osztály sem. Ha volna, az az L_1 és L_5 osztályok definíciója szerint csak $\langle\alpha, \beta, \gamma, \delta\rangle$ típusú lehetne. Tehát a 0-t tartalmazná. A $\{0, x+y+z+1\}$ függvényhalmaz az L_1 bázisa, ahol $x+y+z+1 \in L_5$.

$L_4=[\{x+y+z\}]$ a lineáris α függvények halmaza. Az L_4 minden többváltozós függvénye generálja az L_4 osztályt, mivel minden L_4-beli függvényt fel lehet a következő módon írni: $\sum_{i=1}^{2k+1} x_i$, $k=0,1,2,\ldots$.

Lássuk be, hogy minden L lineáris többváltozós zárt osztálynak az L_4-et tartalmaznia kell. Valóban, ha az L osztály tartalmaz többváltozós lineáris β, γ, illetve δ függvényt, akkor rendre fel lehet ezeket a következő módon írni: $f_1(x_1, x_2, \ldots, x_{2k})=$ $=\sum_{i=1}^{2k} x_i+1, f_2=(x_1, x_2, \ldots, x_{2k})=\sum_{i=1}^{2k} x_i$, illetve $f_3(x_1, x_2, \ldots, x_{2k+1})=\sum_{i=1}^{2k+1} x_i+1$. Ezekből a függvényekből és az $f(x)=x$ függvényből mindig megkaphatunk egy f_1', f_2', f_3' többváltozós lineáris α függvényt, amely az L_4-et generálja, ahol

$$f_1'(x_1, x_2, \ldots, x_{4k-1}) = f_1(f_1(x_1, x_2, \ldots, x_{2k}), x_{2k+1}, x_{2k+2}, \ldots, x_{2k+2k-1}) = \\ = \sum_{i=1}^{4k-1} x_i+1+1 = \sum_{i=1}^{4k-1} x_i,$$

$$f_2'(x_1, x_2, \ldots, x_{4k-1}) = f_3(f_3(x_1, x_2, \ldots, x_{2k}), x_{2k+1}, x_{2k+2}, \ldots, x_{2k+2k-1}) = \\ = \sum_{i=1}^{4k-1} x_i,$$

$$f_3'(x_1, x_2, \ldots, x_{4k+1}) = f_3(f_3(x_1, x_2, \ldots, x_{2k+1}), x_{2k+2}, x_{2k+2k+1}) = \\ = \sum_{i=1}^{4k+1} x_i+1+1 = \sum_{i=1}^{4k+1} x_i.$$

Mutassuk még meg, hogy az az L többváltozós lineáris osztály, amely az L_4-et tartalmazza, az L_i $(1 \leqq i \leqq 5)$ osztályok valamelyikével azonos. Minden L_4-nél bővebb L osztály $\langle\alpha, \beta\rangle$, $\langle\alpha, \gamma\rangle$, $\langle\alpha, \delta\rangle$, $\langle\alpha, \beta, \gamma\rangle$ vagy pedig $\langle\alpha, \beta, \gamma, \delta\rangle$ típusú, és az $x+y+z$ függvényt tartalmazza. A következő esetek lehetségesek:

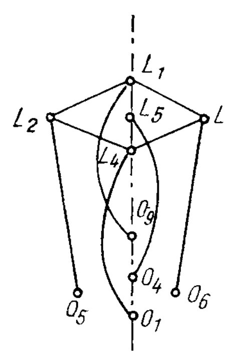
(i) $L \ni 1$. Mivel $\{x+y+z, 1\}$ generálja a L_2-t, úgy $L=L_1$ vagy $L=L_2$.

(ii) $L \ni 0$. Mivel $\{x+y+z, 0\}$ generálja a L_3-at, úgy $L=L_1$ vagy $L=L_3$.

(iii) $L \ni \bar{x}$. Mivel $\{x+y+z, \bar{x}\}$ generálja az L_5-t, úgy $L=L_1$ vagy $L=L_5$.

Tehát bebizonyítottuk, hogy az L_i $(1 \leqq i \leqq 5)$ osztályokon kívül más többváltozós lineáris osztály nincs.

A 3. ábrán felépítjük a lineáris többváltozós osztályok kapcsolatát, valamint a hozzájuk kapcsolódó egyváltozós lineáris osztályokat is.



3. ábra

4. A $\langle\beta\rangle$, $\langle\gamma\rangle$, $\langle\beta, \gamma\rangle$, $\langle\alpha, \beta, \gamma\rangle$ és az $\langle\alpha, \beta, \gamma, \delta\rangle$ típusú osztályok

a) *A $\langle\beta\rangle$, $\langle\gamma\rangle$ és a $\langle\beta, \gamma\rangle$ típusú osztályok*

A 10.1. és a 10.2. lemmából következik, hogy a $\langle\beta\rangle$, $\langle\gamma\rangle$ és a $\langle\beta, \gamma\rangle$ típusú osztályok csak konstansokat tartalmazhatnak. Ezért ezek rendre az O_2, O_3 és az O_7 osztályok

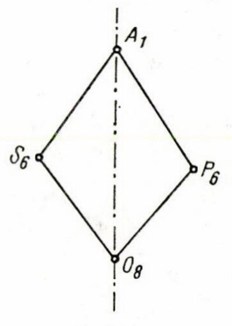
b) *Az $\langle\alpha, \beta, \gamma\rangle$ típusú osztályok*

Az $\langle\alpha, \beta, \gamma\rangle$ típusú $\mathfrak{M}$ osztályok az $O_8=[\{x, 1, 0\}]$ osztályt tartalmazzák és az $\mathfrak{M}$ monoton. Valóban, ha $\mathfrak{M}$ tartalmaz nem monoton függvényt, úgy az O_8 segítségével az $\bar{x}$ függvényt elő tudnánk állítani (lásd 10.5. lemma), vagyis az $\mathfrak{M}$ tartalmazna δ függvényt is.

Nyilvánvaló, hogy az S_6 és a P_6 osztályok is $\langle\alpha, \beta, \gamma\rangle$ típusúak. A 3. rész b) és c) pontjából következik, hogy az S_6, O_8, valamint a P_6, O_8 osztályok között nincs zárt osztály.

A 10.6. (10.7) lemmából következik, hogy tetszőleges $\mathfrak{M}$ monoton osztály, amely a P_6-ot (S_6-ot) tartalmazza, annál bővebb is, akkor az $x \vee y$-t (xy-t) is tartalmazza, vagyis $[\mathfrak{M}]=[\{xy, x \vee y, 0, 1\}]=A_1$.

A 4. ábra szemlélteti az $\langle\alpha, \beta, \gamma\rangle$ típusú osztályok kapcsolatát.



4. ábra

5. ábra

c) *Az $\langle\alpha, \beta, \gamma, \delta\rangle$ típusú osztályok*

Minden $\langle\alpha, \beta, \gamma, \delta\rangle$ típusú osztály tartalmazza a $\{0, 1, x, \bar{x}\}=[\{0, \bar{x}\}]=O_9$ osztályt. Az L_1 lineáris függvények halmaza is $\langle\alpha, \beta, \gamma, \delta\rangle$ típusú. A 3. rész d) pontjából következik, hogy az L_1 és az O_9 között nincs zárt osztály. Könnyű belátni, hogy az L_1 és C_1 között sincs. Valóban, ha $C_1 \supset \mathfrak{M} \supset L_1$, akkor az f-ből ($f \bar{\in} L_1$) az O_9 segítségével az xy függvényt megkapjuk (lásd 10.8. lemma) és $[L_1 \vee \{xy\}]=C_1$

Az 5. ábra szemlélteti az $\langle\alpha, \beta, \gamma, \delta\rangle$ típusú osztályok kapcsolatát.

5. Az $\langle\alpha\rangle$ típusú osztályok vizsgálata

Először is vizsgáljuk meg azokat az $\langle\alpha\rangle$ típusú osztályokat, amelyek az xy és az $x \vee y$ függvényeket tartalmazzák. Könnyű belátni, hogy az A_4 és C_4 osztályokon kívül nincs más ilyen tulajdonságú osztály (lásd 10.9 lemma).

Ha az $\langle\alpha\rangle$ típusú $\mathfrak{M}$ osztály nem azonos az A_4, illetve C_4 osztályokkal, akkor $\mathfrak{M}$ az alábbi tulajdonságok egyikét kielégíti:

a) az $\mathfrak{M}$ önduális;
b) az $\mathfrak{M}$ kielégíti az $\langle A^2\rangle$ feltételt;
c) az $\mathfrak{M}$ kielégíti az $\langle a^2\rangle$ feltételt.

Valóban, ha $\mathfrak{M}$ mindhárom tulajdonságnak nem tesz eleget, akkor $\mathfrak{M} \supset \{xy, x \vee y\}$ (lásd 10.10. lemma).

a) *Az $\mathfrak{M}$ $\langle\alpha\rangle$ típusú osztály önduális*

Ebben az esetben vizsgáljuk meg a következő aleseteket:

(i) $\mathfrak{M}$ tartalmaz nem monoton függvényt. Ekkor a 10.11. lemmából következik, hogy a D_1 és az L_4 osztályokon kívül nincs több ilyen tulajdonságú zárt osztály. Mutassuk meg, hogy a D_1 osztály majdnem teljes a C_4-ben. A 10.13. lemmából következik, hogy az $\mathfrak{M}$ osztály ($D_1 \subset \mathfrak{M} \subset C_4$) tartalmaz $x \vee y$, illetve xy függvényt. Ez azt jelenti, hogy az $x \vee y$, illetve xy függvényt a D_1 bázis függvényével az xy, illetve $x \vee y$ adja. Valóban

$$xy \vee x(\overline{xy}) \vee y(\overline{xy}) = x \vee y,$$

$$xy \vee x(\overline{x \vee y}) \vee y(\overline{x \vee y}) = xy.$$

Ebből és a 10.9. lemmából adódik, hogy a D_1 osztály majdnem teljes a C_4-ben. A 10.12. lemmából következik, hogy L_4 majdnem teljes a D_1-ben.

(ii) $\mathfrak{M}$ csak monoton függvényeket tartalmaz. Ekkor a 10.14. lemmából következik, hogy az O_1, D_2 osztályokon kívül nincs más több ilyen tulajdonságú osztály.

A 10.11. lemmából következik, hogy D_2 majdnem teljes a D_1-ben. A 3. rész d) pontjából következik, hogy O_1 és L_4 között nincs zárt osztály.

Ezzel az önduális $\mathfrak{M}$ $\langle\alpha\rangle$ osztályokat megvizsgáltuk. A köztük levő kapcsolatot a 6. ábra fejezi ki.

b) *Az $\mathfrak{M}$ $\langle\alpha\rangle$ típusú osztály kielégíti az $\langle A^2\rangle$ feltételt*

(i) Az $\mathfrak{M}$ tartalmaz nem monoton függvényt. Az $F_5^\infty = [\{x(y \vee \bar{z})\}]$ mindazon α függvények halmaza, amely kielégíti az $\langle A^\infty\rangle$ feltételt. Az $F_5^\mu = [\{x(y \vee \bar{z}), h_\mu(\tilde{x})\}]$ mindazon α függvények halmaza, amelyek kielégítik az $\langle A^\mu\rangle$ feltételt. Mutassuk meg, hogy az F_5^∞ és az $F_5^\mu (\mu \geqq 2)$ osztályokon kívül nincs más olyan $\langle A^2\rangle$-t kielégítő $\mathfrak{M}$ $\langle\alpha\rangle$ osztály, amely tartalmaz nem önduális és nem monoton függvényt. Ez a tény közvetlenül adódik a 10.15. és 10.16. lemmából.

(ii) Az $\mathfrak{M}$ osztály csak monoton függvényeket tartalmaz. Az $F_6^\infty = [\{x(y \vee z)\}]$ mindazon monoton α függvények halmaza, amelyek kielégítik az $\langle A^\infty\rangle$ feltételt. Az $F_6^2 = [\{x(y \vee z), h_2(\tilde{x})\}]$, $F_6^\mu = [\{h_\mu(\tilde{x})\}]$ $(\mu \geqq 3)$ mindazon monoton α függvények halmaza, amelyek kielégítik az $\langle A^\mu\rangle$ feltételt. A 10.16. és 10.17. lemmából következik, hogy nem létezik más olyan $\langle A^\mu\rangle$-t kielégítő monoton osztály, amely tartalmaz nem önduális függvényt és a P_1 osztálytól különbözik. Könnyű belátni, hogy

$$F_5^2 \supset F_5^3 \supset \ldots \supset F_5^\mu \supset \ldots \supset F_5^\infty$$

és

$$F_6^2 \supset F_6^3 \supset \ldots \supset F_6^\mu \supset \ldots \supset F_6^\infty,$$

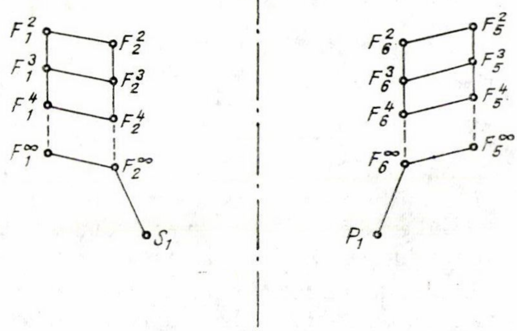
mivel, ha az $\mathfrak{M}$ osztály kielégíti az $\langle A^\mu\rangle$ feltételt, úgy kielégíti az $\langle A^{\mu_1}\rangle$ feltételt is, ahol $2 \leqq \mu_1 \leqq \mu$. Nyilvánvaló, hogy a láncokban szereplő zárt osztályok között nem létezik más osztály. A 10.15, 10.16 és 10.17 lemmából következik, hogy $F_5^\infty \supset F_6^\infty$, $F_5^\mu \supset F_6^\mu$, továbbá, hogy az F_5^∞, F_6^∞ és az F_5^μ, F_6^μ között nem létezik más osztály.

c) *Az $\mathfrak{M}$ $\langle\alpha\rangle$ típusú osztály kielégíti az $\langle a^2\rangle$ feltételt*

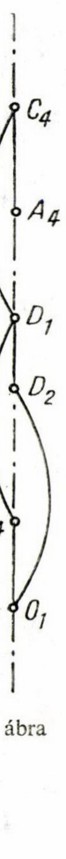
Az F_5^∞, F_5^μ, F_6^∞ és F_6^μ osztályok duális osztályai rendre az F_1^∞, F_1^μ, F_2^∞ és F_2^μ osztályok. Ezeknek az osztályoknak egymáshoz való kapcsolatát a 7. ábra illusztrálja. A 8. ábrán az összes $\langle\alpha\rangle$ osztály egymás közötti kapcsolatát ábrázoljuk. Nyilvánvaló, hogy a 8. ábra megszerkesztéséhez elegendő megvizsgálni, hogy a 6. ábra milyen osztályai majdnem teljesek a 7. ábra jobb (bal) osztályaiban; a 7. ábra milyen jobb (bal) oldali osztályai majdnem teljesek a 6. ábra osztályaiban.

(i) Könnyű belátni, hogy a 6. ábra osztályai közül az $\langle A^2 \rangle$ ($\langle a^2 \rangle$) feltételt csak a D_2 és az O_1 osztály elégíti ki. Korábban már megmutattuk, hogy az O_1 majdnem teljes a P_1-ben (S_1-ben). Mivel a $D_2=[\{xy \vee xz \vee yz\}]$ benne van az $F_6^2=[\{xy \vee xz \vee yz, x(y \vee z)\}]$ ($F_2^2=[\{(x \vee yz), h_2^*(\tilde{x})\}]$) osztályban és nincs benne az $F_6^3=[\{h_3(\tilde{x})\}]$ ($F_2^3=[\{h_3^*(\tilde{x})\}]$) osztályban, így a D_2 majdnem teljes az F_6^2-ban (F_2^2-ben).

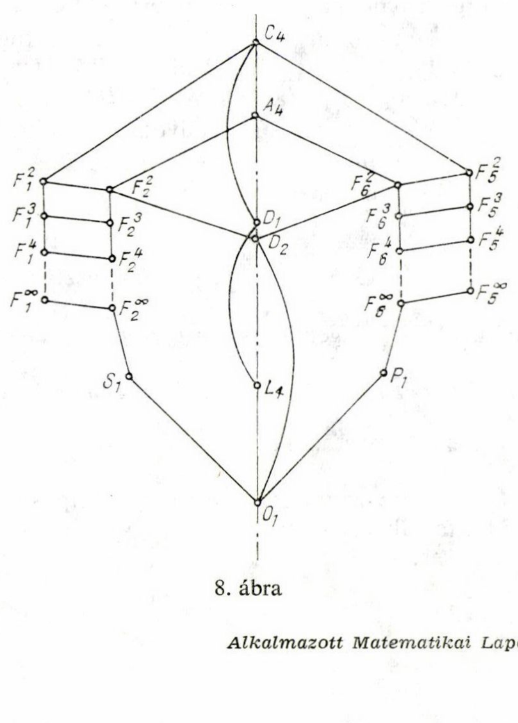
(ii) Világos, hogy a 7. ábra osztályai nem lehetnek majdnem teljesek a 6. ábra önduális osztályaiban. Vizsgáljuk meg, az A_4 és C_4 osztályokat. Az A_4, C_4, F_5^2 (F_1^2), $F_2^6(F_2^2)$ osztályok definíciójából következik, hogy $C_4 \supset F_5^2$ ($C_4 \supset F_1^2$) és



7. ábra



6. ábra



8. ábra

$A_4 \subset F_6^2$ $(A_4 \subset F_2^2)$. Az $F_5^2(F_1^2)$, C_4 és az $F_6^2(F_2^2)$, A_4 osztályok között nincs más osztály, mivel a C_4, illetve az A_4 osztály ugyanannak a tulajdonságnak tesz eleget, mint az $F_5^2(F_1^2)$, illetve $F_6^2(F_2^2)$ osztályok, csak az A_4, illetve C_4 osztály az „$\langle A^1 \rangle$” („$\langle a^1 \rangle$”) feltételt elégíti ki, míg az F_5^2 (F_1^2), ill. F_6^2 (F_2^2) osztályok az $\langle A^2 \rangle$ ($\langle a^2 \rangle$) feltételt is kielégítik.

6. Az $\langle \beta, \delta \rangle$ típusú osztályok vizsgálata

A 10.18. lemmából következik, hogy minden $\langle \alpha, \delta \rangle$ típusú osztály önduális. Vegyük észre azt az egyszerű tényt, hogy minden önduális osztály előállítható egy $\langle \alpha \rangle$ típusú $\mathfrak{M}$ osztály és az $\overline{\mathfrak{M}}$ $\langle \delta \rangle$ típusú osztály összegeként. Dolgozatunk 5. részéből tudjuk, hogy az $\langle \alpha \rangle$ típusú önduális osztályok a következők: O_1, D_2, L_4 és D_1.

Határozzuk meg a B_1 függvényhalmazt úgy, hogy $B_1 = \{f : f \in O_1$ vagy $\bar{f} \in O_1\}$. Világos, hogy $B_1 = O_4$.

Határozzuk meg a B_2 függvényhalmazt úgy, hogy $B_2 = \{f : f \in D_2$ vagy $\bar{f} \in D_2\}$. Mutassuk meg, hogy B_2 nem zárt osztály, vagyis $B_2 \neq [B_2]$. Legyen

$$D_2 = [\{xy \vee xz \vee yz\}] = [\{h(x, y, z)\}],$$

az önduális monoton függvények halmaza. Könnyű belátni, hogy $x+y+z \bar{\in} D_2$ és $\overline{x+y+z} \bar{\in} D_2$, mivel $x+y+z$ és $\overline{x+y+z}$ nem monoton önduális függvények. Következésképpen az $x+y+z$ önduális függvény nem tartozik a B_2 függvényhalmazhoz. Másrészt viszont $h(x, y, z) \in D_2(B_2)$ és $h(x, y, z) \in B_2$. Ebből adódik, hogy a $\overline{h(x, x, x)} = \bar{x}$ és a $h(x, \bar{y}, \bar{z})$ függvények hozzátartoznak a B_2-höz. Dolgozatunk 2. részéből tudjuk, hogy $D_3 = [\{h(x, \bar{y}, \bar{z})\}]$ az önduális függvények halmaza, vagyis $x+y+z$ önduális függvény hozzátartozik a D_3, illetve $[B_2]$ osztályhoz. Ez azt jelenti, hogy a B_2 függvényhalmaz nem egyenlő a $[B_2]$ osztállyal.

Határozzuk meg a B_3, illetve B_4 függvényhalmazokat úgy, hogy $B_3 = \{f : f \in L_4$ vagy $\bar{f} \in L_4\}$, illetve $B_4 = \{f : f \in D_1$ vagy $\bar{f} \in D_1\}$. Könnyű belátni, hogy $B_3 = L_5$, illetve $B_4 = D_3$.

Az $\langle \alpha, \delta \rangle$ típusú osztályokat a 9. ábra illusztrálja.

9. ábra

Azt, hogy L_5 a D_3-ban, illetve O_4 az L_5-ben majdnem teljes, az előzőekben már beláttuk.

7. Az $\langle \alpha, \beta \rangle$ és $\langle \alpha, \gamma \rangle$ típusú osztályok vizsgálata

A dualitás miatt elegendő csak az $\langle \alpha, \beta \rangle$ osztályokat megvizsgálni.

a) *Az* $\langle a^2 \rangle$ *feltételt nem kielégítő* $\langle \alpha, \beta \rangle$ *osztályok*

Először nézzük meg azokat az $\langle \alpha, \beta \rangle$ osztályokat, amelyek az $\langle a^2 \rangle$ feltételt nem elégítik ki. Az $A_2 = [\{xy, x \vee y, 1\}]$ és a $C_2 = [\{xy, x+y+1\}]$ osztályok $\langle \alpha, \beta \rangle$ típusúak.

A 10.19. lemma szerint minden $\mathfrak{M}$ $\langle \alpha, \beta \rangle$ típusú osztály, amely az $\langle a^2 \rangle$ feltételt nem elégíti ki, tartalmazza vagy az xy, vagy pedig az $x+y+1$ függvényt. Vizsgáljuk meg ezt a két esetet:

(i) $\mathfrak{M} \ni xy$.

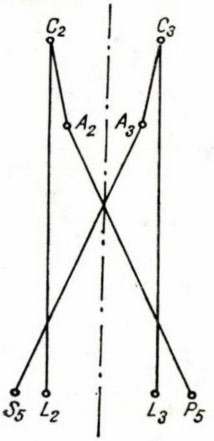
Ha $\mathfrak{M}$ tartalmaz nem monton függvényt, akkor a 10.20. lemma szerint $\mathfrak{M}=C_2$. Ha $\mathfrak{M}$ monoton és tartalmaz az 1-től és a logikai szorzattól különböző függvényt. Akkor a 10.6. lemma szerint $\mathfrak{M}$ tartalmazza az $x \vee y$ függvényt és $\mathfrak{M}=A_2$. Ha $\mathfrak{M}$ csak a logikai szorzat függvényt, valamint 1-et tartalmaz, akkor $\mathfrak{M}=P_5$.

(ii) $\mathfrak{M} \ni x+y+1$.

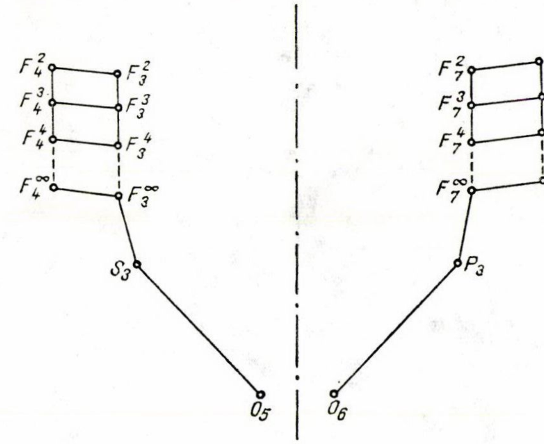
Ha $\mathfrak{M}$ tartalmaz nem lineáris függvényt, akkor a 10.20. lemma szerint $\mathfrak{M}=C_2$. Ha $\mathfrak{M}$ lineáris osztály, akkor mivel csak egy lineáris α és β osztály van, amely több változós függvényeket is tartalmaz, úgy $\mathfrak{M}=L_2$.

A 10.20. lemmából következik, hogy A_2 majdnem teljes az L_2-ben, a 10.6. lemmából pedig, hogy P_5 az A_2-ben majdnem teljes.

Az L_2, C_2, A_2, P_5 osztály duálisa rendre az L_3, C_3, A_3, S_5 osztályok. Ezek egymáshoz való kapcsolatát a 10. ábra illusztrálja.



10. ábra



11. ábra

b) *Az $\langle A^2 \rangle$ feltételt kielégítő $\langle \alpha, \beta \rangle$ osztályok*

(i) $\mathfrak{M}$ tartalmaz nem monoton függvényt. $F_8^\infty=[\{x\bar{y}\}]$ az A^∞-t kielégítő függvények halmaza. $F_8^\mu=[\{x\bar{y},\ h_\mu(\tilde{x})\}]$ az A^μ-t kielégítő függvények halmaza.

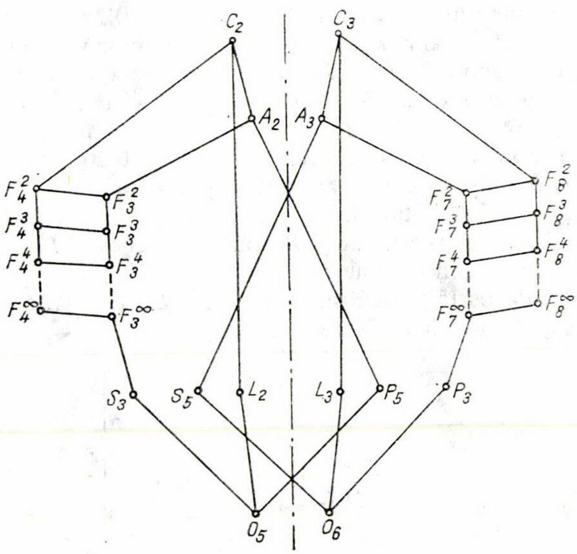
Mutassuk meg, hogy nincs több olyan $\langle A^2 \rangle$-t kielégítő $\mathfrak{M}$ $\langle \alpha, \gamma \rangle$ osztály, amely tartalmaz nem monoton függvényt. Ha létezne más ilyen $\mathfrak{M}$ osztály is, akkor a 10.21. lemma szerint $\mathfrak{M} \supset F_8^\infty$. A 10.16. lemma szerint pedig, ha $\mathfrak{M} \neq F_8^\infty$, akkor $\mathfrak{M}=F_8^\mu$.

(ii) Az $\mathfrak{M}$ monoton osztály. $F_7^\infty=[\{0,\ x(y \vee z)\}]$ az $\langle A^\infty \rangle$-t kielégítő monoton függvények halmaza. $F_7^\mu=[\{0,\ h_\mu(\tilde{x})\}]$ az $\langle A^\mu \rangle$-t kielégítő monoton függvények halmaza.

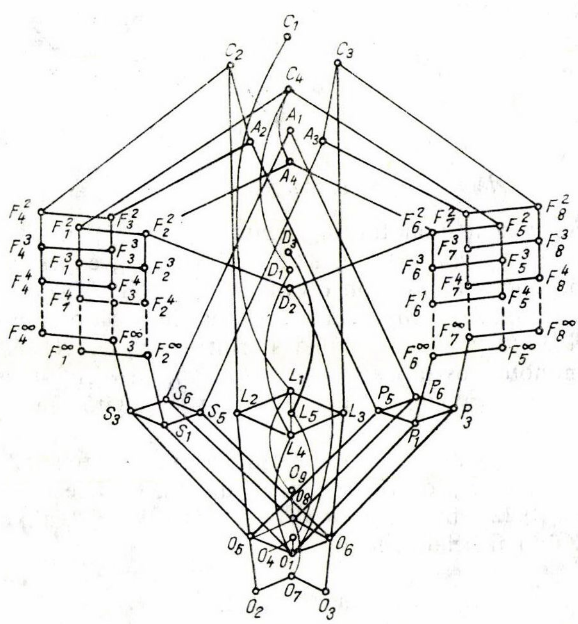
Mutassuk meg, hogy nincs több olyan monoton $\langle A^2 \rangle$ feltételt kielégítő osztály, amely az F_7^μ, F_7^∞, O_6 és P_3-tól különbözik. Valóban, ha létezne ilyen tulajdonságú $\mathfrak{M}$ osztály, akkor a 10.22. lemma szerint $\mathfrak{M} \supseteqq F_7^\infty$. Ha $\mathfrak{M} \neq F_7^\infty$, akkor a 10.16. lemma szerint $\mathfrak{M}=F_7^\mu$. Könnyű belátni, hogy

$$F_8^2 \supset F_8^3 \supset \ldots \supset F_8^\mu \supset \ldots \supset F_8^\infty,$$

$$F_7^2 \supset F_7^3 \supset \ldots \supset F_7^\mu \supset \ldots \supset F_7^\infty,$$



12. ábra



13. ábra

és ezek a láncok más zárt osztályt nem tartalmaznak. Nyilvánvaló, hogy $P_3 \subset F_7^\infty$, $F_7^\infty \subset F_8^\infty$ és $F_7^\mu \subset F_8^\mu$.

Ezekből az egyenlőtlenségekből, és a 10.16., 10.21., 10.22. lemmákból következik, hogy P_3 az F_7^∞-ben, F_7^∞ az F_7^μ-ban és F_7^μ az F_8^∞-ban majdnem teljes.

Az F_8^μ, F_8^∞, F_7^μ, F_7^∞, P_3 osztályok duálisa rendre az F_4^μ, F_4^∞, F_3^μ, F_3^∞, S_3 osztályok, amelyek $\langle \alpha, \beta \rangle$ típusúak és kielégítik az $\langle a^2 \rangle$ feltételt.

A 11. ábra az F_3^μ, F_4^μ, F_7^μ, F_8^μ, F_3^∞, F_4^∞, F_7^∞, F_8^∞, O_5, O_6, S_3, P_3 osztályok egymás közötti kapcsolatát illusztrálja.

Az összes $\langle \alpha, \beta \rangle$, illetve $\langle \alpha, \gamma \rangle$ osztály egymás közötti kapcsolatát — amely nem más, mint a 10. és 11. ábra megfelelő összekapcsolása — a 12. ábra illusztrálja. Az eddig tárgyalt osztályok egymás közötti kapcsolatát a 13. ábra illusztrálja.

8. A különböző típusú osztályok összekapcsolása

Az előző részben megvizsgáltuk, hogy az azonos típusú osztályok hogyan kapcsolódnak egymáshoz. Dolgozatunk jelen részében a különböző típusú osztályokat kapcsoljuk egymáshoz. Valójában az $\langle \alpha \rangle$, $\langle \alpha, \beta \rangle$, $\langle \alpha, \gamma \rangle$, $\langle \alpha, \delta \rangle$, $\langle \alpha, \beta, \gamma \rangle$, $\langle \alpha, \beta, \gamma, \delta \rangle$ típusú osztályok egymás közötti kapcsolatát kell megvizsgálni.

a) *Az $\langle \alpha \rangle$ típusú osztályok*

Legyen $\mathfrak{M}$ tetszőleges $\langle \alpha \rangle$ osztály. Ha $\mathfrak{M}$ benne van egy $\mathfrak{M}'$ nem $\langle \alpha \rangle$ típusú osztályban, akkor létezik egy $\mathfrak{M}''(\mathfrak{M}'' \subset \mathfrak{M}')$ osztály, amely tartalmazza az $\mathfrak{M}$-t és $\langle \alpha, \beta \rangle$, $\langle \alpha, \gamma \rangle$, illetve $\langle \alpha, \delta \rangle$ típusú. Valóban, ha $\mathfrak{M}'$-ben van β, γ, illetve δ függvény, akkor $\mathfrak{M}'' = [\mathfrak{M} \cup \{1\}] \subseteq \mathfrak{M}'$ $\mathfrak{M}'' = [\{\mathfrak{M} \cup \{0\}] \subseteq \mathfrak{M}'$, illetve, ha $\mathfrak{M}'$-ben nincs sem β, sem pedig γ függvény, akkor $\mathfrak{M}'' = [\mathfrak{M} \cup \{\bar{x}\}] \subseteq \mathfrak{M}'$.

Könnyű belátni, hogy ha az $\mathfrak{M}_1$ és $\mathfrak{M}_2$ osztályok nem tartalmazzák a $g(x)$ függvényt $(g(x) \in \{0, 1, \bar{x}\}$ és $\mathfrak{M}_1 \subset \mathfrak{M}_2$, $\mathfrak{M}_1 \neq \mathfrak{M}_2$, $[\mathfrak{M}_1 \cup \{g(x)\}] = \mathfrak{N} = [\{\mathfrak{M}_2 \cup g(x)\}]$, akkor $\mathfrak{M}_1$ nem lehet majdnem teljes az $\mathfrak{N}$-ben.

Ebből adódik, hogy a következő eljárást kell alkalmazni: venni kell az összes $[\mathfrak{M} \cup \{g(x)\} = \mathfrak{N}$ osztályt, ahol $\mathfrak{M}$ tetszőleges $\langle \alpha \rangle$ osztály; $g(x)$ pedig a 0, 1, illetve $\bar{x}$ függvények egyike. Ezek közül az $\mathfrak{N}$ osztályok közül ki kell választani az $\langle \alpha, \beta \rangle$, $\langle \alpha, \gamma \rangle$, illetve $\langle \alpha, \beta \rangle$ típusúakat, majd az összes $\langle \alpha \rangle$ típusú $\mathfrak{M}$ osztály közül ki kell választani a maximálist, ahol $\mathfrak{N} = [\mathfrak{M} \cup \{g(x)\}]$, $g(x) \in \{0, 1, \bar{x}\}$ és $\mathfrak{N}$ egy rögzített osztály.

(i) Először is $\langle \alpha \rangle$ osztályokhoz vegyük hozzá az 1 konstans függvényt. Dolgozatunk 2. részét felhasználva, a következő eredményeket kapjuk:

$$[C_4 \cup \{1\}] = C_2, \quad [L_4 \cup \{1\}] = L_2,$$
$$[D_1 \cup \{1\}] = C_2, \quad [P_1 \cup \{1\}] = P_5,$$
$$[F_5^\infty \cup \{1\}] = C_2, \quad [S_1 \cup \{1\}] = S_3,$$
$$[F_5^\mu \cup \{1\}] = C_2, \quad [O_1 \cup \{1\}] = O_5,$$
$$[A_4 \cup \{1\}] = A_2, \quad [F_1^\infty \cup \{1\}] = F_4^\infty,$$
$$[F_6^\infty \cup \{1\}] = A_2, \quad [F_1^\mu \cup \{1\}] = F_4^\mu,$$

$$[F_6^\mu \cup \{1\}] = A_2, \quad [F_2^\infty \cup \{1\}] = F_3^\infty,$$
$$[D_2 \cup \{1\}] = F_3^2, \quad [F_2^\mu \cup \{1\}] = F_3^\mu,$$
$$F_6^\infty \subset \ldots \subset F_6^\mu \subset \ldots \subset F_6^3 \subset F_6^2 \subset A_4,$$
$$F_5^\infty \subset \ldots \subset F_5^\mu \subset \ldots \subset F_5^3 \subset F_5^2 \subset C_4,$$
$$D_1 \subset C_4, \quad D_2 \subset F_2^2.$$

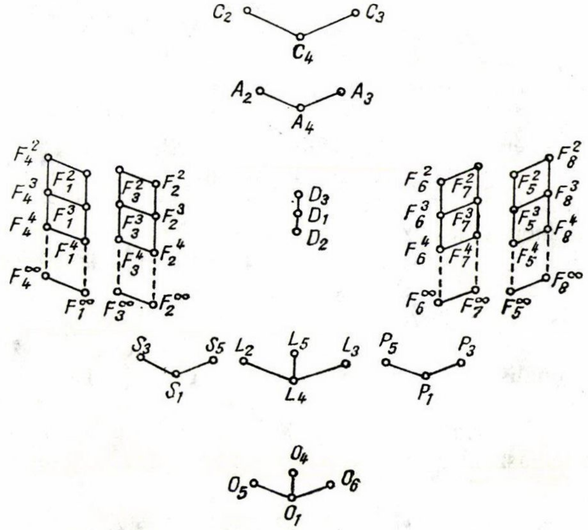
Ezekből az egyenlőségekből, illetve egyenlőtlenségekből közvetlenül adódik, hogy C_4 a C_2-ben, A_4 az A_2-ben, L_4 az L_2-ben, P_1 a P_5-ben, S_1 az S_3-ban, O_1 az O_5-ben, F_1^∞ az F_4^∞-ben, F_1^μ az F_4^μ-ben, F_2^∞ az F_3^∞-ben és F_2^μ az F_3^μ-ben majdnem teljes.

(ii) Az (i) pontban szereplő osztályok duálisát vizsgáljuk meg. A dualitásból közvetlenül adódik, hogy a C_4 a C_3-ban, A_4 az A_3-ban, L_4 az L_3-ban, S_1 az S_5-ben, P_1 a P_3-ban, O_1 az O_6-ban, F_5^∞ az F_2^∞-ben, F_5^μ az F_8^μ-ben, F_6^∞ az F_7^∞-ben és F_6^μ az F_7^μ-ben majdnem teljes.

(iii) Az $\langle\alpha, \delta\rangle$ típusú osztályok vizsgálatánál a 10.18 lemmából kifolyólag csak az önduális $\langle\alpha\rangle$ osztályok jönnek számításba.

A $[D_1 \cup \{\bar{x}\}] = D_3$, $[L_4 \cup \{\bar{x}\}] = L_5$, $[O_1 \cup \{\bar{x}\}] = O_4$, $[D_2 \cup \{\bar{x}\}] = D_3$ egyenlőségekből adódik, hogy a D_1 a D_3-ban, L_4 az L_5-ben és O_1 az O_4-ben majdnem teljes.

A 14. ábra az $\langle\alpha\rangle$ osztályok az $\langle\alpha, \beta\rangle$, $\langle\alpha, \gamma\rangle$, $\langle\alpha, \delta\rangle$ osztályokkal való közvetlen kapcsolatát illusztrálja.



14. ábra

b) *Az $\langle\alpha, \beta\rangle$ és $\langle\alpha, \gamma\rangle$ típusú osztályok*

Nyilvánvaló, hogy a dualitás miatt elegendő csak az $\langle\alpha, \beta\rangle$ típusú osztályokat megvizsgálni.

Könnyen belátható, hogy a következő eljárást kell alkalmazni: venni kell az összes $[\mathfrak{M} \cup \{0\}] = \mathfrak{N}$ osztályt, ahol $\mathfrak{M}$ tetszőleges $\langle\alpha, \beta\rangle$ osztály. Minden egyes így kapott rögzített $\mathfrak{N}$ osztályra ki kell az $\mathfrak{M}$-ek közül a maximálisat választani. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$[C_2 \cup \{0\}] = C_1, \quad [F_3^\mu \cup \{0\}] = A_1,$$
$$[F_4^\infty \cup \{0\}] = C_1, \quad [L_2 \cup \{0\}] = L_1,$$
$$[F_4^\mu \cup \{0\}] = C_1, \quad [P_5 \cup \{0\}] = P_6,$$
$$[A_2 \cup \{0\}] = A_1, \quad [S_3 \cup \{0\}] = S_6,$$
$$[F_3^\infty \cup \{0\}] = A_1, \quad [O_5 \cup \{0\}] = O_8,$$
$$F_3^\infty \subset \ldots \subset F_3^\mu \subset \ldots \subset F_3^3 \subset F_3^2 \subset A_2,$$
$$F_4^\infty \subset \ldots \subset F_4^\mu \subset \ldots \subset F_4^3 \subset F_4^2 \subset C_2.$$

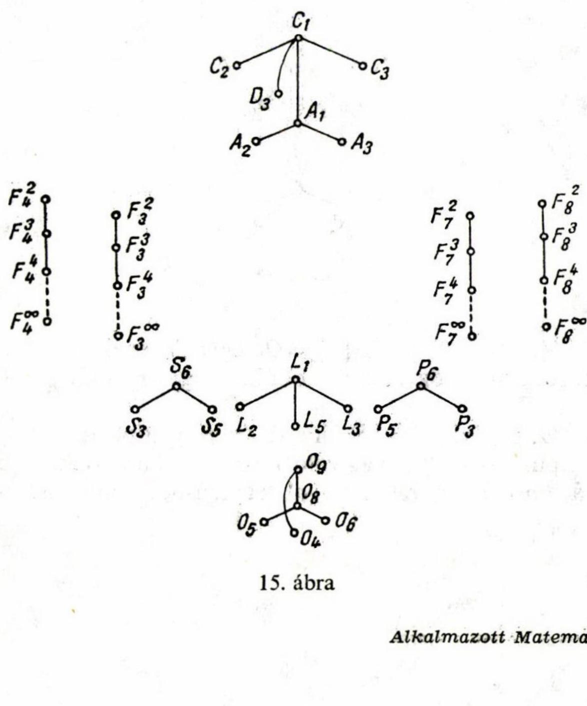
Ezekből az egyenlőségekből, illetve egyenlőtlenségekből közvetlenül adódik, hogy C_2 a C_1-ben, A_2 az A_1-ben, L_2 az L_1-ben, P_5 a P_6-ban, S_3 az S_6-ban és O_5 az O_8-ban majdnem teljes osztály.

Az előbb megvizsgált $\langle\alpha, \beta\rangle$ típusú osztályok $\langle\alpha, \gamma\rangle$ típusú duális osztályaira közvetlenül adódik, hogy C_3 a C_1-ben, A_3 az A_1-ben, L_3 az L_1-ben, S_5 az S_6-ban, P_3 a P_6-ban és O_6 az O_8-ban majdnem teljes.

c) *Az $\langle\alpha, \delta\rangle$ típusú osztályok*

Nyilvánvaló, hogy ha egy $\mathfrak{M}$ $\langle\alpha, \delta\rangle$ osztályt egy $\mathfrak{M}'$ nem $\langle\alpha, \delta\rangle$ típusú osztály tartalmaz, akkor $\mathfrak{M}'$ $\langle\alpha, \beta, \gamma, \delta\rangle$ típusú.

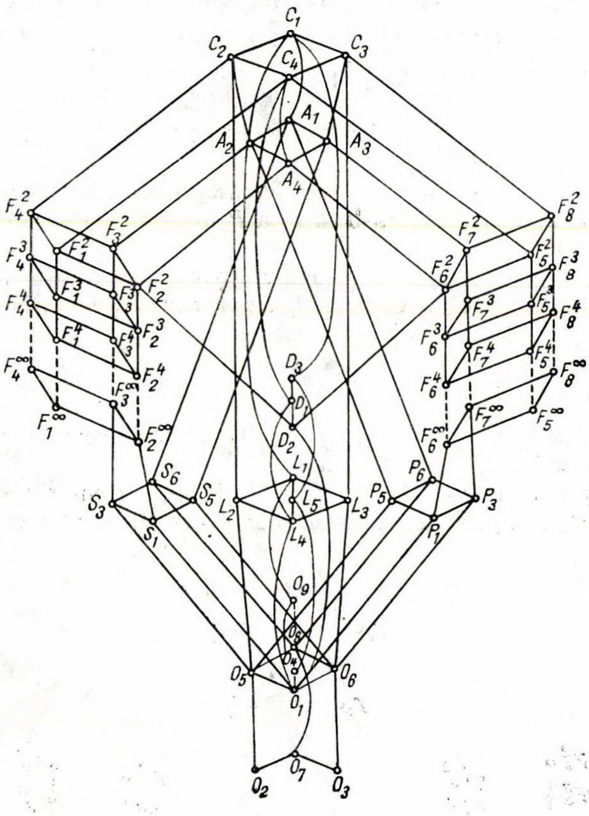
A $[D_3 \cup \{1\}] = C_1$, $[L_5 \cup \{1\}] = L_1$, $[O_4 \cup \{1\}] = O_9$ egyenlőségekből közvetlenül adódik, hogy a D_3 a C_1-ben, az L_5 az L_1-ben és az O_4 az O_9-ben majdnem teljes.



15. ábra

d) *Az $\langle\alpha, \beta, \gamma\rangle$ típusú osztályok*

Könnyű belátni, hogy ha az $\langle\alpha, \beta, \gamma\rangle$ típusú osztályok kapcsolatát akarjuk az $\langle\alpha, \beta, \gamma, \delta\rangle$ típusú osztályokkal megvizsgálni, akkor venni kell az összes $[\mathfrak{M} \cup \{\bar{x}\}]$ $\mathfrak{N}$ osztályt, ahol $\mathfrak{M}$ tetszőleges $\langle\alpha, \beta, \gamma\rangle$ osztály. Minden egyes így kapott rögzített $\mathfrak{N}$ osztályra ki kell az $\mathfrak{M}$-ek közül választani a maximálisat. Az $[A_1 \cup \{\bar{x}\}] = C_1$,



16. ábra

$[S_6 \cup \{\bar{x}\}] = C_1$, $[P_6 \cup \{\bar{x}\}] = C_1$ és $[O_8 \cup \{\bar{x}\}] = O_9$ egyenlőségekből, valamint a $P_6 \subset A_1$, $S_6 \subset A_1$ egyenlőtlenségekből közvetlenül adódik, hogy A_1 a C_1-ben és O_8 az O_9-ben majdnem teljes.

A 15. ábra az $\langle\alpha, \beta\rangle$, $\langle\alpha, \gamma\rangle$, $\langle\alpha, \delta\rangle$, illetve $\langle\alpha, \beta, \gamma\rangle$ típusú osztályok az $\langle\alpha, \beta, \gamma\rangle$, illetve $\langle\alpha, \beta, \gamma, \delta\rangle$ típusú osztályokkal való közvetlen kapcsolatát ábrázolja.

A 16. ábra a *Post-féle zárt osztályok* egymáshoz való viszonyát illusztrálja.

9. Post tételei

Ebben a részben megfogalmazunk egy sor tételt, amelyeket POST bizonyított be. Ezeknek a tételeknek a bizonyítása közvetlenül adódik az eddig elmondottakból, ill. a POST diagramjából.

9.1. TÉTEL. A kétértékű logikában az O_i $(1 \leqq i \leqq 9)$, $P_1, P_3, P_5, P_6, S_1, S_3, S_5, S_6, L_1, L_2, L_3, L_4, L_5, D_1, D_2, D_3, A_1, A_2, A_3, A_4$, C_1, C_2, C_3, C_4, F_j^∞ $(1 \leqq j \leqq 8)$, F_j^μ $(\mu \geqq 2,\ 1 \leqq j \leqq 8)$ osztályok kimerítik az összes lehetséges zárt osztályok halmazát.

9.1. KÖVETKEZMÉNY. A kétértékű logikában levő zárt osztályok halmaza megszámlálható számosságú.

9.2. TÉTEL. A kétértékű logikában minden zárt osztálynak véges bázisa van.

9.3. TÉTEL. A kétértékű logikában van

a) három zárt osztály, amelyeknek a rendszáma 0: O_2, O_3, O_7;
b) hat zárt osztály, amelyeknek a rendszáma 1: $O_1, O_4, O_5, O_6, O_8, O_9$;
c) húsz zárt osztály, amelyeknek a rendszáma 2: $P_1, P_3, P_5, P_6, S_1, S_3, S_5, S_6, L_1, L_2, L_3, A_1, A_2, A_3, A_4, C_1, C_2, C_3, F_4^\infty, F_8^\infty$;
d) húsz zárt osztály, amelyeknek a rendszáma 3: $C_4, L_4, L_5, D_1, D_2, D_3$,

$$F_1^\infty, F_2^\infty, F_3^\infty, F_5^\infty, F_6^\infty, F_7^\infty, F_i^2 \quad (1 \leqq i \leqq 8);$$

e) minden μ-re $(\mu \geqq 4)$ nyolc zárt osztály, amelyeknek a rendszáma μ: $F_i^{\mu-1}$ $(1 \leqq i \leqq 8)$.

9.4. TÉTEL. Ha $\mathfrak{M}_1$ és $\mathfrak{M}_2$ a kétértékű logika két olyan zárt osztálya, hogy $\mathfrak{M}_1 \neq \emptyset$, $\mathfrak{M}_1 \subset \mathfrak{M}_2$ és $\mathfrak{M}_1 \neq \mathfrak{M}_2$, akkor $\mathfrak{M}_1$-et ki lehet bővíteni az $\mathfrak{M}_2$-ben majdnem teljes osztállyá.

9.5. TÉTEL. A kétértékű logika minden zárt osztályában legfeljebb csak öt majdnem teljes osztály lehet.

9.1. *Megjegyzés. Post-diagramjából* közvetlenül adódik, hogy a C_1-ben csak öt majdnem teljes osztály van, az O_1, O_2 és az O_3 osztályokban pedig nincs majdnem teljes osztály.

Legyen $\mathfrak{M}$ a kétértékű logika tetszőleges zárt osztálya. $\mathfrak{M} \supseteq \mathfrak{N}$-re igaz a következő tétel.

9.6. TÉTEL. $\mathfrak{N}$ osztály akkor és csak akkor teljes az $\mathfrak{M}$-ben, ha az $\mathfrak{N}$ nincs benne az $\mathfrak{M}$ egyetlen majdnem teljes osztályában sem.

Bizonyítás:

Szükségesség. A feltétel szükségessége nyilvánvaló, mert ha $\mathfrak{N}$ benne van az $\mathfrak{M}$ valamelyik majdnem teljes osztályában, akkor $[\mathfrak{N}] \neq \mathfrak{M}$.

Elégségesség. Ha $\mathfrak{N}$ nem teljes az $\mathfrak{M}$-ben, akkor $[\mathfrak{N}] \neq \mathfrak{M}$. Az pedig azt jelenti, hogy az $\mathfrak{N}$ osztályt ki lehet bővíteni az $\mathfrak{M}$-ben majdnem teljes osztályáig. Ez pedig ellentmond annak a ténynek, hogy az $\mathfrak{N}$ nincs benne az $\mathfrak{M}$ egyetlen majdnem teljes osztályában sem.

9.2. KÖVETKEZMÉNY. Tetszőleges $\mathfrak{N}$ osztályból, amely az $\mathfrak{M}$-ben teljes, ki lehet választani egy nem több mint öt függvényből álló függvényhalmazt, amely az $\mathfrak{M}$-ben teljes.

9.7. TÉTEL. Tetszőleges $\mathfrak{N}$ osztályból, amely az $\mathfrak{M}$-ben teljes, ki lehet választani egy legfeljebb négy függvényből álló függvényhalmazt, amely az $\mathfrak{M}$-ben teljes.

Bizonyítás. Ha $\mathfrak{M}=C_1$, akkor az állítás közvetlenül adódik a 9.5. és 9.6. tétellekből, ill. a 9.1. megjegyzésből. Legyen $\mathfrak{M}\neq C_1$. A 9.2. következményből adódik, hogy az $\mathfrak{M}$-ből ki lehet választani egy legfeljebb öt függvényből álló $\mathfrak{N}$ függvényhalmazt, amely az $\mathfrak{M}$-ben teljes.

A következő esetek lehetségesek:

a) $\mathfrak{N}$ tartalmaz $\beta(\gamma)$ függvényt. Jelöljük ezt a függvényt f_1-gyel. Világos, hogy $f_1 \bar{\in} [\{C_3 \cup D_3\}]$ $(f_1 \bar{\in} [\{C_2 \cup D_3\}])$. A 9.6. tételből következik, hogy az $\mathfrak{N}$ osztály tartalmaz f_2, f_3 és f_4 függvényeket, amelyek rendre nem tartoznak a C_2 (C_3), A_1 és L_1 majdnem teljes osztályokba. Ezért $\mathfrak{N}$ teljes az $\mathfrak{M}$-ben.

b) $\mathfrak{N}$ nem tartalmaz sem β, sem pedig γ függvényt. Akkor $\mathfrak{N}$ tartalmaz δ függvényt. Különben $\mathfrak{N}\subseteq C_4$. Jelöljük ezt a δ függvényt f_1-gyel. A 9.6. tételből következik, hogy az $\mathfrak{N}$ osztály tartalmaz f_2, f_3 és f_4 függvényeket, amelyek rendre nem önduálisak, nem monotonok és nem lineárisak. A 10.12. lemmából következik, hogy az f_1 és f_2 függvényekből fel lehet építeni a konstans függvényeket. Következésképpen f_1, f_2, f_3, f_4 nincs benne sem a C_2-ben, sem pedig a C_3-ban. A 9.6. tételből következik, hogy az f_1, f_2, f_3, f_4 függvényhalmaz teljes a C_1-ben.

9.3. KÖVETKEZMÉNY. A kétértékű logika tetszőleges zárt osztályának a bázisa legfeljebb négy függvényből áll.

Ezt az eredményt javítani már nem lehet. Ez következik például abból a tényből, hogy a $\{0, 1, x\vee y, xy\}$ a C_1 osztály bázisa.

10. A dolgozatban szereplő lemmák ismertetése

Ebben a részben bizonyítás nélkül ismertetjük azokat a lemmákat, amelyeket a dolgozatban közvetlenül, illetve közvetve felhasználtunk. A lemmák bizonyítása a [12, 6] dolgozatokban megtalálható.

Dolgozatunk 2. részében definiáltunk 49 zárt osztályt. Azt állítjuk, hogy a definiált osztályok bázisa és típusa nem más, mint amit a 2. részben a megfelelő rovatokba beírtunk.

10.1. LEMMA. Az olyan $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ β függvényből, amely nem azonosan egyenlő 1-gyel, az x, az 1 függvények, valamint a szuperpozíció segítségével a $g(x)\equiv x$ függvény előállítható.

10.2. LEMMA. Ha $\Phi(x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1m_1}, x_{21}, x_{22}, \dots, x_{nm_n})=f(f_1(x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1m_1}), f_2(x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2m_2}), \dots, f_n(x_{n1}, x_{n2}, \dots, x_{nm_n}))$, akkor $\Phi^*(x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1m_1}, x_{21}, x_{22}, \dots, x_{nm_n})=f^*(f_1^*(x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1m_1}), f_2^*(x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2m_2}), \dots, f_n^*(x_{n1}, x_{n2}, \dots, x_{nm_n}))$, ahol a $\Phi^*, f_1^*, f_2^*, \dots, f_n^*$ függvények a $\Phi, f_1, f_2, \dots, f_n$ függvények duálisai.

10.3. LEMMA. Ha $\mathfrak{M}$ zárt osztály, akkor az $\mathfrak{M}^*$ — az $\mathfrak{M}$ osztály duálisa — szintén zárt osztály.

10.4. LEMMA. Ha $\mathfrak{M}=[\{f_1,f_2,...,f_n,...\}]$, akkor $\mathfrak{M}^*=[\{f_1^*,f_2^*,...,f_n^*,...\}]$.

10.5. LEMMA. Az $f(x_1,...,x_n)$ nem monoton függvényből a 0, 1 és az x függvények segítségével az $\bar{x}$ függvényt megkapjuk.

10.6. LEMMA. Az $f(x_1,x_2,...,x_n)$ monoton függvényből, amely nem egyenlő $x_1x_2...x_n$-nel, 0-val, 1-gyel, a 0, 1 és az x függvények segítségével az $x\vee y$ függvény előállítható.

10.7. LEMMA. Az $f(x_1,x_2,...,x_n)$ monoton függvényből, amely nem egyenlő $x_1\vee x_2\vee...\vee x_n$-nel, 0-val, 1-gyel a 0, 1 és az x függvények segítségével az xy függvény előállítható.

10.8. LEMMA. Az $f(x_1,...,x_n)$ nemlineáris függvényből a 0, 1, x, $\bar{x}$ függvények segítségével az xy előállítható.

10.9. LEMMA. Tetszőleges $\{xy, x\vee y, f(x_1,x_2,...,x_n)\}$ α függvényhalmaz teljes a C_4-ben, ahol $f(x_1,...,x_n)$ nem monoton α függvény.

10.10. LEMMA. Ha az $\langle\alpha\rangle$ típusú $\mathfrak{M}$ osztály tartalmaz:

a) nem önduális függvényt;

b) függvényt, amely nem elégíti ki az $\langle a^2\rangle$ feltételt;

c) függvényt, amely nem elégíti ki az $\langle A^2\rangle$ feltételt,

akkor $\mathfrak{M}\supset\{xy, x\vee y\}$.

10.11. LEMMA. Ha az $\langle\alpha\rangle$ típusú önduális $\mathfrak{M}$ osztály tartalmaz nem monoton függvényt, akkor $\mathfrak{M}=L_4$ vagy $\mathfrak{M}=D_1$.

10.12. LEMMA. Az L_4 osztály majdnem teljes a D_1 osztályban.

10.13. LEMMA. Ha az $\langle\alpha\rangle$ típusú $\mathfrak{M}$ osztály önduális, akkor az tartalmazza az xy, illetve $x\vee y$ függvényt.

10.14. LEMMA. Ha az önduális monoton $\mathfrak{M}$ osztály tartalmaz az x-től különböző függvényt, akkor $\mathfrak{M}\ni h(x,y,z)=xy\vee xz\vee yz$.

10.15. LEMMA. $\mathfrak{M}$ tetszőleges $\langle\alpha\rangle$ osztály, amely az $\langle A^2\rangle$ feltételt kielégíti. Ha $\mathfrak{M}$ tartalmaz nem monoton függvényt, akkor $\mathfrak{M}\subseteq F_5^\infty$.

10.16. LEMMA. Legyen $\mathfrak{M}$ tetszőleges osztály, amely az $\langle A^2\rangle$ feltételt kielégíti és az $\langle A^{\mu+1}\rangle$ feltételt nem elégíti ki. Ha $\mathfrak{M}$ tartalmaz nem önduális függvényt, akkor $\mathfrak{M}\ni h_\mu(x_1,...,x_{\mu+1})$, ahol $h_\mu(x_1,...,x_\mu,x_{\mu+1})=\bigvee_{i=1}^{\mu+1} x_1x_2...x_{i-1}x_{i+1}...x_{\mu+1}$.

10.17. LEMMA. $\mathfrak{M}$ tetszőleges monoton $\langle\alpha\rangle$ osztály, amely az $\langle A^2\rangle$ feltételt kielégíti. Ha $\mathfrak{M}$ tartalmaz nem önduális függvényt és az $x_1,x_2,...,x_n$-től külöböző függvényt is, akkor $\mathfrak{M}\supseteq F_6^\infty$.

10.18. LEMMA. Az $f(x_1,x_2,...,x_n)$ nem önduális függvényből az x és $\bar{x}$ függvények segítségével a 0 és az 1 függvény előállítható.

10.19. LEMMA. Ha az $\mathfrak{M}$ $\langle\alpha,\beta\rangle$ osztály nem elégíti ki az $\langle a^2\rangle$ feltételt, akkor tartalmazza vagy az xy, vagy pedig az $x+y+1$ függvényt.

10.20. LEMMA. Ha az $\mathfrak{M}$ $\langle\alpha, \beta\rangle$ osztály tartalmaz

a) nemlineáris függvényt,

b) függvényt, amely az $\langle a^2\rangle$ feltételt nem elégíti ki,

c) nem monoton függvényt, akkor $\mathfrak{M}=C_2$.

10.21. LEMMA. Legyen $\mathfrak{M}$ tetszőleges $\langle A^2\rangle$-t kielégítő $\langle\alpha, \gamma\rangle$ osztály. Ha $\mathfrak{M}$ tartalmaz monoton függvényt, akkor $\mathfrak{M}\supseteqq F_8^\infty$.

10.22. LEMMA. Legyen $\mathfrak{M}$ $\langle A^2\rangle$-t kielégítő monoton osztály. Ha $\mathfrak{M}$ tartalmaz a 0-tól és az $x_1x_2\ldots x_n$-től különböző függvényt, akkor $\mathfrak{M}\supseteqq F_7^\infty$.

IRODALOM

[1] BAGYINSZKI, J., „Az *m*-értékű logika függvényrendszereinek funkcionális teljessége" *KFKI-tanulmány* (1973).

[2] BOOLE, G., "An investigation of the laws of thought" (1851).

[3] DEMETROVICS, J., „A határérték logikák homomorfizmusairól" *Alk. Mat. Lapok* **1** (1974).

[4] PÁSZTOR—VARGA, K., "One some minimizing Algorithms of Boolean Functions" *Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae* **1—2** (1972).

[5] POST, E., "Introduction to a general theory of elementary propositions" *Amer. J. Math.* **43** (1921).

[6] POST, E., "Two-valued iterative systems of mathematical logic" (1941).

[7] QUINE, W. V., "A way to simplify truth functions" *Amer. Math. Monthly* **62** (1955).

[8] SHANNH, C. E., "A Symbolic Analysis of Delay and Switching circuits" *Trans AIEE* **57** (1938).

[9] Деметрович, Я., «О мощностях множеств предпольных классов в предельных логиках» *Acta Cybernetiba* **1** (1972) 4.

[10] Лупанов, О. Б., «О синтезе некоторых классов управляющих систем» *СБ. Проблемы кибернетики* **10** (1963).

[11] Яблонский, С. В., «Функциональные построения в к-значной логике» *Труды мат. ин-та им. В. А. Стеклова* **51** (1958).

[12] Яблонский, С. В., Гаврилов, Г. П., Кудравцев, В. Б., *Функции алгебры логики и классы Поста* (Наука, Москва, 1966.)

(Beérkezet: 1975. január 8.)

DEMETROVICS JÁNOS
MTA SZÁMÍTÁSTECHNIKAI ÉS AUTOMATIZÁLÁSI KUTATÓ INTÉZET
1502 BUDAPEST XI., KENDE U. 13—17.

СТРУКТУРА АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ

Я. Деметрович

Настоящая работа является обзорной работы по классам Поста по работам С. В. Яблонского, Г. П. Гаврилова, В. Б. Кудрявцева и Е. Поста. Здесь рассмотрывается структура замкнутых классов для алгебры логики и в конечном счёте построится диаграмма Поста.

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója
Műszaki szerkesztő: Agócs András
A kézirat nyomdába érkeztt: 1975. X. 21. Terjedelem: 23,1 (A/5) ív
75-4954 — Szegedi Nyomda — Felelős vezető: Dobó József

ÚTMUTATÁS A SZERZŐKNEK

Az Alkalmazott Matematikai Lapok csak magyar nyelvű dolgozatokat közöl. A kéziratok gépelését olyan formában kérjük, hogy minden gépelt oldal 25, egyenként átlag 50 betűhelyes sort tartalmazzon. A közlésre szánt dolgozatokat három példányban a felelős szerkesztő címére kell beküldeni:

Prékopa András, felelős szerkesztő, MTA SZTAKI
1502 Budapest XI., Kende u. 13—17.

A kéziratok szerkezeti felépítésének a következő követelményeket kell kielégíteni. A fejlécnek tartalmaznia kell a dolgozat címét, a szerző teljes nevét, valamint annak a városnak a nevét, ahol a szerző dolgozik. A fejléc után egy, képletet nem tartalmazó, legfeljebb 200 szóból álló kivonatot kell minden esetben megadni. A dolgozatot címmel ellátott szakaszokra kell bontani és az egyes szakaszokat arab sorszámmal kell ellátni. Az esetleges bevezetésnek mindig az első szakaszt kell alkotnia. Az irodalomjegyzék mindig az utolsó szakasz kell hogy legyen, és azt nem kell sorszámmal ellátni. Az irodalomjegyzék után, a kézirat befejezéseképpen fel kell tüntetni a szerző teljes nevét és a munkahelye (illetve lakása) pontos postai címét. A dolgozatban előforduló képleteket szakaszonként újrakezdődően, a képlet előtt két zárójel közé írt kettős számozással kell azonosítani. Természetesen nem szükséges minden képletet számozással ellátni. Az esetleges definíciókat és tételeket (segédtételeket és lemmákat) ugyancsak szakaszonként újrakezdődő, kettős számozással kell ellátni. Kérjük a szerzőket, hogy ezeket, valamint a tételek bizonyítását a szövegben kellő módon emeljék ki. Minden dolgozathoz csatolni kell egy angol, német, francia vagy orosz nyelvű, külön oldalra gépelt összefoglalót. Amennyiben lehetséges, kérjük a nyomtatás számára különösen nehézkes matematikai jelölések használatának az elkerülését.

A dolgozat ábráit és az esetleges lábjegyzeteket a dolgozat végén, különálló lapokon kérjük beküldeni. Mind az ábrákat, mind a lábjegyzeteket a dolgozat szakaszokra bontásától független, folytatólagos arab sorszámozással kell ellátni. Az ábrák elhelyezését a dolgozat megfelelő helyén, széljegyzetként feltüntetett, ábraazonosító sorszámokkal kell megadni. A lábjegyzetekre a dolgozaton belül az azonosító sorszám felső indexkénti használatával lehet hivatkozni.

Az irodalmi hivatkozások formája a következő. Minden hivatkozást fel kell sorolni a dolgozat végén található irodalomjegyzékben, a szerzők, illetve társszerzők esetén az első szerző neve szerinti alfabetikus sorrendben úgy, hogy külön, de folytatólagos sorszámozású listát alkossanak a latin és a cirill betűs nevű szerzők műveire vonatkozó hivatkozások, és mindkét részben a megfelelő alfabetikus sorrend legyen kialakítva. A folyóiratban megjelent cikkekre [1], a könyvekre [5], a kötetben megjelent dolgozatokra [4], a disszertációkra [3] és a gépi program leírásokra [2] a következő minta szerint kell hivatkozni:

[1] Farkas, J., „Über die Theorie der einfachen Ungelichungen", *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **124** (1902) 1—27.
[2] Kéri, G., „DUALSIMP", rutin a CDC 3300-as gépekre (Magyar Tudományos Akadémia Számítástechnikai és Automatizálási Kutató Intézete, CDC 3300 felhasználói ismertetők 2. 1973. május) 19—20.
[3] Prékopa, A., „Sztohasztikus rendszerek optimalizálási problémáiról", doktori értekezés. Magyar Tudományos Akadémia, Budapest, 1970.
[4] Prabhu, N. U., "Recent research on the ruin problem of collective risk theory", in: *Inventory Control and Water Storage* Ed. A. Prékopa (János Bolyai Mathematical Society and North-Holland Publishing Company, Amsterdam—London, 1973) 221—228.
[5] Zoutendijk, G., *Methods of Feasible Directions* (Elsevier Publishing Company, Amsterdam and New York, 1960).

A dolgozatok szövegében az irodalmi hivatkozás számait szögletes zárójelben kell megadni mint például [5] vagy [4, 76—78]. A szerzők a dolgozatukról 100 darab különlenyomatot kapnak ezek költsége — nyomott oldalanként 25 forint — a szerzői díjat terheli.

Ára: 50,— Ft

INDEX: 26498

TARTALOMJEGYZÉK

INDEX